UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica - IMECC
Departamento de Matemática

Sobre a Conjectura de Nakai

Dissertação de Mestrado

Paula Takatsuka

Orientador: **Prof. Dr. Paulo R. Brumatti**

Março de 2003
Campinas-SP

Sobre a Conjectura de Nakai

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Paula Takatsuka** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 10 de abril de 2003.

Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti
Orientador

Banca Examinadora
1 Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti
2 Prof. Dr. Daniel Levcovitz
3 Prof. Dr. Fernando Eduardo Torres Orihuela

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Takatsuka, Paula

T139s Sobre a conjectura de Nakai / Paula Takatsuka -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2003.

Orientador : Paulo Roberto Brumatti

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Operadores diferenciais. 2. Variedades algébricas. 3. Álgebra comutativa. I. Brumatti, Paulo Roberto. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 20 de março de 2003 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). PAULO ROBERTO BRUMATTI

Prof (a). Dr (a). FERNANDO EDUARDO TORRES ORIHUELA

Prof (a). Dr (a). DANIEL LEVCOVITZ

Agradecimentos

Agradeço:

primeiramente a Deus, por ter me conduzido à conclusão de mais uma etapa importante em minha vida;

ao Prof. Paulo R. Brumatti, meu orientador, pela grande dedicação e competência na condução desta pesquisa;

à FAPESP pela concessão da bolsa;

aos professores e à secretaria do IMECC, em especial o Prof. Plamen, por todo cuidado e atenção;

aos professores inesquecíveis de São Carlos;

à minha família, em especial minha mãe, minha tia Neusa, meus avós, minha irmã, meus tios de São Carlos e de Campinas, pela luta, força, exemplo, cuidado, admiração e carinho de vocês;

aos amigos de perto e de longe, especialmente minhas amigas Karine e Taís, por terem sido muito importantes para mim e pela grande amizade;

e principalmente ao Romário, que acompanhou de perto e com muito carinho toda esta jornada de dois anos, difícil para mim, me ajudando sempre em todos os sentidos a superar os diversos obstáculos a serem enfrentados e a realizar este trabalho, desde o início. Muito obrigada por ser meu par e pelas lições ímpares, matemáticas e de vida, que aprendi com você.

Obrigada a todos que de algum modo incentivaram e contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, introduzimos os conceitos básicos e fundamentais da álgebra comutativa e da geometria algébrica a fim de que se faça um estudo inicial e detalhado dos operadores diferenciais no contexto da Conjectura de Nakai. Apresentamos resultados a respeito da veracidade da conjectura para curvas planas, cones em espaço tridimensional e k-álgebras afins definidas por ideais monomiais, onde k é um corpo de característica zero. Por fim, usando o conceito de $\mathfrak{D}$-simplicidade, apresentamos uma prova simples, e independente da característica, da Conjectura de Nakai para curvas.

Abstract

In this work, we introduce some general concepts of commutative algebra and algebraic geometry to give an initial and careful treatment of differential operators on an affine algebraic variety in the context of Nakai's Conjecture. We present some results concerning the veracity of the conjecture for plane curves, cones in 3-space and affine k-algebras defined by monomial ideals where k is a field of characteristic zero. Finally, using the notion of $\mathfrak{D}$-simplicity, we present a simple characteristic-independent proof of Nakai's Conjecture for curves.

Sumário

Introdução

A *Conjectura de Nakai* aborda a questão bastante natural sobre o fato de operadores diferenciais detectarem singularidades em variedades algébricas. Em 1967, Grothendieck [2] provou que se o anel de coordenadas A de uma variedade algébrica afim definida sobre um corpo k de característica zero for regular, então o A-módulo dos operadores diferenciais de ordem superior de A sobre k é gerado como álgebra pelas derivações em A. Em 1970, Nakai [6] conjecturou se esta condição caracterizaria a regularidade do anel A, ou seja, se a recíproca do resultado de Grothendieck seria verdadeira.

Em 1973, Mount e Villamayor [5] provaram esta conjectura para curvas irredutíveis. O caso geral ainda está em aberto, embora tenha resposta afirmativa para algumas famílias de variedades. Além do interesse inerente à própria conjectura, um importante resultado provado por Becker [1] e Rego [7] afirma que uma resposta positiva à Conjectura de Nakai implicaria na solução da Conjectura de Zariski-Lipman, que também está em aberto e afirma que se o A-módulo das k-derivações de A for projetivo então A é regular.

A proposta central deste trabalho é introduzir a teoria dos operadores diferenciais em variedades algébricas a fim de que se faça um estudo inicial e detalhado da Conjectura de Nakai. Para tanto, a dissertação está dividida em quatro capítulos, estruturados da seguinte maneira:

O primeiro consiste em um capítulo preliminar, onde apresentamos os resultados clássicos de álgebra comutativa e de geometria algébrica necessários à compreensão do restante do trabalho. Os fatos aqui expostos serão supostos conhecidos no decorrer do texto. Deste modo, este capítulo auxilia o leitor como referência quanto aos resultados e a terminologia empregada nos seguintes. Contudo, as notações utilizadas serão *standard*, de maneira que um leitor com prévios conhecimentos sobre os tópicos gerais abordados aqui poderão iniciar o estudo diretamente no Capítulo 2.

A teoria dos operadores diferenciais começa a ser tratada propriamente a partir do segundo capítulo. Inicialmente, introduziremos as noções fundamentais desta dissertação, fazendo um estudo sobre os operadores diferenciais em uma variedade algébrica afim, especialmente uma hipersuperfície, no contexto da Conjectura de Nakai.

A atenção voltada principalmente para as hipersuperfícies induz Singh [10] a propor uma conjectura mais forte do que a de Nakai. Vamos apresentar resultados a respeito da veracidade desta conjectura de Singh (e portanto de Nakai) para curvas planas e cones em espaço tridimensional.

O terceiro capítulo contém uma confirmação da conjectura de Nakai para álgebras finitas definidas por ideais monomiais e um importante contra-exemplo para ilustrar que a conjectura de Singh em geral não é válida.

Finalmente, no último capítulo utilizamos a noção de $\mathfrak{D}$-simplicidade para apresentar uma prova simples e independente da característica de que variedades com normalização suave satisfazem a Conjectura de Nakai.

Em algumas passagens, sobretudo dentro de algumas demonstrações, serão encontrados cálculos demasiadamente minuciosos, até mesmo exaustivos, porém igualmente elucidativos, sempre com o intuito de deixar o texto bastante completo.

Ao terminar, é com grande prazer que apresento agradecimentos a todos aqueles que me ajudaram na realização deste trabalho.

Capítulo 1

Notações e Preliminares

Neste primeiro capítulo, exporemos de modo sucinto alguns fatos supostos conhecidos sobre álgebra comutativa e geometria algébrica no decorrer deste trabalho. O objetivo é familiarizar o leitor com os conceitos envolvidos na dissertação, bem como enunciar os resultados utilizados e tentar introduzir de maneira simples as noções fundamentais para os capítulos posteriores. Grande parte dos resultados aqui apresentados são clássicos, e portanto omitiremos as demonstrações, as quais podem ser encontradas na literatura, mas deixaremos sempre indicadas as referências básicas sobre o assunto. Este capítulo preliminar será útil também como referência quanto à notação e a terminologia empregadas nos seguintes.

Vamos inicialmente recordar algumas definições e conceitos da teoria de ideais. Assumiremos sempre que todos os anéis são comutativos com identidade.

Para um anel A, indicaremos por $Spec(A)$ o conjunto de todos os seus ideais primos e por $Max(A)$ o conjunto dos ideais maximais de A. Denotaremos um anel local A com ideal maximal $\mathfrak{m}$ por $(A, \mathfrak{m})$, e um anel semi-local com $Max(A) = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_t\}$ será denotado por $(A, \mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_t)$.

Vamos considerar um anel A. O conjunto dos seus elementos nilpotentes é um ideal denotado por $\mathcal{N}(A)$, chamado o *nilradical de* A. Mais precisamente,

$$\mathcal{N}(A) = \sqrt{0} = \{a \in A : a^m = 0, \text{ para algum } m \in \mathbb{N}\}.$$

Quando $\mathcal{N}(A) = 0$, dizemos que A é um anel *reduzido.*

Nesta dissertação, trabalharemos essencialmente com álgebras afins, que são anéis noetherianos, e assim, serão bastante utilizados a terminologia e alguns fatos relacionados com a teoria da decomposição primária. Daremos a seguir alguns resultados frequentemente assumidos no decorrer do texto, iniciando com o conceito de divisor primo, a saber:

Definição 1.1 *Seja $\mathfrak{a}$ um ideal próprio de A. Um ideal $\mathfrak{p}$ é dito um* divisor primo de $\mathfrak{a}$ *se $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ e $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$. Se além disso $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ para todo divisor primo $\mathfrak{p}'$ de $\mathfrak{a}$ com $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$, então $\mathfrak{p}$ é dito um* divisor primo minimal de $\mathfrak{a}$.

Proposição 1.2 *Sejam A um anel e $\mathfrak{a}$ um ideal de A. Se A é noetheriano então $\mathfrak{a}$ possui apenas um número finito de divisores primos minimais e, em particular, A possui apenas um número finito de ideais primos minimais.*

Demonstração: Ver Kunz ([17], Proposition I.4.9). ∎

Proposição 1.3 *Seja $A \neq \{0\}$ um anel com um número finito de ideais primos minimais $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t$. Então $\mathcal{N}(A) = \sqrt{0} = \bigcap_{i=1}^{t} \mathfrak{p}_i$ e $\bigcup_{i=1}^{t} \mathfrak{p}_i$ consiste apenas de divisores de zero. Além disso, se A for reduzido, então $\bigcup_{i=1}^{t} \mathfrak{p}_i$ é o conjunto de todos os divisores de zero de A.*

Demonstração: Ver Kunz ([17], Proposition I.4.10). ∎

1.1 Variedades Algébricas

Como o tema central da dissertação são os operadores diferenciais em variedades algébricas, vamos começar com conceitos clássicos da geometria algébrica: variedades em espaços afins.

Seja $\mathbb{A}^n(L)$ o espaço n-dimensional afim sobre um corpo L e $k \subset L$ um subcorpo.

Definição 1.4 *Um subconjunto $V \subset \mathbb{A}^n(L)$ é chamado uma k-*variedade algébrica afim *se existem polinômios $f_1, \ldots, f_m \in k[X_1, \ldots, X_n]$ tais que V é o conjunto solução em $\mathbb{A}^n(L)$ do sistema de equações*

$$f_i(X_1, \cdots, X_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m).$$

L é chamado corpo de coordenadas de V *e k é o seu* corpo de definição.

Exemplos 1.5

1. k-variedades lineares: *são os conjuntos solução de sistemas de equações lineares com coeficientes em k.*

2. k-hipersuperfícies: *são as variedades definidas por uma única equação $f(X_1, \ldots, X_n) = 0$, onde $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ é um polinômio não constante.*

   Assim, por definição, toda variedade afim é intersecção de um número finito de hipersuperfícies.

3. Curvas algébricas planas: *são as hipersuperfícies no espaço bidimensional $\mathbb{A}^2(L)$, ie, os conjuntos solução de equações $f(X_1, X_2) = 0$, com $f \in k[X_1, X_2]$.*

4. Cones: *são as variedades definidas por um sistema de equações constituído apenas de polinômios homogêneos* *.

Vamos enunciar agora um resultado sobre variedades, cuja importância teórica reside na questão da existência de soluções de um sistema de equações algébricas, como podemos observar na demonstração de 2.44.

Proposição 1.6 *Se L possui infinitos elementos e $n \geq 1$, então fora de qualquer k-hipersuperfície em $\mathbb{A}^n(L)$ existem infinitos pontos de $\mathbb{A}^n(L)$. Em particular, fora de qualquer k-variedade $V \subsetneq \mathbb{A}^n(L)$ existem infinitos pontos.*

Demonstração: Ver Kunz ([17], Proposition I.1.3). ∎

Definição 1.7 *Para um subconjunto $V \subset \mathbb{A}^n(L)$, o conjunto*

$$\mathfrak{I}(V) := \{F \in k[X_1, \ldots, X_n] : F(x) = 0, \ \forall\, x \in V\}$$

é chamado o ideal de V em $k[X_1, \ldots, X_n]$.

Para uma k-variedade $V \subset \mathbb{A}^n(L)$, a k-álgebra $k[V] := \dfrac{k[X_1, \ldots, X_n]}{\mathfrak{I}(V)}$ *é o* anel de coordenadas de V.

*Um polinômio é dito *homogêneo de grau d* se todos os seus coeficientes são nulos, exceto possivelmente os que pertencem a monômios de grau d.

Os elementos φ do anel de coordenadas $k[V]$ de uma k-variedade $V \subseteq \mathbb{A}^n(L)$ podem ser considerados como funções $\varphi : V \to L$ da seguinte maneira: se $\varphi = F + \mathfrak{I}(V)$, com $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$, e $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in V$, defina

$$\varphi(x) := F(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Note que φ independe da escolha do representante F, pois se $F + \mathfrak{I}(V) = G + \mathfrak{I}(V)$ e $x \in V$ então $F - G \in \mathfrak{I}(V)$, e assim $F(x) - G(x) = (F - G)(x) = 0$, ou seja, $F(x) = \varphi(x) = G(x)$.

Na verdade, a família de todas as k-variedades afins de $\mathbb{A}^n(L)$ satisfazem os axiomas de conjuntos fechados de uma topologia em $\mathbb{A}^n(L)$. Esta topologia é chamada a *topologia de Zariski* com respeito a k.

Deste modo, $\mathbb{A}^n(L)$ é um espaço topológico, e se $V \subseteq \mathbb{A}^n(L)$ é uma k-variedade, então V é um subespaço topológico, munido da *topologia induzida:* seus conjuntos fechados são as *subvariedades* $W \subseteq V$, ie, as k-variedades W contidas em V.

Mais ainda, a família $\{D(f) : f \in k[V]\}$, onde $D(f) = \{x \in V : f(x) \neq 0\}$, constitui uma base para os abertos da topologia de Zariski de uma variedade V.

Vamos considerar V uma k-variedade não vazia e U um subconjunto aberto não vazio de V. Seja $r : U \to L$ uma aplicação.

Definição 1.8 *A função r é chamada* regular em $x \in U$ *se existem elementos $f, g \in k[V]$ tais que:*

1. *$x \in D(g) \subset U$;*

2. *$r = \frac{f}{g}$ em $D(g)$, ie, para todo $y \in D(g)$, temos $r(y) = \frac{f(y)}{g(y)}$.*

Dizemos que r é regular em U *se r for regular em x, para todo $x \in U$.*

Em particular, os elementos de k, considerados como funções constantes, são regulares em U.

Notação: Denotamos por $\mathcal{O}(U)$ o conjunto das funções regulares em U.

Para $x \in V$, vamos denotar por $\mathfrak{U}(x)$ o conjunto de todos os subconjuntos abertos de V de contém x.

Definição 1.9 *Se $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}(x)$, então duas funções $r_1 \in \mathcal{O}(U_1)$, $r_2 \in \mathcal{O}(U_2)$ são chamadas* equivalentes em x *se existe um conjunto $U \in \mathfrak{U}(x)$ com $U \subset U_1 \cap U_2$ tal que $r_1|_U = r_2|_U$, onde $r_i|_U$ denota a restrição de r_i a U, $i = 1, 2$.*

Note que assim temos definida uma relação de equivalência em $\bigcup_{U \in \mathfrak{U}(x)} \mathcal{O}(U)$. Uma classe de equivalência com respeito a esta relação é chamada um *germe de funções regulares em x.*

Notação: Vamos denotar por $\mathcal{O}_x$ o conjunto dos germes de funções regulares em x.

Não é difícil ver que em $\mathcal{O}_x$ podemos definir de maneira natural uma adição e uma multiplicação que o torna um anel comutativo. Na verdade, temos:

Proposição 1.10 *$(\mathcal{O}_x, \mathfrak{m}_x)$ é uma k-álgebra local, onde o seu ideal maximal é dado por $\mathfrak{m}_x = \{\overline{f} \in \mathcal{O}_x,\ f \in k[V] : f(x) = 0\}$.*

Demonstração: Ver Kunz ([17], Remark III.2.15). ∎

Este anel local $\mathcal{O}_x$ desempenha um papel importante na geometria algébrica, pois é a partir dele que detectamos as singularidades de uma variedade, como será visto mais adiante.

Vamos nos voltar agora para a questão da "medida" de variedades algébricas, atribuindo a elas uma dimensão. Daqui em diante, vamos assumir o corpo de definição k algebricamente fechado no corpo de coordenadas L.

Definição 1.11 *A* dimensão de Krull *de um anel A é o supremo dos comprimentos m de todas as cadeias de ideais primos*

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_m \qquad (\star)$$

em $Spec(A)$, e é denotada por $dim(A)$.

Para uma k-variedade $V \subset \mathbb{A}^n(L)$, a dimensão de V *é definida por $dim(V) := dim(k[V])$.*

A altura *de um ideal $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ é o supremo dos comprimentos m de todas as cadeias $(\star)$ com $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_m$. Para um ideal arbitrário $\mathfrak{a} \neq A$, a altura de $\mathfrak{a}$ é definida como o ínfimo das alturas dos divisores primos de $\mathfrak{a}$, e é denotada por $alt(\mathfrak{a})$.*

Anéis noetherianos reduzidos de dimensão 0 podem ser completamente determinados:

Proposição 1.12 *Para um anel reduzido A com um número finito de ideais primos minimais, as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) $dim(A) = 0$;

b) *A é isomorfo a um produto finito de corpos.*

Demonstração: Ver Kunz ([17], Proposition II.1.5). ∎

Os seguintes teoremas são resultados clássicos fundamentais sobre altura de ideais em anéis noetherianos. As demonstrações podem ser encontradas, por exemplo, em (Kunz [17], Chapter V, §3.)

Teorema 1.13 (Teorema do Ideal Principal de Krull)

Seja A um anel noetheriano e $(a) \neq A$ um ideal principal de A. Então $alt(\mathfrak{p}) \leq 1$, para todo divisor primo minimal $\mathfrak{p}$ de (a), e $alt(\mathfrak{p}) = 1$ se a for não divisor de zero de A.

Teorema 1.14 (Teorema do Ideal Principal de Krull Generalizado)

Seja A um anel noetheriano e $\mathfrak{a} \neq A$ um ideal gerado por m elementos. Então $alt(\mathfrak{p}) \leq m$, para todo divisor primo minimal $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{a}$.

Seja $\mathfrak{a}$ um ideal de um anel noetheriano A. Vamos denotar por $\mu(\mathfrak{a})$ o número mínimo de geradores de $\mathfrak{a}$ em A. Assim, segue da definição de altura de ideais e do teorema acima que $alt(\mathfrak{a}) \leq \mu(\mathfrak{a})$, para todo ideal $\mathfrak{a} \neq (1)$ de um anel noetheriano. Ideais que satisfazem a igualdade, ie, $alt(\mathfrak{a}) = \mu(\mathfrak{a})$, gozam de várias propriedades importantes na geometria algébrica. Assim, com vista em aplicações geométricas, foi criada a seguinte terminologia:

Definição 1.15 *Seja $\mathfrak{a} \neq A$ um ideal de um anel noetheriano A. Se $alt(\mathfrak{a}) = \mu(\mathfrak{a})$, dizemos que $\mathfrak{a}$ é* intersecção completa *em A.*

1.2 Anéis Normais

Neste parágrafo daremos uma síntese de alguns resultados sobre normalidade que serão assumidos no desenvolvimento do último capítulo, que trata essencialmente de anéis normais.

Seja B/A uma extensão de anéis, $A \neq \{0\}$.

Definição 1.16 *Um elemento $x \in B$ é chamado* integral sobre A *se existe um polinômio mônico $f \in A[X]$ da forma*

$$f = X^m + a_1 X^{m-1} + \cdots + a_m \quad (m > 0)$$

tal que $f(x) = 0$.

O conjunto A' de todos os elementos de B que são integrais sobre A é um subanel de B, chamado o *fecho integral de A em B*. Dizemos que B é *integral sobre A* se $A' = B$, e A é chamado *integralmente fechado em B* se $A' = A$.

Um anel integralmente fechado no seu anel total de frações é dito *normal* (lembrando que o anel total de frações de um anel R é anel quociente $Q(R) := S^{-1}R$, onde S é o conjunto dos elementos não divisores de zero de R).

Proposição 1.17 *Sejam $A \subseteq B$ anéis, B integral sobre A. Se $\mathfrak{P}_0 \subsetneq \mathfrak{P}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{P}_m$ é uma cadeia de ideais primos em B e $\mathfrak{p}_i := \mathfrak{P}_i \cap A$ $(i = 0, \ldots, m)$, então $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_m$ é uma cadeia de ideais primos em A.*

Demonstração: Ver Kunz ([17], Corollary II.2.11). ∎

Teorema 1.18 ("Going-up")

Sejam $A \subseteq B$ anéis, B integral sobre A.

1. *Para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A, existe um ideal primo $\mathfrak{P}$ de B tal que $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$.*

2. *Para toda cadeia de ideais primos*

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_m$$

em A e para todo $\mathfrak{P}_0 \in Spec(B)$ tal que $\mathfrak{P}_0 \bigcap A = \mathfrak{p}_0$, B contém uma cadeia de ideais primos

$$\mathfrak{P}_0 \subsetneq \mathfrak{P}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{P}_m,$$

com $\mathfrak{P}_i \bigcap A = \mathfrak{p}_i$ $(i = 0, \ldots, m)$.

Demonstração: Ver Atiyah e Macdonald ([13], Theorem 5.10, 5.11). ∎

Corolário 1.19 *Sejam $A \subseteq B$ anéis, B integral sobre A. Então $dim(A) = dim(B)$.*

Demonstração: Ver Kunz ([17], Corollary II.2.13). ∎

Uma consequência importante deste corolário é o fato de que a dimensão de um anel A é a mesma do seu fecho integral em qualquer extensão de A.

Vejamos a seguir o bom comportamento do fecho integral com respeito à formação de frações, a saber:

Proposição 1.20 *Sejam $A \subseteq B$ anéis, A' o fecho integral de A em B. Seja S um subconjunto multiplicativamente fechado de A. Então $S^{-1}A'$ é o fecho integral de $S^{-1}A$ em $S^{-1}B$.*

Demonstração: Ver Atiyah e Macdonald ([13], Proposition 5.12). ∎

Proposição 1.21 *Sejam A um anel reduzido noetheriano, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ seus ideais primos minimais distintos, K_i o corpo de frações de $\frac{A}{\mathfrak{p}_i}$ e A'_i o fecho integral de A em K_i $(1 \leq i \leq m)$. Então o isomorfismo canônico do anel total de frações $Q(A)$ sobre $\prod_{i=1}^{m} K_i$ aplica o fecho integral de A em $Q(A)$ sobre $\prod_{i=1}^{m} A'_i$.*

Demonstração: Ver Bourbaki ([14], Corolário 1 da página 309). ∎

1.3 Anéis Regulares

A conjectura de Nakai diz respeito à caracterização de anéis regulares a partir dos operadores diferenciais. Assim, daremos nesta seção apenas uma breve introdução à noção de regularidade. Resultados importantes a respeito serão dados nos parágrafos seguintes, englobando novos conceitos.

Definição 1.22 *Um anel noetheriano local $(A, \mathfrak{m})$ é chamado* regular *se $\mathfrak{m}$ for uma intersecção completa em A, ou seja, $dim(A) = alt(\mathfrak{m}) = \mu(\mathfrak{m})$.*

Observação 1.23 *Lembramos também que se $(A, \mathfrak{m})$ é anel local e $k = \frac{A}{\mathfrak{m}}$ é o corpo de resíduos de A, tem-se pelo Lema de Nakayama que $\mu(\mathfrak{m})$ é a dimensão do k-espaço vetorial $\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}$, ie, $\mu(\mathfrak{m}) = dim_k(\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2})$. Assim, $(A, \mathfrak{m})$ é regular se, e somente se, $dim(A) = dim_k(\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2})$.*

Um exemplo trivial de anel regular são os corpos (lembrando que, por definição, o conjunto vazio gera o ideal nulo).

Para um anel noetheriano A, definimos

$$Reg(A) := \{\mathfrak{p} \in Spec(A) : A_{\mathfrak{p}} \text{ é anel local regular}\},$$
$$Sing(A) := Spec(A) \setminus Reg(A).$$

Vejamos a seguir o conceito de uma variedade lisa. Para isto, vamos nos referir ao anel local $(\mathcal{O}_x, \mathfrak{m}_x)$ dos germes de funções regulares em x (ver definição 1.9). Na verdade, se x é um ponto de uma variedade V, o seu espaço tangente $T_x(V)$ é isomorfo ao espaço vetorial $\frac{\mathfrak{m}_x}{\mathfrak{m}_x^2}$. Além disso, a *dimensão de V em x* é dada por $dim_x(V) = dim(\mathcal{O}_x)$ (Kunz [17], Proposition III.4.14d). Assim, é bastante natuaral que uma variedade V seja regular em um ponto $x \in V$ se tivermos $dim(T_x(V)) = dim_x(V)$, ie,

$$\mu(\mathfrak{m}_x) = dim_k(\tfrac{\mathfrak{m}_x}{\mathfrak{m}_x^2}) = dim(T_x(V)) = dim_x(V) = dim(\mathcal{O}_x),$$

ou seja, se $\mathcal{O}_x$ for um anel local regular.

Definição 1.24 *Para uma variedade V, um ponto $x \in V$ é chamado um ponto* regular *se $\mathcal{O}_x$ for um anel local regular. Se x não é um ponto regular de V, dizemos que x é uma* singularidade de V.

Uma variedade que não possui singularidades é chamada lisa *ou* suave.

O conceito de regularidade é estendido para anéis não necessariamente locais, a saber:

Definição 1.25 *Um anel noetheriano A é chamado* regular *se $Max(A) \subseteq Reg(A)$, ie, $A_{\mathfrak{m}}$ é anel local regular, para todo $\mathfrak{m} \in Max(A)$.*

Proposição 1.26 *Todo anel local regular é um domínio.*

Demonstração: Segue imediatamente de (Kunz [17], Corollary V.5.15a). ∎

O seguinte critério será bastante usado para detectar as possíveis singularidades de uma variedade. Seja $A = \frac{k[X_1,\dots,X_n]}{I}$ uma álgebra afim sobre um corpo k e $I = (F_1, \dots, F_m)$. Para $\mathfrak{p} \in Spec(A)$, vamos definir a *matriz Jacobiana em* $\mathfrak{p}$, dada por

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{p}) := \left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(\xi_1, \dots, \xi_n)\right)_{i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n}$$

onde ξ_i é a imagem de X_i em $\frac{A_\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}}$.

Vamos denotar por $rank(\mathfrak{J}(\mathfrak{p}))$ o posto da matriz Jacobiana.

Teorema 1.27 (Critério Jacobiano para anéis locais regulares)

Sejam k um corpo perfeito e $A = \frac{k[X_1,\dots,X_n]}{I}$, onde $I = (F_1, \dots, F_m)$. Para $\mathfrak{p} \in Spec(A)$, seja $\mathfrak{J}(\mathfrak{p})$ a matriz Jacobiana em $\mathfrak{p}$. Se A for um domínio de dimensão d então $\mathfrak{p} \in Reg(A)$ se, e somente se, $rank(\mathfrak{J}(\mathfrak{p})) = n - d$.

Demonstração: Ver Kunz ([17], Theorem VI.1.15). ∎

Daremos a seguir resultados importantes sobre anéis regulares:

Proposição 1.28 *Seja A um anel noetheriano regular. Então:*

a) Todo anel de frações $S^{-1}A$ é também regular;

b) O anel de polinômios $A[X_1, \dots, X_n]$ é também regular.

Demonstração: Ver Kunz ([17], Corollaries VII.2.6, VII.2.7). ∎

Vale ressaltar aqui que temos como consequência imediata que o anel de polinômios $k[X_1, \dots, X_n]$ sobre um corpo k é um anel regular, fato este assumido constantemente no trabalho.

Vamos provar agora um resultado que será usado na demonstração de 2.44:

Proposição 1.29 *Produto finito de corpos é regular.*

Demonstração: Seja $A = K_1 \times \cdots \times K_s$ um produto finito de corpos. Temos que $Max(A) = \{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_s\}$, onde $\mathfrak{m}_i = K_1 \times \cdots \times K_{i-1} \times 0 \times K_{i+1} \times \cdots \times K_s$. Temos que mostrar que $A_{\mathfrak{m}_i}$ é regular, $\forall\ i = 1, \dots, s$. Sem perda de generalidade, é suficiente mostrar para

$\mathfrak{m}_1 = 0 \times K_2 \times \cdots \times K_s$. Na verdade, vamos provar que $A_{\mathfrak{m}_1}$ é corpo. Afirmamos que todo elemento $\frac{(a_1,\ldots,a_s)}{(b_1,\ldots,b_s)} \in A_{\mathfrak{m}_1}$ pode ser escrito na forma $\frac{(c_1,0,\ldots,0)}{(1,1,\ldots,1)}$, para algum $c_1 \in K_1$. De fato, como $(b_1,\ldots,b_s) \in A \setminus \mathfrak{m}_1$, temos que $b_1 \neq 0$ e portanto existe b_1^{-1}. Basta tomarmos $c_1 := b_1^{-1}a_1$ que teremos

$$(1,\, 0,\, \ldots,\, 0)[(a_1,\ldots,a_s) - (b_1,\ldots,b_s)(b_1^{-1}a_1, 0, \ldots, 0)] = (0,\, \ldots, 0),$$

ou seja, existe $s = (1,\, 0,\, \ldots,\, 0) \in S = A \setminus \mathfrak{m}_1$ tal que

$$s[(a_1,\ldots,a_s)(1,\, 1,\, \ldots,\, 1) - (b_1,\ldots,b_s)(c_1, 0, \ldots, 0)] = (0,\, \ldots, 0),$$

e a afirmação está provada.

Assim, seja $\frac{(0,\ldots,0)}{(1,\ldots,1)} \neq \frac{(a_1,\ldots,a_s)}{(b_1,\ldots,b_s)} = \frac{(c_1,0,\ldots,0)}{(1,1,\ldots,1)} \in A_{\mathfrak{m}_1}$. Então $c_1 \neq 0$, e assim $\left[\frac{(c_1,0,\ldots,0)}{(1,1,\ldots,1)}\right]^{-1} = \frac{(1,1,\ldots,1)}{(c_1,0,\ldots,0)} \in A_{\mathfrak{m}_1}$, e portanto $A_{\mathfrak{m}_1}$ é corpo. ∎

Na verdade, usando o Teorema Chinês sobre os Restos, temos mais geralmente que se $(A, \mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_s)$ for um anel semi-local e $\mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_s = (0)$ então $A_{\mathfrak{m}_i}$ é corpo, para todo $\mathfrak{m}_i \in Max(A)$.

1.4 Decomposição Primária em Anéis Noetherianos

Esta é uma pequena seção cujo objetivo principal é a introdução de algumas terminologias usadas nas seguintes. Serão dados também alguns resultados relacionados, utilizados principalmente na demonstração do Lema 2.42.

Seja M um módulo sobre um anel A. Para $m \in M$, chamamos o conjunto dado por $Ann(m) := \{a \in A : am = 0\}$ o *anulador de m*.

Definição 1.30 *Um ideal* $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ *é dito ser* associado a M *se existir* $m \in M$ *tal que* $\mathfrak{p} = Ann(m)$.

O conjunto dos ideais primos associados a M será denotado por $Ass(M)$.

Proposição 1.31 *Se A é noetheriano então* $\bigcup_{\mathfrak{p} \in Ass(M)} \mathfrak{p}$ *é o conjunto de divisores de zero de* M.

Demonstração: Ver Kunz ([17], Proposition VI.2.5). ∎

Definição 1.32 *Um submódulo $P \subset M$ é dito* primário *se $Ass(\frac{M}{P})$ consiste de um único elemento, digamos $\mathfrak{p}$. Neste caso, P é também chamado $\mathfrak{p}$-primário.*

No caso em que $M = A$, um ideal $\mathfrak{q}$ de A é chamado primário *se todo divisor de zero de $\frac{A}{\mathfrak{q}}$ for nilpotente. Se $\mathfrak{q}$ é primário e $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$, então dizemos que $\mathfrak{q}$ é $\mathfrak{p}$-primário.*

Definição 1.33 *Um submódulo $U \subset M$ possui uma* decomposição primária *se existirem submódulos primários $P_1, \ldots, P_s$ $(s \geq 1)$ de M tais que $U = P_1 \cap \cdots \cap P_s$.*

Esta decomposição primária é chamada reduzida *se:*

(a) Se P_i é $\mathfrak{p}_i$-primário $(i = 1, \ldots, s)$ então $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$, para $i \neq j$ $(i, j = 1, \ldots, s)$;

(b) $\bigcap_{j \neq i} P_j \not\subset P_i$ $(i = 1, \ldots, s)$.

Teorema 1.34 (Existência de uma decomposição primária)

Sejam A um anel noetheriano e M um A-módulo finitamente gerado. Então todo submódulo $U \subsetneq M$ possui uma decomposição primária reduzida.

Demonstração: Ver Kunz ([17], Theorem VI.2.17). ∎

Teorema 1.35 (Primeiro Teorema de Unicidade)

Sejam A um anel noetheriano, $U \subset M$ um submódulo com decomposição primária reduzida $U = P_1 \cap \cdots \cap P_s$, onde P_i é $\mathfrak{p}_i$-primário $(i = 1, \ldots, s)$. Então $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s\} = Ass(\frac{M}{U})$.

Demonstração: Ver Kunz ([17], Theorem VI.2.18). ∎

1.5 Desomogeneização

Nesta seção, serão dadas algumas relações entre um anel graduado A e o anel de classes residuais $\frac{A}{(x-1)}$, onde x é um elemento não nilpotente de grau 1. $\frac{A}{(x-1)}$ é chamado *desomogeneização de A com respeito a x*. Estas relações são mais estreitas do que entre um anel e um anel de classes residuais em geral.

Inicialmente, será dada uma breve introdução à noção de anéis graduados.

Definição 1.36 *Uma* graduação *de um anel G é uma família $\{G_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de subgrupos do grupo aditivo G tal que:*
a) $G = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} G_k$,
b) $G_i \cdot G_j \subset G_{i+j}$, *para todo* $i, j \in \mathbb{Z}$.

G é chamado um anel graduado *se for munido de uma graduação $\{G_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Se $G_k = 0$, para todo $k < 0$, G é dito* positivamente graduado. *Os elementos de G_k são os* elementos homogêneos de grau k de G. *Se $g = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k \in G$, com $g_k \in G_k$, então g_k são chamadas as* componentes homogêneas de grau k de g.

Exemplo 1.37 *O exemplo mais típico, e certamente mais importante para nós, é o anel de polinômios $G = \mathcal{R}[X_1, \ldots, X_n]$ sobre um anel $\mathcal{R}$. Os elementos homogêneos de grau k são os polinômios homogêneos de grau k :*

$$\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k} c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}.$$

Proposição 1.38 *Para um ideal I de um anel graduado G, as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) I pode ser gerado por elementos homogêneos.

b) Para todo $g \in I$, as componentes homogêneas g_k de g também pertencem a I, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

c) $\frac{G}{I}$ é um anel graduado com a graduação $\{(\frac{G}{I})_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, onde $(\frac{G}{I})_k := \frac{G_k+I}{I}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Ver Kunz ([17], Lemma I.5.5) ∎

Definição 1.39 *Um ideal de um anel graduado é chamado* homogêneo *se uma das condições acima for satisfeita.*

Proposição 1.40 *Seja $G = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} G_k$ um anel graduado e S um subconjunto multiplicativamente fechado de G que consiste apenas de elementos homogêneos. Então $S^{-1}G$ pode ser munido de uma graduação natural $\{(S^{-1}G)_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, onde $(S^{-1}G)_k$ consiste de todos os quocientes $\frac{g}{s} \in S^{-1}G$, com g um elemento homogêneo tal que grau(g) - grau$(s) = k$.*

Vamos considerar $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ o anel de polinômios sobre um corpo k de característica zero, J um ideal homogêneo de R e $A = \frac{R}{J}$. Vamos assumir que A seja reduzido.

Assim, temos que $A = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} A_k$ é um anel positivamente graduado. Seja $x \in A$ um elemento de grau 1. Como A é reduzido, x é não nilpotente e $S = \{1, x, x^2, \ldots\} \subset A$ é um subconjunto multiplicativamente fechado com elementos homogêneos apenas. Portanto, $A_x = S^{-1}A$ é um anel munido da graduação $\{(A_x)_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, onde

$$(A_x)_k = \{\tfrac{a}{s} \in A_x : a \in A \text{ é homogêneo e grau}(a)\text{-grau}(s)\text{=k}\}.$$

Notação: $A_{(x)} := (A_x)_0 = \{\frac{a}{x^m} \in A_x : a \in A_m\}$.

Assumindo as hipóteses e as definições acima, temos a seguinte:

Proposição 1.41

i) $A_x = A_{(x)}[x, x^{-1}]$, *com* x *algebricamente independente sobre* $A_{(x)}$.

ii) $A_{(x)}$ *é isomorfo a* $\frac{A}{(x-1)}$.

Demonstração:

i) É claro que $A_x = A_{(x)}[x, x^{-1}]$. Para provar que x é algebricamente independente sobre $A_{(x)}$, vamos considerar y uma variável sobre $A_{(x)}$. Assim, $x \in A_x$ é homogêneo de grau 1 e invertível. Logo, existe um homomorfismo dado por:

$$\begin{aligned} \phi : A_{(x)}[y, y^{-1}] &\to A_x \\ \sum_{i\in\mathbb{Z}} \tfrac{a_i}{s_i} y^i &\mapsto \sum_{i\in\mathbb{Z}} \tfrac{a_i}{s_i} x^i. \end{aligned}$$

Afirmamos que ϕ é um isomorfismo. De fato, seja $f \in \text{Ker}(\phi)$, $f = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{a_i}{s_i} y^i$, $\frac{a_i}{s_i} \in A_{(x)} = (A_x)_0$. Então $0 = \phi(f) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{a_i}{s_i} x^i$, e portanto $\frac{a_i}{s_i} x^i = 0$, para todo i. Como x é invertível, temos que $\frac{a_i}{s_i} = \frac{a_i}{s_i} x^i x^{-i} = 0$, para todo i, o que implica que $f = 0$. Portanto, ϕ é injetor. Para mostrar que ϕ é sobrejetor, basta mostrarmos que todo elemento homogêneo de A_x está na imagem de ϕ. Assim, seja $\frac{b}{x^m} \in A_x$ um elemento homogêneo de grau d. Então $\frac{b}{x^m} = \frac{b_{m+d}}{x^m} = \frac{b_{m+d}}{x^{m+d}} x^d = \phi(\frac{b_{m+d}}{x^{m+d}} y^d)$, com $b_{m+d} \in A$ homogêneo de grau $m + d$.

Assim, temos que $A_{(x)}[x, x^{-1}] = A_x \cong A_{(x)}[y, y^{-1}]$, com y algebricamente independente sobre $A_{(x)}$, e o resultado segue.

ii) Vamos mostrar primeiramente que $\frac{A_x}{(x-1)A_x} \cong \frac{A}{(x-1)}$. Seja $\pi : A \to \frac{A}{(x-1)}$ a projeção canônica e seja $f : A \to A_x$ o homomorfismo de anéis dado por $f(a) = \frac{a}{1}$. Como $x^m - 1 = (x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1)$, então $x^m - 1 \in (x-1)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Isto significa que $\pi(s)$ é uma unidade em $\frac{A}{(x-1)}$, para todo $s \in S$. Assim, pela propriedade universal do anel de frações, temos que existe um único homomorfismo $\psi : A_x \to \frac{A}{(x-1)}$ tal que $\pi = \psi \circ f$. Nestas condições, ψ é dado por $\psi(\frac{a}{x^m}) = \pi(a)\,(\pi(x^m))^{-1}$. É fácil ver que este homomorfismo é sobrejetor e que o núcleo de ψ é o ideal $(x-1)A_x$, e assim a afirmação segue.

Basta provar então que $\frac{A_x}{(x-1)A_x} \cong (A_x)_0$. Vamos definir

$$\varphi : (A_x)_0 \to \frac{A_x}{(x-1)A_x}$$

$$\frac{a_m}{x^m} \mapsto \overline{\left(\frac{a_m}{x^m}\right)} = \frac{a_m}{x^m} + (x-1)A_x,$$

onde a_m denota um elemento de A_m, ie, um elemento em A homogêneo de grau m. Temos que φ é claramente um homomorfismo. Além disso, é fácil ver que φ é injetivo. Para mostrar a sobrejetividade, seja $\overline{\left(\frac{b}{x^s}\right)} = \frac{b}{x^s} + (x-1)A_x \in \frac{A_x}{(x-1)A_x}$. Como A é positivamente graduado, podemos escrever $b = b_0 + b_1 + \cdots + b_d$, com $b_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, d$. Se $d \leq s$, basta tomar $\frac{a}{x^s} := \frac{x^s b_0 + x^{s-1} b_1 + \cdots + x^{s-d} b_d}{x^s} \in (A_x)_0$, que teremos $\varphi(\frac{a}{x^s}) = \overline{\left(\frac{b}{x^s}\right)}$. Se $d > r$, tomamos $\frac{a}{x^d} := \frac{x^d b_0 + \cdots + x^{d-s} b_s + \cdots + b_d}{x^d}$, e a proposição está provada. ∎

1.6 Sequências Regulares e Módulos de Cohen-Macaulay

Esta seção introduz a noção de anéis e módulos de Cohen-Macaulay, os quais gozam de várias propriedades boas, mas relacionaremos aqui apenas aquelas utilizadas em resultados posteriores neste trabalho. Antes disto, vamos dar um outro conceito também importante, que são as sequências regulares. Provaremos também nesta seção um resultado fundamental para a demonstração do teorema principal do Capítulo 2, que é a Proposição 1.45. E por fim, será dado um resultado relacionando regularidade e normalidade.

Definição 1.42 *Seja M um módulo sobre um anel A. Uma sequência $\{a_1, \ldots, a_m\}$ $(m \geq 0)$ de elementos de A é chamada uma sequência M-*regular *se:*

(a) $M \neq (a_1, \ldots, a_m)M$;

(b) *Para* $i = 0, \ldots, m-1$, a_{i+1} *é não divisor de zero de* $\frac{M}{(a_1,\ldots,a_m)M}$.

Um exemplo simples de sequência A-regular é $\{X_1, \ldots, X_n\}$ se $A = R[X_1, \ldots, X_n]$ é o anel de polinômios sobre um anel R.

Proposição 1.43 *Se um ideal* $\mathfrak{a}$ *de um anel noetheriano* A *for gerado por uma sequência* A*-regular então* $\mathfrak{a}$ *é uma intersecção completa em* A.

Demonstração: Ver Kunz ([17], Proposition V.5.11). ∎

Note que a ordem dos elementos é de importância fundamental no conceito de sequências regulares. Porém, em se tratando de anéis noetherianos locais, a ordem é irrelevante:

Proposição 1.44 *Sejam* $(A, \mathfrak{m})$ *um anel noetheriano local,* $\{a_1, \ldots, a_m\} \subseteq \mathfrak{m}$ $(m \geq 0)$ *uma sequência* A*-regular. Então* $\{a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(m)}\}$ *é também uma sequência* A*-regular, para toda permutação* π *de* $\{1, \ldots, m\}$.

Demonstração: Ver Kunz ([17], Corollary V.5.14). ∎

Segue ainda que, no caso em que a sequência for constituída apenas de elementos homogêneos, a ordem dos mesmos também não importa. Vamos provar este resultado para o anel de polinômios $R = k[X_1, \ldots, X_n]$, a saber:

Proposição 1.45 *Seja* $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ *o anel de polinômios a* n *variáveis sobre um corpo* k*. Se uma sequência* $\{f_1, \ldots, f_m\}$ *é uma sequência* R*-regular de elementos homogêneos de grau maior ou igual a 1, então* $\{f_{\pi(1)}, \ldots, f_{\pi(m)}\}$ *permanece ainda* R*-regular, para toda permutação* π *de* $\{1, \ldots, m\}$.

Demonstração: Vamos considerar o anel noetheriano local $R_{\mathfrak{m}}$, onde $\mathfrak{m} := (X_1, \ldots, X_n)$ é o ideal maximal homogêneo de R. De acordo com a proposição acima, basta mostrar que $\{f_1, \ldots, f_m\} \subseteq R$ é sequência R-regular se, e somente se, $\{f_1, \ldots, f_m\}$ for $R_{\mathfrak{m}}$-regular.

Vamos supor primeiramente que $\{f_1, \ldots, f_m\}$ é sequência R-regular.

(1) Temos que $\{f_1, \ldots, f_m\} \subseteq \mathfrak{m}$, já que $f_1, \ldots, f_m$ são elementos homogêneos. Assim, segue que $(f_1, \ldots, f_m)R_{\mathfrak{m}} \neq R_{\mathfrak{m}}$.

(2) Sendo $\{f_1, \ldots, f_m\}$ uma sequência R-regular e R domínio, temos que $0 \neq f_1$. Mas $R \subseteq R_{\mathfrak{m}} \subseteq k(X_1, \ldots, X_n)$, e portanto f_1 é não divisor de zero em $R_{\mathfrak{m}}$.

(3) Agora, seja $1 \leq s < m$. Vamos provar que $\{f_1, \ldots, f_{s+1}\}$ é $R_{\mathfrak{m}}$-regular, ie, vamos mostrar que f_{s+1} é não divisor de zero em $\frac{R_{\mathfrak{m}}}{(f_1,\ldots,f_s)R_{\mathfrak{m}}}$. Assim, suponhamos que $f_{s+1}\frac{h_{s+1}}{t_{s+1}} = f_1\frac{h_1}{t_1} + \cdots + f_s\frac{h_s}{t_s}$, com $h_i \in R$ e $t_i \in R \setminus \mathfrak{m}$. Então $\frac{f_{s+1}\,h_{s+1}\,t_1\cdots t_s}{t_1\cdots t_{s+1}} =$ $= \frac{f_1\,h_1\,t_2\cdots t_{s+1} + \cdots + f_s\,h_s\,t_1\cdots t_{s-1}\,t_{s+1}}{t_1\cdots t_{s+1}}$, ou seja, existe $t \in R \setminus \mathfrak{m}$ tal que

$$t\,t_1\cdots t_{s+1}(f_{s+1}\,h_{s+1}\,t_1\cdots t_s - f_1\,h_1\,t_2\cdots t_{s+1} - \cdots - f_s\,h_s\,t_1\cdots t_{s-1}\,t_{s+1}) = 0.$$

Como R é domínio e $t, t_1, \ldots, t_{s+1} \neq 0$, segue que

$$f_{s+1}\,h_{s+1}\,t_1\cdots t_s = f_1\,h_1\,t_2\cdots t_{s+1} + \cdots + f_s\,h_s\,t_1\cdots t_{s-1}\,t_{s+1} \in (f_1, \ldots, f_s).$$

Por hipótese, $\{f_1, \ldots, f_{s+1}\}$ é R-regular, e portanto temos que $h_{s+1}\,t_1\cdots t_s \in (f_1, \ldots, f_s)$. Assim, $\frac{h_{s+1}}{t_{s+1}} = \frac{h_{s+1}\,t_1\cdots t_s}{t_1\cdots t_{s+1}} \in (f_1, \ldots, f_s)R_{\mathfrak{m}}$.

Suponhamos agora que $\{f_1, \ldots, f_m\}$ seja uma sequência R_m-regular. Vamos mostrar que esta sequência é R-regular:

(1) Como $\{f_1, \ldots, f_m\} \subseteq \mathfrak{m}$ segue imediatamente que $(f_1, \ldots, f_m)R \neq R$.

(2) Como f_1 é não divisor de zero de $R_{\mathfrak{m}}$, temos que $f_1 \neq 0$, e portanto não divisor de zero em R, já que R é domínio.

(3) Seja $1 \leq s < m$. Vamos provar que f_{s+1} é não divisor de zero em $\frac{R}{(f_1,\ldots,f_s)R}$. Assim, suponhamos que $f_{s+1}\,h \in (f_1, \ldots, f_s)$. Como $(f_1, \ldots, f_s)$ é um ideal homogêneo, temos que todas as componentes homogêneas de $f_{s+1}\,h$ estão em $(f_1, \ldots, f_s)$, e assim podemos supor que h é homogêneo. Agora, como $\frac{f_{s+1}\,h}{1} \in (f_1, \ldots, f_s)R_{\mathfrak{m}}$ e $\{f_1, \ldots, f_{s+1}\}$ é $R_{\mathfrak{m}}$-regular, existe $t \in R \setminus \mathfrak{m}$ tal que $t\,h \in (f_1, \ldots, f_s)$. Mas $t = t_0 + \cdots t_d$, com t_i homogêneo de grau i e $0 \neq t_0 \in k$, e assim $t_0\,h$ é a componente homogênea de menor grau de $t\,h$. Como $(f_1, \ldots, f_s)$ é ideal homogêneo, temos que $t_0\,h \in (f_1, \ldots, f_s)$, e portanto $h \in (f_1, \ldots, f_s)$. ∎

Vamos considerar agora M um módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano A e $\mathfrak{a}$ um ideal de A com $\mathfrak{a}M \neq M$. Como M é um módulo noetheriano, segue que toda sequência M-regular $\{a_1, \ldots, a_m\} \subseteq \mathfrak{a}$ pode ser estendida a uma sequência maximal, ie, uma sequência M-regular $\{a_1, \ldots, a_t\} \subseteq \mathfrak{a}$ $(t \geq m)$ tal que todo $a \in \mathfrak{a}$ seja divisor de zero de $\frac{M}{(a_1,\ldots,a_t)M}$. Neste caso, a sequência $\{a_1, \ldots, a_t\}$ é dita uma *sequência maximal em* $\mathfrak{a}$.

Proposição 1.46 *Quaisquer duas sequências M-regulares maximais em $\mathfrak{a}$ têm o mesmo número de elementos.*

Demonstração: Ver Kunz ([17], Proposition VI.3.1). ∎

No que segue, este invariante desempenha um papel importante, como veremos daqui a pouco. Vamos introduzir então a seguinte terminologia:

Definição 1.47 *O número de elementos de uma sequência M-regular maximal em $\mathfrak{a}$ é chamado de* $\mathfrak{a}$-profundidade de M, *denotado por* $prof_{\mathfrak{a}}(M)$.

Se $(A, \mathfrak{m})$ é um anel local então $prof_{\mathfrak{m}}(M)$ é dito simplesmente a profundidade de M, *e escrevemos apenas $prof(M)$.*

Definição 1.48 *A* dimensão *de um A-módulo M é a dimensão de Krull do anel $\frac{A}{Ann(M)}$, onde $Ann(M)$ denota o ideal dado por $\{a \in A : am = 0, \forall\, m \in M\}$.*

Notação: $dim(M)$.

Proposição 1.49 *Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e $M \neq \langle 0 \rangle$ um A-módulo finitamente gerado. Então $prof(M) \leq dim(M)$.*

Demonstração: Ver Kunz ([17], Proposition VI.3.9). ∎

Se M satisfaz a igualdade $prof(M) = dim(M)$, então esta condição traz consequências importantes para as propriedades de M. Estes módulos recebem uma denominação especial, a saber:

Definição 1.50 *Seja M um módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano A. Se A é local, dizemos que M é um* módulo de Cohen-Macaulay *se $M = \langle 0 \rangle$ ou $prof(M) = dim(M)$.*

No caso geral, M é um módulo de Cohen-Macaulay se $M_{\mathfrak{m}}$ (considerado como um $A_{\mathfrak{m}}$-módulo) for Cohen-Macaulay, para todo $\mathfrak{m} \in Max(A)$.

A é chamado anel de Cohen-Macaulay *se for um A-módulo de Cohen-Macaulay.*

É claro que todo módulo finitamente gerado de dimensão zero sobre um anel noetheriano é Cohen-Macaulay. Em particular, todo anel noetheriano 0-dimensional é Cohen-Macaulay. O exemplo de nosso maior interesse consiste no anel de polinômios sobre um corpo, dado a seguir:

Teorema 1.51 (Teorema de Macaulay)

Se k é um corpo então $k[X_1, \ldots, X_n]$ é um anel de Cohen-Macaulay.

Demonstração: Como corpos são anéis noetherianos de dimensão zero, e portanto Cohen-Macaulay, o teorema segue imediatamente de ([12], Exemplo 4 da página 44): se R é um anel de Cohen-Macaulay então $R[X]$ é Cohen-Macaulay. ∎

Sendo o anel de polinômios $k[X_1, \ldots, X_n]$ um anel de Cohen-Macaulay, usaremos o seguinte resultado para demonstrar um importante lema no Capítulo 2 (Lema 2.42) sobre a regularidade de uma dada sequência.

Teorema 1.52 *Sejam A um anel de Cohen-Macaulay (não necessariamente local) e $\mathfrak{a} \neq A$ um ideal de A de altura m. Então $\mathfrak{a}$ é intersecção completa em A se, e somente se, $\mathfrak{a}$ é gerado por uma sequência A-regular.*

Neste caso, todos os ideais primos de $Ass(\frac{A}{\mathfrak{a}})$ têm a mesma altura m.

Demonstração: Ver Kunz ([17], Theorem VI.3.14). ∎

Daremos a seguir as chamadas *Condições de Serre* a respeito de anéis regulares e normalidade:

Condição de Serre (S_n): Algumas vezes, é preciso que um anel ou um módulo seja Cohen-Macaulay apenas em codimensão baixa:

Um módulo finito sobre um anel noetheriano A satisfaz a Condição de Serre (S_n) se

$$prof(M_{\mathfrak{p}}) \geq min(n, dim(M_{\mathfrak{p}})),$$

para todo $\mathfrak{p} \in Spec(A)$.

Condição de Serre (R_n): Um anel noetheriano A satisfaz a Condição de Serre (R_n) se $A_{\mathfrak{p}}$ é anel local regular, para todo $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ com $alt(\mathfrak{p}) = dim(A_{\mathfrak{p}}) \leq n$.

Teorema 1.53 (Critério de Normalidade de Serre)

Um anel noetheriano A é normal se, e somente se, A satisfaz (R_1) e (S_2).

Demonstração: Ver Serre ([22], IV.4) ou Matsumura ([19], § 23). ∎

1.7 Completamentos

Daremos nesta seção uma introdução à noção de completamento, uma importante ferramenta usada na demonstração do Teorema 2.36. Serão dados, além dos conceitos fundamentais, resultados clássicos, os quais podem ser encontrados, por exemplo, em (Atiyah [13], Capítulo 10) ou (Nagata [21], Capítulo II). Além disso, provaremos um importante resultado sobre anéis reduzidos e completamento (Lema 1.66), já que nem sempre completamento de anel reduzido é reduzido.

Sejam A um anel, $\mathfrak{a}$ um ideal de A e M um A-módulo. Então $M \supseteq \mathfrak{a}M \supseteq \mathfrak{a}^2M \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{a}^sM \supseteq \cdots$ e $\mathcal{B}_0 := \{M, \mathfrak{a}M, \mathfrak{a}^2M, \mathfrak{a}^3M, \ldots\}$ forma uma base de vizinhanças de $0 \in M$, ie, $\mathcal{U} \subseteq M$ é vizinhança de 0 se, e somente se, $\mathcal{U}$ contém algum $\mathfrak{a}^sM$. Por translação, podemos definir também uma base para os abertos de M, dada por $\mathcal{B} := \{m+\mathfrak{a}^sM \, : \, m \in M, \, s \in \mathbb{N}\}$. Ou seja, definimos assim a seguinte topologia em M :

Definição 1.54 *Considere a topologia em que o conjunto $\mathcal{B}$ dado acima constitui uma base para os abertos de M, o que significa que os conjuntos abertos de M são uniões de um número arbitrário de conjuntos da forma $m + \mathfrak{a}^sM$ $(m \in M, s \in \mathbb{N})$. Esta topologia é chamada a* topologia $\mathfrak{a}$-ádica de M.

Vamos considerar predominantemente o caso $M = A$. Com esta topologia, A é um *anel topológico,* ie, as operações do anel são contínuas.

Nosso interesse está voltado para o seguinte caso particular: $(A, \mathfrak{m})$ é um anel noetheriano local munido da topologia $\mathfrak{m}$-ádica. Mais geralmente, dados $(A, \mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_t)$ um anel semi-local e M um módulo finito sobre A, vamos sempre considerar a topologia $\mathfrak{J}(A)$-ádica em M (onde $\mathfrak{J}(A) = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_t$ é o *radical de Jacobson* de A), definida como sendo a *topologia natural* de M.

Teorema 1.55 *Assuma que um anel semi-local A' é um módulo finitamente gerado sobre um anel semi-local A. Então a topologia natural de A' como um anel semi-local coincide com a topologia natural de A' como um A-módulo.*

Demonstração: Ver Nagata (Theorem 16.8). ∎

Proposição 1.56 *Sejam A um anel noetheriano e $\mathfrak{a}$ um ideal de A tal que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{J}(A)$. Então a topologia $\mathfrak{a}$-ádica de A é Hausdorff, ie, $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{a}^i = 0$. Neste caso, a seguinte função distância $d : A \times A \to A$ torna A um espaço métrico: $d(a, a) = 0$; $d(a, b) = 2^{-n}$ se, e somente se, $a - b \in \mathfrak{a}^n$ e $a - b \notin \mathfrak{a}^{n+1}$.*

Como vamos trabalhar num contexto onde $(A, \mathfrak{m})$ é um anel noetheriano local munido da topologia $\mathfrak{m}$-ádica, ou mais geralmente, se A for um anel semi-local munido da topologia natural, segue da proposição acima que, neste caso, A é um espaço métrico com uma função distância $d : A \times A \to A$ tal que:

(1) $d(a, b) = d(a - b, 0)$, $\forall\, a, b \in A$;

(2) $\forall\, \varepsilon > 0$, $U_\varepsilon := \{a \in A : d(a, 0) < \varepsilon\}$ é um ideal de A.

É consequência imediata de (1) e (2):

(3) $d(a, b) > d(c, d) \Rightarrow d(a, b) = d(a + c, b + d)$.

No que segue, vamos assumir que A é um anel noetheriano semi-local munido da topologia natural, e portanto munido de uma métrica d. Com esta métrica, podemos introduzir o conceito de completamento da maneira usual:

Definição 1.57 *Um* completamento *de A é um anel $\hat{A}$ com as seguintes propriedades:*

(1) *$\hat{A}$ é um espaço métrico com uma função distância $\hat{d} : \hat{A} \times \hat{A} \to \hat{A}$ tal que $\hat{d}(\hat{a}, \hat{b}) = \hat{d}(\hat{a} - \hat{b}, 0)$, $\forall\, \hat{a}, \hat{b} \in \hat{A}$;*

(2) *$\hat{A}$ é completo;*

(3) *A é subespaço denso de $\hat{A}$;*

(4) *Se $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ são sequências em A tais que $\hat{a} = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ e $\hat{b} = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$, então $\hat{d}(\hat{a}, \hat{b}) = \lim\limits_{n \to \infty} d(a_n, b_n)$.*

O teorema a seguir garante a existência de completamentos:

Teorema 1.58 *A possui um completamento $\hat{A}$, que é único a menos de isomorfismos.*

Daremos agora alguns resultados importantes sobre completamento que serão úteis para concluir a demonstração de um teorema fundamental sobre a conjectura de Nakai para curvas planas.

Proposição 1.59 *Seja*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

uma sequência exata de módulos finitamente gerados sobre um anel noetheriano A. Então a sequência de completamentos

$$0 \to \hat{M}' \to \hat{M} \to \hat{M}'' \to 0$$

é exata.

Proposição 1.60 *Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e $\hat{A}$ o completamento de A. Então:*

(i) $\hat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\hat{A}$;

(ii) *$(\hat{A}, \hat{\mathfrak{m}})$ é um anel local.*

(iii) *A topologia de $\hat{A}$ é a topologia $\hat{\mathfrak{m}}$-ádica e $\hat{\mathfrak{m}} \cap A = \mathfrak{m}$;*

(iv) $(\mathfrak{m}^n)^\wedge = (\hat{\mathfrak{m}})^n$;

(v) $\frac{\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{m}^{n+1}} \cong \frac{(\hat{\mathfrak{m}})^n}{(\hat{\mathfrak{m}})^{n+1}}$;

(vi) $\frac{\hat{A}}{\hat{\mathfrak{m}}} = (\frac{A}{\mathfrak{m}})^\wedge$.

Teorema 1.61 *Seja $(A, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t)$ um anel semi-local. Então o completamento $\hat{A}$ de A é a soma direta dos completamentos $\widehat{A_i}$ dos anéis locais $A_i := A_{\mathfrak{p}_i}$.*

Proposição 1.62 *Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e $\hat{A}$ o completamento de A. Então $dim(\hat{A}) = dim(A)$.*

Proposição 1.63 *Um anel noetheriano local $(A, \mathfrak{m})$ é regular se, e somente se, o seu completamento $\hat{A}$ for regular.*

Demonstração: O ideal maximal de $\hat{A}$ é $\hat{\mathfrak{m}}$, e temos os isomorfismos naturais $\frac{A}{\mathfrak{m}} \cong \frac{\hat{A}}{\hat{\mathfrak{m}}}$, $\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} \cong \frac{\hat{\mathfrak{m}}}{\hat{\mathfrak{m}}^2}$. Portanto $\mu(\mathfrak{m}) = \mu(\hat{\mathfrak{m}})$. Além disso, $dim(A) = dim(\hat{A})$, e por definição A é regular se, e somente se, $dim(A) = \mu(\mathfrak{m})$. ∎

Proposição 1.64 *Seja A um anel noetheriano regular. Então o anel de série de potências formais $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ é também regular.*

Demonstração: Ver Matsumura [18], página 176. ∎

Proposição 1.65 *Se A é um anel noetheriano então o seu completamento $\hat{A}$ é também noetheriano.*

Provaremos a seguir um resultado importante sobre completamento de anéis reduzidos, que será fundamental na demonstração de 2.36, a saber:

Lema 1.66 *Seja $A = \frac{R}{(f)}$, onde $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ e $f \in R$ é um polinômio sem fatores múltiplos. Então, para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A, o completamento $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$-ádico de $A_{\mathfrak{m}}$ é reduzido.*

Demonstração: Seja $f = f_1 \cdots f_m$ a decomposição de f em fatores primos de R, onde $f_1, \ldots, f_m$ são distintos, e seja $\mathfrak{m} = \frac{M}{(f)}$, onde $M \in Max(R)$ e $M \supseteq (f)$. Logo, $f_i \in M$, para algum $i = 1, \ldots, m$. Assim, sejam $f_{i_1}, \ldots, f_{i_t}$ os fatores primos de f que pertencem a M. Defina

$$\begin{aligned} \varphi : A_{\mathfrak{m}} \cong \tfrac{R_M}{(f)R_M} &\longrightarrow \tfrac{R_M}{(f_{i_1})R_M} \times \cdots \times \tfrac{R_M}{(f_{i_t})R_M} \\ \tfrac{r}{s} + (f)R_M &\longmapsto (\tfrac{r}{s} + (f_{i_1})R_M, \ldots, \tfrac{r}{s} + (f_{i_t})R_M). \end{aligned}$$

φ é um homomorfismo injetor, pois se $\varphi(\frac{r}{s} + (f)R_M) = 0$, então $r \in (f_{i_j})$, para todo $j = 1, \ldots, t$. Como $f_{i_1}, \ldots, f_{i_t}$ são distintos, temos que $r = gf_{i_1} \cdots f_{i_t}$, com $g \in R$. Sejam $f_{i_{t+1}}, \ldots, f_{i_m}$ os fatores primos de f que não pertencem a M. Assim,

$$\frac{r}{s} = \frac{r}{s}\frac{f_{i_{t+1}} \cdots f_{i_m}}{f_{i_{t+1}} \cdots f_{i_m}} = \frac{gf_{i_1} \cdots f_{i_t} f_{i_{t+1}} \cdots f_{i_m}}{s\, f_{i_{t+1}} \cdots f_{i_m}} = \frac{fg}{s\, f_{i_{t+1}} \cdots f_{i_m}} \in (f)R_M.$$

Portanto, podemos considerar $A_{\mathfrak{m}} \hookrightarrow \frac{R_M}{(f_{i_1})R_M} \times \cdots \times \frac{R_M}{(f_{i_t})R_M}$ via φ.

O completamento $\widehat{D_j}$ de cada domínio local $D_j := \frac{R_M}{(f_{i_j})R_M}$, $j = 1, \ldots, t$, é reduzido (ver Zariski e Samuel [23], Lemas 1 e 4, Capítulo VIII, § 13). Além disso, como cada D_j é local, então $D := D_1 \times \cdots \times D_t$ é semi-local, e assim segue de 1.61 que $\widehat{D} = \widehat{D_1} \times \cdots \times \widehat{D_t}$. Portanto, $\widehat{D}$ é reduzido.

Vamos considerar D um $A_{\mathfrak{m}}$-módulo via φ, ie, para $d \in D$ e $\frac{a}{s} \in A_{\mathfrak{m}}$, $\frac{a}{s}\, d := \varphi(\frac{a}{s})\, d$. Temos que D é gerado por $\{(\frac{1}{1} + (f_{i_1})R_M, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, \frac{1}{1} + (f_{i_t})R_M)\}$, ou seja, o anel semi-local D é um módulo finitamente gerado sobre um anel local. Logo, segue de 1.55

que a topologia de D como anel semi-local coincide com a topologia de D como $A_\mathfrak{m}$-módulo. Assim, $0 \longrightarrow A_\mathfrak{m} \xrightarrow{\varphi} D$ é uma sequência exata de $A_\mathfrak{m}$-módulos finitamente gerados, e portanto, segue de 1.59 que a sequência de completamentos $\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$-ádicos $0 \longrightarrow \widehat{A_\mathfrak{m}} \xrightarrow{\widehat{\varphi}} \hat{D}$ é exata. Logo, podemos considerar $\widehat{A_\mathfrak{m}} \hookrightarrow \hat{D}$ via $\widehat{\varphi}$. E assim, como $\hat{D}$ é reduzido, segue que $\widehat{A_\mathfrak{m}}$ é reduzido. ∎

Capítulo 2

Operadores Diferenciais em uma Hipersuperfície

Neste capítulo, vamos introduzir a teoria dos operadores diferenciais em variedades algébricas afins e apresentar a Conjectura de Nakai. Serão demonstrados os resultados conhecidos a respeito da veracidade da conjectura para curvas planas e para um cone em espaço tridimensional.

2.1 Noções Básicas

Nesta seção, serão fixadas algumas notações e dadas algumas definições que serão a base para toda a dissertação.

Sejam k um anel, R uma k-álgebra e A um R-módulo. A multiplicação em A por um elemento $r \in R$ será denotada por r_A, e analogamente, r_R denotará o produto em R.

Seja $Hom_k(R, A)$ o conjunto dos homomorfismos k-lineares de R em A. Vamos considerar $Hom_k(R, A)$ como um R-módulo via A, ie, para $r \in R$ e $D \in Hom_k(R, A)$, temos $rD := r_A \circ D$.

Para $r \in R$ e $D \in Hom_k(R, A)$, o símbolo $[D, r]$ denota o elemento $D \circ r_R - r_A \circ D$ de $Hom_k(R, A)$.

A definição a seguir é o principal conceito envolvido nesta dissertação:

Definição 2.1 *Para $q \in \mathbb{Z}$, o R-submódulo $Diff_k^q(R, A)$ de $Hom_k(R, A)$ é definido por indução sobre q, da seguinte forma:*

$$Diff_k^q(R,A) = 0, \ se\ q < 0\ e$$
$$Diff_k^q(R,A) = \{D \in Hom_k(R,A) : [D,r] \in Diff_k^{q-1}(R,A), \forall\, r \in R\},\ se\ q \geq 0.$$

Os elementos de $Diff_k^q(R,A)$ são chamados *operadores diferenciais de R em A sobre k de ordem menor ou igual a q* .

Vejamos a seguir alguns fatos relevantes sobre os módulos $Diff_k^q(R,A)$:

Proposição 2.2

(1) *Seja R uma k-álgebra gerada por $\{r_i\}_{i\in I}$. Se $D \in Hom_k(R,A)$ e $[D,r_i] \in Diff_k^{q-1}(R,A)$, para todo $i \in I$, então $D \in Diff_k^q(R,A)$.*

(2) $Diff_k^0(R,A) = Hom_R(R,A) \cong A$.

(3) $Diff_k^q(R,A) \subset Diff_k^{q+1}(R,A), \forall\, q$.

Demonstração:

(1) Observemos que, para todo $D \in Hom_R(R,A)$, para quaisquer $r_1, r_2 \in R$ e para todo $c \in k$, temos que $[D, r_1 + cr_2] = [D, r_1] + c[D, r_2]$. Assim, basta provar que $[D,r] \in Diff_k^{q-1}(R,A)$ para todo $r \in R$ da forma $r = r_{i_1} \cdots r_{i_n}$.

Vamos provar por indução sobre n:

Para $n = 1$ não há nada a fazer. Supondo então $n \geq 2$ temos que:

$[D,r] = [D, r_{i_1} \cdots r_{i_{n-1}} \cdot r_{i_n}] = [\,[D, r_{i_1} \cdots r_{i_{n-1}}], r_{i_n}] + r_{i_n}[D, r_{i_1} \cdots r_{i_{n-1}}] + r_{i_1} \cdots r_{i_{n-1}}[D, r_{i_n}]$,
e assim o resultado segue por hipótese de indução.

Para ver (2), tome $D \in Hom_k(R,A)$. Note então que:

$$[D,r] \in Diff_k^{-1}(R,A), \forall\, r \in R \Leftrightarrow [D,r] = 0, \forall\, r \in R$$
$$\Leftrightarrow D(r\,r') = rD(r'), \forall\, r, r' \in R \Leftrightarrow D \in Hom_R(R,A).$$

O isomorfismo é dado pelo R-homomorfismo $D \mapsto D(1)$.

(3) segue por indução sobre q: sendo a afirmação clara para $q < 0$, seja $q \geq 0$ e seja $D \in Diff_k^q(R,A)$. Então, por hipótese de indução, $[D,r] \in Diff_k^{q-1}(R,A) \subset Diff_k^q(R,A)$, para todo $r \in R$, ou seja, $D \in Diff_k^{q+1}(R,A)$. ∎

Definição 2.3 *Defina* $Diff_k^\infty(R,A) := \bigcup_{q\in\mathbb{Z}} Diff_k^q(R,A)$.

Uma outra definição fundamental neste trabalho é o de *derivação de ordem superior*, que daremos abaixo:

Definição 2.4 *Para $q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 0$, um elemento $D \in Hom_k(R, A)$ é chamado uma* derivação de ordem q de R em A sobre k *se, para quaisquer $q+1$ elementos $r_0, \ldots, r_q$ de R, temos $D(r_0 \cdots r_q) = \sum_{s=1}^{q} (-1)^{s+1} \sum_{i_1 < \ldots < i_s} r_{i_1} \cdots r_{i_s} D(r_0 \cdots \hat{r_{i_1}} \cdots \hat{r_{i_s}} \cdots r_q)$, onde $^\wedge$ denota omitido.*

Denotamos por $Der_k^q(R, A)$ o R-submódulo de $Hom_k(R, A)$ de todas as derivações de ordem q. Defina $Der_k^q(R, A) := 0$, se $q < 0$.

Usualmente, uma derivação de ordem 1 é chamada simplesmente de *derivação.*

Observação 2.5 *Segue imediatamente da definição que:*

1. $Der_k^0(R, A) = 0$.

2. $Der_k^1(R, A)$ *nada mais é do que o módulo das k-derivações ordinárias de R em A.*

3. *Se $D \in Der_k^q(R, A)$ então $D(1) = 0$.*

Há uma relação entre $Diff_k^q(R, A)$ e $Der_k^q(R, A)$, a saber:

Lema 2.6 *Vamos denotar por a_R a aplicação R-linear $r \mapsto ra$ de R em A.*

(1) *Seja $D \in Hom_k(R, A)$. Então $D \in Diff_k^q(R, A)$ se, e somente se, $D - D(1)_R \in Der_k^q(R, A)$.*

(2) $Der_k^q(R, A) = \{D \in Diff_k^q(R, A) : D(1) = 0\}$.

Demonstração:

(1) Vamos provar por indução sobre q que se $D \in Diff_k^q(R, A)$ então $D - D(1)_R \in Der_k^q(R, A)$:

Para $q < 0$ não há nada a fazer.

Se $D \in Diff_k^0(R, A) = Hom_R(R, A)$ então $(D - D(1)_R)(r) = D(r) - rD(1) = 0$, para todo $r \in R$, ou seja, $(D - D(1)_R) \in Der_k^0(R, A) = 0$.

Se $D \in Diff_k^1(R, A)$ então, para todo $r \in R$, $[D, r] \in Diff_k^0(R, A) = Hom_R(R, A)$, e portanto $[D, r](a) = a[D, r](1)$, $\forall a \in R$. Assim, para $r_0, r_1 \in R$, temos que

$$(D - D(1)_R)(r_0r_1) = D(r_0r_1) - r_0r_1D(1) = D(r_0r_1) - r_0D(r_1) + r_0D(r_1) - r_0r_1D(1) =$$
$$= [D, r_0](r_1) + r_0D(r_1) - r_0r_1D(1) = r_1[D, r_0](1) + r_0D(r_1) - r_0r_1D(1) =$$

$= r_1D(r_0) - r_0r_1D(1) + r_0D(r_1) - r_0r_1D(1) = r_0(D(r_1) - r_1D(1)) + r_1(D(r_0) - r_0D(1)) =$
$= r_0(D - D(1)_R)(r_1) + r_1(D - D(1)_R)(r_0).$

Assim, sejam $q \geq 2$, $D \in Diff_k^q(R, A)$ e tome $q+1$ elementos $r_0, \ldots, r_q \in R$. Por hipótese de indução, $[D, r] - [D, r](1)_R \in Der_k^{q-1}(R, A)$, para todo $r \in R$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
&(D - D(1)_R)(r_0 \cdots r_q) = D(r_0 \cdots r_q) - r_0 \cdots r_q D(1) = \\
&= D(r_0 \cdots r_q) - r_0D(r_1 \cdots r_q) - r_1 \cdots r_q D(r_0) + r_0 \cdots r_q D(1) + r_0D(r_1 \cdots r_q) + r_1 \cdots r_q D(r_0) - \\
&\quad -2r_0 \cdots r_q D(1) = \\
&= ([D, r_0] - [D, r_0](1)_R)(r_1 \cdots r_q) + r_0D(r_1 \cdots r_q) + r_1 \cdots r_q D(r_0) - 2r_0 \cdots r_q D(1) = \\
&= \sum_{s=1}^{q-1} (-1)^{s+1} \sum_{0<i_1<\ldots<i_s} r_{i_1} \cdots r_{i_s}([D, r_0] - [D, r_0](1)_R)(r_1 \cdots \hat{r_{i_1}} \cdots \hat{r_{i_s}} \cdots r_q) + r_0D(r_1 \cdots r_q) + \\
&\quad + r_1 \cdots r_q D(r_0) - 2r_0 \cdots r_q D(1) = \\
&= \sum_{s=1}^{q-1} (-1)^{s+1} \sum_{0<i_1<\ldots<i_s} r_{i_1} \cdots r_{i_s} D(r_0r_1 \cdots \hat{r_{i_1}} \cdots \hat{r_{i_s}} \cdots r_q) - \\
&\quad - \sum_{s=1}^{q-1} (-1)^{s+1} \sum_{0<i_1<\ldots<i_s} r_{i_1} \cdots r_{i_s} r_0 D(r_1 \cdots \hat{r_{i_1}} \cdots \hat{r_{i_s}} \cdots r_q) - \\
&\quad - \sum_{s=1}^{q-1} (-1)^{s+1} \tfrac{q!}{(q-s)!s!} r_1 \cdots r_q D(r_0) + \sum_{s=1}^{q-1} (-1)^{s+1} \tfrac{q!}{(q-s)!s!} r_0 \cdots r_q D(1) + r_0D(r_1 \cdots r_q) + \\
&\quad + r_1 \cdots r_q D(r_0) - 2r_0 \cdots r_q D(1) = \\
&= \sum_{s=1}^{q-1} (-1)^{s+1} \sum_{0<i_1<\ldots<i_s} r_{i_1} \cdots r_{i_s} D(r_0r_1 \cdots \hat{r_{i_1}} \cdots \hat{r_{i_s}} \cdots r_q) + \\
&\quad + \sum_{s=1}^{q-1} (-1)^{(s+1)+1} \sum_{0<i_1<\ldots<i_s} r_{i_1} \cdots r_{i_s} r_0 D(r_1 \cdots \hat{r_{i_1}} \cdots \hat{r_{i_s}} \cdots r_q) - \\
&\quad - \sum_{s=1}^{q-1} (-1)^{s+1} \tfrac{q!}{(q-s)!s!} r_1 \cdots r_q D(r_0) + r_1 \cdots r_q D(r_0) \\
&\quad + r_0D(r_1 \cdots r_q) + \\
&\quad + \sum_{s=1}^{q-1} (-1)^{s+1} \tfrac{q!}{(q-s)!s!} r_0 \cdots r_q D(1) - 2r_0 \cdots r_q D(1) = \\
&= [\sum_{s=1}^{q-1} (-1)^{s+1} \sum_{0<i_1<\ldots<i_s} r_{i_1} \cdots r_{i_s} D(r_0r_1 \cdots \hat{r_{i_1}} \cdots \hat{r_{i_s}} \cdots r_q) + \\
&\quad + \sum_{s=1}^{q-1} (-1)^{(s+1)+1} \sum_{0<i_1<\ldots<i_s} r_{i_1} \cdots r_{i_s} r_0 D(r_1 \cdots \hat{r_{i_1}} \cdots \hat{r_{i_s}} \cdots r_q) + \\
&\quad + (-1)^{q+1} r_1 \cdots r_q D(r_0) + \\
&\quad + r_0D(r_1 \cdots r_q)] - \\
&\quad - \sum_{s=1}^{q} (-1)^{s+1} \tfrac{(q+1)!}{(q+1-s)!s!} r_0 \cdots r_q D(1) = \\
&= \sum_{s=1}^{q} (-1)^{s+1} \sum_{0\leqslant i_1<\ldots<i_s} r_{i_1} \cdots r_{i_s} D(r_0 \cdots \hat{r_{i_1}} \cdots \hat{r_{i_s}} \cdots r_q) - \\
&\quad - \sum_{s=1}^{q} (-1)^{s+1} \sum_{0\leqslant i_1<\ldots<i_s} r_{i_1} \cdots r_{i_s} D(1)_R(r_0 \cdots \hat{r_{i_1}} \cdots \hat{r_{i_s}} \cdots r_q) = \\
&= \sum_{s=1}^{q} (-1)^{s+1} \sum_{0\leqslant i_1<\ldots<i_s} r_{i_1} \cdots r_{i_s} (D - D(1)_R)(r_0 \cdots \hat{r_{i_1}} \cdots \hat{r_{i_s}} \cdots r_q).
\end{aligned}
$$

Reciprocamente, vamos provar também por indução sobre q que se $D - D(1)_R \in Der_k^q(R, A)$ então $D \in Diff_k^q(R, A)$:

Para $q < 0$ não há nada a fazer.

Se $D - D(1)_R \in Der_k^0(R,A) = 0$ então $D = D(1)_R \in Hom_R(R,A) = Diff_k^0(R,A)$.

Se $D - D(1)_R \in Der_k^1(R,A)$, então para quaisquer dois elementos $r_0, r_1 \in R$, temos $D(r_0r_1) - r_0r_1D(1) = (D - D(1)_R)(r_0r_1) = r_0D(r_1) - r_0r_1D(1) + r_1D(r_0) - r_0r_1D(1)$. Para provar que $D \in Diff_k^1(R,A)$, temos que mostrar que $[D,r] \in Diff_k^0(R,A)$, para todo $r \in R$, e de acordo com o que foi provado acima, é suficiente mostrarmos que $[D,r] - [D,r](1)_R \in Der_k^0(R,A) = 0$, para todo $r \in R$. Assim, seja $a \in R$. Então $([D,r] - [D,r](1)_R)(a) = D(ra) - rD(a) - aD(r) + raD(1) = D(ra) - raD(1) + 2raD(1) - rD(a) - aD(r) = rD(a) - raD(1) + aD(r) - raD(1) + 2raD(1) - rD(a) - aD(r) = 0$.

Vamos considerar agora $q \geq 2$ e $D - D(1)_R \in Der_k^q(R,A)$. Novamente, para provar que $D \in Diff_k^q(R,A)$, por hipótese de indução, basta mostrarmos que $[D,r] - [D,r](1)_R \in Der_k^{q-1}(R,A)$, para todo $r \in R$. Assim, para quaisquer elementos $r_0, r_1, \ldots, r_q$ de R, temos que:

$$
\begin{aligned}
&([D,r_0] - [D,r_0](1)_R)(r_1 \cdots r_q) = \\
&= D(r_0r_1 \cdots r_q) - r_0D(r_1 \cdots r_q) - r_1 \cdots r_qD(r_0) + r_0r_1 \cdots r_qD(1) = \\
&= D(r_0r_1 \cdots r_q) - r_0r_1 \cdots r_qD(1) + 2r_0r_1 \cdots r_qD(1) - r_0D(r_1 \cdots r_q) - r_1 \cdots r_qD(r_0) = \\
&= (D - D(1)_R)(r_0r_1 \cdots r_q) + 2r_0r_1 \cdots r_qD(1) - r_0D(r_1 \cdots r_q) - r_1 \cdots r_qD(r_0) = \\
&= \sum_{s=1}^{q} (-1)^{s+1} \sum_{0 \leqslant i_1 < \ldots < i_s} r_{i_1} \cdots r_{i_s} D(r_0 \cdots \hat{r_{i_1}} \cdots \hat{r_{i_s}} \cdots r_q) - \sum_{s=1}^{q} (-1)^{s+1} \tfrac{q!}{(q-s)!s!}\, r_0 \cdots r_qD(1) + \\
&\quad + 2r_0r_1 \cdots r_qD(1) - r_0D(r_1 \cdots r_q) - r_1 \cdots r_qD(r_0) = \\
&= (-1)^{1+1} r_0D(r_1 \cdots r_q) + (-1)^{q+1} r_1 \cdots r_qD(r_0) + \\
&\quad + \sum_{s=1}^{q-1} (-1)^{s+1} \sum_{0 < i_1 < \ldots < i_s} r_{i_1} \cdots r_{i_s} D(r_0r_1 \cdots \hat{r_{i_1}} \cdots \hat{r_{i_s}} \cdots r_q) + \\
&\quad + \sum_{s=1}^{q-1} (-1)^{(s+1)+1} \sum_{0 < i_1 < \ldots < i_s} r_0r_{i_1} \cdots r_{i_s} D(r_1 \cdots \hat{r_{i_1}} \cdots \hat{r_{i_s}} \cdots r_q) - \\
&\quad - \sum_{s=1}^{q} (-1)^{s+1} \tfrac{q!}{(q-s)!s!}\, r_0 \cdots r_qD(1) + \\
&\quad + 2r_0r_1 \cdots r_qD(1) - r_0D(r_1 \cdots r_q) - r_1 \cdots r_qD(r_0) = \\
&= \sum_{s=1}^{q-1} (-1)^{s+1} \sum_{0 < i_1 < \ldots < i_s} r_{i_1} \cdots r_{i_s} D(r_0r_1 \cdots \hat{r_{i_1}} \cdots \hat{r_{i_s}} \cdots r_q) - \\
&\quad - \sum_{s=1}^{q-1} (-1)^{s+1} \sum_{0 < i_1 < \ldots < i_s} r_0r_{i_1} \cdots r_{i_s} D(r_1 \cdots \hat{r_{i_1}} \cdots \hat{r_{i_s}} \cdots r_q) + \\
&\quad + [(-1)^{q+1} r_1 \cdots r_qD(r_0) - r_1 \cdots r_qD(r_0)] - \\
&\quad - [\sum_{s=1}^{q} (-1)^{s+1} \tfrac{(q+1)!}{(q+1-s)!s!}\, r_0 \cdots r_qD(1) - 2r_0r_1 \cdots r_qD(1)] = \\
&= \sum_{s=1}^{q-1} (-1)^{s+1} \sum_{0 < i_1 < \ldots < i_s} r_{i_1} \cdots r_{i_s} D(r_0r_1 \cdots \hat{r_{i_1}} \cdots \hat{r_{i_s}} \cdots r_q) - \\
&\quad - \sum_{s=1}^{q-1} (-1)^{s+1} \sum_{0 < i_1 < \ldots < i_s} r_0r_{i_1} \cdots r_{i_s} D(r_1 \cdots \hat{r_{i_1}} \cdots \hat{r_{i_s}} \cdots r_q) - \\
&\quad - \sum_{s=1}^{q-1} (-1)^{s+1} \tfrac{q!}{(q-s)!s!} r_1 \cdots r_qD(r_0) + \sum_{s=1}^{q-1} (-1)^{s+1} \tfrac{q!}{(q-s)!s!} r_0 \cdots r_qD(1) = \\
&= \sum_{s=1}^{q-1} (-1)^{s+1} \sum_{0 < i_1 < \ldots < i_s} [r_{i_1} \cdots r_{i_s} D(r_0r_1 \cdots \hat{r_{i_1}} \cdots \hat{r_{i_s}} \cdots r_q) -
\end{aligned}
$$

$$-r_{i_1}\cdots r_{i_s}r_0D(r_1\cdots\hat{r_{i_1}}\cdots\hat{r_{i_s}}\cdots r_q)-$$
$$-r_1\cdots r_qD(r_0)+r_0r_1\cdots r_qD(1)]=$$
$$=\sum_{s=1}^{q-1}(-1)^{s+1}\sum_{0<i_1<\ldots<i_s} r_{i_1}\cdots r_{i_s}([D,r_0]-[D,r_0](1)_R)(r_1\cdots\hat{r_{i_1}}\cdots\hat{r_{i_s}}\cdots r_q).$$

(2) segue facilmente de (1) e da observação anterior. ∎

Note que como consequência do lema acima (2), $Der_k^q(R,A)\subset Der_k^{q+1}(R,A), \forall\, q$.

Definição 2.7 $Der_k^{\infty}(R,A):=\bigcup_{q\in\mathbb{Z}} Der_k^q(R,A)$.

Observação 2.8 *Note que se $D\in Diff_k^q(R,A)$ então $D=D_0+D_q$, com $D_0\in Diff_k^0(R,A)$ e $D_q\in Der_k^q(R,A)$.*

De fato, seja $a:=D(1)$. Então, $D=a_R+D-a_R$, onde $a_R\in Hom_R(R,A)=Diff_k^0(R,A)$ e $D-a_R\in Der_k^q(R,A)$, já que $(D-a_R)(1)=0$.

Agora, vamos assumir que $A=R$. Neste caso, escrevemos $Diff_k^q(A)$ ao invés de $Diff_k^q(A,A)$, $Der_k^q(A)$ ao invés de $Der_k^q(A,A)$ e $Diff_k^{\infty}(A)$ denotará $Diff_k^{\infty}(A,A)$.

Denotamos por $Diff_k^q(A)\,Diff_k^p(A)$ o A-submódulo de $Diff_k^{q+p}(A)$ gerado pelos produtos D_iD_i', com $D_i\in Diff_k^q(A)$ e $D_i'\in Diff_k^p(A)$.

Analogamente, temos definido $Der_k^q(A)Der_k^p(A)$.

A Proposição 2.2 e o próximo resultado nos diz que a família $\{Diff_k^q(A):q\in\mathbb{Z}\}$ é uma filtração para a A-álgebra $Diff_k^{\infty}(A)$:

Proposição 2.9 *Sejam A uma k-álgebra e q,p inteiros (ou ∞). Então:*

(1) $Diff_k^q(A)\,Diff_k^p(A)\subseteq Diff_k^{q+p}(A)$.

(2) $Diff_k^q(A)\,Der_k^p(A)\subseteq Der_k^{q+p}(A)$.

Demonstração: Para mostrar (1) basta observar que, dados $D\in Diff_k^q(A)$, $D'\in Diff_k^p(A)$ e $a\in A$ tem-se $[DD',a]=D\circ[D',a]+[D,a]\circ D'$, e assim o resultado segue por indução sobre $q,p\in\mathbb{N}$. Evidentemente, (2) é consequência imediata de (1). ∎

Vamos introduzir a seguir uma terminologia essencial no contexto da Conjectura de Nakai.

Definição 2.10 *Para um inteiro $q \geq 1$, denotaremos por $diff_k^q(A)$ o A-submódulo de $Diff_k^q(A)$ dado por:*

$$diff_k^q(A) := \{D \in Diff_k^q(A) \,:\, D = \sum_{I=(i_1,\dots,i_q)} a_I d_{i_1} \cdots d_{i_q},\ d_{i_j} \in Diff_k^1(A),\ a_I \in A,\ a_I = 0 \ q.s.\}.$$

Se $q \geq 2$, dizemos que $Diff_k^q(A)$ é gerado por *$Diff_k^1(A)$ se $Diff_k^q(A) = diff_k^q(A)$, e $Diff_k^\infty(A)$* é gerado por *$Diff_k^1(A)$ se $Diff_k^q(A)$ é gerado por $Diff_k^1(A)$, para todo $q \geq 2$. Neste caso, escrevemos $Diff_k^\infty(A) = diff_k^\infty(A)$.*

Vejamos a conexão entre estes conceitos:

Lema 2.11 *Para $q \geq 2$, temos que $Diff_k^1(A) Diff_k^{q-1}(A) = Diff_k^{q-1}(A) + Der_k^1(A)\, Der_k^{q-1}(A)$. Além disso, são equivalentes:*

(i) *$Diff_k^\infty(A)$ é gerado por $Diff_k^1(A)$.*

(ii) *$Diff_k^q(A) = Diff_k^1(A)\, Diff_k^{q-1}(A)$, para todo $q \geq 2$.*

Demonstração: É claro que $Diff_k^{q-1}(A) + Der_k^1(A)\, Der_k^{q-1}(A) \subseteq Diff_k^1(A) Diff_k^{q-1}(A)$, já que $Der_k^1(A)\, Der_k^{q-1}(A) \subseteq Diff_k^1(A) Diff_k^{q-1}(A)$ e se $D \in Diff_k^{q-1}(A)$ então $D = id_A \circ D \in Diff_k^1(A) Diff_k^{q-1}(A)$, pois $id_A \in Hom_A(A) = Diff_k^0(A) \subseteq Diff_k^1(A)$.

Agora, seja $D \in Diff_k^1(A) Diff_k^{q-1}(A)$. Podemos supor $D = D'D''$, com $D' \in Diff_k^1(A)$ e $D'' \in Diff_k^{q-1}(A)$. Segue da observação acima que $D' = D_0' + D_1'$, com $D_0' \in Diff_k^0(R, A)$ e $D_1' \in Der_k^1(R, A)$ e $D'' = D_0'' + D_{q-1}''$, com $D_0'' \in Diff_k^0(R, A)$ e $D_{q-1}'' \in Der_k^{q-1}(R, A)$. Assim, $D = D_0' D_0'' + D_0' D_{q-1}'' + D_1' D_0'' + D_1' D_{q-1}''$, com $D_0' D_0'' + D_0' D_{q-1}'' + D_1' D_0'' \in Diff_k^{q-1}(A)$ e $D_1' D_{q-1}'' \in Der_k^1(A)\, Der_k^{q-1}(A)$.

A equivalência é imediata. ∎

A *Conjectura de Nakai* diz respeito a uma questão bastante natural: podem os operadores diferenciais detectar singularidades em variedades algébricas?

No caso em que X é uma variedade algébrica sobre um corpo k de característica zero e A é o seu anel de coordenadas, Grothendieck ([2], IV, 16.11.2) mostrou que se A for regular então $Diff_k^\infty(A) = diff_k^\infty(A)$, ou seja, $Diff_k^\infty(A)$ é gerado por $Diff_k^1(A)$. Nakai, em [6], conjecturou o fato desta condição caracterizar a regularidade de A:

CONJECTURA DE NAKAI: *Seja A uma álgebra finitamente gerada sobre um corpo k de característica zero. Se $Diff_k^{\infty}(A) = diff_k^{\infty}(A)$ então A é regular.*

2.2 Anéis de Polinômios

Nesta seção, vamos dar alguns resultados gerais sobre $Diff_k^q(R, A)$ no caso especial em que R é um anel de polinômios sobre um corpo de característica zero e $A = \frac{R}{J}$, J um ideal de R. Neste caso, a estrutura de $Diff_k^q(R, A)$ é bem conhecida, e assim, uma descrição de $Diff_k^q(A)$ também pode ser dada, através de uma identificação entre $Diff_k^q(A)$ e o A-submódulo dos operadores $D \in Diff_k^q(R, A)$ tais que $D(J) = 0$.

Em toda essa seção, vamos assumir k um corpo de característica zero, $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ o anel de polinômios em n variáveis sobre k, J um ideal próprio de R e $A = \frac{R}{J}$.

Seja $\pi : R \to A$ a projeção canônica e $x_i := \pi(X_i)$, para $1 \leq i \leq n$.

Vamos fixar mais algumas notações a seguir:

$V := \mathbb{N}^n$, onde n é o número de variáveis de R.

Seja $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in V$, onde $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ é a base canônica de V.

$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, $X^\alpha := X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$.

$\frac{\partial^\alpha}{\partial X^\alpha} := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial X_1^{\alpha_1} \cdots \partial X_n^{\alpha_n}} = (\frac{\partial}{\partial X_1})^{\alpha_1} \circ \cdots \circ (\frac{\partial}{\partial X_n})^{\alpha_n}$.

$\Delta_\alpha := \pi \circ (\frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial X^\alpha}) \in Diff_k^{|\alpha|}(R, A)$.

$V_q := \{\alpha \in V : |\alpha| \leq q\}$, $W_q := \{\alpha \in V : |\alpha| = q\}$.

A próxima proposição nos diz que, no caso em que R é um anel de polinômios, temos que $Diff_k^q(R, A)$ é um R-módulo livre de posto infinito, a saber:

Proposição 2.12 *Todo $D \in Diff_k^{\infty}(R, A)$ possui uma única expressão da forma:*

$$D = \sum_{\alpha \in V} c_\alpha(D)\, \Delta_\alpha,$$

com $c_\alpha(D) \in A$, para todo α e $c_\alpha(D) = 0$, para quase todo α. Além disso, $D \in Diff_k^q(R, A)$ se, e somente se, $c_\alpha(D) = 0$, para $|\alpha| > q$.

Antes de demonstrar esta proposição, vamos ressaltar alguns fatos:

Lema 2.13 *Segue das propriedades de derivada parcial que:*

(i) $\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha}{\partial X^\alpha}(X^\alpha) = 1$, *para todo* $\alpha \in V$.

(ii) $\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha}{\partial X^\alpha}(X^\beta) = 0$, *para todo* $\beta \in V$ *tal que* $|\beta| \leq |\alpha|$, $\beta \neq \alpha$.

Além disso, todo $D \in Diff_k^q(R, A)$ *é unicamente determinado pelos valores* $D(X^\alpha)$, *com* $|\alpha| \leq q$.

Demonstração:

(i) Vamos mostrar por indução sobre $|\alpha|$:

Se $|\alpha| = 1$ então $\alpha = e_i$, para algum $i = 1, \ldots, n$. Assim, $\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha}{\partial X^\alpha}(X^\alpha) = \frac{\partial}{\partial X_i}(X_i) = 1$.

Consideremos então $|\alpha| > 1$. Podemos supor sem perda de generalidade que $\alpha = \beta + e_n$, $|\beta| = |\alpha| - 1$. Logo, por hipótese de indução, $\frac{1}{\beta!}\frac{\partial^\beta}{\partial X^\beta}(X^\beta) = 1$. Assim, $\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha}{\partial X^\alpha}(X^\alpha)$ $= \frac{1}{\beta_1! \cdots \beta_{n-1}!(\beta_n+1)!} \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial X_1^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial^{\beta_n+1}}{\partial X_1^{\beta_n+1}} (X_1^{\beta_1} \cdots X_n^{\beta_n+1}) = \frac{1}{\beta_n+1} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^\beta}{\partial X^\beta} \frac{\partial}{\partial X_n} (X_1^{\beta_1} \cdots X_n^{\beta_n+1}) =$
$= \frac{1}{\beta_n+1} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^\beta}{\partial X^\beta} ((\beta_n + 1) X_1^{\beta_1} \cdots X_n^{\beta_n}) = \frac{1}{\beta_n+1} (\beta_n + 1) \frac{1}{\beta!}\frac{\partial^\beta}{\partial X^\beta}(X^\beta) = 1$.

(ii) Como $|\beta| \leq |\alpha|$ e $\beta \neq \alpha$, existe $i = 1, \ldots, n$ tal que $\alpha_i > \beta_i$, digamos $\alpha_i = \beta_i + m$, com $m > 0$. Portanto, $\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha}{\partial X^\alpha}(X^\beta) = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial X_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial X_n^{\alpha_n}} (X_1^{\beta_1} \cdots X_n^{\beta_n}) =$
$= \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial X_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_{i-1}}}{\partial X_{i-1}^{\alpha_{i-1}}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_{i+1}}}{\partial X_{i+1}^{\alpha_{i+1}}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial X_n^{\alpha_n}} \frac{\partial^m}{\partial X_i^m} \frac{\partial^{\beta_i}}{\partial X_i^{\beta_i}} (X_1^{\beta_1} \cdots X_i^{\beta_i} \cdots X_n^{\beta_n}) =$
$= \frac{\beta_i!}{\alpha!} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial X_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_{i-1}}}{\partial X_{i-1}^{\alpha_{i-1}}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_{i+1}}}{\partial X_{i+1}^{\alpha_{i+1}}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial X_n^{\alpha_n}} \frac{\partial^m}{\partial X_i^m} (X_1^{\beta_1} \cdots \hat{X}_i \cdots X_n^{\beta_n}) = 0$.

Agora, seja $D \in Diff_k^q(R, A)$. Temos que $\{X^\alpha : \alpha \in V\}$ consiste numa k-base livre de R. Assim, como D é um k-homomorfismo, basta conhecer os seus valores na base. Além disso, segue da Observação 2.8 que $D = D_0 + D_q$, com $D_0 \in Diff_k^0(R, A)$ e $D_q \in Der_k^q(R, A)$. Para determinar um elemento de $Diff_k^0(R, A) = Hom_R(R, A)$, basta saber o seu valor em $1 = X^0$. Assim, resta apenas mostrar o resultado para D_q. Mas como $D_q \in Der_k^q(R, A)$, segue da fórmula das derivações de ordem superior que é suficiente conhecer os seus valores nos elementos da base com norma $\leq q$. ∎

Corolário 2.14 *Para* $\alpha \in V$, $\Delta_\alpha \in Diff_k^{|\alpha|}(R, A)$ *é unicamente determinado pelos valores* $\Delta_\alpha(X^\beta)$, *com* $|\beta| \leq |\alpha|$, *que são dados por:* $\Delta_\alpha(X^\alpha) = \overline{1}$ *e* $\Delta_\alpha(X^\beta) = \overline{0}$, *para todo* $\beta \in V$ *tal que* $|\beta| \leq |\alpha|$ *e* $\beta \neq \alpha$. ∎

Demonstração de 2.12: Assim como no lema acima, a partir da Observação 2.8 basta mostrar que se $D \in Der_k^\infty(R, A)$ então $D = \sum_{\alpha \in V,\, \alpha \neq 0} c_\alpha(D)\, \Delta_\alpha$, com $c_\alpha(D) \in A$, para todo α, e $c_\alpha(D) = 0$, para quase todo α. Com efeito, $D_0 = D(1)_R = D(1)\Delta_0 =: c_0(D)\Delta_0$.

Assim, dado $D \in Der_k^\infty(R, A)$, defina:

$$A_D := \{\, m \in \mathbb{N} : \exists!\ D_m \in Der_k^m(R, A) \text{ do tipo } D_m = \sum_{\alpha \in V,\, \alpha \neq 0} c_\alpha(D_m)\, \Delta_\alpha, \\ \text{com } (D - D_m)(X^\beta) = 0,\ \forall\ 0 \leq |\beta| \leq m \,\}.$$

Vamos mostrar por indução sobre m que $A_D = \mathbb{N}$:

Para $m = 1$, basta tomarmos $D_1 = \sum_{i=1}^{q} D(X_i)\, \Delta_{e_i}$. (Vale ressaltar que temos como consequência o fato de que se $D \in Diff_k^q(R, A)$ então $c_{e_i}(D) = D(X_i)$, para $1 \leq i \leq q$, devido à condição de unicidade.)

Suponhamos agora que $m \in A_D$. Então, existe um único $D_m = \sum_{\alpha \in V,\, \alpha \neq 0} c_\alpha(D_m)\, \Delta_\alpha \in Der_k^m(R, A)$, com $(D - D_m)(X^\beta) = 0$, para todo β com $1 \leq |\beta| \leq m$. Devido à unicidade, se existir D_{m+1} nas condições de A_D, então $D_{m+1} = D_m + \sum_{|\alpha| = m+1} c_\alpha(D_{m+1})\, \Delta_\alpha$. Basta tomarmos $c_\alpha(D_{m+1}) := D(X^\alpha) - D_m(X^\alpha)$ para todo α com $|\alpha| = m + 1$.

Assim, como $D \in Der_k^\infty(R, A)$, então $D \in Der_k^q(R, A)$, para algum $q \in \mathbb{N} = A_D$, ou seja, existe um único $D_q = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq q} c_\alpha(D_q)\, \Delta_\alpha \in Der_k^q(R, A)$ tal que $(D - D_q)(X^\beta) = 0$, para todo β com $1 \leq |\beta| \leq q$, e a proposição segue do Lema 2.13. ∎

Exemplo 2.15 *$Der_k^1(R)$ é um R-módulo livre de posto n com base $\{\partial/\partial X_1, \ldots, \partial/\partial X_n\}$.*

As propriedades de $c_\alpha(D)$ dadas a seguir são de caráter apenas técnico, e serão usadas nas demonstrações de 2.30 e 2.44:

Lema 2.16 *Sejam $D \in Diff_k^\infty(R, A)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in V$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$. Então*

$$c_\beta([D, X_j]) = c_{\beta + e_j}(D).$$

Demonstração: Note que

$$[\Delta_\beta, X_j] = \begin{cases} \Delta_{\beta - e_j}, & \text{se } \beta_j > 0, \\ 0, & \text{se } \beta_j = 0. \end{cases}$$

De fato, se $\beta_j = 0$ então $[\Delta_\beta, X_j](f) = \Delta_\beta(X_j f) - X_j \Delta_\beta(f) = \pi(\frac{1}{\beta!}\frac{\partial^\beta}{\partial X^\beta}(X_j f) - X_j \frac{1}{\beta!}\frac{\partial^\beta}{\partial X^\beta}(f)) =$

$= \pi(X_j \frac{1}{\beta!}\frac{\partial^\beta}{\partial X^\beta}(f) - X_j \frac{1}{\beta!}\frac{\partial^\beta}{\partial X^\beta}(f)) = 0$, para todo $f \in R$. Se $\beta_j > 0$, temos pelo Corolário 2.14 que $[\Delta_\beta, X_j](X^{\beta-e_j}) = \Delta_\beta(X_\beta) - X_j\Delta_\beta(X^{\beta-e_j}) = \overline{1} - \overline{0} = \overline{1}$, e $[\Delta_\beta, X_j](X^\gamma) = \Delta_\beta(X^{\gamma+e_j}) - X_j\Delta_\beta(X^\gamma) = \overline{0} - \overline{0} = \overline{0}$, para todo $\gamma \in V$ tal que $|\gamma| \leq |\beta - e_j|$ e $\gamma \neq \beta - e_j$, e o resultado segue novamente por 2.14.

Assim, se $D = \sum_{\alpha \in V} c_\alpha(D)\,\Delta_\alpha$ então $[D, X_j] = \sum_{\alpha \in V} c_{\alpha+e_j}(D)\,\Delta_\alpha$. ∎

Proposição 2.17 *Sejam $D \in Der_k^1(A)$ e $D' \in Diff_k^q(A)$. Então, para todo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in W_{q+1}$, ie, $|\alpha| = q + 1$, temos*

$$c_\alpha(DD') = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\; D(X_i)\; c_{\alpha-e_i}(D').$$

(É claro que se $\alpha_i = 0$ então $c_{\alpha-e_i}(D')$ não está definido; então, tomamos o somando correspondente como sendo zero por convenção.)

Demonstração: Vamos mostrar por indução sobre q :

Para $q < 0$, não há nada a fazer.

Assim, seja $q \geq 0$, e seja $\alpha \in W_{q+1}$. Podemos assumir então $\alpha = e_1 + \beta$, com $|\beta| = q$. Além disso, $[D', X_1] \in Diff_k^q(A)$. Logo, temos por indução que $c_\beta(D[D', X_1]) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\; D(X_i)\; c_{\beta-e_i}([D', X_1]) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\; D(X_i)\; c_{\alpha-e_i}(D')$ pelo Lema 2.16.

Por outro lado, novamente por 2.16, temos que $c_\alpha(DD') = c_\beta([DD', X_1])$.

Como $D \in Der_k^1(A)$, temos que $[DD', X_1] - D[D', X_1] = D(X_1)D'$. Portanto, $c_\beta[DD', X_1] - c_\beta(D[D', X_1]) = c_\beta(D(X_1)D') = D(X_1)c_\beta(D')$.

Finalmente, $c_\alpha(DD') = c_\beta([DD', X_1]) = D(X_1)c_\beta(D') + \sum_{i=1}^{n} \beta_i\; D(X_i)\; c_{\alpha-e_i}(D') =$
$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\; D(X_i)\; c_{\alpha-e_i}(D')$. ∎

No presente caso em que $A = \frac{R}{J}$, a próxima proposição identifica $Diff_k^q(A)$ com o A-submódulo de $Diff_k^q(R, A)$ definido por $\mathfrak{D}^q(J) := \{D \in Diff_k^q(R, A) : D(J) = 0\}$.

Proposição 2.18 *Dado $q \in \mathbb{N}$, a função*

$$\varphi : Diff_k^q(A) \to \mathfrak{D}^q(J)$$
$$D \mapsto D \circ \pi,$$

(onde π é a projeção canônica) é um k-isomorfismo.

Demonstração: Dados $D \in Diff_k^q(A)$ e $f \in R$, pode-se provar de maneira simples que

$$[D, \pi(f)] \circ \pi = [D \circ \pi, f] = [\varphi(D), f].$$

A partir destas igualdades se conclui, por indução sobre q, que de fato $\varphi(D) \in Diff_k^q(R, A)$. Agora, é claro que $[\varphi(D)](J) = 0$, e assim $\varphi(D) \in \mathfrak{D}^q(J)$. É fácil ver também que φ é um k-homomorfismo. Além disso, do fato de que π é sobrejetora, conclui-se que φ é injetora. Provemos portanto que φ é sobrejetora. Para isto, tome $\widetilde{D} \in \mathfrak{D}^q(J)$. Como $\widetilde{D} : R \to A$ é um k-homomorfismo e $\widetilde{D}(J) = 0$, $\widetilde{D}$ induz uma aplicação k-linear dada por

$$\begin{aligned} D &: A \to A \\ f + J &\mapsto D(f + J) = D(\pi(f)) := \widetilde{D}(f), \end{aligned}$$

ou seja, $\widetilde{D} = D \circ \pi = \varphi(D)$. Do mesmo modo se prova, por indução sobre q que tal $D \in Diff_k^q(A)$. ∎

Assim, daqui em diante, a seguinte identificação será usada frenquentemente neste trabalho para caracterizar os operadores de $Diff_k^q(A)$:

Identificação 2.19 *Vamos identificar*

$$Diff_k^q(A) = \{D \in Diff_k^q(R, A) : D(J) = 0\},$$

$$Der_k^q(A) = \{D \in Der_k^q(R, A) : D(J) = 0\}.$$

Vamos analisar a condição $D(J) = 0$ com certo detalhe. Definiremos a seguir alguns operadores diferenciais obtidos a partir de D, e na próxima proposição, vamos provar que para que $D(J)$ seja zero, é necessário e suficiente que estes operadores se anulem em algum conjunto de geradores de J.

Definição 2.20 *Sejam $D \in Diff_k^\infty(R, A)$ e $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in V$. Defina:*

$$\langle D, X^\beta \rangle := \sum_{\alpha \in V} c_{\alpha+\beta}(D)\ \Delta_\alpha.$$

Observe que $\langle D, 1 \rangle = D$ e se $D \in Diff_k^q(R, A)$ então $\langle D, X^\beta \rangle \in Diff_k^{q-|\beta|}(R, A)$.

A seguir, daremos um lema técnico, que será usado na demonstração da próxima proposição.

Lema 2.21 *Sejam* $D \in Diff_k^{\infty}(R, A)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in V$ *e* $j \in \{1, \ldots, n\}$. *Então:*

(1) $\langle D, X_j \rangle = [D, X_j]$.

(2) $\langle \langle D, X^{\beta} \rangle, X^{\gamma} \rangle = \langle D, X^{\beta+\gamma} \rangle$.

(3) $\langle [D, X_j], X^{\beta} \rangle = \langle D, X_j X^{\beta} \rangle$.

(4) *Se* $X^{\beta} = X_{i_1} \cdots X_{i_s}$, *com* $X_{i_j} \in \{X_1, \ldots, X_n\}$, $j = 1, \ldots, s$, *então* $\langle D, X^{\beta} \rangle = [\cdots [[D, X_{i_1}], X_{i_2}], \cdots, X_{i_s}]$.

Demonstração:

(1) $\langle D, X_j \rangle = \sum\limits_{\alpha \in V} c_{\alpha + e_j}(D)\, \Delta_{\alpha} = \sum\limits_{\alpha \in V} c_{\alpha}([D, X_j])\, \Delta_{\alpha} = [D, X_j]$.

Mais ainda, para $\alpha \in V$, $c_{\alpha}(\langle \langle D, X_j \rangle, X^{\gamma} \rangle) = c_{\alpha+\gamma}(\langle D, X^{\beta} \rangle) = c_{\alpha+\gamma+\beta}(D) = c_{\alpha}(\langle D, X^{\beta+\gamma} \rangle)$, o que prova (2).

Agora (3) segue de maneira imediata a partir de (1) e (2), assim como (4) é consequência imediata de (3). ∎

A proposição a seguir será particularmente interessante no caso em que $I = J$, caso este em que ela nos dá condições de fazermos a Identificação 2.19.

Proposição 2.22 *Seja* I *um ideal de* R. *Para* $D \in Diff_k^q(R, A)$ *as seguintes condições são equivalentes:*

(*i*) $D(I) \subset IA$.

(*ii*) $[D, X_i](I) \subset IA$ *para todo* i, $1 \leq i \leq n$, *e existe um conjunto de geradores* $\{f_j\}$ *de* I *tal que* $D(f_j) \in IA$, *para todo* j.

(*iii*) $\langle D, X^{\beta} \rangle (I) \subset IA$, *para todo* $\beta \in V$.

(*iv*) $\langle D, X^{\beta} \rangle (I) \subset IA$, *para todo* $\beta \in V_{q-1}$.

(*v*) *Existe um conjunto de geradores* $\{f_j\}$ *de* I *tal que* $\langle D, X^{\beta} \rangle (f_j) \in IA$, *para todo* $\beta \in V_{q-1}$ *e para todo* j.

Demonstração: As implicações $(i) \Rightarrow (ii)$ e $(iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v)$ são triviais, e $(i) \Rightarrow (iii)$ segue da parte (4) do lema acima.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Basta mostrar que, para todo $\beta \in V$ e para todo j, temos $D(X^\beta f_j) \in IA$. Vamos fazer tal prova por indução sobre $|\beta|$:
Para $|\beta| = 0$, caímos numa das hipóteses de (ii).
Se $|\beta| > 0$, podemos assumir que $\beta = e_1 + \gamma$, com $\gamma \in V$. Assim, pela hipótese de indução e por (ii), temos que $D(X^\beta f_j) = [D, X_1](X^\gamma f_j) + X_1 D(X^\gamma f_j) \in IA$.

$(v) \Rightarrow (i)$: Na verdade, basta mostrar que $(v) \Rightarrow (ii)$.

Indução sobre q:
A afirmação é trivial para $q \leq 0$. Assim, assuma $q \geq 1$. Por (3) do lema anterior e por (v) temos que $\langle [D, X_i], X^\beta \rangle (f_j) = \langle D, X_i X^\beta \rangle (f_j) \in IA$, para todo $\beta \in V_{q-2}$ e para todo j. Portanto, por hipótese de indução, $[D, X_i](I) \subset IA$, para todo i, $1 \leq i \leq n$. O resto da afirmação segue tomando $\beta = 0$ em (v). ∎

Note que se tomarmos $I = J$ na proposição acima e usarmos a Identificação 2.19, obteremos o seguinte resultado:

Corolário 2.23 *Para $D \in Diff_k^q(R, A)$, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $D \in Diff_k^q(A)$.

(ii) $\langle D, X^\beta \rangle \in Diff_k^{q-|\beta|}(A)$, *para todo* $\beta \in V$.

(iii) $\langle D, X^\beta \rangle \in Diff_k^{q-|\beta|}(A)$, *para todo* $\beta \in V_{q-1}$. ∎

Usando estes resultados, vamos mostrar agora que em alguns casos, $Diff_k^2(A)$ fica completamente determinado a partir de $Diff_k^1(A)$.

Definição 2.24 *Dados $p, q \in \mathbb{N}$ e lembrando que $W_p = \{\alpha \in V : |\alpha| = p\}$, defina:*

$$\begin{aligned} \Phi_{q,p} : Diff_k^q(R, A) \times W_p &\longrightarrow Der_k^{q-p}(R, A) \\ (D, \beta) &\longmapsto \langle D, X^\beta \rangle - (\langle D, X^\beta \rangle (1))_R = \\ &\quad \langle D, X^\beta \rangle - c_\beta(D)\, \Delta_0 \end{aligned}$$

Proposição 2.25 *Para $p \leq q$, temos a seguinte sequência exata de R-módulos:*

$$0 \longrightarrow Diff_k^p(R,A) \hookrightarrow Diff_k^q(R,A) \xrightarrow{\Theta_{q,p}} \bigoplus_{\beta \in W_p} Der_k^{q-p}(R,A),$$

onde $\Theta_{q,p}(D) := (\Phi_{q,p}(D,\beta))_{\beta \in W_p}$.

Demonstração: Como $\Theta_{q,p}(Diff_k^p(R,A)) \subset Der_k^{p-p}(R,A) = 0$, basta mostrarmos que $Ker(\Theta_{q,p}) \subset Diff_k^p(R,A)$.

Suponha $\Theta_{q,p}(D) = 0$. Então $\langle D, X^\beta\rangle = c_\beta \Delta_0$, para todo $\beta \in W_p$. Mas $\langle D, X^\beta\rangle = \sum_{\alpha \in V} c_{\alpha+\beta}(D)\, \Delta_\alpha$. Logo, pela unicidade da expressão, temos que $c_{\alpha+\beta} = 0, \forall\, \alpha \in V, |\alpha| > 0$ e $\forall\, \beta \in W_p$. Portanto, $c_\alpha(D) = 0, \forall\, \alpha \in V, |\alpha| > p$, ou seja, $D \in Diff_k^p(R,A)$. ∎

De acordo com o Corolário 2.23, as aplicações $\Phi_{q,p}$ da Definição 2.24 induzem as seguintes:

$$\begin{aligned} \varphi_{q,p} : Diff_k^q(A) \times W_p &\to Der_k^{q-p}(A) \\ (D,\beta) &\longmapsto \langle D, X^\beta\rangle - c_\beta(D)\,\Delta_0 \end{aligned}$$

e segue da Proposição 2.25 que para $p \leq q$, temos uma sequência exata de A-módulos:

$$0 \longrightarrow Diff_k^p(A) \hookrightarrow Diff_k^q(A) \xrightarrow{\theta_{q,p}} \bigoplus_{\beta \in W_p} Der_k^{q-p}(A),$$

onde $\theta_{q,p}(D) := (\varphi_{q,p}(D,\beta))_{\beta \in W_p}$.

Definição 2.26 *Seja $q \in \mathbb{Z}$. Defina:*

$$\mathfrak{D}_k^q(A) := \{\ (d_\beta)_{\beta \in W_{q-1}} \in \bigoplus_{\beta \in W_{q-1}} Der_k^1(A)\ :\ d_\beta(x_i) = d_\gamma(x_j),\ \textit{para todo}\ \beta,\gamma \in W_{q-1}$$
$$\textit{com}\ \beta + e_i = \gamma + e_j,\ 1 \leq i,j \leq n\ \}.$$

Note que se $D \in Diff_k^q(A)$ e $\theta_{q,q-1}(D) = (d_\beta)_{\beta \in W_{q-1}}$ então $d_\beta(x_i) = c_{\beta+e_i}(D)$. De fato, para $\beta \in W_{q-1}$ e $j \in \{1,\ldots,n\}$, temos que $d_\beta(x_i) = ((D, X^\beta\rangle - c_\beta(D)\Delta_0)(x_i) = \sum_{\alpha \in V} c_{\alpha+\beta}(D)\,\Delta_\alpha(x^{e_i}) - c_\beta(D)\Delta_0)(x_i) = c_\beta(D)\Delta_0(x^{e_i}) + c_{e_i+\beta}(D)\Delta_{e_i}(x^{e_i}) - c_\beta(D)\Delta_0(x^{e_i}) = c_{\beta+e_i}(D)$. Assim, se $\beta + e_i = \gamma + e_j$ então $d_\beta(x_i) = c_{\beta+e_i}(D) = c_{\gamma+e_j}(D) = d_\gamma(x_j)$, ou seja, $Im(\theta_{q,q-1}) \subset \mathfrak{D}_k^q(A)$.

Portanto, se denotarmos $\theta_{q,q-1}$ por θ_q, teremos a seguinte sequência exata de A-módulos:

$$0 \longrightarrow Diff_k^{q-1}(A) \hookrightarrow Diff_k^q(A) \xrightarrow{\theta_q} \mathfrak{D}_k^q(A).$$

Será interessante para nós o caso particular onde $q = 2$. Assim, cabe aqui destacar a definição de θ_2 : dada a sequência exata $0 \longrightarrow Diff_k^1(A) \hookrightarrow Diff_k^2(A) \xrightarrow{\theta_2} \mathfrak{D}_k^2(A)$ e observando que $\mathfrak{D}_k^2(A) = \{ \ (d_1, \ldots, d_n) \in \bigoplus_{i=1}^{n} Der_k^1(A) \ : \ d_i(x_j) = d_j(x_i), \text{ para todo } i, j \ \}$, define-se θ_2 da seguinte maneira:

Definição 2.27 *Dado $D \in Diff_k^2(A)$, $\theta_2(D) := (d_1, \ldots, d_n)$, onde $d_i \in Der_k^1(A)$ é dado por $d_i(x_j) = c_{e_i+e_j}(D)$.*

No caso em que J é principal, temos que θ_2 é sobrejetiva:

Teorema 2.28 *Se J é principal então a sequência de A-módulos*

$$0 \longrightarrow Diff_k^1(A) \hookrightarrow Diff_k^2(A) \xrightarrow{\theta_2} \mathfrak{D}_k^2(A) \longrightarrow 0$$

é exata.

Demonstração: Temos que mostrar apenas a sobrejetividade de θ_2 :

Suponhamos $J = Rf$, e seja $(d_1, \ldots, d_n) \in \mathfrak{D}_k^2(A)$. Vamos escolher $r_{ij} \in R$ um representante de $d_i(x_j) \in A = \frac{R}{J}$ tal que $r_{ij} = r_{ji}$, para todo i, j. Como cada d_i é uma derivação em A, usando a Identificação 2.19 obtemos que

$$(E_i) \qquad \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \frac{\partial f}{\partial X_j} = g_i f,$$

com $g_i \in R$. Agora, diferenciando cada E_i com relação a X_i e somando os resultados sobre $1 \leq i \leq n$ obtemos

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial X_i}(r_{ij}) \Big) \frac{\partial f}{\partial X_j} + \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial X_j^2} + 2 \sum_{i<j} r_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j} = \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial X_j} \Big) f + \sum_{j=1}^{n} g_j \frac{\partial f}{\partial X_j},$$

(lembrando que $r_{ij} = r_{ji}$), e dividindo a soma por 2, obtemos

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \frac{\partial f}{\partial X_j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial X_j^2} + \sum_{i<j} r_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j} = gf,$$

com $b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}, g \in R$.

Defina $D := \sum_{\alpha \in V_2} c_\alpha(D) \, \Delta_\alpha \in Diff_k^2(R, A)$ por $c_0(D) := 0$, $c_{e_i}(D) := \pi(b_i)$ e $c_{e_i+e_j}(D) := \pi(r_{ij}) = di(x_j)$, $1 \leq i, j \leq n$.

Assim, temos que

$$\begin{aligned} D(f) &= \sum_{j=1}^{n} c_{e_j} \, \Delta_{e_j}(f) + \sum_{j=1}^{n} c_{2e_j} \, \Delta_{2e_j}(f) + \sum_{i<j} c_{e_i+e_j} \, \Delta_{e_i+e_j}(f) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \pi(b_j)\pi\Big(\frac{\partial f}{\partial X_j}\Big) + \sum_{j=1}^{n} \pi(r_{jj})\pi\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X_j{}^2}\Big) + \sum_{i<j} \pi(r_{ij})\pi\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_i}\Big) \\ &= \pi(gf) = 0. \end{aligned}$$

Além disso, $\langle D, X_i \rangle = \sum_{\alpha \in V_1} c_{\alpha+e_i}(D) \, \Delta_\alpha = \pi(b_i) \, \Delta_0 + \sum_{j=1}^{n} \pi(r_{ij}) \, \Delta_{e_j}$, de modo que $\langle D, X_i \rangle (f) = \pi(b_i f + \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \frac{\partial f}{\partial X_j}) = 0$ por (E_i). Ou seja, $\langle D, X^\beta \rangle (f) = 0$, para todo $\beta \in V_1$. Portanto,

$D(J) = 0$ pela Proposição 2.22. Ou seja, de acordo com a Identificação 2.19, obtemos $D \in Diff_k^2(A)$. Como $c_{e_i+e_j}(D) = d_i(x_j)$, segue da Definição 2.27 que $\theta(D) = (d_1, \ldots, d_n)$. ∎

Observação 2.29 *Nem sempre temos θ_q sobrejetiva, mesmo J sendo um ideal principal. Exemplo: Vamos mostrar um caso em que θ_3 não é sobrejetiva.*

Tome $n = 2$, e $J = Rf$, onde $f = X_2^2 - X_1^3$.

Para $\beta \in W_2$, defina $d_\beta \in Der_k^1(A)$ da seguinte maneira: $d_{(2,0)} = 8x_1 \Delta_{e_1} + 12x_2 \Delta_{e_2}$, $d_{(1,1)} = 12x_2 \Delta_{e_1} + 18x_1^2 \Delta_{e_2}$, $d_{(0,2)} = 18x_1^2 \Delta_{e_1} + 27x_1x_2 \Delta_{e_2}$. Não é difícil ver que $d := (d_{(2,0)}, d_{(1,1)}, d_{(0,2)}) \in \mathfrak{D}_k^3(A)$. Suponhamos por um momento que exista $D \in Diff_k^3(A)$ tal que $\theta_3(D) = d = (d_{(2,0)}, d_{(1,1)}, d_{(0,2)})$. Identificando, temos que $D = \sum_{\alpha \in V_3} c_\alpha(D) \Delta_\alpha$ e $D(J) = 0$. Se definirmos $c_{ij} := c_{(i,j)}(D)$, como $d_\beta(x_i) = c_\beta + e_i(D)$, para todo $\beta \in W_2$, teremos $c_{30} = 8x_1$, $c_{21} = 12x_2$, $c_{12} = 18x_1^2$, e $c_{03} = 27x_1x_2$. Pelo Corolário 2.23, temos que $D(f) = 0, \langle D, x_1\rangle(f) = 0$ e $\langle D, x_2\rangle(f) = 0$. Portanto, $\langle D, x_2\rangle(f) - 2x_2D(f) = 0$, cujos cálculos implicam que $7 + 6c_{20} \in (x_1, x_2)$. Analogamente, de $\langle D, x_1\rangle(f) = 0$, podemos obter que $6 + 3c_{20} \in (x_1, x_2)$. Logo, $2(6 + 3c_{20}) - (7 + 6c_{20}) = -5 \in (x_1, x_2)$, uma contradição.

Portanto, em alguns casos podemos determinar $Diff_k^2(A)$ completamente a partir de $Diff_k^1(A)$, muito embora $Diff_k^2(A)$ geralmente não seja gerado por $Diff_k^1(A)$. Esta relação entre $Diff_k^1(A)$ e $Diff_k^2(A)$ levou Singh [10] a propor a seguinte pergunta, mais forte do que a Conjectura de Nakai: "*Se $Diff_k^2(A)$ for gerado por $Diff_k^1(A)$ então A é regular?*". *

É no sentido desta conjectura que será desenvolvido o restante deste capítulo.

2.3 Operadores Diferenciais em uma Curva Plana

Consideremos A como o anel de coordenadas de uma variedade algébrica afim reduzida X. Vamos mostrar que no caso em que X é uma curva plana, temos uma confirmação da conjectura de Singh, e portanto da conjectura de Nakai.

Assim, mantendo a mesma notação da seção anterior, vamos assumir $n = 2$ e $J = Rf$ um ideal principal, próprio e não-nulo de $R = k[X_1, X_2]$.

*No próximo capítulo, será demonstrado que a conjectura de Singh em geral não é válida.

Note que, neste caso, temos:

$$\mathfrak{D}_k^2(A) = \{(d_1, d_2) \in Der_k^1(A) \oplus Der_k^1(A) : d_1(x_2) = d_2(x_1)\}.$$

Para $i = 1, 2$, seja $f_{x_i} := \pi(\frac{\partial f}{\partial X_i})$ e seja $\mathfrak{a}_i := \{d(x_i) : d \in Der_k^1(A)\}$. Temos que $\mathfrak{a}_1$ e $\mathfrak{a}_2$ são ideais de A, já que $Der_k^1(A)$ é um A-submódulo de $Hom_k(A)$.

Vamos dar a seguir duas proposições que serão usadas para demonstrar o resultado principal. A primeira delas consiste em um resultado interessante obtido por Singh no processo de demonstrar o Teorema 2.36, a saber: *Se X é uma curva plana, então o quociente $\frac{Diff_k^2(A)}{Diff_k^1(A)Diff_k^1(A)}$ é isomorfo a $\frac{\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2}$.*

Para tanto, defina:

$$\begin{aligned} \tau : \mathfrak{D}_k^2(A) &\to \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \\ (d_1, d_2) &\mapsto d_1(x_2) = d_2(x_1), \end{aligned}$$

que é claramente A-linear e sobrejetiva, pois se $a \in \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$, então $a = d(x_1) = d'(x_2), d, d' \in Der_k^1(A)$. Assim, $(d', d) \in \mathfrak{D}_k^2(A)$ e $\tau(d', d) = d'(x_2) = d(x_1) = a$. Vamos definir também

$$\sigma := \tau\theta_2 : Diff_k^2(A) \to \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2,$$

onde θ_2 é a função definida em 2.27.

Proposição 2.30 *Se f_{x_1} e f_{x_2} são não divisores de zero em A, então τ é um isomorfismo, e a sequência de A-módulos*

$$0 \longrightarrow Diff_k^1(A) \hookrightarrow Diff_k^2(A) \xrightarrow{\sigma} \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \longrightarrow 0$$

é exata. Além disso, $\sigma(Diff_k^1(A)Diff_k^1(A)) = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$. Em particular, temos um A-isomorfismo de $\frac{Diff_k^2(A)}{Diff_k^1(A)Diff_k^1(A)}$ em $\frac{\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2}$, ou seja, $\frac{Diff_k^2(A)}{Diff_k^1(A)Diff_k^1(A)} \cong \frac{\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2}$.

Demonstração: Para mostrar que τ é um isomorfismo, basta mostrar a injetividade. Assim, note que se $d \in Der_k^1(A)$ então $d = d(x_1)\frac{\partial}{\partial X_1} + d(x_2)\frac{\partial}{\partial X_2}$ e $d(J) = 0$, ou seja, $d(x_1)f_{x_1} + d(x_2)f_{x_2} = 0$. Como f_{x_1} e f_{x_2} são não divisores de zero, temos que $d(x_1) = 0$ se, e somente se, $d(x_2) = 0$. Consequentemente, $d = 0$ se, e somente se, $d(x_1) = 0$ se, e somente se, $d(x_2) = 0$, o que prova a injetividade de τ. Daí, a exatidão da sequência segue do Teorema 2.28.

A parte restante do teorema segue se mostrarmos que $\sigma(Der_k^1(A)Der_k^1(A)) = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, pois pelo Lema 2.11, temos que $Diff_k^1(A)Diff_k^1(A) = Diff_k^1(A) + Der_k^1(A)Der_k^1(A)$, e além disso, $\sigma(Diff_k^1(A)) = 0$, pois $\theta_2(Diff_k^1(A)) = 0$. Assim, sejam $D, D' \in Der_k^1(A)$ e seja $\theta_2(DD') = (d_1, d_2)$. Então $\sigma(DD') = \tau(d_1, d_2) = d_1(x_2) = c_{(1,1)}(DD')$, segundo a Definição 2.27. E pela Proposição 2.17, temos que $c_{(1,1)}(DD') = D(x_1)c_{(0,1)}(D') + D(x_2)c_{(1,0)}(D') = D(x_1)D'(x_2) + D(x_2)D'(x_1)$, o que prova que $\sigma(Der_k^1(A)Der_k^1(A)) \subset \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$. Reciprocamente, sejam $a_i \in \mathfrak{a}_i$, $i = 1, 2$. Escolha $D, D' \in Der_k^1(A)$ tais que $a_1 = D(x_1)$, $a_2 = D'(x_2)$. Sejam $b_1 := D(x_2)$, $b_2 = D'(x_1)$. Novamente, como $D, D' \in Der_k^1(A)$, temos respectivamente que $a_1 f_{x_1} + b_1 f_{x_2} = 0$ e $b_2 f_{x_1} + a_2 f_{x_2} = 0$. Então $0 = a_2(a_1 f_{x_1} + b_1 f_{x_2}) - b_1(b_2 f_{x_1} + a_2 f_{x_2}) = (a_1a_2 - b_1b_2)f_{x_1}$. Como f_{x_1} é não divisor de zero, temos que $a_1a_2 = b_1b_2$, e pelos cálculos acima segue que $\sigma(DD') = a_1a_2 + b_1b_2 = 2a_1a_2$, o que mostra que $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \subset \sigma(Der_k^1(A)Der_k^1(A))$, e o teorema está provado. ∎

A proposição a seguir será de fundamental importância para a conclusão da prova do resultado principal. No entanto, embora essencial, trata-se de um resultado auxiliar, demonstrado por S. Dutta no artigo [10] de B. Singh, e sua demonstração requer noções de filtração e sequências espectrais, conceitos de álgebra homológica que fogem do tema central deste trabalho, e portanto optamos por omiti-la.

Proposição 2.31 *Sejam I_1, I_2 ideais de R que contêm f. Assuma que $\frac{R}{I_1}$ e $\frac{R}{I_2}$ sejam de comprimento finito e que $I_1 + I_2 \neq R$. Então $Tor_1^A(\frac{R}{I_1}, \frac{R}{I_2}) \neq 0$.*

Na prova do Teorema 2.36, vamos utilizar ainda os conceitos de completamento (ver seção sobre *Completamentos* no capítulo preliminar), uma ferramenta que permitirá concluir a demonstração devido ao fato dos anéis completados terem boas relações com o anel original, principalmente no caso de anéis locais. Vamos demonstrar a seguir dois lemas sobre derivações e completamento.

Lema 2.32 *Sejam $(\hat{A}, \hat{\mathfrak{m}})$ o completamento $\mathfrak{m}$-ádico de uma k-álgebra afim local $(A, \mathfrak{m})$ e $D \in Der_k^1(A)$. Então D se estende a uma derivação em $\hat{A}$.*

Demonstração: Seja $\hat{x} \in \hat{A}$. Temos que A, munido da topologia $\mathfrak{m}$-ádica, é um espaço métrico (1.56 e ??). Assim, como A é denso em $\hat{A}$, existe uma sequência $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset A$ tal que $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = \hat{x}$. Em particular, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\hat{A}$. Portanto, dado

$N \in \mathbb{N}$, existe N_0 tal que, para quaisquer $m, n > N_0$, $x_m - x_n \in \hat{\mathfrak{m}}^N$. Por 1.60 temos que $x_m - x_n \in \hat{\mathfrak{m}}^N \cap A = (\mathfrak{m}^N)^{\wedge} \cap A = \mathfrak{m}^N$. Seja $\mathfrak{m} = (r_1, \ldots, r_s)$. Então $x_m - x_n = G(r_1, \ldots, r_s)$, onde $G \in A[X_1, \ldots, X_s]$ é homogêneo de grau N. Como $D \in Der_k^1(A)$, então $D(x_m - x_n) = G'(r_1, \ldots, r_s)$, com $G' \in A[X_1, \ldots, X_s]$ homogêneo de grau $N-1$, ou seja, $D(x_m) - D(x_n) = D(x_m - x_n) \in \mathfrak{m}^{N-1}$, para quaisquer $m, n > N_0$. Portanto, $\{D(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $A \subset \hat{A}$. Como $\hat{A}$ é completo, $\{D(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge em $\hat{A}$, ie, existe $\lim\limits_{i\to\infty} D(x_i)$. Assim, defina:

$$\begin{aligned} \hat{D} : \hat{A} &\to \hat{A} \\ \hat{x} &\mapsto \hat{D}(\hat{x}) = \hat{D}(\lim_{i\to\infty} x_i) := \lim_{i\to\infty} D(x_i). \end{aligned}$$

É claro que $\hat{D}$ é uma extensão de D, ou seja, $\hat{D}(a) = D(a)$, para todo $a \in A$. Resta apenas mostrar que de fato $\hat{D} \in Der_k^1(A)$. Para isto, sejam $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = \hat{x}$, $\lim\limits_{i\to\infty} y_i = \hat{y} \in \hat{A}$. Como a topologia $\mathfrak{m}$-ádica torna A um anel topológico, ie, com as operações contínuas, então $\hat{D}(\hat{x}\hat{y}) = \hat{D}(\lim\limits_{i\to\infty} x_i \cdot \lim\limits_{i\to\infty} y_i) = \hat{D}(\lim\limits_{i\to\infty} x_i y_i) = \lim\limits_{i\to\infty} D(x_i y_i) = \lim\limits_{i\to\infty} (D(x_i)y_i + x_i D(y_i)) = \lim\limits_{i\to\infty} D(x_i) \cdot \lim\limits_{i\to\infty} y_i + \lim\limits_{i\to\infty} x_i \cdot \lim\limits_{i\to\infty} D(y_i) = \hat{D}(\hat{x})\hat{y} + \hat{x}D(\hat{y})$. ∎

O segundo lema que será demonstrado a seguir é o chamado *Lema de Zariski*. Mas antes do resultado, precisamos de algumas definições, a saber:

Definição 2.33 *Sejam R um anel e $X_1, \ldots, X_n$ variáveis. Para cada $d = 0, 1, \ldots,$ seja F_d o módulo dos polinômios homogêneos de grau d em $R[X_1, \ldots, X_n]$. O conjunto F das somas infinitas $\{\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i : a_i \in F_i\}$ forma um anel com as operações:*

$$\sum a_i + \sum b_i = \sum (a_i + b_i), \qquad \sum a_i \cdot \sum b_i = \sum_s \Big(\sum_{i+j=s} a_i b_j\Big).$$

F é chamado o anel das séries de potências formais (ou simplesmente *séries de potências*) nas variáveis $X_1, \ldots, X_n$ com coeficientes em R, *e é denotado por* $R[[X_1, \ldots, X_n]]$.

Seja R um anel semi-local completo com radical de Jacobson $\mathfrak{m}$, e sejam $x_1, \ldots, x_n$ elementos de $\mathfrak{m}$. Seja $R_1 \subset R$ um subanel de R. Se $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis sobre R_1, então existe um homomorfismo ϕ de $R_1[[X_1, \ldots, X_n]]$ em R tal que $\phi(X_i) = x_i$. A imagem deste homomorfismo ϕ é um subanel de R denotado por $R_1[[x_1, \ldots, x_n]]$.

Definição 2.34 *Se o homomorfismo ϕ for injetor, dizemos que $x_1, \ldots, x_n$ são* analiticamente independentes sobre R_1.

Lema de Zariski 2.35 *Sejam $(A, \mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_s)$ um anel completo semi-local que contém o corpo dos números racionais e $\mathfrak{m} = \mathfrak{J}(A) = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_s$. Suponhamos que exista uma derivação D em A tal que $D(x)$ é uma unidade em A, para algum $x \in \mathfrak{m}$. Então A contém um anel A_1 de representantes de $\frac{A}{(x)}$ tal que:*

(a) *$D = 0$ em A_1;*

(b) *x é analiticamente independente sobre A_1;*

(c) *$A = A_1[[x]]$.*

Demonstração: $D(x)$ é unidade em A. Então, sem perda de generalidade, podemos considerar $D(x) = 1$ (pois caso contrário, basta substituir D por $\frac{1}{D(x)}D$). Consideremos o operador $e^{-xD} := I - xD + \frac{x^2}{2}D^2 - \frac{x^3}{3!}D^3 + \cdots$, onde I denota a aplicação identidade em A. A prova consiste em observar que:

(1) e^{-xD} é um endomorfismo de A;

(2) Se tomarmos $A_1 := \mathrm{Im}(e^{-xD})$ então D é zero em A_1;

(3) O núcleo de e^{-xD} é o ideal principal $(x) = Ax$;

(4) a restrição de e^{-xD} a A_1 é a aplicação identidade.

A afirmação (1) segue do fato de D ser uma derivação.

Para provar (2), seja $a_1 \in A_1 = \mathrm{Im}(e^{-xD})$. Então existe $a \in A$ tal que $a_1 = e^{-xD}(a) = a - xD(a) + \frac{x^2}{2}D^2(a) - \frac{x^3}{3!}D^3(a) + \cdots$. Deste modo,

$$\begin{aligned} D(a_1) &= D(a) - D(xD(a)) + D(\tfrac{x^2}{2}D^2(a)) - D(\tfrac{x^3}{3!}D^3(a)) + \cdots = \\ &= D(a) - [D(x)D(a) + xD^2(a)] + [D(\tfrac{x^2}{2})D^2(a) + \tfrac{x^2}{2}D^3(a)] - \cdots = \\ &= D(a) - D(a) - xD^2(a) + xD(x)D^2(a) + \tfrac{x^2}{2}D^3(a) - \cdots = \end{aligned}$$

Como podemos observar, teremos que $D(a_1) = 0$, para todo $a_1 \in A_1$.

Logo, $e^{-xD}(a_1) = a_1 - xD(a_1) + \frac{x^2}{2}D^2(a_1) - \frac{x^3}{3!}D^3(a_1) + \cdots = a_1$, para todo $a_1 \in A_1$, e a afirmação (4) está provada.

Finalmente, se $0 = e^{-xD}(a) = a - x\,D(a) + \frac{x^2}{2}\,D^2(a) - \frac{x^3}{3!}\,D^3(a) + \cdots$ então $a = x(D(a) - \frac{x}{2}D^2(a) + \frac{x^2}{3!}D^3(a) + \cdots) \in (x)$. Por outro lado, como e^{-xD} é um endomorfismo, para provar que $\ker(e^{-xD}) = (x)$ basta mostrar que $e^{-xD}(x) = 0$. Assim,

$$e^{-xD}(x) = x - xD(x) + \frac{x^2}{2}D^2(x) - \frac{x^3}{3!}D^3(x) + \cdots =$$

$$= x - x + \tfrac{x^2}{2}D(D(x)) - \tfrac{x^3}{3!}D(D(D(x))) + \cdots$$

Como $D(x) = 1$ e $D(1) = 0$, segue que $e^{-xD}(x) = 0$.

Assim, pelo Teorema do Isomorfismo, temos que $\frac{A}{(x)} \cong A_1$. Além disso, segue das afirmações (2) e (3) que $A_1 \cap (x) = (0)$. Portanto, A_1 é de fato um anel de representantes de $\frac{A}{(x)}$.

Vamos provar agora que $A = A_1[[x]]$:

($\subseteq$) Seja $\alpha \in A$. Vamos construir por indução sobre n uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A_1$ tal que $\alpha - a_0 - a_1x - \cdots - a_nx^n \in (x^{n+1}) \subseteq \mathfrak{m}^{n+1}$:

Para $n = 0$, tome $a_0 := e^{-xD}(\alpha) \in \operatorname{Im}(e^{-xD}) = A_1$. Assim, temos que $e^{-xD}(\alpha - a_0) = e^{-xD}(\alpha) - e^{-xD}(e^{-xD}(\alpha)) = 0$, já que a restrição de e^{-xD} a A_1 é a identidade, ou seja, $\alpha - a_0 \in \ker(e^{-xD}) = (x) \subseteq \mathfrak{m}$.

Suponhamos então que existem $a_0, \ldots, a_n \in A_1$ tais que $\alpha - a_0 - \cdots - a_nx^n \in (x^{n+1})$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\alpha - a_0 - \cdots - a_nx^n &= x^{n+1}\beta, \text{ com } \beta \in A \\
&= x^{n+1}(\beta - e^{-xD}(\beta) + e^{-xD}(\beta)), \text{ com } \beta - e^{-xD}(\beta) \in \ker(e^{-xD}) = (x) \\
&= x^{n+1}(x\gamma) + x^{n+1}e^{-xD}(\beta) \\
&= x^{n+2}\gamma + x^{n+1}e^{-xD}(\beta).
\end{aligned}$$

Então $\alpha - a_0 - \cdots - a_nx^n - e^{-xD}(\beta)x^{n+1} \in (x^{n+2})$. Basta tomar $a_{n+1} := e^{-xD}(\beta)$.

Assim, acabamos de mostrar que dado $n \in \mathbb{N}$, existem $a_0, \ldots, a_n \in A_1$ tais que

$$\alpha - a_0 - \cdots - a_nx^n \in \mathfrak{m}^{n+1}.$$

Como $\{A, \mathfrak{m}, \mathfrak{m}^2, \mathfrak{m}^3, \ldots\}$ constitui uma base de vizinhanças de $0 \in A$ na topologia natural, temos que $\alpha - a_0 - \cdots - a_nx^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ou seja, $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$. Portanto, $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} a_ix^i = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_ix^i \in A_1[[x]]$.

($\supseteq$) Seja $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_ix^i \in A_1[[x]]$. Considere a seguinte sequência $\{f_m(x)\}_{m=0}^{\infty} \subset A$, onde $f_m(x) := \sum\limits_{i=0}^{m} a_ix^i$. Note que para $s < t$, temos $f_t(x) - f_s(x) = a_{s+1}x^{s+1} + \cdots + a_tx^t \in \mathfrak{m}^{s+1}$. Portanto, $\{f_m(x)\}_{m=0}^{\infty} \subset A$ é uma sequência de Cauchy (lembrando que na topologia natural temos um sistema de vizinhanças de $0 \in A$ dado por $\{A, \mathfrak{m}, \mathfrak{m}^2, \mathfrak{m}^3, \ldots\}$). Como A é completo, existe $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) \in A$. Assim, $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_ix^i = \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{m} a_ix^i = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) \in A$.

Resta mostrar que x é analiticamente independente sobre A_1. Primeiramente, vamos mostrar que x é não divisor de zero em A. Como $\bigcap\limits_n \mathfrak{m}^n = 0$ (1.56), basta provar que se $ax = 0$, $a \in A$ então $a \in (x^n) \subset \mathfrak{m}^n$, para todo $n \geq 1$. Vamos fazer esta prova por indução sobre n. Lembrando que D é uma derivação e que $D(x) = 1$, temos que $0 = D(0) =$

$D(ax) = aD(x) + xD(a) = a + xD(a)$. Logo, $a \in (x)$, e a afirmação está provada para $n = 1$. Suponhamos $a = x^{n-1}\beta$, com $\beta \in A$. Como acabamos de ver, temos que $a = -xD(a)$, e $D(a) = D(x^{n-1}\beta) = (n-1)x^{n-2}\beta + x^{n-1}D(\beta)$. Assim, $a = -x[(n-1)x^{n-2}\beta + x^{n-1}D(\beta)] =$ $= -(n-1)x^{n-1}\beta - x^n D(\beta) = -(n-1)a - x^n D(\beta)$. Portanto $na = -x^n D(\beta)$, donde $a \in (x^n)$, e deste modo obtemos que x é não divisor de zero em A.

Suponhamos por um momento que $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = 0$, $a_i \in A_1$. Então $a_0 \in A_1 \cap (x) = (0)$, donde $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i = 0$, $a_i \in A_1$. Como x é não divisor de zero, temos $\sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1} x^i = 0$, $a_i \in A_1$. Novamente, teremos que $a_1 \in A_1 \cap (x) = (0)$. Prosseguindo analogamente obteremos que $a_i = 0$, para todo i, e o resultado está demonstrado. ∎

Vamos agora finalmente provar a conjectura de Singh (e portanto a de Nakai) para curvas planas:

Teorema 2.36 *Seja J um ideal principal próprio de $R = k[X_1, X_2]$ e seja $A = \frac{R}{J}$. Assuma que A é reduzido. Então A é regular se, e somente se, $Diff_k^2(A) = Diff_k^1(A)Diff_k^1(A)$.*

Demonstração:

Se A é regular, então a igualdade $Diff_k^2(A) = Diff_k^1(A)Diff_k^1(A)$ segue de ([2], IV, 16.11.2).

Reciprocamente, seja $J = Rf$. Se $f = 0$, não há nada a fazer. Podemos então assumir $f \neq 0$. Seja $f = f_1 \cdots f_s$ a fatoração prima de f em R. Como k é infinito, segue de ([17], Lemma II.3.2) que podemos fazer uma mudança linear de variáveis de modo que $\frac{\partial f_i}{\partial X_j} \neq 0$, para todo $i = 1, \ldots, s$, $j = 1, 2$. Além disso, f não tem fatores múltiplos, pois A é reduzido. Logo, f_i não divide $\frac{\partial f}{\partial X_1}$, para todo $i = 1, \ldots, s$, pois $\frac{\partial f}{\partial X_1} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f_i}{\partial X_1} f_1 \cdots \hat{f_i} \cdots f_s$. Assim, se $f_{x_1} a = 0$, para algum $a = \overline{g} \in A$, então f divide $\frac{\partial f}{\partial X_1}\, g$. Em particular, cada f_i divide $\frac{\partial f}{\partial X_1}\, g$ mas não divide $\frac{\partial f}{\partial X_1}$, e portanto divide g. Ou seja, f_{x_1}, e analogamente f_{x_2}, são não divisores de zero em A. Como $d := f_{x_2}\Delta_{(1,0)} - f_{x_1}\Delta_{(0,1)} \in Der_k^1(A)$ por 2.19, temos que $f_{x_1} = d(x_2) \in \mathfrak{a}_2$ e $f_{x_2} = d(x_1) \in \mathfrak{a}_1$. Assim, como $dim(A) = 1$, segue do Teorema do Ideal Principal de Krull que $dim(\frac{A}{\mathfrak{a}_1}) = 0 = dim(\frac{A}{\mathfrak{a}_2})$. Logo, $\frac{A}{\mathfrak{a}_1}$ e $\frac{A}{\mathfrak{a}_2}$ têm comprimento finito ([17], Proposition V.2.5). Como $Diff_k^2(A) = Diff_k^1(A)Diff_k^1(A)$, temos pelo Teorema 2.30 que $0 = \frac{\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2} \cong Tor_1^A(\frac{A}{\mathfrak{a}_1}, \frac{A}{\mathfrak{a}_2}) = Tor_1^A(\frac{R}{I_1}, \frac{R}{I_2})$, onde I_j é o ideal de R que contém f tal que $\mathfrak{a}_j = \frac{I_j}{J}$, $j = 1, 2$, e portanto $I_1 + I_2 = R$ pela Proposição 2.31. Disto segue que um ideal maximal de A não pode conter ao mesmo tempo $\mathfrak{a}_1$ e $\mathfrak{a}_2$. Vamos tomar então um ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A, e digamos que $\mathfrak{a}_1$ não esteja contido em $\mathfrak{m}$, ou seja, existe

$D \in Der_k^1(A)$ tal que $D(x_1) \notin \mathfrak{m}$. Como $f_{x_2} \neq 0$, x_1 é transcendental sobre k, e além disso, $\frac{A}{\mathfrak{m}}$ é algébrico sobre k (Teorema de Zeros de Hilbert [17], Proposition I.3.2). Portanto, $\mathfrak{m}$ contém um polinômio não-nulo $h(x_1) \in k[x_1]$. Escolha este $h = \overline{g}$ de grau mínimo. Assim, $D(h) = (D(x_1)\Delta_{(1,0)} + D(x_1)\Delta_{(0,1)})(g) = D(x_1)\pi(\frac{\partial g}{\partial X_1}) \notin \mathfrak{m}$. Portanto, $D(\mathfrak{m}) \not\subset \mathfrak{m}$. Consideremos agora o anel local $(A_\mathfrak{m}, \mathfrak{m}A_\mathfrak{m})$. Vamos tomar $B := \widehat{A_\mathfrak{m}}$ o completamento $\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$-ádico de $A_\mathfrak{m}$. Então B é local, com ideal maximal $\mathfrak{n} := \mathfrak{m}\widehat{A_\mathfrak{m}}$. Como vimos em 2.32, D pode ser estendido a uma derivação $\widehat{D}$ de B. Ainda, $\widehat{D}(\mathfrak{n}) \not\subset \mathfrak{n}$, ou seja, existe $y \in \mathfrak{n}$ tal que $D(y)$ é uma unidade em B. Assim, pelo Lema de Zariski (2.35), B contém um anel B_1 tal que $B = B_1[[y]]$, com y analiticamente independente sobre B_1. Ainda, como y é não divisor de zero de B, temos que $dim(B_1) = dim(B) - 1$, onde $dim(B) = dim(A_\mathfrak{m}) = dim(A) = 1$. Pelo Lema 1.66, temos que B é reduzido. Logo, B_1 é um anel noetheriano reduzido de dimensão zero, portanto isomorfo a um produto direto finito de corpos ([17], Proposition II.1.5), e portanto regular (1.29). Consequentemente, temos que B é regular (1.64) e, finalmente, segue que $A_\mathfrak{m}$ é regular (1.63). Isto prova que A é regular. ∎

2.4 $A[T]$ e $A[T, T^{-1}]$

Este é apenas um parágrafo preliminar onde veremos algumas propriedades técnicas sobre os anéis $A[T]$ e $A[T, T^{-1}]$, as quais fornecem informações sobre o próprio anel A. O interesse reside fundamentalmente na última proposição, um resultado importante que será usado na prova do teorema da seção seguinte. Vamos trabalhar com k um anel noetheriano, A uma k-álgebra finitamente gerada e T uma variável sobre A.

Seja $u : A \hookrightarrow A[T]$ a inclusão natural. Para $i \in \mathbb{N}$, seja $p_i : A[T] \to A$ a aplicação A-linear definida por $f = \sum_{i \geq 0} (T-1)^i p_i(f)$, para $f \in A[T]$. Defina ainda:

$$\begin{aligned} q_i : Diff_k^\infty(A[T]) &\to Diff_k^\infty(A) \\ D &\mapsto p_i D u. \end{aligned}$$

Note que de fato $p_i D u \in Diff_k^\infty(A)$. Com efeito, $q_i(D) = p_i D u \in Hom_k(A)$, pois p_i é A-linear. Além disso, vamos provar por indução sobre q que se $D \in Diff_k^q(A[T])$ então $q_i(D) \in Diff_k^q(A)$. Sendo a afirmação clara para $q < 0$, podemos assumir $q \geq 0$. Assim, para quaisquer elementos $a, b \in A$, temos que $[q_i(D), a](b) = q_i(D)(ab) - aq_i(D)(b) = p_i Du(ab) -$

$ap_iDu(b) = p_iDu(ab) - ap_iDu(b) = p_i(Du(ab) - aDu(b)) = p_i[D,a](u(b)) = p_i[D,a]u(b)$. Portanto, segue por hipótese de indução que $[q_i(D),a] = p_i[D,a]u = q_i([D,a]) \in Diff_k^{q-1}(A)$, ou seja, $q_i(D) \in Diff_k^q(A)$.

Observe ainda que $Du = \sum_{i\geq 0}(T-1)^i uq_i(D)$, para $D \in Diff_k^\infty(A[T])$, pois para todo $a \in A$, temos que $Du(a) = \sum_{i\geq 0}(T-1)^i p_i(Du(a)) = \sum_{i\geq 0}(T-1)^i uq_i(D)(a)$.

Considere $Diff_k^\infty(A, A[T])$ como um $A[T]$-módulo de maneira natural. Para $D \in Diff_k^\infty(A, A[T])$, vamos denotar por $\mu(D)$ o seguinte $k[T]$-endomorfismo de $A[T]$ obtido a partir de D por extensão de escalares:

$$\begin{aligned} \mu(D) : A[T] &\to A[T] \\ \sum_{i\geq 0} a_iT^i &\mapsto \sum_{i\geq 0} D(a_i)T^i, \end{aligned}$$

a partir do qual podemos definir a seguinte aplicação $A[T]$-linear:

$$\begin{aligned} \mu : Diff_k^\infty(A, A[T]) &\to Diff_{k[T]}^\infty(A[T]) \subset Diff_k^\infty(A[T]) \\ D &\mapsto \mu(D), \end{aligned}$$

com $\mu(Diff_k^q(A, A[T])) \subset Diff_{k[T]}^q(A[T]) \subset Diff_k^q(A[T])$ para todo q. De fato, para todo $\sum_{i\geq 0} a_iT^i \in A[T]$, tem-se $[\mu(D), \sum_{i\geq 0} a_iT^i] = \sum_{i\geq 0} T^i\mu([D,a_i])$, e a afirmação segue por indução sobre q.

No que segue, identifique $Diff_k^\infty(A)$ como um A-submódulo de $Diff_k^\infty(A, A[T])$ via μ, e assim denote por λ a restrição de μ a $Diff_k^\infty(A)$.

Lema 2.37 (1) $\sum_{i\geq 0}(T-1)^i uq_i\mu =$ *identidade em* $Diff_k^\infty(A, A[T])$.

(2) *Para todo* $s \in \mathbb{N}$, *temos que* $q_0T^s\lambda =$ *identidade em* $Diff_k^\infty(A)$.

(3) *Se* $D, D' \in Diff_k^\infty(A)$, *então* $\lambda(DD') = \lambda(D)\lambda(D')$.

Consequentemente, $\lambda(Diff_k^q(A)\, Diff_k^p(A)) \subset Diff_{k[T]}^q(A[T])\, Diff_{k[T]}^p(A[T])$, *para todo* $q, p \in \mathbb{Z}$.

(4) $q_0(Diff_k^q(A[T])\, Diff_k^p(A[T])) \subset Diff_k^q(A)\, Diff_k^p(A)$, *para todo* $q, p \in \mathbb{Z}$.

Demonstração:

(1) Seja $D \in Diff_k^\infty(A, A[T])$. Para todo $a \in A$, $\sum_{i\geq 0}(T-1)^i uq_i(\mu(D))(a) = \mu(D)u(a) = \mu(D)(a) = D(a)$, ou seja, $\sum_{i\geq 0}(T-1)^i uq_i\mu(D) = D$.

(2) Primeiramente, vamos observar que $p_0(aT^s) = a$, para todo $a \in A$ e para todo $s \in \mathbb{N}$. Assim, seja $D \in Diff_k^\infty(A)$. Para todo $a \in A$, temos que $(q_0T^s\lambda(D))(a) = p_0(T^s\lambda(D))u(a) = p_0(T^sD(a)) = D(a)$, ou seja, $q_0T^s\lambda(D) = D$.

(3) Para todo $\sum\limits_{i\geq 0} a_iT^i \in A[T]$, temos que $\lambda(D)\lambda(D')(\sum\limits_{i\geq 0} a_iT^i) = \lambda(D)(\sum\limits_{i\geq 0} D'(a_i)T^i) = = \sum\limits_{i\geq 0} DD'(a_i)T^i = \lambda(DD')(\sum\limits_{i\geq 0}(a_i)T^i)$.

(4) Sejam $D \in Diff_k^q(A[T])$ e $D' \in Diff_k^p(A[T])$. Por (1), temos que

$$D'u = \sum_{i\geq 0} (T-1)^i\, uq_i(\mu(D'u)) = \sum_{i\geq 0} (T-1)^i\, uq_i(D').$$

Logo,

$$DD'u = \sum_{i\geq 0} D\,(T-1)^i\, uq_i(D') = \sum_{i\geq 0} ([D,(T-1)^i] + (T-1)^iD)\, uq_i(D'),$$

e assim,

$$\begin{aligned} q_0(DD') = p_0DD'u &= \sum_{i\geq 0} p_0([D,(T-1)^i] + (T-1)^iD)\, uq_i(D') = \\ &= \sum_{i\geq 0} q_0([D,(T-1)^i] + (T-1)^iD)q_i(D') \in Diff_k^q(A)\, Diff_k^p(A). \end{aligned}$$ ∎

A seguir, vejamos o comportamento de $Diff_k^q(R,A)$ segundo a formação de módulos quocientes:

Seja S um subconjunto multiplicativamente fechado de R. Se k for noetheriano e R for uma k-álgebra finitamente gerada, então, para cada q, existe um isomorfismo natural $S^{-1}(Diff_k^q(R,A)) \cong Diff_k^q(S^{-1}R, S^{-1}A)$, como pode ser visto em ([2], IV, 16.4.15). Segue então do Lema 2.6 que $S^{-1}(Der_k^q(R,A)) \cong Der_k^q(S^{-1}R, S^{-1}A)$.

Vamos mostrar este isomorfismo para o anel $A[T]$ e seu sistema multiplicativamente fechado $S = \{1, T, T^2, \ldots\}$. Tal isomorfismo será usado para identificar $Diff_k^\infty(A[T])$ como um $A[T]$-submódulo de $Diff_k^\infty(A[T,T^{-1}])$:

Considere o módulo de frações $(A[T])_T = S^{-1}(A[T])$. Note que $(A[T])_T \cong A[T,T^{-1}]$. De fato, basta tomar o seguinte isomorfismo:

$$\begin{aligned} \psi : A[T,T^{-1}] &\to S^{-1}(A[T]) \\ a_{-s}T^{-s} + a_{-s+1}T^{-s+1} + \cdots + a_0 + \cdots + a_mT^m &\mapsto \tfrac{a_{-s}}{T^s} + \tfrac{a_{-s+1}}{T^{s-1}} + \cdots + a_0 + \cdots a_mT^m = \\ &\quad \tfrac{a_{-s} + a_{-s+1}T + \cdots + a_0T^s + \cdots + a_mT^{m+s}}{T^s} \end{aligned}$$

(a inversa ψ^{-1} é dada por $\psi^{-1} : S^{-1}(A[T]) \rightarrow A[T, T^{-1}]$

$$\tfrac{a_0 + a_1 T + \cdots + a_m T_m}{T^s} \mapsto a_0 T^{-s} + a_1 T^{-s+1} + \cdots + a_m T^{-s+m}).$$

Assim, considere o seguinte homomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi : Diff_k^{\infty}(A[T]) &\rightarrow Diff_k^{\infty}((A[T])_T) \cong Diff_k^{\infty}(A[T, T^{-1}]) \\ D &\mapsto \tfrac{D}{1}, \end{aligned}$$

onde $\frac{D}{1}$ é definido da seguinte forma: dizemos que um elemento $\frac{g(T)}{T^s} \in (A[T])_T$ está na forma irredutível se T^s não divide $g(T)$. Assim, para $\frac{g(T)}{T^s} \in (A[T])_T$, tome a sua forma irredutível $\frac{\tilde{g}(T)}{T^u}$ e defina $\frac{D}{1}(\frac{\tilde{g}(T)}{T^u}) := \frac{D(\tilde{g}(T))}{T^u}$. Claramente, φ é um $A[T]$-homomorfismo e $\frac{D}{1}$ está bem definido. Além disso, como T é não divisor de zero em $A[T]$, segue que φ é injetivo. Resta apenas mostrar que $\frac{D}{1}$ realmente pertence a $Diff_k^{\infty}((A[T])_T)$.

Vamos mostrar por indução sobre q que se $D \in Diff_k^q(A[T])$ então $\frac{D}{1} \in Diff_k^q((A[T])_T)$. Para $q < 0$ não há nada a fazer. Então, considere $q > 0$ e sejam $\frac{f(T)}{T^s}$ e $\frac{g(T)}{T^m} \in (A[T])_T$. Podemos supor sem perda de generalidade que $\frac{f(T)}{T^s}$ e $\frac{g(T)}{T^m}$ estejam na forma irredutível.

$$\begin{aligned} \text{Assim, } [\tfrac{D}{1}, \tfrac{f(T)}{T^s}](\tfrac{g(T)}{T^m}) &= \tfrac{D}{1}(\tfrac{f(T)}{T^s}\tfrac{g(T)}{T^m}) - \tfrac{f(T)}{T^s}\,\tfrac{D}{1}(\tfrac{g(T)}{T^m}) = \tfrac{D(f(T)g(T))}{T^{s+m}} - \tfrac{f(T)}{T^s}\,\tfrac{D(g(T))}{T^m} = \\ &= \tfrac{D(f(T)g(T)) - f(T)D(g(T))}{T^{s+m}} = \tfrac{[D, f(T)](g(T))}{T^{s+m}} = \tfrac{1}{T^s}\,\tfrac{[D, f(T)](g(T))}{T^m} = \\ &= \tfrac{1}{T^s}\,\varphi([D, f(T)])(\tfrac{g(T)}{T^m}) = \tfrac{1}{T^s}\,\tfrac{[D, f(T)]}{1}(\tfrac{g(T)}{T^m}). \end{aligned}$$

Logo, $[\frac{D}{1}, \frac{f(T)}{T^s}] = \frac{1}{T^s}\frac{[D, f(T)]}{1} \in Diff_k^{q-1}((A[T])_T)$, por hipótese de indução. ∎

Deste modo, podemos considerar $Diff_k^{\infty}(A[T])$ como um $A[T]$-submódulo de $Diff_k^{\infty}(A[T, T^{-1}])$.

Lema 2.38 *Seja $D \in Diff_k^q(A)$. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) $D \in Diff_k^1(A)\, Diff_k^{q-1}(A)$.

(ii) $\lambda(D) \in Diff_k^1(A[T])\, Diff_k^{q-1}(A[T])$.

(iii) $\lambda(D) \in Diff_k^1(A[T, T^{-1}])\, Diff_k^{q-1}(A[T, T-1])$.

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ segue direto de 2.37 (3), enquanto que a identificação acima nos dá claramente $(ii) \Rightarrow (iii)$. Vamos assumir então (iii). Portanto, $\lambda(D) = \sum_{j=1}^{m} D_j D'_j$, com $D_j \in Diff_k^1(A[T, T^{-1}])$ e $D'_j \in Diff_k^{q-1}(A[T, T^{-1}])$. Como A é k-álgebra finitamente gerada, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $T^s D_j D'_j \in Diff_k^1(A[T])\, Diff_k^{q-1}(A[T])$, para todo $j = 1, \ldots, m$, e portanto $T^s\lambda(D) = \sum_{j=1}^{m} T^s D_j D'_j \in Diff_k^1(A[T])\, Diff_k^{q-1}(A[T])$. Pelo Lema 2.37 (4), temos que $q_0(T^s\lambda(D)) \in Diff_k^1(A)\, Diff_k^{q-1}(A)$, e o resultado segue por 2.37 (2). ∎

Como consequência imediata do lema, temos o seguinte resultado fundamental:

Proposição 2.39 *Se* $Diff_k^q(A[T]) = Diff_k^1(A[T])\, Diff_k^{q-1}(A[T])$ *ou* $Diff_k^q(A[T,T^{-1}]) = Diff_k^1(A[T,T^{-1}])\, Diff_k^{q-1}(A[T,T^{-1}])$ *então* $Diff_k^q(A) = Diff_k^1(A)\, Diff_k^{q-1}(A)$. ∎

2.5 Operadores Diferenciais em Cone Tridimensional

Neste parágrafo, vamos provar que a conjectura é verdadeira no caso em que X é um cone tridimensional. Assim, aqui $R = k[X_1, X_2, X_3]$ e $J = Rf$, com $f \in k[X_1, X_2, X_3]$ homogêneo.

Notação: Para $\alpha \in V$ e $G \in R$, $G_{X^\alpha} := \frac{\partial^\alpha G}{\partial X^\alpha}$ e $G_{x^\alpha} := \pi(\frac{\partial^\alpha G}{\partial X^\alpha})$.

Os dois lemas dados a seguir são apenas resultados técnicos, usados para demonstrar o teorema principal.

Lema 2.40 *Suponhamos que $J = Rf$ e que $\{x_1, f_{x_n}\}$ seja uma sequência A-regular, e seja $D \in Diff_k^q(A)$. Suponhamos ainda que $c_\alpha(D) \in x_1A$, para todo $\alpha \in V_q$ tal que $\alpha_n = 0$. Então existe $D' \in Diff_k^q(A)$ tal que $D = x_1D'$.*

Demonstração: Vamos mostrar que $c_\alpha(D) \in x_1A$, para todo $\alpha \in V_q$, por indução lexicográfica sobre $(q - |\alpha|, \alpha_n)$:
Seja $\alpha \in V_q$. Para $\alpha_n = 0$, não há nada a fazer, e portanto podemos assumir $\alpha_n \geq 1$. Seja $\beta := \alpha - e_n$. Pelo Corolário 2.23, $\langle D, X^\beta\rangle \in Diff_k^{q-|\beta|}(A)$, e como $c_\beta(D)\,\Delta_0(f) = 0$, temos que

$$0 = \langle D, X^\beta\rangle = \sum_{\substack{\gamma\in V_{q-|\beta|}\\ |\gamma|>0}} c_{\gamma+\beta}(D)\Delta_\gamma(f).$$

Assim, seja $\gamma \in V_{q-|\beta|}$, $|\gamma| > 0$. Se $|\gamma + \beta| > |\alpha|$, é claro que $(q - |\gamma + \beta|, (\gamma + \beta)_n) < (q - |\alpha|, \alpha_n)$, lexicograficamente. Se $|\gamma + \beta| \leq |\alpha|$, então $|\gamma| = 1$, $|\gamma + \beta| = |\alpha|$ e assim $\gamma = e_n$ ou $\gamma_n = 0$. Logo, para todo índice $\gamma \neq e_n$ que aparece na soma acima, temos que $(q - |\gamma + \beta|, \gamma_n + \beta_n) < (q - |\alpha|, \alpha_n)$, ou seja, por indução, $c_{\gamma+\beta}(D) \in x_1(A)$, para todo $\gamma \neq e_n$, e assim, $c_{e_n+\beta}(D)\Delta_{e_n}(f) = c_\alpha(D)f_{x_n} \in x_1(A)$. Como $\{x_1, f_{x_n}\}$ é A-regular, segue que $c_\alpha(D) \in x_1(A)$. Portanto, $c_\alpha(D) = x_1\, a_\alpha$, $a_\alpha \in A$, para todo $\alpha \in V_q$.

Como x_1 é não divisor de zero em A, temos então que $D = \sum_{\alpha\in V_q} c_\alpha(D)\Delta_\alpha = \sum_{\alpha\in V_q} x_1\, a_\alpha\Delta_\alpha = x_1 \sum_{\alpha\in V_q} a_\alpha\Delta_\alpha$, e o resultado segue. ∎

Lema 2.41 *Seja $H \in k[Y, Z]$ um polinômio homogêneo de grau $m \geq 2$, mônico em Z e livre de quadrados. Então $(\frac{\partial H}{\partial Z})^2$ não pertence ao ideal $(Y^2\frac{\partial H}{\partial Y}, Y^2\frac{\partial H}{\partial Z}, H)$ de $k[Y, Z]$.*

Demonstração: Seja $H = Z^m + k_1Z^{m-1}Y + k_2Z^{m-2}Y^2 + \cdots + k_mY^m$. Se k não for algebricamente fechado, podemos substitui-lo pelo seu fecho algébrico, de modo que tenhamos $H = (Z - t_1Y)\cdots(Z - t_mY)$, com $t_1, \ldots, t_m$ elementos distintos de k. Com efeito, note que a procura de elmentos $t_1, \ldots, t_m \in k$ que satisfazem

$$\begin{aligned}
&Z^m + k_1Z^{m-1}Y + k_2Z^{m-2}Y^2 + \cdots + k_iZ^{m-i}Y^i + \cdots + k_mY^m = \\
&= (Z - t_1Y)\cdots(Z - t_mY) = \\
&= Z_m + (-t_1 - \cdots - t_m)Z^{m-1}Y + (t_1t_2 + t_1t_3 + \cdots + t_{m-1}t_m)Z^{m-2}Y^2 + \cdots + \\
&(-1)^{i+1}\sum_{j_1<\cdots<j_i} t_{j_1}\cdots t_{j_i}Z^{m-i}Y^i + \cdots + (-1)^{m+1}(t_1\cdots t_m)Y^m
\end{aligned}$$

equivale à busca de soluções do sistema de equações $f_i(t_1, \ldots, t_m) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$, onde $f_i = \sum_{j_1<\cdots<j_i} t_{j_1}\cdots t_{j_i} + (-1)^{i+1}k_i \in k[t_1, \ldots, t_m]$. Como k é um corpo algebricamente fechado, a afirmação segue pelo Teorema de Zeros de Hilbert ([17], Theorem I.3.1). Além disso, os t_i's são distintos, já que H não tem fatores múltiplos.

Assim, suponhamos que $(\frac{\partial H}{\partial Z})^2 = EY^2\frac{\partial H}{\partial Y} + FY^2\frac{\partial H}{\partial Z} + GH$, com $E, F, G \in k[Y, Z]$ homogêneos, E e F de grau $m - 3$ e G de grau $m - 2$. Se $m = 2$, ou seja, se $H = (Z - t_1Y)(Z - t_2Y)$, a análise dos graus nos dá como única possibilidade $E = F = 0$ e $G \in k$. Na verdade, $G = 4$ e $H = (Z - tY)^2$, com $t = \frac{t_1^2+t_2^2}{t_1+t_2} = \frac{2t_1t_2}{t_1+t_2}$, o que contradiz o fato de H não ter fatores múltiplos. Portanto, vamos assumir $m \geq 3$. Para cada i fixado, considere a igualdade polinomial acima no ponto $(1, t_i)$ e divida a expressão por $\prod_{j\neq i}(t_i - t_j)$, obtendo assim $\prod_{j\neq i}(t_i - t_j) = -t_iE(1, t_i) + F(1, t_i)$, ou seja, para cada i temos:

$$\prod_{j\neq i}(t_i - t_j) = b_0 + (b_1 - a_0)t_i + (b_2 - a_1)t_1^2 + \cdots + (b_{m-3} - a_{m-4})t_i^{m-3} - a_{m-3}t_i^{m-2},$$

onde $a_j, b_j \in k$ são os coeficientes de $E(1, t_i)$ e $F(1, t_i)$, respectivamente, com relação a t_i: $E(1, t_i) = a_0 + a_1t_i + a_2t_i^2 + \cdots + a_{m-3}t_i^{m-3}$ e $F(1, t_i) = b_0 + b_1t_i + b_2t_i^2 + \cdots + b_{m-3}t_i^{m-3}$. Segue então que a seguinte matriz:

$$C = \begin{pmatrix}
\prod_{j\neq 1}(t_1 - t_j) & 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{m-3} & t_1^{m-2} \\
\prod_{j\neq 2}(t_2 - t_j) & 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{m-3} & t_2^{m-2} \\
\vdots & & & & & & \\
\prod_{j\neq m}(t_m - t_j) & 1 & t_m & t_m^2 & \cdots & t_m^{m-3} & t_m^{m-2}
\end{pmatrix}$$

possui determinante zero, já que a primeira coluna é obtida como combinação linear das demais, enquanto que devido ao fato de $t_1, \ldots, t_m$ serem distintos, deveríamos ter det(C) $\neq 0$. Esta contradição prova o lema. ∎

O lema a seguir será usado na demonstração da próxima proposição, cujo resultado é fundamental na prova do teorema.

Lema 2.42 *Seja $F \in R = k[X_1, X_2, X_3]$ um polinômio homogêneo sem fatores múltiplos e $A = \frac{R}{(F)} = k[x_1, x_2, x_3]$. Seja $\mathfrak{m} = (x_1, x_2, x_3)$ o ideal maximal homogêneo de A. Se $Sing(A) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ então $\{F_{X_1}, F_{X_2}, F_{X_3}\}$ é sequência R-regular.*

Demonstração: Nestas condições, temos que na verdade F é um elemento primo de R, ou seja, A é domínio. De fato, suponhamos por um momento que a decomposição de F em fatores primos de R seja dada por $F = F_1 \cdots F_s$, com $s \geq 2$. Seja $G := F_2 \cdots F_s$. Considere então o ideal $I := (F_1, G)$ de R. Note que $\{F_1, G\}$ é uma sequência R-regular, pois $F_1, \ldots, F_s$ são primos distintos por hipótese, e portanto I é intersecção completa, ou seja, $alt(I) = 2$. Logo, para todo divisor primo minimal P de I, temos que $alt(P) = 2 < 3 = alt(\,(X_1, X_2, X_3)\,)$, e portanto $\mathfrak{p} = \frac{P}{(F)} \neq \frac{(X_1, X_2, X_3)}{(F)} = \mathfrak{m}$. Assim, temos que $A_{\mathfrak{p}}$ é um anel local regular, e portanto um domínio (1.26). Como $F = F_1 G$ em R, segue que $\frac{\overline{0}}{1} = \frac{\overline{F_1}}{1}\frac{\overline{G}}{1}$ em $A_{\mathfrak{p}}$, o que implica que $\frac{\overline{F_1}}{1} = \frac{\overline{0}}{1}$ ou $\frac{\overline{G}}{1} = \frac{\overline{0}}{1}$. Suponhamos $\frac{\overline{F_1}}{1} = \frac{\overline{0}}{1}$. Então existe $\overline{S} \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $\overline{SF_1} = \overline{0}$, ou seja, $SF_1 = FH = F_1 GH$, $H \in R$. Como R é domínio, segue que $S = GH$, e portanto $\overline{S} \in (\overline{G}) \subset \mathfrak{p}$, uma contradição. Analogamente, não ocorre $\frac{\overline{G}}{1} = \frac{\overline{0}}{1}$, e a afirmação está provada.

Vamos mostrar agora que o único ideal primo de R que contém $(F_{X_1}, F_{X_2}, F_{X_3})$ é o ideal maximal homogêneo (X_1, X_2, X_3). Note que se $F \in P \in Spec(R)$, $P \neq (X_1, X_2, X_3)$, $\mathfrak{p} = \frac{P}{(F)} \in Spec(A)$, então $\operatorname{rank}(\mathfrak{J}(\mathfrak{p})) = 1$, onde $\mathfrak{J}(\mathfrak{p})$ denota a matriz Jacobiana em $\mathfrak{p}$ (ver Critério Jacobiano 1.27). Com efeito, temos que $\mathfrak{p} \in \operatorname{Reg}(A)$, e portanto segue de 1.27 que $\operatorname{rank}(\mathfrak{J}(\mathfrak{p})) = 3 - dim(A) = 1$. Assim, seja $P \in Spec(R)$, $P \supseteq (F_{X_1}, F_{X_2}, F_{X_3})$. Como F é homogêneo, digamos de grau m, segue que $F = \frac{X_1 F_{X_1} + X_2 F_{X_2} + X_3 F_{X_3}}{m} \in (F_{X_1}, F_{X_2}, F_{X_3}) \subset P$. Logo, $\mathfrak{p} := \frac{P}{(F)} \in Spec(A)$ e $F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3} \in \mathfrak{p}$, e assim $\mathfrak{J}(\mathfrak{p}) = 0$. Portanto, pelo que acabamos de observar, segue que $P = (X_1, X_2, X_3)$.

Assim, temos que $alt(F_{X_1}, F_{X_2}, F_{X_3}) = 3$ e portanto este ideal é intersecção completa em R. Como R é um anel de Cohen-Macaulay (Teorema de Macaulay 1.51), segue que $\{F_{X_1}, F_{X_2}, F_{X_3}\}$ é sequência R-regular (Teorema 1.52). ∎

Proposição 2.43 *Seja $A = k[x_1, x_2, x_3]$ o anel de coordenadas de um cone X num espaço afim tridimensional dado por $F(X_1, X_2, X_3) = 0$, onde $F \in R = k[X_1, X_2, X_3]$ é um* *polinômio homogêneo sem fatores múltiplos. Seja $\mathfrak{m} = (x_1, x_2, x_3)$ o ideal maximal homogêneo de A. Se $Sing(A) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$ então $Der_k^1(A)$ é gerado como A-módulo por d, d_1, d_2, d_3, onde $d = x_1\Delta_{e_1} + x_2\Delta_{e_2} + x_3\Delta_{e_3}$, $d_1 = Fx_3\Delta_{e_2} - Fx_2\Delta_{e_3}$, $d_2 = Fx_3\Delta_{e_1} - Fx_1\Delta_{e_3}$ e $d_3 = Fx_2\Delta_{e_1} - Fx_1\Delta_{e_2}$.*

Demonstração: Seja $D \in Der_k^1(A)$. Então

$$D = \sum_{\alpha \in V_1, \alpha \neq 0} c_\alpha(D)\,\Delta_\alpha = c_{e_1}(D)\Delta e_1 + c_{e_2}(D)\Delta e_2 + c_{e_3}(D)\Delta e_3 =$$
$$= a_1\pi(\tfrac{\partial}{\partial X_1}) + a_2\pi(\tfrac{\partial}{\partial X_2}) + a_3\pi(\tfrac{\partial}{\partial X_3}) = \pi(A_1\tfrac{\partial}{\partial X_1} + A_2\tfrac{\partial}{\partial X_2} + A_3\tfrac{\partial}{\partial X_3}),$$

com $A_1, A_2, A_3 \in R$, e $D(F) = 0$, ou seja,

$$0 = \pi(A_1\tfrac{\partial F}{\partial X_1} + A_2\tfrac{\partial F}{\partial X_2} + A_3\tfrac{\partial F}{\partial X_3}) = \pi(A_1F_{X_1} + A_2F_{X_2} + A_3F_{X_3}).$$

Portanto, $A_1F_{X_1}+A_2F_{X_2}+A_3F_{X_3} \in (F)$, ie, $A_1F_{X_1}+A_2F_{X_2}+A_3F_{X_3} \equiv 0\ (\text{mod. } (F))$. Assim, $D \in Der_k^1(A)$ é unicamente determinado pelos coeficientes $a_1 = \pi(A_1), a_2 = \pi(A_2), a_3 = \pi(A_3) \in A$, que satisfazem $A_1F_{X_1} + A_2F_{X_2} + A_3F_{X_3} \equiv 0$ (mod. (F)). Ou seja, estamos à procura das soluções polinomiais (A, B, C) de

$$AF_{X_1} + BF_{X_2} + CF_{X_3} \equiv 0 \text{ (mod. } F).$$

Estas soluções formam um R-módulo M.

Considere agora a equação

$$(\star) \qquad A_1F_{X_1} + B_1F_{X_2} + C_1F_{X_3} = 0.$$

M é gerado por (X_1, X_2, X_3) e pelas soluções de $(\star)$. De fato, seja (A, B, C) uma solução de $AF_{X_1} + BF_{X_2} + CF_{X_3} \equiv 0$ (mod. F), ie, $AF_{X_1} + BF_{X_2} + CF_{X_3} = EF$. Digamos que grau$(F) = m$. Como F é homogêneo, temos que $F = \frac{X_1F_{X_1}+X_2F_{X_2}+X_3F_{X_3}}{m}$. Defina $A_1 := A - \frac{X_1E}{m}$, $B_1 := B - \frac{X_2E}{m}$, $C_1 := C - \frac{X_3E}{m}$. Assim,

$$\begin{aligned} A_1F_{X_1} + B_1F_{X_2} + C_1F_{X_3} &= (A - \tfrac{X_1E}{m})F_{X_1} + (B - \tfrac{X_1E}{m})F_{X_2} + (C - \tfrac{X_1E}{m})F_{X_3} = \\ &= (AF_{X_1} + BF_{X_2} + CF_{X_3}) - E(\tfrac{X_1F_{X_1}+X_2F_{X_2}+X_3F_{X_3}}{m}) = \\ &= EF - EF = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $(A, B, C) = (A_1, B_1, C_1) + \frac{E}{m}(X_1, X_2, X_3)$, com (A_1, B_1, C_1) solução de $(\star)$.

Vamos analisar então as soluções de $(\star)$. Note que, como $\{F_{X_3}, F_{X_2}, F_{X_1}\}$ é uma sequência R-regular (Lema 2.42 e Proposicao 1.45), segue claramente que:

(1) $(F_{X_2}, F_{X_3}) : (F_{X_1}) = \{f \in R : f(F_{X_1}) \subseteq (F_{X_2}, F_{X_3})\} = (F_{X_2}, F_{X_3})$.

(2) $(F_{X_3}) : (F_{X_2}) = \{f \in R : f(F_{X_2}) \subseteq (F_{X_3})\} = (F_{x_3})$.

Assim, seja (A_1, B_1, C_1) uma solução de $(\star)$. É fácil ver que (1) implica que $A_1 = GF_{X_2} + HF_{X_3}$, com $G, H \in R$. Além disso, $(GF_{X_2} + HF_{X_3})F_{X_1} - GF_{X_1}F_{X_2} - HF_{X_1}F_{X_3} = 0$.

Logo, $(A_1, B_1, C_1) - (GF_{X_2} + HF_{X_3}, -GF_{X_1}, -HF_{X_1}) = (0, B_1 + GF_{X_1}, C_1 + HF_{X_1}) =:$ $(0, B_2, C_2)$ é também solução de $(\star)$, ou seja, $B_2F_{X_2} = -B_3F_{X_3}$. Deste modo, temos que $B_2 \in (F_{X_3}) : (F_{X_2})$, e assim, segue da afirmação (2) que $B_2 = LF_{X_3}$, com $L \in R$. Portanto, $(0, B_2, C_2) = L(0, F_{X_3}, -F_{X_2})$.

Logo, dada (A_1, B_1, C_1) uma solução de $(\star)$, temos que

$$\begin{aligned}(A_1, B_1, C_1) &= (0, B_1 + GF_{X_1}, C_1 + HF_{X_1}) + (A_1, -GF_{X_1}, -HF_{X_1}) = \\ &= (0, B_2, C_2) + (GF_{X_2} + HF_{X_3}, -GF_{X_1}, -HF_{X_1}) = \\ &= L(0, F_{X_2}, -F_{X_3}) + G(F_{X_2}, -F_{X_1}, 0) + H(F_{X_3}, 0, -F_{X_1}).\end{aligned}$$

Daí segue que M é gerado por (X_1, X_2, X_3), $(0, F_{X_2}, -F_{X_3})$, $(F_{X_2}, -F_{X_1}, 0)$ e $(F_{X_3}, 0, -F_{X_1})$.

Assim, dado $D = \sum_{\alpha \in V_1, \alpha \neq 0} c_\alpha(D)\,\Delta_\alpha = \overline{A}_1\Delta_{e_1} + \overline{A}_2\Delta_{e_2} + \overline{A}_3\Delta_{e_3} \in Der_k^1(A)$, vimos que $(A_1, A_2, A_3) \in M = \langle (X_1, X_2, X_3), (0, F_{X_2}, -F_{X_3}), (F_{X_2}, -F_{X_1}, 0), (F_{X_3}, 0, -F_{X_1}) \rangle$. Com isto, segue então que $Der_k^1(A)$ é gerado por (x_1, x_2, x_3), $(0, F_{x_2}, -F_{x_3})$, $(F_{x_2}, -F_{x_1}, 0)$ e $(F_{x_3}, 0, -F_{x_1})$, e a proposição está provada. ∎

Vamos finalmente provar o teorema:

Teorema 2.44 *Seja J um ideal principal, próprio e homogêneo de $R = k[X_1, X_2, X_3]$, e seja $A = \frac{R}{J}$. Assuma A reduzido. Então A é regular se, e somente se, $Diff_k^2(A) = Diff_k^1(A)\,Diff_k^1(A)$.*

Demonstração: Como já vimos, se A é regular então $Diff_k^2(A) = Diff_k^1(A)\,Diff_k^1(A)$ segue de ([2], IV, 16.11.2).

Suponhamos então $Diff_k^2(A) = Diff_k^1(A)\,Diff_k^1(A)$.

Vamos mostrar primeiramente que $Sing(A) \subseteq \{\mathfrak{m}\}$, onde $\mathfrak{m} := (x_1, x_2, x_3)$ é o ideal maximal homogêneo de A (ver Proposição 2.43). Assim, seja $x \in A$ um elemento homogêneo de grau um. Como A é reduzido, x é não nilpotente, e assim $S = \{1, x, x^2, \ldots\}$ é um subconjunto de A multiplicativamente fechado. Então $Diff_k^2(A_x) = Diff_k^1(A_x)\,Diff_k^1(A_x)$. Como foi visto na seção 1.5, $A_x = A_{(x)}[x, x^{-1}]$, com x algebricamente independente sobre $A_{(x)}$, e portanto $Diff_k^2(A_{(x)}) = Diff_k^1(A_{(x)})\,Diff_k^1(A_{(x)})$ pela Proposição 2.39. Agora, $A_{(x)}$ é um anel reduzido, já que A, e portanto A_x, é reduzido. Além disso, como $A_{(x)} \cong \frac{A}{x-1}$ (1.41) e x tem grau um, $A_{(x)}$ é da forma $\frac{k[Y_1,Y_2]}{f(Y_1,Y_2)}$. Logo, segue do Teorema 2.36 que $A_{(x)}$ é regular. Ou seja, $A_{(x)}$ é regular, para todo $x \in A$ homogêneo de grau um. Isto prova que $A_\mathfrak{p}$ é regular, para todo $\mathfrak{p} \in Spec(A)$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m} = (x_1, x_2, x_3)$. De fato, como $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, podemos assumir sem perda de gerneralidade que $x_1 \notin \mathfrak{p}$. Nestas condições, $\mathfrak{p}A_{x_1} \in Spec(A_{x_1})$ e $(A_{x_1})_{\mathfrak{p}A_{x_1}} = A_{\mathfrak{p}}$. Como $x_1 \in A$ é um elemento de homogêneo de grau um, temos que $A_{(x_1)}$ é regular. Logo, $A_{x_1} = A_{(x_1)}[x_1, x_1^{-1}]$ é regular e a afirmação segue.

Agora, seja $J = RF$, com $F = F(X_1, X_2, X_3)$ homogêneo de grau $m \geq 1$, pois J é ideal próprio. Se $m = 1$ então A é isomorfo a um anel de polinômios em duas variáveis sobre k, que é regular. Assim, vamos considerar $m \geq 2$, ie, suponhamos que A não seja regular.

Para concluir a demonstração, vamos considerar algumas afirmações:

(1) $(\frac{\partial F}{\partial X_3})^2 \in (F) + (X_1, X_2)^2$.

(2) $\frac{\partial F}{\partial X_2} \in (X_1, X_2)$.

(3) $\{F, X_1, \frac{\partial F}{\partial X_3}\}$ é uma sequência R-regular.

(4) $(\frac{\partial F}{\partial X_3})^2 \notin (X_1, X_2^2\frac{\partial F}{\partial X_2}, X_2^2\frac{\partial F}{\partial X_3}, F)$.

Antes de demonstrarmos estas afirmações, vale ressaltar que podemos assumir que $Disc_{X_3}(F(0, X_2, X_3)) \neq 0$, $F(0, X_2, X_3)$ e $\frac{\partial F}{\partial X_3}(0, X_2, X_3)$ não têm fatores comuns, e que $F(0, X_2, X_3)$ é livre de quadrados. De fato, como k tem característica zero, existe uma mudança linear de variáveis $X_i = Y_i + a_i X_3$, $i = 1, 2$ tal que $F = X_3^m + F_1 X_3^{m-1} + \cdots + F_m$, com $F_j \in k[Y_1, Y_2]$ homogêneos de grau j, $j = 1, \ldots, m$ ([17], Lemma II.3.2). Assim, podemos obter o seu polinômio reduzido correspondente ($F_1 = 0$) através da mudança de variáveis $Y_3 = X_3 - \frac{F_1}{m}$, ou seja, podemos assumir que $F = X_3^m + F_2 X_3^{m-2} + \cdots + F_m$, com $F_j \in k[X_1, X_2]$ homogêneos de grau j, para todo j. Logo, $Disc_{X_3}(F) \neq 0$ (ver [16], Teorema II.7 (1)). Além disso, podemos escolher X_1 de modo que $Disc_{X_3}(F) \notin X_1 k[X_1 X_2]$. Com efeito, suponhamos que $Disc_{X_3}(F) = GX_1$, com $G \in k[X_1 X_2]$, ie, $Disc_{X_3}(F) = (\sum_{i=1}^{l} c_{\alpha_i} X_1^{\alpha_{i_1}} X_2^{\alpha_{i_2}})X_1 = \sum_{i=1}^{l} c_{\alpha_i} X_1^{\alpha_{i_1}+1} X_2^{\alpha_{i_2}}$, $\alpha_i = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}) \in \mathbb{N}^2$, $c_{\alpha_i} \in k$. Neste caso, basta fazer a seguinte mudança de variáveis: $Y_1 = X_1 - t$, onde $t \in k$ satisfaz $\sum_{i=1}^{l} c_{\alpha_i} t^{\alpha_{i_1}+1} X_2^{\alpha_{i_2}} \neq 0$. Resta mostrar a existência de t. Para isto, note que $\sum_{i=1}^{l} c_{\alpha_i} t^{\alpha_{i_1}+1} X_2^{\alpha_{i_2}}$ é um polinômio na variável X_2 sobre k, com coeficientes indexados por α_{i_2} dados por $c_j = c_{\alpha_{i_2}} = \sum_{\alpha_i \in A_j} c_{\alpha_i} t^{\alpha_{i_1}+1}$, onde $A_j = A_{\alpha_{i_2}} = \{\alpha_i = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}) : i = 1, \ldots, l,\ \alpha_{i_2} \text{ fixo}\}$ e j percorre o número de α_{i_2} distintos, digamos $j = 1, \ldots, s$. Assim, para que a condição imposta acima seja satisfeita, devemos ter $c_j \neq 0$, para algum j, o que equivale a dizer que t não pode ser solução do sistema de equações dado por $q_j(T) = 0$, $j = 1, \ldots, s$, onde $q_j(T) = \sum_{\alpha_i \in A_j} c_{\alpha_i} T^{\alpha_{i_1}+1} \in K[T]$, e a afirmação segue então de (1.6). Deste modo, temos que $Disc_{X_3}(F(0, X_2, X_3)) \neq 0$, e assim, novamente por ([16], Teorema II.7 (2)), segue que $F(0, X_2, X_3)$ e $\frac{\partial F}{\partial X_3}(0, X_2, X_3)$ não têm fatores comuns, e $F(0, X_2, X_3)$ não tem fatores múltiplos (ver [16], Teorema II.9 (2)).

Assim, as afirmações (1) e (2) seguem do fato de que $F_1 = 0$. Com relação a (3), note que $\{X_1, F, \frac{\partial F}{\partial X_3}\}$ é uma sequência R-regular, já que $F(0, X_2, X_3)$ e $\frac{\partial F}{\partial X_3}(0, X_2, X_3)$ não têm fatores múltiplos, e portanto o resultado segue de 1.45. Finalmente, como $F(0, X_2, X_3)$ é um polinômio homogêneo de grau ≥ 2 em duas variáveis, mônico em X_3 e sem fatores múltiplos, podemos aplicar o Lema 2.41 para $H = F(0, X_2, X_3)$, e assim obtemos (4).

Agora, dado um operador $D \in Diff_k^{\infty}(R, A)$, defina $\varepsilon(D) := \sum_{\alpha \in V, \alpha_3 = 0} c_\alpha(D)\Delta_\alpha$. Em particular, podemos considerar $\varepsilon(D) \in Diff_k^{\infty}(R, A)$ para $D \in Diff_k^{\infty}(A)$ via a Identificação 2.19.

Como a única possível singularidade de A é o seu ideal maximal homogêneo $\mathfrak{m}$, temos pela Proposição 2.43 que $Der_k^1(A)$ é gerado como A-módulo por d, d_1, d_2, d_3, onde

$$d = x_1\Delta_{e_1} + x_2\Delta_{e_2} + x_3\Delta_{e_3},$$

$$\begin{aligned} d_1 &= F_{x_3}\Delta_{e_2} - F_{x_2}\Delta_{e_3}, \\ d_2 &= F_{x_3}\Delta_{e_1} - F_{x_1}\Delta_{e_3}, \\ d_3 &= F_{x_2}\Delta_{e_1} - F_{x_1}\Delta_{e_2}. \end{aligned}$$

Vamos considerar agora os elementos $d^2, d_1 d$ e d_1^2 de $Diff_k^2(A)$. Usando a Proposição 2.17, obtemos que:

$$\begin{aligned} \varepsilon(d^2) &= x_1\Delta_{e_1} + x_2\Delta_{e_2} + 2x_1^2\Delta_{2e_1} + 2x_1x_2\Delta_{e_1+e_2} + 2x_2^2\Delta_{2e_2}, \\ \varepsilon(d_1 d) &= F_{x_3}\Delta_{e_2} + x_1F_{x_3}\Delta_{e_1+e_2} + 2x_2F_{x_3}\Delta_{2e_2}, \\ \varepsilon(d_1^2) &= a\Delta_{e_2} + 2(F_{x_3})^2\Delta_{2e_2}, \end{aligned}$$

onde $a = F_{x_2x_3}F_{x_3} - F_{x_3^2}F_{x_2}$. Da afirmação (1) segue que podemos escrever $(F_{x_3})^2 = b_1x_1 + b_2x_2^2$, com $b_1, b_2 \in A$ homogêneos de grau $2m-3$ e $2m-4$, respectivamente, e da afirmação (2) segue que podemos escrever $a = uF_{x_3} + v_1x_1 + v_2x_2$, com $u, v_1, v_2 \in A$.

Seja $\mathfrak{a} := \{a \in A : \exists\, \delta \in Diff_k^2(A) \text{ com } c_{2e_1}(\delta) = a\}$. Note que $\mathfrak{a}$ é um ideal de A. Além disso, $x_1b_2 \in \mathfrak{a}$. De fato, defina $D := (b_2 - v_2)(d) - ud1 - b_2d^2 + d_1^2 \in Diff_k^2(A)$. Logo, $\varepsilon(D) = (b_2-v_2)\varepsilon(d) - u\varepsilon(d1) - b_2\varepsilon(d^2) + \varepsilon(d_1^2) = -v_2x_1\Delta_{e_1} + v_1x_1\Delta_{e_2} - 2x_1^2 - 2x_1x_2b_2\Delta_{e_1+e_2} + 2x_1b_1\Delta_{2e_2}$, ou seja, $c_\alpha(D) \in x_1(A)$ para todo $\alpha \in V_2$ tal que $\alpha_3 = 0$. Portanto, segue da afirmação (3) e do Lema 2.40 que existe $D' \in Diff_k^2(A)$ tal que $D = x_1D'$. É claro que $c_{2e_1}(D') = x_1^{-1}c_{2e_1}(D) = x_1^{-1}(-2x_1^2b_2) = -2x_1b_2$.

Como assumimos $Diff_k^2(A) = Diff_k^1(A)\, Diff_k^1(A)$, temos pelo Lema 2.11 que $Diff_k^2(A) = Diff_k^1(A) + Der_k^1(A)\, Der_k^1(A)$. Lembrando que $Der_k^1(A)$ é gerado por d, d_1, d_2, d_3, segue da Proposição 2.17 que $\mathfrak{a}$ é gerado por $x_1^2, x_1F_{x_2}, x_1F_{x_3}, (F_{x_2})^2, F_{x_2}F_{x_3}, (F_{x_3})^2$. Com efeito, seja $c_{2e_1}(\delta) \in \mathfrak{a}$, $\delta \in Diff_k^2(A) = Diff_k^1(A) + Der_k^1(A)\, Der_k^1(A)$. Podemos supor que $\delta = D_1 + \delta_1\delta_1'$, com $D_1 \in Diff_k^1(A)$ e $\delta_1, \delta_1' \in Der_k^1(A)$. Por 2.17 temos que $c_{2e_1}(\delta) = c_{2e_1}(D_1 + \delta_1\delta_1',) = c_{2e_1}(D_1) + c_{2e_1}(\delta_1\delta_1',) = 2\delta_1(X_1)c_{e_1}(\delta_1') = 2\delta_1(X_1)\delta_1'(X_1)$. Como

$Der_k^1(A)$ é gerado por d, d_1, d_2, d_3, temos que $\delta_1 = a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 + a_4 d$ e $\delta_1' = a_1' d_1 + a_2' d_2 + a_3' d_3 + a_4' d$, com $a_j, a_j' \in A$. Portanto, $\delta_1(X_1) = a_2 F_{x_3} + a_3 F_{x_2} + a_4 x_1$ e $\delta_1'(X_1) = a_2' F_{x_3} + a_3' F_{x_2} + a_4' x_1$. Logo, $c_{2e_1}(\delta) = 2(a_2 F_{x_3} + a_3 F_{x_2} + a_4 x_1)(a_2' F_{x_3} + a_3' F_{x_2} + a_4' x_1) = 2(a_2 a_2' (F_{x_3})^2 + a_2 a_3' F_{x_3} F_{x_2} + a_2 a_4' F_{x_3} x_1 + a_3 a_3' (F_{x_2})^2 + (a_3 a_4' + a_4 a_3') F_{x_2} x_1 + a_4 a_4' x_1^2)$, e a afirmação segue. Todos estes geradores são elementos homogêneos, e $\text{grau}((F_{x_2})^2) = \text{grau}(F_{x_2} F_{x_3}) = \text{grau}((F_{x_3})^2) = 2(m-1) = 2m-2 > 2m-3 = 1 + (2m-4) = \text{grau}(x_1 b_2)$. Portanto, $x_1 b_2 \in (x_1^2, x_1 F_{x_2}, x_1 F_{x_3})$. Como x_1 é não divisor de zero em A, $b_2 \in (x_1, F_{x_2}, F_{x_3})$. Mas então temos que $F_{x_3^2} = b_1 x_1 + b_2 x_2^2 \in (x_1, x_2^2 F_{x_2}, x_2^2 F_{x_3})$, o que finalmente contradiz (4).

∎

Capítulo 3

Ideais gerados por monômios

Mantendo a notação anterior, neste capítulo k denota um corpo de característica zero e R é o anel de polinômios $k[X_1, \dots, X_n]$. Vamos trabalhar no contexto da conjectura de Nakai com operadores diferenciais em k-álgebras afins da forma $A = \frac{R}{I}$, onde I é um ideal de R gerado por monômios.

Antes de tratarmos o caso especificado acima, vamos dar algumas propriedades gerais sobre operadores diferenciais.

3.1 Módulo dos Diferenciais de Kähler

Sejam k, A anéis comutativos com identidade e A uma k-álgebra. Considere a aplicação $\varphi : A \otimes A \to A$ dada por $\varphi(\sum_i a_i \otimes b_i) = \sum_i a_i b_i$ e seja $I := ker(\varphi)$.

O A-módulo $\frac{I}{I^{q+1}}$ é o módulo canônico dos diferenciais em A sobre k de ordem q, chamado o *módulo dos diferenciais de Kähler* e denotado por $\Omega_k^{(q)}(A)$.

A aplicação

$$\begin{aligned} d : A &\to \Omega_k^{(q)}(A) \\ a &\mapsto (1 \otimes a - a \otimes 1) \bmod I^{q+1} \end{aligned}$$

é uma derivação de ordem q, chamada *derivação canônica de A sobre k de ordem q*, denotada por $\delta_{A/k}^{(q)}$.

O par $(\delta_{A/k}^{(q)}, \Omega_k^{(q)}(A))$ constitui uma derivação universal de A sobre k de ordem q, pois tem a seguinte propriedade universal: toda derivação de A em M sobre k, M um A-módulo, pode ser fatorada através de $\Omega_k^{(q)}(A)$, isto é, se $D \in Diff_k^q(A, M)$ então existe um único

A-homomorfismo $f : \Omega_k^{(q)}(A) \to M$ tal que $D = f\delta_{A/k}^{(q)}$.

Assim, dada uma k-álgebra A, existe uma derivação universal $(\delta_{A/k}^{(q)}, \Omega_k^{(q)}(A))$, a qual é unicamente determinada, a menos de isomorfismo.

No caso particular em que $A = k[X_\lambda : \lambda \in \Lambda]$ é um anel de polinômios, temos que $\Omega_k^{(q)}(A)$ é um módulo livre sobre A, gerado por $\delta^{(q)}(X_\lambda), \delta^{(q)}(X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}), \ldots, \delta^{(q)}(X_{\lambda_1} \cdots X_{\lambda_q})$, $\lambda_i \in \Lambda$ ([6], Proposition II.2.2).

Propriedade funtorial 3.1 *Sejam A, B k-álgebras, h um k-homomorfismo de A em B. Então existe um A-homomorfismo h^* de $\Omega_k^{(q)}(A)$ em $\Omega_k^{(q)}(B)$ tal que $h^*\delta_{A/k}^{(q)} = \delta_{B/k}^{(q)}h$.*

Como consequência destas propriedades das derivações universais, obtemos uma caracterização de $Diff_k^\infty(A)$ a partir de $Diff_k^\infty(R)$, dada na proposição a seguir.

I denota um ideal de R não necessariamente gerado por monômios.

Notação: Para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, seja $\Delta^\alpha := \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha}{\partial X_1^{\alpha_1} \cdots \partial X_n^{\alpha_n}} \in Diff_k^{|\alpha|}(R)$. (Note que o operador $\Delta_\alpha \in Diff_k^{|\alpha|}(R, A)$ definido no capítulo anterior é dado pela composta $\pi \circ \Delta^\alpha$.)

A seguir, daremos uma descrição de $Diff_k^q(\frac{R}{I})$ a partir de $Diff_k^q(R)$:

Proposição 3.2 *Para todo $\overline{D} \in Diff_k^q(\frac{R}{I})$, existe $D = \sum\limits_{0 \leq |\alpha| \leq q} h_\alpha \Delta^\alpha \in Diff_k^q(R)$ com $D(I) \subseteq I$, tal que $\overline{D}$ é induzido por D, isto é, $\overline{D}\pi = \pi D$, onde $\pi : R \to \frac{R}{I}$ denota a projeção natural.*

Demonstração: Sejam (δ, Ω) e $(\overline{\delta}, \overline{\Omega})$ as derivações universais de R e $\frac{R}{I}$, respectivamente. Temos que Ω é A-módulo livre com base, digamos, $\{e_j : j \in J\}$. Pela propriedade universal de $(\overline{\delta}, \overline{\Omega})$, existe um $(\frac{R}{I})$-homomorfismo $\overline{\psi} : \overline{\Omega} \to \frac{R}{I}$ tal que $\overline{\psi\delta} = \overline{D}$, e a propriedade funtorial nos dá a existência de um R-homomorfismo $\pi^* : \Omega \to \overline{\Omega}$ tal que $\pi^*\delta = \overline{\delta}\pi$. Escolha $\psi(e_j) \in \pi^{-1}(\overline{\psi}(\pi^*(e_j)))$ arbitrariamente para $j \in J$. Deste modo, ψ é unicamente determinado como R-homomorfismo e $\pi\psi = \overline{\psi}\pi^*$. Basta definirmos $D := \psi\delta$. Assim, $\pi D = \pi\psi\delta = \overline{\psi}\pi^*\delta = \overline{\psi\delta}\pi = \overline{D}\pi$, e com isto temos que $D(I) \subseteq I$. ∎

3.2 Ideais Monomiais

A partir de agora, vamos assumir que I seja um ideal de R gerado por monômios.

Observação 3.3 *Sabemos que* $\{X^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ *constitui uma* k*-base livre de* R. *Assim, seja* J *um ideal de* R *gerado por monômios. Então* $f = \sum_\alpha c_\alpha X^\alpha \in I$ *se, e somente se,* $c_\alpha X^\alpha \in I$, *para todo* α.

Os resultados a seguir serão usados na demonstração da próxima proposição:

Lema 3.4 *Seja* $D = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial}{\partial X_j} \in Der_k^1(R)$. *Então* $D(I) \subseteq I$ *se, e somente se,* $h_j \frac{\partial}{\partial X_j}(I) \subseteq I$, *para todo* $j = 1, \ldots, n$.

Demonstração: Vamos assumir $D(I) \subseteq I$ e $j = 1$ (para $j = 2, \ldots, n$ é análogo). Basta mostrar que $h_j \frac{\partial}{\partial X_j}(X^\alpha) \in I$, para todo monômio $X^\alpha \in I$. Assim, seja $X^\alpha \in I$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Se $\alpha = (0, \ldots, 0)$ não há nada a fazer. Vamos supor então que $\alpha_i > 0$, para algum i. Sem perda de generalidade, seja $\alpha_1 \neq 0$. Como $h_1 \in R$, podemos escrever $h_1 = \sum_\beta h_1^\beta X^\beta$. Assim,

$$I \ni D(X^\alpha) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial X^\alpha}{\partial X_i} = h_1 \frac{\partial X^\alpha}{\partial X_1} + \sum_{i=2}^{n} h_i \frac{\partial X^\alpha}{\partial X_i} = (\sum_\beta h_1^\beta X^\beta) \frac{\partial}{\partial X_1}(X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}) + \sum_{i=2}^{n} h_i \frac{\partial X^\alpha}{\partial X_i} =$$

$$= \alpha_1 \sum_\beta h_1^\beta X^\beta X_1^{\alpha_1 - 1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_n^{\alpha_n} + \sum_{i=2}^{n} h_i \frac{\partial X^\alpha}{\partial X_i} \equiv$$

$$\equiv \alpha_1 \sum_{\beta_2, \ldots, \beta_n \geq 0} h_1^{(0, \beta_2, \ldots, \beta_n)} X_1^{\alpha_1 - 1} X_2^{\alpha_2 + \beta_2} \cdots X_2^{\alpha_n + \beta_n} + \sum_{i=2}^{n} h_i \frac{\partial X^\alpha}{\partial X_i} \mod I.$$

Portanto, $\alpha_1 \sum_{\beta_2, \ldots, \beta_n \geq 0} h_1^{(0, \beta_2, \ldots, \beta_n)} X_1^{\alpha_1 - 1} X_2^{\alpha_2 + \beta_2} \cdots X_2^{\alpha_n + \beta_n} + \sum_{i=2}^{n} h_i \frac{\partial X^\alpha}{\partial X_i} \in I$, e como I é gerado por monômios, segue da Observação 3.3 que para cada β fixado com $\beta_1 = 0$, o monômio $X_1^{\alpha_1 - 1} X_2^{\alpha_2 + \beta_2} \cdots X_2^{\alpha_n + \beta_n}$ deve pertencer a I, já que é k-linearmente independente dos demais termos da soma acima.

Assim, $h_1 \frac{\partial}{\partial X_1}(X^\alpha) = (\sum_\beta h_1^\beta X^\beta) \frac{\partial}{\partial X_1}(X^\alpha) = \sum_\beta h_1^\beta X^\beta \alpha_1 X_1^{\alpha_1 - 1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_n^{\alpha_n} =$

$$= \sum_{\beta_1 > 0} h_1^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} \alpha_1 X_1^{\alpha_1 - 1 + \beta_1} X_2^{\alpha_2 + \beta_2} \cdots X_n^{\alpha_n + \beta_n} + \sum_{\beta_1 = 0} h_1^{(0, \beta_2, \ldots, \beta_n)} \alpha_1 X_1^{\alpha_1 - 1} X_2^{\alpha_2 + \beta_2} \cdots X_n^{\alpha_n + \beta_n} \in I.$$

∎

Definição 3.5 *Para* $j = 1, \ldots, n$, *seja* $\mathfrak{a}_j := I : (\frac{\partial}{\partial X_j}(I)) = \{h \in R : h \frac{\partial}{\partial X_j}(I) \subseteq I\}$.
Para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, *seja* $\mathfrak{a}^\alpha := \mathfrak{a}_1^{\alpha_1} \cdots \mathfrak{a}_n^{\alpha_n}$.

Note que $\mathfrak{a}_j$ é também um ideal gerado por monômios. Além disso, segue do lema acima que se $D = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial}{\partial X_j} \in Der_k^1(R)$ então $D(I) \subseteq I$ se, e somente se, $h_j \in \mathfrak{a}_j$, para todo $j = 1, \ldots, n$.

Lema 3.6 *Sejam* $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, n\}, h_1 \in \mathfrak{a}_{j_1}$ *e* $h_2 \in \mathfrak{a}_{j_2}$. *Então* $h_1 \frac{\partial h_2}{\partial X_{j_1}} \in \mathfrak{a}_{j_2}$.

Demonstração: Se $j_1 = j_2$ a afirmação é trivial. Além disso, se h_2 não depende de X_1 também não há nada a fazer. Podemos assumir então sem perda de generalidade que $j_1 = 1, j_2 = 2$ e que h_2 é um monômio que depende de X_1, digamos $h_2 = X^{\lambda}, \lambda_1 \neq 0$. Seja $M = X^{\mu} \in I$. Então

$$h_1\frac{\partial h_2}{\partial X_1}\frac{\partial M}{\partial X_2} = h_1\lambda_1 X^{\lambda-e_1}\mu_2 X^{\mu-e_2} = h_1\lambda_1\mu_2 X^{\lambda+\mu-e_1-e_2} = h_1\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1}(\lambda_1+\mu_1)\mu_2 X^{\lambda+\mu-e_1-e_2} =$$
$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1}h_1\frac{\partial}{\partial X_1}(\mu_2 X^{\lambda+\mu-e_1-e_2}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1}h_1\frac{\partial}{\partial X_1}(X^{\lambda}\mu_2 X^{\mu-e_1-e_2}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1}h_1\frac{\partial}{\partial X_1}(h_2\frac{\partial M}{\partial X_2}) \in I. \blacksquare$$

Vamos denotar por $der_k^{\infty}(A)$ o submódulo de $Der_k^{\infty}(A)$ gerado pelas derivações. A próxima proposição consiste num resultado fundamental que, juntamente com a descrição dada em 3.2, nos fornece uma caracterização de $der_k^{\infty}(A)$:

Proposição 3.7 *Sejam $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ os R-módulos dados por:*

$$\mathfrak{M}_1 := \{D \in Der_k^{\infty}(R) : D(I) \subseteq I \text{ e } \overline{D} \in der_k^{\infty}(R/I)\},$$

$$\mathfrak{M}_2 := \{D = \sum_{|\alpha|\geq 0} h_\alpha \Delta^\alpha \in Der_k^{\infty}(R) : h_\alpha \in \mathfrak{a}^\alpha + I, \text{ para todo } \alpha\}.$$

Então $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$.

Demonstração:

($\subseteq$) Seja $D \in \mathfrak{M}_1$. Então $D = \sum_{|\alpha|\geq 0} h_\alpha \Delta^\alpha \in Der_k^{\infty}(R)$, $D(I) \subseteq I$ e $\overline{D} \in der_k^{\infty}(\frac{R}{I})$, ou seja, $\overline{D} = \sum_{r\geq 0} \overline{D_{i_1}} \cdots \overline{D_{i_r}}$, com $\overline{D_{i_s}} \in Der_k^1(\frac{R}{I})$, $s = 1,\ldots,r$, $r \geq 1$. Portanto, cada $\overline{D_{i_s}}$ é induzido por $D_{i_s} = \sum_{j_s=1}^{n} h_{j_s}\frac{\partial}{\partial X_{j_s}} \in Der_k^1(R)$, $D_{i_s}(I) \subseteq I$, $s = 1,\ldots,r$, $r \geq 1$. Por 3.4, temos que $h_{j_s} \in \mathfrak{a}_{j_s}$, $s = 1,\ldots,r$, $r \geq 1$. Assim, $\overline{D} = \sum_{r\geq 0}\left(\overline{(\sum_{j_1=1}^{n} h_{j_1}\frac{\partial}{\partial X_{j_1}})}\cdots\overline{(\sum_{j_r=1}^{n} h_{j_r}\frac{\partial}{\partial X_{j_r}})}\right) = \overline{\sum_{r\geq 0}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{n}(h_{j_1}\frac{\partial}{\partial X_{j_1}})\cdots(h_{j_r}\frac{\partial}{\partial X_{j_r}})}$. Logo, $\pi(\sum_{|\alpha|\geq 0} h_\alpha\Delta^\alpha) = \pi(\sum_{r\geq 0}\sum_{j_1,\ldots,j_r=1}^{n}(h_{j_1}\frac{\partial}{\partial X_{j_1}})\cdots(h_{j_r}\frac{\partial}{\partial X_{j_r}}))$ $= \pi(\sum_{|\alpha|\geq 0} g_\alpha\Delta^\alpha)$.

Portanto, é suficiente mostrar que se $r \geq 1$, $1 \leq j_1,\ldots,j_r \leq n$, $h_i \in \mathfrak{a}_{j_i}$ e $(h_1\frac{\partial}{\partial X_{j_1}})\cdots(h_r\frac{\partial}{\partial X_{j_r}}) = \sum g_{j_{i_1},\ldots,j_{i_t}}\frac{\partial^t}{\partial X_{j_{i_1}}\cdots\partial X_{j_{i_t}}}$ então $g_{j_{i_1},\ldots,j_{i_t}} \in \mathfrak{a}_{j_{i_1}}\cdots\mathfrak{a}_{j_{i_t}}$. Vamos mostrar por indução sobre r:

Se $r = 1$, não há nada a fazer.

Se $r > 1$, temos então por hipótese de indução que $(h_1\frac{\partial}{\partial X_{j_1}})(h_2\frac{\partial}{\partial X_{j_2}})\cdots(h_r\frac{\partial}{\partial X_{j_r}}) = (h_1\frac{\partial}{\partial X_{j_1}})(g_{j_{i_2},\ldots,j_{i_t}}\frac{\partial^{t-1}}{\partial X_{j_{i_2}}\cdots\partial X_{j_{i_t}}})$, com $g_{j_{i_2},\ldots,j_{i_t}} \in \mathfrak{a}_{j_{i_2}\cdots j_{i_t}}$ e $h_1 \in \mathfrak{a}_{j_{i_1}}$. Podemos assumir então que $g_{j_{i_2},\ldots,j_{i_t}} = g_2\cdots g_t$, com $g_2 \in \mathfrak{a}_{j_{i_2}},\ldots,g_t \in \mathfrak{a}_{j_{i_t}}$. Assim, $(h_1\frac{\partial}{\partial X_{j_1}})(g_{j_{i_2},\ldots,j_{i_t}}\frac{\partial^{t-1}}{\partial X_{j_{i_2}}\cdots\partial X_{j_{i_t}}}) =$

$\sum_{l=2}^{t}\left(h_1 \frac{\partial g_l}{\partial X_{j_{i_1}}} (\prod_{\substack{m\geq 2\\ m\neq l}} g_m) \frac{\partial^{t-1}}{\partial X_{j_{i_2}} \cdots \partial X_{j_{i_t}}} \right) + h_1 g_2 \cdots g_t \frac{\partial^t}{\partial X_{j_{i_1}} \cdots \partial X_{j_{i_t}}}$ e o resultado segue aplicando 3.6 ao primeiro termo.

($\supseteq$) Seja $D \in \mathfrak{M}_2$. Então $D = \sum_{|\alpha|\geq 0} h_\alpha \Delta^\alpha \in Der_k^\infty(R)$, com $h_\alpha \in \mathfrak{a}^\alpha + I$, para todo α. Podemos assumir $h_\alpha = g_1^\alpha \cdots g_n^\alpha + r^\alpha$, $g_i^\alpha \in \mathfrak{a}_i^{\alpha_i}$, $r^\alpha \in I$. Então $D = \sum_{|\alpha|\geq 0} (g_1^\alpha \cdots g_n^\alpha + r^\alpha)\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial X_1^{\alpha_1} \cdots \partial X_n^{\alpha_n}} = \sum_{|\alpha|\geq 0} (g_1^\alpha \cdots g_n^\alpha \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial X_1^{\alpha_1} \cdots \partial X_n^{\alpha_n}} + r^\alpha \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial X_1^{\alpha_1} \cdots \partial X_n^{\alpha_n}})$. Claramente, temos que o segundo termo de cada parcela da desta soma está em $\mathfrak{M}_1$.

Assim, basta mostrar que se $r \geq 1$ e $g_l \in \mathfrak{a}_{j_l}$, $1 \leq l \leq r$, então $g_1 \cdots g_r \frac{\partial^r}{\partial X_{j_1} \cdots \partial X_{j_r}}$. Indução sobre r:

$r = 1$: trivial.

Suponhamos então $r > 1$. Assim, $g_1 \cdots g_r \frac{\partial^r}{\partial X_{j_1} \cdots \partial X_{j_r}} = (g_1 \frac{\partial}{\partial X_{j_1}})(g_2 \cdots g_r \frac{\partial^{r-1}}{\partial X_{j_2} \cdots \partial X_{j_r}}) - g_1 \frac{\partial (g_2 \cdots g_r)}{\partial X_{j_1}} \frac{\partial^{r-1}}{\partial X_{j_2} \cdots \partial X_{j_r}} = (g_1 \frac{\partial}{\partial X_{j_1}})(g_2 \cdots g_r \frac{\partial^{r-1}}{\partial X_{j_2} \cdots \partial X_{j_r}}) - \sum_{l=2}^{r}\left(g_1 \frac{\partial g_l}{\partial X_{j_1}} (\prod_{\substack{m=2\\ m\neq l}}^{r} g_m) \frac{\partial^{r-1}}{\partial X_{j_2} \cdots \partial X_{j_r}} \right)$. O resultado é obtido aplicando 3.6 ao segundo termo e a hipótese de indução. ∎

O teorema a seguir fornece uma prova da conjectura de Nakai no caso de k-álgebras da forma $\frac{R}{I}$, onde R é o anel de polinômios e I um ideal de R gerado por monômios.

Observação 3.8 *Segue do Critério Jacobiano (1.27) que se $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ e I é um ideal homogêneo de R então $A = \frac{R}{I}$ é regular se, e somente se, todos os geradores de I têm grau ≤ 1.*

Teorema 3.9 *Seja I um ideal não trivial de $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ gerado por monômios, e seja E um conjunto mínimo de geradores de I constituído de monômios. Se $E \nsubseteq \{X_1, \ldots, X_n\}$ então $Der_k^\infty(\frac{R}{I}) \neq der_k^\infty(\frac{R}{I})$.*

Demonstração: Vamos distinguir três casos:

Caso 1: Para todo $j = 1, \ldots, n$, existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $X_j^{n_j} \in I$.

Neste caso, temos que $\mathrm{Rad}(I) = \mathfrak{m}$, onde $\mathfrak{m}$ é o ideal maximal de R gerado por $\{X_1, \ldots, X_n\}$. Escolha $q \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}^q \subseteq I$. Por hipótese, existe $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ com $X_{j_0} \notin I$. Sem perda de generalidade, podemos supor $j_0 = n$. Assim, vamos definir $D \in Der_k^q(R)$ da seguinte forma:

$$D(X_n) := 1 \text{ e}$$
$$D(X^\alpha) := 0, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ com } |\alpha| \leq q \text{ e } \alpha \neq e_n.$$

Vamos mostrar que $D(X^\beta) \in I$, para todo monômio $X^\beta \in I$. Se $|\beta| \leq q$, a afirmação segue da definição de D. Assim, seja $|\beta| > q$. Então $D(X^{\beta}) \in (X^{\beta-e_n}D(X^{\alpha}) : \alpha \leq \beta$ e $|\alpha| \leq q) =$

$$= \begin{cases} (X^{\beta-e_n}) & \text{se } \beta \geq e_n, \\ (0) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $|\beta - e_n| \geq q$, segue que $X^{\beta-e_n} \in \mathfrak{m}^q \subseteq I$, e portanto obtemos que $D(I) \subseteq I$. Além disso, como $D \in Der_k^q(R)$ podemos escrever $D = \sum_{|\alpha|\leq q} h_\alpha \Delta^\alpha$, e assim $h_{e_n} = \sum_{|\alpha|\leq q} h_\alpha \Delta^\alpha(X^{e_n}) = D(X^{e_n}) = 1$. Mas $1 \notin \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}^{e_n} + I$, pois caso contrário $X_n \notin \text{Rad}(I)$, uma contradição. Logo, o operador induzido $\overline{D} \notin der_k^{\infty}(\frac{R}{I})$.

Caso 2: Existe $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $X_{j_0}^m \notin I$, para todo $m \in \mathbb{N}$ e
$E \nsubseteq k[X_1, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_n]$, para todo $j = 1, \ldots, n$.

Podemos supor sem perda de generalidade que $j_0 = n$, ou seja, $X_n^m \notin I$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Seja $q := \max\ \{\text{grau}(M) : M \in E\}$, e assim vamos definir $D := X_n^{q-1}\frac{\partial^q}{\partial X_n^q} \in Der_k^q(R)$. Novamente, vamos mostrar que $\overline{D} \notin der_k^{\infty}(\frac{R}{I})$. Note que $D(I) \subseteq I$ decorre do fato de que $X_n^{q-1}\frac{\partial^l}{\partial X_n^l}(E) \subseteq I$, para todo $l = 0, \ldots, q$, o que por sua vez é claramente válido para $l = 0, \ldots, q-1$, e para $l = q$ basta notar que $\frac{\partial^q}{\partial X_n^l}(M) = 0$, para todo $M \in E$, já que o expoente de X_n em M é menor do que q (caso contrário, pela definição de q teríamos que $M = X_n^m$, o que contradiz a hipótese deste caso). Além disso, temos que $D = X_n^{q-1}\frac{\partial^q}{\partial X_s^q} = h_\alpha \Delta^\alpha$, com $\alpha = (0, \ldots, 0, q)$, mas $h_\alpha = X_n^{q-1} \notin \mathfrak{a}_n^q + I = \mathfrak{a}^\alpha + I$. De fato, como $E \nsubseteq k[X_1, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_n]$, para todo $j = 1, \ldots, n$, temos que $\mathfrak{a}_j \subseteq \mathfrak{m}$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Em particular, $\mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{m}$, e assim a afirmação segue, pois $X_n^{q-1} \notin \mathfrak{m}^q + I$.

Caso 3: Existe $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $E \subseteq k[X_1, \ldots, \widehat{X}_{j_0}, \ldots, X_n]$.

Vamos assumir sem perda de generalidade que $j_0 = n$, ou seja, $E \subseteq k[X_1, \ldots, X_{n-1}]$. Além disso, como $E \nsubseteq \{X_1, \ldots, X_n\}$, existe $i_0 \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $X_{i_0} \notin I$. Seja $i_0 = 1$. Novamente, teremos vários casos:

Caso 3a: Para $j = 1, \ldots, n-1$, existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $X_j^{n_j} \in I$.

Neste caso, existe q tal que $(X_1, \ldots, X_{n-1})^q \subseteq I$. Procede-se analogamente ao Caso 1, definindo $D \in Der_k^q(R)$ da seguinte maneira:

$$D(X_1) := 1 \text{ e}$$
$$D(X^\alpha) := 0, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ com } \alpha_n = 0,\ |\alpha| \leq q, \text{ e } \alpha \neq e_1.$$

Assim, teremos que $D(X_n^m g) = X_n^m D(g)$, para todo $m \in \mathbb{N}$ e para todo $g \in k[X_1, \ldots, X_{n-1}]$, e o resultado segue.

Caso 3b: Existe $j_0 \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $X_{j_0}^m \notin I$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Se $E \nsubseteq k[X_1, \ldots, \widehat{X}_{j_0}, \ldots, X_{n-1}]$, ficamos reduzidos ao Caso 2. Senão, prosseguimos da mesma forma, indutivamente, para os demais casos. ∎

Note que, no caso particular em que A é um anel de coordenadas não regular de uma hipersuperfície, obtemos uma confirmação da conjectura de Singh:

Proposição 3.10 *Seja $I = (X^\alpha)$ um ideal de R gerado por um único monômio de grau ≥ 2 e seja $A = \frac{R}{I}$. Então $Der_k^2(A) \nsubseteq der_k^\infty(A)$.*

Demonstração: Como $|\alpha| \geq 2$, temos que existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\alpha_i \geq 2$ ou existem $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, tais que $\alpha_i = \alpha_j = 1$. Além disso, note que $\mathfrak{a}_i = (X_i)$. Assim, basta tomarmos $D := (\alpha_i - 1)\frac{\partial}{\partial X_i} - X_i \frac{\partial^2}{\partial X_i^2}$ no primeiro caso e $D := X_i \frac{\partial^2}{\partial X_i^2}$ no segundo caso, obtendo deste modo $\overline{D} \notin der_k^\infty(\frac{R}{I})$, pois em ambos os casos temos que $D(I) \subseteq I$ mas $h_{e_i} = (\alpha_i - 1) \notin (X_i) = \mathfrak{a}^{e_i} + I$ no primeiro caso e $h_{2e_i} = 2X_i \notin (X_i^2) + (X^\alpha) = \mathfrak{a}^{2e_i} + I$ no segundo caso. ∎

No entanto, vamos exibir agora um contra-exemplo para ilustrar que a conjectura de Singh em geral não é válida:

Contra-exemplo 3.11 *Considere $A = \frac{R}{I}$, onde $R = k[X, Y]$ e I é o ideal de R gerado pelos seguintes monômios: $\{X^{11}, X^9Y, X^7Y^2, X^6Y^3, X^4Y^4, X^3Y^6, X^2Y^7, XY^9, Y^{11}\}$. Temos que A não é regular, embora todo k-operador diferencial de ordem 2 em A seja gerado pelas derivações de ordem 1.*

Demonstração: Novamente, vamos nos basear na Proposição 3.7. Seja $\overline{D}_2 \in Diff_k^2(A)$. Pela Proposicção 3.2, existe $D_2 = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 2} h_\alpha \Delta^\alpha \in Diff_k^2(R)$ com $D_2(I) \subseteq I$, tal que $\overline{D}_2\pi = \pi D_2$. Como $h_{(0,0)}\Delta^{(0,0)}$ claramente induz um operador gerado por derivações de ordem 1, basta considerarmos $d_2 := \sum_{0 < |\alpha| \leq 2} h_\alpha \Delta^\alpha$. Além disso, $d_2(I) \subseteq I$, pois $\Delta^{(0,0)}$ nada mais é do que a identidade em R. Assim, basta mostrar então que $h_\alpha \in \mathfrak{a}^\alpha + I$, para todo α com $0 < |\alpha| \leq 2$. Na verdade, é suficiente mostrar a afirmação para $\alpha \in \{2e_1, e_1 + e_2, 2e_2\}$, já que para e_1 e e_2 o resultado segue da Proposição 3.4.

Assim, suponhamos que $h_{2e_1} \notin \mathfrak{a}^{2e_1} + I = \mathfrak{a}_1^2 + I = (X, Y^2)^2 + I = (X^2, XY^2, Y^4)$. Neste caso, segundo a Observação 3.3, temos que h_{2e_1} possui um dos monômios a seguir: $(i)\, aX$, $(ii)\, aXY$, $(iii)\, aY$, $(iv)\, aY^2$, $(v)\, aY^3$, com $a \in k \setminus \{0\}$.

Caso (i): Como $d_2(I) \subseteq I$, temos em particular que $d_2(X^{11}) = 11h_{e_1}X^{10} + 55h_{2e_1}X^9 \in I$. Analisando os termos em X^{10} e aplicando novamente a Observação 3.3, h_{e_1} deve ter um monômio $-5a$. Analogamente, como $d_2(X^9Y) = 9h_{e_1}X^8Y + h_{e_2}X^9 + 36h_{2e_1}X^7Y +$

$9h_{e_1+e_2}X^8 \in I$, analisando os termos em X^8Y, $h_{e_1+e_2}$ deve ter um monômio aY. E finalmente, como $d_2(X^6Y^3) = 6h_{e_1}X^5Y^3 + 3h_{e_2}X^6Y^2 + 15h_{2e_1}X^4Y^3 + 18h_{e_1+e_2}X^5Y^2 + 3h_{2e_2}X^6Y \in I$, segue que $X^5Y^3 \in I$, um absurdo.

Caso (ii): Segue de $d_2(X^{11}) = 11h_{e_1}X^{10} + 55h_{2e_1}X^9 \in I$ que h_{e_1} deve ter um monômio $-5aY$. Como $d_2(X^4Y^4) = 4h_{e_1}X^3Y^4 + 4h_{e_2}X^4Y^3 + 6h_{2e_1}X^2Y^4 + 16h_{e_1+e_2}X^3Y^3 + 6h_{2e_2}X^4Y^2 \in I$, $h_{e_1+e_2}$ deve ter um monômio $\frac{7a}{8}Y^2$. E $d_2(X^2Y^7) = 2h_{e_1}XY^7 + 7h_{e_2}X^2Y^6 + h_{2e_1}Y^7 + 14h_{e_1+e_2}XY^6 + 21h_{2e_2}X^2Y^5 \in I$, donde obtemos que $XY^8 \in I$, um absurdo.

Caso (iii): $d_2(X^7Y^2) = 7h_{e_1}X^6Y^2 + 2h_{e_2}X^7Y + 21h_{2e_1}X^5Y^2 + 14h_{e_1+e_2}X^6Y + h_{2e_2}X^7 \in I \Rightarrow X^5Y^3 \in I$, um absurdo.

Caso (iv): $d_2(X^2Y^7) = 2h_{e_1}XY^7 + 7h_{e_2}X^2Y^6 + h_{2e_1}Y^7 + 14h_{e_1+e_2}XY^6 + 21h_{2e_2}X^2Y^5 \in I \Rightarrow Y^9 \in I$, um absurdo.

Caso (v): $d_2(X^2Y^7) = 2h_{e_1}XY^7 + 7h_{e_2}X^2Y^6 + h_{2e_1}Y^7 + 14h_{e_1+e_2}XY^6 + 21h_{2e_2}X^2Y^5 \in I \Rightarrow Y^{10} \in I$, um absurdo.

Agora, devido à simetria com relação às variáveis X e Y nos geradores de I, segue de maneira completamente análoga que $h_{2e_2} \in \mathfrak{a}^{2e_2} + I = (Y, X^2)^2 + I = (Y^2, X^2Y, X^4)$.

Mostremos finalmente que $h_{e_1+e_2} \in \mathfrak{a}^{e_1+e_2} + I = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 + I = (XY, X^3, Y^3)$. Suponhamos que não. Então $h_{e_1+e_2}$ deve possuir um dos seguintes monômios: $(i)\, aX$, $(ii)\, aX^2$, $(iii)\, aY$, $(iv)\, aY^2$, com $a \in k \setminus \{0\}$. Vamos proceder da mesma forma:

Caso (i): $d_2(X^9Y)$, $d_2(X^7Y^2)$, $d_2(X^6Y^3) \in I \Rightarrow X^6Y^2 \in I$, um absurdo.

Caso (ii): $d_2(X^9Y)$, $d_2(X^7Y^2)$, $d_2(X^4Y^4) \in I \Rightarrow X^5Y^3 \in I$, um absurdo.

Caso (iii): $d_2(XY^9)$, $d_2(X^2Y^7)$, $d_2(X^3Y^6) \in I \Rightarrow X^2Y^6 \in I$, um absurdo.

Caso (iv): $d_2(XY^9)$, $d_2(X^2Y^7)$, $d_2(X^4Y^4) \in I \Rightarrow X^3Y^5 \in I$, um absurdo.

Isto prova então que $Diff_k^2(A)$ é gerado por $Diff_k^1(A)$.

Vejamos que, entretanto, $Diff_k^3(A)$ não é gerado por $Diff_k^1(A)$. Consideremos $D = X^5\frac{\partial^3}{\partial Y^3} \in Der_k^3(A)$. É fácil ver que $D(I) \subseteq I$. Além disso, $D = X^5\frac{\partial^3}{\partial Y^3} = 3!X^5\frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial Y^3} = h_{(0,3)}\Delta^{(0,3)}$, mas $h_{(0,3)} = 6X^5 \notin (Y^3, Y^2X^2, YX^4, X^6, XY^9) = (Y, X^2)^3 + I = \mathfrak{a}_2^3 + I = \mathfrak{a}^{(0,3)} + I$. Logo, o operador induzido $\overline{D} \notin der_k^\infty(A)$. ∎

Capítulo 4

A Conjectura de Nakai para Curvas

Ishibashi [4] estendeu a Conjectura de Nakai para variedades definidas sobre um corpo perfeito arbitrário. Neste capítulo, a noção de $\mathfrak{D}$-simplicidade será usada para apresentar uma prova curta de que variedades cuja normalização é suave satisfazem esta extensão da Conjectura de Nakai. Em particular, isto nos dá uma prova simples, e independente da característica, da Conjectura de Nakai para curvas.

4.1 Introdução

Definição 4.1 *Uma* derivação de Hasse-Schmidt $\Delta = \{\delta_m\}_{m=0}^{\infty} \subseteq End_k(A)$ *é uma coleção de k-endomorfismos tais que* $\delta_0 = id_A$ *e*

$$\delta_m(ab) = \sum_{i=0}^{m} \delta_i(a)\delta_{m-i}(b).$$

Neste caso, diremos simplesmente que Δ é uma HS-derivação.

Iniciamos com um lema que relaciona os conceitos de diferenciais dados nos capítulos anteriores e o conceito de uma HS-derivação de A.

Lema 4.2 *Se A é uma k-álgebra comutativa e $\Delta = \{\delta_m\}_{m=0}^{\infty}$ é uma HS-derivação então, para todo m, temos que $\delta_m \in Diff_k^m(A)$.*

Demonstração: Vamos provar por indução sobre m. Como para $m = 0$ não há nada a fazer, suponhamos portanto que $m > 0$ e observe que, para quaisquer $a, b \in A$, temos que

$$\begin{aligned}[\delta_m, a](b) &= \delta_m(ab) - a\delta_m(b) = \sum_{i=0}^{m} \delta_i(a)\delta_{m-i}(b) - a\delta_m(b) = \\ &= a\delta_m(b) + \sum_{i=1}^{m} \delta_i(a)\delta_{m-i}(b) - a\delta_m(b) = \sum_{i=1}^{m} \delta_i(a)\delta_{m-i}(b) = \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \delta_{m-j}(a)\delta_j(b) = \delta_{m-1}(ab) = ([\delta_{m-1}, a] + a\delta_{m-1})(b).\end{aligned}$$

Portanto, por hipótese de indução, temos que $[\delta_m, a] \in Diff_k^{m-1}(A)$, para todo $a \in A$. ∎

A partir deste lema, podemos dar a seguinte definição:

Definição 4.3 *$HS(A/k)$ é a A-subálgebra de $Diff_k^{\infty}(A)$ gerado pelas componentes δ_m das derivações de Hasse-Schmidt em A.*

Exemplo 4.4 *Se A tem característica zero e d é uma derivação, então $\delta_m = \frac{1}{m!}d^m$ determina uma derivação de Hasse-Schmidt.*

Portanto, para característica zero, temos $diff_k^{\infty}(A) \subseteq HS(A/k)$. Sabemos que, neste caso, se A é regular então $Diff_k^{\infty}(A) = HS(A/k)$.

Uma prova deste resultado em característica arbitrária pode ser encontrada em Traves [11]. A recíproca consiste exatamente na extensão de Ishibashi da Conjectura de Nakai: *Seja A uma álgebra afim sobre um corpo perfeito. Então A é regular se, e somente se, $Diff_k^{\infty}(A) = HS(A/k)$.*

4.2 Resultados Preliminares

Vamos introduzir nesta seção as definições e os conceitos utilizados neste capítulo, e daremos também alguns lemas necessários para a prova do resultado principal. Neste parágrafo, A denotará uma álgebra afim reduzida sobre um corpo perfeito k.

Definição 4.5 *Para um anel reduzido A, a* normalização *A'* de *A é o fecho integral de A no seu anel total de frações $Q(A) := S^{-1}(A)$, onde S é o conjunto multiplicativo de não divisores de zero em A.*

Definição 4.6 *O* condutor de *A'* em *A é dado por $\mathcal{C} := \{c \in A : cA' \subseteq A\}$.*

Claramente, temos que o condutor é tanto um ideal de A quanto de A'.

Definição 4.7 *Dizemos que um ideal $\mathfrak{a}$ de A é $HS(A/k)$-estável se, dada uma derivação de Hasse-Schmidt $\Delta = \{\delta_m\}_{m=0}^{\infty}$, temos que $\delta_m(a) \in \mathfrak{a}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e para todo $a \in \mathfrak{a}$.*

Lema 4.8

1. *O condutor é $HS(A/k)$-estável.*

2. *Potências de ideais $HS(A/k)$-estáveis são $HS(A/k)$-estáveis.*

Demonstração: *1.* Sejam $\Delta = \{\delta_m\}_{m=0}^{\infty} \in HS(A/k)$ e $c \in \mathcal{C}$. Vamos mostrar por indução sobre m que $\delta_m(c) \in \mathcal{C}$, para todo $m \in \mathbb{N}$. É claro que $\delta_0(c) = c \in \mathcal{C}$. Suponhamos então $m > 0$. Temos que Δ admite uma única extensão $\tilde{\Delta} = \{\tilde{\delta}_m\}_{m=0}^{\infty}$ a A' ([4], Lemma 1 (1)). Assim, para todo $l \in A'$,

$$\delta_m(c)\,l = \tilde{\delta}_m(c)\,\tilde{\delta}_0(l) = \sum_{i=0}^{m}\tilde{\delta}_i(c)\,\tilde{\delta}_{m-i}(l) - \sum_{i=0}^{m-1}\tilde{\delta}_i(c)\,\tilde{\delta}_{m-i}(l) = \tilde{\delta}_m(c\,l) - \sum_{i=0}^{m-1}\tilde{\delta}_i(c)\,\tilde{\delta}_{m-i}(l).$$

Agora, como $c \in \mathcal{C}$, $c\,l \in A$ e portanto $\tilde{\delta}_m(c\,l) = \delta_m(c\,l) \in A$, e $\tilde{\delta}_i(c) = \delta_i(c) \in \mathcal{C}$ por hipótese de indução. Além disso, $\tilde{\delta}_j(l) \in A$ segue de ([9], teorema na página 168 e § 5). Logo, $\delta_m(c)A' \subseteq A$, ou seja, $\delta_m(c) \in \mathcal{C}$.

2. Vamos provar por indução sobre s que se $\mathfrak{a}$ é um ideal $HS(A/k)$-estável de A então qualquer potência $\mathfrak{a}^s$ de $\mathfrak{a}$ é também $HS(A/k)$-estável. Para $s = 1$, a afirmação é válida por hipótese. Vamos supor então $s > 1$. Sejam $a_1, \ldots, a_s \in \mathfrak{a}$ e $\Delta = \{\delta_m\}$ uma derivação de Hasse-Schmidt. Temos que, para todo m, $\delta_m(a_1 \cdots a_s) = \sum_{i=0}^{m} \delta_i(a_1)\delta_{m-i}(a_2 \cdots a_s)$, e a afirmação segue por hipótese de indução. ∎

Lema 4.9 *Nenhum ideal primo minimal de A contém o condutor.*

Demonstração: Temos que $\mathcal{C} = Ann_A(\frac{A'}{A}) := \{a \in A : am = 0, \forall\, m \in \frac{A'}{A}\}$. Suponhamos por um momento que $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{p}$, com $\mathfrak{p}$ um ideal primo minimal de A. Então, como $Supp(\frac{A'}{A}) := \{\mathfrak{p} \in Spec(A) : (\frac{A'}{A})_{\mathfrak{p}} \neq 0\} = \{\mathfrak{p} \in Spec(A) : \mathfrak{p} \supseteq Ann(\frac{A'}{A})\}$ ([17], Proposition III.4.6), segue que $\mathfrak{p} \in Supp(\frac{A'}{A})$. Mas como $\mathfrak{p}$ é um ideal primo minimal de um anel reduzido, $A_{\mathfrak{p}}$ é um corpo ([17], Example III.4.18 b), portanto normal, e então $A_{\mathfrak{p}} = (A_{\mathfrak{p}})' \cong A'_{\mathfrak{p}}$ ([13], Proposition 5.12), ou seja, $(\frac{A'}{A})_{\mathfrak{p}} \cong \frac{A'_{\mathfrak{p}}}{A_{\mathfrak{p}}} = 0$, o que contradiz $\mathfrak{p} \in Supp(\frac{A'}{A})$. ∎

Vamos introduzir agora o conceito de D-simplicidade:

Definição 4.10 *Sejam R um anel, J um ideal de R. Dizemos que J é um $\mathfrak{D}$-ideal se J for $Diff_k^\infty(R)$-estável, ie, se $D(J) \subseteq J$, para todo $D \in Diff_k^\infty(R)$.*

R é chamado um anel $\mathfrak{D}$-simples se os únicos $\mathfrak{D}$-ideais de R são os triviais.

A definição a seguir foi criada por Hochster e Huneke no desenvolvimento da teoria de *Tigh Closure*, cujo conceito será usado para demonstrar o próximo lema. Dado um anel R de característica $p > 0$ e $q = p^m$ uma potência de p, vamos considerar o anel $R^{\frac{1}{q}}$ das raízes q-ésimas dos elementos de R. Este anel possui uma estrutura de R-módulo dada pela inclusão $R \subset R^{\frac{1}{q}}$.

Definição 4.11 *Seja R um anel noetheriano, reduzido de característica $p > 0$ tal que $R^{\frac{1}{p}}$ é R-módulo finitamente gerado. R é dito* fortemente F-regular *se, para todo $c \in R$ não pertencente a nenhum ideal primo minimal de R, existe alguma potência $q = p^m$ de p tal que a aplicação R-linear $R \to R^{\frac{1}{q}}$ definida por $1 \mapsto c^{\frac{1}{q}}$ cinde como uma aplicação de R-módulos.*

Vale ressaltar que se R for uma álgebra afim sobre um corpo perfeito de característica $p > 0$, então $R^{\frac{1}{p}}$ é um R-módulo finitamente gerado (Hochster e Huneke [3], página 13).

Lema 4.12 *Anéis regulares são um produto finito de anéis $\mathfrak{D}$-simples.*

Demonstração: Seja A um anel regular.

Consideremos primeiramente o caso de característica zero. Vamos mostrar que, neste caso, A é um anel $\mathfrak{D}$-simples. Vamos considerar $Diff_k^\infty(A)$ como um anel, ou seja, um subanel dos k-endomorfismos de A. Como A é um anel regular de característica zero, $Diff_k^\infty(A) = diff_k^\infty(A)$ (Grothendieck [2], IV, 16.11.2), e neste caso, $Diff_k^\infty(A)$ é um anel simples, ou seja, seus únicos ideais são os triviais (ver McConnell e Robson [20], Theorem 15.3.7). Suponhamos então que A tenha um ideal I não trivial $\mathfrak{D}$-simples. Então $Diff_k^\infty(A) I Diff_k^\infty(A)$ é um ideal não trivial de $Diff_k^\infty(A)$, uma contradição.

Agora, no caso em que A for um anel regular de característica $p > 0$, temos que A é um anel fortemente F-regular, e portanto um produto finito de domínios fortemente F-regulares (ver Hochster e Huneke [3], Theorem 5.5). O problema se reduz então a mostrar que domínios fortemente F-regulares são $\mathfrak{D}$-simples. Para isto, basta provar que todo elemento não nulo de um domínio fortemente F-regular B gera todo o B sob a ação de $Diff_k^\infty(A)$. Assim, seja $c \in B$, $c \neq 0$. Como (0) é o único ideal primo minimal de um domínio e B é fortemente F-regular, segue que existe algum q tal que a aplicação B-linear

$\varphi : B \to B^{\frac{1}{q}}$ definida por $\varphi(1) := c^{\frac{1}{q}}$ cinde, ie, existe $\theta \in Hom_B(B^{\frac{1}{q}}, B)$ tal que $\theta \circ \varphi = id_B$. A aplicação θ induz o seguinte operador diferencial:

$$\begin{aligned} \theta^q : B &\to B \\ x &\mapsto (\theta(x^{\frac{1}{q}}))^q \in B^q \subseteq B, \end{aligned}$$

e $\theta^q(c) = (\theta(c^{\frac{1}{q}}))^q = (\theta(\varphi(1)))^q = 1^q = 1$. ∎

4.3 A Conjectura de Nakai para Variedades com Normalização Suave

Agora, usaremos a noção de $\mathfrak{D}$-simplicidade para provar que variedades cuja normalização é suave satisfazem a extensão da Conjectura de Nakai. Em particular, obtemos uma prova simples da Conjectura de Nakai para curvas.

Teorema 4.13 *Seja A uma álgebra afim reduzida sobre um corpo perfeito k tal que $HS(A/k)$ $= Diff_k^{\infty}(A)$. Se a normalização A' de A for um produto finito de anéis $\mathfrak{D}$-simples então A é normal.*

Demonstração: Note que $A' \cong A_1' \times \cdots \times A_t'$, onde A_i' é a normalização de $A_i := \frac{A}{\mathfrak{p}_i}$ e $\{\mathfrak{p}_i\}_{i=1}^t$ é o conjunto dos ideais primos minimais de A (Bourbaki [14], Corollary 1, página 309). E por hipótese, temos então que cada A_i' é $\mathfrak{D}$-simples, $t = 1, \ldots, t$. Pelo Lema 4.8 (1), $\mathcal{C}^2$ é $HS(A/k)$-estável, e portanto $\mathcal{C}^2$ é um $\mathfrak{D}$-ideal.

Vamos mostrar agora que $\mathcal{C}^2 = \mathcal{C}$. Suponhamos por um momento que não. Pelo Lema 4.9, para todo $i = 1, \ldots, t$, existe $c_i \in \mathcal{C} \setminus \mathfrak{p}_i$. Podemos tomar algum $c_j \notin \mathcal{C}^2$. De fato, seja $x \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}^2$. Como $0 \in \mathcal{C}^2$, $x \neq 0$ e portanto $x \notin \bigcap_{i=1}^{t} \mathfrak{p}_i$, pois A é reduzido. Ou seja, existe j tal que $x \notin \mathfrak{p}_j$. Basta tomar $c_j := x$. Agora, seja $c := (\overline{c_1} \times \ldots \times \overline{c_t}) \in \frac{A}{\mathfrak{p}_1} \cdots \frac{A}{\mathfrak{p}_t} = A_1 \times \cdots \times A_t \subseteq A_1' \times \cdots \times A_t' \cong A'$. Pelo isomorfismo acima, temos que $c \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}^2$. Ainda, todas as componente de c são não nulas. Deste modo, para cada $i = 1, \ldots, t$, como A_i' é $\mathfrak{D}$-simples, existe $\theta_i \in Diff_k^{\infty}(A_i')$ tal que $1 = \theta_i(\overline{c_i}^2)$. Com efeito, para $i \in \{1, \ldots, t\}$, considere $\mathfrak{a}_i := \{\theta_i(\overline{ci}^2) : \theta_i \in Diff_k^{\infty}(A_i')\}$. Note que $\mathfrak{a}_i$ é um ideal de A_i', $\mathfrak{a}_i \neq (0)$ e $\mathfrak{a}_i$ é um $\mathfrak{D}$-ideal. Como A_i' é $\mathfrak{D}$-simples, $\mathfrak{a}_i = A_i'$, e a afirmação segue. Assim existe um operador $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_t) \in Diff_k^{\infty}(A_1') \times \cdots \times Diff_k^{\infty}(A_t')$ tal que $\theta(c^2) = 1$. Então, temos que

$\theta \in Diff_k^{\infty}(A')$ e $c\theta \in Diff_k^{\infty}(A)$, mas $c\theta(c^2) = c \notin \mathcal{C}^2$, o que contradiz o fato de $\mathcal{C}^2$ ser um $\mathfrak{D}$-ideal.

Na verdade, temos que $\mathcal{C} = A$. De fato, suponhamos que $\mathcal{C} \neq A$. Então existe um ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A tal que $\mathfrak{m} \supseteq \mathcal{C}$. Assim, $\mathcal{C}_{\mathfrak{m}} = \mathcal{C}A_{\mathfrak{m}} = \mathcal{C}^2A_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathfrak{m}\mathcal{C}A_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathcal{C}A_{\mathfrak{m}} = \mathcal{C}_{\mathfrak{m}}$, ou seja, $\mathfrak{m}\mathcal{C}A_{\mathfrak{m}} = \mathcal{C}A_{\mathfrak{m}}$, e portanto, segue do Lema de Nakayama que $\mathcal{C}A_{\mathfrak{m}} = 0$. Neste caso, para todo $c \in \mathcal{C}$, existe $s \in A \setminus \mathfrak{m}$ tal que $s\,c = 0$, ou seja, $\mathcal{C}$ consiste apenas de divisores de zero. E como A é reduzido, segue que $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{p}_1 \bigcup \cdots \bigcup \mathfrak{p}_t$, e portanto $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{p}_j$, para algum $j \in \{1, \ldots, t\}$, contradizendo o Lema 4.9.

Assim, como $\mathcal{C} = A$, temos que $A' = A$, ie, A é normal. ∎

Corolário 4.14 *Se $HS(A/k) = Diff_k^{\infty}(A)$ e a normalização A' de A é regular então A é regular.*

Demonstração: Como A' é regular, segue do Lema 4.12 que A' é um produto finito de anéis $\mathfrak{D}$-simples. Logo, A é normal, ie, $A = A'$, que é regular. ∎

Por fim, vamos demonstrar a Conjectura de Nakai para curvas:

Corolário 4.15 *Se $dim(A) = 1$ e $HS(A/k) = Diff_k^{\infty}(A)$ então A é regular. Em particular, se A tem característica zero e $diff_k^{\infty}(A) = Diff_k^{\infty}(A)$ então A é regular.*

Demonstração: Temos que $dim(A') = dim(A) = 1$. Logo, segue do Teorema 1.53 que $A'_{\mathfrak{m}'}$ é regular, para todo ideal maximal $\mathfrak{m}'$ de A', ie, A' é regular. O resultado agora segue do Corolário 4.14. ∎

Referências Bibliográficas

[1] J. BECKER, *Higher derivations and integral closure*, Amer. J. Math., **100** (1978).

[2] A. GROTHENDIECK, *Éléments de Géométrie Algébrique*, Publ. Math. IHES, **32** (1967).

[3] M. HOCHSTER, C. HUNEKE, *F-regularity, test elements and smooth base change*, Trans. Amer. Math. Soc. **346**, 1-62 (1994).

[4] Y. ISHIBASHI, *An Analogue of Nakai's Conjecture*, Communications in Algebra, **13**, no. 3, 575-584 (1985).

[5] K. R. MOUNT, O. E. VILLAMAYOR, *On a Conjecture of Y. Nakai*, Osaka J. Math., **10**, 325-327 (1973).

[6] Y. NAKAI, *High order derivations I*, Osaka J. Math., **7**, 1-27 (1970).

[7] C. J. REGO, *Remarks on differential operators on algebraic varieties*, Osaka J. Math., **14**, 481-486 (1977).

[8] A. SCHREINER, *On a Conjecture of Nakai*, Arch. Math., **62** (1994).

[9] A. SEIDENBERG, *Derivations and Integral Closure*, Pacific J. Math., **16**, no. 1, 167-173 (1966).

[10] B. SINGH, *Differential Operators on a Hypersurface*, Nagoya Math., J. **103**, 67-84 (1986).

[11] W. N. TRAVES, *Differential Operators and Nakai's Conjecture*, Ph. D. Thesis, University of Toronto (1998).

[12] J. F. ANDRADE, A. SIMIS, *Tópicos de Álgebra Comutativa*, 13° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA - CNPq, Rio de Janeiro (1981).

[13] M.F. ATIYAH, I.G. MACDONALD, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1969).

[14] N. BOURBAKI, *Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1972).

[15] W. BRUNS, J. HERZOG, *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge studies in advanced mathematics **39**, Cambridge University Press, Cambridge (1998).

[16] A. GARCIA, Y. LEQUAIN, *Álgebra: um curso de introdução*, Projeto Euclides, IMPA - CNPq, Rio de Janeiro (1988).

[17] E. KUNZ, *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Birkhäuser Boston (1985).

[18] H. MATSUMURA, *Commutative Algebra*, 2^{nd} edition, Benjamin/Cummings Publishing Company, Reading, Mass. (1980).

[19] H. MATSUMURA, *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press (1986).

[20] J. C. MCCONNELL, J. C. ROBSON, *Noncommutative Noetherian Rings*, Wiley, New York (1987).

[21] M. NAGATA, *Local Rings*, Interscience, Kyoto University, Kyoto (1962).

[22] J.-P. SERRE, *Algèbre Locale. Multiplicités*, LNM **11**, Springer (1965).

[23] O. ZARISKI, P. SAMUEL, *Commutative Algebra*, Vol. II, GTM **29**, Springer-Verlag, New York (1960).