Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
Departamento de Matemática.

O Método do Referencial Móvel Via Exemplos

Autora: Ana Cláudia da Silva Moreira[1]
Mestrado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Durán Fernández

2009

[1]Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES.

O Método do Referencial Móvel via Exemplos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Ana Cláudia da Silva Moreira e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 03 de abril de 2009.

....

Prof. Dr. Carlos Eduardo Durán Fernández

Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Carlos E. Durán Fernández

Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Jr.

Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, IMECC, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Miriam Cristina Alves - CRB8/5094

Moreira, Ana Claudia da Silva
M813m O método do referencial móvel via exemplos / Ana Claudia da Silva Moreira -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2009.

Orientador : Carlos Eduardo Durán Fernández

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Geometria diferencial. 2. Invariantes diferenciais. 3. Curvatura. I. Durán, Carlos Eduardo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: The moving frame method through examples.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Differential geometry. 2. Differential invariants. 3. Curvature.

Área de concentração: Geometria.

Titulação: Mestre em Matemática.

Banca examinadora: Prof. Dr. Carlos Eduardo Durán Fernández (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Ruy Tojeiro Figueiredo Júnior (DM-UFSCar)
Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 03/04/2009

Programa de pós-graduação: Mestrado em Matemática.

Dissertação de Mestrado defendida em 03 de abril de 2009 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Carlos Eduardo Durán Fernández

Prof. Dr. Ruy Tojeiro de Figueiredo Júnior

Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros

Este trabalho é dedicado a uma devotada professora de Geometria,
exemplo e inspiração para minha vida:
minha mãe,

Stela Marys da Silva Moreira

In memoriam

Agradecimentos

Sou grata a Deus, que sempre me guiou e levou a bom termo tudo a que me propus desde que cheguei na Unicamp, em 2004.

Não apenas aos que colaboraram para que a conclusão deste trabalho fosse possível, mas a todos aqueles que contribuíram para minha formação e direcionamento na vida acadêmica, deixo meus sinceros agradecimentos.

Gostaria de agradecer, em especial, ao professor Carlos Eduardo Durán Fernández, meu orientador atencioso e grande conselheiro desde 2005 e à professora Sueli Irene Rodrigues Costa, de quem sempre me lembrarei com carinho, pelo precioso apoio que me deu, principalmente no período anterior ao meu ingresso no Programa de Mestrado.

Agradeço ainda aos funcionários da Biblioteca do IMECC, que me prestaram ajuda inestimável com as buscas de artigos e pesquisas bibliográficas e aos da Secretaria de Pós Graduação.

Deixo minha terna gratidão ao meu pai, Benedicto Homero Moreira, que sempre acreditou em mim, apoiou meus projetos e, mesmo com dificuldades, nunca deixou de disponibilizar algum recurso para meu sustento nos primeiros anos de estudos.

Ao meu marido, Robson da Silva, dedicado matemático, por todo o incentivo, pela alegria compartilhada nos momentos felizes e pelo refúgio oferecido nos momentos difíceis, minha mais sincera gratidão e todo o meu amor.

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo estudar o Método do Referencial Móvel de Cartan aplicado a curvas, através de diversos exemplos, desde problemas simples, passando por publicações dos anos 60 e 70 até artigos recentes.

Embora existam teorias gerais para encontrar referenciais de Cartan, optamos por estudar uma forma um pouco mais "artesanal" de construção dos referenciais móveis; a ênfase está na absorção das variadas técnicas e intuições que se adaptam a cada geometria.

Abstract

The aim of this work is to present the Cartan's Moving Frame Method applied to curves, through several examples, starting with simple problems, going through publications of the 60´s, 70´s, and up to recent results.

Although there are general theories for finding Cartan's moving frames, we chose to study a slightly more "handcraft" way of building the required moving frame; the emphasis being on the absorption of the different techniques and intuitive understanding adapted to each geometry.

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar o Método do Referencial Móvel de Cartan, através de exemplos. Cada capítulo do trabalho trata de um desses exemplos, salvo o Capítulo 1 que procura apresentar uma contextualização histórica e introduzir alguns conceitos.

Embora existam teorias bastante gerais sobre a aplicação do Método de Cartan, nossa intenção neste trabalho é entender o processo “artesanal” de construção dos referenciais móveis em cada caso.

Trabalharemos com a aplicação do Método apenas a curvas, evitando assim, ter que considerar problemas sobre condições de integrabilidade.

Os exemplos apresentados são os mais diversos. Estudamos desde o referencial de Frenet-Serret, artigos publicados em 1851, [11] e [19], até artigos recentes.

Os três primeiros exemplos (Capítulos 2, 3 e 4), tomam lugar em espaços vetoriais. Em tais ambientes, seus autores puderam se utilizar, sem constrangimento, do Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt, com pequenas adaptações quando necessárias. O mesmo não acontece nos Capítulos 5 e 6.

Outra diferença a se destacar é que nos primeiros exemplos, concentraremo-nos unicamente em curvas não-parametrizadas, no sentido de que o que realmente importa é o traçado da curva. Nestes casos, supõe-se parametrizações canônicas.

Nos dois últimos exemplos são consideradas também curvas parametrizadas, isto é, casos onde as paramatrizações são dadas e importam.

Começamos a exposição dos exemplos no Capítulo 2, onde temos uma aplicação do Método do Referencial Móvel a um exemplo elementar, bastante conhecido, o de curvas em $\mathbb{R}^3$. Abordamos este problema, inicialmente, da forma como é feita nos cursos elementares de Geometria Diferencial, segundo [7], e em seguida o estudamos sob a ótica de espaços homogêneos, procedimento que não repetimos nos exemplos seguintes.

Para escrevermos o Capítulo 3, estudamos os artigos [13] e [14], da década de 60, para curvas no $\mathbb{R}^n$. Embora seja uma generalização do exemplo anterior, traz uma experiência nova na interpretação dos invariantes geométricos e começa a deixar clara a necessidade de adaptações de um caso para outro no processo de construção de um referencial móvel adequado.

O Capítulo 4 é supreendente. Embora trate de um exemplo que, em geral, não nos é familiar - invariantes simpléticos para curvas - o espaço é vetorial, o que permite a utilização de um Gram-Schmidt adaptado às particularidades do problema. Não é de forma alguma, trivial, mas utiliza-se do processo elementar de ortogonalização em sua solução. O artigo [17] é do recente ano de 2007.

O primeiro artigo que estudamos para esta dissertação é tema do Capítulo 5: o trabalho [10] publicado em 1970, sobre curvas na reta projetiva real. Neste ambiente não temos Gram-Schmidt e torna-se ainda mais interessante o processo de construção do referencial móvel adaptado. Curiosa também é a interpretação dada para os invariantes, tema principal do artigo.

Finalizamos este trabalho estudando a generalização do exemplo anterior segundo [3]. O Capítulo 6 coroa nossos estudos ao aplicar o Método do Referencial Móvel a uma importante classe de curvas na grassmanniana $Gr(n, 2n)$.

Procuramos organizar e redigir este trabalho de forma didática e compreensível a qualquer estudante interessado em ter um primeiro contato com o Método do Referencial Móvel de Cartan, que tenha conhecimentos básicos de Geometria Diferencial, Álgebra Linear, Teoria de Grupos e Equações Diferenciais.

Sumário

Capítulo 1

Preâmbulo

Se o leitor não é dado à contemplação de biografias e notas históricas, pode saltar boa parte deste capítulo. É suficiente ler os cinco últimos parágrafos da Seção 1.1 e toda a Seção 1.3.

Mas, por menos curioso que seja, sempre lhe digo que é interessante saber o que se passou com os homens que têm a história de suas vidas confundidas com a história da construção do conhecimento matemático.[1] A mim, essas histórias sempre motivam e enchem de admiração.

1.1 Geometria à Klein

O desenvolvimento axiomático da Geometria, durante cerca de 300 anos, ficou registrado na obra monumental de Euclides (±330 a.C. a ±270 a.C.), intitulada *Elementos*, constituída de 13 livros (capítulos). Nela estão demonstradas 465 proposições deduzidas de um sistema axiomático em forma didática, cujo único rival em número de traduções é a Bíblia. Tal obra expõe sistematicamente toda

[1]Trechos em itálico da bélissima obra "Memórias Póstumas de Brás Cubas", de Machado de Assis.

a Matemática básica conhecida em seu tempo.

É no Postulado V de Euclides que reside nosso interesse, neste momento:

Postulado das Paralelas: *Dada uma reta l e um ponto P não pertencente a l, existe uma única reta r, passando por P, paralela a l.*

Este Postulado, de maneira alguma, é auto-evidente. Além disso, Euclides não precisou fazer uso dele até alcançar a Proposição I.29 de sua obra. Desta forma, era natural perguntar se este Postulado era realmente necessário e cogitar que, talvez, ele pudesse ser deduzido, como teorema, dos outros nove axiomas e postulados, ou, pelo menos, ser substituído por um equivalente e mais aceitável.

Segundo [8], as tentativas de provar o Postulado das Paralelas como um teorema ocuparam os geômetras por mais de 2000 anos e culminaram em alguns dos desenvolvimentos de maior alcance da matemática moderna.

Foram dadas muitas demonstrações deste Postulado, mais cedo ou tarde, mostrou-se que cada uma delas baseava-se numa suposição tácita equivalente a ele.

A primeira investigação realmente científica do Postulado das Paralelas só foi publicada em 1773 e seu autor foi o jesuíta italiano Girolando Saccheri (1667 - 1733). Neste trabalho, Saccheri aceita as 28 proposições de *Elementos* de Euclides que, como já observamos antes, não necessitam do Postulado das Paralelas para sua demonstração. Com a ajuda desses resultados, ele empreendeu o estudo do quadrilátero $ABCD$, no qual os ângulos A e B são retos e os lados AD e BC são iguais. Traçando-se as diagonais AC e BD e usando teoremas simples de congruência, Saccheri mostrou facilmente, como poderia fazê-lo um aluno de primeiro grau, que os ângulos D e C são iguais. Há então três possibilidades: os ângulos D e C são ambos agudos, retos ou obtusos; a estas possibilidades Saccheri chamou, respectivamente, *Hipótese do Ângulo Agudo, Hipótese do Ângulo Reto* e *Hipótese do Ângulo Obtuso.*

A idéia era provar, por absurdo, ora assumindo a Hipótese do Ângulo Agudo, ora a do Ângulo Obtuso, que valia a Hipótese do Ângulo Reto, o que implicaria, como Saccheri provou, no Postulado das Paralelas. Saccheri chegou facilmente a uma contradição ao assumir a hipótese do ângulo obtuso, mas o mesmo não aconteceu com a hipótese do ângulo agudo. Esta mostrou-se muito mais difícil de ser eliminada.

Saccheri acabou por forçar uma contradição e, com isso, perdeu a melhor parte de seu trabalho. Explico: trinta e três anos após a publicação da obra de Saccheri, o suíço Johan Henrick Lambert escreveu uma investigação semelhante. Lambert observou a semelhança entre a geometria decorrente da Hipótese do Ângulo Obtuso com a geometria esférica, mas suas conclusões com respeito à Hipótese do Ângulo Agudo foram imprecisas e insatisfatórias.

Legendre, eminente analista francês do século XVIII, também trabalhou neste problema e publicou seus esforços nas sucessivas edições de *Éléments de Géométrie*, contribuindo assim para a popularização do problema do Postulado das Paralelas.

Não é de se surpreender que não se tenha encontrado nenhuma contradição sob a Hipótese do Ângulo Agudo, pois hoje se sabe que a geometria desenvolvida a partir de uma coleção de axiomas compreendendo o conjunto básico acrescido da Hipótese do Ângulo Agudo é tão consistente quanto a Geometria Euclidiana desenvolvida a partir do mesmo conjunto básico acrescido da Hipótese do Ângulo Reto. Isto é, *o Postulado das Paralelas é independente dos demais e portanto não pode ser deduzido a partir deles*!

Os primeiros a suspeitarem deste fato foram o alemão Gauss, o húngaro Janos Bolyai (1802-1860) e o russo Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856). Esses homens traduziram as três possibilidades batizadas por Saccheri nas três seguintes situações, respectivamente: por um ponto dado pode-se traçar mais do que uma, exatamente uma ou nenhuma reta paralela à reta dada.

Pela infinitude da reta, eliminaram o terceiro caso (ângulo obtuso) e, suspeitando que sob a primeira hipótese abrigava-se uma geometria consistente, cada um deles, independentemente, levou a termo desenvolvimentos geométricos e trigonométricos amplos baseados nesta hipótese (do ângulo agudo).

É provável que Gauss tenha sido o primeiro a alcançar conclusões penetrantes a respeito da Hipótese do Ângulo Agudo, mas como nunca publicou nada sobre o assunto em toda a sua vida, o mérito da descoberta desta particular geometria não-euclidiana deve ser dividido entre Bolyai e Lobachevsky.

A real independência do Postulado das Paralelas dos demais postulados da Geometria Euclidiana só foi estabelecida inquestionavelmente quando se forneceram demonstrações da consistência da Hipótese do Ângulo Agudo. Estas não demoraram a vir e foram produzidas por Beltrami, Cayley, Klein, Poincaré e outros.

Em 1854, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866) mostrou que, descartando-se a infinitude da reta e admitindo-se simplesmente que a reta seja ilimitada, então com alguns outros pequenos ajustamentos nos demais postulados, pode-se desenvolver uma outra geometria não-euclidiana consistente a partir da Hipótese do Ângulo Obtuso.

Assim, em 1871, havia várias geometrias: euclidiana (ou parabólica), afim, projetiva, inversiva, esférica (de Riemann) e não euclidiana (ou hiperbólica - de Bolay e Lobachevsky). Era necessário organizá-las de uma maneira mais simples. Foi então que Klein apresentou seu Programa de Erlangen, onde propôs uma elegante solução ao problema de classificar e caracterizar geometrias sobre a base da Geometria Projetiva e Teoria de Grupos. Suas propostas eram muito inovadoras para seu tempo.

Klein estabeleceu relações entre as várias geometrias e definiu Geometria como *o estudo das propriedades de um conjunto $\mathcal{S}$ que permanecem invariantes quando se submetem seus elementos às transformações de algum grupo* Γ, o que possibilitou o agrupamento dos objetos de cada geometria em classes de equivalência.

É sob este ponto de vista de Geometria (à Klein) que iremos trabalhar.

O quadro abaixo mostra algumas das geometrias estudadas, com seus invariantes e classes de equivalência:

Geom.	**Espaço**	**Grupo de Transform.**	**Invariantes**	**Classes de Equivalência**
Euclidiana	$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{E}^n$, isometrias; $Ax + b, \quad A \in O(n), \quad b \in \mathbb{R}^n$	Comprimento, ângulo, colinearidade, concorrência...	Círculos $r = 1$, quadrados $l = 2$ e outros.
Afim	$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{A}^n$; $Ax + b, \quad A \in GL(n), \quad b \in \mathbb{R}^n$	Colinearidade, paralelismo, proporção linear.	Triângulos, elipses, parábolas, hipérboles.
Projetiva	$\mathbb{RP}^{n-1}$	$\mathbb{P}^{n-1}$; $Ax, \quad A \in GL(n)$ (PGL(n))	Colinearidade, incidência, proporção cruzada.	Quadriláteros, cônicas não-degeneradas.
Inversiva	$\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$	Transformações de Möbius $\frac{az+b}{cz+d}$ ou $\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ com $ad - bc \neq 0$.	Ângulos (inclusive orientação).	Círculos generalizados.
Hiperbólica	$\mathbb{D}$ (disco unitário)	Inversões restritas à $\mathbb{D}$ (toda inversão é uma Möbius)	Ângulos, colinearidade.	d-retas, d-triângulos com ângulos iguais.
Esférica	S^{n-1}	$S(n-1)$; Ax, $A \in O(n)$ (rotações e reflexões)	Ângulos, comprimento.	Geodésicas.
Simplética	R^{2n}	Grupo Simplético	Volume, orientação.	Configurações de subespaços.

Na tabela acima observamos grandezas e transformações lineares. Neste trabalho, vamos lidar com objetos diferenciáveis, mais especificamente, curvas que satisfazem certas condições de regularidade. Estudaremos as características locais destas curvas a partir do espaço tangente, cuja base será o referencial adaptado, parametrizado por cada ponto da curva, assim continuaremos trabalhando em um ambiente linear que se movimenta com cada ponto da curva, para obter informações de objetos diferenciáveis.

1.2 Felix Christian Klein

Felix Christian Klein nasceu em Düsseldorf, em 25 de abril de 1849, de pais prussianos; seu pai era um oficial do governo da Prússia alocado na Província de Rhine.

Klein fez o Ginásio em Düsseldorf e depois estudou matemática e física na Universidade de Bonn (1865-1866), pretendendo ser físico. Naquela época Julius Plücker conquistou a cadeira de matemática e física experimental em Bonn, mas quando Klein se tornou seu assistente, em 1866, Plücker estava mais interessado em Geometria.

Klein obteve o grau de Doutor, orientado por Plücker, na Universidade de Bonn, em 1868.

Plücker morreu em 1868, deixando seu livro sobre alguns fundamentos em geometria, *Neue Geometrie des Raumes*, incompleto. Klein era a pessoa óbvia para completar a obra e, por isso, passou a relacionar-se com Alfred Clebsch. Clebsch havia se mudado para Göttingen em 1868, o que levou Klein a várias visitas a esta cidade, assim como a Berlin e Paris.

Em julho de 1870, quando explodia a guerra Franco-Prussiana, Klein estava em Paris e teve que deixar o país. Por um pequeno período de tempo, ele serviu ao exército prussiano, antes de ser nomeado conferencista em Göttingen, em 1871.

Tornou-se professor aos 23 anos na Universidade de Erlangen (1872 - 1875), onde em seu trabalho inaugural lançou o conhecido *Programa de Erlangen.* Foi fortemente apoiado por Clebsch, que o considerava capaz de tornar-se uma referência para os matemáticos de seu tempo. Klein não conseguiu "fazer escola" em Erlangen, onde havia poucos estudantes, então ficou muito grato quando lhe ofereceram uma cadeira na Escola Técnica de Munich, em 1875. Lá, ele ministrou cursos avançados a excelentes alunos, como Adolf Hurwitz, Walther von Dyck, Karl Rohn, Carl Runge, Max Planck, Luigi Bianchi e Gregorio Ricci-Curbastro.

Em 1875, Klein se casou com Anne Hegel, neta do filósofo Georg Wilhelm Friedrich Hegel.

Depois de cinco anos na Escola Técnica, Klein foi nomeado para uma cadeira na Universidade de Leijpzig (1880 - 1886). Foi colega de Walther von Dyck, Rohn, Eduard Study e Friedrich Engel. Os anos que Klein passou em Leipzig foram decisivos para sua vida. Em 1882, sua saúde entrou em colapso e de 1883 a 1884, ele estava tomado pela depressão.

A carreira de Klein como pesquisador em matemática estava essencialmente terminada. Klein aceitou uma cadeira na Universidade de Göttingen em 1886. Desde então até quando se aposentou em 1913, buscou restabelecer Göttingen como o Centro Mundial de Referência em Pesquisa Matemática, ainda que ele nunca tivesse conseguido transferir de Leipzig para Göttingen seu próprio papel de líder de uma escola de geometria. Em Göttingen ele lecionou uma variedade de cursos, principalmente assuntos que relacionavam matemática e física, tais como Mecânica e Teoria do Potencial.

O centro de pesquisa que Klein estabeleceu em Göttingen serviu de modelo para os melhores centros ao redor do mundo. Ele introduziu encontros para discussões semanais, criou uma sala de leitura matemática e uma biblioteca. Em 1895, Klein contratou David Hilbert, compromisso que se mostrou confiável, já que Hilbert continuou a glória de Göttingen até sua própria aposentadoria em

1932.

Sob o comando editorial de Klein, o periódico *Mathematische Annalen*, fundado por Clebsch, tornou-se um dos melhores sobre matemática do mundo. Klein organizou um time de editores que se encontravam regularmente, tomando decisões democráticas. O periódico era especializado em Análise Complexa, Geometria Algébrica e Teoria dos Invariantes (pelo menos enquanto Hilbert não excluiu este assunto) e também deu vasão para assuntos como Análise Real e Teoria de Grupos.

Graças, em parte, aos esforços de Klein, Göttingen passou a admitir mulheres em 1893. Ele orientou a primeira Tese de Doutorado escrita, em Göttingen, por uma mulher, uma estudante inglesa a quem Klein admirava.

Por volta de 1900, Klein desenvolveu interesse por Educação Matemática. Em 1905, ele desempenhou um papel decisivo ao formular um planejamento recomendando o ensino dos rudimentos do Cálculo Diferencial e Integral e conceitos de Funções no Segundo Grau (hoje Ensino Médio). Esta recomendação foi gradualmente implementada em muitos países ao redor do mundo. Em 1908, Klein foi eleito presidente da Comissão Internacional de Educação Matemática no Congresso Internacional de Matemática de Roma. Sob sua liderança, foram publicados muitos volumes sobre educação matemática, em todos os níveis, em alemão.

A Sociedade Londrina de Matemática concedeu a Klein a Medalha De Morgan, em 1893. Ele foi eleito membro da Real Sociedade, em 1885, e foi premiado com a Medalha Copley, em 1912. Aposentou-se no ano seguinte, devido as suas condições de saúde, mas continuou lecionando matemática em casa por alguns anos mais.

Klein morreu em Göttingen em 22 de julho de 1925.

1.3 Método do Referencial Móvel

Grosso modo, um referencial é um sistema de vetores usado por um observador para medir o espaço envolvente fornecendo coordenadas. Um referencial móvel é, então, um referencial que se move com o observador, ao longo de uma trajetória (uma curva). O método do referencial móvel, neste contexto, pretende produzir um referencial móvel canônico, adequado, no sentido que ficará claro ao longo deste trabalho.

Sob uma abordagem puramente geométrica, baseada em planos osculadores, ângulos de inclinação, etc, esse problema foi solucionado, para curvas em $\mathbb{R}^3$ sob ação do grupo euclidiano, em meados do século XIX por Jean Frédéric Frenet [11] e Joseph Alfred Serret [19].

O referencial de Frenet-Serret é um referencial definido em uma curva que pode ser construído puramente a partir da velocidade e da aceleração da curva. Ele desempenha um papel fundamental na geometria diferencial de curvas, em última análise, conduzindo a uma classificação de curvas suaves no espaço euclidiano a menos de congruência.

As fórmulas de Frenet-Serret mostram que há um par de funções definidas na curva, a curvatura e a torção, que são obtidas por diferenciação do referencial, e que descrevem completamente a forma como o referencial evolui no tempo, ao longo da curva. Uma característica fundamental do método geral é que um referencial móvel canônico, desde que possa ser encontrado, dá uma descrição completa do movimento da curva.

Mais tarde, a teoria sobre referenciais móveis foi amplamente desenvolvida por Élie Cartan e outros no estudo de subvariedades de espaços homogêneos mais gerais (como o espaço projetivo). Neste contexto, um referencial carrega a idéia geométrica de uma base de um espaço vetorial sobre outros tipos de espaços geométricos (geometrias de Klein).

Neste trabalho, o Método do Referencial Móvel será utilizado com o fim de

- obter os invariantes locais, também chamados genericamente de curvaturas,
- estudar a geometria destes invariantes,
- identificar as curvas mais simples desta geometria,

problemas que tentaremos resolver para cada um dos exemplos discutidos.

Dada uma curva diferenciável, satisfazendo uma condição de regularidade, γ, em uma variedade diferenciável M

$$\gamma : I \longrightarrow M, \qquad I \subset \mathbb{R}$$

e um grupo de Lie G [2] agindo transitivamente sobre M

$$G \times M \longrightarrow M$$

procuramos um referencial móvel canônico, Γ, adaptado à curva γ, continuamente diferenciável em cada ponto da curva

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, "\pi"] \\ I \arrow[ur, dashed, "\Gamma"] \arrow[r, "\gamma"'] & M \end{tikzcd}$$

tal que $\Gamma^{-1}\Gamma'$, pertencente à álgebra de Lie de G, é uma matriz em cujas entradas aparecem os invariantes locais de γ. A matriz $\Gamma^{-1}\Gamma'$ também pode ser interpretada como a 1-forma diferencial de Maurer-Cartan avaliada em Γ'.

Além disso, procuramos construir os referenciais de tal forma que sejam invariantes pela ação do grupo, isto é, havendo outra curva $\sigma : I \longrightarrow M$ satisfazendo

[2]Observamos que trabalharemos com Grupos de Lie mergulhados no grupo $GL(n)$.

a mesma condição de regularidade que γ e sendo Σ um referencial canônico adapatado à curva σ, escolhido de forma adequada, se T é uma transformação linear tal que $\sigma = T\gamma$, então existe uma transformação linear S tal que $\Sigma = S\Gamma$, o que leva à seguinte implicação:

$$\Sigma' = S\Gamma',$$

e portanto,

$$(S\Gamma)^{-1}(S\Gamma') = \Sigma^{-1}\Sigma' \Rightarrow \Gamma^{-1}S^{-1}S\Gamma' = \Sigma^{-1}\Sigma' \Rightarrow \Gamma^{-1}\Gamma' = \Sigma^{-1}\Sigma'.$$

Note que a condição

$$\Gamma^{-1}\Gamma' = \Sigma^{-1}\Sigma'$$

é necessária e queremos construir o referencial de tal forma que seja, também, suficiente.

Este processo ficará mais claro no capítulo 2, onde estudaremos um caso bastante simples e conhecido.

1.4 Élie Joseph Cartan

Élie Joseph Cartan nasceu em 9 de abril de 1869, em Dolomieu, Savoie, Rhône-Alpes, França.

A mãe de Élie Cartan era Anne Cottaz e seu pai era Joseph Cartan, ferreiro. A família era muito pobre. Foram as habilidade excepcionais de Élie, juntamente com uma boa quantidade de sorte, que tornou possível que ele tivesse uma educação de alta qualidade. Quando ele estava na escola primária, sua escola foi visitada pelo político e inspetor de educação infantil, Antonin Dubost, que ficou muito impressionado com os talentos notáveis do jovem Élie. Dubost se empenhou em obter recursos do Estado para custear os estudos de Élie no *Lycée in Lyons*, onde ele completou sua educação escolar com distinção acadêmica em matemática. Os recursos públicos foram ampliados, possibilitando que ele estudasse na École Normale Supérieure em Paris, onde ingressou em 1888 e obteve o título de Doutor em 1894.

Cartan foi nomeado para a Universidade de Montpellier, onde lecionou de 1894 a 1896. Logo depois ele foi nomeado como conferencista da Universidade de Lyon, onde ensinou de 1896 a 1903. Em 1903, foi nomeado como professor na Universidade de Nancy e permaneceu lá até 1909, quando se mudou para Paris, tendo sido nomeado conferencista em Sorbonne. Três anos mais tarde, ele foi indicado para a cadeira de Cálculo Diferencial e Integral, em Paris. Foi designado professor de Mecânica em 1920 e atuou como professor de Geometria Avançada de 1924 a 1940.

Élie casou-se com Marie-Louise Bianconi em 1903 e tiveram quatro filhos, um deles, Henri Cartan, produziu trabalhos brilhantes em matemática. Dois outros filhos morreram tragicamente. Jean, um compositor, morreu de tuberculose aos 25 anos. Louis era membro da Resistência, movimento contra a ocupação pelas tropas alemãs, em Paris. Depois de sua prisão, em fevereiro de 1943, a família não recebeu mais notícias do filho, mas esperavam pelo pior. Apenas em Maio de 1945, eles ficaram sabendo que Louis havia sido decaptado pelos nazistas em dezembro de 1943. Quando receberam a notícia do assassinato de Louis pelos alemães, Cartan tinha 75 anos e os efeitos foram devastadores para ele. Seu quarto filho era uma mulher.

Cartan fez contribuições fundamentais na Teoria de Grupos e Álgebras de Lie, Equações Diferenciais e Geometria Diferencial.

De 1916 em diante, ele publicou principalmente em Geometria Diferencial. O Programa de Erlangen de Klein estava se mostrando inadequado como uma descrição geral da geometria por Weyl e Veblen, e Cartan desempenharia um importante papel. Ele examinou um espaço sob a ação de um Grupo de Lie arbitrário, desenvolvendo uma teoria de referenciais móveis que generalizava a teoria desenvolvida por Darboux. Este trabalho iniciou Cartan à noção de fibrados associados à geometria, apesar de ele não ter dado uma definição explícita deste conceito em seu trabalho.

Cartan aproveitou-se do grande conhecimento que tinha acerca dos trabalhos de Grassmann e de Clifford. Deu início às teorias sobre espaços simétricos (1926) e dos "spinors" (1913).

Em 1945, ele publicou o livro *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques.*

Élie Cartan foi, sem dúvidas, um dos matemáticos mais importantes da primeira metade do século XX.

Por suas contribuições excepcionais, Cartan recebeu muitas honras, que só vieram muito mais tarde em sua carreira. Ele recebeu grau honorário da Universidade de Liege em 1934, e de Harvard em 1936. Em 1947, foi premiado com três graus honorários da Universidade Livre de Berlin, da Universidade de Bucharest e da Universidade Católica de Louvain. No ano seguinte, ele foi premiado como doutor honorário pela Universidade de Pisa. Foi eleito membro da Real Sociedade de Londres em 1 de maio de 1947, da Academia de Lincei e da Academia Norueguesa. Eleito para a Academia Francesa de Ciências em 9 de março de 1931, tornou-se vice-presidente em 1945 e presidente em 1946.

Cartan morreu em 6 de maio de 1951, em Paris.

Capítulo 2

Geometria das Curvas em $\mathbb{R}^3$ e em S^2 sob a Ação de $SO(3)$

2.1 Preâmbulo

Nos cursos elementares de Geometria Diferencial, como em [7], estudamos as propriedades locais das curvas diferenciáveis parametrizadas em $\mathbb{R}^3$, isto é, uma aplicação diferenciável

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \gamma(s) = (x(s), y(s), z(s)),$$

de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$; regulares, ou seja,

$$\gamma'(s) \neq 0, \text{ para todo } s \in \mathbb{R};$$

parametrizadas por comprimento de arco,

$$\| \gamma'(s) \| = 1, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Como o vetor tangente $t(s) = \gamma'(s)$ é unitário, a norma $\| \gamma''(s) \|$ da derivada segunda mede a taxa de variação do ângulo que as tangentes vizinhas fazem com a tangente em s, isto é, uma medida de quão rapidamente a curva se afasta, em um vizinhança de s, da tangente em s.

Então, vemos a definição da curvatura de $\gamma(s)$ em s dada por $k(s) = \parallel \gamma''(s) \parallel$. Se $\gamma(s)$ é uma reta, então a curvatura $k \equiv 0$ (e vice-versa). Nos pontos onde $k(s) \neq 0$, fica bem definido pela equação $\gamma''(s) = k(s)n(s)$, um vetor unitário $n(s)$ na direção de $\gamma''(s)$, chamado vetor normal e um vetor unitário $b(s) = t(s) \wedge n(s)$, chamado binormal . A torção de γ fica definida por $b'(s) = -\tau n$.

Além disso, lembremos que $s \in I$ é um ponto singular de ordem 1 se $\gamma''(s) = 0$. Daqui em diante, nos restringiremos às curvas parametrizadas por comprimento de arco sem pontos singulares de ordem 1.

Trabalhamos com o triedro de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned} t &= \gamma' \\ kn &= \gamma'' \\ b &= t \wedge n, \end{aligned}$$

onde $k = \parallel \gamma''(t) \parallel$ é a curvatura e τ, dada por $b' = -\tau n$, é a torção e satisfazem as fórmulas de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned} t' &= kn \\ n' &= -kt + \tau b \\ b' &= -\tau n \end{aligned} \qquad ou \qquad \frac{d}{ds}\begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}.$$

Transpondo as matrizes, obtemos outra descrição matricial, equivalente

$$\left(t' \middle| n' \middle| b'\right) = \left(t \middle| n \middle| b\right) \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

Estudamos ainda o Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas:

Teorema 2.1.1. *Dadas funções diferenciáveis* $k(s) > 0$ *e* $\tau(s)$, $\quad s \in I$, *existe uma curva parametrizada, regular,* $\alpha : I \longmapsto \mathbb{R}^3$ *tal que* s *é o comprimento de* *arco, $k(s)$ é a curvatura e $\tau(s)$ é a torção de α. Além disso, qualquer outra curva γ, satisfazendo às mesmas condições, difere de α por um movimento rígido, isto é, existe uma transformação linear ortogonal ρ de $\mathbb{R}^3$, com determinante positivo, e um vetor c tal que $\gamma = \rho \circ \alpha + c$.*

Demonstração. Note que as fórmulas de Frenet, acima, podem ser escritas como um sistema de equações diferenciais em $I \times \mathbb{R}^9$,

$$\begin{cases} \frac{d\xi_1}{ds} & = & f_1(s, \xi_1, ..., \xi_9) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d\xi_9}{ds} & = & f_9(s, \xi_1, ..., \xi_9) \end{cases}$$

onde

$$\begin{array}{rcl} t & = & (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ n & = & (\xi_4, \xi_5, \xi_6) \\ b & = & (\xi_7, \xi_8, \xi_9) \end{array}$$

e f_i, $i = 1, 2, ..., 9$ são funções lineares das coordenadas ξ_i com coeficientes que dependem de s.

Vale o seguinte Teorema de Existência e Unicidade,

T. E. U.: Dadas condições iniciais $s_o \in I$, $(\xi_1)_0, ..., (\xi_9)_0$, existe um intervalo aberto $J \subset I$ contendo s_0 e uma única aplicação diferenciável $F : J \longrightarrow \mathbb{R}^9$, com

$$F(s_0) = ((\xi_1)_0, ..., (\xi_9)_0) \qquad e \qquad F'(s) = (f_1, ..., f_9),$$

onde cada f_i, $i = 1, 2, ..., 9$, é calculada em $(s, \alpha(s)) \in J \times \mathbb{R}^9$. Além disto, se o sistema é linear, $J = I$.

Assim, dado um triedro, ortonormal, orientado positivamente $\{t_0, n_0, b_0\}$ em $\mathbb{R}^3$ e fixado um valor $s_0 \in I$, existe $\{t(s), n(s), b(s)\}$, $s \in I$, com $t(s_0) = t_0, n(s_0) = n_0, b(s_0) = b_0$.

Vamos mostrar que $\{t(s), n(s), b(s)\}$ permanece ortonormal para todo $s \in I$.

Calculamos as seguintes derivadas com respeito a s, a partir das fórmulas de Frenet

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{ds}\langle t,n\rangle &= k\langle n,n\rangle - k\langle t,t\rangle + \tau\langle t,b\rangle\\
\tfrac{d}{ds}\langle t,b\rangle &= k\langle n,b\rangle - \tau\langle t,n\rangle\\
\tfrac{d}{ds}\langle n,b\rangle &= -k\langle t,b\rangle + \tau\langle b,b\rangle - \tau\langle n,n\rangle\\
\tfrac{d}{ds}\langle t,t\rangle &= 2k\langle t,n\rangle\\
\tfrac{d}{ds}\langle n,n\rangle &= -2k\langle n,t\rangle + 2\tau\langle n,b\rangle\\
\tfrac{d}{ds}\langle b,b\rangle &= -2\tau\langle b,n\rangle
\end{aligned}$$

obtendo um sistema de equações diferenciais.

Verificamos que

$$\begin{gathered}
\langle t,n\rangle \equiv 0\\
\langle t,b\rangle \equiv 0\\
\langle n,b\rangle \equiv 0\\
\langle t,t\rangle \equiv 1\\
\langle n,n\rangle \equiv 1\\
\langle b,b\rangle \equiv 1
\end{gathered}$$

é uma solução do sistema com condições iniciais $0,0,0,1,1,1$. Pela unicidade do T. E. U., segue que $\{t(s), n(s), b(s)\}$ é ortonormal para todo $s \in I$.

Agora, podemos definir uma curva

$$\alpha(s) = \int t(s)ds, \qquad s \in I,$$

onde a integral de um vetor é uma função vetorial obtida integrando-se cada componente.

Esta curva satisfaz

$$\begin{aligned}
\alpha'(s) &= t(s)\\
\alpha''(s) &= k(s)n(s)\\
\alpha'''(s) &= k'(s)n(s) + k(s)n'(s) = k'(s)n(s) - k^2(s)t(s) + k(s)\tau(s)b(s)
\end{aligned}$$

Portanto, $k(s)$ é a curvatura de α em s e a torção, $\tau(s)$, será dada por

$$\tau = -\frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{k^2} = -\frac{\langle t \wedge kn, -k^2 t + k' n + k\tau b \rangle}{k^2}$$

onde omitimos o parâmetro s para simplificar a notação. Logo, α é a curva procurada.

Vamos mostrar que α é única a menos de translações e rotações do $\mathbb{R}^3$.

Seja $\tilde{\alpha} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma outra curva com $\tilde{k}(s) = k(s)$ e $\tilde{\tau}(s) = \tau(s)$, $s \in I$ e seja $\{\tilde{t_0}, \tilde{n_0}, \tilde{b_0}\}$ o triedro de Frenet de $\tilde{\alpha}$ em s_0.

É claro que existe uma translação A e uma rotação ρ que leva o triedro $\{\tilde{t_0}, \tilde{n_0}, \tilde{b_0}\}$ sobre o triedro $\{t_0, n_0, b_0\}$, pois ambos estão orientados positivamente. Pela unicidade do T. E. U., o resultado segue. $\square$

O teorema garante que a geometria local de uma curva pode ser descrita completamente por k e τ. Dadas $k(s)$ e $\tau(s)$, existe α, curva regular parametrizada tal que k é a curvatura de α, τ é a torção de α e s é o comprimento de arco.

Sabemos que dadas duas curvas com a mesma curvatura e torção existe uma transformação euclidiana positiva $T \in \mathbb{E}^3_+$,

$$T(\alpha) = A\alpha + b,$$

com $A \in SO(3)$ e $b \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(\alpha) = \gamma$.

Note que estamos estudando a geometria das curvas em $\mathbb{R}^3$ sob a ação do grupo de transformações euclidianas que preservam orientação, $\mathbb{E}^3_+$, e portanto, comprimento de arco, curvatura e torção são invariantes.

O grupo $\mathbb{E}^3_+$ é o produto semi-direto $SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3$, no seguinte sentido: $\mathbb{E}^3$ e $O(3) \times \mathbb{R}^3$ são isomorfos como grupos, se a operação em $O(3) \times \mathbb{R}^3$ não for definida como no produto direto

$$(A, v)(B, w) := (AB, v + w),$$

mas, como

$$(A, v)(B, w) := (AB, Aw + v),$$

pois, desta forma,

$$(AB, Aw + v)(x) = AB(x) + Aw + v = A(B(x) + w) + v, \forall x \in \mathbb{R}^3$$

corresponde à composição que é a operação no grupo das transformações euclidianas em $\mathbb{R}^3$.

Formalmente, temos a seguinte

Definição 2.1.1. *Sejam $(K, .)$ e $(H, *)$ dois grupos. Se $\phi : K \longrightarrow Aut(H)$ é um homomorfismo do grupo K no grupo dos automorfismos de H, então o conjunto $K \times H$, munido da operação*

$$(k, h)(\tilde{k}, \tilde{h}) := (k.\tilde{k}, h * \phi(k)(\tilde{h})),$$

é um grupo chamado produto semi-direto.

Isto é, no caso do produto semi-direto $O(3) \ltimes \mathbb{R}^3$,

$$\phi : O(3) \longrightarrow Aut(\mathbb{R}^{\nvDash})$$

é dada por $\phi(A)w = Aw$.

2.2 Problema de Equivalência

Recordados estes conceitos e resultados, queremos considerar o seguinte: dadas duas curvas α e γ no $\mathbb{R}^3$, existe uma transformação euclidiana $T \in \mathbb{E}^3_+$ tal que $T\alpha = \gamma$? Se sim, em quais condições ela existe?

Sabemos que

$$T\alpha = \gamma \Rightarrow T\alpha' = \gamma'.$$

Supondo α e γ curvas regulares parametrizadas por comprimento de arco, restringimos nosso problema à esfera unitária, já que $\| \alpha'(s) \|=\| \gamma'(s) \|= 1$.

Derivando a expressão $T\alpha = \gamma$, temos

$$(T\alpha)' = \gamma' \Leftrightarrow (T\alpha - \gamma)' = 0 \Leftrightarrow T\alpha - \gamma = cte.$$

Assim, da hipótese de existência da tal transformação euclidiana T, concluímos que $T\alpha$ e γ diferem por uma constante. Como sempre podemos fazer uma translação de modo que $\alpha(0) = \gamma(0)$, esta constante se torna nula. Desta forma eliminamos do problema a parte relacionada à translação e nos concentramos apenas no grupo $SO(3)$. Aplicaremos este mesmo raciocínio novamente nos capítulos que seguem.

A álgebra de Lie do grupo $SO(3)$ é o espaço das matrizes antissimétricas. De fato,

$$SO(3) = \{X \in O(n) : \det X = 1\}$$

assim, $X \in SO(3)$ satisfaz

$$X^t X = I \qquad (X^t = X^{-1}).$$

Derivando a expressão obtemos:

$$(X^t)'X + X^t X' = 0$$

$$X^t X' = -(X')^t X.$$

Mas,

$$X^t X = I \Rightarrow X = (X^t)^{-1} = (X^{-1})^t.$$

Segue que

$$X^{-1}X' = X^t X' = -(X')^t (X^{-1})^t = -(X^{-1}X')^t.$$

Logo, a álgebra de Lie de $SO(3)$ é

$$so(3) = \{X \in \mathbb{R}_n : X + X^t = 0\},$$

como queríamos mostrar.

Portanto, passamos a considerar o problema segundo a geometria $(S^2, SO(3))$: dadas duas curvas $v(s) = \alpha'(s)$ e $w(s) = \gamma'(s)$ em S^2, existe $T \in SO(3)$ tal que $Tv = w$? Em quais condições?

Procuramos por levantadas V e W, respectivamente, para estas curvas:

$$\begin{tikzcd} & SO(3) \arrow[d, "\pi"] \\ I \arrow[ur, dashed, "V"] \arrow[r, "v"'] & S^2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & SO(3) \arrow[d, "\pi"] \\ I \arrow[ur, dashed, "W"] \arrow[r, "w"'] & S^2 \end{tikzcd}$$

onde $\pi : SO(3) \longmapsto S^2$, é dada por $\pi(T) = T\overrightarrow{N}$, com $\overrightarrow{N} = (0,0,1)$.

Tomamos $V(s)$ como a matriz que tem por colunas o triedro de Frenet de $v(s)$, isto é,

$$\begin{aligned} t(s) &= v(s) = \alpha'(s), \\ n(s) &= \frac{v'(s)}{\| v'(s) \|} = \frac{\alpha''(s)}{\| \alpha''(s) \|}, \\ b(s) &= v(s) \times \frac{v'(s)}{\| v'(s) \|} = t(s) \wedge n(s) \end{aligned}$$

(lembre que $t \perp n$, $n \perp b$, $b \perp t$ e t, n, b são unitários). Assim, $V(s) \in SO(3)$.

Tomamos $W(s)$ de forma análoga. Agora, se existe $T \in SO(3)$ tal que $Tv(s) = w(s)$, então existe $S \in SO(3)$ tal que $SV(s) = W(s)$, isto é $V^{-1}(s)V'(s) = W^{-1}(s)W'(s)$, como vimos na seção 1.3 do capítulo 1 (invariância do referencial pela ação do grupo).

Como $V \in SO(3)$, então $V^{-1}V'$ é antissimétrica. Além disso,

$$V^{-1}V' = \begin{pmatrix} 0 & -k(s) & 0 \\ k(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

onde k e τ são curvatura e torção de α, respectivamente.

Analogamente, $W^{-1}W'$ é antissimétrica e curvatura e torção de γ aparecem fora das diagonais. Ou seja, se $V^{-1}V' = W^{-1}W'$, então α e γ têm a mesma curvatura e torção. Em outras palavras, dadas duas curvas α e γ em $\mathbb{R}^3$, só existe uma transformação euclidiana que leva α em γ se α e γ têm a mesma curvatura e torção. Resultado que concorda com o que estudamos na forma elementar.

Vamos provar que $V^{-1}V'$ é, de fato, da forma exibida acima. Omitiremos o parâmetro s para simplificar a notação.

Sejam

$$\begin{aligned} t &= (a_1, a_2, a_3) \\ n &= (b_1, b_2, b_3) \\ b &= (c_1, c_2, c_3), \end{aligned}$$

então

$$V = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \left(t \middle| n \middle| b \right),$$

$$V' = \begin{pmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{pmatrix} = \left(t' \middle| n' \middle| b' \right),$$

$$V^{-1} = V^t = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}.$$

Se $V^{-1}V' = (x_{ij}), \quad 1 \leq i, j \geq 3$, então,

$$\begin{aligned}
x_{11} &= \langle t, t' \rangle = \langle t, kn \rangle = k\langle t, n \rangle = 0 \\
x_{12} &= \langle t, n' \rangle = \langle t, -kt - \tau b \rangle = -k\langle t, t \rangle - \tau\langle t, b \rangle = -k \\
x_{13} &= \langle t, b' \rangle = \langle t, \tau n \rangle = \tau\langle t, n \rangle = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{21} &= \langle n, t' \rangle = \langle n, kn \rangle = k\langle n, n \rangle = k \\
x_{22} &= \langle n, n' \rangle = \langle n, -kt - \tau b \rangle = -k\langle n, t \rangle - \tau\langle n, b \rangle = 0 \\
x_{23} &= \langle n, b' \rangle = \langle n, -\tau n \rangle = -\tau\langle n, n \rangle = -\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{31} &= \langle b, t' \rangle = \langle b, kn \rangle = k\langle b, n \rangle = 0 \\
x_{32} &= \langle b, n' \rangle = \langle b, -kt + \tau b \rangle = -k\langle b, t \rangle + \tau\langle b, b \rangle = +\tau \\
x_{33} &= \langle b, b' \rangle = \langle b, \tau n \rangle = \tau\langle b, n \rangle = 0
\end{aligned}$$

Donde segue diretamente que $V^{-1}V'$ é, de fato, da forma apresentada.

2.3 Curvas em $(\mathbb{R}^3, SO(3))$

Queremos conhecer as curvas de $(\mathbb{R}^3, SO(3))$ que possuem invariantes constantes. Para isso precisamos resolver o seguinte sistema homogêneo de equações diferenciais ordinárias a coeficientes constantes:

$$V' = V \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix},$$

onde

$$V = \left(t \middle| n \middle| b \right).$$

O sistema representa tão somente as conhecidas equações de Frenet-Serret:

$$\begin{cases} t_1' = kn_1 \\ t_2' = kn_2 \\ t_3' = kn_3 \\ n_1' = -kt_1 + \tau b_1 \\ n_2' = -kt_2 + \tau b_2 \\ n_3' = -kt_3 + \tau b_3 \\ b_1' = -\tau n_1 \\ b_2' = -\tau n_2 \\ b_3' = -\tau n_3 \end{cases} .$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$t(s) = (t_1(s), t_2(s), t_3(s)) = \frac{1}{\sqrt{k^2+\tau^2}}(-k\,\mathrm{sen}(\sqrt{k^2+\tau^2}s), k\cos(\sqrt{k^2+\tau^2}s), \tau)$$

para escolhas adequadas de condições iniciáis para $t(0), n(0), b(0)$.

Integrando coordenada a coordenada, temos que as curvas γ em $(\mathbb{R}^3, SO(3))$ que possuem curvaturas constantes, são da forma

$$\gamma(s) = \frac{1}{k^2+\tau^2}(k\cos(\sqrt{k^2+\tau^2}s), k\,\mathrm{sen}(\sqrt{k^2+\tau^2}s), \tau s),$$

que são hélices em $\mathbb{R}^3$.

2.4 Espaços Homogêneos

Estudaremos agora, o mesmo problema apresentado acima, sob outra ótica, qual seja, a de espaços homogêneos.

Vimos que dadas duas curvas regulares, parametrizadas por comprimento de arco, α e γ, se existe $T \in SO(3)$ tal que $T\alpha = \gamma$, então

$$T\alpha' = \gamma'.$$

Analogamente ao que fizemos na seção 2.2, derivando a expressão acima, percebemos que $T\alpha'$ e γ' diferem por uma constante. Então podemos eliminar o problema de translação, considerando apenas o grupo $SO(3)$.

Procuramos por levantadas V e W, respectivamente para as curvas $v(s) = \alpha'(s)$ e $w(s) = \gamma'(s)$ em S^2

$$\begin{tikzcd} & SO(3) \arrow[d, "\pi"] \\ I \arrow[ur, dashed, "V"] \arrow[r, "v"'] & S^2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & SO(3) \arrow[d, "\pi"] \\ I \arrow[ur, dashed, "W"] \arrow[r, "w"'] & S^2 \end{tikzcd}$$

Sabemos que $V^{-1}V' = W^{-1}W'$ é uma condição necessária para a equivalência entre as curvas v e w.

Considere a ação do grupo $SO(3)$ sobre S^2 induzida pela ação canônica de $SO(3)$ em $\mathbb{R}^3$

$$\sigma : SO(3) \times S^2 \longrightarrow S^2$$

A ação é transitiva, pois dados dois vetores $\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q} \in S^2$, existe uma rotação no sentido positivo $T \in SO(3)$ tal que $T\overrightarrow{P} = \overrightarrow{Q}$.

Fixado $\overrightarrow{N} = (0,0,1) \in S^2$, o subgrupo de isotropia $H_{\overrightarrow{N}}$ de $SO(3)$ em $\overrightarrow{N}$ é isomorfo a $SO(2)$.

De fato, seja $T \in SO(3)$, então

$$T\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ b_{23} \\ c_{33} \end{pmatrix}.$$

Como queremos $T \in H_{\overrightarrow{N}}$, T deve satisfazer

$$T\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 1 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, T satisfaz $TT^t = T^tT = I$ e $\det T = 1$, pois $T \in SO(3)$. Então,

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{com} \qquad T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in SO(2).$$

Portanto, $H_{\overrightarrow{N}} \cong SO(2)$, como queríamos mostrar.

Assim, existe um difeomorfismo, β, entre S^2 e o espaço homogêneo $\frac{SO(3)}{SO(2)}$:

$$\begin{tikzcd} SO(3) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\rho"'] & S^2 \\ \frac{SO(3)}{SO(2)} \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

onde

$$\begin{array}{rccc} \pi : & SO(3) & \longrightarrow & S^2 \\ & T & \longmapsto & T\overrightarrow{N}. \end{array}$$

A aplicação π não possui inversa $\pi^{-1} = \tau$, pois π é sobrejetora, mas não é injetora:

$$\pi(T) = \pi(S) \Leftrightarrow T\overrightarrow{N} = S\overrightarrow{N} \Leftrightarrow (S^{-1}T)\overrightarrow{N} = \overrightarrow{N} \Leftrightarrow S^{-1}T \in H_{\overrightarrow{N}}.$$

Por isso, não é possível encontrar uma levantada canônica para v, apenas compondo aplicações: $V = \tau \circ v$. *Contudo, podemos utilizar toda informação que temos sobre a curva v, contida em suas derivadas, até a ordem que for necessário, para obtermos a levantada (trabalhamos com curvas C^∞).*

ρ é a projeção canônica no quociente:

$$\begin{array}{rccc} \rho & : & SO(3) & \longrightarrow & \frac{SO(3)}{SO(2)} \\ & & M & \longmapsto & M.H_{\overrightarrow{N}}. \end{array}$$

β é o difeomorfismo:

$$\begin{array}{rccc} \beta & : & \frac{SO(3)}{SO(2)} & \longrightarrow & S^2 \\ & & TH_{\overrightarrow{N}} & \longmapsto & \sigma(T, \overrightarrow{N}) = T\overrightarrow{N}, \end{array}$$

onde σ é a ação canônica de $SO(3)$ em S^2,

$$S^2 \cong \frac{SO(3)}{SO(2)}.$$

Olhando agora para o espaço tangente unitário a S^2, ao qual chamaremos US^2, notamos que $SO(3)$ age transitivamente também sobre ele:

$$\tilde{\sigma} : SO(3) \times US^2 \longrightarrow US^2.$$

Assim, dados dois pares $(\overrightarrow{N}, \overrightarrow{x}), (\overrightarrow{P}, \overrightarrow{z})$, onde $\overrightarrow{N} = (0,0,1)$ e $\overrightarrow{x} = (0,1,0)$, existe $T \in SO(3)$ tal que $T(\overrightarrow{N}, \overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{P}, \overrightarrow{z})$, isto é, $T\overrightarrow{N} = \overrightarrow{P}$ e $T\overrightarrow{x} = \overrightarrow{z}$. Basta tomar

$$T = \left(\begin{array}{c|c|c} * & \overrightarrow{z} & \overrightarrow{P} \end{array} \right),$$

onde * é um vetor tal que $T \in SO(3)$ que, como veremos a seguir, é determinado unicamente.

Procuramos agora o subgrupo de isotropia que fixa $\overrightarrow{N}$ e $\overrightarrow{x}$ simultâneamente.

Notamos que, para que $A \in H_{(\overrightarrow{N}, \overrightarrow{x})}$, precisamos que:

$$\begin{array}{rcl}
A \text{ fixe} \overrightarrow{N} & \longrightarrow & \text{a } 3^a \text{ coluna de } A \text{ deve ser} \overrightarrow{N} \\
A \text{ fixe} \overrightarrow{x} & \longrightarrow & \text{a } 2^a \text{ coluna de } A \text{ deve ser} \overrightarrow{x} \\
A \in O(3) & \longrightarrow & \text{a } 1^a \text{ coluna de } A \text{ deve ser} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\det A = 1 & \longrightarrow & \text{a } 1^a \text{ coluna de A deve ser} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Assim, a matriz I é a única que satisfaz estas condições, portanto o subgrupo de isotropia procurado é trivial $H_{(\overrightarrow{N}, \overrightarrow{x})} = \{e\}$ e

$$US^2 \cong SO(3)^1$$

$$\begin{tikzcd}
SO(3) \arrow[r, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, "\tilde{\rho}=id"'] & US^2 \\
\frac{SO(3)}{\{e\}} \arrow[ur, dashed, "\tilde{\beta}"'] &
\end{tikzcd}$$

Agora o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& SO(3) \arrow[d, "\tilde{\beta}"] \\
I \arrow[ur, dashed, "\tilde{V}"] \arrow[r, "\tilde{v}"'] & US^2
\end{tikzcd}$$

onde $v = \gamma'$ e $\tilde{v} = \dfrac{v'}{\parallel v' \parallel}$, comuta, e podemos definir uma levantada para $\tilde{v}$ de maneira trivial por $\tilde{V} = \tilde{\beta}^{-1} \circ \tilde{v}$, onde

$$\tilde{\beta}^{-1}(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{w}) = \left(\begin{array}{c|c|c} \overrightarrow{P} & \overrightarrow{w} & \overrightarrow{P \times w} \end{array} \right).$$

[1] E por sua vez, $SO(3) \cong \mathbb{RP}^3$, via quatérnios.

Isto agora nos permite obter uma levantada adequada para v, tomando $V = \tilde{V}$:

$$\begin{tikzcd} & US^2 & SO(3) \arrow[l, "\tilde{\beta}"'] \arrow[d, "\rho"] \\ I \arrow[ur, "\tilde{v}"] \arrow[r, "v"] & S^2 & \dfrac{SO(3)}{SO(2)} \arrow[l, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

É claro, da construção, que a levantada obtida é invariante no sentido que comentamos na Seção 1.3 e coincide com o triedro de Frenet (Seção 2.1), resolvendo assim o problema de equivalência.

Capítulo 3

Geometria das Curvas em $\mathbb{R}^n$ sob a Ação de $SO(n)$

3.1 Referencial Ortonormal Adaptado

Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ e seja

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

uma curva C^∞, parametrizada por comprimento de arco, isto é, $\| f'(s) \| = 1$ para todo $s \in I$, satisfazendo a seguinte condição de regularidade: para cada $s \in I$, o conjunto

$$\{f'(s), ..., f^{(r)}(s)\}$$

com $r < n$, é linearmente independente.

Como no caso anterior, aplicaremos Gram-Schmidt a este conjunto, seguindo o algoritmo utilizado por Gluck [13], isto é, obtendo primeiro um conjunto de vetores ortogonais e depois um conjunto normalizado. Este algoritmo permitirá obter fórmulas simples para as curvaturas em termos dos elementos do primeiro conjunto de vetores obtido.

$$
\begin{array}{rclcrcl}
E_1(s) & = & f'(s) & \text{e} & V_1(s) & = & \dfrac{E_1(s)}{\| E_1(s) \|} \\
E_2(s) & = & f''(s) - \langle f''(s), V_1(s)\rangle V_1(s) & \text{e} & V_2(s) & = & \dfrac{E_2(s)}{\| E_2(s) \|} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
E_i(s) & = & f^{(i)}(s) - \sum\limits_{j<i} \langle f^{(i)}(s), V_j(s)\rangle V_j(s) & \text{e} & V_i(s) & = & \dfrac{E_i(s)}{\| E_i(s) \|}
\end{array}
$$

para $i = 2, 3, ..., r$.

Na verdade, podemos ainda calcular

$$E_{r+1}(s) = f^{(r+1)}(s) - \sum_{j<r+1} \langle f^{(r+1)}(s), V_j(s)\rangle V_j(s)$$

uma vez que $r < n$. Contudo, não podemos garantir que $E_{r+1}(s) \neq 0$ e desta forma ficamos impedidos de obter V_{r+1}.

O conjunto

$$\{V_1(s), ..., V_r(s)\}$$

é um r-referencial de Frenet adaptado à curva f no ponto $f(s)$.

Para obtermos $\{V_1'(s), ..., V_r'(s)\}$ observamos que:

- derivando a expressão $\langle V_i(s), V_j(s)\rangle = \delta_{ij}$, obtemos

$$\langle V_i'(s), V_j(s)\rangle = -\langle V_i(s), V_j'(s)\rangle$$

- para $1 \leq i \leq r-1$, $V_i'(s)$ é combinação linear de $V_1(s), V_2(s), ..., V_{i+1}(s)$.

Logo, $\langle V_i'(s), V_j(s)\rangle = 0$, exceto, talvez, para $j = i-1$ e $j = i+1$.

De fato, se $j > i+1$ é claro que

$$\langle V_i'(s), V_j(s)\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{i+1} \alpha_k V_k(s), V_j(s)\rangle = \sum_{k=1}^{i+1} \alpha_k \langle V_k(s), V_j(s) \right\rangle = 0.$$

Se $j = i$, então temos

$$\alpha_i = \langle V_i'(s), V_i(s)\rangle = -\langle V_i(s), V_i'(s)\rangle = -\alpha_i,$$

portanto, $\langle V_i'(s), V_i(s)\rangle = 0$.

Se $j < i - 1$, então

$$\langle V_i'(s), V_j(s)\rangle = \alpha_j,$$

mas, V_j' é combinação linear de, no máximo, $V_1, ..., V_{i-1}$, logo

$$\langle V_i(s), V_j'(s)\rangle = \langle V_i(s), \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k V_k(s)\rangle = 0.$$

Por outro lado, se $j = i - 1$, temos

$$\alpha_{i-1} = \alpha_j = \langle V_i'(s), V_j(s)\rangle = -\langle V_i(s), V_j'(s)\rangle = -\alpha_i,$$

donde não podemos concluir que a expressão seja nula. O mesmo acontece se $j = i + 1$.

Assim, podemos escrever

$$\begin{array}{rcll} V_1'(s) & = & k_1(s)V_2(s) & \\ V_i'(s) & = & -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s) & \qquad 2 \leq i \leq r-1. \end{array}$$

Como vimos, $V_{r+1}(s)$ pode não existir. Portanto, vamos definir V_r' localmente. Dado $s_0 \in I$, se $f^{(r+1)}(s_0)$ for linearmente independente de $f'(s_0), ..., f^{(r)}(s_0)$, então para todo s numa vizinhança de s_0 podemos definir $V_{r+1}(s)$ como fizemos acima e

$$V_r'(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s) + k_r(s)V_{r+1}(s). \tag{3.1}$$

Por outro lado, se $f^{(r+1)}(s_0)$ for linearmente dependente de $f'(s_0), ..., f^{(r)}(s_0)$, então definimos

$$V_r'(s_0) = -k_{r-1}(s_0)V_{r-1}(s_0). \tag{3.2}$$

Os coeficientes $k_1(s), ..., k_{r-1}(s)$ são exatamente as curvaturas da curva dada no ponto $f(s)$. A curvatura $k_r(s)$ fica definida de forma análoga, se $f^{(r+1)}(s)$ é independente de $f'(s), ..., f^{(r)}(s)$, caso contrário, $k_r(s) = 0$. Assim, temos

$$F' = MF, \qquad \text{onde} \qquad F = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{r-1} \\ V_r \\ V_{r+1} \end{pmatrix}$$

e M é a matriz em cujas entradas aparecem as curvaturas, como exibimos abaixo.

Se definimos V_r' como em 3.1, temos

$$\begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ \vdots \\ V_{r-1}' \\ V_r' \\ V_{r+1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{r-1} & 0 & k_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{r-1} \\ V_r \\ V_{r+1} \end{pmatrix}$$

para todo s numa vizinhança de s_0.

Se definimos V_r' como em 3.2, temos

$$\begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ \vdots \\ V_{r-1}' \\ V_r' \\ V_{r+1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{r-1} \\ V_r \\ V_{r+1} \end{pmatrix}$$

para $s_0 \in I$.

Podemos agora obter uma fórmula para as curvaturas.

Teorema 3.1.1.

$$k_i(s) = \frac{\| E_{i+1}(s) \|}{\| E_i(s) \|}, \qquad para \;\; 1 \leq i \leq r.$$

Demonstração. Se $i < r$, temos

$$\begin{aligned} k_i &= \langle V_i', V_{i+1} \rangle = \left(\frac{E_i}{\| E_i \|} \right)' V_{i+1} \\ &= \left(\frac{E_i' \| E_i \| - E_i \| E_i \|'}{\| E_i \|^2} \right) V_{i+1} \\ &= \frac{E_i' V_{i+1}}{\| E_i \|} - \frac{\| E_i \|'}{\| E_i \|^2} \langle E_i, V_{i+1} \rangle \end{aligned}$$

onde o último termo é nulo.

Logo,

$$k_i = \frac{E_i' V_{i+1}}{\| E_i \|}.$$

Portanto, resta-nos mostrar que $E_i' V_{i+1} = \| E_{i+1} \|$. De fato, como

$$E_i = f^{(i)} - \sum_{j<i} \langle f^{(i)}, V_j \rangle V_j,$$

temos

$$E_i' = f^{(i+1)} - \left(\sum_{j<i} \langle f^{(i)}, V_j \rangle' V_j + \langle f^{(i)}, V_j \rangle V_j' \right)$$

e

$$\langle E_i', V_{i+1} \rangle = \langle f^{(i+1)}, V_{i+1} \rangle.$$

Agora

$$E_{i+1} = f^{(i+1)} - \sum_{j<i+1} \langle f^{(i)}, V_j \rangle V_j.$$

Logo,

$$\langle E_{i+1}, V_{i+1} \rangle = \langle f^{(i+1)}, V_{i+1} \rangle.$$

Como

$$\langle E_{i+1}, V_{i+1} \rangle = \frac{\| E_{i+1} \|^2}{\| E_{i+1} \|} = \| E_{i+1} \| .$$

o resultado segue.

Se $i = r$ e $E_{i+1} \neq 0$, então a mesma demonstração acima, vale. Se $i = r$ e $E_{i+1} = 0$, então $k_i = 0$ e o tereoma é válido. $\square$

Note que a fórmula apresentada no teorema acima é coerente com a fórmula para a curvatura para curvas em $\mathbb{R}^3$ apresentada no capítulo anterior:

$$k_1(s) = \frac{\| E_2(s) \|}{\| E_1(s) \|} = \frac{\| f''(s) - \langle f''(s), f'(s) \rangle f'(s) \|}{\| f'(s) \|}.$$

Como s é comprimento de arco, derivando $\langle f'(s), f'(s) \rangle = 1$, obtemos $\langle f''(s), f'(s) \rangle = 0$, donde

$$k_1(s) = \| f''(s) \|,$$

como queríamos.

3.2 Ângulos entre p-Planos em $\mathbb{R}^n$

Esta seção trata, sem muitos detalhes, de alguns aspectos da geometria do $\mathbb{R}^n$ que utilizaremos na demonstração do teorema da próxima seção.

Definição 3.2.1. *O ângulo entre duas retas P^1 e Q^1 em $\mathbb{R}^n$ é o menor dos dois ângulos possíveis formados entre quaisquer vetores paralelos a P^1 e Q^1, respectivamente.*

Definição 3.2.2. *O ângulo formado entre a reta P^1 e o plano Q^p em $\mathbb{R}^n$ é o menor ângulo entre P^1 e qualquer reta contida no plano Q^p.*

Considere um par de p-planos, P^p e Q^p em $\mathbb{R}^n$. Suponha que, dentre todos os possíveis pares de retas, uma de P^p e outra de Q^p, as retas S^1 e T^1 façam o menor ângulo possível entre si, θ_1.

Sejam P^{p-1} e Q^{p-1}, "complementos ortogonais" para S^1 em P^p e para T^1 em Q^p, respectivamente. Isto é, S^1 é ortogonal a P^{p-1} e T^1 é ortogonal a Q^{p-1}.

Então, pela minimalidade de θ_1, temos também que S^1 é ortogonal a Q^{p-1} e T^1 é ortogonal a P^1.

Repetindo este processo para P^{p-1} e Q^{p-1} e assim por diante, p vezes, obtemos ângulos

$$0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq ... \leq \theta_p \leq \frac{\pi}{2},$$

que dependem apenas de P^p e Q^p e são chamados *ângulos principais.*

Este mesmo processo produz bases ortonormais

$$\{u_1, u_2, \cdots, u_p\} \text{ de } P_0^p \parallel P^p$$

$$\{v_1, v_2, \cdots, v_p\} \text{ de } Q_0^p \parallel Q^p$$

tais que

$$\langle u_i, v_i \rangle = \cos\theta_i, \quad 1 \leq i \leq p,$$
$$\langle u_i, v_j \rangle = 0, \qquad i \neq j.$$

Estas bases são ditas na *forma normal.* Se os ângulos principais são todos distintos, as bases são unicamente determinadas a menos de sinal dos vetores.

Note que

$$\Pr_{Q_0^p} u_i = \langle u_i, v_i \rangle = \cos\theta_i v_i,$$
$$\Pr_{P_0^p} v_i = \langle u_i, v_i \rangle = \cos\theta_i u_i,$$

onde o símbolo $\Pr_A x$ denota a projeção ortogonal do vetor x sobre o subespaço A.

Também, se são dados inteiros positivos $p \leq n$ e p ângulos

$$0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq ... \leq \theta_p \leq \frac{\pi}{2}$$

tais que

$$\theta_i = 0, 1 \leq i \leq 2p - n,$$

então existem P^p e Q^p em $\mathbb{R}^n$ para os quais estes ângulos são principais.

Teorema 3.2.1. *Sejam P^p, Q^p, $\tilde{P}^p$, $\tilde{Q}^p$, p-planos em $\mathbb{R}^n$. Então existe uma isometria linear $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $F(P^p)$ é paralelo a $\tilde{P}^p$ e $F(Q^p)$ é paralelo a $\tilde{Q}^p$, se e só se o ângulo principal entre P^p e Q^p coincide com o ângulo entre $\tilde{P}^p$ e $\tilde{Q}^p$.*

Demonstração. Se existe uma tal isometria F, então F preserva ângulos no $\mathbb{R}^n$. Como os ângulos principais são contruídos levando em conta apenas ângulos entre vetores do $\mathbb{R}^n$, independente de para onde estão transladados, segue que os ângulos principais dos pares P^p e Q^p, $\tilde{P}^p$ e $\tilde{Q}^p$ são iguais.

Por outro lado, se os ângulos principais dos pares P^p e Q^p, $\tilde{P}^p$ e $\tilde{Q}^p$ são iguais, basta encontrar uma isometria que leve um par de bases na forma normal para P_0^p e Q_0^p sobre um par de bases na forma normal para $\tilde{P}_0^p$ e $\tilde{Q}_0^p$. $\square$

Teorema 3.2.2. *Sejam P^p e Q^p p-planos em $\mathbb{R}^n$ e sejam $(P^p)^\perp$ e $(Q^p)^\perp$ $(n-p)$-planos ortogonais a P^p e Q^p, respectivamente. Então os ângulos principais não* *nulos entre $(P^p)^\perp$ e $(Q^p)^\perp$ coincidem com os ângulos principais não nulos entre P^p e Q^p.*

Observe que, se $p = 1$, existe um único ângulo principal, θ_1 entre as retas P_1 e Q^1 e coincide com o ângulo ordinário, θ, entre elas

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Este ângulo θ tem uma propriedade importante que enunciamos a seguir.

Proposição 3.2.1. *Se U é qualquer subconjunto mensurável de P^1 com medida 1-dimensional $\mu(U)$, então a projeção ortogonal de U sobre Q^1 também é mensurável e tem medida 1-dimensional igual a $\cos\theta\mu(U)$ em Q^1. A propriedade vale, de forma análoga, para um subconjunto mensurável V de Q^1.*

Assim, podemos caracterizar θ como o ângulo entre 0 e $\dfrac{\pi}{2}$ cujo cosseno é o fator redutor para a medida 1-dimensional sob a projeção ortogonal de P^1 sobre Q^1 ou de Q^1 sobre P^1.

Além disso, se u_1 é um vetor unitário em P_0^1 e v_1 é um vetor unitário em Q_0^1, então o valor absoluto do determinate da matriz (1 x 1) da projeção ortogonal de P_0^1 em Q_0^1 é $\cos\theta$.

Definição 3.2.3. *Sejam P^p e Q^p p-planos em $\mathbb{R}^n$. Seja o número α, $0 \leq \alpha \leq 1$, o fator redutor para a medida p-dimensional sob a projeção ortogonal de P^p sobre Q^p. Então, o único ângulo θ, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ tal que $\cos\theta = \alpha$, fica definido como o ângulo entre P^p e Q^p.*

Corolário 3.2.1.

1. *Se P^p é paralelo a $\tilde{P}^p$ e Q^p é paralelo a $\tilde{Q}^p$, então o ângulo entre P^p e Q^p é igual ao ângulo entre $\tilde{P}^p$ e $\tilde{Q}^p$.*

2. *Se $\{u_1, ..., u_p\}$ é qualquer base com vetores unitários para P_0^p e $\{v_1, ...v_p\}$ é qualquer base com vetores unitários para Q_0^p, então o determinante da matriz da projeção ortogonal de P_0^p sobre Q_0^p tem valor absoluto igual a $\cos\theta$, onde θ é o ângulo entre P^p e Q^p, ou equivalentemente entre P_0^p e Q_0^p.*

Teorema 3.2.3. *Sejam P^p e Q^p p-planos no $\mathbb{R}^n$, e sejam $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_p$ os ângulos principais entre eles. Então o ângulo θ entre P^p e Q^p é dado por* $\cos\theta = (\cos\theta_1)(\cos\theta_2)\cdots(\cos\theta_p)$.

Demonstração. Sejam $\{u_1, u_2, ..., u_p\}$ e $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ bases para P_0^p e Q_0^p, na forma normal. Então,

$$\begin{array}{rclcll}
\langle u_i, u_j\rangle & = & \langle v_i, v_j\rangle & = & \delta_{ij} & \\
\langle u_i, v_i\rangle & = & \cos\theta_i & & \forall & 1 \leq i \leq p \\
\langle u_i, v_j\rangle & = & 0 & & \forall & i \neq j.
\end{array}$$

Como a projeção ortogonal de u_i sobre Q_0^p é $(\cos\theta_i)v_i$, a matriz desta projeção com respeito às bases acima é uma matriz diagonal cujas entradas da diagonal principal são precisamente

$$\cos\theta_1, \cos\theta_2, ..., \cos\theta_p.$$

Como as bases ortonormais são formadas por vetores unitários, o teorema segue do corolário anterior. $\square$

Corolário 3.2.2.

1. *O ângulo entre P^p e Q^p é o mesmo ângulo entre Q^p e P^p.*

2. *Se θ_p é o maior ângulo principal entre P^p e Q^p, então o ângulo entre P^p e Q^p é limitado pela desigualdade $\theta_p \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$.*

3. *O ângulo entre P^p e Q^p é zero se, e somente se, P^p e Q^p são paralelos.*

4. *Se $(P^p)^\perp$ e $(Q^p)^\perp$ são $(n-p)$-planos ortogonais a P^p e Q^p, respectivamente, então, segue dos dois últimos teoremas, que o ângulo entre $(P^p)^\perp$ e $(Q^p)^\perp$ é o mesmo ângulo existente entre P^p e Q^p.*

Para P^p e Q^p, p-planos em $\mathbb{R}^n$, correspondem subespaços 1-dimensionais L^1 e M^1, do produto exterior $\bigwedge^p(\mathbb{R}^n)$.

Agora, sejam $\{u_1, u_2, ..., u_p\}$ e $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ bases ortonormais para P_0^p e Q_0^p, na forma normal. Seja $x = u_1 \wedge \cdots \wedge u_p\} \in \bigwedge^p(\mathbb{R}^n)$, então

$$\langle x, x\rangle = \det(\langle u_i, u_j\rangle) = \det I_p = 1$$

Logo, x é um vetor unitário em L^1. Analogamente, $y = v_1 \wedge ... \wedge v_p$ é unitário em M^1, e temos

$$\cos\angle(x,y) = \langle x, y\rangle = det\left(\langle u_i, v_j\rangle\right) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \cos\theta_p \end{pmatrix} = \cos\theta_1 . \cdots . \cos\theta_p.$$

Então temos o seguinte

Teorema 3.2.4. *Sejam P^p e Q^p p-planos no $\mathbb{R}^n$ e sejam L^1 e M^1 os correspondentes subespaços 1-dimensionais de $\bigwedge^p(\mathbb{R}^n)$. Então, o ângulo entre P^p e Q^p em $\mathbb{R}^n$ coincide com o ângulo entre L^1 e M^1 em $\bigwedge^p(\mathbb{R}^n)$.*

Corolário 3.2.3. *Se P_1^p, P_2^p e P_3^p são três p-planos no $\mathbb{R}^n$, então o ângulo entre P_1^p e P_3^p é menor do que ou igual à soma dos ângulos entre P_1^p e P_2^p e entre P_2^p e P_3^p.*

Teorema 3.2.5. *Sejam P^P e Q^p p-planos em $\mathbb{R}^n$ e sejam $\{u_1, u_2, ..., u_p\}$ e $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ bases arbitrárias para P_0^p e Q_0^p, respectivamente. Então, o ângulo θ, entre P^p e Q^p é dado pela fórmula*

$$\cos\theta = \frac{\| \det\left(\langle u_i, v_j\rangle\right) \|}{\sqrt{\det\left(\langle u_i, u_j\rangle\right)}\sqrt{\det\left(\langle v_i, v_j\rangle\right)}}$$

Demonstração. Considere os p-vetores

$$x = u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_p \text{ e } y = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_p,$$

pertencentes aos subespaços 1-dimensionais L^1 e M^1, de $\bigwedge^p(\mathbb{R}^n)$, correspondentes a P^p e Q^p. Então, o ângulo ϕ, entre L^1 e M^1 é dado por

$$\cos\phi = \frac{\| \langle x, y\rangle \|}{\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{y, y\rangle}}.$$

Aplicando o teorema anterior e as fórmulas explícitas para o produto em $\bigwedge^p(\mathbb{R}^n)$, o resultado segue.

3.3 Relacionando a Curvatura com a Inclinação do Plano Osculador

A curvatura de uma curva plana, $\gamma(s)$, dá uma medida de quão rapidamente a curva se afasta, em uma vizinhaça de s, da reta tangente em s. Ela mede a taxa de variação do ângulo formado entre a reta tangente à curva em s e as tangentes vizinhas.

Assim, se $\theta(s)$ é o ângulo entre uma tangente fixada e a reta tangente no ponto, s é o comprimento de arco, então a curvatura pode ser definida como a taxa de variação deste ângulo, ou seja, a derivada $\theta'(s)$.

Embora tenhamos obtido as curvaturas para uma curva no $\mathbb{R}^n$ de forma bem diferente, mostraremos que, ainda assim, as curvaturas podem ser interpretadas como a taxa de variação da inclinação de planos oculadores.

Lembremos que, na Seção 3.1, obtivemos um conjunto de r vetores $V_1(s), ..., V_r(s)$ ortonormais adaptado à curva $f(s)$. Seja $1 \leq p \leq r$. Então temos a seguinte

Definição 3.3.1. *O subespaço $P_0^p(s)$ de $\mathbb{R}^n$, gerado pelos vetores $V_1(s), ..., V_p(s)$, é chamado p-ésimo subespaço osculador associado à curva no ponto dado. O p-plano $P^p(s)$ em $\mathbb{R}^n$, passando pelo ponto $f(s)$ e paralelo a $P_0^p(s)$, é chamado p-plano osculador à curva no ponto $f(s)$.*

Fixe o inteiro p, $1 \leq p \leq r$, e fixe um ponto no domínio da curva, $s_0 \in I$. Considere o plano osculador à curva em $f(s)$, $P^p(s)$. Defina $\theta(s)$ como o ângulo entre os planos $P^p(s_0)$ e $P^p(s)$. Então temos

Teorema 3.3.1. *O ângulo $\theta(s)$, entre os planos osculadores $P^p(s_0)$ e $P^p(s)$ possui* *derivada à direita em s_0 e $\theta'(s_0) = k_p(s_0)$.*

Para demonstrarmos o teorema acima, vamos precisar de um lema, que demonstramos a seguir:

Lema 3.3.1. *Seja $g : [s_0, s_1] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função tal que $\| g(s) \|= 1$ para todo $s \in [s_0, s_1]$. Seja $\theta(s)$ o ângulo entre os vetores $g(s_0)$ e $g(s)$. Se g tem derivada à direita em s_0, então θ também possui derivada à direita em s_0 e*

$$\theta'(s_0) =\| g'(s_0) \| .$$

Demonstração. Pela lei dos cossenos temos

$$\| g(s) - g(s_0) \|^2=\| g(s) \|^2 + \| g(s_0) \|^2 -2 \| g(s) \|\| g(s_0) \| \cos\theta,$$

que, por hipótese, se iguala a

$$\| g(s) - g(s_0) \|^2= 2 - 2\cos\theta.$$

Dividindo ambos os lados por 2, temos

$$\frac{1}{2} \| g(s) - g(s_0) \|^2= 1 - \cos\theta.$$

Sabemos que

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

Fazendo $2x = \theta$, obtemos

$$\frac{1}{2} \| g(s) - g(s_0) \|^2= 2\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2},$$

$$\| g(s) - g(s_0) \|^2= 4\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2},$$

donde,

$$\| g(s) - g(s_0) \|= 2\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}.$$

Agora, calculamos

$$
\begin{aligned}
\theta'(s_0) &= \lim_{s\to s_0+} \frac{\theta(s)-\theta(s_0)}{s-s_0} = \lim_{s\to s_0+} \frac{\theta(s)}{s-s_0} = \lim_{s\to s_0+} \frac{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta(s)}{2}\right)}{s-s_0} \\
&= \lim_{s\to s_0+} \frac{\| g(s)-g(s_0) \|}{s-s_0} = \lim_{s\to s_0+} \left\| \frac{g(s)-g(s_0)}{s-s_0} \right\| \\
&= \left\| \lim_{s\to s_0+} \frac{g(s)-g(s_0)}{s-s_0} \right\| = \| g'(s_0) \|,
\end{aligned}
$$

e o resultado segue. □

Demonstração do Teorema: Considere o p-vetor

$$x(s) = V_1(s) \wedge V_2(s) \wedge \cdots \wedge V_p(s).$$

Como $\{V_1(s), V_2(s), ..., V_p(s)\}$ é uma base ortonormal para o p-ésimo subespaço osculador $P_0^p(s)$, $x(s)$ correspondente a $P^p(s)$ tem comprimento 1 em $\bigwedge^p(\mathbb{R}^n)$. Segue do Teorema 3.2.4, que o ângulo entre $P_0^p(s)$ e $P^p(s)$ coincide com o ângulo entre $x(s_0)$ e $x(s)$.

Vamos mostrar que

$$\|x'(s_0)\| = k_p(s_0).$$

Derivando $x(s) = V_1(s) \wedge V_2(s) \wedge ... \wedge V_p(s)$ temos

$$x'(s) = \sum_{i=1}^{p} V_1(s) \wedge V_2(s) \wedge ... \wedge V_{i-1}(s) \wedge V_i'(s) \wedge V_{i+1}(s) \wedge ... \wedge V_p(s).$$

Utilizando as fórmulas (de Frenet) que obtivemos para as derivadas de $V_i(s)$ na Seção 3.1 e o fato de ser alternado o produto em $\bigwedge^p(\mathbb{R}^n)$, a única parcela não nula da soma acima é

$$x'(s) = V_1(s) \wedge V_2(s) \wedge \cdots \wedge V_{p-1}(s) \wedge V_p'(s).$$

Se $p \leq r$ ou se $p = r$ e $k_r(s) > 0$, usamos a fórmula de Frenet 3.1 e temos

$$\begin{aligned} x'(s) &= V_1(s) \wedge V_2(s) \wedge \cdots \wedge V_{p-1}(s) \wedge (-k_{p-1}(s)V_{p-1}(s) + k_p(s)V_{p+1}(s)) \\ &= k_p(s)(V_1(s) \wedge V_2(s) \wedge \cdots \wedge V_{p-1}(s) \wedge V_{p+1}(s)). \end{aligned}$$

Se por outro lado, $p = r$ e $k_r(s) = 0$, usamos a fórmula 3.2 e obtemos

$$x'(s) = V_1(s) \wedge V_2(s) \wedge \cdots \wedge V_{p-1}(s) \wedge (-k_{p-1}(s)V_{p-1}(s)) = 0.$$

Em qualquer dos dois casos temos

$$\|x'(s)\| = k_p(s),$$

pois $V_1(s) \wedge V_2(s) \wedge \cdots \wedge V_{p-1}(s) \wedge V_{p+1}(s)$ é unitário em $\bigwedge^p(\mathbb{R}^n)$.

Fazendo $s = s_0$ obtemos o resultado desejado. Agora o teorema segue diretamente do lema anterior. $\square$

Observação: Note que para $p = 1$, temos

$$\|V_1'(s)\| = k_1(s),$$

isto é, a primeira curvatura de uma curva é igual à norma da derivada do tangente unitário com respeito ao comprimento de arco, mesma fórmula apresentada no capítulo 2.

3.4 Curvas em $(\mathbb{R}^n, SO(n))$

Vejamos um exemplo de curva no $\mathbb{R}^4$ com curvaturas constantes.

Considere a curva $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4$, dada por

$$F(t) = (\cos pt, \operatorname{sen} pt, \cos qt, \operatorname{sen} qt),$$

onde p e q são números reais tais que $0 < p < q$.

Observe que a curva F está contida no toro

$$T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3^2 + x_4^4 = 1\}.$$

Assim, dados quaisquer dois pontos $P = (\cos pt_0, \operatorname{sen} pt_0, \cos qt_0, \operatorname{sen} qt_0)$ e $Q = (\cos pt_1, \operatorname{sen} pt_1, \cos qt_1, \operatorname{sen} qt_1)$ na curva, existe uma isometria do $\mathbb{R}^4$ que leva a curva nela mesma e leva P em Q. De fato, basta tomarmos $\theta = pt_1 - pt_0$ e $\phi = qt_1 - qt_0$ na matriz de rotação

$$R_{\theta,\phi} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

e aplicarmos a P, usando as relações trigonométricas e assim, obtermos Q,

$$\begin{aligned} R_{\theta,\phi}P &= \begin{pmatrix} \cos(pt_1 - pt_0)\cos pt_0 - \operatorname{sen}(pt_1 - pt_0)\operatorname{sen} pt_0 \\ \operatorname{sen}(pt_1 - pt_0)\cos pt_0 + \cos(pt_1 - pt_0)\operatorname{sen} pt_0 \\ \cos(qt_1 - qt_0)\cos qt_0 - \operatorname{sen}(qt_1 - qt_0)\operatorname{sen} qt_0 \\ \operatorname{sen}(qt_1 - qt_0)\cos qt_0 + \cos(qt_1 - qt_0)\operatorname{sen} qt_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos pt_1 \\ \operatorname{sen} pt_1 \\ \cos qt_1 \\ \operatorname{sen} qt_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, podemos calcular as curvaturas no zero, já que elas coincidem em todos os pontos da curva.

Calculamos $F'(t) = (-p\operatorname{sen} pt, p\cos pt, -q\operatorname{sen} qt, q\cos qt)$, $\| F'(t) \| = \sqrt{p^2+q^2}$ e reparametrizamos F por comprimento de arco,

$$F(s) = \left(\cos\frac{ps}{\sqrt{p^2+q^2}}, \operatorname{sen}\frac{ps}{\sqrt{p^2+q^2}}, \cos\frac{qs}{\sqrt{p^2+q^2}}, \operatorname{sen}\frac{qs}{\sqrt{p^2+q^2}}\right).$$

Calculamos

$$\begin{aligned}
F'(0) &= \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}(0,p,0,q),\\
F''(0) &= \frac{1}{p^2+q^2}(-p^2,0,-q^2,0),\\
F'''(0) &= \frac{1}{\sqrt{(p^2+q^2)^3}}(0,-p^3,0,-q^3),\\
F^{(iv)}(0) &= \frac{1}{(p^2+q^2)^2}(p^4,0,q^4,0),
\end{aligned}$$

e aplicamos Gram-Schmidt, obtendo

$$\begin{aligned}
E_1(0) &= \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}(0,p,0,q)\\
\| E_1(0) \| &= 1\\
V_1(0) &= \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}(0,p,0,q)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_2(0) &= \frac{1}{p^2+q^2}(-p^2,0,-q^2,0)\\
\| E_2(0) \| &= \frac{\sqrt{p^4+q^4}}{p^2+q^2}\\
V_2(0) &= \frac{1}{\sqrt{p^4+q^4}}(-p^2,0,-q^2,0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_3(0) &= \frac{p^2-q^2}{(p^2+q^2)^{5/2}}(0,-pq^2,0,p^2q)\\
\| E_3(0) \| &= \frac{pq(p^2-q^2)}{(p^2+q^2)^2}\\
V_3(0) &= \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}(0,-q,0,p)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E_4(0) &= \frac{p^2-q^2}{(p^2+q^2)^2(p^4+q^4)}(p^2q^4,0,-p^4q^2,0)\\
\| E_4(0) \| &= \frac{p^2q^2(p^2-q^2)}{(p^2+q^2)^2\sqrt{(p^4+q^4)}}\\
V_4(0) &= \frac{1}{\sqrt{p^4+q^4}}(q^2,0,-p^2,0)
\end{aligned}
$$

Agora, pelo Teorema 3.1.1, temos

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \frac{\| E_2(0) \|}{\| E_1(0) \|} = \frac{\sqrt{p^4+q^4}}{(p^2+q^2)},\\
k_2 &= \frac{\| E_3(0) \|}{\| E_2(0) \|} = \frac{pq(p^2-q^2)}{(p^2+q^2)\sqrt{(p^4+q^4)}},\\
k_3 &= \frac{\| E_4(0) \|}{\| E_3(0) \|} = \frac{pq}{\sqrt{(p^4+q^4)}}.
\end{aligned}
$$

3.5 Apêndice: Curvas Parametrizadas Arbitrariamente

Seja $\tilde{f} : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização arbitrária de uma curva regular, C^∞. Analogamente ao que fizemos na seção anterior, supomos

$$\{\tilde{f}'(t), ..., \tilde{f}^{(r)}(t)\}$$

um conjunto linearmente independente e calculamos

$$\{\tilde{E}_1(t), ..., \tilde{E}_{r+s}(t)\}$$

e

$$\{\tilde{V}_1(s), ..., \tilde{V}_r(s)\}.$$

Seja $I \subset \mathbb{R}$ e $h : I \longrightarrow J$ um difeomorfismo que preserva a orientação tal que

$$f = \tilde{f} \circ h$$

é uma parametrização por comprimento de arco da curva dada. Sabemos que esta mudança de parâmetros sempre existe.

Calculando as derivadas de f em termos de $\tilde{f}$, temos

$$f' = (\tilde{f} \circ h)'(s)h'(s) = \tilde{f}(t(s))\frac{d}{ds}t(s).$$

Agora fica fácil ver que os subespaços de $\mathbb{R}^n$ gerados pelos conjuntos

$$\{f'(s), ..., f^{(i)}(s)\} \quad \text{e} \quad \{\tilde{f}'(t(s)), ..., \tilde{f}^(i)(t(s))\}$$

são iguais. Em particular

$$\{f'(s), ..., f^{(i)}(s)\}$$

é linearmente independente para todo $s \in I$. Assim, podemos calcular

$$\{E_1(t), ..., E_{r+s}(t)\}$$

e

$$\{V_1(s), ..., V_r(s)\}$$

para a curva f.

Observando bem a derivada de f em termos de $\tilde{f}$, calculada segundo a regra da cadeia, fica claro que

Teorema 3.5.1. *Para $1 \leq i \leq r+1$, temos*

$$E_i(s) = \tilde{E}_i(t(s)) \left(\frac{dt}{ds}\right)^{(i)}$$

e, portanto,

$$\| E_i(s) \| = \frac{\| \tilde{E}_i(t(s)) \|}{\| \tilde{E}_1(t(s)) \|^i}.$$

Para $1 \leq i \leq r$,

$$V_i(s) = \tilde{V}_i(t(s)).$$

Seja $\tilde{k}_i(t)$ a i-ésima curvatura da curva $\tilde{f}$ no ponto $\tilde{f}(t)$. Então, como consequência dos dois últimos teoremas que vimos, obtemos

Teorema 3.5.2.

$$\tilde{k}_i(t) = \frac{\| \tilde{E}_{i+1}(t) \|}{\| \tilde{E}_1(t) \| \| \tilde{E}_i(t) \|}, \forall\ 1 \leq i \leq r.$$

Este resultado é realmente interessante, pois nos permite calcular as curvaturas de curvas parametrizadas arbitrariamente diretamente, sem a necessidade de se encontrar uma reparametrização por comprimento de arco, que nem sempre é fácil. Vejamos, o exemplo apresentado na Seção 3.4: tínhamos a curva $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4$, dada por

$$F(t) = (\cos pt, \operatorname{sen} pt, \cos qt, \operatorname{sen} qt),$$

onde p e q são números reais tais que $0 < p < q$. Esta parametrização não é por comprimento de arco. Vamos calcular as curvaturas segundo a fórmula dada pelo Teorema 3.5.2.

Calculamos

$$\begin{aligned} F'(0) &= (0, p, 0, q), \\ F''(0) &= (-p^2, 0, -q^2, 0), \\ F'''(0) &= (0, -p^3, 0, -q^3), \\ F^{(iv)}(0) &= (p^4, 0, q^4, 0), \end{aligned}$$

e aplicamos Gram-Schmidt, obtendo

$$\begin{aligned} E_1(0) &= (0, p, 0, q) \\ \| E_1(0) \| &= \sqrt{p^2 + q^2} \\ V_1(0) &= \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}}(0, p, 0, q) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E_2(0) &= (-p^2, 0, -q^2, 0)\\
\| E_2(0) \| &= \sqrt{p^4+q^4}\\
V_2(0) &= \frac{1}{\sqrt{p^4+q^4}}(-p^2, 0, -q^2, 0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_3(0) &= \frac{pq(q^2-p^2)}{(p^2+q^2)}(0, q, 0, -p)\\
\| E_3(0) \| &= \frac{pq(q^2-p^2)}{\sqrt{(p^2+q^2)}}\\
V_3(0) &= \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}(0, q, 0, -p)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_4(0) &= \frac{p^2q^2(q^2-p^2)}{(p^4+q^4)}(-q^2, 0, p^2, 0)\\
\| E_4(0) \| &= \frac{p^2q^2(q^2-p^2)}{\sqrt{(p^4+q^4)}}\\
V_4(0) &= \frac{1}{\sqrt{p^4+q^4}}(-q^2, 0, p^2, 0)
\end{aligned}
$$

As curvaturas são dadas por

$$
\begin{aligned}
k_1(0) &= \frac{\| E_2(0) \|}{\| E_1(0) \|\| E_1(0) \|} = \frac{\sqrt{p^4+q^4}}{p^2+q^2},\\
k_2(0) &= \frac{\| E_3(0) \|}{\| E_1(0) \|\| E_2(0) \|} = \frac{pq(q^2-p^2)}{(p^2+q^2)\sqrt{p^4+q^4}},\\
k_3(0) &= \frac{\| E_4(0) \|}{\| E_1(0) \|\| E_3(0) \|} = \frac{pq}{\sqrt{(p^4+q^4)}}.
\end{aligned}
$$

Observe que as curvaturas que obtivemos aqui coincidem com aquelas obtidas na Seção 3.4.

Capítulo 4

Geometria das Curvas em $\mathbb{R}^{2n}$ sob a Ação de $Sp(2n)$

4.1 Espaço Vetorial Simplético

Definição 4.1.1. *Um espaço vetorial simplético é um espaço vetorial M munido de uma forma bilinear $\Omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades adicionais:*

- *Ω é antissimétrica: $\Omega(u, v) = -\Omega(v, u), \forall u, v \in V$*
- *Ω é não-degenerada: se $\Omega(u, v) = 0, \forall v \in V \Rightarrow u = 0$*

Fixada uma base, as duas propriedades acima se traduzem, na forma matricial, em:

- antissimétrica: a matriz de Ω é antissimétrica,
- não degenerada: a matriz de Ω é não-singular, isto é, tem posto igual a dimensão de V.

A motivação da Geometria Simplética tem suas raízes na Mecânica Clássica [2], [4]; o Cálculo de Variações leva às *Equações de Hamilton*: dada uma função $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, o *campo hamiltoniano* X_H associado a H está definido por $dH(Y) = \Omega(X_H, Y)$ (que define X_H devido a não-degeneração de Ω), e os problemas da Mecânica Conservativa podem ser expressados neste formato.

Seja $V = \mathbb{R}^{2n}$. Fixada uma base $\{x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n\}$ obtemos a base dual $\{dx_1, ..., dx_n, dy_1, ..., dy_n\}$ e $\Omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n})$ é a forma canônica simplética

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

Assim, cada espaço tangente está munido de um produto interno simplético definido para $u = (\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n)$, $v = (\xi_1, ..., \xi_n, \omega_1, ..., \omega_n)$, escrito na base canônica como

$$\begin{aligned}
\langle u; v\rangle &= \Omega(u, v) \\
&= \Omega\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i; \sum_{j=1}^{n} \xi_j x_j + \sum_{j=1}^{n} \omega_j y_j\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} [(\alpha_i + \beta_i)(\xi_j + \omega_j)]\Omega(x_i, y_j)
\end{aligned}$$

A matriz de Ω na base $\{x_i, y_i\}$, $0 \leq i \leq n$, é $J = (a_{ij}) = (\Omega(x_i, y_j))$:

$$\begin{aligned}
\Omega(u,v) &= \sum_{i,j=1}^{n} [(\alpha_i + \beta_i)(\xi_j + \omega_j)]\Omega(x_i, y_j) \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n & \cdots & \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \\ \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} = [u]^t J [v] \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \omega_i - \beta_i \xi_i),
\end{aligned}$$

onde $J = \begin{pmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{pmatrix}$, com I_n a matriz identidade $n \times n$. Note que $\det J = 1$ e $J^{-1} = J^t = -J$.

Uma base $\{x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n\}$ que satisfaça

$$\begin{aligned}
\Omega(x_i, y_j) &= -\Omega(y_j, x_i) = \delta_{ij} \text{ e} \\
\Omega(x_i, x_j) &= \Omega(y_i, y_j) = 0
\end{aligned}$$

é chamada *Base de Darboux*. Sempre conseguimos construir uma base de Darboux.

4.2 Grupo de Movimentos Rígidos Simpléticos

Definição 4.2.1. *Sejam (V, ω), (W, ρ) espaços simpléticos. Então, uma aplicação $f : V \longrightarrow W$ é dita uma aplicação simplética se o pull-back f^* preserva a forma simplética:*

$$(f^*\rho)(u,v) = \rho(f(u), f(v)) = \omega(u,v), \forall u, v \in V$$

Aplicações simpléticas preservam volume, orientação e são isomorfismos.

Se $V = W$, f é chamada *transformação linear simplética* em V. Neste caso, o pull-back fica

$$f^*(\omega(u,v)) = \omega(f(u), f(v)) = \omega(u,v), \forall u, v \in V$$

O conjunto de todas as transformações lineares simpléticas de $V = \mathbb{R}^{2n}$ formam um grupo, na forma matricial, definido e denotado por

$$Sp(2n,\mathbb{R}) = \{M \in GL(2n,\mathbb{R}) : M^t JM = J\}.$$

A matriz M é chamada *matriz simplética.* Toda matriz simplética é invertível com inversa igual a $M^{-1} = J^{-1}M^tJ$. O produto de duas matrizes simpléticas é denovo uma matriz simplética, o que garante a estrutura de grupo de $Sp(2n,\mathbb{R})$, subgrupo de $GL(2n,\mathbb{R})$. Existe uma estrutura natural de variedade em $Sp(2n,\mathbb{R})$ que faz dele um grupo de Lie de dimensão $(n-1)(2n+1)$.

Derivando as condições acima, temos

$$\begin{aligned}(M^tJM)' &= J' \\ (M^t)'JM + M^t(JM)' &= 0 \\ (M')^tJM + M^tJM' &= 0.\end{aligned}$$

Multiplicando a expressão por M^{-1} à direita e por $(M^t)^{-1}$ à esquerda,

$$(M^{-1})^t(M')^tJ + JM'M^{-1} = 0$$

$$(M'M^{-1})^tJ + JM'M^{-1} = 0,$$

obtemos as condições que definem a álgebra de Lie de $Sp(2n,\mathbb{R})$

$$sp(2n,\mathbb{R}) = \left\{X \in \mathcal{G}l(2n) : XJ + JX^t = 0\right\}.$$

Proposição 4.2.1.

$$X \in sp(2n,\mathbb{R}) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} U & V \\ W & -U^t \end{pmatrix}, \quad onde \;\; V = V^t, W = W^t.$$

Demonstração. De fato, $X = \begin{pmatrix} U & V \\ W & -U^t \end{pmatrix}$, onde $V = V^t, W = W^t$, se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} U & V \\ W & -U^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & V \\ W & -U^t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -V & U \\ U^t & W \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V^t & -U \\ -U^t & -W^t \end{pmatrix} = O,$$

se, e somente se $X \in sp(2n,\mathbb{R})$. □

Definição 4.2.2. *Definimos o Grupo de Movimentos Rígidos Simpléticos como o produto semi-direto*

$$G = Sp(2n,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^{2n}.$$

O grupo G age em $\mathbb{R}^{2n}$ como uma transformação simplética afim

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n} \\ ((A,b),z) & \longmapsto & Az + b. \end{array}$$

Analogamente ao que fizemos no Capítulo 2, eliminamos a parte referente à translação e nos concentramos apenas no grupo $Sp(2n,\mathbb{R})$.

4.3 Referencial Simplético

Um referencial simplético associa a cada ponto de uma dada curva, satisfazendo algumas condições de regularidade que definiremos a seguir, uma base ordenada de vetores tangentes $\{a_1, ..., a_{2n}\}$ satisfazendo as seguintes relações de ortogonalidade simplética

$$\begin{aligned} \langle a_i; a_j\rangle &= \langle a_{i+n}; a_{j+n}\rangle &= 0, \qquad 1 \le i, j \le n, \\ & \langle a_i; a_{j+n}\rangle &= \delta_{ij}, \qquad 1 \le i, j \le n, \end{aligned}$$

isto é, a matriz cujas colunas são os vetores da base do referencial é uma matriz simplética.

Note que, como o produto está definido como a forma Ω, bilinear, então a última relação listada implica em

$$\frac{d}{ds}\langle a_i; a_{j+n}\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{da_i}{ds}; a_{j+n}\right\rangle = -\left\langle a_i; \frac{da_{j+n}}{ds}\right\rangle,$$

Em termos de referenciais simpléticos em $\mathbb{R}^{2n}$, como formas $Sp(2n)$-avaliadas, as equações de estrutura para um referencial simplético são da forma

$$\begin{aligned} da_i = & \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik} a_k + \sum_{k=1}^{n} \theta_{ik} a_{k+n} \\ da_{i+n} = & \sum_{k=1}^{n} \phi_{ik} a_k - \sum_{k=1}^{n} \omega_{ki} a_{k+n} \end{aligned} \qquad 1 \le i \le n,$$

onde as 1-formas satisfazem

$$\theta_{ij} = \theta_{ji}, \quad \phi_{ij} = \phi_{ji}, \quad \text{para todo} \quad 1 \le i, j \le n.$$

Assim, a matriz

$$\Theta = \begin{pmatrix} \omega & \theta \\ \phi & \omega^t \end{pmatrix}$$

assume valores na álgebra de Lie $sp(2n, \mathbb{R})$.

Note que podemos escrever as esquações de estrutura na forma

$$d \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix} = \Theta \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix}.$$

E, fazendo

$$\Gamma' = d\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix}_{\gamma(t)} (\gamma'(t)) \qquad e \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix}_{\gamma(t)}$$

encontramos uma forma familiar

$$\Gamma' = \Theta\Gamma \Rightarrow \Gamma'\Gamma^{-1} = \Theta \in sp(2n, \mathbb{R}).$$

4.4 Curvas Regulares Simpléticas

Definição 4.4.1. *Uma curva regular simplética é uma curva suave $z : I \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ definida num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ que satisfaz*

$$\langle z'; z'' \rangle \neq 0, \qquad \forall t \in I.$$

Definição 4.4.2. *Seja $t_0 \in I$. O comprimento de arco simplético s de uma curva regular simplética z a partir de t_0 é dado por*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \langle z'; z'' \rangle^{\frac{1}{3}} dt.$$

Definição 4.4.3. *Uma curva regular simplética parametrizada por comprimento de arco simplético é uma curva regular simplética z tal que*

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle z'; z'' \rangle^{\frac{1}{3}} dt = t_2 - t_1 \ \ \forall \ \ t_1, t_2 \in I, \quad t_1 \leq t_2.$$

Esta condição é equivalente a

$$\langle z'; z'' \rangle = 1 \ \ \forall \ t \in I.$$

Qualquer curva regular simplética pode ser reparametrizada por comprimento de arco simplético.

Proposição 4.4.1. *Seja $z : I \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ uma curva regular simplética e seja s o comprimento de arco simplético. Então, existe uma função inversa h de s, definida em $J = s(I)$ e uma reparametrização $w = z \circ h : J \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ de z, por comprimento de arco simplético.*

Demonstração. Como z é uma curva regular simplética, então para todo $s \in I$, temos

$$\langle z'(t); z''(t) \rangle \neq 0 \Rightarrow s'(t) \neq 0.$$

Como s é uma função contínua, segue que s é estritamente monótona em I. Logo, existe a inversa de s

$$h : J \longrightarrow I.$$

Além disso, temos

$$w' = \frac{dw}{ds} = \langle z'; z'' \rangle^{-\frac{1}{3}} z' \qquad \text{e} \qquad w'' = \frac{d^2w}{ds^2} = \langle z'; z'' \rangle^{-\frac{2}{3}} z'' + \frac{d^2h}{ds^2} z',$$

de modo que

$$\left\langle \frac{dw}{ds}; \frac{d^2w}{ds^2} \right\rangle = \left\langle \frac{z'}{\langle z'; z'' \rangle^{\frac{1}{3}}}; \frac{z''}{\langle z'; z'' \rangle^{\frac{2}{3}}} \right\rangle = 1.$$

□

4.5 Referencial Simplético Adaptado

Dada uma curva regular simplética parametrizada por comprimento de arco simplético $z : I \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ buscamos associar a ela um referencial simplético adaptado $\{a_1, ..., a_{2n}\}$.

Devemos escolher este referencial de forma que satisfaça as relações de ortogonalidade simplética e, é claro, carregue as informações sobre a curva z à qual queremos associá-lo.

Tomamos

$$a_1 = z' = \frac{dz}{ds}$$

e, como parece natural,

$$a_{n+1} = z'' = \frac{d^2 z}{ds},$$

já que $\langle a_1; a_{n+1} \rangle = 1 = \langle z'; z'' \rangle$.

Definimos

$$K_1 = \left\langle \frac{da_{n+1}}{ds}; a_{n+1} \right\rangle.$$

Então, inspirados no Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt e tendo sempre em mente relacionar as derivadas do primeiro grupo de n vetores $\{a_1, ..., a_n\}$ ao segundo grupo $\{a_{n+1}, ...a_{2n}\}$ e vice-versa, obtemos

$$\begin{aligned} a_{j+1} &= \frac{da_{n+j}}{ds} - K_j a_j - (1 - \delta_{j1}) a_{j-1}, \\ H_{j+1} &= -\left\langle \frac{da_{j+1}}{ds}; a_{j+1} \right\rangle \end{aligned} \qquad 1 \leq j \leq n-1.$$

Se $H_{j+1} \neq 0$ para todo $1 \leq j \leq n-2$, definimos

$$\begin{aligned} a_{n+j+1} = & \quad \frac{1}{H_{j+1}} \frac{da_{j+1}}{ds}, \\ K_{j+1} = & \left\langle \frac{da_{n+j+1}}{ds}; a_{n+j+1} \right\rangle \end{aligned} \qquad 1 \leq j \leq n-1.$$

Agora, de forma análoga ao que fizemos nos capítulos anteriores, definimos a_{2n} usando as relações de ortogonalidade

$$\begin{aligned} \langle a_i; a_{2n} \rangle = 0 \quad & \langle a_{n+i}; a_{2n} \rangle = 0 \\ \langle a_n; a_{2n} \rangle = 1 \quad & \langle \frac{da_n}{ds}; a_{2n} \rangle = 0 \end{aligned} \qquad 1 \leq i \leq n-1$$

e podemos definir

$$K_{j+1} = \left\langle \frac{da_{2n}}{ds}; a_{2n} \right\rangle.$$

Uma vez definido o referencial $\{a_1, ..., a_{2n}\}$ adaptado à curva z devemos provar que, de fato, é um referencial simplético e que satisfaz as equações de estrutura.

Proposição 4.5.1. *Seja $z : I \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ uma curva regular simplética parametrizada por comprimento de arco simplético e tal que $H_{j+1} \neq 0$ para todo $1 \leq j \leq n-2$. Então, o referencial $\{a_1, ..., a_{2n}\}$ definido ao longo da imagem de z é simplético.*

Demonstração. Por indução. Para $j = 1$, as relações de ortogonalidade seguem diretamente da definição de a_1 e de a_{n+1}:

$$\langle a_1; a_1 \rangle = \langle z'; z' \rangle = 0, \qquad \langle a_{n+1}; a_{n+1} \rangle = \langle z''; z'' \rangle = 0 \text{ e}$$

$$\langle a_1; a_{n+1} \rangle = \langle z'; z'' \rangle = 1.$$

Hipótese de indução: Suponha que para algum $j \in \{1, 2, ..., n-2\}$ e para todo $i, l \in \{1, 2, ..., j\}$ as relações de ortogonalidade, valham, isto é

$$\langle a_i; a_l \rangle = \langle a_{n+i}; a_{n+l} \rangle = 0 \qquad \text{e} \qquad \langle a_i; a_{n+l} \rangle = -\langle a_{n+l}; a_i \rangle = \delta il.$$

Vamos mostrar que estas relações são válidas também para a_{j+1} e a_{n+j+1}:

$$\begin{aligned} \langle a_{j+1}; a_l \rangle &= \left\langle \frac{dan + j}{ds} - K_j a_j - (1 - \delta_{j1}) a_{j-1}; a_l \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{da_{n+j}}{ds}; a_l \right\rangle - K_j \langle a_j; a_l \rangle - (1 - \delta_{j1}) \langle a_{j-1}; a_l \rangle \\ &= -\left\langle an + j; \frac{da_l}{ds} \right\rangle. \end{aligned}$$

Como $a_{n+l} = \dfrac{1}{H_l} \dfrac{da_l}{ds} \Rightarrow \dfrac{da_l}{ds} = H_l a_{n+l}$, então

$$\langle a_{j+1}; a_l \rangle = -\langle a_{n+j}; H_l a_{n+l} \rangle = -H_l \langle a_{n+j}; a_{n+l} \rangle = 0.$$

Resta mostrarmos que $\langle a_{j+1}; a_{n+l}\rangle = \delta_{j+1,l} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad j+1 \neq l \\ 1, & \text{se} \quad j+1 = l \end{cases}$.
Vejamos

$$\begin{aligned}
\langle a_{j+1}; a_{n+l}\rangle &= \left\langle \frac{da_{n+j}}{ds} - K_j a_j - (1-\delta_{j1})a_{j-1}; a_{n+l} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{da_{n+j}}{ds}; a_{n+l} \right\rangle - K_j\langle a_j; a_{n+l}\rangle - (1-\delta_{j1})\langle a_{j-1}; a_{n+l}\rangle.
\end{aligned}$$

Se $l = j$, então

$$\langle a_{j+1}; a_{n+l}\rangle = \langle a_{j+1}; a_{n+j}\rangle = \left\langle \frac{da_{n+j}}{ds}; a_{n+j} \right\rangle - K_j = 0.$$

Se $2 \leq l < j$, como

$$\left\langle \frac{da_{n+j}}{ds}; a_{n+l} \right\rangle \Rightarrow -\left\langle a_{n+j}; \frac{da_{n+l}}{ds} \right\rangle,$$

então

$$\begin{aligned}
\langle a_{j+1}; a_{n+l}\rangle &= -\left\langle a_{n+j}; \frac{da_{n+l}}{ds} \right\rangle - K_j\delta_{jl} - \delta_{j-1,l} + \delta_{j1}\delta_{j-1,l} \\
&= -\langle a_{n+j}; a_{l+1} + K_l a_l + (1-\delta_{l1})a_{l-1}\rangle - K_j\delta_{jl} - \delta_{j-1,l} + \delta_{j1}\delta_{j-1,l} \\
&= -\langle a_{n+j}; a_{l+1}\rangle - K_l\langle a_{n+j}; a_l\rangle - \langle a_{n+j}; a_{l-1}\rangle + \delta_{l1})\langle a_{n+j}; a_{l-1}\rangle \\
&\quad -K_j\delta_{jl} - \delta_{j-1,l} + \delta_{j1}\delta_{j-1,l} \\
&= \delta_{l+1,j} + K_l\delta_{l,j} + \delta_{l-1,j} - \delta_{l1}\delta_{l-1,j} - K_j\delta_{jl} - \delta_{j-1,l} + \delta_{j1}\delta_{j-1,l} \\
&= \delta_{l+1,j} + \delta_{l-1,j} - \delta_{j-1,l}.
\end{aligned}$$

Para $j = l-1$ temos $l = j+1 > j$, o que contraria nossa hipótese inicial. Por outro lado, se $j = l+1$ (ou l = j-1) , segue que

$$\langle a_{j+1}; a_{n+l}\rangle = 1 + 0 - 1 = 0,$$

como queríamos mostrar. Se $j \neq l-1$ e $j \neq l+1$, então todos os δ's se anulam e o resultado segue diretamente.

Se $l = 1 < j$, temos

$$\begin{aligned}
\langle a_{j+1}; a_{n+l} \rangle &= \langle a_{j+1}; a_{n+1} \rangle \\
&= \left\langle \frac{da_{n+j}}{ds}; a_{n+1} \right\rangle - K_j \langle a_j; a_{n+1} \rangle - (1 - \delta_{j1}) \langle a_{j-1}; a_{n+1} \rangle \\
&= -\left\langle a_{n+j}; \frac{da_{n+1}}{ds} \right\rangle - K_j \delta_{j1} - (1 - \delta_{j1}) \delta_{j-1,1}
\end{aligned}$$

Agora,

$$a_2 = \frac{da_n + 1}{ds} - K_1 a_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{da_{n+1}}{ds} = a_2 + K_1 a_1.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\langle a_{j+1}; a_{n+1} \rangle &= -\langle a_{n+j}; a_2 \rangle - K_1 \langle a_{n+j}; a_1 \rangle - \delta_{j-1,1} \\
&= \delta_{2j} + K_1 \delta 1j - \delta_{j-1,1} = \delta_{2j} - \delta_{j-1,1} = 0,
\end{aligned}$$

para qualquer valor de $j \in \{1, 2, ..., n-2\}$. Ainda, se $l = j+1$, então $j = l-1$ e

$$\langle a_{j+1}; a_{n+l} \rangle = \langle a_l; a_{n+l} \rangle = \delta_{ll} = 1.$$

Portanto, valem as relações de ortogonalidade, o que faz do referencial $\{a_1, ..., a_{2n}\}$ um referencial simplético, como queríamos. $\square$

Proposição 4.5.2. *Seja $z : I \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ uma curva regular simplética parametrizada por comprimento de arco simplético e tal que $H_j + 1 \neq 0$ para todo $1 \leq j \leq n-2$. Então, o referencial $\{a_1, ..., a_{2n}\}$ definido ao longo da imagem de z satisfaz as equações de estrutura*

$$\begin{array}{rclrcll}
\dfrac{da_1}{ds} &=& a_{n+1} & \dfrac{da_i}{ds} &=& H_i a_{n+i}, & 2 \leq i \leq n \\
\dfrac{da_{n+1}}{ds} &=& K_1 a_1 + a_2 & \dfrac{da_{n+j}}{ds} &=& a_j - 1 + K_j a_j + a_{j+1}, & 2 \leq j \leq n-1 \\
\dfrac{da_{2n}}{ds} &=& a_{n-1} + K_n a_n & & & &
\end{array}$$

Demonstração. A primeira equação de estrutura segue diretamente da definição de a_1 e a_{n+1}:

$$\frac{da_1}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{dz}{ds} = \frac{d^2z}{ds^2} = a_{n+1}.$$

Para provarmos a segunda equação façamos $i = j+1$, então para $2 \leq i \leq n-1$, isto é, $1 \leq j \leq n-2$, temos:

$$a_{n+j+1} = \frac{1}{H_{j+1}}\frac{da_{j+1}}{ds} \quad \Rightarrow \quad \frac{da_i}{ds} = H_i a_{n+i}.$$

Se $i = n$, então escrevemos:

$$\frac{da_n}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_{n+i}.$$

Temos

$$0 = \left\langle \frac{da_n}{ds}; a_{2n} \right\rangle = \alpha_n.$$

Para $1 \leq i \leq n-1$, temos

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \left\langle \frac{da_n}{ds}; a_{n+i} \right\rangle = -\left\langle a_n; \frac{da_{n+i}}{ds} \right\rangle \\ &= -\langle a_n; a_{i+1} + K_i a_i + (1-\delta_{i1})a_{i-1} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Temos ainda

$$H_n = -\left\langle \frac{da_n}{ds}; a_n \right\rangle = -\beta_n.$$

E para $1 \leq i \leq n-1$, temos

$$\beta_i = -\left\langle \frac{da_n}{ds}; a_i \right\rangle = \left\langle a_n; \frac{da_i}{ds} \right\rangle = 0,$$

pois

$$\begin{aligned} \left\langle a_n; \frac{da_i}{ds} \right\rangle &= \left\langle \frac{da_{2n-1}}{ds}; \frac{da_i}{ds} \right\rangle - K_{n-1}\left\langle a_{n-1}; \frac{da_i}{ds} \right\rangle - (1-\delta_{n-1,1})\left\langle a_{n-2}; \frac{da_i}{ds} \right\rangle \\ &= H_i\langle a_{n-2}; a_{n+i}\rangle + H_i K_{n-1}\langle a_{n-1}; a_{n+i}\rangle + H_i\langle a_n; a_{n+i}\rangle \\ &\quad -H_i K_{n-1}\langle a_{n-1}; a_{n+i}\rangle - H_i\langle a_{n-2}; a_{n+i}\rangle \end{aligned}$$

Se $i = n - 1$, então

$$\left\langle a_n; \frac{da_i}{ds} \right\rangle = H_{n-1}K_{n-1} - H_{n-1}K_{n-1} = 0.$$

Se $i = n - 2$, então

$$\left\langle a_n; \frac{da_i}{ds} \right\rangle = H_i - H_i = 0.$$

Se $2 \leq i \leq n - 2$, então

$$\left\langle a_n; \frac{da_i}{ds} \right\rangle = 0$$

diretamente. Com isso provamos a segunda equação de estrutura.

Para a terceira e a quarta, com $2 \leq j \leq n - 1$, temos

$$a_2 = \frac{da_{n+1}}{ds} - K_1 a_1 - (1 - \delta_{11})a_{1-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{da_{n+1}}{ds} = K_1 a_1 + a_2$$

$$a_{j+1} = \frac{da_{n+j}}{ds} - K_j a_j - (1 - \delta_{j1})a_{j-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{da_{n+j}}{ds} = a_{j-1} + K_j a_j + a_j + 1.$$

Finalmente, para provar a quinta e última equação, escrevemos:

$$\frac{da_{2n}}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_{n+i}.$$

Diretamente, temos

$$K_n = \left\langle \frac{da_{2n}}{ds}; a_{2n} \right\rangle = \alpha_n.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\alpha_{n-1} &= \left\langle \frac{da_{2n}}{ds}; a_{2n-1} \right\rangle = -\left\langle a_{2n}; \frac{da_{2n-1}}{ds} \right\rangle \\
&= -\langle a_{2n}; a_n \rangle - K_{n-1}\langle a_{2n}; a_{n-1} \rangle - (1 - \delta_{n-1,1})\langle a_{2n}; a_{n-2} \rangle \\
&= \langle a_n; a_{2n} \rangle = 1.
\end{aligned}$$

Se $1 \leq i \leq n - 2$, então

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \left\langle \frac{da_{2n}}{ds}; a_{n+i} \right\rangle = -\left\langle a_{2n}; \frac{da_{n+i}}{ds} \right\rangle \\
&= -\langle a_{2n}; a_{i+1} \rangle - K_i\langle a_{2n}; a_i \rangle - (1 - \delta_{i,1})\langle a_{2n}; a_{i-1} \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Se $1 \leq i \leq n$, daí

$$\begin{aligned} \beta_i &= \left\langle \frac{da_{2n}}{ds}; a_i \right\rangle = -\left\langle a_{2n}; \frac{da_i}{ds} \right\rangle \\ &= -H_i \langle a_{2n}; an+i \rangle = 0. \end{aligned}$$

E o resultado segue. $\square$

Assim, as funções $H_2, ..., H_n$ e $K_1, ..., K_n$ fazem o papel das curvaturas simpléticas para curvas regulares simpléticas.

Note que podemos escrever as equações de estrutura na forma

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix},$$

onde B é a matriz

$$B = \begin{pmatrix} O_n & H \\ K & O_n \end{pmatrix},$$

com O_n a matriz nula $n \times n$,

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & H_n \end{pmatrix} \text{ e } K = \begin{pmatrix} K_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & K_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & K_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & K_n \end{pmatrix}.$$

Agora apresentamos um teorema semelhante ao *Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas.*

Teorema 4.5.1. *Sejam $H_2, ..., H_n$ e $K_1, ..., K_n$, $2n-1$ funções reais continuamente diferenciáveis, definidas em $I \subset \mathbb{R}$, com $H_j \neq 0$ para todo $2 \leq j \leq n-1$.*

Então, existe, a menos de um movimento rígido simplético $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega)$*, uma única curva regular simplética* $z : I \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$*, parametrizada por comprimento de arco simplético, cujos invariantes locais simpléticos são dados pelas funções* $H_2, ..., H_n$ *e* $K_1, ..., K_n$*.*

Demonstração. A demonstração é análoga a que exibimos para o Teorema Fundamental da Teoria Local de Curvas da Geometria Euclidiana, no Capítulo 2.

A existência de um triedro de Frenet satisfazendo as equações de estrutura

$$\begin{array}{rclrcll} \dfrac{da_1}{ds} & = & a_{n+1} & \dfrac{da_i}{ds} & = & H_i a_{n+i}, & 2 \leq i \leq n \\ \dfrac{da_{n+1}}{ds} & = & K_1 a_1 + a_2 & \dfrac{da_{n+j}}{ds} & = & a_j - 1 + K_j a_j + a_{j+1}, & 2 \leq j \leq n-1 \\ \dfrac{da_{2n}}{ds} & = & a_n - 1 + K_n a_n & & & & \end{array}$$

segue do Teorema Global de Existência e Unicidade para sistemas lineares de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, com coeficientes diferenciáveis, com condições iniciais dadas por

$$\begin{array}{rclcll} \langle a_i; a_j \rangle & = & \langle a_{i+n}; a_{j+n} \rangle & = & 0, & 1 \leq i, j \leq n, \\ & & \langle a_i; a_{j+n} \rangle & = & \delta_{ij}, & 1 \leq i, j \leq n. \end{array}$$

A unicidade é obtida a partir do sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\langle a_i; a_j\rangle &= \delta_{i1}\langle a_{n+1}; a_j\rangle + (1-\delta_{i1})H_i\langle a_{n+i}; a_j\rangle + \\
&\quad +\delta_{j1}\langle a_i; a_{n+1}\rangle + (1-\delta_{j1})H_j\langle a_i; a_{n+j}\rangle \\
\frac{d}{ds}\langle a_i; a_{n+j}\rangle &= \delta_{i1}\langle a_{n+1}; a_{n+j}\rangle + (1-\delta_{i1})H_i\langle a_{n+i}; a_{n+j}\rangle + \\
&\quad +(1-\delta_{j1})\langle a_i; a_{j-1}\rangle + K_j\langle a_i; a_j\rangle + (1-\delta_{jn})\langle a_i; a_{j+1}\rangle \\
\frac{d}{ds}\langle a_{n+i}; a_j\rangle &= (1-\delta_{i1})\langle a_{i-1}; a_j\rangle + K_i\langle a_i; a_j\rangle + (1-\delta_{in})\langle a_{i+1}; a_j\rangle + \\
&\quad +\delta_{1j}\langle a_{n+i}; a_{n+1}\rangle + (1-\delta_{ij})H_j\langle a_{n+i}; a_{n+j}\rangle \\
\frac{d}{ds}\langle a_{n+i}; a_{n+j}\rangle &= (1-\delta_{i1})\langle a_{i-1}; a_{n+j}\rangle + K_i\langle a_i; a_{n+j}\rangle + \\
&\quad +(1-\delta_{in})\langle a_{i+1}; a_{n+j}\rangle + (1-\delta_{j1})\langle a_{n+i}; a_{j-1}\rangle \\
&\quad +K_j\langle a_{n+i}; a_j\rangle + (1-\delta_{jn})\langle a_{n+i}; a_{j+1}\rangle,
\end{aligned}$$

mostrando que qualquer solução das equações de estrutura dá origem a uma solução deste sistema. Como fizemos no Capítulo 2, basta verificar que qualquer referencial que satisfaça às relações de ortogonalidade simplética é uma solução para este sistema. Portanto, as soluções das equações de estrutura com as condições iniciais dadas, satisfazem as relações de ortogonalidade simplética. □

As expressões para os invariantes locais de curvas simpléticas podem ser bastante complexas para uma parametrização geral. Contudo, se a curva regular simplética $z(s)$ está parametrizada por comprimento de arco simplético as expressões para os invariantes locais são bastante simples, como,

$$K_1 = \left\langle \frac{d^3z}{ds^3}; \frac{d^2z}{ds^2} \right\rangle \text{ e } H_2 = -\left\langle \frac{d^4z}{ds^4}; \frac{d^3z}{ds^3} \right\rangle$$

4.6 Curvas em $(\mathbb{R}^{2n}, Sp(2n))$

Queremos conhecer os objetos simples da geometria de $(\mathbb{R}^{2n}, Sp(2n))$. Nesta seção, abordaremos as curvas regulares simpléticas com invariantes locais simpléticos constantes em $(\mathbb{R}^4, Sp(4))$.

As equações de estrutura ficam

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_2 \\ K_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & K_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

com H_2, K_1, K_2 constantes, e

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_2 \\ K_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & K_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} Z \quad \Rightarrow \quad Z'Z^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_2 \\ K_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & K_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos os autovalores da matriz $Z'Z^{-1}$

$$\begin{vmatrix} -\mu & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & H_2 \\ K_1 & 1 & -\mu & 0 \\ 1 & K_2 & 0 & -\mu \end{vmatrix} = -\mu \begin{vmatrix} -\mu & 0 & H_2 \\ 1 & -\mu & 0 \\ K_2 & 0 & -\mu \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\mu & H_2 \\ K_1 & 1 & 0 \\ 1 & K_2 - \mu & \end{vmatrix} =$$

$$= -\mu(-\mu^3 + \mu H_2 K_2) + (H_2 K_1 K_2 - H_2 - \mu^2 K_1) = \mu^4 - \mu^2 H_2 K_2 - \mu^2 K_1 + H_2(K_1 K_2 - 1) =$$

$$= \mu^4 - \mu^2(H_2 K_2 + K_1) + H_2(K_1 K_2 - 1).$$

Fazendo $\mu^2 = x$ temos

$$x^2 - x(H_2 K_2 + K_1) + H_2(K_1 K_2 - 1)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= [-(H_2 K_2 + K_1)]^2 - 4H_2(K_1 K_2 - 1) \\ \Delta &= (H_2 K_2 + K_1)^2 - 4H_2 K_1 K_2 + 4H_2 \\ \Delta &= (H_2 K_2)^2 + 2H_2 K_2 K_1 + {K_1}^2 - 4H_2 K_1 K_2 + 4H_2 \\ \Delta &= (H_2 K_2)^2 - 2H_2 K_2 K_1 + {K_1}^2 + 4H_2 \\ \Delta &= (H_2 K_2 - K_1)^2 + 4H_2. \end{aligned}$$

Daí,

$$x = \frac{H_2K_2 + K_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Logo,

$$\mu = \pm\frac{\sqrt{H_2K_2 + K_1 \pm \sqrt{\Delta}}}{\sqrt{2}}.$$

Sejam $\lambda_1 = H_2K_2 + K_1$ e $\lambda_2 = \Delta$=($H_2K_2 - K_1)^2 + 4H_2$. Então os autovalores são

$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\lambda_1 + \sqrt{\lambda_2}}, \qquad \mu_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\lambda_1 + \sqrt{\lambda_2}},$$
$$\mu_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\lambda_1 - \sqrt{\lambda_2}}, \qquad \mu_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\lambda_1 - \sqrt{\lambda_2}}.$$

Note que

$$\mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4 = 0 \text{ e}$$

$$\mu_1\mu_3 = \mu_2\mu_4 = \frac{1}{2}\sqrt{(\lambda_1 + \sqrt{\lambda_2})(\lambda_1 - \sqrt{\lambda_2})} = \frac{1}{2}\sqrt{{\lambda_1}^2 - \lambda_2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{(K_2H_2)^2 + 2K_2H_2K_1 + {K_1}^2 - (K_2H_2)^2 + 2K_2H_2K_1 - {K_1}^2 - 4H_2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{4H_2(K_1K_2 - 1)} = \sqrt{H_2(K_1K_2 - 1)}.$$

Fica claro que o conjunto de autovalores da matriz $Z'Z^{-1}$ depende das curvaturas simpléticas da curva. Observemos os casos:

$$(1)\quad Se \quad \begin{array}{l} \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 + \sqrt{\lambda_2} > 0 \\ \lambda_1 - \sqrt{\lambda_2} > 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \in \mathbb{R} \\ \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \mu_4 \end{array}$$

$$(2)\quad Se \quad \begin{array}{l} \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 + \sqrt{\lambda_2} > 0 \\ \lambda_1 - \sqrt{\lambda_2} < 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, & \mu_1 \neq \mu_2 \\ \mu_3, \mu_4 \in \mathbb{C}, & \mu_3 = \overline{\mu_4} \end{array}$$

$$(3) \quad Se \quad \begin{array}{l} \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 + \sqrt{\lambda_2} < 0 \\ \lambda_1 - \sqrt{\lambda_2} > 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}, & \mu_1 = \overline{\mu_2} \\ \mu_3, \mu_4 \in \mathbb{R}, & \mu_3 \neq \mu_4. \end{array}$$

$$(4) \quad Se \quad \begin{array}{l} \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 + \sqrt{\lambda_2} < 0 \\ \lambda_1 - \sqrt{\lambda_2} < 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \in \mathbb{C} \\ \mu_1 = \overline{\mu_2} \text{ e } \mu_3 = \overline{\mu_4} \end{array}$$

$$(5) \quad Se \quad \begin{array}{l} \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 + \sqrt{\lambda_2} = 0 \\ \lambda_1 - \sqrt{\lambda_2} = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \in \mathbb{R} \\ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0 \end{array}$$

$$(6) \quad Se \quad \lambda_2 < 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \in \mathbb{C} \\ \mu_1 = \overline{\mu_2} \text{ e } \mu_3 = \overline{\mu_4} \end{array}$$

$$(7) \quad Se \quad \begin{array}{l} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 > 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \in \mathbb{R} \\ \mu_1 = \mu_3 \text{ e } \mu_2 = \mu_4 \end{array}$$

$$(8) \quad Se \quad \begin{array}{l} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 < 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \in \mathbb{C} \\ \mu_1 = \mu_3, \mu_2 = \mu_4 \end{array}$$

Usamos a barra sobreposta para indicar o conjugado.

No caso (5), teremos $\sqrt{H_2(K_1K_2 - 1)} = 0$, o que implica que $H_2 = 0$ ou $K_1K_2 = 1$. No caso (8), observe que devemos ter $\mu_1 = \overline{\mu_2}$ e esta condição indica que $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ são imaginários puros.

Dependendo de qual dos casos acima enumerados corresponde ao espectro (conjunto dos autovalores) da matriz simplética de Frenet, obtemos curvas de curvatura constante, que são "hélices simpléticas" do tipo euclidiano ou hiperbólico, ou suas degenerações.

Façamos um exemplo mais concreto, tomando $H_2 = K_1 = K_2 = 0$. Então o sistema fica

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}.$$

Integrando a segunda equação $a_2' = 0$ temos facilmente que

$$a_2 = (k_1, k_2, k_3, k_4).$$

De $a_3' = a_2$, vem que

$$a_3 = (k_1 s + c_1, k_2 s + c_2, k_3 s + c_3, k_4 s + c4)$$

e de $a_1' = a_3$, temos

$$a_1 = \left(\frac{k_1}{2}s^2 + c_1 s + d_1, \frac{k_2}{2}s^2 + c_2 s + d_2, \frac{k_3}{2}s^2 + c_3 s + d_3, \frac{k_4}{2}s^2 + c_4 s + d_4\right).$$

Como $a_4' = a_1$, segue que

$$a_4 = \left(\frac{k_1}{6}s^3 + c_1/2s^2 + d_1 s + e_1, \frac{k_2}{6}s^3 + c_2/2s^2 + d_2 s + e_2, \frac{k_3}{6}s^3 + c_3/2s^2 + d_3 s + e_3, \frac{k_4}{6}s^3 + c_4/2s^2 + d_4 s + e_4\right).$$

Lembrando que $a_1 = \dfrac{dz}{ds}$, temos que a curva $z(s)$, que possui todas curvaturas nulas em $(\mathbb{R}^4, Sp(4))$, é da forma $a_4(s)$, determinada acima.

Se, por outro lado, tomarmos $H_2 = 0$ e $K_1 = K_2 = 1$, teremos

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix},$$

cujas equações correspondentes serão

$$\begin{cases} a_1' = a_3 \\ a_2' = 0 \\ a_3' = a_1 + a_2 = a_4' \end{cases}.$$

Portanto, como $a_2 = k$, temos,

$$\begin{aligned} a_3' &= a_1 + k \\ a_1' &= a_3. \end{aligned}$$

Tomando a derivada da segunda equação e sustituindo na terceira, fica

$$a_3'' = a_1' = a_3,$$

e então

$$\begin{aligned} a_3(s) &= c_1 \exp(s) + c_2 \exp(-s), \\ a_1(s) &= \int a_3 = c_1 \exp(s) - c_2 \exp(-s) + c_3, \end{aligned}$$

onde c_1, c_2 e c_3 são vetores constantes no $\mathbb{R}^4$.

Usando o mesmo raciocínio para a_4, temos

$$\begin{aligned} a_4' &= a_1 + k \\ a_1' &= a_3, \end{aligned}$$

e,

$$a_4'' = a_1' = a_3 = c_1 \exp(s) + c_2 \exp(-s).$$

Integrando duas vezes, a equação acima, resulta

$$a_4(s) = c_1 \exp(s) + c_2 \exp(-s) + c_3 s + c_4,$$

onde, assim como c_1, c_2 e c_3, c_4 é um vetor constante em $\mathbb{R}^4$

Logo, a curva procurada é a hélice hiperbólica

$$\begin{aligned} z(s) &= c_1 \exp(s) + c_2 \exp(-s) + c_3 s \\ &= \begin{pmatrix} c_1^1 \exp(s) + c_2^1 \exp(-s) + c_3^1 s \\ c_1^2 \exp(s) + c_2^2 \exp(-s) + c_3^2 s \\ c_1^3 \exp(s) + c_2^3 \exp(-s) + c_3^3 s \\ c_1^4 \exp(s) + c_2^4 \exp(-s) + c_3^4 s) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde $c_i = (c_i^1, c_i^2, c_i^3, c_i^4)$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

Capítulo 5

Geometria das Curvas em $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ sob a Ação de $SL(2)$

5.1 Preliminares

Apresentamos abaixo alguns conceitos preliminares importantes[1]:

- Reta Projetiva Real

  $$\mathbb{R}\mathrm{P}^1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \,/ \sim,$$

  onde a relação de equivalência é dada por

  $$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Leftrightarrow \text{existe um número real } \lambda \neq 0, \text{ tal que } \mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}.$$

- $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ como Variedade Homogênea Considere a ação do grupo $GL(2)$ sobre $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$

  $$\begin{array}{rcl} \tilde{\alpha} : GL(2) \times \mathbb{R}\mathrm{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \\ (A, [p]) & \longmapsto & A([p]) = [A(p)], \end{array}$$

[1] Neste capítulo utilizaremos negrito para vetores e funções vetoriais.

onde $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ e o ponto projetivo $[\mathbf{p}] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ está associado à reta que passa por $\mathbf{p}$ e pela origem em $\mathbb{R}^2$.

A ação é transitiva, pois dados dois vetores não nulos, $\mathbf{x}, y \in \mathbb{R}\mathrm{P}^1$, existe uma transformação linear $M \in GL(2)$ tal que $M\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Note, contudo, que o subgrupo de $GL(2)$,

$$K = \left\{H \in GL(2) : H\mathbf{m} = \mathbf{m}, \forall \mathbf{m} \in \mathbb{R}\mathrm{P}^1\right\}$$

é não trivial. Com efeito,

$$K = \left\{\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

é subgrupo normal de $GL(2)$. Assim, o grupo que age fielmente sobre o $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ é

$$PGL(2) = \frac{GL(2)}{K},$$

isto é, se M é múltiplo da identidade, então identificamos M com I. E passamos a considerar a ação de $PGL(2)$ sobre $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$

$$\widehat{\alpha} : PGL(2) \times \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^1.$$

Fixado $\mathbf{m}_0 = (1, 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, o subgrupo de isotropia $H_{\mathbf{m}_0}$ de $PGL(2)$ em $\mathbf{m}_0$ é isomorfo a

$$\left\{\left[\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right] : \lambda, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}\right\}.$$

De fato,

$$M.\mathbf{m}_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, M \in PGL(2)$$

Por outro lado, se $M \in H_{\mathbf{m}_0}$, então,

$$M.\mathbf{m}_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Portanto,

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

como $H_{\mathbf{m}_0} \subset PGL(2)$, então

$$detM \neq 0 \quad \Rightarrow d \neq 0 \Rightarrow d \in GL(1) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Assim, existe um difeomorfismo, β, entre $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ e o espaço homogêneo $\dfrac{PGL(2)}{H_{\mathbf{m}_0}}$:

$$\begin{tikzcd} PGL(2) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \\ \dfrac{PGL(2)}{H_{\mathbf{m}_0}} \arrow[ur, dashed, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

onde

$$\begin{array}{rcccc} \pi & : & PGL(2) & \longrightarrow & \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \\ & & M & \longmapsto & M.\mathbf{m}_0 \end{array}$$

Como a ação α é transitiva, π é sobrejetora (dado $x \in \mathbb{R}\mathrm{P}^1$, existe $M \in PGL(2)$ tal que $M\mathbf{m}_0 = x$, isto é $\pi(M) = x$) e, obviamente, não injetora.

$$\begin{array}{rcccc} \rho & : & PGL(2) & \longrightarrow & \dfrac{PGL(2)}{H_{\mathbf{m}_0}} \\ & & M & \longmapsto & M.H_{\mathbf{m}_0} \end{array}$$

(Existe uma única estrutura diferenciável para a qual ρ é uma aplicação C^∞).

$$
\begin{array}{rcccl}
\beta & : & \dfrac{PGL(2)}{H_{\mathbf{m}_0}} & \longrightarrow & \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \\
 & & M.H_{\mathbf{m}_0} & \longmapsto & \alpha(M, \mathbf{m}_0) = M.\mathbf{m}_0
\end{array}
$$

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \cong \frac{PGL(2)}{H_{\mathbf{m}_0}}$$

Observe que

$$PGL(2) = \frac{GL(2)}{\lambda I} \cong \frac{SL(2)}{\pm I}$$

o que nos permite, de agora em diante, trabalhar com a ação de $SL(2)$ sobre $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$

$$\alpha : SL(2) \times \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^1.$$

- Problema de Equivalência

Dadas duas curvas $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ e $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^1$, $I \subset \mathbb{R}$, quais são as condições necessárias para que exista uma aplicação projetiva $M \in SL(2)$ tal que $M\gamma = \sigma$?

Sabemos que $M\gamma = \sigma \Rightarrow M\gamma' = \sigma'$ e se existem levantadas Γ para γ e Σ para σ, então

$$M\Gamma = \Sigma \quad e \quad M\Gamma' = \Sigma' \quad \Rightarrow \quad \Gamma^{-1}\Gamma' = \Sigma^{-1}\Sigma',$$

como já mostramos no Capítulo 2.

$$
\begin{tikzcd}
 & SL(2) \arrow[d, "\pi"] \\
I \arrow[ur, dashed, "\Gamma"] \arrow[r, "\gamma"'] & \mathbb{R}\mathrm{P}^1
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & SL(2) \arrow[d, "\pi"] \\
I \arrow[ur, dashed, "\Sigma"] \arrow[r, "\sigma"'] & \mathbb{R}\mathrm{P}^1
\end{tikzcd}
$$

onde $\pi \circ \Gamma = \gamma$ e $\pi \circ \Sigma = \sigma$.

Assim, procuramos solucionar o problema via levantada das curvas, de modo a obter um meio de manipulação algébrica do mesmo.

- Referencial Móvel

  Encontrar uma levantada canônica para uma curva $\gamma = \gamma(s)$ é fazer uma escolha de um referencial móvel, isto é, um par de vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ que variam com $s \in I \subset \mathbb{R}$,

$$s \longmapsto \{\mathbf{x}(s), \mathbf{y}(s)\}$$

  tal que,

$$\det \Gamma(s) = \left(\mathbf{x}(s) \middle| \mathbf{y}(s) \right) = 1, \quad \forall s,$$

  isto é, tal que $\Gamma \in SL(2), \forall s \in I$, $\mathbf{x}(s)$ gere $\gamma(s)$ e $\Gamma'(s)$ seja o mais simples possível. A matriz $\Gamma(s)$ trará em si toda a informação sobre o comportamento local da curva $\gamma(s)$.

  $\{\mathbf{x}(s), \mathbf{y}(s)\}$ é chamado um *referencial móvel*.

5.2 Problema de Equivalência

Queremos estudar o problema de equivalência de curvas em $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ como variedade homogênea de $SL(2)$.

Seja $\Gamma(s) = \left(\mathbf{x}(s) \middle| \mathbf{y}(s) \right)$ uma levantada para $\gamma(s)$ satisfazendo as condições acima. Como $\det \Gamma(s) = 1$, temos $x_1(s)y_2(s) - x_2(s)y_1(s) = 1$, para $\mathbf{x}(s) = (x_1(s), x_2(s))$ e $\mathbf{y}(s) = (y_1(s), y_2(s))$. Derivando a expressão, obtemos[2]

$$(\det \Gamma)' = (x_1)'y_2 + x_1(y_2)' - (x_2)'y_1 - x_2(y_1)' = 0,$$

[2]Muitas vezes omitiremos o parâmetro s para simplificar a notação.

donde

$$(\det\Gamma)' = \det\left(\mathbf{x}' \;\middle|\; \mathbf{y} \right) + \det\left(\mathbf{x} \;\middle|\; \mathbf{y}' \right) = 0.$$

Agora, como $\{\mathbf{x}(s), \mathbf{y}(s)\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^2$ para cada $s \in I$, podemos escrever

$$\Gamma'(s) = \left(\mathbf{x}'(s)\middle|\mathbf{y}'(s)\right) = \left(a(s)\mathbf{x}(s) + b(s)\mathbf{y}(s)\middle|c(s)\mathbf{x}(s) + d(s)\mathbf{y}(s)\right),$$

onde $a(s), b(s), c(s), d(s) \in \mathbb{R}, \quad \forall s$. Ou simplesmente

$$\Gamma' = \left(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}\middle|c\mathbf{x} + d\mathbf{y}\right) = \Gamma \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Então,

$$(\det\Gamma)' = 0$$

implica em

$$\begin{aligned} &\det\left(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}\middle| \;\mathbf{y}\; \right) + \det\left(\;\mathbf{x}\; \middle|c\mathbf{x} + d\mathbf{y}\right) \\ = a.\det&\left(\mathbf{x} \;\middle|\; \mathbf{y} \right) + b.\det\left(\mathbf{y} \;\middle|\; \mathbf{y} \right) + c.\det\left(\mathbf{x} \;\middle|\; \mathbf{x} \right) + d.\det\left(\mathbf{x} \;\middle|\; \mathbf{y} \right) \\ &= a + d = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -d \end{aligned}$$

Nada mais do que obteríamos derivando o determinante (Fórmula de Jacobi):

$$(\det\Gamma)' = \mathrm{tr}(adj(\Gamma)\Gamma').$$

Como $adj(\Gamma) = \det(\Gamma)\Gamma^{-1}$ e $\det\Gamma = 1$ a igualdade acima fica

$$0 = \mathrm{tr}(\Gamma^{-1}\Gamma') = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = a + d,$$

exatamente como havíamos obtido.

O que, aliás, nos diz que a álgebra de Lie do grupo

$$SL(2) = \{M \in GL(2) : detM = 1\}$$

é

$$sl(2) = \{X \in GL(2) : trX = 0\}.$$

Mas, voltando ao problema, chegamos que,

$$\Gamma' = \left(a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \middle| c\mathbf{x} - a\mathbf{y} \right) = \Gamma \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Para determinar os valores de a, b e c vamos separar em casos:

(1) Se $b = 0$, para todo $s \in I$, então para qualquer $\lambda = \lambda(s) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, vale:

$$(\lambda\mathbf{x})' = \lambda'\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}' = \lambda'\mathbf{x} + \lambda a\mathbf{x} = (\lambda' + \lambda a)\mathbf{x}.$$

Suponha λ tal que $\lambda' + \lambda a = 0$. Então $\lambda\mathbf{x}$ é constante, logo γ é constante, pois $\mathbf{x}(s)$ gera $\gamma(s)$.

Afirmamos que $b = 0$ é invariante por mudança de referencial. De fato, para Γ, temos

$$\det\left(\mathbf{x} \middle| \mathbf{x}' \right) = \det\left(\mathbf{x} \middle| a\mathbf{x} + by \right) = b.$$

Seja $\tilde{\Gamma}$ outra levantada da curva γ. Então a primeira coluna de $\tilde{\Gamma}$ deve ser $\eta\mathbf{x}$ para algum $\eta = \eta(s)v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e

$$\det\left(\eta\mathbf{x} \middle| (\eta\mathbf{x})' \right) = \eta. \det\left(\mathbf{x} \middle| \eta'\mathbf{x} + \eta\mathbf{x}' \right) = \eta.\eta. \det\left(\mathbf{x} \middle| \mathbf{x}' \right) = \eta^2 b.$$

É claro que $b = 0 \Leftrightarrow \eta^2 b = 0$.

(2) Se $b \neq 0$, seja

$$\Gamma_1 = \left(\mathbf{x}_1 \middle| \mathbf{y}_1 \right)$$

outra levantada de γ que se relaciona com Γ (mudança de referencial) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= h\mathbf{x}_1, \text{ pois } \mathbf{x}_1 \text{ deve gerar } \gamma \\ \mathbf{y} &= h^{-1}\mathbf{y}_1, \text{ pois } \Gamma_1 \in SL(2),\end{aligned}$$

com $h(s) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Segundo o novo referencial $\{\mathbf{x}_1(s), \mathbf{y}_1(s)\}$,

$$\Gamma_1 = \left(\mathbf{x}_1 \,\middle|\, \mathbf{y}_1 \right) \;\; e \;\; \Gamma_1' = \left(a_1\mathbf{x}_1 + b_1\mathbf{y}_1 \middle| c_1\mathbf{x}_1 - a_1\mathbf{y}_1 \right).$$

Como

$$\Gamma = \left(\mathbf{x} \,\middle|\, \mathbf{y} \right) = \left(h\mathbf{x}_1 \,\middle|\, h^{-1}\mathbf{y}_1 \right),$$

temos

$$\Gamma' = \left(\mathbf{x}' \,\middle|\, \mathbf{y}' \right) = \left(h'\mathbf{x}_1 + h(a_1\mathbf{x}_1 + b_1\mathbf{y}_1) \middle| (h^{-1})'\mathbf{y}_1 + h^{-1}(c_1 - a\mathbf{y}_1) \right).$$

Por outro lado, como

$$\Gamma' = \left(a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \middle| c\mathbf{x} - a\mathbf{y} \right),$$

pela mudança de referencial, obtemos:

$$\Gamma' = \left(ah\mathbf{x}_1 + bh^{-1}\mathbf{y}_1 \middle| ch\mathbf{x}_1 - ah^{-1}\mathbf{y}_1 \right).$$

Comparando as duas expressões obtidas para Γ', temos

$$(h' + ha_1)\mathbf{x}_1 + hb_1\mathbf{y}_1 = ah\mathbf{x}_1 + bh^{-1}\mathbf{y}_1,$$

donde

$$hb_1 = bh^{-1} \quad \Rightarrow \quad hb_1h = b \quad \Rightarrow \quad h^2b_1 = b.$$

Mais uma vez, dividimos em casos:

- Se $b > 0$, então $b_1 > 0$. Assim, podemos escolher h de forma que $b_1 = 1, \ \forall s$. Isto é, estamos tomando

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \left(\mathbf{x}_1 \middle| \mathbf{y}_1 \right) \\
\Gamma_1' &= \left(\mathbf{x}_1' \middle| \mathbf{y}_1' \right) = \left(a_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 \middle| c_1\mathbf{x}_1 - a_1\mathbf{y}_1 \right) \\
\Gamma_1' &= \Gamma_1 \begin{pmatrix} a & c \\ 1 & -a \end{pmatrix}, \text{ pois } b_1 = 1.
\end{aligned}$$

Afirmamos que $b > 0$ é invariante por mudança de referencial. Analogamente ao que fizemos para o caso b=0, temos

$$\det\left(\mathbf{x} \middle| \mathbf{x}' \right) = \det\left(\mathbf{x} \middle| a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \right) = b.$$

Qualquer outra levantada da curva γ terá a primeira coluna igual a $\nu\mathbf{x}$ para algum $\nu = \nu(s) \in \mathbb{R} \setminus 0$ e

$$\det\left(\nu\mathbf{x} \middle| (\nu\mathbf{x})' \right) = \nu. \det\left(\mathbf{x} \middle| \nu'\mathbf{x} + \nu\mathbf{x}' \right) = \nu.\nu. \det\left(\mathbf{x} \middle| \mathbf{x}' \right) = \nu^2 b.$$

É claro que $b > 0 \Leftrightarrow \nu^2 b > 0$.

Mudando o referencial:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_2 \\
\mathbf{y}_1 &= -a_1\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_2 &= a_1\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_1 = a_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1' = \mathbf{x}_2' \\
\mathbf{x}_2' &= a_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_2 \Rightarrow a_2 = 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}_2' &= (a_1\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_1)' = \mathbf{y}_1' + a_1'\mathbf{x}_2 + a_1\mathbf{x}_2' = c_1\mathbf{x}_2 - a_1\mathbf{y}_1 + a_1'\mathbf{x}_2 + a_1\mathbf{x}_2' \\
&= c_1\mathbf{x}_2 - a_1(-a_1\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) + a_1'\mathbf{x}_2 + a_1\mathbf{x}_2' \\
&= c_1\mathbf{x}_2 + (a_1)^2\mathbf{x}_2 - a_1\mathbf{x}_2' + a_1'\mathbf{x}_2 + a_1\mathbf{x}_2' \\
&= (c_1 + (a_1)^2 + a_1')\mathbf{x}_2 = k_2\mathbf{x}_2
\end{aligned}
$$

Chegamos a

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}_2 &= \mathbf{x}_2' \\
\mathbf{y}_2' &= k_2\mathbf{x}_2.
\end{aligned}
$$

A fim de ficarmos a forma clássica da equação diferencial $\mathbf{x}_2'' + k_2\mathbf{x}_2 = 0$, convencionamos tomar $\mathbf{y}_2' = -k_2\mathbf{x}_2$.

Portanto, encontramos

$$\Gamma_2 = \left(\mathbf{x}_2 \;\middle|\; \mathbf{y}_2 \right)$$

tal que

$$\Gamma_2' = \left((\mathbf{x}_2)' \;\middle|\; (\mathbf{y}_2)' \right) = \left((\mathbf{y}_2) \;\middle|\; -k_2(\mathbf{x}_2) \right)$$

Ou seja, agora temos

$$\Gamma_2' = \Gamma_2 \begin{pmatrix} 0 & -k_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \Gamma_2^{-1}\Gamma_2' = \begin{pmatrix} 0 & -k_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Se, por outro lado, $b < 0$, então $b_1 < 0$ e escolhemos h tal que $b_1 = -1$. Estamos tomando

$$\Gamma_1' = \Gamma_1 \begin{pmatrix} a & c \\ -1 & -a \end{pmatrix}, \qquad \text{pois } b_1 = \xi_2 = -1.$$

Analogamente, $b < 0$ é invariante por mudança de referencial. Da mesma forma que fizemos no caso $b > 0$, a mudança de referencial resulta em

$$\Gamma_2' = \left((\mathbf{x}_2)' \,\middle|\, (\mathbf{y}_2)' \right) = \left(-(\mathbf{y}_2) \,\middle|\, k_2(\mathbf{x}_2) \right),$$

$$\Gamma_2' = \Gamma_2 \begin{pmatrix} 0 & k_2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Gamma_2^{-1}\Gamma_2' = \begin{pmatrix} 0 & k_2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, obtivemos Γ_2 de tal forma que

$$\Gamma_2' = \Gamma_2 \begin{pmatrix} 0 & k_2 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \Gamma_2^{-1}\Gamma_2' = \begin{pmatrix} 0 & k_2 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Invariância de k_2: Já vimos que b_1 é invariante. Agora queremos verificar que k_2 também é invariante.

Seja Γ_3 outro levatamento de γ tal que

$$\Gamma_3 = \left(\mathbf{x}_3 \,\middle|\, \mathbf{y}_3 \right) \text{ e } \Gamma_3' = \left(\mathbf{y}_3 \,\middle|\, -k_3\mathbf{x}_3 \right).$$

Então, $\mathbf{x}_2 = \mu\mathbf{x}_3$, com $\mu(s) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, portanto

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2' = \mu'\mathbf{x}_3 + \mu\mathbf{x}_3' = \mu'\mathbf{x}_3 + \mu\mathbf{y}_3.$$

Como $\Gamma_2 \in SL(2)$, então $\det \Gamma_2 = 1$ e

$$\begin{aligned} \det \Gamma_2 &= \det\left(\mathbf{x}_2 \,\middle|\, \mathbf{y}_2 \right) = \det\left(\mu\mathbf{x}_3 \,\middle|\, \mu'\mathbf{x}_3 + \mu\mathbf{y}_3 \right) \\ &= \mu^2 \det\left(\mathbf{x}_3 \,\middle|\, \mathbf{y}_3 \right) = \mu^2 \\ &\Rightarrow \mu^2 = 1 \Rightarrow \mu = \pm 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 &= \mu\mathbf{x}_3 \;\Rightarrow\; \mathbf{x}_3 = \pm\mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_2 &= \mu'\mathbf{x}_3 + \mu\mathbf{y}_3 \;\Rightarrow\; \mathbf{y}_3 = \pm\mathbf{y}_2 \\ -k_3\mathbf{x}_3 &= \mathbf{y}_3' = \pm\mathbf{y}_2' = \mp k_2\mathbf{x}_2 = -k_2\mathbf{x}_3 \;\Rightarrow\; k_3 = k_2, \end{aligned}$$

isto é, k é invariante por mudança de referencial. Segue que qualquer outro referencial difere de Γ_2 por um múltiplo constante. Isto faz de Γ_2 uma levantada canônica para γ.

Solução do Problema de Equivalência: Aplicando o mesmo raciocínio utilizado até aqui para σ, obteremos uma levantada Σ_2 tal que

$$\Sigma_2^{-1}\Sigma_2' = \begin{pmatrix} 0 & -l_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

para o caso análogo ao $b > 0$, onde l_2 é um invariante para σ, análogo a k_2 para γ. Portanto,

$$\Sigma_2^{-1}\Sigma_2' = \Gamma_2^{-1}\Gamma_2' \;\Leftrightarrow\; k_2 = l_2$$

5.3 Relacionando a Curvatura com a Derivada Schwarziana

Em Análise Complexa, temos a seguinte

Definição 5.3.1. *A derivada schwarziana de uma função z de uma variável complexa s, com $z'(s) \neq 0$, é dada por*

$$\{z, s\} = \frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 = \left(\frac{z''}{z'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2.$$

Usaremos a mesma definição acima, para z uma função uma variável real. Seja $\mathbf{z}$ a curva dada por $s \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ z(s) \end{pmatrix}$, com $\mathbf{z}'(s) \neq 0$, e seja Z uma levantada canônica para z

$$\begin{tikzcd} & SL(2) \arrow[d, "\pi"] \\ I \arrow[ur, dashed, "Z"] \arrow[r, "\mathbf{z}"'] & \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \end{tikzcd}$$

$$Z = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{x} & \mathbf{y} \end{array} \right) \ \ e \ \ \mathbf{z} = \zeta \mathbf{x}, \text{ com coordenadas projetivas } \zeta = \zeta(s) \neq 0, \ \forall s$$

$$Z' = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{y} & -k\mathbf{x} \end{array} \right) \text{ e } Z^{-1}Z' = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos as derivadas

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= (\zeta \mathbf{x})' = \zeta' \mathbf{x} + \zeta \mathbf{y} \\ \mathbf{z}'' &= (\zeta'' - \zeta k)\mathbf{x} + 2\zeta' \mathbf{y} \\ \mathbf{z}''' &= (\zeta''' - 3\zeta' k)\mathbf{x} + (3\zeta'' - \zeta k)\mathbf{y}. \end{aligned}$$

No cálculo das derivadas acima, lembre que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' &= -k\mathbf{x} \end{aligned}$$

dadas por Z', acima; e

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{x} & \mathbf{y} \end{array} \right) = -\det \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{y} & \mathbf{x} \end{array} \right) = 1.$$

Agora calculamos

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{z} & \mathbf{z}' \end{array} \right) &= \det \left(\begin{array}{c|c} \zeta \mathbf{x} & \zeta' \mathbf{x} + \zeta \mathbf{y} \end{array} \right) = \zeta^2, \\ \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{z} & \mathbf{z}'' \end{array} \right) &= \det \left(\begin{array}{c|c} \zeta \mathbf{x} & \zeta'' - \zeta k)\mathbf{x} + 2\zeta' \mathbf{y} \end{array} \right) = 2\zeta\zeta', \\ \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{z} & \mathbf{z}''' \end{array} \right) &= \det \left(\begin{array}{c|c} \zeta \mathbf{x} & (\zeta''' - 3\zeta' k)\mathbf{x} + (3\zeta'' - \zeta k)\mathbf{y} \end{array} \right) = 3\zeta\zeta'' - \zeta^2 k, \\ \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{z}' & \mathbf{z}'' \end{array} \right) &= \det \left(\begin{array}{c|c} \zeta' \mathbf{x} + \zeta \mathbf{y} & \zeta'' - \zeta k)\mathbf{x} + 2\zeta' \mathbf{y} \end{array} \right) = 2(\zeta')^2 - \zeta\zeta'' + \zeta^2 k. \end{aligned}$$

Então,

$$\det\left(\mathbf{z} \,\middle|\, \mathbf{z}'''\right) + 3\det\left(\mathbf{z}' \,\middle|\, \mathbf{z}''\right) = 6(\zeta')^2 + 2\zeta^2 k,$$

$$\frac{\left(\det\left(\mathbf{z} \,\middle|\, \mathbf{z}''\right)\right)^2}{\det\left(\mathbf{z} \,\middle|\, \mathbf{z}'\right)} = 4(\zeta')^2,$$

$$\det\left(\mathbf{z} \,\middle|\, \mathbf{z}'''\right) + 3\det\left(\mathbf{z}' \,\middle|\, \mathbf{z}''\right) - \frac{3}{2}\frac{\left(\det\left(\mathbf{z} \,\middle|\, \mathbf{z}''\right)\right)^2}{\det\left(\mathbf{z} \,\middle|\, \mathbf{z}'\right)} = 2\zeta^2 k.$$

Dividindo ambos os lados da igualdade acima por $\zeta^2 = \left(\mathbf{z} \,\middle|\, \mathbf{z}'\right)$, temos a seguinte fórmula para k:

$$2k = \frac{\det\left(\mathbf{z} \,\middle|\, \mathbf{z}'''\right) + 3\det\left(\mathbf{z}' \,\middle|\, \mathbf{z}''\right)}{\det\left(\mathbf{z} \,\middle|\, \mathbf{z}'\right)} - \frac{3}{2}\left(\frac{\det\left(\mathbf{z} \,\middle|\, \mathbf{z}''\right)}{\det\left(\mathbf{z} \,\middle|\, \mathbf{z}'\right)}\right)^2.$$

ou, em notação abreviada, fazendo

$$\det\left(\mathbf{z} \,\middle|\, \mathbf{z}'\right) = |\mathbf{z}, \mathbf{z}'|,$$

$$2k = \frac{|\mathbf{z}, \mathbf{z}'''| + 3|\mathbf{z}', \mathbf{z}''|}{|\mathbf{z}, \mathbf{z}'|} - \frac{3}{2}\left(\frac{|\mathbf{z}, \mathbf{z}''|}{|\mathbf{z}, \mathbf{z}'|}\right)^2.$$

Agora, dada $w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, por $s \mapsto w(s)$, definimos uma curva $\mathbf{w} = \mathbf{w}(s)$ por $s \mapsto (1, w(s))$ e queremos calcular, segundo a fórmula que obtivemos acima, o valor de k para w. Calculamos

$$\mathbf{w}' = (0, w'), \quad \mathbf{w}'' = (0, w''), \quad \mathbf{w}''' = (0, w'''),$$

$$|\mathbf{w}, \mathbf{w}'| = w', \quad |\mathbf{w}, \mathbf{w}''| = w'', \quad |\mathbf{w}, \mathbf{w}'''| = w''', \quad |\mathbf{w}', \mathbf{w}''| = 0.$$

Assim, se $w' \neq 0$, a curvatura k para a curva $\mathbf{w}(s) = (1, w(s))$ é dada por

$$2k = \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2,$$

isto é, $2k$ é a derivada schwarziana de w e existe uma levantada canônica W de w tal que

$$W^{-1}W' = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.4 Curvas em $(\mathbb{R}\mathbf{P}^1, SL(2))$

Queremos conhecer os objetos simples da geometria de $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ como variedade homogênea de $SL(2)$, isto é, aqueles para os quais k é constante.

(1) Se $k = 0$,

$$\Gamma' = \left(\pm\mathbf{y} \;\middle|\; \mp k_2\mathbf{x} \right) = \left(\pm\mathbf{y} \;\middle|\; 0 \right),$$

então

$$\Gamma = \left(\mathbf{x} \;\middle|\; \mathbf{y} \right) = \left(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}s \;\middle|\; b \right),$$

onde $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ são constantes e $\det\left(\mathbf{a} \;\middle|\; \mathbf{b} \right) = 1$.

Se $\Phi(s) = (1, \phi(s))$, então

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \delta(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}s) = \delta((a_1, a_2) \pm (b_1, b_2)s) \\ &= \delta(a_1 \pm b_1 s, a_2 \pm b_2 s) \\ &= (\delta a_1 \pm \delta b_1 s, \delta a_2 \pm \delta b_2 s) \\ &= (1, \phi(s)) \end{aligned}$$

implica em $\delta = \dfrac{1}{\delta a_1 \pm \delta b_1 s}$.

Logo,

$$\phi = \delta a_2 + b_2 s = \frac{a_2 + b_2 s}{a_1 + b_1 s}$$

é uma transformação de Möbius.[3]

(2) Se $k = c^2 \neq 0$,

$$\Gamma' = \left(\pm \mathbf{y} \;\middle|\; \mp c^2 \mathbf{x} \right) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x}' = \pm \mathbf{y} \\ \mathbf{x}'' = \pm \mathbf{y}' = \mp c^2 \mathbf{x} \end{array} \right. .$$

Temos a seguinte equação diferencial

$$\mathbf{x}'' + c^2 \mathbf{x} = 0,$$

cuja solução é a família de elipses

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{a} \cos(cs) + \mathbf{b} \operatorname{sen}(cs)$$

que estão na mesma classe de equivalência do círculo unitário, obtido ao tomarmos $\mathbf{a} = (1, 0)$ e $\mathbf{b} = (0, 1)$, na geometria de $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ sob a ação do grupo $SL(2)$ (onde todas as cônicas não degeneradas são equivalentes). Para cada s temos uma reta passando pela origem, interceptando o círculo unitário. Portanto, para k positivo, a curva varre todo o $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$.

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}(s) & = & \mathbf{a} \cos(cs) + \mathbf{b} \operatorname{sen}(cs) \\ \mathbf{x}(s) & = & (a_1, a_2) \cos(cs) + (b_1, b_2) \operatorname{sen}(cs) \\ \mathbf{x}(s) & = & (a_1 \cos(cs) + b_1 \operatorname{sen}(cs), a_2 \cos(cs) + b_2 \operatorname{sen}(cs)) \\ \mathbf{y}(s) & = & \mathbf{x}'(s) = (-a_1 c. \operatorname{sen}(cs) + b_1 c. \cos(cs), -a_2 c. \operatorname{sen}(cs) + b_2 c. \cos(cs)) \end{array}$$

$$\det \left(\mathbf{x} \;\middle|\; \mathbf{y} \right) = \det \left(\mathbf{x} \;\middle|\; \mathbf{x}' \right) = \pm 1,$$

[3] É um fato conhecido na teoria de variáveis complexas, que a derivada schwarziana de uma função analítica é nula se, e somente se, esta função é uma transformação de Möbius.

pois

$$\det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{x} & \mathbf{x}' \end{array}\right) = \mathbf{b} \ e \ \mathbf{x}' = \mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{y} = 0\mathbf{x} \pm 1\mathbf{y}.$$

Logo,

$$c\det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{array}\right) = \pm 1.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{x} & \mathbf{y} \end{array}\right) &= \begin{vmatrix} a_1\cos(cs) + b_1\operatorname{sen}(cs) & -a_1c.\operatorname{sen}(cs) + b_1c.\cos(cs) \\ a_2\cos(cs) + b_2\operatorname{sen}(cs) & -a_2c.\operatorname{sen}(cs) + b_2c.\cos(cs) \end{vmatrix} \\
&= -a_1a_2c\cos(cs)\operatorname{sen}(cs) + a_1b_2c\cos^2(cs) - b_1a_2c\operatorname{sen}^2(cs) + \\
&\quad +b_1b_2c\cos(cs)\operatorname{sen}(cs) - (-a_1a_2c\cos(cs)\operatorname{sen}(cs) - \\
&\quad -a_1b_2c\operatorname{sen}^2(cs) + b_1a_2c.\cos^2(cs) + \\
&\quad +b_1b_2c\cos(cs)\operatorname{sen}(cs)) \\
&= +a_1b_2c - b_1a_2c = +c(a_1b_2 - b_1a_2) \\
&= c\det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{array}\right).
\end{aligned}$$

Se $\Phi(s) = (1, \phi(s))$, então $\Phi(s) = \delta\mathbf{x} = \delta(a_1\cos(cs) + b_1\operatorname{sen}(cs), a_2\cos(cs) + b_2\operatorname{sen}(cs))$. Logo,

$$\phi = \delta(a_2\cos(cs) + b_2\operatorname{sen}(cs)) = \frac{a_2\cos(cs) + b_2\operatorname{sen}(cs))}{a_1\cos(cs) + b_1\operatorname{sen}(cs)}.$$

(3) Se $k = -c^2 \neq 0$,

$$\Gamma' = \left(\begin{array}{c|c} \mp\mathbf{y} & \pm c^2\mathbf{x} \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \mathbf{x}' = \mp\mathbf{y} \\ \mathbf{x}'' = \mp\mathbf{y}' = \pm c^2\mathbf{x} \end{array}\right. .$$

Temos

$$\mathbf{x}'' - c^2\mathbf{x} = 0,$$

cuja solução é a família de hipérboles

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{a}\cosh(cs) + \mathbf{b}\,\mathrm{senh}(cs)$$

que estão na mesma classe de equivalência da hipérbole $\mathbf{x}(s) = (\cosh(cs), \mathrm{senh}(cs))$, obtida tomando $\mathbf{a} = (1, 0)$ e $\mathbf{b} = (0, 1)$, na geometria de $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ sob a ação do grupo $SL(2)$. Para cada s temos uma reta passando pela origem e por um ponto na hipérbole. Note que, a curva para k negativo, não intercepta todos os pontos projetivos de $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$, como no caso de k positivo.[4]

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(s) &= \mathbf{a}\cosh(cs) + \mathbf{b}\,\mathrm{senh}(cs)\\
\mathbf{x}(s) &= (a_1, a_2)\cosh(cs) + (b_1, b_2)\,\mathrm{senh}(cs)\\
\mathbf{x}(s) &= (a_1\cosh(cs) + b_1\,\mathrm{senh}(cs), a_2\cosh(cs) + b_2\,\mathrm{senh}(cs))\\
\mathbf{y}(s) &= \mathbf{x}'(s) = (a_1c.\,\mathrm{senh}(cs) + b_1c.\cosh(cs), a_2c.\,\mathrm{senh}(cs) + b_2c.\cosh(cs))
\end{aligned}$$

$$\det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{x} & \mathbf{y} \end{array}\right) = \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{x} & \mathbf{x}' \end{array}\right) = \mp 1.$$

Logo,

$$c\det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{array}\right) = \mp 1.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{x} & \mathbf{y} \end{array}\right) &= \begin{vmatrix} a_1\cosh(cs) + b_1\,\mathrm{senh}(cs) & a_1c.\,\mathrm{senh}(cs) + b_1c.\cosh(cs) \\ a_2\cosh(cs) + b_2\,\mathrm{senh}(cs) & a_2c.\,\mathrm{senh}(cs) + b_2c.\cosh(cs) \end{vmatrix}\\
&= a_1a_2c.\cosh(cs)\,\mathrm{senh}(cs) + a_1b_2c.\cosh^2(cs) +\\
&\quad +b_1a_2c.\,\mathrm{senh}^2(cs) + b_1b_2c.\cosh(cs)\,\mathrm{senh}(cs) -\\
&\quad -(a_1a_2c.\cosh(cs)\,\mathrm{senh}(cs) + a_1b_2c.\,\mathrm{senh}^2(cs) +\\
&\quad b_1a_2c.\cosh^2(cs) + b_1b_2c.\cosh(cs)\,\mathrm{senh}(cs))\\
&= a_1b_2c - b_1a_2c = c(a_1b_2 - b_1a_2)\\
&= c\det\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{array}\right)
\end{aligned}$$

[4]Vale mencionar que este é um fato que terá consequências importantes na Geometria Diferencial, no entanto, tais consequências não foram objeto de nosso estudo neste trabalho.

Se $\Phi(s) = (1, \phi(s))$, então $\Phi(s) = \delta\mathbf{x} = \delta((a_1 \cosh(cs)+b_1 \operatorname{senh}(cs), a_2 \cosh(cs)+ b_2 \operatorname{senh}(cs))$. Logo,

$$\phi = \delta(a_2 \cosh(cs) + b_2 \operatorname{senh}(cs)) = \frac{a_2 \cosh(cs) + b_2 \operatorname{senh}(cs))}{a_1 \cosh(cs) + b_1 \operatorname{senh}(cs)}.$$

Capítulo 6

Geometria das Curvas em $Gr(n, \mathbb{R}^{2n})$ sob a Ação de $GL(2n)$

Neste capítulo estudaremos a generalização dos invariantes de $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$, feita no capítulo anterior, à "grassmanniana metade" $Gr(n, \mathbb{R}^{2n})$ (note que $\mathbb{R}P^1 = Gr(1, \mathbb{R}^2)$), baseados no recente artigo [3]. Este espaço pode ser considerado como a versão "não-comutativa" de $\mathbb{R}P^1$.

Nos capítulos anteriores encontramos um referencial de Cartan para as curvas dadas, resolvemos o problema de equivalência e falamos das interpretações geométricas, nesta ordem. A sequência deste capítulo é diferente, segue a ordem utilizada no artigo [3], que por necessidade de algumas definições, dá primeiro a interpretação geométrica dos invariantes, incluindo, como caso particular, os invariantes de $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ (Seção 6.2) e só depois constrói o referencial, generalizando a levantada construída por Flanders [10] para $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ (Seção 6.3) e resolve o problema de equivalência (Seção 6.4).

6.1 Preliminares

Definição 6.1.1. *Uma curva suave $\ell(t)$, de subespaços n-dimensionais de $\mathbb{R}^{2n}$, é dita "fanning", se para cada $t \in \mathbb{R}$*

$$\dot{\ell}(t) : \ell(t) \longrightarrow \frac{\mathbb{R}^{2n}}{\ell(t)}$$

é invertível.

Notação: Usaremos as notações $\dot{f}(t)$ e $\frac{d}{dt}f(t)$ para indicar a derivada de alguma função f com respeito à variável t.

Proposição 6.1.1. *Seja $\mathcal{A}(t)$ uma curva suave de matrizes $2n \times n$ de posto n. A curva de subespaços n-dimensionais gerada pelas colunas de $\mathcal{A}(t)$ é "fanning" se, e somente se, a matriz*

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathcal{A}(t) & \dot{\mathcal{A}}(t) \end{array} \right)$$

é invertível para todo t.

$\mathcal{A}(t)$ é chamada curva de referenciais "fanning" ou simplesmente, referencial "fanning".

Proposição 6.1.2. *$\mathcal{A}(t)$ e $\mathcal{B}(t)$ geram a mesma curva de subespaços n-dimensionais se, e somente se, existe uma curva $X(t)$ de matrizes invertíveis $n \times n$, tal que*

$$\mathcal{B}(t) = \mathcal{A}(t)X(t).$$

Queremos trabalhar com o espaço das curvas "fanning" em $Gr(n, \mathbb{R}^{2n})$, onde considera-se as seguintes ações de grupos:

- Grupo de transformações lineares invertíveis em $\mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{array}{ccc} GL(2n) \times Gr(n, \mathbb{R}^{2n}) & \longrightarrow & Gr(n, \mathbb{R}^2 n) \\ (\mathbf{T}, \mathcal{A}(t)) & \longmapsto & \mathbf{T}\mathcal{A}(t) \end{array}$$

- Grupo dos difeomorfismos de $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} Dif(\mathbb{R}) \times Gr(n, \mathbb{R}^{2n}) & \longrightarrow & Gr(n, \mathbb{R}^{2n}) \\ (s, \mathcal{A}(t)) & \longmapsto & \mathcal{A}(s(t)) \end{array}$$

- Grupo das curvas suaves de matrizes $n \times n$, invertíveis

$$\begin{array}{ccc} GL(n)(t) \times Gr(n, \mathbb{R}^{2n}) & \longrightarrow & Gr(n, \mathbb{R}^{2n}) \\ (X(t), \mathcal{A}(t)) & \longmapsto & \mathcal{A}(t)X(t) \end{array}$$

Definição 6.1.2. *O endomorfismo fundamental de um referencial "fanning" $\mathcal{A}(t)$ em um dado tempo t_0 é a transformação linear de $\mathbb{R}^{2n}$ em $\mathbb{R}^{2n}$, definida pelas equações*

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{F}(t_0)\mathcal{A}(t_0) & = & O, \\ \mathbf{F}(t_0)\dot{\mathcal{A}}(t_0) & = & \mathcal{A}(t_0) \end{array}$$

Podemos definir o endormorfismo fundamental $\mathbf{F}(t)$ em t de forma intrínseca:

Definição 6.1.3. *Dada uma curva "fanning" $\ell(t)$, o endomorfismo fundamental $\mathbf{F}(t)$ em t é dado por*

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{F}: & \mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n} \\ & v & \longmapsto & (\dot{\ell}(t))^{-1}\pi_t(v), \end{array}$$

onde π_t é a projeção canônica de $\mathbb{R}^{2n}$ sobre $\dfrac{\mathbb{R}^{2n}}{\ell(t)}$.

Se a curva $\ell(t)$ é gerada por um referencial "fanning" $\mathcal{A}(t)$, então a matriz de seu endormorfismo fundamental na base canônica do $\mathbb{R}^{2n}$ é

$$\mathbf{F}(t) = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{A}(t) & \dot{\mathcal{A}}(t) \end{array} \right) \begin{pmatrix} O & I \\ O & O \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{A}(t) & \dot{\mathcal{A}}(t) \end{array} \right)^{-1}.$$

Note que a definição do endomorfismo fundamental depende apenas da curva $\ell(t)$, e não do referencial "fanning" $\mathcal{A}(t)$, utilizado para representá-la, o mesmo vale para suas derivadas.

Proposição 6.1.3. *Seja $\mathcal{A}(t)$ um referencial "fanning". Seu endomorfismo fundamental $\mathbf{F}(t)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Se $X(t)$ é uma curva suave de matrizes invertíveis $n \times n$, o endomorfismo fundamental de $\mathcal{A}(t)X(t)$ é de novo $\mathbf{F}(t)$.*

2. *Se $\mathbf{T}$ é uma transformação linear invertível de $\mathbb{R}^{2n}$ em $\mathbb{R}^{2n}$, o endomorfismo fundamental de $\mathbf{T}\mathcal{A}(t)$ é $\mathbf{T}\mathbf{F}(t)\mathbf{T}^{-1}$.*

3. *O endormorfismo fundamental da curva reparametrizada $\mathcal{A}(s(t))$ é $\mathbf{F}(s(t))(\dot{s}(t))^{-1}$.*

Demonstração. Vamos mostrar em cada caso, que o endomorfismo fundamental satisfaz as duas equações que o definem:

1. $\mathbf{F}(t)(\mathcal{A}(t)X(t)) = (\mathbf{F}(t)\mathcal{A}(t))X(t) = O$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t)\left(\frac{d}{dt}(\mathcal{A}X(t))\right) &= \mathbf{F}(t)(\dot{\mathcal{A}}(t)X(t) + \mathcal{A}(t)\dot{X}(t)) \\ &= (\mathbf{F}(t)\dot{\mathcal{A}}(t))X(t) + (\mathbf{F}(t)\mathcal{A}(t))\dot{X}(t) \\ &= \mathcal{A}(t)X(t). \end{aligned}$$

2. $\mathbf{T}\mathbf{F}(t)\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}\mathcal{A}(t)) = \mathbf{T}(\mathbf{F}(t)\mathcal{A}(t)) = O$
   $\mathbf{T}\mathbf{F}(t)\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}\dot{\mathcal{A}}(t)) = \mathbf{T}\mathbf{F}(t)\dot{\mathcal{A}}(t) = \mathbf{T}\mathcal{A}(t).$

3. $\mathbf{F}(s(t))(\dot{s}(t))^{-1}\mathcal{A}(s(t)) = (\dot{s}(t))^{-1}\mathbf{F}(s(t))\mathcal{A}(s(t)) = O$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s(t))(\dot{s}(t))^{-1}\left(\frac{d}{dt}(\mathcal{A}(s(t)))\right) &= (\dot{s}(t))^{-1}\mathbf{F}(s(t))(\mathcal{A}'(s(t)))\dot{s}(t)) \\ &= (\dot{s}(t))^{-1}\dot{s}(t)\mathcal{A}(s(t)) \\ &= \mathcal{A}(s(t)). \end{aligned}$$

□

Notação: Perceba que estamos usando $f'(s(t))$ ou $\dfrac{d}{ds}f(s(t))$ para indicar a derivada de alguma função f com respeito à variável s.

Proposição 6.1.4. *Seja $\mathbf{F}(t)$ o endomorfismo fundamental de um referencial "fanning" $\mathcal{A}(t)$. Para cada valor de t a derivada $\dot{\mathbf{F}}(t)$ é uma reflexão cujo autoespaço associado ao autovalor -1 é gerado pelas colunas de $\mathcal{A}(t)$.*

Demonstração. Sabemos que $\mathbf{F}(t)$ satisfaz

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t)\mathcal{A}(t) &= O \text{ e} \\ \mathbf{F}(t)\dot{\mathcal{A}}(t) &= \mathcal{A}(t) \end{aligned}$$

1. Derivando a primeira equação temos

$$\dot{\mathbf{F}}(t)\mathcal{A}(t) + \mathbf{F}(t)\dot{\mathcal{A}}(t) = O \Rightarrow \dot{\mathbf{F}}(t)\mathcal{A}(t) = -\mathbf{F}(t)\dot{\mathcal{A}}(t).$$

   Usando a segunda equação, vem

$$\dot{\mathbf{F}}(t)\mathcal{A}(t) = -\mathcal{A}(t) \Rightarrow (\dot{\mathbf{F}}(t) - (-1)\mathbf{I})\mathcal{A}(t) = O.$$

   Segue que -1 é um autovalor de $\dot{\mathbf{F}}(t)$ e o espaço gerado pelas colunas de $\mathcal{A}(t)$, $\ell(t)$, está contido no autoespaço associado ao autovalor -1. Como $\mathcal{A}(t)$ é invertível, suas n colunas são linearmente independentes, donde a dimensão do autoespaço em questão é, no mínimo, igual a n. Considerando $\dot{\mathbf{F}}(t)$ restrito a $\ell(t)$, o autoespaço associado ao autovalor -1 é, de fato, o espaço gerado pelas colunas de $\mathcal{A}(t)$.

2. Agora, derivando a segunda equação temos

$$\dot{\mathbf{F}}(t)\dot{\mathcal{A}}(t) + \mathbf{F}(t)\ddot{\mathcal{A}}(t) = \dot{\mathcal{A}}(t).$$

   Multiplicando ambos os lados da igualdade acima por $\dot{\mathbf{F}}(t)$, obtemos

$$(\dot{\mathbf{F}}(t))^2\dot{\mathcal{A}}(t) + \dot{\mathbf{F}}(t)\mathbf{F}(t)\ddot{\mathcal{A}}(t) = \dot{\mathbf{F}}(t)\dot{\mathcal{A}}(t),$$

que implica em

$$(\dot{\mathbf{F}}(t))^2\dot{\mathcal{A}}(t) = \dot{\mathbf{F}}(t)\dot{\mathcal{A}}(t) - \dot{\mathbf{F}}(t)\mathbf{F}(t)\ddot{\mathcal{A}}(t).$$

Mas, como vimos acima, $\dot{\mathbf{F}}(t)$ restrito a $\ell(t)$ é menos a identidade:

$$\dot{\mathbf{F}}(t)\mathcal{A}(t) = -\mathcal{A}(t) \Rightarrow \dot{\mathbf{F}}(t) = -\mathbf{I},$$

logo, $\dot{\mathbf{F}}(t)\mathbf{F}(t) = -\mathbf{F}(t)$. Assim, nossa equação fica

$$(\dot{\mathbf{F}}(t))^2\dot{\mathcal{A}}(t) = \dot{\mathbf{F}}(t)\dot{\mathcal{A}}(t) + \mathbf{F}(t)\ddot{\mathcal{A}}(t),$$

que nada mais é do que

$$(\dot{\mathbf{F}}(t))^2\dot{\mathcal{A}}(t) = \frac{d}{dt}(\mathbf{F}(t)\dot{\mathcal{A}}(t)).$$

Usando a segunda equação, temos

$$(\dot{\mathbf{F}}(t))^2\dot{\mathcal{A}}(t) = \dot{\mathcal{A}}(t).$$

De (1), já sabíamos que $\dot{\mathbf{F}}(t)\mathcal{A}(t) = -\mathcal{A}(t)$, isto é $(\dot{\mathbf{F}}(t))^2\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(t)$.

Portanto, $(\dot{\mathbf{F}}(t))^2 = \mathbf{I}$, para todo t.

□

A curva de reflexões $\dot{\mathbf{F}}(t)$ e a curva de projeções $\mathbf{P}(t)$, assim como $\mathbf{F}(t)$, dependem apenas da curva na grassmanniana.

Definição 6.1.4. *Seja $\ell(t)$ uma curva "fanning" na grassmanniana e seja $\mathbf{F}(t)$ seu endomorfismo fundamental. A aplicação que leva t ao núcleo da projeção*

$$\mathbf{P}(t) = \frac{(\mathbf{I} - \dot{\mathbf{F}}(t))}{2}$$

é chamada curva horizontal de $\ell(t)$ e será denotada por $h(t)$.

Note que o núcleo de $\mathbf{P}(t)$ está contido no autoespaço de $\dot{\mathbf{F}}(t)$, associado ao autovalor 1. Como $\ell(t)$ é o autoespaço de $\dot{\mathbf{F}}(t)$, associado a -1, segue que $h(t)$ é um subespaço transversal a $\ell(t)$.

Proposição 6.1.5. *Seja $\ell(t)$ uma curva "fanning" na grassmanniana e seja $h(t)$ sua curva horizontal. Se $\mathbf{T}$ é uma transformação linear invertível do $\mathbb{R}^{2n}$ em $\mathbb{R}^{2n}$, a curva horizontal de $\mathbf{T}\ell(t)$ é $\mathbf{T}h(t)$.*

Demonstração. Associada à curva dada, $\ell(t)$, temos o endormorfismo fundamental $\mathbf{F}(t)$ e a projeção $\mathbf{P}(t) = \dfrac{\mathbf{I} - \dot{\mathbf{F}}(t)}{2}$. Provamos que o endomorfismo fundamental de $\mathbf{T}\ell(t)$ é $\mathbf{T}\mathbf{F}(t)\mathbf{T}^{-1}$, assim a projeção correspondente é

$$\frac{\mathbf{I} - \mathbf{T}\dot{\mathbf{F}}(t)\mathbf{T}^{-1}}{2} = \mathbf{T}\mathbf{P}(t)\mathbf{T}^{-1}.$$

Agora, vejamos que $\mathbf{T}h(t)$ está no núcleo desta projeção,

$$\mathbf{T}\mathbf{P}(t)\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}h(t)) = \mathbf{T}\mathbf{P}(t)(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T})h(t) = \mathbf{T}\mathbf{P}(t)h(t)) = O$$

e o resultado segue. □

Proposição 6.1.6. *Seja $\ell(t)$ uma curva "fanning" na grassmanniana $Gr(n, \mathbb{R}^{2n})$ e seja $h(t)$ sua curva horizontal. Se $\mathbf{P}(t)$ denota a projeção sobre $\ell(t)$ (isto é $\mathbf{P}(t)\ell(t) = \ell(t)$) com núcleo $h(t)$ (ou seja, $\mathbf{P}(t)h(t) = O$), então $\dot{\mathbf{P}}(t)$ leva $h(t)$ isomorficamente em $\ell(t)$.*

Demonstração. Como $\mathbf{P}(t)$ é projeção temos

$$(\mathbf{P}(t))^2 = \mathbf{P}(t),$$

$$\dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\dot{\mathbf{P}}(t) = \dot{\mathbf{P}}(t),$$

$$\dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{P}(t) = (\mathbf{I} - \mathbf{P}(t))\dot{\mathbf{P}}(t).$$

Agora, $\mathbf{I}-\mathbf{P}(t)$ é a projeção paralela a $\ell(t)$, sobre $h(t)$. Assim,

$$\dot{\mathbf{P}}(t)(\ell(t)) = \dot{\mathbf{P}}(t)(\mathbf{P}(t)(\ell(t))) = (\dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{P}(t))\ell(t) = ((\mathbf{I}-\mathbf{P}(t))\dot{\mathbf{P}}(t))\ell(t)$$

$$\dot{\mathbf{P}}(t)(\ell(t)) = (\mathbf{I}-\mathbf{P}(t))(\dot{\mathbf{P}}(t)\ell(t))$$

implica que $\dot{\mathbf{P}}(t)\ell(t)$ está contido em $h(t)$.

Por outro lado,

$$\dot{\mathbf{P}}(t)(h(t)) = \dot{\mathbf{P}}(t)(\mathbf{I}-\mathbf{P}(t))(h(t)) = \mathbf{P}(t)\dot{\mathbf{P}}(t)h(t)$$

implica que $\dot{\mathbf{P}}(t)h(t)$ está contido em $\ell(t)$.

Para mostrar que $\dot{\mathbf{P}}(t) : \ell(t) \longrightarrow h(t)$ é isomorfismo, calculamos primeiro

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{I}-\dot{\mathbf{F}}(t)}{2}\right) = -\frac{\ddot{\mathbf{F}}(t)}{2}.$$

Pela demonstração da Proposição 6.1.4, se $\mathcal{A}(t)$ é um referencial "fanning" que gera $\ell(t)$, então

$$\begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{F}}(t)\mathcal{A}(t) & = & -\mathcal{A}(t) \quad \text{ e} \\ \dot{\mathbf{F}}(t)\dot{\mathcal{A}}(t) & = & \dot{\mathcal{A}}(t) - \mathbf{F}(t)\ddot{\mathcal{A}}(t), \end{array}$$

Derivando a primeira equação, temos

$$\ddot{\mathbf{F}}(t)\mathcal{A}(t) + \dot{\mathbf{F}}(t)\dot{\mathcal{A}}(t) = -\dot{\mathcal{A}}(t).$$

Agora, usamos a segunda equação e multiplicamos ambos os lados por $-\frac{1}{2}$, daí

$$-\frac{1}{2}\ddot{\mathbf{F}}(t)\mathcal{A}(t) - \frac{1}{2}\dot{\mathcal{A}}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{F}(t)\ddot{\mathcal{A}}(t) = \frac{1}{2}\dot{\mathcal{A}}(t),$$
$$\dot{\mathbf{P}}(t)\mathcal{A}(t) = \dot{\mathcal{A}}(t) - \frac{1}{2}\mathbf{F}(t)\ddot{\mathcal{A}}(t).$$

Note que as colunas de $\mathbf{F}(t)\ddot{\mathcal{A}}(t)$ são combinações lineares das colunas de $\dot{\mathcal{A}}(t)$, pois $\mathbf{F}(t)\ddot{\mathcal{A}}(t) = \dot{\mathcal{A}}(t) - \dot{\mathbf{F}}(t)\dot{\mathcal{A}}(t)$; além disso, sabemos que a matriz $\left(\begin{array}{c|c} \mathcal{A}(t) & \dot{\mathcal{A}}(t) \end{array}\right)$ é invertível. Assim, $\dot{\mathbf{P}}(t)\dot{\mathcal{A}}(t)$ tem posto n e, portanto, gera $h(t)$. $\square$

Tendo provado o isomorfismo acima, mais do que transversais, sabemos agora que $\dim h(t) = \dim \ell(t) = n$, portanto temos $\mathbb{R}^{2n} = \ell(t) \oplus h(t)$.

Se derivamos $\mathbf{P}(t)\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(t)$, obtemos $\dot{\mathbf{P}}(t)\mathcal{A}(t) = (\mathbf{I} - \mathbf{P}(t))\dot{\mathcal{A}}(t)$. Logo, notamos que $\dot{\mathbf{P}}(t)\mathcal{A}(t)$ é a projeção de $\dot{\mathcal{A}}(t)$ no subespaço horizontal $h(t)$.

Definição 6.1.5. *A derivada horizontal de um referencial "fanning" $\mathcal{A}(t)$ é uma curva de referenciais definida por*

$$\mathcal{H}(t) := (\mathbf{I} - \mathbf{P}(t))\dot{\mathcal{A}}(t) = \dot{\mathbf{P}}(t)\mathcal{A}(t) = \dot{\mathcal{A}}(t) - \frac{1}{2}\mathbf{F}(t)\ddot{\mathcal{A}}(t) = -\frac{1}{2}\ddot{\mathbf{F}}(t)\mathcal{A}(t).$$

Proposição 6.1.7. *Seja $\ell(t)$ uma curva "fanning" na grassmanniana. Se $A_{t_0}(t)$ é um referencial "fanning" que gera $\ell(t)$ e satisfaz $\ddot{\mathcal{A}}_{t_0}(t_0) = O$, então as colunas de $\dot{\mathcal{A}}_{t_0}(t_0)$ geram o subespaço horizontal de $\ell(t)$ em $t = t_0$.*

Demonstração. A prova segue diretamente da definição anterior. Como $\mathcal{H}(t_0) = \dot{\mathcal{A}}_{t_0}(t_0) - \frac{1}{2}\mathbf{F}(t)\ddot{\mathcal{A}}_{t_0}(t_0)$ e $\ddot{\mathcal{A}}(t_0) = O$, então $\mathcal{H}(t_0) = \dot{\mathcal{A}}_{t_0}(t_0)$, o que implica que $\dot{\mathcal{A}}_{t_0}(t_0)$ gera o subespaço horizontal de $\ell(t)$ em $t = t_0$, $h(t_0)$. □

Proposição 6.1.8. *A derivada horizontal $\mathcal{H}(t)$ de um referencial "fanning" $\mathcal{A}(t)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *se $X(t)$ é uma curva suave de matrizes invertíveis $n \times n$, a derivada horizontal de $\mathcal{A}(t)X(t)$ é $\mathcal{H}(t)X(t)$,*

2. *se $\mathbf{T}$ é uma tranformação linear invertível de $\mathbb{R}^{2n}$, a derivada horizontal de $\mathbf{T}\mathcal{A}(t)$ é $\mathbf{T}\mathcal{H}(t)$,*

3. *a derivada horizontal da curva reparametrizada $\mathcal{A}(s(t))$ é*

$$\mathcal{H}(s(t))\dot{s}(t) - \frac{1}{2}\mathcal{A}(s(t))(\dot{s}(t))^{-1}\ddot{s}(t).$$

Demonstração. 1. Sabemos que o endomorfismo fundamental de $\mathcal{A}(t)X(t)$ é $\mathbf{F}(t)$, logo, a derivada horizontal de $\mathcal{A}(t)X(t)$ é

$$-\frac{1}{2}\ddot{\mathbf{F}}(t)(\mathcal{A}(t)X(t)) = \left(-\frac{1}{2}\ddot{\mathbf{F}}(t)\mathcal{A}(t)\right)X(t) = \mathcal{H}(t)X(t).$$

2. Sabemos que o endomorfismo fundamental de $\mathbf{T}\mathcal{A}(t)$ é $\mathbf{TF}(t)\mathbf{T}^{-1}$, então a derivada horizontal de $\mathbf{T}\mathcal{A}(t)$ é

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{TF}(t)\mathbf{T}^{-1})(\mathbf{T}\mathcal{A}(t)) &= -\frac{1}{2}\mathbf{T}\ddot{\mathbf{F}}(t)\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}\mathcal{A}(t)) \\
&= -\frac{1}{2}\mathbf{T}\ddot{\mathbf{F}}(t)\mathcal{A}(t) = \mathbf{T}\mathcal{H}(t).
\end{aligned}$$

3. Sabemos que o endormorfismo fundamental de $\mathcal{A}(s(t))$ é $\mathbf{F}(s(t))(\dot{s}(t))^{-1}$, então a derivada horizontal da curva reparametrizada $\mathcal{A}(s(t))$ é $\frac{d}{dt}(\mathcal{A}(s(t)))-$ $\frac{1}{2}\mathbf{F}(s(t))(\dot{s}(t))^{-1}\frac{d^2}{dt^2}(\mathcal{A}(s(t))) =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{ds}\mathcal{A}(s(t))\dot{s}(t) - \frac{1}{2}\mathbf{F}(s(t))(\dot{s}(t))^{-1}\left(\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{A}(s(t))(\dot{s}(t))^2 + \frac{d}{ds}\mathcal{A}(s(t))\ddot{s}(t)\right) \\
&= \mathcal{A}'(s(t))\dot{s}(t) - \frac{1}{2}\mathbf{F}(s(t))\mathcal{A}''(s(t))(\dot{s}(t)) - \frac{1}{2}\mathbf{F}(s(t))\mathcal{A}'(s(t))(\dot{s}(t))^{-1}\ddot{s}(t) \\
&= \left[\mathcal{A}'(s(t)) - \frac{1}{2}\mathbf{F}(s(t))\mathcal{A}''(s(t))\right]\dot{s}(t) - \frac{1}{2}\mathcal{A}(s(t))(\dot{s}(t))^{-1}\ddot{s}(t) \\
&= \mathcal{H}(s(t))\dot{s}(t) - \frac{1}{2}\mathcal{A}(s(t))(\dot{s}(t))^{-1}\ddot{s}(t).
\end{aligned}$$

□

Proposição 6.1.9. *Seja $\ell(t)$ uma curva "fanning" com endomorfismo fundamental* $\mathbf{F}(t)$. *Se* $[A,B]_+$ *é o anticomutador* $AB+BA$, *então*

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{F}(t), \dot{\mathbf{F}}(t)\right]_+ &= O, \\
\left[\dot{\mathbf{F}}(t), \ddot{\mathbf{F}}(t)\right]_+ &= O, \\
\left[\mathbf{F}(t), \ddot{\mathbf{F}}(t)\right]_+ &= -2\mathbf{I}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Para provarmos a primeira identidade, observemos que $\left[\mathbf{F}(t), \dot{\mathbf{F}}(t)\right]_+ =$ $\mathbf{F}(t)\mathbf{F}'(t) + \mathbf{F}'(t)\mathbf{F}(t)$. Como $\mathbf{F}^2(t) = O$, calculando a derivada, temos

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{F}(t)\mathbf{F}(t)) = O \Rightarrow \dot{\mathbf{F}}(t)\mathbf{F}(t) + \mathbf{F}(t)\dot{\mathbf{F}}(t),$$

donde $\Big[\mathbf{F}(t),\dot{\mathbf{F}}(t)\Big]_+ = O$.

Analogamente, a segunda identidade decorre de calcularmos a derivada de $(\dot{\mathbf{F}}(t))^2 = \mathbf{I}$, que é

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{F}}(t)\dot{\mathbf{F}}(t)) = O \Rightarrow \ddot{\mathbf{F}}(t)\dot{\mathbf{F}}(t) + \dot{\mathbf{F}}(t)\ddot{\mathbf{F}}(t) = O.$$

Logo, $\Big[\dot{\mathbf{F}}(t),\ddot{\mathbf{F}}(t)\Big]_+ = O$

Para obtermos a terceira identidade utilizaremos a derivada horizontal.

Seja $\mathcal{A}(t)$ um referencial "fanning" que gera a curva $\ell(t)$. Calculamos

$$\begin{aligned}\Big[\mathbf{F}(t),\ddot{\mathbf{F}}(t)\Big]_+ \mathcal{A}(t) &= \mathbf{F}(t)\ddot{\mathbf{F}}(t)A(t) + \ddot{\mathbf{F}}(t)\mathbf{F}(t)\mathcal{A}(t) = \mathbf{F}(t)\ddot{\mathbf{F}}(t)\mathcal{A}(t)\\ &= \mathbf{F}(t)(-2\mathcal{H}(t)) = \mathbf{F}(t)(-2\dot{\mathcal{A}}(t) + \mathbf{F}(t)\ddot{\mathcal{A}}(t)) = -2\mathcal{A}(t).\end{aligned}$$

Calculamos também

$$\Big[\mathbf{F}(t),\ddot{\mathbf{F}}(t)\Big]_+ \mathcal{H}(t) = \mathbf{F}(t)\ddot{\mathbf{F}}(t)\mathcal{H}(t) + \ddot{\mathbf{F}}(t)\mathbf{F}(t)\mathcal{H}$$

Agora, $\mathbf{F}(t)\ddot{\mathbf{F}}(t) = -2\mathbf{F}(t)\dot{\mathbf{P}}(t)$, pois $\mathbf{F}(t)\dot{\mathbf{P}}(t) = -\frac{1}{2}\mathbf{F}(t)\ddot{\mathbf{F}}(t)$. Além disso, $\mathcal{H}(t) = (\mathbf{I} - \mathbf{P}(t))\dot{\mathcal{A}(t)}$ pertence ao subespaço n-dimensional $h(t)$, logo

$$\mathbf{F}(t)\ddot{\mathbf{F}}(t)\mathcal{H}(t) = -2\mathbf{F}(t)\dot{\mathbf{P}}(t)\mathcal{H}(t) = O,$$

já que $\dot{\mathbf{P}}(t)$ leva $h(t)$ em $\ell(t)$ que é núcleo de $\mathbf{F}$.

Por outro lado, temos

$$\ddot{\mathbf{F}}(t)\mathbf{F}(t)\mathcal{H}(t) = \ddot{\mathbf{F}}(t)\mathbf{F}(t)\dot{\mathcal{A}}(t) - \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{F}}(t)(\mathbf{F}(t))^2\ddot{\mathcal{A}}(t) = \ddot{\mathbf{F}}(t)\mathcal{A}(t) = -2\mathcal{H}(t).$$

Portanto, de

$$\begin{aligned}\Big[\mathbf{F}(t),\ddot{\mathbf{F}}(t)\Big]_+ \mathcal{A}(t) &= -2\mathcal{A}(t) \text{ e}\\ \Big[\mathbf{F}(t),\ddot{\mathbf{F}}(t)\Big]_+ \mathcal{H}(t) &= -2\mathcal{H}(t),\end{aligned}$$

concluímos que $\Big[\mathbf{F}(t),\ddot{\mathbf{F}}(t)\Big]_+ = -2\mathbf{I}$, como queríamos. $\square$

6.2 Relacionando a Curvatura com a Derivada Schwarziana

Observemos agora como a curvatura para curvas "fanning" se relaciona com a já conhecida derivada schwarziana.

Definição 6.2.1. *Sejam $\ell(t)$ uma curva "fanning" na grassmanniana $Gr(n, \mathbb{R}^{2n})$, $\mathbf{F}(t)$ seu endomorfismo fundamental e $h(t)$ sua curva horizontal. O endomorfismo de Jacobi de $\ell(t)$ é $\mathbf{K}(t) = \dfrac{(\ddot{\mathbf{F}}(t))^2}{4}$. Alternativamente, se $\mathbf{P}(t) = \dfrac{(\mathbf{I} - \dot{\mathbf{F}}(t))}{2}$ é a projeção sobre $\ell(t)$ com núcleo h(t), então $\mathbf{K}(t) = (\dot{\mathbf{P}}(t))^2$.*

O endomorfismo de Jacobi mede como a curva horizontal se move com respeito a $\ell(t)$. Se $\mathcal{A}(t)$ é um referencial "fanning" que gera $\ell(t)$ e $\mathcal{H}(t)$ é sua derivada horizontal, como $\mathbf{P}(t)\mathcal{H}(t) = O$, temos

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}(t)\mathcal{H}(t)) = \dot{\mathbf{P}(t)}\mathcal{H}(t) + \mathbf{P}(t)\dot{\mathcal{H}}(t) = O \text{ e}$$

$$\mathbf{P}(t)\dot{\mathcal{H}} = -\dot{\mathbf{P}}(t)\mathcal{H}(t) = -\dot{\mathbf{P}}(t)(\dot{\mathbf{P}}(t)\mathcal{A}(t)) = -(\dot{\mathbf{P}}(t))^2\mathcal{A}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathcal{A}(t).$$

Teorema 6.2.1. *Sejam $\ell(t)$ uma curva "fanning" em $Gr(n, \mathbb{R}^{2n})$ e $h(t)$ sua curva horizontal. O endomorfismo de Jacobi $\mathbf{K}(t)$ de $\ell(t)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *para cada t, o endomorfismo $\mathbf{K}(t)$ preserva a decomposição $\mathbb{R}^{2n} = \ell(t) \oplus h(t)$,*

2. *se $\mathbf{T}$ é uma transformação linear invertível do $\mathbb{R}^{2n}$ em $\mathbb{R}^{2n}$, o endormorfismo de Jacobi de $\mathbf{T}\ell(t)$ é $\mathbf{T}\mathbf{K}(t)\mathbf{T}^{-1}$,*

3. *se s é um difeomorfismo da reta real, o endormorfismo de $\ell(t)$ é $\mathbf{K}(s(t))\dot{s}(t) + \dfrac{1}{2}\{s(t), t\}\mathbf{I}$, onde $\{s(t), t\}$ é a schwarziana de $s(t)$ com respeito a t.*

Demonstração. 1. Note que $\ell(t)$ e $h(t)$ são $\mathbf{K}(t)$-invariantes:

$$\mathbf{K}(t)(\ell(t)) = (\dot{\mathbf{P}}(t))^2(\ell(t)) = \dot{\mathbf{P}}(t)h(t) \text{ que pertence a } \ell(t);$$

$$\mathbf{K}(t)(h(t)) = (\dot{\mathbf{P}}(t))^2(h(t)) = \dot{\mathbf{P}}(t)\ell(t) \text{ que pertence a } h(t).$$

2. O endomorfismo fundamental de $\mathbf{T}\ell(t)$ é $\mathbf{TF}(t)\mathbf{T}^{-1}$, logo o endomorfismo de Jacobi de $\mathbf{T}\ell(t)$ é dado por

$$\frac{\left[\dfrac{d^2}{dt^2}(\mathbf{TF}(t)\mathbf{T}^{-1})\right]^2}{4} = \frac{(\mathbf{T}\ddot{\mathbf{F}}(t)\mathbf{T}^{-1})^2}{4} = \frac{\mathbf{T}(\ddot{\mathbf{F}}(t))^2\mathbf{T}^{-1}}{4} = \mathbf{TK}(t)\mathbf{T}^{-1}.$$

3. Sabemos que o endomorfismo fundamental de $\ell(t)$ é $\mathbf{F}(s(t))(\dot{s}(t))^{-1}$. Façamos $r(t) = (\dot{s}(t)){-1}$ para simplificar a notação nas contas e calculemos a derivada de segunda ordem de $\mathbf{F}(s(t))(\dot{s}(t))^{-1}$:

$$\mathbf{F}''(s(t))\dot{s}(t) + \dot{\mathbf{F}}(t)\dot{s}(t)\dot{r}(t) + \mathbf{F}(s(t))\ddot{r}(t).$$

Elevando ao quadrado a expressão obtida, vem

$$(\mathbf{F}''(s(t))\dot{s}(t))^2 + 2\mathbf{F}''(s(t))\dot{s}(t)(\dot{\mathbf{F}}(t)\dot{s}(t)\dot{r}(t) + \mathbf{F}(s(t))\ddot{r}(t)) + (\dot{\mathbf{F}}(t)\dot{s}(t)\dot{r}(t))^2 +$$

$$+2\dot{\mathbf{F}}(t)\dot{s}(t)\dot{r}(t)\mathbf{F}(s(t))\ddot{r}(t) + (\mathbf{F}(s(t))\ddot{r}(t))^2 =$$

$$\begin{aligned}
= \quad & (\mathbf{F}''(s(t)))^2(\dot{s}(t))^2 + 2\mathbf{F}''(s(t))\dot{\mathbf{F}}(t)(\dot{s}(t))^2\dot{r}(t) + 2\mathbf{F}''(s(t))\mathbf{F}(s(t))\dot{s}(t)\ddot{r}(t)) + \\
& +\mathbf{I}(\dot{s}(t))^2(\dot{r}(t))^2 + 2(\dot{\mathbf{F}}(t)\mathbf{F}(s(t))\dot{s}(t)\dot{r}(t)\ddot{r}(t) \\
= \quad & (\mathbf{F}''(s(t)))^2(\dot{s}(t))^2 + \mathbf{I}[(\dot{s}(t))^2(\dot{r}(t))^2 - 2\dot{s}(t)\ddot{r}(t)].
\end{aligned}$$

Agora se reescrevermos $[(\dot{s}(t))^2(\dot{r}(t))^2 - 2\dot{s}(t)\ddot{r}(t)]$ usando

$$\begin{aligned}
r(t) &= (\dot{s}(t)){-1} \\
\dot{r}(t) &= -1(\dot{s}(t))^{-2}\ddot{s}(t) \\
\ddot{r}(t) &= 2(\dot{s}(t))^{-3}(\ddot{s}(t))^2 - (\dot{s}(t))^{-2}\dddot{s}(t)
\end{aligned}$$

teremos

$$(\dot{s}(t))^2\left[(\dot{s}(t))^{-4}(\ddot{s}(t))^2\right]-2\dot{s}(t)\left[2(\dot{s}(t))^{-3}(\ddot{s}(t))^2-(\dot{s}(t))^{-2}\dddot{s}(t)\right]=$$

$$=(\dot{s}(t))^{-2}(\ddot{s}(t))^2-4(\dot{s}(t))^{-2}(\ddot{s}(t))^2+2(\dot{s}(t))^{-1}\dddot{s}(t)$$
$$=2\dddot{s}(t)(\dot{s}(t))^{-1}-3(\ddot{s}(t))^2(\dot{s}(t))^{-2}.$$

Por outro lado, sabemos que

$$\{s(t),t\}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\ddot{s}(t)}{\dot{s}(t)}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{s}(t)}{\dot{s}(t)}\right)^2.$$

Calculando $2\{s(t),t\}$, temos

$$2[\dddot{s}(t)\dot{s}(t)-\ddot{s}(t)\ddot{s}(t)][(\dot{s}(t))^{-1}]^2-(\ddot{s}(t))^2[(\dot{s}(t))^{-1}]^2=$$

$$=2\dddot{s}(t)(\dot{s}(t))^{-1}-2(\ddot{s}(t))^2(\dot{s}(t))^{-2}-(\ddot{s}(t))^2(\dot{s}(t))^{-2}=$$
$$=2\dddot{s}(t)(\dot{s}(t))^{-1}-3(\ddot{s}(t))^2(\dot{s}(t))^{-2}.$$

Portanto, $2\{s(t),t\}=[(\dot{s}(t))^2(\dot{r}(t))^2-2\dot{s}(t)\ddot{r}(t)]$. Agora, multiplicando por $1/4$ a expressão

$$(\mathbf{F}''(s(t)))^2(\dot{s}(t))^2+\frac{1}{2}\{s(t),t\}\mathbf{I},$$

concluímos que o endomorfismo de Jacobi de $\ell(s(t))$ é dado por

$$\mathbf{K}(s(t))(\dot{s}(t))^2+\frac{1}{2}\{s(t),t\}\mathbf{I}.$$

□

Se $\mathcal{A}(t)$ é um referencial "fanning", para cada t, $\mathcal{A}(t)$ e $\dot{\mathcal{A}}(t)$ geram o $\mathbb{R}^{2n}$, portanto temos a seguinte equação diferencial

$$\ddot{\mathcal{A}}(t)+\dot{\mathcal{A}}(t)R(t)+\mathcal{A}(t)S(t)=O,$$

onde $R(t)$ e $S(t)$ são curvas de matrizes $n\times n$. Agora temos

Definição 6.2.2. *A função*

$$\{\mathcal{A}(t), t\} = 2S(t) - \frac{1}{2}R^2(t) - \dot{R}(t)$$

é a schwarziana de $\mathcal{A}(t)$.

Teorema 6.2.2. *A schwarziana de um referencial "fanning"* $\mathcal{A}(t)$ *é caracterizada pela equação*

$$\mathbf{K}(t)\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(t)\{\mathcal{A}(t), t\}.$$

Demonstração. Se $R(t)$ e $S(t)$ são curvas de matrizes $n \times n$ definidas por $\ddot{\mathcal{A}}(t) + \dot{\mathcal{A}}(t)R(t) + \mathcal{A}(t)S(t) = O$, a derivada horizontal de $\mathcal{A}(t)$ é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(t) &= \dot{\mathcal{A}}(t) - \frac{1}{2}\mathbf{F}(t)(-\dot{\mathcal{A}}(t)R(t) - \mathcal{A}(t)S(t)) \\
&= \dot{\mathcal{A}}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{F}(t)\dot{\mathcal{A}}(t)R(t) + \frac{1}{2}\mathbf{F}(t)\mathcal{A}(t)S(t)) \\
&= \dot{\mathcal{A}}(t) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(t)R(t).
\end{aligned}$$

Derivando esta expressão, temos

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{H}}(t) &= \\
&= \ddot{\mathcal{A}}(t) + \frac{1}{2}\dot{\mathcal{A}}(t)R(t) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(t)\dot{R}(t) \\
&= \mathcal{A}(t)\left(-S(t) + \frac{1}{2}\dot{R}(t)\right) - \frac{1}{2}\dot{\mathcal{A}}(t)R(t) - \frac{1}{4}\mathcal{A}(t)R^2(t) + \frac{1}{4}\mathcal{A}(t)R^2(t) \\
&= \mathcal{A}(t)\left(-S(t) + \frac{1}{4}R^2(t) + \frac{1}{2}\dot{R}(t)\right) - \frac{1}{2}\left(\dot{\mathcal{A}}(t) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(t)R(t)\right)R(t) \\
&= -\frac{1}{2}\mathcal{A}(t)\left(2S(t) - \frac{1}{2}R^2(t) - \dot{R}(t)\right) - \frac{1}{2}\mathcal{H}(t)R(t) \\
&= -\frac{1}{2}\mathcal{A}(t)\{\mathcal{A}(t), t\} - \frac{1}{2}\mathcal{H}(t)R(t) \\
&= -\frac{1}{2}\mathcal{A}(t)\{\mathcal{A}(t), t\} - \frac{1}{2}\mathcal{H}(t)R(t).
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da identidade acima por $-R(t)$, teremos, então

$$-R(t)\dot{\mathcal{H}}(t) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(t)\{\mathcal{A}(t), t\} + \frac{1}{2}R(t)\mathcal{H}(t)R(t) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(t)\{\mathcal{A}(t), t\}.$$

Como $-R(t)\dot{\mathcal{H}}(t) = \mathbf{K}(t)\mathcal{A}(t)$, o resultado segue. $\square$

Corolário 6.2.1. *Se $\mathcal{A}(t)$ é um referencial "fanning" e $\mathcal{H}(t)$ é sua derivada horizontal, a matriz para o endomorfismo de Jacobi $\mathbf{K}(t)$ de $\mathcal{A}(t)$ na base de $\mathbb{R}^{2n}$ formada pelas colunas de $\left(\begin{array}{c|c} \mathcal{A}(t) & \mathcal{H}(t) \end{array} \right)$ é*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\{\mathcal{A}(t), t\}}{2} & O \\ O & \dfrac{\{\mathcal{A}(t), t\}}{2} \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Sabemos que $\mathbf{K}(t)\mathcal{A}(t) = \dfrac{1}{2}\mathcal{A}(t)\{\mathcal{A}(t), t\} + \mathcal{H}(t)O$. Calculamos

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(t)\mathcal{H}(t) &= (\dot{\mathbf{P}}(t))^2\mathcal{H}(t) = \dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{K}(t)\mathcal{A}(t) \\ &= \dot{\mathbf{P}}(t)\frac{1}{2}\mathcal{A}(t)\{\mathcal{A}(t), t\} = \frac{1}{2}\mathcal{H}(t)\{\mathcal{A}(t), t\} \end{aligned}$$

e o resultado segue. $\square$

Corolário 6.2.2. *A schwarziana de um referencial "fanning" $\mathcal{A}(t)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *se $\mathbf{T}$ é uma transformação linear invertível de $\mathbb{R}^{2n}$ em $\mathbb{R}^{2n}$, então $\{\mathbf{T}\mathcal{A}(t), t\} = \{\mathcal{A}(t), t\}$,*

2. *se $X(t)$ é uma curva de matrizes invertíveis $n \times n$, então $\{\mathcal{A}(t)X(t), t\} = X^{-1}(t)\{\mathcal{A}(t), t\}X(t)$,*

3. *se s é um difeomorfismo da reta real, então $\{\mathcal{A}(s(t)), t\} = \{\mathcal{A}(s(t)), s\}\dot{s}^2(t) + \{s(t), t\}\mathbf{I}$,*

4. *se o referencial "fanning" é da forma*

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} I \\ M(t) \end{pmatrix},$$

então

$$\{\mathcal{A}(t), t\} = \frac{d}{dt}(\dot{M}^{-1}(t)\ddot{M}(t)) - \frac{1}{2}(\dot{M}^{-1}(t)\ddot{M}(t))^2.$$

Demonstração. 1. Sabemos que

$$\mathbf{K}(t)\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(t)\{\mathcal{A}(t), t\}.$$

Por outro lado, temos

$$\mathbf{T}\mathbf{K}(t)\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{T}\mathcal{A}(t)\{\mathbf{T}\mathcal{A}(t), t\}$$

$$\mathbf{T}\mathbf{K}(t)\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{T}\mathcal{A}(t)\{\mathcal{A}(t), t\}$$

Logo, $\{\mathbf{T}\mathcal{A}(t), t\} = \{\mathcal{A}(t), t\}$.

2. Calculamos

$$(\mathbf{K}(t)\mathcal{A}(t))X(t) = (\frac{1}{2}\mathcal{A}(t)\{\mathcal{A}(t), t\})X(t)$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{A}(t)\{\mathcal{A}(t), t\}X(t) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(t)X(t)\{\mathcal{A}(t)X(t), t\}$$

Isto implica que

$$X(t)\{\mathcal{A}(t)X(t), t\} = \{\mathcal{A}(t), t\}X(t),$$

donde o resultado segue

$$\{\mathcal{A}(t)X(t), t\} = X^{-1}\{\mathcal{A}(t), t\}X(t).$$

3. Decorre da seguinte igualdade

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathcal{A}(s(t))\{\mathcal{A}(s(t)), t\} &= \\
&= \left(\mathbf{K}(s(t))(\dot{s}(t))^2 + \frac{1}{2}\{s(t), t\}\mathbf{I}\right)\mathbf{I} \\
&= \mathbf{K}(s(t))\mathcal{A}(s(t))(\dot{s}(t))^2 + \frac{1}{2}\{s(t), t\}\mathbf{I}\mathcal{A}(s(t)) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{A}(s(t))\{\mathcal{A}(s(t)), s(t)\}(\dot{s}(t))^2 + \frac{1}{2}\{s(t), t\}\mathcal{A}(s(t)) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{A}(s(t))\left(\{\mathcal{A}(s(t)), s(t)\}(\dot{s}(t))^2 + \{s(t), t\}\mathbf{I}\right).
\end{aligned}$$

4. Como
$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} I \\ M(t) \end{pmatrix},$$
suas derivadas ficam
$$\dot{\mathcal{A}}(t) = \begin{pmatrix} O \\ \dot{M}(t) \end{pmatrix}, \qquad \ddot{\mathcal{A}}(t) = \begin{pmatrix} I \\ \ddot{M}(t) \end{pmatrix}.$$

Queremos escrever $\ddot{\mathcal{A}}(t) = -\dot{\mathcal{A}}(t)R(t) - \mathcal{A}(t)S(t)$, para isto devemos ter
$$\begin{aligned} -S(t) &= O \\ -\dot{M}(t)R(t) &= \ddot{M}(t). \end{aligned}$$

Portanto, $R(t) = -(\dot{M}^{-1}(t)\ddot{M}(t))$.

Agora, basta usar a definição de schwarziana do referencial "fanning" $\mathcal{A}(t)$ e obter
$$\{\mathcal{A}(t), t\} = \frac{d}{dt}(\dot{M}^{-1}(t)\ddot{M}(t)) - \frac{1}{2}(\dot{M}^{-1}(t)\ddot{M}(t))^2.$$
□

Corolário 6.2.3. *Sejam A, B, C, D, matrizes $n \times n$ e $M(t)$ uma curva suave de matrizes $n \times n$, tal que sua derivada $\dot{M}(t)$ nunca é singular. Se $(A + \mathbf{F}M(t))$ é invertível para todos os valores de t em algum intervalo e se $S_t(M)$ denota a matriz schwarziana de $M(t)$, então a matriz schwarziana de $(C+DM(t))(A+BM(t))^{-1}$ neste intervalo é $(A + BM(t))S_t(M)(A + BM(t))^{-1}$.*

Demonstração. Pelo item 4 do corolário anterior, a matriz schwarziana de $(C + DM(t))(A + BM(t))^{-1}$ é a schwarziana do referencial "fanning"
$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} I \\ (C + DM(t))(A + BM(t))^{-1} \end{pmatrix},$$

que pode ser escrito como

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} A + BM(t) \\ C + DM(t) \end{pmatrix} (A+BM(t))^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ M(t) \end{pmatrix} (A+BM(t))^{-1}.$$

Aplicando o item 1 do Corolário 6.2.2 ao primeiro produto, temos que a schwarziana de $\mathcal{A}(t)$ é igual à schwarziana de

$$\begin{pmatrix} I \\ M(t) \end{pmatrix} (A + BM(t))^{-1}.$$

Agora, usando o item 2 do mesmo corolário, segue que a schwarziana de $\mathcal{A}(t)$, e portanto a schwarziana de $(C + DM(t))(A + BM(t))^{-1}$ é

$$(A + BM(t))S_t(M)(A + BM(t))^{-1},$$

como queríamos.

□

6.3 Referencial Normal

Sabemos que se uma curva "fanning" $\ell(t)$ na grassmanniana é gerada pelas colunas de um referencial $\mathcal{A}(t)$, então também é gerada por todos os referenciais da forma $\mathcal{A}(t)X(t)$, onde $X(t)$ é uma curva suave de matrizes $n \times n$ invertíveis. Uma vez que $\{\mathcal{A}(t)X(t), t\} = X^{-1}(t)\{\mathcal{A}(t), t\}X(t)$, as schwarzianas de quaisquer dois referenciais para $\ell(t)$ são conjugados em cada ponto. Assim, grandezas como o traço da schwarziana e suas potências dependerão apenas da curva "fanning" na grassmanniana e são, portanto, invariantes sob a ação do grupo linear no espaço das curvas "fanning". No entanto, para termos um entendimento mais profundo sobre a geometria das curvas "fanning" na grassmanniana, devemos introduzir uma nova classe de referenciais, melhor adaptados a elas.

Definição 6.3.1. *Um referencial "fanning" $\mathcal{A}(t)$ é dito normal se as colunas de sua segunda derivada $\ddot{\mathcal{A}}(t)$ são combinações lineares das colunas de $\mathcal{A}(t)$, para todo t.*

Proposição 6.3.1. *Se $\ell(t)$ é uma curva "fanning" de subespaços n-dimensionais de $\mathbb{R}^{2n}$, então existe um referencial normal que gera esta curva. Além disso, se $\mathcal{A}(t)$ e $\mathcal{B}(t)$ são dois referenciais normais que geram $\ell(t)$, existe uma matriz $n \times n$, fixa, invertível, X, tal que $\mathcal{B}(t) = \mathcal{A}(t)X$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}(t)$ um referencial "fanning" que geral $\ell(t)$ e sejam $R(t)$ e $S(t)$ curvas de matrizes $n \times n$ definida pela equação

$$\ddot{\mathcal{A}}(t) + \dot{\mathcal{A}}(t)R(t) + \mathcal{A}(t)S(t) = O.$$

Se $X(t)$ é a curva de matrizes $n \times n$, solução do seguinte problema de valor inicial

$$\dot{X}(t) = \frac{1}{2}R(t)X(t), \qquad X(0) = \mathbf{I},$$

então calculando a segunda derivada de $\mathcal{A}(t)X(t)$, temos
$\ddot{\mathcal{A}}(t)X(t) + 2\dot{\mathcal{A}}(t)\dot{X}(t) + \mathcal{A}(t)\ddot{X}(t) =$

$$\begin{aligned}
&= \ddot{\mathcal{A}}(t)X(t) + 2\dot{\mathcal{A}}(t)\left(\frac{1}{2}R(t)X(t)\right) + \mathcal{A}(t)\ddot{X}(t) \\
&= \ddot{\mathcal{A}}(t)X(t) + \dot{\mathcal{A}}(t)R(t)X(t) + \mathcal{A}(t)\ddot{X}(t) \\
&= -\dot{\mathcal{A}}(t)R(t)X(t) - \mathcal{A}(t)S(t)X(t) + \dot{\mathcal{A}}(t)R(t)X(t) + \mathcal{A}(t)\ddot{X}(t) \\
&= \mathcal{A}\left(\ddot{X}(t) - S(t)X(t)\right),
\end{aligned}$$

vemos que $\mathcal{A}(t)X(t)$ é um referencial normal. Além disso, como $X(t)$ é invertível para todo t, segue que $\mathcal{A}(t)X(t)$ também o é e, portanto, é um referencial "fanning".

Se $\mathcal{A}(t)$ e $\mathcal{B}(t)$ são dois referenciais normais "fanning" que geram a mesma curva $\ell(t)$ em $Gr(n, \mathbb{R}^{2n})$, então existe uma curva de matrizes invertíveis, $X(t)$,

$n \times n$, tal que $\mathcal{B}(t) = \mathcal{A}(t)X(t)$. Derivando esta equação duas vezes, temos

$$\ddot{\mathcal{B}}(t) = \ddot{\mathcal{A}}(t)X(t) + 2\dot{\mathcal{A}}(t)\dot{X}(t) + \mathcal{A}(t)\ddot{X}(t).$$

Como $\mathcal{A}(t)$ é normal, $\ddot{\mathcal{A}}$ é combinação linear das colunas de $\mathcal{A}(t)$. Acabamos de ver que $\mathcal{B}(t)$ é normal. Logo, $\dot{X}(t)$ deve ser identicamente nulo, o que implica que $X(t)$ é constante. $\square$

6.4 Problema de Equivalência

Vimos que se $\mathcal{A}(t)$ é um referencial "fanning" então satisfaz a equação diferencial

$$\ddot{\mathcal{A}}(t) + \dot{\mathcal{A}}(t)R(t) + \mathcal{A}(t)S(t) = O,$$

onde $R(t)$ e $S(t)$ são curvas suaves de matrizes $n \times n$.

Vejamos agora que, se $\mathcal{A}(t)$ é um referencial "fanning" normal, a equação acima fica

$$\ddot{\mathcal{A}}(t) + \mathcal{A}(t)S(t) = O.$$

Então, por definição, temos

$$\{\mathcal{A}(t), t\} = 2S(t).$$

Portanto, podemos reescrever a equação diferencial para um referencial "fanning" normal, na forma

$$\ddot{\mathcal{A}}(t) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(t)\{\mathcal{A}(t), t\} = O,$$

chamada de forma normal.

Agora estamos prontos para apresentar uma solução para o problema de equivalência: dadas duas curvas "fanning" $\ell(t)$ e $\tilde{\ell}(t)$ em $Gr(n, \mathbb{R}^{2n})$, sob quais condições existe uma transformação linear invertível $\mathbf{T}$ de $\mathbb{R}^{2n}$ tal que $\tilde{\ell}(t) = \mathbf{T}\ell(t)$?

Teorema 6.4.1. *Duas curvas "fanning" de subespaços n-dimensionais do* $\mathbb{R}^{2n}$ *são congruentes se, e somente se, as schwarzianas de quaisquer dois de seus referenciais normais são conjugadas por uma matriz invertível,* $n \times n$*, constante.*

Demonstração. Sejam $\ell(t)$ e $\tilde{\ell}(t)$ duas curvas "fanning" equivalentes, geradas pelas colunas dos referenciais normais $\mathcal{A}(t)$ e $\mathcal{B}(t)$, respectivamente. Então, existe uma transformação linear invertível $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{2n}$ tal que $\mathbf{T}\mathcal{A}(t)$ e $\mathcal{B}(t)$ geram a mesma curva "fanning", $\tilde{\ell}(t)$.

Agora, pela proposição anterior, existe uma matriz invertível X tal que $\mathbf{T}\mathcal{A}(t)X = \mathcal{B}(t)$. Como consequência do Corolário 6.2.2 temos

$$\{\mathcal{B}(t), t\} = X^{-1}\{\mathbf{T}\mathcal{A}(t), t\}X = X^{-1}\{\mathcal{A}(t), t\}X.$$

Reciprocamente, se $\mathcal{A}(t)$ e $\mathcal{B}(t)$ são dois referenciais normais cujas schwarzianas satisfazem

$$\{\mathcal{B}(t), t\} = X^{-1}\{\mathcal{A}(t), t\}X,$$

então o referencial normal $\mathcal{A}(t)X$ gera a mesma curva que $\mathcal{A}(t)$ e possue a mesma schwarziana que $\mathcal{B}(t)$. Portanto, podemos supor, sem perda de generalidade que

$$\{\mathcal{A}(t), t\} = \{\mathcal{B}(t), t\}.$$

Agora, seja

$$\mathbf{T} = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{B}(O) & \dot{\mathcal{B}}(0) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{A}(0) & \dot{\mathcal{A}}(0) \end{array} \right)^{-1}.$$

Então $\mathbf{T}\mathcal{A}(t)$ satisfaz à mesma equação diferencial de segunda ordem que $\mathcal{B}(t)$, com as mesmas condições iniciais

$$\ddot{\mathcal{B}}(t) + \frac{1}{2}\mathcal{B}(t)\{\mathcal{B}(t), t\} = O$$

$$\mathbf{T}\ddot{\mathcal{A}}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{T}\mathcal{A}(t)\{\mathcal{B}(t), t\} = O.$$

Segue que $\mathbf{T}\mathcal{A}(t) = \mathcal{B}(t)$ e portanto, $\mathcal{A}(t)$ é equivalente a $\mathcal{B}(t)$. □

6.5 Curvas em $(G_r(n, 2n), GL(2n))$

O primeiro teorema que apresentamos nesta seção caracteriza as curvas "fanning" cuja schwarziana é zero.

Teorema 6.5.1. *As seguintes condições para uma curva "fanning" são equivalentes:*

1. *o endomorfismo de Jacobi de $\ell(t)$ é zero,*
2. *a schwarziana de qualquer curva de referenciais que gere $\ell(t)$ é zero,*
3. *qualquer referencial normal que gere $\ell(t)$ é uma reta no espaço de referenciais,*
4. *a curva horizontal de $\ell(t)$ é constante.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}(t)$ um referencial "fanning" que gera $\ell(t)$. Então, sabemos que

$$\mathbf{K}(t)\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(t)\{\mathcal{A}(t), t\}.$$

Logo,

$$\mathbf{K}(t) \equiv O \qquad \Leftrightarrow \qquad \{\mathcal{A}(t), t\} \equiv O,$$

isto é (1) é equivalente a (2).

Para provar que (2) implica (3), observemos que se $\mathcal{A}(t)$ é normal, então

$$\ddot{\mathcal{A}}(t) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(t)\{\mathcal{A}(t), t\}.$$

Logo, se $\{\mathcal{A}(t), t\} = O$, então $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(0) + t\dot{\mathcal{A}}(0)$ é uma reta no espaço dos referenciais. Agora, a derivada horizontal de $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(0) + t\dot{\mathcal{A}}(0)$ é $\dot{\mathcal{A}}(0)$, donde (3) implica (4).

Finalmente, para mostrar que (4) implica (2), note que se $h(t)$ é constante, a derivada horizontal de qualquer referencial "fanning" $\mathcal{A}(t)$ cujas colunas geram $\ell(t)$ é da forma

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(0)X(t)$$

para alguma curva $X(t)$ de matrizes invertíveis $n \times n$.

Assim, temos

$$\dot{\mathcal{H}}(t) = \mathcal{H}(0)\dot{X}(t) = \mathcal{H}(t)X^{-1}(t)\dot{X}(t) \quad \text{e}$$

$$\mathbf{P}(t)\dot{\mathcal{H}}(t) = \mathbf{P}(t)\mathcal{H}(t)X^{-1}(t)\dot{X}(t) = O,$$

o que implica que

$$O = -\mathbf{K}(t)\mathcal{A}(t) = -\frac{1}{2}\mathcal{A}(t)\{\mathcal{A}(t), t\}.$$

Logo, $\{\mathcal{A}(t), t\} = O$. □

Corolário 6.5.1. *Seja $M(t)$ uma curva suave de matrizes $n \times n$ tal que $\dot{M}(t)$ é invertível para todos os valores de t. A matriz schwarziana de $M(t)$ é identicamente nula se, e somente se, existem matrizes A, B, C, D tais que $M(t) = (C + tD)(A + tB)^{-1}$.*

Demonstração. Assumamos primeiro que a schwarziana de $M(t)$ seja zero. Então, a schwarziana do referencial "fanning"

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} I \\ M(t) \end{pmatrix}$$

também é nula e qualquer outro referencial que gere a mesma curva que $\mathcal{A}(t)$ terá schwarziana nula. Em particular, para o referencial normal $\mathcal{B}(t) = \mathcal{A}(t)X(t)$, temos $\{B(t), t\} = O$. Pelo teorema anterior segue que $\mathcal{B}(t) = \mathcal{B}(0) + t\dot{\mathcal{B}}(0)$.

Se escrevermos

$$\mathcal{B}(0) = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \dot{\mathcal{B}}(0) = \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix},$$

então

$$\begin{pmatrix} I \\ M(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + tB \\ C + tD \end{pmatrix} X^{-1}(t).$$

Segue que $X(t) = (A + tB)$ e $M(t) = (C + tD)(A + tB)^{-1}$.

$\square$

Vamos agora caracterizar curvas "fanning" da forma $\ell(t) = \exp(t\mathbf{X})\ell$. Lembramos que a exponencial de uma matriz tA, com $t \in \mathbb{R}$ é uma matriz definida por $\exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k$ e satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\exp(O) = I$, onde O é a matriz quadrada nula,
2. $A \exp(tA) = \exp(tA)A$,
3. $\exp(tA)\exp(tB) = \exp[t(A + B)]$, se $AB = BA$,
4. $\exp(tA)\exp(sA) = \exp[(t + s)A]$,
5. $\exp^{-1}(tA) = \exp(-tA)$,
6. $\exp(BAB)^{-1} = B[\exp(A)]B^{-1}$,
7. $\det \exp(A) = \exp(\operatorname{tr} A)$,
8. o conjunto $\{\exp(tA) : t \in \mathbb{R}\}$ com o produto de matrizes é um grupo abeliano,

algumas das quais utilizaremos.

Definição 6.5.1. *Uma curva "fanning" $\ell(t)$ na grassmanniana $Gr(n, \mathbb{R}^{2n})$ é dita paralela se a schwarziana de um referencial normal que a gera é constante. É dita fracamente paralela se sempre que $\mathcal{A}(t)$ for um referencial normal gerando $\ell(t)$, existirem matrizes $n \times n$, X e Y tais que $\{\mathcal{A}(t), t\} = \exp(-tY)X\exp(tY)$.*

Lema 6.5.1. *Um referencial "fanning" $\mathcal{A}(t)$ satisfaz uma equação diferencial de segunda ordem a coeficientes constantes*

$$\ddot{\mathcal{A}}(t) + \dot{\mathcal{A}}(t)R + \mathcal{A}(t)S = O,$$

onde R e S são matrizes $n \times n$, se, e somente se é da forma $\mathcal{A}(t) = \exp(t\mathbf{X})\mathcal{A}(0)$ para alguma transformação linear $\mathbf{X}$ do $\mathbb{R}^{2n}$ em $\mathbb{R}^{2n}$, tal que a matriz $2n \times 2n$

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathcal{A}(0) & \mathbf{X}\mathcal{A}(0) \end{array} \right)$$

é invertível.

Demonstração. Seja $\mathcal{A}(t) = \exp(t\mathbf{X})\mathcal{A}(0)$ para alguma $\mathbf{X}$ satisfazendo as hipóteses do lema. Então, como $\mathcal{A}(0)$ e $\mathbf{X}\mathcal{A}(0)$ geram o $\mathbb{R}^2$, existem matrizes $n \times n$, R e S tais que

$$\mathbf{X}^2\mathcal{A}(0) + \mathbf{X}\mathcal{A}(0)R + \mathcal{A}(0)S = O.$$

Agora,

$$\begin{array}{rcl} \dot{\mathcal{A}}(t) & = & \exp(t\mathbf{X})\mathbf{X}\mathcal{A}(0), \\ \ddot{\mathcal{A}}(t) & = & \exp(t\mathbf{X})\mathbf{X}^2\mathcal{A}(0), \end{array}$$

então,

$$\ddot{\mathcal{A}}(t) + \dot{\mathcal{A}}(t)R + \mathcal{A}(t)S = \exp(t\mathbf{X})\mathbf{X}^2\mathcal{A}(0) + \exp(t\mathbf{X})\mathbf{X}\mathcal{A}(0)R + \exp(t\mathbf{X})\mathcal{A}(0)S$$

$$\ddot{\mathcal{A}}(t) + \dot{\mathcal{A}}(t)R + \mathcal{A}(t)S = \exp(t\mathbf{X})\left[\mathbf{X}^2\mathcal{A}(0) + \mathbf{X}\mathcal{A}(0)R + \mathcal{A}(0)S\right] = 0.$$

Por outro lado, suponhamos que $\mathcal{A}(t)$ satisfaça

$$\ddot{\mathcal{A}}(t) + \dot{\mathcal{A}}(t)R + \mathcal{A}(t)S = O.$$

Podemos escrever esta equação como

$$\left(\begin{array}{c|c} \dot{\mathcal{A}}(t) & \ddot{\mathcal{A}}(t) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \dot{\mathcal{A}}(t) & -\mathcal{A}(t)S - \dot{\mathcal{A}}(t)R \end{array} \right),$$

que é equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{A}(t) \;\middle|\; \dot{\mathcal{A}}(t) \right) = \left(\mathcal{A}(t) \;\middle|\; \dot{\mathcal{A}}(t) \right) \begin{pmatrix} O & -Q \\ I & -P \end{pmatrix}.$$

Logo, $\mathcal{A}(t) = \exp(t\mathbf{X})(0)$, onde

$$\mathbf{X} = \left(\mathcal{A}(0) \;\middle|\; \dot{\mathcal{A}}(0) \right) \begin{pmatrix} O & -S \\ I & -R \end{pmatrix} \left(\mathcal{A}(0) \;\middle|\; \dot{\mathcal{A}}(0) \right)^{-1}.$$

□

Teorema 6.5.2. *Uma curva "fanning" em $Gr(n, \mathbb{R}^{2n})$ é fracamente paralela se, e somente se, é da forma $\ell(t) = \exp(t\mathbf{X})\ell(0)$, onde $\mathbf{X}$ é uma transformação linear do $\mathbb{R}^{2n}$ em $\mathbb{R}^{2n}$, tal que $\mathbf{X}\ell(0)$ é transversal a $\ell(0)$.*

Demonstração. Seja $\ell(t)$ fracamente paralela e seja $\mathcal{A}(t)$ um referencial normal que gera $\ell(t)$. Então, sabemos que existem X e Y, matrizes $n \times n$ tais que

$$\ddot{\mathcal{A}}(t) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(t)\exp(-tY)X\exp(tY) = O,$$

pois $\mathcal{A}(t)$ satisfaz

$$\ddot{\mathcal{A}}(t) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(t)\{\mathcal{A}(t), t\} = O.$$

Agora, se $\mathcal{B}(t) = \mathcal{A}(t)\exp(-tY)$, temos

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{B}}(t) &= \dot{\mathcal{A}}(t)\exp(-tY) - \mathcal{A}(t)\exp(-tY)Y \\ \ddot{\mathcal{B}}(t) &= \ddot{\mathcal{A}}(t)\exp(-tY) - \dot{\mathcal{A}}(t)\exp(-tY)Y - \dot{\mathcal{A}}(t)\exp(-tY)Y + \mathcal{A}\exp(-tY)Y^2 \end{aligned}$$

Segue que

$$\left[\ddot{\mathcal{B}}(t) + \dot{\mathcal{B}}(t)(2Y) + \mathcal{B}(t)\left(Y^2 + \frac{1}{2}X\right)\right]\exp(tY) =$$

$$= \Big[\ddot{\mathcal{A}}(t)\exp(-tY) - \dot{\mathcal{A}}(t)\exp(-tY)Y - \dot{\mathcal{A}}(t)\exp(-tY)Y + \mathcal{A}\exp(-tY)Y^2 +$$

$$+2\dot{\mathcal{A}}(t)\exp(-tY)Y - 2\mathcal{A}(t)\exp(-tY)Y^2 +$$

$$+\mathcal{A}(t)\exp(-tY)Y^2 + \frac{1}{2}\mathcal{A}(t)\exp(-tY)X\Big]\exp(tY)$$

$$= \ddot{\mathcal{A}}(t) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(t)\exp(-tY)X\exp(tY) = O$$

Portanto,

$$\ddot{\mathcal{B}}(t) + \dot{\mathcal{B}}(t)(2Y) + \mathcal{B}(t)\left(Y^2 + \frac{1}{2}X\right) = O.$$

Pelo lema anterior temos que $\mathcal{B}(t) = \exp(t\mathbf{X})B(0)$, o que implica em $\ell(t) = \exp(t\mathbf{X})\ell(0)$ para alguma $\mathbf{X} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ linear.

Assumamos agora que $\ell(t) = \exp(t\mathbf{X})\ell(0)$ e seja $\mathcal{A}(0)$ uma matriz $2n \times 2n$ cujas colunas geram o subespaço $\ell(0)$. Pelo lema anterior $\mathcal{A}(t) = \exp(t\mathbf{X})\mathcal{A}(0)$ satisfaz

$$\ddot{\mathcal{A}}(t) + \dot{\mathcal{A}}(t)R + \mathcal{A}(t)S = O$$

para um par de matrizes R, S. Logo, pela definição de derivada schwarziana,

$$\{\mathcal{A}(t), t\} = 2S - \frac{1}{2}R^2.$$

Isto é, a schwarziana de $\mathcal{A}(t)$ é uma matriz constante, encontrada acima, a qual chamaremos simplesmente X.

Agora, $\mathcal{A}(t)\exp\left(t\frac{R}{2}\right) = \exp(tX)\mathcal{A}(0)\exp\left(t\frac{R}{2}\right)$ é um referencial normal para $\ell(0)$. De fato, se calculamos a primeira e segunda derivadas, temos respectivamente

$$\dot{\mathcal{A}}(t)\exp\left(t\frac{R}{2}\right) + \mathcal{A}(t)\frac{R}{2}\exp\left(t\frac{R}{2}\right) \quad \text{e}$$

$$\ddot{\mathcal{A}}(t)\exp\left(t\frac{R}{2}\right) + 2\dot{\mathcal{A}}(t)\frac{R}{2}\exp\left(t\frac{R}{2}\right) + \mathcal{A}(t)\frac{R^2}{4}\exp\left(t\frac{R}{2}\right).$$

Observe que podemos escrever a segunda derivada como

$$\left(\ddot{\mathcal{A}}(t) + \dot{\mathcal{A}}(t)R + \mathcal{A}(t)\frac{R^2}{4}\right)\exp\left(t\frac{R}{2}\right),$$

onde $\ddot{\mathcal{A}}(t) + \dot{\mathcal{A}}(t)R = -\mathcal{A}(t)S$. Isto é, a segunda derivada pode ser expressa como combinação linear das colunas de $\mathcal{A}(t)\exp\left(t\frac{R}{2}\right)$.

Como $\exp(t\dfrac{R}{2})$ é uma curva de matrizes $n \times n$, sabemos que a schwarziana do referencial normal é

$$\exp(-t\frac{R}{2})\{\mathcal{A}(t), t\} \exp(t\frac{R}{2}) = \exp(-t\frac{R}{2})X \exp(t\frac{R}{2}).$$

Portanto, $\ell(t)$ é fracamente paralela. □

Lembramos que um subgrupo a um-parâmetro de um grupo G é um homomorfismo contínuo do grupo aditivo dos reais para o grupo G.

Corolário 6.5.2. *Se $\mathcal{A}(t)$ é qualquer referencial gerando uma curva "fanning" $\ell(t)$ que é a projeção de um subgrupo a um-parâmetro de $GL(2n)$ na grassmanniana $Gr(n, \mathbb{R}^{2n})$, então a schwarziana de $\mathcal{A}(t)$ satisfaz a equação de Lax*

$$\frac{d}{dt}\{\mathcal{A}(t), t\} = [\{\mathcal{A}(t), t\}, Y(t)]$$

onde $Y(t)$ é uma curva suave de matrizes $n \times n$.

Demonstração. Como $\ell(t)$ é fracamente paralela, a schwarziana de um referencial normal $\mathcal{B}(t)$ que a gere é da forma $\exp(-tY)X \exp(tY)$ para matrizes $n \times n$, X, Y. Portanto, temos a equação

$$\frac{d}{dt}\{\mathcal{B}(t), t\} = [\{\mathcal{B}(t), t\}Y].$$

Se $\mathcal{A}(t) = \mathcal{B}(t)X(t)$ é qualquer outro referencial gerando $\ell(t)$, temos

$$\frac{d}{dt}\{\mathcal{A}(t), t\} = \frac{d}{dt}X^{-1}(t)\{B(t), t\}X(t) =$$

$$-X^{-1}(t)\dot{X}(t)\{\mathcal{A}(t), t\} + X^{-1}(t)\frac{d}{dt}\{\mathcal{B}(t), t\}X(t) + \{\mathcal{A}(t), t\}X^{-1}(t)\dot{X}(t) =$$

$$= -X^{-1}(t)\dot{X}(t)\{\mathcal{A}(t), t\} + X^{-1}(t)\left[\{\mathcal{B}(t), t\}\right]X(t) + \{\mathcal{A}(t), t\}X^{-1}(t)\dot{X}(t) =$$

$$= \left[\{\mathcal{A}(t), t\}, X^{-1}(t)YX(t) + X^{-1}(t)\dot{X}(t)\right].$$

□

Teorema 6.5.3. *Uma curva "fanning" em $Gr(n, \mathbb{R}^{2n})$ é paralela se, e somente se, é da forma $\ell(t) = \exp(t\mathbf{X})\ell(0)$, onde $\mathbf{X}$ é uma transformação linear de $\mathbb{R}^{2n}$ em $\mathbb{R}^{2n}$ tal que $\mathbf{X}\ell(0)$ é transversal a $\ell(0)$ e $\mathbf{X}^2\ell(0) \subset \ell(0)$.*

Demonstração. Se $\ell(t)$ é paralela e $\mathcal{A}(t)$ é um referencial normal cujas colunas geram $\ell(t)$, então a schwarziana de $\mathcal{A}(t)$ é constante, por definição. Logo, $\mathcal{A}(t)$ satisfaz

$$\ddot{\mathcal{A}}(t) + \mathcal{A}(t)S = O.$$

Pelo Lema 6.5.1, $\mathcal{A}(t) = \exp(t\mathbf{X})\mathcal{A}(0)$, onde

$$\mathbf{X} = \left(\mathcal{A}(0) \,\middle|\, \dot{\mathcal{A}}(0) \right) \begin{pmatrix} O & -S \\ I & O \end{pmatrix} \left(\mathcal{A}(0) \,\middle|\, \dot{\mathcal{A}}(0) \right)^{-1}.$$

Note que $\mathbf{X}\mathcal{A}(0) = \dot{\mathcal{A}}(0)$ e $\mathbf{X}^2\mathcal{A}(0) = -\mathcal{A}(0)S$. Portanto, $\ell(t) = \exp(t\mathbf{X})\ell(0)$, $\ell(0)$ é transversal a $\mathbf{X}\ell(0)$ e $\mathbf{X}^2\ell(0) \subset \ell(0)$.

Por outro lado, seja $\ell(t) = \exp(t\mathbf{X})\ell(0)$, para alguma $\mathbf{X} : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Seja $\mathcal{A}(0)$ uma matriz $2n \times n$ que gera $\ell(0)$. Como $\mathbf{X}^2\ell(0) \subset \ell(0)$, então temos

$$\ddot{\mathcal{A}(t)} = \exp(t\mathbf{X})\mathbf{X}^2\mathcal{A}(0),$$

donde $\mathcal{A}(t) = \exp(t\mathbf{X})\mathcal{A}(0)$ é normal.

Além disso, como $\mathbf{X}\mathcal{A}(0)$ é transversal a $\mathcal{A}(0)$, pelo Lema 6.5.1 $\mathcal{A}(t)$ satisfaz a equação diferencial de segunda ordem a coeficientes constantes

$$\ddot{\mathcal{A}}(t) + \dot{\mathcal{A}}(t)R + \mathcal{A}(t)S = O$$

e portanto, a schwarziana de $\mathcal{A}(t)$ é constante. $\square$

Proposição 6.5.1. *O endomorfismo de Jacobi de um curva "fanning" $\ell(t)$ na grassmanniana é zero se, e somente se, é da forma $\ell(t) = \exp(t\mathbf{X})\ell(0)$ com $\mathbf{X}$ uma transformação linear do $\mathbb{R}^{2n}$ em $\mathbb{R}^{2n}$, tal que $\mathbf{X}\ell(0)$ é transversal a $\ell(0)$ e $\mathbf{X}^2$ é zero.*

Demonstração. Seja $\ell(t) = \exp(t\mathbf{X}\ell(0)$ com $\mathbf{X}$ satisfazendo as hipóteses do enunciado e $\mathcal{A}(0)$ uma matriz $2n \times n$ cujas colunas geram $\ell(0)$, então

$$\mathcal{A}(t) = \exp(t\mathbf{X})\mathcal{A}(0)$$

é um referencial normal cujas colunas geram $\ell(t)$ e que satisfaz

$$\ddot{\mathcal{A}}(t) = \exp(t\mathbf{X})\mathbf{X}^2\mathcal{A}(0) = O.$$

Logo, $\mathcal{A}(t)\{\mathcal{A}(t), t\} = O$, o que implica em $\{\mathcal{A}(t), t\} = O$. Pelo Teorema 6.5.1, $\mathbf{K}(t) \equiv O$.

Se, por outro lado, $\mathcal{A}(t)$ é um referencial normal cujas colunas geram uma curva "fanning" $\ell(t)$ cujo endomorfismo de Jacobi $\mathbf{K}(t)$ é identicamente nulo, então pelo Teorema 6.5.1,

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(0) + t\dot{\mathcal{A}}(0).$$

Agora, se $\mathbf{X} : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é qualquer tranformação linear tal que $\mathbf{X}\mathcal{A}(0) = \dot{\mathcal{A}}(0)$ e $\mathbf{X}^2 \equiv O$, então

$$\mathcal{A}(t) = \exp(t\mathbf{X})\mathcal{A}(0) \quad \text{e} \quad \ell(t) = \exp(t\mathbf{X})\ell(0),$$

como queríamos. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Andrade, Plácido Francisco de Assis & Barros, Abdenago Alves de. *Introdução à Geometria Projetiva*, XIII Escola de Geometria Diferencial, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 26 a 30 de julho de 2004.

[2] Abraham, Ralph & Marsden, Jerrold E.. *Foundations of Mechanics*, segunda edição, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1978.

[3] Álvarez-Paiva, J. C. & Durán, Carlos Eduardo *Geometric Invariants of Fanning Curves*. Advanced Applied Mathematics, no Prelo, 2005. (Disponível na web)

[4] Arnold, V. I. & Vogtmann K. & Weinstein, A.. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, NY, USA, 1989.

[5] Brannan, David A. & Matthew F. Esplen & Jeremy J. Gray. *Geometry*. Cambridge University Press, 2000.

[6] Bröcker, Theodor & Dieck, Tammo ton. *Representations of Compact Lie Groups*, capítulo 1, seções de 1 à 4, Springer-Verlag, New York, 1985.

[7] Carmo, Manfredo P. do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática, capítulo 1, 2^a edição, 2006.

[8] Eves, Howard, *Introdução à História da Matemática*, Editora da Unicamp, Campinas, SP, 2004.

[9] Fernandes, Rui Loj. *Lições de Geometria Diferencial*, Departamento de Matemática, IST, Lisboa, Portugal, 2003.

[10] Flanders, Harley. *The Schwarzian as a Curvature*, Journal of Differencial Geometry, pp. 515 à 519, 1970.

[11] Frenet, F. *Sur les courbes à double courbure.* Thèse. Toulouse, 1847. Abstract in Journal des Mathématiques Pures et Appliquées, vol. 17, 1852.

[12] Gillispie, Charles Coulston. *Dictionary of scientific biography.* Scribner's, New York, 1981.

[13] Gluck, Herman. *Higher Curvatures of Curves in Euclidean Space*, The American Mathematical Monthly, Vol. 73, No. 7, pp. 699-704, Jstor, 1966.

[14] Gluck, Herman. *Higher Curvatures of Curves in Euclidean Space, II*, The American Mathematical Monthly, Vol. , No. , pp. 1049-1056, Jstor, 1967.

[15] Halsted, G. B.. *Biography. Professor Felix Klein.* The American Mathematical Monthly, vol. 1 pp. 416-420, 1894.

[16] Ivey, Thomas A. & Landsberg, J. M. *Cartan for Beginners: Differencial Geometry via Moving Frames and Exterior Differential Systems*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1963.

[17] Kamran, Niky & Olver, Peter & Tenenblat, Keti. *Local Symplectic Invariants for Curves*, 28 de maio de 2007.

[18] Rigas, Alcebíades. *Grupos de Lie Via Exemplos*, 19^0 Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1993.

[19] Serret, J. A. *Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure.* Journal des Mathématiques Pures et Appliquées, vol. 16, 1851.

[20] Spivak, Michael. *Calculus on Manifolds. A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus* Addison-Wesley Publishing Company. 1965.

[21] Yaglom, I. M.. *Felix Klein and Sophus Lie : evolution of the idea of symmetry in the nineteenth century.* Boston, 1988.

[22] Warner, Frank W.. *Foundation of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, capítulos 1, 2, 3, Springer, 1983.

Índice Remissivo