

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

**Sistema de Raízes e
Representações de Quivers.**

Vitor Moretto Fernandes da Silva ¹

Orientador: Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim

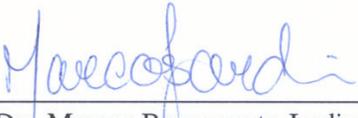
Campinas-SP
Março, 2009

¹Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq

Sistema de Raízes e Representações de Quivers

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Vitor Moretto Fernandes da Silva e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 06 de Março de 2009



Prof. Dr.: Marcos Benevenuto Jardim
Orientador

Banca Examinadora:

- 1 Marcos Benevenuto Jardim
- 2 Viktor Bekkert
- 3 Adriano Adrega de Moura

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Crislene Queiroz Custódio – CRB8 / 7966

Silva, Vitor Moretto Fernandes da

Si38s Sistemas de raízes e representações de Quivers / Vitor Moretto
Fernandes da Silva -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.

Orientador : Marcos Benevenuto Jardim

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Quivers. 2. Representações de Quivers. 3. Sistema de raízes
(Álgebra). I. Jardim, Marcos Benevenuto. II. Universidade Estadual de
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
III. Título.

(cqc/imecc)

Título em inglês: Root system and representation of quivers

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Quivers. 2. Representations of Quivers. 3. Root systems (Algebra).

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Viktor Bekkert (UFMG)
Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura (IMECC-Unicamp)

Data da defesa: 06/03/2009

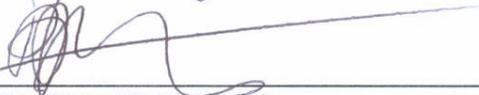
Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 06 de março de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). MARCOS BENEVENUTO JARDIM



Prof. (a). Dr (a). VIKTOR BEKKERT



Prof. (a). Dr (a). ADRIANO ADREGA DE MOURA

Agradecimentos

Agradeço aos meus amigos e minha família. Valeu galera!

Ao Prof. Marcos Jardim. O cara!

Aos Professores Viktor Bekkert e Adriano Adrega de Moura, que compuseram a banca examinadora. Suas dicas foram de grande ajuda.

Ao Prof Vyacheslav Futorny, por ter me salvado com o artigo do Ovsienko. Não tenho palavras para agradecer.

Ao CNPq pelo apoio financeiro durante o mestrado.

Resumo

Neste trabalho definimos quivers e discutimos como a categoria de módulos sobre uma álgebra conexa qualquer pode ser associada à categoria de representações de um quiver. Estudamos também o sistema de raízes da forma quadrática de Cartan associada a um quiver, que tem bijeção com os vetores dimensão de representação indecomponíveis.

Estudamos a demonstração do Teorema de Gabriel, que caracteriza todos os quivers que têm quantidade finita de representações indecomponíveis a partir da forma de Cartan. O Teorema de Gabriel também define quando um quiver tem tipo manso. Apresentamos também a demonstração do Teorema de Ovsienko, que sob certas condições, caracteriza os quivers com relações que têm quantidade finita de representações indecomponíveis a partir da forma de Brenner.

Abstract

In this work, we define quivers and their representations, and discuss how the category of modules over an arbitrary connected associative algebra can be associated to the category of representations of a quiver. We also study the root system of the Cartan quadratic form associated to a quiver, which is bijective with the set of dimension vectors for which an indecomposable representation exists.

The proof of Gabriel's Theorem, which characterizes all quivers with finitely many indecomposable representations in terms of its Cartan form, is presented. Gabriel's Theorem also defines when a quiver is of tame type. Finally, we also describe a theorem due to Ovsienko which, under certain conditions, characterizes the quivers with relations that admit only finitely many indecomposable representations in terms of its Brenner form.

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	1
1 Definições Iniciais	3
1.1 Quiver e Representações de Quivers	3
1.2 Categorias e Funtores	10
1.3 Quivers e Álgebras Associativas	20
2 Sistemas de Raízes	27
2.1 Construção do Sistema de Raízes	27
2.2 Diagramas hiperbólicos e Sistema de Raízes para Diagramas hiperbólicos	31
3 Teorema de Gabriel	45
3.1 Funtores Reflexivos	45
3.2 Demonstração do Teorema de Gabriel	54

4	Representações de quivers com relações	67
4.1	Functor Reflexivo para Quivers com caminhos designados . . .	72
4.1.1	$i \in Q_0$ não pertence a nenhum caminho designado: . . .	72
4.1.2	$i \in Q_0$ é um sumidouro e pertence a um caminho orientado:	72
4.1.3	$a_n \in Q_0$ é uma fonte e pertence a um N^n -caminho: . . .	73
4.1.4	$a_0 \in Q_0$ é um sumidouro e pertence a um N^1 -caminho: . . .	75
4.2	Demonstração do Teorema de Ovsienko	77
	Referências bibliográficas	89

Introdução

O objeto principal deste trabalho é o estudo da estrutura do conjunto das representações de quivers, em especial, a estrutura do conjunto das representações indecomponíveis.

No primeiro capítulo, temos as definições de algumas estruturas que serão usadas no decorrer do trabalho, tais quais quivers, representações de quivers e categorias. Como principal resultado deste capítulo, temos a equivalência entre a categoria das representações de quivers e a categoria dos módulos sobre a álgebra de caminhos do mesmo quiver.

No segundo capítulo, definimos a forma de Cartan associada a um quiver, e a partir desta obtemos o Sistema de Raízes de um quiver. Concluimos que o Sistema de Raízes não depende das orientações das flechas mas somente do número de flechas ligando cada dois vértices, isto é, depende apenas do grafo associado ao quiver.

Foi mostrado por Kac que existe bijeção entre o conjunto dos vetores dimensão de representações indecomponíveis e os vetores positivos do Sistema de Raízes de um quiver dado. Apresentamos uma caracterização do Sistema de Raízes para quando o grafo associado ao quiver é diagrama de Dynkin do tipo *ADE*, Euclideano ou hiperbólico.

Apresentamos no terceiro capítulo a demonstração do Teorema de Gabriel, que estabelece quando quivers têm quantidade finita de classes de isomorfismo de representações indecomponíveis à partir da forma de Cartan. Pelo Teorema de Gabriel, isto acontece apenas quando a forma de Cartan é fracamente positiva definida, que é equivalente a dizer que o grafo associado é um diagrama de Dynkin do tipo ADE . O Teorema de Gabriel também mostra que um quiver tem tipo manso de representação se, e somente se, o grafo associado a ele é Euclidiano.

Finalmente, no quarto capítulo, temos a demonstração para o Teorema de Ovsienko. Neste Teorema, foi mostrado que para quivers com relações, impondo algumas condições ao quiver e suas relações, temos uma quantidade finita de classes de isomorfismo de representações indecomponíveis se, e somente, a forma de Brenner é fracamente positiva definida.

Capítulo 1

Definições Iniciais

Neste capítulo apresentamos as definições de quivers, representações de quivers e a álgebra de caminhos de um quiver. Teremos também a definição de categoria, de onde veremos que a categoria dos módulos sobre a álgebra de caminhos de um quiver e a categoria das representações do mesmo quiver são equivalentes.

1.1 Quiver e Representações de Quivers

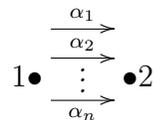
Definição 1.1 *Um Quiver é um elemento $Q = (Q_0; Q_1)$, onde Q_0 é o conjunto dos vértices de Q , Q_1 é o conjunto das flechas (ambos finitos) do quiver Q e temos os mapas $h, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ (head e tail), onde dizemos que $a \in Q_1$ começa em q_0 e termina em q_1 , com $q_0, q_1 \in Q_0$, quando $t(a) = q_0$ e $h(a) = q_1$.*

É muito útil definir um quiver como um grafo orientado, o que é equivalente ao que foi dito acima.

Exemplo 1.2 1. O quiver pode ter laços, isto é, flechas que começam e terminam no mesmo vértice, como o quiver de Jordan, que tem apenas um vértice e uma flecha



2. O quiver de Kronecker, que tem dois vértices e n flechas ligando-os (todas na mesma direção)



Definição 1.3 Dado um quiver Q definimos o quiver oposto a Q , denotado por Q^{op} , que tem os mesmos vértices de Q e as flechas de Q^{op} são as flechas de Q invertidas.

Exemplo 1.4 Se Q é o quiver



então o quiver Q^{op} é



Definição 1.5 Dado um corpo k , uma representação $V = (V_i, \phi_\alpha)$ de um quiver Q sobre o corpo k é uma coleção de k espaços vetoriais $\{V_i \mid i \in Q_0\}$ com uma coleção $\{\phi_\alpha : V_{t(\alpha)} \rightarrow V_{h(\alpha)} \mid \alpha \in Q_1\}$ de mapas lineares (sobre k). Será denotada por V .

O conjunto de todas as representações sobre um corpo k de um quiver Q será denotado por $\text{Rep}(Q, k)$.

Definição 1.6 Dado um quiver Q , um morfismo $f : V \rightarrow W$ entre as representações $V = (V_i, \phi_\alpha)$ e $W = (W_i, \psi_\alpha)$ de Q é um conjunto de mapas lineares $(f_i)_{i \in Q_0}$ tal que o seguinte diagrama comuta para toda flecha $\alpha \in Q_1$.

$$\begin{array}{ccc} V_{t(\alpha)} & \xrightarrow{\phi_\alpha} & V_{h(\alpha)} \\ f_{t(\alpha)} \downarrow & & \downarrow f_{h(\alpha)} \\ W_{t(\alpha)} & \xrightarrow{\psi_\alpha} & W_{h(\alpha)} \end{array}$$

Definição 1.7 Dada uma representação $V = (V_i, \phi_\alpha)$ de um quiver Q , dizemos que a representação $W = (W_i, \psi_\alpha)$ de Q é uma subrepresentação de V quando $W_i \subset V_i$ é subespaço vetorial para todo $i \in Q_0$ e $j : W \rightarrow V$ dada pela inclusão de espaços vetoriais é um morfismo entre representações, isto é,

$$\begin{array}{ccc} V_{t(\alpha)} & \xrightarrow{\phi_\alpha} & V_{h(\alpha)} \\ j_{t(\alpha)} \uparrow & & \uparrow j_{h(\alpha)} \\ W_{t(\alpha)} & \xrightarrow{\psi_\alpha} & W_{h(\alpha)} \end{array}$$

para cada $\alpha \in Q_1$.

Definição 1.8 Dados um quiver Q , V e W representações de Q e um morfismo $\phi : V \rightarrow W$ temos:

- $\ker \phi$ é a representação de Q dada por $(\ker \phi)_i = \ker \phi_i$ para todo vértice i e $(\ker \phi)_\alpha = V_\alpha|_{\ker \phi_{t(\alpha)}}$ para toda flecha α .
- $\text{coker } \phi$ é a representação de Q dada por $(\text{coker } \phi)_i = \text{coker } \phi_i$ para todo vértice i e $(\text{coker } \phi)_\alpha = W_\alpha|_{\text{coker } \phi_{t(\alpha)}}$ para toda flecha α .

Seja $\alpha \in Q_1$. Da definição de morfismo, temos para todo $v \in \ker \phi_{t(\alpha)}$ que $\phi_{h(\alpha)}(V_\alpha(v)) = W_\alpha(\phi_{t(\alpha)}(v)) = 0$. Assim, $V_\alpha(v) \in \ker \phi_{h\alpha}$ e a representação $\ker \phi$ está bem definida.

Agora, sejam $w_1, w_2 \in W_{t(\alpha)}$ tais que $w_1 - w_2 = \phi_{t(\alpha)}(v)$ para algum $v \in V_{t(\alpha)}$, isto é, w_1 e w_2 estão na mesma classe de equivalência em $\text{coker } \phi_{t(\alpha)}$. Então, $W_\alpha(w_1) - W_\alpha(w_2) = W_\alpha(w_1 - w_2) = W_\alpha(\phi_{t(\alpha)}(v)) = \phi_{h(\alpha)}(V_\alpha(v))$. Assim, $W_\alpha(w_1)$ e $W_\alpha(w_2)$ estão na mesma classe de equivalência e concluímos que $\text{coker } \phi$ está bem definida.

Definição 1.9 *Sejam V e W duas representações do quiver Q . A representação soma direta de V e W , denotada por $X = V \oplus W$ é dada por:*

- $X_i = V_i \oplus W_i$, para todo $i \in Q_0$
- $X_\alpha(v, w) = (V_\alpha(v), W_\alpha(w))$, para todo $\alpha \in Q_1$, $v \in V_{t(\alpha)}$ e $w \in W_{t(\alpha)}$

Definição 1.10 *Dado um quiver Q , dizemos que uma representação V de Q é simples quando suas únicas subrepresentações são V e a representação nula.*

Definição 1.11 *Uma representação V de um quiver Q é dita decomponível quando é isomorfa a soma direta de duas de suas subrepresentações e é dita indecomponível caso contrário.*

Exemplo 1.12 *Toda representação simples é indecomponível. Porém, em geral, existem representações indecomponíveis que não são simples.*

Lembramos que, dado um conjunto X qualquer, podemos construir um espaço vetorial que tem o conjunto X por base. Esse conjunto será denotado

por $k[X]$, que nada mais é do que o conjunto cujos elementos são da forma $\sum_p \lambda_p x_p$, onde $\lambda_p \in k$ e $\lambda_p \neq 0$ apenas para um número finito de índices p .

Um *caminho* num quiver Q é uma sequência (finita) de elementos de Q_1 $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1$, onde $t(\alpha_{j+1}) = h(\alpha_j)$. Para cada vértice $i \in Q_0$ definimos o *caminho trivial* e_i como o caminho que fica parado no vértice i . Um *ciclo orientado* é um caminho $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1$ onde $t(\alpha_1) = h(\alpha_n)$. Em particular, um laço é um ciclo orientado.

Podemos caracterizar as representações simples de quivers sem ciclos orientados da seguinte forma:

Proposição 1.13 *Seja Q um quiver sem ciclos orientados, então as representações $S(i)$, que são dadas por*

$$S_j = \begin{cases} k & \text{quando } i = j \\ \{0\} & \text{caso contrario} \end{cases}$$

e $\phi_\alpha = 0$, $\forall \alpha \in Q_1$, para cada vértice $i \in Q_0$ são as únicas representações simples de Q .

Prova: Claramente, as representações $S(i)$ são representações simples. Além disso, se V é uma representação simples do quiver Q , podemos escolher um vértice $i \in Q_0$ tal que $V_i \neq 0$ e $\phi_\alpha = 0$ para todo $\alpha \in Q_1$ com $t(\alpha) = i$.

Seja W a representação de Q dada por

$$W_j = \begin{cases} V_i & \text{quando } i = j \\ \{0\} & \text{caso contrario} \end{cases}$$

e $\psi_\alpha = 0$ para todo $\alpha \in Q_0$. É fácil ver que W assim definida é sub-representação não trivial de V . Como V é representação simples por hipótese, temos necessariamente que $V_j = 0$ para todo $j \neq i$ e $\dim V_i = 1$.

□

Dados dois vértices i e j de um quiver Q sem ciclos orientados associamos o conjunto $Q(i, j)$ que será o conjunto de todos os caminhos α tais que $t(\alpha) = i$ e $h(\alpha) = j$ e dado um caminho ξ a concatenação de caminhos nos dá os mapas

$$Q(i, \xi) : Q(i, t(\xi)) \rightarrow Q(i, h(\xi)) \text{ e } Q(\xi, j) : Q(h(\xi), j) \rightarrow Q(t(\xi), j)$$

com $Q(i, \xi)(\mu) = \xi\mu$ e $Q(\xi, j)(\nu) = \nu\xi$.

Note que $Q^{\text{op}}(i, j) = Q(j, i)$.

Definição 1.14 *Dado um quiver Q e um vértice i . A representação projetiva associada a i é definida por*

$$P(i)_j = k[Q(i, j)] \text{ e } P(i)_\alpha|_{Q(i, t(\alpha))} = Q(i, \alpha)$$

e estendemos $P(i)_\alpha$ por linearidade para $k[Q(i, t(\alpha))]$.

Exemplo 1.15 *Seja Q o seguinte quiver*

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & \xrightarrow{\alpha_1} & \bullet & \xrightarrow{\alpha_3} & \bullet & \xrightarrow{\alpha_4} & \bullet \\ 1 & \xrightarrow{\alpha_2} & 2 & & 3 & \xrightarrow{\alpha_5} & 4 \end{array}$$

temos que a representação $P(2)$ é dada por

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & \xrightarrow{0} & \bullet & \xrightarrow{\text{id}} & \bullet & \xrightarrow{i_1} & \bullet \\ 0 & \xrightarrow{0} & k & & k & \xrightarrow{i_2} & k^2 \end{array}$$

onde $P(2)_{\alpha_3}$ é a identidade, $P(2)_{\alpha_4}$ e $P(2)_{\alpha_5}$ são as inclusões na primeira e segunda coordenadas respectivamente e $P(2)_{\alpha_1}$ e $P(2)_{\alpha_2}$ são a transformação nula.

Usaremos as definições de [1] de álgebra, ideais e radical de uma álgebra.

Definição 1.16 Dado um quiver Q , a álgebra de caminhos do quiver Q , denotada kQ , é o k -espaço vetorial que tem como base todos os caminhos do quiver Q com a multiplicação definida pela concatenação de caminhos:

$$\alpha * \beta = \begin{cases} \alpha\beta, & \text{se } h(\beta) = t(\alpha) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$e_i * \beta = \begin{cases} \beta, & \text{se } h(\beta) = i \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$\alpha * e_i = \begin{cases} \alpha, & \text{se } t(\alpha) = i \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Claramente, kQ é uma álgebra associativa e note que $e = e_1 + \dots + e_n$ é a unidade em kQ . Temos que $\dim_k kQ < \infty$ se, e somente se, Q não possui ciclos orientados.

De fato. Caso α for um ciclo orientado de Q , então o conjunto de caminhos $\{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots\}$ é um subconjunto linearmente independente na álgebra de caminhos e pode ser estendido a uma base de kQ , logo de dimensão infinita.

Por outro lado, se Q não possui ciclos orientados, como o número de vértices e o número de flechas é finito, obtemos uma quantidade finita de caminhos em Q . Portanto $\dim_k kQ < \infty$.

Definição 1.17 *Uma relação R em um quiver Q é um elemento de kQ dado pela combinação linear de caminhos que começam e terminam em mesmos vértices.*

Podemos ter em um quiver várias relações, aqui sempre em um número finito.

A álgebra de caminhos de um quiver com relações $\{R_j\}$ (para um número finito de índices j) é o quociente kQ/I onde I é o ideal de kQ gerado pelas relações do quiver.

Exemplo 1.18 *Seja Q o quiver de Jordan (Ex 1.1) temos que $kQ \cong k[t]$ onde $k[t]$ é o conjunto dos polinômios em uma variável.*

Seja agora $R = \alpha^n$ uma relação em Q . A álgebra de caminhos do quiver Q com a relação R é isomorfa a $k[t]/\langle t^n \rangle$.

1.2 Categorias e Funtores

Definição 1.19 *Uma categoria \mathcal{C} consiste em:*

1. *uma classe $\text{Obj}(\mathcal{C})$ cujos elementos são chamados objetos de \mathcal{C} ;*
2. *uma classe $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, uma para cada par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$, cujos elementos são chamados morfismos e são denotados por $\phi : X \rightarrow Y$;*
3. *uma aplicação*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

para cada tripla de objetos $X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ que associa o par $\phi : X \rightarrow Y, \psi : Y \rightarrow Z$ a um morfismo de X a Z denotado por $\psi \circ \phi$ ou $\psi\phi$.

E as seguintes condições devem ser satisfeitas:

a. para cada objeto $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ existe um morfismo identidade

$$\text{id}_X : X \rightarrow X$$

tal que

$$\phi \circ \text{id}_X = \phi \text{ e } \text{id}_X \circ \psi = \psi$$

se $\phi : X \rightarrow Y$ e $\psi : Y \rightarrow X$

b. a composição de morfismos é associativa, isto é, para $\phi : X \rightarrow Y$, $\psi : Y \rightarrow Z$ e $\xi : Z \rightarrow U$, temos

$$(\xi\psi)\phi = \xi(\psi\phi).$$

Vamos denotar $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ por $\text{Hom}(X, Y)$ quando estiver claro no contexto de qual categoria se trata. Denotamos $\text{Mor}(\mathcal{C}) = \bigcup_{X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})} \text{Hom}(X, Y)$.

Listaremos alguns dos vários exemplos de categorias.

Exemplo 1.20 1. A classe dos espaços vetoriais, onde os morfismos são as transformações lineares formam uma categoria;

2. A classe $\text{Rep } Q$, das representações do quiver Q , forma uma categoria cujos morfismos são os morfismos entre representações.

3. Dada A uma álgebra associativa de dimensão finita, a classe $\text{mod-}A$ dos A -módulos à direita de dimensão finita formam os objetos de uma categoria onde os morfismos são os homomorfismos de módulos à direita.

Vale lembrar que uma categoria é definida pela classe de objetos e classe de morfismos. Podemos ter categorias que tem o mesma classe de objetos porém com morfismos diferentes. Serão categorias distintas.

Definição 1.21 *Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} duas categorias. Um funtor covariante $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ consiste em*

1. *uma aplicação entre $\text{Obj}_{\mathcal{C}}$ e $\text{Obj}_{\mathcal{D}}$ que associa X a $F(X)$*
2. *uma aplicação entre $\text{Mor}(\mathcal{C})$ e $\text{Mor}(\mathcal{D})$ que dado $\phi \in \text{Hom}(X, Y)$ associa $F(\phi) \in \text{Hom}(F(X), F(Y))$ e satisfaz para quaisquer $X, Y, Z \in \text{Obj}_{\mathcal{C}}$, $\phi \in \text{Hom}(X, Y)$ e $\psi \in \text{Hom}(Y, Z)$:*

$$F(\psi\phi) = F(\psi)F(\phi)$$

Um funtor é contravariante se dado $\phi \in \text{Hom}(X, Y)$ associa $F(\phi) \in \text{Hom}(F(Y), F(X))$ e, para quaisquer $X, Y, Z \in \text{Obj}_{\mathcal{C}}$, $\phi \in \text{Hom}(X, Y)$ e $\psi \in \text{Hom}(Y, Z)$ temos:

$$F(\psi\phi) = F(\phi)F(\psi)$$

Exemplo 1.22 *A classe de todas as categorias, onde os morfismos são os funtores entre categorias, também forma uma categoria.*

Dado um quiver Q a dualidade de espaços vetoriais $D = \text{Hom}_k(-, k)$ induz o *functor dual* $D : \text{Rep}(Q, k) \rightarrow \text{Rep}(Q^{\text{op}}, k)$, onde se $X \in \text{Rep}(Q, k)$ definimos $(DX)_i = D(X)_i$ e $(DX)_\alpha = D(X)_\alpha$ para $i \in Q_0$ e $\alpha \in Q_1$. Para um morfismo $\phi : X \rightarrow Y$ temos $(D\phi)_i = D(\phi)$.

Sejam V, W dois espaços vetoriais. Temos um monomorfismo canônico $\varepsilon_V : V \rightarrow D(DV)$ definido por $\varepsilon_V(x)(\phi) = \phi(x)$ para todo $x \in V$ e $\phi \in DV$. Este monomorfismo induz o isomorfismo

$$\text{Hom}(W, DV) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(V, DW)$$

que leva $\phi : W \rightarrow DV$ em $D(\phi)\varepsilon_V$.

Lema 1.23 *Seja $X \in \text{Rep}(Q, k)$ e $Y \in \text{Rep}(Q^{\text{op}}, k)$. O monomorfismo canônico $\varepsilon_X : X \rightarrow D^2X$ induz o isomorfismo*

$$\text{Hom}(Y, DX) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(X, DY)$$

que para $\phi : Y \rightarrow DX$ associa $(D\phi)\varepsilon_X$.

Prova: Basta usar os mapas ε_{X_i} e o isomorfismo

$$\text{Hom}(Y_i, DX_i) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(X_i, DY_i).$$

□

Definição 1.24 *Nas mesmas condições da Definição 1.14, a representação injetiva associada a i é dada por*

$$I(i)_j = Dk[Q^{\text{op}}(j, i)] = Dk[Q(i, j)] \text{ e } I(i)_\alpha|_{Q^{\text{op}}(j, h(\alpha))} = Dk[Q^{\text{op}}(j, \alpha)]$$

e estendemos $I(i)_\alpha$ por linearidade para todo $k[Q^{\text{op}}(j, h(\alpha))]$

Exemplo 1.25 Tomando o mesmo quiver do Exemplo 1.15 , então a representação $I(2)$ é DX , onde X é a representação do quiver oposto Q^{op}

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & \xleftarrow{i_1} & \bullet & \xleftarrow{0} & \bullet & \xleftarrow{0} & \bullet \\ k^2 & \xleftarrow{i_2} & k & \xleftarrow{0} & 0 & \xleftarrow{0} & 0 \end{array} .$$

Portanto $I(2)$ é a representação

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & \xrightarrow{\pi_1} & \bullet & \xrightarrow{0} & \bullet & \xrightarrow{0} & \bullet \\ k^2 & \xrightarrow{\pi_2} & k & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & 0 \end{array}$$

onde π_1 e π_2 são as projeções na primeira e segunda coordenadas respectivamente.

Notamos que $I(i) = D\bar{P}(i)$ onde $\bar{P}(i)$ é a representação projetiva associada ao vértice i do quiver Q^{op} .

Lema 1.26 *Seja X uma representação de Q . Então são naturalmente isomorfos*

$$\text{Hom}(P(i), X) \cong X_i \text{ e } \text{Hom}(X, I(i)) \cong DX_i$$

Prova: O isomorfismo $\text{Hom}(P(i), X) \rightarrow X_i$ manda $\phi : P(i) \rightarrow X$ em $\phi_i(e_i)$. O isomorfismo inverso manda $x \in X_i$ no morfismo $\phi : P(i) \rightarrow X$ dado por

$$\phi_j(\xi) = X_{\xi_r} \dots X_{\xi_1}(x)$$

para os elementos básicos $\xi = \xi_r \dots \xi_1$ de $P(i)$

O segundo isomorfismo $\text{Hom}(X, I(i)) \cong DX_i$ segue do primeiro usando o Lema 1.23.

□

Lema 1.27 1. As representações $P(i)$, $i \in Q_0$ são duas a duas não isomorfas.

2. As representações $I(i)$, $i \in Q_0$ são duas a duas não isomorfas.

Prova: Fixamos dois vértices i, j e supomos $P(i) \cong P(j)$. Então

$$k = S(i)_i \cong \text{Hom}(P(i), S(i)) \cong \text{Hom}(P(j), S(i)) \cong S(i)_j = \begin{cases} k, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

pelo Lema 1.26. Portanto $i=j$. A prova para $I(i)$ é análoga.

□

Definição 1.28 Seja \mathcal{C} uma categoria e $X, Y \in \text{Obj } \mathcal{C}$. Dizemos que o morfismo $\phi \in \text{Hom}(X, Y)$ é um isomorfismo quando existe $\psi \in \text{Hom}(Y, X)$ tal que

$$\psi \circ \phi = \text{id}_X \text{ e } \phi \circ \psi = \text{id}_Y$$

Neste caso, diremos que X e Y são isomorfos

Definição 1.29 Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} categorias. Dizemos que \mathcal{C} é subcategoria de \mathcal{D} quando:

- $\text{Obj } \mathcal{C} \subseteq \text{Obj } \mathcal{D}$
- $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ para todo $X, Y \in \mathcal{C}$
- a composição de morfismos em \mathcal{C} coincide com a composição de morfismos em \mathcal{D} e para todo $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ o morfismo $\text{id}_X : X \rightarrow X$ coincide com o morfismo id_X em \mathcal{D} .

Definição 1.30 Dizemos que uma subcategoria \mathcal{C} de uma categoria \mathcal{D} é plena quando

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$$

Definição 1.31 Sejam F, G dois funtores entre as categorias \mathcal{C} e \mathcal{D} . Um morfismo de funtores $f : F \rightarrow G$ é uma classe de morfismos em \mathcal{D} quando $f(X) : F(X) \rightarrow G(X)$ para cada $X \in \text{Obj}(\mathcal{D})$, tal que para qualquer $\phi \in \text{Hom}(X, Y)$ o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{f(X)} & G(X) \\ F(\phi) \downarrow & & \downarrow F(\phi) \\ F(Y) & \xrightarrow{f(Y)} & G(Y) \end{array}$$

Temos composição de morfismos entre funtores e o morfismo identidade de funtores definidos de maneira natural. Assim a classe dos funtores entre duas categorias \mathcal{C} e \mathcal{D} forma uma categoria cujos morfismos são os morfismos de funtores. Esta categoria é denotada por $\text{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

Definição 1.32 Dizemos que o funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é equivalência de categorias quando existe um funtor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $GF \cong \text{id}_{\mathcal{C}}$ e $FG \cong \text{id}_{\mathcal{D}}$

Definição 1.33 O funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é essencialmente sobrejetivo quando para qualquer $Y \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ existe algum $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ tal que Y é isomorfo a $F(X)$.

Teorema 1.34 Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} duas categorias e $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ um funtor. Então, F é equivalência de categorias se, e somente se:

1. F é funtor pleno e fiel

2. F é essencialmente sobrejetivo

Prova: Veja [3] ou a monografia [11], por exemplo.

□

Teorema 1.35 *As categorias $\text{Rep } Q$ e $\text{mod-}kQ$ são equivalentes.*

Construiremos um funtor $F : \text{Rep } Q \rightarrow \text{mod-}kQ$ que é equivalência de categorias.

Dado $V = (\{V_i\}_{i \in Q_0}, \{f_\alpha\}_{\alpha \in Q_1})$, associamos

$$F(V) = \bigoplus_{i \in Q_0} V_i$$

com a estrutura de kQ -módulo dada por $\rho : kQ \rightarrow \text{End}(F(V))$ que satisfaz para todo $i \in Q_0$

$$\rho(e_i)|_{V_j} = \begin{cases} \text{id}_{V_i} & \text{quando } i = j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e para $\alpha \in Q_1$

$$\rho(\alpha)|_{V_j} = \begin{cases} f_\alpha & \text{quando } t(\alpha) = j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Estendemos essa regra por linearidade e concatenação de flechas para toda álgebra kQ .

Seja agora $\varphi : V \rightarrow W$ um morfismo entre representações. Definimos o morfismo $F(\varphi) : F(V) \rightarrow F(W)$ entre módulos. Dado $(v_i)_{i \in Q_0} \in F(V)$ temos

$$F(\varphi)(v_i)_{i \in Q_0} = (\varphi_i(v_i))_{i \in Q_0} \in F(W)$$

e da definição de morfismo entre representações e homomorfismos de módulos, temos que $F(\varphi) = \bigoplus_{i \in Q_0} \varphi_i$ é homomorfismo se, e somente se, φ é morfismo.

Para mostrar que F é um funtor covariante entre a categoria das representações de Q e a categoria $\text{mod-}kQ$ basta notar que dados $V, U, W \in \text{Rep}(Q)$, $\varphi : V \rightarrow U$ $\psi : U \rightarrow W$ morfismos de representações temos que

$$F(\varphi\psi) = F(\varphi)F(\psi)$$

que segue imediatamente da forma como F foi definido.

Além disso, se φ e ψ são dois morfismos entre as representações V e W de Q e λ pertence ao corpo de escalares, então:

$$F(\lambda\varphi + \psi) = \lambda F(\varphi) + F(\psi)$$

uma vez que

$$\begin{aligned} F(\lambda\varphi + \psi)(v_i)_{i \in Q_0} &= \lambda(\varphi_i(v_i))_{i \in Q_0} + (\psi_i(v_i))_{i \in Q_0} = \\ &= \lambda F(\varphi)(v_i)_{i \in Q_0} + F(\psi)(v_i)_{i \in Q_0}, \end{aligned}$$

mostrando que o mapa

$$\begin{aligned} \text{Hom}(V, W) &\longrightarrow \text{Hom}(F(V), F(W)) \\ \varphi &\longmapsto F(\varphi) \end{aligned}$$

é linear.

Considerando o mesmo mapa, temos que ele é claramente injetivo, pois dados dois morfismos distintos $\varphi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$ teremos que $\varphi_i \neq \psi_i$ para algum $i \in Q_0$ e assim

$$F(\varphi) = \bigoplus_{i \in Q_0} \varphi_i \neq \bigoplus_{i \in Q_0} \psi_i = F(\psi).$$

O mapa é também sobrejetivo. Sejam V e W são duas representações do quiver Q e $\mathcal{T} : F(V) \rightarrow F(W)$ é um homomorfismo entre kQ -módulos. Então,

$$\mathcal{T}(\rho_V(e_i)v) = \rho_W(e_i)(\mathcal{T}(v))$$

para todo $i \in Q_0$ e todo $v \in F(V)$ por definição. Logo, definimos

$$\varphi_i = \mathcal{T}|_{V_i} \rightarrow W_i$$

e temos $\mathcal{T} = \bigoplus_{i \in Q_0} \varphi_i$. Como \mathcal{T} é homomorfismo temos que $\varphi = \{\varphi_i\}_{i \in Q_0}$ é morfismo de representações.

Assim, temos o isomorfismo $\text{Hom}(V, W) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(F(V), F(W))$ e o funtor F é pleno e fiel.

Concluimos que o funtor F é equivalência de categorias notando que é essencialmente sobrejetivo, isto é, se $M \in \text{mod-}kQ$ então existe uma representação V de Q tal que $F(V) \cong M$.

Como $\rho(e_i)^2 = \rho(e_i)$ temos que $\rho(e_i)$ é uma projeção. Seja $V_i = \rho(e_i)M$. Uma vez que $\sum_{i \in Q_0} e_i = \text{id}_{kQ}$ e $\rho(e_i)\rho(e_j) = 0$ sempre que $i \neq j$ temos

$$\bigoplus_{i \in Q_0} V_i = \bigoplus_{i \in Q_0} \rho(e_i)M = M.$$

Observando que na álgebra de caminhos kQ para todo $\alpha \in Q_1$ temos $e_{h(\alpha)}\alpha e_{t(\alpha)} = \alpha$ notamos que $\rho(\alpha)|_{W_j}$ tem imagem em $W_{h(\alpha)}$ e é possivelmente não nulo apenas quando $j = t(\alpha)$. Definimos então $f_\alpha = \rho(\alpha)|_{W_{t(\alpha)}}$.

Assim, construímos $V = (V_i, f_\alpha)$ representação de Q tal que $F(V) \cong M$. Portanto, as categorias $\text{Rep } Q$ e $\text{mod-}kQ$ são equivalentes.

1.3 Quivers e Álgebras Associativas

Dada uma representação V de Q , temos que V é indecomponível se, e somente se, a álgebra $\text{End}(V)$ dos endomorfismos de V for *local*. A prova deste fato pode ser encontrada em [1], por exemplo.

Dada uma álgebra A , um subconjunto $I \subset A$ é dito um *ideal à direita* quando I é subálgebra de A e $xa \in I$ para todo $x \in I$ e $a \in A$. De forma semelhante define-se *ideal à esquerda* e *ideal bilateral*.

Definição 1.36 *Uma álgebra A é dita local se A tem um único ideal à direita maximal.*

Isto é, existe um único ideal I de A tal que não existe nenhum outro ideal J de A que satisfaça $I \subsetneq J \subsetneq A$.

Um exemplo trivial deste caso é quando a álgebra A é simples, ou seja, não possui nenhum ideal não nulo propriamente contido.

Em geral, encontramos várias definições para álgebra local. Porém, todas elas são equivalentes. Por exemplo, temos o Lema 4.6 do Capítulo I em [1]:

Lema 1.37 *Seja A uma álgebra de dimensão finita. As seguintes condições são equivalentes.*

a) A é álgebra local.

a') A possui um único ideal maximal à esquerda.

- b) *O conjunto de todos os elementos não invertíveis de A é um ideal (bilateral).*
- c) *Para todo $a \in A$, temos que ou a é invertível ou $(1 - a)$ é invertível.*
- d) *Os únicos elementos idempotentes de A são elemento nulo 0 e o elemento identidade e .*
- e) *A k -álgebra $A/\text{rad } A$ é isomorfa a k .*

Prova: Veja [1] Cap I, Lema 4.6.

□

Note que o item **b)** no Lema 1.37 é equivalente à afirmação: *a soma de dois elementos não invertíveis é também não invertível*, pois é a única propriedade que falta ao conjunto dos elementos não invertíveis de uma álgebra para que este seja um ideal. Logo, esta também pode ser tomada como a definição de álgebra local, quando falarmos de álgebras de dimensão finita.

Lema 1.38 *Seja V uma representação de um quiver Q e ϕ um endomorfismo de V .*

1. *Para algum $r \in \mathbb{Z}$ positivo temos $V = \text{Im } \phi^r \oplus \text{Ker } \phi^r$.*
2. *Se V é indecomponível, então ou ϕ é automorfismo ou é nilpotente.*

Prova: Como V tem dimensão finita, podemos escolher um $r > 0$ tal que $\text{Im } \phi^r = \text{Im } \phi^{r+i}$, para todo $i > 0$.

Então, $\phi^r : \text{Im } \phi^r \rightarrow \text{Im } \phi^{2r}$ é um isomorfismo de representações e denotaremos sua inversa por ψ .

Sejam $\iota_1 : \text{Im } \phi^r \rightarrow V$ e $\iota_2 : \text{Ker } \phi^r \rightarrow V$ as inclusões naturais. Definimos $\pi_1 = \psi\phi^r : V \rightarrow \text{Im } \phi^r$ e $\pi_2 = \text{id}_V - \psi\phi^r : V \rightarrow \text{Ker } \phi^r$.

Assim, $\iota_1\pi_1 + \iota_2\pi_2 = \text{id}_V$, $\pi_1\iota_1 = \text{id}_{\text{Im } \phi^r}$ e $\pi_2\iota_2 = \text{id}_{\text{Ker } \phi^r}$.

Portanto, $V = \text{Im } \phi^r \oplus \text{Ker } \phi^r$. O segundo item segue imediatamente do primeiro.

□

Proposição 1.39 (Fitting) *Seja V uma representação de um quiver Q . V é indecomponível se, e somente se, $\text{End}(V)$ é local.*

Prova: Sejam V uma representação indecomponível de Q e $\phi, \phi' \in \text{End}(V)$. Supondo que $\psi = \phi + \phi'$ é invertível e $\rho\psi = \text{id}_V$. Caso ϕ seja não invertível, então $\rho\phi$ é nilpotente pelo Lema 1.38.

Seja $r > 0$ o grau de nilpotência de $\rho\phi$, então

$$(\text{id}_V - \rho\phi)(\text{id}_V + \rho\phi + \dots + (\rho\phi)^{r-1}) = \text{id}_V.$$

Assim, $\rho\phi' = \text{id}_V - \rho\phi$ é invertível. Isto implica que ϕ' é invertível e, portanto, a soma de dois morfismos não invertíveis quaisquer não é invertível. Pelo Lema 1.37 **b)** a álgebra $\text{End}(V)$ é local.

Por outro lado, se $V = U \oplus W$ com U e W não nulos, tomamos os morfismos π_U e π_W tais que, se $v_i = u_i + w_i \in V_i$ onde $u_i \in U_i$ e $w_i \in W_i$, então

$$(\pi_U)_i(v_i) = u_i \text{ e } (\pi_W)_i(v_i) = w_i$$

para todo $i \in Q_0$.

Claramente π_U e π_W são ambos não invertíveis, no entanto, $\text{id}_V = \pi_U + \pi_W$. Portanto, quando V é representação decomponível, temos que a álgebra $\text{End}(V)$ não é local. Isto completa a prova do Lema.

□

Dada uma álgebra A com elemento identidade $e \in A$, dizemos que $e = e_1 + \dots + e_n$ é uma *decomposição de e em idempotentes primos ortogonais* quando:

- cada e_i é idempotente, isto é, $e_i e_i = e_i \neq 0$
- os elementos $e_i \in A$, $i = 1, \dots, n$ são dois a dois ortogonais $e_i e_j = e_j e_i = 0$, sempre que $i \neq j$
- cada e_i não pode ser decomposto como soma de dois idempotentes ortogonais.

O conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$ é dito um *conjunto completo de idempotentes primos ortogonais*.

Definição 1.40 *Uma álgebra A é dita básica se, dada uma decomposição da identidade em idempotentes primos ortogonais $e = e_1 + \dots + e_n$, temos $e_i A \not\cong e_j A$ como A -módulos sempre que $i \neq j$.*

É possível mostrar que a definição de álgebra básica não depende da escolha do conjunto de idempotentes primos ortogonais, isto é, com qualquer outra escolha teríamos da mesma forma que a álgebra é básica. Veja Teorema I 4.10 em [1] ou Proposição 2.2.3 em [2].

Definição 1.41 *Seja uma álgebra A sobre o corpo k com um conjunto completo de idempotentes ortogonais $\{e_1, \dots, e_n\}$. A álgebra básica associada a A é a álgebra*

$$A^b = e_A A e_A,$$

onde $e_A = e_{j_1} + \dots + e_{j_s}$, tal que, e_{j_1}, \dots, e_{j_s} são escolhidos com $e_{j_i} A \not\cong e_{j_t} A$ quando $i \neq t$ e cada módulo $e_t A$ é isomorfo a um dos módulos $e_{j_1} A, \dots, e_{j_s} A$.

Também podemos demonstrar (Lema 6.5. Cap. I em [1]) que e_A é o elemento identidade de A^b e que A^b não depende da escolha dos conjuntos $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_s}\}$.

Proposição 1.42 *Sejam A uma álgebra e $A^b = e_A A e_A$ sua álgebra básica associada. As categorias $\text{mod } A^b$ e $\text{mod } A$ são equivalentes.*

Prova: Veja Corolário 6.10 do Capítulo I em [1].

□

Definição 1.43 *Seja A uma álgebra. Um elemento $a \in A$ é dito central quando $ab = ba$ para todo $b \in A$. A álgebra A é dita conexa quando os únicos idempotentes centrais são o elemento nulo e a identidade.*

Definição 1.44 *Seja Q um quiver. O ideal bilateral da álgebra de caminhos kQ gerado gerado por todas as flechas de Q é o ideal de flechas de kQ e denotado por R_Q .*

Se denotarmos por Q_l o conjunto de todos os caminhos em Q com comprimento l , ou seja, todos os caminhos que são a concatenação de l flechas,

teremos a decomposição

$$R_Q = kQ_1 \oplus kQ_2 \oplus \dots \oplus kQ_l \oplus \dots$$

do espaço vetorial R_Q , onde kQ_l é o subespaço de kQ gerado por Q_l .

Isto implica que, para $t \geq 1$,

$$R_Q^t = \bigoplus_{m \geq t} kQ_m.$$

Proposição 1.45 *Seja Q um quiver sem ciclos orientados. Então, R_Q é o radical da álgebra de caminhos kQ .*

Prova: Veja Proposição 1.10 do Capítulo II em [1].

□

A proposição não é verdadeira quando permitimos que Q tenha ciclos orientados.

Definição 1.46 *Seja Q um quiver. Um ideal I de kQ é dito admissível se existe $m \geq 2$ tal que*

$$R_Q^m \subseteq I \subseteq R_Q^2.$$

Se I é ideal admissível de kQ , o par (Q, I) é chamado quiver com relações ou quiver com fronteira. O quociente kQ/I é a álgebra de caminhos do quiver com relações (Q, I) .

Lema 1.47 *Seja Q um quiver e I um ideal admissível de Q . Então, existe um conjunto finito de relações $\{\rho_1, \dots, \rho_s\}$ que gera I , ou seja, $I = \langle \rho_1, \dots, \rho_s \rangle$.*

Prova: Veja Corolário 2.9 do Capítulo II em [1].

□

Definição 1.48 *Seja A uma álgebra básica, conexa e de dimensão finita sobre k . Seja também $\{e_1, \dots, e_n\}$ um conjunto completo de idempotentes primos ortogonais de A . O quiver de A é o quiver Q_A tal que:*

- *o número de vértices de Q_A é igual a quantidade de elementos do conjunto completo de idempotentes primos ortogonais de A .*
- *dados dois vértices $a, b \in (Q_A)_0$ o número de flechas $\alpha \in (Q_A)_1$ com $t(\alpha) = a$ e $h(\alpha) = b$ é igual a dimensão sobre k do espaço vetorial $e_b(\text{rad } A / \text{rad } A^2)e_a$.*

Pelo Lema 3.2 do Capítulo II em [1], a definição do quiver Q_A não depende da escolha do conjunto completo de idempotentes primos ortogonais.

Teorema 1.49 *Seja A uma álgebra básica e conexa de dimensão finita. Então, existe um ideal admissível I de kQ_A tal que $A \cong kQ_A/I$.*

Prova: Veja Teorema 3.7 do Capítulo II em [1].

□

Notamos assim que, dada uma álgebra conexa A , a álgebra básica associada a esta A^b é básica e conexa. Logo, por 1.42 e 1.49, temos um quiver Q e um ideal admissível I de kQ tais que as categorias $\text{mod } A$ e $\text{mod } kQ/I$ são equivalentes.

Como I é gerado por relações, podemos associar um módulo sobre kQ/I a uma representação de Q que satisfaça as relações que geram I .

Capítulo 2

Sistemas de Raízes

Neste capítulo definiremos uma forma bilinear associada a um quiver e, a partir desta, associaremos um sistema de raízes. Este resultado é necessário para a demonstração do Teorema de Gabriel, cuja demonstração é objetivo do próximo capítulo. Também incluímos o enunciado do Teorema de Kac, que vale para qualquer quiver.

2.1 Construção do Sistema de Raízes

Durante este capítulo, dado um quiver Q escolheremos uma enumeração para os vértices de Q , fazendo $\{1, \dots, n\} = Q_0$ sempre que Q tiver n vértices.

Definição 2.1 *Seja Q um quiver e $n = \#Q_0$. A forma de Euler é a forma bilinear $\langle -, - \rangle : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por:*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in Q_0} x_i y_i - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{t(\alpha)} y_{h(\alpha)}$$

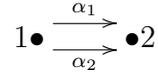
A partir desta forma, obtemos uma forma bilinear simétrica em \mathbb{Z}^n dada por:

$$(x, y) = \frac{1}{2} (\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle)$$

Esta última é a forma de Cartan associada ao quiver Q e a matriz desta a matriz de Cartan do quiver Q .

A forma quadrática $q(x) = (x, x)$, $x \in \mathbb{Z}^n$ associada a forma de Cartan é a forma de Tits do quiver Q .

Exemplo 2.2 Seja Q o quiver



Se $x, y \in \mathbb{Z}^2$, então

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - 2x_1 y_2,$$

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

a matriz de Cartan deste quiver é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e a forma de Tits de Q é $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2$.

Note que a forma de Cartan não depende das orientações das flechas do quiver Q , e sim de quantas flechas existem entre dois vértices dados.

Dado um quiver Q , associamos a este um grafo Γ que tem o mesmo número de vértices que Q e as arestas são as flechas de Q sem as orientações.

Por semelhança com a definição de quiver, dizemos que Γ_0 é o conjunto de vértices e Γ_1 o conjunto de arestas de Γ .

Assim, a forma de Cartan só depende do grafo Γ associado a Q .

O elemento $e_i = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{in}) \in \mathbb{Z}^n$, onde $\delta_{ij} = 1$ quando $i = j$ e 0 se $i \neq j$, é dito uma *raiz fundamental* quando não existem laços em i , isto é, não temos flechas em Q_1 que começam e terminam no vértice i . Denotaremos Π o conjunto das raízes fundamentais.

Para uma raiz fundamental i definimos a *reflexão fundamental* $\sigma_i \in \text{Aut } \mathbb{Z}^n$ dada por:

$$\sigma_i(\lambda) = \lambda - 2(\lambda, e_i) e_i$$

Se i é uma raiz fundamental, então $(e_i, e_i) = 1$.

Vemos que a reflexão σ_i também depende apenas do grafo Γ .

Se $(\lambda, e_i) = 0$, então $\sigma_i(\lambda) = \lambda$. A forma de Cartan é invariante por reflexões fundamentais pois

$$\begin{aligned} (\sigma_i(\lambda), \sigma_i(\lambda')) &= (\lambda - 2(\lambda, e_i) e_i, \lambda' - 2(\lambda', e_i) e_i) \\ &= (\lambda, \lambda') - 2(\lambda', e_i)(\lambda, e_i) - 2(\lambda, e_i)(e_i, \lambda') + 4(\lambda, e_i)(\lambda', e_i)(e_i, e_i) \\ &= (\lambda, \lambda'). \end{aligned}$$

Temos também que $\sigma_i(e_i) = -e_i$.

O conjunto de todas reflexões fundamentais geram o *grupo de Weyl do grafo* Γ que denotaremos por $W(\Gamma) \subset \text{Aut } \mathbb{Z}^n$.

Note que a forma de Cartan é $W(\Gamma)$ invariante, isto é, $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$ para todo $\sigma \in W(\Gamma)$.

Definição 2.3 O conjunto das raízes reais $\Delta^{re}(\Gamma)$ é dado por:

$$\Delta^{re}(\Gamma) = \bigcup_{w \in W(\Gamma)} w(\Pi).$$

Definição 2.4 Seja um grafo Γ . O grafo Γ' é um subgrafo de Γ quando $\Gamma'_0 \subseteq \Gamma_0$ e Γ'_1 é o conjunto de todas as arestas de Γ que não são ligadas a vértices de $\Gamma_0 \setminus \Gamma'_0$.

Exemplo 2.5 O grafo

$$\begin{array}{c} 1 \text{ --- } 2 \\ \bullet \text{ --- } \bullet \end{array}$$

é subgrafo de

$$\begin{array}{c} 1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \\ \bullet \text{ --- } \bullet \text{ --- } \bullet \end{array}$$

Para um elemento $\alpha = \sum_{i \in \Gamma_0} k_i e_i$, onde $k_i \in \mathbb{Z}$, chamamos de *altura* (height) de α (denotada $ht \alpha$) o número $\sum_i k_i$. Chamamos de *suporte* de α (denotado $\text{supp } \alpha$) o subgrafo de Γ com os vértices i tais que $k_i \neq 0$ e todas as arestas ligando estes vértices.

Dados $x, y \in \mathbb{Z}^n$, dizemos que $x > y$ quando $x_i \geq y_i$ e $x \neq y$.

Definição 2.6 O conjunto fundamental $M \subset \mathbb{Z}^n$ é:

$$M = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n, \alpha > 0 \mid (\alpha, e_i) \leq 0, \forall e_i \in \Pi; \text{supp } \alpha \text{ é conexo}\}$$

Definimos o conjunto de raízes imaginárias $\Delta^{im}(\Gamma)$ por

$$\Delta^{im}(\Gamma) = \bigcup_{w \in W(\Gamma)} w(M \cup -M).$$

Definição 2.7 Definimos então o sistema de raízes $\Delta(\Gamma)$ do grafo Γ como

$$\Delta(\Gamma) = \Delta^{re}(\Gamma) \cup \Delta^{im}(\Gamma).$$

Um elemento $\alpha \in \Delta(\Gamma)$, $\alpha > 0$ é dito uma *raiz positiva*. Denotaremos $\Delta_+(\Gamma)$ o conjunto de todas as raízes positivas. Similarmente, definem-se o conjunto das *raízes reais positivas* e o das *raízes imaginárias positivas*.

Onde não causar confusão usaremos a notação abreviada Δ , W , etc, em vez de $\Delta(\Gamma)$, $W(\Gamma)$, etc.

Temos que $(\alpha, \alpha) = 1$ se $\alpha \in \Delta^{re}$, e $(\alpha, \alpha) \leq 0$ se $\alpha \in \Delta^{im}$.

De fato, se $\alpha \in \Delta^{re}$, temos $\alpha = w(e_i)$, onde $w \in W$ e $e_i \in \Pi$. Como a forma $(-, -)$ é invariante pelo grupo W , temos diretamente que $(\alpha, \alpha) = (e_i, e_i) = 1$. Agora, caso $\alpha \in \Delta^{im}$ temos $\alpha = w(\beta)$ para algum $w \in W$ e algum $\beta = \sum k_i e_i \in M \cup -M$.

Assim, $(\alpha, \alpha) = (w(\beta), w(\beta)) = (\beta, \beta) = \sum_i k_i (\beta, e_i) \leq 0$, pois caso $\beta \in M$ então $k_i \geq 0$, e $(\beta, e_i) \leq 0$ e se $\beta \in -M$ mostra-se o mesmo semelhantemente.

Daqui temos que $\Delta^{re} \cap \Delta^{im} = \emptyset$.

2.2 Diagramas hiperbólicos e Sistema de Raízes para Diagramas hiperbólicos

Definição 2.8 Uma forma quadrática $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ é:

- fracamente positiva definida quando $q(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{Z}^n$ para todo $x > 0$
- fracamente positiva semidefinida se $q(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{Z}^n$ para todo $x > 0$
- indefinida se existe $x \in \mathbb{Z}^n$ positivo tal que $q(x) \leq 0$

Dizemos que uma forma bilinear é fracamente positiva definida, positiva semidefinida ou indefinida se a forma quadrática associada a esta também o for.

Conforme a forma bilinear $(-, -)$ é fracamente positiva definida, semidefinida ou indefinida, o grafo Γ é dito de tipo *finito*, *manso* ou *selvagem*, respectivamente.

A tabela 2.1 é a lista dos diagramas cuja forma $(-, -)$ é fracamente positiva definida, onde o subíndice indica o número de vértices do quiver. São os *diagramas de Dynkin do tipo ADE*.

$A_n :$	$\circ - \circ - \circ \cdots \circ - \circ$
$D_n :$	$ \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \\ \circ - \circ \cdots \circ - \circ \\ \diagup \\ \circ \end{array} $
$E_6 :$	$ \begin{array}{c} \circ \\ \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \end{array} $
$E_7 :$	$ \begin{array}{c} \circ \\ \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \end{array} $
$E_8 :$	$ \begin{array}{c} \circ \\ \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \end{array} $

Tabela 2.1: Diagramas de Dynkin do tipo *ADE*

Os diagramas cuja forma bilinear $(-, -)$ é positiva semidefinida são os *diagramas Euclidianos*, que também são chamados *diagramas de Dynkin estendidos do tipo ADE*. A tabela 2.2 é uma relação de todos esses diagramas.

O subíndice no nome de cada grafo na tabela 2.2 mais um indica o número de vértices do grafo. O número colocado no lugar de cada vértice indica as coordenadas de um vetor δ que será chamado *vetor radical*. O núcleo da forma quadrática associada a cada grafo é $\mathbb{Z}\delta$.

Vamos mostrar o que acaba de ser afirmado com o auxílio de alguns Lemas que podem ser encontrados em [8] e [6].

Observamos que a forma de Cartan pode ser escrita da seguinte maneira

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i < j} d_{ij} x_i y_j$$

onde d_{ij} é o número de arestas que ligam os vértices i e j .

Definição 2.9 *O radical da forma q é o conjunto*

$$\text{rad } q = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid (x, -) = 0\}$$

Um vetor $x \in \mathbb{Z}^n$ é sincero quando $x_i \neq 0$ para todo i .

Lema 2.10 *Seja Γ um grafo conexo e $q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ a forma quadrática associada a Γ . Se existe $y \in \text{rad } q$ com $y > 0$ então y é sincero e a forma q é positiva semidefinida. Para $x \in \mathbb{Z}^n$ temos que:*

$$q(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}y \Leftrightarrow x \in \text{rad } q.$$

Prova: Com as hipóteses sobre y temos que

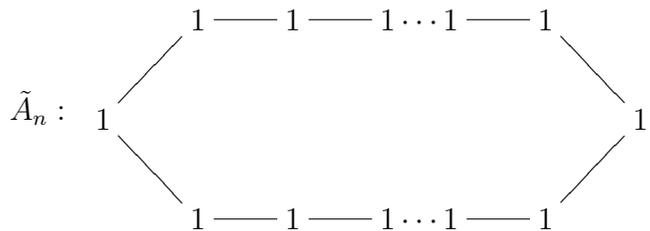
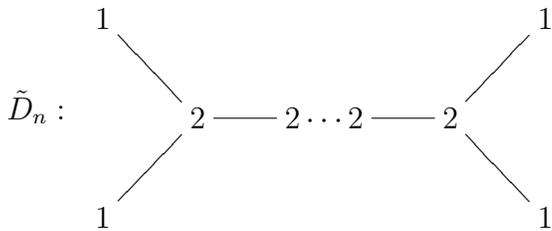
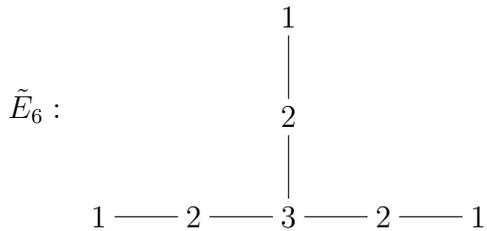
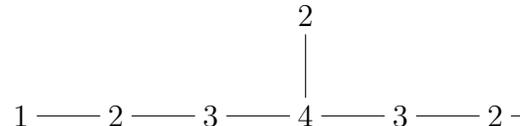
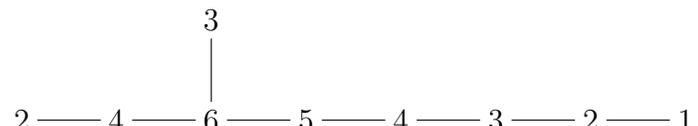
$\tilde{A}_0 : 1 \curvearrowright$
$\tilde{A}_1 : 1 \equiv 1$
$\tilde{A}_n :$ 
$\tilde{D}_n :$ 
$\tilde{E}_6 :$ 
$\tilde{E}_7 :$ 
$\tilde{E}_8 :$ 

Tabela 2.2: Diagramas Euclidianos. Os números nos vértices são as coordenadas do vetor δ .

$$(e_i, y) = (2 - 2d_{ii})y_i - \sum_{j \neq i} d_{ij}y_j = 0$$

para $1 \leq i \leq n$.

Se $y_i = 0$, então $\sum_{j \neq i} d_{ij}y_j = 0$. Como cada d_{ij} é não negativo temos $y_j = 0$ sempre que i e j forem ligados por uma aresta. Uma vez que Γ é conexo, temos que $y = 0$. Esta contradição implica que y é sincero.

Agora, para $x \in \mathbb{Z}^n$ temos:

$$\begin{aligned} q(x) &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i \leq j} d_{ij}x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n d_{ii}x_i^2 - \sum_{i < j} d_{ij}x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - d_{ii}x_i^2) - \sum_{i < j} d_{ij}x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^n (2 - 2d_{ii})y_i \frac{x_i^2}{2y_i} - \sum_{i < j} d_{ij}x_i x_j \\ &= \sum_{i \neq j} d_{ij}y_j \frac{x_i^2}{2y_i} - \sum_{i < j} d_{ij}x_i x_j \\ &= \sum_{i < j} d_{ij}y_j \frac{x_i^2}{y_i} - \sum_{i < j} d_{ij}x_i x_j + \sum_{i < j} d_{ij}y_i \frac{x_j^2}{y_j} \\ &= \sum_{i < j} d_{ij} \frac{y_i y_j}{2} \left(\frac{x_i}{y_i} - \frac{x_j}{y_j} \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

onde a quinta igualdade vem de que $(2 - 2d_{ii})y_i = \sum_{j \neq i} d_{ij}y_j$ para cada i .

Portanto, q é positiva semidefinida.

Para o restante do Lema temos que: se $q(x) = 0$, então $\frac{x_i}{y_i} = \frac{x_j}{y_j}$ quando tivermos uma aresta ligando i e j . Isto implica que $x \in \mathbb{Q}y$, pois Γ é conexo.

Se $x \in \mathbb{Q}y$ então $x \in \text{rad } q$ pois $y \in \text{rad } q$ por hipótese.

Claramente, se $x \in \text{rad } q$ temos $q(x) = 0$, que conclui o Lema. \square

Lema 2.11 *Se Γ é diagrama Euclideano então a forma q é positiva semidefinida e $\text{rad } q = \mathbb{Z}\delta$. (δ é o vetor radical do grafo Γ que foi dado na tabela 2.2)*

Prova: Escrevemos $\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i e_i$, onde $n = \#Q_o$. Basta verificar que

$$(e_i, \delta) = 2\delta_i - \sum_{j=1}^n d_{ij}\delta_j = 0$$

para $1 \leq i \leq n$. Portanto, $\delta \in \text{rad } q$.

Agora, usando o Lema anterior e como $\delta_i = 1$ para algum i , temos que

$$\text{rad } q = \mathbb{Q}\delta \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}\delta.$$

\square

Lema 2.12 *Se Γ é um diagrama de Dynkin do tipo ADE, então a forma q é fracamente positiva definida.*

Prova: Isto é mostrado usando o Lema anterior, pois existe um diagrama Euclideano $\tilde{\Gamma}$ cuja forma quadrática associada é \tilde{q} tal que Γ é obtido de $\tilde{\Gamma}$ tirando algum vértice e .

Para $\tilde{\Gamma}$ temos que $\tilde{q}(x) > 0$ para todo vetor x não nulo com $x_e = 0$. Isto implica que a forma q é fracamente positiva definida, pois $q(x) = \tilde{q}(x, 0)$, onde colocamos 0 na e -ésima entrada.

\square

Lema 2.13 *Seja Γ o grafo associado ao quiver de Kronecker com $n \geq 3$ flechas. Então a forma bilinear associada a Γ é indefinida.*

Prova: Aplicando a forma quadrática ao vetor $\vec{x} = (1, 1)$ temos

$$q(\vec{x}) = 2 - n < 0$$

e a forma é indefinida.

□

Teorema 2.14 *Seja Γ um grafo conexo. A forma bilinear associada a este é fracamente positiva definida se, e somente se, Γ for um diagrama de Dynkin do tipo ADE e é positiva semidefinida se, e somente se, for Euclideano.*

Prova: Vamos mostrar que se um grafo não é Dynkin do tipo ADE nem Euclideano, então existe $x > 0$ tal que $q(x) < 0$. Isso, mais os Lemas anteriores concluem o teorema.

Seja Γ um grafo que não é Dynkin do tipo ADE nem Euclideano. Uma das seguintes condições deve acontecer.

1. Γ tem algum subgrafo que é grafo de Kronecker com mais de duas arestas;
2. Γ tem algum subgrafo Γ' que é Euclideano.

No primeiro caso a forma já é indefinida pelo Lema 2.13.

Suponhamos então o segundo caso. Seja δ o vetor radical do subgrafo Euclideano. Tomamos o vetor y que coincide com δ nos vértices comuns de Γ e Γ' e é nulo nos demais vértices.

Seja agora t um vértice de $\Gamma \setminus \Gamma'$ que é ligado a algum vértice de Γ' por alguma aresta. Tomamos o vetor $x = 2y + e_t$.

Assim:

$$\begin{aligned}
 q(x) &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i \leq j} d_{ij} x_i x_j \\
 &= \sum_{i=1}^n (2y_i)^2 + 1 - \sum_{i \leq j} d_{ij} 2y_i 2y_j - 2z \\
 &= 4q(y) + 1 - 2z \\
 &= 1 - 2z
 \end{aligned}$$

onde z é o número de arestas que ligam o vértice t ao subgrafo Γ' .

Como $z > 0$, temos $q(x) < 0$, que conclui o teorema.

□

Um grafo Γ do tipo selvagem é chamado *hiperbólico* se todo subgrafo conexo $\Gamma' \neq \Gamma$ é Euclideano ou Dynkin do tipo *ADE*.

Exemplo 2.15 • *O quiver de Kronecker é hiperbólico, não importando quantas flechas ligam os dois vértices*

• *O quiver*



é hiperbólico.

• *Já o quiver*



não é hiperbólico, pois o subgrafo



não é de Euclideo.

No caso de grafos de Dynkin do tipo *ADE*, Euclideos ou hiperbólicos temos uma descrição do sistema de raízes $\Delta(\Gamma)$. O seguinte Teorema pode ser encontrado em [6].

Teorema 2.16 *Se o grafo conexo Γ é Dynkin do tipo ADE, Euclideo ou hiperbólico, então:*

$$\Delta(\Gamma) = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \mid (\alpha, \alpha) \leq 1\}.$$

Em particular, se Γ é Dynkin do tipo ADE, então

$$\Delta(\Gamma) = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n \mid (\alpha, \alpha) = 1\}$$

e se Γ é Euclideo, então

$$\Delta^{re}(\Gamma) = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n \mid (\alpha, \alpha) = 1\} \text{ e } \Delta^{im}(\Gamma) = (\mathbb{Z} \setminus \{0\})\delta.$$

Prova: Seja $\alpha \in \mathbb{Z}^n \setminus 0$ tal que $(\alpha, \alpha) \leq 1$. Mostraremos que $\alpha \in \Delta(\Gamma)$.

- $\text{supp } \alpha$ é conexo. Caso contrário, teríamos $\alpha = \beta + \gamma$, onde $\text{supp } \beta$ e $\text{supp } \gamma$ são uniões de subgrafos de tipo finito, sem vértices comuns nem arestas que os liguem. Teremos então $(\beta, \gamma) = 0$. E assim $(\alpha, \alpha) \geq 2$;

- Ou $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, ou $-\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Caso contrário, seja $\alpha = \beta - \gamma$, onde $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}_+^n$ não nulos, $\text{supp } \beta \cap \text{supp } \gamma = \emptyset$.

Suponhamos que $\text{supp } \beta$ é união de subgrafos de tipo finito. Então, $\text{supp } \gamma$ ou é união de subgrafos de tipo finito, ou é subgrafo Euclideano. Mas $1 \geq (\alpha, \alpha) = (\beta, \beta) + (\gamma, \gamma) - 2(\beta, \gamma)$ e $(\beta, \gamma) \leq 0$. Assim, a única possibilidade é $(\beta, \beta) = 1$, $(\gamma, \gamma) = 0$ e $(\beta, \gamma) = 0$. Então $\text{supp } \gamma$ é Euclideano e (β, γ) tem que ser negativo, isto é, os subgrafos $\text{supp } \beta$ e $\text{supp } \gamma$ tem que ser ligados por arestas de Γ . Isto é uma contradição.

Supondo que $\text{supp } \gamma$ é união de subgrafos de tipo finito, chegamos a uma contradição com contas semelhantes.

Assumimos então que $\text{supp } \alpha$ é conexo e $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Caso $W(\alpha) \cap \Pi \neq \emptyset$ temos que $\alpha \in \Delta^{re}(\Gamma)$. Supomos então que $W(\alpha) \cap \Pi = \emptyset$.

Se $\beta \in W(\alpha)$, então $(\beta, \beta) = (\alpha, \alpha) \leq 1$, o que implica que $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ para todo $\beta \in W(\alpha)$, pois ou $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ ou $\beta \in \mathbb{Z}_-^n$, mas como cada reflexão fundamental σ_i muda o valor apenas da coordenada i , temos que $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, assim como α .

Tomamos então $\beta \in W(\alpha)$ um elemento com $\text{ht } \beta$ mínimo. Podemos assumir que $(\beta, e_i) \leq 0$ para $e_i \in \Pi$. Como $\text{supp } \beta$ é conexo, temos que β pertence ao conjunto fundamental, e portanto $\alpha \in \Delta(\Gamma)$.

□

Em particular, verificamos que toda raiz de um quiver cujo grafo associado é Dynkin do tipo *ADE*, Euclideano ou hiperbólico é positiva ou negativa.

Dado o sistema de raízes Δ de um quiver Q , podemos definir $\Delta/\text{rad } q$, que é o quociente pela relação $x \approx y \Leftrightarrow x - y \in \text{rad } q$.

Proposição 2.17 *Seja Γ grafo de Dynkin do tipo ADE ou Euclideano.*

1. *Cada e_i é uma raiz.*
2. *Se $x \in \Delta$ e $y \in \text{rad } q$ então $-x, x + y \in \Delta$.*
3. *Se Γ é Euclideano, então $\Delta / \text{rad } q$ é finito.*
4. *Se Γ é Dynkin do tipo ADE, então Δ é finito.*

Prova:

1. Claro.
2. Basta ver que $q(y \pm x) = q(y) + q(x) \pm (y, x) = q(x)$ e usar o teorema anterior.
3. Fixamos um vértice e . Se $x \in \Delta$ com $x_e = 0$ então $\delta - x$ e $\delta + x$ são positivos na e -ésima coordenada. Mas pelo item 2 esses vetores estão em Δ e pelo Teorema 2.16 são positivos. Então,

$$\{x \in \Delta \mid x_e = 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z}^n \mid -\delta \leq x \leq \delta\}$$

que é um conjunto finito. Agora, se $x \in \Delta$ então $x - x_e \delta$ está no conjunto $\{x \in \Delta \mid x_e = 0\}$ o que já implica que $\Delta / \text{rad } q$ é finito.

4. Temos que existe algum grafo Euclideano $\tilde{\Gamma}$ do qual obtemos o grafo Γ tirando algum vértice e . Uma raiz x de Γ pode ser vista como uma raiz de $\tilde{\Gamma}$ com $x_e = 0$. Portanto, o resultado é uma consequência do item 3.

□

Lema 2.18 *Seja Γ um grafo de Dynkin do tipo ADE ou Euclideano. Se x é uma raiz positiva e $\sigma_i(x)$ é não positiva, então $x = e_i$.*

Prova: A raiz $\sigma_i(x)$ é não positiva por hipótese e, portanto, negativa pela Proposição 2.17. Para os vértices $j \neq i$ temos $\sigma_i(x)_j = x_j$ e consequentemente, $x_j = 0$. Portanto, $x = e_i$. \square

Agora, vamos na direção de classificar os quiver segundo a quantidade de classes de isomorfismos de representações indecomponíveis.

Definição 2.19 *Uma álgebra A é dita de tipo finito de representação quando existe apenas uma quantidade finita de classes de isomorfismo de A -módulos indecomponíveis.*

Uma álgebra A é dita de tipo manso de representação quando:

- *para todo $n \in \mathbb{N}$ e quase todo A -módulo indecomponível M de dimensão n , a classe de isomorfismo de M está em uma família a um parâmetro de classes de representações indecomponíveis;*
- *não temos famílias a mais de um parâmetro de classes de isomorfismo de representações indecomponíveis de A ;*
- *A não é de tipo finito de representação.*

Uma álgebra A é dita de tipo selvagem de representação quando para algum $n \in \mathbb{N}$ existe família a dois ou mais parâmetros de A módulos indecomponíveis de dimensão n .

Lembrando da equivalência de categorias entre $\text{Rep } Q$ e $\text{mod-}kQ$, dizemos que o quiver Q é de tipo finito, manso ou selvagem de representação quando a álgebra kQ o for.

Pode-se definir álgebra de tipo manso de representação sem excluir a possibilidade de ser de tipo finito, como em [10], por exemplo. Como queremos distinguir os quivers que têm quantidade finita de classes de isomorfismo de representações indecomponíveis daqueles que têm quantidade infinita, fizemos esta ressalva na definição.

Exemplo 2.20 *O quiver Q dado por*

$$1 \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_1} \\ \xrightarrow{\alpha_2} \end{array} \bullet 2$$

é de tipo manso de representação. Para notar isso, seja V uma representação indecomponível de Q com $n = \dim V_1 = \dim V_2$. Encontramos facilmente uma representação V' de Q isomorfa à V na forma

$$k^n \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}} \\ \xrightarrow{J_\lambda} \end{array} k^n,$$

onde a matriz J_λ é um bloco de Jordan com autovalor λ . Além disso, para valores diferentes de λ temos representações não isomorfas. Assim, temos família à um parametro de classes de isomorfismo de representações indecomponíveis quando $\dim V_1 = \dim V_2$. Caso V indecomponível e $\dim V_1 \neq \dim V_2$, verifica-se que temos apenas uma classe de isomorfismo de representações indecomponíveis com este vetor dimensão.

Enunciaremos aqui um teorema cuja demonstração é objetivo do próximo capítulo.

Teorema 2.21 (*Teorema de Gabriel*) *Um quiver conexo Q tem apenas um número finito de classes de isomorfismo de representações indecomponíveis se, e somente se, o grafo associado a Q for um diagrama de Dynkin do tipo ADE.* (tabela 2.1)

Um quiver conexo é de tipo manso se, e somente se, o grafo associado a ele for Euclideano. (tabela 2.2)

O Teorema de Gabriel nos diz alguma coisa sobre o vetor dimensão de representações indecomponíveis apenas quando o quiver é Euclideano ou Dynkin do tipo ADE. Para quivers em geral, inclusive os de tipo selvagem, temos o Teorema de Kac. Encontramos sua demonstração em [5].

Teorema 2.22 (*Kac*) *Seja Q um quiver. Existe uma correspondência 1-1 entre vetores dimensão das representações indecomponíveis de Q e as raízes positivas do sistema de raízes do grafo associado a Q .*

Ou seja, para uma representação indecomponível de um quiver Q garantimos que o vetor dimensão desta estará no sistema de raízes do grafo associado. Reciprocamente, dado $x \in \Delta^+$ conseguimos uma representação indecomponível cujo vetor dimensão é x . Entretanto, nem toda representação cujo vetor dimensão é uma raiz é necessariamente indecomponível.

Além disso, Kac demonstrou que se \vec{x} é uma raiz real positiva, então temos uma única classe de isomorfismo de representação indecomponível com este vetor dimensão e, caso \vec{x} seja uma raiz imaginária positiva, temos uma família de classes de isomorfismo de representações indecomponíveis com o mesmo vetor dimensão.

Capítulo 3

Teorema de Gabriel

Neste capítulo apresentamos a demonstração para o Teorema de Gabriel usando funtores reflexivos. Seguimos de perto as notas de [8].

3.1 Funtores Reflexivos

Definição 3.1 *O vértice i de um quiver Q é dito um sumidouro quando não temos flechas em Q começando em i , e é dito uma fonte quando não temos flechas em Q terminando em i . O quiver $\sigma_i Q$ é obtido invertendo a direção de todas as flechas que começam ou terminam em i . Uma ordem i_1, \dots, i_n dos vértices de Q é dita admissível se para cada p o vértice i_p é um sumidouro para o quiver $\sigma_{i_{p-1}} \dots \sigma_{i_1} Q$.*

Se houver uma ordem admissível i_1, \dots, i_n para o quiver Q , temos que:

$$\sigma_{i_n} \dots \sigma_{i_1} Q = Q$$

Exemplo 3.2 *No quiver*

$$Q : 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xleftarrow{\alpha_2} 3 \xrightarrow{\alpha_3} 4$$

temos $Q_0 = \{1, 2, 3, 4\}$, $Q_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, as vértices 1 e 3 são fontes, os vértices 4 e 2 são sumidouros e $1, 3, 2, 4$, $1, 3, 4, 2$, $3, 1, 2, 4$ e $3, 1, 4, 2$ são ordens admissíveis para Q .

Lema 3.3 *Existe uma ordem admissível para o quiver Q se, e somente se, Q não tiver ciclos orientados.*

Prova: Provaremos uma implicação por indução sobre $\#Q_0$. Supondo que não haja ciclo orientado em Q , seja i_n o vértice inicial de um caminho com maior comprimento. Então, i_n é uma fonte de Q . Construímos um novo quiver Q' tal que $Q'_0 = Q_0 \setminus \{i_n\}$ e $Q'_1 = Q_1 \setminus \{\beta \in Q_1 \mid t(\beta) = i_n\}$. Temos então, em Q' , uma ordem admissível i_1, \dots, i_{n-1} . Assim, construímos i_1, \dots, i_n , que é ordem admissível para Q .

Para a outra implicação, se $\alpha_t \dots \alpha_1$ é um ciclo orientado de Q e tivéssemos i_1, \dots, i_n ordem admissível para os vértices de Q , então $i_n \notin \{i_k \in Q_0 \mid i_k = h(\alpha_s), 1 \leq s \leq t\}$, pois nenhum dos vértices $h(\alpha_s)$ pode ser um sumidouro de Q . Com mesmo argumento, temos que $i_j \notin \{i_k \in Q_0 \mid i_k = h(\alpha_s), 1 \leq s \leq t\}$, para $1 \leq j \leq n$. Isso nos dá uma contradição, pois nenhum dos vértices $h(\alpha_s)$ aparece na ordem admissível tomada. Portanto, não podemos ter uma ordem admissível quando temos um ciclo orientado. \square

Definição 3.4 *Seja i um vértice de Q . Fixamos representações $X, X' \in \text{Rep } Q$ e um morfismo $\phi : X \rightarrow X'$. Os funtores reflexivos S_i^+ e S_i^- são definidos da seguinte forma:*

1. Se i é um sumidouro de Q , construímos o funtor

$$S_i^+ : \text{Rep}(Q, k) \longrightarrow \text{Rep}(\sigma_i Q, k)$$

dado por $S_i^+(X) = Y$, onde $X_j = Y_j$ para $j \neq i$, e Y_i é o núcleo do mapa $\xi = (X_\alpha)_{h(\alpha)=i}$, isto é:

$$Y_i \xrightarrow{\check{\xi}} \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ h(\alpha)=i}} X_{t(\alpha)} \xrightarrow{\xi} X_i$$

onde $\check{\xi}$ é a inclusão natural pelo núcleo. Para as flechas $\alpha \in Q_1$, temos $Y_\alpha = X_\alpha$ se $h(\alpha) \neq i$, e $Y_{\sigma(\alpha)} : Y_i \rightarrow X_{t(\alpha)} = Y_{t(\alpha)}$ é a composição do mapa $\check{\xi}$ com a projeção em $X_{t(\alpha)}$.

O morfismo $S_i^+ \phi = \psi : S_i^+(X) \rightarrow S_i^+(X')$ é dado por $\psi_j = \phi_j$ se $i \neq j$, e $\psi_i : Y_i \rightarrow Y'_i$ é a restrição do mapa $(\phi_{t(\alpha)})_{h(\alpha)=i}$ ao núcleo de ξ

$$\psi_i = (\phi_{t(\alpha)})_{h(\alpha)=i} \Big|_{\ker \xi} : \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ h(\alpha)=i}} X_{t(\alpha)} \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ h(\alpha)=i}} X'_{t(\alpha)}$$

Em outras palavras, a construção de S_i^+ é tal que o seguinte diagrama é comutativo com as linhas exatas.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Y_i & \xrightarrow{\check{\xi}} & \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ h(\alpha)=i}} X_{t(\alpha)} & \xrightarrow{\xi} & X_i \\ & & \downarrow S_i^+ \phi_i & & \downarrow (\phi_{t(\alpha)})_{h(\alpha)=i} & & \downarrow \phi_i \\ 0 & \longrightarrow & Y'_i & \xrightarrow{\check{\xi}'} & \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ h(\alpha)=i}} X'_{t(\alpha)} & \xrightarrow{\xi'} & X'_i \end{array}$$

2. Se o vértice i é uma fonte de Q , temos a construção do funtor

$$S_i^- : \text{Rep}(Q, k) \longrightarrow \text{Rep}(\sigma_i Q, k)$$

dada por $S_i^-(X) = Y$ onde $X_j = Y_j$ para $j \neq i$, e Y_i é o conúcleo do mapa $\xi = (X_\alpha)_{t(\alpha)=i}$, ou seja:

$$X_i \xrightarrow{\xi} \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X_\alpha \xrightarrow{\tilde{\xi}} Y_i$$

onde $\tilde{\xi}$ é a projeção natural no conúcleo de ξ . Para uma flecha $\alpha \in Q_1$, temos $Y_\alpha = X_\alpha$ se $h(\alpha) \neq i$, e $Y_{\sigma(\alpha)} : Y_{h(\alpha)} = X_{h(\alpha)} \rightarrow Y_i$ é a restrição de $\tilde{\xi}$ a $X_{h(\alpha)}$.

O morfismo $S_i^- \phi = \psi : S_i^-(X) \rightarrow S_i^-(X')$ é definido por $\psi_j = \phi_j$ se $i \neq j$, e $\psi_i : Y_i \rightarrow Y'_i$ é induzido por

$$(\phi_{t(\alpha)})_{h(\alpha)=i} : \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ h(\alpha)=i}} X_{t(\alpha)} \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ h(\alpha)=i}} X'_{t(\alpha)}$$

em Y_i e Y'_i .

Ou seja, a construção de S_i^- é tal que o diagrama seguinte é comutativo e tem as linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccc} X_i & \xrightarrow{\xi} & \bigoplus_{t(\alpha)=i} X_{h(\alpha)} & \xrightarrow{\tilde{\xi}} & Y_i & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \phi_i & & \downarrow (\phi_{t(\alpha)})_{h(\alpha)=i} & & \downarrow S_i^+ \phi_i & & \\ X'_i & \xrightarrow{\xi'} & \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ h(\alpha)=i}} X'_{t(\alpha)} & \xrightarrow{\tilde{\xi}'} & Y'_i & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

3. Seja i um sumidouro. Então definimos o monomorfismo

$$\iota_i X : S_i^- S_i^+ X \longrightarrow X$$

onde $(\iota_i X)_j = \text{id}_{X_j}$ para $j \neq i$ e $(\iota_i X)_i$ é o mapa canônico

$$(S_i^- S_i^+ X)_i = \text{coker } \tilde{\xi} \cong \text{Im } \xi \longrightarrow X_i$$

4. Se i é uma fonte, definimos o epimorfismo

$$\pi_i X : X \longrightarrow S_i^+ S_i^- X$$

dado por $(\pi_i X)_j = \text{id}_{X_j}$ quando $j \neq i$ e $(\pi_i X)_i$ é o mapa canônico

$$X_i \longrightarrow \text{Im } \xi \cong \ker \check{\xi} = (S_i^+ S_i^- X)_i$$

O seguinte Lema dá sentido ao nome “functor” na última definição.

Lema 3.5 S_i^+ e S_i^- são funtores entre categorias.

Prova: Seja i um sumidouro. Dado V uma representação de Q sobre k , temos que $S_i^+(V)$ é uma representação de $\sigma_i Q$ sobre k . Para concluir que S_i^+ é de fato um functor só resta concluir que dado um morfismo $\phi : X \rightarrow Y$ temos o morfismo $S_i^+ \phi : S_i^+ X \rightarrow S_i^+ Y$. Mas S_i^+ é tal que satisfaz o diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S_i^+(X_i) & \xrightarrow{\check{\xi}} & \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ h(\alpha)=i}} X_{t(\alpha)} & \xrightarrow{\xi} & X_i \\ & & \downarrow S_i^+ \phi_i & & \downarrow (\phi_{t(\alpha)})_{h(\alpha)=i} & & \downarrow \phi_i \\ 0 & \longrightarrow & S_i^+(Y_i) & \xrightarrow{\check{\xi}'} & \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ h(\alpha)=i}} Y_{t(\alpha)} & \xrightarrow{\xi'} & Y_i \end{array}$$

Para concluirmos que $S_i^+ \phi$ é um morfismo só precisamos mostrar que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_i^+(X_i) & \xrightarrow{S_i^+(X_\alpha)} & X_{h(\sigma_i \alpha)} \\ \phi_i \downarrow & & \downarrow \phi_{h(\sigma_i \alpha)} \\ S_i^+(Y_i) & \xrightarrow{S_i^+(Y_\alpha)} & Y_{h(\sigma_i \alpha)} \end{array}$$

comuta para todo α no quiver original com $t(\alpha) = i$, já que para o restante do quiver segue de que ϕ é morfismo. Mas o quadrado da esquerda do diagrama mostra exatamente isso. Portanto S_i^+ é funtor. Argumento semelhante mostra que S_i^- é funtor.

□

Lembramos que σ_i denota a reflexão fundamental com respeito ao vértice i , que está definida sempre que i é uma raiz fundamental, isto é, não existem flechas que começam e terminam em i .

Lema 3.6 *Sejam X, X' representações de Q e i um vértice.*

1. $S_i^\pm(X \oplus X') = S_i^\pm X \oplus S_i^\pm X'$.
2. $X = S_i^- S_i^+ X \oplus \text{coker } \iota_i X$ e $X = S_i^+ S_i^- X \oplus \ker \pi_i X$.
3. Se $\text{coker } \iota_i X = 0$, então $\dim S_i^+ X = \sigma_i(\dim X)$.
4. Se $\ker \pi_i X = 0$, então $\dim S_i^- X = \sigma_i(\dim X)$.

Prova: Para os itens 1 e 2 consideramos o caso em que $i \in Q_0$ é um sumidouro. O outro é análogo.

1. Temos que $\pi_1 : X \oplus X' \rightarrow X$ dada por $\pi_1(X_j \oplus X'_j) = X_j$ para todo $j \in Q_0$ e $\pi_1(X_\alpha \oplus X'_\alpha) = X_\alpha$ para todo $\alpha \in Q_1$ é um morfismo. Da mesma forma tomamos o morfismo $\pi_2 : X \oplus X' \rightarrow X'$. Consideramos os morfismos $\phi_1 = S_i^+ \pi_1$ e $\phi_2 = S_i^+ \pi_2$.

Agora, se temos uma representação Y de $\sigma_i Q$ e morfismos $\psi_1 : Y \rightarrow S_i^+ X$ e $\psi_2 : Y \rightarrow S_i^+ X'$, então construímos o morfismo

$\psi : Y \rightarrow S_i^+(X \oplus X')$ dado por $\psi(Y_j) = \psi_1(Y_j) \oplus \psi_2(Y_j)$ para todo $j \in \sigma Q_0$ e $\psi(Y_j) = \psi_1(Y_j) \oplus \psi_2(Y_j)$ para todo $\alpha \in \sigma Q_1$. Assim: $\phi_l \psi(X_j) = \psi_l(X_j)$ para todo $j \in Q_0$ e para $l = 1, 2$.

Como a soma direta de representações é o produto na categoria $\text{Rep}(Q, k)$, temos que $S_i^+(X \oplus X') = S_i^+ X \oplus S_i^+ X'$.

Mostrar que $S_i^-(X \oplus X') \cong S_i^- X \oplus S_i^- X'$ é análogo.

2. Tomamos o mapa canônico $\tau_i : X_i \rightarrow \text{coker } \xi$, onde $\xi = (X_\alpha)_{t(\alpha)=i}$ e escolhemos um $\tau'_i : \text{coker } \xi \rightarrow X_i$ tal que $\tau \circ \tau' = \text{id}_{\text{coker } \xi}$.

Esta escolha nos dá um morfismo $\tau : \text{coker } \iota_i X \rightarrow X$ dado por $\tau_j = 0$ para todo $j \neq i$.

Temos então que $\tau : \text{coker } \iota_i X \rightarrow X$ e $\iota_i X : S_i^- S_i^+ X \rightarrow X$ nos dão uma decomposição de X em soma direta.

Raciocínio semelhante mostra a outra igualdade.

3. Se $\text{coker } \iota_i X = 0$, então $\text{Im } \xi = X_i$ e pelo teorema do núcleo e imagem

$$\dim S_i^+(X_i) = \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ h(\alpha)=i}} \dim X_{t(\alpha)} - \dim X_i$$

e $\dim S_i^+(X_j) = \dim X_j$ para $i \neq j$. Temos então $\dim S_i^+ X = \sigma_i(\dim X)$.

4. É análogo ao item 3.

□

Lema 3.7 *Seja i um sumidouro e X uma representação indecomponível de Q . São equivalentes:*

1. $X \not\cong S(i)$;
2. $S_i^+ X$ é indecomponível;
3. $S_i^+ X \neq 0$;
4. $S_i^- S_i^+ X \cong X$;
5. O mapa $(X_\alpha)_{h(\alpha)=i} : \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X_{t(\alpha)} \rightarrow X_i$ é um epimorfismo.;
6. $\sigma_i(\dim X) > 0$;
7. $\dim S_i^+ X = \sigma_i(\dim X)$.

Prova: Imediatamente do Lema 3.6 temos $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

Das definições de functor reflexivo vale $1 \Leftrightarrow 5$.

Do Lema 3.6 e das definições de functor reflexivo e reflexão temos $1 \Rightarrow 7 \Rightarrow 6 \Rightarrow 1$.

□

Temos um Lema análogo ao anterior para i uma fonte e o functor S_i^- . Assim, pelos resultados anteriores, temos o teorema:

Teorema 3.8 *Os funtores S_i^+ e S_i^- induzem bijeções mutuamente inversas entre as representações indecomponíveis de Q e as representações indecomponíveis de $\sigma_i Q$, com exceção das representações simples correspondentes ao vértice i , que são anuladas por esses funtores. Além disso, $\dim S_i^\pm X = \sigma_i(\dim X)$ para toda representação indecomponível X não isomorfa a $S(i)$.*

Definição 3.9 *Seja i_1, \dots, i_n uma ordem admissível. O funtor de Coxeter com respeito a essa ordenação é o funtor*

$$C^+ = S_{i_n}^+ \dots S_{i_1}^+ : \text{Rep}(Q, k) \longrightarrow \text{Rep}(Q, k)$$

Também definimos

$$C^- = S_{i_1}^- \dots S_{i_n}^- : \text{Rep}(Q, k) \longrightarrow \text{Rep}(Q, k)$$

e para $r \in \mathbb{Z}$

$$C^r = \begin{cases} (C^+)^r & \text{se } r > 0 \\ \text{id} & \text{se } r = 0 \\ (C^-)^{-r} & \text{se } r < 0 \end{cases}$$

Lema 3.10 *Os funtores C^+ e C^- não dependem da ordem admissível escolhida dos vértices de Q .*

Prova: Primeiro observamos que se os vértices i e j são sumidouros do quiver Q , então não são ligados por nenhuma flecha. Como a construção de S_i^+ só depende dos vértices que são ligados a i , temos $S_i^+ S_j^+ = S_j^+ S_i^+$ sempre que i e j são sumidouros de Q .

Tomamos duas ordens admissíveis i_1, \dots, i_n e i'_1, \dots, i'_n dos vértices de Q . Seja $i'_m = i_1$. Temos que i'_1 não é ligado a i_1 por nenhuma flecha, pois ambos são sumidouros de Q . O vértice i'_2 também não é ligado a i_1 , pois ambos são sumidouros do quiver $\sigma_{i'_1} Q$.

Então, os vértices i'_1, \dots, i'_{m-1} não são ligados a i_1 por nenhuma flecha. Assim,

$$S_{i'_m}^+ S_{i'_{m-1}}^+ \dots S_{i'_1}^+ = S_{i'_{m-1}}^+ S_{i'_1}^+ \dots S_{i'_1}^+ = S_{i'_{m-1}}^+ \dots S_{i'_1}^+ S_{i'_1}^+.$$

Aplicando argumento semelhante para i_2, i_3 e assim por diante, obtemos:

$$S_{i_n}^+ S_{i_{n-1}}^+ \dots S_{i_1}^+ = S_{i_n}^+ S_{i_{n-1}}^+ \dots S_{i_1}^+.$$

Portanto, C^+ não depende da escolha da ordem admissível dos vértices de Q . Similarmente C^- não depende desta escolha.

□

3.2 Demonstração do Teorema de Gabriel

Por simplicidade, daqui por diante diremos que $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ onde $1, 2, \dots, n$ é uma ordem admissível.

Lembramos que definimos $P(i)$ em 1.14 e $I(i)$ em 1.24.

Lema 3.11 *Para um vértice i de um quiver Q , temos:*

1. $\dim P(i) = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{i-1}(e_i)$ e $\dim I(i) = \sigma_n \sigma_{n-1} \dots \sigma_{i+1}(e_i)$.
2. $P(i) \cong S_1^- S_2^- \dots S_{i-1}^- S(i)$ e $I(i) \cong S_n^+ S_{n-1}^+ \dots S_{i+1}^+ S(i)$.

Prova: Mostraremos para a representação $P(i)$.

1. Por indução, vamos mostrar que para $0 \leq l < i$ vale

$$\sigma_{i-l} \dots \sigma_{i-1}(e_i) = \sum_{j=0}^l (\#Q(i, i-j)) e_{i-j}$$

onde $\#Q(i, t)$ é o número de elementos de $Q(i, t)$.

Para $l = 0$ não age nenhuma permutação e a expressão dá e_i . Quando $l = 1$, temos

$$e_{i-1}(e_i) = e_i + (\#Q(i, i-1))e_{i-1}$$

e a expressão é válida para $l = 0, 1$

Supondo que vale o resultado para $l - 1$, temos

$$\begin{aligned} \sigma_{i-l} \dots \sigma_{i-1}(e_i) &= \sigma_{i-l} \left(\sum_{j=0}^{l-1} (\#Q(i, i-j))e_{i-j} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{l-1} (\#Q(i, i-j))e_{i-j} + \sum_{j=0}^{l-1} (\#Q(i, i-j))(\#Q(i-j, l))e_l \\ &= \sum_{j=0}^{l-1} (\#Q(i, i-j))e_{i-j} + (\#Q(i, i-l))e_l \\ &= \sum_{j=0}^l (\#Q(i, i-j))e_{i-j} \end{aligned}$$

e, portanto, vale a indução.

Assim, para $l = i - 1$ temos $\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(e_i) = \dim P(i)$, uma vez que não temos caminhos em Q que vão de i para j quando $j > i$.

2. Usando a indução demonstrada na primeira parte e o Lema 3.7, temos para $0 \leq l < i$

$$\begin{aligned} \dim S_l^+ \dots S_1^+ P(i) &= \sigma_l \dots \sigma_1 \sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(e_i) \\ &= \sigma_{l+1} \dots \sigma_{i-1}(e_i). \end{aligned}$$

Assim, para $l = i - 1$ temos $S_{i-1}^+ \dots S_1^+ P(i) \cong S(i)$.

Portanto, $P(i) = S_1^- \dots S_{i-1}^- S(i)$.

□

Proposição 3.12 *Seja X uma representação indecomponível do quiver Q .*

1. $C^+X = 0$ se, e somente se, $X \cong P(i)$ para algum vértice i
2. $C^-X = 0$ se, e somente se, $X \cong I(i)$ para algum vértice i

Prova:

1. Temos que $P(i) \cong S_1^- S_2^- \dots S_{i-1}^- S(i)$ pelo Lema 3.11. Aplicando funtores reflexivos sucessivamente, temos

$$C^+P(i) = S_n^+ \dots S_i^+ S(i) = 0$$

pois $S_i^+ S(i) = 0$. Reciprocamente, $C^+X = 0$ implica que $X \cong S_1^- S_2^- \dots S_{i-1}^- S(i)$ para algum vértice i , uma vez que X é indecomponível.

2. É análogo ao item anterior.

□

Definição 3.13 *Seja X uma representação indecomponível de Q .*

1. X é pré-projetiva se $X \cong C^r P(i)$ para algum vértice i e algum $r \leq 0$.
2. X é pré-injetiva se $X \cong C^r I(i)$ para algum vértice i e algum $r \geq 0$.
3. X é regular se $C^r X \neq 0$ para todo $r \in \mathbb{Z}$.

A definição anterior nos dá que uma representação X é pré-projetiva se, e somente se, $C^r X = 0$ para algum $r > 0$ e pré-injetiva se, e somente se, $C^r X = 0$ para algum $r < 0$. Isto é uma consequência imediata da Proposição 3.12.

Proposição 3.14 *Uma representação indecomponível é pré-projetiva, pré-injetiva ou regular. Dadas representações indecomponíveis X e Y com X pré-injetiva ou pré-projetiva, temos que $X \cong Y$ se, e somente se, $\dim X = \dim Y$. Ainda mais*

1. $C^r P(i) \cong C^s P(j) \neq 0$ implica $i = j$ e $r = s$.
2. $C^r I(i) \cong I^s P(j) \neq 0$ implica $i = j$ e $r = s$.

Prova: A primeira afirmação da proposição está demonstrada no comentário anterior.

Supondo que $\dim X = \dim Y$ e $X \cong C^r P(i)$ pré-projetiva. Sabemos que $\dim P(i) = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{i-i}(e_i)$ e, dessa forma,

$$\dim Y = (\sigma_n \dots \sigma_1)^r \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{i-i}(e_i).$$

Usando funtores reflexivos, temos $S_{i-1}^+ \dots S_1^+ C^{-r}(Y) \cong S(i)$, o que nos dá

$$Y \cong C^r S_1^- \dots S_{i-1}^- S(i) \cong C^r P(i) \cong X.$$

A prova para o caso em que X é injetivo é análoga.

1. Se $C^r P(i) \cong C^s P(j) \neq 0$, então $P(i) \cong C^{s-r} P(j)$ e $s - r \leq 0$ pela Proposição 3.12. O mesmo argumento mostra que $r - s \leq 0$. Logo, $r = s$. Aplicando o funtor C^{-r} , obtemos que $P(i) \cong P(j)$, donde concluímos pelo Lema 1.27 que $i = j$.

2. Análogo ao anterior.

□

Definição 3.15 *Seja Q um quiver sem ciclos orientados e fixemos uma ordem admissível $1, \dots, n$ de seus vértices. O automorfismo $c : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ dado por*

$$c(x) = \sigma_n \dots \sigma_1(x)$$

é a transformação de Coxeter. Definimos também $c^-(x) = \sigma_1 \dots \sigma_n(x)$ e para todo $r \in \mathbb{Z}$ temos

$$c^r = \begin{cases} (c^+)^r & \text{se } r > 0 \\ \text{id} & \text{se } r = 0 \\ (c^-)^{-r} & \text{se } r < 0. \end{cases}$$

Lema 3.16 1. $c(\dim P(i)) = -\dim I(i)$ para todo vértice i .

2. $\{\dim P(i) \mid i \in Q_0\}$ e $\{\dim I(i) \mid i \in Q_0\}$ são bases de \mathbb{Z}^n .

Prova:

1. Temos $\dim P(i) = \sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(e_i)$ pelo Lema 3.11 e, como $\sigma_i(e_i) = -e_i$, segue que

$$\begin{aligned} c(\dim P(i)) &= c\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(e_i) \\ &= \sigma_n \dots \sigma_i(e_i) \\ &= -\sigma_n \dots \sigma_{i-1}(e_i) \\ &= -\dim I(i). \end{aligned}$$

2. Segue imediatamente de que

$$e_i = \dim P(i) - \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} \dim P(t(\alpha)) = \dim I(i) - \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ h(\alpha)=i}} \dim I(h(\alpha)).$$

□

No Lema seguinte, a forma $\langle -, - \rangle : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ é a forma de Euler que foi definida em 2.1.

Lema 3.17 *Sejam Q um quiver sem ciclos orientados, $n = \#Q_0$ e $x, y \in \mathbb{Z}^n$.*

1. $\langle \dim P(i), x \rangle = x_i = \langle x, \dim I(i) \rangle$ para cada vértice i .
2. $\langle x, y \rangle = -\langle y, c(x) \rangle = \langle c(x), c(y) \rangle$.

Prova:

1. Pela bilinearidade da forma de Euler, temos que basta verificar a igualdade para $x = e_j$. A igualdade vale para $x = e_i$. Para $x = e_j$, com $j \neq i$, temos $\sum_{k \in Q_0} \dim P(i)_k x_k = \#Q(i, j)$ o número de caminhos possíveis em Q ligando i a j e

$$\sum_{\alpha \in Q_1} \dim P(i)_{t(\alpha)} x_{h(\alpha)} = \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ h(\alpha)=j}} (\#Q(i, t(\alpha))) = \#Q(i, j).$$

2. Pelo Lema 3.16 é suficiente verificar para $x = \dim P(j)$, $j \in Q_0$. Usando o item anterior e o Lema 3.16, temos

$$\langle \dim P(j), y \rangle = \langle y, \dim I(j) \rangle = \langle y, -c(\dim P(i)) \rangle$$

e, portanto, vale o resultado.

□

Lema 3.18 *Seja Q um quiver, $n = \#Q_0$ e $x \in \mathbb{Z}^n$. Então $c(x) = x$ se, e somente se, $x \in \text{rad } q$.*

Prova: Lembrando que $1, 2, \dots, n$ foi tomado como uma ordem admissível para os vértices de Q . Temos que $c(x)_1 = \sigma_1(x)_1$, pois apenas σ_1 muda a primeira coordenada de x . Prosseguindo com o mesmo raciocínio, temos que $c(x) = x$ se, e somente se, $x_i = c(x)_i = \sigma_i(x)_i$ para todo $i \in Q_0$, que acontece se, e somente se, $(x, e_i) = 0$ para todo i . Assim, concluímos que $x = c(x)$ se, e somente se, $(x, -) = 0$, ou seja, $x \in \text{rad } q$.

□

Temos que se Q é um quiver com grafo de Dynkin do tipo ADE ou Euclideano, então o mapa c induz uma permutação no conjunto finito $\Delta/\text{rad } q$. Então, para algum $h > 0$, temos que c^h é o mapa identidade em $\Delta/\text{rad } q$.

Lema 3.19 *Seja Q é um quiver com grafo de Dynkin do tipo ADE e $x \in \mathbb{Z}^n$. Então, existe $r > 0$ tal que $c^r(x)$ é não positivo.*

Prova: Seja $y = \sum_{r=0}^{h-1} c^r(x)$. Temos que $c(y) = y$ e, como Q é de Dynkin do tipo ADE , pelo Lema 3.18 segue $y = 0$. Logo, para algum $r > 0$, $c^r(x)$ é não positivo necessariamente.

□

Lema 3.20 *Seja Q um quiver cujo grafo é Euclideano e $x \in \mathbb{Z}^n$.*

1. Se $c^r(x) > 0$ para todo $r \in \mathbb{Z}$, então $c^h(x) = x$.
2. Se $c^h(x) = x$ então $\langle \delta, x \rangle = 0$.

Prova:

1. Supondo $c^h(x) = x + v$ para algum vetor não nulo $v \in \text{rad } q$, temos que $c^{lh} = x + lv$ para todo $l \in \mathbb{Z}$. Claramente, teremos algum $r \in \mathbb{Z}$ tal que $c^r(x)$ é não positivo e esta contradição demonstra o item.
2. O vetor $y = \sum_{r=0}^{h-1} c^r(x)$ é fixado por c , e pelo Lema 3.18 $y \in \mathbb{Z}^n$. Assim

$$0 = \langle \delta, y \rangle = \sum_{r=0}^{h-1} \langle \delta, c^r(x) \rangle = h \langle \delta, x \rangle$$

pois, pelo Lema 3.17, c preserva a forma de Euler . Portanto, $\langle \delta, x \rangle = 0$.

□

Teorema 3.21 *Seja Q um quiver cujo grafo é Dynkin do tipo ADE. Então, o mapa $X \mapsto \dim X$ induz bijeção entre as classes de isomorfismo de representações indecomponíveis de Q e as raízes positivas do sistema de raízes do grafo associado a Q .*

Em particular, se Q é de Dynkin do tipo ADE, então existe apenas um número finito de classes de isomorfismo de representações indecomponíveis.

Prova: Tomamos $1, 2, \dots, n$ uma ordem admissível para os vértices de Q . Seja X representação indecomponível de Q com vetor dimensão $\dim X = x$ e

$$\tau = \sigma_s \dots \sigma_1 (\sigma_n \dots \sigma_1)^r$$

a primeira expressão dessa forma com $\tau(x)$ não positivo. O Lema 3.19 garante que existe τ .

Temos então que

$$S_{s-1}^+ \dots S_1^+ (S_n^+ \dots S_1^+)^r (X) \cong S(s)$$

onde $S(s)$ é a representação simples associada ao vértice s no quiver $Q' = \sigma_{s-1} \dots \sigma_1 Q$.

Aplicando funtores reflexivos e usando o Lema 3.7, obtemos

$$X \cong (S_1^- \dots S_n^-)^r S_1^- \dots S_{s-1}^- (S(s))$$

e portanto,

$$x = (\sigma_1 \dots \sigma_n)^r \sigma_1 \dots \sigma_{s-1} (e_s).$$

Assim, $x \in \Delta$. O mesmo argumento mostra que se X' é uma outra representação indecomponível com $\dim X' = x$, então $X' \cong X$.

Reciprocamente, tomamos $x \in \Delta$ uma raiz positiva. Seja

$$\tau = \sigma_s \dots \sigma_1 (\sigma_n \dots \sigma_1)^r$$

a primeira expressão dessa forma com $\tau(x)$ não positivo, que novamente existe pelo Lema 3.19. Então, pelo Lema 2.18

$$\sigma_{s-1} \dots \sigma_1 (\sigma_n \dots \sigma_1)^r (x) = e_s.$$

Seja

$$X = (S_1^- \dots S_n^-)^r S_1^- \dots S_{s-1}^- (S(s))$$

onde novamente $S(s)$ é a representação simples associada ao vértice s no quiver $Q' = \sigma_{s-1} \dots \sigma_1 Q$.

Agora, por aplicações de funtores reflexivos, temos que X é indecomponível e

$$\dim X = (\sigma_1 \dots \sigma_n)^r \sigma_1 \dots \sigma_{s-1}(e_s).$$

Como Δ é finito sempre que o grafo é Dynkin do tipo ADE , concluímos que neste caso temos apenas um número finito de classes de isomorfismo de representações indecomponíveis pela Proposição 2.17.

□

A demonstração do Teorema 3.21 mostra também que para um quiver cujo grafo associado é Dynkin do tipo ADE , qualquer representação indecomponível é pré-projetiva e pré-injetiva. De fato, basta aplicar os funtores de Coxeter.

Definição 3.22 *Seja Q um quiver cujo grafo associado é Euclideano. O defeito de um vetor $x \in \mathbb{Z}^n$ é*

$$\partial x = \langle \delta, x \rangle = -\langle x, \delta \rangle$$

O defeito de uma representação X é $\partial X = \partial \dim X$.

Proposição 3.23 *Seja X uma representação indecomponível de um quiver Euclideano.*

1. X é pré-projetiva se, e somente se, $\partial X < 0$.
2. X é pré-injetiva se, e somente se, $\partial X > 0$.
3. X é regular se, e somente se, $\partial X = 0$.

Prova: Primeiro, observamos que para qualquer representação X com $C^r X \neq 0$, temos pelo Lema 3.7 que

$$\dim C^r X = c^r \dim X.$$

Agora, supomos $X = C^r P(i)$ pré-projetiva. Então,

$$\partial X = -\langle c^r(\dim P(i)), \delta \rangle = -\langle \dim P(i), \delta \rangle = -\delta_i < 0$$

pelos Lemas 3.17 e 3.18. Similarmente, representações pré-injetivas tem defeito positivo.

Se X é regular, temos que $\partial X = 0$ pelo Lema 3.20.

□

Teorema 3.24 *Seja Q um quiver com n vértices sem ciclos orientados cujo grafo associado é Euclideano. O mapa $X \mapsto \dim X$ induz bijeção entre as classes de isomorfismo de representações pré-projetivas ou pré-injetivas de Q e as raízes positivas com defeito não nulo no sistema de raízes do grafo associado. As representações pré-projetivas e pré-injetivas formam $2n$ séries $C^{-r}P(i)$ e $C^r I(i)$, onde $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$ e $i \in Q_0$, de representações indecomponíveis duas a duas não isomorfas.*

Prova: Consideramos $1, 2, \dots, n$ uma ordem admissível dos vértices de Q . Tomamos X uma representação indecomponível de Q com vetor dimensão $x = \dim X$ e $X = C^r P(i)$ pré-projetiva. Temos pelo Lema 3.11 que $\dim P(i) = \sigma_1 \sigma_{i-1}(e_i)$ e dessa forma $x = c^r \sigma_1 \sigma_{i-1}(e_i)$ pelo Lema 3.7. Assim, x é uma raiz positiva. O mesmo se mostra tomando X uma representação pré-injetiva. O mapa $X \mapsto \dim X$ é injetivo pela Proposição 3.14.

Por outro lado, se x é uma raiz positiva com $\partial x \neq 0$, sabemos pelo Lema 3.20 que $c^t(x)$ é não positivo para algum $t \in \mathbb{Z}$. Supomos $t > 0$.

Tomamos

$$\tau = \sigma_i \dots \sigma_1 (\sigma_n \dots \sigma_1)^r$$

com $1 \leq i \leq n$ e $r \geq 0$, onde τ é a primeira expressão desta forma tal que $\tau(x)$ não é positivo. Segue do Lema 2.18 que

$$\sigma_{i-1} \dots \sigma_1 (\sigma_n \dots \sigma_1)^r(x) = e_i.$$

Seja $X = (S_1^- \dots S_n^-)^r S_1^- \dots S_{i-1}^- S(i)$. Aplicações sucessivas de funtores reflexivos e o Lema 3.7 mostram que X é indecomponível com

$$\dim X = (\sigma_1 \dots \sigma_n)^r \sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(e_i) = x.$$

Portanto, X é pré-projetivo com $X \cong C^{-r}P(i)$ pelo Lema 3.11. Se supormos $t < 0$, encontramos com argumento similar uma representação X pré-injetiva com $\dim X = x$.

Agora, se $C^{-r}P(i) = 0$ para algum $r > 0$, o Lema 3.12 nos diz que $P(i)$ é pré-injetiva, contradizendo o fato de que representações pré-injetivas e pré-projetivas têm defeitos distintos pela Proposição 3.23. Logo, $C^{-r}P(i) \neq 0$ para todo $r > 0$.

Analogamente mostra-se que $C^rI(i) \neq 0$ para todo $r > 0$.

Portanto, pelo Lema 3.14, as representações pré-projetivas e pré-injetivas formam $2n$ séries de representações indecomponíveis, duas a duas não isomorfas.

□

Os únicos quivers com grafo euclideano que não cumprem as hipóteses do Teorema 3.24 são os do tipo \tilde{A}_n cujas flechas formam um ciclo. Este caso é considerado a seguir.

Proposição 3.25 *Seja Q um quiver Euclideano do tipo \tilde{A}_n , com $n \geq 0$. Então, Q tem número infinito de classes de isomorfismo de representações indecomponíveis.*

Prova: Quando Q não possui um ciclo, o resultado já foi mostrado no Teorema 3.24. Assim podemos supor adicionalmente que Q possui um ciclo.

Fixamos a flecha $\alpha_0 \in Q_1$. Para cada $p \geq 1$, tomamos a representação $X = X(p)$ com $X_i = k^p$ para todo $i \in Q_0$, $X_\alpha = \text{id}_{k^p}$ para $\alpha \neq \alpha_0$ e $X_{\alpha_0} = J(p, 0)$ a matriz de Jordan $p \times p$ com 0 na diagonal. Portanto, $\text{End}(X) = k[x]/(x^n)$ é local e, dessa forma, X é indecomponível para todo $p > 0$.

□

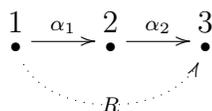
Capítulo 4

Representações de quivers com relações

Demonstraremos aqui o Teorema de Ovsienko, um resultado um pouco mais geral que o Teorema de Gabriel. Ovsienko mostrou em [9] que, quando as relações de um quiver satisfazem algumas condições, temos apenas um número finito classes de isomorfismo de representações indecomponíveis do quiver com relações se, e somente se, uma certa forma quadrática associada ao quiver com relações é fracamente positiva definida.

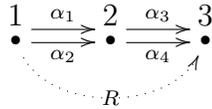
Definimos em 1.17 o que é uma relação em um quiver. Aqui vão alguns exemplos de quivers com relações.

Exemplo 4.1 1. Se Q é o quiver cujo grafo associado é A_3 , onde a flecha α_1 liga os vértices 1 e 2 e α_2 liga 2 e 3,



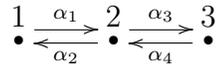
podemos ter a relação $R = \alpha_2\alpha_1$.

2. Dado o quiver Q com uma relação $R = \lambda_1\alpha_3\alpha_1 - \lambda_2\alpha_4\alpha_2$, onde $\lambda_1, \lambda_2 \in k$



uma representação V de Q satisfaz as relações quando $\lambda_1 V_{\alpha_3} V_{\alpha_1}(v) = \lambda_2 V_{\alpha_4} V_{\alpha_2}(v)$ para todo $v \in V_1$.

3. No quiver seguinte



podemos ter, por exemplo, a relação $R = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4$.

Dado um caminho $p = \alpha_1 \dots \alpha_k$, diremos que um vértice i é um vértice de p quando $i = t(\alpha_j)$ ou $i = h(\alpha_j)$ para algum $j \in \{1, \dots, k\}$. Dois caminhos p e q de um quiver Q não tem vértices em comum quando não existe um vértice que pertença simultaneamente a p e q .

O resultado de Ovsienko impõe algumas restrições sobre as relações. As condições de Ovsienko são:

- o quiver não possui ciclos.
- só são permitidas relações que são caminhos orientados;
- relações distintas não têm vértices comuns.

Em 4.1, o segundo exemplo não satisfaz a segunda condição de Ovsienko e o terceiro exemplo não satisfaz a primeira e a segunda. O primeiro exemplo satisfaz as três condições de Ovsienko.

Denotaremos por $\Psi = \Psi_Q$ o conjunto de todas as relações do quiver Q e pelo par (Q, Ψ) o quiver Q com relações Ψ .

Para quivers com relações podemos definir a forma quadrática

$$F_\Psi(\vec{x}) = \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{t(\alpha)} x_{h(\alpha)} + \sum_{R \in \Psi} x_{t(R)} x_{h(R)}$$

e a forma bilinear $\langle -, - \rangle_\Psi$ obtida de F_Ψ por identidade de polarização. A forma F_Ψ é a *forma de Brenner* do quiver Q com relações Ψ .

Mostraremos o seguinte resultado nas condições de Ovsienko.

Teorema 4.2 (Ovsienko) *Seja (Q, Ψ) um quiver com relações que satisfaz as condições de Ovsienko. Então F_Ψ é fracamente positiva definida se, e somente se, (Q, Ψ) é de tipo finito.*

Supondo que (Q, Ψ) é de tipo finito:

1. *Se V é uma representação indecomponível de Q que satisfaz as relações Ψ e $\vec{x} = \dim V$, então $F_\Psi(\vec{x})=1$;*
2. *$\forall \vec{x} > 0$ tal que $F_\Psi(\vec{x}) = 1$ existe única representação indecomponível V tal que $\dim V = \vec{x}$.*

Definição 4.3 *Seja Q um quiver sem ciclos orientados. Um conjunto de flechas $L = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é um N^i -caminho quando L fica orientado depois de mudar a orientação da flecha α_i .*

Exemplo 4.4 Temos que $L = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é um N^2 -caminho

$$\bullet \xrightarrow{\alpha_1} \bullet \xleftarrow{\alpha_2} \bullet \xrightarrow{\alpha_3} \bullet$$

Dizemos que L é um N -caminho quando é irrelevante o número da flecha que, ao mudarmos sua orientação, torna L um caminho.

Definição 4.5 Sejam Q um quiver e L um N^i -caminho em Q . Duas representações $V = (V_i, f_\alpha)$ e $V' = (V'_i, f'_\alpha)$, onde $i \in Q_0$ e $\alpha \in Q_1$ são D -equivalentes se para cada $j \in Q_0$ existe isomorfismo

$$\varphi_j : V_j \rightarrow V'_j,$$

vale $\varphi_{h(\alpha)} f_\alpha = f'_\alpha \varphi_{t(\alpha)}$ para todo $\alpha \neq \alpha_i$ e

$$f'_{\alpha_i} \varphi_{t(\alpha_i)} = \varphi_{h(\alpha_i)} (f_{\alpha_i} + f_{\alpha_{i-1}} \cdots f_{\alpha_1} x f_{\alpha_n} \cdots f_{\alpha_{i+1}})$$

onde $x : V_{h(\alpha_n)} \rightarrow V_{t(\alpha_1)}$ é uma transformação linear.

Exemplo 4.6 As representações V e V'

$$\begin{array}{ccccccc} k & \xrightarrow{\text{id}} & k & \xleftarrow{\text{id}} & k & \xrightarrow{\text{id}} & k \\ \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ & & \text{---} & & \text{---} & & \nearrow \\ & & & & L & & \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccccccc} k & \xrightarrow{\text{id}} & k & \xleftarrow{0} & k & \xrightarrow{\text{id}} & k \\ \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ & & \text{---} & & \text{---} & & \nearrow \\ & & & & L & & \end{array}$$

com o N^2 -caminho $L = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ são D -equivalentes. Para ver isso, basta tomar a transformação linear $X : V_4 \rightarrow V_1$ dada por $X(v) = -v$.

Temos que isomorfismo implica em D -equivalência. Basta tomar X sendo a transformação nula e a φ que faz o isomorfismo. O exemplo anterior mostra que o contrário não vale.

Podemos definir D -equivalência para vários caminhos em Q simultaneamente.

Suponhamos que Q tem conjunto de caminhos designados sem vértices comuns

$$\Psi = \underbrace{(L_1, \dots, L_k)}_{\text{orientados}}, \overbrace{(\tilde{L}_{k+1}, \dots, \tilde{L}_n)}^{N\text{-caminhos}}. \quad (4.1)$$

Definição 4.7 *Uma representação de Q com respeito a Ψ , onde Ψ é como na expressão 4.1, é decomponível se na sua classe de D -equivalência existe um representante decomponível como representação usual de Q .*

A representação é indecomponível quando não é decomponível.

Quando todos os caminhos designados são orientados, temos que D -equivalência é o mesmo que isomorfismo. Este é o caso de quivers com relações.

O quiver Q com respeito aos caminhos designados Ψ , onde Ψ é como a expressão 4.1, é dito de *tipo finito* se tem número finito de classes de D -equivalência de representações indecomponíveis.

4.1 Funtor Reflexivo para Quivers com caminhos designados

4.1.1 $i \in Q_0$ não pertence a nenhum caminho designado:

Seja (Q, Ψ) um quiver com caminhos designados. Supondo que o vértice $i \in Q_0$ não pertence a Ψ , isto é, nenhum dos caminhos designados passam por i , se i é um sumidouro definimos o *funtor reflexivo*

$$S_i^+ : \text{Rep } Q \rightarrow \text{Rep } \sigma_i Q$$

da mesma forma que foi definido em 3.4.

Se $i \notin \Psi$ é uma fonte, definimos S_i^- igualmente.

Claramente, para os vértices que não pertencem a Ψ valem os Lemas 3.5, 3.6 e 3.7.

4.1.2 $i \in Q_0$ é um sumidouro e pertence a um caminho orientado:

Seja Q um quiver com $L(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ caminho designado que é orientado. Denotamos $a_0 = t(\alpha_1)$ e $a_i = h(\alpha_i)$, $i = 1, \dots, n$. O único desses pontos que pode ser um sumidouro é a_n . Consideramos este caso.

Sejam $k_1, \dots, k_t, \alpha_n$ todas as flechas que chegam em a_n e $V = (V_i, f_\alpha)$ com $i \in Q_0$ e $\alpha \in Q_1$ uma representação de Q que satisfaz a relação L .

Então, $f_{\alpha_n}(\text{Im } f_{\alpha_{n-1}} \dots f_1) = 0$ e podemos definir

$$\bar{f}_{\alpha_n} : \bar{V}_{a_{n-1}} = V_{a_{n-1}} / \text{Im}(f_{\alpha_{n-1}} \dots f_1) \rightarrow V_{a_n}.$$

Seja

$$f : \bigoplus_{j=1}^t V_{t(k_j)} \oplus \bar{V}_{a_{n-1}} \rightarrow V_{a_n}$$

dada por $f(x_1, \dots, x_t, y) = f_{k_1}(x_1) + \dots + f_{k_t}(x_t) + \bar{f}_{\alpha_n}(y)$.

Agora, definimos $S_{a_n}^+(V)_i = V_i$ para $i \neq a_n$, $S_{a_n}^+(V)_{a_n} = \ker f$ e $S_{a_n}^+(f_{k_j}) : S_{a_n}^+(V)_{a_n} \rightarrow V_{tk_j}$ dada pela projeção na coordenada $t(k_j)$.

Definimos $g_{\alpha_n} = S_{a_n}^+(f_{\alpha_n})$ tal que ρg é a projeção de $\ker f$ em $\bar{V}_{a_{n-1}}$, onde ρ é a projeção no quociente $V_{a_{n-1}}/\text{Im}(f_{\alpha_{n-1}} \dots f_1)$ e para os demais vértices $S_{a_n}^+(f_\alpha) = f_\alpha$.

É claro que g_{α_n} não está unicamente definido. Mas g'_{α_n} é uma outra escolha se, e somente se, $\rho(g_{\alpha_n} - g'_{\alpha_n}) = 0$. Assim, $\text{Im}(g_{\alpha_n} - g'_{\alpha_n}) \subset \text{Im } f_{\alpha_{n-1}} \dots f_{\alpha_1}$ e existe $x : S_{a_n}^+ \rightarrow V_{\alpha_1}$ tal que $g'_{\alpha_n} = g_{\alpha_n} + f_{\alpha_{n-1}} \dots f_{\alpha_1} x$. Ou seja, diferentes escolhas para $g_{\alpha_n} = S_{a_n}^+(f_{\alpha_n})$ levam a representações que são D -equivalentes.

Assim, temos a representação $U = S_{a_n}^+(V)$ do quiver $\sigma_{a_n} Q$ com respeito ao N -caminho $\tilde{L} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \sigma_{a_n} \alpha_n)$ e agora o vértice a_n é uma fonte.

4.1.3 $a_n \in Q_0$ é uma fonte e pertence a um N^n -caminho:

Vamos construir $S_{a_n}^-$. Sejam agora Q um quiver, L um N^n -caminho, V uma representação de Q com respeito a L e Q' o subquiver que contém o vértice a_n , todas as flechas que são ligadas à a_n e seus respectivos pontos de chegada.

Seja $W = (W_i, h_\alpha)$ a representação de Q' com $W_j = U_j$ para $j \neq a_{n-1}$, $W_{n-1} = V_{n-1}/\text{Im}(f_{\alpha_{n-1}} \dots f_{\alpha_1})$, $h_\alpha = g_\alpha$ para $\alpha \neq \alpha_n$ e $h_{\alpha_n} = \rho g_{\alpha_n}$.

Aplicamos o funtor reflexivo $S_{a_n}^-$ como definido no capítulo anterior na representação W do quiver Q' e obtemos a representação $W' = (W'_i, h'_\alpha) = S_{a_n}^-(W)$ de $\sigma_{a_n} Q$.

Definimos então a representação $X = (X_i, l_\alpha) = S_{a_n}^-(V)$ dada por $X_{a_n} = W_{a_n}$, $X_i = U_i$ para todo $i \neq a_n$, $l_\alpha = g_\alpha$ para as flechas α que não se ligam ao vértice a_n , $l_{\alpha_n} = h'_{\alpha_n} \rho$ e $l_\alpha = h'_\alpha$ para os demais vértices que se ligam a a_n .

Claramente, X é representação de Q com respeito à relação L .

Seja agora Q um quiver e $\tilde{L} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ um N^n -caminho. Então o vértice a_{n-1} é um sumidouro. Definimos $S_{a_{n-1}}^+$ da mesma forma que para quivers sem relações.

Precisamos verificar que se V e V' são representações D -equivalentes então $S_{a_{n-1}}^+(V) \cong_D S_{a_{n-1}}^+(V')$.

Sejam $k_1, \dots, k_t, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ todas as flechas que terminam em a_{n-1} . Elas correspondem em V às aplicações $f_{k_1}, \dots, f_{k_t}, f_{\alpha_{n-1}}, f_{\alpha_n}$. Então, $S_{a_{n-1}}^+(V)_{a_{n-1}}$ é o conjunto solução da equação

$$\sum_{i=1}^t f_{k_i}(x_i) + f_{\alpha_{n-1}}(y) + g_{\alpha_n}(x) = 0$$

onde $(x_1, \dots, x_t, y, x) \in V_{t(k_1)} \oplus \dots \oplus V_{t(k_t)} \oplus V_{a_{n-2}} \oplus V_{a_n}$.

Na representação V' , o sistema terá a seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^t f_{k_i}(x_i) + f_{\alpha_{n-1}}(y) + g'_{\alpha_n}(x) = 0$$

onde $g' = g + f_{\alpha_{n-1}} \dots f_{\alpha_1} X$ e $X : V_{a_n} \rightarrow V_{a_0}$.

Reescrevendo esta última equação, temos

$$\sum_{i=1}^t f_{k_i}(x_i) + f_{\alpha_{n-1}}(y + f_{\alpha_{n-2}} \dots f_{\alpha_1} X(x)) + g_{\alpha_n}(x) = 0.$$

Logo, os espaços de soluções de ambos os sistemas são isomorfos e o isomorfismo é dado por

$$\varphi : (x_1, \dots, x_t, y, x) \mapsto (x_1, \dots, x_t, y + f_{\alpha_{n-2}} \dots f_{\alpha_1} X(x), x).$$

As funções $h_{k_i} = S_{\alpha_{n-1}}^+(f_{k_i}), i = 1, \dots, t$ e $h(\alpha_n) = S_{\alpha_{n-1}}^+(g_{\alpha_n})$ não são diferentes quando se aplicar o funtor $S_{\alpha_{n-1}}^+$ em V ou V' .

Porém, a função $h_{\alpha_{n-1}} = S_{\alpha_{n-1}}^+(g_{\alpha_{n-1}}) : (x_1, \dots, x_t, y, x) \mapsto y$ vai mudar.

Denotamos $u = (x_1, \dots, x_t, y, x)$. Assim, $h_{\alpha_n}(u) = x$.

Temos:

$$\begin{aligned}
 g'_{\alpha_{n-1}}(u) &= g_{\alpha_{n-1}}\varphi^{-1}(u) \\
 &= g_{\alpha_{n-1}}(x_1, \dots, x_t, y - f_{\alpha_{n-2}} \dots f_{\alpha_1} X(x), x) \\
 &= y - f_{\alpha_{n-2}} \dots f_{\alpha_1} X(x) \\
 &= g_{\alpha_{n-1}}(u) - f_{\alpha_{n-2}} \dots f_{\alpha_1} X f_{\alpha_n}(u) \\
 &= (g_{\alpha_{n-1}} - f_{\alpha_{n-2}} \dots f_{\alpha_1} X f_{\alpha_n})(u).
 \end{aligned}$$

Portanto, $S_{\alpha_{n-1}}^+(V) \cong_D S_{\alpha_{n-1}}^+(V')$. Analogamente, construímos $S_{\alpha_i}^+$ e $S_{\alpha_i}^-$ para $i \neq 0$.

4.1.4 $a_0 \in Q_0$ é um sumidouro e pertence a um N^1 -caminho:

Suponhamos que $a_0 \in L$, onde L é N^1 -caminho e a_0 é um sumidouro. Construiremos $S_{a_0}^+$ para este caso.

Se $V \cong_D V'$, então $g'_{\alpha_1} = g_{\alpha_1} + X f_{\alpha_n} \dots f_{\alpha_2}$ e portanto, g_{α_1} e g'_{α_2} coincidem em $\ker f_{\alpha_n} \dots f_{\alpha_2}$.

$$V : \quad \dots \longrightarrow V_{a_0} \xleftarrow{g_{\alpha_1}} V_{a_1} \xrightarrow{f_{\alpha_2}} \dots \xrightarrow{f_{\alpha_n}} V_{a_n}$$

$$V' : \quad \cdots \longrightarrow V'_{a_0} \xleftarrow{g'_{\alpha_1}} V'_{a_1} \xrightarrow{f'_{\alpha_2}} \cdots \xrightarrow{f'_{\alpha_n}} V'_{a_n}$$

Aplicamos $S_{a_0}^+$ como foi indicado para quivers sem caminhos designados, considerando no lugar de g_{α_1} (ou g'_{α_1}) sua restrição ao $\ker f_{\alpha_n} \cdots f_{\alpha_2}$.

Obtemos assim $h_{\alpha_1} : S_{a_0}^+(V)_{a_0} \rightarrow \ker f_{\alpha_n} \cdots f_{\alpha_2}$, que define unicamente

$$f_{\alpha_1} : S_{a_0}^+(V)_{a_0} \rightarrow V_{a_1}$$

pois $\ker f_{\alpha_n} \cdots f_{\alpha_2} \subset V_{a_1}$.

Claramente, $f_{\alpha_n} \cdots f_{\alpha_1} = 0$ e concluímos que o caminho L , que agora é orientado, satisfaz as condições de Ovsienko.

Vamos agora construir $S_{a_0}^-$ para o caso em que L é um caminho orientado. Como $f_{\alpha_n} \cdots f_{\alpha_1} = 0$, temos $\text{Im } f_{\alpha_1} \subset \ker f_{\alpha_n} \cdots f_{\alpha_2}$. Portanto, podemos considerar

$$\bar{f}_{\alpha_1} : V_{a_0} \rightarrow \ker f_{\alpha_n} \cdots f_{\alpha_2}$$

no lugar de f_{α_1} . Após esta mudança, aplicamos $S_{a_0}^-$ como em quivers sem caminhos designados.

Obtemos $\bar{g}_{\alpha_1} : \ker f_{\alpha_n} \cdots f_{\alpha_2} \rightarrow S_{a_0}^-(V)_{a_0}$ e estendemos a

$$g_{\alpha_1} : V_{a_1} \rightarrow S_{a_0}^-(V)_{a_0}$$

com $g_{\alpha_1} = \bar{g}_{\alpha_1} \rho$, onde $\rho : V_{a_1} \rightarrow \ker f_{\alpha_n} \cdots f_{\alpha_2}$ é projeção.

Note que g_{α_1} não está unicamente determinada mas qualquer outra escolha nos dá uma representação D -equivalente à obtida.

4.2 Demonstração do Teorema de Ovsienko

Lema 4.8 a) *Seja V uma representação indecomponível do quiver Q com m caminhos designados, b um sumidouro (a uma fonte) e $V \not\cong S(b)$ ($V \not\cong S(a)$). Então $S_b^- S_b^+(V) \cong_D V$ ($S_a^+ S_a^-(V) \cong_D V$);*

b) *Nas mesmas condições, $S_a^-(V)$ e $S_b^+(V)$ são indecomponíveis;*

c) *Se além disso a forma F_Ψ é fracamente positiva definida e $V_b \neq 0$, então*

$$\dim S_b^+(V) = \dim V - 2 \frac{\langle \dim V, e_b \rangle}{\langle e_b, e_b \rangle} e_b$$

onde $e_b = \dim S(b)$ e $\langle -, - \rangle$ é a forma bilinear simétrica associada à F_Ψ .

Prova:

a) Análogo ao Lema 3.7.

b) segue de a) e de que

$$S_a^-(V_1 \oplus V_2) = S_a^-(V_1) \oplus S_a^-(V_2)$$

e

$$S_b^+(V_1 \oplus V_2) = S_b^+(V_1) \oplus S_b^+(V_2)$$

como soma direta de classes de D -equivalência.

c) Quando b não é ponto inicial ou final de um dos caminhos designados, temos que c) é equivalente à igualdade

$$\dim S_b^+(V)_b = \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ h(\alpha)=b}} \dim V_{t(\alpha)} - \dim V_b$$

que é óbvia depois de observar que V não tem somandos diretos da forma $S(b)$.

Quando b é ponto inicial ou final de um caminho L , o item **c)** é equivalente a

$$\dim S_{a_0}^+(V)_{a_0} = \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ h(\alpha) = a_n}} \dim V_{t(\alpha)} - \dim V_{a_0} - \dim V_{a_n}$$

para $b = a_0$ ponto inicial e

$$\dim S_{a_n}^+(V)_{a_n} = \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ h(\alpha) = a_n}} \dim V_{t(\alpha)} - \dim V_{a_n} - \dim V_{a_0}$$

para $b = a_n$ ponto final de L . Para mostrar este fato vamos precisar de alguns Lemas.

Lema 4.9 *Se o quiver Q com m caminhos designados tem tipo finito, então F_Ψ é fracamente positiva definida.*

Prova: Seja Ψ o conjunto dos caminhos designados, entre os quais Ψ' são caminhos orientados e Ψ'' são N -caminhos. Seja também $\vec{x} \in \mathbb{N}^{|Q_0|}$ um vetor não nulo.

Fixando uma base para cada V_i , $i \in Q_0$ uma representação de Q é descrita por matrizes $(x_{t(\alpha)} \times x_{h(\alpha)})$ para cada $\alpha \in Q_1$.

No espaço afim dos coeficientes destas matrizes considere a variedade P_c cujos pontos correspondem às representações que satisfazem as relações Ψ' .

Então, P_c está definida por $\sum_{L \in \Psi'} x_{t(L)} x_{h(L)}$ equações.

$$\text{Portanto, } \dim P_c \geq \sum_{\alpha \in Q_1} x_{t(\alpha)} x_{h(\alpha)} - \sum_{L \in \Psi'} x_{t(L)} x_{h(L)}.$$

O grupo G das mudanças de base nos $V_{i's}$ unido com as trocas por D -equivalência com respeito a cada um dos $L \in \Psi''$ age na variedade P_c e as representações de Q coincidem com as órbitas de G .

Se Q tem tipo finito, então o número de órbitas com relação a ação de G em P_c é finito e, assim, temos que $\dim P_c/G = 0$, ou seja, $\dim G \geq \dim P_c$.

O subgrupo de G , que consiste na mudança da base pela multiplicação de um escalar λ

$$B \mapsto \lambda B$$

onde λ é um escalar fixo, age trivialmente em P_c . Logo, $\dim G - \dim P_c \geq 1$, isto é:

$$\begin{aligned} 1 &\leq \underbrace{\sum_{i \in Q_0} x_i^2 + \sum_{L \in \Psi''} x_{t(L)} x_{h(L)}}_{=\dim G} - \underbrace{\left(\sum_{\alpha \in Q_1} x_{t(\alpha)} x_{h(\alpha)} - \sum_{L \in \Psi'} x_{t(L)} x_{h(L)} \right)}_{\leq \dim P_c} = \\ &= \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{t(\alpha)} x_{h(\alpha)} + \sum_{L \in \Psi} x_{t(L)} x_{h(L)} = F_{\Psi}(\vec{x}) \end{aligned}$$

para qualquer \vec{x} possível vetor dimensão não nulo.

Portanto, F_c é fracamente positiva definida.

□

O teorema 4.2 é demonstrado em uma condição um pouco mais geral que a enunciada. Na verdade, é mostrado para um número m qualquer de caminhos designados, e não apenas para relações. Caso $m = 0$, temos o teorema de Gabriel, que foi demonstrado no capítulo anterior.

A prova segue por indução. Supomos então que o Teorema 4.2 e o Lema 4.8 valem para $m - 1$ caminhos designados. Vamos mostrar que valem para m -caminhos designados.

Lema 4.10 *Seja Q um quiver de tipo finito com k caminhos designados ($k < m$) e $\vec{x} = \dim V$ vetor dimensão de alguma representação fixada.*

Suponhando que exista \mathcal{O} órbita de uma representação indecomponível. Então, $\dim \mathcal{O} = \dim P_c$.

Prova: Pelo Lema 4.9 temos que $P_c = \cup_{i=1}^t \mathcal{O}_i$ é união finita de órbitas. Logo, existe j tal que $\dim \mathcal{O}_j = \dim P_c$.

Pela hipótese de indução $F_\Psi(\vec{x}) = 1$, temos novamente pelo Lema 4.9 que

$$1 = F_\Psi(\vec{x}) \geq \dim G - \dim P_c = \dim G - \dim \mathcal{O}_j = \dim \mathcal{S}_j$$

onde \mathcal{S} é estabilizador de ponto na órbita \mathcal{O} .

Se \mathcal{O}_j é órbita de representação decomponível, então $\dim \mathcal{S}_j \geq 2$.

Assim, \mathcal{O}_j é órbita de representação indecomponível, e pela hipótese de indução, existe apenas uma classe de D -equivalência de representação indecomponível. Portanto, $\mathcal{O}_j = \mathcal{O}$.

□

Lema 4.11 *Seja Q um quiver de tipo finito com k caminhos designados ($k < m$), V uma representação indecomponível de Q e $L = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sem vértices comuns com caminhos designados. Então, o espaço vetorial V_t , $t \in Q_0$ com menor dimensão entre $V_{t(\alpha_i)} V_{h(\alpha_i)}$ fica em uma extremidade do caminho L .*

Prova: Se $\vec{x} = \dim V$, então pela hipótese de indução $F_\Psi(\vec{x}) = 1$. Seja $x_m = \dim V_m$ onde $m \in Q_0$ está no caminho L , x_1, x_2 dimensão dos espaços associados aos pontos vizinhos a m em L e supomos $x < x_1, x_2$.

Seja \vec{y} vetor tal que na coordenada m temos $y_m = x_m + 1$ e as demais coordenadas são iguais a \vec{x} . Então,

$$\begin{aligned} F_{\Psi}(\vec{x}) - F_{\Psi}(\vec{y}) &\geq +x^2 + (x+1)x_1 + (x+1)x_2 - (x+1)^2 - xx_1 - xx_2 = \\ &= x_1 + x_2 - (2x+1) \geq 1. \end{aligned}$$

Assim, temos $F_{\Psi}(\vec{y}) \leq 0$ que contradiz o fato de F_{Ψ} ser fracamente positiva definida.

□

Lema 4.12 *Seja Q um quiver com k caminhos designados ($k < m$) de tipo finito e V uma representação indecomponível de Q . Seja $L = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ caminho orientado sem vértices comuns com caminhos designados. Então, $V_{\alpha_n} \dots V_{\alpha_1}$ é ou epimorfismo ou monomorfismo.*

Prova: O Posto de $f_{\alpha_n} \dots f_{\alpha_1}$ é igual a menor dimensão de espaços neste caminho (pois $\dim \mathcal{O}_V = \dim P_c$). Portanto, o resultado segue do Lema anterior.

□

Uma representação $V = (V_i, \phi_{\alpha})$ é dita *fiel* quando $V_i \neq 0$ para todo $i \in Q_0$.

Lema 4.13 *Seja Q um quiver com m caminhos designados de tipo finito, V uma representação indecomponível fiel de Q , $L = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ um dos caminhos designados e supomos F_c fracamente positiva definida.*

- a) Se L é caminho orientado, então $V_{\alpha_{n-1}} \dots V_{\alpha_1}$ é monomorfismo.
- b) Se L é um N -caminho, então $V_{\alpha_n} \dots V_{\alpha_2}$ é epimorfismo.

Prova:

- a) Sejam Q' o quiver conexo obtido de Q tirando a flecha α_n que contem $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ e $V' = V|_{Q'}$. Então, V' é representação de Q' com k ($k < m$) caminhos designados.

Seja $V' = V'_1 \oplus \dots \oplus V'_t$ decomposição em representações indecomponíveis. Então, pelo Lema 4.11, $f_{\alpha_{n-1}} \dots f_{\alpha_1}|_{V'_i}$ é epimorfismo ou monomorfismo. Suponhamos que seja epimorfismo.

Como $f_{\alpha_n}(\text{Im } f_{\alpha_{n-1}} \dots f_{\alpha_1}) = 0$, temos que V'_i vista como representação de Q é somando direto da representação V , pois satisfaz a relação L . Logo, $V = V'_i$ e ou $V_{t(L)} = 0$ ou $V_{h(L)} = 0$. Contradição, pois V é fiel.

- b) Sejam agora Q' o quiver conexo obtido de Q tirando a flecha α_1 que contém $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ e $V' = V|_{Q'}$ e supondo $V' = V'_1 \oplus \dots \oplus V'_t$ decomposição de V' em soma direta de indecomponíveis.

Caso $f_{\alpha_n} \dots f_{\alpha_2}|_{V'_i}$ seja injetiva, usando

$$f'_{\alpha_1} = f_{\alpha_1} + X f_{\alpha_n} \dots f_{\alpha_2}$$

podemos garantir que $f_{\alpha_1}|_{V'_i} = 0$ e a representação V'_i é parcela direta de V .

Desta forma, um dos espaços V_i com $i \in L$ é nulo e novamente temos uma contradição.

□

Agora terminaremos a demonstração do item **c)** do Lema 4.8 para representações com m caminhos designados.

Se a_n é ponto final da relação L , então

$$\dim \text{Im}(f_{n-1} \dots f_1) = \dim V_{a_0} = x_{a_0}$$

pelo item **a)** do Lema 4.13.

Assim, $S_{a_n}^+(V)_{a_n} = \text{Ker } f$ onde

$$f : \left(\bigoplus_{j=1}^t V_{t(k_j)} \right) \oplus \bar{V}_{a_{n-1}} \rightarrow V_{a_n}.$$

Como $V \neq S(a_n)$, temos que f é sobrejetiva. Portanto,

$$\dim S_{a_n}^+(V)_{a_n} = \sum_{j=1}^t x_{t(k_j)} + x_{a_{n-1}} - x_{a_0} - x_{a_n}$$

e vale o afirmado.

A outra igualdade segue do Lema 4.13**b)**.

□

Uma vez que o quiver não possui ciclos, podemos dar aos vértices uma ordem admissível, assim como feito em 3.1.

Seja i_1, \dots, i_N uma ordem admissível para os vértices do quiver Q com caminhos designados Ψ . Definimos o *functor de Coxeter* como a correspondência $C : V \mapsto S_N^+ \dots S_1^+(V)$.

Para representações de quivers com m caminhos designados, temos que:

- a) para qualquer sumidouro $i \in Q_0$ (fonte) existe S_i^+ (S_i^- respectivamente) e também a composta $C^+ = S_N^+ \dots S_1^+(V)$ ($C^- = S_1^-(V) \dots S_N^-$) onde i_1, \dots, i_N é uma ordem admissível;
- b) quando F_Ψ é fracamente positiva definida e V representação indecomponível de Q diferente de $S(i)$, temos

$$\dim S_i^-(V) = \vec{x} - 2 \frac{\langle \vec{x}, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i$$

caso i seja uma fonte, e

$$\dim S_i^+(V) = \vec{x} - 2 \frac{\langle \vec{x}, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i$$

caso i seja um sumidouro, onde $\vec{x} = \dim V$, $e_i = \dim S(i)$ e $\langle -, - \rangle$ é a forma bilinear associada a F_Ψ e $V_i \neq 0$.

Definição 4.14 *Seja Q um quiver com relações Ψ . Um vetor \vec{x} é raiz de F_Ψ se x_i é inteiro positivo para todo $i \in Q_0$ e $F(\vec{x}) = 1$.*

Podemos definir naturalmente

$$\sigma_i(\vec{x}) = \vec{x} - 2 \frac{\langle \vec{x}, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i$$

$$C(\vec{x}) = \sigma_{\alpha_N} \dots \sigma_{\alpha_1}(\vec{x})$$

para vetores $\vec{x} \in \{(x_j)_{j \in Q_0} | x_j \in \mathbb{Q}\}$.

Lema 4.15 *Seja $U = \{(x_j)_{j \in Q_0} | x_j \in \mathbb{Q}\}$ espaço vetorial sobre \mathbb{Q} . Quando F_Ψ é fracamente positiva definida, C não tem vetores não nulos não negativos invariantes. Neste caso, para todo $\vec{c} \in \mathbb{Z}^{|Q_0|}$ positivo existe $h > 0$ tal que $C^h(\vec{c})$ é não positivo.*

O Lema 4.15 é similar ao Lema 3.19.

Prova: (Teorema 4.2)

Pelo Lema 4.9, se (Q, Ψ) é de tipo finito, então F_Ψ é fracamente positiva definida.

A recíproca é mostrada por indução no número m de caminhos designados. Seja T uma representação indecomponível de Q com m caminhos designados e $T_i = 0$ onde i está em algum caminho designado L .

Podemos considerar T como representação de um quiver Q' com menos caminhos designados. Para isso, basta tirar de Q o vértice i e as flechas que chegam ou saem dele.

Pela indução, o vetor $\dim T$ é raiz de $F_{\Psi'}$ e conseqüentemente também é raiz de F_Ψ .

Quando V é representação fiel de Q , existe $h > 0$ tal que $C^h(\dim V)$ não é positivo. Em particular, $C^h(\dim V) \neq \dim(C^{+h}(V))$.

Portanto, após aplicarmos algumas reflexões, obtemos uma representação para a qual não vale o Lema 4.8, isto é, existe subespaço nulo em algum dos caminhos designados. Fixamos o primeiro caso em que isso acontece e tomamos

$$S_{\alpha_k}^+ \dots S_{\alpha_1}^+ C^{+t}(V) = T$$

onde T é tal que $\sigma_{k+1}(\dim T) \neq \dim(S_{k+1}^+ T)$, e $T_i = 0$ para algum i em algum caminho designado L .

Pelo comentário acima, temos que T é representação indecomponível do quiver $\sigma_k \dots \sigma_1 Q$ e $\dim T$ é raiz de F_Ψ . Isto implica

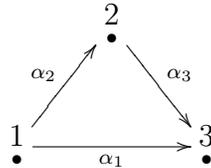
$$\sigma_k \dots \sigma_1 C^t(\dim V) = \dim T$$

e $\dim V = C^t \sigma_1 \dots \sigma_k(\dim T)$.

Agora, observando que: se $\vec{x} = \dim V$ é raiz e $\sigma_j(\vec{x})$ é positivo, então $\sigma_j(\vec{x})$ é raiz. Concluimos que $\dim V$ é raiz.

Pela indução T é a única representação indecomponível com dimensão $\dim T$. Portanto, usando o item **a)** do Lema 4.8, $V = C^{-t}S_1^- \dots S_1^-(T)$ é única representação indecomponível, a menos de D -equivalência, com dimensão $\dim V$, e o teorema 4.2 está demonstrado. □

Exemplo 4.16 *Seja Q o quiver*



com a relação $R = \alpha_3\alpha_2$. Este quiver tem a forma de Brenner dada por

$$F_{\Psi}(\vec{x}) = \vec{x} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}^t,$$

que é igual à forma de Cartan do quiver

$$\bullet \xrightarrow{\alpha_1} \bullet \xrightarrow{\alpha_2} \bullet.$$

Assim, o quiver Q com a relação R tem tipo finito, uma vez que a forma de Brenner é sabidamente fracamente positiva definida.

Em [13] Zavadskij mostrou que, nas condições de Ovsienko, um quiver é de tipo manso se, e somente se, a forma de Brenner é positiva semidefinida.

Notamos que a definição da forma de Brenner não exige as condições de Ovsienko e, motivados pelo Teorema de Gabriel, Teorema de Ovsienko e o Teorema de Zavadskii, poderíamos conjecturar o seguinte: *O quiver Q com relações Ψ é de tipo finito se, e somente se, F_Ψ é fracamente positiva definida.*

Quando tomamos por hipótese que as relações Ψ satisfazem as condições de Ovsienko a conjectura é verdadeira (por [13] e [9]). Entretanto, no caso geral, a conjectura não é verdadeira.

Exemplo 4.17 *Considere o quiver*

$$1 \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 2 \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{\gamma} \\ \xleftarrow{\delta} \end{array} 3 \bullet$$

com relações

$$\Psi = \{R_1 = \delta\gamma\alpha, R_2 = \delta\beta\alpha\}.$$

Temos que a forma de Brenner de (Q, Ψ) é igual à forma de Cartan do quiver

$$\underset{\bullet}{1} \xrightarrow{\alpha_1} \underset{\bullet}{2} \xrightarrow{\alpha_2} \underset{\bullet}{3}$$

e, portanto, é fracamente positiva definida.

Entretanto, se tomarmos qualquer representação V deste quiver com $\phi_\alpha = 0$, teremos que V satisfaz as relações R_1 e R_2 .

Assim, o quiver com relações (V, Ψ) não é de tipo finito, uma vez que podemos tomar qualquer representação do subquiver

$$\bullet_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\gamma} \\ \xleftarrow{\delta} \end{array} \bullet_3$$

que é de tipo manso de representação.

Portanto, conseguimos um quiver que tem a forma de Brener F_{Ψ} fracamente positiva definida mas não é de tipo finito.

Referências Bibliográficas

- [1] I. Assem, D. Simson, A. Skowronski. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, vol. 1: Techniques of Representation Theory*. Torun (2003)
- [2] Yu. A. Drozd, V. V. Kirichenko. *Finite Dimensional Algebras*. Springer - Verlag, 1994.
- [3] S.I. Gelfand, Yu. I. Manin. *Methods of homological algebra*. Second edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 1997.
- [4] A. Jones, H. Merklen. *Representações de Álgebras : Métodos Diagramáticos*. Publicações do IME-USP, São Paulo, 1984.
- [5] V. G. Kac, *Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory*. Inventiones Math. 56 (1980), no.1, 57-92.
- [6] V. G. Kac, *Root systems, representations of quivers and invariant theory*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 996. Invariant Theory (Montecatini, 1982), Springer, Berlin, 1983, 74-108.
- [7] V. G. Kac, *Some remarks on representations of quivers and infinite root systems*. Lecture Notes in Math. 832 (1980), 311-327.

- [8] H. Krause. *Representation of quivers via reflection functors*. Paderborn (2007)
- [9] S. A. Ovsienko *Representations of quiver with relations*. Matrix problems, IM AN USSR, Kiev, 1977, 88-103.
- [10] J. A. de la Peña. *Integral quadratic forms and the representation type of an algebra*. Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2006.
- [11] D. M. Prata. *Representações Torcidas de Quivers*. Dissert. Mestr. IMECC-UNICAMP (2008).
- [12] A. Savage. *Finite-dimensional algebras and quivers*. Encyclopedia of Mathematical Physics. Volume 2, pages 313-320. Edited by J.-P. Francoise, G.L. Naber and Tsou S.T. Oxford: Elsevier, 2006.
- [13] A. G. Zavadskij. *Quivers without cycles and with an isolated path of tame type*. Institute Mathematical Academy of Science, Ukraine, SSR, Kiev, 1978, pp. 42-56.