

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA SISTEMAS  
GRADIENTES SEMILINEARES RESSONANTES

por  
Edcarlos Domingos da Silva

Área de concentração: Equações Diferenciais Parciais  
Orientador: Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo  
Co-orientador: Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Campinas, São Paulo  
2009

MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA SISTEMAS  
SEMILINEARES RESSONANTES

Este exemplar corresponde à redação  
final da tese devidamente cor-  
rigida e defendida por. Edcarlos  
Domingos da Silva e aprovada  
pela comissão julgadora.

Campinas, 11 de Maio de 2009

  
Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo  
Orientador

  
Prof. Dr. Francisco Odair V. de Paiva.  
Co-orientador

Banca Examinadora:

- 1 Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo.
- 2 Prof. Dr. João Marcos do O.
- 3 Prof. Dr. David Godstein Costa.
4. Prof. Dr. Daniel Cordeiro Morais Filho.
5. Prof. Dr. Aloísio Freria Neves.

Tese apresentada ao Instituto  
de Matemática, Estatística e Compu-  
tação Científica, UNICAMP, como  
requisito parcial para obtenção do Tí-  
tulo de Doutor em Matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**  
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Silva, Edcarlos Domingos da  
Si38m Multiplicidade de soluções para sistemas gradientes semilineares  
ressonantes/Edcarlos Domingos da Silva -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.

Orientador : Djairo Guedes de Figueiredo

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Equações diferenciais elípticas. 2.Cálculo das variações.  
3.Princípios variacionais. 4.Morse, Teoria de. I. Figueiredo, Djairo  
Guedes de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

(mfbm/imecc)

Título em inglês: Multiplicity of solutions for semilinear resonance gradient systems

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Elliptic differential equations. 2. Calculus of variations. 3. Variational principles. 4. Morse theory.

Área de concentração: Equações Diferenciais Parciais

Titulação: Doutorado em Matemática

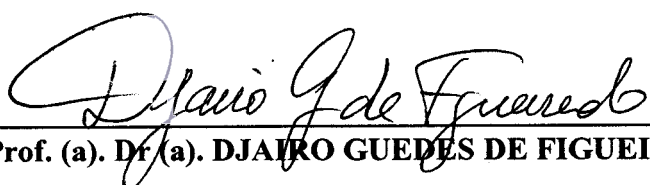
Banca examinadora: Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo (IMECC-Unicamp)  
Prof. Dr. David Godstein Costa (University of Nevada-USA)  
Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó (UEPB)  
Prof. Dr. Daniel Cordeiro Morais Filho (UFCG)  
Prof. Dr. Aloísio Freiria Neves (IMECC-Unicamp)

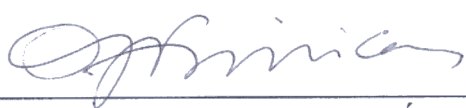
Data da defesa: 11/05/2009

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

**Tese de Doutorado defendida em 11 de maio de 2009 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

  
**Prof. (a). Dr (a). DJALMA GUEDES DE FIGUEIREDO**

  
**Prof. (a). Dr (a). ALOISIO JOSÉ FREIRIA NEVES**

  
**Prof. (a). Dr (a). DAVID GOLDSTEIN COSTA**

  
**Prof. (a). Dr (a). JOÃO MARCOS BEZERRA DO Ó**

  
**Prof. (a) Dr. (a). DANIEL CORDEIRO DE MORAIS FILHO**

*Aos meus pais*  
*Joaquim Domingos Filho*

*Maria Divina da Silva Barros*

# Agradecimentos

Á Deus por ter me ajudado durante toda esta longa jornada.

Aos meus pais e irmãos, pelo apoio e compreensão durante toda a minha vida acadêmica. Agradeço pelo imenso carinho, amor e companhia.

Ao Prof. Djairo, ao qual sou imensamente grato pelo auxílio incontestável prestado através de suas valiosas sugestões e por sempre estar disposto à discutir sobre os assuntos desta tese. Muito obrigado pela orientação!

Ao Prof. Francisco Odair de Paiva pela co-orientação.

Aos Profs. João Marcos do Ó, Olímpio Hiroshi Miyagaki e Elves Alves de Barros e Silva pelas importantíssimas discussões matemáticas. Em especial ao primeiro por ter me chamado atenção sobre o trabalho [40].

Aos Profs. Djairo, João Marcos, David Costa, Daniel Cordeiro e Aloisio Neves por gentilmente terem aceito o convite para compor a banca examinadora.

Aos amigos Bruno Ribeiro, Elisandra Gloss, Humberto Ramos Quoirin, Evandro Monteiro, Taisa Junges e Luis Miranda pelas frutíferas discussões matemáticas.

Aos amigos do IMECC que proporcionaram bons momentos de descontração.

Aos professores e amigos da UFG que me esperaram, durante um semestre, para o início dos meus trabalhos como professor no IME -UFG em Goiânia. Em especial agradeço aos professores Maurílio Márcio Mello, João Carlos da Rocha Medrado e Alacyr José Gomes.

A Cidinha, Ednaldo e Tânia por estarem sempre a disposição para solucionar as questões burocráticas.

Ao CNPq e Capes pelo apoio financeiro.

# Sumário

|                                                                                                                    |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Agradecimentos                                                                                                     | iv         |
| Sumário                                                                                                            | v          |
| Resumo                                                                                                             | 1          |
| Abstract                                                                                                           | 2          |
| Notações Básicas                                                                                                   | 3          |
| Introdução                                                                                                         | 5          |
| <b>1 Sistemas Elípticos Gradientes Ressonantes com condições de Landesman-Lazer no Autovalor Principal.</b>        | <b>15</b>  |
| 1.1 Sistemas Gradientes sob Ressonância em autovalores principais . . . . .                                        | 16         |
| 1.2 Autovalores e Autofunções para o problema (1.4) . . . . .                                                      | 18         |
| 1.3 Ressonância em $\lambda_1(A)$ . . . . .                                                                        | 20         |
| <b>2 Sistemas Elípticos Gradientes Ressonantes com condições de Landesman-Lazer em autovalores não Principais.</b> | <b>41</b>  |
| 2.1 Sistemas gradientes sob ressonância em autovalores não principais. . . .                                       | 42         |
| <b>3 Sistemas Elípticos Gradientes Fortemente Ressonantes no Autovalor Principal.</b>                              | <b>67</b>  |
| 3.1 Sistemas Gradientes sob Ressonância Forte . . . . .                                                            | 68         |
| 3.2 Ressonância forte em $\lambda_1(A)$ . . . . .                                                                  | 69         |
| <b>4 Ressonância forte em autovalores não principais.</b>                                                          | <b>87</b>  |
| 4.1 Ressonância Forte em autovalores Autos . . . . .                                                               | 88         |
| <b>5 Sistemas Gradientes com Ressonância Simultânea no Infinito e na Origem</b>                                    | <b>121</b> |
| 5.1 Sistemas Gradientes com Ressonância no infinito e na Origem . . . . .                                          | 122        |

|                                                                  |            |
|------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.2 Ressonância no infinito e na origem em autovalores altos     | 123        |
| <b>A Resultados Básicos</b>                                      | <b>139</b> |
| <b>B Uma breve revisão dos Pontos Críticos e Teoria de Morse</b> |            |
| <b>Bibliografia</b>                                              |            |

# Resumo

Nesta tese lidamos com três classes de sistemas gradientes ressonantes. A primeira classe é um sistema com ressonância do tipo Landesman-Lazer. A segunda classe é um sistema fortemente ressonante enquanto a terceira classe é um sistema com ressonância no infinito e na origem.

Analizamos as questões de existência e multiplicidade de soluções em cada uma das classes mencionadas.

Para obtermos os nossos principais resultados aplicamos alguns métodos variacionais, tais como, teoremas Min-Max e minimização. Além disso, usamos a Teoria de Morse para distinguirmos soluções dados por métodos variacionais distintos.

# Abstract

In this thesis we deal with three classes of gradient elliptic systems with resonance. The first class is a resonant system of Landesman-Lazer type. The second class is a system of strong resonance type while the third class is a system with resonance at infinity and at origin.

We are concerned about the questions of existence and multiplicity of solutions in each of the classes mentioned.

To obtain our main results we apply variational methods, such as, Min-max theorems and minimization. Moreover, we use Morse Theory to distinguish the solutions given by different variational methods.

# Notações Básicas

Neste trabalho usaremos a seguintes notações:

- $\mathbb{R}^N, N \geq 3$ : Espaço Euclidiano dos pontos  $x = (x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}$  e  $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^N |x_i|^2}$
- $\Omega$  : Um aberto limitado suave em  $\mathbb{R}^N, N \geq 3$
- $C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) = C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ : o conjunto de todas a funções contínuas definidas em  $\overline{\Omega}$  e tomando valores em  $\mathbb{R}$ .
- $\mathcal{M}_2(\Omega)$  = o conjuntos das matrizes reais simétricas de ordem  $2 \times 2$  com entradas contínuas em  $\overline{\Omega}$  que são cooperativas e que possuem pelo menos uma das duas funções na diagonal principal positiva em algum ponto  $x_0 \in \Omega$ .
- $H_0^1(\Omega)$ : o espaço de Sobolev com norma  $|||_{H_0^1}$  (que envolve todas as derivadas fracas até ordem 1).
- $L^p(\Omega)$ : o espaço das funções p-integráveis com norma  $|||_{L^p(\Omega)}$ .
- Se  $N \geq 3$  então  $2^* = \frac{2N}{N-2}$  é o expoente crítico de Sobolev para a imersão de  $H_0^1(\Omega)$  em  $L^{2^*}(\Omega)$ .
- $\lambda_1(A)$ : denota o primeiro autovalor do problema de autovalores com peso  $A$  em  $\mathcal{M}_2(\Omega)$ .
- $\Phi_1(A)$ : denota a primeira autofunção do problema de autovalores com peso  $A$  em  $\mathcal{M}_2(\Omega)$ .

- $\lambda_k(A)$ : denota o  $k$ -ésimo autovalor do problema de autovalores com peso  $A$  pertencente a  $\mathcal{M}_2(\Omega)$ .
- $\Phi_k(A)$ : denota a  $k$ -ésima autofunção do problema de autovalores com peso  $A$  pertencente a  $\mathcal{M}_2(\Omega)$ .
- $\rightarrow$ : indica convergência forte.
- $\rightharpoonup$ : indica convergência fraca.
- $C_k(I, z_0)$ : denota o  $k$ -ésimo grupo crítico do funcional  $I : H \rightarrow \mathbb{R}$  no ponto crítico  $z_0 \in H$ .
- $C_k(I, \infty)$ : denota o  $k$ -ésimo grupo crítico no infinito do funcional  $I : H \rightarrow \mathbb{R}$ .
- $\delta_{ij}$ : denota o delta de Kronecker.
- Dado  $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ ,  $\nabla F(x, u, v)$  denota o gradiente de  $F$  nas variáveis  $u$  e  $v$ .
- Dado  $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ ,  $F''(x, u, v)$  denota a matriz Hessiana de  $F$  nas variáveis  $u$  e  $v$ .
- $V(\lambda_k)$ : denota o autoespaço associado ao autovalor  $\lambda_k(A)$ .
- $V_{k-1}$ : denota o autoespaço gerado pelos autovalores  $\lambda_1(A), \dots, \lambda_{k-1}(A)$ .
- $V_{k-1}^\perp$ : denota o autoespaço gerado pelos autovalores maiores ou iguais à  $\lambda_k(A)$ .  
Aqui, destacamos que  $V_{k-1}^\perp$  é o complementar ortogonal do autoespaço  $V_{k-1}$ .

# Introdução

Neste trabalho, estudamos questões de existência e multiplicidade para o sistema elíptico gradiente

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + b(x)v + F_u(x, u, v) \text{ em } \Omega, \\ -\Delta v = b(x)u + d(x)v + F_v(x, u, v) \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

onde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado e suave, com  $N \geq 3$ . Além disso, exigimos que a função  $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  seja de classe  $C^2$  e que  $a, b, d \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ . Assim, definimos  $\mathcal{M}_2(\Omega)$  o conjunto de todas as matrizes reais simétricas  $2 \times 2$  que satisfazem as condições (M0), (M1) e (M2), veja seções 1.1 e 1.2. Deste modo, trabalhamos com o seguinte problema de autovalores com peso:

$$\begin{cases} -\Delta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda A(x) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

Agora, se  $A \in \mathcal{M}_2(\Omega)$  podemos aplicar a Teoria de operadores lineares compactos e autoadjuntos, ver [24], obtendo uma sequência de autovalores para (2). Esta sequência será denota por  $\lambda_k(A)$  com as receptivas autofunções denotadas por  $\Phi_k(A)$ . Além disso, os autovalores satisfazem

$$0 < \lambda_1(A) < \lambda_2(A) < \dots < \lambda_k(A) < \dots \text{ onde } \lambda_k(A) \rightarrow \infty \text{ se } k \rightarrow \infty.$$

Neste trabalho, sempre consideraremos autovalores distintos. Além disso, usando resultados contidos em [15] e [16], o autovalor  $\lambda_1(A) > 0$  é simples e isolado com

autofunção positiva em  $\Omega$ .

Ao abordar o problema (1) consideraremos o caso ressonante. Mais precisamente, o problema (1) é ressonante no infinito em algum autovalor  $\lambda_k(A)$  se  $F$  é subquadrática no infinito e  $\lambda_k(A) = 1, k \geq 1$ .

Problemas ressonantes foram explorados, no caso escalar, no trabalho pioneiro de Landesman e Lazer, veja [32]. Assim, usando vários tipos de hipótese sob a não linearidade  $F$ , existem muitos resultados na literatura decorrente de uma ampla pesquisa matemática durante os últimos 40 anos. Neste momento gostaríamos de mencionar o caso ressonante mais sensível estudado em [9], o qual foi chamado de fortemente ressonante. Neste trabalho, foram determinados vários tipos de ressonância conforme o comportamento da não linearidade  $F$ . Intuitivamente o problema (1) é "mais" ressonante quanto "menor" for  $F$  no infinito.

Assim, estudamos o problema (1) sob vários "graus" de ressonância no infinito. Estes "graus" de ressonância são controlados pelo comportamento de  $F$  no infinito, veja [9].

Neste texto, utilizaremos a Teoria dos Pontos Críticos descrita principalmente em [6, 14, 27, 37]. Mais precisamente, introduziremos uma estrutura variacional para o problema (1) obtendo um funcional  $I : H \rightarrow \mathbb{R}, H = H_0^1(\Omega)^2$ . Assim, as soluções do problema (1) serão os pontos críticos de  $I$ . Além disso, afim de obtermos multiplicidade de soluções para (1), usaremos simultaneamente a Teoria de Morse descrita em [14] e [37].

Recentemente, com  $F$  ilimitada, houve grande interesse no estudo do problema (1). Por exemplo, veja os trabalhos [10, 15, 16, 25, 48, 49] e suas referências. Nestes trabalhos foram obtidas existência e multiplicidade de soluções combinando Teoria dos Pontos Críticos, Teoria de Morse, Método de Sub-Supersolução e Teoria do Grau. Em [15], o problema (1) foi estudado usando-se Métodos Variacionais e condições de Landesman-Lazer no ambiente abstrato fornecido em [14]. Em [16], os autores usaram o Método de Sub-Supersolução e Teoria do Grau, obtendo multiplicidade de soluções para o problema (1). Em [25], os autores usaram Métodos Variacionais e Teoria de

Morse obtendo no máximo três soluções não triviais com  $F$  não quadrática no infinito. Em [48], com a matriz constante, usando métodos variacionais foram obtidos duas soluções não triviais. Em [49], foram obtidas infinitas soluções para (1) com ressonância simultânea no infinito e na origem.

Assim, levando em consideração o comportamento de  $F$ , obtemos neste trabalho vários resultados de existência e multiplicidade de soluções para (1). Tais resultados estão descritos nos Capítulos 1, 2, 3, 4 e 5.

Agora, descreveremos os principais resultado obtidos neste trabalho.

No Capítulo 1, tratamos o caso onde temos ressonância no primeiro autovalor usando condições do tipo Landesman-Lazer com  $\nabla F$  limitada. Neste caso, perturbando o problema (1) por funções  $h_1, h_2 \in L^2(\Omega)$ , estudamos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + b(x)v + F_u(x, u, v) - h_1(x) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = b(x)u + d(x)v + F_v(x, u, v) - h_2(x) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

Logo, definimos as seguintes funções auxiliares

$$\begin{aligned} f_1^{++}(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \infty}} F_u(x, u, v), & f_1^{--}(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow -\infty}} F_u(x, u, v), \\ f_2^{++}(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \infty}} F_v(x, u, v), & f_2^{--}(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow -\infty}} F_v(x, u, v). \end{aligned} \quad (4)$$

Agora, escrevemos as condições de Landesman-Lazer adaptadas ao problema (3). Tais condições são dadas pelas seguintes desigualdades

$$(LL)_1^+ \int_{\Omega} f_1^{--} \phi_1 + f_2^{--} \psi_1 dx < \int_{\Omega} h_1 \phi_1 + h_2 \psi_1 dx < \int_{\Omega} f_1^{++} \phi_1 + f_2^{++} \psi_1 dx, \quad (5)$$

onde  $\Phi_1 = (\phi_1, \psi_1)$  é a autofunção associada ao primeiro autovalor de (2).

Analogamente, temos uma segunda condição Landesman-Lazer obtida invertendo as desigualdades acima. Neste caso, temos a seguinte condição

$$(LL)_1^- \int_{\Omega} f_1^{--} \phi_1 + f_2^{--} \psi_1 dx > \int_{\Omega} h_1 \phi_1 + h_2 \psi_1 dx > \int_{\Omega} f_1^{++} \phi_1 + f_2^{++} \psi_1 dx. \quad (6)$$

Neste momento, gostaríamos de enfatizar que estas condições, para o caso escalar, foram introduzidas em [32].

Agora, supondo ressonância no autovalor principal, ou seja,  $\lambda_1(A) = 1$ , temos o seguinte resultado:

**Teorema 0.1.** *Suponha  $\nabla F$  limitada e  $\lambda_1(A) = 1$ . Além disso, suponha  $(LL)_1^+$  ou  $(LL)_1^-$ . Então, para cada par de funções  $h_1, h_2 \in L^2(\Omega)$ , temos que o problema (3) admite pelo menos uma solução.*

Para provarmos o Teorema 0.1 usamos o Teorema do Ponto de Sela fornecido em [40], desde que tenhamos a condição  $(LL)_1^+$ . Para completar a prova deste teorema mostramos que o funcional  $I$  é coercivo, desde que tenhamos  $(LL)_1^-$ .

No Capítulo 2, consideramos o caso ressonante em autovalores  $\lambda_k(A), k > 1$ . Neste caso, usando condições do tipo Landesman-Lazer, veja Seção 2, obtemos o seguinte resultado:

**Teorema 0.2.** *Suponha  $\nabla F$  limitada e  $\lambda_k(A) = 1, k > 1$ . Além disso, suponha  $(LL)_k^+$  ou  $(LL)_k^-$ . Então, para cada par de funções  $h_1, h_2 \in L^2(\Omega)$ , o problema (3) admite uma solução.*

Para provar o Teorema 0.2 usamos o Teorema do Ponto de Sela fornecido em [40]. Neste caso, provamos que o funcional associado satisfaz a condição de Palais-Smale. Assim, supondo a condição  $(LL)_k^+$ , escrevemos  $H = H_0^1(\Omega)^2 = V_k \oplus V_k^\perp$ , onde  $V_k$  é o autoespaço associado aos autovalores  $\lambda_1(A), \dots, \lambda_k(A)$ . Logo, obtemos que  $I$  é limitado superiormente em  $V_k$  e ilimitado inferiormente em  $V_k^\perp$ . Portanto, aplicando o Teorema do Ponto de Sela, obtemos a existência de um ponto crítico.

Por outro lado, supondo  $(LL)_k^-$ , escrevemos  $H = H_0^1(\Omega)^2 = V_{k-1} \oplus V_{k-1}^\perp$ , onde  $V_{k-1}$  é o autoespaço associado aos autovalores  $\lambda_1(A), \dots, \lambda_{k-1}(A)$ . Assim, mostramos que  $I$  é limitado inferiormente em  $V_{k-1}^\perp$  e ilimitado superiormente em  $V_{k-1}$ . Portanto, aplicando o Teorema do Ponto de Sela, obtemos novamente a existência de um ponto crítico.

No Capítulo 3, lidamos com o problema fortemente ressonante no autovalor principal. Neste caso, estudamos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + b(x)v - F_u(x, u, v) & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = b(x)u + d(x)v - F_v(x, u, v) & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (7)$$

onde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado e suave, com  $N \geq 3$ . Além disso, exigimos que a função  $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  seja de classe  $C^2$  e que  $A = A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & d(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ , veja seção 1.4.

Ainda no Capítulo 3, assumimos que o gradiente de  $F$  tem limite zero no infinito e que  $F$  é limitada. Mais precisamente, consideramos a seguinte hipótese

$$(H0) \lim_{|z| \rightarrow \infty} \nabla F(x, z) = 0, |F(x, z)| \leq C, \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2 \text{ com } \lambda_k(A) = 1, k \geq 1.$$

Neste caso, onde existe ressonância em  $\lambda_1(A)$ , definimos as seguintes funções auxiliares

$$\begin{aligned} T^{++}(x) &= \liminf_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \infty}} F(x, u, v) & S^{++}(x) &= \limsup_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \infty}} F(x, u, v) \\ T^{--}(x) &= \liminf_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow -\infty}} F(x, u, v) & S^{--}(x) &= \limsup_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow -\infty}} F(x, u, v). \end{aligned} \quad (8)$$

Logo, aplicando principalmente o Lema de Fatou, obtemos que o funcional  $I$  satisfaz a condição de Palais-Smale no nível  $c \in \mathbb{R}$  desde que  $c < \min\{\int_{\Omega} T^{++}(x)dx, \int_{\Omega} T^{--}(x)dx\}$  ou  $c > \max\{\int_{\Omega} S^{++}(x)dx, \int_{\Omega} S^{--}(x)dx\}$ .

Assim, usando Teoremas Min-Max, obtemos existência e multiplicidade de soluções para o problema (7). Neste caso, obtemos até três soluções não triviais para o problema (7). Estes resultados, sob ressonância forte no autovalor principal, são inspirados principalmente no artigo [2], o qual trata um problema fortemente ressonante envolvendo o operador p-laplaciano.

Os resultados deste capítulo melhoram os resultados anteriores em três aspectos. Primeiramente, consideramos o problema envolvendo um sistema elíptico que possui

ressonância forte no infinito. Além disso, consideramos o caso onde os limites assintóticos de  $F$  não precisam existir, isto é, os resultados desta seção valem usando limites superiores e inferiores. Finalmente, conseguimos obter mais soluções não triviais para o problema (7) usando que o funcional associado ao problema (7) é limitado inferiormente.

No Capítulo 4, impomos ressonância forte em autovalores  $\lambda_k(A)$ ,  $k > 1$ . Neste caso, definimos as seguintes funções auxiliares

$$\begin{aligned} F^{++}(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \infty}} F(x, u, v), & F^{+-}(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow -\infty}} F(x, u, v), \\ F^{-+}(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow \infty}} F(x, u, v), & F^{--}(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow -\infty}} F(x, u, v), \end{aligned} \tag{9}$$

onde os limites acima definem funções em  $L^1(\Omega)$ . Deste modo, consideramos a seguinte hipótese

$$(H0) \lim_{|z| \rightarrow \infty} \nabla F(x, z) = 0, |F(x, z)| \leq C, \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2 \text{ com } \lambda_k(A) = 1, k \geq 1.$$

Assim, usando um resultado contido em [23] ou [18], o qual nós adaptamos para o problema (7), obtemos o seguinte resultado:

**Lema 0.3.** *Suponha (H0). Então  $I$  satisfaz a condição de Palais-Smale se, e somente se,  $c \in \mathbb{R} \setminus \Gamma_k$ , onde*

$$\Gamma_k = \left\{ \int_{\substack{u>0 \\ v>0}} F^{++} + \int_{\substack{u<0 \\ v>0}} F^{-+} + \int_{\substack{u>0 \\ v<0}} F^{+-} + \int_{\substack{u<0 \\ v<0}} F^{--} : (u, v) \in V(\lambda_k), \|(u, v)\| = 1 \right\}. \tag{10}$$

Aqui,  $V(\lambda_k)$  denota o autoespaço onde ocorre a ressonância e  $\|\cdot\|$  denota a norma usual de  $H$ .

Neste caso, como estamos com ressonância forte, aplicamos o método de redução de Liapunov-Schmidt, ver [3, 8, 13]. Assim, podemos reduzir o funcional  $I$  para um

funcional  $J$  definido em um subespaço de  $H$ . Logo, usando estas idéias, obtemos resultados de existência e multiplicidade de soluções para o problema (7).

Para descrevermos o principal resultado obtido no Capítulo 4 assumiremos as seguintes hipóteses adicionais:

$$(H0) \lim_{|z| \rightarrow \infty} \nabla F(x, z) = 0, |F(x, z)| \leq C, \quad \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2 \text{ com } \lambda_k(A) = 1, k > 1.$$

$$(H1)^- \text{ Existe } \delta^- \in (\lambda_{k-1}, 1) \text{ tal que}$$

$$\langle \nabla F(x, z) - \nabla F(x, w), z - w \rangle \leq (1 - \delta^-) \langle A(x)(z - w), z - w \rangle, \quad \forall (x, z, w) \in \Omega \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

$(H3)^- \text{ Existe } z^* \in V(\lambda_k) \text{ tal que } \beta = \int_{\Omega} F(x, z^* + \Psi(z^*)) dx < 0. \text{ Aqui, temos que } \Psi : V_{k-1}^{\perp} \rightarrow V_{k-1} \text{ é uma função continua a qual definimos no processo de redução de Liapunov-Schmidt.}$

$$(H7)^- \text{ Existem } m \geq k, r > 0 \text{ e } \epsilon > 0 \text{ tais que}$$

$$\frac{1}{2}(1 - \lambda_{m+1} + \epsilon) \langle A(x)z, z \rangle \leq F(x, z) \leq \frac{1}{2}(1 - \lambda_m) \langle A(x)z, z \rangle, \quad \forall |z| \leq r, \forall x \in \Omega.$$

O principal resultado deste capítulo é o enunciado como segue:

**Teorema 0.4.** *Suponha  $(H0), (H1)^-, (H3)^-, (H7)^-$  com  $\Gamma_k = \{0\}$ . Então o problema (7) admite pelo menos duas soluções não triviais.*

Para provar o Teorema 0.4 mostramos que o funcional  $J$  é limitado inferiormente. Assim, usando a hipótese  $(H7)^-$ , mostramos que  $J$  possui um linking local no origem. Portanto, aplicando um Teorema de Linking adaptado para problemas onde a condição de Palais-Smale pode falhar em alguns níveis, obtemos duas soluções não triviais para o problema (7), veja [29], [8].

O Capítulo 5 trata do seguinte problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u = F_u(x, u, v) & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = F_v(x, u, v) & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (11)$$

onde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado em  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$  e  $F \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . Além disso,  $F$  satisfaz o seguinte crescimento subcrítico:

(F) Existe  $c > 0$  and  $2 < p < 2^* = \frac{2n}{n-2}$  tal que

$$|\nabla F(x, z)| \leq c(1 + |z|^{p-1}), \quad \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2.$$

O principal objetivo deste capítulo é estudar o problema (11) com ressonância no infinito, ou seja, existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\lambda_k(A_\infty) = 1$ . Além disso, impomos ressonância na origem, isto é, existe  $m \in \mathbb{N}$  com  $\lambda_m(A_0) = 1$ . Tais problemas têm merecido muita atenção nos últimos anos, veja [11, 34, 42, 44, 48]. Aqui, as matrizes  $A_\infty$  e  $A_0$  pertencem a  $\mathcal{M}_2(\Omega)$  e fazem o papel de peso no infinito e na origem respectivamente. Mais especificamente, podemos escrever o problema (11) de duas formas distintas usando as matrizes  $A_0$  e  $A_\infty$ . Neste caso, vamos impor que existam funções  $G_0$  e  $G_\infty$  de classe  $C^2$  tais que:

$$G_\infty(x, z) = F(x, z) - \frac{1}{2} \langle A_\infty(x)z, z \rangle \text{ e } G_0(x, z) = F(x, z) - \frac{1}{2} \langle A_0(x)z, z \rangle,$$

onde  $A_\infty$  e  $A_0 \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ . Além disso, impomos que  $G_\infty = o(|z|^2)$  em infinito e  $G_0 = o(|z|^2)$  na origem, ou seja, temos as seguintes igualdades:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{G_\infty(x, z)}{|z|^2} = 0, \quad \lim_{|z| \rightarrow 0} \frac{G_0(x, z)}{|z|^2} = 0.$$

Neste caso, o sistema em (11) torna-se assintoticamente quadrático no infinito e na origem. Além disso, tal sistema é ressonante na origem e no infinito simultaneamente.

Deste modo, temos uma dificuldade extra no estudo do problema (11). Mais precisamente, neste caso a origem é um ponto crítico degenerado, ou seja, possui nulidade estritamente positiva.

Assim, para determinarmos soluções não triviais para (11) iremos impor condições adicionais no comportamento de  $\nabla F$  no infinito e na origem. Mais precisamente, definiremos as seguintes funções auxiliares

Deste modo, usamos as seguintes hipóteses adicionais:

(H1) Existe  $\alpha \in (0, 1)$  tal que

$$|\nabla G_\infty(x, z)| \leq C(1 + |z|^\alpha), \forall z \in \mathbb{R}^2 \text{ e para quase todo } x \in \Omega.$$

(H2) Existem  $\beta \in (1, 2^* - 1)$  e  $\delta > 0$  tal que

$$|\nabla G_0(x, z)| \leq C|z|^\beta, \forall |z| < \delta \text{ e para quase todo } x \in \Omega.$$

(H3) Existem  $F_1, F_2 \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$  com  $\int_\Omega F_j \neq 0$  para  $j=1,2$  satisfazendo

$$F_1(x) \leq \liminf_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\nabla G_\infty(x, z) \cdot z}{|z|^{1+\alpha}} \leq \limsup_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\nabla G_\infty(x, z) \cdot z}{|z|^{1+\alpha}} \leq F_2(x). \quad (12)$$

(H4) Existem  $f_1, f_2 \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$  com  $\int_\Omega f_j \neq 0$  para  $j=1,2$  onde

$$f_1(x) \leq \liminf_{|z| \rightarrow 0} \frac{\nabla G_0(x, z) \cdot z}{|z|^{1+\beta}} \leq \limsup_{|z| \rightarrow 0} \frac{\nabla G_0(x, z) \cdot z}{|z|^{1+\beta}} \leq f_2(x). \quad (13)$$

Agora, tomando  $k, m \geq 2$  provamos os seguinte resultado

**Teorema 0.5.** *Suponha (H1)-(H4). Se ocorre uma das seguintes alternativas*

a)  $F_2(x) \leq 0, f_1(x) \geq 0$  q.t.p  $x \in \Omega$  e  $m \neq k - 1$ ,

b)  $F_1(x) \geq 0, f_2(x) \leq 0$  q.t.p  $x \in \Omega$  e  $k \neq m - 1$ ,

c)  $F_1(x) \geq 0, f_1(x) \geq 0$  q.t.p  $x \in \Omega$ , e  $k \neq m$ ,

d)  $F_2(x) \leq 0, f_1(x) \leq 0$  q.t.p  $x \in \Omega$  e  $k \neq m$ ,

então (11) admite pelo menos uma solução não trivial.

Logo, com intuito de determinamos mais soluções, consideremos a seguinte definição

**Definição 0.6.** *Sejam  $F \in C^2$  e  $A, B \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ . Então as desigualdades  $A \leq F'' \leq B$  significam  $\langle A(x)z, z \rangle \leq \langle F''(x)z, z \rangle \leq \langle B(x)z, z \rangle, \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2$ . Além disso,  $A \preceq B$  se  $A \leq B$  com desigualdade estrita em algum subconjunto aberto  $\overline{\Omega} \subset \Omega$ .*

Deste modo, somos capazes de provar o seguinte resultado

**Teorema 0.7.** *Suponha (H1)-(H4). Assuma uma das seguintes alternativas*

a)  $F_2(x) \leq 0$  e  $f_1(x) \geq 0$  q.t.p  $x \in \Omega$ ,  $m > k - 1$  com  $F'' \geq \beta \succeq \lambda_{k-1}A_\infty$ ,

b)  $F_1(x) \geq 0$  e  $f_2(x) \leq 0$  q.t.p  $x \in \Omega$ ,  $k > m - 1$  com  $F'' \leq \beta \preceq \lambda_{k+1}A_\infty$ ,

c)  $F_1(x) \geq 0$  e  $f_1(x) \geq 0$  q.t.p  $x \in \Omega$ ,  $m < k$  com  $F'' \leq \beta \prec \lambda_{k+1}A_\infty$ ,

d)  $F_2(x) \leq 0$  e  $f_2(x) \leq 0$  q.t.p  $x \in \Omega$ ,  $m > k$  com  $F'' \geq \beta \succeq \lambda_{k-1}A_\infty$ ,

para alguma matriz fixa  $\beta \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ . Então (11) admite pelo menos duas soluções não triviais.

Existem muitos resultados, para o caso escalar, onde há ressonância em zero e no infinito, veja [11, 34, 43]. Porém, pouco tem sido feito para sistemas, veja [20, 48, 49]. Tais resultados comtemplam somente o caso onde temos matrizes constantes  $A_\infty = A_0$ . Em outras palavras, as matrizes em questão são sempre iguais e contantes nos resultados existentes na literatura. Assim, nossos resultados melhoram e complementam os resultados citados em dois aspectos. Primeiramente, possibilitamos ressonância em zero e em infinito em matrizes distintas e variáveis, ou seja, possibilitamos que as matrizes  $A_\infty$  e  $A_0$  sejam distintas e variáveis. Mais especificamente, consideremos o caso de matrizes variáveis  $A_\infty(x)$  e  $A_0(x)$  distintas ou iguais onde assumimos condições de ressonância em autovalores distintos ou iguais.

Por outro lado, temos um resultado de multiplicidade que possibilita ressonância no zero e na origem na mesma matriz, veja Teorema 0.7. Além disso, tal ressonância pode ocorrer no mesmo autovalor, veja Teorema 0.7-a e 0.7-b.

Para finalizarmos, incluímos um Apêndice onde enunciamos e demonstramos alguns resultados básicos utilizados no decorrer deste texto. Além disso, incluímos um resumo sobre Teoria de Morse onde destacamos os principais resultados utilizados neste texto.

Com o intuito de não ficarmos recorrendo à Introdução e de tornar os capítulos independentes, enunciaremos novamente, em cada capítulo os principais resultados, bem como as hipóteses sob a não linearidade  $F$ .

# Capítulo 1

## Sistemas Elípticos Gradientes Ressonantes com condições de Landesman-Lazer no Autovalor Principal.

Neste capítulo, trabalhamos com uma classe de sistemas gradientes com ressonância descrita, para o caso escalar, em [32]. Mais precisamente, estudamos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + b(x)v + F_u(x, u, v) - h_1(x) & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = b(x)u + d(x)v + F_v(x, u, v) - h_2(x) & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

onde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado e suave em  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ . Além disso, exigimos que a função  $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  seja de classe  $C^2$  e que a matriz  $A = A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & d(x) \end{pmatrix}$  satisfaça as seguintes condições:

$(M_0)$   $A \in C^0(\overline{\Omega}, M_{2 \times 2}(\mathbb{R}))$ , onde  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  é o conjunto das matrizes reais simétricas de ordem 2;

( $M_1$ )  $A$  é cooperativo, isto é,  $b(x) \geq 0$  para todo  $x \in \overline{\Omega}$ ;

( $M_2$ )  $\max_{x \in \Omega} \max \{a, d\} > 0$ , ou seja, existe  $x_0 \in \Omega$  tal que  $a(x_0) > 0$  ou  $d(x_0) > 0$ .

Assim, estudamos o problema ressonante para (1.1) onde impomos que  $\nabla F$  seja limitada em  $\Omega \times \mathbb{R}^2$ . Estes problemas foram estudados inicialmente, no caso escalar, por [32]. Mais precisamente, trabalhamos com a seguinte hipótese:

$$\lim_{u,v \rightarrow \pm\infty} \nabla F(x, u, v) \neq 0, \text{ com } \nabla F \text{ limitada em } \Omega \times \mathbb{R}^2. \quad (1.2)$$

Problemas ressonantes foram estudados, no caso escalar, por vários autores, veja os importantes trabalhos [9, 32] e as seguintes referências básicas [1, 5, 4, 19, 22, 12, 17, 33, 28, 36, 39, 38, 40, 46, 47]. Para o caso de sistemas gradientes ressonantes veja [10, 20, 15], para sistemas Hamiltonianos ressonantes veja [41, 26] e suas referências.

## 1.1 Sistemas Gradientes sob Ressonância em auto-valores principais

Nesta seção, consideramos o seguinte sistema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + b(x)v + F_u(x, u, v) - h_1(x) & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = b(x)u + d(x)v + F_v(x, u, v) - h_2(x) & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.3)$$

onde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado e suave em  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ . Além disso, exigimos que a função  $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  seja de classe  $C^2$  e que a matriz  $A = A(x)$  satisfaça as seguintes condições:

( $M_0$ )  $A \in C^0(\overline{\Omega}, M_{2 \times 2}(\mathbb{R}))$ , onde  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  é o conjunto das matrizes reais  $2 \times 2$ ;

( $M_1$ )  $A$  é cooperativo, isto é,  $b(x) \geq 0$  para todo  $x \in \overline{\Omega}$ ;

( $M_2$ )  $\max_{x \in \Omega} \max \{a, d\} > 0$ , ou seja, existe  $x_0 \in \Omega$  tal que  $a(x_0) > 0$  ou  $d(x_0) > 0$ .

Neste capítulo, trabalharemos com o seguinte problema de autovalores:

$$\begin{cases} -\Delta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda A(x) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.4)$$

onde  $A \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ . Portanto, usando a Teoria de Operadores Lineares Compactos e Autoadjuntos, temos uma sequência de autovalores

$$0 < \lambda_1(A) < \lambda_2(A) < \dots < \lambda_k(A) < \dots \text{ onde } \lambda_k(A) \rightarrow \infty \text{ se } k \rightarrow \infty.$$

Além disso, temos que  $\lambda_1(A)$  é simples e admite autofunção  $\Phi_1(A)$  positiva em  $\Omega$ , ver [15, 16, 25, 24]. Reforçamos que neste trabalho consideramos autovalores distintos. Novamente, vale a pena lembrar que cada autovalor  $\lambda_k(A)$ ,  $k > 1$  pode possuir multiplicidade maior estrito que um.

Agora, lembramos que nesta tese estudaremos o problema (1.3) via Métodos Variacionais. Deste modo, temos um funcional de classe  $C^1$  denotado por  $I : H \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para todo  $z = (u, v) \in H = H_0^1(\Omega)^2$  o funcional  $I$  possui a seguinte expressão

$$I(z) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(x)(u, v), (u, v) \rangle dx - \int_{\Omega} F(x, u, v) dx + \int_{\Omega} h_1 u + h_2 v dx. \quad (1.5)$$

Neste caso, teremos que  $z = (u, v) \in H$  é ponto crítico do funcional  $I$  se, e somente se,  $z$  é solução para o problema (1.3). Deste modo, para determinarmos as possíveis soluções de (1.3) é suficiente determinar os pontos críticos do funcional  $I$ .

Agora, seja  $F$  subquadrático em infinito, isto é,  $F$  com crescimento no infinito menor que  $|z|^2$ . Então podemos dividir o estudo do problema (1.3) em ressonante e não ressonante. Primeiramente, dizemos que (1.3) é não ressonante se  $\lambda_k(A) \neq 1$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Neste caso, usando argumentos standard, o funcional associado  $I$  satisfaz a condição de Palais Smale, ver [15]. Portanto o problema torna-se mais simples, tendo em vista que a condição de compacidade é satisfeita.

Por outro lado, dizemos que (1.3) possui ressonância em algum autovalor de (1.4) se existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\lambda_k(A) = 1$ . Usando métodos clássicos, como Teoria do Grau e \

ou Método de Sub-supersoluções e Métodos Variacionais, [15] e [16] obtiveram resultados de existência e multiplicidade para o problema (1.3). Entretanto, existem poucos resultados para o caso ressonante para sistemas gradientes, por exemplo, o caso ressonante com condições usuais de Landesman-Lazer não foram estudados. Assim, neste capítulo, mostramos que condições do tipo Landesman-Lazer garantem a solubilidade do sistema (1.3).

Problemas ressonantes possuem um grande interesse e uma vasta literatura, ver [9] e [32]. Neste caso, lembramos o funcional  $I$  pode não satisfazer a condição clássica de Palais-Smale, abreviadamente escrevemos  $(PS)$ . Em [9] foi determinado vários tipos de ressonância conforme o comportamento no infinito da não linearidade  $F$ , intuitivamente o problema (1.3) é "mais" ressonante quanto menor for  $F$  no infinito.

Deste modo, este capítulo é dedicado ao estudo do problema (1.3) sobre condições de ressonância. Mais especificamente, tratamos o problema (1.3) sobre ressonância no autovalor principal  $\lambda_1(A)$  ou sobre os autovalores  $\lambda_k(A)$  com  $k \geq 1$ . Todavia, neste capítulo, sempre tomamos  $F$  tal que sua derivada seja limitada. Assim, consideremos a condição clássica de Landesman-Lazer adaptada para o sistema (1.3). Estas condições foram introduzidas no trabalho pioneiro, para o caso escalar, em [32]. Portanto, o principal objetivo deste capítulo é entender tais condições e obter existência e multiplicidade de soluções para o problema (1.3).

## 1.2 Autovalores e Autofunções para o problema (1.4)

Nesta seção, recordamos as principais propriedades dos autovalores e autofunções associados ao problema (1.3).

Primeiramente, seja  $H = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  então  $H$  é um espaço de Hilbert com norma dada por

$$\|z\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 dx, z = (u, v) \in H.$$

Além disso, denotamos o produto interno em  $H$  por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Para maiores detalhes veja [25].

Agora, seja  $A \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ , então existe um único operador linear compacto e auto-adjunto  $T_A : H \rightarrow H$  tal que :

$$\langle T_A z, w \rangle = \int_{\Omega} \langle A(x)z, w \rangle dx, \forall z, w \in H.$$

Este operador possui a seguinte propriedade:  $\lambda$  é autovalor para (1.4) se, e somente se,  $T_A z = \frac{1}{\lambda} z$ , para algum  $z \in H$ . Logo, para cada matriz  $A \in \mathcal{M}_2(\Omega)$  existe uma sequência de autovalores para (1.4) e uma base Hilbertiana para  $H$  formada por autofunções de (1.4). Além disso, denotamos os autovalores de (1.4) por  $\lambda_k(A)$  e  $\Phi_k(A)$  as autofunções associadas, então  $0 < \lambda_1(A) < \lambda_2(A) < \dots < \lambda_k(A) \rightarrow \infty$  se  $k \rightarrow \infty$ . Assim, temos as seguintes caracterizações:

$$\frac{1}{\lambda_1(A)} = \sup\{\langle T_A z, z \rangle, \|z\| = 1, z \in H\},$$

$$\frac{1}{\lambda_k(A)} = \sup\{\langle T_A z, z \rangle, \|z\| = 1, z \in V_{k-1}^{\perp}\},$$

onde  $V_{k-1}^{\perp} = \bigoplus_{j=1}^{j=k-1} \ker(I\lambda_j^{-1} - T_A)$ . Logo, obtemos  $H = V_k \oplus V_k^{\perp}$  para  $k \geq 1$ , onde vale as seguintes desigualdades variacionais:

$$\|z\|^2 \geq \lambda_1(A) \langle T_A z, z \rangle, \forall z \in H, \quad (1.6)$$

$$\|z\|^2 \leq \lambda_k(A) \langle T_A z, z \rangle, \forall z \in V_k, k \geq 1, \quad (1.7)$$

$$\|z\|^2 \geq \lambda_{k+1}(A) \langle T_A z, z \rangle, \forall z \in V_k^{\perp}, k \geq 1. \quad (1.8)$$

As desigualdades variacionais acima serão utilizadas no decorrer de todo texto. Para maiores detalhes na construção dos autovalores e autofunções de (1.4) veja [15], [24] e [25].

Nesta tese, sempre normalizamos cada autofunção em  $H$ , ou seja, sempre tomamos  $\|\Phi_k\| = 1, \forall k \in \mathbb{N}$ . Por outro lado, gostaríamos de enfatizar que o primeiro autovalor

de (1.4) denotado por  $\lambda_1(A)$  é positivo, simples e isolado. Além disso, temos que  $\lambda_1(A)$  possui autofunção positiva em  $\Omega$ . Em outras palavras, temos um teorema do tipo Hess kato para o problema de autovalores (1.4), ver [15, 16]. Novamente, sempre denotaremos por  $\Phi_1$  como sendo a autofunção associada a  $\lambda_1(A)$  a qual satisfaz  $\Phi_1 > 0$  em  $\Omega$ . Aqui,  $\Phi_1 = (\phi_1, \psi_1) > 0$  em  $\Omega$  significa  $\phi_1 > 0$  e  $\psi_1 > 0$  em  $\Omega$ , veja [15, 16].

### 1.3 Resonância em $\lambda_1(A)$ .

Nesta seção, estudaremos o problema (1.3) sobre resonância em  $\lambda_1(A)$ . Inicialmente supomos que  $\nabla F$  seja limitada em  $\Omega \times \mathbb{R}^2$ . Logo, definimos as seguintes funções auxiliares

$$\begin{aligned} f_1^{++}(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \infty}} F_u(x, u, v), & f_1^{--}(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow -\infty}} F_u(x, u, v), \\ f_2^{++}(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \infty}} F_v(x, u, v), & f_2^{--}(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow -\infty}} F_v(x, u, v), \end{aligned} \tag{1.9}$$

onde impomos que os limites acima sejam uniformes em  $x \in \Omega$ . Além disso, pedimos que as funções  $f_1^{++}, f_2^{++}, f_1^{--}$  e  $f_2^{--}$  estejam em  $L^2(\Omega)$ .

Agora, usando que  $\nabla F$  é limitada, provamos as seguintes condições de crescimento. Dado  $\epsilon > 0$  existe  $M_\epsilon > 0$  tal que:

$$|F(x, z)| \leq \epsilon |z|^2, \forall x \in \Omega \text{ onde } |z| \geq M_\epsilon. \tag{1.10}$$

Então, para cada  $\epsilon > 0$  fixado existe  $C_\epsilon > 0$ , tal que:

$$|F(x, z)| \leq C_\epsilon + \epsilon |z|^2, \text{ para todo } x \in \Omega, z \in \mathbb{R}^2, \tag{1.11}$$

onde  $|\cdot|$  denota a norma euclidiana em  $\mathbb{R}^2$ . Para as funções  $h_1, h_2 \in L^2(\Omega)$ , usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, provamos o seguinte crescimento. Dado  $\epsilon > 0$  existe  $M_\epsilon > 0$  tal que:

$$\left| \int_{\Omega} h_1 u + h_2 v dx \right| \leq \epsilon \|z\|^2, \text{ se } \|z\| \geq M_\epsilon, \text{ onde } z = (u, v) \in H. \tag{1.12}$$

Portanto, para cada  $\epsilon > 0$  existe  $C_\epsilon > 0$  tal que:

$$\left| \int_{\Omega} h_1 u + h_2 v dx \right| \leq C_\epsilon + \epsilon \|z\|^2, \quad \forall z = (u, v) \in H. \quad (1.13)$$

Neste caso, as condições de Landesman-Lazer são dadas por

$$(LL)_1^+ \int_{\Omega} f_1^{--} \phi_1 + f_2^{--} \psi_1 dx < \int_{\Omega} h_1 \phi_1 + h_2 \psi_1 dx < \int_{\Omega} f_1^{++} \phi_1 + f_2^{++} \psi_1 dx, \quad (1.14)$$

onde  $\Phi_1 = (\phi_1, \psi_1)$  é a autofunção associada ao primeiro autovalor de (1.4). Analogamente, definimos a condição

$$(LL)_1^- \int_{\Omega} f_1^{--} \phi_1 + f_2^{--} \psi_1 dx > \int_{\Omega} h_1 \phi_1 + h_2 \psi_1 dx > \int_{\Omega} f_1^{++} \phi_1 + f_2^{++} \psi_1 dx. \quad (1.15)$$

Agora, provaremos a condição de compacidade requerida na prova dos nossos principais resultados. Primeiramente, lembramos que um funcional  $I : H \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  satisfaz a condição de Palais-Smale no nível  $c \in \mathbb{R}$  ( $(PS)_c$  abreviadamente), se para toda sequência  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H$  tal que

$$I(z_n) \rightarrow c \text{ e } I'(z_n) \rightarrow 0$$

com  $n \rightarrow \infty$ , admite uma subsequência convergente em  $H$ . Se  $I$  satisfaz  $(PS)_c, \forall c \in \mathbb{R}$ , diremos simplesmente que  $I$  satisfaz  $(PS)$ .

Além disso, dizemos que  $I : H \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz a condição de Cerami no nível  $c \in \mathbb{R}$   $((Ce)_c$  abreviadamente), se para toda sequência  $(z_n) \subseteq H$  tal que

$$I(z_n) \rightarrow c \text{ e } (1 + \|z_n\|) \|I'(z_n)\| \rightarrow 0$$

com  $n \rightarrow \infty$ , possui uma subsequência convergente em  $H$ . Se  $I$  satisfaz  $(Ce)_c, \forall c \in \mathbb{R}$ , diremos simplesmente que  $I$  satisfaz  $(Ce)$ .

Deste modo, usando as condições de Landesman-Lazer, temos que o funcional  $I$  satisfaz a condição  $(PS)$ . Mais especificamente, somos capazes de provar o seguinte resultado

**Lema 1.1.** *Suponha  $(LL)_1^+$  ou  $(LL)_1^-$ . Então o funcional  $I$  satisfaz  $(PS)_c$  para todo  $c \in \mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* Na prova deste lema basta provar que toda sequência  $(PS)_c$  é limitada. Pois, a não linearidade  $F$  é subcrítica e o funcional associado possui a forma identidade mais um compacto. Logo, se toda sequência  $(PS)_c$  é limitada, por argumentos clássicos,  $I$  satisfaz  $(PS)_c, \forall c \in \mathbb{R}$ .

Assim, suponha que o resultado seja falso, isto é, suponha que exista uma sequência  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$  tal que

- $I(z_n) \rightarrow c,$
- $I'(z_n) \rightarrow 0,$
- $\|z_n\| \rightarrow \infty$  se  $n \rightarrow \infty$ .

Agora, afim de obtermos uma contradição, seja  $\bar{z}_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$ , então  $\|\bar{z}_n\| = 1$ . Portanto existe  $\bar{z} \in H$  tal que

- $\bar{z}_n \rightharpoonup \bar{z}$  em  $H$ ,
- $\bar{z}_n \rightarrow \bar{z}$  em  $L^p(\Omega)^2$  com  $p \in [1, 2^*)$ ,
- $\bar{z}_n(x) \rightarrow \bar{z}(x)$  q.t.p em  $\Omega$  quando  $n \rightarrow \infty$ ,
- Existe  $h \in L^p(\Omega)$  tal que  $\|z_n\|_{L^p(\Omega)^2} \leq \|h\|_{L^p(\Omega)}$ .

Por outro lado, dado  $\Phi = (\phi, \psi) \in H$  obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \frac{I'(z_n)\Phi}{\|z_n\|} &= \int_{\Omega} \nabla \bar{u}_n \nabla \phi + \nabla \bar{v}_n \nabla \psi dx - \int_{\Omega} \langle A(x)(\bar{u}_n, \bar{v}_n), (\phi, \psi) \rangle dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \frac{\nabla F(x, u_n, v_n)(\phi, \psi)}{\|z_n\|} dx + \int_{\Omega} \frac{h_1 \phi + h_2 \psi}{\|z_n\|} \text{ onde } z_n = (u_n, v_n). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Consequentemente, fazendo  $n \rightarrow \infty$  e usando a limitação de  $\nabla F$  em (1.16) obtemos a seguinte identidade

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{u} \nabla \phi + \nabla \bar{v} \nabla \psi dx - \int_{\Omega} \langle A(x)(\bar{u}, \bar{v}), (\phi, \psi) \rangle dx = 0, \forall \Phi = (\phi, \psi) \in H. \quad (1.17)$$

Além disso, tomando  $\Phi = (\overline{u_n}, \overline{v_n})$  e aplicando na equação (1.16) obtemos a seguinte igualdade  $\int_{\Omega} \langle A(x)(\overline{u}, \overline{v}), (\overline{u}, \overline{v}) \rangle dx = 1$  onde  $\overline{z} = (\overline{u}, \overline{v})$ . Mas escolhendo  $\Phi = (\overline{u}, \overline{v})$  e aplicando em (1.17) obtemos  $\|z\|^2 = \int_{\Omega} \langle A(x)(\overline{u}, \overline{v}), (\overline{u}, \overline{v}) \rangle dx = 1$ . Assim,  $z_n \rightarrow \overline{z}$  em  $H$  e  $\overline{z}$  é autofunção associada ao autovalor  $\lambda_1(A) = 1$ . Deste modo, obtemos  $\overline{z} = \pm \Phi_1$ , pois o autovalor  $\lambda_1(A)$  é simples e admite autofunção positiva em  $\Omega$ .

Contudo, defina  $A_n = \frac{\frac{1}{2}I'(z_n)z_n - I(z_n)}{\|z_n\|}$  então sabemos que  $A_n \rightarrow 0$  se  $n \rightarrow \infty$ . Mas usando as expressões de  $I$  e  $I'$  temos a seguinte informação:

$$A_n = \frac{1}{2} \int_{\Omega} 2 \frac{F(x, u_n, v_n)}{\|z_n\|} - \nabla F(x, u_n, v_n)(\overline{u_n}, \overline{v_n}) dx - \int_{\Omega} h_1 \overline{u_n} + h_2 \overline{v_n} dx \rightarrow 0. \quad (1.18)$$

Agora, lembramos que  $\overline{z_n} \rightarrow \overline{z}$  em  $L^2(\Omega)^2$ . Neste caso, temos a seguinte convergência

$$\int_{\Omega} h_1 \overline{u_n} + h_2 \overline{v_n} dx \rightarrow \int_{\Omega} h_1 \overline{u} + h_2 \overline{v} dx \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (1.19)$$

Além disso, sabemos das seguintes informações

$$\begin{aligned} \nabla F(x, u_n, v_n) &\rightarrow (f_1^{++}(x), f_2^{++}(x)) \text{ em } \Omega \text{ se } \overline{z} = \Phi_1 \\ \nabla F(x, u_n, v_n) &\rightarrow (f_1^{--}(x), f_2^{--}(x)) \text{ em } \Omega \text{ se } \overline{z} = -\Phi_1. \end{aligned}$$

Portanto, seguem as seguintes convergências

$$\int_{\Omega} \nabla F(x, u_n, v_n)(\overline{u_n}, \overline{v_n}) dx \rightarrow \int_{\Omega} (f_1^{++}(x), f_2^{++}(x))(\overline{u}, \overline{v}) dx \quad (1.20)$$

ou

$$\int_{\Omega} \nabla F(x, u_n, v_n)(\overline{u_n}, \overline{v_n}) dx \rightarrow \int_{\Omega} (f_1^{--}(x), f_2^{--}(x))(\overline{u}, \overline{v}) dx \quad (1.21)$$

conforme  $\overline{z} = \Phi_1$  ou  $\overline{z} = -\Phi_1$ . As convergências em (1.20) e (1.21) são garantidas usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Por outro lado, usando o Teorema Fundamental do Cálculo, ver (A.2), temos as seguintes convergências

$$\int_{\Omega} \frac{F(x, u_n, v_n)}{\|z_n\|} dx \rightarrow \int_{\Omega} (f_1^{++}(x), f_2^{++}(x))(\overline{u}, \overline{v}) dx \text{ desde que } \overline{z} = \Phi_1 \text{ e} \quad (1.22)$$

$$\int_{\Omega} \frac{F(x, u_n, v_n)}{\|z_n\|} dx \rightarrow \int_{\Omega} (f_1^{--}(x), f_2^{--}(x))(\bar{u}, \bar{v}) dx \text{ desde que } \bar{z} = -\Phi_1. \quad (1.23)$$

Deste modo, as convergências em (1.18), (1.19), (1.22) e (1.23) implicam as seguintes igualdades

$$\int_{\Omega} (f_1^{++}(x), f_2^{++}(x))(\bar{u}, \bar{v}) dx = \int_{\Omega} h_1 \bar{u} + h_2 \bar{v} dx \text{ se } \bar{z} = \Phi_1 \text{ e} \quad (1.24)$$

$$\int_{\Omega} (f_1^{--}(x), f_2^{--}(x))(\bar{u}, \bar{v}) dx = \int_{\Omega} h_1 \bar{u} + h_2 \bar{v} dx \text{ se } \bar{z} = -\Phi_1. \quad (1.25)$$

Entretanto  $\bar{z} = (\bar{u}, \bar{v}) = \pm\Phi_1$  é uma autofunção associada ao autovalor  $\lambda_1(A) = 1$ . Assim, as identidades (1.24) ou (1.25) não cumprem as condições  $(LL)_1^+$  ou  $(LL)_1^-$ . Portanto temos uma contradição. Em outras palavras, mostramos que existe uma autofunção associada a  $\lambda_1(A)$  tal que as condições  $(LL)_1^+$  ou  $(LL)_1^-$  não são verificadas. Portanto, toda sequência  $(PS)_c$  é limitada. Esta afirmação finaliza a demonstração do lema.  $\square$

Agora, escrevemos  $H = V_1 \oplus V_1^\perp$ , onde  $V_1$  é o autoespaço associado ao primeiro autovalor. Para os próximos resultados consideraremos algumas proposições inerentes a geometria do funcional  $I$ . Mais especificamente, provaremos que o funcional  $I$  possui a geometria do Teorema do Ponto de Sela. Neste caso, temos a

**Proposição 1.2.** *Suponha  $(LL)_1^+$ . Então o funcional  $I$  possui a seguinte geometria*

**a)**  $I(z) \rightarrow \infty$  se  $\|z\| \rightarrow \infty$  com  $z = (u, v) \in V_1^\perp$ .

**b)** *Existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $I(z) \leq \alpha \forall z \in V_1$ .*

*Demonstração.* Primeiramente demonstraremos o item a). Seja  $z = (u, v) \in V_1^\perp$  então

seguem as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
I(z) &= \frac{1}{2}\|z\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(x)z, z \rangle dx - \int_{\Omega} F(x, z) dx + \int_{\Omega} h_1 u + h_2 v dx \\
&\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_2}\right) \|z\|^2 - \int_{\Omega} F(x, z) dx + \int_{\Omega} h_1 u + h_2 v dx \\
&\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_2}\right) \|z\|^2 - \epsilon \|z\|^2 - C_{\epsilon} \rightarrow \infty \text{ se } \|z\| \rightarrow \infty \text{ com } z \in V_1^{\perp}.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Nas estimativas anteriores usamos imersões de Sobolev, a desigualdade variacional (1.8) e a condições de crescimento dadas em (1.11) e (1.13). Esta afirmação finaliza a prova do item *a*).

Para a prova do item *b*) devemos mostrar que  $I(z) \leq \alpha$ ,  $\forall z = (u, v) \in V_1$ . Aqui,  $\alpha$  é algum número real. Suponha que esta informação seja falsa. Logo, existe uma sequência  $(z_n) \in V_1$  tal que

- $I(z_n) > n, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\|z_n\| \rightarrow \infty$  se  $n \rightarrow \infty$ .

Além disso, escrevemos  $z_n = t_n \Phi_1$  onde  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ , com  $|t_n| \rightarrow \infty$  se  $n \rightarrow \infty$ . Assim, temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
I(z_n) &= - \int_{\Omega} F(x, t_n \Phi_1) dx + \int_{\Omega} (h_1, h_2)(t_n \Phi_1) dx \\
&= -t_n \int_{\Omega} \frac{F(x, t_n \Phi_1)}{t_n} dx + t_n \int_{\Omega} (h_1, h_2) \Phi_1 dx.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Porém, usando o Teorema Fundamental do Cálculo ver (A.2), temos a seguinte identidade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, t_n \Phi_1)}{t_n} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla F(x, t_n \Phi_1) \Phi_1 dx. \tag{1.28}$$

Portanto, usando a condição  $(LL)_1^+$  e supondo que  $t_n \rightarrow \infty$ , obtemos para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq n_0$  implica

$$\int_{\Omega} \frac{F(x, t_n \Phi_1)}{t_n} dx > \int_{\Omega} (h_1, h_2) \Phi_1 dx + \epsilon. \tag{1.29}$$

Assim, usando (1.27), (1.28) e (1.29), temos que

$$\begin{aligned}
 I(z_n) &\leq -t_n \int_{\Omega} \frac{F(x, t_n \Phi_1)}{t_n} dx + t_n \int_{\Omega} (h_1, h_2) \Phi_1 dx \\
 &\leq -t_n \left( \int_{\Omega} (h_1, h_2) \Phi_1 + \epsilon \right) + t_n \int_{\Omega} (h_1, h_2) \Phi_1 dx \\
 &= -t_n \epsilon \rightarrow -\infty \text{ quando } n \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

Portanto temos uma contradição, pois  $I(z_n) > n$  por construção. Resta analisar o caso onde temos  $t_n \rightarrow -\infty$  se  $n \rightarrow \infty$ . Neste caso, temos a seguinte desigualdade

$$\int_{\Omega} \frac{F(x, t_n \Phi_1)}{t_n} dx < \int_{\Omega} (h_1, h_2) \Phi_1 dx - \epsilon, \tag{1.31}$$

onde usamos a condição  $(LL)_1^+$ , obtendo que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq n_0$  implica a desigualdade (1.31). Deste modo, usando as estimativas (1.27) e (1.31) obtemos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}
 I(z_n) &\leq -t_n \int_{\Omega} \frac{F(x, t_n \Phi_1)}{t_n} dx + t_n \int_{\Omega} (h_1, h_2) \Phi_1 dx \\
 &\leq -t_n \left( \int_{\Omega} (h_1, h_2) \Phi_1 - \epsilon \right) + t_n \int_{\Omega} (h_1, h_2) \Phi_1 dx \\
 &= t_n \epsilon \rightarrow -\infty \text{ quando } n \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

Novamente temos uma contradição, pois  $I(z_n) > n$  por construção. Assim, provamos que  $I(z) \leq \alpha$ ,  $\forall z \in V_1$ , para alguma constante  $\alpha \in \mathbb{R}$ , onde usamos a condição  $(LL)_1^+$ . Esta afirmação finaliza a demonstração da proposição.  $\square$

No próximo resultado mostramos, sobre certas condições, que o funcional  $I$  é coercivo. Neste caso, podemos aplicar o Princípio Variacional de Ekeland. Mais especificamente, temos a

**Proposição 1.3.** *Suponha  $(LL)_1^-$ . Então o funcional  $I$  é coercivo, isto é, temos que  $I(z) \rightarrow \infty$  se  $\|z\| \rightarrow \infty$  com  $z = (u, v) \in H$ .*

*Demonstração.* A prova desta proposição segue as mesmas idéias da prova da proposição anterior. Contudo, temos uma dificuldade adicional por estarmos mostrando que em todo espaço  $H$  o funcional  $I$  é coercivo. Neste caso, faremos a demonstração deste resultado.

Primeiramente, queremos provar que  $I(z) \rightarrow \infty$  se  $\|z\| \rightarrow \infty$ . Suponha que esta informação seja falsa. Então existe uma sequência  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$  tal que

- $I(z_n) \leq C, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\|z_n\| \rightarrow \infty$  se  $n \rightarrow \infty$ .

Por outro lado, podemos escrever a sequência  $(z_n)$  na seguinte forma  $z_n = t_n \Phi_1 + w_n$  onde  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$  e  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V_1^\perp$ . Deste modo, obtemos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} I(z_n) &= \|w_n\|^2 - \int_{\Omega} \langle A(x)w_n, w_n \rangle dx - \int_{\Omega} F(x, z_n) dx + \int_{\Omega} (h_1, h_2)z_n dx \\ &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_2}\right) \|w_n\|^2 - \int_{\Omega} F(x, t_n \Phi_1 + w_n) dx + \int_{\Omega} (h_1, h_2)(t_n \Phi_1 + w_n) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_2} - \epsilon\right) \|w_n\|^2 - \frac{\epsilon}{2} \|t_n \Phi_1\|^2 - C_\epsilon, \end{aligned} \quad (1.33)$$

onde usamos imersões de Sobolev, desigualdade variacional (1.8) e as condições de crescimento (1.11) e (1.13). Assim, temos a seguinte afirmação

**Afirmação 1.4.**  $|t_n| \rightarrow \infty$  se  $n \rightarrow \infty$ .

A prova dessa afirmação segue por contradição. Suponha que  $|t_n|$  seja limitada. Então obtemos uma constante  $C \in \mathbb{R}$  tal que  $|t_n| \leq C$ . Além disso, temos que  $\|w_n\| \rightarrow \infty$  pois inicialmente sabemos que  $\|z_n\| \rightarrow \infty$  com  $n \rightarrow \infty$ . Deste modo, usando a estimativa (1.33), concluímos que  $I(z_n) \rightarrow \infty$ . Portanto temos um absurdo, pois  $I(z_n) \leq C$  por construção. Logo, temos a prova da afirmação, ou seja,  $|t_n| \rightarrow \infty$  se  $n \rightarrow \infty$ .

Neste momento defina  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|w_n\|}{|t_n|}$ , logo  $L \in [0, \infty]$ . Agora, analisaremos os seguintes casos

1)  $L = \infty$ ,

2)  $L \in (0, \infty)$ ,

3)  $L = 0$ .

Em cada caso acima queremos obter uma contradição, ou seja, estudando cada um dos casos 1), 2) ou 3) obteremos uma contradição. Portanto, teremos que a afirmação inicial é verificada, ou seja, concluiremos que o funcional  $I$  é coercivo em  $H$ .

Inicialmente analisaremos o caso 1). Logo, temos que  $\|w_n\| \geq M|t_n|$ , para  $n \geq n_0$ ,  $\forall M > 0$ . Portanto temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} I(z_n) &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_2} - \epsilon\right)\|w_n\|^2 - \frac{\epsilon}{2}|t_n|^2 - C_\epsilon \\ &\geq \frac{M^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_2} - \epsilon\right)|t_n|^2 - C_\epsilon \rightarrow \infty \text{ se } n \rightarrow \infty, \end{aligned} \tag{1.34}$$

mas  $I(z_n) \leq C$  por construção. Assim temos uma contradição. Portanto o caso 1) não ocorre, ou seja,  $L \neq \infty$ .

Para o caso 2), sabemos que para cada  $\epsilon > 0$  (pequeno) existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < L - \epsilon < \frac{\|w_n\|}{|t_n|} < L + \epsilon$  desde que tenhamos  $n \geq n_0$ . Neste caso, temos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} I(z_n) &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_2} - \epsilon\right)\|w_n\|^2 - \frac{\epsilon}{2}|t_n|^2 - C_\epsilon \\ &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_2} - \epsilon\right)(L - \epsilon)^2|t_n|^2 - \frac{\epsilon}{2}|t_n|^2 - C_\epsilon \rightarrow \infty \text{ quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Novamente temos uma contradição, pois  $I(z_n) \leq C$  por construção. Portanto os casos 1), e 2) não ocorrem, isto é, temos necessariamente que  $L = 0$ .

Assim, resta analisar o caso 3). Novamente, temos a seguinte identidade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, t_n \Phi_1 + w_n)}{t_n} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, t_n \Phi_1)}{t_n} dx. \tag{1.36}$$

Esta identidade é provada usando o Teorema Fundamental do Cálculo, ver (A.4). Por outro lado, temos seguinte identidade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, t_n \Phi_1)}{t_n} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla F(x, t_n \Phi_1) \Phi_1 dx = \int_{\Omega} (f_1^{++}(x), f_2^{++}(x)) \Phi_1 dx, \quad (1.37)$$

onde estamos supondo que  $t_n \rightarrow \infty$ . O caso onde  $t_n \rightarrow -\infty$  será tratado posteriormente. Assim, usando a condição  $(LL)_1^-$  e as identidades obtidas em (1.36) e (1.37), obtemos que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq n_0$  implica

$$\int_{\Omega} \frac{F(x, t_n \Phi_1 + w_n)}{t_n} dx < \int_{\Omega} (h_1, h_2) \Phi_1 dx - \epsilon. \quad (1.38)$$

Assim, usando as estimativas (1.33) e (1.38), obtemos

$$\begin{aligned} I(z_n) &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_2}\right) \|w_n\|^2 - t_n \int_{\Omega} \frac{F(x, t_n \Phi_1 + w_n)}{t_n} dx + \int_{\Omega} (h_1, h_2) (t_n \Phi_1 + w_n) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_2} - \epsilon\right) \|w_n\|^2 - t_n \left( \int_{\Omega} (h_1, h_2) \Phi_1 dx - \epsilon \right) + t_n \int_{\Omega} (h_1, h_2) \Phi_1 dx - C_{\epsilon} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_2} - \epsilon\right) \|w_n\|^2 + t_n \epsilon - C_{\epsilon} \geq t_n \epsilon - C_{\epsilon} \end{aligned}$$

onde  $\epsilon$  é suficientemente pequeno. Nas estimativas acima usamos a condição de crescimento (1.13). Logo  $I(z_n) \rightarrow \infty$  se  $n \rightarrow \infty$ . Portanto temos uma contradição, pois  $I(z_n) \leq C$  por construção. Resta analisar o caso onde  $t_n \rightarrow -\infty$ , neste caso obtemos a seguinte identidade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, t_n \Phi_1)}{t_n} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla F(x, t_n \Phi_1) \Phi_1 dx = \int_{\Omega} (f_1^{--}(x), f_2^{--}(x)) \Phi_1 dx. \quad (1.39)$$

Deste modo, usando a condição  $(LL)_1^-$  e a identidade (1.36) e (1.39), obtemos para cada  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq n_0$  então

$$\int_{\Omega} \frac{F(x, t_n \Phi_1 + w_n)}{t_n} dx > \int_{\Omega} (h_1, h_2) \Phi_1 dx + \epsilon. \quad (1.40)$$

Agora, usando a desigualdade variacional (1.8) e (1.33), obtemos

$$\begin{aligned} I(z_n) &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_2}\right) \|w_n\|^2 - t_n \int_{\Omega} \frac{F(x, t_n \Phi_1 + w_n)}{t_n} dx + \int_{\Omega} (h_1, h_2) (t_n \Phi_1 + w_n) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_2} - \epsilon\right) \|w_n\|^2 - t_n \left( \int_{\Omega} (h_1, h_2) \Phi_1 dx + \epsilon \right) + t_n \int_{\Omega} (h_1, h_2) \Phi_1 dx - C_{\epsilon} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_2} - \epsilon\right) \|w_n\|^2 - t_n \epsilon - C_{\epsilon} \geq -t_n \epsilon - C_{\epsilon} \end{aligned}$$

onde  $\epsilon$  é suficientemente pequeno. Assim, temos que  $I(z_n) \rightarrow \infty$  se, pois  $t_n \rightarrow -\infty$  se  $n \rightarrow \infty$ . Novamente temos uma contradição, pois  $I(z_n) \leq C$  por construção. Enfim, concluímos que nenhum dos casos 1), 2) ou 3) ocorrem, ou seja,  $I(z) \rightarrow \infty$  se  $\|z\| \rightarrow \infty, z \in H$ . Portanto o funcional  $I$  é coercivo. Esta afirmação finaliza a demonstração da proposição.  $\square$

Finalmente, enunciamos e demonstramos o principal resultado desta seção. Neste resultado garantimos existência de uma solução para o problema (1.3) para cada par de funções  $h_1, h_2 \in L^2(\Omega)$ . Além disso, damos algumas propriedades referentes aos grupos críticos deste ponto crítico. Para uma revisão da Teoria de Morse, bem como sobre as principais propriedades sobre grupos críticos, veja as seguintes referências clássicas [14, 37]. Neste caso temos o

**Teorema 1.5.** *Suponha  $\nabla F$  limitada. Além disso, suponha  $(LL)_1^+$  ou  $(LL)_1^-$ . Sejam  $h_1, h_2 \in L^2(\Omega)$ . Então o problema (1.3) admite uma solução.*

*Demonstração.* Primeiramente provaremos este resultado supondo a condição  $(LL)_1^+$ . Neste caso, usamos a Proposição 1.2 e Lema 1.1. Assim, escrevendo  $H = V_1 \oplus V_1^\perp$ , obtemos que o funcional  $I$  é limitado superiormente em  $V_1$  e limitado inferiormente sobre  $V_1^\perp$ . Logo, aplicando o Teorema do Ponto de Sela descrito no Teorema 3.12, obtemos um ponto crítico  $z_0 \in H$  dado por um minimax. Neste caso, usando Teoria de Morse temos que  $C_1(I, z_0) \neq 0$ , veja o Apêndice B.

Agora, provaremos esta proposição supondo a condição  $(LL)_1^-$ . Neste caso, usamos a Proposição 1.3. Logo, aplicando o Princípio Variacional de Ekeland, obtemos um ponto crítico  $z_1 \in H$  satisfazendo  $I(z_1) = \inf\{I(z) | z \in H\}$ . Além disso, temos que  $C_q(I, z_1) = \delta_{q0}\mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}$ . Para mais detalhes sobre os grupos críticos veja no Apêndice B. Assim, finalizamos a prova deste teorema.  $\square$

Neste momento tomamos

$$h_1 \equiv 0, h_2 \equiv 0, \nabla F(x, 0, 0) \equiv 0 \text{ e } F(x, 0, 0) \equiv 0.$$

Logo consideramos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + b(x)v + F_u(x, u, v) & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = b(x)u + d(x)v + F_v(x, u, v) & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.41)$$

onde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado e suave em  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ . Além disso, exigimos que a função  $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  seja de classe  $C^2$  com  $A \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ .

Deste modo  $z = (0, 0)$  é uma solução trivial para (1.41). Entretanto queremos determinar soluções não triviais para (1.41). Os próximos resultados determinam existência de soluções não triviais sobre ressonância no autovalor principal  $\lambda_1(A)$ . Neste caso, as propriedades do autovalor  $\lambda_1(A)$  e da autofunção  $\Phi_1(A)$  correspondente são muito importantes para encontrarmos soluções de (1.41).

Primeiramente, consideremos a seguinte definição:

**Definição 1.6.** *Dados  $A, B \in \mathcal{M}_2(\Omega)$  dizemos que  $A \leq B$  se tivermos a desigualdade  $\langle A(x)z, z \rangle \leq \langle B(x)z, z \rangle$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}^2$ ,  $\forall x \in \Omega$ . Além disso, dizemos que  $A \preceq B$  se  $A \leq B$  com  $B - A$  positiva definida em algum aberto  $\tilde{\Omega}$  contido em  $\Omega$ .*

Agora, enunciamos um resultado, a qual provamos na seção 5.2.

**Lema 1.7.** *Seja  $\beta, \alpha \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ . Então temos as seguintes alternativas*

a) *Se  $\beta \preceq \lambda_{k+1}A$ , então existe  $\delta > 0$  tal que*

$$\|z\|^2 - \int_{\Omega} \langle \beta(x)z, z \rangle dx \geq \delta \|z\|^2, \quad \forall z \in V_k^{\perp}. \quad (1.42)$$

b) *Se  $\lambda_{k-1}A \preceq \alpha$ , então existe  $\delta > 0$  tal que*

$$\|z\|^2 - \int_{\Omega} \langle \alpha(x)z, z \rangle dx \leq -\delta \|z\|^2, \quad \forall z \in V_{k-1}. \quad (1.43)$$

Agora, consideremos a seguinte definição

**Definição 1.8.** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert e  $I : H \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional de classe  $C^1$ . Dizemos que um ponto crítico  $z_1 \in H$  é do tipo do passo da montanha quando  $C_1(I, z_1) \neq 0$ . Aqui,  $C_1(I, z_1)$  denota o grupo critico de índice um do ponto critico  $z_1$ , veja Apêndice B.*

Neste momento, destacamos uma propriedade inerente a pontos críticos do tipo do passo da montanha. Esta propriedade determinará todos os grupos críticos de um ponto crítico do tipo do passo da montanha. Para demonstrar este resultado combinaremos o Teorema de Shifting, veja Apêndice B, e a desigualdade variacional (1.6). Assim, temos o

**Lema 1.9.** [15] *Seja  $z_1 \in H$  um ponto crítico do tipo do passo da montanha. Além disso, suponha que  $F''(x, z_1) \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ . Então  $C_q(I, z_1) = \delta_{q1}\mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}$ .*

*Demonstração.* Inicialmente, seja um ponto crítico  $z_1$  do tipo do passo da montanha, ou seja,  $z_1$  satisfaz

$$C_1(I, z_1) \neq 0. \quad (1.44)$$

Neste momento defina  $B(x) = F''(x, z_1(x)), \forall x \in \Omega$ . Seja  $l$  o índice de Morse em  $z_1$ . Assim, usando o Teorema de Shifting, temos a seguinte informação

$$C_q(I, z_1) = C_{q-l}(\tilde{I}, 0), \forall q \in \mathbb{N}, \quad (1.45)$$

onde  $\tilde{I} = I|_N$ , e  $N$  é uma subvariedade característica definida em uma vizinhança apropriada da origem, veja Teorema 5.4 capítulo 1 de [14].

Por outro lado, usando (1.44) e (1.45), obtemos que  $l \leq 1$ . Com efeito, aplicando o Teorema de Shifting, obtemos que  $C_{1-l}(\tilde{I}, 0) = C_1(I, z_1) \neq 0$ . Portanto, temos que  $1 - l \geq 0$ , ou seja,  $l \leq 1$ .

Agora analisaremos o caso onde  $l = 1$  e posteriormente analisaremos o caso onde  $l = 0$ . Assim, se  $l = 1$  então, usando Teorema de Shifting, concluímos que

$$C_q(I, z_1) = C_{q-1}(\tilde{I}, 0), \forall q \in \mathbb{N}. \quad (1.46)$$

Em particular, temos que  $C_0(\tilde{I}, 0) \neq 0$ . Esta informação implica que 0 é mínimo local para o funcional  $\tilde{I}$ . Portanto, temos as seguintes igualdades

$$C_q(I, z_1) = C_{q-1}(\tilde{I}, 0) = \delta_{(q-1)0}\mathbb{Z} = \delta_{q1}\mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}. \quad (1.47)$$

Agora consideraremos o caso onde  $l = 0$ . Neste caso,  $z_1$  é um ponto crítico degenerado. Além disso, temos que  $I''(z_1) = I - T_{A+B}$ , ou seja, dados  $w_1, w_2 \in H$  temos que  $I''(z_1)(w_1, w_2) = \langle w_1, w_2 \rangle - \langle T_{A+B}w_1, w_2 \rangle$ . Contudo, usando que  $l = 0$ , obtemos que  $I''(z_1)$  é não negativa. Esta afirmação implica que

$$\|w\|^2 \geq \langle T_{A+B}w, w \rangle, \forall w \in H. \quad (1.48)$$

Assim, aplicando a caracterização variacional para o primeiro autovalor da matriz  $A + B$ , temos que  $\lambda_1(A + B) \geq 1$ . Agora, dado  $w \in \text{Ker} I''(z_1) \setminus \{0\}$  temos as seguintes desigualdades

$$\frac{1}{\lambda_1(A + B)} = \sup \{ \langle T_{A+B}z, z \rangle : \|z\| = 1, z \in H \} \geq \frac{\langle T_{A+B}w, w \rangle}{\|w\|^2} = 1. \quad (1.49)$$

Portanto, temos que  $\lambda_1(A + B) = 1$ . Assim, temos que  $\ker I''(z_1)$  é igual ao autoespaço associado ao primeiro autovalor de  $\lambda_1(A + B)$ . Em particular, usando a simplicidade deste autovalor, obtemos que  $\dim \ker I''(z_1) = 1$ .

Deste modo, temos que  $\tilde{I}$  está definida sobre uma subvariedade de dimensão 1. Além disso, usando a equação (1.44), segue que  $C_1(\tilde{I}, 0) \neq 0$ . Consequentemente, temos que 0 é um máximo local para  $\tilde{I}$ . Assim, usando o Teorema de Shifting e o Teorema 1.6 do capítulo do 2 de [14], temos que

$$C_q(I, z_1) = C_q(\tilde{I}, 0) = \delta_{q1}\mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}. \quad (1.50)$$

Resumindo, se  $l = 0$  ou 1 temos que  $C_q(I, z_1) = \delta_{q1}\mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}$ , desde que tenhamos  $F''(x, z_1) \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ . Esta afirmação finaliza a demonstração do lema.

□

Deste modo, combinando os Lemas 1.7 e 1.9, temos o seguinte resultado

**Teorema 1.10.** *Suponha  $\nabla F$  limitada. Então temos as seguintes alternativas*

- a) *Suponha  $(LL)_1^+$  com  $F''(x, z) \in \mathcal{M}_2(\Omega), \forall (x, z) \in \Omega$ . Além disso, suponha que  $F''(x, 0) \geq \alpha - A$ , para algum  $\alpha \in \mathcal{M}_2(\Omega)$  com  $\alpha \succeq \lambda_2(A)A$ . Então o problema (1.41) admite uma solução não trivial  $z_1 \neq 0$ .*

**b)** Suponha  $(LL)_1^-$ . Além disso, suponha que  $F''(x, 0) \geq \beta - A$ , com  $\beta \succeq \lambda_1(A)A$ .  
Então problema (1.41) admite uma solução não trivial  $z_0 \neq 0$ .

*Demonstração.* Inicialmente provaremos o item a). A prova deste caso segue usando a Teoria de Morse. Mais especificamente, iremos fazer uma estimativa do índice de Morse na origem. Usando tal estimativa provaremos que a solução obtida pelo Teorema 1.5 é não trivial.

Com efeito, usando o Teorema 1.5 e o Lema 1.9, obtemos um ponto crítico  $z_1$  satisfazendo

$$C_1(I, z_1) = \delta_{q_1}\mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}. \quad (1.51)$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} I''(0)(z, z) &= \|z\|^2 - \int_{\Omega} \langle A(x)z, z \rangle dx - \int_{\Omega} F''(x, 0)(z, z) dx \\ &\leq \|z\|^2 - \int_{\Omega} \langle \alpha(x)z, z \rangle dx \leq -\delta\|z\|^2 < 0, \forall z \in V_2 \setminus \{0\}, \end{aligned} \quad (1.52)$$

onde usamos a desigualdade variacional (1.8) e o Lema (1.7). Consequentemente, temos que  $m(0) \geq \dim V_2 \geq 2$ . Portanto, usando o Lema de Gromoll-Meyer, veja no Apêndice B, concluímos que  $C_1(I, 0) = 0$ . Assim, temos que  $z_1 \neq 0$ . Esta afirmação finaliza a demonstração do item a).

Agora provaremos o item b). Novamente temos uma estimativa análoga para o índice de Morse na origem. Inicialmente, lembramos que existe um ponto crítico  $z_0$  tal que  $C_q(I, z_0) = \delta_{q_0}\mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}$ . Por outro lado, temos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} I''(0)(z, z) &= \|z\|^2 - \int_{\Omega} \langle A(x)z, z \rangle dx - \int_{\Omega} F''(x, 0)(z, z) dx \\ &\leq \|z\|^2 - \int_{\Omega} \langle \beta(x)z, z \rangle dx \leq -\delta\|z\|^2 < 0, \forall z \in V_1 \setminus \{0\}, \end{aligned} \quad (1.53)$$

onde usamos a desigualdade variacional (1.7) e o Lema (1.7). Consequentemente obtemos  $m(0) \geq \dim V_1 = 1$ . Assim, usando o Lema de Gromoll-Meyer, ver Apêndice

B, temos que  $C_0(I, 0) = 0$ . Portanto  $z_0 \neq 0$ , isto finaliza a demonstração deste teorema.  $\square$

**Observação 1.** *Seja  $z = (u, v) \in H = H_0^1(\Omega)^2$  solução de (1.41) então multiplicando a primeira equação em (1.41) por  $\phi_1$  e multiplicando a segunda equação em (1.41) por  $\psi_1$  e integrando por partes obtemos*

$$\int_{\Omega} F_u(x, u, v)\phi_1 + F_v(x, u, v)\psi_1 dx = \int_{\Omega} h_1\phi_1 + h_2\psi_1 dx \quad (1.54)$$

Portanto  $z = (u, v)$  é solução para o problema (1.41) desde que  $z = (u, v)$  satisfaça (1.54). Em outras palavras, a identidade (1.54) é uma condição necessária para que  $z = (u, v)$  seja solução do problema (1.41). Porém, queremos determinar condições necessárias e suficientes para a solubilidade de (1.41).

Neste caso, supomos as seguintes desigualdades  $g_1 < F_u < g_2$  e  $g_3 < F_v < g_4$  onde  $g_1, \dots, g_4$  são funções em  $L^2(\Omega)$ . Assim, escrevemos a equação (1.54) na seguinte forma:

$$\int_{\Omega} g_1\phi_1 + g_3\psi_1 dx < \int_{\Omega} h_1\phi_1 + h_2\psi_1 dx < \int_{\Omega} g_2\phi_1 + g_4\psi_1 dx. \quad (1.55)$$

Logo se  $g_1 = f_1^{--}, g_2 = f_1^{++}, g_3 = f_2^{--}$  e  $g_4 = f_2^{++}$  então a condição  $(LL)_1^+$  é uma condição necessária e suficiente para a existência de soluções de (1.41). Analogamente, teremos que  $(LL)_1^-$  é uma condição necessária e suficiente para a existência de soluções para o problema (1.41) desde que tenhamos  $g_1 = f_1^{++}, g_2 = f_1^{--}, g_3 = f_2^{++}$  e  $g_4 = f_2^{--}$ . Estes subcasos ocorrem, por exemplo, quando as funções  $F_u$  e  $F_v$  são monótonas crescentes ou decrescentes nas variáveis  $u$  e  $v$ .

A observação 1 foi motivada pelo caso escalar tratado em [32], onde as condições propostas por Landesmann-Lazer são condições necessárias e suficientes para uma classe de problemas elípticos ressonantes. Essa classe contém, por exemplo, as funções limitadas e monótonas, onde os limites assintóticos em  $\infty$  e  $-\infty$  definem funções em  $L^2(\Omega)$ .

Existe uma observação análoga para o problema (1.41) sobre ressonância em  $\lambda_k(A)$  onde  $k > 1$ . Neste caso, lembramos que  $\lambda_k(A)$  não é simples em geral, portanto a

condição (1.55) sobre ressonância em autovalores  $\lambda_k(A)$  onde  $k > 1$  torna-se mais complicada. Neste caso, temos mais restrições para existência de soluções de 1.41. Mais especificamente, teremos uma coleção de restrições obtidas do problema 1.41 multiplicando por  $(\phi_k, \psi_k)$  e integrando por partes. Aqui,  $(\phi_k, \psi_k)$  denota uma autofunção associado ao autovalor  $\lambda_k(A)$ . Assim, temos uma coleção de restrições que totalizam  $l = \dim(\lambda_k(A))$  equações obtidas pelo processo descrito acima.

Por outro lado, ainda no caso de ressonância em  $\lambda_k(A)$ ,  $k > 1$ , as condições de Landesmann-Lazer são condições necessárias e suficientes para a existência de soluções para (1.41) para uma classe de não linearidades  $F$ . A prova destas afirmações são análogas ao caso discutido na Observação 1. Assim, deixamos a cargo do leitor a verificação destas afirmações.

Para os próximos resultados obtemos multiplicidade de soluções para (1.41) onde combinamos alguns Métodos Min-Max e Teoria de Morse. Primeiramente considere a seguinte hipótese na origem

(H0) Existem  $\delta > 0$  e  $\alpha \in (0, \lambda_1(A))$  tal que

$$F(x, z) \leq \frac{\alpha - 1}{2} \langle A(x)z, z \rangle, \forall x \in \Omega, \forall |z| < \delta.$$

Neste caso, queremos aplicar o Teorema do Passo da Montanha. Inicialmente, provaremos algumas proposições auxiliares. Mais especificamente, temos a

**Proposição 1.11.** *Suponha (H0). Então a origem é um mínimo local para o funcional  $I$ .*

*Demonstração.* Primeiramente usando a hipótese (H0) e a limitação de  $\nabla F$  podemos escolher  $p \in (2, 2^*)$  e uma constante  $C_\epsilon > 0$  tal que

$$F(x, z) \leq \frac{\alpha - 1}{2} \langle A(x)z, z \rangle + C_\epsilon |z|^p, \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2.$$

Usando a estimativa anterior obtemos

$$\begin{aligned}
I(z) &= \frac{1}{2}\|z\|^2 - \langle A(x)z, z \rangle - \int_{\Omega} F(x, z)dx \\
&\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_1}\right)\|z\|^2 - C_{\epsilon} \int_{\Omega} |z|^p dx \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_1}\right)\|z\|^2 - C_{\epsilon}\|z\|^p \\
&\geq \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_1}\right)\|z\|^2 > 0, \text{ com } z \in B_{\rho}(0) \subset H \text{ e } 0 < \rho \leq \rho_0,
\end{aligned} \tag{1.56}$$

onde usamos a desigualdade variacional (1.6), imersões de Sobolev, com  $\rho_0$  suficientemente pequeno. Aqui,  $B_{\rho}(0)$  denota a bola aberta de centro na origem e raio  $\rho$ . Portanto obtemos que 0 é mínimo local para o funcional  $I$ . Esta afirmação finaliza a prova da proposição.  $\square$

Agora, usando a condição  $(LL)_1^+$ , obteremos o restante da geometria exigida para o Teorema do Passo da Montanha. Mais precisamente, temos a

**Proposição 1.12.** *Suponha  $(LL)_1^+$ . Então existe  $z \in H$  tal que  $I(z) < 0$  com  $\|z\| > \rho_0 > 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $z = t\Phi_1$  onde  $t \in \mathbb{R}$  e  $\Phi_1$  é a autofunção normalizada associada ao autovalor  $\lambda_1(A)$ . Logo, usando a condição  $(LL)_1^+$  e a Proposição (A.2), temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, t\Phi_1)}{t} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla F(x, t\Phi_1) \Phi_1 dx = \int_{\Omega} (f_1^{++}, f_2^{++}) \Phi_1 dx > 0. \tag{1.57}$$

Assim, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $M > 0$  tal que  $t \geq M > 0$  implica

$$\int_{\Omega} \frac{F(x, t\Phi_1)}{t} dx > \epsilon. \tag{1.58}$$

Então, obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
I(t\Phi_1) &= \frac{1}{2}\|t\Phi_1\|^2 - \frac{1}{2}\langle A(x)t\Phi_1, t\Phi_1 \rangle - \int_{\Omega} F(x, t\Phi_1)dx \\
&= - \int_{\Omega} F(x, t\Phi_1)dx = -t \int_{\Omega} \frac{F(x, t\Phi_1)}{t} dx < -\epsilon t \rightarrow -\infty \text{ se } t \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{1.59}$$

Consequentemente temos  $I(t\Phi_1) < 0$  e  $\|t\Phi_1\| = t > \rho_0$  com  $t > 0$  e  $\rho_0$  suficientemente pequeno dado pela Proposição 1.11. De forma análoga, usando a condição  $(LL)_1^+$ , obtemos a seguinte estimativa

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, t\Phi_1)}{t} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_{\Omega} \nabla F(x, t\Phi_1) \Phi_1 dx = \int_{\Omega} (f_1^{--}, f_2^{--}) \Phi_1 dx < 0. \quad (1.60)$$

Portanto para todo  $\epsilon > 0$  existe  $M > 0$  tal que  $-t \geq M > 0$  implica

$$\int_{\Omega} \frac{F(x, t\Phi_1)}{t} dx < -\epsilon. \quad (1.61)$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} I(t\Phi_1) &= \frac{1}{2} \|t\Phi_1\|^2 - \frac{1}{2} \langle A(x)t\Phi_1, t\Phi_1 \rangle - \int_{\Omega} F(x, t\Phi_1) dx \\ &= - \int_{\Omega} F(x, t\Phi_1) dx = -t \int_{\Omega} \frac{F(x, t\Phi_1)}{t} dx < \epsilon t \rightarrow -\infty \text{ se } t \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Novamente obtemos  $I(t\Phi_1) < 0$  e  $\|t\Phi_1\| = -t > \rho_0$  com  $t < 0$  e  $\rho_0$  suficientemente pequeno fornecido pelo Lema 1.11. Esta afirmação finaliza a demonstração da proposição.  $\square$

Assim, usando as Proposições 1.11 e 1.12, obtemos os seguintes resultados

**Teorema 1.13.** *Suponha  $(LL)_1^+, (H0)$ . Então o problema (1.41) admite uma solução não trivial.*

*Demonstração.* A prova deste teorema segue usando o Teorema do Passo da Montanha. Neste caso, basta aplicar as Proposições 1.11 e 1.12. Assim, obtemos um ponto crítico  $z_1$  para  $I$  tal que  $I(z_1) \geq \alpha > 0$ . Portanto, temos que  $z_1 \neq 0$ . Além disso, temos que  $C_q(I, z_1) = \delta_{q1}\mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}$ , desde que  $F''(x, z_1) \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ , veja Lema 1.9. Esta afirmação finaliza a prova do teorema.  $\square$

Agora, com intuito de usarmos a condição  $(LL)_1^-$ , consideramos a seguinte hipótese

(H1) Existe  $t_* \in \mathbb{R}^*$  tal que  $\int_{\Omega} F(x, t_*\Phi_1) dx > 0$ .

Deste modo, usando o Teorema 1.5, obtemos o seguinte resultado

**Teorema 1.14.** *Suponha  $\nabla F$  limitada. Além disso, suponha  $(LL)_1^-$  e  $(H1)$ . Então o problema (1.41) admite uma solução não trivial.*

*Demonstração.* A prova deste teorema segue do Princípio Variacional de Ekeland, ver Teorema 1.5-b. Assim, usando a hipótese  $(H1)$ , obtemos um ponto crítico  $z_0 \in H$  satisfazendo  $I(z_0) \leq I(t_*\Phi_1) < 0 = I(0)$ , portanto  $z_0 \neq 0$ . Além disso,  $z_0$  é um mínimo global para o funcional  $I$ . Consequentemente, temos  $C_q(I, z_0) = \delta_{q0}\mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}$ . Esta afirmação finaliza a demonstração do teorema.  $\square$

Agora, queremos obter multiplicidade de soluções para o problema (1.41) combinando os resultados anteriores. Neste caso, temos o

**Teorema 1.15.** *Suponha  $\nabla F$  limitada. Além disso, suponha  $(H0), (H1)$  e  $(LL)_1^-$ . Então o problema (1.41) admite duas soluções não triviais.*

*Demonstração.* Primeiramente usando o Teorema 1.5 obtemos, via Princípio Variacional de Ekeland, um ponto crítico  $z_0 \in H$  tal que  $I(z_0) = \inf\{I(z)|z \in H\}$ . Além disso, usando a hipótese  $(H1)$ , temos  $I(z_0) \leq I(t_*\Phi_1) < 0 = I(0)$ , logo  $z_0 \neq 0$ .

Agora, usando a hipótese  $(H1)$  e a Proposição 1.11 obtemos, via Teorema do Passo da Montanha, um ponto crítico  $z_1 \in H$  tal que  $I(z_1) > 0 = I(0)$ . Portanto  $z_1 \neq 0$  e  $z_1 \neq z_0$ , pois  $I(z_0) < 0$ . Esta afirmação finaliza a prova do teorema.  $\square$

## Capítulo 2

# Sistemas Elípticos Gradientes Ressonantes com condições de Landesman-Lazer em autovalores não Principais.

Neste capítulo, trabalhamos com uma classe de sistemas gradientes com ressonância em autovalores altos. Mais precisamente, estudamos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + b(x)v + F_u(x, u, v) - h_1(x) & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = b(x)u + d(x)v + F_v(x, u, v) - h_2(x) & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado e suave em  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ . Além disso, exigimos que a função  $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  seja de classe  $C^2$  e que a matriz  $A = A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & d(x) \end{pmatrix}$  satisfaça as seguintes condições:

( $M_0$ )  $A \in C^0(\overline{\Omega}, M_{2 \times 2}(\mathbb{R}))$ , onde  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  é o conjunto das matrizes reais simétricas de ordem 2;

( $M_1$ )  $A$  é cooperativo, isto é,  $b(x) \geq 0$  para todo  $x \in \overline{\Omega}$ ;

$(M_2) \max_{x \in \Omega} \max \{a, d\} > 0$ , ou seja, existe  $x_0 \in \Omega$  tal que  $a(x_0) > 0$  ou  $d(x_0) > 0$ .

Assim, estudamos o problema ressonante para (1.1) onde impomos que  $\nabla F$  seja limitada em  $\Omega \times \mathbb{R}^2$ . Estes problemas foram estudados inicialmente, no caso escalar, por [32]. Mais precisamente, trabalhamos com a seguinte hipótese:

$$\lim_{u, v \rightarrow \pm\infty} \nabla F(x, u, v) \neq 0, \text{ com } \nabla F \text{ limitada em } \Omega \times \mathbb{R}^2. \quad (2.2)$$

Além disso, impomos que  $\lambda_k(A) = 1$  para algum  $k > 1$ . Estes problemas revelam-se mais interessantes tendo em vista que as autofunções associadas aos autovalores  $\lambda_k(A)$  trocam de sinal e o autoespaço onde ocorre a ressonância pode possuir dimensão maior que 1, ou seja,  $\lambda_k(A)$  pode não ser simples com  $k > 1$ .

## 2.1 Sistemas gradientes sob ressonância em autovalores não principais.

Nesta seção, estudaremos o problema (2.1) com ressonância em algum autovalor  $\lambda_k(A)$ , onde  $k > 1$ . Novamente, suponha que  $\nabla F$  seja uma função limitada em  $\Omega \times \mathbb{R}^2$ . Assim, definimos as seguintes funções auxiliares

$$\begin{aligned} f_1^{++}(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \infty}} F_u(x, u, v), & f_1^{\pm}(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow -\infty}} F_u(x, u, v), \\ f_1^{\mp}(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow \infty}} F_u(x, u, v), & f_1^{--}(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow -\infty}} F_u(x, u, v), \\ f_2^{++}(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \infty}} F_v(x, u, v), & f_2^{\pm}(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow -\infty}} F_v(x, u, v), \\ f_2^{\mp}(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow \infty}} F_v(x, u, v), & f_2^{--}(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow -\infty}} F_v(x, u, v), \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde os limites acima são uniformes em  $x \in \Omega$ . Novamente, pedimos que as funções acima estejam em  $L^2(\Omega)$ .

Agora, definimos a seguinte quantidade

$$\begin{aligned} L_k = & \int_{u>0, v>0} f_1^{++}u + f_2^{++}v dx + \int_{u<0, v>0} f_1^{\mp}u + f_2^{\mp}v dx + \\ & + \int_{u>0, v<0} f_1^{\pm}u + f_2^{\pm}v dx + \int_{u<0, v<0} f_1^{--}u + f_2^{--}v dx. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Seja  $V(\lambda_k) = \ker(I - T_A) =$  autoespaço associado ao autovalor ressonante  $\lambda_k(A)$ . Neste momento descreveremos as condições de Landesman-Lazer adaptadas para o sistema elíptico (1.3) onde impomos ressonância no autovalor  $\lambda_k(A)$ . Neste caso, temos a seguinte condição

$$(LL)_k^+ \quad L_k > \int_{\Omega} h_1 u + h_2 v dx, \quad \forall z = (u, v) \in V(\lambda_k), z \neq 0, \quad (2.5)$$

onde  $L_k$  é dada em (2.4).

Agora, descreveremos uma segunda condição de Landesman-Lazer obtida da primeira "apenas" invertendo a desigualdade acima. Neste caso, temos a seguinte condição

$$(LL)_k^- \quad L_k < \int_{\Omega} h_1 u + h_2 v dx, \quad \forall z = (u, v) \in V(\lambda_k), z \neq 0. \quad (2.6)$$

Para o próximo resultado usaremos o Princípio da Continuação Única Fraco. Mais precisamente, temos a

**Definição 2.1.** *Seja  $\Lambda = (F_\lambda)_{\lambda \in L}$ , onde  $F_\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \forall \lambda \in \Lambda$ . Então dizemos que a coleção  $\Lambda$  satisfaz o Princípio da Continuação Única Fraco, se para todo  $F_\lambda \in \Lambda$  com  $F_\lambda = 0$  em algum subconjunto aberto implica que  $F_\lambda \equiv 0$  em  $\Omega$ .*

Neste caso, teremos que as autofunções do problema (1.4) satisfazem o Princípio da Continuação Única Fraco. Em outras palavras, as autofunções associadas ao problema (1.4) são não nulas em subconjuntos abertos de  $\Omega$ , veja [35], [31]. Assim, somos capazes de provar o

**Lema 2.2.** *Suponha  $(LL)_k^+$  ou  $(LL)_k^-$ . Então o funcional  $I$  satisfaz a condição (PS).*

*Demonstração.* A prova deste lema possui as mesmas idéias desenvolvidas na demonstração do Lema 1.1. Contudo, a demonstração deste lema é mais elaborada. Basicamente, existem dificuldades adicionais porque as autofunções associadas a  $\lambda_k(A)$  mudam de sinal e o autovalor  $\lambda_k(A)$  não é simples em geral, com  $k > 1$ . Neste caso, utilizaremos o Princípio da Continuação Única Fraco para as autofunções do problema (1.4) para concluirmos que o funcional  $I$  satisfaz a condição  $(PS)$ . Deste modo, faremos a prova deste resultado.

Novamente, como no Lema 1.1, é suficiente provar que toda sequência  $(PS)_c$  é limitada, onde  $c \in \mathbb{R}$ . Suponha que esta afirmação seja falsa. Assim, existe uma sequência  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$  tal que

- $I(z_n) \rightarrow c$ ,
- $I'(z_n) \rightarrow 0$ ,
- $\|z_n\| \rightarrow \infty$  se  $n \rightarrow \infty$ .

Defina  $\bar{z}_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$ , logo  $\|\bar{z}_n\| = 1$ . Portanto existe  $\bar{z} \in H$  tal que

- $\bar{z}_n \rightharpoonup \bar{z}$  em  $H$
- $\bar{z}_n \rightarrow \bar{z}$  em  $L^p(\Omega)$  com  $p \in [1, 2^*)$
- $\bar{z}_n(x) \rightarrow \bar{z}(x)$  q.t.p em  $\Omega$  quando  $n \rightarrow \infty$
- Existe  $h \in L^2(\Omega)$  tal que  $\|\bar{z}_n\|_{L^2(\Omega)^2} \leq \|h\|_{L^2(\Omega)}$ .

Por outro lado, dado  $\Phi = (\phi, \psi) \in H$  obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \frac{I'(z_n)\Phi}{\|z_n\|} &= \int_{\Omega} \nabla \bar{u}_n \nabla \phi + \nabla \bar{v}_n \nabla \psi dx - \int_{\Omega} \langle A(x)(\bar{u}_n, \bar{v}_n), (\phi, \psi) \rangle dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \frac{\nabla F(x, u_n, v_n)(\phi, \psi)}{\|z_n\|} dx + \int_{\Omega} \frac{h_1 \phi + h_2 \psi}{\|z_n\|}, \text{ onde } z_n = (u_n, v_n). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Consequentemente, fazendo  $n \rightarrow \infty$  e usando a limitação de  $\nabla F$  em (2.7) obtemos a seguinte identidade

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{u} \nabla \phi + \nabla \bar{v} \nabla u dx - \int_{\Omega} \langle A(x)(\bar{u}, \bar{v}), (\phi, \psi) \rangle dx = 0, \quad \forall \Phi = (\phi, \psi) \in H. \quad (2.8)$$

Além disso, tomando  $\Phi = (\bar{u}_n, \bar{v}_n)$  e aplicando na equação (2.7), obtemos a seguinte igualdade  $\int_{\Omega} \langle A(x)\bar{z}, \bar{z} \rangle dx = 1$  onde  $\bar{z} = (\bar{u}, \bar{v})$ . Mas escolhendo  $\Phi = (\bar{u}, \bar{v})$  e aplicando em (2.8), temos  $\|z\|^2 = \int_{\Omega} \langle A(x)(\bar{u}, \bar{v}), (\bar{u}, \bar{v}) \rangle dx = 1$ . Consequentemente,  $\bar{z}_n \rightarrow \bar{z}$  em  $H$  e  $\bar{z}$  é autofunção associada ao autovalor 1.

Por outro lado, defina  $A_n = \frac{\frac{1}{2}I'(z_n)z_n - I(z_n)}{\|z_n\|}$ . Então  $A_n \rightarrow 0$  se  $n \rightarrow \infty$ . Mas usando as expressões de  $I$  e  $I'$  temos a seguinte convergência

$$A_n = \frac{1}{2} \int_{\Omega} 2 \frac{F(x, u_n, v_n)}{\|z_n\|} - \nabla F(x, u_n, v_n)(\bar{u}_n, \bar{v}_n) dx - \int_{\Omega} h_1 \bar{u}_n + h_2 \bar{v}_n dx \rightarrow 0. \quad (2.9)$$

Contudo, lembramos que  $\bar{z}_n \rightarrow \bar{z}$  em  $L^2(\Omega)^2$  a qual implica a seguinte convergência

$$\int_{\Omega} h_1 \bar{u}_n + h_2 \bar{v}_n dx \rightarrow \int_{\Omega} h_1 \bar{u} + h_2 \bar{v} dx \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.10)$$

Além disso, usando as funções auxiliares (2.3), temos

$$\begin{aligned} \nabla F(x, u_n, v_n) &\rightarrow (f_1^{++}(x), f_2^{++}(x)) \text{ se } x \in \{x \in \Omega : \bar{u}(x) > 0 \text{ e } \bar{v}(x) > 0\} \\ \nabla F(x, u_n, v_n) &\rightarrow (f_1^{\pm}(x), f_2^{\pm}(x)) \text{ se } x \in \{x \in \Omega : \bar{u}(x) > 0 \text{ e } \bar{v}(x) < 0\} \\ \nabla F(x, u_n, v_n) &\rightarrow (f_1^{\mp}(x), f_2^{\mp}(x)) \text{ se } x \in \{x \in \Omega : \bar{u}(x) < 0 \text{ e } \bar{v}(x) > 0\} \\ \nabla F(x, u_n, v_n) &\rightarrow (f_1^{--}(x), f_2^{--}(x)) \text{ se } x \in \{x \in \Omega : \bar{u}(x) < 0 \text{ e } \bar{v}(x) < 0\} \end{aligned}$$

se  $n \rightarrow \infty$ . Contudo, usando o Princípio da Continuação Única Fraco, temos que  $\bar{z} \neq 0$  em  $A$ , para todo aberto  $A \subset \Omega$ . Consequentemente, temos que  $\Omega_0 = \{x \in \Omega : \bar{z}(x) = 0\}$  possui interior vazio em  $\Omega$ . Deste modo, nas estimativas com integrais abaixo o subconjunto  $\Omega_0$  pode ser descartado.

Assim, usando as informações acima, obtemos a seguinte convergência

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla F(x, u_n, v_n) \bar{z}_n dx &\rightarrow \int_{\bar{u}>0, \bar{v}>0} (f_1^{++}(x), f_2^{++}(x)) \bar{z} dx + \int_{\bar{u}>0, \bar{v}<0} (f_1^{\pm}(x), f_2^{\pm}(x)) \bar{z} dx \\ &+ \int_{\bar{u}<0, \bar{v}>0} (f_1^{\mp}(x), f_2^{\mp}(x)) \bar{z} dx + \int_{\bar{u}<0, \bar{v}<0} (f_1^{--}(x), f_2^{--}(x)) \bar{z} dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Por outro lado, usando a condição  $(LL)_k^+$  e a Proposição A.3, temos a seguinte convergência

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{F(x, u_n, v_n)}{\|z_n\|} dx &\rightarrow \int_{\bar{u}>0 \bar{v}>0} (f_1^{++}(x), f_2^{++}(x)) \bar{z} dx + \int_{\bar{u}>0 \bar{v}<0} (f_1^{\pm}(x), f_2^{\pm}(x)) \bar{z} dx \\ &+ \int_{\bar{u}<0 \bar{v}>0} (f_1^{\mp}(x), f_2^{\mp}(x)) \bar{z} dx + \int_{\bar{u}<0 \bar{v}<0} (f_1^{--}(x), f_2^{--}(x)) \bar{z} dx. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Portanto, as convergências em (2.9), (2.10), (2.11) e (2.12) implicam a seguinte identidade

$$\begin{aligned} &\int_{\bar{u}>0 \bar{v}>0} (f_1^{++}(x), f_2^{++}(x)) \bar{z} dx + \int_{\bar{u}>0 \bar{v}<0} (f_1^{\pm}(x), f_2^{\pm}(x)) \bar{z} dx + \\ &+ \int_{\bar{u}<0 \bar{v}>0} (f_1^{\mp}(x), f_2^{\mp}(x)) \bar{z} dx + \int_{\bar{u}<0 \bar{v}<0} (f_1^{--}(x), f_2^{--}(x)) \bar{z} dx = \int_{\Omega} (h_1, h_2) \bar{z} dx. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Contudo  $\bar{z} = (\bar{u}, \bar{v})$  é autofunção associada ao autovalor  $\lambda_k(A) = 1$  com  $\|\bar{z}\| = 1$ . Assim, temos uma contradição com  $(LL)_k^+$  ou  $(LL)_k^-$ . Então toda sequência  $(PS)_c$  é limitada. Esta afirmação finaliza a demonstração do lema.  $\square$

Agora, destacamos algumas propriedades inerentes a geometria do funcional  $I$ . Neste caso, provamos o seguinte resultado

**Proposição 2.3.** *Suponha  $(LL)_k^+$ . Então o funcional  $I$  possui a seguinte geometria*

**a)**  $I(z) \rightarrow \infty$  se  $\|z\| \rightarrow \infty$  com  $z = (u, v) \in V_k^{\perp}$ .

**b)** Existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $I(z) \leq \alpha$ ,  $\forall z \in V_k$ .

*Demonstração.* A prova deste lema é análoga a prova do Proposição 1.2. No entanto, vamos fazer a demonstração deste resultado.

Primeiramente provaremos o item a). Seja  $z = (u, v) \in V_k^{\perp}$ , então seguem as

seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
I(z) &= \frac{1}{2}\|z\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(x)z, z \rangle dx - \int_{\Omega} F(x, z) dx + \int_{\Omega} h_1 u + h_2 v dx \quad (2.14) \\
&\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}}\right) \|z\|^2 - \int_{\Omega} F(x, z) dx + \int_{\Omega} h_1 u + h_2 v dx \\
&\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}}\right) \|z\|^2 - \frac{1}{2} \epsilon \|z\|^2 - C_{\epsilon} \rightarrow \infty \text{ se } \|z\| \rightarrow \infty \text{ com } z \in V_k^{\perp},
\end{aligned} \quad (2.15)$$

onde usamos a desigualdade variacional (1.8), imersões de Sobolev, e as condição de crescimento fornecidas em (1.13). Assim, o item *a*) está provado.

Para a prova do item *b*) devemos mostrar que  $I(z) \leq \alpha$ ,  $\forall z = (u, v) \in V_k$  para algum  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Suponha que esta afirmação seja falsa. Então existe uma sequência  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V_k$  tal que

- $I(z_n) > n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,
- $\|z_n\| \rightarrow \infty$  se  $n \rightarrow \infty$ .

Agora, escrevemos  $z_n = z_n^0 + w_n \in V_k = V(\lambda_k) \oplus V_{k-1}$ , com  $z_n^0 \in V(\lambda_k) = \text{autoespaço}$  associado ao autovalor  $\lambda_k = 1$  e  $w_n \in V_{k-1}$ . Portanto, segue as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}
I(z_n) &= \frac{1}{2}\|w_n\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(x)w_n, w_n \rangle - \int_{\Omega} F(x, z_n^0 + w_n) dx + \int_{\Omega} (h_1, h_2)(z_n^0 + w_n) dx \\
&\leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{k-1}}\right) \|w_n\|^2 - \int_{\Omega} F(x, z_n^0 + w_n) dx + \int_{\Omega} (h_1, h_2)(z_n^0 + w_n) dx \\
&\leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{k-1}}\right) \|w_n\|^2 + \frac{1}{2} \epsilon \|z_n^0 + w_n\|^2 + C_{\epsilon},
\end{aligned} \quad (2.16)$$

onde usamos a desigualdade variacional (1.7) e as condições de crescimento fornecidas em (1.11) e (1.13).

**Afirmção 2.4.** *Temos que  $\|z_n^0\| \rightarrow \infty$  se  $n \rightarrow \infty$ .*

Novamente, a prova da afirmação é por contradição. Suponha que  $\|z_n^0\|$  seja limitada. Então obtemos  $\|w_n\| \rightarrow \infty$  pois  $\|z_n\| \rightarrow \infty$  com  $n \rightarrow \infty$ . Deste modo, aplicando

a estimativa em (2.16) concluimos que  $I(z_n) \rightarrow -\infty$ . Portanto, temos um absurdo. Pois inicialmente temos que  $I(z_n) > n$  por construção. Consequentemente segue afirmação, ou seja,  $\|z_n^0\| \rightarrow \infty$  se  $n \rightarrow \infty$ .

Agora, defina  $s_n = \frac{z_n^0}{\|z_n^0\|} = \left( \frac{u_n^0}{\|z_n\|}, \frac{v_n^0}{\|z_n\|} \right) \in V(\lambda_k)$ . Logo, existe  $s_0 \in V(\lambda_k)$  tal que

- $s_n \rightarrow s_0$  em  $V(\lambda_k)$ ,
- $s_n \rightarrow s_0$  em  $L^p(\Omega)^2$ ,
- $s_n(x) \rightarrow s_0(x)$  q. t. p. em  $\Omega$ .

Além disso,  $\|s_0\| = 1$ . Assim, usando as desigualdades (1.11) e (1.13), obtemos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} I(z_n) &\leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{k-1}}\right) \|w_n\|^2 - \int_{\Omega} F(x, z_n^0 + w_n) dx - \int_{\Omega} (h_1, h_2)(z_n^0 + w_n) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{k-1}} + \epsilon\right) \|w_n\|^2 + \epsilon \|z_n^0\|^2 + C_{\epsilon}. \end{aligned}$$

Logo, defina  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|w_n\|}{\|z_n^0\|}$ , então  $L \in [0, \infty]$ . Considere os seguintes casos

- 1)  $L = \infty$ ,
- 2)  $L \in (0, \infty)$ ,
- 3)  $L = 0$ .

Então queremos obter uma contradição nos casos 1), 2) ou 3).

Inicialmente consideramos o caso 1). Neste caso, temos que  $\|w_n\| \geq M \|z_n^0\|$ , para  $n \geq n_0$ ,  $\forall M > 0$ . Deste modo, obtemos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} I(z_n) &\leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{k-1}} + \epsilon\right) \|w_n\|^2 + \epsilon \|z_n^0\|^2 + C_{\epsilon} \\ &\leq \frac{M^2}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{k-1}} + \epsilon\right) \|z_n^0\|^2 + \epsilon \|z_n^0\|^2 + C_{\epsilon} \rightarrow -\infty \text{ se } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Entretanto sabemos que  $I(z_n) > n$  por construção, logo temos uma contradição. Consequentemente o caso 1) não ocorre, ou seja,  $L \neq \infty$ .

Agora, consideramos o caso 2). Então para cada  $\epsilon > 0$  (pequeno) existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < L - \epsilon < \frac{\|w_n\|}{\|z_n^0\|} < L + \epsilon$  desde que  $n \geq n_0$ . Deste modo, temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} I(z_n) &\leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{k-1}} + \epsilon\right) \|w_n\|^2 + \epsilon \|z_n^0\|^2 + C_\epsilon \\ &\leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{k-1}} + \epsilon\right) (L - \epsilon)^2 \|z_n^0\|^2 + \epsilon \|z_n^0\|^2 + C_\epsilon \\ &\rightarrow -\infty \text{ quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Novamente temos uma contradição, haja vista que  $I(z_n) > n$  por construção. Portanto os casos 1) e 2) não ocorrem.

Finalmente, consideramos o caso 3). Neste caso, temos a seguinte identidade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, z_n^0 + w_n)}{\|z_n^0\|} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, z_n^0)}{\|z_n^0\|} dx, \tag{2.19}$$

a qual é provada na Proposição A.5.

Além disso, usando a Proposição A.3 Apêndice, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, z_n^0)}{\|z_n^0\|} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla F(x, z_n^0) s_n dx, \tag{2.20}$$

onde  $s_n = \frac{z_n^0}{\|z_n^0\|} = \left( \frac{u_n^0}{\|z_n^0\|}, \frac{v_n^0}{\|z_n^0\|} \right) \in V(\lambda_k)$ .

Assim, usando a condição  $(LL)_k^+$ , (2.19) e (2.20), temos que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq n_0$  implica

$$\int_{\Omega} \frac{F(x, z_n^0 + w_n)}{\|z_n^0\|} dx > \int_{\Omega} (h_1, h_2) s_0 dx + 2\epsilon. \tag{2.21}$$

Agora, usando (2.21), obtemos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}
I(z_n) &\leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_{k-1}}\right)\|w_n\|^2 - \|z_n^0\| \int_{\Omega} \frac{F(x, z_n^0 + w_n)}{\|z_n^0\|} dx + \|z_n^0\| \int_{\Omega} \frac{(h_1, h_2)(z_n^0 + w_n)}{\|z_n^0\|} dx \\
&\leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_{k-1}}\right)\|w_n\|^2 - \|z_n^0\| \left( \int_{\Omega} (h_1, h_2)s_0 + 2\epsilon \right) \\
&\quad + \|z_n^0\| \int_{\Omega} (h_1, h_2)s_n dx + \int_{\Omega} (h_1, h_2)w_n dx \\
&\leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_{k-1}} + \epsilon\right)\|w_n\|^2 - \|z_n^0\| \left( \int_{\Omega} (h_1, h_2)s_0 + 2\epsilon \right) \\
&\quad + \|z_n^0\| \int_{\Omega} (h_1, h_2)s_n dx + C_{\epsilon} \\
&\leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_{k-1}} + \epsilon\right)\|w_n\|^2 - \|z_n^0\|\epsilon \leq -\epsilon\|z_n^0\|,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

onde  $\epsilon > 0$  é suficientemente pequeno. Logo, obtemos que  $I(z_n) \rightarrow -\infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Novamente temos uma contradição, pois  $I(z_n) > n$  por construção. Portanto nenhum dos casos 1), 2) ou 3) ocorrem. Consequentemente, existe uma constante  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $I(z) \leq \alpha$ ,  $\forall z = (u, v) \in V_k$ . Esta afirmação finaliza a demonstração da proposição.  $\square$

Agora, usando a condição  $(LL)_k^-$ , temos um resultado análogo a proposição anterior. Neste caso, temos o seguinte resultado

**Proposição 2.5.** *Suponha  $(LL)_k^-$ . Então o funcional  $I$  possui a seguinte geometria*

**a)**  $I(z) \rightarrow -\infty$  se  $\|z\| \rightarrow \infty$  com  $z = (u, v) \in V_{k-1}$ .

**b)** Existe  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $I(z) \geq \beta$ ,  $\forall z \in V_{k-1}^{\perp}$ .

*Demonstração.* Primeiramente demonstraremos o item a). Seja  $z = (u, v) \in V_{k-1}$ .

Então segue as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}
I(z) &= \frac{1}{2}\|z\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(x)z, z \rangle dx - \int_{\Omega} F(x, z) dx + \int_{\Omega} h_1 u + h_2 v dx \\
&\leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{k-1}}\right) \|z\|^2 - \int_{\Omega} F(x, z) dx + \int_{\Omega} h_1 u + h_2 v dx \\
&\leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{k-1}}\right) \|z\|^2 + \epsilon \|z\|^2 + C_{\epsilon} \rightarrow -\infty \text{ se } \|z\| \rightarrow \infty \text{ com } z \in V_{k-1}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Nas estimativas acima usamos imersões de Sobolev, a desigualdade variacional (1.7) e as condições de crescimento fornecidas em (1.11) e (1.13). Estas estimativas concluem a demonstração do item *a*).

Agora provaremos o item *b*). Neste caso devemos mostrar que  $I(z) \geq \beta$ ,  $\forall z = (u, v) \in V_{k-1}^{\perp}$  para algum  $\beta \in \mathbb{R}$ . Suponha que esta informação seja falsa, isto é, suponha a existência de uma sequência  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V_{k-1}^{\perp}$  tal que

- $I(z_n) < -n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,
- $\|z_n\| \rightarrow \infty$  se  $n \rightarrow \infty$ .

Logo, podemos escrever  $z_n = z_n^0 + w_n \in V_k = V(\lambda_k) \oplus V_k^{\perp}$ , onde  $(z_n^0)_{n \in \mathbb{N}} \in V(\lambda_k) =$  autoespaço associado ao autovalor  $\lambda_k$  e  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V_k^{\perp}$ . Deste modo, segue as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
I(z_n) &= \frac{1}{2}\|w_n\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(x)w_n, w_n \rangle - \int_{\Omega} F(x, z_n^0 + w_n) dx + \int_{\Omega} (h_1, h_2)(z_n^0 + w_n) dx \\
&\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}}\right) \|w_n\|^2 - \int_{\Omega} F(x, z_n^0 + w_n) dx + \int_{\Omega} (h_1, h_2)(z_n^0 + w_n) dx \\
&\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}}\right) \|w_n\|^2 - \frac{1}{2} \epsilon \|z_n^0 + w_n\|^2 - C_{\epsilon}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

**Afirmção 2.6.**  $\|z_n^0\| \rightarrow \infty$  se  $n \rightarrow \infty$ .

A demonstração desta afirmação é por contradição. Assim, suponha que  $\|z_n^0\|$  seja limitada, ou seja,  $\|z_n^0\| \leq c$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Deste modo, temos que  $\|w_n\| \rightarrow \infty$  pois  $\|z_n\| \rightarrow$

$\infty$  com  $n \rightarrow \infty$ . Por outro lado, usando a estimativa em (2.24), temos que  $I(z_n) \rightarrow \infty$ . Portanto, temos novamente uma contradição tendo em vista que  $I(z_n) < -n$  por construção. Consequentemente a afirmação é verdadeira, isto é,  $\|z_n^0\| \rightarrow \infty$  se  $n \rightarrow \infty$ .

Seja  $s_n = \frac{z_n^0}{\|z_n^0\|} = \left( \frac{u_n^0}{\|z_n^0\|}, \frac{v_n^0}{\|z_n^0\|} \right)$ , onde  $z_n^0 = (u_n^0, v_n^0)$ . Consequentemente a sequência  $s_n$  é limitada sobre um subespaço de dimensão finita, logo existe  $s_0$  em  $V(\lambda_k)$  com  $\|s_0\| = 1$  tal que

- $s_n \rightarrow s_0$  em  $V(\lambda_k)$ ,
- $s_n \rightarrow s_0$  em  $L^p(\Omega)^2$ ,  $\forall p \in [1, 2^*)$ ,
- $s_n(x) \rightarrow s_0(x)$  q. t. p. em  $\Omega$ .

Por outro lado, temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} I(z_n) &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}}\right) \|w_n\|^2 - \int_{\Omega} F(x, z_n^0 + w_n) dx + \int_{\Omega} (h_1, h_2)(z_n^0 + w_n) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}} - \epsilon\right) \|w_n\|^2 - \frac{\epsilon}{2} \|z_n^0\|^2 - C_{\epsilon}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde usamos a desigualdade variacional (1.8), imersões de Sobolev e a condição de crescimento fornecidas em (1.11) e (1.13).

Assim, defina  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|w_n\|}{\|z_n^0\|}$ , portanto  $L \in [0, \infty]$ . Agora, analisando os seguintes casos

- 1)  $L = \infty$ ,
- 2)  $L \in (0, \infty)$ ,
- 3)  $L = 0$ ,

queremos obter uma contradição, ou seja, analisaremos cada um dos casos 1), 2) ou 3) obtendo um absurdo. Consequentemente teremos que a afirmação inicial é verificada, ou seja, existe  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $I(z) \geq \beta$ ,  $\forall z = (u, v) \in V_{k-1}^{\perp}$ .

Inicialmente analisaremos o caso 1). Assim, temos que  $\|w_n\| \geq M\|z_n^0\|$ , para  $n \geq n_0$ ,  $\forall M > 0$ . Portanto obtemos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} I(z_n) &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}} - \epsilon\right)\|w_n\|^2 - \epsilon\|z_n^0\|^2 - C_\epsilon \\ &\geq \frac{M^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_{k-1}} - \epsilon\right)\|z_n^0\|^2 - \epsilon\|z_n^0\|^2 - C_\epsilon \rightarrow \infty \text{ se } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Entretanto sabemos que  $I(z_n) < -n$  por construção, logo temos uma contradição. Portanto o caso 1) não ocorre, ou seja,  $L \neq \infty$ .

Agora analisaremos o caso 2). Neste caso, temos para cada  $\epsilon > 0$  (pequeno) existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < L - \epsilon < \frac{\|w_n\|}{\|z_n^0\|} < L + \epsilon$  desde que  $n \geq n_0$ . Assim, temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} I(z_n) &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}} - \epsilon\right)\|w_n\|^2 - \epsilon\|z_n^0\|^2 - C_\epsilon \\ &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}} - \epsilon\right)(L - \epsilon)^2\|z_n^0\|^2 - \epsilon\|z_n^0\|^2 - C_\epsilon \\ &\rightarrow \infty \text{ quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Novamente temos uma contradição, haja vista que  $I(z_n) < -n$  por construção. Portanto, os casos 1) e 2) não ocorrem.

Finalmente, analisaremos o caso 3). Então, usando a Proposição A.4, temos a seguinte identidade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, z_n^0 + w_n)}{\|z_n^0\|} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, z_n^0)}{\|z_n^0\|} dx. \quad (2.28)$$

Além disso, usando a Proposição A.3, temos a seguinte igualdade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, z_n^0)}{\|z_n^0\|} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla F(x, z_n^0) s_n dx. \quad (2.29)$$

Logo, usando a condição  $(LL)_k^-$ , (2.28) e (2.29), temos que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq n_0$  implica

$$\int_{\Omega} \frac{F(x, z_n^0 + w_n)}{\|z_n^0\|} dx < \int_{\Omega} (h_1, h_2) s_0 dx - 2\epsilon. \quad (2.30)$$

Agora, usando a estimativa (2.30), obtemos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}
I(z_n) &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}}\right)\|w_n\|^2 - \|z_n^0\| \int_{\Omega} \frac{F(x, z_n^0 + w_n)}{\|z_n^0\|} dx + \|z_n^0\| \int_{\Omega} \frac{(h_1, h_2)(z_n^0 + w_n)}{\|z_n^0\|} dx \\
&\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}}\right)\|w_n\|^2 - \|z_n^0\| \left( \int_{\Omega} (h_1, h_2)s_0 - 2\epsilon \right) + \\
&\quad + \|z_n^0\| \int_{\Omega} (h_1, h_2)s_n dx + \int_{\Omega} (h_1, h_2)w_n dx \\
&\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}} - \epsilon\right)\|w_n\|^2 - \|z_n^0\| \left( \int_{\Omega} (h_1, h_2)s_0 - 2\epsilon \right) + \|z_n^0\| \int_{\Omega} (h_1, h_2)s_n dx - C_{\epsilon} \\
&\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}} - \epsilon\right)\|w_n\|^2 - \|z_n^0\| \left( \int_{\Omega} (h_1, h_2)s_0 - 2\epsilon \right) \\
&\quad + \|z_n^0\| \left( \int_{\Omega} (h_1, h_2)s_0 dx - \epsilon \right) - C_{\epsilon} \\
&\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}} - \epsilon\right)\|w_n\|^2 + \epsilon\|z_n^0\| - C_{\epsilon} \geq \epsilon\|z_n^0\|,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

onde  $\epsilon$  é suficientemente pequeno. Assim, por (2.31), temos que  $I(z_n) \rightarrow \infty$  se  $n \rightarrow \infty$ . Consequentemente temos uma contradição, pois  $I(z_n) < -n$  por construção. Enfim, concluímos que nenhum dos casos 1), 2) ou 3) ocorrem, ou seja, existe uma constante  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $I(z) \geq \beta$ ,  $\forall z = (u, v) \in V_{k-1}^{\perp}$ . Esta afirmação finaliza a demonstração da proposição.  $\square$

Finalmente, enunciamos e provamos o principal resultado desta seção. Novamente, provamos que o problema (1.3) admite uma solução para cada par de funções  $h_1, h_2 \in L^2(\Omega)$ . Aqui, lembramos que estamos com ressonância no autovalor  $\lambda_k(A)$  com  $k > 1$ . Neste caso, temos o

**Teorema 2.7.** *Suponha  $\nabla F$  limitada. Além disso, suponha  $(LL)_k^+$  ou  $(LL)_k^-$ . Sejam  $h_1, h_2 \in L^2(\Omega)$ . Então o problema (2.1) admite uma solução.*

*Demonstração.* A prova deste teorema segue das Proposições 2.3, 2.5 e Lema 2.2. Neste caso, basta aplicarmos uma variação do Teorema do Ponto de Sela dado pelo Teorema 3.12, veja Seção 3.2.

Neste caso, faremos a prova deste resultado. Primeiramente, se ocorre  $(LL)_k^+$ , escrevemos  $H = V_k \oplus V_k^{\perp}$ . Neste caso, usando a Proposição 2.3 temos que o funcional

$I$  é limitado superiormente em  $V_k$  e limitado inferiormente em  $V_k^\perp$ . Além disso, usando o Lema 2.2, sabemos que  $I$  satisfaz a condição  $(PS)$ . Assim, aplicando o Teorema 3.12, obtemos um ponto crítico  $z_1 \in H$ . Agora, aplicando o Teorema 1.5 do capítulo 2 em [14], concluímos que  $C_\mu(J, z_1) \neq 0$  com  $\mu = \dim V_k$ , veja o Apêndice B.

Agora, se ocorre  $(LL)_k^-$  então escrevemos  $H = V_{k-1} \oplus V_{k-1}^\perp$ . Neste caso, usando a Proposição 2.5, temos que o funcional  $I$  é limitado superiormente em  $V_{k-1}$  e limitado inferiormente em  $V_{k-1}^\perp$ . Novamente, usando o Lema 2.2, sabemos que  $I$  satisfaz a condição  $(PS)$ . Assim, aplicando o Teorema 3.12, obtemos um ponto crítico  $z_2 \in H$ . Novamente, aplicando o Teorema 1.5 do capítulo 2 em [14], obtemos que  $C_\nu(J, z_2) \neq 0$ , com  $\nu = \dim V_{k-1}$ , veja Apêndice B. Assim, finalizamos a prova deste teorema.  $\square$

Para os próximos resultados fazemos

$$h_1 \equiv 0, h_2 \equiv 0, \nabla F(x, 0, 0) \equiv 0 \text{ e } F(x, 0, 0) \equiv 0. \quad (2.32)$$

Portanto temos o seguinte sistema gradiente

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + b(x)v + F_u(x, u, v) & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = b(x)u + d(x)v + F_v(x, u, v) & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.33)$$

onde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado e suave em  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ . Além disso, exigimos que a função  $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  seja de classe  $C^2$  e que  $A = A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & d(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ , veja seção 1.2.

Assim, temos que  $z = (0, 0)$  é uma solução trivial para (2.33). Entretanto queremos determinar soluções não triviais para (2.33).

Deste modo, usando o Lema 1.7, temos o seguinte resultado

**Teorema 2.8.** *Suponha  $\nabla F$  limitada. Então temos as seguintes alternativas*

- a) *Suponha  $(LL)_k^+$  com  $F''(x, 0) \leq \beta - A$ , onde  $\beta \preceq \lambda_{p+1}(A)A$ , com  $p < k$ . Então o problema (2.33) admite uma solução não trivial.*

**b)** Se ocorre  $(LL)_k^-$  com  $F''(x, 0) \geq \alpha - A$ , onde  $\alpha \succeq \lambda_q(A)A$ , com  $q > k - 1$ . Então o problema (2.33) admite uma solução não trivial.

*Demonstração.* A prova deste teorema segue usando a teoria de Morse, mais especificamente iremos fazer uma estimativa do índice de Morse na origem. Logo, usando esta estimativa provaremos que a solução obtida no Teorema 2.7 é não trivial.

Primeiramente provaremos o caso *a*). Logo, aplicando o Teorema 2.7, existe um ponto crítico  $z_0$  tal que  $C_\mu(I, z_0) \neq 0$  onde  $\mu = \dim V_k \geq 2$ . Por outro lado, temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} I''(0)(z, z) &= \|z\|^2 - \int_{\Omega} \langle A(x)z, z \rangle dx - \int_{\Omega} F''(x, 0)(z, z) dx \\ &\geq \|z\|^2 - \int_{\Omega} \langle \beta(x)z, z \rangle dx \geq \delta \|z\|^2 > 0, \forall z \in V_p^\perp \setminus \{0\}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde usamos o Lema 1.7. Portanto  $m(0) + n(0) \leq \dim V_p < \mu = \dim V_k$ , onde  $m(0)$  e  $n(0)$  são respectivamente o índice de Morse na origem e a nulidade na origem. Assim, pelo Lema de Gromoll-Meyer, ver Apêndice B, segue que  $C_\mu(I, 0) = 0$  pois  $\mu$  não pertence ao intervalo  $[m(0), m(0) + n(0)]$ . Portanto  $z_0 \neq 0$ , isto é,  $z_0$  é solução não trivial para (2.33). Esta afirmação conclui a prova do item *a*).

Agora provaremos o caso *b*). Novamente temos uma estimativa para o índice de Morse análoga ao caso anterior. Neste caso, aplicando o Teorema 2.7, existe um ponto crítico  $z_0$  tal que  $C_\nu(I, z_0) \neq 0$  onde  $\nu = \dim V_{k-1} \geq 1$ , com  $k \geq 2$ . Por outro lado, temos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} I''(0)(z, z) &= \|z\|^2 - \int_{\Omega} \langle A(x)z, z \rangle dx - \int_{\Omega} F''(x, 0)(z, z) dx \\ &\leq \|z\|^2 - \int_{\Omega} \langle \alpha(x)z, z \rangle dx \leq -\delta \|z\|^2 < 0, \forall z \in V_q \setminus \{0\}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde usamos o Lema 1.7. Portanto  $m(0) \geq \dim V_q > \nu = \dim V_{k-1}$  onde denotamos respectivamente  $m(0)$  e  $n(0)$  sendo o índice de Morse na origem e a nulidade na origem. Pelo lema de Gromoll-Meyer, Apêndice B, segue que  $C_\nu(I, 0) = 0$  pois  $\nu$  não

pertence ao intervalo  $[m(0), m(0) + n(0)]$ . Consequentemente  $z_0 \neq 0$ . Assim concluímos a demonstração deste teorema.  $\square$

Agora, consideramos um resultado dual do Teorema 2.8. Este resultado simplesmente inverte as "desigualdades" descritas no Teorema 2.8. Mais especificamente, temos o

**Teorema 2.9.** *Suponha  $\nabla F$  limitada. Então temos as seguintes alternativas*

- a) *Suponha  $(LL)_k^+$  com  $F''(x, 0) \geq \alpha - A$ , onde  $\alpha \preceq \lambda_p(A)A$ , com  $p > k$ . Então o problema (2.33) admite uma solução não trivial.*
- b) *Suponha  $(LL)_k^-$  com  $F''(x, 0) \leq \beta - A$ , onde  $\beta \succeq \lambda_q(A)A$ , com  $q < k - 1$ . Então o problema (2.33) admite uma solução não trivial.*

*Demonstração.* A prova deste teorema é análoga a prova do teorema anterior. Contudo, provaremos este resultado para conveniência do leitor.

Novamente basta estimar o índice de Morse na origem e concluir que a solução dada pelo Teorema 2.7 é não trivial.

Inicialmente consideramos o caso a). Assim, aplicando o Teorema do Ponto de Sela, existe um ponto crítico  $z_0$  tal que  $C_\mu(I, z_0) \neq 0$  onde  $\mu = \dim V_k$ . Por outro lado, temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} I''(0)(z, z) &= \|z\|^2 - \int_{\Omega} \langle A(x)z, z \rangle dx - \int_{\Omega} F''(x, 0)(z, z) dx \\ &\leq \|z\|^2 - \int_{\Omega} \langle \alpha(x)z, z \rangle dx \leq -\delta \|z\|^2 < 0, \forall z \in V_p \setminus \{0\}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Portanto  $m(0) \geq \dim V_p > \mu = \dim V_k$ . Novamente, pelo lema de Gromoll-Meyer, Apêndice B, segue que  $C_k(I, 0) = 0$  pois  $k$  não pertence ao intervalo  $[m(0), m(0) + n(0)]$ . Assim  $z_0 \neq 0$ . Esta afirmação finaliza a demonstração do item a).

Agora provaremos o caso b). Neste caso, temos uma estimativa para o índice de Morse análoga ao caso anterior. Mais precisamente, existe um ponto crítico  $z_0$  tal que

$C_\nu(I, z_0) \neq 0$  onde  $\nu = \dim V_{k-1}$ . Por outro lado, temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} I''(0)(z, z) &= \|z\|^2 - \int_{\Omega} \langle A(x)z, z \rangle dx - \int_{\Omega} F''(x, 0)(z, z) dx \\ &\geq \|z\|^2 - \int_{\Omega} \langle \beta(x)z, z \rangle dx \geq \delta \|z\|^2 > 0, \forall z \in V_q^\perp \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Portanto  $m(0) + n(0) \leq \dim V_q < \nu = \dim V_{k-1}$ . Agora, usando o Lema de Gromoll-Meyer, Apêndice B, segue que  $C_\nu(I, 0) = 0$ . Assim, obtemos que  $z_0 \neq 0$ . Esta afirmação encerra a demonstração deste teorema.  $\square$

Para os próximos resultados obtemos alguns teoremas sobre multiplicidade de soluções para o problema (2.33). Neste caso, combinamos alguns Métodos Min-Max e Teoria de Morse. Primeiramente considere a seguinte hipótese na origem

(H0) Existem  $\delta > 0$  e  $\alpha \in (0, \lambda_1(A))$  tal que

$$F(x, z) \leq \frac{\alpha - 1}{2} \langle A(x)z, z \rangle \forall x \in \Omega, \forall |z| < \delta.$$

Assim, usando a hipótese (H0), somos capazes de provar a

**Proposição 2.10.** *Suponha (H0) e  $\nabla F$  limitada. Então a origem é um mínimo local para o funcional  $I$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, dado  $\epsilon > 0$ , usando a hipótese (H0) e a limitação de  $\nabla F$  obtemos  $p \in (2, 2^*)$  e uma constante  $C_\epsilon > 0$  tal que

$$F(x, z) \leq \frac{\alpha - 1}{2} \langle A(x)z, z \rangle + C_\epsilon |z|^p, \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2.$$

Portanto, temos segue as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{1}{2} \|z\|^2 - \langle A(x)z, z \rangle - \int_{\Omega} F(x, z) dx \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_1}\right) \|z\|^2 - C_\epsilon \int_{\Omega} |z|^p dx \\ &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_1}\right) \|z\|^2 - C_\epsilon \|z\|^p \geq \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_1}\right) \|z\|^2 > 0, \text{ com } z \in B_\rho(0) \text{ e } 0 < \rho \leq \rho_0, \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde escolhemos  $\rho_0$  suficientemente pequeno. Aqui  $B_\rho(0)$  denota a bola aberta de centro na origem e raio  $\rho$  contida em  $H$ . Portanto obtemos que 0 é mínimo local para o funcional  $I$ . Assim, segue a prova da proposição.  $\square$

Agora, usando a condição  $(LL)_k^+$ , obtemos o seguinte resultado

**Proposição 2.11.** *Suponha  $\nabla F$  limitada e  $(LL)_k^+$ . Então existe  $z \in H$  satisfazendo  $I(z) < 0$  tal que  $\|z\| \geq \rho_0 > 0$ .*

*Demonstração.* Inicialmente, seja  $z = t\Phi_k$  onde  $t \in \mathbb{R}$  e  $\Phi_k$  é uma autofunção normalizada associada ao autovalor  $\lambda_k(A)$ . Logo, usando a condição  $(LL)_k^+$ , obtemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, t\Phi_k)}{t} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla F(x, t\Phi_k) \Phi_k dx > 0. \quad (2.39)$$

Assim, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $M > 0$  tal que  $t \geq M > 0$  implica

$$\int_{\Omega} \frac{F(x, t\Phi_k)}{t} dx > \epsilon. \quad (2.40)$$

Agora, temos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} I(t\Phi_k) &= \frac{1}{2} \|t\Phi_k\|^2 - \frac{1}{2} \langle A(x)t\Phi_k, t\Phi_k \rangle - \int_{\Omega} F(x, t\Phi_k) dx \\ &= - \int_{\Omega} F(x, t\Phi_k) dx = -t \int_{\Omega} \frac{F(x, t\Phi_k)}{t} dx \\ &< -\epsilon t \rightarrow -\infty \text{ se } t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Consequentemente  $I(t\Phi_k) < 0$  e  $\|t\Phi_k\| = t > \rho_0$  com  $t > 0$  suficientemente grande. Neste caso, basta tomar  $\rho > 0$  suficientemente pequeno dado pelo Lema 2.10.

Por outro lado, utilizando novamente a condição  $(LL)_k^+$ , temos a seguinte desigualdade

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, t\Phi_k)}{t} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_{\Omega} \nabla F(x, t\Phi_k) \Phi_k dx < 0. \quad (2.42)$$

Portanto, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $M > 0$  tal que  $-t \geq M > 0$  implica

$$\int_{\Omega} \frac{F(x, t\Phi_k)}{t} dx < -\epsilon. \quad (2.43)$$

Logo, temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} I(t\Phi_k) &= \frac{1}{2} \|t\Phi_k\|^2 - \frac{1}{2} \langle A(x)t\Phi_k, t\Phi_k \rangle - \int_{\Omega} F(x, t\Phi_k) dx \\ &= - \int_{\Omega} F(x, t\Phi_k) dx = -t \int_{\Omega} \frac{F(x, t\Phi_k)}{t} dx \\ &< \epsilon t \rightarrow -\infty \text{ se } t \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Consequentemente, temos que  $I(t\Phi_k) < 0$  e  $\|t\Phi_k\| = -t > \rho_0$  com  $t < 0$ . Novamente escolhemos  $\rho_0$  suficientemente pequeno fornecido pelo Lema 2.10. Esta afirmação finaliza a demonstração da proposição.  $\square$

**Observação 2.** *Na Proposição 2.11, usando a condição  $(LL)_k^+$ , concluímos que  $I(t\Phi_k) \rightarrow -\infty$ , se  $|t| \rightarrow \infty$ . Esta informação será utilizada na geometria do Teorema do Passo da Montanha.*

Deste modo, usando as Proposições 2.10 e 2.11, somos capazes de provar o seguinte resultado

**Teorema 2.12.** *Suponha  $\nabla F$  limitada. Além disso, suponha  $(H0)$  e  $(LL)_k^+$ , com  $k \geq 2$ . Então o problema (2.33) admite uma solução não trivial do tipo do passo da montanha.*

*Demonstração.* Primeiramente, usando as Proposições 2.10 e 2.11 obtemos, via o Teorema do Passo da Montanha, um número  $t^+ > 0$  e um ponto crítico  $z_2$  tal que  $I(z_2) = c^+ \geq \rho_0$ , onde  $c^+$  possui a seguinte caracterização

$$c^+ = \inf_{\gamma \in \Gamma^+} \sup_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)).$$

Aqui, definimos  $\Gamma^+ = \{\gamma \in C^0([0,1], H) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = t^+\Phi_k\}$ . Neste caso, temos que  $z_2$  é um ponto crítico não nulo para o funcional  $I$ . Portanto, segue que  $z_2$  é uma solução não trivial para o problema (2.33).

Agora destacaremos algumas propriedades adicionais do ponto crítico  $z_2$ . Inicialmente, temos que  $z_2$  é um ponto crítico do tipo do passo da montanha, ou seja,  $C_1(I, z_2) \neq 0$ , veja [14]. Deste modo, usando o Lema 1.9, concluímos que  $C_q(I, z_2) = \delta_{q1}\mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}$ , desde que  $F''(x, z_2) \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ . Estas afirmações serão úteis para o próximo resultado. Assim, finalizamos a demonstração deste teorema.  $\square$

**Observação 3.** *Por analogia a demonstração anterior obtemos um número  $t_- < 0$  e um ponto crítico  $z_3$  tal que  $I(z_3) = c^- \geq \rho_0 > 0$  onde  $c^-$  possui a seguinte caracterização*

$$c^- = \inf_{\gamma \in \Gamma^-} \sup_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)).$$

Similarmente, definimos  $\Gamma^- = \{\gamma \in C^0([0, 1], H) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = t^- \Phi_k\}$ . Além disso, usando novamente que  $z_3$  é um ponto crítico do tipo do passo da montanha, obtemos que  $C_1(I, z_3) \neq 0$ . Em particular, temos que  $z_3 \neq 0$ .

Deste modo, usando as Teoremas 2.7 e 2.12, obteremos duas soluções não triviais para o problema (2.33). Aqui,  $z_1$  sempre denota a solução obtida pelo Teorema 2.7 e  $z_2$  denota a solução obtida pelo Teorema 2.12. Neste caso, somos capazes de provar o seguinte resultado

**Teorema 2.13.** *Suponha  $\nabla F$  limitada. Além disso, suponha  $(H0)$  e  $(LL)_k^+$ , com  $k \geq 2$  onde  $F''(x, z_2) \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ . Então o problema (2.33) admite duas soluções não triviais.*

*Demonstração.* Primeiramente, aplicando o Teorema 2.7, existe um ponto crítico  $z_1$  tal que  $C_\mu(I, z_1) \neq 0$  com  $\mu = \dim V_k$ . Por outro lado, a hipótese  $(H0)$  implica que  $C_q(I, 0) = \delta_{q0}\mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}$ . Portanto, temos que  $z_1 \neq 0$ .

Agora, usando o Teorema 2.12, temos um ponto crítico  $z_2$  tal que  $I(z_2) = c^+ \geq \rho_0$ , onde  $c^+$  possui a seguinte caracterização

$$c^+ = \inf_{\gamma \in \Gamma^+} \sup_{t \in [0, 1]} I(\gamma(t)).$$

Aqui, definimos  $\Gamma^+ = \{\gamma \in C^0([0, 1], H) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = t^+ \Phi_k\}$ . Além disso, temos que  $z_2$  é um ponto crítico do tipo do passo da montanha, ou seja,  $C_1(I, z_2) \neq 0$ , veja [14]. Assim, usando o Lema 1.9, segue que  $C_q(I, z_2) = \delta_{q1}\mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}$ . Deste modo, comparando os grupos críticos, concluímos que  $z_2 \neq 0$  e  $z_2 \neq z_1$ . Esta afirmação finaliza a demonstração deste teorema.  $\square$

Agora, com intuito de obtermos resultados análogos ao Teorema 2.13 com a condição  $(LL)_k^-$ , temos o seguinte resultado

**Proposição 2.14.** *Suponha  $\nabla F$  limitada. Então  $I(t\Phi_1) \rightarrow -\infty$ , se  $|t| \rightarrow \infty$ .*

*Demonstração.* Inicialmente, lembramos que o Problema (2.33) admite ressonância no autovalor  $\lambda_k(A) = 1$ , com  $k \geq 2$ . Portanto, temos que  $\lambda_1(A) < \lambda_k(A) = 1$ . Neste caso,

temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
I(t\Phi_1) &= \frac{1}{2}\|t\Phi_1\|^2 - \frac{1}{2}\langle T_A t\Phi_1, t\Phi_1 \rangle - \int_{\Omega} F(x, t\Phi_1) dx \\
&= \frac{t^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1(A)}\right)\|\Phi_1\|^2 - \int_{\Omega} F(x, t\Phi_1) dx \\
&\leq \frac{t^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1(A)}\right)\|\Phi_1\|^2 + \frac{\epsilon}{2}\|t\Phi_1\|^2 + C_{\epsilon} \\
&\leq \frac{t^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1(A)} + \epsilon\right)\|\Phi_1\|^2 + C_{\epsilon} \rightarrow -\infty, \text{ se } |t| \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Nas estimativas acima usamos a caracterização variacional do primeiro autovalor e a condição de crescimento (1.11). Estas estimativas concluem a prova da proposição.  $\square$

Para os próximos resultados sempre utilizaremos a condição  $(LL)_k^-$ . Novamente, queremos aplicar o Teorema do Passo da Montanha afim de obtermos uma de solução não trivial para o problema (2.33). Neste caso, usando as Proposições 2.10 e 2.14, temos o seguinte resultado

**Teorema 2.15.** *Suponha  $\nabla F$  limitada. Além disso, suponha  $(H0)$  e  $(LL)_k^-$ , com  $k \geq 2$ . Então o problema (2.33) admite uma solução não trivial do tipo do passo da montanha.*

*Demonstração.* Este teorema segue das Proposições 2.10 e 2.14 e do Teorema do Passo da Montanha. Mais especificamente, a Proposição 2.10 garante que 0 é mínimo local para o funcional  $I$  e a Proposição 2.14 garante o restante da geometria requerida no Teorema do Passo da Montanha. Assim, obtemos um ponto crítico  $z_2 \in H$  tal que  $I(z_2) \geq \alpha > 0 = I(0)$ . Portanto  $z_2 \neq 0$ . Logo, o problema (2.33) admite uma solução não trivial.

Agora, sabemos que  $z_2$  é um ponto crítico do tipo do passo da montanha, ou seja, temos que  $C_1(I, z_2) \neq 0$ . Logo, usando o Lema 1.9, temos as seguintes afirmações  $C_q(I, 0) = \delta_{q0}\mathbb{Z}, C_q(I, z_2) = \delta_{q1}\mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}$  desde que  $F''(x, z_2) \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ . Estas informações sobre os grupos críticos serão utilizadas nos próximos resultados. Assim, finalizamos a demonstração deste teorema.  $\square$

Para os próximos resultados sempre utilizaremos a condição  $(LL)_k^-$ , com  $k \geq 3$ . Novamente, queremos combinar o Teorema do Ponto de Sela e o Teorema do Passo da Montanha afim de obtermos multiplicidade de soluções para o problema (2.33). Aqui, sempre denotaremos por  $z_1$  a solução dada pelo Teorema 2.7 e por  $z_2$  a solução obtida pelo o Teorema 2.15. Neste caso, temos o seguinte resultado

**Teorema 2.16.** *Suponha  $\nabla F$  limitada. Além disso, suponhamos  $(H0)$  e  $(LL)_k^-$ , com  $k \geq 3$  e  $F''(x, z_2) \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ . Então o problema (2.33) admite duas soluções não triviais.*

*Demonstração.* Inicialmente, aplicando o Teorema 2.7 obtemos, via Teorema do Ponto de Sela, um ponto crítico  $z_1 \in H$  satisfazendo  $C_\nu(I, z_1) \neq 0$  com  $\nu = \dim V_{k-1}$ .

Por outro lado, usando as Proposições 2.10 e 2.14 obtemos, via Teorema do Passo da Montanha, um ponto crítico  $z_2 \in H$  tal que  $I(z_2) \geq \alpha > 0 = I(0)$ . Além disso, sabemos que  $z_2$  é um ponto crítico do tipo do passo da montanha. Assim, usando o Lema 1.9, temos as seguintes afirmações  $C_q(I, 0) = \delta_{q0}\mathbb{Z}$ ,  $C_q(I, z_2) = \delta_{q1}\mathbb{Z}$ ,  $\forall q \in \mathbb{N}$ . Portanto, comparando os grupos críticos, temos que  $z_2 \neq 0$  e  $z_2 \neq z_1$ . Consequentemente, o problema (2.33) admite pelo menos duas soluções não triviais.

□

Para finalizarmos este capítulo consideremos uma proposição a qual nos adaptamos para o caso do sistema gradiente após conversamos com o Prof. Dr. David G. Costa. Além disso, esta proposição vale sobre condições de ressonância em quaisquer autovalores. Primeiramente, consideremos as condições de Ahmad-Lazer-Paul dadas por

$$(ALP)_k^+ \int_{\Omega} F(x, u, v) + h_1 u + h_2 v dx \rightarrow \infty, \text{ se } \|(u, v)\| \rightarrow \infty, (u, v) \in V(\lambda_k). \quad (2.46)$$

$$(ALP)_k^- \int_{\Omega} F(x, u, v) + h_1 u + h_2 v dx \rightarrow -\infty, \text{ se } \|(u, v)\| \rightarrow \infty, (u, v) \in V(\lambda_k). \quad (2.47)$$

Estas condições foram introduzidas por Ahmad-Lazer-Paul em [1]. Tais condições dizem que o funcional  $I$  é coercivo ou anti-coercivo no autoespaço ressonante. Aqui,

lembramos que estas propriedades são muito importantes para a descrição da geometria do funcional  $I$  bem como na prova de condições do tipo  $(PS)$ . Estas condições de Ahmad-Lazer-Paul demonstram-se mais fracas que as usuais condições de Landesman-Lazer. Mais especificamente, consideremos o seguinte resultado

**Proposição 2.17.** *Suponha  $\nabla F$  limitada. Então temos as seguintes alternativas*

- i)  $(LL)_k^+$  implica a condição  $(ALP)_k^+$ ,
- ii)  $(LL)_k^-$  implica a condição  $(ALP)_k^-$ .

*Demonstração.* Inicialmente provaremos o item i), ou seja, usando a condição  $(LL)_k^+$  devemos provar a condição  $(ALP)_k^+$ . A prova será por contradição. Neste caso, existe uma sequência  $z_n = (u_n, v_n) \in V(\lambda_k)$  tal que

- Existe  $C \in \mathbb{R}$  satisfazendo

$$\int_{\Omega} F(x, u_n, v_n) + h_1 u_n + h_2 v_n dx \leq C, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.48)$$

- $\|z_n\| \rightarrow \infty$ , se  $n \rightarrow \infty$ .

Contudo, temos a condição  $(LL)_k^+$  para toda sequência  $(z_n) \in V(\lambda_k)$ . Assim, definindo  $\bar{z}_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$  obtemos um  $\bar{z} \in V(\lambda_k)$  satisfazendo as seguintes condições

- $\bar{z}_n \rightarrow \bar{z}$  em  $V(\lambda_k)$ ,
- $\bar{z}_n \rightarrow \bar{z}$  em  $L^p(\Omega)^2$ ,
- $\bar{z}_n(x) \rightarrow \bar{z}(x)$ , q.t.p. em  $\Omega$ .

Por outro lado, temos a seguinte identidade

$$\int_{\Omega} F(x, u_n, v_n) + h_1 u_n + h_2 v_n dx = \|z_n\| A_n,$$

onde definimos

$$A_n = \int_{\Omega} \frac{F(x, u_n, v_n) + h_1 u_n + h_2 v_n dx}{\|z_n\|}.$$

Deste modo, é suficiente provamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n > 0$ . Consequentemente, teremos uma contradição com (2.48). No entanto, para provarmos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n > 0$  necessitamos de uma regra de L'Hospital. Mais especificamente, temos a seguinte convergência

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, u_n, v_n)}{\|z_n\|} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{\nabla F(x, u_n, v_n) \cdot z_n}{\|z_n\|} dx, \quad (2.49)$$

Agora, usando as funções auxiliares descritas em (2.3) e as mesmas idéias desenvolvidas na prova do Lema 2.2, obtemos a seguinte igualdade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{\nabla F(x, u_n, v_n) \cdot z_n}{\|z_n\|} = L_k(\bar{u}, \bar{v}), \text{ onde } \bar{z} = (\bar{u}, \bar{v}). \quad (2.50)$$

Além disso, temos a seguinte convergência

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h_1 \bar{u}_n + h_2 \bar{v}_n dx = \int_{\Omega} h_1 \bar{u} + h_2 \bar{v} dx. \quad (2.51)$$

Deste modo, usando (2.49), (2.50), (2.51) e a condição  $(LL)_k^+$ , obtemos a seguinte desigualdade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = L_k(\bar{u}, \bar{v}) - \int_{\Omega} h_1 \bar{u} + h_2 \bar{v} dx > 0, \quad (2.52)$$

onde  $L_k$  é fornecido pela equação (2.6). Consequentemente, temos uma contradição com (2.48) e segue a prova do item *i*). A prova do item *ii*) é análoga. Assim, omitiremos a prova deste item.

□

## Capítulo 3

# Sistemas Elípticos Gradientes Fortemente Ressonantes no Autovalor Principal.

Neste capítulo, trabalharemos com uma classe de problemas elípticos fortemente ressonantes para o seguinte sistema gradiente:

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + b(x)v - F_u(x, u, v) & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = b(x)u + d(x)v - F_v(x, u, v) & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado e suave em  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ . Além disso, exigimos que a função  $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  seja de classe  $C^2$  e que  $A = A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & d(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ , veja seção 1.2.

Mais especificamente, estudamos o problema fortemente ressonante para (3.1) onde  $F$  é limitada e  $\nabla F$  possui limite nulo no infinito. Tais problemas foram estudados inicialmente, no caso escalar, por [9]. Além disso, exploramos a dependência da não linearidade  $F$  com respeito a variável  $x$  sobre os limites assintóticos em infinito.

Mais precisamente, o problema (3.1) é fortemente ressonante no infinito quando existe algum autovalor  $\lambda_k(A) = 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$  onde a não linearidade  $F$  satisfaz a seguinte

condição:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \nabla F(x, z) = 0, \quad |F(x, z)| \leq C, \quad \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2. \quad (3.2)$$

Problemas fortemente ressonantes foram estudados, no caso escalar, por vários autores, veja o importante trabalho [9] e as seguintes referências básicas [1, 5, 8, 7, 23, 18, 28, 30, 40, 46, 47]. Para sistemas gradientes ressonantes veja [10, 20, 15], para sistemas Hamiltonianos ressonantes veja [26, 41] e suas referências.

### 3.1 Sistemas Gradientes sob Ressonância Forte

Nesta seção, consideramos o seguinte sistema elíptico:

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + b(x)v - F_u(x, u, v) & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = b(x)u + d(x)v - F_v(x, u, v) & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

onde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado e suave em  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ . Além disso, exigimos que a função  $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  seja de classe  $C^2$  e  $A = A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & d(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ .

Novamente, trabalharemos com o seguinte problema de autovalores:

$$\begin{cases} -\Delta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda A(x) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.4)$$

Logo, usando a Teoria de Operadores Lineares Compactos e Autoadjuntos obtemos uma sequência de autovalores

$$0 < \lambda_1(A) < \lambda_2(A) \leq \dots \text{ onde } \lambda_k(A) \rightarrow \infty \text{ se } k \rightarrow \infty.$$

Além disso,  $\lambda_1(A)$  é simples e admite autofunção positiva em  $\Omega$ , ver [15, 16, 25, 24].

Agora, sendo  $F$  subquadrático em infinito, podemos dividir o problema (3.3) em ressonante e não ressonante. Primeiramente, dizemos que (3.3) é não ressonante se

$\lambda_k(A) \neq 1, \forall k \in \mathbb{N}$ . Neste caso, o funcional associado  $I$  satisfaz  $(PS)_c$  para todo  $c \in \mathbb{R}$ . Portanto, o problema torna-se mais simples, tendo em vista que a condição  $(PS)$  é satisfeita.

Por outro lado, dizemos que (3.3) possui ressonância em algum autovalor de (3.4) se existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\lambda_k(A) = 1$ . Assim, usando métodos clássicos, como teoria do grau e/ou método de sub-supersoluções e métodos variacionais, [15] e [16] obtiveram resultados de existência e multiplicidade para o problema (3.3). Entretanto existem poucos resultados para o caso ressonante para sistemas gradientes. Por exemplo, não foi considerado o caso fortemente ressonante.

Problemas ressonantes possuem um grande interesse e uma vasta literatura, ver [9] e [32] e suas referências. Lembramos que no caso ressonante o funcional  $I$  pode não satisfazer a condição clássica de Palais-Smale. Em [9] foi determinado vários tipos de ressonância conforme o comportamento no infinito da não linearidade  $F$ . Intuitivamente o problema (3.3) é "mais" ressonante quanto menor for  $F$  no infinito.

Assim, neste capítulo, lidamos com o problema (3.3) com ressonância forte obtendo existência e multiplicidade de soluções. Novamente, usaremos métodos variacionais para atacar o problema (3.3). Deste modo, temos que o funcional associado ao problema (3.3) é dado por

$$I(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(x)(u, v), (u, v) \rangle dx + \int_{\Omega} F(x, u, v) dx. \quad (3.5)$$

Novamente, para verificar as propriedades dos autovalores e autofunções do problema (3.4) veja seção 1.2.

## 3.2 Ressonância forte em $\lambda_1(A)$

Nesta seção estudaremos o problema (3.3) sobre condições de ressonância forte sobre o autovalor  $\lambda_1(A)$ . Neste caso, o autovalor  $\lambda_1(A)$  é positivo, simples e isolado, ver [15]. Além disso,  $\lambda_1(A)$  admite autofunção  $\Phi_1(A)$  positiva em  $\Omega$ , ou seja,  $\lambda_1(A)$  é autovalor principal. Reforçamos que  $\Phi_1(A) = (\phi_1, \psi_1) > 0$  em  $\Omega$  significa  $\phi_1 > 0$  e  $\psi_1 > 0$  em  $\Omega$ .

Agora, considere a seguinte hipótese, a qual torna o problema (3.3) fortemente ressonante no infinito.

$$(H0) \lim_{|z| \rightarrow \infty} \nabla F(x, z) = 0 \text{ e } |F(x, z)| \leq C, \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2 \text{ com } \lambda_1(A) = 1.$$

Nesta seção, para estudarmos o problema (3.3), definimos as seguintes funções auxiliares:

$$\begin{aligned} T^{++}(x) &= \liminf_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \infty}} F(x, u, v), & S^{++}(x) &= \limsup_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \infty}} F(x, u, v), \\ T^{--}(x) &= \liminf_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow -\infty}} F(x, u, v), & S^{--}(x) &= \limsup_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow -\infty}} F(x, u, v). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Aqui, exigimos que os limites acima sejam uniformes em  $x \in \Omega$  e que as funções limites pertençam a  $L^1(\Omega)$ . Obviamente, segue que  $T^{--}(x) \leq T^{++}(x)$  e  $S^{--}(x) \leq S^{++}(x)$ ,  $\forall x \in \Omega$ . Além disso, nossos resultados de existência e multiplicidade para o problema (3.3) aplicam-se quando os limites inferiores e superiores em (3.6) são iguais, ou seja, quando os limites em (3.6) existem.

Agora, fazemos  $F(x, 0, 0) \equiv 0$  e  $\nabla F(x, 0, 0) \equiv 0$ . Deste modo,  $z = 0$  é solução trivial para o problema (3.3). Assim, determinaremos soluções não triviais para o problema (3.3). Novamente, usaremos Métodos Min-Max para determinar existência e multiplicidade de soluções para o problema (3.3).

Assim, consideremos as seguintes hipóteses adicionais:

(H1) Existem  $\alpha \in (0, \lambda_1)$  e  $\delta > 0$  tal que

$$F(x, z) \geq \frac{1 - \alpha}{2} \langle A(x)z, z \rangle, \forall x \in \Omega \text{ e } |z| < \delta.$$

(H2)  $\int_{\Omega} S^{++}(x) dx \leq 0$  e  $\int_{\Omega} S^{--}(x) dx \leq 0$ .

(H3)  $\langle A(x)z, z \rangle \geq 0, \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2$ .

(H4) Existe  $t_0 \in \mathbb{R}^*$  tal que

$$\int_{\Omega} F(x, t_0 \Phi_1) dx < \min \left\{ \int_{\Omega} T^{--}(x) dx, \int_{\Omega} T^{++}(x) dx \right\}$$

(H5) Existe  $t^- < 0 < t^+$  tal que

$$\int_{\Omega} F(x, t^{\pm} \Phi_1) dx < \min \left\{ \int_{\Omega} T^{--}(x) dx, \int_{\Omega} T^{++}(x) dx \right\}$$

$$(H6) F(x, z) \geq \frac{1 - \lambda_2}{2} \langle A(x)z, z \rangle, \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2.$$

Agora, enunciaremos e demonstraremos os principais resultados obtidos para o problema (3.3) sobre ressonância forte na origem. Tais resultados são inspirados principalmente nos seguintes artigos [2, 19, 15].

Primeiramente, demonstraremos dois resultados inerentes a geometria do Passo da Montanha. Mais precisamente, temos a

**Proposição 3.1.** *Suponha (H0) e (H1). Então a origem é um mínimo local para o funcional  $I$ .*

*Demonstração.* Inicialmente pelas hipóteses (H0) e (H1) podemos encontrar, para cada  $\epsilon > 0$ , uma constante  $C_{\epsilon} > 0$  e um número  $p \in (2, 2^*)$  tal que

$$F(x, z) \geq \frac{1 - \alpha}{2} \langle A(x)z, z \rangle - C_{\epsilon} |z|^p, \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2.$$

Consequentemente, usando a desigualdade variacional obtida em (1.6), imersões de Sobolev e a hipótese (H1), temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{1}{2} \|z\|^2 - \int_{\Omega} \langle A(x)z, z \rangle dx + \int_{\Omega} F(x, z) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|z\|^2 - \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \langle A(x)z, z \rangle dx - C_{\epsilon} \int_{\Omega} |z|^p dx \\ &\geq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda_1} \right) \|z\|^2 - C_{\epsilon} \|z\|^p \geq \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda_1} \right) \|z\|^2 > 0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde  $z \in B_{\rho}(0) \subset H$  com  $0 < \rho < \rho_0$ . Aqui,  $B_{\rho}(0)$  denota a bola aberta de centro na origem e raio  $\rho$ . Novamente, escolhemos  $\rho_0$  suficientemente pequeno. Portanto o funcional  $I$  tem a origem como mínimo local. Esta afirmação finaliza a prova da proposição.  $\square$

Agora, mostraremos a segunda parte da geometria do Passo da Montanha. Neste caso, temos a

**Proposição 3.2.** *Suponha  $(H0)$ ,  $(H2)$  e  $(H4)$ . Então existe  $z \in H$  satisfazendo  $I(z) < 0$  tal que  $\|z\| > \rho_0 > 0$ .*

*Demonstração.* Inicialmente, usando as hipóteses  $(H4)$  e  $(H2)$ , escolhendo a direção  $z = t_0 \Phi_1$  temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} I(t_0 \Phi_1) &= \frac{1}{2} \|t_0 \Phi_1\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(x) t_0 \Phi_1, t_0 \Phi_1 \rangle dx + \int_{\Omega} F(x, t_0 \Phi_1) dx \\ &= \int_{\Omega} F(x, t_0 \Phi_1) dx < \min \left( \int_{\Omega} T^{--}(x) dx, \int_{\Omega} T^{++}(x) dx \right) \leq 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Portanto, temos que  $I(t_0 \Phi_1) < 0$  com  $\|t_0 \Phi_1\| = |t_0| > \rho_0$ . Novamente, escolhemos  $\rho_0 > 0$  suficientemente pequeno. Aqui, lembramos que estamos tomando a autofunção  $\Phi_1$  normalizada em  $H$ . Assim, segue a demonstração desta proposição.  $\square$

Agora, usando o Lema 3.9 temos que o funcional  $I$  satisfaz  $(PS)_c$  para todo  $c > 0$  desde que tenhamos as hipóteses  $(H0)$  e  $(H2)$ . Discutiremos a prova do Lema 3.9 posteriormente. Deste modo, obtemos o seguinte resultado

**Teorema 3.3.** *Suponha  $(H0)$ ,  $(H1)$ ,  $(H2)$  e  $(H4)$ . Então o problema (3.3) possui pelo menos uma solução não trivial.*

*Demonstração.* A prova deste lema segue diretamente das Proposições 3.1, 3.2 e Lema 3.9. Mais especificamente, as Proposições 3.1 e 3.2 garantem a geometria do Passo da Montanha e o Lema 3.9 garante que o funcional  $I$  satisfaz  $(PS)_c$  para todo  $c > 0$ . Assim, aplicando o Teorema do Passo da Montanha, determinamos um ponto crítico  $z_1 \in H$  tal que  $I(z_1) = c \geq \rho_0 > 0$ . Logo, o problema (3.3) admite uma solução não trivial. Esta afirmação finaliza a prova do teorema.  $\square$

Para os próximos resultados queremos obter multiplicidade de soluções para o problema (3.3). Inicialmente, provaremos que  $I$  satisfaz  $(PS)_c$  para certos níveis  $c \in \mathbb{R}$ .

Este resultado, usado de modo adequado, produz uma ou duas soluções não triviais para (3.3). Mais precisamente, utilizaremos o Princípio Variacional de Ekeland para obtermos a existência de uma segunda solução não trivial. Além disso, minimizando o funcional  $I$  sobre subconjuntos adequados, determinamos a existência de uma terceira solução não trivial.

Primeiramente, temos o seguinte resultado

**Lema 3.4.** *Suponha (H0). Então  $I$  satisfaz a condição  $(PS)_c$ , desde que tenhamos  $c < \min \left\{ \int_{\Omega} T^{++}(x)dx, \int_{\Omega} T^{--}(x)dx \right\}$ .*

*Demonstração.* A prova deste lema é por contradição. Neste caso, supomos que existe uma sequência  $(PS)_c$  ilimitada tal que  $c < \min \left\{ \int_{\Omega} T^{++}(x)dx, \int_{\Omega} T^{--}(x)dx \right\}$ . Denote esta sequência por  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Assim, definindo  $\bar{z}_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$  obtemos  $\bar{z} \in H$  com as seguintes propriedades:

- $\bar{z}_n \rightharpoonup \bar{z}$  em  $H$ ,
- $\bar{z}_n \rightarrow \bar{z}$  em  $L^p(\Omega)^2, \forall 1 \leq p < 2^*$ ,
- $\bar{z}_n(x) \rightarrow \bar{z}(x)$  q.t.p. em  $\Omega$ .

Agora, é fácil ver que  $\bar{z} = \pm \Phi_1$ . Novamente, analisaremos dois casos. A saber, no primeiro caso temos  $\bar{z} = \Phi_1$  e no segundo caso  $\bar{z} = -\Phi_1$ .

No primeiro caso o primeiro caso,  $\bar{u}_n(x) \rightarrow \infty$  e  $\bar{v}_n(x) \rightarrow \infty, \forall x \in \Omega$  se  $n \rightarrow \infty$ , pois  $\Phi_1(x) > 0$  em  $\Omega$ . Portanto, segue as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n \rightarrow \infty} I(z_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \|z_n\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(x)z_n, z_n \rangle dx - \int_{\Omega} F(x, z_n) dx \right\} \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(x, z_n) dx \geq \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x, z_n) dx = \int_{\Omega} T^{++}(x) dx. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Nas desigualdades acima usamos a desigualdade variacional (1.6) e o Lema de Fatou. Portanto temos uma contradição, pois inicialmente tomamos  $c < \int_{\Omega} T^{++}(x)dx$ .

Agora, consideraremos o segundo caso. Neste caso, temos que  $\bar{z} = -\Phi_1$ . Então, seguindo as idéias do caso anterior, segue que  $c \geq \int_{\Omega} T^{--}(x)dx$ . Novamente temos uma contradição, pois inicialmente escolhemos  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $c < \int_{\Omega} T^{--}(x)dx$ . Consequentemente, demonstramos que toda sequência  $(PS)_c$  é limitada para todo nível  $c$  tal que  $c < \min \left\{ \int_{\Omega} T^{++}(x)dx, \int_{\Omega} T^{--}(x)dx \right\}$ . Argumentos clássicos mostram que o toda sequência  $(PS)_c$  possui subsequência convergente em  $H$ . Portanto, temos que o funcional  $I$  satisfaz a condição  $(PS)_c$  se  $c < \min \left\{ \int_{\Omega} T^{++}(x)dx, \int_{\Omega} T^{--}(x)dx \right\}$ . Esta afirmação finaliza a demonstração do lema.  $\square$

Assim, usando o Lema 3.4, temos o seguinte resultado

**Teorema 3.5.** *Suponha  $(H0)$ ,  $(H2)$  e  $(H4)$ . Então o problema (3.3) possui pelo menos uma solução não trivial.*

*Demonstração.* Primeiramente, lembremos que a função  $F$  é limitada. Portanto o funcional  $I$  é limitado inferiormente. Além disso, usando o Lema 3.4 e a hipótese  $(H4)$ , temos que o funcional  $I$  satisfaz  $(PS)_c$  com  $c = \inf\{I(z) : z \in H\}$ . Deste modo, podemos aplicar o Princípio Variacional de Ekeland obtendo um ponto crítico  $z_0 \in H$  tal que  $I(z_0) = \inf\{I(z) : z \in H\} \leq I(t_0\Phi_1) < 0$ .

Neste caso, gostaríamos de enfatizar que  $I$  satisfaz a condição  $(PS)_c$  com  $c = \inf\{I(z) : z \in H\}$ . Pois, dado  $t_0 \in \mathbb{R}^*$  fornecido pela hipótese  $(H4)$ , temos as seguintes estimativas

$$c \leq I(t_0\Phi_1) = \int_{\Omega} F(x, t_0\Phi_1)dx < \min \left\{ \int_{\Omega} T^{++}(x)dx, \int_{\Omega} T^{--}(x)dx \right\} \leq 0. \quad (3.10)$$

Logo, concluímos que  $z_0$  é um ponto crítico de  $I$  tal que  $I(z_0) < 0$ . Deste modo, o problema (3.3) possui pelo menos uma solução não trivial. Esta afirmação finaliza a prova do teorema.  $\square$

Logo, combinando os Teoremas 3.3 e 3.5, obtemos o seguinte resultado

**Teorema 3.6.** *Suponha  $(H0)$ ,  $(H1)$ ,  $(H2)$  e  $(H4)$ . Então o problema (3.3) admite duas soluções não triviais.*

*Demonstração.* Inicialmente, aplicando o Teorema 3.5, temos um ponto crítico  $z_0 \in H$  tal que  $I(z_0) < 0 = I(0)$ . Portanto,  $z_0$  é uma solução não trivial para o problema (3.3). Além disso, aplicando o Teorema 3.3, obtemos uma solução  $z_1 \in H$  tal que  $I(z_1) \geq \rho_0 > 0 = I(0)$ . Consequentemente  $z_0$  e  $z_1$  são soluções distintas e não triviais para o problema (3.3). Esta afirmação finaliza a prova do teorema.  $\square$

Neste momento, determinaremos outras soluções não triviais para o problema (3.3). Assim, para os próximos resultados defina os seguintes subconjuntos

$$A^+ = \{t\Phi_1 + w, t \geq 0, w \in V_1^\perp\},$$

$$A^- = \{t\Phi_1 + w, t \leq 0, w \in V_1^\perp\}.$$

Logo, obtemos  $\partial A^+ = \partial A^- = V_1^\perp$ . Assim, minimizaremos o funcional  $I$  restrito aos subconjuntos  $A^+$  e  $A^-$ .

**Lema 3.7.** *Suponha (H0), (H2), (H3), (H5) e (H6). Então o problema (3.3) admite duas soluções não triviais com energia negativa.*

*Demonstração.* Inicialmente considere os seguintes funcionais  $J^\pm = I|_{A^\pm}$ . Agora, é importante lembrarmos que os funcionais  $J^\pm$  satisfazem  $(PS)_c$  desde que tenhamos  $c < \min \left\{ \int_\Omega T^{++}(x)dx, \int_\Omega T^{--}(x)dx \right\}$ . Deste modo, temos que  $J^\pm$  satisfaz  $(PS)_{c^\pm}$  onde  $c^\pm = \inf \{J^\pm(z) : z \in H\}$ .

Logo, aplicando o Princípio Variacional de Ekeland, obtemos dois pontos críticos  $z_0^+$  e  $z_0^-$  para os funcionais  $J^+$  e  $J^-$  respectivamente. Além disso, temos que

$$c^+ = J^+(z_0^+) = \inf_{z \in A^+} J(z) \text{ e } c^- = J^-(z_0^-) = \inf_{z \in A^-} J(z).$$

Assim, afirmamos que  $z_0^+$  e  $z_0^-$  são não nulos. Com efeito, dados  $z_0^\pm$  como acima, temos as seguintes estimativas

$$J(z_0^\pm) \leq J(t^\pm \Phi_1) = \int_\Omega F(x, t^\pm \Phi_1)dx < \min \left\{ \int_\Omega T^{++}(x)dx, \int_\Omega T^{--}(x)dx \right\} \leq 0, \quad (3.11)$$

onde usamos as hipóteses (H2) e (H5). Portanto, temos que  $z_0^\pm \neq 0$ .

Por outro lado, usando a hipótese (H6), obtemos que o funcional  $I$  restrito a  $V_1^\perp$  é não negativo. Mais precisamente, dado  $w \in V_1^\perp$  temos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} I(w) &= \frac{1}{2}\|w\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(x)w, w \rangle dx + \int_{\Omega} F(x, w) dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|w\|^2 - \frac{\lambda_2}{2} \int_{\Omega} \langle A(x)w, w \rangle dx \geq 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Esta informação implica que  $z_0^+ \neq z_0^-$ . Pois, caso o contrário usando a estimativa (3.12) teremos  $z_0^+ = z_0^- \in V_1^\perp$  satisfazendo  $J(z_0^\pm) < 0 \leq J(z_0^\pm)$ . Assim, temos uma contradição. Portanto temos que  $z_0^+ \neq z_0^-$ . Assim,  $z_0^\pm$  são pontos críticos distintos e não triviais para o funcional  $I$ . Logo, o problema (3.3) possui pelo menos duas soluções não triviais. Esta afirmação finaliza a demonstração do lema.  $\square$

Deste modo, usando o Teorema 3.3 e Lema 3.7, obtemos o seguinte resultado

**Teorema 3.8.** *Suponha (H0) – (H3), (H5) e (H6). Então o problema (3.3) admite três soluções não triviais. Além disso, uma das soluções possui energia positiva e as outras duas soluções possuem energia negativa.*

*Demonstração.* A demonstração deste teorema segue do Teorema 3.3 e Lema 3.7. Mais especificamente, usando o Lema 3.7, sabemos que o funcional  $I$  admite dois pontos críticos denotados por  $z_0^\pm \in H$  tais que  $I(z_0^\pm) < 0$ . Além disso, aplicando o Teorema 3.3, temos um ponto crítico  $z_1 \in H$  tal que  $I(z_1) > 0$ . Consequentemente  $z_0^\pm, z_1$  são soluções distintas. Portanto, o problema (3.3) admite três soluções não triviais. Esta afirmação conclui a demonstração do teorema.  $\square$

**Observação 4.** *Nos Teoremas 3.3, 3.6 e 3.8 possibilitamos que o limites definidos em (3.6) sejam iguais, ou seja, permitimos que  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} F(x, z)$  exista. Neste caso, seja  $w \in L^1(\Omega)$  tal que  $w(x) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} F(x, z)$ . Novamente, pela hipótese (H2), temos que  $\int_{\Omega} w(x) dx \leq 0$ . Em particular, fazendo  $w \equiv 0$ , temos que o problema (3.3) possui pelo menos três soluções não triviais sobre as mesmas hipóteses do Teorema 3.8.*

Novamente, nos Teoremas 3.3, 3.6 e 3.8 usamos a hipótese (H2), ou seja, onde as funções auxiliares descritas em (3.6) possuem integral em  $\Omega$  não positivas. Em outras palavras, nestes teoremas as funções auxiliares descritas em (3.6) são sempre não-positivas ou pelo menos possuem médias em  $\Omega$  não positivas.

Para os próximos resultados consideraremos alguns casos onde as funções auxiliares descritas em (3.6) são estritamente positivas ou pelo menos possuem média em  $\Omega$  não negativas. Neste caso, denotamos  $b_1 = \max \left\{ \int_{\Omega} S^{++}(x)dx, \int_{\Omega} S^{--}(x)dx \right\}$ . Deste modo, consideramos as seguintes hipóteses

(H7) Existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$F(x, z) \geq \frac{1}{2}(1 - \lambda_2)\langle A(x)z, z \rangle + (b_1 + \epsilon)|\Omega|^{-1}, \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2. \quad (3.13)$$

(H8) Existe  $t_0 \in \mathbb{R}^*$  tal que  $\int_{\Omega} F(x, t_0 \Phi_1)dx < 0$ .

(H9) Existem  $t^- < 0 < t^+$  tal que  $\int_{\Omega} F(x, t^{\pm} \Phi_1)dx < 0$ .

(H10)  $\int_{\Omega} T^{++}(x)dx \geq 0$  e  $\int_{\Omega} T^{--}(x)dx \geq 0$ .

Primeiramente, demonstraremos que o funcional  $I$  satisfaz  $(PS)_c$  para alguns níveis  $c \in \mathbb{R}$ . Deste modo, usando teorema com o Teorema do Passo da Montanha, Princípio Variacional de Ekeland e Teorema do Ponto de Sela, obtemos existência e multiplicidade de soluções para o problema (3.3). Assim, somos capazes de provar o seguinte resultado

**Lema 3.9.** *Suponha (H0). Então o funcional  $I$  satisfaz  $(PS)_c$  para todo nível  $c > b_1 = \max \left\{ \int_{\Omega} S^{++}(x)dx, \int_{\Omega} S^{--}(x)dx \right\}$ .*

*Demonstração.* Novamente a demonstração deste lema é por contradição. Neste caso, suponha a existência de uma sequência  $(PS)_c$  ilimitada satisfazendo a desigualdade  $c > \max \left\{ \int_{\Omega} S^{++}(x)dx, \int_{\Omega} S^{--}(x)dx \right\}$ . Denotando tal sequência por  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$  obtemos as seguinte informações

- $I(z_n) \rightarrow c$ ,

- $\|z_n\| \rightarrow \infty$ ,
- $\|I'(z_n)\| \rightarrow 0$ , se  $n \rightarrow \infty$ .

Agora, defina  $\bar{z}_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$ . Assim, obtemos  $\bar{z} \in H$  com as seguintes propriedades:

- $\bar{z}_n \rightharpoonup \bar{z}$  em  $H$ ,
- $\bar{z}_n \rightarrow \bar{z}$  em  $L^p(\Omega)^2$ ,
- $\bar{z}_n(x) \rightarrow \bar{z}(x)$  q.t.p. em  $\Omega$

Por outro lado, usando as idéias contidas na demonstração do Lema 3.4, obtemos que  $\bar{z} = \pm \Phi_1$ . Inicialmente suponha que  $\bar{z} = \Phi_1$ . Portanto, temos que  $\bar{u}_n(x) \rightarrow \infty$  e  $\bar{v}_n(x) \rightarrow \infty$ ,  $\forall x \in \Omega$  se  $n \rightarrow \infty$ . Neste caso, usamos que  $\Phi_1(x) > 0$  em  $\Omega$ .

Deste modo, escrevendo  $z_n = t_n \Phi_1 + w_n$ , onde  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$  e  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V_1^\perp$  obtemos a seguinte estimativa

$$I(z_n) \geq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_2(A)} \right) \|w_n\|^2 + \int_{\Omega} F(x, z_n) dx. \quad (3.14)$$

Agora, a limitação de  $F$  e a desigualdade (3.14) implicam  $|t_n| \rightarrow \infty$  se  $n \rightarrow \infty$ . Além disso, usando a mesma desigualdade, temos que  $\|w_n\| \leq C, \forall n \in \mathbb{N}$ . Para provar esta afirmação basta supor que  $(w_n)$  é ilimitada e usar a desigualdade (3.14). Consequentemente, a sequência  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada em  $H$  e a sequência  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$  é ilimitada.

Agora, usando a desigualdade de Hölder, imersões de Sobolev e a hipótese (H0), obtemos as seguintes desigualdades

$$\left| \int_{\Omega} \nabla F(x, z_n) w_n dx \right| \leq C \left( \int_{\Omega} |\nabla F(x, z_n)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|w_n\| \leq C \left( \int_{\Omega} |\nabla F(x, z_n)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.15)$$

Logo, aplicando o Teorema da Convergência Dominada, temos a identidade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla F(x, z_n) w_n dx = 0. \quad (3.16)$$

Portanto, usando (3.15) e (3.16), temos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{\lambda_2}\right) \|w_n\|^2 &\leq \left| \|w_n\|^2 - \langle T_A w_n, w_n \rangle - \int_{\Omega} \nabla F(x, z_n) w_n dx \right| + \left| \int_{\Omega} \nabla F(x, z_n) w_n dx \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \|w_n\| + \left| \int_{\Omega} \nabla F(x, z_n) w_n dx \right| \leq \frac{1}{n} \|w_n\| + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Portanto, usando (3.17), obtemos que  $\|w_n\| \rightarrow 0$ , se  $n \rightarrow \infty$ . Consequentemente, usando imersões de Sobolev, temos que

$$\|w_n\|^2 - \langle T_A w_n, w_n \rangle \rightarrow 0, \text{ se } n \rightarrow \infty. \quad (3.18)$$

Por outro lado, temos a seguinte identidade

$$I(z_n) = \frac{1}{2} \|z_n\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(x) z_n, z_n \rangle dx + \int_{\Omega} F(x, z_n) dx.$$

Assim, temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n \rightarrow \infty} I(z_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \|z_n\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(x) z_n, z_n \rangle dx + \int_{\Omega} F(x, z_n) dx \right\} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \|w_n\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(x) w_n, w_n \rangle dx + \int_{\Omega} F(x, z_n) dx \right\} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(x, z_n) dx = \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(x, t_n \Phi_1 + w_n) dx = \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(x, t_n \Phi_1) dx \\ &\leq \int_{\Omega} \limsup_{n \rightarrow \infty} F(x, t_n \Phi_1) dx = \int_{\Omega} S^{++}(x) dx, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde usamos (3.18), Lema de Fatou e a Proposição A.6. Portanto temos uma contradição com a escolha inicial  $c \in \mathbb{R}$  a qual satisfaz  $c > \max \left\{ \int_{\Omega} S^{++}(x) dx, \int_{\Omega} S^{--}(x) dx \right\}$ .

Agora, analisaremos o caso onde  $\bar{z} = -\Phi_1$ . Neste caso, obtemos uma contradição semelhante ao caso anterior. Mais precisamente, teremos que o nível  $c$  satisfaz a estimativa  $c = \lim_{n \rightarrow \infty} I(z_n) \leq \int_{\Omega} S^{--}(x) dx$ . Novamente temos uma contradição tendo em vista que  $c > \max \left\{ \int_{\Omega} S^{++}(x) dx, \int_{\Omega} S^{--}(x) dx \right\}$ . Deste modo, o funcional  $I$  satisfaz  $(PS)_c$  para todo  $c > \max \left\{ \int_{\Omega} S^{++}(x) dx, \int_{\Omega} S^{--}(x) dx \right\}$ . Esta afirmação finaliza a demonstração do lema.  $\square$

Para os próximos resultados queremos aplicar uma variação do Teorema de Ponto de Sela, dado em [40]. Inicialmente, fazemos algumas definições e enunciaremos este teorema. Seja

$$\mathfrak{S} = \{\Phi \in C^0([0, 1] \times E, E) : \Phi(0, \cdot) = id\},$$

onde  $E$  espaço de Banach e  $S, Q \subset E$ , onde  $Q$  é uma variedade de dimensão finita com bordo  $\partial Q$ .

**Definição 3.10.** Dizemos que  $S$  e  $\partial Q$  estão enlaçados se, para todo  $\Phi \in \mathfrak{S}$  onde  $\Phi([0, 1] \times \partial Q) \cap S = \emptyset$ , então  $\Phi(t, Q) \cap S \neq \emptyset$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

**Definição 3.11.** Dizemos que um enlace entre  $S$  e  $\partial Q$  é do tipo de deformação com respeito a  $I$ , se existe  $\gamma \in \mathbb{R}$  e  $\Phi \in \mathfrak{S}$  satisfazendo as seguintes condições:

$$\Phi(t, \partial Q) \cap S = \emptyset, \text{ para todo } t \in [0, 1], \quad (3.20)$$

$$\Phi(1, \partial Q) \subset I^\gamma, \text{ onde } I^\gamma = \{u \in E | I(u) \leq \gamma\}, \quad (3.21)$$

$$I(u) > \gamma, \text{ para todo } u \in S. \quad (3.22)$$

**Teorema 3.12.** [40] Seja  $E$  espaço de Banach sobre  $\mathbb{R}$ , com  $E = X_1 \oplus X_2$  onde  $X_1$  possui dimensão finita. Suponha  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$  com a seguinte geometria:

$(I_0)$   $I$  é limitado superiormente em  $X_1$ , ou seja, existe  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que

$$I(u) \leq \beta, \text{ para todo } u \in X_1. \quad (3.23)$$

$(I_1)$   $I$  é limitado inferiormente em  $X_2$ , ou seja, existe  $\gamma \in \mathbb{R}$  tal que

$$I(u) \geq \gamma, \text{ para todo } u \in X_2. \quad (3.24)$$

Se  $I$  satisfaz  $(PS)_c$  para todo  $c \in [\gamma, \beta]$ , então  $I$  possui um valor crítico  $\alpha \in [\gamma, \beta]$ . Além disso,  $\alpha$  é caracterizado por:

$$\alpha = \inf_{\Phi \in \Gamma} \max_{u \in Q} I(\Phi(1, u)), \quad (3.25)$$

onde

$$\Gamma = \{\Phi \in \mathfrak{S} : \Phi \text{ satisfaz (3.20) e (3.21)}\}. \quad (3.26)$$

Para o próximo resultado demonstramos que o funcional  $I$  possui a geometria do ponto de sela fornecido pelo Teorema 3.12. Neste caso, temos o

**Lema 3.13.** *Suponha (H0). Então o funcional  $I$  possui a seguinte geometria*

**a)**  $I(z) \rightarrow \infty$  se  $\|z\| \rightarrow \infty$  com  $z \in V_1^\perp$ .

**b)**  $I(z) \leq \alpha$ ,  $\forall z \in V_1$ , para algum  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Primeiramente iremos provar o item a). Para este item temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{1}{2}\|z\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(x)z, z \rangle dx + \int_{\Omega} F(x, z) dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|z\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(x)z, z \rangle dx - C|\Omega| \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_2}\right)\|z\|^2 - C|\Omega| \\ &\rightarrow \infty \text{ se } \|z\| \rightarrow \infty \text{ com } z \in V_1^\perp, \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde usamos a hipótese (H0) e a desigualdade variacional fornecida em (1.8).

Agora, provaremos o item b). Assim, dado  $z \in V_1$  então temos que  $z = t\Phi_1$  para algum  $t \in \mathbb{R}$ . Portanto, seguem as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} I(z) &= I(t\Phi_1) = \frac{1}{2}t^2\|\Phi_1\|^2 - t^2 \int_{\Omega} \langle A(x)\Phi_1, \Phi_1 \rangle dx + \int_{\Omega} F(x, t\Phi_1) dx \\ &= \int_{\Omega} F(x, t\phi_1) dx \leq C|\Omega|, \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde usamos a hipótese (H0). Neste caso, segue a prova do item b) para toda constante  $\alpha \geq C|\Omega|$ . Esta afirmação finaliza a demonstração do Lema.  $\square$

Para o próximo resultado não supomos que  $z = 0$  é solução do problema (3.3). Neste caso, o principal objetivo é obter uma solução via o Teorema do Ponto de Sela dado pelo Teorema 3.12 onde possibilitamos que as funções auxiliares descritas em (3.6) sejam estritamente positivas ou nulas. Agora, lembrando que  $b_1 = \max \left\{ \int_{\Omega} S^{++}(x)dx, \int_{\Omega} S^{--}(x)dx \right\}$ , provamos o seguinte resultado

**Teorema 3.14.** *Suponha  $(H0), (H3), (H7), (H10)$ . Então o problema (3.3) admite uma solução.*

*Demonstração.* A prova deste teorema segue dos Lemas 3.9 e 3.13 e Teorema 3.12. Mais precisamente, usando o Lema 3.9, temos que o funcional  $I$  satisfaz  $(PS)_c$  para todo  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $c > b_1 = \max \left\{ \int_{\Omega} S^{++}(x)dx, \int_{\Omega} S^{--}(x)dx \right\}$ .

Deste modo, denotamos  $H = V_1 \oplus V_1^{\perp}$ . Assim, usando a hipótese  $(H7)$  e a desigualdade (1.8), segue que as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{1}{2}\|z\|^2 - \frac{1}{2}\langle T_A z, z \rangle + \int_{\Omega} F(x, z)dx \geq \frac{1}{2}\|z\|^2 - \frac{\lambda_2}{2}\langle T_A z, z \rangle + b_1 + \epsilon \\ &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\|z\|^2 + b_1 + \epsilon = b_1 + \epsilon > b_1, \forall z \in V_1^{\perp}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Em particular, concluímos que  $I$  satisfaz  $(PS)_c$  para todo  $c \in [b_1 + \epsilon, \alpha]$  onde  $\alpha$  é fornecido pelo Lema 3.13–b. Consequentemente, usando o Lema 3.13, segue que  $I$  possui a geometria exigida no Teorema 3.12. Portanto, o funcional  $I$  admite um ponto crítico  $z_1 \in H$ . Assim, o problema (3.3) possui pelo menos uma solução. Além disso, usando Teoria de Morse, obtemos que  $C_1(I, z_1) \neq 0$ , veja [14]. Esta informação finaliza a demonstração do teorema.  $\square$

No Teorema 3.14 garantimos a existência de uma solução para o problema (3.3) onde as funções auxiliares descritas em (3.6) podem ser estritamente positivas. Para os próximos resultados vamos impor somente que  $\nabla F(x, 0, 0) \equiv 0$ . Deste modo,  $z = 0$  é solução trivial para o problema (3.3). Assim, queremos determinar soluções não triviais para o problema (3.3). Neste caso, temos o

**Teorema 3.15.** *Suponha  $(H0), (H1), (H3), (H7), (H8)$  e  $(H10)$ . Então o problema (3.3) admite pelo menos duas soluções não triviais.*

*Demonstração.* A prova deste teorema segue combinando o Lema 3.4 com o Teorema 3.14. Mais especificamente, usando as hipóteses  $(H8)$  e  $(H10)$  podemos aplicar o Princípio Variacional de Ekeland. Neste caso, obtemos um ponto crítico  $z_0$  tal que  $I(z_0) < I(0)$ . Além disso, temos que  $C_q(I, z_0) = \delta_{q0}\mathbb{Z}$  pois  $z_0$  é mínimo local para o funcional  $I$ .

Por outro lado, aplicando o Teorema 3.14, temos um ponto crítico  $z_1 \in H$  satisfazendo  $C_1(I, z_1) \neq 0$ . Assim, comparando os grupos críticos, temos que  $z_0$  e  $z_1$  são soluções distintas e não triviais para o problema (3.3). Esta afirmação finaliza a demonstração do teorema.  $\square$

Agora, usando as mesmas idéias do Lema 3.7, provaremos o seguinte resultado

**Teorema 3.16.** *Suponha  $(H0), (H1), (H3), (H6), (H7), (H9)$  e  $(H10)$ . Então o problema (3.3) admite pelo menos três soluções não triviais.*

*Demonstração.* A prova deste teorema segue do Teorema 3.14 e Lema 3.4. Neste caso, usamos as mesmas idéias da demonstração do Lema 3.7. Mais precisamente, as hipóteses  $(H6), (H9)$  e  $(H10)$  mostram que existem pontos críticos  $z_0^\pm$  para o funcional  $I$ , dados por minimização, tais que  $I(z_0^\pm) < I(0)$  e  $C_q(I, z_0^\pm) = \delta_{q0}\mathbb{Z}$ .

Por outro lado, o Teorema 3.14 fornece  $z_1 \in H$  um ponto crítico para  $I$  tal que  $C_1(I, z_1) \neq 0$ . Deste modo, comparando os grupos críticos, temos que  $z_0^+, z_0^-$  e  $z_1$  são soluções distintas e não triviais para o problema (3.3). Novamente, usamos  $(H6)$  para mostrar que  $z_0^+$  e  $z_0^-$  são distintas. Esta afirmação finaliza a demonstração do teorema.  $\square$

Para o próximo resultado supomos que as funções auxiliares definidas em (3.6) são estritamente positivas e que  $F(x, 0, 0) \equiv 0$  e  $\nabla F(x, 0, 0) \equiv 0$ . Assim, temos que  $z = 0$  é solução trivial para o problema (3.3) com  $I(0) = 0$ .

Por outro lado, usando o Lema 3.4, temos que o funcional  $I$  satisfaz a condição  $(PS)_c$  com  $c < \min \left\{ \int_{\Omega} T^{++}(x)dx, \int_{\Omega} T^{--}(x)dx \right\}$ . Além disso, usando o Lema 3.9 temos que  $I$  satisfaz  $(PS)_c$  desde que  $c > \max \left\{ \int_{\Omega} S^{++}(x)dx, \int_{\Omega} S^{--}(x)dx \right\}$ . Primeiramente, consideramos a seguinte hipótese

(H11) Existe  $R > 0$  tal que

$$\int_{\Omega} F(x, z)dx < \min \left\{ \int_{\Omega} T^{++}(x)dx, \int_{\Omega} T^{--}(x)dx \right\}, \forall |z| \leq R.$$

Além disso, suponha que existam  $t_0^{\pm} \in \left( 0, \frac{R}{\|\Phi_1\|_{\infty}} \right)$  tal que

$$\int_{\Omega} F(x, t_0^{\pm} \Phi_1)dx < 0.$$

Assim, temos o seguinte resultado

**Teorema 3.17.** *Suponha  $(H0), (H1), (H3), (H6), (H10)$  e  $(H11)$ . Então o problema (3.3) admite pelo menos três soluções não triviais. Além disso, duas soluções possuem energia negativa e a outra solução possui energia positiva.*

*Demonstração.* A prova deste resultado segue utilizando o Teorema do Passo da Montanha juntamente com as idéias contidas no Lema 3.7. Primeiramente, vamos averiguar a geometria do Passo da Montanha. Inicialmente, a hipótese  $(H1)$  garante que 0 é um mínimo local para o funcional  $I$ , veja a Proposição 3.1. Além disso, usando a hipótese  $(H11)$  seque que  $I(t_0 \Phi_1) < 0$  com  $\|t_0 \Phi_1\| = |t_0| > \alpha > 0$ . Aqui, fazemos  $0 < \rho < \rho_0$  com  $\rho_0$  suficientemente pequeno dado na Proposição 3.1.

Por outro lado, a hipótese  $(H11)$  garante o funcional  $I$  satisfaz  $(PS)_c$  tal que  $c$  é dado pelo Min-Max no Teorema do Passo da Montanha, ou seja, temos que a condição  $(PS)$  é verificado no nível do passo da montanha. Mais especificamente, seja  $c_1$  o nível do Passo da Montanha, então temos as seguintes estimativas

$$c_1 = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \leq \sup_{t \in [0,1]} I(\gamma_0(t)), \quad (3.30)$$

onde definimos  $\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], H) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = t_0\Phi_1\}$ . Aqui,  $\gamma_0 \in \Gamma$  é dada por  $\gamma_0(t) = tt_0\Phi_1, \forall t \in [0, 1]$ . Assim, segue as seguintes estimativas

$$c_1 \leq \max_{t \in [0, 1]} I(\gamma_0(t)) = \max_{t \in [0, 1]} \int_{\Omega} F(x, tt_0\Phi_1) dx < \min \left\{ \int_{\Omega} T^{++}(x) dx, \int_{\Omega} T^{--}(x) dx \right\}. \quad (3.31)$$

Na estimativa acima usamos a hipótese (H11) e a desigualdade (3.30). Deste modo, o nível do passo da Montanha satisfaz a condição de Palais Smale. Neste caso, podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha garantindo a existência de um ponto crítico  $z_1$  tal que  $I(z_1) \geq \alpha > 0$ .

Agora, aplicando as mesmas idéias da demonstração do Lema 3.7, temos que  $I$  admite dois pontos críticos  $z_0^{\pm}$  satisfazendo  $I(z_0^{\pm}) < 0$ . Novamente  $z_0^{\pm}, z_1$  são soluções não triviais e distintas para o problema (3.3). Esta afirmação finaliza a demonstração do teorema.  $\square$

**Observação 5.** *No Teoremas 3.14, 3.15, 3.16 e 3.17 possibilitamos que as funções auxiliares descritas em (3.6) sejam estritamente positivas. Neste caso, foi necessário impor hipóteses adicionais sobre a função  $F$  para verificarmos a condição  $(PS)_c$  sobre certos níveis  $c \in \mathbb{R}$ .*

Novamente, nos Teoremas 3.14, 3.15, 3.16 e 3.17 possibilitamos que as funções descritas (3.6) sejam todas iguais e necessariamente sejam positivas. Neste caso, temos que  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} F(x, z)$  existe. Assim, seja  $w \in L^1(\Omega)$  tal que  $w(x) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} F(x, z)$ . Deste modo, para aplicarmos os Teoremas 3.14, 3.15, 3.16 basta que tenhamos  $\int_{\Omega} w(x) dx \geq 0$ . Em particular, com algumas hipóteses adicionais sobre  $F$ , garantimos existência de pelo menos três soluções não triviais para o Problema (3.3).

**Observação 6.** *O caso onde os números  $\int_{\Omega} T^{++} dx, \int_{\Omega} T^{--} dx$  são negativos e os números  $\int_{\Omega} S^{++} dx, \int_{\Omega} S^{--} dx$  são positivos é tratado de forma análoga. Neste caso, obtemos pelo menos três soluções não triviais para o problema (3.3) sobre hipóteses similares discutidas nesta seção. Mais precisamente, basta aplicar o Teorema 3.13 e usar as mesmas idéias contidas no Lema 3.7. Consequentemente, obtemos respectivamente uma solução  $z_1$  com energia positiva e duas soluções  $z_0^{\pm}$  com energia negativa.*

## Capítulo 4

# Ressonância forte em autovalores não principais.

Neste capítulo, trabalhamos com uma classe de sistemas gradientes com ressonância forte em autovalores altos. Mais precisamente, estudamos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + b(x)v + F_u(x, u, v) - h_1(x) & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = b(x)u + d(x)v + F_v(x, u, v) - h_2(x) & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado e suave em  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ . Além disso, exigimos que a função  $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  seja de classe  $C^2$  e que a matriz  $A = A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & d(x) \end{pmatrix}$  satisfaça as seguintes condições:

( $M_0$ )  $A \in C^0(\overline{\Omega}, M_{2 \times 2}(\mathbb{R}))$ , onde  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  é o conjunto das matrizes reais simétricas de ordem 2;

( $M_1$ )  $A$  é cooperativo, isto é,  $b(x) \geq 0$  para todo  $x \in \overline{\Omega}$ ;

( $M_2$ )  $\max_{x \in \Omega} \max \{a, d\} > 0$ , ou seja, existe  $x_0 \in \Omega$  tal que  $a(x_0) > 0$  ou  $d(x_0) > 0$ .

Assim, estudamos o problema fortemente ressonante (4.1) onde impomos que  $\nabla F$  seja limitada em  $\Omega \times \mathbb{R}^2$  e impomos a condição de ressonância  $\lambda_k(A) = 1$  para algum

$k > 1$ . Existem muitos trabalhos, no caso escalar, considerando o caso fortemente ressonante em autovalores altos, veja [9] e suas referências. Mais especificamente, temos que o problema (4.1) é fortemente ressonante quando:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \nabla F(x, z) = 0, \text{ com } F \text{ limitada em } \Omega \times \mathbb{R}^2, \text{ e } \lambda_k(A) = 1, \text{ com } k > 1. \quad (4.2)$$

Novamente, que temos um funcional de classe  $C^2$  denotado por  $I : H \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para todo  $z = (u, v) \in H = H_0^1(\Omega)^2$  temos que

$$I(z) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(x)(u, v), (u, v) \rangle dx + \int_{\Omega} F(x, u, v) dx. \quad (4.3)$$

Problemas fortemente ressonantes possuem um grande interesse e uma vasta literatura, ver [9] e [32]. Neste caso, lembramos o funcional  $I$  pode não satisfazer a condição clássica de Palais-Smale, abreviadamente escrevemos  $(PS)$ . Em [9] foi determinado vários tipos de ressonância conforme o comportamento no infinito da não linearidade  $F$ , intuitivamente o problema (1.3) é "mais" ressonante quanto menor for  $F$  no infinito.

## 4.1 Ressonância Forte em autovalores Autos

Neste capítulo, consideraremos ressonância forte em autovalores  $\lambda_k(A)$ , onde  $k > 1$ . A principal diferença entre este capítulo e o capítulo anterior é que as autofunções associadas a  $\lambda_k(A)$  necessariamente mudam de sinal. Além disso,  $\lambda_k(A)$  não é simples em geral. Estas dificuldades tornam o problema mais interessante, pois a mudança de sinal nas autofunções dificultam na prova das condições do tipo  $(PS)$ .

Neste momento, escreveremos novamente o problema tratado neste capítulo. Neste caso, consideramos o sistema elíptico:

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + b(x)v - F_u(x, u, v) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta v = b(x)u + d(x)v - F_v(x, u, v) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.4)$$

onde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado e suave em  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ . Além disso, exigimos que a função  $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  seja de classe  $C^1$  e que  $A = A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & d(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ , veja seção 1.2.

Nesta capítulo, sempre consideraremos  $A$  não negativa, ou seja, sempre tomaremos  $A \in \mathcal{M}_2(\Omega)$  tal que

$$\langle A(x)z, z \rangle \geq 0, \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2. \quad (4.5)$$

Novamente, introduzimos uma hipótese a qual torna o problema (4.4) fortemente ressonante no infinito em algum autovalor  $\lambda_k(A), k > 1$ .

$$(H0) \lim_{|z| \rightarrow \infty} \nabla F(x, z) = 0, \quad |F(x, z)| \leq C, \quad \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2 \text{ com } \lambda_k(A) = 1, k > 1.$$

Para estudarmos o problema (4.4) utilizaremos nesta seção as seguintes funções auxiliares:

$$\begin{aligned} F^{++}(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \infty}} F(x, u, v), & F^{+-}(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow \infty \\ v \rightarrow -\infty}} F(x, u, v), \\ F^{-+}(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow \infty}} F(x, u, v), & F^{--}(x) &= \lim_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow -\infty}} F(x, u, v). \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde os limites acima são uniformes em  $\Omega$  e definem funções em  $L^1(\Omega)$ .

Para o próximo resultado demonstramos que  $I$  satisfaz a condição  $(PS)_c$  se, e somente se,  $c \in \mathbb{R} \setminus \Gamma_k$  onde definimos

$$\Gamma_k = \left\{ \int_{\substack{u>0 \\ v>0}} F^{++} + \int_{\substack{u<0 \\ v>0}} F^{-+} + \int_{\substack{u>0 \\ v<0}} F^{+-} + \int_{\substack{u<0 \\ v<0}} F^{--} : z = (u, v) \in V(\lambda_k), z \neq 0 \right\}. \quad (4.7)$$

Este resultado foi provado, para o caso escalar, em [23]. No entanto, provaremos este resultado a qual tornara o nosso texto mais autosuficiente. Neste caso, provaremos o seguinte resultado

**Lema 4.1.** *Suponha (H0). Então o funcional  $I$  satisfaz  $(PS)_c$  se, e somente se,  $c \in \mathbb{R} \setminus \Gamma_k$ . Em outras palavras, determinamos os níveis  $c \in \mathbb{R}$  tais que condição  $(PS)_c$  é verificada. Além disso, sabemos para quais níveis  $c \in \mathbb{R}$  onde a condição  $(PS)_c$  falha.*

*Demonstração.* Dividiremos a prova deste lema em duas partes. Na parte 1) mostramos que para todo  $c \in \mathbb{R} \setminus \Gamma_k$  o funcional  $I$  satisfaz  $(PS)_c$ . Na parte 2) provamos que para todo  $c \in \Gamma_k$  o funcional  $I$  não satisfaz  $(PS)_c$ .

Inicialmente provaremos a parte 1). Dado  $c \in \mathbb{R} \setminus \Gamma_k$ , basta mostrar que toda sequência  $(PS)_c$  admite subsequência limitada. Pois a função  $F$  é subcrítica e o funcional  $I$  é da forma identidade menos um compacto.

A prova desta parte é por contradição. Neste caso, seja  $c \in \mathbb{R} \setminus \Gamma_k$  tal que  $I$  não satisfaz a condição  $(PS)_c$ . Assim, existe uma sequência  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$  tal que

- $I(z_n) \rightarrow c$ ,
- $I'(z_n) \rightarrow 0$ ,
- $\|z_n\| \rightarrow \infty$ , se  $n \rightarrow \infty$ .

Denote  $H = V^+ \oplus V^0 \oplus V^-$ , onde  $V^- = V_{k-1}$ ,  $V^0 = V(\lambda_k)$ ,  $V^+ = V_k^\perp$ . Logo escrevemos  $z_n = z_n^+ + z_n^0 + z_n^-$ , com  $z_n^+ \in V^+$ ,  $z_n^- \in V^-$ ,  $z_n^0 \in V^0$ . Deste modo, dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$|\langle I(z_n), z_n^+ \rangle| \leq \left| \|z_n^+\|^2 - \langle T_A z_n^+, z_n^+ \rangle - \int_{\Omega} \nabla F(x, z_n) z_n^+ dx \right| \leq \frac{1}{n} \|z_n^+\|, \forall n \geq n_0. \quad (4.8)$$

Por outro lado, temos as seguintes estimativas

$$\left| \int_{\Omega} \nabla F(x, z_n) z_n^+ dx \right| \leq \int_{\Omega} |\nabla F(x, z_n) z_n^+| dx = C \int_{\Omega} |z_n^+| dx \leq C \|z_n^+\|, \quad (4.9)$$

onde usamos a limitação de  $\nabla F$  e imersões de Sobolev. Portanto, usando (4.8) e (4.9), obtemos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}}\right) \|z_n^+\|^2 &\leq \left| \|z_n^+\|^2 - \langle T_A z_n^+, z_n^+ \rangle - \int_{\Omega} \nabla F(x, z_n) z_n^+ dx \right| + \\ &+ \left| \int_{\Omega} \nabla F(x, z_n) z_n^+ dx \right| \leq \frac{1}{n} \|z_n^+\| + C \|z_n^+\| \leq C \|z_n^+\|, \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde  $C$  denota várias constantes positivas. Portanto, tem-se  $\|z_n^+\| \leq C, \forall n \in \mathbb{N}$ . De forma análoga, obtemos as seguintes desigualdades para a sequência  $(z_n^-)$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\lambda_{k-1}}\right)\|z_n^+\|^2 &\leq \left| -\|z_n^-\|^2 + \langle T_A z_n^-, z_n^- \rangle + \int_{\Omega} \nabla F(x, z_n) z_n^- dx \right| + \\ &+ \left| \int_{\Omega} \nabla F(x, z_n) z_n^- dx \right| \leq \frac{1}{n}\|z_n^-\| + C\|z_n^-\| \leq C\|z_n^-\|. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Assim  $\|z_n^-\| \leq C, \forall n \in \mathbb{N}$ . Além disso,  $\|z_n\| \rightarrow \infty$  se  $n \rightarrow \infty$  e a limitação das sequências  $(z_n^+), (z_n^-)$  implicam que  $\|z_n^0\| \rightarrow \infty$  se  $n \rightarrow \infty$ . Agora, defina  $\overline{z_n^0} = \frac{z_n^0}{\|z_n^0\|}$ . Então existe  $\overline{z_0} \in V^0$ , com  $\|z_0\| = 1$  tal que

- $\overline{z_n^0} \rightarrow \overline{z}$ , pois  $\dim V^0 < \infty$ ,
- $\overline{z_n^0} \rightarrow \overline{z}$ , em  $L^p(\Omega)^2, p \in [1, 2^*)$ ,
- $\overline{z_n^0}(x) \rightarrow \overline{z}(x)$  q.t.p. em  $\Omega$ .

Por outro lado, temos as seguintes convergências

$$\begin{aligned} u_n^0 &\rightarrow \infty \text{ e } v_n^0 \rightarrow \infty \text{ se } x \in \{x \in \Omega : \overline{u}_0 > 0, \overline{v}_0 > 0\}, \\ u_n^0 &\rightarrow -\infty \text{ e } v_n^0 \rightarrow \infty \text{ se } x \in \{x \in \Omega : \overline{u}_0 < 0, \overline{v}_0 > 0\}, \\ u_n^0 &\rightarrow \infty \text{ e } v_n^0 \rightarrow -\infty \text{ se } x \in \{x \in \Omega : \overline{u}_0 > 0, \overline{v}_0 < 0\}, \\ u_n^0 &\rightarrow -\infty \text{ e } v_n^0 \rightarrow -\infty \text{ se } x \in \{x \in \Omega : \overline{u}_0 < 0, \overline{v}_0 < 0\}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde  $z_n^0 = (u_n^0, v_n^0)$ ,  $\overline{z_0} = (\overline{u}_0, \overline{v}_0)$  e  $\overline{z_n} = \left( \frac{u_n^0}{\|z_n^0\|}, \frac{v_n^0}{\|z_n^0\|} \right)$ . Além disso,  $z_n^0(x) \rightarrow 0$ , se  $x \in \Omega_0 = \{x \in \Omega : \overline{z_0}(x) = 0\}$ . Agora, usando (4.12) e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos a seguinte identidade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(x, z_n) dx = \int_{\substack{\overline{u} > 0 \\ \overline{v} > 0}} F^{++} + \int_{\substack{\overline{u} < 0 \\ \overline{v} > 0}} F^{-+} + \int_{\substack{\overline{u} > 0 \\ \overline{v} < 0}} F^{+-} + \int_{\substack{\overline{u} < 0 \\ \overline{v} < 0}} F^{--}. \quad (4.13)$$

Por outro lado, temos as seguintes estimativas

$$\left| \int_{\Omega} \nabla F(x, z_n) z_n^{\pm} dx \right| \leq C \left( \int_{\Omega} |\nabla F(x, z_n)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|z_n^{\pm}\| \leq C \left( \int_{\Omega} |\nabla F(x, z_n)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.14)$$

onde usamos a desigualdade de Höder e imersões de Sobolev. Assim, aplicando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos a seguinte igualdade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla F(x, z_n) z_n^{\pm} dx = 0. \quad (4.15)$$

Além disso, temos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} 0 \leq (1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}}) \|z_n^+\|^2 &\leq \left| \|z_n^+\|^2 - \langle T_A z_n^+, z_n^+ \rangle - \int_{\Omega} \nabla F(x, z_n) z_n^+ dx \right| + \\ &+ \left| \int_{\Omega} \nabla F(x, z_n) z_n^+ dx \right| \leq \frac{1}{n} \|z_n^+\| + \left| \int_{\Omega} \nabla F(x, z_n) z_n^+ dx \right| \\ &\leq \frac{C}{n} + \frac{1}{n}, \forall n \geq n_0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde usamos a limitação da sequência  $(z_n^+)$  e a identidade (4.15). Portanto  $\|z_n^+\| \rightarrow 0$ , se  $n \rightarrow \infty$ . De modo análogo, temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} 0 \leq -(1 - \frac{1}{\lambda_{k-1}}) \|z_n^-\|^2 &\leq \left| -\|z_n^-\|^2 + \langle T_A z_n^-, z_n^- \rangle - \int_{\Omega} \nabla F(x, z_n) z_n^- dx \right| + \\ &+ \left| \int_{\Omega} \nabla F(x, z_n) z_n^- dx \right| \leq \frac{1}{n} \|z_n^-\| + \left| \int_{\Omega} \nabla F(x, z_n) z_n^- dx \right| \\ &\leq \frac{C}{n} + \frac{1}{n}, \forall n \geq n_0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

logo  $\|z_n^-\| \rightarrow 0$ , se  $n \rightarrow \infty$ . Agora, usando que  $\|z_n^{\pm}\| \rightarrow 0$ , temos as seguintes identidades

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n \rightarrow \infty} I(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \langle (I - T_A)(z_n^+ + z_n^-), z_n^+ + z_n^- \rangle + \int_{\Omega} F(x, z_n) dx \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(x, z_n) dx = \int_{\substack{\bar{u} > 0 \\ \bar{v} > 0}} F^{++} + \int_{\substack{\bar{u} < 0 \\ \bar{v} > 0}} F^{-+} + \int_{\substack{\bar{u} > 0 \\ \bar{v} < 0}} F^{+-} + \int_{\substack{\bar{u} < 0 \\ \bar{v} < 0}} F^{--}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Assim temos que  $c \in \Gamma_k$ . Portanto temos uma contradição, pois inicialmente escolhemos  $c \in \mathbb{R} \setminus \Gamma_k$ . Logo, desde que  $c \in \mathbb{R} \setminus \Gamma_k$ , toda sequência  $(PS)_c$  é limitada. Assim, usando argumentos clássicos, segue que  $I$  satisfaz  $(PS)_c, \forall c \in \mathbb{R} \setminus \Gamma_k$ .

Agora provaremos a parte 2). Dado  $c \in \Gamma_k$  devemos mostrar que  $I$  não satisfaz a condição  $(PS)_c$ . Neste caso basta mostrar que existe uma sequência  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$  tal que

- $I(z_n) \rightarrow c$ ,
- $I'(z_n) \rightarrow 0$ ,
- $\|z_n\| \rightarrow \infty$ , se  $n \rightarrow \infty$ , tal que  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$  não admite subsequência convergente.

Assim, escolha  $z_n = nz_0$  onde  $z_0 \in V(\lambda_k)$ ,  $\|z_0\| = 1$ . Portanto  $z_n$  não admite subsequência limitada. Além disso, temos as seguintes convergências

$$I(z_n) = I(nz_0) = \int_{\Omega} F(x, nz_0) dx \rightarrow c, \text{ se } n \rightarrow \infty. \quad (4.19)$$

$$I'(z_n)w = I'(nz_0)w = \int_{\Omega} \nabla F(x, nz_0) w dx \rightarrow 0, \text{ se } n \rightarrow \infty, \forall w \in H, \quad (4.20)$$

onde usamos  $(H0)$  e o Teorema da Convergência Dominada. Neste caso, é importante lembrar que  $z_0 \in V(\lambda_k)$ ,  $\|z_0\| = 1$ . Então (4.19) verifica-se para algum  $c \in \Gamma_k$ . Portanto o funcional  $I$  não satisfaz  $(PS)_c$  para cada  $c \in \Gamma_k$ . Esta afirmação finaliza a demonstração do lema.  $\square$

**Observação 7.** *Suponha que o autovalor  $\lambda_k(A)$  seja simples com autofunção  $\Phi_k(A) = (\phi_k, \psi_k)$ . Então temos que*

$$\begin{aligned} \Gamma_k = & \left\{ \int_{\substack{\phi_k > 0 \\ \psi_k > 0}} F^{++} + \int_{\substack{\phi_k < 0 \\ \psi_k > 0}} F^{-+} + \int_{\substack{\phi_k > 0 \\ \phi_k < 0}} F^{+-} + \int_{\substack{\phi_k < 0 \\ \phi_k < 0}} F^{--}; \int_{\substack{\phi_k < 0 \\ \phi_k < 0}} F^{++} + \right. \\ & \left. + \int_{\substack{\phi_k > 0 \\ \psi_k < 0}} F^{-+} + \int_{\substack{\phi_k > 0 \\ \phi_k > 0}} F^{+-} + \int_{\substack{\phi_k > 0 \\ \phi_k > 0}} F^{--} \right\}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

*Em particular, neste caso o conjunto  $\Gamma_k$  possui no máximo dois elementos distintos.*

No Lema 4.1 pode ocorrer que  $k = 1$ . Em outras palavras, se supomos ressonância no autovalor principal  $\lambda_1(A)$  temos que o funcional  $I$  satisfaz  $(PS)_c$  para todo  $c \in \mathbb{R} \setminus \Gamma_1$ . Neste caso, o conjunto  $\Gamma_1$  admite a seguinte expressão

$$\Gamma_1 = \left\{ \int_{\Omega} F^{++}, \int_{\Omega} F^{--} \right\}. \quad (4.22)$$

Novamente, para deduzirmos a expressão (4.22) é suficiente usar a simplicidade e a positividade do autovalor  $\lambda_1(A)$ . Em particular, obtemos que  $\Gamma_1$  possui no máximo dois valores distintos. Além disso, temos que  $I$  não satisfaz  $(PS)_c$  para  $c = \int_{\Omega} F^{++}$  e  $c = \int_{\Omega} F^{--}$ .

Agora, retornaremos a discussão do Problema (4.4) com  $k > 1$ . Primeiramente, temos a

**Observação 8.** *Suponha que  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} F(x, z) = w(x)$  para alguma função  $w \in L^1(\Omega)$ . Então, temos que  $\Gamma_k = \{\int_{\Omega} w(x)dx\}$ . Em particular,  $\Gamma_k$  possui exatamente um elemento. Consequentemente, temos que  $I$  satisfaz  $(PS)_c$ , para todo  $c \in \mathbb{R} \setminus \{\int_{\Omega} w(x)dx\}$ . Além disso,  $I$  não satisfaz  $(PS)_c$  com  $c = \int_{\Omega} w(x)dx$ . Um subcaso interessante acontece quando a função  $w$  é constante. Digamos  $w \equiv w_0$ . Neste caso, segue que  $\Gamma_k = w_0|\Omega|$ .*

Agora, gostaríamos de enfatizar que o conjunto  $\Gamma_k \subseteq \mathbb{R}$  é sempre limitado. Para verificar esta afirmação basta utilizar a definição deste conjunto e lembrar que as funções auxiliares descritas em (4.6) pertencem a  $L^1(\Omega)$ .

Neste momento, consideremos algumas propriedades sobre a geometria do funcional  $I$ . Assim, temos o

**Lema 4.2.** *Suponha  $(H0)$ . Então o funcional  $I$  satisfaz*

- 1)  $I(z) \rightarrow \infty$ , se  $\|z\| \rightarrow \infty$  com  $z \in V_k^{\perp}$ ,
- 2)  $I(z) \rightarrow -\infty$ , se  $\|z\| \rightarrow \infty$  com  $z \in V_{k-1}$ .

*Demonstração.* Para provarmos esta proposição basta aplicar as desigualdades variacionais (1.7) e (1.8). Deixamos a prova a cargo do leitor.  $\square$

Para os próximos resultados queremos obter existência e multiplicidade de soluções para o problema (4.4). Neste caso, gostaríamos de mencionar que esta seção foi motivada pelos seguintes artigos [8], [29]. Assim, como estamos com ressonância forte em algum autovalor  $\lambda_k(A)$ ,  $k > 1$ , aplicaremos o método de redução de Liapunov-Schmidt, ver [8], [3] e [13]. Este método é descrito pela seguinte proposição

**Proposição 4.3.** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert,  $H^+, H^-$  subespaços fechados de  $H$  tal que  $H = H^+ \oplus H^-$ . Seja  $I : H \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional de classe  $C^1$ . Se existe um número real  $\mu > 0$  tal que*

$$\langle I'(z + w_1) - I'(z + w_2), w_1 - w_2 \rangle \geq \mu \|w_1 - w_2\|^2, \forall z \in H^-, w_1, w_2 \in H^+ \quad (4.23)$$

ou

$$-\langle I'(z + w_1) - I'(z + w_2), w_1 - w_2 \rangle \geq \mu \|w_1 - w_2\|^2, \forall z \in H^-, w_1, w_2 \in H^+, \quad (4.24)$$

então temos as seguintes alternativas

i) Se ocorre (4.23) então existe uma função contínua  $\Psi : H^- \rightarrow H^+$  tal que

$$I(z + \Psi(z)) = \min_{w \in H^+} I(z + w).$$

ii) Se ocorre (4.24) então existe uma função contínua  $\Psi : H^- \rightarrow H^+$  tal que

$$I(z + \Psi(z)) = \max_{w \in H^+} I(z + w).$$

Em qualquer caso,  $\Psi(z)$  é o único elemento de  $H^+$  tal que

$$\langle I'(z + \Psi(z)), w \rangle = 0, \forall w \in H^+. \quad (4.25)$$

Portanto temos um funcional  $J : H^- \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  dado por  $J(z) = I(z + \Psi(z))$ , tal que

$$\langle J'(z), h \rangle = \langle I'(z + \Psi(z)), h \rangle, \forall z, h \in H^-. \quad (4.26)$$

Além disso,  $z \in H^-$  é ponto crítico para o funcional  $J$  se, e somente se,  $z + \Psi(z)$  é ponto crítico para o funcional  $I$ . Esta afirmação segue das equações (4.25) e (4.26). Consequentemente, para determinarmos pontos críticos para o funcional  $I$  basta determinar os pontos críticos do funcional  $J$ .

*Demonstração.* Inicialmente, lembramos que esta prova pode ser encontrada em [13] ou [3]. No entanto, vamos fazer a prova desta proposição. A prova que vamos descrever

aqui é dada pelo artigo [13]. Primeiramente faremos a prova da parte *i*). A prova da parte *ii*) segue de modo análogo.

Neste caso, temos que  $H = H^- \oplus H^+$  onde  $H^-$  e  $H^+$  são subespaços fechados de  $H$ . Assim, dado  $z \in H^-$  fixado, considere o funcional  $I_z : H^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $I_z(w) = I(z + w), \forall w \in H^+$ . Logo, temos que o funcional  $I_z$  é de classe  $C^1$  para cada  $z \in H^-$  fixado. Além disso, temos que  $I_z$  possui no máximo um ponto crítico em  $H^+$ . Com efeito, dados  $w_1, w_2 \in H^+$  pontos críticos para o funcional  $I_z$ , segue as seguintes desigualdades

$$\langle I'_z(w_1) - I'_z(w_2), w_1 - w_2 \rangle = \langle I'(z + w_1) - I'(z + w_2), w_1 - w_2 \rangle \geq \mu \|w_1 - w_2\|^2. \quad (4.27)$$

Na desigualdade acima utilizamos a expressão (4.23). Agora, usando que  $w_1$  e  $w_2$  são pontos críticos, temos que  $\mu \|w_1 - w_2\|^2 \leq 0$ . Portanto  $w_1 = w_2$ , ou seja, o funcional  $I_z$  admite no máximo um ponto crítico em  $H^+$ .

Por outro lado, usando (4.23) temos que o funcional  $I_z$  é coercivo, isto é,  $I_z(w) \rightarrow \infty$  se  $\|w\| \rightarrow \infty, w \in H^+$ . Para provar esta afirmação usaremos o Teorema Fundamental do Cálculo e a desigualdade (4.23). Assim, dado  $w \in H^+$  segue as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} I_z(w) &= I_z(0) + \int_0^1 \langle I'(sw), w \rangle ds = I_z(0) + \int_0^1 \frac{\langle I'(sw), sw \rangle}{s} ds \\ &\geq I_z(0) + \mu \|w\|^2 \int_0^1 s ds = I_z(0) + \mu \|w\|^2 \rightarrow \infty, \text{ se } \|w\| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Agora, afirmamos que o funcional  $I_z$  é convexa. Com efeito, dados  $w_1, w_2 \in H^+$  distintos e constantes  $0 < \alpha < \beta < 1$ . Defina a aplicação  $Q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $Q(t) = I_z(w_1 + t(w_2 - w_1))$ . Então, temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} Q'(\beta) - Q'(\alpha) &= \langle I'_z(w_1 + \beta(w_2 - w_1)), w_2 - w_1 \rangle - \langle I'_z(w_1 + \alpha(w_2 - w_1)), w_2 - w_1 \rangle \\ &= \langle I'_z(w_1 + \beta(w_2 - w_1)) - I'_z(w_1 + \alpha(w_2 - w_1)), w_2 - w_1 \rangle \\ &= \langle I'(z + w_1 + \beta(w_2 - w_1)) - I'(z + w_1 + \alpha(w_2 - w_1)), w_2 - w_1 \rangle \\ &\geq \frac{1}{\beta - \alpha} \mu \|(\beta - \alpha)(w_2 - w_1)\|^2 = (\beta - \alpha) \mu \|w_2 - w_1\|^2 > 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Portanto, obtemos que  $Q'(\beta) > Q'(\alpha)$ . Consequentemente, temos que  $I_z$  é convexa. Deste modo, definimos a função  $\Psi : H^- \rightarrow H^+$  onde  $\Psi(z)$  é o único mínimo do funcional  $I_z$ . Em outras palavras, temos que  $\Psi(z)$  é o único elemento de  $H^+$  tal que  $I(z + \Psi(z)) = \min\{I(z + w) : w \in H^+\}$ . Consequentemente, temos que

$$\langle I'(z + \Psi(z)), w \rangle = \langle I'_z(\Psi(z)), w \rangle = 0, \forall w \in H^+. \quad (4.30)$$

Por outro lado, usando as mesmas idéias contidas em [13], temos que a função  $\Psi$  é continua.

Agora, resta mostrar que o funcional  $J : H^- \rightarrow \mathbb{R}$  dados por  $J(z) = I(z + \Psi(z))$  é de classe  $C^1$ . Neste caso, usando o Teorema Fundamental do Cálculo e que  $I_z$  possui um mínimo global em  $\Psi(z)$ , temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} \frac{J(z + th) - J(z)}{t} &= \frac{I(z + th + \Psi(z + th)) - I(z + \Psi(z))}{t} \\ &\leq \frac{I(z + th + \Psi(z)) - I(z + \Psi(z))}{t} \\ &= \int_0^1 \langle I'(z + \Psi(z) + sth), h \rangle ds. \end{aligned} \quad (4.31)$$

De modo análogo, temos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} \frac{J(z + th) - J(z)}{t} &= \frac{I(z + th + \Psi(z + th)) - I(z + \Psi(z))}{t} \\ &\geq \frac{I(z + th + \Psi(z + th)) - I(z + \Psi(z + th))}{t} \\ &= \int_0^1 \langle I'(z + \Psi(z + th) + sth), h \rangle ds. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Assim, usando (4.31) e (4.32), temos que  $J$  possui derivada dada por

$$\langle J'(z), h \rangle = \langle I'(z + \Psi(z)), h \rangle, \forall h \in H^-. \quad (4.33)$$

Assim,  $J$  possui derivada continua tendo em vista que  $\Psi$  e  $I'$  são continuas. Isto finaliza a prova da parte *i*). A prova da parte *ii*) é tratada de modo semelhante, veja [3] e [13]. Deixamos os detalhes a cargo do leitor.  $\square$

Neste momento, para aplicarmos a redução Liapunov-Schmidt, consideremos as seguintes hipóteses adicionais

$(H_1)^-$  Existe  $\delta^- \in (\lambda_{k-1}, 1)$  tal que

$$\langle \nabla F(x, z) - \nabla F(x, w), z - w \rangle \leq (1 - \delta^-) \langle A(x)(z - w), z - w \rangle, \forall (x, z, w) \in \Omega \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

$(H_1)^+$  Existe  $\delta^+ \in (1, \lambda_{k+1})$  tal que

$$\langle \nabla F(x, z) - \nabla F(x, w), z - w \rangle \geq (1 - \delta^+) \langle A(x)(z - w), z - w \rangle, \forall (x, z, w) \in \Omega \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Consequentemente, temos os seguintes resultados

**Proposição 4.4.** *Suponha  $(H_0), (H_1)^-$ . Então temos que*

$$-\langle I'(z + w_1) - I'(z + w_2), w_1 - w_2 \rangle \geq \mu_k^- \|w_1 - w_2\|^2, \forall z \in V_{k-1}^\perp, w_1, w_2 \in V_{k-1}, \quad (4.34)$$

$$\text{onde } \mu_k^- = -\left(1 - \frac{\delta^+}{\lambda_{k-1}}\right) > 0.$$

*Demonstração.* Inicialmente, dados  $z \in V_{k-1}^\perp, w_1, w_2 \in V_{k-1}$  temos as seguintes estimativas

$$\int_{\Omega} \langle \nabla F(x, z + w_1) - \nabla F(x, z + w_2), w_1 - w_2 \rangle \leq (1 - \delta^-) \int_{\Omega} \langle A(x)(w_1 - w_2), w_1 - w_2 \rangle, \quad (4.35)$$

onde usamos a hipótese  $(H_1)^-$ . Assim, usando (4.35) e a desigualdade variacional (1.7), obtemos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} \langle I'(z + w_1) - I'(z + w_2), w_1 - w_2 \rangle &\leq \langle (I - T_A)(w_1 - w_2), w_1 - w_2 \rangle + \\ &+ (1 - \delta^-) \int_{\Omega} \langle A(x)(w_1 - w_2), w_1 - w_2 \rangle dx \\ &= \|w_1 - w_2\|^2 - \delta^- \langle T_A(w_1 - w_2), w_1 - w_2 \rangle \\ &\leq \left(1 - \frac{\delta^-}{\lambda_{k-1}}\right) \|w_1 - w_2\|^2 = -\mu_k^- \|w_1 - w_2\|^2. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Portanto a desigualdade (4.36) implica que

$$-\langle I'(z + w_1) - I'(z + w_2), w_1 - w_2 \rangle \geq \mu_k^- \|w_1 - w_2\|^2, \forall z \in V_{k-1}^\perp, w_1, w_2 \in V_{k-1}.$$

Assim, vale a desigualdade (4.34). Esta afirmação finaliza a prova da proposição.  $\square$

Por outro lado, temos um resultado análogo a proposição anterior com a desigualdade (4.34) invertida. Neste caso, usando a hipótese  $(H1)^+$ , podemos novamente reduzir o funcional  $I$  a um subespaço de  $H$ . Mais especificamente, temos o

**Proposição 4.5.** *Suponha  $(H0), (H1)^+$ . Então o funcional  $I$  satisfaz*

$$\langle I'(z + w_1) - I'(z + w_2), w_1 - w_2 \rangle \geq \mu_k^+ \|w_1 - w_2\|^2, \forall z \in V_k, w_1, w_2 \in V_k^\perp, \quad (4.37)$$

$$\text{onde } \mu_k^+ = \left(1 - \frac{\delta^+}{\lambda_{k+1}}\right) > 0.$$

*Demonstração.* Inicialmente, dados  $z \in V_k^\perp, w_1, w_2 \in V_k^\perp$ , temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} \langle I'(z + w_1) - I'(z + w_2), w_1 - w_2 \rangle &\geq \langle (I - T_A)(w_1 - w_2), w_1 - w_2 \rangle + \\ &\quad + (1 - \delta_+) \langle T_A(w_1 - w_2), w_1 - w_2 \rangle \\ &= \|w_1 - w_2\|^2 - \delta^+ \langle T_A(w_1 - w_2), w_1 - w_2 \rangle \\ &\geq \left(1 - \frac{\delta^+}{\lambda_{k+1}}\right) \|w_1 - w_2\|^2 = \mu_k^+ \|w_1 - w_2\|^2, \end{aligned}$$

onde usamos a hipótese  $(H1)^+$  e a desigualdade variacional (1.8). Portanto, temos que

$$\langle I'(z + w_1) - I'(z + w_2), w_1 - w_2 \rangle \geq \mu_k^+ \|w_1 - w_2\|^2, \forall z \in V_k, w_1, w_2 \in V_k^\perp.$$

Portanto, vale a desigualdade (4.37). Esta afirmação conclui a prova do teorema.  $\square$

Deste modo, usando as Proposições 4.3, 4.4 ou 4.5 podemos reduzir o funcional  $I$  a um subespaço de  $H$ . Seja  $J$  o funcional reduzido. Consequentemente, para determinarmos soluções de (4.4) basta encontrar pontos críticos para o funcional  $J$ .

Neste momento destacaremos algumas propriedades do funcional  $J$ . Estas propriedades são obtidas das desigualdades variacionais (1.7) e (1.8) e da caracterização do funcional  $J$  fornecida pela Proposição 4.3. Mais especificamente, temos os seguintes resultados

**Proposição 4.6.** *Suponha  $(H0), (H1)^-$  ou  $(H0), (H1)^+$ . Então o funcional reduzido  $J$  satisfaz  $(PS)_c$  para todo  $c \in \Gamma_k \setminus \mathbb{R}$ . Além disso,  $J$  não satisfaz  $(PS)_c$  para cada  $c \in \Gamma_k$ .*

*Demonstração.* A prova desta proposição segue utilizando a definição do funcional  $J$  e as desigualdades variacionais (1.7) e (1.8), ver [3, 8].  $\square$

Agora, consideramos o seguinte resultado

**Lema 4.7.** *Suponha  $(H0), (H1)^-$  ou  $(H0), (H1)^+$ . Então temos as seguintes propriedades*

- 1) *Se  $F(x, 0, 0) \equiv 0$ , então  $J(0) = 0$ .*
- 2) *Seja  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V(\lambda_k)$  uma sequência tal que  $\|z_n\| \rightarrow \infty$ , se  $n \rightarrow \infty$ . Então obtemos  $J(z_n) \rightarrow c$ , se  $n \rightarrow \infty$ , para algum  $c \in \Gamma_k$ .*

*Demonstração.* Dividiremos a prova deste lema em parte *i*) e parte *ii*). Na parte *i*) supomos as hipóteses  $(H0)$  e  $(H1)^-$ . Na parte *ii*) supomos  $(H0)$  e  $(H1)^+$ . Esta parte é tratada de modo análogo. Assim, deixamos a verificação da parte *ii*) a cargo do leitor.

Deste modo, passamos a prova da parte *i*). Neste caso, usando  $(H0), (H1)^-$  e a Proposição 4.3-ii), existe uma função contínua  $\Psi : V_{k-1}^\perp \rightarrow V_{k-1}$  tal que

$$J(z) = I(z + \Psi(z)) = \max_{w \in V_{k-1}} I(z + w). \quad (4.38)$$

Agora, provaremos o item 1) deste lema. Primeiramente, usando (4.38), segue que  $J(z) \geq I(z), \forall z \in V_{k-1}$ . Portanto  $J(0) \geq I(0) = 0$ , logo é suficiente provar que  $J(0) \leq 0$ . Com efeito, usando a hipótese  $(H1)^-$  e a Proposição (A.1), obtemos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} F(x, z) &= \int_0^1 \langle \nabla F(x, tz), z \rangle dt = \int_0^1 \frac{\langle \nabla F(x, tz), tz \rangle}{t} dt \leq (1 - \delta^-) \int_0^1 \frac{\langle A(x)tz, tz \rangle}{t} dt \\ &\leq (1 - \delta^-) \langle A(x)z, z \rangle \int_0^1 t dt = \frac{1 - \delta^-}{2} \langle A(x)z, z \rangle, \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Portanto segue as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
J(0) &= I(0 + \Psi(0)) = \frac{1}{2}\|\Psi(0)\|^2 - \frac{1}{2}\langle T_A \Psi(0), \Psi(0) \rangle + \int_{\Omega} F(x, \Psi(0)) dx \\
&\leq \frac{1}{2}\|\Psi(0)\|^2 - \frac{1}{2}\langle T_A \Psi(0), \Psi(0) \rangle + \frac{1 - \delta^-}{2}\langle T_A \Psi(0), \Psi(0) \rangle \\
&\leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\delta^-}{\lambda_{k-1}}\right) \|\Psi(0)\|^2 = -\frac{1}{2}\mu_k^- \|\Psi(0)\|^2 \leq 0,
\end{aligned} \tag{4.40}$$

onde utilizamos (4.39), (4.38) e a desigualdade variacional (1.7), pois  $\Psi(0) \in V_{k-1}$ .

Assim, obtemos que  $J(0) = 0$ . Esta afirmação conclui a prova do item 1).

Agora, provaremos o item 2). Defina  $Q : V_{k-1}^{\perp} \rightarrow V_{k-1}$ , dada por

$$Q(z) = \frac{1}{2}\|\Psi(z)\|^2 - \frac{1}{2}\langle T_A \Psi(z), \Psi(z) \rangle.$$

Assim, usando a desigualdade variacional (1.7), segue que  $Q(z) \leq 0, \forall z \in V_{k-1}^{\perp}$ . Portanto  $|Q(z)| = -Q(z), \forall z \in V_{k-1}^{\perp}$ . Logo, defina  $R : H \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$R(z) = \int_{\Omega} F(x, z) dx, z \in H.$$

Portanto  $R$  é limitada, pois  $F$  é limitada pela hipótese  $(H0)$ . Agora, usando (4.38) temos que  $J(z) \geq I(z), \forall z \in V_{k-1}^{\perp}$ . Assim, segue as seguintes desigualdades

$$|Q(z)| = -Q(z) \leq -I(z) + R(z + \Psi(z)) \leq -R(z) + R(z + \Psi(z)), \tag{4.41}$$

onde usamos as desigualdades (1.7) e (1.8). Mais precisamente, basta utilizar a seguinte identidade

$$-Q(z) = -I(z + \Psi(z)) + R(z + \Psi(z)) + \frac{1}{2}(\|z\|^2 - \langle T_A z, z \rangle), \forall z \in V_{k-1}^{\perp}.$$

Assim, usando as desigualdades em (4.41) e a limitação de  $R$ , obtemos que a aplicação  $Q$  é limitada. Então afirmamos que a função  $\Psi$  é limitada, ou seja, existe  $C > 0$  tal que

$$\|\Psi(z)\| \leq C, \forall z \in V_{k-1}^{\perp}. \tag{4.42}$$

Com efeito, suponha que tal afirmação seja falsa. Então existe uma sequência  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V_{k-1}^\perp$  tal que  $\|\Psi(z_n)\| \rightarrow \infty$ , se  $n \rightarrow \infty$ . Assim, utilizando a desigualdade variacional (1.7), temos que

$$Q(z_n) \leq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_{k-1}} \right) \|\Psi(z_n)\|^2 \rightarrow -\infty, \text{ se } n \rightarrow \infty, \text{ pois } \lambda_{k-1}(A) < \lambda_k(A) = 1. \quad (4.43)$$

Por outro lado,  $Q$  é limitada então temos uma contradição. Assim segue a afirmação, ou seja,  $\Psi$  é uma aplicação limitada.

Agora, usando a Proposição A.7, obtemos a seguinte identidade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(z_n + \Psi(z_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(x, z_n + \Psi(z_n)) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(x, z_n) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R(z_n), \quad (4.44)$$

onde  $z_n \in V(\lambda_k)$  com  $\|z_n\| \rightarrow \infty$ .

Agora, para cada sequência  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V(\lambda_k)$  tal que  $\|z_n\| \rightarrow \infty$ , se  $n \rightarrow \infty$ , defina  $w_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$ . Então  $\|w_n\| = 1$  e existe  $\bar{w} \in V(\lambda_k)$  tal que

- $w_n \rightarrow \bar{w}$  em  $V(\lambda_k)$ ,
- $w_n \rightarrow \bar{w}$  em  $L^p(\Omega)^2, \forall p \in [1, 2^*)$ ,
- $w_n(x) \rightarrow \bar{w}(x)$  q.t.p em  $\Omega$ .

Deste modo, aplicando o Teorema da Convergência Dominada, obtemos as seguinte identidade

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(x, z_n) dx &= \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} F(x, z_n) dx = \int_{\substack{\bar{u} > 0 \\ \bar{v} > 0}} F^{++}(x) dx + \int_{\substack{\bar{u} < 0 \\ \bar{v} > 0}} F^{-+}(x) dx + \\ &+ \int_{\substack{\bar{u} > 0 \\ \bar{v} < 0}} F^{+-}(x) dx + \int_{\substack{\bar{u} < 0 \\ \bar{v} < 0}} F^{--}(x) dx, \text{ onde } \bar{w} = (\bar{u}, \bar{v}) \in V(\lambda_k), \|\bar{w}\| = 1. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Portanto,  $R(z_n) \rightarrow c$ , se  $n \rightarrow \infty$ , para algum  $c \in \Gamma_k$ . Assim, o limite de  $J(z_n)$  com

$n \rightarrow \infty$  satisfaz as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} J(z_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} (\|z_n\|^2 - \langle T_A z_n, z_n \rangle) + Q(z_n) + R(z_n + \Psi(z_n)) \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \{Q(z_n) + R(z_n + \Psi(z_n))\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} R(z_n + \Psi(z_n)) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} R(z_n) = c \in \Gamma_k,
\end{aligned} \tag{4.46}$$

onde utilizamos a desigualdade variacional (1.7) e a identidade (4.44). Por outro lado, lembramos que  $J(z) \geq I(z), \forall z \in V_{k-1}^\perp$ , assim temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} J(z_n) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} I(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} (\|z_n\|^2 - \langle T_A z_n, z_n \rangle) + R(z_n) \right\} \\
&\geq \lim_{n \rightarrow \infty} R(z_n) = c \in \Gamma_k,
\end{aligned} \tag{4.47}$$

onde usamos a desigualdade (1.8). Portanto, as desigualdades (4.46) e (4.47) implicam que  $\lim_{n \rightarrow \infty} J(z_n) = c$  onde  $c \in \Gamma_k$ . Esta afirmação finaliza a prova do Lema.  $\square$

**Observação 9.** *Suponha  $(H0)$  e  $(H1)^-$  ou  $(H1)^+$ . Então o funcional reduzido  $J$  restrito a  $V(\lambda_k)$  é limitado, isto é, existe um constante  $C > 0$  tal que  $|J(z)| \leq C, \forall z \in V(\lambda_k)$ . Para verificar esta afirmação basta usar a Proposição 4.7 e lembrar que o conjunto  $\Gamma_k$  é limitado.*

Agora, aplicaremos métodos min-max para obter soluções para o problema (4.4). Inicialmente, vamos supor  $(H0)$  e  $(H1)^-$ . Então, usando a Proposição 4.3–ii), existe uma função continua  $\Psi : V_{k-1}^\perp \rightarrow V_{k-1}$  tal que o funcional reduzido  $J : V_{k-1}^\perp \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz a seguinte relação

$$J(z) = I(z + \Psi(z)) = \max_{w \in V_{k-1}} I(z + w), \quad \forall z \in V_{k-1}^\perp. \tag{4.48}$$

Assim, temos o seguinte resultado

**Lema 4.8.** *Suponha  $(H0)$  e  $(H1)^-$ . Então o funcional  $J$  é limitado inferiormente, ou seja, existe  $C > 0$  tal que  $J(z) \geq -C, \forall z \in V_{k-1}^\perp$ .*

*Demonstração.* Para provar este lema basta usar a limitação de  $F$  e a desigualdade variacional (1.8). Com efeito, dado  $z \in V_{k-1}^\perp$  temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} J(z) &\geq I(z) = \frac{1}{2}\|z\|^2 - \frac{1}{2}\langle T_A z, z \rangle + \int_{\Omega} F(x, z) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_k(A)}\right) \|z\|^2 + \int_{\Omega} F(x, z) dx \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_k(A)}\right) \|z\|^2 - C|\Omega| = -C|\Omega|, \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde utilizamos a desigualdade (1.8), a limitação de  $F$  e a identidade  $\lambda_k(A) = 1$ . Estas desigualdades finalizam a prova do teorema.  $\square$

Para os próximos resultados defina  $b_k = \sup \Gamma_k$ . Deste modo, consideramos a seguinte hipótese

$(H2)^-$  Existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$F(x, z) \geq \frac{1}{2}(1 - \lambda_{k+1})\langle A(x)z, z \rangle + (b_k + \epsilon)|\Omega|^{-1}, \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2.$$

Deste modo, usando o Teorema 3.12, temos o seguinte resultado

**Teorema 4.9.** *Suponha  $(H0), (H1)^-, (H2)^-$ . Então o problema (4.4) admite pelo menos uma solução.*

*Demonstração.* Para provar este teorema usamos o Teorema do Ponto de Sela descrito no Teorema 3.12. Mais precisamente, escrevemos  $V_{k-1}^\perp = V_1 \oplus V_2$  onde  $V_1 = V(\lambda_k), V_2 = V_k^\perp$ . Deste modo, temos as seguintes propriedades

1.  $J(z) \rightarrow \infty$ , se  $\|z\| \rightarrow \infty$ , com  $z \in V_2$ ,
2. Existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $J(z) \leq \alpha, \forall z \in V_1$ .
3. Existe  $\gamma \in \mathbb{R}$  tal que  $J(z) \geq \gamma, \forall z \in V_2$ .

Agora, provaremos os itens 1), 2) e 3). Primeiramente provaremos o item 1). Seja  $z \in V_2$ . Então temos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} J(z) &\geq I(z) \geq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}(A)} \right) \|z\|^2 + \int_{\Omega} F(x, z) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}(A)} \right) \|z\|^2 - C|\Omega| \rightarrow \infty, \text{ se } \|z\| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.50)$$

onde utilizamos a desigualdade (1.8) e a limitação da função  $F$ . Estas estimativas provam o item 1).

Agora, provaremos o item 2). Primeiramente, seja  $z \in V_1$ . Deste modo, usando a desigualdade (1.7), obtemos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} J(z) &= I(z + \Psi(z)) = Q(z) + R(z + \Psi(z)) = Q(z) + \int_{\Omega} F(x, z + \Psi(z)) \\ &\leq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_{k-1}(A)} \right) \|\Psi(z)\|^2 + \int_{\Omega} F(x, z + \Psi(z)) \\ &\leq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_{k-1}(A)} \right) \|\Psi(z)\|^2 + C|\Omega| \leq C|\Omega|, \forall z \in V_{k-1}^{\perp}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Consequentemente, podemos escolher  $\alpha \geq C|\Omega| > 0$ . Esta afirmação finaliza a prova do item 2).

Finalmente, provaremos o item 3). Neste caso, usando a hipótese  $(H2)^-$  e a desigualdade (1.13), temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} J(z) &\geq I(z) = \frac{1}{2} \|z\|^2 - \frac{1}{2} \langle T_A z, z \rangle - \int_{\Omega} F(x, z) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\lambda_k(A)}{\lambda_k(A)} \right) \|z\|^2 + b_k + \epsilon = b_k + \epsilon > b_k, \forall z \in V_2. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Neste caso, podemos escolher  $\gamma = b_k + \epsilon$ . Assim, segue a prova do item 3).

Consequentemente, usando a Proposição 4.6, sabemos que  $J$  satisfaz  $(PS)_c$  para todo  $c \in [\gamma, \alpha]$ . Portanto, aplicando o Teorema 3.12, existe um ponto crítico  $z_1 \in V_{k-1}^{\perp}$

tal que  $J(z_1) \in [\gamma, \alpha]$ . Em particular, temos que  $J(z_1) \geq \gamma > b_k$ . Então o problema (4.4) admite ao menos uma solução. Esta afirmação finaliza a prova do teorema.  $\square$

**Observação 10.** *Novamente, no Teorema (4.9) permitimos que as funções descritas em (4.6) sejam positivas, negativas ou troquem de sinal. Além disso, permitimos que as funções em (4.6) sejam identicamente nulas.*

Neste momento, fazemos  $F(x, 0, 0) \equiv 0, \nabla F(x, 0, 0) \equiv 0$ . Assim, temos que  $z = 0$  é solução trivial para o problema (4.4). Consequentemente,  $z = 0$  é ponto crítico para o funcional  $J$ . Deste modo, queremos determinar soluções não triviais para este problema. Assim, usaremos Métodos Variacionais e Teoria de Morse para determinarmos tais soluções.

Primeiramente, consideremos a seguinte hipótese

$(H3)^-$  Existe  $z^* \in V(\lambda_k)$  tal que  $\beta = \int_{\Omega} F(x, z^* + \Psi(z^*))dx < 0$ .

Então, denotamos  $a_k = \inf \Gamma_k$ . Deste modo, temos o seguinte resultado

**Teorema 4.10.** *Suponha  $(H0), (H1)^-, (H3)^-$  com  $a_k = \inf \Gamma_k > \beta$ . Então, o problema (4.4) admite pelo menos uma solução não trivial.*

*Demonstração.* A prova deste teorema é imediata. Inicialmente, usando o Lemma 4.1, temos que  $I$  satisfaz  $(PS)_c$  para todo  $c \in (-\infty, \beta]$ . Então, usando a Proposição 4.6, temos que funcional  $J$  satisfaz  $(PS)_c$  sobre o mesmo intervalo.

Agora, aplicando o Princípio Variacional de Ekeland, obtemos um ponto crítico  $z_0 \in V_{k-1}^\perp$  para o funcional  $J$  tal que

$$\begin{aligned} J(z_0) &= \inf_{z \in V_{k-1}^\perp} J(z) \leq J(z^*) = Q(z^*) + R(z^* + \Psi(z^*)) \\ &\leq \int_{\Omega} F(x, z^* + \Psi(z^*))dx = \beta < I(0), \end{aligned} \tag{4.53}$$

onde usamos a desigualdade variacional (1.7) e a hipótese  $(H3)^-$ . Notemos que as estimativas acima implicam que  $J$  satisfaz  $(PS)_c$ , onde  $c \leq \beta$ . Assim, mostramos que

existe um ponto crítico não trivial para o funcional  $J$ . Portanto, (4.4) admite uma solução não trivial. Esta afirmação finaliza a prova do teorema.  $\square$

**Observação 11.** *A hipótese  $(H3)^-$  é verificada se existe  $t > 0$  suficientemente grande tal que  $\int_{\Omega} F(x, t\Phi_k)dx \leq a < 0$ , para algum  $a \in \mathbb{R}$ . Aqui,  $\Phi_k$  é uma autofunção associada ao autovalor  $\lambda_k(A)$ .*

Para verificar esta observação basta usar a Proposição (A.7). Neste caso, para cada  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que a sequência  $z_n = n\Phi_k + \Psi(n\Phi_k)$  satisfaz

$$\int_{\Omega} F(x, z_n)dx < \int_{\Omega} F(x, n\Phi_k)dx + \epsilon, \text{ se } n \geq n_0. \quad (4.54)$$

Assim, para  $\epsilon > 0$  pequeno, fazendo  $t = n$ , obtemos a seguinte desigualdade

$$\int_{\Omega} F(x, t\Phi_k + \Psi(t\Phi_k))dx < 0. \quad (4.55)$$

Novamente lembramos que a função  $\Psi$  é limitada em  $V_{k-1}^{\perp}$ . Esta informação foi crucial nas estimativas acima.

**Observação 12.** *No Teorema (4.10) permitimos que as funções auxiliares descritas em (4.6) sejam negativas, positivas ou troquem de sinal. Um caso interessante ocorre quando as funções descritas em (4.6) são identicamente nulas.*

Agora, descrevemos uma hipótese adicional

$(H4)^-$  Existem  $\alpha \in (\delta^-, 1)$ ,  $r > 0$  tal que  $|z| < r$  implica

$$F(x, z) \geq \frac{1-\alpha}{2} \langle A(x)z, z \rangle, \forall x \in \Omega.$$

**Teorema 4.11.** *Suponha  $(H0)$ ,  $(H1)^-$ ,  $(H4)^-$  e  $b_k = \sup \Gamma_k \leq 0$ . Então o problema (4.4) admite pelo menos uma solução não trivial.*

*Demonstração.* Inicialmente, provaremos que  $J$  possui a geometria do Teorema do Passo da Montanha. Mais precisamente, temos a seguinte geometria

1)  $J(z) \geq \alpha_0, \forall z \in S_{\rho} = \{z \in V_{k-1}^{\perp} : \|z\| = \rho\}$  onde  $\rho, \alpha_0 > 0$ ,

2)  $J(z^*) < 0$ , com  $\|z^*\| > \rho$ , para algum  $z^* \in V(\lambda_k)$ .

A prova dos ítems 1) e 2) são imediatas. Inicialmente provaremos o ítem 2). Neste caso, basta aplicar a hipótese  $(H4)^-$ . Com efeito, dado  $z^* \in V(\lambda_k)$  pela hipótese  $(H2)^-$  temos que  $J(z^*) < 0$ . Assim, escolheremos  $\rho > 0$  suficientemente pequeno tal que  $\|z^*\| > \rho$ . Esta afirmação conclui a prova do ítem 2).

Agora provaremos o ítem 1). Primeiramente, usando as hipóteses  $(H0)$  e  $(H4)^-$ , existe  $p \in (2, 2^*)$  tal que

$$F(x, z) \geq \frac{1-\alpha}{2} \langle A(x)z, z \rangle - C|z|^p, \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2. \quad (4.56)$$

Agora, sejam  $z \in V_{k-1}^\perp$ ,  $\|z\| = \rho$ ,  $\rho > 0$ . Logo, temos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} J(z) &\geq I(z) = \frac{1}{2}\|z\|^2 - \frac{1}{2}\langle T_A z, z \rangle + \int_{\Omega} F(x, z) dx \geq \frac{1}{2}\|z\|^2 - \frac{\alpha}{2}\langle T_A z, z \rangle - C\|z\|^p \\ &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_k}\right)\|z\|^2 - C\|z\|^p = \frac{1}{2}(1 - \alpha)\|z\|^2 - C\|z\|^p \\ &\geq \frac{1}{4}(1 - \alpha)\|z\|^2 = \frac{1}{4}(1 - \alpha)\rho^2, \end{aligned} \quad (4.57)$$

onde usamos a desigualdade (1.8), imersões de Sobolev e a estimativa (4.56). Portanto podemos tomar  $\alpha_0 = \frac{1}{4}(1 - \alpha)\rho^2$ . Novamente, estamos escolhendo  $\rho > 0$  suficientemente pequeno. Esta afirmação finaliza a prova do ítem 1).

Deste modo, aplicando o Teorema do Passo da Montanha, obtemos um ponto crítico  $z_2 \in V_{k-1}$  tal que  $c_2 = J(z_2) \geq \alpha_0 > 0$ . Além disso, temos a seguinte caracterização

$$c_2 = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \quad (4.58)$$

onde definimos  $\Gamma = \{\gamma \in C^0([0, 1], V_{k-1}^\perp) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = z^*\}$ . Assim, usando a Proposição 1.9, temos que  $C_q(J, z_2) = \delta_{q1}\mathbb{Z}$ ,  $\forall q \in \mathbb{Z}$  desde que  $F''(x, z_2) \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ . Portanto, o problema (4.4) admite pelo menos uma solução não trivial. Esta afirmação finaliza a demonstração do teorema.  $\square$

Neste momento, motivados pela informação que  $J$  é limitado inferiormente, determinaremos mais soluções não triviais para o problema (3.3). Primeiramente, para os próximos resultados, defina os seguintes subconjuntos

$$A^+ = \left\{ z = v + w : v \in V(\lambda_k), \text{ com } v = \sum_{j=s+1}^{s+l} t_j \Phi_j, t_j \geq 0, w \in V_k^\perp \right\},$$

$$A^- = \left\{ z = v + w : v \in V(\lambda_k), \text{ com } v = \sum_{j=s+1}^{s+l} t_j \Phi_j, t_j \leq 0, w \in V_k^\perp \right\},$$

onde denotamos  $s = \dim V_{k-1}$ ,  $l = \dim V(\lambda_k)$ . Logo, obtemos  $\partial A^+ = \partial A^- = V_k^\perp$ . Deste modo, minimizaremos o funcional  $J$  restrito aos subconjuntos  $A^+$  e  $A^-$ . Porém, consideremos primeiramente as seguintes hipóteses

(H5)<sup>-</sup> Existem  $z^\pm \in V(\lambda_k)$  tal que  $\beta = \int_\Omega F(x, z^\pm + \Psi(z^\pm)) dx < 0$ .

(H6)<sup>-</sup>  $F(x, z) \geq \frac{1}{2}(1 - \lambda_{k+1}(A)) \langle A(x)z, z \rangle, \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2$ .

**Lema 4.12.** *Suponha (H0), (H1)<sup>-</sup>, (H5)<sup>-</sup>, (H6)<sup>-</sup> e  $a_k = \inf \Gamma_k > \beta$ . Então o problema (3.3) admite duas soluções não triviais com energia negativa.*

*Demonstração.* Inicialmente considere os seguintes funcionais  $J^\pm = J|_{A^\pm}$ . Agora, é importante lembrarmos que os funcionais  $J^\pm$  satisfazem  $(PS)_c$  quando  $c < a_k$ . Assim, segue que  $J^\pm$  satisfaz  $(PS)_{c^\pm}$  onde  $c^\pm = \inf \{J^\pm(z) : z \in H\}$ .

Agora, aplicando o Princípio Variacional de Ekeland, obtemos dois pontos críticos  $z_0^+$  e  $z_0^-$  para os funcionais  $J^+$  e  $J^-$  respectivamente. Além disso, temos que

$$c^+ = J^+(z_0^+) = \inf_{z \in A^+} J(z) \text{ e } c^- = J^-(z_0^-) = \inf_{z \in A^-} J(z).$$

Assim, afirmamos que  $z_0^+$  e  $z_0^-$  são não nulos. Com efeito, dados  $z_0^\pm$  como acima, temos as seguintes estimativas

$$J^\pm(z_0^\pm) \leq J^\pm(z^*) = \int_\Omega F(x, z^* + \Psi(z^*)) dx = \beta < 0, \quad (4.59)$$

onde usamos a hipótese (H5)<sup>-</sup>. Portanto, segue que  $z_0^\pm \neq 0$ .

Por outro lado, usando a hipótese  $(H6)^-$ , obtemos que o funcional  $J$  restrito a  $V_k^\perp$  é não negativo. Mais precisamente, dado  $w \in V_k^\perp$  temos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} J(w) &\geq \frac{1}{2}\|w\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(x)w, w \rangle dx + \int_{\Omega} F(x, w) dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|w\|^2 - \frac{\lambda_{k+1}}{2} \int_{\Omega} \langle A(x)w, w \rangle dx \geq 0. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Esta informação implica que  $z_0^+ \neq z_0^-$ . Pois, caso o contrário usando a estimativa (4.60) teremos  $z_0^+ = z_0^- \in V_k^\perp$  satisfazendo  $J(z_0^\pm) < 0 \leq J(z_0^\pm)$ . Assim, temos uma contradição. Portanto temos que  $z_0^+ \neq z_0^-$ . Assim,  $z_0^\pm$  são pontos críticos distintos e não triviais para o funcional  $J$ . Logo, o problema (3.3) possui pelo menos duas soluções não triviais obtidas por minimização. Esta afirmação finaliza a demonstração do lema.  $\square$

Agora, combinando alguns teoremas acima, temos os seguinte resultado

**Teorema 4.13.** *Suponha  $(H0), (H1)^-, (H4)^-, (H5)^-, (H6)^-$ . Além disso, suponha que  $\beta < a_k \leq b_k = \sup \Gamma_k \leq 0$ . Então o problema (4.4) admite pelo menos três soluções não triviais.*

*Demonstração.* Inicialmente, aplicando o Lema 4.12, obtemos dois pontos críticos  $z_0^\pm$  para o funcional  $J$  tal que  $J(z_0^\pm) \leq \beta < 0$ , onde  $\beta < a_k$ .

Agora, aplicando o Teorema 4.11, obtemos um ponto crítico  $z_2 \in V_{k-1}$  tal que  $J(z_2) > 0$ . Além disso, temos que  $C_q(J, z_2) = \delta_{q1}\mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{Z}$  se  $F''(x, z_2) \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ . Consequentemente,  $z_2$  e  $z_0^\pm$  são pontos críticos distintos. Deste modo, o problema (4.4) admite pelo menos três soluções não triviais. Esta afirmação finaliza a demonstração do teorema.  $\square$

Agora, consideremos a seguinte definição

**Definição 4.14.** *Sejam  $H$  espaço de Hilbert e  $J : H \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional de classe  $C^1$ . Dado  $c \in \mathbb{R}$  dizemos que  $J$  satisfaz a condição  $(PSB)_c$  se, toda sequência limitada*

$(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$  tal que

$$J(z_n) \rightarrow c \text{ e } J'(z_n) \rightarrow 0, \text{ se } n \rightarrow \infty, \quad (4.61)$$

admite subsequência convergente.

Para o próximo resultado usaremos um teorema de linking fornecido em [29]. Neste artigo os autores consideraram funcionais de classe  $C^1$  que são limitados inferiormente e satisfazem  $(PS)_c, \forall c \in \mathbb{R}$ . Entretanto, fazendo uma inspeção cuidadosa na prova deste teorema, podemos enfraquecer estas hipóteses. Assim, enunciamos este resultado que é suficiente para os nossos propósitos, ver [8] e [29].

**Teorema 4.15.** *Seja  $H$  um espaço de Banach,  $H = V_1 \oplus V_2$  com  $1 \leq \dim V_2 < \infty$ . Seja  $J : H \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional de classe  $C^1$  a qual é limitado inferiormente e satisfaz  $(PSB)_0$  e  $(PS)_c, \forall c \in (-\infty, \beta) \cup (0, \infty)$  com  $\beta \leq 0, J(0) = 0$ . Seja  $R > 0$  tal que*

$$1) \ J(z) \geq 0, \forall z \in V_1, \|z\| \leq R,$$

$$2) \ J(z) \leq 0, \forall z \in V_2, \|z\| \leq R,$$

$$3) \ J(z) \leq \beta, \forall z \in V_2, \|z\| = R.$$

Então  $J$  possui pelo menos duas soluções não triviais.

Deste modo, com intuito de aplicarmos o Teorema 4.15, consideremos a seguinte hipótese

$(H7)^-$  Existem  $m \geq k, r > 0$  e  $\epsilon > 0$  tal que

$$\frac{1}{2}(1 - \lambda_{m+1} + \epsilon) \langle A(x)z, z \rangle \leq F(x, z) \leq \frac{1}{2}(1 - \lambda_m) \langle A(x)z, z \rangle, \forall |z| \leq r, \forall x \in \Omega.$$

Então, somos capazes de provar o

**Teorema 4.16.** *Suponha  $(H0), (H1)^-, (H3)^-, (H7)^-$  e  $\Gamma_k = \{0\}$ . Então o problema (4.4) admite pelo menos duas soluções não triviais.*

*Demonstração.* Inicialmente, seja o funcional reduzido  $J : V_{k-1}^\perp \rightarrow V_{k-1}$ . Portanto temos

$$J(z) = I(z + \Psi(z)) = \max_{w \in V_{k-1}} I(z + w),$$

onde  $\Psi : V_{k-1}^\perp \rightarrow V_{k-1}$  é continua e  $\Psi(0) = 0$ . Além disso, sabemos que  $J$  é limitada inferiormente e satisfaz  $(PS)_c, \forall c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , com  $J(0) = 0$ . Agora, defina  $V_1 = \bigoplus_{j \geq m+1} V(\lambda_j), V_2 = V(\lambda_k) \oplus \dots \oplus V(\lambda_m)$ . Seja  $R > 0$ , então provaremos as seguintes propriedades:

$$1) \ J(z) \geq 0, \forall z \in V_1, \|z\| \leq R,$$

$$2) \ J(z) \leq 0, \forall z \in V_2, \|z\| \leq R.$$

Primeiramente provaremos o item 1). Logo, utilizando a hipótese  $(H4)^-$ , existe  $p \in (2, 2^*)$  tal que

$$F(x, z) \geq \frac{1}{2}(1 - \lambda_{m+1} + \epsilon) \langle A(x)z, z \rangle - C|z|^p. \quad (4.62)$$

Seja  $z \in V_1, \|z\| \leq \delta_1, \delta_1 > 0$ . Assim, utilizando as desigualdades (4.62), (1.8) e imersões de Sobolev, temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} J(z) &\geq I(z) \geq \frac{1}{2}\|z\|^2 - \frac{1}{2}\langle T_A z, z \rangle + \frac{1}{2}(1 - \lambda_{m+1} + \epsilon) \langle T_A z, z \rangle - C\|z\|^p \\ &= \frac{1}{2}\|z\|^2 - \frac{1}{2}(\lambda_{m+1} - \epsilon) \langle T_A z, z \rangle - C\|z\|^p = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_{m+1} - \epsilon}{\lambda_{m+1}}\right)\|z\|^2 - C\|z\|^p \\ &= \frac{\epsilon}{2\lambda_{m+1}}\|z\|^2 - C\|z\|^p \geq 0, \text{ se } \delta_1 > 0 \text{ é suficientemente pequeno.} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Estas estimativas provam o item 1) com  $\delta_1 > 0$  pequeno.

Agora, provaremos o item 2). Inicialmente, lembramos que  $\dim V_2 < \infty$ . Portanto todas as normas em  $V_2$  são equivalentes. Assim, usando a continuidade de  $\Psi$  e a igualdade  $\Psi(0) = 0$ , existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$\|z + \Psi(z)\|_\infty \leq r, \forall \|z\| \leq \delta_2, z \in V_2. \quad (4.64)$$

Logo, utilizando a hipótese  $(H7)^-$ , obtemos

$$F(x, z + \Psi(z)) \leq \frac{1}{2}(1 - \lambda_m) \langle A(x)(z + \Psi(z)), (z + \Psi(z)) \rangle, \forall \|z\| \leq \delta_2. \quad (4.65)$$

Assim, usando (4.65) e a desigualdade (1.7), segue as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
J(z) &= \frac{1}{2} \{ \|z + \Psi(z)\|^2 - \langle T_A(z + \Psi(z)), z + \Psi(z) \rangle \} - \int_{\Omega} F(x, z + \Psi(z)) dx \\
&\leq \frac{1}{2} \{ \|z + \Psi(z)\|^2 - \langle T_A(z + \Psi(z)), z + \Psi(z) \rangle \} + \\
&\quad + \frac{1}{2} (1 - \lambda_m) \langle T_A(z + \Psi(z)), z + \Psi(z) \rangle \\
&= \frac{1}{2} \{ \|z + \Psi(z)\|^2 - \lambda_m \langle T_A(z + \Psi(z)), z + \Psi(z) \rangle \} \\
&\leq \frac{1}{2} (1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_m}) \|z + \Psi(z)\|^2 = 0, \forall \|z\| \leq \delta_2, z \in V_2.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Estas estimativas finalizam a prova do item 2). Portanto, tomando  $R = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ , podemos aplicar o Teorema 4.15. Consequentemente o problema (4.4) admite duas soluções não triviais. Esta afirmação finaliza a demonstração do teorema.  $\square$

Agora, aplicaremos métodos Min-Max para obter soluções do problema (4.4) usando as hipóteses  $(H0)$  e  $(H1)^+$ . Deste modo, queremos obter existência e multiplicidade de soluções para o problema 4.4. Neste caso, existe  $\Psi : V_k \rightarrow V_k^\perp$  a qual é uma função contínua tal que o funcional reduzido  $J : V_k \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz a seguinte relação

$$J(z) = I(z + \Psi(z)) = \min_{w \in V_k^\perp} I(z + w), \quad \forall z \in V_k. \tag{4.67}$$

A principal diferença entre este caso e o caso anterior reside no fato que o funcional reduzido  $J$  é limitado superiormente. Em outras palavras, existe um constante  $C \in \mathbb{R}$  tal que  $J(z) \leq C, \forall z \in V_k$ . Além disso, neste caso o funcional  $J$  não é limitado inferiormente. Lembramos, que no caso anterior o funcional reduzido era limitado inferiormente. Assim, motivados pelas diferenças citadas acima, estudaremos o problema (4.4) usando o novo funcional reduzido  $J : V_k \rightarrow \mathbb{R}$  a qual satisfaz (4.67).

Deste modo, passaremos a descrição das principais propriedades do funcional  $J$ . Primeiramente, usando a definição de  $J$ , segue que  $J(z) \leq I(z), \forall z \in V_k$ . Assim, temos os seguintes resultados

**Lema 4.17.** *Suponha  $(H0)$  e  $(H1)^+$ . Então o funcional  $J$  possui as seguintes propriedades*

1)  $J(z) \geq \alpha, \forall z \in V(\lambda_k)$ , para algum  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

2)  $J(z) \rightarrow -\infty$ , se  $\|z\| \rightarrow \infty, z \in V_{k-1}$ .

*Demonstração.* Inicialmente provaremos o item 1). Novamente a limitação de  $F$  implica que  $J$  é limitado inferiormente em  $V(\lambda_k)$ . Com efeito, dado  $z \in V(\lambda_k)$  temos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} J(z) &= I(z + \Psi(z)) \geq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}(A)} \right) \|\Psi(z)\|^2 + \int_{\Omega} F(x, z + \Psi(z)) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}(A)} \right) \|\Psi(z)\|^2 - C|\Omega| \geq -C|\Omega|, \end{aligned} \quad (4.68)$$

onde usamos a desigualdade (1.8). Portanto isto prova o item 1) com  $\alpha \leq -C|\Omega|$ .

Agora, demonstraremos o item 2). Assim, dado  $z \in V_{k-1}$  temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} J(z) &\leq I(z) = \frac{1}{2} \|z\|^2 - \frac{1}{2} \langle T_A z, z \rangle + \int_{\Omega} F(x, z) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_{k-1}(A)} \right) \|z\|^2 + \int_{\Omega} F(x, z) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_{k-1}(A)} \right) \|z\|^2 - C|\Omega| \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (4.69)$$

se  $\|z\| \rightarrow \infty$ . Nas estimativas acima usamos a desigualdade (1.7) e a desigualdade  $\lambda_{k-1}(A) < \lambda_k(A) = 1$ . Estas desigualdades finalizam a prova do lema.  $\square$

Para os próximos resultados defina  $b_k = \sup \Gamma_k$ . Agora, consideramos a seguinte hipótese

(H2)<sup>+</sup> Existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$F(x, z) \geq \frac{1}{2} (1 - \lambda_{k+1}) \langle A(x)z, z \rangle + (b_k + \epsilon) |\Omega|^{-1}, \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2.$$

Deste modo, sem supor que  $z = 0$  é solução trivial para (4.4) e usando o resultado anterior, temos o seguinte teorema

**Teorema 4.18.** *Suponha  $(H0), (H1)^+, (H2)^+$ . Então o problema (4.4) admite pelo menos uma solução.*

*Demonstração.* Para provar este teorema usaremos o Teorema 3.12. Primeiramente, provaremos que  $J$  possui a geometria do Ponto de Sela. Mais especificamente, temos as seguintes propriedades

1.  $J(z) \rightarrow -\infty$ , se  $\|z\| \rightarrow \infty$ , com  $z \in V_{k-1}$ ,
2. Existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $J(z) \leq \alpha, \forall z \in V_{k-1}$ .
3. Existe  $\gamma \in \mathbb{R}$  tal que  $J(z) \geq \gamma, \forall z \in V(\lambda_k)$ .

Assim, provaremos os itens 1), 2) e 3). Primeiramente, a prova do itens 1) e 2) seguem da Proposição 4.17. Neste caso, podemos escolher  $\alpha > \gamma$  onde  $\gamma \in \mathbb{R}$  é fornecido pelo item 3). Veja a demonstração abaixo.

Agora, provaremos o item 3). Neste caso, usando a hipótese  $(H2)^+$  e a desigualdade (1.13), temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
 J(z) &= I(z + \Psi(z)) = \frac{1}{2}\|z + \Psi(z)\|^2 - \frac{1}{2}\langle T_A(z + \Psi(z)), (z + \Psi(z)) \rangle \\
 &+ \int_{\Omega} F(x, z + \Psi(z)) dx \\
 &\geq \frac{1}{2}\|z + \Psi(z)\|^2 - \frac{\lambda_k(A)}{2}\langle T_A(z + \Psi(z)), (z + \Psi(z)) \rangle + b_k + \epsilon \\
 &\geq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\lambda_{k+1}(A)}{\lambda_{k+1}(A)} \right) \|\Psi(z)\|^2 + b_k + \epsilon = b_k + \epsilon > b_k, \forall z \in V(\lambda_k).
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

Deste modo, podemos escolher  $\gamma = b_k + \epsilon$ . Esta afirmação finaliza a prova do item 3).

Por outro lado, sabemos que  $J$  satisfaz  $(PS)_c, \forall c \in \mathbb{R} \setminus \Gamma_k$ , ver Lema 4.1 e Proposição 1.48. Em particular temos que  $J$  satisfaz  $(PS)_c, \forall c \in [\gamma, \alpha]$ .

Portanto, aplicando o Teorema 3.12, existe um ponto crítico  $z_1 \in V_k$  para o funcional  $J$  tal que  $J(z_1) \in [\gamma, \alpha]$ . Em particular, temos que  $J(z_1) \geq \gamma$ . Consequentemente o problema (4.4) admite uma solução. Esta afirmação finaliza a prova do teorema.  $\square$

Novamente, tomamos  $F(x, 0, 0) \equiv 0, \nabla F(x, 0, 0) \equiv 0$ . Portanto,  $z = 0$  é solução trivial para o problema (4.4). Deste modo, queremos determinar soluções não triviais para este problema. Logo, é suficiente determinar pontos críticos não nulos para o funcional  $J$ , veja Proposição 4.3.

Logo, consideremos a seguinte hipótese

$(H3)^+$  Existem  $\alpha \in (0, \lambda_1)$  e  $r > 0$  tal que

$$F(x, z) \geq \frac{1 - \alpha}{2} \langle A(x)z, z \rangle, \forall x \in \Omega, |z| < r.$$

Deste modo, provamos o seguinte resultado

**Teorema 4.19.** *Suponha  $(H0), (H1)^+, (H3)^+$  com  $b_k = \sup \Gamma_k \leq 0$  e  $k \geq 2$ . Então o problema (4.4) admite pelo menos uma solução não trivial.*

*Demonstração.* Primeiramente, mostraremos que  $J$  possui a geometria do do Passo da Montanha. Inicialmente, usando a hipótese  $(H3)^+$  e tomando  $p \in (2, 2^*)$  obtemos a seguinte desigualdade

$$F(x, z) \geq \frac{1 - \alpha}{2} \langle A(x)z, z \rangle - C|z|^p, \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2. \quad (4.71)$$

Deste modo, dado  $z \in V_k$  com  $\|z\| = \rho$ , segue as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} J(z) &= I(z + \Psi(z)) = \frac{1}{2} \{ \|z + \Psi(z)\|^2 - \langle T_A(z + \Psi(z)), z + \Psi(z) \rangle \} \\ &+ \int_{\Omega} F(x, z + \Psi(z)) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \{ \|z + \Psi(z)\|^2 - \alpha \langle T_A(z + \Psi(z)), z + \Psi(z) \rangle \} - C \|z + \Psi(z)\|^p \\ &\geq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda_1} \right) \|z + \Psi(z)\|^2 - C \|z + \Psi(z)\|^p \\ &\geq \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda_1} \right) \|z\|^2 > 0. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Novamente, nas estimativas (4.72), escolhemos  $\rho > 0$  suficientemente pequeno. Nestas estimativas usamos a desigualdade (1.6) e imersões de Sobolev.

Agora, seja  $\Phi_1$  a primeira autofunção para o problema (3.4) associada ao autovalor  $\lambda_1(A)$ . Então, temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
 J(t\Phi_1) &\leq I(t\Phi_1) = \frac{1}{2}\{\|t\Phi_1\|^2 - \langle T_A t\Phi_1, t\Phi_1 \rangle\} + \int_{\Omega} F(x, t\Phi_1) dx \\
 &= \frac{t^2}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_1(A)}\right) \|\Phi_1\|^2 + \int_{\Omega} F(x, t\Phi_1) dx \\
 &\leq \frac{t^2}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_1(A)}\right) \|\Phi_1\|^2 + C|\Omega| \rightarrow -\infty, \text{ se } |t| \rightarrow \infty.
 \end{aligned}
 \tag{4.73}$$

Nas estimativas (4.73) usamos que  $F$  é limitada e a desigualdade  $\lambda_1(A) < \lambda_k(A) = 1$ . Deste modo, as estimativas em (4.72) e (4.73) implicam a geometria desejada.

Novamente, lembramos que  $J$  satisfaz  $(PS)_c, \forall c \in \mathbb{R} \setminus \Gamma_k$ , veja Lema 4.1. Assim, usando que  $b_k \leq 0$ , temos que  $J$  satisfaz  $(PS)_c$  para todo  $c > 0$ .

Portanto, existe um ponto crítico  $z_2 \in V_k$  tal que  $J(z_2) > 0$ . Além disso, temos que  $C_q(J, z_2) = \delta_{q1}\mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}$ , desde que  $F''(x, z_2) \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ , veja Proposição 1.9. Além disso, temos que  $C_q(J, 0) = \delta_{q0}\mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}$ . Consequentemente o problema (4.4) admite pelo menos uma solução não trivial. Esta afirmação finaliza a demonstração do teorema.  $\square$

Agora, com intuito de usarmos o Princípio Variacional de Ekeland, consideremos a seguinte hipótese

$$(H4)^+ \text{ Existe } z^* \in V(\lambda_k) \text{ tal que } \beta = \int_{\Omega} F(x, z^* + \Psi(z^*)) dx > 0.$$

Então, denotamos novamente  $b_k = \sup \Gamma_k$ . Assim, temos o seguinte resultado

**Teorema 4.20.** *Suponha  $(H0), (H1)^+, (H4)^+$  com  $b_k = \sup \Gamma_k < \beta$ . Então, o problema (4.4) admite pelo menos uma solução não trivial.*

*Demonstração.* A prova deste teorema é imediata. Inicialmente, usando o Lemma 4.1, temos que  $I$  satisfaz  $(PS)_c$  para todo  $c \in [\beta, \infty)$ . Então, usando a Proposição 1.48, temos que funcional  $J$  satisfaz  $(PS)_c$  sobre o mesmo intervalo.

Por outro lado, temos que o funcional  $J$  é limitado superiormente. Portanto, o funcional  $-J$  é limitado inferiormente em  $V_k$ . Além disso, temos que  $\dim V_k < \infty$ .

Neste momento, usando a hipótese  $(H4)^+$ , temos as seguintes estimativas

$$\inf_{z \in V_k} -J(z) \leq -J(z^*) \leq -\int_{\Omega} F(x, z^* + \Psi(z^*)) dx = -\beta < 0, \quad (4.74)$$

onde usamos a desigualdade variacional (1.8) e a hipótese  $(H4)^+$ . Notemos que as estimativas acima implicam que  $-J$  satisfaz  $(PS)_c$ , desde que  $c \leq -\beta$ . Em particular,  $-J$  satisfaz  $(PS)_c$  onde  $c$  é o nível mínimo.

Assim, aplicando o Princípio Variacional de Ekeland para o funcional  $-J$ , obtemos um ponto crítico  $z_0 \in V_k$  para o funcional  $-J$  satisfazendo  $-J(z_0) = \min\{-J(z) : z \in V_k\}$  e  $-J'(z_0) = 0$ . Estas informações mostram que  $z_0$  é ponto crítico para o funcional  $J$ . Além disso, temos que  $z_0$  é ponto de máximo local para  $J$ . Consequentemente, o problema (4.4) admite pelo menos uma solução não trivial. Esta informação finaliza a demonstração do teorema.  $\square$

**Observação 13.** *A hipótese  $(H4)^+$  é verificada se existe  $t > 0$  suficientemente grande tal que  $\int_{\Omega} F(x, t\Phi_k) dx \geq a > 0$ , para algum  $a > 0$ . Aqui,  $\Phi_k$  é uma autofunção associada ao autovalor  $\lambda_k(A)$ .*

Para verificar esta observação basta usar a Proposição (A.7). Neste caso, para cada  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que a sequência  $z_n = n\Phi_k + \Psi(n\Phi_k)$  satisfaz

$$\int_{\Omega} F(x, z_n) dx > \int_{\Omega} F(x, n\Phi_k) dx - \epsilon, \text{ se } n \geq n_0. \quad (4.75)$$

Assim, para  $\epsilon > 0$  pequeno, fazendo  $t = n$ , obtemos a seguinte desigualdade

$$\int_{\Omega} F(x, t\Phi_k + \Psi(t\Phi_k)) dx > 0. \quad (4.76)$$

Novamente lembramos que a função  $\Psi$  é limitada em  $V_k$ . Esta informação foi crucial nas estimativas acima.

**Observação 14.** *Novamente, no Teorema (4.20) permitimos que as funções auxiliares descritas em (4.6) sejam negativas, positivas ou troquem de sinal. Um caso interessante ocorre quando as funções descritas em (4.6) são identicamente nulas, ou seja, quando temos que  $F(x, z) \rightarrow 0$ , se  $|z| \rightarrow \infty$ .*

Neste momento, motivados pela informação que  $J$  é limitado superiormente, determinaremos mais soluções não triviais para o problema (3.3). Primeiramente, para os próximos resultados, defina os seguintes subconjuntos

$$A^+ = \left\{ z = v + w : v \in V(\lambda_k), \text{ com } v = \sum_{j=s+1}^{s+l} t_j \Phi_j, t_j \geq 0, w \in V_{k-1} \right\},$$

$$A^- = \left\{ z = v + w : v \in V(\lambda_k), \text{ com } v = \sum_{j=s+1}^{s+l} t_j \Phi_j, t_j \leq 0, w \in V_{k-1} \right\},$$

onde denotamos  $s = \dim V_{k-1}$ ,  $l = \dim V(\lambda_k)$ . Logo, obtemos  $\partial A^+ = \partial A^- = V_{k-1}$ .

Assim, maximizaremos o funcional  $J$  restrito aos subconjuntos  $A^+$  e  $A^-$ . Porém, consideremos primeiramente as seguintes hipóteses

(H5)<sup>+</sup> Existem  $z^\pm \in V(\lambda_k)$  tal que  $\beta = \int_{\Omega} F(x, z^\pm + \Psi(z^\pm)) dx > 0$ .

(H6)<sup>+</sup>  $F(x, z) \leq \frac{1}{2}(1 - \lambda_{k-1}(A)) \langle A(x)z, z \rangle, \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2$ .

**Lema 4.21.** *Suponha (H0), (H1)<sup>+</sup>, (H5)<sup>+</sup>, (H6)<sup>+</sup> e  $b_k = \sup \Gamma_k < \beta$ . Então o problema (3.3) admite duas soluções não triviais.*

*Demonstração.* Inicialmente considere os seguintes funcionais  $J^\pm = J|_{A^\pm}$ . Agora, é importante lembrarmos que os funcionais  $J^\pm$  satisfazem  $(PS)_c$  se  $c > b_k$ . Consequentemente, temos que  $-J^\pm$  satisfaz  $(PS)_c$  se  $c < -b_k$ . Portanto, aplicando a hipótese (H5)<sup>+</sup>, obtemos que  $-J^\pm$  satisfaz  $(PS)_{c^\pm}$  onde  $c^\pm = \inf \{-J^\pm(z) : z \in H\}$ .

Então, aplicando o Princípio Variacional de Ekeland, temos dois pontos críticos  $z_0^+$  e  $z_0^-$  para os funcionais  $-J^+$  e  $-J^-$  respectivamente. Além disso, temos que

$$c^+ = -J^+(z_0^+) = \inf_{z \in A^+} -J(z) \text{ e } c^- = -J^-(z_0^-) = \inf_{z \in A^-} -J(z).$$

Deste modo, temos que  $z_0^\pm$  são dados por maximização do funcional  $J$  sobre os subconjuntos  $A^\pm$ .

Agora, afirmamos que  $z_0^+$  e  $z_0^-$  são não nulos. Com efeito, dados  $z_0^\pm$  como acima, temos as seguintes estimativas

$$-J(z_0^\pm) \leq -J(z^*) = - \int_{\Omega} F(x, z^* + \Psi(z^*)) dx = -\beta < 0, \quad (4.77)$$

onde usamos a hipótese  $(H5)^+$ . Portanto, segue que  $z_0^\pm \neq 0$ .

Por outro lado, usando a hipótese  $(H6)^+$ , obtemos que o funcional  $J$  restrito a  $V_{k-1}$  é não positivo. Mais precisamente, dado  $w \in V_{k-1}$  temos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} J(w) &\leq I(w) = \frac{1}{2}\|w\|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(x)w, w \rangle dx + \int_{\Omega} F(x, w) dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|w\|^2 - \frac{\lambda_{k-1}}{2} \int_{\Omega} \langle A(x)w, w \rangle dx \leq 0. \end{aligned} \tag{4.78}$$

Novamente, temos que  $z_0^+ \neq z_0^-$ . Pois, caso o contrário usando a estimativa (4.78) teremos  $z_0^+ = z_0^- \in V_{k-1}$  satisfazendo  $J(z_0^\pm) < 0 \leq J(z_0^\pm)$ . Assim, temos uma contradição. Portanto temos que  $z_0^+ \neq z_0^-$ . Logo,  $z_0^\pm$  são pontos críticos distintos e não triviais para o funcional  $J$ . Logo, o problema (4.4) possui pelo menos duas soluções não triviais obtidas por maximização. Esta afirmação finaliza a demonstração do lema.  $\square$

Para os próximos resultados vamos supor que  $F''(x, z_2) \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ , onde  $z_2$  é a solução dada pelo Teorema 4.19. Assim, temos os seguintes teoremas

**Teorema 4.22.** *Suponha  $(H0), (H1)^+, (H3)^+, (H5)^+, (H6)^+$  com  $b_k = \sup \Gamma_k \leq 0$ . Então o problema (4.4) admite pelo menos três soluções não triviais.*

*Demonstração.* Primeiramente, usando o Lema 4.21, existem dois pontos críticos  $z_0^\pm \in V_k$  dados por maximização do funcional  $J$  restrito aos subconjuntos  $A^\pm$ . Agora, usando que  $\dim V_k < \infty$ , obtemos que  $C_q(J, z_0^\pm) = \delta_{q\nu}\mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}$ , onde  $\nu = \dim V_k > 1, k \geq 2$ .

Por outro lado, aplicando o Teorema 4.19, existe um ponto crítico  $z_2 \in V_k$  tal que  $J(z_2) > 0$ . Além disso, temos que  $C_q(J, z_2) = \delta_{q1}\mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}$ , onde usamos que  $F''(x, z_2) \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ , veja Proposição 1.9. Contudo, ainda usando o Teorema 4.19, obtemos que  $C_q(J, 0) = \delta_{q0}\mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}$ .

Então, comparando os grupos críticos, temos que  $z_0^\pm \neq z_2$ . Deste modo, o problema (4.4) admite pelo menos três soluções não triviais. Esta afirmação finaliza a demonstração do teorema.  $\square$

## Capítulo 5

# Sistemas Gradientes com Ressonância Simultânea no Infinito e na Origem

Neste capítulo, trabalhamos com uma classe de sistemas gradientes com ressonância no infinito e na origem. Mais precisamente, estudamos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = F_u(x, u, v) \text{ in } \Omega \\ -\Delta v = F_v(x, u, v) \text{ in } \Omega \\ u = v = 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado e suave em  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ . Além disso, exigimos que  $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  seja de classe  $C^2$ , com  $F(x, 0, 0) \equiv 0$  e  $\nabla F(x, 0, 0) \equiv 0$ . Deste modo, o funcional associado ao problema (5.1), denotado por  $I : H \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^2$ , é dado por

$$I(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u, v) dx. \quad (5.2)$$

Portanto as soluções para o problema (5.1) são os pontos críticos do funcional  $I$ . Além disso, neste capítulo, teremos que  $z = (0, 0)$  é ponto crítico trivial degenerado para  $I$ .

Problemas ressonantes foram estudados, no caso escalar, por vários autores, veja os importantes trabalhos [9, 32]. Para o caso onde pode ocorrer ressonância no infinito e

na origem simultaneamente veja [11, 34, 43, 42, 45, 50, 48] e suas referências. Para o caso de sistemas gradientes ressonantes veja [10, 15, 20], para sistemas Hamiltonianos ressonantes veja [41, 26] e suas referências.

## 5.1 Sistemas Gradientes com Ressonância no infinito e na Origem

Considere o problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = F_u(x, u, v) \text{ in } \Omega \\ -\Delta v = F_v(x, u, v) \text{ in } \Omega \\ u = v = 0 \text{ on } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.3)$$

onde  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  é um domínio suave e limitado em  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ . Além disso, exigimos que a função  $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  seja de classe  $C^2$ , com  $F(x, 0, 0) \equiv 0$  e  $\nabla F(x, 0, 0) \equiv 0$ . Então  $(u, v) = (0, 0)$  é solução trivial para o problema (5.3). Desta forma, determinaremos soluções não triviais para este problema usando Teoria de Morse.

Novamente, trabalhamos com o seguinte problema de autovalores:

$$\begin{cases} -\Delta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda A(x) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.4)$$

onde  $A \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ , ver seção 1.2. Assim, aplicando a Teoria de Operadores compactos e autoadjuntos, existe uma sequência de autovalores para o problema (5.4) tal que

$$0 < \lambda_1(A) < \lambda_2(A) < \dots < \lambda_k(A) \rightarrow \infty,$$

veja [15, 14, 25].

Agora, consideramos a seguinte hipótese. Existe  $A_\infty \in \mathcal{M}_2(\Omega)$  tal que

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{2F(x, z) - \langle A_\infty(x)z, z \rangle}{|z|^2} = 0. \quad (5.5)$$

Neste caso, dizemos que (5.3) é ressonante no infinito se  $\lambda_k(A_\infty) = 1$ , para algum  $k \in \mathbb{N}$ .

Neste momento, consideramos a hipótese análoga na origem. Existe  $A_0 \in \mathcal{M}_2(\Omega)$  tal que

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} \frac{2F(x, z) - \langle A_0(x)z, z \rangle}{|z|^2} = 0. \quad (5.6)$$

Portanto, segue que  $A_0 = D^2F(x, 0)$  = a matriz Hessiana de  $F$  nas variáveis  $u$  e  $v$ . Além disso, dizemos que (5.3) é ressonante na origem se  $\lambda_m(A_0) = 1$ , para algum  $m \in \mathbb{N}$ . Logo,  $(u, v) = (0, 0)$  é um ponto crítico degenerado para o funcional  $I$ .

Neste seção, estudamos o problema ressonante para (5.3) sobre a hipóteses mais fortes que (5.5) e (5.6) onde  $\lambda_k(A_\infty) = \lambda_m(A_0) = 1$ , para algum  $k, m \geq 2$ . Além disso, permitimos ressonância em autovalores distintos com pesos distintos, veja Teoremas 5.1 e 5.12. Mais especificamente, deixamos que as matrizes  $A_\infty$  e  $A_0$  sejam variáveis e distintas. Aqui, vale a pena lembrar que os resultados existentes na literatura contemplam somente o caso onde temos  $A_\infty$  e  $A_0$  são matrizes constantes e iguais. Deste modo, nossos resultados generalizam os resultados existentes.

Agora, para verificar as propriedades dos autovalores e autofunções para o problema (5.3) veja seção 1.2.

## 5.2 Ressonância no infinito e na origem em autovalores altos

Nesta seção, estudamos o problema (5.3) com ressonância em autovalores altos no infinito e na origem simultaneamente. Em outras palavras, essas ressonâncias ocorrem em autovalores  $\lambda_k(A_\infty)$  e  $\lambda_m(A_0)$ , com  $A_\infty, A_0 \in \mathcal{M}_2(\Omega)$  satisfazendo as condições (5.5) e (5.6), onde  $k, m \geq 2$ . Deste modo, defina as seguintes funções auxiliares

$$G_\infty(x, z) = F(x, z) - \frac{1}{2} \langle A_\infty(x)z, z \rangle \text{ e } G_0(x, z) = F(x, z) - \frac{1}{2} \langle A_0(x)z, z \rangle, \quad \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2. \quad (5.7)$$

Agora, consideramos as seguintes hipóteses:

(H1) Existe  $\alpha \in (0, 1)$  tal que  $|\nabla G_\infty(x, z)| \leq C(1 + |z|^\alpha)$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}^2$ , q.t.p. em  $\Omega$ .

(H2) Existe  $\beta \in (1, 2^* - 1)$  tal que  $|\nabla G_0(x, z)| \leq C|z|^\beta$ ,  $\forall |z| < \delta$  q.t.p. em  $\Omega$ .

Além disso, para controlamos o comportamento de  $F$  no infinito e na origem, seja as seguintes hipóteses

(H3) Existem  $F_1, F_2 \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$  satisfazendo

$$F_1(x) \leq \liminf_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\nabla G_\infty(x, z) \cdot z}{|z|^{1+\alpha}} \leq \limsup_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\nabla G_\infty(x, z) \cdot z}{|z|^{1+\alpha}} \leq F_2(x) \quad (5.8)$$

com  $\int F_j \neq 0$  para  $j=1,2$ .

(H4) Existem  $f_1, f_2 \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$  satisfazendo

$$f_1(x) \leq \liminf_{|z| \rightarrow 0} \frac{\nabla G_0(x, z) \cdot z}{|z|^{1+\beta}} \leq \limsup_{|z| \rightarrow 0} \frac{\nabla G_0(x, z) \cdot z}{|z|^{1+\beta}} \leq f_2(x) \quad (5.9)$$

com  $\int f_j \neq 0$  para  $j=1,2$ .

Agora, enunciaremos e demonstraremos os principais resultados obtidos nesta seção.

**Teorema 5.1.** *Suponha (H1)-(H4). Se ocorre pelo menos uma das seguintes condições*

a)  $F_2(x) \leq 0$ ,  $f_1(x) \geq 0$  em  $\Omega$  e  $m \neq k - 1$ ,

b)  $F_1(x) \geq 0$ ,  $f_2(x) \leq 0$  em  $\Omega$  e  $k \neq m - 1$ ,

c)  $F_1(x) \geq 0$ ,  $f_1(x) \geq 0$  em  $\Omega$  e  $k \neq m$ ,

d)  $F_2(x) \leq 0$ ,  $f_1(x) \leq 0$  em  $\Omega$  e  $k \neq m$ .

*Então o problema (5.3) admite uma solução não trivial.*

A prova deste teorema será dividida em duas partes. Na primeira parte determinamos os grupos críticos na origem com auxílio do seguinte resultado.

**Lema 5.2.** *Suponha (H2) e (H4). Sejam  $H = V_0 \oplus W_0$  onde  $V_0 = \ker(I - T_{A_0})$ ,  $W_0 = V_0^\perp$ . Seja  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $H$  tal que  $z_n = z_n^0 + w_n$ , com  $z_n^0 \in V_0$ ,  $w_n \in W_0$  com  $\|z_n\| \rightarrow 0$  e  $\frac{w_n}{\|z_n\|} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Então, temos as seguintes afirmações*

- a) *Se  $f_1(x) \geq 0$  q.t.p em  $\Omega$  então  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{\nabla G_0(x, z_n) \cdot z_n}{\|z_n\|^{1+\beta}} > 0$*
- b) *Se  $f_2(x) \leq 0$  q.t.p em  $\Omega$  então  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{\nabla G_0(x, z_n) \cdot z_n}{\|z_n\|^{1+\beta}} < 0$ .*

*Demonstração.* Ver [48]. □

**Lema 5.3.** *Suponha (H2) e (H4). Então temos as seguintes alternativas*

- a)  *$f_1(x) \geq 0$  q.t.p em  $\Omega$  implica que  $C_q(I, 0) = \delta_{q, \mu_0 + \nu_0} \mathcal{G}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ .*
- b)  *$f_2(x) \leq 0$  q.t.p em  $\Omega$  implica que  $C_q(I, 0) = \delta_{q, \mu_0} \mathcal{G}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ . Aqui  $\mathcal{G}$  denota um grupo abeliano.*

*Demonstração.* Inicialmente provaremos o caso a). Primeiramente defina o conjunto  $C(\rho, \epsilon) = \{z \in H : z = z^0 + z^+ + z^- \in V_0 \oplus W_0^+ \oplus W_0^-; \|z\| \leq \rho \text{ e } \|z^+ + z^-\| \leq \epsilon \|z\|\}$ , onde  $V_0 = \ker(I - T_{A_0})$ ,  $W_0^+ = \bigoplus_{j=m+1}^{\infty} \ker(I - \lambda_j^{-1} T_{A_0})$ ,  $W_0^- = \bigoplus_{j=1}^{m-1} \ker(I - \lambda_j^{-1} T_{A_0})$ , com  $\rho > 0, \epsilon > 0$ .

**Afirmção 5.4.** *Existem  $\rho > 0$  e  $\epsilon \in (0, 1)$  tal que*

$$\langle I'(z), z^0 + z^- \rangle < 0, \quad \forall z \in C(\rho, \epsilon) \setminus \{0\}. \quad (5.10)$$

Agora demonstraremos esta afirmação. A prova deste resultado segue por contradição. De fato, supondo que o resultado seja falso, temos que para todo  $\rho = \epsilon = \frac{1}{n}$  existe uma sequência  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$ , onde escrevemos  $z_n = z_n^0 + z_n^+ + z_n^-$ ,  $z_n^0 \in V_0$ ,  $z_n^+ \in W_0^+$ ,  $z_n^- \in W_0^-$  tal que sejam satisfeitas as seguintes desigualdades  $\|z_n\| \leq \frac{1}{n}$ ;  $\|z_n^+ + z_n^-\| \leq \frac{1}{n} \|z_n\|$ . Além disso, temos  $\langle I'(z_n), z_n^0 + z_n^- \rangle \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Deste modo, obtemos as seguintes convergências  $\|z_n\| \rightarrow 0, \frac{z_n^\pm}{\|z_n\|} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Por outro lado, temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle I'(z_n), z_n^0 + z_n^- \rangle = \langle (I - T_{A_0})z_n, z_n^0 + z_n^- \rangle - \int_{\Omega} \nabla G_0(x, z_n)(z_n^0 + z_n^-)dx \\
&= \langle (I - T_{A_0})z_n^-, z_n^- \rangle + \langle (I - T_{A_0})z_n^0, z_n^0 \rangle - \int_{\Omega} \nabla G_0(x, z_n)(z_n^0 + z_n^-)dx \\
&= \langle (I - T_{A_0})z_n^-, z_n^- \rangle - \int_{\Omega} \nabla G_0(x, z_n)(z_n^0 + z_n^-)dx \\
&\leq - \int_{\Omega} \nabla G_0(x, z_n)(z_n^0 + z_n^-)dx,
\end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade variacional (1.7). Portanto, segue a seguinte desigualdade integral

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{\nabla G_0(x, z_n)(z_n^0 + z_n^-)}{\|z_n\|^{1+\beta}} dx \leq 0. \quad (5.11)$$

Agora, usando a desigualdade de Hölder e imersões de Sobolev, temos as seguintes estimativas

$$\left| \int_{\Omega} \frac{\nabla G_0(x, z_n)z_n^+}{\|z_n\|^{1+\beta}} dx \right| \leq C \int_{\Omega} \frac{|z_n|^\beta |z_n^+|}{|z_n|^{1+\beta}} dx = C \frac{\|z_n\|^\beta \|z_n^+\|}{\|z_n\|^{1+\beta}} = C \frac{\|z_n^+\|}{\|z_n\|}.$$

Assim, temos que

$$\int_{\Omega} \frac{\nabla G_0(x, z_n)z_n^+}{\|z_n\|^{1+\beta}} dx \rightarrow 0, \text{ com } n \rightarrow \infty. \quad (5.12)$$

Então, usando (5.11) e (5.12), temos as seguintes desigualdades

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{\nabla G_0(x, z_n) \cdot z_n}{\|z_n\|^{1+\beta}} dx = \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{\nabla G_0(x, z_n)(z_n^0 + z_n^-)}{\|z_n\|^{1+\beta}} dx \leq 0.$$

Entretanto, pelo Lema 5.2, segue que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{\nabla G_0(x, z_n) \cdot z_n}{\|z_n\|^{1+\beta}} dx > 0. \quad (5.13)$$

Assim, temos uma contradição. Portanto segue a prova da Afirmação 5.4.

Agora, consideramos a homotopia  $I_t : H \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $I_t(z) = I(z) - \frac{1}{2}t\|z_0\|^2$ , onde  $z = z^0 + z^+ + z^-$ ,  $z^0 \in V_0$ ,  $z^- \in W_0^-$ ,  $z^+ \in W_0^+$ . Assim,  $I_t$  é de classe  $C^2$  com derivadas dadas a seguir

$$\langle I'_t(z), w \rangle = \langle I'(z), w \rangle - t \langle z^0, w^0 \rangle, \quad \forall z, w \in H \text{ com } w = w^0 + w^- + w^+, \quad (5.14)$$

$$I''_t(z)(w_1, w_2) = I''(z)(w_1, w_2) - t \langle w_1^0, w_2^0 \rangle, \quad \forall z, w_1, w_2 \in H \text{ onde } w = w_j^0 + w_j^- + w_j^+, \quad (5.15)$$

com  $j = 1, 2$ .

Assim, temos que  $I_1$  possui  $z = 0$  como ponto crítico não degenerado de índice de morse  $\mu_0 + \nu_0$ .

Agora, afirmamos que existe  $r > 0$  tal que  $I'_t(z) \neq 0$ ; com  $z \in B_r(0) \setminus \{0\}$ , onde  $B_r(0)$  denota a bola aberta de raio  $r$  e centro na origem em  $H$ . Assim, a homotopia  $I_t$  será admissível e conseqüentemente obteremos

$$C_q(I, 0) = C_q(I_0, 0) = C_q(I_1, 0) = \delta_{q, \mu_0 + \nu_0} \mathcal{G}, \quad \forall q \in \mathbb{N}.$$

Contudo, resta provar esta afirmação, ou seja, é suficiente, para a demonstração do item *a*), provar que a homotopia  $I_t$  é admissível. Logo, dado  $z \in C(\rho, \epsilon)$ ,  $z \neq 0$ , temos que  $z^0 \neq 0$  e  $z^0 + z^- \neq 0$ . Além disso, temos a seguinte identidade

$$\langle I'_t(z), z^0 + z^- \rangle = \langle I'(z), z^0 + z^- \rangle - t \langle z_0, z_0 \rangle, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Portanto, usando a Afirmação 5.4, obtemos que

$$\langle I'_t(z), z^0 + z^- \rangle = \langle I'(z), z^0 + z^- \rangle - t \langle z^0, z^0 \rangle \leq -t \|z^0\|^2 < 0, \quad \forall t \in (0, 1]. \quad (5.16)$$

Por outro lado, dado  $\beta \in (1, 2^* - 1)$  escolhemos  $p \in [2, 2^* - 1)$ , com  $p \geq \beta$ . Assim, usando a hipótese (H2), segue a seguinte condição de crescimento

$$|\nabla G(x, z)| \leq C(|z|^\beta + |z|^p), \quad \forall z \in \mathbb{R}^2 \text{ e q. t. p. em } \Omega. \quad (5.17)$$

Agora, se  $z \in B_r(0) \setminus C(\rho, \epsilon)$  com  $r > 0$  pequeno, temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
\langle I'_t(z), z^+ - z^- \rangle &= \langle (I - T_{A_0})z, z^+ \rangle - \langle (I - T_{A_0})z, z^- \rangle - \int \langle \nabla G_0(x, z), z^+ - z^- \rangle dx \\
&= \langle (I - T_{A_0})z^+, z^+ \rangle - \langle (I - T_{A_0})z^-, z^- \rangle - \int \langle \nabla G_0(x, z), z^+ - z^- \rangle dx \\
&\geq \gamma \|z^+\|^2 + \gamma \|z^-\|^2 - \int \nabla G_0(x, z)(z^+ - z^-) dx \\
&= \gamma \|z^+ + z^-\|^2 - \int \nabla G_0(x, z)(z^+ - z^-) dx \\
&\geq \|z^+ + z^-\|^2 \left[ \gamma - \frac{1}{\|z\|^2} \int \nabla G_0(x, z)(z^+ - z^-) dx \right] \\
&\geq \|z^+ + z^-\|^2 \left[ \gamma - \frac{1}{\|z\|^2} \int C(|z|^\beta + |z|^p) |z^+ - z^-| dx \right] \\
&\geq \|z^+ + z^-\|^2 \left[ \gamma - \frac{C}{\|z\|^2} \|z\|^\beta \|z^+ - z^-\| - \frac{C}{\|z\|^2} \|z\|^p \|z^+ - z^-\| \right] \\
&\geq \|z^+ + z^-\|^2 \left[ \gamma - \frac{C}{\|z\|^2} \|z\|^\beta \|z^+ - z^-\| \right] \\
&= \|z^+ + z^-\|^2 \left[ \gamma - C \|z\|^{\beta-1} \frac{\|z^+ - z^-\|}{\|z\|} \right] \\
&\geq \|z^+ + z^-\|^2 \left[ \gamma - C \|z\|^{\beta-1} \right] > 0,
\end{aligned} \tag{5.18}$$

onde  $\gamma = \min \left\{ 1 - \frac{1}{\lambda_{k+1}}, -(1 - \frac{1}{\lambda_{k-1}}) \right\} > 0$ . Nas estimativas acima usamos (5.17), desigualdade de Hölder e imersões de Sobolev. Assim, aplicando (5.16) e (5.18), concluimos que a homotopia  $I_t$  é admissível, ou seja, temos que

$$I'_t(z) \neq 0, \forall z \in B_r(0) \text{ com } t \in [0, 1].$$

Esta afirmação finaliza a prova do item a).

Agora, provaremos o item Caso b). Neste caso, consideramos a homotopia

$$I_t(z) = I(z) + \frac{1}{2} \|z^0\|^2.$$

Assim, de forma análoga ao item anterior, provamos a seguinte afirmação

**Afirmção 5.5.** *Existem  $\epsilon \in (0, 1)$  e  $\rho > 0$  tal que*

$$\langle I'_t(z), z^0 - z^- \rangle \geq 0, \forall z \in C(\rho, \epsilon).$$

Consequentemente, usando as mesmas idéias da prova do item *a*) onde  $r > 0$  é suficientemente pequeno, temos que  $I'_t(z) \neq 0, \forall z \in B_r(0)$ . Logo, a homotopia será admissível. Neste caso, omitiremos os detalhes da prova do item *b*).  $\square$

Agora, iniciaremos a segunda parte da prova do Teorema 5.1. Aqui, provamos que o funcional associado satisfaz a condição de Cerami. Assim, usando um resultado dado em [11], calculamos os grupos críticos de  $I$  no infinito.

**Lema 5.6.** *Suponha (H1) e (H3). Sejam  $H = V_\infty \oplus W_\infty$  onde definimos  $V_\infty = \ker(I - T_{A_\infty}), W_\infty = V_\infty^\perp$ . Seja  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$  tal que  $z_n = z_n^0 + w_n$ , com  $z_n^0 \in V_\infty, w_n \in W_\infty$  onde  $\|z_n\| \rightarrow \infty$  e  $\frac{w_n}{\|z_n\|} \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Assim, temos as seguintes afirmações*

- a) Se  $F_1(x) \geq 0$  q.t.p em  $\Omega$  então  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{\nabla G_\infty(x, z_n) \cdot z_n}{\|z_n\|^{1+\alpha}} > 0$*   
*b) Se  $F_2(x) \leq 0$  q.t.p em  $\Omega$  então  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{\nabla G_\infty(x, z_n) \cdot z_n}{\|z_n\|^{1+\alpha}} < 0$ .*

*Demonstração.* Ver [48]  $\square$

**Lema 5.7.** *Suponha (H1) e (H3). Denotando  $C(R, \epsilon) = \{z \in H / \|z\| \geq R, z = z^0 + z^- + z^+ \in H = V_\infty \oplus V_\infty^- \oplus V_\infty^+\}$  onde  $R > 0, \epsilon \in (0, 1)$ . Assim, temos as seguintes afirmações*

- a)  $F_1(x) \geq 0$ , q.t.p. em  $\Omega$ , implica que existem  $R > 0, \epsilon \in (0, 1)$  e  $\delta > 0$  tal que*

$$\langle I'(z), z^0 \rangle \leq -\delta, \forall z \in C(R, \epsilon).$$

- b)  $F_2(x) \leq 0$ , q.t.p. em  $\Omega$ , implica que existem  $R > 0, \epsilon \in (0, 1)$  e  $\delta > 0$  tal que*

$$\langle I'(z), z^0 \rangle \geq \delta, \forall z \in C(R, \epsilon).$$

*Demonstração.* Primeiramente provaremos o caso *a*). Neste caso, a prova segue por contradição. Com efeito, tomando  $\epsilon = \delta = \frac{1}{n}$ , existe uma sequência  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$ , tal que  $z_n = z_n^0 + z_n^- + z_n^+ \in H = V_\infty \oplus V_\infty^- \oplus V_\infty^+$  onde  $\|z_n\| \geq n, \|z_n^- + z_n^+\| \leq \frac{1}{n}\|z_n\|$ .

Entretanto temos  $\langle I(z_n), z_n^0 \rangle > -\frac{1}{n}$ . Assim, segue as seguintes estimativas

$$-\frac{1}{n} < \langle I(z_n), z_n^0 \rangle = \langle (I - T_{A_\infty})z_n, z_n^0 \rangle - \int \nabla G_\infty(x, z_n) z_n^0 dx = \int \nabla G_\infty(x, z_n) z_n^0 dx,$$

onde usamos que  $z_n^0 \in V_\infty$ . Portanto, temos a seguinte desigualdade integral

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int \frac{\nabla G_\infty(x, z_n) z_n^0}{\|z_n\|^{1+\alpha}} dx \leq 0. \quad (5.19)$$

Por outro lado, temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} \left| \int \frac{\nabla G_\infty(x, z_n)(z_n^+ + z_n^-)}{\|z_n\|^{1+\alpha}} dx \right| &\leq \int \left| \frac{\nabla G_\infty(x, z_n)(z_n^+ + z_n^-)}{\|z_n\|^{1+\alpha}} \right| dx \\ &\leq \int C \frac{(1 + |z_n|^\alpha)(z_n^+ + z_n^-)}{\|z_n\|^{1+\alpha}} dx \\ &\leq C \frac{\|z_n\|^\alpha \|z_n^+ + z_n^-\|}{\|z_n\|^{1+\alpha}} + C \frac{\|z_n^+ + z_n^-\|}{\|z_n\|^{1+\alpha}} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Nas estimativas acima usamos a hipótese (H1), desigualdade de Hölder e imersões de Sobolev. Agora, usando (5.19), obtemos a seguinte desigualdade

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int \frac{\nabla G_\infty(x, z_n) z_n}{\|z_n\|^{1+\alpha}} dx = \limsup_{n \rightarrow \infty} \int \frac{\nabla G_\infty(x, z_n) z_n^0}{\|z_n\|^{1+\alpha}} dx \leq 0. \quad (5.20)$$

Entretanto, usando o Lema 5.6, obtemos que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int \frac{\nabla G_\infty(x, z_n) z_n}{\|z_n\|^{1+\alpha}} dx > 0.$$

Consequentemente, temos uma contradição com (5.20). Portanto existem números  $R > 0, \epsilon \in (0, 1)$  e  $\delta > 0$  tal que

$$\langle I'(z), z^0 \rangle \leq -\delta, \quad \forall z \in C(R, \epsilon).$$

A prova do caso b) é análoga, omitiremos os detalhes.  $\square$

**Lema 5.8.** *Suponha (H1) e (H3). Se  $F_2(x) \leq 0$  ou  $F_1(x) \geq 0$  então o funcional  $I : H \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz  $(Ce)_c$ , para todo  $c \in \mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* Primeiramente supomos que  $F_1(x) \geq 0$ . Então devemos mostrar que toda sequência de Cerami possui subsequência convergente. Entretanto, usando o crescimento subcrítico de  $F$ , é suficiente provar que toda sequência de Cerami é limitada.

Deste modo, provaremos o lema por contradição. Neste caso, suponha que exista  $(z_n) \subseteq H$  uma sequência de Cerami com  $\|z_n\| \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ . Portanto, temos as seguintes informações

- $I(z_n) \rightarrow c, c \in \mathbb{R}$ ,
- $\|I'(z_n)\|(1 + \|z_n\|) \rightarrow 0$ ,
- $\|z_n\| \rightarrow \infty$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Então, aplicando a desigualdade de Hölder, imersões de Sobolev e desigualdade de Young com  $\epsilon > 0$ , temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
 \langle I'(z_n), z_n^+ - z_n^- \rangle &= \langle (I - T_{A_\infty})z_n, z_n^+ - z_n^- \rangle - \int \nabla G_\infty(x, z_n)(z_n^+ - z_n^-)dx \\
 &= \langle (I - T_{A_\infty})z_n^+, z_n^+ \rangle - \langle (I - T_{A_\infty})z_n^-, z_n^- \rangle \\
 &\quad - \int \nabla G_\infty(x, z_n)(z_n^+ - z_n^-)dx \\
 &\geq \gamma \|z_n^+ - z_n^-\|^2 - C \int (1 + |z_n|^\alpha) |z_n^+ - z_n^-| dx \\
 &\geq \gamma \|z_n^+ - z_n^-\|^2 - C \|z_n^+ - z_n^-\| - C \|z_n\|^\alpha \|z_n^+ - z_n^-\| \\
 &\geq \gamma \|z_n^+ - z_n^-\|^2 - C \|z_n^+ - z_n^-\| - C \epsilon^2 \|z_n^+ - z_n^-\|^2 - \frac{C}{\epsilon^2} \|z_n\|^{2\alpha} \\
 &\geq \gamma_\epsilon \|z_n^+ - z_n^-\|^2 - C \|z_n^+ - z_n^-\| - \frac{C}{\epsilon^2} \|z_n\|^{2\alpha},
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

onde  $\gamma = \min \left\{ 1 - \frac{1}{\lambda_k(A_\infty)}, -(1 - \frac{1}{\lambda_{k-1}(A)}) \right\} > 0$ . Portanto, escolhendo  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, temos que  $\gamma_\epsilon = \gamma - C\epsilon^2 > 0$ . Agora, usando (5.21), temos as

seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_\epsilon \|z_n^+ - z_n^-\|^2}{\|z_n\|^2} &\leq \langle I'(z_n), \frac{z_n^+ - z_n^-}{\|z_n\|^2} \rangle + C \frac{\|z_n^+ - z_n^-\|}{\|z_n\|^2} + C_\epsilon \frac{\|z_n\|^{2\alpha}}{\|z_n\|^2} \\
&\leq \frac{C}{\|z_n\|} + C \frac{\|z_n^+ - z_n^-\|}{\|z_n\|^2} + C_\epsilon \frac{\|z_n\|^{2\alpha}}{\|z_n\|^2}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

onde  $C_\epsilon$  e  $C$  denotam várias constantes positivas. Portanto, temos a seguinte informação  $\frac{z_n^\pm}{\|z_n\|^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Assim, usando o Lema 5.7, obtemos que  $z_n \in C(R, \epsilon)$  e  $\langle I'(z_n), z_n^0 \rangle \leq -\delta < 0$ , para todo  $n$  suficientemente grande.

Por outro lado, temos que  $\|I'(z_n)\|(1 + \|z_n\|) \rightarrow 0$  com  $n \rightarrow \infty$ . Logo temos uma contradição. Portanto toda sequência de Cerami admite subsequência limitada. Esta afirmação prova o lema para o caso onde temos  $F_1(x) \geq 0$ .

A demonstração para o caso onde  $F_2(x) \leq 0$  é análoga. Deixamos os detalhes a cargo do leitor. Assim, temos que  $I$  satisfaz  $(Ce)_c$  para todo  $c \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Agora, determinaremos os grupos críticos no infinito. Primeiramente, para conveniência do leitor, descreveremos o resultado contido em [11].

**Proposição 5.9.** [11] *Seja  $I : H \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional dado por  $I(z) = \frac{1}{2} \langle Az, z \rangle + G(z)$ , onde  $A : H \rightarrow H$  é um operador linear, autoadjunto tal que  $0$  é ponto isolado do espectro de  $A$ . Seja  $G \in C^1(H, \mathbb{R})$  com  $G$  de classe  $C^2$  em uma vizinhança de infinito, o qual satisfaz*

$$\frac{\|G'(z)\|}{\|z\|} \rightarrow 0 \text{ com } n \rightarrow \infty.$$

*Além disso, suponhamos que  $I$  possui valores críticos limitados inferiormente e que  $I$  satisfaça  $(C)_c$  para todo  $c \in \mathbb{R}$ .*

*Agora, sejam  $V = \text{Ker} A$  e  $N^\perp = W^- \oplus W^+$  com  $W^+$  e  $W^-$  invariantes sobre  $A$ , tal que  $A|_{W^+}$  positiva definida e  $A|_{W^-}$  negativa definida. Sejam  $\mu_\infty = \dim W^-$  e  $\nu_\infty = \dim V$  o índice de Morse e a nulidade de  $I$  em infinito respectivamente. Então temos as seguintes alternativas:*

*a)  $(AC)_\infty^+$  Se existem  $R > 0$  e  $\epsilon \in (0, 1)$  tal que  $\langle I'(z), z \rangle \geq 0, \forall z \in C(R, \epsilon)$ , então*

$$C_q(I, \infty) = \delta_{q, \mu_\infty} \mathcal{G}, \quad \forall q \in \mathbb{N}.$$

b)  $(AC)_\infty^-$  Se existem  $R > 0$  e  $\epsilon \in (0, 1)$  tal que  $\langle I'(z), z \rangle \leq 0, \quad \forall z \in C(R, \epsilon)$ , então

$$C_q(I, \infty) = \delta_{q, \mu_\infty + \nu_\infty} \mathcal{G}, \quad \forall q \in \mathbb{N}.$$

Aqui,  $C(R, \epsilon) = \{z = z^0 + z^- + z^+ \in H = V_\infty \oplus W_\infty^+ \oplus W_\infty^- : \|z\| > R \text{ e } \|z^+ + z^-\| \leq \epsilon \|z\|\}$  e  $\mathcal{G}$  é um grupo abeliano.

As condições  $(AC)_\infty^+$  e  $(AC)_\infty^-$  são conhecidas como condições de ângulo no infinito. Assim, segue o seguinte resultado

**Lema 5.10.** *Suponha  $(H1)$  e  $(H3)$ . Então temos as seguintes alternativas*

a) Se  $F_1(x) \geq 0$  então  $C_q(I, \infty) = \delta_{q, \mu_\infty + \nu_\infty} \mathcal{G}, \quad \forall q \in \mathbb{N}$

b) Se  $F_2(x) \leq 0$  então  $C_q(I, \infty) = \delta_{q, \mu_\infty} \mathcal{G}, \quad \forall q \in \mathbb{N}$ ,

onde  $\mu_\infty = \dim \bigoplus_{j=1}^{k-1} \text{Ker}(I\lambda_j^{-1} - T_{A_\infty})$  e  $\nu_\infty = \dim \text{Ker}(I - T_{A_\infty})$ .

*Demonstração.* Inicialmente provaremos o caso a). Neste caso, temos a condição  $(AC)_\infty^-$  dado pelo Lema 5.7- a). Portanto o resultado segue da Proposição 5.9-b).

Agora, provaremos o caso b). Neste caso, temos a condição  $(AC)_\infty^+$  provada no Lema 5.7-b). Assim, segue o resultado utilizando a Proposição 5.9-a).  $\square$

**Demonstração. do Teorema 5.1**

Primeiramente suponha o caso a). Neste caso, temos  $F_2(x) \leq 0$  e  $f_1(x) \geq 0$  em  $\Omega$ . Então, aplicando os Lemas 5.3 e 5.10, obtemos que

$$C_q(I, \infty) = \delta_{q, \mu_\infty} \mathcal{G},$$

$$C_q(I, 0) = \delta_{q, \mu_0 + \nu_0} \mathcal{G}.$$

Portanto  $C_{\mu_\infty}(I, \infty) \neq C_{\mu_\infty}(I, 0)$ , se  $m \neq k - 1$ . Assim, existe um ponto crítico  $z_\star \in H$  tal que  $C_{\mu_\infty}(I, z_\star) \neq 0$ . Portanto  $z_\star \neq 0$  é uma solução não trivial para o problema (5.3).

Agora, provaremos o caso b). Neste caso, temos  $F_1(x) \geq 0$  e  $f_2(x) \leq 0$  em  $\Omega$ . Logo, usando os Lemas 5.3 e 5.10, obtemos

$$C_q(I, \infty) = \delta_{q, \mu_\infty + \nu_\infty} \mathcal{G},$$

$$C_q(I, 0) = \delta_{q, \mu_0} \mathcal{G}.$$

Consequentemente  $C_{\mu_\infty + \nu_\infty}(I, \infty) \neq C_{\mu_\infty + \nu_\infty}(I, 0)$ , se  $k \neq m - 1$ . Portanto, existe um ponto crítico  $z_\star \in H$  tal que  $C_{\mu_\infty}(I, z_\star) \neq 0$ . Então  $z_\star$  é uma solução não trivial para o problema (5.3).

A prova dos itens c) e d) são análogos aos itens anteriores, omitiremos os detalhes.  $\square$

Sobre as condições (H1) – (H4) o Teorema 5.1) garante a existência de uma solução não trivial. Para o próximo resultado obtemos condições adicionais sobre  $F$  que garantam a existência de pelo menos duas soluções não triviais.

**Definição 5.11.** *Dados  $A, B \in \mathcal{M}_2(\Omega)$  dizemos que  $A \leq B$  se tivermos a desigualdade  $\langle A(x)z, z \rangle \leq \langle B(x)z, z \rangle$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}^2$ ,  $\forall x \in \Omega$ . Além disso, dizemos que  $A \preceq B$  se  $A \leq B$  com  $B - A$  positiva definida em algum subconjunto de medida positiva em  $\Omega$ .*

**Observação 15.** *Sejam  $F$  de classe  $C^2$  e  $A, B \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ . Então nas desigualdades  $F'' \leq A \preceq B$  significam  $D \leq A \preceq B$  onde  $D$  é a matriz Hessiana de  $F$  nas variáveis  $u$  e  $v$ .*

**Teorema 5.12.** *Suponha (H1) – (H4). Se ocorre pelo menos uma das seguintes alternativas*

$$a) F_2(x) \leq 0 \text{ e } f_1(x) \geq 0 \text{ em } \Omega, \ m > k - 1 \text{ com } F'' \geq \beta \succeq \lambda_{k-1} A_\infty,$$

$$b) F_1(x) \geq 0 \text{ e } f_2(x) \leq 0 \text{ em } \Omega, \ k > m - 1 \text{ com } F'' \leq \beta \preceq \lambda_{k+1} A_\infty,$$

$$c) F_1(x) \geq 0 \text{ e } f_1(x) \geq 0 \text{ em } \Omega, \ m < k \text{ com } F'' \leq \beta \prec \lambda_{k+1} A_\infty,$$

$$d) F_2(x) \leq 0 \text{ e } f_2(x) \leq 0 \text{ em } \Omega, \ m > k \text{ com } F'' \geq \beta \succeq \lambda_{k-1} A_\infty,$$

onde  $\beta$  é uma matriz fixa em  $\mathcal{M}_2(\Omega)$ . Então (5.1) admite pelo menos duas soluções não triviais.

Para provarmos o Teorema 5.12 usamos a Princípio da Continuação Única Fraco. Mais precisamente, temos a

**Definição 5.13.** *Seja  $\Lambda = (F_\lambda)_{\lambda \in L}$ , onde  $F_\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \forall \lambda \in \Lambda$ . Então dizemos que a coleção  $\Lambda$  satisfaz o Princípio da Continuação Única Fraco, se para todo  $F_\lambda \in \Lambda$  com  $F_\lambda = 0$  em algum subconjunto aberto implica que  $F_\lambda \equiv 0$  em  $\Omega$ .*

Neste caso, teremos que as autofunções do problema (5.3) satisfazem o Princípio da Continuação Única Fraco, ver [35], [31]. Agora, provaremos um resultado adaptado para sistemas gradientes. Inicialmente esse resultado foi provado, para o caso escalar, em [21].

**Lema 5.14.** *Seja  $\beta, \alpha \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ . Então temos as seguintes alternativas*

a) *Se  $\beta \preceq \lambda_{k+1}A_\infty$ , então existe  $\delta > 0$  tal que*

$$\|z\|^2 - \int_{\Omega} \langle \beta(x)z, z \rangle dx \geq \delta \|z\|^2, \forall z \in W_{\infty}^+ = \bigoplus_{j=k+1}^{\infty} \ker (I\lambda_j^{-1}(A_{\infty}) - T_{A_{\infty}}). \quad (5.23)$$

b) *Se  $\lambda_{k-1}A_{\infty} \preceq \alpha$ , então existe  $\delta > 0$  tal que*

$$\|z\|^2 - \int_{\Omega} \langle \alpha(x)z, z \rangle dx \leq -\delta \|z\|^2, \forall w \in W_{\infty}^- = \bigoplus_{j=1}^{k-1} \ker (I\lambda_j^{-1}(A_{\infty}) - T_{A_{\infty}}). \quad (5.24)$$

*Demonstração.* Primeiramente provaremos o item a). Inicialmente seja  $B : H \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $B(z) = \|z\|^2 - \int_{\Omega} \langle \beta(x)z, z \rangle dx$ . Assim,  $B$  é uma forma quadrática a qual é positiva sobre  $W_{\infty}^+$ . Assim, temos a seguinte afirmação

**Afirmção 5.15.** *Seja  $z \in W_{\infty}^+$ . Então  $B(z) = 0$  implica que  $z \equiv 0$ .*

Neste momento, provaremos esta afirmação. Primeiramente, dado  $z \in W_{\infty}^+$  com  $B(z) = 0$ , temos as seguintes desigualdades

$$0 = B(z) \geq \int_{\Omega} \langle (\lambda_{k+1}A_{\infty} - \beta)(x)z, z \rangle dx \geq 0. \quad (5.25)$$

Portanto  $\langle (\lambda_{k+1}A_\infty - \beta)(x)z, z \rangle = 0$  q.t.p. em  $\Omega$ . Entretanto, usando que  $\beta \preceq \lambda_{k+1}A_\infty$ , temos que  $z = 0$  em  $\Omega_1 = \{x \in \Omega : \beta(x) < \lambda_{k+1}A_\infty(x)\}$ .

Por outro lado, usando a seguinte estimativas

$$0 = B(z) = \|z\|^2 - \int_{\Omega} \langle \beta(x)z, z \rangle dx \geq \|z\|^2 - \lambda_{k+1}(A_\infty) \int_{\Omega} \langle A_\infty(x)z, z \rangle dx \geq 0,$$

concluimos que  $\|z\|^2 = \lambda_{k+1}(A_\infty) \int_{\Omega} \langle A_\infty(x)z, z \rangle dx$ . Portanto  $z$  é uma autofunção associada ao autovalor  $\lambda_{k+1}(A_\infty)$ . Além disso,  $z$  é uma autofunção a qual se anula em algum aberto  $A \subset \Omega$ . Agora, aplicando o Princípio da Continuação Única para as autofunções do problema (5.4), obtemos que  $z = 0$  em  $\Omega$ . Assim, segue a prova da afirmação.

Agora, provaremos o lema por contradição. Neste caso, obtemos uma sequência  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$  tal que

$$\|z_n\| = 1, B(z_n) \rightarrow 0 \text{ com } n \rightarrow \infty. \quad (5.26)$$

Portanto, a menos de uma subsequência, temos que

- $z_n \rightharpoonup z$  em  $H$ ,
- $z_n \rightarrow z$  em  $L^p(\Omega)^2$ ,  $\forall 1 \leq p < 2^*$ ,
- $z_n(x) \rightarrow z(x)$ , q. t. p. em  $\Omega$ .

Por outro lado, usando a semicontinuidade inferior fraca da norma  $\|\cdot\|$  sobre  $W_\infty^+$ , temos a seguinte desigualdade

$$B(z) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} B(z_n) = 0. \quad (5.27)$$

Portanto, usando a positividade de  $B$ , temos  $B(z) = 0$ . Agora, aplicando a Afirmação 5.15, obtemos  $z = 0$ . Assim, temos que  $z_n \rightarrow 0$  em  $L^p(\Omega)^2$ . Entretanto, pela construção da sequência  $(z_n)$ , segue que

$$B(z_n) = 1 - \int_{\Omega} \langle \beta(x)z_n, z_n \rangle dx \rightarrow 1, n \rightarrow \infty. \quad (5.28)$$

Assim, temos uma contradição. Portanto existe  $\delta > 0$  tal que (5.23) é verificada. Esta afirmação finaliza a prova do item *a*). A prova do caso *b*) é análogo ao caso anterior, omitiremos os detalhes.  $\square$

**Demonstração. do Teorema 5.12**

Inicialmente provaremos o caso *b*). Neste caso, aplicando o Teorema 5.1, temos que

$$C_q(I, \infty) = \delta_{q, \mu_\infty + \nu_\infty} \mathcal{G}, \forall q \in \mathbb{N},$$

$$C_q(I, 0) = \delta_{q, \mu_0} \mathcal{G}, \forall q \in \mathbb{N},$$

$$C_{\mu_\infty + \nu_\infty}(I, z_\star) \neq 0,$$

onde  $z_\star \in H$  é um ponto crítico não trivial. Agora, aplicando o Lema de Gromoll-Meyer, obtemos que  $\mu_\infty + \nu_\infty \in [m(z_\star), m(z_\star) + n(z_\star)]$ , onde  $m(z_\star)$  é o índice de Morse em  $z_\star$  e  $n(z_\star)$  é a nulidade.

Por outro lado, usando o Lema 5.14, temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} I''(z_\star)(w, w) &= \|w\|^2 - \int_{\Omega} F''(x, z_\star)(w, w) dx \geq \|w\|^2 - \int_{\Omega} \langle \beta(x)w, w \rangle dx \\ &\geq \delta \|w\|^2 > 0, \forall w \in W_\infty^+ \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Assim, obtemos que  $m(z_\star) + n(z_\star) \leq \dim(W_\infty^- \oplus V) = \mu_\infty + \nu_\infty$ . Portanto, temos que  $m(z_\star) + n(z_\star) = \mu_\infty + \mu_0$ . Então, aplicando [37], segue que  $C_q(I, z_\star) = \delta_{q, \mu_\infty + \nu_\infty} \mathcal{G}, \forall q \in \mathbb{N}$ .

Agora, supondo que  $0, z_\star$  são os únicos pontos críticos de  $I$ . Então a identidade de Morse implica que

$$(-1)^{\mu_0} + (-1)^{\mu_\infty + \nu_\infty} = (-1)^{\mu_\infty + \nu_\infty}.$$

Consequentemente temos uma contradição. Portanto existem pelo menos duas soluções não triviais para (5.3) no item *b*).

Agora, provaremos o item *a*). Neste caso, temos os seguintes grupos críticos

$$C_k(I, \infty) = \delta_{k, \mu_\infty} \mathcal{G}, \forall k \in \mathbb{N},$$

$$C_k(I, 0) = \delta_{k, \mu_0 + \nu_0} \mathcal{G}, \forall k \in \mathbb{N},$$

$$C_{\mu_\infty}(I, z_\star) \neq 0.$$

Novamente, aplicando o Lema de Gromoll-Meyer, temos que  $\mu_\infty \in [m(z_\star), m(z_\star) +$

$n(z_\star)]$ . Além disso, usando o Lema 5.14, obtemos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} I''(z_\star)(w, w) &= \|w\|^2 - \int_{\Omega} F''(x, z_\star)(w, w) dx \leq \|w\|^2 - \int_{\Omega} \beta(x) w, w > dx \\ &\leq -\delta \|w\|^2 < 0, \quad \forall w \in W_{\infty}^- \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Portanto segue que  $\mu_{\infty} \geq m(z_\star) \geq \dim W_{\infty}^- = \mu_{\infty}$ . Agora, aplicando [37], obtemos que  $C_q(I, z_\star) = \delta_{q, \mu_{\infty} + \nu_{\infty}} \mathcal{G}$ ,  $\forall q \in \mathbb{N}$ .

Assim, supondo que  $0, z_\star$  são os únicos pontos críticos de  $I$ . Então a identidade de Morse implica que

$$(-1)^{\mu_0 + \nu_{\infty}} + (-1)^{\mu_{\infty}} = (-1)^{\mu_{\infty}}.$$

Portanto temos uma contradição. Consequentemente o problema (5.3) admite pelo menos duas soluções não triviais no caso  $a$ ).

A prova do casos  $c$ ) e  $d$ ) são análogos aos casos anteriores. Omitiremos os detalhes.

□

Agora, para finalizarmos, temos a seguinte observação

**Observação 16.** *Sejam  $A, B \in \mathcal{M}_2(\Omega)$ , com  $A \preceq B$  então  $\lambda_j(A) > \lambda_j(B)$ ,  $\forall j \in \mathbb{Z}$ , onde  $\lambda_j(A)$  é o  $j$ -ésimo autovalor do problema com peso  $A$ . Neste caso, a afirmação é verificada aplicando o Princípio da Continuação Única Fraco para as autofunções do problema 5.4. Este resultado foi provado, para o caso escalar, em [24].*

# Apêndice A

## Resultados Básicos

Neste apêndice demonstraremos alguns resultados utilizados neste trabalho. Assim, assumiremos  $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 1$ .

Primeiramente, provaremos um resultado que compara a função  $F$  em termos do seu gradiente. Mais precisamente, usando o Teorema Fundamental do Cálculo, somos capazes de provar o seguinte resultado

**Proposição A.1.** *Suponha  $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . Então*

$$F(x, z) - F(x, 0) = \int_0^1 \nabla F(x, tz) \cdot z dt, \forall (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2. \quad (\text{A.1})$$

*Demonstração.* A prova desta proposição segue aplicando o teorema fundamental do cálculo para a função  $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $\psi(t) = F(x, tz)$ .  $\square$

Para os próximos resultados consideramos algumas regras de *L'Hospital*. Estes resultados são muito úteis na prova da condição  $(PS)$  nos Capítulos 1, 2, 3 e 4. Novamente, a idéia principal reside em controlar a função  $F$  no infinito controlando a função  $\nabla F$  no infinito. Assim, temos os seguintes resultados

**Proposição A.2.** *Suponha  $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  com  $\nabla F$  limitada. Seja  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$  uma sequência tal que  $|t_n| \rightarrow \infty$ , se  $n \rightarrow \infty$ . Então temos a seguinte identidade*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, t_n \Phi_1)}{t_n} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \nabla F(x, t_n \Phi_1) \Phi_1 dx. \quad (\text{A.2})$$

*Demonstração.* Nesta demonstração usaremos o teorema fundamental do cálculo. Logo, temos a seguinte identidade

$$F(x, t_n \Phi_1) - F(x, 0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} F(x, tt_n \Phi_1) dt = \int_0^1 \nabla F(x, tt_n \Phi_1) t_n \Phi_1 dt.$$

Sem perda de generalidade podemos assumir  $F(x, 0) \equiv 0$ . Assim, usando a identidade anterior e o Teorema de Fubini, temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \frac{F(x, t_n \Phi_1)}{t_n} - \nabla F(x, t_n \Phi_1) \Phi_1 dx \right| &= \left| \int_{\Omega} \int_0^1 \nabla F(x, tt_n \Phi_1) \Phi_1 - \nabla F(x, t_n \Phi_1) \Phi_1 dt dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} \int_0^1 |\nabla F(x, tt_n \Phi_1) \Phi_1 - \nabla F(x, t_n \Phi_1) \Phi_1| dt dx \\ &= \int_0^1 \int_{\Omega} |\nabla F(x, tt_n \Phi_1) \Phi_1 - \nabla F(x, t_n \Phi_1) \Phi_1| dx dt. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Agora, seja os conjuntos compactos  $\Omega_{\epsilon} = \{x \in \Omega | d(x, \partial\Omega) \geq \epsilon\}$  e  $I_{\delta} = [\delta, 1]$ , onde  $\epsilon, \delta > 0$ . Então  $\Phi_1 \geq a_{\epsilon} > 0$  em  $\Omega_{\epsilon}$  para todo  $\epsilon > 0$ , pois  $\Omega_{\epsilon}$  é compacto e  $\Phi_1$  é continua e positiva em  $\Omega_{\epsilon}$ . Mas  $|t_n| \rightarrow \infty$  se  $n \rightarrow \infty$ , portanto temos dois casos, a saber,  $t_n \rightarrow \infty$  ou  $t_n \rightarrow -\infty$ . Analisaremos inicialmente o primeiro caso, isto é, quando  $t_n \rightarrow \infty$ . Neste caso, concluímos que  $tt_n \Phi_1 \rightarrow \infty$  para todo  $(t, x) \in I_{\delta} \times \Omega_{\epsilon}$ , de modo uniforme nas variáveis  $t$  e  $x$ , onde  $\epsilon, \delta > 0$  são arbitrários. Deste modo, temos a seguinte convergência

$$\nabla F(x, tt_n \Phi_1) \Phi_1(x) \rightarrow (f_1^{++}, f_2^{++})(x) \Phi_1(x), \forall (t, x) \in I_{\delta} \times \Omega_{\epsilon} \text{ se } n \rightarrow \infty, \quad (\text{A.4})$$

onde usamos as definições dadas em (1.9). Agora, aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_{\Omega_{\epsilon}} \nabla F(x, tt_n \Phi_1) \Phi_1(x) dx \rightarrow \int_{\Omega_{\epsilon}} (f_1^{++}, f_2^{++})(x) \Phi_1(x) dx, \forall t \in I_{\delta}. \quad (\text{A.5})$$

Por outro lado, o mesmo argumento implica a seguinte convergência

$$\int_{\Omega_{\epsilon}} \nabla F(x, t_n \Phi_1) \Phi_1(x) dx \rightarrow \int_{\Omega_{\epsilon}} (f_1^{++}, f_2^{++})(x) \Phi_1(x) dx, \forall t \in I_{\delta}. \quad (\text{A.6})$$

Portanto, para todo  $\epsilon, \delta > 0$  obtemos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq n_0$  implica

$$\int_{\delta}^1 \int_{\Omega_{\epsilon}} |\nabla F(x, tt_n \Phi_1) \Phi_1(x) - \nabla F(x, t_n \Phi_1) \Phi_1(x)| dx < (1 - \delta)\epsilon, \quad (\text{A.7})$$

onde usamos (A.5) e (A.6). Além disso, temos a seguinte estimativa

$$\int_{\delta}^1 \int_{\Omega \setminus \Omega_{\epsilon}} |\nabla F(x, tt_n \Phi_1) \Phi_1(x) - \nabla F(x, t_n \Phi_1) \Phi_1(x)| dx \leq (1 - \delta)C \|\Phi_1\|_{\infty} |\Omega \setminus \Omega_{\epsilon}|, \quad (\text{A.8})$$

onde usamos a desigualdade de Cauchy-Schwartz, a limitação de  $\nabla F$  e imersões de Sobolev. Deste modo, usando as desigualdades (A.3), (A.7) e (A.8) temos

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \frac{F(x, t_n \Phi_1)}{t_n} - \nabla F(x, t_n \Phi_1) \Phi_1 dx \right| \leq \int_0^1 \int_{\Omega} |\nabla F(x, tt_n \Phi_1) \Phi_1 - \nabla F(x, t_n \Phi_1) \Phi_1| dx dt \\ &= \left( \int_0^{\delta} \int_{\Omega_{\epsilon}} + \int_{\delta}^1 \int_{\Omega_{\epsilon}} + \int_0^{\delta} \int_{\Omega \setminus \Omega_{\epsilon}} + \int_{\delta}^1 \int_{\Omega \setminus \Omega_{\epsilon}} \right) |\nabla F(x, tt_n \Phi_1) \Phi_1 - \nabla F(x, t_n \Phi_1) \Phi_1| dx dt \leq \\ &\leq (1 - \delta)\epsilon + (1 - \delta)C \|\Phi_1\|_{\infty} |\Omega \setminus \Omega_{\epsilon}| + \delta C \rightarrow 0, \text{ se } \epsilon, \delta \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

onde escrevemos, na penúltima igualdade, a integral dupla em  $[0, 1] \times \Omega$  de modo conveniente. Portanto obtemos a igualdade (A.2). A demonstração do segundo caso, ou seja, onde  $t_n \rightarrow -\infty$ , se  $n \rightarrow \infty$  é tratado de modo similar. Deixamos os detalhes a cargo do leitor.  $\square$

**Proposição A.3.** *Suponha  $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  com  $\nabla F$  limitada. Seja  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V(\lambda_k)$  uma sequência tal que  $\|z_n\| \rightarrow \infty$ , se  $n \rightarrow \infty$ . Então temos a seguinte identidade*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, z_n)}{\|z_n\|} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{\nabla F(x, z_n) z_n}{\|z_n\|} dx. \quad (\text{A.10})$$

*Demonstração.* A prova desta proposição é análoga a prova da proposição anterior. Assim, omitiremos a demonstração desta proposição.  $\square$

**Proposição A.4.** *Suponha  $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  com  $\nabla F$  limitada. Então para quaisquer sequências  $(t_n) \in \mathbb{R}$ ,  $(w_n) \in V_1^{\perp}$  onde  $|t_n| \rightarrow \infty$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|w_n\|}{|t_n|} = 0$  temos a seguinte identidade*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, t_n \Phi_1 + w_n)}{t_n} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, t_n \Phi_1)}{t_n} dx. \quad (\text{A.11})$$

*Demonstração.* Na demonstração desta proposição usaremos novamente o teorema fundamental do cálculo. Deste modo temos as seguintes identidades

$$F(x, t_n \Phi_1 + w_n) - F(x, t_n \Phi_1) = \int_0^1 \frac{d}{dt} F(x, t_n \Phi_1 + tw_n) dt = \int_0^1 \nabla F(x, t_n \Phi_1 + tw_n) w_n dt.$$

Logo conseguimos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \frac{F(x, t_n \Phi_1 + w_n) - F(x, t_n \Phi_1)}{t_n} dx \right| \leq \int_{\Omega} \int_0^1 \left| \frac{\nabla F(x, t_n \Phi_1 + tw_n) w_n}{t_n} \right| dt dx \leq \\ & \leq C \int_{\Omega} \int_0^1 \left| \frac{w_n}{t_n} \right| dt dx = C \int_{\Omega} \left| \frac{w_n}{t_n} \right| dx \leq C \frac{1}{|t_n|} \int_{\Omega} |w_n| dx \leq C \frac{1}{|t_n|} \|w_n\| \rightarrow 0 \text{ se } n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

onde usamos imersões de Sobolev e a limitação em  $\nabla F$ . Estas estimativas encerram a demonstração da proposição.  $\square$

**Proposição A.5.** *Suponha  $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  com  $\nabla F$  limitada. Sejam as seqüências  $(z_n^0) \in V(\lambda_k), (w_n) \in V_k^\perp$  ou  $(w_n) \in V_{k-1}$  tais que  $\|z_n^0\| \rightarrow \infty$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|w_n\|}{|z_n^0|} = 0$  então temos a seguinte identidade*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, z_n^0 + w_n)}{\|z_n^0\|} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, z_n^0)}{\|z_n^0\|} dx. \quad (\text{A.13})$$

*Demonstração.* A prova desta proposição é análoga a demonstração anterior. Deixamos a prova a cargo do leitor.  $\square$

**Proposição A.6.** *Suponha  $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  e  $(H0)$ . Então para quaisquer seqüências  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V_1^\perp$  onde  $|t_n| \rightarrow \infty$  se  $n \rightarrow \infty$  e  $\|w_n\| \leq C, \forall n \in \mathbb{N}$  temos a seguinte identidade*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(x, t_n \Phi_1 + w_n) dx = \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(x, t_n \Phi_1) dx. \quad (\text{A.14})$$

*Demonstração.* Na demonstração desta proposição usaremos novamente o teorema fundamental do cálculo. Assim, temos as seguintes identidades

$$F(x, t_n \Phi_1 + w_n) - F(x, t_n \Phi_1) = \int_0^1 \frac{d}{dt} F(x, t_n \Phi_1 + tw_n) dt = \int_0^1 \nabla F(x, t_n \Phi_1 + tw_n) w_n dt.$$

Seja  $K \subset\subset \Omega$ . Primeiramente lembramos que  $|t_n| \rightarrow \infty$ , se  $n \rightarrow \infty$ , então consideramos separadamente os casos onde  $t_n \rightarrow \infty$  ou  $t_n \rightarrow -\infty$ . Se  $t_n \rightarrow \infty$  então  $t_n \Phi_1 + t w_n \rightarrow \infty$  em  $K$ . Pois  $\Phi_1 \geq a > 0$  em  $K$  e  $|t_n \Phi_1 + t w_n| \geq |t_n \Phi_1| - |t w_n| \geq a|t_n| - |w_n| \geq a|t_n| - C$ , onde usamos a limitação da norma  $w_n$ . Portanto  $|t_n \Phi_1 + t w_n| \geq a|t_n| - C \rightarrow \infty$ , se  $n \rightarrow \infty$ . Analogamente  $t_n \Phi_1 + t w_n \rightarrow -\infty$  em  $K$  se  $t_n \rightarrow -\infty$ . Em qualquer caso, usando (H0) e o teorema da convergência dominada de Lebesgue, obtemos a seguinte convergência

$$\int_0^1 \int_K |\nabla F(x, t_n \Phi_1 + t w_n) w_n| dx dt \rightarrow 0, \text{ se } n \rightarrow \infty. \quad (\text{A.15})$$

Assim, dado  $K \subset\subset \Omega$  arbitrário temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} & \left| \int_K F(x, t_n \Phi_1 + w_n) - F(x, t_n \Phi_1) dx \right| \leq \int_K \int_0^1 |\nabla F(x, t_n \Phi_1 + t w_n) w_n| dt dx \leq \\ & \leq \int_0^1 \int_K |\nabla F(x, t_n \Phi_1 + t w_n)| |w_n| dx dt \rightarrow 0, \text{ se } n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

onde usamos Teorema de Fubini e (A.15). Por outro lado, dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  e  $K_n \subset\subset \Omega$  tal que  $n \geq n_0$  implica

$$\|\Phi_1\|_{L^2(\Omega \setminus K_n)} \leq \frac{1}{|t_n|} < \epsilon \text{ e } \|w_n\|_{L^1(\Omega \setminus K_n)} < \epsilon. \quad (\text{A.17})$$

Portanto, temos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega \setminus K_n} F(x, t_n \Phi_1 + w_n) - F(x, t_n \Phi_1) dx \right| \leq \int_{\Omega \setminus K_n} \int_0^1 |\nabla F(x, t_n \Phi_1 + t w_n) w_n| dt dx \leq \\ & \leq \int_{\Omega \setminus K_n} \int_0^1 (C + \epsilon |t_n \Phi_1 + t w_n|) |w_n| dt dx = \int_0^1 \int_{\Omega \setminus K_n} (C + \epsilon |t_n \Phi_1 + t w_n|) |w_n| dx dt \\ & \leq C \|w_n\|_{L^1(\Omega \setminus K_n)} + \epsilon C \|t_n \Phi_1 + w_n\|_{L^2(\Omega \setminus K_n)} \|w_n\|_{L^2(\Omega \setminus K_n)} \\ & \leq C \|w_n\|_{L^1(\Omega \setminus K_n)} + \epsilon C |t_n| \|\Phi_1\|_{L^2(\Omega \setminus K_n)} \|w_n\|_{L^2(\Omega \setminus K_n)} + \epsilon C \|w_n\|_{L^2(\Omega \setminus K_n)}^2 \\ & < C \|w_n\|_{L^1(\Omega \setminus K_n)} + \epsilon C \|w_n\|_{L^2(\Omega \setminus K_n)} + \epsilon C \|w_n\|_{L^2(\Omega \setminus K_n)}^2 \\ & < C \|w_n\|_{L^1(\Omega \setminus K_n)} + \epsilon C \leq C \epsilon \rightarrow 0, \text{ se } \epsilon \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

onde usamos a hipótese (H0), Teorema de Fubini, desigualdade de Holder e (A.17). Portanto as estimativas (A.16) e (A.18) aplicadas ao compacto  $K_n$  provam a identidade (A.14).  $\square$

**Proposição A.7.** *Suponha  $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  e (H0). Seja  $z_n = z_n^0 + w_n \in V(\lambda_k) \oplus V^*$  onde  $V^* = V_{k-1}$ , ou  $V^* = V_k^\perp$ . Suponha que  $\|z_n^0\| \rightarrow \infty$  se  $n \rightarrow \infty$  e  $\|w_n\| \leq C, \forall n \in \mathbb{N}$  então temos a seguinte identidade*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(x, z_n^0 + w_n) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(x, z_n^0) dx. \quad (\text{A.19})$$

*Demonstração.* A prova desta proposição é semelhante a demonstração da Proposição (A.6). Assim, deixamos a prova deste resultado a cargo do leitor.  $\square$

# Apêndice B

## Uma breve revisão dos Pontos Críticos e Teoria de Morse

Neste apêndice, faremos algumas definições e resultados da Teoria de Pontos Críticos e da Teoria de Morse. Estes resultados são utilizados nas provas dos nossos principais teoremas. Aqui, vale lembrar que um texto mais completo sobre Teoria de Morse pode ser encontrada em [14] e em [37].

Primeiramente, seja  $H$  um espaço de Hilbert e  $I : H \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional de classe  $C^1$ . Denote o conjunto dos pontos críticos de  $I$  por  $K$ . Assim, dado  $c \in \mathbb{R}$  definimos  $I_c = \{x \in H : I(x) \leq c\}$  e  $K_c = I^{-1}(c) \cup K$ . Assim, consideramos a seguinte definição

**Definição B.1.** *Dizemos que o funcional  $I : H \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  satisfaz a propriedade de deformação se para todo  $a < b$  tais que  $K \cup I^{-1}(a, b) = \emptyset$ , temos que  $I_a$  é retrato de deformação de  $I_b \setminus K_b$ .*

Deste modo, consideremos o lema de deformação a qual é importantíssimo na teoria dos pontos críticos. Na prova de tal lema é essencial a garantia de condições do tipo  $(PS)$ , veja [14]. Assim, temos o seguinte resultado

**Lema B.2.** *Suponha que  $I : H \rightarrow \mathbb{R}$  seja um funcional de classe  $C^1$  a qual satisfaz a condição  $(PS)$ . Além disso, suponha que o nível  $a$  é o único valor crítico possível de*

$I$  no intervalo  $[a, b)$ . Suponha que as componentes conexas de  $K_a$  são pontos isolados. Então,  $f_a$  é um retrato de deformação de  $f_b \setminus K_b$ .

Neste momento, denotamos  $H_q(X, Y)$  como sendo o grupo de homologia singular relativo com coeficientes em  $\mathbb{Z}$ . Aqui,  $X$  e  $Y$  sempre denotam espaços topológicos em que  $Y \subset X$ . Neste caso, temos a seguinte definição

**Definição B.3.** *Seja  $x_0$  um ponto critico isolado do funcional  $I : H \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Seja  $c_0 = I(x_0)$ , então o  $p$ -ésimo grupo critico de  $I$  em  $x_0$  é dado por*

$$C(I, x_0) = H_p(I_{c_0} \cap U_{x_0}, (I_{c_0} \setminus \{x_0\}) \cap U_{x_0})$$

onde  $U_{x_0}$  é uma vizinhança de  $x_0$  tal que  $U_{x_0} \cap K = \{x_0\}$ .

Deste modo, temos o seguinte resultado

**Teorema B.4.** *Seja  $I : H \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Suponha que  $\alpha \in H_j(I_b, I_a)$  é não trivial e que  $I$  possui a propriedade de deformação. Assim, denote*

$$c = \inf_{\sigma \in \alpha} \sup_{x \in |\sigma|} I(x).$$

Então existe  $x_0 \in K_c$  tal que  $C_j(I, x_0) \neq 0$ .

*Demonstração.* A prova deste resultado pode ser encontrada em [14]. □

Agora, consideramos algumas situações onde temos enlaces entre dois conjuntos de um espaço de Hilbert  $H$ . Primeiramente, temos a seguinte definição

**Definição B.5.** *Seja  $D$  um bola topológica de dimensão topológica  $j$  em  $H$  e  $S$  um subconjunto de  $H$ . Dizemos que  $\partial D$  e  $S$  estão enlaçados homologicamente se  $\partial D \cap S = \emptyset$  e  $|\sigma| \cap S \neq \emptyset$ , para cada  $j$  cadeia singular  $\sigma$  com  $\partial \sigma = \partial D$ .*

As próximas proposições fornecem exemplos de conjuntos enlaçados homologicamente. As provas destas proposições podem ser encontradas no Capítulo II em [14]. Assim, temos os seguintes resultados

**Proposição B.6.** *Sejam  $H_1$  e  $H_2$  dois subespaços fechados de um espaço de Hilbert  $H$ . Além disso, suponha que  $H = H_1 \oplus H_2$  e  $\dim H_1 < \infty$ . Então, tomando  $D = B_r \cap H_1$  e  $S = H_2$ , temos que  $\partial D$  e  $S$  estão enlaçados homologicamente.*

Na proposição anterior temos a geometria descrita no Teorema do Ponto de Sela. Para o próximo resultado descrevemos um situação corrente para a geometria do tipo "Linking". Neste caso, temos o seguinte resultado

**Proposição B.7.** *Sejam  $H_1$  e  $H_2$  dois subespaços fechados de um espaço de Hilbert  $H$ . Além disso, suponha que  $H = H_1 \oplus H_2$  e  $\dim H_1 < \infty$ . Considere  $\phi \in H_2$  e  $R, r, \rho > 0$  com  $\rho < R$ . Sejam*

$$D = \{x + s\phi : x \in H_1 \cap B_r, s \in [0, R]\} \text{ e } S = H_2 \cap \partial B_\rho.$$

*Então  $\partial D$  e  $S$  estão enlaçados homologicamente.*

Agora, consideraremos um resultado que relaciona conjuntos enlaçados homologicamente com a existência de pontos críticos que possuem grupos críticos não triviais. Neste caso, temos o seguinte teorema

**Teorema B.8.** *Suponha que  $\partial D$  e  $S$  estão enlaçados homologicamente onde  $D$  é uma bola topológica de dimensão  $j$ . Além disso, suponha que  $I$  de classe  $C^1$  satisfaça as seguintes condições*

1.  $I(x) > a, \forall x \in S$ ,
2.  $I(x) \leq a, \forall x \in \partial D$ .

*Então  $H_j(I_b, I_a) \neq 0$  para  $b > \max\{f(x), x \in D\}$ .*

Neste momento, daremos uma estimativa dos grupos críticos de um ponto crítico isolado e degenerado. Primeiramente, descreveremos o "Splitting Theorem" a qual será usado posteriormente para fazer a estimativa dos grupos críticos. Assim, temos o seguinte resultado

**Teorema B.9. (Splitting Theorem)** *Suponha que  $U$  seja um vizinhança de  $x_0$  em um espaço de Hilbert  $H$  e seja  $I : H \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional de classe  $C^2$ . Além disso, suponha que  $x_0$  é o único ponto crítico de  $I$  e denote  $A = d^2I(x_0)$  com núcleo  $N$ . Se  $0$  é um ponto isolado em  $\sigma(A)$  (espectro de  $A$ ) ou não está em  $\sigma(A)$ . Então existe uma bola  $B_\delta(0)$ ,  $\delta > 0$  e um homeomorfismo local  $\Psi$  que preserva a ordem definido em  $B_\delta(0)$  e uma aplicação de classe  $C^1$   $h : B_\delta \cap N \rightarrow N^\perp$  satisfazendo*

$$I \circ \Psi(z + y) = \frac{1}{2}(Az, z) + I(h(y) + y), \forall x \in B_\delta,$$

onde  $y = P_N x$ ,  $z = P_{N^\perp} x$ . Aqui,  $P_N$  e  $P_{N^\perp}$  são as projeções ortogonais sobre os subespaços  $N$  e  $N^\perp$ .

Neste caso, chamamos de  $\mathcal{N} = \Psi(U \cap N)$ . O seguinte teorema relaciona os grupos críticos dos pontos críticos de  $I$  e os pontos críticos de  $\widehat{I}$ . Mais especificamente, temos o seguinte resultado

**Teorema B.10. (Shifting Theorem)** *Sob as mesmas hipóteses do "Splitting Theorem," suponha que o índice de Morse de  $I$  em  $x_0$  é  $m = m(x_0)$ . Então temos a seguinte identidade*

$$C_p(I, x_0) = C_{p-m}(\widehat{I}, x_0), \forall p \in \mathbb{N}.$$

Neste caso, supondo que  $A = d^2I(x_0)$  tem núcleo de dimensão finita, temos o seguinte corolário

**Corolário B.11.** *Suponha que  $N$  possui dimensão finita  $v$  e  $x_0$  é*

- *um mínimo local de  $\widehat{I}$ , então*

$$C_p(I, x_0) = \delta_{pm} \mathbb{Z}, \forall p \in \mathbb{Z},$$

- *um máximo local de  $\widehat{I}$ , então*

$$C_p(I, x_0) = \delta_{p(m+v)} \mathbb{Z}, \forall p \in \mathbb{Z},$$

- *nem um máximo e nem um mínimo local de  $\widehat{f}$ , então*

$$C_p(I, x_0) = 0, \forall p \leq v \text{ e para } p \geq m + v.$$

*Demonstração.* A prova deste teorema consiste em utilizar o "Splitting Theorem", veja [14]. Omitiremos a prova deste corolário.  $\square$

Em particular, temos o seguinte resultado

**Corolário B.12. (Lema de Gromoll – Meyer)** *Sob as mesmas hipóteses descritas no corolário acima temos que  $C_p(I, x_0) = 0$  para todo  $p < m$  ou  $p > m + v$ .*

*Demonstração.* A prova deste corolário é imediata usando o Corolário B.11. Para uma prova deste resultado sem utilizar explicitamente o "Shifting Theorem" veja [11].  $\square$

# Referências Bibliográficas

- [1] S. Ahmad, A. C. Lazer, and J. L. Paul. Elementary critical point theory and perturbations of elliptic boundary value problems at resonance. *J. Math. Mech.*, 19:609–623, 1969/1970.
- [2] C. O. Alves, P. C. Carriao, and O. H. Myagaki. Multiple solutions for a problem with resonance involving the p-laplacian. *Abstr. Appl. Anal.*, 1–2:191–201, 1998.
- [3] H. Amann. Saddle points and multiple solutions of differential equations. *Math Z.*, 169:127–166, 1979.
- [4] H. Amann and E. Zehnder. Nontrivial solutions for a class of nonresonance problems and applications to nonlinear differential equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 7:539–603, 1980.
- [5] H. Amann and E. Zehnder. Multiple non-trivial solutions of resonant and non-resonant asymptotically linear problems. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 96:405–409, 1987.
- [6] A. Ambrosetti and A. Andrea. *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*. Cambridge, New York, 2007.
- [7] A. Ambrosetti and D. Arcoya. On a quasilinear problems at strongly resonance. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 6:255–264, 1995.
- [8] D. Arcoya and D. G. Costa. Nontrivial solutions for a strongly resonant problem. *Diff. Int. Equa.*, 8(1):151–159, 1995.

- [9] P. Bartolo, V. Benci, and D. Fortunato. Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity. *Nonlinear Anal.*, 7:981–1012, 1983.
- [10] T. Bartsch, K.C. Chang, and Z. Q. Wang. On the mosrse indices of sign changing solutions of nonlinear elliptic problems. *Math. Z.*, 233:655–677, 2000.
- [11] T. Bartsch and Shujie Li. Critical point theory for asymptotically quadratic functionals and applications to problems with resonance. *Nonlinear Analysis TAM*, 28:419–441, 1997.
- [12] A. Capozzi, D. Lupo, and S. Solimini. On the existence of a nontrivial solution to nonlinear problems at resonance. *Non. Anal.*, 13:151–163, 1989.
- [13] A. Castro. Reduction methods via minimax. *Lecture Notes in Math., Springer-Verlag*, 957:1–20, 1982.
- [14] K. C. Chang. *Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solutions Problems*. Birkhauser, Boston, 1993.
- [15] K.C. Chang. An extension of the Hess Kato theorem to elliptic systems and its applications to multiple solutions problems. *Acta Math. Sinica*, 15:439–454, 1999.
- [16] K.C. Chang. Principal eigenvalue for weight in elliptic systems. *Nonlinear Anal.*, 46(419):419–433, 2001.
- [17] K.C. Chang, S. Li, and J. Liu. Remarks on multiple solutions for asymptotically linear elliptic boundary value problems. *Top. Meth. Non. Anal.*, 2:179–187, 1994.
- [18] D. G. Costa. *An Invitation to Variational Methods in Differential Equations*. Birkhauser, Boston, 2007.
- [19] D. G. Costa and C. A. Magalhaes. Variational elliptic problems which are non-quadratic at infinity. *Non. Anal.*, 23(11):1401–1412, 1994.

- [20] D. G. Costa and C. A. Magalhães. A variational approach to subquadratic perturbations of elliptic systems. *J. Differential Equations*, 111:103–122, 1994.
- [21] D. G. Costa and E. A. B. Silva. Existence solution for a class of semilinear elliptic problems at double resonance. *Bol. Soc. Brasil*, pages 21–37, 1988.
- [22] D. G. Costa and E. A. B. Silva. The palais-smale condition versus coercivity. *Non. Anal.*, 16:371–381, 1991.
- [23] D. G. Costa and E. A. B. Silva. On a class of resonant problems at higher eigenvalues. *Diff. Int. Equa.*, 8(3):663–671, 1995.
- [24] D.G. de Figueiredo. Positive solutions of semilinear elliptic problems. *in: Differential Equations, São Paulo, 1981, in: Lecture Notes in Math.*, 957:34–87, 1982.
- [25] M. F. Furtado and F. O. V. de Paiva. Multiplicity of solutions for resonant elliptic systems. *Journal Math. Anal. Appl.*, 319:435–449, 2006.
- [26] D. G., Costa, and C. A. Magalhaes. A unified approach to a class of strongly indefinite functionals. *J. Differential Equations*, 125:521–547, 1996.
- [27] N. Ghoussoub. *Duality and perturbation methods in critical point theory*. Cambridge, New York, 1993.
- [28] J.V. Goncalves and O. H. Miyagaki. Three solutions for a strongly resonant elliptic problem. *Nonlinear Anal.*, 24:255–264, 1995.
- [29] H.Brésis and L. Nirenberg. Remarks on finding critical points. *Comm. Pure and Applied Math.*, 44:939–963, 1991.
- [30] N. Hirano, S. Li, and Z. Q. Wang. Morse theory without (ps) condition at isolated values and strong resonance problems. *Cal. Var.*, 10:223–247, 2000.
- [31] L. Homander. *Linear Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1969.

- [32] E.M. Landesman and A. C. Lazer. Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance. *J. Math. Mech.*, 19:609–623, 1969/1970.
- [33] E.M. Landesman, S. Robinson, and A. Rumbos. Multiple solutions of semilinear elliptic problems at resonance. *Non. Anal.*, 24(7):1049–1059, 1995.
- [34] S. Li and M. Willem. Multiple solutions for asymptotically linear boundary value problems in which the nonlinearity crosses at least one eigenvalue. *Nondea*, 5:479–490, 1998.
- [35] O. Lopes. Radial symmetry of minimizers for some translation and rotation invariant functionals. *J. Differential Equations*, 124(2):378–388, 1996.
- [36] A. Masiello and L. Pisani. Asymptotically linear elliptic problems at resonance. *Annali di Matematica pura ed applicata (IV)*, 171(4):1–13, 1996.
- [37] J. Mawhin and M. Willen. *Critical point theory and Hamiltonian Systems*. Springer, Berlin, 1989.
- [38] M. Schechter. Asymptotically linear elliptic boundary value problems. *Mh. Math.*, 117:121–137, 1994.
- [39] M. Schechter. Bounded resonance problems for semilinear elliptic equations. *Non. Anal.*, 24:1471–1482, 1995.
- [40] E. A. B. Silva. Linking theorems and applications to semilinear elliptic problems at resonance. *Nonlinear Anal.*, 16:455–477, 1991.
- [41] E. A. B. Silva. Nontrivial solutions for noncooperative elliptic systems at resonance. *Electron J. Differ. Equa. Conf.*, 6:267–283, 2001.
- [42] J. Su. Semilinear elliptic boundary value problems with double resonance between two consecutive eigenvalues. *Non. Anal.*, 48:881–895, 2002.

- [43] J. Su. Multiplicity results for asymptotically linear elliptic problems at resonance. *J. Math. Appl. Appl.*, 278:397–408, 2003.
- [44] J. Su and C. Tang. Multiplicity results for semilinear elliptic equations with resonance at higher eigenvalues. *Non. Anal.*, 44:311–321, 2001.
- [45] J. Su and L. Zhao. An elliptic resonance problem with multiple solutions. *J. Math. Appl. Appl.*, 319:604–616, 2006.
- [46] K. Thews. Nontrivial solutions of elliptic equations at resonance. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 85:119–129, 1980.
- [47] J. Ward. Applications of critical point theory to weakly nonlinear value problems at resonance. *Houston J. Math.*, 10:291–305, 1984.
- [48] W. Zou. Nontrivial solutions for resonant cooperative elliptic systems via computations of critical groups. *Non. Anal.*, 38:229–247, 1999.
- [49] W. Zou. Multiple solutions for asymptotically linear elliptic systems. *Non. Anal.*, pages 213–229, 2001.
- [50] W. Zou. Multiple solutions for resonant elliptic equations via local linking theory and morse theory. *J. Diff. Equations*, 170:68–95, 2001.