UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Números de Entropia de Conjuntos de Funções Suaves sobre a Esfera S^d

Juliana Gaiba Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Alexander Kushpel
Co-Orientador: Prof. Dr. Sérgio Antonio Tozoni

Campinas, 2009.
Apoio financeiro: Capes e CNPq.

Número de Entropia de Conjuntos de Funções Suaves Sobre a Esfera S^d

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Juliana Gaiba Oliveira** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 17 de Março de 2009.

Prof. Dr. Alexander Kushpel
Orientador

Prof. Dr. Sérgio Antonio Tozoni
Co-Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Alexander Kushpel
Prof. Dr. Dicesar Lass Fernandes
Profa. Dra. Iara Andréa Álvares Fernandes

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Oliveira, Juliana Gaiba
OL4n Números de entropia de conjuntos de funções suaves sobre a esfera S^d/ Juliana Gaiba Oliveira-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.

Orientadores : Alexander Kushpel ; Sérgio Antonio Tozoni

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Entropia. 2.Análise harmônica. 2.Multiplicadores (Análise matemática). 3.Teoria da aproximação . I. Kushpel, Alexander. II.Tozoni, Sérgio Antonio. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

(mfbm/imecc)

Título em inglês: Entropy numbers of sets of smooth functions on the sphere S^d

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Entropy. 2. Harmonic analysis. 3. Multipliers (Mathematics analysis). 4. Approximation theory.

Área de concentração: Análise Harmônica

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Alexander Kushpel (IMECC- Unicamp)
Profa. Dra. Iara Andréa Álvares Fernandes (USF)
Prof. Dr. Dicesar Lass Fernandes (IMECC - Unicamp)

Data da defesa: 17/03/2009

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 17 de março de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). ALEXANDER KUSHPEL

Prof. (a). Dr (a). IARA ANDRÉA ÁLVARES FERNANDES

Prof. (a). Dr (a). DICESAR LASS FERNANDES

AGRADECIMENTOS

Ao final desse trabalho, gostaria de dar meus sinceros agradecimentos a todas as pessoas que de qualquer forma contribuíram para que o mesmo fosse realizado.

Primeiramente agradeço à Deus por ter sempre me atendido nos momentos que eu precisei Dele.

Agradeço aos meus pais, Renato e Celeste, pela sólida formação dada, que me proporcionou a continuidade nos estudos, e aos meus irmãos, Rodrigo e Tiago, que sempre torceram por mim.

Agradeço aos meus orientadores Alexander Kushpel e Sérgio Tozoni pela paciência, pela disponibilidade em sanar minhas inúmeras dúvidas e pelo incentivo que sempre me deram. Em especial ao Tozoni pela cuidadosa correção da dissertação.

Agradeço ao Ricardo por estar sempre presente nos momentos mais difíceis e mais felizes, pela paciência e conforto em vários momentos; agradeço ainda à minha sogra, Dalva, pelas fervorosas orações.

Agradeço aos meus amigos durante o mestrado, em especial à Elisa, Régis e Bricela pela companhia nos momentos de estudo e diversão.

Agradeço ainda aos professores do IMECC e aos funcionários da Secretaria de Pós-Graduação.

Por fim, agradeço ao CNPq e à Capes pelo apoio financeiro.

Índice

Resumo

A teoria de entropia foi introduzida por Kolmogorov por volta de 1930. Desde então, muitos trabalhos tem visado obter estimativas para números de entropia de certas classes de conjuntos. O principal objetivo deste trabalho é estudar dois teoremas onde são estabelecidas estimativas superiores e inferiores para números de entropia de operadores multiplicadores genéricos. Para demonstrar estes teoremas utilizamos resultados sobre estimativas para médias de Levy, para uma classe de normas especiais.

Outro objetivo é estudar aplicações dos teoremas citados na obtenção de estimativas para números de entropia de conjuntos de funções suaves finitamente e infinitamente diferenciáveis sobre a esfera unitária d-dimensional, associados a operadores multiplicadores específicos. Várias dessas estimativas são assintoticamente exatas em termos de ordem e as constantes que determinam a ordem dessas estimativas são determinadas explicitamente.

Abstract

The entropy theory was introduced by Kolmogorov around 1930. Since then, many works aims to find estimates for entropy numbers of certain classes of sets. The main objective of this work is to study two theorems that establishes upper and lower estimates for entropy numbers of generic multiplier operators. To prove these theorems, we utilize some results on Levy means estimates for a special class of norms.

Another objective is to study applications of above theorems in obtaining estimates for entropy numbers of sets of finitely and infinitely smooth functions on the d-dimensional sphere, associated with generic multiplier operatores. Some of these estimates are asymptotically sharp in terms of order and the constants that determines the order of these estimates are explicit determined.

Introdução

O conceito de entropia foi introduzido pelo matemático russo Andrey Nikolaevich Kolmogorov, por volta de 1930. Mais tarde, por volta de 1948, esta definição mostrou ser muito útil na Teoria da Informação, desenvolvida por Shannon. Nesta teoria, a entropia é utilizada para medir os ruídos num canal de comunicação.

No fim da década de 50, o próprio Kolmorogov adaptou suas idéias sobre entropia de conjuntos compactos para transformações $T : X \to X$, relacionando entropia e sistemas dinâmicos, que culminou no que hoje é chamado de Teoria do Caos Determinístico. Dentre outras coisas, isto possibilitou os desenvolvimentos iniciais da Teoria KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser).

Voltando à Análise Funcional, a definição inicial de Kolmogorov originou vários outros desenvolvimentos, entre eles os números de entropia, números de aproximação e o conceito de ε-entropia, os três intimamente relacionados com aproximação de funções em espaços de Banach. Os números de aproximação medem uma espécie de "grau de compacidade" de um operador.

Em grande parte, muito do desenvolvimento posterior da teoria de entropia foi proporcionado pela mudança do contexto, de espaços métricos para espaços vetoriais normados, espaços quase-Banach e de Banach. Isto deu um novo impulso à teoria, tanto abstratamente quanto no nível das aplicações. Em particular, os trabalhos de Pietsch promoveram o desenvolvimento dos números de entropia, enquanto Triebel e outros estudaram exaustivamente os números de entropia de mergulhos entre espaços de Sobolev.

A maioria dos trabalhos recentes que envolvem números de entropia e ε-entropia visam obter estimativas superiores/inferiores para tais números, e o mesmo ocorre com os números de aproximação. Para tal fim, é corriqueiro estudar relações entre os números de entropia e os autovalores de um operador.

O principal objetivo deste trabalho é estudar números de entropia de operadores multiplicadores de funções definidas sobre S^d utilizando o trabalho de A. Kushpel e S.A. Tozoni [5]. Como aplicação, serão considerados operadores multiplicadores específicos, relacionados a conjuntos de funções finitamente e infinitamente diferenciáveis sobre a esfera S^d.

No Capítulo 1 definimos os conceitos de ε-entropia, números de entropia e números de aproximação, e apresentamos algumas de suas propriedades e relações.

No Capítulo 2 fazemos um estudo de Análise Harmônica na Esfera, com poucas demonstrações. Os conceitos e resultados aqui estudados serão utilizados nos capítulos seguintes.

No Capítulo 3 estudamos estimativas superiores e inferiores para números de entropia de operadores multiplicadores gerais de $L^p(S^d)$ em $L^q(S^d)$ para $1 \leq p, q \leq \infty$.

No Capítulo 4, aplicamos as estimativas encontradas no Capítulo 3 para obter, de forma mais explícita, estimativas para os números de entropia de conjuntos de funções suaves, finitamente e infinitamente diferenciáveis sobre S^d, associados às sequências de multiplicadores $\Lambda^{(1)} = \{k^{-\gamma}\}_{k\in\mathbb{N}},\ \gamma > 0$ e $\Lambda^{(2)} = \{e^{-\gamma k^r}\}_{k\in\mathbb{N}}, \gamma > 0,\ 0 < r < 1$. Várias dessas estimativas são assintoticamente exatas em termos de ordem e as constantes que determinam a ordem dessas estimativas são determinadas explicitamente.

Capítulo 1

Números de Entropia

Neste capítulo definimos os elementos básicos desta dissertação: ε-entropia, números de aproximação e números de entropia.

Na primeira seção, onde definimos a ε-entropia, seguimos a exposição de [4]. A segunda seção, que trata dos números de aproximação, foi baseada em [1] e [10]. A seção sobre números de entropia foi baseada em [1] e [11]. A última seção, que relaciona os números de entropia com a ε-entropia foi motivada por um comentário em [1].

1.1 ε-Entropia

Nesta seção X denotará um espaço normado com norma $\|\cdot\|$ e em todo o capítulo B_X denotará a bola unitária fechada de X, isto é, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Se $x > 0$, $\log x$ denotará sempre $\log_2 x$, isto é, o logaritmo do número x na base 2.

Definição 1.1.1. *Seja K um subconjunto de X e seja $\varepsilon > 0$.*

1. *Um conjunto $\hat{K} \subset X$ é dito uma ε-rede de K se para cada $x \in K$ existe pelo menos um ponto $y \in \hat{K}$ tal que a distância de x a y é menor ou igual a ε, ou seja $\|x - y\| \leq \varepsilon$.*

2. *Os pontos $y_1, \ldots, y_m$ de X são ditos ε-separados se a distância entre quaisquer dois destes pontos é maior que ε, ou seja, $\|y_i - y_k\| > \varepsilon$, $i \neq k$.*

Definição 1.1.2. *Dados um subconjunto K de X e $\varepsilon > 0$, seja $N_\varepsilon(K)$ o menor valor de n tal que existe uma ε-rede de K consistindo de n elementos. A ε-entropia do conjunto K em X é definida por*

$$H_\varepsilon(K) = \log N_\varepsilon(K).$$

Definição 1.1.3. *Dados um subconjunto K de X e $\varepsilon > 0$, seja $M_\varepsilon(K)$ o maior valor de m tal que, existe um subconjunto de K consistindo de m pontos ε-separados. A capacidade (ou ε-capacidade) de K é definida por*

$$C_\varepsilon(K) = \log M_\varepsilon(K).$$

Observação 1.1.4. *Uma ε-rede consistindo de $N_\varepsilon(K)$ pontos é dita uma ε-rede minimal. Um conjunto formado de $M_\varepsilon(K)$ pontos ε-separados é dito um conjunto ε-separado maximal.*

Observação 1.1.5. *Todo conjunto compacto possui um conjunto ε-separado maximal.*

Proposição 1.1.6. *Para cada conjunto compacto $K \subset X$ e cada $\varepsilon > 0$,*

$$C_{2\varepsilon}(K) \leq H_\varepsilon(K) \leq C_\varepsilon(K).$$

Demonstração. Suponhamos que $\{y_1, \cdots, y_m\}$ seja um conjunto ε-separado maximal de K, isto é $M_\varepsilon(K) = m$. Para qualquer $x \in K$, como $\{y_1, \cdots, y_m\}$ é maximal, $\{x, y_1, \cdots, y_m\}$ não pode ser um conjunto ε-separado. Assim, $\|x - y_j\| \leq \varepsilon$ para algum y_j em $\{y_1, \cdots, y_m\}$ e logo

$$x \in \bigcup_{j=1}^{m} y_j + \varepsilon B_X.$$

Portanto $\{y_1, \cdots, y_m\}$ é uma ε-rede para K e consequentemente $N_\varepsilon(K) \leq m = M_\varepsilon(K)$.

Para a segunda desigualdade, considere $\{y_1, \cdots, y_m\}$ um conjunto 2ε-separado maximal para K e seja $\{x_1, \cdots, x_n\}$ uma ε-rede minimal. Seja $\alpha : \{1, 2, \cdots, m\} \to \{1, 2, \cdots, n\}$ tal que $y_j \in x_{\alpha(j)} + \varepsilon B_X, \;\; 1 \leq j \leq m$. Suponhamos que $\alpha(j) = \alpha(i)$ para $1 \leq i \neq j \leq m$. Então temos

$$y_i, y_j \in x_{\alpha(i)} + \varepsilon B_X,$$

e portanto $\|y_i - y_j\| \leq 2\varepsilon$, o que contradiz o fato do conjunto $\{y_1, \cdots, y_m\}$ ser ε-separado.

Assim α é injetora e consequentemente $m \leq n$. Logo

$$M_{2\varepsilon} = m \leq n = N_\varepsilon(K).$$

■

1.2 Números de Aproximação

Notação 1.2.1. *Sejam X e Y espaços de Banach com normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$ respectivamente. Quando não houver possibilidade de confusão escreveremos simplesmente $\|\cdot\|$ para qualquer das normas $\|\cdot\|_X$ ou $\|\cdot\|_Y$. Denotaremos por $L(X,Y)$ o espaço vetorial formado por todos os operadores lineares limitados (contínuos) de X em Y. A norma $\|u\|$ de $u \in L(X,Y)$ é dada por*

$$\|u\| = \sup\{\|u(x)\|_Y : x \in B_X\}.$$

Notação 1.2.2. *Sejam X e Y dois espaços de Banach, S um subespaço vetorial de X e $u \in L(X,Y)$. A restrição do operador u ao subespaço S será denotada por $u\,|_S$. O posto de u é definido como sendo a dimensão da imagem de u e será denotado por* $\mathrm{posto}(u)$.

Seja X/S o espaço quociente de X por S, isto é, o conjunto formado por todas as classes de equivalência $[x] = x + S,\ x \in X$. A codimensão de S é definida como sendo a dimensão de X/S e será denotada por $\mathrm{codim}(S)$.

A aplicação quociente de X em X/S, que a cada $x \in X$ associa o elemento $[x] \in X/S$, será denotada por Q_S.

Definição 1.2.3. *Sejam X e Y espaços de Banach e seja $u \in L(X,Y)$. Então dado qualquer $k \in \mathbb{N}$, o k-ésimo número de aproximação de u, denotado por $a_k(u)$, é definido como*

$$a_k(u) = \inf\{||u - v|| : \ v \in L(X,Y), \quad \mathrm{posto}(v) < k\}.$$

Proposição 1.2.4. *Sejam X, Y e Z espaços de Banach, $u, v \in L(X,Y)$. Suponha que $w \in L(Y,Z)$. Então*

(i) $||u|| = a_1(u) \geq a_2(u) \geq \cdots \geq 0$*;*

(ii) Para todos $k, l \in \mathbb{N}$, $a_{k+l-1}(w \circ u) \leq a_k(w) a_l(u)$*;*

(iii) Para todos $k, l \in \mathbb{N}$, $a_{k+l-1}(u + v) \leq a_k(u) + a_l(v)$.

Demonstração. É claro que vale (i). Vamos demonstrar que vale (ii). Note que dado qualquer $\varepsilon > 0$, existem aplicações $w_1 \in L(Y,Z)$ e $u_1 \in L(X,Y)$, com $\mathrm{posto}(w_1) < k$ e $\mathrm{posto}(u_1) < l$, tal que $||w - w_1|| < a_k(w) + \varepsilon$ e $||u - u_1|| < a_l(u) + \varepsilon$. Como $\mathrm{posto}(w_1 \circ (u -$

$u_1) + w \circ u_1) < k + l - 1$, segue que

$$\begin{aligned} a_{k+l-1}(w \circ u) &\leq ||w \circ u - w_1 \circ (u - u_1) - w \circ u_1|| \\ &\leq ||w - w_1|| \, ||u - u_1|| \\ &\leq \{a_k(w) + \varepsilon\}\{a_l(u) + \varepsilon\} \end{aligned}$$

e obtemos (ii) fazendo $\varepsilon \to 0$.

Para (iii) observe que dado qualquer $\varepsilon > 0$, existem aplicações $u', v' \in L(X, Y)$, com posto$(u') < k$ e posto$(v') < l$ tais que $||u - u'|| < a_k(u) + \varepsilon$ e $||v - v'|| < a_l(v) + \varepsilon$. Como posto$(u' + v') < k + l - 1$, teremos

$$\begin{aligned} a_{k+l-1}(u + v) &\leq ||u + v - u' - v'|| \\ &\leq ||u - u'|| + ||v - v'|| \\ &\leq \{a_k(u) + \varepsilon\} + \{a_l(v) + \varepsilon\} \end{aligned}$$

e assim segue (iii). ■

1.3 Números de Entropia

Definição 1.3.1. *Sejam K_1, K_2 dois subconjuntos de um espaço de Banach Y. Definimos por $N(K_1, K_2)$ o menor número N tal que existem pontos $y_1, \ldots, y_N \in Y$ de modo que*

$$K_1 \subset \bigcup_{i \leq N} (y_i + K_2).$$

Definição 1.3.2. *Sejam Y um espaço de Banach e $A \subset Y$. O k-ésimo número de entropia do conjunto A é definido por*

$$e_k(A) = e_k(A, Y) = \inf\{\varepsilon > 0 : N(A, \varepsilon B_Y) \leq 2^{k-1}\}.$$

Definição 1.3.3. *Sejam X e Y espaços de Banach e seja $u \in L(X, Y)$. O k-ésimo número de entropia de u é definido por*

$$e_k(u) = e_k(u(B_X), Y) = \inf\{\varepsilon > 0 : \; N(u(B_X), \varepsilon B_Y) \leq 2^{k-1}\}.$$

Proposição 1.3.4. *Sejam X e Y espaços de Banach, $X \subset Y$, X tem a norma induzida de Y, e sejam $A, B \subset X$, $B \subset A$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$,* *(i)* $e_n(A,X) \geq e_{n+1}(A,X)$;

(ii) $e_n(\alpha A,X) = |\alpha| e_n(A,X)$;

(iii) $e_n(B,X) \leq e_n(A,X)$;

(iv) $e_n(A,X) \geq e_n(A,Y)$.

Demonstração. A propriedade (i) segue imediatamente da definição de número de entropia. Temos que para $\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned} e_n(\alpha A,X) &= \inf\{\varepsilon > 0 : \alpha A \subset \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} (x_i + \varepsilon B_X);\ x_1,\ldots,x_{2^{n-1}} \in X\} \\ &= \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} (\frac{1}{\alpha} x_i + \frac{\varepsilon}{|\alpha|} B_X);\ x_1,\ldots,x_{2^{n-1}} \in X\} \\ &= \inf\{\varepsilon' |\alpha| : A \subset \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} (x_i' + \varepsilon' B_X);\ x_1',\ldots,x_{2^{n-1}}' \in X\} \\ &= |\alpha| e_n(A,X) \end{aligned}$$

e assim obtemos (ii). Como $B \subset A$, então $N(A,\varepsilon B_X) \geq N(B,\varepsilon B_X)$ e assim segue (iii). A propriedade (iv) segue do fato que $B_X \subset B_Y$ e assim $N(A,\varepsilon B_X) \geq N(A,\varepsilon B_Y)$. ■

Proposição 1.3.5. *Sejam X, Y e Z espaços de Banach, $u, v \in L(X,Y)$ e $w \in L(Y,Z)$. Então*

(i) $||u|| = e_1(u) \geq e_2(u) \geq \cdots \geq 0$;

(ii) $e_{k+l-1}(w \circ u) \leq e_k(w) e_l(u),\ k,l \in \mathbb{N}$;

(iii) $e_{k+l-1}(u+v) \leq e_k(u) + e_l(v),\ k,l \in \mathbb{N}$.

Demonstração. (i) Uma vez que para todo $x \in B_X$, $\|ux\| \leq \|u\|$, segue que

$$\begin{aligned} ||u|| &= \sup\{\|u(x)\| :\ x \in B_X\} \\ &= \inf\{\mu \geq 0 :\ u(B_X) \subset \mu B_Y\}, \end{aligned}$$

e portanto $e_1(u) \leq ||u||$.

Se $u(B_X) \subset b_0 + \mu B_Y$ para algum $b_0 \in Y$ e algum $\mu \geq 0$, então para qualquer $a \in B_X$ existem elementos $b_1, b_2 \in B_Y$ tais que $u(a) = b_0 + \mu b_1$ e $-u(a) = b_0 + \mu b_2$. Então $2||u(a)|| = \mu||(b_1 - b_2)|| \leq 2\mu$. Portanto, temos $||u|| \leq \mu$ e por conseguinte $||u|| \leq e_1(u)$.

(ii) Sejam $\mu > e_k(u)$ e $\beta > e_l(w)$. Então existem pontos $b_1, \ldots, b_M \in Y$ e $b'_1, \ldots, b'_N \in Z$ tais que

$$\begin{aligned} u(B_X) &\subset \bigcup_{i=1}^{M} (b_i + \mu B_Y), \\ w(B_Y) &\subset \bigcup_{i=1}^{N} (b'_i + \beta B_Z), \end{aligned}$$

onde $M \leq 2^{k-1}$ e $N \leq 2^{l-1}$. Dado qualquer $a \in B_X$, existe b_i tal que $u(a) \in b_i + \mu B_Y$ e portanto

$$\frac{1}{\mu}(u(a) - b_i) \in B_Y.$$

Com isto, existe b'_j tal que

$$w\left(\frac{1}{\mu}(u(a) - b_i)\right) \in b'_j + \beta B_Z.$$

Segue então que

$$\frac{1}{\mu} w(u(a)) - \frac{1}{\mu} w(b_i) \in b'_j + \beta B_Z,$$

ou seja,

$$w(u(a)) \in w(b_i) + \mu b'_j + \mu\beta B_Z.$$

Logo temos

$$(w \circ u)(B_X) \subset \bigcup_{j=1}^{M} \bigcup_{i=1}^{N} \left[(w(b_i) + \mu b'_j) + \mu\beta B_Z \right].$$

Como o número de pontos $(w(b_i) + \mu b'_j)$ com $i \in \{1, \cdots, M\}$ e $j \in \{1, \cdots, N\}$ é no máximo $MN \leq 2^{(k+l-1)-1}$, temos que $e_{k+l-1}(w \circ u) \leq \mu\beta$ e portanto segue o resultado.

(iii) Sejam $\mu > e_k(u)$ e $\beta > e_l(v)$. Então existem pontos $b_1, \ldots, b_M, b'_1, \ldots, b'_N \in Y$ tais que

$$u(B_X) \subset \bigcup_{i=1}^{M} (b_i + \mu B_Y), \quad v(B_X) \subset \bigcup_{j=1}^{N} (b'_j + \beta B_Y),$$

onde $M \leq 2^{k-1}$ e $N \leq 2^{l-1}$. Dado qualquer $a \in B_X$, existem pontos b_i, b'_j tais que $u(a) \in b_i + \mu B_Y$ e $v(a) \in b'_j + \beta B_Y$. Então

$$(u+v)(a) \in b_i + b'_j + \mu B_Y + \beta B_Y$$

e segue que

$$(u+v)(B_X) \subset \bigcup_{i=1}^{M} \bigcup_{j=1}^{N} \left[b_i + b'_j + (\mu + \beta) B_Y \right].$$

O número de pontos $b_i + b'_j$ com $i \in \{1, ..., M\}$ e $j \in \{1, ..., N\}$ é no máximo $MN \leq 2^{(k+l-1)-1}$. Temos que $e_{k+l-1}(w+u) \leq \mu + \beta$ e portanto segue o resultado. ■

Definição 1.3.6. *Sejam X e Y espaços de Banach e seja $u \in L(X, Y)$. Se o fecho de $u(B_X)$ é compacto em Y, dizemos que u é um operador compacto.*

Notação 1.3.7. *Seja A um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$. O volume de A será denotado por* $\mathrm{Vol}_n(A)$.

O resultado seguinte nos dá uma relação entre os números aproximados e os números de entropia, para operadores compactos.

Teorema 1.3.8. *Sejam X e Y espaços de Banach e seja $T \in L(X, Y)$ um operador compacto.*
(i) Suponhamos que para algum $c > 0$,

$$a_{2^{j-1}}(T) \leq c a_{2^j}(T), \; j \in \mathbb{N}.$$

Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$e_j(T) \leq C a_j(T), \; j \in \mathbb{N}.$$

(ii) Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ positiva e decrescente, e suponhamos que para algum $c > 0$,

$$f(2^j) \leq c f(2^{j-1}), \; j \in \mathbb{N}.$$

Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sup_{1 \leq j \leq n} f(j) e_j(T) \leq C \sup_{1 \leq j \leq n} f(j) a_j(T), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Por definição, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $L_j \in L(X,Y)$ tal que

$$\text{posto}(L_j) < 2^{j-1} \quad \text{e} \quad ||T - L_j|| \leq 2a_{2^{j-1}}(T),\ j \geq 2,\ L_1 = 0. \tag{1.1}$$

Deste modo,

$$\text{posto}(L_{j+1} - L_j) \leq \text{posto}(T - L_{j+1}) + \text{posto}(T - L_j) \leq 2^j + 2^{j-1} \leq 2^{j+1}$$

e pela Proposição 1.2.4 (i)

$$\|L_{j+1} - L_j\| \leq \|T - L_{j+1}\| + \|T - L_j\| \leq 2a_{2^j}(T) + 2a_{2^{j-1}}(T) \leq 4a_{2^{j-1}}(T). \tag{1.2}$$

Tomemos $m_j = \mu 2^j(k-j) \in \mathbb{N},\ 1 \leq j < k$ para algum $\mu > 0$ a ser escolhido mais tarde. Note que $i \leq 2 \cdot 2^{i/2}$ para $i \geq 1$ e assim

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k-1} m_j &= \mu 2^k \sum_{j=1}^{k-1} 2^{-(k-j)}(k-j) \\
&= \mu 2^k \sum_{i=1}^{k-1} 2^{-i} i \\
&\leq 2\mu 2^k \sum_{i=1}^{k-1} 2^{-i} 2^{i/2} \\
&\leq 2\mu 2^k \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-i/2} \\
&= \mu c_1 2^k,
\end{aligned}$$

para alguma constante $c_1 > 0$ tal que $\mu c_1 \in \mathbb{N}$. Representando T na forma

$$T = T - L_k + \sum_{j=1}^{k-1} (L_{j+1} - L_j)$$

e aplicando a Proposição 1.3.5 (iii), obtemos

$$\begin{aligned}
e_{\mu c_1 2^k} \leq e_m(T) &= e_m(T - L_k + \sum_{j=1}^{k-1}(L_{j+1} - L_j)) \\
&\leq \|T - L_k\| + e_m(\sum_{j=1}^{k-1}(L_{j+1} - L_j)) \\
&\leq \|T - L_k\| + \sum_{j=1}^{k-1} e_{m_j}((L_{j+1} - L_j)),
\end{aligned} \tag{1.3}$$

onde $m = \sum_{i=1}^{k-1} m_j$.

Seja posto$(L_{j+1} - L_j) = t_j$ e $B^{t_j} = B_Y \cap Im(L_{j+1} - L_j)$. Para cada $\delta_j = 2^{m_j - 1}$, seja $\{y_1^j, \dots, y_{\delta_j}^j\} \subset B^{t_j}$ um conjunto ε_{m_j}-separado maximal, $\varepsilon_{m_j} \leq 1$. Se $x \in B^{t_j}$ então $\{x, y_1^j, \dots, y_{\delta_j}^j\}$ não pode ser um conjunto ε_{m_j}-separado e assim existe $1 \leq l \leq \delta_j$ tal que $\left\|x - y_l^j\right\| \leq 1$. Desta forma, segue que $\{y_1^j, \cdots, y_{\delta_j}^j\}$ é uma ε_{m_j}-rede para B^{t_j}. Agora, se $x \in y_l^j + (\varepsilon_{m_j}/2)B^{t_j}$, então existe $y \in B^{t_j}$ tal que $x = y_l^j + (\varepsilon_{m_j}/2)y$ e assim $\|x\| \leq \left\|y_l^j\right\| + (\varepsilon_{m_j}/2)\|y\| \leq 1 + (\varepsilon_{m_j}/2)$. Portanto temos que

$$\bigcup_{k=1}^{2^{m_j-1}} \left(y_k^j + \frac{\varepsilon_{m_j}}{2} B^{t_j}\right) \subset \left(1 + \frac{\varepsilon_{m_j}}{2}\right) B^{t_j}.$$

Se $x \in \left(y_l^j + (\varepsilon_{m_j}/2)B^{t_j}\right) \cap \left(y_k^j + (\varepsilon_{m_j}/2)B^{t_j}\right)$ então existem $z_1, z_2 \in B^{t_j}$ tais que $x = y_l^j + (\varepsilon_{m_j}/2)z_1 = y_k^j + (\varepsilon_{m_j}/2)z_2$ e assim $\left\|y_l^j - y_k^j\right\| = (\varepsilon_{m_j}/2)\|z_1 - z_2\| \leq \varepsilon_{m_j}$, o que contradiz o fato de $\{y_1^j, \dots, y_{\delta_j}^j\}$ ser ε_{m_j}-separado. Portanto as bolas $y_l^j + (\varepsilon_{m_j}/2)B^{t_j}$, $1 \leq l \leq \delta_j$ são disjuntas e assim

$$\mathrm{Vol}_{t_j}\left(\bigcup_{k=1}^{2^{m_j-1}} \left(y_k^j + \frac{\varepsilon_{m_j}}{2} B^{t_j}\right)\right) \leq \mathrm{Vol}_{t_j}\left(\left(1 + \frac{\varepsilon_{m_j}}{2}\right) B^{t_j}\right),$$

portanto

$$2^{m_j-1}\mathrm{Vol}_{t_j}\left(y_k^j + \frac{\varepsilon_{m_j}}{2} B^{t_j}\right) \leq \mathrm{Vol}_{t_j}\left(\left(1 + \frac{\varepsilon_{m_j}}{2}\right) B^{t_j}\right).$$

Logo

$$2^{m_j-1}\left(\frac{\varepsilon_{m_j}}{2}\right)^{t_j} \mathrm{Vol}_{t_j}(B^{t_j}) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon_{m_j}}{2}\right)^{t_j} \mathrm{Vol}_{t_j}(B^{t_j}),$$

e, como $\varepsilon_{m_j} \leq 1$, segue que

$$\left(\frac{\varepsilon_{m_j}}{2\left(1 + \frac{1}{2}\right)}\right)^{t_j} \leq \left(\frac{\varepsilon_{m_j}}{2\left(1 + \frac{\varepsilon_{m_j}}{2}\right)}\right)^{t_j} \leq 2^{1-m_j}.$$

Assim $\varepsilon_{m_j}^{t_j} \leq 3^{t_j}.2^{1-m_j}$ e portanto $\varepsilon_{m_j} \leq 3.2^{(1-m_j)/t_j} \leq 62^{-m_j/t_j}$. Como $t_j \leq 2^{j+1}$ e $m_j = \mu 2^j(k-j)$,

$$\varepsilon_{m_j} \leq 6.2^{-\mu(k-j)/2}.$$

Note que se I_{t_j} é o operador identidade sobre $I_m(L_{j+1} - L_j)$, então obtemos

$$e_{m_j}(I_{t_j}) \leq \varepsilon_{m_j} \leq 6.2^{-\mu(k-j)/2},$$

pois $\{y_1^j, \ldots, y_{\delta_j}^j\}$ é uma ε_{m_j}-rede para B^{t_j}. Então por (1.2) e pela Proposição 1.3.5

$$\begin{aligned} e_{m_j}(L_{j+1} - L_j) &\leq e_{m_j}(I_{t_j} \circ (L_{j+1} - L_j)) \\ &\leq \|L_{j+1} - L_j\| \, e_{m_j}(I_{t_j}) \\ &\leq 24.2^{-\mu(k-j)/2} a_{2^{j-1}}(T). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Por hipótese, podemos demonstrar por indução que

$$a_{2^{j-1}}(T) \leq 2^{\kappa(k-j)} a_{2^{k-1}}(T), \quad j = 1, \ldots, k, \tag{1.5}$$

onde $\kappa = \log_2 c$ e c é a constante da hipótese. Inserindo (1.1), (1.4) e (1.5) em (1.3) obtemos

$$\begin{aligned} e_m(T) &\leq \|T - L_k\| + \sum_{j=1}^{k-1} e_{m_j}((L_{j+1} - L_j)) \\ &\leq 2a_{2^{k-1}}(T) + \sum_{j=1}^{k-1} 24.2^{-\mu(k-j)/2} a_{2^{j-1}}(T) \qquad (1.6) \\ &\leq 2a_{2^{k-1}}(T) + \sum_{j=1}^{k-1} 24.2^{-\mu(k-j)/2} 2^{\kappa(k-j)} a_{2^{k-1}}(T) \\ &= 2a_{2^{k-1}}(T) + 24a_{2^{k-1}}(T) \sum_{j=1}^{k-1} 2^{(-\mu/2-\kappa)(k-j)}. \end{aligned}$$

Escolhendo μ suficientemente grande, de forma que $\mu/2 - \kappa > 0$, segue que

$$\begin{aligned} e_{\mu c_1 2^k}(T) \leq e_m(T) &\leq 2a_{2^{k-1}}(T) + 24a_{2^{k-1}}(T) \sum_{j=1}^{k-1} 2^{(-\mu/2-\kappa)(k-j)} \\ &= (2 + 24c_2) a_{2^{k-1}}(T) \\ &= c' a_{2^{k-1}}(T). \end{aligned}$$

Se assumirmos $\mu c_1 = 2^{n_0}$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, segue por indução e por hipótese que

$$e_{2^{k+n_0}}(T) \leq c' a_{2^{k-1}}(T) \leq c' c^{n_0+1} a_{2^{k+n_0}}(T) = c'' a_{2^{k+n_0}}(T).$$

Finalmente, dado $j \in \mathbb{N}$, se $j > 2^{n_0}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^{k+n_0} \leq j \leq 2^{k+n_0+1}$. Assim pelas Proposições 1.2.4 (i) e 1.3.5 (i)

$$e_j(T) \leq e_{2^{k+n_0}}(T) \leq c'' a_{2^{k+n_0}}(T) \leq c'' c a_{2^{k+n_0}}(T) \leq c'' c a_j(T)$$

e se $j \leq 2^{n_0}$ temos que

$$e_j(T) \leq e_1(T) = a_1(T) \leq ca_2(T) \leq c^{n_0}a_{2^{n_0}}(T) \leq c^{n_0}a_j(T).$$

Tomando $C = \max\{c''c,\ c^{n_0}\}$, obtemos que para $j \in \mathbb{N}$,

$$e_j(T) \leq Ca_j(T).$$

Para demonstrar a segunda parte do teorema considere $b_k = \sup\{f(j)a_j(T) : \ j = 1, \cdots, 2^{k+n_0}\}$. Então

$$a_j(T) \leq b_k/f(j), \quad j = 1, \ldots, 2^{k+n_0}.$$

Podemos substituir $a_{2^{j-1}}(T)$ por $b_k/f(2^{j-1})$ na inequação (1.6) e obter

$$\begin{aligned} e_m(T) &\leq 2a_{2^{k-1}} + \sum_{j=1}^{k-1} 24.2^{-\mu(k-j)/2}a_{2^{j-1}}(T) \\ &\leq 2b_k/f(2^{k-1}) + \sum_{j=1}^{k-1} 24.2^{-\mu(k-j)/2}b_k/f(2^{j-1}). \end{aligned}$$

Por hipótese temos que

$$f(2^{k-1}) \leq c.f(2^{k-2}) \leq \cdots \leq c^{k-j}f(2^{j-1})$$

e assim

$$\frac{1}{f(2^{j-1})} \leq \frac{c^{k-j}}{f(2^{k-1})} = \frac{2^{\kappa(k-1)}}{f(2^{k-1})}.$$

Portanto, tomando μ suficientemente grande, obtemos

$$\begin{aligned} e_{2^{k+n_0}}(T) &\leq \frac{2b_k}{f(2^{k-1})} + 24\sum_{j=1}^{k-1}\frac{2^{-\mu(k-j)/2}b_k}{f(2^{j-1})} \\ &\leq \frac{2b_k}{f(2^{k-1})} + 24\sum_{j=1}^{k-1}\frac{2^{-(\mu/2-\kappa)(k-j)}b_k}{f(2^{k-1})} \\ &= \frac{c_2b_k}{f(2^{k-1})} \leq \frac{c_2b_kc^{n_0+1}}{f(2^{k+n_0})} = \frac{c_3b_k}{f(2^{k+n_0})}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$e_{2^{k+n_0}}(T) \leq c_3b_kf(2^{k+n_0})^{-1}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

onde $c_3 > 0$ independe de b_k. Seja $c' = \sup_{1\le j\le 2^{n_0}} e_j(T)f(j)$. Se $1 \le n \le 2^{n_0}$ temos que

$$\begin{aligned}
\sup_{1\le j\le n} e_j(T)f(j) &\le c' = \frac{c'}{a_1(T)f(1)}a_1(T)f(1) \\
&= c''a_1(T)f(1) \\
&\le c'' \sup_{1\le j\le n} a_j(T)f(j). \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Se $j > 2^{n_0}$, segue que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^{k+n_0} \le j \le 2^{k+n_0+1}$, e assim

$$e_j(T)f(j) \le e_{2^{k+n_0}}(T)f(2^{k+n_0}) \le cc_3b_k. \qquad (1.8)$$

Seja $C = \max\{cc_3,\ c''\}$. Se $n \ge 2^{n_0}$, ou seja, $2^{k+n_0} \le n \le 2^{k+n_0+1}$, por (1.7) e (1.8) temos que

$$\begin{aligned}
\sup_{1\le j\le n} e_j(T)f(j) &\le \sup_{1\le j\le 2^{k+n_0+1}} e_j(T)f(j) \\
&\le Cb_k \\
&= C \sup_{1\le j\le 2^{k+n_0}} a_j(T)f(j) \\
&\le \sup_{1\le j\le n} a_j(T)f(j).
\end{aligned}$$

■

Proposição 1.3.9. *Sejam X, X_1, Y, Y_1 espaços de Banach. Assumimos que X é isométrico a um quociente de X_1 e que Y é isométrico a um subespaço de Y_1. Denotamos por $q : X_1 \to X$ a aplicação quociente e por $j : Y \to Y_1$ a inclusão isométrica. Então para todo operador $u \in L(X, Y)$, temos*

$$e_k(u) = e_k(u \circ q), \quad k \ge 1$$

e

$$\frac{1}{2}e_k(u) \le e_k(j \circ u) \le e_k(u), \quad k \ge 1.$$

Demonstração. A primeira parte segue de $q(B_{X_1}) = B_X$, pois

$$\begin{aligned}
e_k(u \circ q) &= \inf\{\varepsilon > 0 : N(u\left(q(B_{X_1})\right), \varepsilon B_Y) \le 2^{k-1}\} \\
&= \inf\{\varepsilon > 0 : N(u(B_X)), \varepsilon B_Y) \le 2^{k-1}\} \\
&= e_k(u).
\end{aligned}$$

Além disso, $e_k(j \circ u) \leq ||j|| e_k(u) = e_k(u)$, pois $\|j\| = \sup\{\|j(y)\| : \|y\| \leq 1\} = 1$, o que demonstra o lado direito da desigualdade.

Para demonstrar o lado esquerdo da desigualdade, suponha que $j \circ u(B_X)$ seja coberto por 2^{k-1} bolas de raio ε em Y_1, ou seja

$$j \circ u(B_X) \subset \bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} (y_i + \varepsilon B_{Y_1}), \quad y_i \in Y_1.$$

Podemos supor sem perda de generalidade que $j \circ u(B_X) \cap (y_i + \varepsilon B_{Y_1}) \neq \emptyset$ para todo $1 \leq i \leq 2^{k-1}$. Para cada $1 \leq i \leq 2^{k-1}$ seja então $\bar{y}_i \in u(B_X) \subset Y$ tal que $j(\bar{y}_i) \in y_i + \varepsilon B_{Y_1}$ e consequentemente $\|j(\bar{y}_i) - y_i\| \leq \varepsilon$. Dado $b \in u(B_X)$, segue que $j(b) \in j \circ u(B_X)$ e logo $j(b) \in y_i + \varepsilon B_{Y_1}$ para algum $1 \leq i \leq 2^{k-1}$. Assim

$$\|j(b) - y_i\| < \varepsilon$$

e logo

$$\|b - \bar{y}_i\| = \|j(b) - j(\bar{y}_i)\| \leq \|j(b) - y_i\| + \|j(\bar{y}_i) - y_i\| < 2\varepsilon.$$

Portanto temos que

$$u(B_X) \subset \bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} (\bar{y}_i + 2\varepsilon B_Y), \quad \bar{y}_i \in Y,$$

ou seja, $e_k(u) \leq 2e_k(j \circ u)$. ■

1.4 Relação entre Número de Entropia e ε-Entropia

O n-ésimo número de entropia de um subconjunto K de X pode ser obtido, aproximadamente, resolvendo a equação $H_\varepsilon(K) = n - 1$. Na verdade, o que conseguimos demonstrar é que as funções $\varepsilon \mapsto H_\varepsilon(K)$ e $n \mapsto e_n(K)$ são aproximadamente uma inversa da outra no seguinte sentido:

$$n - 1 < H_\varepsilon(K) \leq n \implies e_{n+1}(K) \leq \varepsilon \leq e_n(K)$$

e

$$e_{n+1}(K) \leq \varepsilon \leq e_n(K) \implies n - 1 < H_\varepsilon(K) \leq n.$$

De fato, consideremos

$$N_\varepsilon(K) = \min\{m \in \mathbb{N} : K \subset \bigcup_{k=1}^{m}(x_k + \varepsilon B_X),\ x_1, \ldots, x_m \in X\},$$

$$N'_\varepsilon(K) = \min\{2^{n-1} : K \subset \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}(x_k + \varepsilon B_X),\ x_1, \ldots, x_{2^{n-1}} \in X\},$$

$$H_\varepsilon(K) = \log N_\varepsilon(K),$$

$$H'_\varepsilon(K) = \log N'_\varepsilon(K),$$

$$e_n(K) = \min\{\varepsilon : K \subset \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}(x_k + \varepsilon B_X),\ x_1, \ldots, x_{2^{n-1}} \in X\}.$$

Note que $2^{n-1} < N_\varepsilon(K) \leq 2^n \Longleftrightarrow N'_\varepsilon(K) = 2^n$ pois

$$\begin{aligned} 2^{n-1} < N_\varepsilon(K) \leq 2^n \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} K \subset \bigcup_{k=1}^{2^n}(x_k + \varepsilon B_X) & , \quad \text{para alguns } \ x_1, \ldots, x_{2^n} \in X, \\ K \not\subseteq \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}(x_k + \varepsilon B_X) & , \quad \text{para quaisquer } \ x_1, \ldots, x_{2^{n-1}} \in X \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad N'_\varepsilon(K) = 2^n, \end{aligned}$$

portanto $H'_\varepsilon(K) - 1 < H_\varepsilon(K) \leq H'_\varepsilon(K)$. Mostremos agora que $n - 1 < H_\varepsilon(K) \leq n \Longrightarrow e_{n+1}(K) \leq \varepsilon \leq e_n(K)$. Temos que

$$\begin{aligned} n - 1 < H_\varepsilon(K) \leq n \quad &\Leftrightarrow \quad N'_\varepsilon(K) = 2^n \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} K \subset \bigcup_{k=1}^{2^n}(x_k + \varepsilon B_X) & , \quad \text{para alguns } \ x_1, \ldots, x_{2^n} \in X, \\ K \not\subseteq \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}(x_k + \varepsilon B_X) & , \quad \text{para quaisquer } \ x_1, \ldots, x_{2^{n-1}} \in X, \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} e_{n+1}(K) \leq \varepsilon, \\ e_n(K) \geq \varepsilon. \end{cases} \end{aligned}$$

Reciprocamente temos que $e_{n+1}(K) < \varepsilon < e_n(K)$, pois

$$\begin{aligned} e_{n+1}(K) < \varepsilon < e_n(K) \quad &\Rightarrow \quad \begin{cases} K \subset \bigcup_{k=1}^{2^n}(x_k + \varepsilon B_X) & , \quad \text{para alguns } \ x_1, \ldots, x_{2^n} \in X, \\ K \not\subseteq \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}(x_k + \varepsilon B_X) & , \quad \text{para quaisquer } \ x_1, \ldots, x_{2^{n-1}} \in X, \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad N'_\varepsilon(K) = 2^n \Rightarrow H'_\varepsilon(K) = n \\ &\Rightarrow \quad H_\varepsilon(K) \leq H'_\varepsilon(K) = n \ \text{ e } \ H_\varepsilon(K) \geq H'_\varepsilon(K) - 1 = n - 1. \end{aligned}$$

Capítulo 2

Análise Harmônica na Esfera S^d

Este capítulo fornece pré-requisitos para os capítulos seguintes. Não nos preocuparemos aqui em exibir as demonstrações dos resultados, das Seções 2.1, 2.2, 2.3 e do Teorema de Multiplicadores da Seção 2.4, uma vez que elas se encontram em [8].

Na primeira seção definimos os harmônicos esféricos e enunciamos algumas de suas propriedades. Na segunda seção definimos os harmônicos zonais e exibimos resultados relacionados a eles. Já na terceira seção introduzimos o operator de Laplace-Beltrami que fornece uma caracterização para os espaços de harmônicos esféricos. Na quarta seção apresentamos o Teorema de Multiplicadores demonstrado em [5] e damos uma aplicação. Na última seção calculamos a dimensão de espaços de harmônicos esféricos, seguindo [5]. Além das referências já citadas, utilizamos também [7], [13], [14], [12].

Usaremos neste capítulo a notação

$$(a)_+ = \begin{cases} a & , \quad se \quad a > 0 \\ 0 & , \quad se \quad a \leq 0 \end{cases}$$

2.1 Harmônicos Esféricos

Notação 2.1.1. *O produto escalar usual entre $x, y \in \mathbb{R}^{d+1}$ será denotado por $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{d+1} x_k y_k$ e a norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ por $|||x||| = \langle x, x\rangle^{1/2}$. Denotaremos por S^d a* *esfera unitária* $\{x \in \mathbb{R}^{d+1} : |||x||| = 1\}$ *e a medida de Lebesgue normalizada sobre* S^d *por* μ.

Notação 2.1.2. *Denotaremos por* $SO(d+1)$ *o grupo formado por todas as rotações próprias em* $\mathbb{R}^{d+1}$. $SO(d+1)$ *pode ser identificado com o conjunto formado por todas as matrizes ortogonais de ordem* $(d+1) \times (d+1)$ *e com determinante igual a* 1, *munido da operação usual de multiplicação de matrizes.*

Notação 2.1.3. *Seja* (Ω, A, ν) *um espaço de medida, ou seja,* Ω *é um conjunto não-vazio,* A *é uma* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω *e* ν *é uma medida não-negativa sobre* A. *Se* $1 \leq p < \infty$, *denotaremos por* $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, A, \nu)$ *o espaço vetorial de todas as funções mensuráveis* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *tais que*

$$||f||_p = \left(\int_\Omega |f(w)|^p d\nu(w) \right)^{1/p} < \infty.$$

Denotaremos por $L^\infty(\Omega) = L^\infty(\Omega, A, \nu)$ *o espaço vetorial formado por todas as funções mensuráveis* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *para as quais existe uma constante* $C > 0$, *tal que* $|f(w)| \leq C$ *q.s.. Se* $f \in L^\infty(\Omega)$ *escrevemos*

$$||f||_\infty = \inf\{C : |f(w)| \leq C \quad q.t.p. \quad w \in \Omega\}.$$

Se $f, g \in L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$ *e* $f = g$ *q.s.,* f *e* g *serão considerados um mesmo elemento de* $L^p(\Omega)$. *Com esta identificação* $L^p(\Omega)$ *é um espaço de Banach com norma* $|| \cdot ||_p$.

Observação 2.1.4. *O grupo* $SO(d+1)$ *age transitivamente sobre* S^d, *isto é, dados* $x, y \in S^d$, *existe* $u \in SO(d+1)$ *tal que* $ux = y$. *A medida de Lebesgue* μ *sobre* S^d *é invariante por rotações, isto é,* $\mu(u(A)) = \mu(A)$ *para todo* $u \in SO(d+1)$ *e todo subconjunto mensurável* A *de* S^d. *Se* $f \in L^1(S^d)$ *e* $u \in SO(d+1)$, *então*

$$\int_{S^d} f(uy) d\mu(y) = \int_{S^d} f(y) d\mu(y).$$

Definição 2.1.5. *Dizemos que uma função* $f : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{C}$ *é homogênea de grau* $k \in \mathbb{Z}$ *se* $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ *para qualquer* $\lambda > 0$ *e* $x \in \mathbb{R}^{d+1}$.

Notação 2.1.6. *Denotaremos por* $\mathcal{P}$ *o conjunto de todos os polinômios definidos sobre* $\mathbb{R}^{d+1}$ *e por* $\mathcal{P}_k$ *o subconjunto de* $\mathcal{P}$ *formado pelos polinômios que são homogêneos de grau* k.

Teorema 2.1.7. *Para todo* $k \geq 0$, $\mathcal{P}_k$ *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{P}$ *e*

$$\dim \mathcal{P}_k = \begin{pmatrix} d+k \\ k \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Notação 2.1.8. *Seja Δ o operador laplaciano em $\mathbb{R}^{d+1}$ e seja $k \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $\mathcal{A}_k$ o subespaço vetorial de $\mathcal{P}_k$ formado pelos polinômios harmônicos e homogêneos de grau k, isto é,*

$$\mathcal{A}_k = \{p \in \mathcal{P}_k : \Delta p = 0\}.$$

Definição 2.1.9. *Um harmônico esférico de grau k é a restrição à esfera S^d de um elemento de $\mathcal{A}_k$. Denotaremos por $\mathcal{H}_k$ o conjunto dos harmônicos esféricos de grau k.*

Teorema 2.1.10. *Temos que* $\dim \mathcal{H}_0 = 1, \quad \dim \mathcal{H}_1 = d+1$ *e*

$$\dim \mathcal{H}_k = \begin{pmatrix} d+k \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d+k-2 \\ k-2 \end{pmatrix} = a_k, \quad k \geq 2. \tag{2.2}$$

Teorema 2.1.11. *Toda função contínua sobre S^d pode ser aproximada uniformemente por combinações lineares finitas de harmônicos esféricos.*

Corolário 2.1.12. *O espaço vetorial gerado pela união $\cup_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$ é denso em $L^p(S^d)$, $1 \leq p < \infty$.*

Notação 2.1.13. *Sejam $f, g \in L^2(S^d)$. Denotaremos por (f,g) o produto interno usual de f por g em $L^2(S^d)$, isto é,*

$$(f,g) = \int_{S^d} f(x)\overline{g(x)} d\mu(x).$$

Teorema 2.1.14. *Para $k, l \geq 0$, $k \neq l$, temos $\mathcal{H}_k \perp \mathcal{H}_l$ em relação ao produto interno $(\cdot,\cdot)$.*

Corolário 2.1.15. *Se $f \in L^2(S^d)$, então f admite uma única representação na forma*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y^{(k)}(x),$$

onde a série acima converge para f na norma de $L^2(S^d)$ e $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$. Além disso

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left\|Y^{(k)}\right\|_2^2.$$

2.2 Harmônicos Zonais

Definição 2.2.1. *Fixemos $x \in S^d$ e consideremos o funcional linear $L_x^{(k)}$ sobre $\mathcal{H}_k$ que a cada elemento $Y \in \mathcal{H}_k$ associa o valor $L_x^{(k)}(Y) = Y(x)$. Como $\mathcal{H}_k$ é um espaço de Hilbert* *munido do produto interno* $(\cdot,\cdot)$ *de* $L^2(S^d)$*, existe um único harmônico esférico* $Z_x^{(k)} \in \mathcal{H}_k$ *tal que*

$$Y(x) = L_x^{(k)}(Y) = \left(Y, \overline{Z_x^{(k)}}\right) = \int_{S^d} Y(y) Z_x^{(k)}(y) d\mu(y)$$

para todo $Y \in \mathcal{H}_k$*. Dizemos que* $Z_x^{(k)}$ *é o harmônico zonal de grau* k *e polo* x*.*

Lema 2.2.2. *(a) Se* $\{Y_1^{(k)}, \ldots, Y_{a_k}^{(k)}\}$ *é uma base ortonormal de* $\mathcal{H}_k$*, então*

$$Z_x^{(k)}(y) = \sum_{j=1}^{a_k} \overline{Y_j^{(k)}(x)} Y_j^{(k)}(y).$$

(b) $Z_x^{(k)}$ *assume somente valores reais e* $Z_x^{(k)}(y) = Z_y^{(k)}(x)$*.*

(c) Se $u \in SO(d+1)$ *então* $Z_{ux}^{(k)}(uy) = Z_x^{(k)}(y)$*.*

Corolário 2.2.3. *(a)* $Z_x^{(k)}(x) = \dim \mathcal{H}_k = a_k$*, para* $x \in S^d$*.*

(b) $\sum_{j=1}^{a_k} \left| Y_j^{(k)}(x) \right|^2 = a_k$*, para* $x \in S^d$*.*

(c) $\left| Z_x^{(k)}(y) \right| \leq a_k$*, para* $x, y \in S^d$*.*

Definição 2.2.4. *Seja* $\lambda > 0$*. Os polinômios* $P_k^\lambda(t), -1 \leq t \leq 1, k \geq 0$*, dados por*

$$P_k^\lambda(t) = \sum_{l+j=k} a_l a_j (t - i\sqrt{1-t^2})^l (t + i\sqrt{1-t^2})^j,$$

onde $a_0 = 1$ *e*

$$a_k = \frac{\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+k-1)}{k!}, \quad k \geq 1,$$

são chamados de polinômios ultraesféricos ou de Gegenbauer.

Teorema 2.2.5. *(a)* $(1 - 2rt + r^2)^{-\lambda} = \sum_{k=0}^\infty P_k^\lambda(t) r^k$ *. A série converge uniformemente para todo* $r \in \mathbb{R},\ |r| \leq r_0$*, onde* $r_0, t \in \mathbb{R},\ 0 < r_0 < 1$ *e* $|t| \leq 1$ *são fixos.*

(b) $P_0^\lambda(t) = 1, |t| \leq 1$*.*

(c) $\frac{d}{dt} P_k^\lambda(t) = 2P_{k-1}^{\lambda+1}(t),\ |t| \leq 1$*.*

(d) $P_k^\lambda(t)$ *é um polinômio de grau* $k,\ k \geq 0$*.*

(e) As combinações lineares finitas de P_k^λ*, formam um subconjunto denso no espaço das funções contínuas sobre o intervalo* $[-1,1]$ *com a métrica da convergência uniforme.*

(f) $P_k^\lambda(-t) = (-1)^k P_k^\lambda(t),\ |t| \leq 1,\ k \geq 0$*.*

Teorema 2.2.6. *Sejam $d \geq 2, \lambda = (d-1)/2$ e $k \geq 0$. Então para todo $x, y \in S^d$ temos*

$$Z_y^{(k)}(x) = \frac{d+2k-1}{d-1} P_k^{\lambda}(\langle x, y \rangle).$$

Corolário 2.2.7. *Os polinômios $P_k^{(d-1)/2}(t)$, $k \geq 0$ são mutuamente ortogonais com respeito ao produto interno*

$$[f, g] = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)^{(d-2)/2} dt.$$

Corolário 2.2.8. *Os polinômios $P_k^{(d-1)/2}(t)$, $k \geq 0$ formam uma base ortogonal para o espaço $L^2([-1,1], (1-t^2)^{(d-2)/2}dt)$.*

Teorema 2.2.9 (Teorema da Adição)**.** *Se $\{Y_1^{(k)}, \dots, Y_{a_k}^{(k)}\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_k$, $k \geq 0$, então*

$$\sum_{j=1}^{a_k} \overline{Y_j^{(k)}(x)} Y_j^{(k)}(y) = Z_x^{(k)}(y) = \frac{d+2k-1}{d-1} P_k^{(d-1)/2}(\cos\theta),$$

onde θ é o ângulo entre x e y.

Definição 2.2.10. *Seja $K(t)$ uma função mensurável definida sobre $[-1,1]$ e seja $\bar{K}(x) = K(\langle x, e \rangle), x \in S^d$ onde $e = e_{d+1} = (0, \dots, 0, 1)$. Se $\bar{K}, f \in L^1(S^d)$, definimos a convolução $K * f$ por*

$$K * f(x) = \int_{S^d} K(\langle x, y \rangle) f(y) d\mu(y).$$

Observação 2.2.11. *Se $K \in L^1([-1,1], (1-t^2)^{(d-2)/2}dt)$ então*

$$\int_{S^d} K(\langle x, y \rangle) d\mu(y) = \frac{\omega_{d-1}}{\omega_d} \int_{-1}^{1} K(t)(1-t^2)^{(d-2)/2} dt$$

onde ω_d é a área de S^d.

Teorema 2.2.12 (Desigualdade de Young, [14], p. 31)**.** *Seja $K(t)$ uma função mensurável definida sobre $[-1,1]$, $\bar{K}(x) = K(\langle x, e \rangle)$ e sejam $1 \leq r, p, q \leq \infty$ tais que $1 - 1/r = 1/p - 1/q$. Se $\bar{K} \in L^r(S^d)$ e $f \in L^p(S^d)$, então $K * f(x) \in L^q(S^d)$ e*

$$||K * f||_q \leq \left\|\bar{K}\right\|_r \|f\|_p.$$

Notação 2.2.13. *Denotamos por $\widetilde{Z}^{(k)}(t)$ a função*

$$\widetilde{Z}^{(k)}(t) = \frac{d+2k-1}{d-1} P_k^{(d-1)/2}(t),$$

e se $e = e_{d+1} = (0, 0, \cdots, 0, 1)$ *é o polo norte de* S^d *e* $f \in L^2(S^d)$*, definimos a convolução* $Z_e^{(k)} * f$ *por*

$$Z_e^{(k)} * f(x) = \widetilde{Z}^{(k)} * f(x) = \int_{S^d} \widetilde{Z}^{(k)}(\langle x, y\rangle) f(y) d\mu(y) = \int_{S^d} Z_x^{(k)}(y) f(y) d\mu(y).$$

Teorema 2.2.14. *Se* $f \in L^2(S^d)$*, então*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_e^{(k)} * f(x),$$

onde a série acima converge para f *na norma de* $L^2(S^d)$ *e* $Z_e^{(k)} * f(x) \in \mathcal{H}_k$*.*

2.3 Operador de Laplace-Beltrami

Definição 2.3.1. *Seja* f *uma função definida sobre* S^d *e seja* $E_0 f$ *a função definida sobre* $\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$ *por* $E_0 f(x) = f(x/|x|)$, $x \neq 0$*. Se* g *é uma função definida numa vizinhança de* S^d*, denotaremos por* Rg *a restrição de* g *à esfera* S^d*. O laplaciano esférico ou operador de Laplace-Beltrami* Δ_S *é definido por*

$$\Delta_S f = R\Delta E_0 f.$$

Lema 2.3.2. *Sejam* f*,* g *duas funções de* $L^2(S^d)$ *tais que* $\Delta_S f$ *e* $\Delta_S g$ *estejam bem definidas e sejam funções de* $L^2(S^d)$*. Então*

$$\int_{S^d} f \Delta_S g d\mu = \int_{S^d} g \Delta_S f d\mu,$$

isto é, o operador de Laplace-Beltrami Δ_S *é um operador auto-adjunto em relação ao produto interno de* $L^2(S^d)$*.*

Teorema 2.3.3. *Para cada* $k \in \mathbb{N}$*,* $\mathcal{H}_k$ *é o espaço vetorial dos autovetores do operador de Laplace-Beltrami* Δ_S *associados ao autovalor* $-k(d + k - 1)$*.*

Teorema 2.3.4 (Fórmula de Funk-Hecke)**.** *Se* $K \in L^1([-1, 1], (1-t^2)^{(d-2)/2} dt)$ *e* $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$*, então*

$$\int_{S^d} K(\langle x, y\rangle) Y^{(k)}(y) d\mu(y) = \lambda_k Y^{(k)}(x)$$

onde

$$\lambda_k = \frac{\omega_{d-1}}{\omega_d P_k^{(d-1)/2}(1)} \int_{-1}^{1} K(t) P_k^{(d-1)/2}(t)(1-t^2)^{(d-2)/2} dt.$$

2.4 Teorema de Multiplicadores

Notação 2.4.1. *Denotaremos a bola unitária de* $L^p(S^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, *por* $U_p = \{\phi \in L^p(S^d) : \|\phi\|_p \leq 1\}$.

Definição 2.4.2. *Seja* $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de números complexos e sejam* $1 \leq p, q \leq \infty$. *Se para toda* $\varphi \in L^p(S^d)$ *existe uma função* $f = \Lambda\varphi \in L^q(S^d)$ *com expansão formal em harmônicos esféricos*

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \widetilde{Z}^{(k)} * \varphi$$

tal que

$$\|\Lambda\|_{p,q} = \sup_{\varphi\in U_p} \|\Lambda\varphi\|_q < \infty,$$

dizemos que Λ *é um operador multiplicador limitado de* L^p *em* L^q *com norma* $\|\Lambda\|_{p,q}$.

Notação 2.4.3. *Para* $m, k \in \mathbb{N}$ *denotamos*

$$C_k^m = \frac{(m+k)!}{m!k!}.$$

Definição 2.4.4. *Seja* $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência numérica. Definimos* $\Delta^0\lambda_k = \lambda_k$, $\Delta^1\lambda_k = \lambda_k - \lambda_{k+1}$ *e definimos indutivamente*

$$\Delta^{n+1}\lambda_k = \Delta^n\lambda_k - \Delta^n\lambda_{k+1}.$$

Proposição 2.4.5. *Seja* $f(x)$ *uma função real definida para* $x \geq 0$ *e com derivadas até a ordem* n. *Se* $\lambda_k = f(x+k)$, *escrevemos* $\Delta^1 f(x) = \Delta^1\lambda_0 = f(x) - f(x+1)$ *e* $\Delta^{n+1}f(x) = \Delta^n f(x) - \Delta^n f(x+1) = \Delta^n\lambda_0 - \Delta^n\lambda_1$. *Então*

$$\Delta^n f(x) = (-1)^n \int_0^1 \dots \int_0^1 f^{(n)}(x + t_1 + \cdots t_n) dt_1 \dots dt_n$$

e

$$|\Delta^n f(x)| \leq \max_{0\leq t\leq n} |f^{(n)}(x+t)|.$$

Definição 2.4.6. *As somas de Cesàro* S_n^δ, $n, \delta \in \mathbb{N}$, *relativas à sequência* $\left\{\tilde{Z}^{(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$, *são definidas por*

$$S_n^\delta(t) = \frac{1}{C_n^\delta} \sum_{m=0}^{n} C_{n-m}^\delta \tilde{Z}^{(m)}(t), \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Teorema 2.4.7 ([5]). *Seja*

$$N = \begin{cases} (d+1)/2, & d = 3, 5, \cdots, \\ (d+2)/2, & d = 2, 4, \cdots, \end{cases}$$

e seja $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de números complexos. Sejam* $1 \leq r, p, q \leq \infty$ *tal que* $1 - \frac{1}{r} = (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+$*, onde se* $a \in \mathbb{R}^n, a_+ = \max\{a, 0\}$*. Suponhamos que*

$$\lim_{k\to\infty} |\Delta^s \lambda_k|\, k^s = 0,\ \ 0 \leq s \leq N \tag{2.3}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\Delta^{N+1}\lambda_n\right| n^{N+d(1-1/r)} < \infty. \tag{2.4}$$

Então existe uma constante positiva C *tal que*

$$\|\Lambda\|_{p,q} \leq |\lambda_0| + C\sum_{n=1}^{\infty} \left|\Delta^{N+1}\lambda_n\right| n^{N+d(1-1/r)}.$$

Além disso, se $\varphi \in L^p(S^d)$ *e*

$$t_n(\varphi) = \lambda_0 C_0 + \left(\sum_{k=1}^{n} C_k^N S_k^N \Delta^{N+1}\lambda_k\right) * \varphi$$

temos que

$$\|\Lambda\varphi - t_n(\varphi)\|_q \leq C \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\Delta^{N+1}\lambda_k\right| k^{N+d(1-1/r)} \|\varphi\|_p .$$

Proposição 2.4.8. *Seja* $\Lambda^{(1)} = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$*, onde* $\lambda_k = k^{-\gamma},\ \gamma \in \mathbb{R},\ \gamma > 0$*, e sejam* $1 \leq p, q \leq \infty$ *tal que* $\gamma > d(1/p - 1/q)_+$*. Então* $\Lambda^{(1)}$ *é um operador multiplicador limitado de* L^p *em* L^q*.*

Demonstração. Denotando $f(k) = \lambda_k$, pela Proposição 2.4.5, temos que

$$\begin{aligned} |\Delta^s \lambda_k| &= |\Delta^s f(k)| \leq \max_{0\leq t\leq s} |f^{(s)}(k+t)| \\ &= \max_{k\leq t\leq k+s} |f^{(s)}(t)| = \max_{k\leq t\leq k+s} |-\gamma(-\gamma-1)\cdots(-\gamma-(s-1))| t^{-\gamma-s} \\ &= \max_{k\leq t\leq k+s} C_{\gamma,s} t^{-\gamma-s} = C_{\gamma,s} k^{-\gamma-s}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Logo $|\Delta^s\lambda_k| k^s \leq C_{\gamma,s} k^{-\gamma}$, onde $\lim_{k\to\infty} |\Delta^s \lambda_k| k^s = 0,\ 0 \leq s \leq N$ e portanto a condição (2.3) do Teorema 2.4.7 é satisfeita.

Agora, seja $\gamma = \varepsilon + d(1/p - 1/q)_+$, $\varepsilon > 0$ e $1 \le r, p, q \le \infty$ tal que $1 - 1/r = (1/p - 1/q)_+$. Temos por (2.5) que

$$|\Delta^{N+1}\lambda_k| \le C_{\gamma,N+1} k^{-d(1-1/r)-N-(1+\varepsilon)}$$

e então

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta^{N+1}\lambda_k| k^{N+d(1-1/r)} \le C_{\gamma,N+1} \sum_{k=0}^{\infty} k^{-(1+\varepsilon)} \le \infty,$$

onde a condição (2.4) do Teorema 2.4.7 é satisfeita e portanto o operador $\Lambda^{(1)}$ é limitado de L^p em L^q. ■

Proposição 2.4.9. *Seja* $\Lambda^{(2)} = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, *onde* $\lambda_k = e^{-\gamma k^r}$, $\gamma, r \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, $0 < r < 1$. *Então* $\Lambda^{(2)}$ *é um operador multiplicador limitado de* L^p *em* L^q*, para todos* $1 \le p, q \le \infty$.

Demonstração. Como para futuras aplicações estamos interessados apenas na limitação do operador multiplicador $\Lambda^{(2)}$ e não na constante que fornece esta limitação, demonstraremos o resultado fazendo uso de técnicas mais simples sem utilizar para isso o Teorema 2.4.7. Faremos a demonstração para $p = 1$ e $q = \infty$ e os demais casos seguirão das relações entre as normas de L^p, $1 \le p \le \infty$ e entre as normas de L^q, $1 \le q \le \infty$.

Se $\varphi \in U_1$, então

$$\Lambda^{(2)}\varphi(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \tilde{Z}^{(k)} * \varphi(x).$$

Denotando $d_k = \lambda_k \tilde{Z}^{(k)} * \varphi(x)$, obtemos da Desigualdade de Hölder, do Corolário 2.2.3 (c) e do fato que $a_k \le C k^{d-1}$ (Teorema 2.1.10), obtemos

$$\begin{aligned}
|d_k| &= \left|\lambda_k \tilde{Z}^{(k)} * \varphi(x)\right| = |\lambda_k| \left|\int_{S^d} Z_x^{(k)}(y)\varphi(y)d\mu(y)\right| \\
&\le |\lambda_k| \, \|\varphi\|_1 \left\|Z_x^{(k)}\right\|_\infty \le |\lambda_k| a_k \\
&\le C\lambda_k k^{d-1} = C e^{-\gamma k^r} k^{d-1}. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Definimos $f(x) = Ce^{-\gamma x^r} x^{2(d-1)}$. Então $f'(x) = -C\gamma r e^{-\gamma x^r} x^{2(d-1)+r-1} + 2C(d-1)e^{-\gamma x^r} x^{2(d-1)-1}$, e assim

$$f'(x) \le 0 \Leftrightarrow x \ge \left(\frac{d+1}{\gamma r}\right)^{1/r}.$$

Tomando $\bar{C} = f\left(\left(\frac{d+1}{\gamma r}\right)^{1/r}\right)$, temos $f(k) \le \bar{C}$ para $k \ge \left(\frac{d+1}{\gamma r}\right)^{1/r}$, ou seja, $Ce^{-\gamma x^r} x^{2(d-1)} \le \bar{C} \Rightarrow Ce^{-\gamma k^r} k^{(d-1)} \le \bar{C} k^{-2}$. De (2.6) temos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\lambda_k \tilde{Z}^{(k)} * \varphi(x)\right| = \sum_{k=0}^{\infty} |d_k| \le \bar{C} \sum_{k=0}^{\infty} k^{-2}.$$

Assim

$$\left\|\Lambda^{(2)}\varphi\right\|_{\infty} = \sup_{x\in S^d}\sum_{k=0}^{\infty}|d_k| \leq \bar{C}\sum_{k=0}^{\infty}k^{-2} \leq \bar{\bar{C}},$$

já que $\sum_{k=0}^{\infty}k^{-2}$ é convergente. Consequentemente o operador multiplicador $\Lambda^{(2)}$ é limitado de L^1 em L^∞ e portanto de L^p em L^q, para todos $1 \leq p, q \leq \infty$. ■

2.5 Dimensão de Espaços de Harmônicos Esféricos

Definição 2.5.1. *Sejam $\alpha, \beta > -1$. Os Polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ podem ser definidos através de uma função geradora por*

$$2^{\alpha+\beta}R^{-1}(1-z+R)^{-\alpha}(1+z+R)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(\alpha,\beta)}(t)z^n,$$

onde $R = (1-2tz+z^2)^{1/2}$.

Lema 2.5.2. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta \geq -1/2$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$ temos*

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)} \asymp n^\alpha$$

e

$$P_n^{\lambda}(t) = \frac{\Gamma(\lambda+1/2)\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda+1/2)}P_n^{(\lambda-1/2,\lambda-1/2)}(t),\ -1 \leq t \leq 1.$$

Lema 2.5.3 ([12], p. 71)**.** *Seja*

$$K_N^{(\alpha,\beta)}(x,y) = \sum_{k=0}^{N}\frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(x)P_k^{(\alpha,\beta)}(y)}{\left\|P_k^{(\alpha,\beta)}\right\|_2^2},$$

onde

$$\left\|P_k^{(\alpha,\beta)}\right\|_2^2 = \int_{-1}^{1}\left|P_k^{(\alpha,\beta)}(t)\right|^2(1-t)^\alpha(1+t)^\beta dt.$$

Então

$$K_N^{(\alpha,\beta)}(x,1) = 2^{-\alpha-\beta-1}\frac{\Gamma(N+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(N+\beta+1)}P_N^{(\alpha+1,\beta)}(x). \tag{2.7}$$

Lema 2.5.4. *Seja* $\mathcal{T}_N = \oplus_{k=0}^{N}\mathcal{H}_k$. *Então*

$$\dim\mathcal{T}_N = \frac{2}{d!}\frac{(N+d-1)!(N+d/2)}{N!}. \tag{2.8}$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.9 temos que

$$\sum_{j=1}^{a_k}\overline{Y_j^{(k)}(x)}Y_j^{(k)}(y) = \widetilde{Z}^{(k)}(\langle x,y\rangle) \tag{2.9}$$

onde $\widetilde{Z}^{(k)}(t)$ é a função

$$\widetilde{Z}^{(k)}(t) = \frac{d+2k-1}{d-1}P_k^{(d-1)/2}(t).$$

Tomando $x=y$ e integrando em ambos os lados de (2.9) obtemos

$$\int_{S^d}\sum_{m=1}^{a_k}\left|Y_m^{(k)}(x)\right|^2 d\mu(x) = \int_{S^d}\tilde{Z}^{(k)}(1)d\mu(x) = \widetilde{Z}^{(k)}(1).$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z}^{(k)}(1) &= \frac{d+2k-1}{d-1}P_k^{(d-1)/2}(1)\\
&= \frac{d+2k-1}{d-1}\frac{\Gamma(d/2)\Gamma(k+d-1)}{\Gamma(d-1)\Gamma(k+d/2)}P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(1)\\
&= (d+2k-1)\frac{\Gamma(d/2)\Gamma(k+d-1)}{\Gamma(d)\Gamma(k+d/2)}P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(1)\\
&= C_kP_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(1)
\end{aligned}$$

onde $C_k = (d+2k-1)\dfrac{\Gamma(d/2)\Gamma(k+d-1)}{\Gamma(d)\Gamma(k+d/2)}$. Assim

$$\int_{S^d}\sum_{m=1}^{a_k}\left|Y_m^{(k)}(x)\right|^2 d\mu(x) = C_kP_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(1).$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
a_k &= \dim\mathcal{H}_k = \sum_{j=1}^{a_k}1\\
&= \sum_{j=1}^{a_k}\int_{S^d}\left|Y_j^{(k)}(x)\right|^2 d\mu(x)\\
&= \int_{S^d}\sum_{j=1}^{a_k}\left|Y_j^{(k)}(x)\right|^2 d\mu(x)
\end{aligned}$$

e portanto

$$a_k = C_k P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(1). \tag{2.10}$$

Tomando o quadrado em ambos os lados de (2.9) e então integrando com respeito a x obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{S^d} \left(\sum_{m=1}^{a_k} Y_m^{(k)}(x) \overline{Y_m^{(k)}}(y) \right)^2 d\mu(x) &= \int_{S^d} \left(\widetilde{Z}^{(k)}(\langle x, y \rangle) \right)^2 d\mu(x) \\
&= \int_{S^d} \left(C_k P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(\langle x, y \rangle) \right)^2 d\mu(x) \\
&= C_k^2 \int_{S^d} \left(P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(\langle x, y \rangle) \right)^2 d\mu(x).
\end{aligned}$$

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned}
\int_{S^d} \left(\sum_{m=1}^{a_k} Y_m^{(k)}(x) \overline{Y_m^{(k)}(y)} \right)^2 d\mu(x) &= \int_{S^d} \left(\sum_{j=1}^{a_k} Y_j^{(k)}(x) \overline{Y_j^{(k)}}(y) \right) \left(\sum_{i=1}^{a_k} Y_i^{(k)}(x) \overline{Y_i^{(k)}}(y) \right) d\mu(x) \\
&= \sum_{j=1}^{a_k} \sum_{i=1}^{a_k} Y_j^{(k)}(y) \overline{Y_i^{(k)}}(y) \int_{S^d} \left(Y_i^{(k)}(x) \overline{Y_j^{(k)}}(x) \right) d\mu(x) \\
&= \sum_{j=1}^{a_k} \sum_{i=1}^{a_k} Y_j^{(k)}(y) \overline{Y_i^{(k)}}(y) \delta_{i,j} \\
&= \sum_{j=1}^{a_k} Y_j^{(k)}(y) \overline{Y_j^{(k)}}(y) \\
&= \sum_{j=1}^{a_k} |Y_j^{(k)}(y)|^2
\end{aligned}$$

e portanto

$$\sum_{j=1}^{a_k} \left| Y_j^{(k)}(y) \right|^2 = C_k^2 \int_{S^d} \left(P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(\langle x, y \rangle) \right)^2 d\mu(x). \tag{2.11}$$

Segue da Observação 2.2.11

$$\int_{S^d} \left(P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(\langle x, y \rangle) \right)^2 d\mu(x) = c^{-1} \left\| P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)} \right\|_2^2,$$

onde $c = \omega_d / \omega_{d-1} = 2^{d-1} (\Gamma(d/2))^2 / (d-1)!$ e

$$\left\| P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)} \right\|_2^2 = \int_{-1}^{1} \left(P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(t) \right)^2 (1 - t^2)^{(d-2)/2} dt.$$

Integrando (2.11) com respeito a y encontramos

$$\begin{aligned}
\int_{S^d} \sum_{j=1}^{a_k} \left| Y_j^{(k)}(y) \right|^2 d\mu(y) &= \int_{S^d} C_k^2 \int_{S^d} \left(P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(\langle x, y \rangle) \right)^2 d\mu(x) d\mu(y) \\
&= C_k^2 \int_{S^d} c^{-1} \left\| P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)} \right\|_2^2 d\mu(y) \\
&= C_k^2 c^{-1} \left\| P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)} \right\|_2^2
\end{aligned}$$

e assim, usando (2.10) obtemos

$$C_k P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(1) = C_k^2 c^{-1} \left\| P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)} \right\|_2^2$$

ou seja

$$C_k = c \cdot \frac{P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(1)}{\left\| P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)} \right\|_2^2}.$$

Substituindo C_k em (2.10), obtemos

$$a_k = \dim \mathcal{H}_k = 2^{d-1} \frac{(\Gamma(d/2))^2}{(d-1)!} \cdot \frac{(P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(1))^2}{\left\| P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)} \right\|_2^2} \tag{2.12}$$

e portanto

$$\dim \mathcal{T}_N = \sum_{k=0}^{N} \dim \mathcal{H}_k = 2^{d-1} \frac{(\Gamma(d/2))^2}{(d-1)!} \sum_{k=0}^{N} \frac{(P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(1))^2}{\left\| P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)} \right\|_2^2}. \tag{2.13}$$

Observe que

$$K_N^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(1,1) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(1))^2}{\left\| P_k^{((d-2)/2,(d-2)/2)} \right\|_2^2},$$

e assim pelos Lemas 2.5.3 e 2.5.2 temos que

$$\begin{aligned}
K_N^{((d-2)/2,(d-2)/2)}(1,1) &= 2^{-(d-1)} \frac{(N+d-1)!}{\Gamma(d/2)\Gamma(N+d/2)} P_N^{(d/2,(d-2)/2)}(1) \\
&= 2^{-(d-1)} \frac{(N+d-1)!}{\Gamma(d/2)\Gamma(N+d/2)} \frac{\Gamma(N+d/2+1)}{\Gamma(d/2+1)N!}. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Portanto substituindo (2.14) em (2.13) obtemos

$$\dim \mathcal{T}_N = \frac{2(N+d-1)!(N+d/2)}{d!N!}, \tag{2.15}$$

como queríamos. ∎

Lema 2.5.5. *Temos que*

$$\dim H_k = Ek^{d-1} + b_1 k^{d-2} + \cdots + b_{d-1}, \tag{2.16}$$

$$\dim \mathcal{T}_N = F(N+1)^d + c_1(N+1)^{d-1} + \cdots + c_d \tag{2.17}$$

e

$$\frac{1}{\dim \mathcal{T}_N} \geq \frac{1}{FN^d} - \frac{C}{F^2 N^{d+1}}, \tag{2.18}$$

onde

$$E = \frac{2}{(d-1)!}, \quad F = \frac{2}{d!},$$

$b_1, \cdots, b_{d-1}, c_1, \cdots, c_d$ *e* C *são constantes não-negativas.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.1.10.

$$\begin{aligned}
\dim H_k &= \binom{d+k}{d} - \binom{d+k-2}{k-2} \\
&= \frac{(d+k)!}{d!k!} - \frac{(d+k-2)!}{d!(k-2)!} \\
&= \frac{(d+k-2)!(d+k-1)(d+k)}{d!k!} - \frac{(d+k-2)!(k-1)k}{d!k!} \\
&= \frac{(2k+d-1)(k+d-2)!}{(d-1)!k!}
\end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned}
\dim H_k &= \frac{(2k+d-1)(k+d-2)(k+d-3)\cdots(k+1)k!}{(d-1)!k!} \\
&= \frac{1}{(d-1)!}(2k+d-1)(k+1)\cdots(k+d-2) \\
&= \frac{2}{(d-1)!}k^{d-1} + b_1 k^{d-2} + \cdots + b_{d-1},
\end{aligned}$$

onde $b_1, \cdots, b_{d-1}$ são constantes não-negativas. Para demonstrar (2.17), consideremos a expressão de $n = \dim \mathcal{T}_N$ dada pelo Lema 2.5.4. Temos que

$$\begin{aligned}
n &= \frac{2}{d!}\frac{(N+d-1)(N+d-2)\cdots(N+1)(N+d/2)N!}{N!} \\
&= \frac{2}{d!}(N+d-1)(N+d-2)\cdots(N+1)(N+d/2) \\
&= \frac{2}{d!}(N+1)^d + c_1(N+1)^{d-1} + \cdots + c_d
\end{aligned}$$

onde $c_1, \cdots, c_d$ são constantes não-negativas. Pela demonstração de (2.17) obtemos que

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{FN^d + \bar{c}_1 N^{d-1} + \cdots + \bar{c}_d}$$

e como

$$\bar{c}_1 N^{d-1} + \cdots + \bar{c}_d \leq (\bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \cdots + \bar{c}_d)N^{d-1} = CN^{d-1},$$

segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} &\geq \frac{1}{FN^d + CN^{d-1}} \\
&\geq \frac{1}{FN^d}\left(\frac{1}{1 - \frac{-C}{FN}}\right) \\
&= \frac{1}{FN^d}\sum_{i=0}^{\infty}\left(-\frac{C}{FN}\right)^i \\
&= \frac{1}{FN^d}\left(1 - \frac{C}{FN} + \frac{C^2}{F^2N^2} - \cdots\right) \\
&\geq \frac{1}{FN^d}\left(1 - \frac{C}{FN}\right) \\
&= \frac{1}{FN^d} - \frac{C}{F^2N^{d+1}}.
\end{aligned}$$

■

Capítulo 3

Estimativas para Números de Entropia

Neste capítulo apresentamos os resultados principais desta dissertação, demonstrados em [5]. Na primeira seção definimos as Médias de Levy e demonstramos um importante resultado que estabelece estimativas para tais médias, de fundamental importância para as seções seguintes. As referências utilizadas neste capítulo foram [3], [9] e [10].

Usaremos neste capítulo as terminologias $a_n \asymp b_n$, $a_n \ll b_n$ e $a_n \gg b_n$, para duas sequências $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, para indicarmos a existência de constantes universais C_1, C_2, C_3 e C_4 satisfazendo $C_1 b_n \leq a_n \leq C_2 b_n$, $a_n \leq C_3 b_n$ e $a_n \geq C_4 b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, respectivamente.

3.1 Estimativas para Médias de Levy

Iniciamos este capítulo recordando algumas notações introduzidas em capítulos anteriores.

Seja $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach n-dimensional com bola unitária $B_E = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, $|||x||| = (\sum_{k=1}^n |x_k|^2)^{\frac{1}{2}}$ a norma euclidiana de $x \in \mathbb{R}^n$ e seja $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ o produto interno usual de $x, y \in \mathbb{R}^n$. A esfera unitária de $\mathbb{R}^n$ será denotada por

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |||x||| = 1\}$$

e a medida de Lebesgue normalizada sobre S^{n-1} por μ. Denotaremos por $\mathrm{Vol}_n(A)$ o volume de um subconjunto mensurável A de $\mathbb{R}^n$. Se X é um espaço topológico compacto, denotaremos por $C(X)$ o espaço das funções reais contínuas definidas sobre X com a norma da convergência uniforme.

A bola unitária fechada de $L^p(S^d),\ 1 \leq p \leq \infty$, será denotada por U_p, isto é,

$$U_p = \{\varphi \in L^p(S^d) : \ ||\varphi||_p \leq 1\}.$$

O logaritmo de um número $x > 0$ na base 2 será denotado por $\log x$.

Definição 3.1.1. *Seja ν uma medida sobre a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(X)$ de X, onde X é um espaço topológico localmente compacto de Hausdorff.*

(i) ν é chamada regular exteriormente sobre $E \in \mathcal{B}(X)$ se

$$\nu(E) = \inf\{\nu(U) : E \subset U,\ U \textit{ é aberto}\}.$$

(ii) ν é chamada regular interiormente sobre $E \in \mathcal{B}(X)$ se

$$\nu(E) = \sup\{\nu(K) : K \subset E,\ K \textit{ é compacto}\}.$$

(iii) Se ν for finita sobre os compactos, regular exteriormente sobre todos os Borelianos e regular interiormente sobre todo aberto, dizemos que μ é uma medida de Radon.

Teorema 3.1.2 (Teorema de Representação de Riesz, [3], p. 205)**.** *Seja X um espaço topológico compacto de Hausdorff e seja I um funcional linear positivo sobre $C(X)$, isto é, $I(f) \geq 0$ se f é uma função real contínua sobre X e $f \geq 0$. Então existe uma única medida de Radon ν sobre $\mathcal{B}(X)$ tal que*

$$I(f) = \int_X f(x) d\nu(x),$$

para toda $f \in C(X)$.

Definição 3.1.3. *Um grupo topológico é um grupo G que também é um espaço topológico e cujas operações de grupo*

$$\begin{aligned}(u, v) \in G \ \times \ G &\longmapsto u \cdot v \in G,\\ u \ \in \ G &\longmapsto u^{-1} \in G,\end{aligned}$$

são contínuas.

Definição 3.1.4. *Uma medida de Haar à esquerda sobre o grupo topológico localmente compacto G, é uma medida de Radon ν sobre G tal que $\nu(uE) = \nu(E)$ para todo $u \in G$ e $E \in \mathcal{B}(X)$, onde $uE = \{ua : a \in E\}$.*

Teorema 3.1.5 ([3], p. 315)**.** *Sobre todo grupo localmente compacto, existe uma medida de Haar à esquerda, que é única a menos de constantes multiplicativas positivas.*

Observação 3.1.6. *O conjunto $SO(n)$ das rotações próprias em $\mathbb{R}^n$, munido da operação de produto de matrizes e da topologia induzida de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, é um grupo topológico compacto. Denotemos por σ a medida de Haar normalizada sobre $SO(n)$.*

Seja $f \in L^1(S^{n-1})$ e seja $\tilde{f}$ a função definida por $\tilde{f}(u) = f(ue)$, $e = (0, \dots, 0, 1)$. Então $\tilde{f} \in L^1(SO(n))$ e

$$\int_{S^{n-1}} f(y) d\mu(y) = \int_{SO(n)} \tilde{f}(u) d\sigma(u).$$

Em virtude desta relação entre as medidas μ e σ, podemos concluir pelo Teorema 3.1.5 que, se ν é uma medida de Radon sobre os borelianos de S^{n-1} e também é invariante por rotações de $SO(n)$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$ tal que $\nu(E) = \lambda\mu(E), \forall E \in \mathcal{B}(S^{n-1})$.

Definição 3.1.7. *A média de Levy de uma norma $||\cdot||$ sobre $\mathbb{R}^n$ é definida por*

$$M(\|\cdot\|) = M(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) = \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|^2 \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observação 3.1.8. *A fim de especificar a norma $\|\cdot\|$ cuja média de Levy queremos estimar, consideramos um sistema qualquer de harmônicos esféricos*

$$\{\xi_k(\tau)\}_{k=1}^n \subset \bigoplus_{l=M_1}^{M_2} \mathcal{H}_l, \quad n = \sum_{s=M_1}^{M_2} \dim \mathcal{H}_s$$

que é ortonormal em $L^2(S^d)$. Seja $\Xi_n = \mathrm{lin}\{\xi_1, ..., \xi_n\}$ e seja $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \Xi_n$ o isomorfismo que associa a cada $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ a função

$$J\alpha = \xi^\alpha = \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k \in \Xi_n.$$

Toda matriz invertível diagonal $n \times n$

$$\Lambda_n = \mathrm{diag}\,\overbrace{\{\underbrace{\lambda_{M_1}, ..., \lambda_{M_1}}_{\dim \mathcal{H}_{M_1}}, \underbrace{\lambda_{M_1+1}, ..., \lambda_{M_1+1}}_{\dim \mathcal{H}_{M_1+1}}, ..., \underbrace{\lambda_{M_2}, ..., \lambda_{M_2}}_{\dim \mathcal{H}_{M_2}}\}}^{n} = \mathrm{diag}\{\tilde{\lambda}_1, ..., \tilde{\lambda}_n\}$$

pode ser associada a um operador linear invertível $J\Lambda_n J^{-1} : \Xi_n \longrightarrow \Xi_n$*, o qual denotamos novamente por* Λ_n*, para simplificar a notação. A definição* $\|\xi\|_{\Lambda_n,p} = \|\Lambda_n \xi\|_p$ *induz uma norma em* Ξ_n *e passando para* $\mathbb{R}^n$ *obtemos a norma* $||\alpha||_{(\Lambda_n,p)} = ||\xi^\alpha||_{\Lambda_n,p}$ *para* $\alpha \in \mathbb{R}^n$*. Como* $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ *é um sistema ortonormal de harmônicos esféricos e* $n = \dim\left(\oplus_{l=M_1}^{M_2} \mathcal{H}_k\right)$*, segue que* $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ *constitui uma base de* $\oplus_{l=M_1}^{M_2} \mathcal{H}_k$*. Desta forma podemos ordenar este sistema ortonormal de harmônicos esféricos da seguinte maneira,*

$$\{\xi_k\}_{k=1}^n = \{\xi_j^l : M_1 \le l \le M_2, 1 \le j \le a_l\},$$

onde $\{\xi_j^l : 1 \le j \le a_l\}$ *é base de* $\mathcal{H}_l$*,* $M_1 \le l \le M_2$ *e* $a_l = \dim \mathcal{H}_l$*. Assim, se* $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$*, teremos* $\xi^\alpha = \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k = \sum_{l=M_1}^{M_2} \sum_{j=1}^{a_l} \alpha_j^l \xi_j^l$*. Logo* $\Lambda_n \xi^\alpha = \sum_{l=M_1}^{M_2} \lambda_l \sum_{j=1}^{a_l} \alpha_j^l \xi_j^l$*, e consequentemente*

$$\|\alpha\|_{(\Lambda_n,p)} = \left\| \sum_{l=M_1}^{M_2} \lambda_l \sum_{j=1}^{a_l} \alpha_j^l \xi_j^l \right\|_p .$$

Denotamos

$$B^n_{(\Lambda_n,p)} = B^n_{(\Lambda,p)} = \{\alpha \in \mathbb{R}^n : ||\alpha||_{(\Lambda_n,p)} \le 1\}.$$

Se $\Lambda_n = I$ é o operador identidade, escrevemos $B^n_{(I_n,p)} = B^n_{(p)}$ e $||\cdot||_{(I,p)} = ||\cdot||_{(p)}$.

Lema 3.1.9. *Dada uma função arbitrária* $f \in C(S^{n-1})$ *denotamos por* $\tilde{f}$ *a extensão de* f *sobre* $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *dada por*

$$\tilde{f}(x) = |||x|||^2 f\left(\frac{x}{|||x|||}\right).$$

Nestas condições temos que

$$\int_{S^{n-1}} f(x) d\mu(x) = \frac{2\pi}{n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) d\gamma(x)$$

onde $d\gamma(x) = e^{-\pi|||x|||^2} dx$ *é a medida Gaussiana sobre* $\mathbb{R}^n$*.*

Demonstração. Consideremos a aplicação $I : C(S^{n-1}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) d\gamma(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |||x|||^2 f\left(\frac{x}{|||x|||}\right) e^{-\pi|||x|||^2} dx.$$

Observe que I é um funcional linear positivo sobre $C(S^{n-1})$. Vamos mostrar que I é invariante por rotações. Para $u \in SO(n)$ temos pela Observação 2.1.4 que

$$\begin{aligned} I(f \circ u) &= \int_{\mathbb{R}^n} |||x|||^2 f\left(u\left(\frac{x}{|||x|||}\right)\right) e^{-\pi|||x|||^2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |||ux|||^2 f\left(\frac{ux}{|||ux|||}\right) e^{-\pi|||ux|||^2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |||x|||^2 f\left(\frac{x}{|||x|||}\right) e^{-\pi|||x|||^2} dx \\ &= I(f). \end{aligned}$$

Segue pelo Teorema 3.1.2, que existe uma única medida de Radon ν sobre S^{n-1} tal que

$$I(f) = \int_{S^{n-1}} f(x) d\nu(x).$$

Como I é invariante por rotações, segue que ν é invariante por rotações e assim pela Observação 3.1.6, ν deve ser um múltiplo da medida de Lebesgue sobre S^{n-1}, isto é, existe uma constante positiva λ_n tal que

$$I(f) = \lambda_n \int_{S^{n-1}} f(x) d\mu(x), \quad \forall f \in C(S^{n-1}).$$

Tomando $f \equiv 1$ obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_n^{1/2} &= \left(\lambda_n \int_{S^{n-1}} 1 d\mu(x)\right)^{1/2} \\ &= (I(1))^{1/2} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |||x|||^2 e^{-\pi|||x|||^2} dx\right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} (x_1^2 + \cdots + x_n^2) e^{-\pi(x_1^2+\cdots+x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n\right)^{1/2} \\ &= \left(\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2 e^{-\pi(x_1^2+\cdots+x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n\right) + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_2^2 e^{-\pi(x_1^2+\cdots+x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n\right)\right. \\ &+ \quad \cdots \left. + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_n^2 e^{-\pi(x_1^2+\cdots+x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n\right)\right)^{1/2} \\ &= \left(n \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2 e^{-\pi(x_1^2+\cdots+x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Como $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$, dado $q \in \mathbb{R}$, fazendo uma mudança de variável obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-qy^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{q}} \tag{3.1}$$

e assim $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x_i^2} dx_i = 1$. Além disso, derivando (3.1) em relação a q obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-qy^2} dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{q^3}}$$

ou seja, $\int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2 e^{-\pi x_1^2} dx_1 = 1/2\pi$ e portanto

$$\begin{aligned}
\lambda_n^{1/2} &= \left(n \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2 e^{-\pi(x_1^2+\cdots+x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n \right)^{1/2} \\
&= \left(\left(n \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2 e^{-\pi x_1^2} dx_1 \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x_2^2} dx_2 \right) \cdot \ \cdots \ \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x_n^2} dx_n \right) \right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{n}{2\pi} \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Logo se $f \in C(S^{n-1})$ e $\tilde{f}(x) = |||x|||^2 f\left(\frac{x}{|||x|||}\right)$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, então

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} f(x) d\mu(x) &= \lambda_n^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) d\gamma(x) \\
&= \frac{2\pi}{n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) d\gamma(x).
\end{aligned}$$

■

Teorema 3.1.10 ([6], p. 585). *Denotemos por $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ a sequência das funções de Rademacher $r_k(\theta) = \operatorname{sign}\sin(2^k \pi\theta)$, para $\theta \in [0,1]$ e $k = 1, 2, ...,$ e para $m = 1, 2, ...$ e $i = 1, 2, \ldots, n$ seja*

$$\delta_i^m(\theta) = m^{-\frac{1}{2}}(r_{(i-1)m+1}(\theta) + \cdots + r_{im}(\theta)).$$

Se $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo

$$h(x_1, ..., x_n) e^{-\sum_{i=1}^n |x_i|} \longrightarrow 0, \ \textit{uniformemente quando} \sum_{i=1}^n |x_i| \longrightarrow \infty,$$

então

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) d\gamma(x) = \lim_{m \to \infty} \int_0^1 h((2\pi)^{-1/2}(\delta_1^m(\theta), ..., \delta_n^m(\theta))) d\theta.$$

Teorema 3.1.11 (Desigualdade de Khintchine, [2], p. 66). *Seja $\{r_k(\theta)\}_{k=1}^{\infty}$ a sequência das funções de Rademacher (ver Teorema 3.1.10) e sejam $1 \leq p < \infty, u \in \mathbb{N}$. Então para toda sequência de escalares $\{c_s\}_{s=1}^{u}$ temos que*

$$b(p)\left(\sum_{s=1}^{u}|c_s|^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1\left|\sum_{s=1}^{u}r_s(\theta)c_s\right|^p d\theta\right)^{1/p} \leq c(p)\left(\sum_{s=1}^{u}|c_s|^2\right)^{1/2},$$

onde $b(1) \geq \frac{1}{2}$ *e*

$$c(p) = 2^{1/2}\left(\frac{\Gamma(\frac{1+p}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right)^{1/p} \asymp p^{1/2}, \quad p \longrightarrow \infty.$$

Teorema 3.1.12 (Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin, [3], p. 193)**.** *Sejam* $(X, \mathcal{M}, \nu)$ *e* $(Y, \mathcal{N}, \sigma)$ *dois espaços com medidas* σ*-finitas e sejam* $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$*. Suponhamos que* T *seja um operador linear limitado de* $L^{p_i}(X)$ *em* $L^{q_i}(Y)$ *para* $i \in \{0,1\}$ *e que*

$$||Tf||_{q_0} \leq k_0||f||_{p_0},$$

$$||Tf||_{q_1} \leq k_1||f||_{p_1}.$$

Então T *é limitado de* $L^{p_t}(X)$ *em* $L^{q_t}(Y)$ *e*

$$||Tf||_{q_t} \leq k_0^{1-t}k_1^t||f||_{p_t},$$

onde $\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}$ *e* $\frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$.

Lema 3.1.13. *Se* $t_n \in \bigoplus_{k=M_1}^{M_2}\mathcal{H}_k$*, então*

$$||t_n||_\infty \leq n^{1/p}||t_n||_p, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

$$||t_n||_2 \leq n^{1/p-1/2}||t_n||_p, \quad 1 \leq p \leq 2,$$

$$||t_n||_q \leq n^{1/2-1/q}||t_n||_2, \quad 2 \leq q \leq \infty.$$

Demonstração. Seja $D_{M_1,M_2} = \sum_{k=M_1}^{M_2} Z_x^{(k)}$, onde $Z_x^{(k)}$ é o harmônico zonal de grau k e polo x. Então para cada $t_n \in \bigoplus_{k=M_1}^{M_2}\mathcal{H}_k$, temos pela definição de harmônico zonal e pelo Teorema 2.1.14 que

$$t_n = D_{M_1,M_2} * t_n \tag{3.2}$$

e segue assim pela Desigualdade de Young (Teorema 2.2.12) que

$$||t_n||_\infty = \|D_{M_1,M_2} * t_n\|_\infty \leq \|D_{M_1,M_2}\|_\infty \|t_n\|_1 .$$

Mas, $D_{M_1,M_2} = D_{M_1,M_2} * D_{M_1,M_2}$, e portanto pela Desigualdade de Young, pela Definição 2.2.1 e pelo Corolário 2.2.3, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|D_{M_1,M_2}\|_\infty &= \|D_{M_1,M_2} * D_{M_1,M_2}\|_\infty \\
&\leq \|D_{M_1,M_2}\|_2 \|D_{M_1,M_2}\|_2 \\
&= \|D_{M_1,M_2}\|_2^2 \\
&= \sum_{k=M_1}^{M_2} \int_{S^d} \overline{Z_x^{(k)}}(y) Z_x^{(k)}(y) d\mu(y) \\
&= \sum_{k=M_1}^{M_2} \left(Z_x^{(k)}, Z_x^{(k)} \right) \\
&= \sum_{k=M_1}^{M_2} \overline{Z_x^{(k)}}(x) = \sum_{k=M_1}^{M_2} a_k = n. \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

Segue assim por (3.2) e (3.3) que

$$||t_n||_\infty \leq n||t_n||_1.$$

Seja I o operador identidade sobre $\bigoplus_{k=M_1}^{M_2} \mathcal{H}_k$. Então temos que

$$||I(t_n)||_\infty \leq n||t_n||_1,$$

$$||I(t_n)||_\infty \leq 1||t_n||_\infty.$$

Aplicando o Teorema 3.1.12 ao operador I para $k_0 = n,\ k_1 = 1,\ q_0 = q_1 = p_1 = \infty$ e $p_0 = 1$ obtemos

$$q_t = \infty, \qquad \frac{1}{p_t} = 1 - t$$

e assim

$$k_0^{1-t} \cdot k_1^t = n^{1-t} \cdot 1^t = n^{1/p_t}.$$

Tomando $p_t = p$

$$||t_n||_\infty = ||I(t_n)||_\infty \leq n^{1/p}||t_n||_p,\ 1 \leq p \leq \infty.$$

De modo análogo ao anterior, demonstramos os outros casos. Temos pela Desigualdade de Young que

$$
\begin{aligned}
||t_n||_2 &= ||D_{M_1,M_2} * t_n||_2 \\
&\leq ||D_{M_1,M_2}||_2||t_n||_1 \\
&= n^{1/2}||t_n||_1
\end{aligned}
$$

e portanto

$$||I(t_n)||_2 \leq n^{1/2}||t_n||_1,$$

$$||I(t_n)||_2 \leq 1||t_n||_2.$$

Aplicando o Teorema 3.1.12 para as constantes $k_0 = n^{1/2},\ k_1 = 1,\ q_0 = q_1 = p_1 = 2$ e $p_0 = 1$, obtemos a segunda desigualdade desejada.

Para demonstrar a terceira desigualdade, aplicamos a Desigualdade de Young e obtemos

$$\begin{aligned} ||t_n||_\infty &= ||D_{M_1,M_2} * t_n||_\infty \\ &\leq ||D_{M_1,M_2}||_2||t_n||_2 \\ &= n^{1/2}||t_n||_2. \end{aligned}$$

Assim

$$||I(t_n)||_\infty \leq n^{1/2}||t_n||_2,$$

$$||I(t_n)||_2 \leq 1||t_n||_2.$$

A terceira desigualdade é obtida quando aplicamos o Teorema 3.1.12 para $k_0 = n^{1/2},\ k_1 = 1,\ q_1 = p_0 = p_1 = 2$ e $q_0 = \infty$. ■

Teorema 3.1.14. *Seja $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ um sistema ortonormal arbitrário de harmônicos esféricos de $\bigoplus_{l=M_1}^{M_2} \mathcal{H}_l$, onde $n = \dim\left(\bigoplus_{l=M_1}^{M_2} \mathcal{H}_l\right)$ e $a_k = \dim \mathcal{H}_k$. Então existe uma constante absoluta $C > 0$ tal que:*

(i) se $2 \leq p < \infty$, então

$$n^{-1/2}\left(\sum_{k=M_1}^{M_2} |\lambda_k|^2 a_k\right)^{\frac{1}{2}} \leq M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,p)}) \leq Cp^{1/2}n^{-1/2}\left(\sum_{k=M_1}^{M_2} |\lambda_k|^2 a_k\right)^{\frac{1}{2}},$$

(ii) se $p = \infty$, então

$$n^{-1/2}\left(\sum_{k=M_1}^{M_2} |\lambda_k|^2 a_k\right)^{\frac{1}{2}} \leq M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,\infty)}) \leq C(\log n)^{1/2}n^{-1/2}\left(\sum_{k=M_1}^{M_2} |\lambda_k|^2 a_k\right)^{\frac{1}{2}},$$

(iii) se $1 \leq p \leq 2$, então

$$\frac{1}{2}n^{-1/2}\left(\sum_{k=M_1}^{M_2} |\lambda_k|^2 a_k\right)^{\frac{1}{2}} \leq M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,p)}) \leq n^{-1/2}\left(\sum_{k=M_1}^{M_2} |\lambda_k|^2 a_k\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(iv) Se $p = 2$, então

$$M(\|\cdot\|_{(\Lambda_n,2)}) = n^{-1/2}\left(\sum_{k=M_1}^{M_2} |\lambda_k|^2 a_k\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. Vamos demonstrar primeiramente a igualdade em (iv). Para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, temos pela Observação 3.1.8 que

$$\begin{aligned} \|x\|^2_{(\Lambda_n,2)} &= \left\|\sum_{l=M_1}^{M_2} \lambda_l \sum_{j=1}^{a_l} x_j^l \xi_j^l\right\|_2^2 \\ &= \sum_{l=M_1}^{M_2} |\lambda_l|^2 \sum_{j=1}^{a_l} (x_j^l)^2 ||\xi_j^l||_2 \\ &= \sum_{l=M_1}^{M_2} |\lambda_l|^2 \sum_{j=1}^{a_l} (x_j^l)^2 \end{aligned}$$

e assim

$$\int_{S^{n-1}} \|x\|^2_{(\Lambda_n,2)}\, d\mu(x) = \sum_{l=M_1}^{M_2} |\lambda_l|^2 \sum_{j=1}^{a_l} \int_{S^{n-1}} (x_j^l)^2 d\mu(x). \tag{3.4}$$

Mas

$$\begin{aligned} 1 = \int_{S^{n-1}} |||x|||^2 d\mu(x) &= \int_{S^{n-1}} (x_1^2 + \cdots + x_n^2) d\mu(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_{S^{n-1}} x_k^2 d\mu(x) \\ &= n \int_{S^{n-1}} x_i^2 d\mu(x) \end{aligned}$$

para qualquer $1 \leq i \leq n$, e portanto temos

$$\int_{S^{n-1}} x_i^2 d\mu(x) = \frac{1}{n}. \tag{3.5}$$

Por (3.4) e (3.5) obtemos

$$\int_{S^{n-1}} \|x\|^2_{(\Lambda_n,2)}\, d\mu(x) = \frac{1}{n} \sum_{l=M_1}^{M_2} |\lambda_l|^2 a_l$$

e logo temos que

$$M(||\cdot||_{(\Lambda_n,2)}) = \left(\int_{S^{n-1}} ||x||^2_{(\Lambda_n,2)}\right)^{1/2} = n^{-1/2}\left(\sum_{l=M_1}^{M_2} |\lambda_l|^2 a_l\right)^{1/2},$$

como queríamos.

Como $M(||.||_{(\Lambda_n,p)})$ é uma função monótona crescente em p para $1 \leq p \leq \infty$, os limitantes inferiores em (i), (ii) e o limitante superior em (iii) seguem de (iv).

Vamos agora demonstrar a estimativa superior em (i) e a estimativa inferior em (iii). Seja $\tilde{\lambda}_i$, $1 \leq i \leq n$ a sequência de multiplicadores obtida de λ_i, $M_1 \leq i \leq M_2$, que corresponde à enumeração fixada dos harmônicos esféricos ξ_i, $1 \leq i \leq n$.

Considere as funções $f(x) = ||x||^2_{(\Lambda_n,p)}$, $x \in S^{n-1}$ e $h(x) = ||x||^2_{(\Lambda_n,p)}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$. Temos que

$$\widetilde{f}(x) = |||x|||^2 f\left(\frac{x}{|||x|||}\right) = |||x|||^2 \left\|\frac{x}{|||x|||}\right\|^2_{(\Lambda_n,p)} = \|x\|^2_{(\Lambda_n,p)}$$

e assim pelo Lema 3.1.9 temos que

$$\int_{S^{n-1}} \|x\|^2_{(\Lambda_n,p)}\, d\mu(x) = \frac{2\pi}{n}\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) d\gamma(x). \tag{3.6}$$

Observe que a função h satisfaz as condições do Teorema 3.1.10. De fato, temos que

$$\begin{aligned} ||x||_{(\Lambda_n,p)} &= \left\|\sum_{l=M_1}^{M_2} \lambda_l \sum_{j=1}^{a_l} \alpha_j^l \xi_j^l\right\|_p \\ &\leq \sum_{l=M_1}^{M_2} |\lambda_l| \sum_{j=1}^{a_l} |\alpha_j^l|\, \left\|\xi_j^l\right\|_p \\ &\leq \left(\sup_{M_1\leq l\leq M_2,\ 1\leq j\leq a_l} |\lambda_l|\, \left\|\xi_j^l\right\|_p\right) \sum_{i=1}^n |x_i| \\ &= C\sum_{i=1}^n |x_i| \end{aligned}$$

e portanto

$$h(x)e^{-\sum_{k=1}^n |x_i|} = ||x||^2_{(\Lambda_n,p)} e^{-\sum_{k=1}^n |x_i|} \to 0 \text{ uniformemente quando } \sum_{k=1}^n |x_i| \to 0.$$

Assim aplicando o Teorema 3.1.10 para estas funções temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(x) d\gamma(x) = \lim_{m\to\infty}\int_0^1 \left\|(2\pi)^{-1/2}(\delta_1^m(\theta), \cdots, \delta_n^m(\theta))\right\|^2_{(\Lambda_n,p)} d\theta. \tag{3.7}$$

Logo por (3.6) e (3.7) temos

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \|x\|^2_{(\Lambda_n,p)}\, d\mu(x) &= \frac{2\pi}{n}\int_{\mathbb{R}^n} ||x||^2_{(\Lambda_n,p)} d\gamma(x) \\ &= n^{-1}\lim_{m\to\infty}\int_0^1 ||(\delta_1^m(\theta), ..., \delta_n^m(\theta))||^2_{(\Lambda_n,p)} d\theta. \end{aligned}$$

Mas note que

$$\begin{aligned}
\|(\delta_1^m(\theta),...,\delta_n^m(\theta))\|^2_{(\Lambda_n,p)} &= \left\|\xi^{(\delta_1^m(\theta),...,\delta_n^m(\theta))}\right\|^2_{\Lambda_n,p} \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i{\delta_i}^m(\theta)\right\|^2_{\Lambda_n,p} \\
&= \left\|\Lambda_n\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i{\delta_i}^m(\theta)\right)\right\|^2_p \\
&= \left(\int_{S^d}\left|\sum_{i=1}^{n}\tilde{\lambda}_i\xi_i(\tau){\delta_i}^m(\theta)\right|^p d\mu(\tau)\right)^{2/p}
\end{aligned}$$

e portanto

$$\int_{S^{n-1}}||x||^2_{(\Lambda_n,p)}d\mu(x) = n^{-1}\lim_{m\to\infty}\int_0^1\left(\int_{S^d}\left|\sum_{i=1}^{n}\tilde{\lambda}_i\delta_i^m(\theta)\xi_i(\tau)\right|^p d\mu(\tau)\right)^{2/p} d\theta. \qquad (3.8)$$

Temos ainda que

$$\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\lambda}_i\xi_i(\tau){\delta_i}^m(\theta) = \sum_{i=1}^{n}m^{-1/2}\xi_i(\tau)\widetilde{\lambda}_i(r_{(i-1)m+1}(\theta)+\cdots+r_{im}(\theta)).$$

Tomando $\tilde{\xi}_{(i-1)m+k}(\tau) = m^{-1/2}\xi_i(\tau)$, $\tau \in S^d$ e $\widetilde{\widetilde{\lambda}}_{(i-1)m+k} = \widetilde{\lambda}_i$ para $i = 1,2,...,n$; $k = 1,2,...,m$ e $m = 1,2,...$, nós obtemos

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i^m(\theta)\tilde{\lambda}_i\xi_i(\tau) = \sum_{j=1}^{mn}r_j(\theta)\tilde{\tilde{\lambda}}_j\tilde{\xi}_j(\tau)$$

e portanto segue por (3.8) que

$$\int_{S^{n-1}}||x||^2_{(\Lambda_n,p)}d\mu(x) = n^{-1}\lim_{m\to\infty}\int_0^1\left(\int_{S^d}\left|\sum_{j=1}^{mn}r_j(\theta)\tilde{\tilde{\lambda}}_j\tilde{\xi}_j(\tau)\right|^p d\mu(\tau)\right)^{2/p} d\theta. \qquad (3.9)$$

Do Corolário 2.2.3 (b) e das definições de $\tilde{\xi}_j(\tau)$ e $\widetilde{\widetilde{\lambda}}_j$, segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{mn}|\tilde{\tilde{\lambda}}_j\tilde{\xi}_j(\tau)|^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}|\tilde{\tilde{\lambda}}_{(i-1)m+k}\tilde{\xi}_{(i-1)m+k}(\tau)|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}|\tilde{\lambda}_i|^2|m^{-1/2}\xi_i(\tau)|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}m|\tilde{\lambda}_i|^2m^{-1}|\xi_i(\tau)|^2 \\
&= \sum_{j=M_1}^{M_2}|\lambda_j|^2a_j.
\end{aligned}$$

Portanto das desigualdades de Jensen e de Khintchine (Teorema 3.1.11) e de (3.9), para $2 \leq p \leq \infty$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} ||x||^2_{(\Lambda_n,p)} d\mu(x) &\leq n^{-1} \lim_{m\to\infty} \left(\int_{S^d} \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta) \tilde{\tilde{\lambda}}_j \tilde{\xi}_j(\tau) \right|^p d\theta d\mu(\tau) \right)^{2/p} \\
&\leq (c(p))^2 n^{-1} \lim_{m\to\infty} \left(\int_{S^d} \left(\sum_{j=1}^{mn} |\tilde{\tilde{\lambda}}_j \tilde{\xi}_j(\tau)|^2 \right)^{p/2} d\mu(\tau) \right)^{2/p} \\
&\leq Cpn^{-1} \left(\sum_{j=M_1}^{S_2} |\lambda_j|^2 a_j \right)
\end{aligned}
$$

e portanto obtemos a estimativa superior em (i). Agora, como $\|\cdot\|_2 \geq \|\cdot\|_1$, segue pela Desigualdade de Khintchine e por (3.9) que

$$
\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} ||x||^2_{(\Lambda_n,1)} d\mu(x) &\geq n^{-1} \lim_{m\to\infty} \left(\int_{S^d} \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{mn} r_j(\theta) \tilde{\tilde{\lambda}}_j \tilde{\xi}_j(\tau) \right| d\theta d\mu(\tau) \right)^{2} \\
&\geq (b(1))^2 n^{-1} \lim_{m\to\infty} \left(\int_{S^d} \left(\sum_{j=1}^{mn} |\tilde{\tilde{\lambda}}_j \tilde{\xi}_j(\tau)|^2 \right)^{1/2} d\mu(\tau) \right)^{2} \\
&\geq \frac{1}{4} n^{-1} \left(\sum_{j=M_1}^{M_2} |\lambda_j|^2 a_j \right), \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

e portanto obtemos a estimativa inferior em (iii).

Finalmente, aplicando a primeira desigualdade do Lema 3.1.13, e em seguida a estimativa superior em (i) para $p = \log_2 n$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{S^{n-1}} ||x||^2_{(\Lambda_n,\infty)} d\mu(x) \right)^{1/2} &= \left(\int_{S^{n-1}} ||\Lambda_n \xi^x||^2_\infty d\mu(x) \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_{S^{n-1}} n^{2/p} ||\Lambda_n \xi^x||^2_p d\mu(x) \right)^{1/2} \\
&= n^{1/p} \left(\int_{S^{n-1}} ||x||^2_{(\Lambda_n,p)} d\mu(x) \right)^{1/2} \\
&\leq n^{1/p} C_1 p^{1/2} n^{-1/2} \left(\sum_{j=M_1}^{M_2} |\lambda_j|^2 a_j \right)^{1/2} \\
&= 2C_1 (\log n)^{1/2} n^{-1/2} \left(\sum_{j=M_1}^{M_2} |\lambda_j|^2 a_j \right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

e assim demonstramos a estimativa superior em (ii). ■

3.2 Estimativas Inferiores para Números de Entropia

Nesta seção aplicaremos o Teorema 3.1.14 para obter limitantes inferiores gerais de números de entropia para uma ampla família de sequências de multiplicadores.

Definição 3.2.1. *O conjunto polar de um subconjunto compacto K de $\mathbb{R}^n$ é definido por*

$$K^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \sup_{y \in K} | < x, y > | \leq 1\}$$

e a norma $\|\cdot\|_{K^\circ}$ definida por

$$||x||_{K^\circ} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{< x, y >: \ y \in K\}.$$

Teorema 3.2.2 (Desigualdade de Urysohn, [11], p. 6)**.** *Seja K um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Temos que*

$$\left(\frac{\mathrm{Vol}_n(K)}{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(2)})} \right)^{1/n} \leq \int_{S^{n-1}} \|x\|_{K^\circ} \, d\mu(x).$$

Definição 3.2.3. *Seja A um subconjunto de um espaço vetorial X. Dizemos que A é convexo se para quaisquer $x, y \in A$, tivermos*

$$\alpha x + (1 - \alpha) y \in A, \quad \forall \, \alpha \in [0, 1].$$

Definição 3.2.4. *Seja A um subconjunto de um espaço vetorial X. Dizemos que A é centralmente simétrico se A é simétrico com relação à origem 0, em outras palavras, se para todo $x \in A$ tivermos $-x \in A$.*

Definição 3.2.5. *Seja A um subconjunto de um espaço vetorial X. Dizemos que A é absorvente se dado $x \in X$, existir $\lambda_0 > 0$ tal que $x \in \lambda A$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ com $|\lambda| \geq \lambda_0$.*

Proposição 3.2.6 ([11], p. 6)**.** *Seja V um conjunto convexo, centralmente simétrico, limitado e absorvente. Existe uma constante absoluta $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\left(\frac{\mathrm{Vol}_n(V)\mathrm{Vol}_n(V^\circ)}{\left(\mathrm{Vol}_n(B^n_{(2)})\right)^2} \right)^{1/n} \geq C.$$

Teorema 3.2.7. *Seja $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de multiplicadores arbitrária. Então existe uma constante $C > 0$, dependendo somente de p e q, tal que, para todos $N, k \in \mathbb{N}$ e $n = \sum_{l=0}^{N} dim\mathcal{H}_l$,*

$$e_k(\Lambda U_p, L^q) \geq C 2^{-k/n}\omega_n,$$

onde $\omega_n = \sigma_n \kappa_n$,

$$\kappa_n = \begin{cases} 1 & , \ p < \infty, \ q > 1, \\ (\log n)^{-1/2} & , \ p < \infty, \ q = 1, \\ (\log n)^{-1/2} & , \ p = \infty, \ q > 1, \\ (\log n)^{-1} & , \ p = \infty, \ q = 1 \end{cases}$$

e

$$\sigma_n = \left(\prod_{l=1}^{N} |\lambda_l|^{dimH_l} \right)^{1/n}.$$

Em particular, se $k = n$ e $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_N|$, então

$$e_n(\Lambda U_p, L^q) \geq C|\lambda_N|\kappa_n \tag{3.11}$$

Demonstração. Se para algum $1 \leq l \leq N$, $\lambda_l = 0$, então a demonstração do teorema é trivial. Assumimos então que $\lambda_l \neq 0$ para todo $1 \leq l \leq N$.

Considere uma norma $||\cdot||$ em $\mathbb{R}^n$ e seja E o espaço de Banach com bola unitária B_E. Para $x \in \mathbb{R}^n$ seja $||x||^\circ = \sup\{|\langle x, y\rangle| : y \in B_E\}$ e seja $E^\circ = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||^\circ)$. A bola unitária B_{E° será denotada por B_E°. Usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} ||x||_{(q)}^\circ &= \sup\left\{|\langle x, y\rangle| : y \in B_{(q)}^n\right\} \\ &= \sup\left\{|(Jx, Jy)| : y \in B_{(q)}^n\right\} \\ &= \sup\left\{\left|\int_{S^d} JxJyd\mu\right| : y \in B_{(q)}^n\right\} \\ &= \sup\left\{\|Jx\|_{q'} \|Jy\|_q : y \in B_{(q)}^n\right\} \\ &\leq \|Jx\|_{q'} \\ &= \|x\|_{(q')}, \end{aligned}$$

onde $1/q + 1/q' = 1$. Assim se tomarmos $||\cdot|| = ||\cdot||_{(q)}$, $1 \leq q \leq 2$ pelo Teorema 3.1.14 e pelo Teorema 3.2.2, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(q)})}{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(2)})}\right)^{1/n} &\leq \int_{S^{n-1}} ||x||^{\circ}_{(q)} d\mu(x) \\
&\leq \int_{S^{n-1}} ||x||_{(q')} d\mu(x) \\
&\leq \left(\int_{S^{n-1}} ||x||^2_{(q')} d\mu(x)\right)^{1/2} \\
&= M(||\cdot||_{(q')}) \\
&\leq C \begin{cases} (q')^{1/2}, & 1 < q \leq 2, \\ (\log n)^{-1/2}, & q = 1, \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

onde $1/q + 1/q' = 1$, ou seja $2 \leq q' \leq \infty$. Da mesma forma, para todo $2 \leq p \leq \infty$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(p)})^{\circ}}{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(2)})}\right)^{1/n} &\leq \int_{S^{n-1}} ||x||_{(p)} d\mu(x) \\
&\leq \left(\int_{S^{n-1}} ||x||^2_{(p)} d\mu(x)\right)^{1/2} \\
&= M(||\cdot||_{(p)}) \\
&\leq C \begin{cases} p^{1/2}, & 2 < p \leq \infty, \\ (\log n)^{1/2}, & p = \infty. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

Pela Proposição 3.2.6 existe uma constante absoluta $C > 0$ tal que

$$
\left(\frac{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(p)})\mathrm{Vol}_n((B^n_{(p)})^{\circ})}{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(2)})^2}\right)^{1/n} \geq C
$$

e assim por (3.13)

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(p)})}{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(2)})}\right)^{1/n} &\geq C\left(\frac{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(p)})^{\circ}}{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(2)})}\right)^{-1/n} \\
&\geq C \begin{cases} p^{-1/2}, & 2 \leq p < \infty, \\ (\log n)^{-1/2}, & p = \infty. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

Seja $x_1, ..., x_{N(\varepsilon)}$ uma ε-rede minimal para $\Lambda B^n_{(p)}$ em $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_{(q)})$ com cardinalidade $N(\varepsilon)$. Então

$$
\Lambda B^n_{(p)} \subset \bigcup_{k=1}^{N(\varepsilon)} (x_k + \varepsilon B^n_{(q)}).
$$

Comparando os volumes obtemos

$$\mathrm{Vol}_n(\Lambda B^n_{(p)}) \leq \varepsilon^n N(\varepsilon)\mathrm{Vol}_n(B^n_{(q)})$$

e consequentemente

$$\left(\frac{\mathrm{Vol}_n(\Lambda B^n_{(p)})}{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(2)})}\right)^{1/n} \leq \varepsilon(N(\varepsilon))^{1/n}\left(\frac{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(q)})}{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(2)})}\right)^{1/n}. \tag{3.15}$$

Se $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $X \subset \mathbb{R}^n$, então $\mathrm{Vol}_n\ (T(X)) = (\det T)\,(\mathrm{Vol}_n X)$. Temos então que

$$\begin{aligned} \frac{\left(\mathrm{Vol_n}\left(\Lambda B^n_{(p)}\right)\right)^{1/n}}{\left(\mathrm{Vol_n}\left(B^n_{(2)}\right)\right)^{1/n}} &= \frac{\left(\det\Lambda\cdot\mathrm{Vol_n}\left(B^n_{(p)}\right)\right)^{1/n}}{\left(\mathrm{Vol_n}\left(B^n_{(2)}\right)\right)^{1/n}} \\ &= (\det\Lambda)^{1/n}\frac{\left(\mathrm{Vol_n}\left(B^n_{(p)}\right)\right)^{1/n}}{\left(\mathrm{Vol_n}\left(B^n_{(2)}\right)\right)^{1/n}} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Assim por (3.12), (3.14), (3.15) e (3.16), encontramos

$$\begin{aligned} C_1(det\Lambda)^{\frac{1}{n}}\begin{cases} p^{-\frac{1}{2}}, & 2 \leq p < \infty, \\ (\log n)^{-\frac{1}{2}}, & p = \infty, \end{cases} &\leq (det\Lambda)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(p)})}{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(2)})}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \left(\frac{\mathrm{Vol}_n(\Lambda B^n_{(p)})}{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(2)})}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \varepsilon(N(\varepsilon))^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(q)})}{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(2)})}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= C_2\varepsilon(N(\varepsilon))^{\frac{1}{n}}\begin{cases} (q')^{\frac{1}{2}}, & 1 < q \leq 2, \\ (\log n)^{-\frac{1}{2}}, & q = 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Tomamos $N(\varepsilon) = 2^{k-1}$. Então por definição de números de entropia

$$\varepsilon = e_k(\Lambda U_p \cap \mathcal{T}_N, L^q \cap \mathcal{T}_N)$$

onde $\mathcal{T}_N = \bigoplus_{j=0}^N \mathcal{H}_j$. Por definição e pela Proposição 1.3.9 encontramos

$$\begin{aligned} e_k(\Lambda U_p, L^q) &\geq e_k(\Lambda U_p \cap \mathcal{T}_N, L^q) \\ &\geq 2^{-1}e_k(\Lambda U_p \cap \mathcal{T}_N, L^q \cap \mathcal{T}_N) \end{aligned}$$

e assim para $2 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq 2$, temos que

$$\begin{aligned}
e_k(\Lambda U_p, L^q) &\geq 2^{-1}C_1C_2^{-1}(N(\varepsilon))^{-1/n}(q')^{-1/2}(\det\Lambda)^{1/n}p^{-1/2} \\
&\geq C'2^{-(k-1)/n}(\det\Lambda)^{1/n} \\
&\geq C'2^{1/n}2^{-k/n}(\det\Lambda)^{1/n} \\
&\geq C'2^{-k/n}(\det\Lambda)^{1/n}.
\end{aligned}$$

Logo

$$e_k(\Lambda U_p, L^q) \geq C2^{-k/n}\sigma_n, \quad 2 \leq p < \infty \text{ e } 1 < q \leq 2.$$

Consideremos agora $1 \leq p < 2$ e $1 < q \leq 2$. Observe que $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_2$ e assim $U_2 \subset U_p$. Portanto

$$\begin{aligned}
e_k(\Lambda U_2, L^q) &= \inf\{\varepsilon : \Lambda U_2 \subset \bigcup_{j=1}^{2^{k-1}}(x_j + \varepsilon U_q)\} \\
&\leq \inf\{\varepsilon : \Lambda U_p \subset \bigcup_{j=1}^{2^{k-1}}(x_j + \varepsilon U_q)\} \\
&= e_k(\Lambda U_p, L^q)
\end{aligned}$$

e portanto, pelo caso anterior segue que

$$e_k(\Lambda U_p, L^q) \geq e_k(\Lambda U_2, L^q) \geq C2^{-k/n}\sigma_n.$$

Para o caso em que $1 \leq p < \infty$ e $2 < q \leq \infty$, temos que $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_q$ e $U_q \subset U_2$ e assim

$$\begin{aligned}
e_k(\Lambda U_p, L^q) &= \inf\{\varepsilon : \Lambda U_p \subset \bigcup_{j=1}^{2^{k-1}}(x_j + \varepsilon U_q)\} \\
&\geq \inf\{\varepsilon : \Lambda U_p \subset \bigcup_{j=1}^{2^{k-1}}(x_j + \varepsilon U_2)\} \\
&= e_k(\Lambda U_p, L^2) \\
&\geq C2^{-k/n}\sigma_n.
\end{aligned}$$

Portanto para $p < \infty$ e $q > 1$, temos que

$$e_k(\Lambda U_p, L^q) \geq C2^{-k/n}\sigma_n.$$

Fazendo uma análise semelhante nos outros casos, obtemos as estimativas desejadas.

Para demonstrar (3.11) assumimos que $k = n$ e $|\lambda_1| \geq ... \geq |\lambda_N|$. Então

$$\begin{aligned}\sigma_n^n = \det \Lambda &= \prod_{k=1}^{N} |\lambda_k|^{\dim \mathcal{H}_k} \\ &\geq |\lambda_N|^{\sum_{k=1}^{N} \dim \mathcal{H}_k} = |\lambda_N|^n\end{aligned}$$

e consequentemente,

$$e_n(\Lambda U_p, L^q) \geq C|\lambda_N|\kappa_n.$$

■

3.3 Estimativas Superiores para Números de Entropia

Observação 3.3.1. *Consideremos uma sequência de multiplicadores $\Lambda = \{\lambda_l\}_{l\in\mathbb{N}}$. Para $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq q \leq \infty$ fixados, definimos*

$$\chi_k^{(q)} = \chi_k = 3 \sup_{n\geq 1} \left(\frac{2^{-k+1}\mathrm{Vol}_n(B_{(2)}^n)}{\mathrm{Vol}_n(B_{(q)}^n)} . \prod_{j=1}^{N} |\lambda_j|^{\dim \mathcal{H}_j} \right)^{1/n} .$$

Se a sequência $\{|\lambda_l|\}_{l\in\mathbb{N}}$ é limitada temos

$$\begin{aligned}\left(\prod_{j=1}^{N} |\lambda_j|^{\dim \mathcal{H}_j} \right)^{1/n} &\leq \left(\prod_{j=1}^{N} \left(\sup_{1\leq j\leq N} |\lambda_j| \right)^{\dim \mathcal{H}_j} \right)^{1/n} \\ &= \left(\left(\sup_{1\leq j\leq N} |\lambda_j| \right)^{\sum_{j=1}^{N} a_j} \right)^{1/n} \\ &= \sup_{1\leq j\leq N} |\lambda_j|, \end{aligned} \tag{3.18}$$

assim

$$\chi_k^{(q)} \leq 3 \sup_{n\geq 1} \left(2^{-k+1}\right)^{1/n} \left(\frac{\mathrm{Vol}_n(B_{(2)}^n)}{\mathrm{Vol}_n(B_{(q)}^n)} \right)^{1/n} \sup_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j|$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Segue por (3.14) e porque $B_{(q)}^n \subset B_{(2)}^n$ para $2 \leq q \leq \infty$, que

$$1 \leq \left(\frac{\mathrm{Vol}_n(B_{(2)}^n)}{\mathrm{Vol}_n(B_{(q)}^n)} \right)^{1/n} \leq C \begin{cases} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log n)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases} \tag{3.19}$$

Lema 3.3.2 ([9]). *Seja $E = (\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ um espaço de Banach n-dimensional e seja*

$$M^* = M^*(E) = \int_{S^{n-1}} ||x||d\mu(x).$$

Então para $m \in \mathbb{N}$ temos

$$e_m(B^n_{(2)}, E) \ll \begin{cases} (n/m)^{1/2}M^*, & m \le n, \\ e^{-m/n}M^*, & m > n. \end{cases}$$

Definição 3.3.3. *Seja $\Lambda = \{\lambda_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ uma sequência decrescente em módulo satisfazendo $\lim_{l\to\infty}|\lambda_l| = 0$ e sejam $N \in \mathbb{N}, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Escrevemos $N_0 = 0, N_1 = N$ e definimos indutivamente*

$$N_{k+1} = \min\{m \in \mathbb{N} : 2|\lambda_m| \le |\lambda_{N_k}|\}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ nós definimos

$$\mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}} = \bigoplus_{l=N_k}^{N_{k+1}} \mathcal{H}_l,$$

$$\theta_{N_k,N_{k+1}} = \dim \mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}} = \sum_{l=N_k}^{N_{k+1}} \dim \mathcal{H}_l$$

e definimos

$$M = \left[\frac{\log \theta_{N_1,N_2}}{\varepsilon}\right],$$

$$m_k = [2^{-\varepsilon k}\theta_{N_1,N_2}] + 1, \quad k = 1, \cdots, M$$

e $m_0 = \theta_{N_0,N_1} = \theta_{0,N}$.

Observe que

$$\sum_{k=1}^{M} m_k \le \theta_{N_1,N_2}\sum_{k=1}^{M} 2^{-\varepsilon k} + M \le C_\varepsilon \theta_{N_1,N_2},$$

onde $C_\varepsilon > 0$ depende somente de ε.

Definição 3.3.4. *Sejam $\Lambda = \{\lambda_l\}_{l\in\mathbb{N}}, N, \varepsilon, N_k, M, \theta_{N_k,N_{k+1}}$ como na Definição 3.3.3 e seja $1 \le p \le 2$. . Dizemos que $\Lambda \in K_{\varepsilon,p}$, se para todo $N \in \mathbb{N}$ temos*

$$\sum_{k=1}^{M} 2^{-k(1-\varepsilon)} \frac{\theta^{1/p}_{N_k,N_{k+1}}}{\theta^{1/2}_{N_1,N_2}} \le C_{\varepsilon,p}\theta^{1/p-1/2}_{N_1,N_2}.$$

Lema 3.3.5. *Sejam* $\Lambda = \{\lambda_l\}_{l\in\mathbb{N}}, N, \varepsilon, M, N_k, \mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}}, \theta_{N_k,N_{k+1}}$ *como na Definição 3.3.3 e sejam* $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$, $B_q^{N_k,N_{k+1}} = U_q \bigcap \mathcal{T}_{N_k,N_{k+1}}$. *Suponhamos que o operador multiplicador* Λ *seja limitado de* L^1 *em* L^2. *Então*

$$\Lambda U_p \subset \bigoplus_{k=0}^{M} \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/2}|\lambda_{N_k}|B_2^{N_k,N_{k+1}} + \bigoplus_{k=M+1}^{\infty} \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p-1/q}|\lambda_{N_k}|B_q^{N_k,N_{k+1}}.$$

Demonstração. Para $f \in \Lambda U_p \subset L_2$ seja $S_N(f)$ a N-ésima soma parcial de Fourier de f e seja $\phi_{N_k,N_{k+1}}(f) := S_{N_{k+1}}(f) - S_{N_k}(f)$. Observando que $S_{N_k}(f) = \sum_{j=0}^{N_k} \widetilde{Z}^{(j)} * f$, temos $\phi_{N_k,N_{k+1}}(f) = \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \widetilde{Z}^{(j)} * f$, e assim

$$\begin{aligned}
\sum_{k=s}^{\infty} \phi_{N_k,N_{k+1}}(f) &= \phi_{N_s,N_{s+1}} + \phi_{N_{s+1},N_{s+2}} + \cdots \\
&= \sum_{j=N_s+1}^{N_{s+1}} \widetilde{Z}^{(j)} * f + \sum_{j=N_{s+1}+1}^{N_{s+2}} \widetilde{Z}^{(j)} * f + \cdots \\
&= f - S_{N_s}(f).
\end{aligned}$$

Desta forma, como $S_{N_s}(f) \to f$ pois $f \in L^2(S^d)$, segue que

$$\lim_{s\to\infty} \left\| \sum_{k=s}^{\infty} \phi_{N_k,N_{k+1}}(f) \right\|_2 = 0$$

Logo, dada $f \in \Lambda U_p$, temos

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{N_k,N_{k+1}}(f),$$

onde a convergência da série ocorre em L^2. Mas $f = \Lambda\varphi$, $\varphi \in U_p$ e podemos então reescrever a equação acima na forma

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{N_k,N_{k+1}} \circ \Lambda(\varphi).$$

Consequentemente

$$\Lambda U_p \subseteq \bigoplus_{k=0}^{\infty} (\phi_{N_k,N_{k+1}} \circ \Lambda) U_p.$$

Mas, para cada $\varphi \in U_p$, temos

$$\phi_{N_k,N_{k+1}}(\Lambda\varphi) = \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \lambda_j \widetilde{Z}^{(j)} * \varphi = \Lambda\left(\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \widetilde{Z}^{(j)} * \varphi\right) = \Lambda(\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi).$$

Assim $\phi_{N_k,N_{k+1}} \circ \Lambda(U_p) = \Lambda \circ \phi_{N_k,N_{k+1}}(U_p)$ e obtemos

$$\Lambda U_p \ \subseteq\ \bigoplus_{k=0}^{\infty}(\Lambda \circ \phi_{N_k,N_{k+1}})U_p. \tag{3.20}$$

Agora, dada $\varphi \in U_p$, observando que $\{|\lambda_j|\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente, temos que

$$\begin{aligned}
\left\|(\Lambda \circ \phi_{N_k,N_{k+1}})\varphi\right\|_2 &= \left\|\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \lambda_j \widetilde{Z}^{(j)} * \varphi\right\|_2 \\
&\leq |\lambda_{N_k+1}| \left\|\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \widetilde{Z}^{(j)} * \varphi\right\|_2 \\
&\leq |\lambda_{N_k}| \left\|\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \widetilde{Z}^{(j)} * \varphi\right\|_2 \\
&= |\lambda_{N_k}| \|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_2.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Pela Desigualdade de Young (Teorema 2.2.12), temos

$$\|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_2 \ =\ \left\|\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \widetilde{Z}^{(j)} * \varphi\right\|_2 \ \leq\ \|\varphi\|_p \left\|\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} Z_e^{(j)}\right\|_{\frac{1}{\frac{3}{2}-\frac{1}{p}}}, \qquad 1 \leq p \leq 2 \tag{3.22}$$

Como pela definição de harmônico zonal e pelo Corolário 2.2.3 (a)

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} Z_e^{(j)}\right\|_2^2 &= \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \int_{S^d} Z_e^{(j)}\, \overline{Z_e^{(j)}}\, d\mu = \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \overline{Z_e^{(j)}}(e) \\
&= \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} a_j \ \leq\ \theta_{N_k,N_{k+1}},
\end{aligned}$$

obtemos de (3.22) para $p = 1$

$$\|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_2 \leq \theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/2} \|\varphi\|_1.$$

Por outro lado, para $p = 2$ temos $\varphi \in U_2 \subset L^2(S^d)$, ou seja, $\varphi = \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{Z}^{(j)} * \varphi$, e assim

$$\|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_2 = \left\|\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} \widetilde{Z}^{(j)} * \varphi\right\|_2 \leq \left\|\sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{Z}^{(j)} * \varphi\right\|_2 = \|\varphi\|_2.$$

Consequentemente, obtemos o seguinte sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} \|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_2 \leq \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_1, \\ \|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_2 \leq \|\varphi\|_2. \end{cases}$$

Aplicando o Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin (Teorema 3.1.12) ao sistema de desigualdades , temos que

$$\|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_2 \leq \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\|\varphi\|_p \ \leq \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, \qquad 1 \leq p \leq 2.$$

Assim de (3.21) segue que

$$\left\|\frac{(\Lambda\circ\phi_{N_k,N_{k+1}})\varphi}{|\lambda_{N_k}|\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}\right\|_2 \leq 1 \Rightarrow (\Lambda\circ\phi_{N_k,N_{k+1}})\varphi \in |\lambda_{N_k}|\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}B_2^{N_k,N_{k+1}},$$

ou seja $(\Lambda\circ\phi_{N_k,N_{k+1}})U_p \subseteq |\lambda_{N_k}|\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}B_2^{N_k,N_{k+1}}$, e obtemos assim de (3.20)

$$\Lambda U_p \ \subseteq \ \bigoplus_{k=0}^{\infty}|\lambda_{N_k}|\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}B_2^{N_k,N_{k+1}}. \tag{3.23}$$

Pelo Lema 3.1.13, observando que $2 \leq q \leq \infty$ e $\theta_{N_k,N_{k+1}} = \sum_{s=N_k}^{N_{k+1}} \dim \mathcal{H}_s$, temos para $\varphi \in B_2^{N_k,N_{k+1}}$

$$\|\varphi\|_q = \|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_q \leq \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\phi_{N_k,N_{k+1}}\varphi\|_2 = \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\varphi\|_2 \leq \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}},$$

onde $\varphi \in \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}B_q^{N_k,N_{k+1}}$ e portanto $B_2^{N_k,N_{k+1}} \subseteq \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}B_q^{N_k,N_{k+1}}$. Logo por (3.23), segue que

$$\begin{aligned}
\Lambda U_p \quad &\subseteq \quad \bigoplus_{k=0}^{\infty}\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}|\lambda_{N_k}|B_2^{N_k,N_{k+1}}\\
&= \quad \bigoplus_{k=0}^{M}\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}|\lambda_{N_k}|B_2^{N_k,N_{k+1}} + \bigoplus_{k=M+1}^{\infty}\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}|\lambda_{N_k}|B_2^{N_k,N_{k+1}}\\
&\subseteq \quad \bigoplus_{k=0}^{M}\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}|\lambda_{N_k}|B_2^{N_k,N_{k+1}} + \bigoplus_{k=M+1}^{\infty}|\lambda_{N_k}|\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\left(\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}B_q^{N_k,N_{k+1}}\right)\\
&= \quad \bigoplus_{k=0}^{M}\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}|\lambda_{N_k}|B_2^{N_k,N_{k+1}} + \bigoplus_{k=M+1}^{\infty}|\lambda_{N_k}|\theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}B_q^{N_k,N_{k+1}}.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Teorema 3.3.6. *Seja* $\Lambda = \{\lambda_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de multiplicadores decrescente em módulo tal que* $\lim_{l\to\infty} \lambda_l = 0$ *e o operador multiplicador* Λ *seja limitado de* L^1 *em* L^2*. Seja* χ_k *como na Observação 3.3.1 e sejam* M, N_l, $\theta_{N_l,N_{l+1}}$ *e* m_l *como na Definição 3.3.3 . Se* $\lim_{l\to\infty} \chi_l = 0, \Lambda \in K_{\varepsilon,2}$ *para algum* $\varepsilon > 0$, $\eta = k + \sum_{l=1}^{M} m_l$ *onde* $k \in \mathbb{N}$, *então para* $2 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq 2$, *temos*

$$e_\eta(\Lambda U_p, L^q) \leq \chi_k(1 + C),$$

e para $2 \leq p, q \leq \infty$ *temos*

$$\begin{aligned} e_\eta(\Lambda U_p, L^q) \quad &\leq \quad \chi_k \left(1 + C \left(\left\{ \begin{array}{ll} q^{1/2}, & 2 \leq q < \infty, \\ \sup_{1\leq j\leq M}(\log \theta_{N_j,N_{j+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{array} \right. \right. \right. \\ &+ \quad \left. \left. \sum_{j=M+1}^{\infty} 2^{-j} \theta_{N_j,N_{j+1}}^{1/2-1/q} \right) \right). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Demonstração. Como $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_2$ se $1 \leq q \leq 2$ e $U_p \subset U_2$ para $2 \leq p \leq \infty$, é suficiente demonstrar apenas para $p = 2$ e $q \geq 2$. Para um dado $k \in \mathbb{N}$ podemos sempre encontrar um tal $N = N(k) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\lambda_N| \geq \chi_k \geq |\lambda_{N+1}|, \tag{3.25}$$

uma vez que $\lim_{l\to\infty} \chi_l = 0$, $\{|\lambda_l|\}_{l\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente e $\lim_{l\to\infty} |\lambda_l| = 0$. Pelo Lema 3.3.5 temos que

$$\Lambda U_2 \subset \Lambda U_2 \cap \mathcal{T}_N + \bigoplus_{j=1}^{M} |\lambda_{N_j}| B_2^{N_j,N_{j+1}} + \bigoplus_{j=M+1}^{\infty} |\lambda_{N_j}| \theta_{N_j,N_{j+1}}^{1/2-1/q} B_q^{N_j,N_{j+1}},$$

onde $\mathcal{T}_N = \mathcal{T}_{0,N}$. Sejam $e_\eta = e_\eta(\Lambda U_2, L^q)$ e $e_{m_j} = e_{m_j}(B_2^{N_j,N_{j+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_j,N_{j+1}})$. Então usando propriedades dos números de entropia (Proposições 1.3.4 e 1.3.5) obtemos

$$\begin{aligned}
e_\eta &= e_{k+\sum_{l=1}^{M} m_l}(\Lambda U_2, L^q) \\
&\leq e_{k+(\sum_{l=1}^{M} m_l)+1-1}\left(\Lambda U_2 \cap \mathcal{T}_N + \bigoplus_{l=1}^{M} |\lambda_{N_l}| B_q^{N_l,N_{l+1}} + \bigoplus_{l=M+1}^{\infty} |\lambda_{N_l}| \theta_{N_l,N_{l+1}}^{1/2-1/q} B_q^{N_l,N_{l+1}}, L^q\right) \\
&\leq e_k\left(\Lambda U_2 \cap \mathcal{T}_N, L^q \cap \mathcal{T}_N\right) + \sum_{l=1}^{M} e_{m_l}\left(|\lambda_{N_l}| B_2^{N_l,N_{l+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_l,N_{l+1}}\right) \\
&+ e_1\left(\bigoplus_{l=M+1}^{\infty} |\lambda_{N_l}| \theta_{N_l,N_{l+1}}^{1/2-1/q} B_q^{N_l,N_{l+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_l,N_{l+1}}\right) \\
&\leq e_k\left(\Lambda U_2 \cap \mathcal{T}_N, L^q \cap \mathcal{T}_N\right) + \sum_{l=1}^{M} |\lambda_{N_l}| e_{m_l}\left(B_2^{N_l,N_{l+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_l,N_{l+1}}\right) \\
&+ e_1\left(\bigoplus_{l=M+1}^{\infty} |\lambda_{N_l}| \theta_{N_l,N_{l+1}}^{1/2-1/q} B_q^{N_l,N_{l+1}}, L^q \cap \mathcal{T}_{N_l,N_{l+1}}\right) \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

Para simplificar as contas, denotaremos $\theta_{N_j,N_{j+1}}^{1/2-1/q} = \theta_j$, $\mathcal{T}_{N_j,N_{j+1}} = \mathcal{T}_j$ e $B_q^{N_j,N_{j+1}} = B_q^j$. Assim, usando novamente propriedades dos números de entropia, obtemos

$$\begin{aligned}
e_{1+1-1}\left(\bigoplus_{j=M+1}^{\infty} |\lambda_{N_j}| \theta_j B_q^j, L^q \cap \mathcal{T}_j\right) &\leq e_1\left(|\lambda_{N_{M+1}}| \theta_{M+1} B_q^{M+1}, L^q \cap \mathcal{T}_{M+1}\right) \\
&+ e_{1+1-1}\left(\bigoplus_{j=M+2}^{\infty} |\lambda_{N_j}| \theta_j B_q^j, L^q \cap \mathcal{T}_j\right) \\
&\leq \cdots \\
&\leq \sum_{j=M+1}^{\infty} e_1\left(|\lambda_{N_j}| \theta_j B_q^j, L^q \cap \mathcal{T}_j\right) \\
&= \sum_{j=M+1}^{\infty} |\lambda_{N_j}| \theta_j e_1\left(B_q^j, L^q \cap \mathcal{T}_j\right) \\
&= \sum_{j=M+1}^{\infty} |\lambda_{N_j}| \theta_j. \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

Portanto por (3.26) e por (3.27) temos que

$$e_\eta \leq e_k(\Lambda U_2 \cap \mathcal{T}_N, L^q \cap \mathcal{T}_N) + \sum_{j=1}^{M} |\lambda_{N_j}| e_{m_j} + \sum_{j=M+1}^{\infty} |\lambda_{N_j}| \theta_{N_j,N_{j+1}}^{1/2-1/q}. \qquad (3.28)$$

Vamos demonstrar primeiramente que

$$e_k(\Lambda U_2 \cap \mathcal{T}_N, L^q \cap \mathcal{T}_N) \leq \chi_k. \tag{3.29}$$

Uma vez que $\{|\lambda_j|\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente, se $\varphi \in U_2 \cap \mathcal{T}_N$ temos que

$$\begin{aligned} |||\lambda_N|\varphi||_2^2 &= \sum_{j=0}^{N} |\lambda_N|^2 ||\tilde{Z}^{(j)} * \varphi||_2^2 \\ &\leq \sum_{j=0}^{N} |\lambda_j|^2 ||\tilde{Z}^{(j)} * \varphi||_2^2 \\ &= ||\Lambda_n \varphi||_2^2 \end{aligned}$$

e assim se $|\lambda_N| U_2 \cap \mathcal{T}_N \subset \Lambda_n(U_2 \cap \mathcal{T}_N)$. Mas $U_q \subset U_2$ para $q \geq 2$ e portanto

$$|\lambda_N| B^n_{(q)} \subset |\lambda_N| B^n_{(2)} \subset J^{-1}(\Lambda_n B^n_2). \tag{3.30}$$

Suponhamos que $\Theta = \{z_j\}_{1\leq j\leq m}$ seja um subconjunto χ_k-separado maximal de $J^{-1}(\Lambda_n B^n_2)$ em $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_{(q)})$, ou seja, $||z_i - z_j||_{(q)} \geq \chi_k$ para todo $i \neq j$. Pela maximalidade, segue que Θ é uma χ_k-rede de $J^{-1}(\Lambda_n B^n_2)$ em $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_{(q)})$. Observe que as bolas

$$z_j + \frac{\chi_k}{2} B^n_{(q)},\ 1 \leq j \leq m,$$

são mutuamente disjuntas. Aplicando (3.30) e (3.25) temos que

$$\begin{aligned} J^{-1}(\Lambda_n B^n_2) + \frac{\chi_k}{2} B^n_{(q)} &\subset J^{-1}(\Lambda_n B^n_2) + \frac{|\lambda_N|}{2} B^n_{(q)} \\ &\subset J^{-1}(\Lambda_n B^n_2) + \frac{1}{2} J^{-1}(\Lambda_n B^n_2) \\ &\subset \frac{3}{2} J^{-1}(\Lambda_n B^n_2). \end{aligned}$$

Então,

$$\bigcup_{j=1}^{m} (z_j + \frac{\chi_k}{2} B^n_{(q)}) \subset \frac{3}{2} J^{-1}(\Lambda_n B^n_2)$$

sendo que a união é disjunta. Logo tomando o volume obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\chi_k}{2}\right)^n m \cdot \mathrm{Vol}_n(B^n_{(q)}) &\leq \mathrm{Vol}_n\left(\frac{3}{2} J^{-1}(\Lambda_n B^n_2)\right) \\ &= \frac{3^n}{2^n} \left(\prod_{j=1}^{N} |\lambda_j|^{\dim \mathcal{H}_j}\right) \mathrm{Vol}_n(B^n_{(2)}), \end{aligned}$$

e portanto temos

$$m \leq \left(\frac{3}{\chi_k}\right)^n \frac{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(2)})}{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(q)})} \left(\prod_{j=1}^{N} |\lambda_j|^{\dim \mathcal{H}_j}\right). \tag{3.31}$$

Mas pela definição de χ_k

$$\chi_k \geq 3 \left(\frac{2^{-k+1}\mathrm{Vol}_n(B^n_{(2)})}{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(q)})} . \prod_{j=1}^{N} |\lambda_j|^{\dim \mathcal{H}_j}\right)^{1/n}$$

e obtemos assim que

$$\left(\frac{3}{\chi_k}\right)^n \leq 2^{k-1} \left(\frac{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(2)})}{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(q)})} . \prod_{j=1}^{N} |\lambda_j|^{\dim \mathcal{H}_j}\right)^{-1}. \tag{3.32}$$

Assim de (3.31) e (3.32), concluímos que a cardinalidade m de uma dada rede Θ χ_k-separada para o conjunto $J^{-1}(\Lambda_n B^n_2)$ pode ser estimada por

$$m \leq 2^{k-1},$$

o que demonstra (3.29).

Agora encontraremos um limitante superior para a expressão

$$\sum_{j=1}^{M} |\lambda_{N_j}| e_{m_j} + \sum_{j=M+1}^{\infty} |\lambda_{N_j}| \theta^{1/2-1/q}_{N_j,N_{j+1}}. \tag{3.33}$$

Temos que $e^{-m/n} \leq (n/m)^{1/2}$ para $m \geq n$. Assim, aplicando o Lema 3.3.2 e o Teorema 3.1.14 ao espaço de Banach $E = (\mathbb{R}^{\theta_{N_j,N_{j+1}}}, \|\cdot\|_{(q)})$ nós obtemos

$$\begin{aligned} e_{m_j} &\ll M^*(E) \frac{\theta^{1/2}_{N_j,N_{j+1}}}{(m_j)^{1/2}} \\ &\ll M(E) \frac{\theta^{1/2}_{N_j,N_{j+1}}}{\theta^{1/2}_{N_1,N_2}} 2^{\varepsilon j/2} \\ &\ll \frac{\theta^{1/2}_{N_j,N_{j+1}}}{\theta^{1/2}_{N_1,N_2}} 2^{\varepsilon j/2} \begin{cases} 1, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log \theta_{N_j,N_{j+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \end{aligned}$$

e assim, como $|\lambda_{N_j}| \leq |\lambda_N| 2^{-j+1}$ por definição e $\Lambda \in K_{\varepsilon,2}$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{M} |\lambda_{N_j}| e_{m_j} &\ll |\lambda_N| \sum_{j=1}^{M} 2^{-j(1-\varepsilon/2)} \frac{\theta^{1/2}_{N_j,N_{j+1}}}{\theta^{1/2}_{N_1,N_2}} \begin{cases} 1, & 2 \leq q < \infty, \\ (\log \theta_{N_j,N_{j+1}})^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \\ &\ll |\lambda_N| \begin{cases} 1, & 2 \leq q < \infty, \\ \sup_{1 \leq j \leq M} (\log \theta_{N_j,N_{j+1}})^{1/2}, & q = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto encontramos a estimativa superior para (3.33) ■

Capítulo 4

Aplicações

O operador laplaciano Δ_s sobre a esfera S^d, conhecido como laplaciano esférico ou operador de Laplace-Beltrami, é o operador multiplicador associado à sequência $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}},\ \mu_k = -k(d+k-1)$, que tem $\mathcal{H}_k$ como o espaço vetorial dos autovetores associados ao autovalor μ_k.

Seja $\Lambda^\gamma = \{\mu_k^\gamma\}_{k\in\mathbb{N}},\ \mu_k = (k(d+k-1))^{\gamma/2},\ \gamma \in \mathbb{R}$. O espaço de Sobolev W_p^γ, para $\gamma > 0$ e $1 \le p \le \infty$, é definido como sendo o espaço vetorial

$$W_p^\gamma = \{f \in L^p(S^d) : \Lambda^\gamma f \in L^p(S^d)\}$$

e está munido da norma $\|f\|_{W_p^\gamma} = \|\Lambda^\gamma f\|_p$. A bola unitária de W_p^γ é o conjunto $\Lambda^{-\gamma} U_p$, que é um conjunto de funções finitamente diferenciáveis sobre S^d.

Neste capítulo, aplicaremos os resultados obtidos no capítulo anterior para a obtenção de estimativas de números de entropia para os conjuntos de funções finitamente e infinitamente diferenciáveis sobre a esfera S^d, associados às sequências de multiplicadores $\Lambda^{(1)} = \{k^{-\gamma}\}_{k\in\mathbb{N}},\ \gamma > 0$ e $\Lambda^{(2)} = \{e^{-\gamma k^r}\}_{k\in\mathbb{N}}, \gamma > 0,\ 0 < r < 1$, respectivamente. Não nos preocuparemos neste trabalho em apresentar como se obtém estes conjuntos a partir dos operadores multiplicadores.

4.1 Entropia de Conjuntos de Funções Finitamente Diferenciáveis

Nesta seção estudaremos números de entropia de conjuntos de funções suaves finitamente diferenciáveis sobre S^d, associados às sequências de multiplicadores $\Lambda^{(1)} = \{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}},\ \lambda_j = j^{-\gamma},\ \gamma \in \mathbb{R},\ \gamma > 0$. Foi demonstrado na Seção 2.4 que o operador multiplicador $\Lambda^{(1)}$ é limitado de L^p em L^q se $\gamma > d(1/p - 1/q)_+$.

Teorema 4.1.1. *Seja* $\Lambda^{(1)} = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}},\ \lambda_k = k^{-\gamma},\ 0 < \gamma < \infty$. *Se* $\gamma/d > (1/p - 1/q)_+$ *então*

$$e_n(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \gg n^{-\gamma/d} \begin{cases} 1, & p < \infty,\ q > 1, \\ (\log n)^{-1/2}, & p < \infty,\ q = 1, \\ (\log n)^{-1/2}, & p = \infty,\ q > 1, \\ (\log n)^{-1}, & p = \infty,\ q = 1, \end{cases} \tag{4.1}$$

e se $\gamma/d > 1/2$ *então*

$$e_n(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \ll n^{-\gamma/d} \begin{cases} 1, & 1 \le p \le \infty,\quad q < \infty, \\ (\log n)^{1/2}, & 2 \le p \le \infty,\quad q = \infty. \end{cases} \tag{4.2}$$

Demonstração. Fixemos $N_1 = N \in \mathbb{N}$ e seja $\lambda(x) = x^{-\gamma}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ seja x_j tal que $\lambda(x_j) = N_j/2$. Segue pela definição de N_{j+1} que $x_j \le N_{j+1} < x_j + 1$. Temos que $2^{1/\gamma}N \le N_2 < 2^{1/\gamma}N + 1,\ \ 2^{2/\gamma}N \le N_3 < 2^{2/\gamma}N + 2^{1/\gamma} + 1$ e procedendo por indução obtemos

$$2^{j/\gamma}N \le N_{j+1} < 2^{j/\gamma}N + \sum_{i=0}^{j-1} 2^{i/\gamma} = 2^{j/\gamma}N + \frac{1 - 2^{j/\gamma}}{1 - 2^{1/\gamma}}.$$

Tomando $C = 1/(2^{1/\gamma} - 1)$ obtemos

$$2^{j/\gamma}N \le N_{j+1} < 2^{j/\gamma}(N + C)$$

e assim podemos concluir que

$$N_{j+1} \asymp 2^{j/\gamma}N. \tag{4.3}$$

Além disso por (4.3)

$$\begin{aligned} \theta_{N_j,N_{j+1}} &= \sum_{s=N_j}^{N_{j+1}} \dim \mathcal{H}_s \\ &\asymp \sum_{s=N_j}^{N_{j+1}} s^{d-1} \asymp (N_{j+1})^d \asymp (2^{j/\gamma}N)^d \end{aligned} \tag{4.4}$$

e portanto por (4.3) e (4.4)

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sum_{j=M+1}^{\infty} N_j{}^{-\gamma}\theta_{N_j,N_{j+1}}^{1/p-1/q} \\ &\asymp \sum_{j=M+1}^{\infty} \left(2^{(j-1)/\gamma}N\right)^{-\gamma}\left(2^{j/\gamma}N\right)^{d(1/p-1/q)} \\ &\asymp N^{-\gamma+d(1/p-1/q)} \sum_{j=M+1}^{\infty} 2^{-j(1-(1/p-1/q)d/\gamma)}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Como $M = [\log \theta_{N_1,N_2}/\epsilon]$, segue de (4.4) que

$$\log \theta_{N_1,N_2} \asymp \log(2^{\frac{1}{\gamma}}N)^d = d\log(2^{\frac{1}{\gamma}}N) = d(\log 2^{\frac{1}{\gamma}} + \log N) \asymp \log N,$$

assim

$$M = \left[\frac{\log \theta_{N_1,N_2}}{\varepsilon}\right] \asymp \varepsilon^{-1}\log N \tag{4.6}$$

e portanto por (4.5)

$$\sigma_1 \asymp N^{-\gamma+d(1/p-1/q)} \sum_{k=[C\epsilon^{-1}\log N]}^{\infty} 2^{-k(1-(d/\gamma)(1/p-1/q))}. \tag{4.7}$$

Como $\gamma/d > 1/p - 1/q$, temos que $|2^{-(1-(1/p-1/q)d/\gamma)}| < 1$ e assim segue que

$$\begin{aligned}\sum_{k=[C\varepsilon^{-1}\log N]}^{\infty} 2^{-j(1-(1/p-1/q)d/\gamma)} &\asymp (2^{\log N})^{-C(1-(d/\gamma)(1/p-1/q))\varepsilon^{-1}} \frac{1}{1-2^{-(1-(d/\gamma)(1/p-1/q))}} \\ &= N^{-C(1-d/\gamma(1/p-1/q))\varepsilon^{-1}}. \end{aligned}$$

Logo segue por (4.7) que

$$\sigma_1 \asymp N^{-\gamma+d(1/p-1/q)-C(1-(1/p-1/q)d/\gamma)/\varepsilon}.$$

Como $\gamma/d > 1/p - 1/q$, tomando $\varepsilon > 0$ satisfazendo

$$0 < \varepsilon \leq C\frac{1-d\gamma^{-1}(p^{-1}-q^{-1})}{d(p^{-1}-q^{-1})}$$

obtemos $\sigma_1 \asymp N^{-\gamma}$. Mas $n \asymp N^d$ pelo Lema 2.5.5 e portanto

$$\sigma_1 \asymp n^{-\gamma/d}. \tag{4.8}$$

Vamos demonstrar agora que $\Lambda = \{j^{-\gamma}\}_{j\in\mathbb{N}} \in K_{\varepsilon,p}$. Note que (4.4) e (4.6)

$$\begin{aligned}
\sigma_2 = \sum_{k=1}^{M} 2^{-k(1-\varepsilon)} \frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}^{1/p}}{\theta_{N_1,N_2}^{1/2}} &\ll \sum_{k=1}^{[C\varepsilon^{-1}\log_2 N]} 2^{-k(1-\varepsilon)} \frac{(2^{k/\gamma}N)^{d/p}}{(2^{1/\gamma}N)^{d/2}} \\
&= \sum_{k=1}^{[C\varepsilon^{-1}\log_2 N]} 2^{-k(1-\varepsilon)} 2^{(k/\gamma)(d/p)-(1/\gamma)(d/2)} N^{d(1/p-1/2)} \\
&= 2^{-d/2\gamma} N^{d(1/p-1/2)} \sum_{k=1}^{[C\varepsilon^{-1}\log_2 N]} 2^{-k(1-\varepsilon-d/\gamma p)}. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Se $\gamma/d > (1-\varepsilon)^{-1}p^{-1}$ temos que $t = -(1-\varepsilon-d/\gamma p) < 0$ e consequentemente

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{[C\varepsilon^{-1}\log_2 N]} 2^{-k(1-\varepsilon-d/\gamma p)} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-(1-\varepsilon-d/\gamma p)})^k \\
&= \frac{1}{1-2^{-(1-\varepsilon-d/\gamma p)}}.
\end{aligned}$$

Logo por (4.9)

$$\sigma_2 \leq \left(C_2 2^{-d/2\gamma} \left(\frac{1}{1-2^{-(1-\varepsilon-d/\gamma p)}} \right) \right) N^{d(1/p-1/2)} = C_{\varepsilon,p} N^{d(1/p-1/2)}. \qquad (4.10)$$

Observe que usando o fato que $n \asymp N^d$, obtemos

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \left(\prod_{j=1}^{N} |\lambda_j|^{\dim \mathcal{H}_j} \right)^{1/n} \\
&\geq \left(\prod_{j=1}^{N} |\lambda_N|^{\dim \mathcal{H}_j} \right)^{1/n} \\
&= |\lambda_N| = N^{-\gamma} \asymp n^{-\gamma/d}. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Agora, sejam $b_1, \cdots, b_{d-1}, E, F$ e C as constantes do Lema 2.5.5 e seja $f(x)$ a função dada por

$$f(x) = Ex^{d-1}\ln x + b_1 x^{d-2}\ln x + \cdots + b_{d-1}\ln x.$$

Como f é crescente temos que $f(l) \leq \int_l^{l+1} f(x)dx \leq f(l+1)$, assim segue que $\sum_{l=1}^{N-1}\int_l^{l+1} f(x)dx \leq \sum_{l=1}^{N-1} f(l+1)$ e portanto $\int_1^N f(x)dx \leq \sum_{l=2}^{N} f(l)$. Então pelo Lema

2.5.5 existem constantes D_1 e D_2, tais que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{l=2}^{N} f(l) &\geq \frac{1}{n}\int_1^N f(x)dx \\ &\geq \frac{E}{d}\frac{N^d \ln N}{n} + D_1 \\ &\geq \frac{E}{dF}\ln N - \frac{CE}{dF^2}\frac{\ln N}{N} + D_1 \\ &\geq \ln N + D_2 \end{aligned}$$

e logo

$$\begin{aligned} \ln \sigma_n &= \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{l=2}^{N} |\lambda_l|^{\dim \mathcal{H}_l}\right) \\ &= -\frac{\gamma}{n}\sum_{l=2}^{N}(\mathcal{H}_l)(\ln l) \\ &= -\frac{\gamma}{n}\sum_{l=2}^{N} f(l) \\ &\leq -\gamma \ln N - \gamma D_2. \end{aligned}$$

Portanto por (4.11) temos que

$$\sigma_n \asymp n^{-\gamma/d}. \tag{4.12}$$

Como $n \asymp N^d$, de (3.11) segue que se $\gamma/d > (1/p - 1/q)_+$ então

$$e_n(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \gg n^{-\gamma/d} \begin{cases} 1, & p < \infty,\ q > 1, \\ (\log n)^{-1/2}, & p < \infty,\ q = 1, \\ (\log n)^{-1/2}, & p = \infty,\ q > 1, \\ (\log n)^{-1}, & p = \infty,\ q = 1. \end{cases} \tag{4.13}$$

Para $2 \leq q < \infty$, obtemos por (3.19) que

$$\begin{aligned} \chi_k &\ll \sup_{n\geq 1} 2^{-k/n}\sigma_n \\ &\ll \sup_{n\geq 1} 2^{-k/n} n^{-\gamma/d}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Seja $g(x) = 2^{-k/x}x^{-\gamma/d} = e^{-k(\ln 2)/x}x^{-\gamma/d}$. Temos que

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{-k(\ln 2)/x}\left(\frac{k(\ln 2)}{x^2}\right)x^{-\gamma/d} + e^{-k(\ln 2)/x}\left(-\frac{\gamma}{d}\right)x^{-\gamma/d-1} \\ &= \frac{e^{-k(\ln 2)/x}x^{-\gamma/d}}{x}\left(\frac{k(\ln 2)}{x} - \frac{\gamma}{d}\right) \end{aligned}$$

e assim se $g'(x) = 0$, então $x = (d(\ln 2)/\gamma)k$. Portanto o máximo de $g(x)$ ocorre no ponto

$$x_k = \frac{d(\ln 2)}{\gamma}k.$$

Assim

$$\begin{aligned} g(x_k) &= 2^{-k\frac{\gamma}{d(\ln 2)k}}\left(\frac{d(\ln 2)k}{\gamma}\right)^{-\gamma/d} \\ &= 2^{-\gamma/d(\ln 2)}\left(\frac{d(\ln 2)}{\gamma}\right)^{-\gamma/d} k^{-\gamma/d} \end{aligned}$$

e logo

$$\begin{aligned} \chi_k &\ll \sup_{n\geq 1} 2^{-k/n} n^{-\gamma/d} \\ &\asymp \sup_{x\geq 1} g(x) = g(x_k) \\ &\asymp k^{-\gamma/d}. \end{aligned}$$

Então $\lim_{k\to\infty}\chi_k = 0$. Por (4.10) temos $\sigma_2 \leq C_{\varepsilon,2}$ para $p = 2$ e assim $\Lambda \in K_{\varepsilon,2}$. Por (4.8) temos que $\sigma_1 \asymp n^{-\gamma/d}$ e assim $\sum_{j=M+1}^{\infty} 2^{-j}\theta_{N_j,N_{j+1}}^{1/2-1/q} \leq C_1$. Portanto aplicando o Teorema 3.3.6 obtemos

$$e_\eta(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \ll \chi_k \asymp k^{-\gamma/d}.$$

Por (4.4) segue que

$$\eta = k + \sum_{j=1}^{M} 2^{-\varepsilon j}\theta_{N_1,N_2} \asymp k + n,$$

mas $n \asymp x_k \asymp k$ e assim $\eta \asymp k$. Logo $\eta \leq c_1 k$ e tomando $m = c_1 k$ obtemos

$$e_m(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \leq e_\eta(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \ll k^{-\gamma/d} \asymp m^{-\gamma/d}.$$

O caso $2 \leq p \leq \infty$ e $q = \infty$ é demonstrado de forma análoga. ■

4.2 Entropia de Conjuntos de Funções Infinitamente Diferenciáveis

Nesta seção vamos considerar a sequência $\Lambda^{(2)} = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{R}}$, $\lambda_k = e^{-\gamma k^r}, 0 < \gamma < \infty,\ 0 < r \leq 1$. Foi demonstrado na Seção 2.4 que o operador multiplicador $\Lambda^{(1)}$ é limitado de L^p em

L^q se $\gamma > d(1/p - 1/q)_+$. Para quaisquer $N, k \in \mathbb{N}$ e $n = \dim \mathcal{T}_{\mathrm{N}}$ denotamos

$$A_{N,k} = -\frac{1}{n}\left(k\ln 2 + \gamma \sum_{l=1}^{N} l^r \dim \mathcal{H}_l\right)$$

Observação 4.2.1. *Seja* $f(x) = x^{d+r-1}$*. Então*

$$\sum_{l=1}^{N} f(l) \asymp \int_0^N f(x)dx \asymp N^{d+r}$$

e uma vez que $\dim \mathcal{H}_l \asymp l^{d-1}$ *e* $n \asymp N^d$*, segue que*

$$\begin{aligned} A_{N,k} &= -\frac{k}{n}\ln 2 - \frac{\gamma}{n}\sum_{l=1}^{N} l^r \dim \mathcal{H}_l \\ &\asymp -\frac{k}{N^d} - \frac{1}{N^d}\sum_{l=1}^{N} l^r l^{d-1} \\ &= -\frac{k}{N^d} - \frac{1}{N^d}\sum_{l=1}^{N} f(l) \\ &\asymp -\frac{k}{N^d} - N^r. \end{aligned}$$

Considere a função $g(x) = -kx^{-d} - x^r$. Então o máximo de g é tomado no ponto $x_k = (d/r)^{1/(d+r)} k^{1/(d+r)}$. Portanto $\sup_N A_{N,k}$ é obtido quando $N \asymp k^{1/(d+r)}$ e

$$\sup_N A_{N,k} \asymp \sup_N g(N) = g(x_k) \asymp k^{r/(d+r)}.$$

Teorema 4.2.2. *Seja* $\Lambda^{(2)} = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{R}}$, $\lambda_k = e^{-\gamma k^r}, 0 < \gamma < \infty,\ 0 < r \leq 1$. *Então*

$$e_k(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \gg \exp(-C_{\gamma,r}k^{r/(d+r)}) \begin{cases} 1 & ,\ p < \infty,\ q > 1, \\ (\log k)^{-1/2} & ,\ p < \infty,\ q = 1, \\ (\log k)^{-1/2} & ,\ p = \infty,\ q > 1, \\ (\log k)^{-1} & ,\ p = \infty,\ q = 1, \end{cases} \tag{4.15}$$

onde

$$C_{\gamma,r} = \frac{d}{2}\left(\frac{2\gamma}{d}\right)^{d/(d+r)} \left(\frac{(\ln 2)(d+r)(d-1)!}{r}\right)^{r/(d+r)}.$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} 2^{-\frac{k}{n}}\left(\prod_{l=1}^{N} |\lambda_l|^{\dim \mathcal{H}_l}\right)^{\frac{1}{n}} &= e^{\ln 2^{-\frac{k}{n}}}\left(\prod_{l=1}^{N} e^{-\gamma l^r \dim \mathcal{H}_l}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= e^{-\frac{k}{n}\ln 2}\left(e^{-\frac{\gamma}{n}\sum_{l=1}^{N} l^r \dim \mathcal{H}_l}\right) \\ &= e^{-\frac{1}{n}\left(k\ln 2 + \gamma\sum_{l=1}^{N} l^r \dim \mathcal{H}_l\right)} = \exp(A_{N,k}) \end{aligned}$$

assim pelo Teorema 3.2.7 segue que

$$\begin{aligned} e_k(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) &\gg \cdot 2^{-\frac{k}{n}} \left(\prod_{l=1}^{N} |\lambda_l|^{\dim \mathcal{H}_l} \right)^{\frac{1}{n}} \begin{cases} 1 & , \ p<\infty, \ q>1, \\ (\log n)^{-1/2} & , \ p<\infty, \ q=1, \\ (\log n)^{-1/2} & , \ p=\infty, \ q>1, \\ (\log n)^{-1} & , \ p=\infty, \ q=1, \end{cases} \\ &= \exp(A_{N,k}) \begin{cases} 1 & , \ p<\infty, \ q>1, \\ (\log n)^{-1/2} & , \ p<\infty, \ q=1, \\ (\log n)^{-1/2} & , \ p=\infty, \ q>1, \\ (\log n)^{-1} & , \ p=\infty, \ q=1. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Considere as constantes $b_1, \ldots, b_{d-1}, E$ e F do Lema 2.5.5 e a função $f(x)$ dada por

$$f(x) = Ex^{d+r-1} + b_1 x^{d+r-2} + \cdots + b_{d-1}x^r.$$

Como f é crescente temos que

$$\sum_{l=1}^{N} f(l) \leq \int_1^{N+1} f(x)dx = \frac{E}{d+r}(N+1)^{d+r} + \cdots + \frac{b_{d-1}}{r+1}(N+1)^{r+1} + b_d$$

e por isso de (2.16) e (2.17), existe uma constante $D \geq 0$ tal que

$$\frac{\gamma}{n}\sum_{l=1}^{N} l^r \mathrm{dim}\mathcal{H}_l = \frac{\gamma}{n}\sum_{l=1}^{N} f(l) \leq \frac{E\gamma}{F(d+r)}(N+1)^r + D.$$

Além disso

$$\frac{k}{n} \leq \frac{1}{F}\frac{k}{(N+1)^d}$$

e portanto temos

$$\begin{aligned} A_{N,k} &= -\frac{k}{n}\mathrm{ln}2 - \frac{\gamma}{n}\sum_{l=1}^{N} l^r \mathrm{dim}\mathcal{H}_l \\ &\geq -\frac{1}{F}\left(\frac{(\mathrm{ln}2)k}{(N+1)^d} + \frac{E\gamma}{d+r}(N+1)^r \right) - D. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Agora considere a função $g(x)$ dada por

$$g(x) = -\frac{1}{F}\left(\frac{(\mathrm{ln}2)k}{x^d} + \frac{E_\gamma}{d+r}x^r \right) - D.$$

O máximo de g é tomado no ponto

$$x_k = \left(\frac{(\ln 2)d(d+r)}{E\gamma r}\right)^{1/(d+r)} k^{1/(d+r)}$$

e como $E = 2/(d-1)!$ e $F = 2/d!$ temos que

$$\begin{aligned}
g(x_k) &= -\frac{1}{F}\left(\frac{(\ln 2)k}{\left(\left(\frac{(\ln 2)kd(d+r)}{E\gamma r}\right)^{1/(d+r)}\right)^d} + \frac{E\gamma}{d+r}\left(\left(\frac{(\ln 2)kd(d+r)}{E\gamma r}\right)^{1/(d+r)}\right)^r\right) - D \\
&= -\frac{1}{F}\frac{E\gamma}{d+r}\left(\frac{(\ln 2)kd(d+r)}{E\gamma r}\right)^{r/(d+r)}\left(\frac{r}{d}+1\right) - D \\
&= -\frac{d\gamma}{d+r}\left(\frac{(\ln 2)kd(d+r)(d-1)!}{2\gamma r}\right)^{r/(d+r)}\left(\frac{r+d}{d}\right) - D \\
&= -\gamma\left(\frac{d}{2\gamma}\right)^{r/(d+r)}\left(\frac{(\ln 2)k(d+r)(d-1)!}{r}\right)^{r/(d+r)} - D \\
&= -\frac{d}{2}\left(\frac{2\gamma}{d}\right)^{d/(d+r)}\left(\frac{(\ln 2)(d+r)(d-1)!}{r}\right)^{r/(d+r)} k^{r/(d+r)} - D.
\end{aligned}$$

Portanto temos por (4.17) que

$$\sup_N A_{N,k} \geq \sup_N g(N+1) = g(x_k) = -C_{\gamma,r}k^{r/(d+r)} - D \tag{4.18}$$

onde

$$C_{\gamma,r} = \frac{d}{2}\left(\frac{2\gamma}{d}\right)^{d/(d+r)}\left(\frac{(\ln 2)(d+r)(d-1)!}{r}\right)^{r/(d+r)}.$$

Como $N \asymp k^{1/(d+r)}$ pela Observação 4.2.1, segue que $n \asymp N^d \asymp k^{d/(d+r)}$ e assim $\log n \leq C_2 \log k$. Portanto (4.15) segue de (4.18) e (4.16). ∎

Lema 4.2.3. *Seja* $\Lambda^{(2)} = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{R}}$, $\lambda_k = e^{-\gamma k^r}, 0 < \gamma < \infty,\ 0 < r < 1$. *Então para qualquer* $\varepsilon > 0$ *fixo, existe uma constante* $C > 0$ *tal que:*

$$\theta_{N_j,N_{j+1}} \asymp N_j^{d-r}, \quad j \in \mathbb{N};$$

$$\theta_{N_j,N_{j+1}} \leq C2^{\varepsilon j}N^{d-r}, \quad j \in \mathbb{N};$$

$$\sum_{j=M+1}^{\infty} 2^{-j}\theta_{N_j,N_{j+1}}^{1/p-1/q} \leq C, \quad 1 \leq p,q \leq \infty;$$

$$\eta = k + \sum_{j=1}^{M} m_j \leq k + Cn^{1-r/d}.$$

Demonstração. Temos que $2|\lambda_{N_{k+1}}| = |\lambda_{N_k}|$, ou seja $\ln 2 - \gamma N_{k+1}^r = -\gamma N_k^r$ e consequentemente

$$N_{k+1} = \left(N_k^r + \frac{\ln 2}{\gamma}\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{4.19}$$

Além disso como $N_1 = N$, temos

$$N_2^r = N^r + \frac{\ln 2}{\gamma},$$
$$N_3^r = N_2^r + \frac{\ln 2}{\gamma} = N^r + \frac{2\ln 2}{\gamma},$$

e indutivamente

$$N_{k+1}^r = N^r + \frac{k\ln 2}{\gamma}.$$

Assim de (4.19) segue que

$$\begin{aligned} N_{k+1} &= \left(N_k^r + \frac{\ln 2}{\gamma}\right)^{1/r} \\ &= \left(N_k^r\left(1 + \frac{\ln 2}{\gamma}N_k^{-r}\right)\right)^{1/r} \\ &= N_k\left(1 + \frac{\ln 2}{\gamma}N_k^{-r}\right)^{1/r}. \end{aligned}$$

Para k suficientemente grande temos $|\frac{\ln 2}{\gamma}N_k^{-r}| < 1$, assim

$$N_{k+1} = N_k\left(1 + \frac{\ln 2}{\gamma r}N_k^{-r} + \frac{(1-r)(\ln 2)^2}{2r^2(\gamma)^2}N_k^{-2r} + \frac{(1-r)(1-2r)(\ln 2)^3}{6r^3(\gamma)^3}N_k^{-3r} + \cdots\right)$$

e portanto

$$N_{k+1} - N_k = N_k\left(\frac{\ln 2}{\gamma r}N_k^{-r} + \frac{(1-r)(\ln 2)^2}{2r^2(\gamma)^2}N_k^{-2r} + \frac{(1-r)(1-2r)(\ln 2)^3}{6r^3(\gamma)^3}N_k^{-3r} + \cdots\right)$$

onde a série binomial acima passa a ser alternada a partir de um determinado termo. Logo

$$N_{k+1} - N_k \asymp N_k^{1-r} \Rightarrow N_{k+1} \asymp N_k + CN_k^{1-r}$$

e como $\dim \mathcal{H}_l \asymp l^{d-1}$, temos que

$$\begin{aligned}
\theta_{N_k,N_{k+1}} &= \sum_{l=N_k}^{N_{k+1}} a_l \asymp \sum_{l=N_k}^{N_{k+1}} l^{d-1} \\
&\asymp N_{k+1}^d - N_k^d \asymp N_k^d \left(\frac{(N_k + CN_k^{1-r})^d}{N_k^d} - 1 \right) \\
&= N_k^d((1 + CN_k^{-r})^d - 1).
\end{aligned}$$

Como $|CN_k^{-r}| < 1$ para k suficientemente grande, segue que

$$\theta_{N_k,N_{k+1}} \asymp N_k^d \left(dCN_k^{-r} + \frac{d(d-1)}{2} C^2 N^{-2r} + \cdots + C^d N^{-dr} \right) \asymp N_k^{d-r}, \tag{4.20}$$

consequentemente

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}}{\theta_{N_1,N_2}} \right)^{\frac{r}{d-r}} &\asymp \left(\frac{N_k}{N} \right)^r \\
&= N^{-r} \left(N^r + (k-1) \frac{\ln 2}{\gamma} \right) \\
&\leq N^{-r} \left(N^r + k \frac{\ln 2}{\gamma} \right) \\
&= 1 + k \frac{\ln 2}{\gamma N^r} \\
&\leq 1 + \frac{\ln 2}{\gamma} k \leq 2^{\varepsilon k}
\end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}}{\theta_{N_1,N_2}} \leq C_1 2^{\frac{\varepsilon(d-r)}{r} k} = C_1 2^{\varepsilon' k}.$$

Além disso temos que

$$\begin{aligned}
|\lambda_N| \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k} \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} &= |\lambda_N| \theta_{N_1,N_2}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k} \left(\frac{\theta_{N_k,N_{k+1}}}{\theta_{N_1,N_2}} \right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \\
&\leq C_2 |\lambda_N| N^{(d-r)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k} 2^{\varepsilon'' k} \\
&= C_2 |\lambda_N| N^{(d-r)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \sum_{k=M+1}^{\infty} (2^{-(1-\varepsilon'')})^k \\
&= C_2 |\lambda_N| N^{(d-r)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (2^{-(1-\varepsilon'')})^{M+1} \sum_{j=0}^{\infty} (2^{-(1-\varepsilon'')})^j \\
&= C_2 |\lambda_N| N^{(d-r)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (2^{-(1-\varepsilon'')})^{M+1} \frac{1}{1 - (2^{-(1-\varepsilon'')})} \\
&\leq C_3 |\lambda_N| N^{(d-r)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (2^{-(1-\varepsilon'')})^M,
\end{aligned}$$

onde $\varepsilon'' = \varepsilon'(1/p - 1/q)$. Temos que $M = \left[\frac{\log \theta_{N_1,N_2}}{\varepsilon}\right] \asymp \frac{\log \theta_{N_1,N_2}}{\varepsilon}$, além disso por (4.20) $\theta_{N_1,N_2} \asymp N^{d-r}$, assim

$$\begin{aligned}
|\lambda_N| \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k} \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} &\leq C_3 |\lambda_N| N^{(d-r)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (2^{-(1-\varepsilon'')})^{C_4(\log \theta_{N_1,N_2})/\varepsilon} \\
&= C_3 |\lambda_N| N^{(d-r)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (2^{\log \theta_{N_1,N_2}})^{-C_4(1-\varepsilon'')/\varepsilon} \\
&= C_3 |\lambda_N| N^{(d-r)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (\theta_{N_1,N_2})^{-C_4(1-\varepsilon'')/\varepsilon} \\
&\leq C_5 |\lambda_N| N^{(d-r)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} N^{-C_3(d-r)(1-\varepsilon'')/\varepsilon} \\
&= C_5 |\lambda_N| N^{(d-r)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-C_4(d-r)(1+\varepsilon'')/\varepsilon} \\
&\leq C_5 |\lambda_N|
\end{aligned}$$

se $\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) - C_3(1-\varepsilon'')/\varepsilon < 0$, ou seja $0 < \varepsilon < \frac{C_3(1-\varepsilon'')}{1/p-1/q}$. Então

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k} \theta_{N_k,N_{k+1}}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \leq C_5.$$

Por outro lado temos por (4.20) que

$$\begin{aligned}
\eta &= k + \sum_{k=1}^{M} m_k \\
&= k + \sum_{k=1}^{M} \left[2^{-\varepsilon k} \theta_{N_1,N_2}\right] + 1 \\
&= k + M + \sum_{k=1}^{M} \theta_{N_1,N_2} 2^{-\varepsilon k} \\
&\leq k + C_1 \theta_{N_1,N_2} \\
&\leq k + C_2 N^{d-r} \\
&= k + C_2 \left(N^d\right)^{(1-\frac{r}{d})} \\
&\leq k + C_3 n^{(1-\frac{r}{d})}.
\end{aligned}$$

■

Teorema 4.2.4. *Seja* $\Lambda^{(2)} = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\lambda_k = e^{-\gamma k^r}, 0 < \gamma < \infty,\ 0 < r < 1$. *Então para* $2 \leq p \leq \infty$ *temos*

$$e_k(\Lambda^{(2)} U_p, L^q) \ll \exp(-C_{\gamma,r} k^{r/(d+r)}) \begin{cases} 1 & , \quad 1 \leq q < \infty, \\ \log k & , \quad q = \infty, \end{cases} \tag{4.21}$$

onde $C_{\gamma,r}$ é a constante dada no Teorema 4.2.2

Demonstração. Pelo Lema 4.2.3 temos que existem constantes C_1, C_2 e ε tais que para qualquer $1 \leq q \leq \infty$, temos

$$\sum_{j=M+1}^{\infty} 2^{-j}\theta_{N_j,N_{j+1}}^{1/2-1/q} \leq C_1 \quad \text{e} \quad \theta_{N_j,N_{j+1}} \leq C_2 2^{\varepsilon j} N^{d-r}.$$

Para $1 \leq j \leq M$ temos

$$\begin{aligned}
\log \theta_{N_j,N_{j+1}} &\leq \log\left(C_2 2^{\varepsilon j} N^{d-r}\right) \\
&\leq \log C_2 + M\varepsilon + (d-r)\log N \\
&\leq \log C_2 + \log C_2 2^{\varepsilon} N^{d-r} + (d-r)\log N \\
&\leq C_3 \log N \\
&\leq C_4 \log n
\end{aligned}$$

e portanto

$$\sup_{1\leq j\leq M} (\log\theta_{N_j,N_{j+1}})^{1/2} \leq C_5 (\log n)^{1/2}.$$

Para $2 \leq q < \infty$, obtemos por (4.20) que

$$\begin{aligned}
\chi_k &= 3\sup_{n\geq 1}(2^{-k+1})^{1/n}\left(\frac{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(2)})}{\mathrm{Vol}_n(B^n_{(q)})}\right)^{1/n}\left(\prod_{j=1}^{N}|\lambda_j|^{\dim\mathcal{H}_j}\right)^{1/n} \\
&\leq 3\sup_{n\geq 1}(2^{-k+1})^{1/n} C q^{1/2}\prod_{j=1}^{N} e^{-\gamma j^r \dim\mathcal{H}_j/n} \\
&\leq \sup_{n\geq 1} C_6 e^{-\frac{1}{n}\left(k\ln 2 + \gamma\sum_{j=1}^{N} j^r \dim\mathcal{H}_j\right)} \\
&= \sup_{N} C_6 e^{A_{N,k}} \\
&= C_6 e^{\sup_N A_{N,k}}.
\end{aligned}$$

De modo análogo podemos mostrar que

$$\chi_k \geq C_7 e^{\sup_N A_{N,k}}.$$

Considere a função $f(x)$ dada na demonstração do Teorema 4.2.2. Então

$$\sum_{l=1}^{N} f(l) \geq \int_0^{N+1} f(x)dx = \frac{E}{d+r}N^{d+r} + \cdots + \frac{b_{d-1}}{r+1}N^{r+1} + b_d \geq \frac{E}{d+r}N^{d+r}$$

e portanto de (2.18) existe uma constante $D_1 \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{n}\sum_{l=1}^{N} l^r \dim H_l &= \frac{\gamma}{n}\sum_{l=1}^{N} f(l) \\ &\geq \frac{E\gamma}{F(d+r)}N^r - \frac{E\gamma C}{F^2(d+r)}N^{r-1} \\ &\geq \frac{E\gamma}{F(d+r)}N^r - D_1. \end{aligned}$$

Uma vez que da Observação 4.2.1 temos $N \geq C_1 k^{1/(d+r)}$, então existe uma constante $D_2 > 0$ tal que

$$\frac{k}{n} \geq \frac{k}{FN^d} - \frac{Ck}{F^2N^{d+1}} \geq \frac{k}{FN^d} - \frac{C}{F^2C_1^2k^{(1-r)/(d+r)}} \geq \frac{k}{FN^d} - D_2.$$

Logo podemos concluir que existe uma constante $D_3 > 0$ tal que

$$A_{N,k} \leq -\frac{1}{F}\left(\frac{(\ln 2)k}{N^d} + \frac{E\gamma}{d+r}N^r\right) + D_3.$$

Considere a função $g(x)$ definida por

$$g(x) = -\frac{1}{F}\left(\frac{(\ln 2)k}{x^d} + \frac{E\gamma}{d+r}x^r\right) + D_3.$$

Vimos na demonstração do Teorema 4.2.2 que o máximo de g é obtido no ponto

$$x_k = \left(\frac{(\ln 2)d(d+r)}{E_\gamma r}^{1/(d+r)}\right)k^{1/(d+r)}$$

e portanto temos que

$$\sup_N A_{N,k} \leq \sup_N g(N) = g(x_k) = -C_{\gamma,r}k^{r/(d+r)} + D_3, \tag{4.22}$$

onde a constante $C_{\gamma,r}$ é dada no Teorema 4.2.2. Por (4.21) e (4.22) temos para $2 \leq q < \infty$ que

$$\begin{aligned} \chi_k &\leq C_6 \exp(-C_{\gamma,r}k^{r/(d+r)}) + D \\ &\leq C_8 \exp(-C_{\gamma,r}k^{r/(d+r)}). \end{aligned}$$

e portanto $\lim_{k\to\infty}\chi_k = 0$. Assim pelo Teorema 3.3.6 e por (4.10) e (4.11) obtemos para $2 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q < \infty$.

$$\begin{aligned} e_\eta(\Lambda U_p, L^q) &\leq \chi_k\left(1 + C'\left(q^{1/2} + \sum_{j=M+1}^{\infty} 2^{-j}\theta_{N_j,N_{j+1}}^{1/2-1/q}\right)\right) \\ &\ll \exp\left(-C_{\gamma,r}k^{r/(d+r)}\right). \end{aligned}$$

Como $\eta \leq k + C_9 n^{1-r/d}$ pelo Lema 4.2.3, então para $2 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q < \infty$ temos

$$e_{k+C_9 k^{(d-r)/(d+r)}}(\Lambda U_p, L^q) \ll \exp\left(-C_{\gamma,r} k^{r/(d+r)}\right).$$

Seja $m = k + C_9 k^{(d-r)/(d+r)}$. Temos que

$$m^{r/(d+r)} = k^{r/(d+r)}(1 + C_9 k^{-2r/(d+r)})^{r/(d+r)},$$

então

$$\begin{aligned} C_{\gamma,r}(-k^{r/(d+r)} + m^{r/(d+r)}) &= C_{\gamma,r} k^{r/(d+r)}[-1 + (1 + C_9 k^{-2r/(d+r)})^{r/(d+r)}] \\ &\leq C_{10} \end{aligned}$$

e portanto

$$e_m(\Lambda U_p, L^q) \ll \exp\left(-C_{\gamma,r} k^{r/(d+r)}\right)$$

A demonstração para o caso $2 \leq p \leq \infty$ e $q = \infty$ é feita de forma análoga. ∎

Bibliografia

[1] Edmunds, D. E., Triebel, H., *Function spaces, entropy numbers, differential operators*, Cambridge Univ. Press, 1996.

[2] Figiel, T., Lindenstrauss, J., Milman, V. D., *The dimension of almost spherical sections of convex bodies*, *Acta Math.* **139** (1) (1977), p. 53-94.

[3] Folland, G. B. *Real Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1984.

[4] Golitschek, M. v., Lorentz, G. G., Makovoz, Y., *Constructive approximation: advanced problems.*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 304. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[5] Kushpel, A., Tozoni, S. A., *Entropy and widths of multiplier operators on two-point homogeneous spaces*, Relatório de Pesquisa, IMECC/UNICAMP, RP01/08, janeiro/2008.

[6] Kwapień, S., *Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients*, *Studia Math.* **44** (1972), p. 583-595.

[7] Müler, C. *Spherical Harmonics*, Lecture Notes in Math. 17, Springer-Verlag, Berlin, 1966

[8] Oliveira, F. M. *Análise Harmônica na Esfera Unitária d-dimensional Real*, Dissertação de Mestrado, IMECC/Unicamp, Agosto de 2005.

[9] Pajor, A., Tomczak-Jaegermann, N. *Subspaces of small codimension of finite-dimensional Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc.* **97** (1986), p. 637-642.

[10] Pietsch, A. *Operator Ideals*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1980.

[11] Pisier, G., *The volume of convex bodies and Banach space geometry*, Cambridge Univ. Press, London, 1989.

[12] Szegö, G., *Orthogonal polynomials*, AMS, New York, 1939.

[13] Stein, E.M. *Singular Integrals and Differentiability Properteis of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1970.

[14] Stein, E. M., Weiss, G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidian Spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1971.