Universidade Estadual de Campinas
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

n-Larguras de Conjuntos de Funções Suaves sobre a Esfera S^d

Régis Leandro Braguim Stábile
Mestrado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Alexander Kushpel
Co-Orientador: Prof. Dr. Sérgio Antonio Tozoni

Campinas - 2009

Este trabalho recebeu apoio financeiro do CNPq.

n-Larguras de Conjuntos de Funções Suaves sobre a Esfera S^d

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Régis Leandro Braguim Stábile** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 05 de Março de 2009.

Prof. Dr. Alexander Kushpel
Orientador

Prof. Dr. Sérgio Antonio Tozoni
Co-Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Alexander Kushpel

Prof. Dra. Vanessa Bertoni

Prof. Dr. Benjamin Bordin

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a 2116

Stábile, Régis Leandro Braguim

St11n n-Larguras de conjuntos de funções suaves sobre a esfera S^d / Régis Leandro Braguim Stábile -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2009.

Orientador : Alexander Kushpel ; Sérgio Antonio Tozoni

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. n-Larguras. 2. Análise harmônica. 3. Teoria da aproximação. 4. Multiplicadores (Análise matemática). I. Kushpel, Alexander. II. Tozoni, Sérgio Antonio. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: n-Widths of sets of smooth functions on the sphere S^d.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. n-Widths. 2. Harmonic analysis. 3. Approximation theory. 4. Multipliers (Mathematical analysis).

Área de concentração: Análise harmônica

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Prof. Dr. Alexander Kushpel (IMECC-UNICAMP)
Profa. Dra. Vanessa Bertoni (UFJF)
Prof. Dr. Benjamin Bordin (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 05/03/2009

Programa de pós-graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 05 de março de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). ALEXANDER KUSHPEL

Vanessa Bertoni

Prof. (a). Dr (a). VANESSA BERTONI

Prof. (a). Dr (a). BENJAMIN BORDIN

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a Deus, por ter me capacitado a vencer mais esse desafio, por ter suprido cada uma das minhas necessidades e por ter sido sempre meu refúgio seguro nos momentos de angústia. Sem Ele tudo o que foi feito ainda estaria por fazer.

Aos meus pais pela formação moral que me proporcionaram, por terem abdicado por diversas vezes de seus sonhos em favor dos meus, por todo amor e toda dedicação que sempre dispensaram a mim, por todas as orações, todas as noites em claro e principalmente por terem me incentivado na busca dos meus sonhos, por mais distantes que eles parececem estar. À minha irmã, meu cunhado e à criança dona do olhar mais puro e do sorrisso mais lindo desse mundo, Ana Laura.

De uma forma especial, agradeço à toda família Fincatti, da qual já me sinto parte integrante, por tudo que fizeram por mim quando cheguei à essa cidade, são pessoas como vocês que ainda me fazem crer no ser humano, amo vocês e serei sempre grato por tudo.

Aos meus grandes amigos de Ilha Solteira que mesmo longe estiveram sempre tão perto: Aninha, Dani, Gi, Grazi, Guaíra, Jú, Laine, Lia, Michel, Raiane, Reginaldo, Robson e Zy, em especial ao meu irmão Reginaldo, às minhas irmãzinhas Gi, Grazi, Laine e Lia, e ao Michel que sempre tornou nossas vidas mais divertidas. Aos meus amigos de Birigui André, Larissa e Natália por termos conseguido manter nossa amizade ao longo de tantos anos, obrigado por tudo. Aos amigos que fiz em Campinas e que tiveram importância fundamental nessa conquista, começando pela Carol, que conheci durante o Programa de Verão em 2007, passando pelos amigos que fiz no mestrado: Ana Cláudia, Ariane, Bricela, Elisa, Juliana, Lilian, Luciano, Marcos, Marcus, Poliana, Ricardo, Tati e Vitor, em especial à Bricela, à

Elisa, à Ju (minha parceira de pesquisas) e ao Ricardo por dividir sempre seu conhecimento (que não é pouco) com nós todos, por fim aos meus companheiros de República: Gaúcho, Hipólito, João Paulo, Jorjão, Katarina e Marcus, em especial ao meu brother Marcus por ter tido sempre uma palavra de incentivo e por ter acreditado sempre nessa vitória (às vezes mais que eu mesmo).

Aos meus professores da UNESP por terem me proporcionado uma formação básica sólida tornando possível essa empreitada, em especial ao professor Luis e à professora Roseli por terem incutido em mim o desejo de prosseguir.

Aos meus professores do IMECC-UNICAMP, em especial aos meus orientadores Alexander Kushpel e Sérgio Tozoni pelo competente trabalho de orientação, pelas muitas, proveitosas e descontraídas tardes de seminários com as quais pude aprender muito e por terem se tornado além de grandes mestres, amigos.

Aos funcionários da Secretaria de Pós-graduação: Cidinha, Edinaldo e Tânia por se mostrarem sempre tão solícitos.

Por fim, mas de forma alguma menos importante, agradeço ao CNPQ pelo apoio financeiro.

RESUMO

O objetivo principal da dissertação é realizar um estudo sobre estimativas de n-larguras de conjuntos de funções suaves sobre a esfera unitária d-dimensional real. Esses conjuntos são gerados por operadores multiplicadores. Outro objetivo é desenvolver um texto em português sobre as n-larguras mais importantes, suas propriedades e suas relações. Este objetivo é realizado no primeiro capítulo.

No segundo capítulo é realizado um estudo rápido e com poucas demonstrações sobre Análise Harmônica na esfera d-dimensional real.

No terceiro capítulo são estudadas estimativas de médias de Levy para uma classe de normas especiais e em seguida esses resultados são aplicados no estudo de estimativas inferiores para as n-larguras de Kolmogorov e Gel'fand e superiores para a de Kolmogorov, para operadores multiplicadores gerais.

No quarto e último capítulo são estudadas estimativas para n-larguras de conjuntos de funções suaves, finitamente e infinitamente diferenciáveis sobre a esfera. Várias dessas estimativas são assintoticamente exatas em termos de ordem e as constantes que determinam a ordem dessas estimativas são determinadas explicitamente.

ABSTRACT

The purpose of this work is to study estimates of n-widths of sets of smooth functions on the d-dimensional real unitary sphere. These sets are generated by multipliers operator. Another aim is to develop a text in portuguese about the most important n-widths, your properties and relations. We do this in the first chapter.

In the second chapter, we develop a brief and proof-less study about Harmonic Analysis on the d-dimensional real unitary sphere.

In the third chapter, the Levy means for a class of special norms are studied and applied in the study of lower estimates for the Kolmorogov and Gel'fand's n-widths, and upper estimates for the Kolmorogov's, for general multipliers operators.

In the fourth and last chapter, the estimates for the n-widths of sets of smooth functions, finitely and infinitely differentiables on the sphere are studied. Several of these estimates are asymptotically exacts in terms of order and the constants that determine the order of these estimatives are given in a explicit form.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A teoria de n-larguras foi introduzida por Kolmogorov em 1938. Até 1960, quando apareceu o primeiro trabalho na direção de pesquisa abordada nesse trabalho, existiam apenas dois artigos devidos a Rudin e Steehkin. Após 1960 e até o presente momento pudemos observar uma explosão de interesse nessa área. Muitos matemáticos importantes trabalharam e trabalham nessa área: Chui, Micchelli, Pinkus, Dyn, Tikhomirov, De Vore, Triebel, Wozniakowski, Traub, Kashin e outros. Existem métodos profundos e eficazes para o cálculo de n-larguras, mas a maioria deles são difíceis de serem aplicados sobre a esfera. O principal problema nesse caso é que a análise harmônica na esfera S^d é muito diferente do caso comutativo (por exemplo no toro).

A teoria de n-larguras tem grande importância em Análise Numérica, uma vez que a mesma possui muitos métodos concretos distintos que necessitam ser classificados e comparados, nesse sentido a teoria das n-larguras pode ser considerada como uma base teórica para a comparação da eficácia de tais métodos. Vale ressaltar que estimativas ótimas de n-larguras podem também fornecer novos métodos numéricos ótimos.

O objetivo principal deste trabalho é realizar um estudo sobre n-larguras de operadores multiplicadores de funções definidas sobre S^d utilizando o trabalho de A. Kushpel e S. A. Tozoni [8].

Um outro objetivo deste trabalho é desenvolver um texto em português versando sobre os conceitos, propriedades e relações principais entre as n-larguras, já que se pode verificar a inexistência de literaturas em português focando o assunto. Tal objetivo é cumprido no primeiro capítulo.

Iniciamos o Capítulo 1 apresentando os conceitos básicos referentes às n-larguras de Kolmogorov, Gel'fand, Linear e de Berstein. Em seguida, fazemos um estudo sobre as principais propriedades de tais n-larguras e finalmente abordamos algumas relações existentes entre elas. A referência principal para este capítulo é o livro de A. Pinkus [14]. Outras referências para o capítulo são [1], [3], [4], [6], [7] e [18].

No Capítulo 2 fazemos uma revisão rápida e sem muitas demonstrações de conceitos e resultados sobre Análise Harmônica na esfera S^d que necessitaremos nos capítulos seguintes. As referências principais são [8] e [11], outras referências utilizadas são [2], [10], [15], [16] e [17].

No Capítulo 3 estudamos estimativas inferiores e superiores para n-larguras de operadores multiplicadores gerais de $L^p(S^d)$ em $L^q(S^d)$, $1 \leq p, q \leq \infty$, demonstradas por A. Kushpel e S. Tozoni em [8]. A estimativa inferior é demonstrada para as n-larguras de Kolmogorov e Gel'fand e a superior somente para a de Kolmogorov. Para tanto, iniciamos o capítulo introduzindo o conceito de Média de Levy de uma norma definida sobre $\mathbb{R}^n$ e especificamos as normas com as quais iremos trabalhar . Feito isso, faremos o estudo de um teorema bastante importante que nos fornece estimativas para as Médias de Levy de tais normas, o que nos possibilita obter as estimativas para as n-larguras dos operadores multiplicadores. Além de [8], outras referências utilizadas no capítulo são [5], [9], [12] e [13].

No Capítulo 4, de posse das estimativas gerais obtidas no capítulo anterior, estudamos estimativas para as n-larguras de Kolmogorov de operadores multiplicadores de $L^p(S^d)$ em $L^q(S^d)$ associadas às sequências $\Lambda^{(1)} = \{k^{-\gamma}\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\Lambda^{(2)} = \{e^{-\gamma k^r}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\gamma, r \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, $0 < r < 1$, tais sequências nos fornecem conjuntos de funções suaves, finitamente e infinitamente diferenciáveis em S^d, respectivamente. Várias dessas estimativas são assintoticamente exatas em termos de ordem e são explicitadas as constantes que determinam a ordem dessas estimativas.

CAPÍTULO 1

N-LARGURAS

Nesse capítulo tratamos das n-larguras. Na primeira seção introduzimos os conceitos básicos referentes às n-larguras de Kolmogorov, Linear, de Gel'fand e de Bernstein. Reservamos a segunda seção para o estudo das propriedades de tais n-larguras bem como das relações existentes entre elas. A referência principal para os conceitos e resultados apresentados nesse capítulo é [14]. Outras referências utilizadas são [1], [3], [4], [6], [7] e [18].

1.1 Conceitos Básicos

Notação 1.1.1. Seja (Ω, Σ, ν) um espaço de medida, ou seja, Ω é um conjunto não-vazio, Σ é uma σ-álgebra de suconjuntos de Ω e $\nu : \Sigma \to [0, \infty]$ é uma medida. Se $1 \leq p < \infty$, denotaremos por $L^p(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{C}$, onde

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, d\nu(x) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Denotaremos por $L^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial formado por todas as funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{C}$ para as quais existe uma constante $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ para *q.t.p.* $x \in \Omega$. Se $f \in L^\infty(\Omega)$, escrevemos

$$\|f\|_\infty = \inf\{C : |f(x)| \leq C, \ q.t.p. \ x \in \Omega\}.$$

Se $f, g \in L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$ e $f = g$, $q.s$, f e g são consideradas um mesmo elemento de $L^p(\Omega)$. Com esta identificação $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach com norma $\| \cdot \|_p$.

Notação 1.1.2. Seja X um espaço linear normado com norma $\|\cdot\|_X$ e X_n um subespaço n-dimensional de X. Para cada $x \in X$, $E(x, X_n)$ denotará a distância do subespaço n-dimensional X_n ao ponto x definida por

$$E(x; X_n) \ = \ \inf\{ \ \|x - y\|_X : y \in X_n \ \}.$$

Se existir $y^* \in X$ tal que $E(x; X_n) = \|x - y^*\|_X$, então diremos que y^* é a melhor aproximação de x em X_n.

Vamos supor agora que em vez de um único elemento x, nos é dado um subconjunto $A \subset X$. Nessas condições a seguinte pergunta se faz necessária:"Quão bem um subespaço n-dimensional X_n de X pode aproximar o subconjunto A ?". A resposta para essa pergunta encontra-se na definição abaixo

Definição 1.1.3. Se X é um espaço linear normado, X_n um subespaço n-dimensional de X e A um subconjunto qualquer de X, chamamos de Desvio de A em X_n o número

$$E(A; X_n) \ = \ \sup\{E(x; X_n) : x \in A\} \ = \ \sup_{x \in A} \inf_{y \in X_n} \|x - y\|_X.$$

O número $E(A; X_n)$ mede quanto o "pior elemento"de A pode ser aproximado por X_n. Para o subconjunto $A \subset X$ dado, nos indagamos o quão bem podemos aproximá-lo por um subespaço n-dimensional de X e para tal objetivo consideramos a possibilidade de permitir que os subespaços n-dimensionais X_n variem dentro de X. Essa idéia foi apresentada primeiramente por Kolmogorov em 1936 e será nosso principal objeto de estudo ao longo desse capítulo.

Definição 1.1.4. Seja X um espaço linear normado e $A \subset X$. A n-largura de Kolmogorov de A em X é dada por

$$\begin{aligned} d_n(A) \ = \ d_n(A; X) \quad &= \quad \inf\{E(A; X_n) : \ X_n \text{ é um subespaço n-dimensional de } X\} \\ &= \quad \inf_{X_n} \sup_{x \in A} \inf_{y \in X_n} \|x - y\|_X. \end{aligned}$$

Alguns autores preferem a expressão "n-diâmetro"no lugar de "n-largura", nós no entanto usaremos o último termo ao longo desse trabalho.

Uma vez definida $d_n(A; X)$, dizemos que um subespaço n-dimensional $X_n \subset X$ é um subespaço ótimo para $d_n(A; X)$ se tivermos $d_n(A; X) = E(A; X_n)$. Geralmente é muito difícil, na verdade quase impossível, obtermos um subespaço ótimo para $d_n(A; X)$ para todos os subconjuntos $A \subset X$, uma vez que muito esforço é necessário na obtenção para escolhas específicas de A e X. Nosso objetivo nesse sentido é analisar as escolhas de A e X de modo que $d_n(A;X)$ e X_n possam ser encontrados ou pelo menos caracterizados.

Para isso é de extrema importância determinarmos o comportamento assintótico de $d_n(A;X)$ quando fazemos $n \uparrow \infty$, já que um subespaço ótimo X_n em geral pode não ser obtido explicitamente, ou em caso positivo, o esforço computacional envolvido em sua determinação pode ser demasiadamente inviável. Em muitos casos, subespaços n-dimensionais bastante simples podem aproximar A de forma assintótica ótima (isto é, fazendo $n \uparrow \infty$). Nesse sentido, a n-largura nos diz o quão bem um subespaço n-dimensional dado pode aproximar A assintoticamente. O teorema que veremos adiante ilustrará melhor esse fato.

Definição 1.1.5. Seja $L^2 = L^2[0, 2\pi]$, o espaço usual das funções com quadrado integrável em $[0, 2\pi]$, munido da norma

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para cada inteiro positivo r dado, $\widetilde{W}_2^{(r)}$ denotará o espaço de Sobolev das funções reais 2π-periódicas, r vezes diferenciáveis, cuja $(r-1)$-derivada é absolutamente contínua e $f^{(r)} \in L^2$. Ou seja

$$\widetilde{W}_2^{(r)} = \{f : f^{(r-1)} \text{ é absolutamente contínua}, f^{(r)} \in L^2, f^{(i)}(0) = f^{(i)}(2\pi), i = 1, ..., r-1\}.$$

Notação 1.1.6. A bola unitária fechada e de centro na origem de $\widetilde{W}_2^{(r)}$ será denotada por

$$\widetilde{B}_2^{(r)} = \{f : f \in \widetilde{W}_2^{(r)}, \|f^{(r)}\|_2 \le 1\}.$$

Teorema 1.1.7. *Temos que* $d_0(\widetilde{B}_2^{(r)}; L^2) = \infty$, *enquanto* $d_{2n-1}(\widetilde{B}_2^{(r)}; L^2) = d_{2n}(\widetilde{B}_2^{(r)}; L^2) = n^{-r}$, $n = 1, 2, \ldots$ *. Além disso, o espaço ótimo para* $d_{2n-1}(\widetilde{B}_2^{(r)}; L^2)$ *(e consequentemente para* $d_{2n}(\widetilde{B}_2^{(r)}; L^2)$*) é*

$$T_{n-1} = \operatorname{lin}\{1, sen(x), cos(x), ..., sen((n-1)x), cos((n-1)x)\}.$$

Demonstração. Temos que

$$d_0(\widetilde{B}_2^{(r)}; L^2) = \inf_{X_0} \sup_{f \in \widetilde{B}_2^{(r)}} \inf_{g \in X_0} \|f - g\|_2,$$

onde $X_0 \subset L^2$ e $\dim X_0 = 0$. Como $X_0 = \{0\}$, obtemos

$$d_0(\widetilde{B}_2^{(r)}; L^2) = \sup_{f \in \widetilde{B}_2^{(r)}} \|f - 0\|_2 = \sup_{f \in \widetilde{B}_2^{(r)}} \|f\|_2.$$

Observemos que se f é uma função constante então $f \in \widetilde{W}_2^{(r)}$ e $f^{(r)} = 0$, donde $\|f^{(r)}\|_2 = 0 < 1$, e portanto $f \in \widetilde{B}_2^{(r)}$. Assim, toda função constante está em $\widetilde{B}_2^{(r)}$ donde

$$d_0(\widetilde{B}_2^{(r)}; L^2) \;=\; \sup_{f\in\widetilde{B}_2^{(r)}} \|f\|_2 = \infty.$$

Agora, por definição

$$E(\widetilde{B}_2^{(r)}; T_{n-1}) = \sup_{f\in\widetilde{B}_2^{(r)}} \inf_{t\in T_{n-1}} \|f-t\|_2,$$

onde

$$T_{n-1} = \mathrm{lin}\{1, sen(x), cos(x), ..., sen((n-1))x, cos((n-1)x)\}.$$

Fixemos $f \in \widetilde{B}_2^{(r)}$. Segue das hipóteses que a expansão de f em série de Fourier

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos(kx) + b_k sen(kx),$$

converge uniformemente (ver [4], p. 69). Segue assim (ver [18], p. 14) que

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2+|b_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \|f^{(r)}\|_2 = \left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2+|b_k|^2)k^{2r}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Do fato de $f \in \widetilde{B}_2^{(r)}$, obtemos $\|f^{(r)}\| \leq 1$, ou seja

$$\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2+|b_k|^2)k^{2r}\right)^{\frac{1}{2}} \leq 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{1}{(\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2+|b_k|^2)k^{2r})^{\frac{1}{2}}}. \tag{1.1}$$

Tomemos agora $t \in T_{n-1}$, dado por

$$t(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k cos(kx) + b_k sen(kx)\ .$$

Desta forma, temos por (1.1) que

$$\begin{aligned}\|f-t\|_2 \;&=\; \|\sum_{k=n}^{\infty} a_k cos(kx) + b_k sen(kx)\|_2 = \left(\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|^2+|b_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &=\; \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|^2+|b_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{(\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|^2+|b_k|^2)^{\frac{1}{2}}}{(\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2+|b_k|^2)k^{2r})^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

Como k^{2r} é uma sequência crescente, o supremo é alcançado obviamente quando escolhemos $(|a_n|^2+|b_n|^2)\neq 0$ e $a_k=b_k=0,\ \ \forall k\neq n$. Obtemos assim

$$\inf_{\bar{t}\in T_{n-1}} \|f-\bar{t}\|_2 \ \le \|f-t\|_2 \ \le \frac{(|a_n|^2+|b_n|^2)^{\frac{1}{2}}}{((|a_n|^2+|b_n|^2)n^{2r})^{\frac{1}{2}}} \ = \ n^{-r}.$$

Como $f\in \widetilde{B}_2^{(r)}$ foi tomada arbitrariamente, segue que

$$E(\widetilde{B}_2^{(r)},T_{n-1}) \ = \ \sup_{f\in \widetilde{B}_2^{(r)}} \ \inf_{\bar{t}\in T_{n-1}} \|f-\bar{t}\|_2 \ \le \ n^{-r}.$$

Desta forma

$$d_{2n-1}(\widetilde{B}_2^{(r)},L^2) \ = \ \inf_{X_{2n-1}} \ E(\widetilde{B}_2^{(r)},X_{2n-1}) \ \le \ E(\widetilde{B}_2^{(r)},T_{n-1}) \ \le \ n^{-r}. \tag{1.2}$$

Por outro lado, se X_{2n} é um subespaço $2n$-dimensional de L^2, temos que

$$\begin{aligned} E(\widetilde{B}_2^{(r)},X_{2n}) \ &= \ \sup\{E(x,X_{2n}) : x\in \widetilde{B}_2^{(r)}\} \\ &\ge \ \sup\{E(t,X_{2n}) : t\in \widetilde{B}_2^{(r)}\cap T_n\} \\ &= \ E(\widetilde{B}_2^{(r)}\cap T_n, X_{2n}) \\ &= \ \sup_{t\in T_n, \|t^{(r)}\|_2\le 1} \ \inf_{g\in X_{2n}} \|t-g\|_2, \end{aligned} \tag{1.3}$$

. Como dim $T_n=2n+1>$ dim X_{2n}, segue que existe $t^*\in T_n,\ \ \|t^{*^{(r)}}\|_2=1$, de modo que $<t^*,g>=0$ para todo $g\in X_{2n}$.

Os subespaços X_{2n} de nosso interesse devem satisfazer $E(\widetilde{B}_2^{(r)},X_{2n})<\infty$. Suponhamos que algum dentre eles, digamos $\widetilde{X}_{2n}$, não possua nenhuma função constante. Nestas condições fixada $f\in \widetilde{B}_2^{(r)}$, para toda $g\in \widetilde{X}_{2n}$, teremos

$$\|f-g\|_2 \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} |a_k(f)-a_k(g)|^2+|b_k(f)-b_k(g)|^2 \ \ge \ |a_0(f)+b_0(g)|^2 \ = \ |a_0(f)|^2.$$

Como a desigualdade acima é válida para toda $g\in \widetilde{X}_{2n}$, segue que

$$\inf_{g\in \widetilde{X}_{2n}} \|f-g\|_2 \ \ge \ |a_0(f)|^2.$$

Assim

$$E(\widetilde{B}_2^{(r)},\widetilde{X}_{2n}) \ = \ \sup_{f\in \widetilde{B}_2^{(r)}} \ \inf_{g\in \widetilde{X}_{2n}} \|f-g\|_2 \ \ge \ \sup_{f\in \widetilde{B}_2^{(r)}} |a_0(f)|^2,$$

e como toda função constante está em $\widetilde{B}_2^{(r)}$ pelo que vimos no início da demosntração, segue que $\sup_{f\in\widetilde{B}_2^{(r)}} |a_0(f)|^2 = \infty$ e assim $E(\widetilde{B}_2^{(r)}, \widetilde{X}_{2n}) = \infty$. Desta forma concluímos que os espaços X_{2n} de nosso interesse devem conter uma função constante e consequentemente todas elas. Assim, para que tenhamos a condição $< t^*, g >= 0,\ \forall\, g \in X_{2n}$, é necessário que $t^* \in T_n$ não contenha o termo constante, ou seja, t^* deve ser da forma

$$t^* = \sum_{k=1}^{n} a_k^* cos(kx) + b_k^* sen(kx).$$

Além disso, como $< t^*, g >= 0,\ \forall\, g \in X_{2n}$ e estamos num espaço de Hilbert, segue que para todo $g \in X_{2n}$,

$$\begin{aligned} \|t^* - g\|_2^2 &= < t^* - g, t^* - g > = < t^*, t^* > -2 < t^*, g > + < g, g > \\ &= \|t^*\|_2^2 + \|g\|_2^2 \ \geq\ \|t^*\|_2^2, \end{aligned}$$

donde $\|t^*\|_2$ é cota inferior para o conjunto $\{\|t^* - g\| : g \in X_{2n}\}$, e assim

$$\inf_{g\in X_{2n}} \|t^* - g\|_2 \ \geq\ \|t^*\|_2. \tag{1.4}$$

Portanto, por (1.3) e (1.4)

$$\begin{aligned} E(\widetilde{B}_2^{(r)}, X_{2n}) &\geq \sup_{t\in T_n, \|t^{(r)}\|_2\leq 1} \inf_{g\in X_{2n}} \|t - g\|_2 \ \geq\ \inf_{g\in X_{2n}} \|t^* - g\|_2 \\ &\geq \|t^*\|_2 \ =\ \frac{\|t^*\|_2}{\|t^{*(r)}\|_2} \ \geq\ \inf_{t\in T_n} \frac{\|t\|_2}{\|t^{(r)}\|_2}, \end{aligned}$$

onde o ínfimo do lado direito é tomado sobre todos os $t \in T_n$ que não possuem o termo constante. Como para tais elementos temos

$$\|t\|_2 = \left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + |b_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \|t^{(r)}\|_2 = \left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (|a_k|^2 + |b_k|^2)k^{2r}\right)^{\frac{1}{2}},$$

segue que

$$E(\widetilde{B}_2^{(r)}, X_{2n}) \ \geq\ \inf \frac{(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + |b_k|^2)^{\frac{1}{2}}}{(\sum_{k=1}^{n} (|a_k|^2 + |b_k|^2)k^{2r})^{\frac{1}{2}}}.$$

Claramente o ínfimo é obtido quando tomamos $|a_n|^2 + |b_n|^2 \neq 0$ e $a_k = b_k = 0,\ k \neq n$, donde

$$E(\widetilde{B}_2^{(r)}, X_{2n}) \ \geq\ \frac{(|a_n|^2 + |b_n|^2)^{\frac{1}{2}}}{(|a_n|^2 + |b_n|^2)^{\frac{1}{2}} n^r} \ =\ n^{-r}.$$

Como podemos proceder desta forma para todo subespaço $2n$-dimensional X_{2n} de L^2, segue que

$$d_{2n}(\widetilde{B}_2^{(r)}, L^2) \;=\; \inf_{X_{2n}} \; E(\widetilde{B}_2^{(r)}, X_{2n}) \;\geq\; n^{-r}. \tag{1.5}$$

Como a n-largura de Kolmogorov é uma função não crescente de n (provaremos isso na próxima seção), obtemos por (1.5) e (1.2)

$$n^{-r} \;\leq\; d_{2n}(\widetilde{B}_2^{(r)}, L^2) \;\leq\; d_{2n-1}(\widetilde{B}_2^{(r)}, L^2) \;\leq\; n^{-r},$$

e podemos portanto concluir que $d_{2n}(\widetilde{B}_2^{(r)}, L^2) \;=\; d_{2n-1}(\widetilde{B}_2^{(r)}, L^2) \;=\; n^{-r}$. ■

Definição 1.1.8. Seja X um espaço linear normado e $A \subset X$. A n-largura linear de A em X é definida por

$$\delta_n(A) \;=\; \delta_n(A;X) = \inf_{P_n} \sup_{x \in A} \|x - P_n(x)\|,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os operadores lineares contínuos de posto no máximo n sobre X.

Lembremos que um operador linear tem posto n se a dimensão de sua imagem é n. Se $\delta_n(A;X) = \sup\{\|x - P_n(x)\| : x \in A\}$, onde P_n é um operador linear contínuo de posto n, então P_n é chamado um operador linear ótimo para $\delta_n(A;X)$.

Definição 1.1.9. Seja X um espaço linear normado e $A \subset X$. A n-largura de Gel'fand de A em X é definida por

$$d^n(A) \;=\; d^n(A;X) \;=\; \inf_{L^n} \; \sup_{x \in A \cap L^n} \; \|x\|,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os subespaços L^n de codimensão no máximo n de X.

Um subespaço L^n de X é de codimensão n se existirem n funcionais lineares linearmente independentes $f_1, f_2, ..., f_n \in X'$ (X' denota o dual algébrico de X), tais que

$$L^n \;=\; \{x \in X : f_i(x) = 0, \; i = 1, 2, ..., n\}.$$

Se L^n é um subespaço de codimensão n de X para o qual $d^n(A;X) = \sup\{\|x\| : x \in A \cap L^n\}$, então L^n é chamado um subespaço ótimo para $d^n(A;X)$.

Definição 1.1.10. Seja A um subconjunto de um espaço vetorial X. Dizemos que A é convexo se para quaisquer $x, y \in A$, tivermos

$$\alpha x + (1 - \alpha) y \in A, \quad \forall \, \alpha \in [0,1].$$

Definição 1.1.11. Seja A um subconjunto de um espaço vetorial X. Dizemos que A é centralmente simétrico se A é simétrico com relação à origem 0, em outras palavras, se para todo $x \in A$ tivermos $-x \in A$.

Exemplo 1.1.12. Se X é um espaço linear normado e $B = B(0, \epsilon)$ é a bola fechada de centro na origem e raio ϵ, então B é um conjunto convexo e centralmente simétrico de X.

Definição 1.1.13. Seja X um espaço linear normado e A um subconjunto fechado, convexo e centralmente simétrico de X. A n-largura de Bernstein de A em X é definida por

$$b_n(A) \;=\; b_n(A; X) \;=\; \sup_{X_{n+1}} \sup\{\lambda : \lambda B \cap X_{n+1} \subseteq A\},$$

onde o supremo é tomado sobre todos os subespaços $(n+1)$-dimensionais X_{n+1} de X e B denota a bola unitária em X_{n+1}.

1.2 Propriedades Básicas e Relações entre as n-Larguras

Vale observarmos aqui que ao longo de toda esta seção os subonjuntos A de X de nosso interesse, para os quais estaremos calculando as respectivas n-larguras, serão considerados fechados, convexos e centralmente simétricos.

1.2.1 Propriedades de d_n

No teorema abaixo listaremos algumas propriedades simples de d_n que são consequências rápidas da definição.

Teorema 1.2.1. *Sejam X, Y e Z espaços lineares normados, A e B subconjuntos não vazios de X e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:*

(a) $d_n(\alpha A) = |\alpha| \; d_n(A)$;

(b) $d_n(A) = d_n(\overline{b}(A))$, *onde* $\overline{b}(A) = \{\alpha x : x \in A, |\alpha| \leq 1\}$, *é o envólucro balanceado de A;*

(c) $d_n(B) \leq d_n(A)$, *se* $B \subset A$*;*

(d) $d_n(A) \geq d_{n+1}(A), \quad n = 0, 1, ...;$

(e) se $X \subset Y$, X tem a norma induzida de Y e $A \subset X$, temos

$$d_n(A; X) \geq d_n(A; Y);$$

(f) $d_{m+n}(C + D; U + V) \leq d_m(C; U) + d_n(D; V)$, onde U e V são subespaços de Z, $C \subset U$, $D \subset V$ e $U \cap V = \{0\}$.

Demonstração. (a) Observemos inicialmente que se X_n é um subespaço n-dimensional de X e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então para cada $x \in A$, temos

$$\begin{aligned} E(\alpha x; X_n) &= \inf_{y \in X_n} \|\alpha x - y\| = \inf_{y \in X_n} \|\alpha(x - \frac{y}{\alpha})\| \\ &= |\alpha| \inf_{y \in X_n} \|x - \frac{y}{\alpha}\| = |\alpha| E(x; X_n). \end{aligned}$$

Assim, para cada subespaço n-dimensional X_n de X, segue que

$$\begin{aligned} E(\alpha A; X_n) &= \sup\{E(\alpha x; X_n) : x \in A\} = \sup\{|\alpha| E(x; X_n) : x \in A\} \\ &= |\alpha| \sup\{E(x; X_n) : x \in A\} = |\alpha| E(A; X_n). \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sobre todos os subespaços n-dimensionais X_n de X, obtemos a propriedade (a).

(b) Observemos que se X_n é um subespaço n-dimensional de X, então para cada $y \in \overline{b}(A)$, obtemos de modo análogo ao ítem anterior que

$$\{E(y; X_n) : y \in \overline{b}(A)\} = \{|\alpha| E(x; X_n),\ x \in A,\ |\alpha| \leq 1\},$$

e portanto

$$\begin{aligned} E(\overline{b}(A); X_n) &= \sup\{E(y; X_n) : y \in \overline{b}(A)\} \\ &= \sup\{|\alpha| E(x; X_n) : x \in A,\ |\alpha| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Obviamente o supremo do lado direito da expressão acima é obtido quando $|\alpha| = 1$, donde

$$E(\overline{b}(A); X_n) = \sup\{E(x; X_n) : x \in A\} = E(A; X_n),$$

e assim tomando o ínfimo sobre todos os subespaços n-dimensionais X_n de X obtemos a propriedade (b).

(c) Como $B \subseteq A$, para cada subespaço n-dimensional X_n de X temos

$$\{E(x, X_n) : x \in B\} \subseteq \{E(x, X_n) : x \in A\},$$

e assim

$$E(B, X_n) \;=\; \sup\{E(x, X_n) : x \in B\} \leq\; \sup\{E(x, X_n) : x \in A\} \;=\; E(A, X_n).$$

Agora, tomando o ínfimo sobre todos os subespaços n-dimensionais X_n de X, obtemos a propriedade (c).

(d) Sejam X_n um subespaço n-dimensional de X e X_{n+1} um subespaço $(n+1)$-dimensional de X tal que $X_n \subset X_{n+1}$. Então

$$\inf_{y \in X_n} \|x - y\| \;\geq\; \inf_{y \in X_{n+1}} \|x - y\|, \quad \forall\, x \in A.$$

Logo

$$E(A; X_n) \;=\; \sup_{x \in A}\; \inf_{y \in X_n} \|x - y\| \;\geq\; \sup_{x \in A}\; \inf_{y \in X_{n+1}} \|x - y\| \;=\; E(A; X_{n+1}),$$

e consequentemente

$$d_n(A) \;=\; \inf_{X_n} E(A; X_n) \;\geq\; \inf_{X_{n+1}} E(A; X_{n+1}) \;=\; d_{n+1}(A).$$

(e) Esta propriedade é facilmente verificada uma vez que todo subespaço n-dimensional X_n de X é também um subespaço n-dimensional de Y de modo que

$$\begin{aligned} &\{E(A; X_n) : X_n \text{ é subespaço n-dimensional de } X\} \\ \subseteq\;\; &\{E(A; X_n) : X_n \text{ é subespaço n-dimensional de } Y\} \end{aligned}$$

e temos assim

$$d_n(A; X) \;=\; \inf_{X_n \subset X} E(A; X_n) \;\geq\; \inf_{X_n \subset Y} E(A; X_n) \;=\; d_n(A; Y).$$

(f) Dados $(x + y) \in C + D$, temos que $E((x + y); Z_{m+n}) = \inf_{z \in Z_{m+n}} \|(x + y) - z\|$. Mas se $z \in Z_{m+n} = Z_m \oplus Z_n,\ Z_m \subset U$ e $Z_n \subset V$, então $z = z_1 + z_2$, onde $z_1 \in Z_m$ e $z_2 \in Z_n$ e assim

$$\begin{aligned} E((x + y); Z_{m+n}) \;&=\; \inf_{z_1 \in Z_m,\, z_2 \in Z_n} \|(x + y) - (z_1 + z_2)\| \\ &=\; \inf_{z_1 \in Z_m,\, z_2 \in Z_n} \|(x - z_1) + (y - z_2)\| \\ &\leq\; \inf_{z_1 \in Z_m} \|x - z_1\| + \inf_{z_2 \in Z_n} \|y - z_2\| \\ &=\; E(x; Z_m) + E(y; Z_n). \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} d_{m+n}(C+D;U+V) &= \inf_{Z_{m+n}} E(C+D;Z_{m+n}) \\ &= \inf_{Z_{m+n}} \sup_{(x+y)\in C+D} E((x+y);Z_{m+n}) \\ &\leq \inf_{Z_m} \sup_{x\in C} E(x;Z_m) + \inf_{Z_n} \sup_{y\in D} E(y;Z_n) \\ &= \inf_{Z_m} E(C;Z_m) + \inf_{Z_n} E(D;Z_n) \\ &= d_m(C;U) + d_n(D;V) \end{aligned}$$

■

Antes de demonstrarmos a próxima proposição precisaremos de um resultado que enunciaremos como um lema. Omitiremos sua demonstração por se tratar de um resultado clássico da Topologia.

Definição 1.2.2. Dado um subconjunto A de X e $\epsilon > 0$, um subconjunto finito de pontos $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq X$ é chamado uma ϵ-rede de A se

$$\text{mín}\{\|x - x_i\| : \ \ i = 1,2,...,n\} \ \leq \ \epsilon, \quad \forall x \in A.$$

Lema 1.2.3. *A é compacto se e somente se para cada $\epsilon > 0$, existe uma ϵ-rede para A.*

Proposição 1.2.4. *A é compacto $\Leftrightarrow$ A é limitado e $d_n(A) \downarrow 0$.*

Demonstração. Suponhamos primeiramente A compacto. Como A é obviamente limitado, basta mostrarmos que $d_n(A) \downarrow 0$. Dado $\epsilon > 0$ temos que $\mathcal{B} = \{B(x;\epsilon) : x \in A\}$ é cobertura por abertos de A. Logo, como A é compacto, $\mathcal{B}$ admite subcobertura finita

$$\mathcal{B}_N = \{B(x_i;\epsilon) : i = 1,2,...,N\}.$$

Assim, para cada $x \in A$, temos

$$\min\{\|x - x_i\| : i = 1,2,...,N\} \leq \epsilon. \tag{1.6}$$

Seja $\widetilde{X}_N = \text{lin}\{x_1, x_2, ..., x_N\}$. Então por (1.6)

$$d_N(A) \ = \ \inf_{X_N} \sup_{x\in A} \inf_{y\in X_N} \|x-y\| \ \leq \ \sup_{x\in A} \inf_{y\in \widetilde{X}_N} \|x-y\| \ \leq \ \epsilon.$$

Logo, como $d_N(A) \ \geq \ d_{N+1}(A) \ \geq ...$, segue que para $n \geq N$ temos $d_n(A) \leq \epsilon$. Consequentemente, mostramos que dado $\epsilon > 0$, $\ \exists \ N > 0$ tal que $n \geq N \ \Rightarrow \ d_n(A) \leq \epsilon$, donde $d_n(A) \downarrow 0$, como queríamos.

Provemos agora a recíproca. Assumimos então A limitado e $d_n(A) \downarrow 0$. Como A é limitado, temos

$$d_0(A) \ = \ \sup_{x \in A} \|x\| \ < \ \infty. \tag{1.7}$$

Agora, uma vez que $d_n(A) \downarrow 0$, segue que dado $\epsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq n_0 \ \Rightarrow \ d_n(A) < \epsilon$. Pela definição de $d_n(A)$, isso implica que existe um subespaço n-dimensional X_n de X de modo que

$$\inf\{\|x-y\| : y \in X_n\} \ < \ \epsilon, \quad \forall \ x \in A.$$

Desta forma para cada $x \in A$, $\exists \ y_x \in X_n$ para o qual $\|x - y_x\| < \epsilon$, consequentemente por (1.7)

$$\|y_x\| \ = \ \|x - (x - y_x)\| \ \leq \ \|x\| + \|x - y_x\| \ < \ d_0(A) + \epsilon \ < \infty,$$

donde o conjunto $Y = \{y_x \in X_n : \|y_x\| \ \leq \ d_0(A) + \epsilon\}$ é um subconjunto limitado do espaço finito dimensional X_n, sendo portanto compacto. Logo, existe uma ϵ - rede $\{y_{x_1}, ..., y_{x_k}\}$ para tal conjunto, ou seja

$$\text{mín}\{\|y_x - y_{x_i}\|, \ \ i = 1, ..., k\} \ \leq \ \epsilon, \ \ \forall\, y_x \in Y,$$

e assim

$$\begin{aligned} \text{mín}\{\|x - y_{x_i}\|, \ \ i = 1, ..., k\} \quad &= \quad \text{mín}\{\|(x - y_x) + (y_x - y_{x_i})\|, \ \ i = 1, ..., k\} \\ &\leq \quad \|x - y_x\| + \text{mín}\{\|y_x - y_{x_i}\|, \ \ i = 1, ..., k\} \ \leq \ 2\epsilon. \end{aligned}$$

Portanto o conjunto $\{y_{x_1}, ..., y_{x_k}\}$ é uma 2ϵ-rede para A, o que nos permite concluir que A é compacto. ∎

Proposição 1.2.5. *Seja X um espaço linear normado de dimensão maior que n, e seja $S(X)$ a esfera unitária em X. Então*

$$d_k(S(X); X) \ = \ 1, \ \ k = 0, 1, ..., n.$$

Demonstração. Temos que

$$d_0(S(X); X) \ = \ \sup_{x \in S(X)} \|x\| \ = \ 1,$$

e além disso, como $d_n(S(X); X)$ é uma função não crescente de n pela propriedade (d) do Teorema 1.2.1, temos que

$$d_n(S(X)) \ \leq \ d_{n-1}(S(X)) \ \leq \ ... \ \leq d_0(S(X)) \ = \ 1.$$

Resta então provarmos que $d_n(S(X)) \geq 1$. Seja X_n um subespaço n-dimensional de X. Nosso intuito é demonstrar a existência de um elemento não-trivial $x^* \in X$ cuja melhor aproximação em X_n seja o elemento 0, vejamos o porquê . Suponhamos que exista tal elemento, nestas condições teríamos

$$E(x^*; X_n) = \|x^* - 0\| = \|x^*\|.$$

Tomando $\widetilde{x} = x^*/\|x^*\| \in S(X)$, obviamente o elemento 0 será também a melhor aproximação de $\widetilde{x}$ em X_n, ou seja

$$E(\widetilde{x}; X_n) = \|\widetilde{x} - 0\| = \|\widetilde{x}\| = 1.$$

Assim

$$E(S(X); X_n) \ = \ \sup\{E(x; X_n) : x \in S(X)\} \ \geq \ E(\widetilde{x}; X_n) \ = \ 1.$$

Como tal desigualdade permanece válida para todo subespaço n-dimensional X_n de X, teríamos

$$d_n(S(X); X) \ = \ \inf_{X_n} E(S(X); X_n) \ \geq \ 1,$$

o que concluiria a demonstração.

Basta então mostrarmos que para todo subespaço n-dimensional X_n de X, existe $x \in X, \ x \neq 0$, de modo que a melhor aproximação de x em X_n é o elemento 0. Para isso seja $z \in X \backslash X_n$ e $y^* \in X_n$ a melhor aproximação de z em X_n. Esta melhor aproximação existe pois X_n é um subespaço finito dimensional do espaço linear normado X (ver [6], p. 328). Tomando $x = z - y^*$, teremos $x \neq 0$ e

$$\begin{aligned} \|x - 0\| &= \|z - y^*\| \ = \ E(z, X_n) \\ &= \inf\{\|z - y\| : \ y \in X_n\} \\ &= \inf\{\| \underbrace{(z - y^*)}_{x} - \underbrace{(y - y^*)}_{\widetilde{y}} \| : \ y \in X_n\} \\ &= \inf\{\|x - \widetilde{y}\| : \ \widetilde{y} \in X_n\} \ = E(x; X_n). \end{aligned}$$

Isto prova que 0 é a melhor aproximação de x em X_n, como queríamos. ∎

Nosso próximo resultado envolvendo a n-largura de Kolmogorov nos diz que se X_{n+1} é um subespaço $(n+1)$-dimensional de um espaço linear normado X e $B(X_{n+1})$ denota a bola unitária em X_{n+1}, então $d_k(B(X_{n+1})) = 1, \ k = 0, 1, ..., n$. Antes de demonstrarmos tal fato precisaremos de uma série de resultados que abordaremos a partir de agora.

Definição 1.2.6. Seja X um espaço linear normado com norma $\| \cdot \|_X = \| \cdot \|$. O desvio de x em A, onde $A \subset X$ é um subconjunto não vazio de X é definido por

$$E(x) \ = \ E(x; A) \ = \ \inf_{y \in A} \|x - y\|. \tag{1.8}$$

Para cada subconjunto não vazio $A \subset X$ fixo, a equação (1.8) define um funcional em X, $E : X \to \mathbb{R}_+$, chamado "funcional de melhor aproximação".

Proposição 1.2.7. *Seja $A \subset X$ uma variedade linear. Então o funcional $E(\cdot\,;A)$ é uniformemente contínuo, subaditivo, positivamente homogêneo e convexo, isto é:*

$$E(x_1+x_2) \;\leq\; E(x_1)+E(x_2), \;\; \forall\, x_1,x_2 \in X;$$

$$E(ax) \;=\; |a|E(x), \;\; \forall\, x \in X, \; a \in \mathbb{R}$$

e

$$E(ax_1+(1-a)x_2) \;\leq\; aE(x_1)+(1-a)E(x_2), \;\; \forall\, x_1,x_2 \in X, \; a \in [0,1].$$

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in X$, para cada $\widetilde{y} \in A$, temos

$$E(x_1) \;=\; \inf_{y\in A} \|x_1 - y\| \;\leq\; \|x_1-\widetilde{y}\| \;\leq\; \|x_1-x_2\|+\|x_2-\widetilde{y}\|.$$

Tomando o ínfimo sobre todos $\widetilde{y} \in A$, constatamos que

$$E(x_1) \;\leq\; \|x_1-x_2\|+E(x_2) \;\Rightarrow\; E(x_1)-E(x_2) \;\leq\; \|x_1-x_2\|.$$

Alternando x_1 e x_2, com raciocínio análogo obtemos $E(x_2)-E(x_1) \;\leq\; \|x_1-x_2\|$, e desta forma, concluímos que

$$|E(x_1)-E(x_2)| \;\leq\; \|x_1-x_2\|. \tag{1.9}$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \epsilon > 0$, segue por (1.9) que

$$x_1,x_2 \in X, \;\; \|x_1-x_2\| < \delta \;\Rightarrow\; |E(x_1)-E(x_2)| \;<\; \delta = \epsilon,$$

o que demonstra a continuidade absoluta do funcional E.

Agora, observemos que dados $y_1, y_2 \in A$, temos

$$E(x_1+x_2) \;=\; \inf_{y\in A} \|(x_1+x_2)-y\| \;\leq\; \|(x_1+x_2)-(y_1+y_2)\| \;\leq\; \|x_1-y_1\|+\|x_2-y_2\|.$$

Tomando o ínfimo sobre o lado direito da desigualdade com respeito a $y_1, y_2 \in A$, obtemos

$$E(x_1+x_2) \;\leq\; E(x_1)+E(x_2),$$

o que demonstra a subaditividade de E.

Por outro lado, para $x \in X$ e $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, temos que

$$\begin{aligned} E(ax) \;&=\; \inf_{y\in A} \|ax-y\| \;=\; \inf_{y\in A} \|a(x-\frac{y}{a})\| \;=\; |a| \inf_{y\in A} \|x-\frac{y}{a}\| \\ &=\; |a| \inf_{y\in A} \|x-y\| \;=\; |a|E(x), \end{aligned}$$

o que demonstra que E é positivamente homogêneo.

Finalmente, a subaditividade e a homogeneidade positiva de E nos assegura sua convexidade. ■

Definição 1.2.8. Um subconjunto A de X é chamado um subconjunto de existência se, para cada $x \in X$, existir $y \in A$, de modo que y é a melhor aproximação de x em A.

Proposição 1.2.9. *Cada subconjunto A de X, fechado e localmente compacto é um conjunto de existência.*

Demonstração. Assumimos $x \in X \backslash A$ e $E(x) = c > 0$, pois caso contrário o resultado é imediato. Pela definição de ínfimo segue que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\exists\, y_n \in A$ tal que

$$\|x - y_n\| \ < \ \inf_{y \in A} \|x - y\| + \frac{1}{n} \ = \ E(x) + \frac{1}{n}. \tag{1.10}$$

Obtemos assim de (1.10) uma sequência $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ limitada uma vez que

$$\|y_n\| \ = \ \|x - (x - y_n)\| \ \leq \ \|x\| + \|x - y_n\| < \|x\| + E(x) + \frac{1}{n} \ = \ \|x\| + c + \frac{1}{n} \ < \ \infty.$$

Usando assim a compacidade local de A, podemos tomar uma subsequência $\{y_{n_m}\}$ convergente, ou seja, $y_{n_m} \to y_0$, quando $m \to \infty$. Vale ressaltar que $y_0 \in A$, uma vez que A é fechado. Logo, obtemos de (1.10)

$$E(x) \ = \ \inf_{y \in A} \|x - y\| \ \leq \ \|x - y_{n_m}\| \ < \ E(x) + \frac{1}{m_n}, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Fazendo assim $m \to \infty$, obtemos

$$E(x) \ \leq \ \|x - y_0\| \ \leq \ E(x) \ \Rightarrow \ E(x) \ = \ \|x - y_0\|,$$

donde $y_0 \in A$ é a melhor aproximação de x em A, o que nos permite concluir que A é um conjunto de existência. ■

Definição 1.2.10. Uma norma em X é dita estritamente convexa se para $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$, tivermos $\|ax + (1-a)y\| < 1$, $\forall\, a \in [0,1]$.

Proposição 1.2.11. *Seja A um subconjunto convexo de um espaço normado X com norma estritamente convexa. Se para algum $x \in X$, existir um elemento de melhor aproximação em A, então esse elemento é único.*

Demonstração. Vamos assumir a existência de dois elementos distintos $y_1, y_2 \in A$ que sejam uma melhor aproximação de algum elemento $x \in X$, queremos mostrar que $y_1 = y_2$. Como y_1 e y_2 são uma melhor aproximação de x em A, teremos

$$E(x) \;=\; \|x - y_1\| \;=\; \|x - y_2\|.$$

Como A é convexo, para cada $a \in [0,1]$, devemos ter $y_a = ay_1 + (1-a)y_2 \in A$, e assim

$$\begin{aligned} E(x) &= \inf_{y \in A} \|x - y\| \;\leq\; \|x - y_a\| \;=\; \|a(x - y_1) + (1-a)(x - y_2)\| \\ &\leq a\|x - y_1\| + (1-a)\|x - y_2\|. \end{aligned}$$

Agora, como $E(x) \;=\; \|x - y_1\| \;=\; \|x - y_2\|$, segue que

$$E(x) \;\leq\; \|x - y_a\| \;\leq\; aE(x) + (1-a)E(x) \;=\; E(x) \;\Rightarrow\; \|x - y_a\| \;=\; E(x).$$

Assim, a esfera $\{z \in X : \|x - z\| \;=\; E(x)\}$ contém o segmento y_a, o que contraria a convexidade estrita da norma de X e podemos então concluir que $y_1 = y_2$, como queríamos.

■

Definição 1.2.12. Um subconjunto A de X com a propriedade que, para cada $x \in X$, existe um único elemento que é a melhor aproximação de x em A, é chamado um conjunto de Chebyshev.

Se $A \subset X$ é um conjunto de Chebyshev, então o operador de melhor aproximação é definido por meio da seguinte equação

$$E(x, A) \;=\; \|x - P(x)\|, \;\; P(x) \in A.$$

Observação 1.2.13. Observemos que se A é um conjunto de Chebyshev, então A é fechado.

De fato, seja $x \in \overline{A}$ e seja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que $a_n \to x$. Pela Proposição 1.2.7, segue que $E(a_n, A) \to E(x, A)$ e assim $E(x, a) = 0$, pois $E(a_n, A) = 0$, $\forall\; n \in \mathbb{N}$. Mas $0 = E(x, A) = \|x - P(x)\|$ e portanto $x = P(x) \in A$, donde A é fechado.

Proposição 1.2.14. *Se $A \subset X$ é um conjunto de Chebyshev localmente compacto então o operador P é contínuo. Se A é um subespaço de Chebyshev então P é homogêneo, em particular, $P(-x) = -P(x)$.*

Demonstração. Mostremos inicialmente que P é contínuo. Seja x_0 um ponto fixado em X e $x_m \;\to\; x_0$. Observemos que

$$\begin{aligned} \|P(x_m) - x_0\| &= \|(P(x_m) - x_m) + (x_m - x_0)\| \;\leq\; \|P(x_m) - x_m\| + \|x_m - x_0\| \\ &= E(x_m, A) + \|x_m - x_0\|. \end{aligned}$$

Como a sequência $\{E(x_m, A)\}$ converge pela Proposição 1.2.7, temos que $\{E(x_m, A)\}$ é limitada e consequentemente $\{P(x_m)\}$ é limitada.

Suponhamos que $P(x_m) \not\to P(x_0)$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe $m_n \in \mathbb{N}, m_n \geq n$ tal que $|P(x_{m_n}) - P(x_0)| \geq \epsilon$. Usando a compacidade local de A obtemos uma subsequência $\{P(x_{m_{n_j}})\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{P(x_{m_n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para um elemento $z \neq P(x_0)$. Como A é um conjunto de Chebyshev, da Observação 1.2.13 temos A fechado e portanto $z \in A$. Além disso

$$\|x_{m_n} - P(x_{m_n})\| \ = \ E(x_{m_n}, A) \ = \ \inf_{y\in A} \|x_{m_n} - y\| \ \leq \ \|x_{m_n} - P(x_0)\|.$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\|x_0 - z\| \ \leq \ \|x_0 - P(x_0)\| \ = \ E(x_0, A),$$

donde z é a melhor aproximação de x_0 em A. Obtemos desta forma, z e $P(x_0)$ duas melhores aproximações de x_0 em A distintas, o que contraria o fato de A ser um conjunto de Chebyshev. Portanto $P(x_m) \to P(x_0)$, donde P é contínuo.

Agora, no caso em que A é um subespaço de Chebyshev, para cada $a \in \mathbb{R}$, teremos

$$\begin{aligned} \|ax - aP(x)\| \ &= \ |a|\|x - P(x)\| \ = \ |a|E(x, A) \ = \ E(ax, A) \\ &= \ \|ax - P(ax)\| \ \Rightarrow \ P(ax) = aP(x). \end{aligned}$$

Logo, P é homogêneo e em particular obtemos $P(-x) = -P(x)$. ■

Observação 1.2.15. Se $A = A_n$ é um subespaço de Chebyshev n-dimensional de um espaço normado X e $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ é base de A_n, então o operador P pode ser representado por

$$P(x) \ = \ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) x_k. \tag{1.11}$$

Proposição 1.2.16. *Os funcionais $\alpha_k : X \ \to \ A_n, \ \ 1 \leq k \leq n$ definidos na proposição anterior são homogêneos e contínuos.*

Demonstração. Da proposição 1.2.14, temos que

$$P(ax) = aP(x) \ \Rightarrow \ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(ax) x_k = \sum_{k=1}^{n} a\alpha_k(x) x_k,$$

e como a representação (1.11) é única, concluímos que para cada $x \in X$ e $a \in \mathbb{R}$, temos

$$\alpha_k(ax) \ = \ a\alpha_k(x), \quad 1 \leq k \leq n,$$

donde os funcionais α_k, $1 \leq k \leq n$ são homogêneos.

Finalmente, observando que a convergência no espaço finito dimensional A_n é equivalente à convergência componente a componente e o operador $P : X \to A_n$ é contínuo, concluímos que os funcionais α_k, $1 \leq k \leq n$ são contínuos. ∎

Teorema 1.2.17. *(Teorema de Borsuk, [3].) Suponhamos que Ω seja um conjunto limitado, aberto e vizinhança simétrica de 0 em $\mathbb{R}^m$ e seja T uma aplicação contínua de $\partial\Omega$ em $\mathbb{R}^{m-1}$ tal que $T(-x) = -T(x)$, $\forall\, x \in \partial\Omega$. Então, existe $x^* \in \partial\Omega$ tal que $T(x^*) = 0$.*

Teorema 1.2.18. *Se X_{n+1} é um subespaço (n+1)-dimensional de um espaço linear normado X e se $B(X_{n+1})$ denota a bola unitária em X_{n+1}, então*

$$d_k(B(X_{n+1}); X) \;=\; 1 \quad k = 0, 1, ..., n.$$

Demonstração. Temos que

$$d_0(B(X_{n+1}); X) \;=\; \sup_{x \in B(X_{n+1})} \|x\| \;=\; 1,$$

e além disso, como $d_k(B(X_{n+1}); X)$ é uma função não crescente de k pelo Teorema 1.2.1 (d), temos que

$$d_n(B(X_{n+1})) \;\leq\; d_{n-1}(B(X_{n+1})) \;\leq\; ... \;\leq d_0(B(X_{n+1})) \;=\; 1.$$

Resta então provarmos que $d_n(B(X_{n+1})) \;\geq\; 1$. Afirmamos que para cada subespaço n-dimensional X_n de X dado, existe $a^* \in \partial B(X_{n+1})$ de modo que 0 é a melhor aproximação de a^* em X_n. De fato, sejam $\{x_1, x_2, ..., x_{n+1}\}$ e $\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ bases de X_{n+1} e X_n respectivamente. Então cada $a \in X_{n+1}$ e $z \in X_n$ admitem representações

$$a \;=\; \sum_{s=1}^{n+1} a_s x_s \quad \text{e} \quad z \;=\; \sum_{s=1}^{n} b_s z_s.$$

É suficiente provarmos o resultado para $X = \text{lin}\{X_n, X_{n+1}\}$. Se $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ é base de X, então $m \leq 2n + 1$ e cada $x \in X$ pode ser escrito da forma $x \;=\; \sum_{s=1}^{m} c_s y_s$. Vamos assumir a norma $\|\cdot\|_X$ estritamente convexa. Como X tem dimensão finita e norma estritamente convexa, segue pela Proposição 1.2.11 que X_n é um conjunto de Chebyshev, logo pela Proposição 1.2.14 temos que o operador P de melhor aproximação é contínuo. Observemos agora que o domínio

$$\Omega \;=\; \left\{ (a_1, a_2, ..., a_{n+1}) : \quad a = \sum_{s=1}^{n+1} a_s x_s,\ \|a\| < 1 \right\},$$

é limitado, aberto e é uma vizinhança simétrica do 0 em $\mathbb{R}^{n+1}$. Para cada $a \in \partial\Omega$, seja

$$F(a) \;=\; (b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n,$$

o vetor dos coeficientes da melhor aproximação do elemento $a = \sum_{s=1}^{n+1} a_s x_s$ em X_n. Como vimos acima , $F(\cdot) : \partial\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \;\to\; \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua e pela Proposição 1.2.14 temos $F(-a) = -F(a)$. Consequentemente o Teorema de Borsuk nos garante que existe

$$(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_{n+1}^*) \;\in\; \partial\Omega,$$

tal que $F((a_1^*, a_2^*, \ldots, a_{n+1}^*)) \;=\; (0, ..., 0)$, ou seja, 0 é a melhor aproximação de $a^* \;=\; \sum_{s=1}^{n+1} a_s^* x_s$ em X_n. Assim

$$E(a^*, X_n) \;=\; \|a^* - 0\| \;=\; \|a^*\| \;=\; 1,$$

já que $a^* \in \partial B(X_{n+1})$. Logo

$$E(B(X_{n+1}), X_n) \;=\; \sup_{a \in B(X_{n+1})} E(a, X_n) \;\geq\; E(a^*, X_n) \;=\; 1,$$

e como tal desigualdade permanece válida para todo subespaço n-dimensional X_n de X, segue que

$$d_n(B(X_{n+1})) \;=\; \inf_{X_n} E(B(X_{n+1}), X_n) \;\geq\; 1.$$

Note que assumimos a norma em X estritamente convexa para garantir que a aplicação F estivesse bem definida. No caso em que a norma $\|\cdot\|_X$ não seja estritamente convexa, nós a substituimos pela norma

$$\|x\|_\epsilon \;=\; \|x\|_X + \epsilon \left(\sum_{s=1}^{m} |c_s|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x \;=\; \sum_{s=1}^{m} c_s y_s \in X = \text{lin}\,\{X_n, X_{n+1}\},$$

que é estritamente convexa, uma vez que podemos tomar o limite $\epsilon \;\to\; 0$ aproximando a norma de X pela norma estritamente convexa $\|\cdot\|_\epsilon$ definida acima. ■

Observação 1.2.19. O teorema anterior é um poderoso instrumento na determinação de estimativas inferiores para n-larguras de Kolmogorov, no sentido que se um subconjunto A de X contém uma bola $\lambda B(X_{n+1})$ de raio λ de algum subespaço $(n+1)$-dimensional X_{n+1} de X, então temos pelo Teo 1.2.1 (c, a) e pelo teorema anterior

$$d_n(A, X) \;\geq\; d_n(\lambda B(X_{n+1}), X) \;=\; \lambda d_n(B(X_{n+1}), X) \;=\; \lambda$$

Vamos agora expor uma aplicação simples, no entanto não trivial do teorema anterior.

Proposição 1.2.20. *Seja X um espaço linear normado, $x_1, x_2, \ldots$ uma sequência de elementos linearmente independentes de X e $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \ldots$ uma sequência de escalares reais positivos. Se $\widetilde{X}_n = \operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\}$, $(\widetilde{X}_0 = \{0\})$, e $A = \{x \in X : E(x, \widetilde{X}_k) \leq \lambda_k, \ \ k = 0, 1, \ldots\}$, então*

$$d_n(A, X) = \lambda_n.$$

Demonstração. Pela definição de A, temos que

$$d_n(A, X) \ = \ \inf_{X_n} E(A, X) \ \leq \ E(A, \widetilde{X}_n) \ \leq \ \lambda_n. \tag{1.12}$$

Agora, observemos que se $x \in \lambda_n B(\widetilde{X}_{n+1})$, então

$$E(x, \widetilde{X}_k) \ \leq \ \|x\| \ \leq \ \lambda_n \ \leq \ \lambda_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Além disso, como para $k \geq n + 1$, temos que $E(x, \widetilde{X}_k) = 0$. Obtemos assim $E(x, \widetilde{X}_k) \leq \lambda_k$, $\forall\, k$, donde $x \in A$. Desta forma, $\lambda_n B(X_{n+1}) \subseteq A$ e pela observação anterior podemos garantir que

$$d_n(A, X) \ \geq \ \lambda_n. \tag{1.13}$$

Portanto, de (1.12) e (1.13), obtemos o desejado. ■

1.2.2 Propriedades de d^n

No teorema abaixo listaremos algumas propriedades simples de d^n que são consequências rápidas da definição.

Teorema 1.2.21. *Seja X um espaço linear normado, A, B subconjuntos não vazios de X e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:*

(a) $d^n(\alpha A) \ = \ |\alpha| d^n(A)$;

(b) $d^n(A) \ = \ d^n(\overline{b}(A))$, *onde* $\overline{b}(A) = \{\alpha x : x \in A, \ |\alpha| \leq 1\}$, *é o envólucro balanceado de A;*

(c) se $B \subseteq A$, *então* $d^n(B) \ \leq \ d^n(A)$;

(d) $d^n(A) \ \geq \ d^{n+1}(A) \ \ n = 0, 1, \cdots$

Demonstração. (a) Temos que

$$\begin{aligned} d^n(\alpha A) &= \inf_{L^n} \sup_{x \in A \cap L^n} \|\alpha x\| \;=\; \inf_{L^n} \sup_{x \in A \cap L^n} |\alpha|\, \|x\| \\ &= |\alpha| \inf_{L^n} \sup_{x \in A \cap L^n} \|x\| \;=\; |\alpha|\, d^n(A). \end{aligned}$$

(b) Claramente $\sup\{|\alpha|\, \|x\| : x \in A \cap L^n,\ |\alpha| \leq 1\}$ é obtido para $|\alpha| = 1$, ou seja

$$d^n(\overline{b}(A)) \;=\; \inf_{L^n} \sup_{x \in A \cap L^n,\, |\alpha| \leq 1} |\alpha|\, \|x\| \;=\; \inf_{L^n} \sup_{x \in A \cap L^n} \|x\| \;=\; d^n(A).$$

(c) Como $B \subseteq A$, temos que $B \cap L^n \subseteq A \cap L^n$, para todo subespaço L^n de codimensão no máximo n de X, donde $\sup_{x \in A \cap L^n} \|x\| \geq \sup_{x \in B \cap L^n} \|x\|$. Assim

$$d^n(A) \;= \inf_{L^n} \sup_{x \in A \cap L^n} \|x\| \;\geq\; \inf_{L^n} \sup_{x \in B \cap L^n} \|x\| \;=\; d^n(B).$$

(d) Uma vez que todo subespaço L^{n+1} de codimensão no máximo $n+1$ de X está contido num subespaço L^n de codimensão no máximo n de X, segue que

$$\sup_{x \in A \cap L^n} \|x\| \;\geq\; \sup_{x \in A \cap L^{n+1}} \|x\|.$$

Consequentemente

$$d^n(A) \;=\; \inf_{L^n} \sup_{x \in A \cap L^n} \|x\| \;\geq\; \inf_{L^{n+1}} \sup_{x \in A \cap L^{n+1}} \|x\| \;=\; d^{n+1}(A)$$

$\blacksquare$

Observação 1.2.22. No caso da n-largura de Kolmogorov d_n temos satisfeita a condição de que $d_n(A) = d_n(\overline{A})$, onde $\overline{A}$ denota o fecho do conjunto A. No entanto, observaremos aqui que podemos ter $d^n(A) < d^n(\overline{A})$. Para isso, seja $X = \mathbb{R}^2$ munido da norma do máximo e seja

$$A \;=\; \{(x, y) \in X : 0 < x < 1,\ -1 < y < 1\} \;\cup\; \{(0, 0)\}.$$

Podemos observar que $\widetilde{L}^1 \;=\; \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de codimensão 1 para X, pois se tomarmos o funcional linear não nulo $f_1 \in X'$, dado por $f_1(x, y) = x$, teremos $\widetilde{L}^1 \;=\; \{(x, y) \in X : f_1((x, y)) = 0\}$. Logo

$$\begin{aligned} d^1(A, X) &= \inf_{L^1} \sup_{(x,y) \in L^1 \cap A} \|(x, y)\|_\infty \;\leq\; \sup_{(x,y) \in \widetilde{L}^1 \cap A} \|(x, y)\|_\infty \\ &= \sup_{(0,y) \in A} \|(0, y)\|_\infty \;=\; \sup_{(0,y) \in A} |y| \;=\; 0. \end{aligned}$$

Assim, $d^1(A, X) \leq 0$ e como $d^1(A, X) \geq 0$, obtemos $d^1(A, X) = 0$.

Por outro lado, observemos que se $f \in X'$ é um funcional não nulo, então temos as seguintes possibilidades:

(a) $f((x,y)) = \alpha x,\ \alpha \neq 0$. Neste caso, $L^1 = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ é o subespaço de codimensão 1 associado a f. Assim

$$\sup_{(x,y)\in L^1\cap\overline{A}} \|(x,y)\|_\infty \;=\; \sup_{(0,y)\in\overline{A}} \|(0,y)\|_\infty \;=\; \sup_{(0,y)\in\overline{A}} |y| \;=\; 1.$$

(b) $f((x,y)) = \beta y,\ \beta \neq 0$. Neste caso, $L^1 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ é o subespaço de codimensão 1 associado a f. Assim

$$\sup_{(x,y)\in L^1\cap\overline{A}} \|(x,y)\|_\infty \;=\; \sup_{(x,0)\in\overline{A}} \|(x,0)\|_\infty \;=\; \sup_{(x,0)\in\overline{A}} |x| \;=\; 1.$$

(c) $f((x,y)) = \alpha x + \beta y,\ \alpha,\beta \neq 0$. Neste caso, $L^1_{\alpha,\beta} = \{(x, \frac{-\alpha}{\beta}x) : x \in \mathbb{R}\}$ são os subespaços de codimensão 1 associados a f. Assim

$$\begin{aligned}
\sup_{(x,y)\in L^1_{\alpha,\beta}\cap\overline{A}} \|(x,y)\|_\infty \;&=\; \sup_{(x,\frac{-\alpha}{\beta}x)\in\overline{A}} \|(x,\frac{-\alpha}{\beta}x)\|_\infty \\
&=\; \begin{cases} \sup\{|x| : (x, \frac{-\alpha}{\beta}x) \in \overline{A}\} \;= 1, \text{ se } |\alpha| < |\beta|, \\ \sup\{|\frac{-\alpha}{\beta}||x| : (x, \frac{-\alpha}{\beta}x) \in \overline{A}\} \;= 1, \text{ se } |\alpha| > |\beta|. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dos três casos analisados concluímos que $d^1(\overline{A}) = 1$. Contudo $d^1(A) \;=\; 0 \;<\; 1 \;=\; d^1(\overline{A})$.

Proposição 1.2.23. *Assumimos que X e Y são espaços lineares normados , X é um subespaço de Y com a norma induzida de Y e $A \subset X$. Então*

$$d^n(A,X) \;=\; d^n(A,Y).$$

Demonstração. Dado $f \in Y'$ (o dual algébrico de Y), temos que $f_{|X} \in X'$ e assim

$$d^n(A,Y) \;\geq d^n(A,X). \tag{1.14}$$

Por outro lado, pelo Teorema de Hanah Banach (ver [6], pg. 221), temos que se $\phi_0 \in X'$, então existe $\phi \in Y'$ de modo que $\phi_0 = \phi_{|X}$. Desta forma, se L^n_X é um subespaço de codimensão n de X, segue que existem n funcionais lineares linearmente independentes $f^1_0, f^2_0, ..., f^n_0 \in X'$ tais que

$$L^n_X \;=\; \{x \in X : f^i_0(x) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

Logo, o Teorema de Hahn Banach nos garante a existência de $f^1, f^2, ..., f^n \in Y'$ tais que $f^i_0 = f^i_{|X},\ i = 1, 2, ..., n$, donde

$$L^n_X \;=\; \{x \in X : f^i_0(x) = 0,\ i = 1, 2, ..., n\} \subseteq \{y \in Y : f^i(y) = 0,\ i = 1, 2, ..., n\} \;=\; L^n_Y,$$

e assim observamos que todo subespaço de codimensão n em X está contido em algum subespaço de codimensão n em Y, finalmente usando a propriedade de ínfimo que nos afirma que se $B \subseteq C$ então $\inf B \geq \inf C$, obtemos

$$d^n(A,X) \;=\; \inf_{L^n_X} \sup_{x\in A\cap L^n_X} \|x\| \;\geq\; \inf_{L^n_Y} \sup_{y\in A\cap L^n_Y} \|y\| \;=\; d^n(A,Y). \tag{1.15}$$

De (1.14) e (1.15), obtemos o desejado. ∎

Proposição 1.2.24. *Se A é compacto, então $d^n(A) \downarrow 0$.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, temos que $\mathcal{B} = \{B(x,\epsilon) : x \in A\}$ é uma cobertura por abertos do conjunto A. Como A é compacto, segue que podemos extrair uma subcobertura finita de $\mathcal{B}$, a saber $\mathcal{B}_N = \{B(x_i,\epsilon) : i = 1,2,...,N\}$. Assim, para cada $x \in A$, temos que

$$\text{mín}\ \{\|x - x_i\|,\ i = 1,2,...,N\} \;<\; \epsilon. \tag{1.16}$$

Como consequência do Teorema de Hanh Banach (ver [6], p. 223), temos que para cada x_i, existe um funcional linear contínuo $f_i \in X'$ para o qual

$$f_i(x_i) = \|x_i\| \quad \text{e} \quad \|f_i\| = 1. \tag{1.17}$$

Seja agora

$$\widetilde{L}^N \;=\; \{x \in X : f_i(x) = 0,\ i = 1.2,..,N\}.$$

Como os funcionais lineares $f_i,\ 1 \leq i \leq N$ não são necessariamente linearmente independentes, segue que $\widetilde{L}^N$ é um subespaço de X de codimensão no máximo N. Para cada $x \in A\cap\widetilde{L}^N$, temos por (1.16) que existe $i \in \{1,2,...,N\}$, tal que

$$\|x - x_i\| \;<\; \epsilon. \tag{1.18}$$

Obtemos assim de (1.17) e (1.18)

$$\|x_i\| \;=\; |f_i(x_i)| \;=\; |f_i(x_i - x)| \;\leq\; \|f_i\|\|x_i - x\| \;=\; \|x_i - x\| \;<\; \epsilon. \tag{1.19}$$

Logo, segue de (1.18) e (1.19)

$$\|x\| \;=\; \|(x - x_i) + x_i\| \;\leq\; \|x - x_i\| + \|x_i\| \;<\; 2\epsilon.$$

Desta forma, 2ϵ é cota superior para o conjunto $\{\|x\| : x \in A \cap \widetilde{L}^N\}$, donde $\sup\{\|x\| : x \in A \cap \widetilde{L}^N\} < 2\epsilon$. Assim

$$d^N(A) \;=\; \inf_{L^N} \sup_{x\in A\cap L^N} \|x\| \;\leq\; \sup_{x\in A\cap\widetilde{L}^N} \|x\| \;<\; 2\epsilon.$$

Como $d^N(A) \geq d^{N+1}(A) \geq ...$, segue que para $n \geq N$, temos $d^n(A) < 2\epsilon$. Mostramos assim que dado $\epsilon > 0$, existe $N > 0$, tal que

$$n \geq N \;\Rightarrow\; d^n(A) \;<\; 2\epsilon,$$

donde $d^n(A) \downarrow 0$, como queríamos. ∎

Teorema 1.2.25. *Seja X_{n+1} um subespaço (n+1)-dimensional de um espaço linear normado X. Assumimos A um subconjunto fechado, convexo e centralmente simétrico de X_{n+1}. Então*

$$d^n(A, X) \;=\; \inf\{\|x\| : x \in \partial A\}.$$

Demonstração. Pela Proposição 1.2.23 é suficiente mostrarmos o resultado para $d^n(A; X_{n+1})$. Usaremos aqui um resultado que demonstraremos na próxima seção e que nos diz que $d^n(A; X) \geq b_n(A; X)$. Obtemos assim

$$\begin{aligned} d^n(A; X_{n+1}) \quad &\geq \quad b_n(A; X_{n+1}) \;=\; \sup_{\widetilde{X}_{n+1}} \; \inf_{x \in \partial(A \cap \widetilde{X}_{n+1})} \|x\| \\ &\geq \inf_{x \in \partial(A \cap X_{n+1})} \|x\| \underbrace{=}_{A \subseteq X_{n+1}} \inf\{\|x\| : x \in \partial A\}. \end{aligned}$$

Resta então mostrarmos que $d^n(A, X_{n+1}) \leq \inf\{\|x\| : x \in \partial A\}$. Seja $x_0 \in \partial A$ tal que $\|x_0\| = \inf\{\|x\| : x \in \partial A\}$. Caso $x_0 = 0$, teríamos $\inf\{\|x\| : x \in \partial A\} = 0$. Como A é fechado deveríamos ter $0 \in \partial A$, mas A é também centralmente simétrico e convexo, donde teríamos $A = \{0\}$ e o resultado seguiria trivialmente.

Assumimos então $x_0 \neq 0$ e tomamos $f_1, f_2, ..., f_n$ funcionais linearmente independentes em X_{n+1} para os quais $f_i(x_0) = 0,\ i = 1, 2, ..., n$ e

$$\widetilde{L}^n = \{x \in X_{n+1} : f_i(x) = 0,\ i = 1, 2, ..., n\},$$

o correspondente subespaço de codimensão n em X_{n+1}. Então se $x \in A \cap \widetilde{L}^n$, teremos $x = \alpha x_0$, para algum α com $|\alpha| \leq 1$, de modo que para cada $x \in A \cap \widetilde{L}^n$, teremos

$$\|x\| \;=\; |\alpha|\,\|x_0\| \;\leq\; \|x_0\|,$$

donde $\|x_0\|$ é cota superior de $\{\|x\| : x \in A \cap \widetilde{L}^n\}$ e portanto $\sup\{\|x\| : x \in A \cap \widetilde{L}^n\} \leq \|x_0\|$. Consequentemente

$$d^n(A; X_{n+1}) \;=\; \inf_{L^n} \sup_{x \in A \cap L^n} \|x\| \;\leq\; \sup_{x \in A \cap \widetilde{L}^n} \|x\| \;\leq\; \|x_0\| \;=\; \inf\{\|x\| : x \in \partial A\},$$

concluindo a demonstração. ∎

1.2.3 Propriedades de δ_n

No teorema abaixo listaremos algumas propriedades básicas da n-largura linear que são consequências rápidas da definição.

Teorema 1.2.26. *Seja X um espaço linear normado, A e B subconjuntos não vazios de X que vamos supor fechados, convexos e centralmente simétricos e seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Nestas condições:*

(a) $\delta_n(\alpha A) = |\alpha|\delta_n(A)$;

(b) $\delta_n(A) = \delta_n(\overline{b}(A))$, *onde* $\overline{b}(A) = \{\alpha x : x \in A,\ |\alpha| \leq 1\}$, *denota o envólucro balanceado de* A;

(c) se $B \subseteq A$, *então* $\delta_n(B) \leq \delta_n(A)$;

(d) $\delta_n(A) \geq \delta_{n+1}(A), \quad n = 0, 1, 2, ...$

Demonstração. (a) Temos que

$$\begin{aligned}
\delta_n(\alpha A) &= \inf_{P_n} \sup_{x \in A} \|\alpha x - P_n(\alpha x)\| = \inf_{P_n} \sup_{x \in A} \|\alpha x - \alpha P_n(x)\| \\
&= \inf_{P_n} \sup_{x \in A} |\alpha| \|x - P_n(x)\| = |\alpha| \inf_{P_n} \sup_{x \in A} \|x - P_n(x)\| \\
&= |\alpha|\delta_n(A).
\end{aligned}$$

(b) Observemos que se P_n é um operador linear contínuo de posto no máximo n em X, então

$$\begin{aligned}
\{\|z - P_n(z)\| : z \in \overline{b}(A)\} &= \{\|\alpha x - P_n(\alpha x)\| : x \in A,\ |\alpha| \leq 1\} \\
&= \{\|\alpha x - \alpha P_n(x)\| : x \in A,\ |\alpha| \leq 1\} \\
&= \{|\alpha|\ \|x - P_n(x)\| : x \in A,\ |\alpha| \leq 1\}.
\end{aligned}$$

Assim $\sup\{\|z - P_n(z)\| : z \in \overline{b}(A)\} = \sup\{|\alpha|\ \|x - P_n(x)\| : x \in A,\ |\alpha| \leq 1\}$. Obviamente o supremo do lado direito é obtido para $|\alpha| = 1$, donde

$$\sup_{z \in \overline{b}(A)} \|z - P_n(z)\| = \sup_{x \in A} \|x - P_n(x)\|.$$

Tomando o ínfimo sobre todos os operadores lineares contínuos de posto no máximo n em X, obtemos a propriedade (b).

(c) Seja P_n um operador linear contínuo de posto no máximo n em X. Como $B \subseteq A \subseteq X$, temos que

$$\{\|x - P_n(x)\| : x \in B\} \ \subseteq \ \{\|x - P_n(x)\| : x \in A\},$$

e assim

$$\sup_{x\in B} \|x - P_n(x)\| \ \leq \ \sup_{x\in A} \|x - P_n(x)\|.$$

Tomando o ínfimo sobre todos os operadores lineares contínuos de posto no máximo n em X, obtemos a propriedade (c).

(d) Como todo operador linear contínuo sobre X de posto no máximo n é também de posto no máximo $n+1$, segue que

$$\begin{aligned} &\left\{\sup_{x\in A} \|x - P_n(x)\| : P_n : X \ \rightarrow \ X \text{ é linear, contínuo e de posto no máximo } n\right\} \\ \subseteq \ &\left\{\sup_{x\in A} \|x - P_{n+1}(x)\| : P_{n+1} : X \ \rightarrow \ X\text{é linear, contínuo e de posto no máximo } n+1\right\}. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\delta_n(A) \ = \ \inf_{P_n} \ \sup_{x\in A} \|x - P_n(x)\| \ \geq \ \inf_{P_{n+1}} \ \sup_{x\in A} \|x - P_{n+1}(x)\| \ = \ \delta_{n+1}(A).$$

■

Proposição 1.2.27. *Assumimos que $A \subseteq X \subseteq Y$ e que X é um subespaço vetorial do espaço linear normado Y, com a norma induzida de Y. Então*

$$\delta_n(A, X) \ \geq \ \delta_n(A, Y).$$

Demonstração. Cada operador linear P_n contínuo e de posto n sobre X, pode ser escrito da forma

$$P_n(x) \ = \ \sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i, \quad \text{onde} \quad x_i \in X, \ f_i \in X'.$$

Do Teorema de Hahn Banach (ver [6], p. 221), segue que para cada $f_i \in X'$ existe $\widetilde{f_i} \in Y'$ tal que $f_i = \widetilde{f}_{i|X}$, de modo que

$$\widetilde{P}_n(x) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \widetilde{f}_i(x)x_i,$$

é um operador linear contínuo de posto n sobre Y tal que $P_n = \widetilde{P}_{n|X}$ e consequentemente $P_{n|A} = \widetilde{P}_{n|A}$. Assim, para todo operador linear contínuo de posto n, P_n em X, existe um operador linear contínuo de posto n, $\widetilde{P}_n$ em Y tal que $P_{n|A} = \widetilde{P}_{n|A}$, donde

$$\begin{aligned} &\left\{\sup_{x\in A} \|x - P_n(x)\| : P_n : X \ \rightarrow \ X \text{ é linear, contínuo e de posto no máximo } n\right\} \\ \subseteq \quad &\left\{\sup_{x\in A} \|x - \widetilde{P}_n(x)\| : \widetilde{P}_n : Y \ \rightarrow \ Y \text{ é linear, contínuo e de posto no máximo } n\right\}. \end{aligned}$$

Logo

$$\delta_n(A, X) \ = \ \inf_{P_n} \sup_{x\in A} \|x - P_n(x)\| \ \geq \ \inf_{\widetilde{P}_n} \sup_{x\in A} \|x - \widetilde{P}_n(x)\| \ = \ \delta_n(A, Y).$$

■

Teorema 1.2.28. *Se A é um subconjunto fechado, convexo e centralmente simétrico de um subespaço $(n + 1)$-dimensional X_{n+1} do espaço linear normado X, então*

$$\delta_n(A) \ = \ \inf\{\|x\| : x \in \partial A\}.$$

Demonstração. Pelo mesmo argumento dado na demosntração do Teorema 1.2.25, basta mostrarmos que $\delta_n(A) \leq \inf\{\|x\| : x \in \partial A\}$.

Seja $x_0 \in \partial A$, tal que $\|x_0\| = \inf\{\|x\| : x \in \partial A\}$. Assumimos, $x_0 \neq 0$, (caso contrário pelo mesmo argumento dado na demonstração do Teorema 1.2.25 o resultado segue facilmente). Como A é convexo e centralmente simétrico, segue que existe um funcional linear contínuo $f \in X'_{n+1}$ tal que

$$f(x_0) = \sup\{|f(x)| : x \in A\}.$$

Seja $X_n = \{x \in X_{n+1} : f(x) = 0\}$ e $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ uma base para X_n. Consequentemente $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ será uma base de X_{n+1}. Sejam também $f_1, f_2, ..., f_n \in X'_{n+1}$ tais que $f_i(x_j) = \delta_{ij}, \ i = 1, 2, ..., n, \quad j = 0, 1, ..., n$. Podemos obviamente considerar $f_1, f_2, ..., f_n$ funcionais lineares em X (o Teorema de Hahn Banach nos garante isso). Nessas condições definimos

$$\widetilde{P}_n(x) \ = \ \sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i,$$

temos assim $\widetilde{P}_n$ um operador linear contínuo de posto n em X. Além disso como $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ é base de X_{n+1}, segue que cada $x \in A \subseteq X_{n+1}$ pode ser escrito da forma

$$x \ = \ \alpha x_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \quad |\alpha| \leq 1.$$

Deste modo, para cada $x \in A$, segue que

$$\begin{aligned}
\|x - \widetilde{P}_n(x)\| &= \left\| \alpha x_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^{n} f_i \left(\alpha x_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right) x_i \right\| \\
&= \left\| \alpha x_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha f_i(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x_i) \right) x_i \right\| \\
&= \left\| \alpha x_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| \\
&= \|\alpha x_0\| \;=\; |\alpha| \, \|x_0\| \;\leq\; \|x_0\|.
\end{aligned}$$

Assim, $\|x_0\|$ é cota superior para o conjunto $\{\|x - \widetilde{P}_n(x)\| : x \in A\}$, donde

$$\sup_{x \in A} \|x - \widetilde{P}_n(x)\| \;\leq\; \|x_0\|.$$

Portanto

$$\delta_n(A) \;=\; \inf_{P_n} \sup_{x \in A} \|x - P_n(x)\| \;\leq\; \sup_{x \in A} \|x - \widetilde{P}_n(x)\| \;\leq\; \|x_0\| \;=\; \inf\{\|x\| : x \in \partial A\},$$

como queríamos. ■

1.2.4 Relações entre as n-Larguras

Proposição 1.2.29. *Seja X um espaço linear normado e A um subconjunto fechado, convexo e centralmente simétrico de X. Então*

(a) $d_n(A) \;\geq\; b_n(A)$;

(b) $d^n(A) \;\geq\; b_n(A)$.

Demonstração. (a) Temos que

$$b_n(A) \;=\; \sup_{X_{n+1}} \{\lambda : \lambda B(X_{n+1}) \subseteq A\},$$

onde X_{n+1} são subespaços (n+1)-dimensionais de X. Como A é convexo e centralmente simétrico, para cada subespaço X_{n+1} seja

$$\lambda_0(X_{n+1}) \;=\; \sup\{\lambda : \lambda B(x_{n+1}) \subseteq A\}.$$

Como A é fechado, segue que $\lambda_0(X_{n+1})B(X_{n+1}) \subseteq A$, portanto pela Observação 1.2.19 temos que

$$d_n(A) \;\geq\; \lambda_0(X_{n+1}),$$

e assim

$$d_n(A) \;\geq\; \sup_{X_{n+1}} \lambda_0(X_{n+1}) \;=\; b_n(A).$$

(b) Temos que

$$b_n(A) \;=\; \sup_{X_{n+1}} \lambda_0(X_{n+1}), \quad \text{onde } \lambda_0(Xn+1)B(X_{n+1}) \subseteq A$$

Assim, uma vez que $\lambda_0(X_{n+1})B(X_{n+1}) \subseteq A$, obtemos do Teorema 1.2.21 (c, a) e do Teorema 1.2.25

$$d^n(A) \;\geq\; d^n(\lambda_0(X_{n+1})B(X_{n+1})) \;=\; \lambda_0(X_{n+1})d^n(B(X_{n+1})) \;=\; \lambda_0(X_{n+1})$$

Portanto

$$d^n(A) \;\geq\; \sup\{\lambda_0(X_{n+1}) : \lambda_0(X_{n+1}) \subset A\} \;=\; b_n(A).$$

■

Proposição 1.2.30. *Seja X um espaço linear normado e A um subconjunto de X. Então*

$$\delta_n(A) \;\geq\; d^n(A).$$

Demonstração. Se P_n é um operador linear contínuo de posto n em X, então P_n pode ser escrito da forma

$$P_n(x) \;=\; \sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i, \tag{1.20}$$

onde $f_i \in X'$, $i = 1, 2, ..., n$ e dim $\text{lin}\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ = posto $P_n = n$. Consequentemente, teremos por (1.20)

$$\begin{aligned}
\{\|x - P_n(x)\| : x \in A\} \quad &\supseteq \quad \{\|x - P_n(x)\| : x \in A,\ f_i(x) = 0,\ i = 1, 2, ..., n\} \\
&= \quad \{\|x\| : x \in A,\ f_i(x) = 0,\ i = 1, 2, ..., n\} \\
&= \quad \{\|x\| : x \in L^n \cap A\},
\end{aligned}$$

onde $L^n = \{x \in X : f_i(x) = 0,\ i = 1, 2, ..., n\}$ é um subespaço de codimensão n de X. Assim

$$\sup_{x \in A} \|x - P_n(x)\| \;\geq\; \sup_{x \in A \cap L^n} \|x\|$$

e consequentemente obtemos $\delta_n(A) \geq d^n(A)$, como queríamos. ■

Com relação às n-larguras de Kolmogorov d_n e de Gel'fand d^n, podemos ter tanto $d_n > d^n$, quanto $d_n < d^n$. Ilustramos no exemplo que segue o caso em que $d_n > d^n$.

Exemplo 1.2.31. Seja $A = B_1^3$ a bola unitária em $l_1^3(\mathbb{R})$, ou seja

$$A \;=\; B_1^3 \;=\; \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1\}.$$

Seja também $X = l_2^3(\mathbb{R})$, isto é, $\mathbb{R}^3$ munido da norma euclidiana. Para determinarmos $d_1(B_1^3, l_2^3(\mathbb{R}))$ é necessário determinarmos a reta passando pela origem (subespaço 1-dimensional) que melhor aproxima B_1^3 na norma euclidiana $\|\cdot\|_2$. Sabemos que B_1^3 é um octógono regular de modo que cada reta passando pela origem deve cortar pelo menos duas de suas faces.

Suponhamos, sem perda de generalidade que a reta corta a face que se encontra no primeiro octante, isto é, o triângulo de vértices (1,0,0), (0,1,0) e (0,0,1). Obviamente um destes três vértices dista pelo menos $\sqrt{\frac{2}{3}}$ da reta, seja $\widetilde{x}$ tal vértice, então

$$E(B_1^3; l) \;=\; \sup_{x \in B_1^3} E(x; l) \;\geq\; E(\widetilde{x}; l) \;=\; \inf_{y \in l} \|\widetilde{x} - l\|_2 \;\geq\; \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Como tal desigualdade permanece válida para toda reta passando pela origem, segue que $\sqrt{\frac{2}{3}}$ é uma cota inferior para o conjunto

$$\{E(B_1^3; l) : l \text{ é uma reta passando pela origem}\}.$$

Obtemos assim

$$d_1(B_1^3; l_2^3(\mathbb{R})) \;=\; \inf_{l}\; E(B_1^3; l) \;\geq\; \sqrt{\frac{2}{3}}. \tag{1.21}$$

Por outro lado

$$d^1(B_1^3, l_2^3(\mathbb{R})) \;=\; \inf_{L^1} \; \sup_{x \in B_1^3 \cap L^1} \|x\|_2,$$

onde L^1 são subespaços de codimensão 1 em $l_2^3(\mathbb{R})$, em outras palavras, L^1 são hiperplanos em $\mathbb{R}^3$ contendo a origem. Seja

$$\widetilde{L}^1 \;=\; \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Como $\text{máx}\{\|x\|_2 : x \in B_1^3 \cap \widetilde{L}^1\} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, temos

$$d^1(B_1^3, l_2^3(\mathbb{R})) \;=\; \inf_{L^1} \; \sup_{x \in B_1^3 \cap L^1} \|x\|_2 \;\leq\; \sup_{x \in B_1^3 \cap \widetilde{L}^1} \|x\|_2 \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{1.22}$$

Temos então por (1.21) e (1.22) que

$$d_1(B_1^3, l_2^3(\mathbb{R})) \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \geq d^1(B_1^3, l_2^3(\mathbb{R})).$$

Proposição 1.2.32. *Seja X um espaço linear normado e A um subconjunto de X. Então*

$$\delta_n(A, X) \ \geq \ d_n(A, X)$$

Demonstração. Seja $P_n : X \ \rightarrow \ X$ um operador linear contínuo de posto n e seja $X_n = P_n(X)$. Então

$$\|x - P_n(x)\| \ \geq \ \inf_{y \in X} \|x - P_n(y)\| \ = \ \inf_{y \in X_n} \|x - y\|,$$

e logo

$$\sup_{x \in A} \|x - P_n(x)\| \ \geq \ \sup_{x \in A} \ \inf_{y \in X_n} \|x - y\|.$$

Agora, tomando o ínfimo em ambos os membros da desigualdade acima para todo P_n obtemos das definições de δ_n e d_n a desigualdade desejada. ■

Existem também outras relações envolvendo as n-larguras de Bernstein e Kolmogorov . Os matemáticos Mityagin e Henkin [1963] provaram os dois seguintes resultados (ver [14], p. 24-25): Para A limitado, fechado, convexo e centralmente simétrico, temos

$$d_n(A, H) \ \leq \ (n+1)^2 \ b_n(A, H),$$

e se X = H é um espaço de Hilbert, então

$$d_n(A, H) \ \leq \ (n+1) \ b_n(A, H).$$

Vamos aqui omitir a demonstração do primeiro resultado e nos dedicar à prova do segundo. Para isso precisaremos de um resultado dado no lema seguinte que independe da estrutura de espaço de Hilbert (vale ressaltar que a prova do primeiro resultado é também baseada em tal lema).

Lema 1.2.33. *Seja X um espaço linear normado, A um subconjunto fechado, convexo e centralmente simétrico de X, $x_1, x_2, ..., x_{n+1} \in A$, e seja*

$$\widetilde{E}_k \ = \ \text{lin}\,\{x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Se $E(x_k, \widetilde{E}_k) \geq c, \ k = 1, 2, ..., n+1,$ então $b_n(A, X) \ \geq \ c/(n+1)$.

Demonstração. Seja $\widetilde{X}_{n+1} = \text{span}\,\{x_1, x_2, ..., x_{n+1}\}$. Pela definição de n-largura de Berstein temos que

$$b_n(A, X) \ = \ \sup_{X_{n+1}} \ \sup\{\lambda : \lambda B(X_{n+1}) \subseteq A\} \ \geq \ \sup\{\lambda : \lambda B(\widetilde{X}_{n+1}) \subseteq A\}.$$

É portanto suficiente mostrarmos que $(c/(n+1))B(\widetilde{X}_{n+1}) \subseteq A$. Se $\alpha \in (c/(n+1))B(\widetilde{X}_{n+1})$,então

$$\alpha \;=\; \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k \qquad \text{e} \qquad \|\alpha\| \leq c/(n+1). \tag{1.23}$$

Afirmamos que $|\alpha_k| \leq 1/(n+1)$, $\forall\ k = 1, 2, ..., n+1$. Assumindo isso, teremos

$$\sum_{k=1}^{n+1} |\alpha_k| \leq 1,$$

assim como $x_i \in A,\ i = 1, 2, ..., n+1$ e A é convexo e centralmente simétrico, temos

$$\alpha \;=\; \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k \in A \;\Rightarrow\; (c/(n+1))B(\widetilde{X}_{n+1}) \;\subseteq\; A.$$

Falta demostrarmos então a afirmação de que $|\alpha_k| \leq 1/(n+1),\ k = 1, 2, ..., n+1$. Sem perda de generalidade, consideremos $k = 1$ e assumimos $\alpha_1 \neq 0$. Por hipótese temos que

$$c \;\leq\; E(x_1, E_1) \;=\; \inf_{y \in E_1} \|x_1 - y\| \;\leq\; \|x_1 - \widetilde{y}\|,\;\; \widetilde{y} \in E_1.$$

Tomamos $\widetilde{y} = -\sum_{k=2}^{n+1} \frac{\alpha_k}{\alpha_1} x_k \in E_1$. Por (1.23), temos

$$\begin{aligned} c \;&=\; \|x_1 - \widetilde{y}\| \;=\; \left\| x_1 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\alpha_k}{\alpha_1} x_k \right\| \;=\; \frac{1}{|\alpha_1|} \left\| \alpha_1 x_1 + \sum_{k=2}^{n+1} \alpha_k x_k \right\| \\ &=\; \frac{1}{|\alpha_1|} \|\alpha\| \;\leq\; \frac{1}{|\alpha_1|} \frac{c}{n+1}. \end{aligned}$$

Portanto $|\alpha_1| \leq \frac{1}{n+1}$. ■

Proposição 1.2.34. *Seja H um espaço de Hilbert e A um subconjunto fechado, convexo, centralmente simétrico e limitado de H. Então*

$$d_n(A, H) \;\leq\; (n+1) b_n(A, H).$$

Demonstração. Para $z_1, z_2, ..., z_m \in H$, tomemos

$$V_m(z_1, z_2, ..., z_m) \;=\; [\det\,(((z_i, z_j))_{1 \leq i,j \leq m})]^{\frac{1}{2}},$$

onde (z_i, z_j) denota o produto interno de z_i por z_j em H. Notemos que $V_m(z_1, z_2, ..., z_m)$ é o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $z_1, z_2, ..., z_m$. Na terminologia do lema anterior, temos que

$$V_{n+1}(x_1, ..., x_{n+1}) \;=\; E(x_1, E_1) V_n(x_2, ..., x_{n+1}).$$

Tomemos

$$V \ = \ \sup\{V_{n+1}(z_1, ..., z_{n+1}) : z_k \in A, \ k = 1, 2, ..., n+1\}.$$

Como A é limitado, temos $V < \infty$. Se $V = 0$, então A está contido em algum subespaço n-dimensional e então $d_n(A, H) = b_n(A, H) = 0$. Assumimos $V > 0$. Então para $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, escolhemos $x_1, ..., x_{n+1} \in A$ de modo que

$$V_{n+1}(x_1, ..., x_{n+1}) \ > \ (1-\epsilon)V \ > \ 0. \tag{1.24}$$

Isto implica que $E(x_k, E_k) > 0, \ k = 1, ..., n+1$. Pela definição de $d_n(A, H)$, segue que existe para cada k, $\widetilde{x}_k \in A$, tal que

$$E(\widetilde{x}_k, E_k) \ \geq \ d_n(A, H). \tag{1.25}$$

Logo, obtemos por (1.24) e (1.25)

$$\begin{aligned} V &\geq V_{n+1}(x_1, ..., x_{k-1}, \widetilde{x}_k, x_{k+1}, ..., x_{n+1}) \\ &= E(\widetilde{x}_k, E_k) V_n(x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_{n+1}) \\ &= \frac{E(\widetilde{x}_k, E_k)}{E(x_k, E_k)} V_{n+1}(x_1, ..., x_{n+1}) \\ &\geq \frac{d_n(A, H)}{E(x_k, E_k)} V(1-\epsilon). \end{aligned}$$

Assim, $E(x_k, E_k) \geq d_n(A, H)(1-\epsilon), \ k = 1, 2, ..., n+1$, e pelo lema anterior obtemos

$$b_n(A, H) \ \geq \ \frac{(1-\epsilon) d_n(A, H)}{n+1}.$$

Como tal desigualdade permanece válida para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, segue que $(n+1) b_n(A, H) \ \geq \ d_n(A, H)$. ∎

Vamos agora abordar algumas definições e resultados que nos possibilitarão demonstrar um Princípio de Dualidade bastante útil entre as n-larguras de Kolmogorov e Gel'fand.

Definição 1.2.35. Seja X um espaço linear normado e X' seu dual topológico. Se L e M são subespaços lineares de X e X' respectivamente, definimos

$$L^{\perp} \ = \ \{f \in X' : f(x) = 0, \ \forall \ x \in L\},$$

$$M_{\perp} \ = \ \{x \in X : f(x) = 0, \ \forall \ f \in M\}.$$

Proposição 1.2.36. *([14], p. 28) Sejam $f \in X'$ e M um subespaço de dimensão finita de X'. Então*

$$\min_{g \in M} \|f - g\| \; = \; \sup\{|f(x)| : x \in M_{\perp}, \|x\| \leq 1\}.$$

Notação 1.2.37. Denotaremos por $\mathcal{L}(X, Y)$ a classe dos operadores lineares contínuos de X em Y, onde X e Y são espaços lineares normados.

Notação 1.2.38. Ao que segue, dado um espaço linear normado X, B_X denotará a bola unitária fechada em tal espaço, em outras palavras

$$B_X \; = \; \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}.$$

Definição 1.2.39. Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, definimos

$$d_n(T) \; = \; d_n(T(B_X), Y) \; = \; \inf_{Y_n} \sup_{x \in B_X} \inf_{y \in Y_n} \|T(x) - y\|_Y,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os subespaços n-dimensionais Y_n de Y.

Definição 1.2.40. Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, definimos

$$d^n(T) \; = \; d^n(T(B_X), Y) \; = \; \inf_{L^n} \sup_{x \in L^n \cap B_X} \|T(x)\|_Y,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os subespaços L^n de X de codimensão no máximo n.

Definição 1.2.41. Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, definimos

$$\delta_n(T) \; = \; \delta_n(T(B_X), Y) \; = \; \inf_{P_n} \sup_{x \in B_X} \|T(x) - P_n(x)\|_Y,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os operadores lineares contínuos P_n de X em Y de posto no máximo n.

Observação 1.2.42. Dado $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $d_n(T)$, $d^n(T)$ e $\delta_n(T)$ satisfazem os resultados precedentes já vistos com exceção da Proposição 1.2.30.

Notação 1.2.43. $K(X, Y)$ denotará a classe dos operadores lineares compactos de X em Y, isto é, a classe dos operadores $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que o fecho do conjunto $T(B_X) \; = \; \{Tx : \|x\|_X \leq 1\}$ é compacto em Y.

Definição 1.2.44. Dado $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ existe $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$, chamado adjunto de T e definido por

$$\langle Tx, y' \rangle \; = \; \langle x, T'y' \rangle, \;\; \forall \, x \in X, y' \in Y',$$

onde

$$\langle x, x' \rangle \; = x'(x), \;\; \text{para } x \in X \text{ e } x' \in X'.$$

Observação 1.2.45. Uma consequência do Teorema de Han Banach é que se $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, então

$$\|Tx\|_Y \; = \; \sup\{|\langle Tx, y'\rangle| : \|y'\| \leq 1\}.$$

Teorema 1.2.46. *Para todo $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, temos*

$$d^n(T) \; = \; d_n(T').$$

Demonstração. Para todo subespaço L^n de codimensão no máximo n em X, temos pela observação anterior e pela definição de T'

$$\begin{aligned} \sup_{x\in L^n\cap B_X} \|Tx\|_Y &= \sup_{x\in L^n\cap B_X} \sup_{y'\in B_{Y'}} |\langle Tx, y'\rangle| \\ &= \sup_{y'\in B_{Y'}} \sup_{x\in L^n\cap B_X} |\langle x, T'y'\rangle|. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Como L^n é um subespaço de codimensão no máximo n em X, L^n pode ser representado da forma

$$L^n \; = \; \{x \in X : \langle x, f_i\rangle = 0,\; f_1, f_2, \cdots, f_m \in X' \text{ linearmente independentes},\; m \leq n\}$$

e assim

$$(L^n)^{\perp} \; = \; \{f \in X' : f(x) = 0,\, \forall\, x \in L^n\} \; = \; \operatorname{lin}\{f_1, f_2, ..., f_n\},$$

é um subespaço m-dimensional de X'. Se $M = (L^n)^{\perp}$, então $M_{\perp} = L^n$ e assim pela Proposição 1.2.36 temos que

$$\sup_{y'\in B_{Y'}} \sup_{x\in L^n\cap B_X} |\langle x, T'y'\rangle| \; = \; \sup_{y'\in B_{Y'}} \inf_{x'\in (L^n)^{\perp}} \|T'y' - x'\|_{X'}.$$

Assim de (1.26) vem que

$$\sup_{x\in L^n\cap B_X} \|Tx\|_Y \; = \; \sup_{y'\in B_{Y'}} \inf_{x'\in (L^n)^{\perp}} \|T'y' - x'\|_{X'}.$$

Tomando o ínfimo sobre todos os subespaços L^n de codimensão no máximo n de X na expressão acima, obtemos $d^n(T) = d_n(T')$. ∎

Proposição 1.2.47. *([6], p. 240) Seja X um espaço linear normado e X'' o bidual de X (dual de X'). Então a aplicação $J_X : X \longrightarrow X''$ definida por*

$$\langle J_X(x), x'\rangle \; = \; \langle x', x\rangle, \;\; x \in X,\; x' \in X',$$

é um isomorfismo isométrico entre X e um subespaço de X''.

Observação 1.2.48. Dados X e Y espaços lineares normados, a proposição anterior nos garante que podemos incluir canonicamente tais espaços em seus respectivos biduais X'' e Y'' por meio dos isomorfismos isométricos definidos acima.

Proposição 1.2.49. *(Princípio Local da Reflexibilidade, [1].) Seja Y um espaço linear normado e M um subespaço de dimensão finita de Y''. Dado $\epsilon > 0$, existe $R \in \mathcal{L}(M, Y)$ tal que $\|R\| \leq 1 + \epsilon$ e $RJ_Y y = y$, $\forall y \in Y \cap J_Y^{-1}(M)$.*

Teorema 1.2.50. *Se $T \in K(X, Y)$, então*

$$d_n(T) \;=\; d^n(T').$$

Demonstração. Como $T \in K(X, Y)$, segue que $T'' \in K(X'', Y'')$ (ver [6], p. 416), logo pelo Lema 1.2.3, dado $\epsilon > 0$ podemos tomar uma ϵ-rede para o conjunto $\overline{T''(B_{X''})}$, ou seja, podemos garantir a existência de uma quantidade finita de pontos $y_1, y_2, \ldots, y_m \in Y''$ satisfazendo $\min\{\|y - y_i\|_{Y''} :\ 1 \leq i \leq m\} \leq \epsilon$, $\forall\ y \in \overline{T''(B_{X''})}$. Para cada $1 \leq i \leq m$, seja $\overline{y}_i \in T(B_X) \cap (y_i + \epsilon B_Y)$. Então $(y_i + \epsilon B_Y) \subset \overline{y}_i + 2\epsilon B_Y$ e assim $\{\overline{y}_i\}_{i=1}^m$ é uma 2ϵ-rede para $T(B_X)$ formada por elementos de $T(B_X)$. Tomando

$$L_m \;=\; \mathrm{lin}\{\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_m\},$$

teremos

$$T''(B_{X''}) \;\subset\; T''(B_{X''}) \cap L_m + 2\epsilon B_{Y''}$$

e assim pelo Teorema 1.2.1 (c) segue que

$$d_n(T'') \;=\; d_n(T''(B_{X''}); Y'') \;\leq\; d_n(T''(B_{X''}) \cap L_m + 2\epsilon B_{Y''}, Y''). \tag{1.27}$$

Seja $y \in T''(B_{X''}) \cap L_m$ e $\overline{y} \in B_{Y''}$. Então

$$\begin{aligned} E(y + 2\epsilon\overline{y}; Y_n'') \;&=\; \inf_{z \in Y_n''} \|(y + 2\epsilon\overline{y}) - z\|_{Y''} \;\leq\; \inf_{z \in Y_n''} \|y - z\|_{Y''} + 2\epsilon\|\overline{y}\|_{Y''} \\ &\leq\; \inf_{z \in Y_n''} \|y - z\|_{Y''} + 2\epsilon \;=\; E(y; Y_n'') + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} d_n(T''(B_{X''}) \cap L_m + 2\epsilon B_{Y''}, Y'') \;&=\; \inf_{Y_n''} \sup_{y + 2\epsilon\overline{y} \,\in\, T''(B_{X''}) \cap L_m + 2\epsilon B_{Y''}} E(y + 2\epsilon\overline{y}; Y_n'') \\ &\leq\; \inf_{Y_n''} \sup_{y \in T''(B_{X''}) \cap L_m} E(y; Y_n'') + 2\epsilon \\ &=\; d_n(T''(B_{X''}) \cap L_m; Y'') + 2\epsilon. \end{aligned} \tag{1.28}$$

De (1.27) e (1.28), obtemos

$$d_n(T'') - 2\epsilon \ \leq \ d_n(T''(B_{X''}) \cap L_m; Y'').$$

Como $T''(B_{X''}) \cap L_m$ é um subespaço finito-dimensional de Y'', temos que J_Y comporta-se isomorficamente e deste modo teremos

$$d_n(T'') - 2\epsilon \ \leq \ d_n(T(B_X) \cap J_Y^{-1} L_m; Y) \underbrace{\leq}_{T(B_X)\cap J_Y^{-1}L_m \subset T(B_X)} d_n(T(B_X); Y) \ = \ d_n(T).$$

Fazendo $\epsilon \ \to \ 0$ obtemos

$$d_n(T) \ \geq \ d_n(T''). \tag{1.29}$$

Agora, dado $\epsilon > 0$, pela definição de $d_n(T'')$ e propriedade de ínfimo, existe $\widetilde{X}''_n \subseteq Y''$, subespaço n-dimensional de Y'', tal que

$$\inf_{y \in \widetilde{X}''_n} \|T''x - y\|_{Y''} \ < \ d_n(T'') + \epsilon, \ \ \forall\, x \in B_{X''}. \tag{1.30}$$

Como T é compacto, existe pelo Lema 1.2.3 uma ϵ-rede para $T(B_X) \subseteq \overline{T(B_X)}$, ou seja $\exists\, x_1, x_2, \cdots, x_k \in B_X$ de modo que

$$\min\{\|Tx - Tx_i\|_Y : i = 1, 2, \cdots, k\} \ \leq \ \epsilon, \quad \forall\, x \in B_X. \tag{1.31}$$

Seja $M \subseteq Y''$ dado por $M = \mathrm{lin}\{\widetilde{X}''_n, J_Y(Tx_1), ..., J_Y(Tx_k)\}$. Então M é um subespaço finito dimensional de Y'' e segue então do Princípio Local da Reflexibilidade que existe $R \in \mathcal{L}(M, Y)$ satisfazendo

$$\|R\| \leq 1 + \epsilon \ \text{ e } \ RJ_Y(Tx_i) = Tx_i. \tag{1.32}$$

Tomando $\widetilde{X}_m = R(\widetilde{X}''_n)$, teremos então $\widetilde{X}_m$ um subespaço de dimensão m de Y, $m \leq n$. Para cada $x_i \in B_X, \ i = 1, 2, \cdots, k$, segue de (1.30), lembrando que J_X é uma inclusão isométrica de X em X'', que

$$\inf_{y \in \widetilde{X}''_n} \|T'' J_X(x_i) - y\|_{Y''} \ < \ d_n(T'') + \epsilon.$$

Assim, para cada $i = 1, 2, \cdots, k$, existe $z''_i \in \widetilde{X}''_n$ tal que

$$\|T'' J_X(x_i) - z''_i\|_{Y''} \ < \ d_n(T'') + \epsilon. \tag{1.33}$$

Seja $z_i = R(z''_i) \in \widetilde{X}_n, \ i = 1, 2, \cdots, k,$. Então segue de (1.32) e (1.33) que

$$\begin{aligned}
\inf_{y \in \widetilde{X}_m} \|Tx_i - y\|_Y \quad &= \quad \inf_{y \in \widetilde{X}_m} \|RJ_Y(Tx_i) - y\|_Y \ = \ \inf_{y \in \widetilde{X}_m} \|RT'' J_X(x_i) - y\|_Y \\
&\leq \quad \|RT'' J_X(x_i) - z_i\|_Y \ = \ \|RT'' J_X(x_i) - R(z''_i)\| \\
&= \quad \|R(T'' J_X(x_i) - z''_i)\|_Y \ \leq \ \|R\| \|T'' J_X(x_i) - z''_i\|_{Y''} \\
&< \quad (1 + \epsilon)(d_n(T'') + \epsilon).
\end{aligned}$$

Assim, para todo $x \in B_X$, teremos por (1.31) e pela desigualdade acima

$$\begin{aligned}
\inf_{y \in \widetilde{X}_m} \|Tx - y\|_Y &= \inf_{y \in \widetilde{X}_m} \|(Tx - Tx_i) + (Tx_i - y)\|_Y \\
&\leq \inf_{y \in \widetilde{X}_m} \|Tx - Tx_i\|_Y + \inf_{y \in \widetilde{X}_m} \|Tx_i - y\|_Y \\
&< \epsilon + (1+\epsilon)(d_n(T'') + \epsilon).
\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}
d_n(T) &\leq d_m(T) = \inf_{X_m} \sup_{x \in B_X} \inf_{y \in X_m} \|Tx - y\|_Y \\
&\leq \sup_{x \in B_X} \inf_{y \in \widetilde{X}_m} \|Tx - y\|_Y \leq \epsilon + (1+\epsilon)(d_n(T'') + \epsilon).
\end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos

$$d_n(T) \leq d_n(T'') \tag{1.34}$$

De (1.29) e (1.34), segue que $d_n(T) = d_n(T'')$, e como do Teorema 1.2.46 temos $d_n(T'') = d^n(T')$, segue o desejado. ∎

CAPÍTULO 2

ANÁLISE HARMÔNICA NA ESFERA S^D

Reservamos este capítulo para a apresentação de algumas definições e resultados sobre análise harmônica na esfera S^d. Os resultados deste capítulo serão aplicados nos capítulos seguintes. As demonstrações serão omitidas em sua maioria, por se encontrarem em [11] ou em [8].

Nas três seções aqui apresentadas realizamos um breve estudo sobre harmônicos esféricos, harmônicos zonais e operadores multiplicadores. Além das referências [8] e [11], outras referências para os resultados das duas primeiras seções são [10], [15], [16], [17] e para o Teorema de Multiplicadores é [2].

Na terceira seção usaremos a notação

$$(a)_+ \;=\; \begin{cases} a, & \text{se } a > 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

2.1 Harmônicos Esféricos

Definição 2.1.1. Uma função $f : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{C}$ é chamada homogênea de grau k, $k \in \mathbb{Z}$, se $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ para qualquer $\lambda > 0$ e $x \in \mathbb{R}^{d+1}$.

Notação 2.1.2. Denotaremos por $\mathcal{P}$, o conjunto de todos os polinômios definidos sobre $\mathbb{R}^{d+1}$ e por $\mathcal{P}_k$ o subconjunto de $\mathcal{P}$ formado pelos polinômios que são homogêneos de grau k.

Teorema 2.1.3. *Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_k$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}$ e*

$$a_k \;=\; \dim\, \mathcal{P}_k \;=\; \begin{pmatrix} d+k \\ k \end{pmatrix}.$$

Notação 2.1.4. Seja Δ o operador laplaciano em $\mathbb{R}^{d+1}$ e seja $k \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $\mathcal{A}_k$ o subespaço vetorial de $\mathcal{P}_k$ formado pelos polinômios harmônicos e homogêneos de grau k, isto é

$$\mathcal{A}_k \;=\; \{p \in \mathcal{P}_k : \Delta p = 0.\}$$

Notação 2.1.5. O produto interno usual de dois elementos $x, y \in \mathbb{R}^{d+1}$ será denotado por $\langle x, y\rangle$ e a norma euclidiana de um elemento $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ por $|||x||| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$. Denotaremos por S^d a esfera unitária $\{x \in \mathbb{R}^{d+1} : |||x||| = 1\}$ de $\mathbb{R}^{d+1}$, munida da medida de Lebesgue normalizada μ.

Denotaremos por $SO(d+1)$ o grupo formado por todas as rotações próprias em $\mathbb{R}^{d+1}$, que pode ser identificado com o conjunto formado por todas as matrizes ortogonais de ordem $(d+1) \times (d+1)$ e com determinante igual a 1, munido da operação usual de multiplicação de matrizes.

Definição 2.1.6. Um harmônico esférico de grau k é a restrição à esfera S^d de um elemento de $\mathcal{A}_k$. Denotaremos por $\mathcal{H}_k$ o conjunto dos harmônicos esféricos de grau k.

Teorema 2.1.7. *Temos que* $\dim\, \mathcal{H}_0 = 1,\ \dim\, \mathcal{H}_1 = d+1$ *e*

$$d_k \;=\; \dim\, \mathcal{H}_k \;=\; \begin{pmatrix} d+k \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d+k-2 \\ k-2 \end{pmatrix}, \quad k \geq 2.$$

Corolário 2.1.8. *A restrição à esfera S^d de qualquer polinômio com $(d+1)$ variáveis é uma soma finita de harmônicos esféricos.*

Corolário 2.1.9. *Toda função contínua sobre S^d pode ser aproximada uniformemente por combinações lineares finitas de harmônicos esféricos.*

Corolário 2.1.10. *O espaço vetorial gerado pela união $\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$ é denso no espaço $L^p(S^d)$, $1 \leq p < \infty$.*

Notação 2.1.11. Sejam $f, g \in L^2(S^d)$. Denotaremos por (f, g) o produto interno usual de f por g em $L^2(S^d)$, dado por

$$(f, g) \;=\; \int_{S^d} f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x).$$

Teorema 2.1.12. *Para $k, l \in \mathbb{N}$, $k \neq l$, temos $\mathcal{H}_k \perp \mathcal{H}_l$ em relação ao produto interno $(,)$.*

Corolário 2.1.13. *Se $f \in L^2(S^d)$, então f admite uma única representação na forma*

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} Y^{(k)}(x),$$

onde a série acima converge para f na norma $L^2(S^d)$ e $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$. Além disso

$$\|f\|_2^2 \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \|Y^{(k)}\|_2^2.$$

2.2 Harmônicos Zonais

Definição 2.2.1. Fixemos $x \in S^d$ e consideremos o funcional linear $L_x^{(k)}$ sobre $\mathcal{H}_k$ que a cada elemento $Y \in \mathcal{H}_k$ associa o valor $L_x^{(k)}(Y) = Y(x)$. Como $\mathcal{H}_k$ é um espaço de Hilbert, munido do produto interno $(\ ,)$ de $L^2(S^d)$, existe pelo Teorema de Representação de Riesz um único harmônico esférico $Z_x^{(k)} \in \mathcal{H}_k$ tal que

$$Y(x) \;=\; L_x^{(k)}(Y) \;=\; (Y, \overline{Z_x^{(k)}}) \;=\; \int_{S^d} Y(y) Z_x^{(k)}(y)\, d\mu(y),$$

para todo $Y \in \mathcal{H}_k$. O harmônico esférico $Z_x^{(k)}$ é chamado de zonal de grau k e pólo x.

Lema 2.2.2. *(a) Se $\{Y_1^{(k)}, ..., Y_{d_k}^{(k)}\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_k$, então*

$$Z_x^{(k)}(y) \;=\; \sum_{j=1}^{d_k} \overline{Y_j^{(k)}}(x) Y_j^{(k)}(y).$$

(b) $Z_x^{(k)}$ tem valores reais e $Z_x^{(k)}(y) = Z_y^{(k)}(x)$.

(c) Se $u \in SO(d+1)$, então $Z_{ux}^{(k)}(uy) \;=\; Z_x^{(k)}(y)$.

Corolário 2.2.3. *(a) $Z_x^{(k)}(x) = d_k$, para $x \in S^d$.*

(b) $\sum_{j=1}^{d_k} |Y_j^{(k)}(x)|^2 \;=\; d_k$, para $x \in S^d$.

(c) $|Z_x^{(k)}(y)| \;\leq\; d_k$, para $x, y \in S^d$.

Definição 2.2.4. Seja $\lambda > 0$. Os polinômios $P_k^\lambda(t)$, $-1 \leq t \leq 1$, $k \geq 0$, dados por

$$P_k^\lambda(t) \;=\; \sum_{l+j=k} a_l a_j (t - i\sqrt{1-t^2})^l (t + i\sqrt{1-t^2})^j,$$

onde $a_0 = 1$ e

$$a_k \;=\; \frac{\lambda\,(\lambda+1)\;\cdots\;(\lambda+k-1)}{k!}, \quad k \geq 1,$$

são chamados polinômios ultraesféricos ou de Gegenbauer.

Teorema 2.2.5. *(a)* $P_0^{\lambda}(t) = 1,\ |t| \leq 1.$

(b) $\frac{d}{dt}P_k^{\lambda}(t) \;=\; 2\lambda P_{k-1}^{\lambda+1}(t),\ |t| \leq 1.$

(c) $P_k^{\lambda}(-t) \;=\; (-1)^k P_k^{\lambda}(t),\ |t| \leq 1,\ k \in \mathbb{N}.$

(d) $P_k^{\lambda}(t)$ *é um polinômio de grau* k*,* $k \in \mathbb{N}.$

(e) As combinações lineares finitas de $P_k^{\lambda},\ k = 0, 1, 2, ...$ *formam um subconjunto denso no espaço das funções contínuas sobre o intervalo* $[-1, 1]$*, com a métrica da convergência uniforme.*

Teorema 2.2.6. *Sejam* $d \geq 2,\ \lambda = \frac{(d-1)}{2}$ *e* $k = 0, 1, 2, ...$ *Então para todos* $x, y \in S^d$*, temos*

$$Z_y^{(k)}(x) \;=\; \frac{d+2k-1}{d-1}\; P_k^{\lambda}(\langle x, y\rangle).$$

Corolário 2.2.7. *Os polinômios* $P_k^{(d-1)/2}(t),\ k = 0, 1, 2, ...$ *são mutuamente ortogonais com respeito ao produto interno*

$$(f, g) \;=\; \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)^{(d-2)/2}\, dt.$$

Corolário 2.2.8. *Os polinômios* $P_k^{(d-1)/2}(t),\ k = 0, 1, 2, ...$ *formam uma base ortogonal para o espaço* $L^2([-1, 1],\ (1-t^2)^{(d-2)/2}dt).$

Teorema 2.2.9 (*Teorema da Adição*)**.** *Se* $\{Y_1^{(k)}, ..., Y_{d_k}^{(k)}\}$ *é base ortonormal de* $\mathcal{H}_k$*, então*

$$\sum_{j=1}^{d_k} \overline{Y_j^{(k)}}(x) Y_j^{(k)}(y) \;=\; Z_x^{(k)}(y) \;=\; \frac{d+2k-1}{d-1} P_k^{(d-1)/2}(cos\ \theta), \tag{2.1}$$

onde θ *é o ângulo entre* x *e* y*.*

Observação 2.2.10. Uma vez que $x, y \in S^d$ e $\langle x, y\rangle \;=\; \|x\|\, \|y\| \cos\theta$, onde θ é o ângulo entre x e y, segue que $\cos\theta \;=\; \langle x, y\rangle$, e podemos assim reescrever (2.1) na forma

$$\sum_{j=1}^{d_k} \overline{Y_j^{(k)}}(x) Y_j^{(k)}(y) \;=\; Z_x^{(k)}(y) \;=\; \frac{d+2k-1}{d-1} P_k^{(d-1)/2}(\langle x, y\rangle).$$

Definição 2.2.11. Seja $K(t)$ uma função mensurável definida sobre $[-1,1]$ e seja $\overline{K}(x) = K(\langle x, e\rangle)$, onde $x \in S^d$ e $e = e_{d+1} = (0,0,\ldots,0,1)$ é o polo norte de S^d. Se $\overline{K}, f \in L^1(S^d)$, definimos o produto de convolução $K * f$ por

$$K * f(x) \;=\; \int_{S^d} K(\langle x, y\rangle) f(y)\, d\mu(y).$$

Definição 2.2.12. Para $t \in [-1,1]$, definimos

$$\widetilde{Z}^{(k)}(t) \;=\; \frac{d+2k-1}{d-1} P_k^{(d-1)/2}(t).$$

Observação 2.2.13. Se $e = e_{d+1} = (0,0,\ldots,0,1)$ e $f \in L^2(S^d)$

$$Z_e^{(k)} * f(x) \;=\; \widetilde{Z}^{(k)} * f(x) \;=\; \int_{S^d} \widetilde{Z}^{(k)}(\langle x, y\rangle) f(y)\, d\mu(y) \;=\; \int_{S^d} Z_x^{(k)}(y) f(y)\, d\mu(y).$$

Observação 2.2.14. Seja $K \in L^1([-1,1],(1-t^2)^{(d-2)/2}dt)$. Então

$$\int_{S^d} K(\langle x, y\rangle)\, d\mu(y) \;=\; \frac{\omega_{d-1}}{\omega_d} \int_{-1}^{1} K(t)(1-t^2)^{(d-2)/2} dt,$$

onde ω_d denota a área de S^d.

Teorema 2.2.15. *(Desigualdade de Young, [16], p. 31) Sejam $1 \le r, p, q \le \infty$ tais que $1 - 1/r = 1/p - 1/q$. Se $\overline{K} \in L^r(S^d)$ e $f \in L^p(S^d)$, então $K * f(x)$ está bem definida para quase todo $x \in S^d$, $K * f \in L^q(S^d)$ e*

$$\|K * f\|_q \;\le\; \|\overline{K}\|_r \|f\|_p.$$

Teorema 2.2.16. *Seja $f \in L^2(S^d)$. Então*

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} Z_e^{(k)} * f(x),$$

onde a série acima converge para f na norma de $L^2(S^d)$ e $Z_e^{(k)} * f(x) \in \mathcal{H}_k$.

Definição 2.2.17. Sejam $\alpha, \beta > -1$. Os Polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ podem ser definidos através de uma função geradora por

$$2^{\alpha+\beta} R^{-1} (1 - z + R)^{-\alpha} (1 + z + R)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(t) z^n,$$

onde $R = (1 - 2tz + z^2)^{1/2}$.

Lema 2.2.18. *Sejam* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \geq -1/2$. *Então*

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(1) \;=\; \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)} \tag{2.2}$$

e

$$P_n^{(\lambda)}(t) = \frac{\Gamma(\lambda+1/2)\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda+1/2)} P_n^{(\lambda-1/2,\lambda-1/2)}(t), \quad -1 \leq t \leq 1. \tag{2.3}$$

Lema 2.2.19. *([17], p. 71) Seja*

$$K_N^{(\alpha,\beta)}(x,y) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(x) P_k^{(\alpha,\beta)}(y)}{\left\| P_k^{(\alpha,\beta)} \right\|_2^2}.$$

Então

$$K_N^{(\alpha,\beta)}(x,1) = 2^{-\alpha-\beta-1} \frac{\Gamma(N+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(N+\beta+1)} P_N^{(\alpha+1,\beta)}(x).$$

Lema 2.2.20. *Seja* $\mathcal{T}_N = \oplus_{k=0}^{N} \mathcal{H}_k$. *Então*

$$\dim \mathcal{T}_N \;=\; \frac{2(N+d/2)(N+d-1)\,!}{d\,!\,N\,!}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.9, Observação 2.2.10 e Definição 2.2.12 temos que

$$\sum_{j=1}^{d_k} \overline{Y_j^{(k)}(x)} Y_j^{(k)}(y) = \widetilde{Z}_x^{(k)}(\langle x, y \rangle). \tag{2.4}$$

Tomando $x = y$ e integrando em ambos os lados de (2.4) obtemos

$$\int_{S^d} \sum_{m=1}^{d_k} \left| Y_m^{(k)}(x) \right|^2 d\mu(x) \;=\; \int_{S^d} \widetilde{Z}^{(k)}(1) d\mu(x) \;=\; \widetilde{Z}^{(k)}(1)$$

Da Definição 2.2.12, de (2.2) e (2.3), observamos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z}^{(k)}(1) &= \frac{d+2k-1}{d-1} P_k^{(d-1)/2}(1) \\
&= \frac{d+2k-1}{d-1} \frac{\Gamma(d/2)\Gamma(k+d-1)}{\Gamma(d-1)\Gamma(k+d/2)} P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(1) \\
&= (d+2k-1) \frac{\Gamma(d/2)(k+d-2)\,!}{(d-1)\,!\,\Gamma(k+d/2)} P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(1) \\
&= C_k P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(1),
\end{aligned}$$

onde $C_k = (d+2k-1) \dfrac{\Gamma(d/2)(k+d-2)\,!}{(d-1)\,!\,\Gamma(k+d/2)}$. Assim

$$\int_{S^d} \sum_{m=1}^{d_k} \left| Y_m^{(k)}(x) \right|^2 d\mu(x) = C_k P_k^{(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2})}(1).$$

Por outro lado

$$d_k \;=\; \sum_{j=1}^{d_k} 1 \;=\; \sum_{j=1}^{d_k} \int_{S^d} \left|Y_j^{(k)}(x)\right|^2 d\mu(x) \;=\; \int_{S^d} \sum_{j=1}^{d_k} \left|Y_j^{(k)}(x)\right|^2 d\mu(x)$$

e portanto

$$d_k = C_k P_k^{(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2})}(1). \tag{2.5}$$

Agora, tomando o quadrado em ambos os lados de (2.4) e então integrando com respeito a $d\mu(x)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{S^d} \left(\sum_{m=1}^{d_k} Y_m^{(k)}(x)\overline{Y_m^{(k)}(y)} \right)^2 d\mu(x) &= \int_{S^d} \left(\widetilde{Z}^{(k)}(\langle x,y\rangle) \right)^2 d\mu(x) \\
&= C_k^2 \int_{S^d} \left(P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(\langle x,y\rangle) \right)^2 d\mu(x).
\end{aligned}$$

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned}
\int_{S^d} \left(\sum_{m=1}^{d_k} Y_m^{(k)}(x)\overline{Y_m^{(k)}(y)} \right)^2 d\mu(x) &= \int_{S^d} \left(\sum_{j=1}^{d_k} Y_j^{(k)}(x)\overline{Y_j^{(k)}(y)} \right) \left(\sum_{i=1}^{d_k} Y_i^{(k)}(x)\overline{Y_i^{(k)}(y)} \right) d\mu(x) \\
&= \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{i=1}^{d_k} Y_j^{(k)}(y)\overline{Y_i^{(k)}}(y) \int_{S^d} Y_i^{(k)}(x)\overline{Y_j^{(k)}}(x) d\mu(x) \\
&= \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{i=1}^{d_k} Y_j^{(k)}(y)\overline{Y_i^{(k)}}(y)\delta_{i,j} \\
&= \sum_{j=1}^{d_k} |Y_j^{(k)}(y)|^2
\end{aligned}$$

e portanto

$$\sum_{j=1}^{d_k} \left|Y_j^{(k)}(y)\right|^2 = C_k^2 \int_{S^d} \left(P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(\langle x,y\rangle) \right)^2 d\mu(x). \tag{2.6}$$

Segue da Observação 2.2.14 que

$$\int_{S^d} \left(P_k^{(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2})}(\langle x,y\rangle) \right)^2 \, d\mu(x) \;=\; \frac{\omega_{d-1}}{\omega_d} \left\| P_k^{(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2})} \right\|_2^2,$$

onde ω_d é a área de S^d e

$$\left\| P_k^{(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2})} \right\|_2^2 \;=\; \int_{-1}^{1} \left(P_k^{(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2})}(t) \right)^2 (1-t^2)^{\frac{d-2}{2}} dt$$

Temos que

$$c \;=\; \frac{\omega_d}{\omega_{d-1}} \;=\; 2^{d-1}\frac{(\Gamma(d/2))^2}{(d-1)\,!}.$$

Integrando (2.6) com respeito a $d\mu(y)$ encontramos

$$\begin{aligned}
d_k &= \sum_{j=1}^{d_k} 1 = \int_{S^d} \sum_{j=1}^{d_k} \left| Y_j^{(k)}(y) \right|^2 d\mu(y) \\
&= \int_{S^d} C_k^2 \int_{S^d} \left(P_k^{(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2})}(\langle x, y\rangle) \right)^2 d\mu(x) d\mu(y) \\
&= C_k^2 \int_{S^d} c^{-1} \left\| P_k^{(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2})} \right\|_2^2 d\mu(y) \\
&= C_k^2 c^{-1} \left\| P_k^{(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2})} \right\|_2^2.
\end{aligned}$$

Obtemos assim de (2.5)

$$C_k = c \cdot \frac{P_k^{(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2})}(1)}{\left\| P_k^{(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2})} \right\|_2^2} \;=\; 2^{d-1}\frac{(\Gamma(d/2))^2}{(d-1)\,!} \frac{P_k^{(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2})}(1)}{\| P_k^{(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2})} \|_2^2},$$

assim substituindo C_k em (2.5), obtemos

$$d_k \;=\; 2^{d-1}\frac{(\Gamma(d/2))^2}{(d-1)\,!} \frac{\left(P_k^{(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2})}(1) \right)^2}{\| P_k^{(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2})} \|_2^2} \tag{2.7}$$

e portanto

$$\dim \mathcal{T}_N = \sum_{k=0}^{N} d_k \;=\; 2^{d-1}\frac{(\Gamma(d/2))^2}{(d-1)\,!} \sum_{k=0}^{N} \frac{\left(P_k^{(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2})}(1) \right)^2}{\| P_k^{(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2})} \|_2^2}. \tag{2.8}$$

Observamos do Lema 2.2.19 que

$$K_N^{(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2})}(1,1) = \sum_{k=0}^{N} \frac{\left(P_k^{(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2})}(1) \right)^2}{\left\| P_k^{(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2})} \right\|_2^2},$$

então pelo Lema 2.2.19 e por (2.2) temos que

$$\begin{aligned}
K_N^{(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2})}(1,1) &= 2^{-d+1} \frac{(N+d-1)\,!}{\Gamma(d/2)\Gamma(N+d/2)} \cdot P_N^{(\frac{d}{2},\frac{d-2}{2})}(1) \\
&= 2^{-d+1} \frac{(N+d-1)\,!}{\Gamma(d/2)\Gamma(N+d/2)} \cdot \frac{\Gamma(N+d/2+1)}{\Gamma(d/2+1)\Gamma(N+1)} \\
&= 2^{-d+1} \frac{(N+d-1)\,!}{\Gamma(d/2)\Gamma(N+d/2)} \cdot \frac{(N+d/2)\Gamma(N+d/2)}{d/2\Gamma(d/2)N\,!} \\
&= 2^{-d+1} \frac{(N+d/2)(N+d-1)\,!}{(d/2)\Gamma(d/2)^2 N\,!}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{\left(P_k^{(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2})}(1)\right)^2}{\left\|P_k^{(\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2})}\right\|_2^2} \;=\; 2^{-d+1}\frac{(N+d/2)(N+d-1)\,!}{(d/2)(\Gamma(d/2))^2 N\,!}.$$

Portanto de (2.8) obtemos

$$\dim \mathcal{T}_N = \frac{(N+d/2)(N+d-1)\,!}{(d/2)(d-1)\,!\,N\,!} \;=\; \frac{2(N+d/2)(N+d-1)\,!}{d\,!\,N\,!}.$$

■

Lema 2.2.21. *Temos que*

$$\dim \mathcal{H}_k \;=\; \frac{2}{(d-1)\,!}k^{d-1} + b_1 k^{d-2} + \cdots + b_{d-1},$$

$$\dim \mathcal{T}_N \;=\; \frac{2}{d\,!}(N+1)^d + c_1(N+1)^{d-1} + \cdots + c_d$$

e

$$\frac{1}{\dim \mathcal{T}_N} \;\geq\; \frac{d\,!}{2N^d} - \frac{C(d\,!)^2}{4N^{d+1}},$$

onde $b_1, \cdots, b_{d-1}, c_1, \cdots, c_d$ *e* C *são constantes maiores ou iguais a zero.*

Demonstração. Do Teorema 2.1.7 e da propriedade da função Gama que nos afirma que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\dim \mathcal{H}_k &= \begin{pmatrix} d+k \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d+k-2 \\ k-2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{(d+k-2)\,!(2k+d-1)}{(d-1)\,!\,k\,!} \\
&= \frac{1}{(d-1)\,!}(2k+d-1)(k+1)\cdots(k+d-2) \\
&= \frac{2}{(d-1)\,!}k^{d-1} + b_1 k^{d-2} + \cdots + b_{d-1}.
\end{aligned}$$

Agora, considerando a expressão de $n = \dim \mathcal{T}_N$ dada pelo Lema 2.2.20, segue que

$$\begin{aligned}
n &= \frac{2}{d\,!} \cdot \frac{(N+d/2)((N+d-1)\,!)}{N\,!} \\
&= \frac{2}{d\,!}(N+d-1)(N+d-2)\cdots(N+1)(N+d/2) \\
&= \frac{2}{d\,!}(N+1)^d + c_1(N+1)^{d-1} + \cdots + c_d.
\end{aligned}$$

Finalmente, denotando $F = 2/d\,!$, teremos

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} &= \frac{1}{F(N+1)^d + c_1(N+1)^{d-1} + \cdots + c_d} \\ &\geq \frac{1}{FN^d + CN^{d-1}} \\ &= \frac{1}{FN^d(1-(-\frac{C}{FN}))}.\end{aligned}$$

Uma vez que $\mid -\frac{C}{FN} \mid < 1$, já que os $N's$ de nosso interesse são suficientemente grandes, segue pelo resultado da série geométrica que

$$\left(1-(-\frac{C}{FN})\right)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty}\left(-\frac{C}{FN}\right)^i.$$

Obtemos desta forma

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} &= \frac{1}{FN^d}\left(1-\frac{C}{FN}+\frac{C^2}{F^2N^2}-\cdots\right) \\ &\geq \frac{1}{FN^d}\left(1-\frac{C}{FN}\right) \\ &= \frac{1}{FN^d}-\frac{C}{F^2N^{d+1}} \\ &= \frac{d\,!}{2N^d}-\frac{C(d\,!)^2}{4N^{d+1}}.\end{aligned}$$

■

2.3 Operadores Multiplicadores

Notação 2.3.1. Denotaremos a bola unitária de $L^p(S^d)$ por

$$U_p \;=\; \{\phi \in L^p(S^d) : \|\phi\|_p \leq 1\}.$$

Definição 2.3.2. Seja $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números complexos e $1 \leq p, q \leq \infty$. Se para todo $\varphi \in L^p(S^d)$ existe uma função $f = \Lambda\varphi \in L^q(S^d)$ com expansão formal em harmônicos esféricos

$$f \;\sim\; \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \widetilde{Z}^{(k)} * \varphi,$$

tal que

$$\|\Lambda\|_{p,q} \;=\; \sup\{\|\Lambda\varphi\|_q : \varphi \in L^p,\ \varphi \in U_p\} \;<\; \infty,$$

dizemos que Λ é um operador multiplicador limitado de L^p em L^q com norma$\|\Lambda\|_{p,q}$.

Notação 2.3.3. Para $n, k \in \mathbb{N}$, denotamos

$$C_m^k \;=\; \frac{(m+k)\,!}{n\,!\,k\,!}$$

Definição 2.3.4. Seja $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência numérica. Definimos $\Delta^0\lambda_k = \lambda_k$, $\Delta^1\lambda_k = \lambda_k - \lambda_{k+1}$ e definimos assim indutivamente

$$\Delta^{n+1}\lambda_k = \Delta^n\lambda_k - \Delta^n\lambda_{k+1}.$$

Proposição 2.3.5. *Seja $f(x)$ uma função real definida para $x \geq 0$ e com derivadas até ordem n. Se $\lambda_k = f(x+k)$, escrevemos $\Delta^1 f(x) = \Delta^1\lambda_0 = f(x) - f(x+1)$ e $\Delta^{n+1}f(x) = \Delta^n f(x) - \Delta^n f(x+1) = \Delta^n\lambda_0 - \Delta^n\lambda_1$. Então*

$$\Delta^n f(x) \;=\; (-1)^n \int_0^1 \cdots \int_0^1 f^{(n)}(x+t_1+\cdots+t_n)dt_1\ldots dt_n$$

e

$$|\Delta^n f(x)| \;\leq\; \max_{0\leq t\leq n} |f^{(n)}(x+t)|.$$

Teorema 2.3.6. *([2]) Seja*

$$N \;=\; \begin{cases} (d+1)/2, & d = 3,5,\ldots, \\ (d+2)/2, & d = 2,4,\ldots, \end{cases}$$

e seja $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números complexos. Seja $1 \leq r,p,q \leq \infty$ tal que $1 - 1/r = (1/p - 1/q)_+$. Suponhamos que

$$\lim_{k\to\infty} |\Delta^s\lambda_k| k^s = 0, \qquad 0 \leq s \leq N \tag{2.9}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta^{N+1}\lambda_n| n^{N+d(1-1/r)} \;<\; \infty. \tag{2.10}$$

Então existe uma constante positiva C tal que

$$\|\Lambda\|_{p,q} \;\leq\; |\lambda_0| + C\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta^{N+1}\lambda_n| n^{N+d(1-1/r)}.$$

Além disso, se $\phi \in U_p$ e

$$t_n(\phi) \;=\; \lambda_0 c_{0,1}(\phi) + \left(\sum_{k=1}^{n} C_k^N S_k^N \Delta^{N+1}\lambda_k\right) * \phi,$$

temos que

$$\|\Lambda\phi - t_n\phi\|_q \;\leq\; C\sum_{k=n+1}^{\infty} |\Delta^{N+1}\lambda_k| k^{N+d(1-1/r)}.$$

Proposição 2.3.7. *Seja $\Lambda^{(1)} = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, onde $\lambda_k = k^{-\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, e sejam $1 \leq p, q \leq \infty$ tal que $\gamma > d(1/p - 1/q)_+$. Então $\Lambda^{(1)}$ é um operador multiplicador limitado de L^p em L^q.*

Demonstração. Denotando $f(k) = \lambda_k$, pela Proposição 2.3.5, temos que

$$\begin{aligned} |\Delta^s \lambda_k| &= |\Delta^s f(k)| \leq \max_{0\leq t\leq s} |f^{(s)}(k+t)| \\ &= \max_{k\leq t\leq k+s} |f^{(s)}(t)| = \max_{k\leq t\leq k+s} |-\gamma(-\gamma-1)\dots(-\gamma-(s-1))| t^{-\gamma-s} \\ &= \max_{k\leq t\leq k+s} C_{\gamma,s} t^{-\gamma-s} = C_{\gamma,s} k^{-\gamma-s} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Logo $|\Lambda^s \lambda_k| k^s \leq C_{\gamma,s} k^{-\gamma}$, donde $\lim_{k\to\infty} |\Lambda^s \lambda_k| k^s = 0$, $0 \leq s \leq N$ e portanto a condição (2.9) do Teorema 2.3.6 é satisfeita.

Agora, seja $\gamma = \epsilon + d(1/p - 1/q)_+$, $\epsilon > 0$ e $1 \leq r, p, q \leq \infty$ tal que $1 - 1/r = (1/p - 1/q)_+$. Temos por (2.11) que

$$|\Delta^{N+1} \lambda_k| \leq C_{\gamma,N+1} k^{-d(1-1/r)-N-(1+\epsilon)}$$

e então

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta^{N+1} \lambda_k| k^{N+d(1-1/r)} \leq C_{\gamma,N+1} \sum_{k=0}^{\infty} k^{-(1+\epsilon)} < \infty,$$

donde a condição (2.10) do Teorema 2.3.6 é satisfeita e portanto o operador $\Lambda^{(1)}$ é limitado de L^p em L^q. ∎

Proposição 2.3.8. *Seja $\Lambda^{(2)} = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, onde $\lambda_k = e^{-\gamma k^r}$, $\gamma, r \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, $0 < r < 1$. Então $\Lambda^{(2)}$ é um operador multiplicador limitado de L^p em L^q, para todos $1 \leq p, q \leq \infty$.*

Demonstração. Como para futuras aplicações estamos interessados apenas na limitação do operador multiplicador $\Lambda^{(2)}$, e não na constante que fornece essa limitação, demonstraremos o resultado fazendo uso de técnicas mais simples sem utilizar para isso o Teorema 2.3.6. Faremos a demonstração para $p = 1$ e $q = \infty$ e os demais casos seguirão de imediato das relações entre as normas de L^p, $1 \leq p \leq \infty$ e entre as normas de L^q, $1 \leq q \leq \infty$.

Seja $\varphi \in U_1$, então

$$\Lambda^{(2)}\varphi(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \widetilde{Z}^{(k)} * \varphi(x).$$

Denotando $a_k = \lambda_k \widetilde{Z}^{(k)} * \varphi(x)$, obtemos da Desigualdade de Hölder, do Corolário 2.2.3 (c) e do fato que $d_k \leq C k^{d-1}$ (ver Lema 2.2.21)

$$\begin{aligned} |a_k| &= |\lambda_k \widetilde{Z}^{(k)} * \varphi(x)| = |\lambda_k| \left| \int_{S^d} Z_x^{(k)}(y)\varphi(y)\, d\mu(y) \right| \\ &\leq |\lambda_k| \|\varphi\|_1 \|Z_x^k\|_\infty \leq |\lambda_k| d_k \\ &\leq C\lambda_k k^{d-1} = C e^{-\gamma k^r} k^{d-1}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Definimos $f(x) = Ce^{-\gamma x^r} x^{2(d-1)}$, então $f'(x) = -C\gamma r e^{-\gamma x^r} x^{2(d-1)+r-1} + 2C(d-1)e^{-\gamma x^r} x^{2(d-1)-1}$ e assim por meio de simples cálculos concluímos que

$$f'(x) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq \left(\frac{d+1}{\gamma r}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Tomando $\overline{C} = f\left(\left(\frac{d+1}{\gamma r}\right)^{\frac{1}{r}}\right)$, teremos $f(k) \leq \overline{C}$ para $k \geq \left(\frac{d+1}{\gamma r}\right)^{\frac{1}{r}}$, ou seja, $Ce^{-\gamma k^r} k^{2(d-1)} \leq \overline{C} \;\Rightarrow\; Ce^{-\gamma k^r} k^{d-1} \leq \overline{C} k^{-2}$. De (2.12) vem que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k \widetilde{Z}^{(k)} * \varphi(x)| \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \;\leq\; \overline{C} \sum_{k=0}^{\infty} k^{-2}.$$

Assim

$$\|\Lambda^{(2)}\varphi\|_{\infty} \;=\; \sup_{x \in S^d} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \;\leq\; \overline{C} \sum_{k=0}^{\infty} k^{-2} \;\leq\; \overline{\overline{C}},$$

já que $\sum_{k=0}^{\infty} k^{-2}$ é convergente. Consequentemente o operador multiplicador $\Lambda^{(2)}$ é limitado de L^1 em L^{∞} e portanto de L^p em L^q, $\quad 1 \leq p, q \leq \infty$. ■

CAPÍTULO 3

ESTIMATIVAS DE N-LARGURAS DE MULTIPLICADORES SOBRE S^D

Neste capítulo estudamos estimativas inferiores e superiores para n-larguras de operadores multiplicadores gerais de $L^p(S^d)$ em $L^q(S^d),\ 1 \leq p, q \leq \infty$, demonstradas por A. Kushpel e S. Tozoni em [8]. A estimativa inferior é demonstrada para as n-larguras de Kolmogorov e Gel'fand e a superior somente para a de Kolmogorov. Para tanto, iniciamos o capítulo introduzindo o conceito de Média de Levy de uma norma definida sobre $\mathbb{R}^n$ e especificamos as normas com as quais iremos trabalhar. Feito isso fazemos o estudo de um teorema bastante importante que nos fornece estimativas para as Médias de Levy de tais normas, o que nos possibilita obter as estimativas para as n-larguras dos operadores multiplicadores. Além de [8], outras referências utilizadas no capítulo são [5], [9], [12] e [13].

Vale observarmos aqui que ao que segue usaremos para duas sequências as terminologias $a_n \asymp b_n,\ a_n \gg b_n$ e $a_n \ll b_n$, para indicarmos a existência de constantes universais C_1, C_2, C_3 e C_4 satisfazendo $C_1 b_n \leq a_n \leq C_2 b_n,\ a_n \geq C_3 b_n$ e $a_n \leq C_4 b_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, respectivamente.

3.1 Estimativas para Médias de Levy

Seja $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach n-dimensional e $B_E = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ a bola unitária em E. Além disso, seja $|||x||| = (\sum_{k=1}^n |x_k|^2)^{\frac{1}{2}}$ a norma Euclidiana do elemento $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ o produto interno entre os elementos $x, y \in \mathbb{R}^n$. Seja também

$$S^{n-1} \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n : |||x||| = 1\},$$

a esfera unitária euclidiana em $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.1.1. A média de Levy de uma norma $\|\cdot\|$ definida em $\mathbb{R}^n$ é definida por

$$M(\|\cdot\|) \;=\; M(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \;=\; \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|^2 \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}},$$

onde μ denota a medida de Lebesgue normalizada em S^{n-1}.

Notação 3.1.2. A fim de especificar a norma $\|\cdot\|$ para a qual queremos estimar a média de Levy, consideremos um sistema arbitrário de harmônicos esféricos

$$\{\xi_k\}_{k=1}^n \;\subseteq\; \bigoplus_{l=M_1}^{M_2} \mathcal{H}_l, \qquad n = \sum_{s=M_1}^{M_2} \dim\mathcal{H}_s,$$

ortonormal em $L^2(S^d)$. Seja $\Xi_n = \mathrm{lin}\{\xi_1, ..., \xi_n\}$ e $J : \mathbb{R}^n \to \Xi_n$ o isomorfismo coordenado que atribui a cada vetor $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ a função $J_\alpha \;=\; \xi^\alpha \;=\; \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k \in \Xi_n$. Toda matriz diagonal

$$\Lambda_n \;=\; \mathrm{diag}\{\overbrace{\underbrace{\lambda_{M_1}, ..., \lambda_{M_1}}_{\dim \mathcal{H}_{M_1}}, \underbrace{\lambda_{M_1+1}, ..., \lambda_{M_1+1}}_{\dim \mathcal{H}_{M_1+1}}, ..., \underbrace{\lambda_{M_2}, ..., \lambda_{M_2}}_{\dim \mathcal{H}_{M_2}}}^{n}\} \;=\; \mathrm{diag}\{\widetilde{\lambda}_1, ..., \widetilde{\lambda}_n\}$$

pode ser associada a um operador linear inversível $J\Lambda_n J^{-1} : \Xi_n \to \Xi_n$, que denotaremos mais uma vez por Λ_n por conveniência de notação.

A definição $\|\xi\|_{\Lambda_n,p} \;=\; \|\Lambda_n \xi\|_p$ induz a uma norma em Ξ_n e passando para $\mathbb{R}^n$ obtemos a norma

$$\|\alpha\|_{(\Lambda_n,p)} \;=\; \|\xi^\alpha\|_{\Lambda_n,p}, \;\; \alpha \in \mathbb{R}^n.$$

Denotamos

$$B^n_{(\Lambda_n,p)} \;=\; B^n_{(\Lambda,p)} \;=\; \{\alpha \in \mathbb{R}^n : \|\alpha\|_{(\Lambda_n,p)} \leq 1\}.$$

Se $\Lambda_n = I$ (operador identidade), escreveremos $B^n_{(I,p)} \;=\; B^n_{(p)}$ e $\|\cdot\|_{(I,p)} \;=\; \|\cdot\|_{(p)}$.

Observação 3.1.3. Antes de prosseguirmos, faremos uma observação afim de tornar a expressão acima mais clara. Uma vez que $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ é um sitema ortonormal de harmônicos esféricos e $n = \dim\left(\bigoplus_{l=M_1}^{M_2} \mathcal{H}_k\right)$, segue que podemos ordenar este sistema ortonormal da seguinte maneira

$$\{\xi_k\}_{k=1}^n \;=\; \{\xi_j^l : \; M_1 \leq l \leq M_2, \; 1 \leq j \leq d_l\},$$

onde $\{\xi_j^l,\ 1 \leq j \leq d_l\}$ é base ortonormal de $\mathcal{H}_l,\ M_1 \leq l \leq M_2$. Assim, se $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, teremos $J(\alpha) = \xi^\alpha = \sum_{l=M_1}^{M_2} \sum_{j=1}^{d_l} \alpha_j^l \xi_j^l$, assim $\Lambda_n \xi^\alpha = \sum_{l=M_1}^{M_2} \lambda_l \sum_{j=1}^{d_l} \alpha_j^l \xi_j^l$ e desta forma

$$\|\alpha\|_{(\Lambda_n,p)} \;=\; \left\| \sum_{l=M_1}^{M_2} \lambda_l \sum_{j=1}^{d_l} \alpha_j^l \xi_j^l \right\|_p .$$

Definição 3.1.4. Seja ν uma medida sobre a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(X)$ de X, onde X é um espaço topológico localmente compacto de Hausdorff
(a) ν é chamada regular exteriormente sobre $E \in \mathcal{B}(X)$ se

$$\nu(E) \;=\; \inf\{\nu(U) : E \subset U,\ U \text{ aberto}\}.$$

(b) ν é chamada regular interiormente sobre $E \in \mathcal{B}(X)$ se

$$\nu(E) \;=\; \sup\{\nu(K) : K \subset E,\ K \text{ compacto}\}.$$

(c) Se ν for finita sobre os compactos, regular exteriormente sobre todos os Borelianos e regular interiormente sobre todo aberto, dizemos que ν é uma medida de Radon.

Teorema 3.1.5. *(Teorema da Representação de Riesz, [5], p. 205) Seja X um espaço topológico compacto de Hausdorff e seja I um funcional linear positivo sobre $C(X)$, isto é, $I(f) \geq 0$ se f é uma função real contínua sobre X e $f \geq 0$. Então existe uma única medida de Radon ν sobre $\mathcal{B}(X)$ tal que*

$$I(f) = \int_X f(x) d\nu(x),$$

para toda $f \in C(X)$.

Definição 3.1.6. Um grupo topológico é um grupo G que também é um espaço topológico e cujas operações de grupo

$$\begin{aligned} (u,v) \in G \ \times \ G &\longmapsto u \cdot v \in G, \\ u \ \in \ G &\longmapsto u^{-1} \in G, \end{aligned}$$

são contínuas.

Definição 3.1.7. Uma medida de Haar à esquerda sobre o grupo topológico localmente compacto G, é uma medida de Radon ν sobre G tal que $\nu(uE) = \nu(E)$ para todo $u \in G$ e $E \in \mathcal{B}(X)$, onde $uE = \{ua : a \in E\}$.

Teorema 3.1.8. *([5], p. 315) Sobre todo grupo localmente compacto, existe uma medida de Haar à esquerda, que é única a menos de constantes multiplicativas positivas.*

Observação 3.1.9. O conjunto $SO(n)$ das rotações próprias em $\mathbb{R}^n$, munido da operação de produto de matrizes e da topologia induzida de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, é um grupo topológico compacto. Denotemos por σ a medida de Haar normalizada sobre $SO(n)$.

Seja $f \in L^1(S^{n-1})$ e seja $\tilde{f}$ a função definida por $\tilde{f}(u) = f(ue)$. Então $\tilde{f} \in L^1(SO(n))$ e

$$\int_{S^{n-1}} f(y) d\mu(y) = \int_{SO(n)} \tilde{f}(u) d\sigma(u).$$

Em virtude desta relação entre as medidas μ e σ, podemos concluir pelo Teorema 3.1.6 que, se ν é uma medida de Radon sobre os borelianos de S^{n-1} e também é invariante por rotações de $SO(n)$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$ tal que $\nu(E) = \lambda\mu(E)$, $\forall\ E \in \mathcal{B}(S^{n-1})$.

Lema 3.1.10. *Seja $f \in C(S^{n-1})$ e $\widetilde{f}$ a extensão de f para $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dada por*

$$\widetilde{f}(x) \ = ||| \, x \, |||^2 \, f\left(\frac{x}{||| \, x \, |||}\right).$$

Então

$$\int_{S^{n-1}} f(x) \ d\mu(x) \ = \ \frac{2\pi}{n} \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(x) \ d\gamma(x),$$

onde $d\gamma(x) = e^{-\pi|||x|||^2}dx$ denota a medida Gaussiana em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Definimos a aplicação $I : C(S^{n-1}) \ \to \ \mathbb{R}$ por

$$I(f) \ = \ \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(x) \ d\gamma(x) \ = \ \int_{\mathbb{R}^n} ||| \, x \, |||^2 \, f\left(\frac{x}{||| \, x \, |||}\right) e^{-\pi|||x|||^2}dx.$$

Esta aplicação é claramente um funcional linear positivo em $C(S^{n-1})$ e segue portanto do Teorema 3.1.5 que existe uma única medida de Radon ν em S^{n-1} satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} ||| \, x \, |||^2 \, f\left(\frac{x}{||| \, x \, |||}\right) e^{-\pi|||x|||^2}dx \ = \ \int_{S^{n-1}} f \ d\nu \tag{3.1}$$

Observemos que se $u \in SO(n)$ então

$$\begin{aligned} I(f \circ u) \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}^n} ||| \, x \, |||^2 \, f\left(\frac{ux}{||| \, ux \, |||}\right) e^{-\pi|||x|||^2}dx \\ &= \quad \int_{\mathbb{R}^n} ||| \, ux \, |||^2 \, f\left(\frac{ux}{||| \, ux \, |||}\right) e^{-\pi|||ux|||^2}dx \\ &= \quad \int_{\mathbb{R}^n} ||| \, x \, |||^2 \, f\left(\frac{x}{||| \, x \, |||}\right) e^{-\pi|||x|||^2}dx \ = \ I(f). \end{aligned}$$

Assim I é invariante por rotações donde a medida de Radon ν é invariante por rotações e é portanto uma medida de "Haar"sobre S^{n-1}. Logo da Observação 3.1.9 existe uma constante λ_n tal que $\nu = \lambda_n \mu$, onde μ é a medida de Lebesgue normalizada em S^{n-1}. Segue assim de (3.1) que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |||\, x \,|||^2 \, f\left(\frac{x}{|||\, x \,|||}\right) e^{-\pi |||x|||^2} dx \;=\; \lambda_n \int_{S^{n-1}} f(x)\, d\mu(x). \tag{3.2}$$

Tomando $f \equiv 1 \in C(S^{n-1})$ da equação acima vem que

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \lambda_n \int_{S^{n-1}} 1\, d\mu \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} |||\, x \,|||^2 \, e^{-\pi |||x|||^2}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (x_1^2 + \cdots + x_n^2) e^{-\pi(x_1^2+\cdots+x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n \\
&= n \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 e^{-\pi(x_1^2+\cdots+x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n \\
&= n \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 e^{-\pi x_1^2} d_{x_1}\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x_2^2} dx_2\right) \cdots \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x_n^2} dx_n\right).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Observando agora que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \;=\; \sqrt{\pi}$, fazemos uma mudança de variáveis na integral e obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-qy^2} dy \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{q}}, \tag{3.4}$$

e tomando assim $q = \pi$, segue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x_i^2} dx_i \;=\; 1, \quad i = 2, 3, ..., n. \tag{3.5}$$

Derivando agora a expressão (3.4) com relação à variável q obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} -y^2 e^{-qy^2}\, dy \;=\; -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{q^3}}.$$

Tomando $y = x_1$ e $q = \pi$, obtemos da expressão acima

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 e^{-\pi x_1^2} dx_1 \;=\; \frac{1}{2\pi}. \tag{3.6}$$

Segue assim de (3.3), (3.5) e (3.6) que $\lambda_n = \frac{n}{2\pi}$ e substituindo tal valor em (3.2), temos que

$$\int_{S^{n-1}} f(x)\, d\mu(x) \;=\; \frac{2\pi}{n} \int_{\mathbb{R}^n} |||\, x \,|||^2 \, f\left(\frac{x}{|||\, x \,|||}\right) e^{-\pi |||x|||^2} dx \;=\; \frac{2\pi}{n} \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(x) d\gamma(x).$$

■

Lema 3.1.11. *([9], p. 585) Seja* $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ *a sequência das funções de Rademacher*

$$r_k(\theta) = \operatorname{sign} sen(2^k\pi\theta),$$

para $\theta \in [0,1]$ *e* $k = 1, 2, \ldots$. *E para* $m = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, n$, *seja*

$$\delta_i^m(\theta) \ = \ m^{-\frac{1}{2}}(r_{(i-1)m+1}(\theta) + \cdots + r_{im}(\theta)).$$

Nestas condições, se $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua satisfazendo*

$$h(x_1, \ldots, x_n)e^{-\sum_{k=1}^{n}|x_k|} \to 0,$$

uniformemente quando $\sum_{k=1}^{n}|x_k| \to 0$. *Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\ d\gamma(x) \ = \ \lim_{m\to\infty}\int_0^1 h\left((2\pi)^{-\frac{1}{2}}(\delta_1^m(\theta), \ldots, \delta_n^m(\theta))\right)\ d\theta.$$

Lema 3.1.12 (*Desigualdade de Khintchine, [13], p. 41*)**.** *Seja* $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *as funções de Rademacher definidas no lema anterior e seja* $1 \le p < \infty$. *Então existem constantes positivas* $\beta(p)$ *e* $\gamma(p)$ *tal que para toda escolha de escalares* $\{c_s\}_{s=1}^{n}$ *temos*

$$\beta(p)\left(\sum_{s=1}^{u}|c_s|^2\right)^{\frac{1}{2}} \ \le \ \left(\int_0^1 |\sum_{s=1}^{u} r_s(\theta)c_s|^p\ d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \ \le \ \gamma(p)\left(\sum_{s=1}^{u}|c_s|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

onde $\beta(1) \ge 1/2$ *e* $\gamma(p) \ = \ 2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1+p}{2})/\Gamma(\frac{1}{2}) \ \asymp p^{1/2}, \ \ p \to \infty$.

Lema 3.1.13 (*Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin, [5], p. 193*)**.** *Sejam* $(X, \mathcal{M}, \sigma)$ *e* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *dois espaços com medidas semi-finitas (em particular* σ*-finitas),* $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le \infty$ *e para cada* $0 \le t \le 1$ *sejam* p_t *e* q_t *tais que*

$$\frac{1}{p_t} \ = \ \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \qquad \frac{1}{q_t} \ = \ \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Seja T *um operador linear limitado de* $L^{p_t}(X, \mathcal{M}, \sigma)$ *em* $L^{q_t}(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *para* $t \in \{0, 1\}$ *e tal que*

$$\|Tf\|_{q_t} \ \le \ K_t\|f\|_{p_t}, \qquad f \in L^{p_t}(X, \mathcal{M}, \sigma),\ t \in \{0, 1\}.$$

Então

$$\|Tf\|_{q_t} \ \le \ K_0^{1-t}K_1^{t}\|f\|_{p_t}, \qquad f \in L^{p_t}(X, \mathcal{M}, \sigma),\ t \in [0, 1].$$

Lema 3.1.14. *Se* $t_n \in \bigoplus_{k=M_1}^{M_2}\mathcal{H}_k$, *então*

$$\|t_n\|_\infty \ \le \ n^{\frac{1}{p}}\ \|t_n\|_p, \quad 1 \le p \le \infty, \tag{3.7}$$

$$\|t_n\|_2 \ \le \ n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\ \|t_n\|_p, \quad 1 \le p \le 2, \tag{3.8}$$

$$\|t_n\|_q \ \le \ n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\ \|t_n\|_2, \quad 2 \le q \le \infty. \tag{3.9}$$

Demonstração. Seja $D_{M_1,M_2} = \sum_{k=M_1}^{M_2} Z_e^{(k)}$, onde $Z_e^{(k)}$ é o harmônico zonal de grau k e pólo e, sendo e o pólo norte da esfera S^d. Então para cada $t_n \in \bigoplus_{k=M_1}^{M_2} \mathcal{H}_k$, temos

$$t_n = D_{M_1,M_2} * t_n,$$

e segue assim do Teorema 2.2.14 (Desigualdade de Young) que

$$\|t_n\|_\infty = \|D_{M_1,M_2} * t_n\|_\infty \leq \|D_{M_1,M_2}\|_\infty \|t_n\|_1. \tag{3.10}$$

Mas, $D_{M_1,M_2} = D_{M_1,M_2} * D_{M_1,M_2}$, e assim pelo Teorema 2.2.14 e pelo Corolário 2.2.3 (a), obtemos

$$\begin{aligned} \|D_{M_1,M_2}\|_\infty &= \|D_{M_1,M_2} * D_{M_1,M_2}\|_\infty \leq \|D_{M_1,M_2}\|_2 \|D_{M_1,M_2}\|_2 \\ &= \|D_{M_1,M_2}\|_2^2 = \sum_{k=M_1}^{M_2} \int_{S^d} Z_e^{(k)} \overline{Z_e^{(k)}}\, d\mu = \sum_{k=M_1}^{M_2} (Z_e^{(k)}, Z_e^{(k)}) \\ &= \sum_{k=M_1}^{M_2} \overline{Z_e^{(k)}}(e) = \sum_{k=M_1}^{M_2} d_k = n. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Segue assim de (3.10) e (3.11) que

$$\|t_n\|_\infty \leq n\|t_n\|_1.$$

Desta forma

$$\|I(t_n)\|_\infty \leq n\|t_n\|_1 \quad \text{e} \quad \|I(t_n)\|_\infty \leq \|t_n\|_\infty.$$

Aplicando o Lema 3.1.5, teremos

$$\begin{cases} K_0 = n, \\ K_1 = 1, \\ q_0 = q_1 = \infty \Rightarrow q_t = \infty, \\ p_0 = 1,\ p_1 = \infty \Rightarrow \frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{1} + \frac{t}{\infty} = 1-t. \end{cases}$$

Logo $K_0^{1-t} \cdot K_1^t = n^{1-t} \cdot 1^t = n^{\frac{1}{p_t}}$ e fazendo $p = p_t$, obtemos

$$\|t_n\|_\infty = \|I(t_n)\|_\infty \leq n^{\frac{1}{p}} \|t_n\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

o que demonstra (3.7).

Usando agora o fato que $t_n = D_{M_1,M_2} * t_n$ e que $\|D_{M_1,M_2}\|_2 = n^{\frac{1}{2}}$ (ver (3.11)), segue do Teorema 2.2.14 que

$$\|t_n\|_2 = \|D_{M_1,M_2} * t_n\|_2 \leq \|D_{M_1,M_2}\|_2 \|t_n\|_1 = n^{\frac{1}{2}} \|t_n\|_1$$

e desta forma

$$\|I(t_n)\|_2 \leq n^{\frac{1}{2}}\|t_n\|_1 \qquad \text{e} \qquad \|I(t_n\|_2 \leq 1\|t_n\|_2.$$

De modo análogo, aplicando o Lema 3.1.5 ao par de desigualdades acima com $K_0 = n^{\frac{1}{2}}, K_1 = 1,\ p_0 = 1,\ p_1 = 2$ e $q_0 = q_1 = 2$, obtemos

$$\|t_n\|_2 \ \leq \ n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\ \|t_n\|_p, \quad 1 \leq p \leq 2,$$

o que demonstra (3.8).

Usando mais uma vez o fato de que $t_n = D_{M_1,M_2} * t_n$ e que $\|D_{M_1,M_2}\|_2 = n^{\frac{1}{2}}$, segue do Teorema 2.2.14 que

$$\|t_n\|_\infty \ = \ \|D_{M_1,M_2} * t_n\|_\infty \ \leq \ \|D_{M_1,M_2}\|_2\|t_n\|_2 \ = \ n^{\frac{1}{2}}\|t_n\|_2$$

e logo

$$\|I(t_n)\|_\infty \leq n^{\frac{1}{2}}\|t_n\|_2 \qquad \text{e} \qquad \|I(t_n)\|_2 \leq 1\|t_n\|.$$

Finalmente, aplicando o Lema 3.1.5, obtemos

$$\|t_n\|_q \ \leq \ n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|t_n\|_2, \quad 2 \leq q \leq \infty.$$

■

Teorema 3.1.15. *Seja* $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ *um sitema ortonormal arbitrário de harmônicos esféricos em* $\oplus_{l=M_1}^{M_2}\mathcal{H}_l,\ n = \dim\left(\oplus_{l=M_1}^{M_2}\mathcal{H}_l\right)$*. Então existe uma constante absoluta* $C > 0$ *tal que:*

1) se $2 \leq p < \infty$*, então*

$$n^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=M_1}^{M_2}|\lambda_k|^2 d_k\right)^{\frac{1}{2}} \ \leq \ M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,p)}) \ \leq \ Cp^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=M_1}^{M_2}|\lambda_k|^2 d_k\right)^{\frac{1}{2}};$$

2) se $p = \infty$*, então*

$$n^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=M_1}^{M_2}|\lambda_k|^2 d_k\right)^{\frac{1}{2}} \ \leq \ M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,\infty)}) \ \leq \ C(\log_2\ n)^{\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=M_1}^{M_2}|\lambda_k|^2 d_k\right)^{\frac{1}{2}};$$

3) se $1 \leq p \leq 2$*, então*

$$\frac{1}{2}n^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=M_1}^{M_2}|\lambda_k|^2 d_k\right)^{\frac{1}{2}} \ \leq \ M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,p)}) \ \leq \ n^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=M_1}^{M_2}|\lambda_k|^2 d_k\right)^{\frac{1}{2}};$$

4) se $p = 2$*, então*

$$M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,2)}) \ = \ n^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=M_1}^{M_2}|\lambda_k|^2 d_k\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. Vamos inicialmente obter a igualdade em (*4*). Para $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, temos pela Observação 3.1.3 que

$$\|x\|^2_{(\Lambda_n,2)} = \left\| \sum_{l=M_1}^{M_2} \lambda_l \sum_{j=1}^{d_l} x_j^l \ \xi_j^l \right\|_2^2 = \sum_{l=M_1}^{M_2} |\lambda_l|^2 \sum_{j=1}^{d_l} (x_j^l)^2 \ \|\xi_j^l\|_2^2 = \sum_{l=M_1}^{M_2} |\lambda_l|^2 \sum_{j=1}^{d_l} (x_j^l)^2.$$

Assim

$$\int_{S^{n-1}} \|x\|^2_{(\Lambda_n,2)} \ d\mu(x) = \sum_{l=M_1}^{M_2} |\lambda_l|^2 \sum_{j=1}^{d_l} \int_{S^{n-1}} (x_j^l)^2 \ d\mu(x). \tag{3.12}$$

Mas

$$1 = \int_{S^{n-1}} |||x|||^2 \ d\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{S^{n-1}} x_j^2 \ d\mu(x) = n \int_{S^{n-1}} x_i^2 \ d\mu(x), \ \ \forall \ i = 1, ..., n,$$

donde

$$\int_{S^{n-1}} x_i^2 d\mu(x) = \frac{1}{n}, \ \ \forall \ i = 1, ..., n. \tag{3.13}$$

De (3.12) e (3.13), obtemos

$$\int_{S^{n-1}} \|x\|^2_{(\Lambda_n,2)} \ d\mu(x) = \frac{1}{n} \sum_{l=M_1}^{M_2} |\lambda_l|^2 \sum_{j=1}^{d_l} 1 = \frac{1}{n} \sum_{l=M_1}^{M_2} |\lambda_l|^2 d_l.$$

Consequentemente

$$M(\| \cdot \|_{(\Lambda_n,2)}) = \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|^2_{(\Lambda_n,2)} \ d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}} = n^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{l=M_1}^{M_2} |\lambda_l|^2 d_l \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como a propriedade (*4*) é válida e $M(\| \cdot \|_{(\Lambda_n,p)})$ é uma função monótona crescente de p para $1 \leq p \leq \infty$, seguem as estimativas inferiores em (*1*) e (*2*) e a estimativa superior em (*3*).

Vamos agora, obter a estimativa superior em (*1*) e a estimativa inferior em (*3*). Para uma função arbitrária $f \in C(S^{n-1})$, definimos a extensão $\widetilde{f}$ de f para $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ por $\widetilde{f}(x) = |||x|||^2 \cdot f(x/|||x|||)$, e consideramos $\widetilde{\lambda}_i, \ 1 \leq i \leq n$ a sequência de multiplicadores obtida de $\lambda_i, \ M_1 \leq i \leq M_2$ que corresponde à enumeração fixada dos harmônicos esféricos $\{\xi_i\}_{i=1}^n$. Tomando $f(x) = \|x\|^2_{(\Lambda_n,p)}, \ x = (x_1, ..., x_n) \in S^{n-1}$, segue do Lema 3.1.10 que

$$\int_{S^{n-1}} \|x\|^2_{(\Lambda_n,p)} \ d\mu(x) = \frac{2\pi}{n} \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(x) \ d\gamma(x) = \frac{2\pi}{n} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^2_{(\Lambda_n,p)} \ d\gamma(x). \tag{3.14}$$

Como $\|x\|_{(\Lambda_n,p)} \leq C_{M_1,M_2,p} \sum_{k=1}^n |x_k|$, temos que

$$\widetilde{f}(x) e^{-\sum_{k=1}^n |x_k|} = \|x\|^2_{(\Lambda_n,p)} e^{-\sum_{k=1}^n |x_k|} \to 0 \quad \text{uniformemente quando} \ \sum_{k=1}^{n} |x_k| \to 0.$$

Portanto segue do Lema 3.1.11 que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(x)\, d\gamma(x) \;=\; \lim_{m\to\infty} \int_0^1 \|(2\pi)^{-\frac{1}{2}}(\delta_1^m(\theta), ..., \delta_n^m(\theta))\|^2_{(\Lambda_n,p)}\, d\theta. \tag{3.15}$$

De (3.14) e (3.15) vem que

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \|x\|^2_{(\Lambda_n,p)}\, d\mu(x) &= \frac{2\pi}{n} \lim_{m\to\infty} \int_0^1 \|(2\pi)^{-\frac{1}{2}}(\delta_1^m(\theta), ..., \delta_n^m(\theta))\|^2_{(\Lambda_n,p)}\, d\theta \\ &= n^{-1} \lim_{m\to\infty} \int_0^1 \|(\delta_1^m(\theta), ..., \delta_n^m(\theta))\|^2_{(\Lambda_n,p)}\, d\theta. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Observemos agora que

$$\begin{aligned} \|(\delta_1^m(\theta), ..., \delta_n^m(\theta))\|^2_{(\Lambda_n,p)} &= \|\xi^{(\delta_1^m(\theta),...,\delta_n^m(\theta))}\|^2_{\Lambda_n,p} = \left\| \sum_{i=1}^n \delta_i^m(\theta)\xi_i \right\|^2_{\Lambda_n,p} \\ &= \left\| \Lambda_n \left(\sum_{i=1}^n \delta_i^m(\theta)\xi_i \right) \right\|^2_p = \left\| \sum_{i=1}^n \widetilde{\lambda}_i \delta_i^m(\theta)\xi_i \right\|^2_p \\ &= \left(\int_{S^d} |\sum_{i=1}^n \widetilde{\lambda}_i \delta_i^m(\theta)\xi_i(\tau)|^p\, d\mu(\tau) \right)^{\frac{2}{p}}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Além disso

$$\sum_{i=1}^n \widetilde{\lambda}_i \delta_i^m(\theta)\xi_i(\tau) \;=\; \sum_{i=1}^n m^{-\frac{1}{2}} \xi_i(\tau)\widetilde{\lambda}_i(r_{(i-1)m+1}(\theta) + \cdots + r_{im}(\theta)).$$

Denotando assim $\widetilde{\xi}_{(i-1)m+k}(\tau) = m^{-\frac{1}{2}}\xi_i(\tau),\ \tau \in S^d$ e $\widetilde{\widetilde{\lambda}}_{(i-1)m+k} = \widetilde{\lambda}_i,$ para $i = 1, ..., n;\ k = 1, ..., m$ e $m = 1, 2, ...,$ obtemos

$$\sum_{i=1}^n \widetilde{\lambda}_i \delta_i^m(\theta)\xi_i(\tau) \;=\; \sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta)\widetilde{\widetilde{\lambda}}_j \widetilde{\xi}_j(\tau). \tag{3.18}$$

Segue então de (3.16), (3.17) e (3.18) que

$$\begin{aligned} M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,p)}) &= \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|^2_{(\Lambda_n,p)}\, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= n^{-\frac{1}{2}} \lim_{m\to\infty} \left(\int_0^1 \left(\int_{S^d} |\sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta)\widetilde{\widetilde{\lambda}}_j \widetilde{\xi}_j(\tau)|^p\, d\mu(\tau) \right)^{\frac{2}{p}} d\theta \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Desta forma, pela Desigualdade de Jensen (ver [5], p. 104) e pelo Lema 3.1.12, para $2 \le p \le$

∞, vem que

$$
\begin{aligned}
M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,p)}) &\leq n^{-\frac{1}{2}} \lim_{m\to\infty} \left(\left(\int_{S^d} \int_0^1 |\sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta) \widetilde{\widetilde{\lambda}}_j \widetilde{\xi}_j(\tau)|^p \, d\theta \, d\mu(\tau) \right)^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \gamma(p) n^{-\frac{1}{2}} \lim_{m\to\infty} \left(\int_{S^d} \left(\sum_{j=1}^{mn} |\widetilde{\widetilde{\lambda}}_j \widetilde{\xi}_j(\tau)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\mu(\tau) \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

Usando agora o Corolário 2.2.3 (b), obtemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{mn} |\widetilde{\widetilde{\lambda}}_j \widetilde{\xi}_j(\tau)|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} |\widetilde{\widetilde{\lambda}}_{(i-1)m+k} \widetilde{\xi}_{(i-1)m+k}(\tau)|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} |\widetilde{\lambda}_i|^2 |m^{-\frac{1}{2}} \xi_i(\tau)|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} m |\widetilde{\lambda}_i|^2 m^{-1} |\xi_i(\tau)|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} |\widetilde{\lambda}_i|^2 |\xi_i(\tau)|^2 \\
&= \sum_{j=M_1}^{M_2} |\lambda_j|^2 \sum_{i=1}^{d_j} |\xi_i^j(\tau)|^2 \\
&= \sum_{j=M_1}^{M_2} |\lambda_j|^2 d_j. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

Assim, segue por (3.20) e (3.21) que

$$
\begin{aligned}
M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,p)}) &\leq \gamma(p) n^{-\frac{1}{2}} \lim_{m\to\infty} \left(\int_{S^d} \left(\sum_{j=M_1}^{M_2} |\lambda_j|^2 d_j \right)^{\frac{p}{2}} d\mu(\tau) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \gamma(p) n^{-\frac{1}{2}} \left(\int_{S^d} \left(\sum_{j=M_1}^{M_2} |\lambda_j|^2 d_j \right)^{\frac{p}{2}} d\mu(\tau) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \gamma(p) n^{-\frac{1}{2}} \left(\left(\sum_{j=M_1}^{M_2} |\lambda_j|^2 d_j \right)^{\frac{p}{2}} \int_{S^d} d\mu(\tau) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C_1 p^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=M_1}^{M_2} |\lambda_j|^2 d_j \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

onde a constante universal C_1 da última desigualdade é obtida do fato de $\gamma(p) \asymp p^{\frac{1}{2}}$.

Por outro lado, para $p = 1$, segue de (3.19), da Desigualdade de Jensen, do Lema 3.1.12 e de (3.21) que

$$\begin{aligned}
M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,1)}) &= n^{-\frac{1}{2}} \lim_{m\to\infty} \left(\int_0^1 \left(\int_{S^d} |\sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta) \widetilde{\widetilde{\lambda}}_j \widetilde{\xi}_j(\tau)|\, d\mu(\tau) \right)^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq n^{-\frac{1}{2}} \lim_{m\to\infty} \int_{S^d} \int_0^1 |\sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta) \widetilde{\widetilde{\lambda}}_j \widetilde{\xi}_j(\tau)|\, d\theta\, d\mu(\tau) \\
&\geq b(1) n^{-\frac{1}{2}} \lim_{m\to\infty} \int_{S^d} \left(\sum_{j=1}^{mn} |\widetilde{\widetilde{\lambda}}_j \widetilde{\xi}_j(\tau)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\mu(\tau) \\
&= b(1) n^{-\frac{1}{2}} \int_{S^d} \left(\sum_{j=M_1}^{M_2} |\lambda_j|^2 d_j \right)^{\frac{1}{2}} d\mu(\tau) \\
&\geq \frac{1}{2} n^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=M_1}^{M_2} |\lambda_j|^2 d_j \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Uma vez que a Média de Levy é uma função monótona crescente de p, segue que

$$M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,p)}) \;\geq\; M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,1)}) \;\geq\; \frac{1}{2} n^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=M_1}^{M_2} |\lambda_j|^2 d_j \right)^{\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq p \leq 2.$$

Obtemos assim a estimativa inferior em (*3*).

Agora, aplicando (3.7) com $p = \log_2\, n$ (assumiremos então $p \geq 2$) e (3.22) obtemos

$$\begin{aligned}
M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,\infty)}) &= \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|^2_{(\Lambda_n,\infty)}\, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{S^{n-1}} \|\Lambda_n \xi^x\|^2_\infty\, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(n^{\frac{2}{p}} \int_{S^{n-1}} \|\Lambda_n \xi^x\|^2_p\, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= n^{\frac{1}{p}} \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|^2_{(\Lambda_n,p)}\, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq n^{\frac{1}{p}} C_1 p^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=M_1}^{M_2} |\lambda_j|^2 d_j \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2^p)^{\frac{1}{p}} C_1 (\log_2 n)^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=M_1}^{M_2} |\lambda_j|^2 d_j \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2C_1 (\log_2 n)^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=M_1}^{M_2} |\lambda_j|^2 d_j \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

Tomando então $C = 2C_1$, obtemos de (3.22) e (3.23) as estimativas superiores em (1) e (2), respectivamente. ■

3.2 Estimativas Inferiores Gerais para n-Larguras

Fixemos uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{R}^n$ e denotemos por E o espaço de Banach $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ com bola unitária B_E. O espaço dual E^0 é munido da norma

$$\|x\|^0 = \sup\{|\langle x, y\rangle| : y \in B_E\}.$$

Teorema 3.2.1. *([12]) Seja $E^0 = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|^0)$. Para cada $0 < \lambda < 1$, existe um subespaço $F_k \subseteq \mathbb{R}^n$, com $\dim F_k = k > \lambda n$, tal que*

$$||| \ \alpha \ ||| \le C M_0 (1-\lambda)^{-\frac{1}{2}} \|\alpha\|, \quad \forall \ \alpha \in F_k,$$

onde $C > 0$ é uma constante absoluta e

$$M_0 = \left(\int_{S^{n-1}} (\|\alpha\|^0)^2 \, d\mu(\alpha) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema 3.2.2. *Sejam $1 \le q \le p \le 2$, $0 < \lambda < 1$, $n = \dim \mathcal{T}_N$, $\mathcal{T}_N = \bigoplus_{l=1}^N \mathcal{H}_l$, $d_k = \dim \mathcal{H}_k$ e seja $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ uma sequência de multiplicadores tal que $\lambda_k \neq 0 \ \forall \ k \in \mathbb{N}$. Então existe uma constante absoluta $C > 0$ tal que*

$$
\begin{aligned}
&\min \{ d_{[\lambda n - 1]}(\Lambda U_p; L^q), d^{[\lambda n-1]}(\Lambda U_p; L^q) \} \\
&\ge C(1-\lambda)^{\frac{1}{2}} \begin{cases} (1-\frac{1}{q})^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^N |\lambda_k|^{-2} d_k \right)^{-\frac{1}{2}}, & q > 1, \\ (n/\log_2 n)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^N |\lambda_k|^{-2} d_k \right)^{-\frac{1}{2}}, & q = 1, \end{cases}
\end{aligned}
$$

onde $[\lambda n - 1]$ denota a parte inteira do número $\lambda n - 1$.

Demonstração. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n = J^{-1}\mathcal{T}_N$. Usando o fato que J é um isomorfismo coordenado e portanto preserva produto interno, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|x\|^0_{(\Lambda_n, q)} &= \sup\{|\langle x, y\rangle| : y \in B^n_{(\Lambda_n, q)}\} \\
&= \sup\left\{ \left| \int_{S^{n-1}} Jx \cdot Jy \, d\mu \right| : Jy \in \Lambda_n^{-1}(B^n_q) \right\}.
\end{aligned}
$$

Como $\Lambda_n Jy \in B_q^n$, segue que $\Lambda_n Jy = J\overline{y}$, com $\overline{y} \in B_{(q)}^n$, donde $Jy = \Lambda_n^{-1} J\overline{y}$. Obtemos assim da expressão acima e da Desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
\|x\|_{(\Lambda_n,q)}^0 &= \sup\left\{\left|\int_{S^{n-1}} Jx \cdot \Lambda_n^{-1} J\overline{y}\, d\mu\right| : \overline{y} \in B_{(q)}^n\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\int_{S^{n-1}} \Lambda_n^{-1} Jx \cdot J\overline{y}\, d\mu\right| : \overline{y} \in B_{(q)}^n\right\} \\
&\leq \|\Lambda_n^{-1} Jx\|_{q'} \|J\overline{y}\|_q \ \leq\ \|\Lambda_n^{-1} Jx\|_{q'} \\
&= \|x\|_{(\Lambda_n^{-1},q')} \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

onde $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Tomando agora $0 < \lambda < 1$, podemos garantir pelo teorema anterior a existência de um subespaço $F_k \subseteq \mathbb{R}^n$, com $\dim F_k = k > \lambda n$, satisfazendo

$$\|x\|_{(2)} = ||| \, x \, ||| \leq C' M\left(\| \cdot \|_{(\Lambda_n,q)}^0\right)(1-\lambda)^{-\frac{1}{2}} \|x\|_{(\Lambda_n,q)}, \ \ \forall\, x \in F_k.$$

De (3.24), vem que

$$\|x\|_{(2)} \ \leq\ C' M\left(\| \cdot \|_{(\Lambda_n^{-1},q')}\right)(1-\lambda)^{-\frac{1}{2}} \|x\|_{(\Lambda_n,q)}, \ \ \forall\, x \in F_k.$$

Assim para $\epsilon = C'^{-1}(1-\lambda)^{\frac{1}{2}}\left(M\left(\| \cdot \|_{(\Lambda_n^{-1},q')}\right)\right)^{-1}$, temos

$$\epsilon B_{(\Lambda_n,q)}^n \cap F_k \ \subseteq B_{(2)}^n. \qquad (3.25)$$

Além disso, estimando a Média de Levy $M\left(\| \cdot \|_{(\Lambda_n^{-1},q')}\right)$ pelo Teorema 3.1.15, obtemos

$$\epsilon \ \geq\ C(1-\lambda)^{\frac{1}{2}} \begin{cases} (q')^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^N |\lambda_k|^{-2} d_k\right)^{-\frac{1}{2}}, & q' < \infty\ , \\ (n/\log_2 n)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^N |\lambda_k|^{-2} d_k\right)^{-\frac{1}{2}}, & q' = \infty. \end{cases}$$

Como $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ e $1 \leq q \leq 2$, vem que

$$\epsilon \ \geq\ C(1-\lambda)^{\frac{1}{2}} \begin{cases} (1-\frac{1}{q})^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^N |\lambda_k|^{-2} d_k\right)^{-\frac{1}{2}}, & q > 1\ , \\ (n/\log_2 n)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^N |\lambda_k|^{-2} d_k\right)^{-\frac{1}{2}}, & q = 1. \end{cases} \qquad (3.26)$$

Como $\Lambda U_2 \subseteq \Lambda U_p$, já que $1 \leq q \leq p \leq 2$, segue pelo Teorema 1.2.1 (c), pelo Teorema 1.2.21 (c) e da Proposição 1.2.29 que

$$\begin{aligned}
& \min\{d_{[\lambda n-1]}(\Lambda U_p; L^q), d^{[\lambda n-1]}(\Lambda U_p; L^q)\} \\
\geq\ & \min\{d_{[\lambda n-1]}(\Lambda U_2; L^q), d^{[\lambda n-1]}(\Lambda U_2; L^q)\} \\
\geq\ & b_{[\lambda_n-1]}(\Lambda U_2; L^q) \\
\geq\ & b_{[\lambda n-1]}(\Lambda_n B_2^n; L^q).
\end{aligned}$$

Observando que $\dim F_k = k > \lambda n$, obtemos da Definição 1.1.13 e de (3.25) que

$$b_{[\lambda n-1]}(\Lambda_n B_2^n; L^q) \geq \epsilon$$

e consequentemente

$$\min \{d_{[\lambda n-1]}(\Lambda U_p; L^q), d^{[\lambda n-1]}(\Lambda U_p; L^q)\} \geq \ \epsilon.$$

De (3.26) segue o desejado. ■

Observação 3.2.3. Usando o Teorema 1.2.50 obtemos para o caso $2 \leq p, q \leq \infty$, a seguinte estimativa

$$d_{[\lambda n-1]}(\Lambda U_p; L^q) \ \geq \ C(1-\lambda)^{\frac{1}{2}} \begin{cases} p^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^{-2} d_k\right)^{-\frac{1}{2}}, & p < \infty, \\ (n/\log_2 n)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^{-2} d_k\right)^{-\frac{1}{2}}, & p = \infty. \end{cases}$$

3.3 Estimativas Superiores Gerais para n-Larguras

Teorema 3.3.1. *Suponhamos que $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência decrescente em módulo satisfazendo $\lim_{k\to\infty} |\lambda_k| = 0,\ 1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$, e que o operador multiplicador Λ é limitado de L_1 em L_2. Sejam $\{N_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{m_k\}_{k=0}^{M}$ sequências de números naturais tais que $N_k < N_{k+1},\ N_0 = 0$ e $\sum_{k=0}^{M} m_k \leq \beta$. Então existe uma constante absoluta $C > 0$ tal que*

$$d_\beta(\Lambda U_p; L^q) \ \leq \ C \left(\sum_{k=1}^{M} |\lambda_{N_k}| \varrho_{m_k} + \sum_{k=M+1}^{\infty} |\lambda_{N_k}| \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \right),$$

onde

$$\varrho_{m_k} \ = \ \frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}}}{(m_k)^{\frac{1}{2}}} \cdot \begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 \theta_{N_k,N_{k+1}})^{\frac{1}{2}}, & q = \infty, \end{cases}$$

$$\theta_{N_k,N_{k+1}} \ = \ \sum_{s=N_k}^{N_{k+1}} \dim\ \mathcal{H}_s.$$

Demonstração. Seja $\mathcal{T}_{M_1,M_2} = \bigoplus_{l=M_1}^{M_2} \mathcal{H}_l,\ n = \dim \mathcal{T}_{M_1,M_2} = \sum_{k=M_1}^{M_2} d_k,\ B_p^n = U_p \cap \mathcal{T}_{M_1,M_2},\ B_{(p)}^n = J^{-1} B_p^n,\ \lambda_0 = 0$ e $0 < \lambda < 1$. Pelo Teorema 3.2.1, existe um subespaço $F_k \subseteq \mathbb{R}^n$, $\dim F_k = k > \lambda n$, tal que para todo $x \in F_k$ temos satisfeito

$$\|x\|_{(2)} \ \leq \ CM(\|\cdot\|_{(q)})(1-\lambda)^{-\frac{1}{2}} \|x\|_q^0.$$

Se $m = n - k$, usando o fato que $k > \lambda n$ e $0 < \lambda < 1$, obtemos $(1-\lambda)^{-\frac{1}{2}} < (\frac{n}{m})^{\frac{1}{2}}$ e assim

$$\|x\|_{(2)} \ \leq \ C\|x\|^0_{(q)} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}} M(\|\cdot\|_{(q)}).$$

Pelo Teorema 3.1.15 para $\Lambda_n = \mathrm{Id}$, temos

$$M(\|\cdot\|_{(q)}) \ \leq \ \begin{cases} Cq^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=M_1}^{M_2} d_k\right)^{\frac{1}{2}} \ = \ Cq^{\frac{1}{2}}, & 2 \leq q < \infty, \\ C(\log_2 n)^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=M_1}^{M_2} d_k\right)^{\frac{1}{2}} \ = C(\log_2 n)^{\frac{1}{2}}\ , & q = \infty. \end{cases}$$

Consequentemente

$$\|x\|_{(2)} \ \leq \ C\|x\|^0_{(q)} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}}, & q = \infty. \end{cases} \tag{3.27}$$

Segue então do Teorema 1.2.50, da Definição 1.1.8 e de (3.27) que

$$\begin{aligned} d_m(B_2^n; L^q \cap \mathcal{T}_{M_1,M_2}) \ &= \ d^m((B_q^n)^0; L_2 \cap \mathcal{T}_{M_1,M_2}) \\ &= \ \inf_{L^n} \sup_{x \in (B^n_{(q)})^0 \cap L^n} \|x\|_{(2)} \\ &\leq \ \sup_{x \in (B^n_{(q)})^0 \cap F_k} \|x\|_{(2)} \\ &\leq \ \sup_{x \in (B^n_{(q)})^0 \cap F_k} C\|x\|^0_{(q)} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}}, & q = \infty, \end{cases} \\ &\leq \ C\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}}, & q = \infty. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.28}$$

Seja agora $B_p^{N_k,N_{k+1}} = U_p \cap \mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}}$ e para $f \in \Lambda U_p \subseteq L^2$ seja $S_N(f)$ a N-ésima soma parcial de Fourier de f e $\phi_{N_k,N_{k+1}}(f) = S_{N_{k+1}}(f) - S_{N_k}(f)$. Observando que $S_{N_k}(f) = \sum_{j=0}^{N_k} \widetilde{Z}^{(j)} * f$, temos $\phi_{N_k,N_{k+1}}(f) = \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \widetilde{Z}^{(j)} * f$, e assim

$$\begin{aligned} \sum_{k=s}^{\infty} \phi_{N_k,N_{k+1}}(f) \ &= \ \phi_{N_s,N_{s+1}} + \phi_{N_{s+1},N_{s+2}} + \cdots \\ &= \ \sum_{j=N_s+1}^{N_{s+1}} \widetilde{Z}^{(j)} * f + \sum_{j=N_{s+1}+1}^{N_{s+2}} \widetilde{Z}^{(j)} * f + \cdots \\ &= \ f - S_{N_s}(f). \end{aligned}$$

Desta forma, como $S_{N_s}(f) \to f$ pois $f \in L^2$, segue que

$$\lim_{s\to\infty} \left\| \sum_{k=s}^{\infty} \phi_{N_k,N_{k+1}}(f) \right\|_2 \ = \ 0.$$

Logo, dada $f \in \Lambda U_p \subseteq L^2$, temos

$$f \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{N_k,N_{k+1}}(f),$$

onde a convergência da série ocorre em L^2. Mas $f = \Lambda\phi,\ \phi \in U_p$ e podemos então reescrever a equação acima na forma

$$f \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{N_k,N_{k+1}} \circ \Lambda(\phi).$$

Consequentemente

$$\Lambda U_p \;\subseteq\; \bigoplus_{k=0}^{\infty} (\phi_{N_k,N_{k+1}} \circ \Lambda) U_p. \tag{3.29}$$

Mas, para cada $\varphi \in U_p$, temos

$$\phi_{N_k,N_{k+1}}(\Lambda\varphi) \;=\; \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \lambda_j \widetilde{Z}^{(j)} * \varphi \;=\; \Lambda\left(\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \widetilde{Z}^{(j)} * \varphi\right) \;=\; \Lambda(\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi).$$

Assim $\phi_{N_k,N_{k+1}} \circ \Lambda(U_p) = \Lambda \circ \phi_{N_k,N_{k+1}}(U_p)$ e obtemos então de (3.29)

$$\Lambda U_p \;\subseteq\; \bigoplus_{k=0}^{\infty} (\Lambda \circ \phi_{N_k,N_{k+1}}) U_p. \tag{3.30}$$

Agora, dada $\varphi \in U_p$, observando que $\{|\lambda_j|\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente, temos que

$$\begin{aligned}
\left\|(\Lambda \circ \phi_{N_k,N_{k+1}})\varphi\right\|_2 &= \left\| \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \lambda_j \widetilde{Z}^{(j)} * \varphi \right\|_2 \\
&\le |\lambda_{N_k+1}| \left\| \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \widetilde{Z}^{(j)} * \varphi \right\|_2 \\
&\le |\lambda_{N_k}| \left\| \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \widetilde{Z}^{(j)} * \varphi \right\|_2 \\
&= |\lambda_{N_k}| \|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_2.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Pelo Teorema 2.2.14 (Desigualdade de Young), temos

$$\|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_2 \;=\; \left\| \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \widetilde{Z}^{(j)} * \varphi \right\|_2 \;\le\; \|\varphi\|_p \left\| \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} Z_e^{(j)} \right\|_{\frac{1}{\frac{3}{2}-\frac{1}{p}}}, \qquad 1 \le p \le 2. \tag{3.32}$$

Como pela definição de harmônico zonal e pelo Corolário 2.2.3 (a)

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} Z_e^{(j)} \right\|_2^2 &= \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \int_{S^d} Z_e^{(j)}\, \overline{Z_e^{(j)}}\, d\mu = \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \overline{Z_e^{(j)}}(e) \\
&= \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} d_k \;\le\; \theta_{N_k,N_{k+1}},
\end{aligned}$$

obtemos de (3.32) para $p=1$

$$\|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_2 \;\le\; \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_1.$$

Por outro lado, para $p=2$ temos $\varphi \in U_2 \subset L^2$, ou seja $\varphi = \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{Z}^{(j)} * \phi$, e assim

$$\|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_2 \;=\; \left\| \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \widetilde{Z}^{(j)} * \varphi \right\|_2 \;\le\; \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{Z}^{(j)} * \varphi \right\|_2 \;=\; \|\varphi\|_2.$$

Consequentemente, obtemos o seguinte sistema de desigualdades

$$\begin{cases} \|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_2 \;\le\; \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_1, \\ \|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_2 \le \|\varphi\|_2. \end{cases}$$

Aplicando o Lema 3.1.13 (Teorema de Riesz-Thorin) a tal sistema de desigualdades , vem que

$$\|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_2 \;\le\; \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \|\varphi\|_p \;\le\; \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, \qquad 1 \le p \le 2.$$

Assim de (3.31) segue que

$$\left\| \frac{(\Lambda \circ \phi_{N_k,N_{k+1}})\varphi}{|\lambda_{N_k}|\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}} \right\|_2 \;\le\; 1 \;\Rightarrow\; (\Lambda \circ \phi_{N_k,N_{k+1}})\varphi \in |\lambda_{N_k}|\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} B_2^{N_k,N_{k+1}},$$

ou seja, $(\Lambda \circ \phi_{N_k,N_{k+1}})U_p \subseteq |\lambda_{N_k}|\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} B_2^{N_k,N_{k+1}}$, e obtemos assim de (3.30)

$$\Lambda U_p \;\subseteq\; \bigoplus_{k=0}^{\infty} |\lambda_{N_k}|\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} B_2^{N_k,N_{k+1}}. \tag{3.33}$$

Agora, por (3.9), observando que $2 \le q \le \infty$ e $\theta_{N_k,N_{k+1}} = \sum_{s=N_k}^{N_{k+1}} \dim\, \mathcal{H}_s$, temos para $\varphi \in B_2^{N_k,N_{k+1}}$

$$\|\varphi\|_q \;=\; \|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_q \;\le\; \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_2 \;=\; \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \|\varphi\|_2 \;\le\; \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}},$$

donde $\varphi \in \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} B_q^{N_k,N_{k+1}}$ e portanto $B_2^{N_k,N_{k+1}} \subseteq \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} B_q^{N_k,N_{k+1}}$. Logo por (3.33), segue que

$$
\begin{aligned}
\Lambda U_p &\subseteq \bigoplus_{k=0}^{\infty} \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} |\lambda_{N_k}| B_2^{N_k,N_{k+1}} \\
&= \bigoplus_{k=0}^{M} \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} |\lambda_{N_k}| B_2^{N_k,N_{k+1}} + \bigoplus_{k=M+1}^{\infty} \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} |\lambda_{N_k}| B_2^{N_k,N_{k+1}} \\
&\subseteq \bigoplus_{k=0}^{M} \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} |\lambda_{N_k}| B_2^{N_k,N_{k+1}} + \bigoplus_{k=M+1}^{\infty} |\lambda_{N_k}| \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \left(\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} B_q^{N_k,N_{k+1}} \right) \\
&= \bigoplus_{k=0}^{M} \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} |\lambda_{N_k}| B_2^{N_k,N_{k+1}} + \bigoplus_{k=M+1}^{\infty} |\lambda_{N_k}| \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} B_q^{N_k,N_{k+1}}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, do Teorema 1.2.1 e (3.28), obtemos

$$
\begin{aligned}
d_\beta(\Lambda U_p; L^q) &\leq \sum_{k=0}^{M} |\lambda_{N_k}| \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} d_{m_k}(B_2^{N_k,N_{k+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}}) \\
&+ \sum_{k=M+1}^{\infty} |\lambda_{N_k}| \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} d_0(B_q^{N_k,N_{k+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}}) \\
&\leq C \sum_{k=0}^{M} |\lambda_{N_k}| \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \left(\frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}}{m_k} \right)^{\frac{1}{2}} \begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2 \leq q \leq \infty, \\ (\log_2\ \theta_{N_k,N_{k+1}})^{\frac{1}{2}}, & q = \infty, \end{cases} \\
&+ C \sum_{k=M+1}^{\infty} |\lambda_{N_k}| \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \\
&= C \left(\sum_{k=0}^{M} |\lambda_{N_k}| \varrho_{m_k} + \sum_{k=M+1}^{\infty} |\lambda_{N_k}| \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \right).
\end{aligned}
$$

■

Observação 3.3.2. Vamos agora melhorar a estimativa obtida no teorema anterior, especificando as sequências N_k e m_k. Definimos $N_1 = N$ e

$$N_{k+1} \;=\; \min\{M \in \mathbb{N} : \nu|\lambda_M| \leq |\lambda_{N_k}|\},$$

onde $\nu > 1$ é um número fixo. Usaremos $\nu = 2$ pois tal escolha será suficiente para nossas aplicações. Para $\epsilon > 0$, colocamos

$$M \;=\; \left[\frac{\log_2 \theta_{N_1,N_2}}{\epsilon} \right]$$

$$m_k \;=\; [2^{-\epsilon k}\theta_{N_1,N_2}]+1, \quad k=1,\cdots,M.$$

e $m_0=\theta_{N_0,N_1}=\theta_{0,N}$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{M} m_k &= \sum_{k=1}^{M}[2^{-\epsilon k}\theta_{N_1,N_2}]+1 \;=\; M+\theta_{N_1,N_2}\sum_{k=1}^{M}[2^{-\epsilon k}] \\
&\leq M+\theta_{N_1,N_2}\sum_{k=0}^{\infty}(2^{-\epsilon})^k \;\leq\; \frac{1}{\epsilon}\log_2\theta_{N_1,N_2}+\theta_{N_1,N_2}\frac{1}{1-2^{-\epsilon}} \\
&\leq \left(\frac{1}{\epsilon}+\frac{1}{1-2^{-\epsilon}}\right)\theta_{N_1,N_2} \;=\; C_\epsilon\theta_{N_1,N_2} \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

onde $C_\epsilon>0$ depende somente de ϵ. Aplicando o teorema anterior para

$$\beta \;=\; m_0+\sum_{k=1}^{M}m_k \;=\; \sum_{s=0}^{N}\dim\mathcal{H}_s+\sum_{k=1}^{M}m_k,$$

e denotando $d_\beta=d_\beta(\Lambda:L^p\to L^q)$, temos

$$\begin{aligned}
d_\beta &\leq C\sum_{k=1}^{M}|\lambda_{N_{k+1}}|\frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}}}{(m_k)^{\frac{1}{2}}}\begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2\leq q<\infty, \\ (\log_2\theta_{N_k,N_{k+1}})^{\frac{1}{2}}, & q=\infty,\end{cases} \\
&+ C\sum_{k=M+1}^{\infty}|\lambda_{N_{k+1}}|\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Como $N_{k+1}=\min\{M\in\mathbb{N}:2|\lambda_M|\leq|\lambda_{N_k}|\}$, segue que $2|\lambda_{N_{k+1}}|\leq|\lambda_{N_k}|$ e portanto $|\lambda_{N_{k+1}}|\leq 2^{-k}|\lambda_N|$. Assim

$$\begin{aligned}
d_\beta &\leq C|\lambda_N|\sum_{k=1}^{M}2^{-k}\frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}}}{m_k^{\frac{1}{2}}}\begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2\leq q\leq\infty, \\ (\log_2\theta_{N_k,N_{k+1}})^{\frac{1}{2}}, & q=\infty,\end{cases} \\
&+ C|\lambda_N|\sum_{k=M+1}^{\infty}2^{-k}\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \\
&\leq C|\lambda_N|\sum_{k=1}^{M}2^{-k(1-\epsilon)}\frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}}}{\theta_{N_1,N_2}^{\frac{1}{2}}}\begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2\leq q\leq\infty, \\ (\log_2\theta_{N_k,N_{k+1}})^{\frac{1}{2}}, & q=\infty,\end{cases} \\
&+ C|\lambda_N|\sum_{k=M+1}^{\infty}2^{-k}\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Definição 3.3.3. Sejam N_k, M e $\theta_{N_k,N_{k+1}}$ como na observação anterior. Dizemos que $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}\in K_{\epsilon,p},\ \epsilon>0,\ 1\leq p\leq 2$, se $|\lambda_{k+1}|<|\lambda_k|$, $N_{k+1}>N_k,\ \forall\ k\in\mathbb{N}$, $\lim_{k\to\infty}\lambda_k=0$ e se para todo $N\in\mathbb{N}$ tivermos

$$\sum_{k=1}^{M}2^{-k(1-\epsilon)}\frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}}}{\theta_{N_1,N_2}^{\frac{1}{2}}} \;\leq\; C_{\epsilon,p}\theta_{N_1,N_2}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Uma consequência imediata de tal definição e da observação anterior é o seguinte corolário

Corolário 3.3.4. *Seja $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$ e $\Lambda \in K_{\epsilon,p}$, para $\epsilon > 0$ fixo. Então*

$$\begin{aligned} d_\beta(\Lambda U_p, L^q) &\leq C_{\epsilon,p}|\lambda_N|\theta_{N_1,N_2}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2 \leq q < \infty, \\ \sup_{1\leq k\leq M}(\log_2 \theta_{N_k,N_{k+1}})^{\frac{1}{2}}, & q = \infty, \end{cases} \\ &+ C_{\epsilon,p}|\lambda_N| \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k}\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 4

APLICAÇÕES

O operador laplaciano Δ_s sobre a esfera S^d, conhecido como laplaciano esférico ou operador de Laplace Beltrami, é o operador multiplicador associado à sequência $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}},\ \mu_k = -k(d+k-1)$, que tem $\mathcal{H}_k$ como o espaço vetorial dos autovetores associados ao autovalor μ_k.

Seja $\Lambda^\gamma = \{\mu_k^\gamma\}_{k\in\mathbb{N}},\ \mu_k = (k(d+k-1))^{\frac{\gamma}{2}},\ \gamma \in \mathbb{R}$. O espaço de Sobolev W_p^γ, para $\gamma > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$, é definido como sendo o espaço vetorial

$$W_p^\gamma \ = \ \{f \in L^p(S^d) : \Lambda^\gamma f \in L^p(S^d)\}$$

e está munido da norma $\|f\|_{W_p^\gamma} = \|\Lambda^\gamma f\|_p$. A bola unitária fechada de W_p^γ é o conjunto $\Lambda^{-\gamma}U_p$, que é um conjunto de funções finitamente diferenciáveis sobre S^d. Estimativas para as n-larguras de Kolmogorov $d_n(\Lambda^{-\gamma}U_p; L^q)$ foram estudadas, por exemplo, em [2].

Neste capítulo, aplicaremos os resultados obtidos no capítulo anterior para a obtenção de estimativas de n-larguras de Kolmogorov para os conjuntos de funções finitamente e infinitamente diferenciáveis sobre a esfera S^d associados às sequências de multiplicadores $\Lambda^{(1)} = \{k^{-\gamma}\}_{k\in\mathbb{N}},\ \gamma > 0$ e $\Lambda^{(2)} = \{e^{-\gamma k^r}\}_{k\in\mathbb{N}},\ \gamma > 0,\ 0 < r < 1$, respectivamente. A referência usada para os resultados aqui estudados é [1] e várias das estimativas obtidas são assintoticamente exatas em termos de ordem. As constantes que determinam a ordem dessas estimativas foram determinadas explicitamente.

4.1 n-Larguras de Conjuntos de Funções Finitamente Diferenciáveis

Nesta seção estudaremos n-larguras de conjuntos de funções suaves (conjunto de funções finitamente diferenciáveis em S^d) associados às sequências de multiplicadores $\Lambda^{(1)} = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}},\ \lambda_k = k^{-\gamma},\ \gamma \in \mathbb{R}, \gamma > 0$.

Teorema 4.1.1. *Para $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$ e $\gamma/d > 1/p$, temos*

$$d_n(\Lambda^{(1)}U_p; L^q) \ll n^{-\gamma/d+(1/p-1/2)} \begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2 \leq q < \infty \\ (\log_2\ n)^{\frac{1}{2}}, & q = \infty \end{cases}$$

Demonstração. Na demonstração desse resultado faremos uso do Corolário 3.3.4 e para tanto precisamos garantir que $\Lambda^{(1)}$ seja um operador limitado de L^p em L^q, a Proposição 2.3.7 nos garante tal limitação.

Fixemos $N_1 = N$, temos que $N_{k+1} = \min\{l \in \mathbb{N} : 2|\lambda_l| \leq |\lambda_{N_k}|\}$, assim

$$2|\lambda_{N_{k+1}}| = |\lambda_{N_k}| \ \Leftrightarrow\ 2(N_{k+1})^{-\gamma} = N_k^{-\gamma} \ \Leftrightarrow\ 2^{\frac{1}{\gamma}}N_k = N_{k+1}.$$

Como $N_1 = N$, segue que $N_2 = 2^{\frac{1}{\gamma}}N$, consequentemente $N_3 = 2^{\frac{2}{\gamma}}N$ e assim sucessivamente obtemos $N_{k+1} = 2^{\frac{k}{\gamma}}N$. Logo, como do Lema 2.2.21 temos $\dim\mathcal{H}_s \asymp s^{d-1}$, segue que

$$\theta_{N_k,N_{k+1}} \ = \sum_{s=N_k}^{N_{k+1}} \dim\mathcal{H}_s \ \asymp \sum_{s=N_k}^{N_{k+1}} s^{d-1} \ \asymp\ N_{k+1}^d \ = \ (2^{\frac{k}{\gamma}}N)^d. \tag{4.1}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \sigma \quad &= \quad |\lambda_N| \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k}\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/q} \\ &\ll \quad N^{-\gamma} \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k}(2^{\frac{k}{\gamma}}N)^{d(1/p-1/q)} \\ &= \quad N^{-\gamma+d(1/p-1/q)} \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k(1-(d/\gamma)(1/p-1/q))}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Mas $M = [\log_2\theta_{N_1,N_2}/\epsilon]$ e como de (4.1)

$$\log_2\theta_{N_1,N_2} \ \asymp\ \log_2(2^{\frac{1}{\gamma}}N)^d \ = \ d\log_2(2^{\frac{1}{\gamma}}N) \ = \ d(\log_2 2^{\frac{1}{\gamma}} + \log_2 N) \ \asymp\ \log_2 N,$$

segue que

$$M \ = \ \left[\frac{\log_2\theta_{N_1,N_2}}{\epsilon}\right] \ \asymp\ C\epsilon^{-1}\log_2 N \tag{4.3}$$

e consequentemente, obtemos de (4.2)

$$\sigma \ll N^{-\gamma+d(1/p-1/q)} \sum_{k=[C\epsilon^{-1}\log_2 N]}^{\infty} 2^{-k(1-(d/\gamma)(1/p-1/q))}.$$

Como para $|b| < 1$ vale $\sum_{k=M}^{\infty} b^k = b^M \sum_{k=0}^{\infty} b^k = b^M \cdot 1/1-b$, segue que para $\gamma/d > 1/p - 1/q$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=[C\epsilon^{-1}\log_2 N]}^{\infty} &\asymp \frac{2^{-(1-(d/\gamma)(1/p-1/q))C\epsilon^{-1}\log_2 N}}{1-2^{-(1-(d/\gamma)(1/p-1/q))}} \\
&= (2^{\log_2 N})^{-C(1-(d/\gamma)(1/p-1/q))/\epsilon} \underbrace{\frac{1}{1-2^{-(1-(d/\gamma)(1/p-1/q))}}}_{C_1} \\
&= C_1 N^{-C(1-(d/\gamma)(1/p-1/q))/\epsilon}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, para $\gamma/d > 1/p - 1/q$, temos

$$\sigma \ll N^{-\gamma+d(1/p-1/q)-C(1-(d/\gamma)(1/p-1/q))/\epsilon}.$$

Tomando $0 < \epsilon < C\frac{1-d\gamma^{-1}(p^{-1}-q^{-1})}{d(p^{-1}-q^{-1})}$, teremos $\sigma \ll N^{-\gamma}$ e como do Lema 2.2.21, $n \asymp N^d$, segue que

$$\sigma \ll n^{-\frac{\gamma}{d}}. \tag{4.4}$$

Provemos agora que $\Lambda = \{k^{-\gamma}\}_{k\in\mathbb{N}} \in K_{\epsilon,p}$ para algum $\epsilon > 0$. De fato, de (4.1) e (4.3) temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{M} 2^{-k(1-\epsilon)} \frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p}}{\theta_{N_1,N_2}^{1/2}} &\leq C_2 \sum_{k=1}^{[C\epsilon^{-1}\log_2 N]} 2^{-k(1-\epsilon)} \frac{(2^{k/\gamma}N)^{d/p}}{(2^{1/\gamma}N)^{d/2}} \\
&= C_2 \sum_{k=1}^{[C\epsilon^{-1}\log_2 N]} 2^{-k(1-\epsilon)} 2^{((k/\gamma)(d/p)-(1/\gamma)(d/2))} N^{d(1/p-1/2)} \\
&= C_2 2^{-d/2\gamma} N^{d(1/p-1/2)} \sum_{k=1}^{[C\epsilon^{-1}\log_2 N]} 2^{-k(1-\epsilon-d/\gamma p)}.
\end{aligned}$$

Tomando $\gamma/d > 1/p$, teremos $t = -(1-\epsilon-d/\gamma p) < 0$, se $0 < \epsilon < 1-d/\gamma p$, consequentemente

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{[C\epsilon^{-1}\log_2 N]} 2^{-k(1-\epsilon-d/\gamma p)} &= \sum_{k=1}^{[C\epsilon^{-1}\log_2 N]} (2^t)^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} (2^t)^k \\
&= \frac{1}{1-2^t} = \frac{1}{1-2^{-(1-\epsilon-d/\gamma p)}}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\sum_{k=1}^{M} 2^{-k(1-\epsilon)} \frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p}}{\theta_{N_1,N_2}^{1/2}} \leq \left(C_2 2^{-d/2\gamma} \left(\frac{1}{1-2^{-(1-\epsilon-d/\gamma p)}} \right) \right) N^{d(1/p-1/2)} = C_{\epsilon,p} N^{d(1/p-1/2)}.$$

De (4.1) temos que existe uma constante universal C_3 satisfazendo $C_3 2^{d/\gamma} N^d \leq \theta_{N_1,N_2}$ e como $1/p \geq 1/2$ já que $1 \leq p \leq 2$, segue que $N^{d(1/p-1/2)} \leq (C_3 2^{d/\gamma})^{-(1/p-1/2)} \theta_{N_1,N_2}^{1/p-1/2}$, donde

$$\sum_{k=1}^{M} 2^{-k(1-\epsilon)} \frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p}}{\theta_{N_1,N_2}^{1/2}} \;\leq\; C'_{\epsilon,p} \theta_{N_1,N_2}^{1/p-1/2}.$$

Portanto $\Lambda^{(1)} = \{k^{-\gamma}\}_{k\in\mathbb{N}} \in K_{\epsilon,p}$, segue assim do Corolário 3.3.4 que

$$\begin{aligned} d_\beta(\Lambda^{(1)} U_p, L^q) \quad &\ll \quad |\lambda_N| \theta_{N_1,N_2}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2 \leq q < \infty, \\ \sup_{1\leq k\leq M} (\log_2 \theta_{N_k,N_{k+1}})^{\frac{1}{2}}, & q = \infty, \end{cases} \\ &+ \quad |\lambda_N| \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k} \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

De (4.4) obtemos

$$d_\beta(\Lambda^{(1)} U_p, L^q) \quad \ll \quad |\lambda_N| \theta_{N_1,N_2}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2 \leq q < \infty, \\ \sup_{1\leq k\leq M} (\log_2 \theta_{N_k,N_{k+1}})^{\frac{1}{2}}, & q = \infty, \end{cases} + n^{-\gamma/d}.$$

Para $1 \leq k \leq M$ temos de (4.1), da definição de M, e do fato que $n \asymp N^d$

$$\begin{aligned} \theta_{N_k,N_{k+1}} \quad &\asymp \quad (2^{k/\gamma} N)^d \;\leq\; (2^{M/\gamma} N)^d \;\leq\; 2^{\frac{dC}{\gamma\epsilon} \log_2 N} \cdot N^d \\ &= \quad N^{d+dC/\gamma\epsilon} \;=\; (N^d)^{1+C/\gamma\epsilon} \;\ll\; n^{1+C/\gamma\epsilon}. \end{aligned}$$

Logo

$$\log_2(\theta_{N_k,N_{k+1}}) \;\ll\; \log_2(n^{1+C/\gamma\epsilon}) \;=\; (1 + C/\gamma\epsilon) \log_2 n$$

e assim segue que $\sup_{1\leq k\leq M} (\log_2 \theta_{N_k,N_{k+1}})^{\frac{1}{2}} \ll (\log_2 n)^{\frac{1}{2}}$. Além disso, por (4.1) obtemos $\theta_{N_1,N_2}^{1/p-1/2} \;\leq\; C_4 N^{d(1/p-1/2)}$. Consequentemente

$$d_\beta(\Lambda^{(1)} U_p, L^q) \;\ll\; N^{-\gamma+d(1/p-1/2)} \begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}}, & q = \infty. \end{cases}$$

Como do Lema 2.2.21 $n \asymp N^d$, segue que $N^{-\gamma+d(1/p-1/2)} \;\leq\; C_5 n^{-\gamma/d+(1/p-1/2)}$ e assim

$$d_\beta(\Lambda^{(1)} U_p, L^q) \;\ll\; n^{-\gamma/d+(1/p-1/2)} \begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}}, & q = \infty. \end{cases} \tag{4.5}$$

Observemos agora que

$$\beta \;=\; \sum_{s=0}^{N} \dim \mathcal{H}_s + \sum_{j=1}^{M} m_j \;=\; n + \sum_{j=1}^{M} 2^{-\epsilon j} \theta_{N_1,N_2}$$

De (4.1), (4.3) e do fato de $n \asymp N^d$, obtemos

$$\beta \asymp N^d + 2^{d/\gamma} N^d \sum_{j=1}^{[C\epsilon^{-1}\log_2 N]} (2^{-\epsilon})^k \asymp N^d \asymp n,$$

e finalmente de (4.5) segue que

$$d_n(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \ll n^{-\gamma/d+(1/p-1/2)} \begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2 \le q < \infty, \\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}}, & q = \infty. \end{cases}$$

∎

Teorema 4.1.2. *Temos que*

$$d_n(\Lambda^{(1)}U_p; L^q) \gg n^{-\frac{\gamma}{d}} \begin{cases} 1, & 1 < q \le p \le 2, \\ (\log_2 n)^{-\frac{1}{2}}, & 1 = q \le p \le 2, \\ 1, & 2 \le p, q < \infty, \\ (\log_2 n)^{-\frac{1}{2}}, & 2 \le q < p = \infty. \end{cases}$$

Demonstração. Do Lema 2.2.21, temos $d_k \asymp k^{d-1}$ e $n \asymp N^d$, assim

$$\left(\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j|^{-2} d_j\right)^{-\frac{1}{2}} \asymp \left(\sum_{j=1}^{N} j^{2\gamma+d-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \gg (N^{2\gamma+d})^{-\frac{1}{2}} \asymp n^{-\frac{\gamma}{d}-\frac{1}{2}}.$$

Se $1 < q \le p \le 2$, temos pelo Teorema 3.2.2 para $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} d_{[(n-2)/2]}(\Lambda^{(1)}U_p; L^q) &\gg (1/2)^{\frac{1}{2}}(1-1/q)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^{-2} d_k\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\gg n^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{\gamma}{d}-\frac{1}{2}} = n^{-\frac{\gamma}{d}}. \end{aligned}$$

Se $2 \le p, q \le \infty$, temos pela Observação 3.2.3 para $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} d_{[(n-2)/2]}(\Lambda^{(1)}U_p; L^q) &\gg (1/2)^{\frac{1}{2}} p^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^{-2} d_k\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\gg n^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{\gamma}{d}-\frac{1}{2}} = n^{-\frac{\gamma}{d}}. \end{aligned}$$

Logo, tomando $m = n/3 \le [(n-2)/2]$, obtemos do Teorema 1.2.1 (d)

$$d_m(\Lambda^{(1)}U_p; L^q) \gg m^{-\frac{\gamma}{d}}, \quad 1 < q \le p \le 2; \quad 2 \le p, q \le \infty.$$

Os casos $1 = q \le p \le 2$ e $2 \le q < p = \infty$ seguem da mesma forma. ∎

4.2 n-Larguras de Conjuntos de Funções Infinitamente Diferenciáveis

Nesta seção estudaremos n-larguras de conjuntos de funções suaves (funções infinitamente diferenciáveis em S^d) associados às sequências de multiplicadores $\Lambda^{(2)} = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}},\ \lambda_k = e^{-\gamma k^r},\ \gamma > 0,\ 0 < r < 1$.

Teorema 4.2.1. *Para $1 \le q \le p \le 2$, temos que*

$$d_n(\Lambda^{(2)}U_p; L^q) \ \gg\ e^{-Rn^{r/d}} \begin{cases} 1, & q > 1, \\ (\log_2 n)^{-1/2}, & q=1, \end{cases}$$

e para $2 \le q, p \le \infty$

$$d_n(\Lambda^{(2)}U_p; L^q) \ \gg\ e^{-Rn^{r/d}} \begin{cases} 1, & p < \infty, \\ (\log_2 n)^{-1/2}, & p = \infty, \end{cases}$$

onde

$$R = R_{\gamma,d,r} \ = \ \left(\frac{d\,!}{2}\right)^{\frac{r}{d}} \gamma.$$

Demonstração. Para $\theta > 0$ e $\eta > 0$, temos que

$$\sum_{k=1}^{N} e^{\theta k^r} k^\eta \ \le\ N^\eta \sum_{k=1}^{N} e^{\theta k^r} \ \le\ (r\theta)^{-1} N^\eta e^{\theta N^r} N^{1-r} \ =\ C N^\eta e^{\theta N^r} N^{1-r}. \tag{4.6}$$

Do Lema 2.2.21, segue que existe uma constante C_1 tal que

$$FN^d \ \le\ n \ \le\ FN^d + C_1 N^{d-1},$$

onde $F = \frac{2}{d\,!}$. Assim, obtemos

$$N^d \le n/F \ \Rightarrow\ N^r \le n^{\frac{r}{d}} F^{-\frac{r}{d}},$$

para todo $r \ge 0$ e para todo $0 \le r \le 1$ temos

$$n^{\frac{r}{d}} \ \le\ F^{\frac{r}{d}} N^r (1 + C_1/FN)^{\frac{r}{d}} \ \le\ F^{\frac{r}{d}} N^r \left(1 + \frac{r}{d}\frac{C_1}{N}\right) \ \le\ F^{\frac{r}{d}} N^r + C_2.$$

Como $R = F^{-\frac{r}{d}}\gamma$, segue que

$$-\, Rn^{\frac{r}{d}} \ \le\ -\gamma N^r \ \le\ -Rn^{\frac{r}{d}} + C_3, \tag{4.7}$$

onde $C_3 = \gamma C_2 F^{-\frac{r}{d}}$, lembrando que a primeira igualdade vale para $\forall\, r \geq 0$ e a segunda para $0 \leq r \leq 1$. Aplicando o Teorema 3.2.2 para $\lambda_k = e^{-\gamma k^r}$, $0 < r < 1$ e $\lambda = (n - n^{1-\frac{r}{d}})/n = 1 - n^{-\frac{r}{d}}$, observando pelo Lema 2.2.21 que $d_k \asymp k^{d-1}$ e usando (4.6), obtemos

$$
\begin{aligned}
d_{[\lambda n-1]}(\Lambda^{(2)}U_p; L^q) &\geq C(1-\lambda)^{\frac{1}{2}} \begin{cases} (1-1/q)^{\frac{1}{2}}\; n^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^N |\lambda_k|^{-2} d_k\right)^{-\frac{1}{2}}, & q > 1, \\ (n/\log_2 n)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^N |\lambda_k|^{-2} d_k\right)^{-\frac{1}{2}}, & \text{q=1}, \end{cases} \\
&\geq Cn^{-\frac{r}{2d}} \begin{cases} n^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^N e^{2\gamma k^r} k^{d-1}\right)^{-\frac{1}{2}}, & q > 1, \\ (n/\log_2 n)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^N e^{2\gamma k^r} k^{d-1}\right)^{-\frac{1}{2}}, & q = 1, \end{cases} \\
&\geq Cn^{-\frac{r}{2d}} \begin{cases} n^{\frac{1}{2}} \left(e^{2\gamma N^r} N^{(d-1)} N^{(1-r)}\right)^{-\frac{1}{2}}, & q > 1, \\ (n/\log_2 n)^{\frac{1}{2}} \left(e^{2\gamma N^r} N^{(d-1)} N^{(1-r)}\right)^{-\frac{1}{2}}, & q = 1, \end{cases} \\
&= Ce^{-\gamma N^r} \begin{cases} n^{\frac{d-r}{2d}} N^{\frac{r-d}{2}}, & q > 1, \\ (\log_2 n)^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{d-r}{2d}} N^{\frac{r-d}{2}}, & q = 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Do Lema 2.2.21, temos que $n \asymp N^d$, assim existem constantes absolutas C_4, C_5 satisfazendo

$$
C_4 N^d \;\leq\; n \;\leq\; C_5 N^d \;\;\Rightarrow\;\; (C_5)^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{r-d}{2}} \;\leq\; n^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{r}{2}} \;\leq\; (C_4)^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{r-d}{2}}.
$$

Assim, denotando $C_6 = (C_4)^{\frac{1}{2}}$ teremos $N^{\frac{r-d}{2}} \geq C_6 n^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{r}{2}}$, donde

$$
d_{[\lambda n-1]}(\Lambda^{(2)}U_p; L^q) \;\geq\; CC_6 e^{-\gamma N^r} \begin{cases} n^{-\frac{r}{2d}} N^{\frac{r}{2}}, & q > 1, \\ (\log_2 n)^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{r}{2d}} N^{\frac{r}{2}}, & q = 1. \end{cases}
$$

Além disso, de (4.7) temos que $Rn^{\frac{r}{d}} - C_3 \leq \gamma N^r$, e portanto $N^{\frac{r}{2}} \geq C_7 n^{\frac{r}{2d}}$, onde $C_7 = (R/2\gamma)^{\frac{1}{2}}$. Logo para $1 \leq q \leq p \leq 2$

$$
\begin{aligned}
d_{[\lambda n-1]}(\Lambda^{(2)}U_p; L^q) &\geq CC_6C_7 e^{-\gamma N^r} \begin{cases} 1, & q > 1, \\ (\log_2 n)^{-\frac{1}{2}}, & q = 1, \end{cases} \\
&= C' e^{-\gamma N^r} \begin{cases} 1, & q > 1, \\ (\log_2 n)^{-\frac{1}{2}}, & q = 1. \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

Agora, fixado $N \in \mathbb{N}$, podemos encontrar uma constante absoltuta $C_8 > 0$ tal que

$$
\delta_n \;=\; \sum_{l=N-[C_8 N^{1-r}]+1}^{N} \dim \mathcal{H}_l \;\geq\; n^{1-r/d} + 1,
$$

onde $n = \dim(\bigoplus_{l=0}^{N} \mathcal{H}_l)$. Isto é possível já que $\dim \mathcal{H}_l \asymp l^{d-1}$ e portanto

$$\begin{aligned} \delta_n &= \sum_{l=N-[C_8 N^{1-r}]+1}^{N} \dim \mathcal{H}_l \\ &\geq C_9 \sum_{l=N-[C_8 N^{1-r}]+1}^{N} l^{d-1} \\ &\geq C_9 (C_8 N^{1-r})(N - C_8 N^{1-r})^{d-1} \\ &= C_9 C_8 N^{1-r} N^{d-1} (1 - C_8 N^{-r})^{d-1} \\ &= C_9 C_8 N^{1-r} N^{d-1} \left(1 + \sum_{k=1}^{d-1} \frac{(d-1)(d-2)\cdots(d-k)}{k!} (-C_8 N^{-r})^k \right). \end{aligned}$$

Assim, para N suficientemente grande teremos

$$\delta_n \geq (C_9/2) C_8 N^{1-r} N^{d-1}. \tag{4.9}$$

Por um lado, obtemos de (4.7)

$$R n^{\frac{r}{d}} \geq \gamma N^r \Rightarrow N^{1-r} \geq (\gamma R^{-1}) n^{-\frac{r}{d}} N = C_1' n^{-\frac{r}{d}} N.$$

Por outro lado, como $n \asymp N^d$, temos que $N^d \geq C_2' n$ e logo

$$N^{1-r} N^{d-1} \geq C_1' n^{-\frac{r}{d}} N^d \geq C_1' C_2' n^{1-\frac{r}{d}} = C_{10} n^{1-\frac{r}{d}}.$$

Desta forma de (4.9) vem que $\delta_n \geq C_{10}(C_9/2) C_8 n^{1-\frac{r}{d}}$, e portanto é suficiente tomarmos $C_8 > 2(C_9 C_{10})^{-1}$ e teremos $\delta_n \geq n^{1-\frac{r}{d}} + 1$. Tomando então $m = \sum_{l=0}^{N-[C_8 N^{1-r}]} \dim \mathcal{H}_l$, teremos $n = m + \delta_n$ e assim

$$\begin{aligned} \lambda n - 1 &= (1 - n^{-\frac{r}{d}}) n - 1 = n - n^{1-\frac{r}{d}} - 1 \\ &= n - (n^{1-\frac{r}{d}} + 1) = m + \delta_n - (n^{1-\frac{r}{d}} + 1) \\ &\geq m, \end{aligned}$$

e como $m \in \mathbb{N}$, segue que $[\lambda n - 1] \geq m$. Portanto obtemos do Teorema 1.2.1 (d) e de (4.8)

$$d_m(\Lambda^{(2)} U_p; L^q) \geq C' e^{-\gamma N^r} \begin{cases} 1, & q > 1, \\ (\log_2 n)^{-\frac{1}{2}}, & q = 1. \end{cases} \tag{4.10}$$

Agora, como $|C_8 N^{-r}| < 1$ já que os N's de nosso interesse são tomados suficientemente grandes, teremos

$$\begin{aligned} (1 - C_8 N^{-r})^r &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!} (-C_8 N^{-r})^k \\ &= 1 - r C_8 N^{-r} - C_{11} N^{-2r} S^N, \end{aligned}$$

onde C_8 e C_{11} são constantes positivas e $0 \leq S^N \leq 1$. Então

$$\begin{aligned} -\gamma(N - C_8 N^{1-r})^r &= -\gamma N^r (1 - C_8 N^{-r})^r \\ &= -\gamma N^r + \gamma r C_8 + \gamma C_{11} N^{-r} S^N \\ &\leq -\gamma N^r + \gamma r C_8 + \gamma C_{11} N^{-r}. \end{aligned}$$

Denotando $M = N - [C_8 N^{-r}]$, obtemos de (4.7) e da desigualdade acima

$$e^{-Rm^{\frac{r}{d}}} \leq e^{-\gamma M^r} = e^{-\gamma(N - C_8 N^{1-r})^r} \leq e^{-\gamma N^r} e^{\gamma r C_8 + \gamma C_{11} N^{-r}} \leq C_{12} e^{-\gamma N^r}.$$

Segue assim de (4.10) que

$$d_m(\Lambda^{(2)} U_p; L^q) \gg e^{-Rm^{\frac{r}{d}}} \begin{cases} 1, & q > 1, \\ (\log_2 n)^{-\frac{1}{2}}, & q = 1. \end{cases} \tag{4.11}$$

Com contas análogas às que fizemos para obter $\delta_n \geq C_{10}(C_9/2) C_8 n^{1-\frac{r}{d}}$ é possível obtermos $\delta_n \leq \overline{C} n^{1-\frac{r}{d}}$. Assim

$$n = m + \delta_n \leq m + \overline{C} n^{1-\frac{r}{d}} \Rightarrow m \geq n(1 - \overline{C} n^{-\frac{r}{d}}).$$

Logo

$$\log_2 m \geq \log_2 n + \log_2(1 - \overline{C} n^{-\frac{r}{d}}),$$

e como $n^{-\frac{r}{d}} \downarrow 0$, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{C} n^{-\frac{r}{d}} \leq 1/2$, donde $\log_2(1 - \overline{C} n^{-\frac{r}{d}}) \geq \log_2 \frac{1}{2} = -1$ e assim $\log_2 m \geq \log_2 n - 1 \geq (1/2) \log_2 n$. Consequentemente

$$\log_2 n \leq 2 \log_2 m \Rightarrow (\log_2 n)^{-\frac{1}{2}} \geq 2^{-\frac{1}{2}} (\log_2 m)^{-\frac{1}{2}}.$$

Finalmente, obtemos de (4.11)

$$d_m(\Lambda^{(2)} U_p; L^q) \gg e^{-Rm^{\frac{r}{d}}} \begin{cases} 1, & q > 1, \\ (\log_2 m)^{-\frac{1}{2}}, & q = 1, \end{cases}$$

para $1 \leq q \leq p \leq 2$ e $0 < r < 1$.

Analogamente, para $2 \leq q, p \leq \infty$, $0 < r < 1$, obtemos da Observação 3.2.3 e (4.7) que

$$d_m(\Lambda U_p; L^q) \gg e^{-Rm^{\frac{r}{d}}} \begin{cases} 1, & p < \infty, \\ (\log_2 n)^{-\frac{1}{2}}, & p = \infty. \end{cases}$$

∎

Teorema 4.2.2. *Para $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$, temos que*

$$d_n(\Lambda^{(2)}U_p; L^q) \ll e^{-Rn^{\frac{r}{d}}} n^{(1-\frac{r}{d})(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2 \leq q \leq \infty, \\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}}, & q = \infty, \end{cases}$$

onde $R = R_{\gamma,d,r}$ é a constante dada no teorema anterior.

Demonstração. Nosso intuito é utilizar o Corolário 3.3.4. Para isso devemos ter $\Lambda^{(2)}$ limitado de L^p em L^q, o que nos é garantido pela Proposição 2.3.8. Temos que $\lambda_k = e^{-\gamma k^r}$, $\gamma > 0$, $0 < r < 1$, assim

$$\begin{aligned} 2|\lambda_{N_{k+1}}| = |\lambda_{N_k}| \quad &\Leftrightarrow \quad 2e^{-\gamma N_{k+1}^r} = e^{-\gamma N_k^r} \\ &\Leftrightarrow \quad \ln 2 - \gamma N_{k+1}^r = -\gamma N_k^r \\ &\Leftrightarrow \quad N_{k+1} = \left(N_k^r + \frac{\ln 2}{\gamma} \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Além disso, como $N_1 = N$, temos

$$\begin{aligned} N_2^r &= N^r + \frac{\ln 2}{\gamma} \\ N_3^r &= N_2^r + \frac{\ln 2}{\gamma} = N^r + 2\frac{\ln 2}{\gamma} \\ &\vdots \\ N_{k+1}^r &= N^r + k\frac{\ln 2}{\gamma}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

De (4.12) segue que

$$N_{k+1} = \left(N_k^r + \frac{\ln 2}{\gamma} \right)^{\frac{1}{r}} = N_k \left(1 + \frac{\ln 2}{\gamma} N_k^{-r} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Como para N_k suficientemente grande temos $|(\ln 2/\gamma)\ N_k^{-r}| < 1$, segue que

$$N_{k+1} = N_k \left(1 + \frac{\ln 2}{r\gamma} N_k^{-r} + \frac{(1-r)(\ln 2)^2}{2r^2\gamma^2} N_k^{-2r} + \frac{(1-r)(1-2r)(\ln 2)^3}{6r^3\gamma^3} N_k^{-3r} + \cdots \right),$$

e assim

$$N_{k+1} - N_k = N_k \left(\frac{\ln 2}{r\gamma} N_k^{-r} + \frac{(1-r)(\ln 2)^2}{2r^2\gamma^2} N_k^{-2r} + \frac{(1-r)(1-2r)(\ln 2)^3}{6r^3\gamma^3} N_k^{-3r} + \cdots \right),$$

onde a série binomial acima passa a ser alternada a partir de um determinado termo. Logo

$$N_{k+1} - N_k \asymp N_k^{1-r} \quad \Rightarrow \quad N_{k+1} \asymp N_k + CN_k^{1-r}.$$

Desta forma, lembrando que $d_l \asymp l^{d-1}$ e integrando a função x^{d-1}, obtemos

$$\begin{aligned}\theta_{N_k,N_{k+1}} &= \sum_{l=N_k}^{N_{k+1}} d_l \asymp \sum_{l=N_k}^{N_{k+1}} l^{d-1} \asymp N_{k+1}^d - N_k^d \\ &\asymp N_k^d \left(\frac{(N_k + CN_k^{1-r})^d}{N_k^d} - 1 \right) \\ &= N_k^d \left((1 + CN_k^{-r})^d - 1 \right).\end{aligned}$$

Como $|CN_k^{-r}| < 1$ para N_k suficientemente grande, segue que

$$\theta_{N_k,N_{k+1}} \asymp N_k^d \left(dCN_k^{-r} + \frac{d(d-1)}{2} C^2 N^{-2r} + \cdots C^d N^{-dr} \right) \asymp N_k^{d-r}. \tag{4.14}$$

Consequentemente obtemos da expressão acima e de (4.13), que para qualquer $\epsilon > 0$ e k suficientemente grande

$$\begin{aligned}\left(\frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}}{\theta_{N_1,N_2}} \right)^{\frac{r}{d-r}} &\asymp \left(\frac{N_k}{N} \right)^r = N^{-r} \left(N^r + (k-1) \frac{\ln 2}{\gamma} \right) \\ &\leq N^{-r} \left(N^r + k \frac{\ln 2}{\gamma} \right) \\ &= 1 + \frac{\ln 2}{\gamma} k \leq 2^{\epsilon k}.\end{aligned}$$

Assim

$$\frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}}{\theta_{N_1,N_2}} \leq 2^{\left(\frac{\epsilon(d-r)}{r}\right)k} = 2^{\epsilon' k},$$

e portanto para $\epsilon' > 0$ dado, existe $k_{\epsilon'} \in \mathbb{N}$, tal que

$$\frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}}{\theta_{N_1,N_2}} \leq 2^{\epsilon' k}, \qquad \forall\, k \geq k_{\epsilon'}. \tag{4.15}$$

Consequentemente

$$\sum_{k=1}^{M} 2^{-k(1-\epsilon)} \left(\frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}}{\theta_{N_1,N_2}} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sum_{k=1}^{M} 2^{-k(1-\epsilon)} 2^{\frac{\epsilon'}{p} k} = C \sum_{k=1}^{M} 2^{-k(1-\epsilon-\epsilon'/p)} \leq C_{\epsilon,p} ,$$

onde a constante $C_{\epsilon,p}$ depende de ϵ e de p, se tivermos $\epsilon + \epsilon'/p < 1$. Logo

$$\sum_{k=1}^{M} 2^{-k(1-\epsilon)} \frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}}}{\theta_{N_1,N_2}^{\frac{1}{2}}} \leq C_{\epsilon,p}\, \theta_{N_1,N_2}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} ,$$

donde $\Lambda^{(2)} = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in K_{\epsilon,p}$ e portanto pelo Corolário 3.3.4 temos que

$$\begin{aligned}d_\beta(\Lambda^{(2)} U_p, L^q) &\leq C'_{\epsilon,p}\, |\lambda_N| \theta_{N_1,N_2}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2 \leq q < \infty, \\ \sup_{1\leq k\leq M} (\log_2 \theta_{N_k,N_{k+1}})^{\frac{1}{2}}, & q = \infty, \end{cases} \\ &+ C'_{\epsilon,p} |\lambda_N| \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k} \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} .\end{aligned} \tag{4.16}$$

Além disso, de (4.14) e (4.15), obtemos

$$
\begin{aligned}
|\lambda_N|\sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k}\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} &= |\lambda_N|\theta_{N_1,N_2}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k}\left(\frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}}{\theta_{N_1,N_2}}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \\
&\leq C_1|\lambda_N|N^{(d-r)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k}2^{\epsilon'' k} \\
&= C_1|\lambda_N|N^{(d-r)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\sum_{k=M+1}^{\infty}(2^{-(1-\epsilon'')})^k \\
&= C_1|\lambda_N|N^{(d-r)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(2^{-(1-\epsilon'')})^{M+1}\sum_{j=0}^{\infty}(2^{-(1-\epsilon'')})^j \\
&= C_1|\lambda_N|N^{(d-r)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(2^{-(1-\epsilon'')})^{M+1}\frac{1}{1-(2^{-(1-\epsilon'')})} \\
&\leq C_2|\lambda_N|N^{(d-r)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\ (2^{-(1-\epsilon'')})^{M},
\end{aligned}
$$

onde $\epsilon'' = \epsilon'(1/p-1/q)$. Como da Observação 3.3.2, temos $M = \left[\frac{\log_2\theta_{N_1,N_2}}{\epsilon}\right] \asymp \frac{\log_2\theta_{N_1,N_2}}{\epsilon}$ e de (4.14), $\theta_{N_1,N_2} \asymp N^{d-r}$, segue que

$$
\begin{aligned}
|\lambda_N|\sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k}\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} &\leq C_2|\lambda_N|N^{(d-r)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(2^{-(1-\epsilon'')})^{C_3(\log_2\theta_{N_1,N_2})/\epsilon} \\
&= C_2|\lambda_N|N^{(d-r)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(2^{\log_2\theta_{N_1,N_2}})^{-C_3(1-\epsilon'')/\epsilon} \\
&= C_2|\lambda_N|N^{(d-r)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\theta_{N_1,N_2})^{-C_3(1-\epsilon'')/\epsilon} \\
&\leq C_4|\lambda_N|N^{(d-r)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}N^{-C_3(d-r)(1-\epsilon'')/\epsilon} \\
&= C_4|\lambda_N|N^{(d-r)((1/p-1/q)-C_3(1-\epsilon'')/\epsilon)} \\
&\leq C_4|\lambda_N|,
\end{aligned}
$$

se $(1/p-1/q)-C_3(1-\epsilon'')/\epsilon < 0$, ou seja $0 < \epsilon < \frac{C_3(1-\epsilon'')}{1/p-1/q}$. Segue então de (4.16) e (4.14) que

$$
\begin{aligned}
d_\beta(\Lambda^{(2)}U_p;L^q) &\leq C'_{\epsilon,p}\,|\lambda_N|\theta_{N_1,N_2}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2\leq q<\infty, \\ \sup_{1\leq k\leq M}(\log_2\theta_{N_k,N_{k+1}})^{\frac{1}{2}}, & q=\infty, \end{cases} + C'_{\epsilon,p}|\lambda_N| \\
&\leq C'_{\epsilon,p}\,C_5|\lambda_N|N^{(d-r)(1/p-1/2)}\begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2\leq q<\infty, \\ \sup_{1\leq k\leq M}(\log_2\theta_{N_k,N_{k+1}})^{\frac{1}{2}}, & q=\infty, \end{cases} \\
&= C'_{\epsilon,p}\,C_5 e^{-\gamma N^r}N^{(d-r)(1/p-1/2)}\begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2\leq q<\infty, \\ \sup_{1\leq k\leq M}(\log_2\theta_{N_k,N_{k+1}})^{\frac{1}{2}}, & q=\infty, \end{cases}
\end{aligned}
$$

ou seja

$$
d_\beta(\Lambda^{(2)}U_p;L^q) \ll e^{-\gamma N^r}N^{(d-r)(1/p-1/2)}\begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2\leq q<\infty, \\ \sup_{1\leq k\leq M}(\log_2\theta_{N_k,N_{k+1}})^{\frac{1}{2}}, & q=\infty. \end{cases} \tag{4.17}
$$

Usando (4.13) e (4.14), obtemos

$$\theta_{N_k,N_{k+1}} \asymp (N_k^r)^{\frac{d-r}{r}} \asymp \left(N^r + (k-1)\frac{\ln 2}{\gamma}\right)^{\frac{d-r}{\gamma}}.$$

Assim, usando o fato que $M \leq (\log_2 \theta_{N_1,N_2})/\epsilon$, $\theta_{N_1,N_2} \asymp N^{d-r}$ e $N^d \asymp n$, segue que

$$\begin{aligned}
\log_2 \theta_{N_k,N_{k+1}} &\asymp \frac{d-r}{\gamma}\log_2\left(N^r + (k-1)\frac{\ln 2}{\gamma}\right) \leq C_6 \log_2\left(N^r + M\frac{\ln 2}{\gamma}\right) \\
&\leq C_6 \log_2\left(N^r + \log_2 \theta_{N_1,N_2}\frac{\ln 2}{\gamma\epsilon}\right) \leq C_7 \log_2\left(N^r + \log_2 N^{d-r}\frac{\ln 2}{\gamma\epsilon}\right) \\
&= C_7 \log(N^r + C_8 \log_2 N) \leq C_7 \log(N^r + C_8 N) \\
&\leq C_7 \log(N^{r+1}) = C_7 \frac{r+1}{d}\log_2 N^d \\
&\asymp \log_2 n.
\end{aligned}$$

Logo, de (4.17), obtemos

$$d_\beta(\Lambda^{(2)}U_p; L^q) \ll e^{-\gamma N^r} N^{(d-r)(1/p-1/2)} \begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}}, & q = \infty. \end{cases} \tag{4.18}$$

Da Observação 3.3.2, de (3.34) e de (4.14), temos que

$$\begin{aligned}
\beta &= m_0 + \sum_{k=1}^{M} m_k = \sum_{s=0}^{N} \dim \mathcal{H}_s + \sum_{k=1}^{M} m_k \\
&\leq n + C_\epsilon \theta_{N_1,N_2} \leq n + C_\epsilon C_9 N^{d-r} \\
&= n + C_{10} N^{d-r}.
\end{aligned}$$

Observando pelo Lema 2.2.21 que $N^d \asymp n$ obtemos que $N^{d-r} \asymp n^{1-\frac{r}{d}}$ e logo $\beta \leq n + C_{11}N^{1-\frac{r}{d}}$. Denotando assim $m = n + C_{11}n^{1-\frac{r}{d}}$, segue do Teorema 1.2.1 (d) e de (4.18) que

$$d_m(\Lambda^{(2)}U_p; L^q) \ll e^{-\gamma N^r} n^{(1-\frac{r}{d})(1/p-1/2)} \begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}}, & q = \infty. \end{cases}$$

Como $n \leq m$, obtemos

$$d_m(\Lambda^{(2)}U_p; L^q) \ll e^{-\gamma N^r} m^{(1-\frac{r}{d})(1/p-1/2)} \begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 m)^{\frac{1}{2}}, & q = \infty. \end{cases}. \tag{4.19}$$

Mais uma vez usando a desigualdade (4.2), temos

$$-\gamma N^r + Rm^{\frac{r}{d}} \leq -Rn^{\frac{r}{d}} + Rm^{\frac{r}{d}} + C_{12} = Rn^{\frac{r}{d}}(-1 + (1 + C_{11}n^{-\frac{r}{d}})^{\frac{r}{d}}) + C_{12}.$$

Como $|C_{11}n^{-\frac{r}{d}}| < 1$, já que n é tomado suficientemente grande, segue que

$$\begin{aligned}
(1 + C_{11}n^{-\frac{r}{d}})^{\frac{r}{d}} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(r/d)(r/d-1)\cdots(r/d-k+1)}{k!}(C_{11}n^{-r/d})^k \\
&= 1 + C_{11}(r/d)n^{-\frac{r}{d}}S^N,
\end{aligned}$$

onde $0 \leq S^N \leq 1$ e a série binomial é alternada. Portanto

$$-\gamma N^r + Rm^{\frac{r}{d}} \;\leq\; Rn^{\frac{r}{d}}\left(\frac{r}{d}n^{-\frac{r}{d}}S^n\right) \;\leq\; Rr/d \;\leq\; C_{13},$$

e assim

$$e^{-\gamma N^r} \;\leq\; e^{-Rm^{\frac{r}{d}}}e^{C_{13}} \;=\; C_{14}e^{-Rm^{\frac{r}{d}}}.$$

Finalmente, de (4.19) vem que

$$d_m(\Lambda^{(2)}U_p; L^q) \;\ll\; e^{-Rm^{\frac{r}{d}}}m^{(1-\frac{r}{d})(1/p-1/2)}\begin{cases} q^{\frac{1}{2}}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log_2 m)^{\frac{1}{2}}, & q = \infty. \end{cases}$$

■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Behrends, E., *On the principle of the local reflexivity*, *Studia Math.* **100** (2) (1991), p. 109-128.

[2] Bordin, B., Kushpel, A., Levesley, J., Tozoni, S., *Estimates of n-widths of Sobolev's classes on compact globally symmetric spaces rank 1*, *J. of Funct. Anal.,* **202** (2003), p. 307-326.

[3] Borsuk, K., *Drei Sätza über die n-dimensionale euklidische sphäre*, *Fund. Math.* **20** (1933), p. 177-191.

[4] Figueiredo, D. G., *"Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais"*, Projeto Euclides, IMPA, 1977.

[5] Folland, G. B., "*Real Analysis",* John Wiley and Sons, New York, 1984.

[6] Kreyszig, E., *"Introductory Functional Analysis with Aplications"*, John Wiley, New York, 1978.

[7] Kushpel, A., *sk*-Splines: Theory and applications, (a ser publicado).

[8] Kushpel, A., Tozoni, S., *Entropy and widths of multiplier operators on two-point homogeneous spaces*, Relatório de Pesquisa, IMECC/UNICAMP, RP16/04, janeiro/2008.

[9] Kwapién, S., *Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients*, *Studia Math.* **44** (1972), p. 583-595.

[10] Müler, C., *"Spherical Harmonics"*, Lecture Notes in Math. 17, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[11] Oliveira, F. M., "*Análise Harmônica na Esfera Unitária d-dimensional Real",* Dissertação de Mestrado, IMECC/Unicamp, Agosto de 2005.

[12] Pajor, A., Tomczak-Jaegermann, N., *Subspaces of small codimension of finite-dimensional Banach spaces*, *Proc. Amer. Math, Soc.* **97** (1986), p. 637-642 .

[13] Pietsch, A., "*Operator Ideals",* North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1980.

[14] Pinkus, A., "*n-Widths in Approximation Theory",* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[15] Stein, E.M., *"Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions"*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1970.

[16] Stein, E. M., Weiss, G., " *Introduction to Fourier Analysis on Euclidian Spaces",* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1971.

[17] Szegö, G., "*Orthogonal Polynomials",* AMS, New York, 1939.

[18] Torchinsky, A., *"Real-Variable Methods in Harmonic Analysis"*, Academic Press, 1986.