
Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação de Mestrado

**Equações de Diferenças Finitas na
Modelagem da Hanseníase em
Imperatriz - MA**

por

José Gilson Sales e Silva

Mestrado Profissional em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi

Equações de Diferenças Finitas na Modelagem da Hanseníase em Imperatriz - MA

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **José Gilson Sales e Silva** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 16 de março de 2009



Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi
Orientador

Banca Examinadora:

- 1 Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi
- 2 Profa. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa
- 3 Profa. Dr. Adilson José Vieira Brandão

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **Mestre em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Sales e Silva, José Gilson
Sa32e Equações de diferenças finitas na modelagem da Hansenfase em
Imperatriz – MA/José Gilson Sales e Silva -- Campinas, [S.P. :s.n.],
2009.

Orientador : Rodney Carlos Bassanezi
Dissertação(mestrado profissional) – Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Modelos matemáticos - Epidemiologia. 2. Equações de diferença.
3. Hansenfase. I. Bassanezi, Rodney Carlos. II. Universidade Estadual
de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica. III. Título.

Título em inglês: Modelling the Hansenfase of Imperatriz - MA using difference
equations.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Mathematical modelling - Epidemiology. 2.
Difference equations. 3. Hansenfase.

Área de concentração: Biomatemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi (UF-ABC)
Profa. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Adilson José Vieira Brandão (UF-ABC)

Data da defesa: 16/03/2009

Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 16 de março de 2009 e
Aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



Prof. (a). Dr (a). RODNEY CARLOS BASSANEZI



Prof. (a). Dr (a). ADILSON JOSÉ VIEIRA BRANDÃO



Prof. (a). Dr (a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA

A meus pais,
A minha família,
A Eliziete.
Dedico

Agradecimentos

Meus agradecimentos a todos os professores e monitores do IMECC-UNICAMP que atuaram no mestrado profissional pela contribuição que tanto nos engrandeceu, a minha companheira Eliziete Cordeiro de Sousa por nos devolver a confiança e ao pequeno Hugo Ricardo por nos fazer lembrar que ainda existe esperança; aos colegas da UEMA e CEFET-MA pela boa convivência durante o curso. Ao Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi, pela indicação do tema e pela segura orientação sem a qual este trabalho jamais seria concretizado; ao grupo de Imperatriz: Adão, Bosco, Heron, Ociran e Remi, pelo incentivo e colaboração. De maneira bastante especial, destaco os colegas Antônio Remi Kieling Hoffmann e João Bosco Coelho pela incansável ajuda e apoio incondicional durante todas as fases deste trabalho. Agradecemos ainda às professoras Sueli e Sandra, pela compreensão em cada momento de dificuldade que tivemos que enfrentar; aos doutorandos Moiseis Cecconello e Felix pela preciosa colaboração na fase final deste trabalho; ao meu irmão Santiago Sales e Silva, à amiga Déa Fernandes, aos amigos Nivaldo e Glauco, e à ex-aluna Lucivânia Paz, pela motivação e paciência em nos acompanhar; ao médico do CEFET-UNED Abraham Elmescany pela tradução e esclarecimento dos termos técnicos sobre a hanseníase; à Irmã Giuliana Villa, coordenadora da Vila João XXIII (colônia remanescente de Hansenianos em Imperatriz, pelo depoimento histórico e esclarecimentos); a Sandro Rogério Mesquita, da vigilância epidemiológica de Imperatriz pela paciência e disposição com que nos forneceu os dados relativos à hanseníase no município.

Resumo

Apresentamos uma abordagem resumida da epidemiologia matemática, dos modelos epidemiológicos tipo SI, SIS e SIR, bem como um embasamento sobre as equações de diferenças finitas. Utilizamos um modelo matemático determinístico em tempo discreto tipo SI, simplificado, para interpretação e análise da epidemia de hanseníase do município de Imperatriz-MA, com base em dados relativos ao número de contatos registrados e casos notificados no período de 1994 a 2007. Apresentamos também uma validação do modelo e histórico da epidemia em Imperatriz.

Abstract

We present an approach summarized from epidemiology mathematics , from the models epidemiological type Oneself SI SS e SIR , as well as a basement on the subject of the equations of differences finite. Uses a model mathematical deterministic in time discreet type SI about to interpretation e analysis from epidemics from hansenfase of the county of Imperatriz- MA , based on dice relative the number of contacts registered e cases notifying into the period of 1994 the 2007. We present also a validation of the model e historical from epidemics in the Imperatriz

Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
Introdução	1
1 Dinâmica da Hanseníase	3
1.1 Introdução	3
1.2 Aspectos Epidemiológicos	3
1.2.1 Agente Etiológico	4
1.2.2 Modo de Transmissão	4
1.3 Aspectos Clínicos	5
1.3.1 Sinais e Sintomas Dermatológicos	5
1.3.2 Tipos de Hanseníase	6
1.3.3 Taxa de Prevalência de Hanseníase	8
1.3.4 Diferenciação Regional	9
1.3.5 Localização Geográfica e Referências de Imperatriz	11
1.3.6 A hanseníase em Imperatriz	12
2 Modelos Matemáticos e Epidemiológicos	14
2.1 Introdução	14
2.2 Modelos Matemáticos	14
2.3 Evolução da Epidemiologia Matemática	16
2.3.1 Objetivos da Epidemiologia Matemática	18
2.3.2 Paradigmas da Epidemiologia Matemática	18
2.4 Conceitos Epidemiológicos	19

2.5	Diferentes Modelos Epidemiológicos	21
2.5.1	Hipóteses	22
2.5.2	Modelo tipo SI	23
2.5.3	Modelo tipo SIS	24
2.5.4	Modelo tipo SIR	25
2.6	Equações de Diferenças Finitas	27
2.6.1	Exemplo:	29
3	Modelagem Matemática da Hanseníase no Município de Imperatriz	33
3.1	Introdução	33
3.2	O Modelo SIR	34
3.3	O Modelo Simplificado SI	35
3.3.1	Ponto de Equilíbrio.	40
3.4	Aplicação na Avaliação da Hanseníase no Município de Imperatriz- MA	43
3.4.1	Cálculo dos Parâmetros α , β , γ e r	43
3.4.2	Projeções da População de Infecciosos no Município de Imperatriz.	46
	Considerações Finais	50
	Anexo	52
	Referências bibliográficas	55

Introdução

Apresentar uma aplicação das equações de diferenças finitas na resolução de modelos matemáticos determinísticos em tempo discreto é a principal proposta deste trabalho. Considerando que a modelagem matemática é atualmente uma das principais estratégias para o entendimento das relações epidemiológicas, particularmente nos casos de interação entre indivíduos infecciosos e suscetíveis de uma população.

A modelagem tem alcance muito além da abordagem aqui apresentada, sendo utilizada na análise e interpretação de fenômenos nas mais diversas áreas do conhecimento, como: Física, Engenharia, Química, Biologia, Economia, Dinâmica Atmosférica, Robótica, Otimização de Recursos, Inteligência Artificial, entre tantas outras; o que mostra claramente o quanto a Matemática é essencial à interdisciplinaridade e complementaridade das ciências e tecnologias.

A Matemática permite, enquanto linguagem das ciências, a construção, análise e interpretação de modelos, desde os mais simples até os de alta complexidade de acordo com a situação-problema estudada. Tais modelos podem ser divididos em contínuos (aqueles que usam variáveis contínuas) ou discretos (quando suas equações têm campo de definição num conjunto de valores discretos).

Historicamente os modelos biológicos tiveram sua origem com Thomas Robert Malthus (1766-1834) em 1798, quando publicou o trabalho “An Essay on the Principle of Population”. Posteriormente o desenvolvimento científico e tecnológico possibilitou a criação de modelos com maior grau de abrangência na tentativa de analisar, entender e controlar situações de nossa realidade.

Neste trabalho restringimo-nos a modelos determinísticos em tempo discreto aplicados à epidemiologia. A variável independente, em todas as equações, varia

discretamente, isto é, o tempo t não é considerado contínuo e assume valores igualmente espaçados como uma hora, um dia, um ano, etc. Dessa forma as equações envolvidas são Equações de Diferenças Finitas, que descrevem as mudanças nas variáveis dependentes nos sucessivos períodos de tempo.

Modelos discretos, se forem apropriados, podem ter também motivação didática. Se assumirem um número menor de pré-requisitos de matemática, podem ser introduzidos em disciplinas dos primeiros anos da Universidade. Assim um outro propósito deste trabalho é o de ser subsidio para professores na abordagem de problemas de modelagem em suas disciplinas.

O modelo aqui apresentado pretende descrever a Dinâmica da Hanseníase no Município de Imperatriz-MA. É um modelo bastante simples, certamente o mais simples modelo epidemiológico, assim mesmo de fundamental importância por acreditarmos ser um trabalho pioneiro nesta cidade. Resta-nos, de qualquer forma, o princípio aceito na área: “um modelo é bom até que outro melhor o substitua” [2]. Dada a largada, esperamos que esta seja uma contribuição para a descrição e análise da epidemia de hanseníase em Imperatriz, bem como de outras endemias na região.

No capítulo 1 descrevemos a dinâmica da hanseníase, seus aspectos epidemiológicos, agente etiológico, modo de transmissão, bem como seus diversos tipos. Tratamos ainda da diferenciação regional, prevalência e detecção, destacando a situação do município de Imperatriz-MA.

No capítulo 2 apresentamos alguns conceitos epidemiológicos correntes, objetivos e paradigma da epidemiologia matemática, bem como um embasamento teórico sobre modelos matemáticos e equações de diferenças finitas. Também apresentamos três modelos epidemiológicos em tempo discreto.

No capítulo 3 utilizamos o modelo simplificado SI para modelar a epidemia de hanseníase com base nos dados relativos à população de infecciosos e suscetíveis no município de Imperatriz-MA.

Dinâmica da Hanseníase

1.1 Introdução

”Para entender um problema, temos que tentar ao menos algumas das soluções mais óbvias e descobrir que elas falham; então, redescobrimos que existe uma dificuldade - um problema”

Karl R. Popper

Aqui apresentamos os aspectos epidemiológicos e clínicos, modo de transmissão e distribuição geográfica da hanseníase nas diversas regiões do Brasil, destacando particularmente a situação da doença no município de Imperatriz-MA.

1.2 Aspectos Epidemiológicos

Hanseníase é uma doença infecto-contagiosa, de evolução lenta, que se manifesta principalmente através de sinais e sintomas dermatoneurológicos: lesões na

pele e nos nervos periféricos, principalmente nos olhos, mãos e pés. O comprometimento dos nervos periféricos é a característica principal da doença, dando-lhe um grande potencial para provocar incapacidades físicas que podem, inclusive, evoluir para deformidades. Estas incapacidades e deformidades podem acarretar alguns problemas, tais como diminuição da capacidade de trabalho, limitação da vida social e problemas psicológicos. São as deformidades causadas pela doença responsáveis também pelo estigma e preconceito. Entretanto a hanseníase é doença curável, e quanto mais precocemente diagnosticada e tratada mais rapidamente se cura o paciente [5].

1.2.1 Agente Etiológico

A hanseníase é causada pelo *Mycobacterium leprae*, ou bacilo de Hansen¹, que é um parasita intracelular, com afinidade por células cutâneas e por células dos nervos periféricos, que se instala no organismo da pessoa infectada, podendo se multiplicar. O tempo de multiplicação do bacilo é lento, podendo durar de 11 a 16 dias. O *Mycobacterium leprae* tem alta infectividade e baixa patogenicidade, isto é, infecta muitas pessoas mas no entanto, só poucas adoecem. O homem é reconhecido como única fonte de infecção (reservatório), embora tenham sido identificados animais naturalmente infecciosos [5].

1.2.2 Modo de Transmissão

O homem é considerado a única fonte de infecção da hanseníase. O contágio dá-se através de uma pessoa doente, portadora do bacilo de Hansen, não tratada, que o elimina para o meio exterior, contagiando pessoas suscetíveis. A principal via de eliminação do bacilo, pelo indivíduo doente de hanseníase, e a

¹Gerhard Henrik Armauer Hansen (1891 - 1912)- Médico Noruêgues; Identificou a bactéria da Lepra (*Mycobacterium leprae*).

mais provável porta de entrada no organismo passível de ser infectado são as vias aéreas superiores, o trato respiratório. No entanto, para que a transmissão do bacilo ocorra, é necessário um contato direto com a pessoa doente não tratada.

1.3 Aspectos Clínicos

Na hanseníase, as lesões de pele sempre apresentam alteração de sensibilidade. Esta é uma característica que a diferencia das lesões de pele provocadas por outras doenças dermatológicas. A hanseníase manifesta-se através de sinais e sintomas dermatológicos e neurológicos que podem levar à suspeição diagnóstica da doença. As alterações neurológicas, quando não diagnosticadas e tratadas adequadamente, podem causar incapacidades físicas que podem evoluir para deformidades [5].

1.3.1 Sinais e Sintomas Dermatológicos

A hanseníase manifesta-se através de lesões de pele que se apresentam com diminuição ou ausência de sensibilidade. As lesões mais comuns são:

- i) Manchas pigmentares ou discrômicas: resultam da ausência, diminuição ou aumento de melanina ou depósito de outros pigmentos ou substâncias na pele.
- ii) Placa: é lesão que se estende em superfície por vários centímetros. Pode ser individual ou constituir aglomerado de placas.
- iii) Infiltração: aumento da espessura e consistência da pele, com menor evidência dos sulcos, limites imprecisos, acompanhando-se, às vezes, de eritema discreto. Pela vitropressão, surge fundo de cor café com leite. Resulta da presença na derme de infiltrado celular, às vezes com edema e vasodilatação.

iv) Nódulo: lesão sólida, circunscrita, elevada ou não, de 1 a 3 cm de tamanho. É processo patológico que localiza-se na epiderme, derme e/ou hipoderme. Pode ser lesão mais palpável que visível.

Essas lesões podem estar localizadas em qualquer região do corpo e podem, também, acometer a mucosa nasal e a cavidade oral. Ocorrem, porém, com maior frequência, na face, orelhas, nariz, nádegas, braços, pernas e costas.



Figura 1.1: Sinais dermatológicos da hanseníase. Fonte: Sinan NET

1.3.2 Tipos de Hanseníase

Existem diferentes formas clínicas de Hanseníase, umas mais graves que outras, que se desenvolvem de acordo com a resposta do sistema imunológico de cada pessoa [5].



Figura 1.2: Hanseníase Indeterminada. Fonte: Sinan NET

- i- **Hanseníase Indeterminada:** forma mais benigna. Geralmente, encontra-se apenas uma mancha, de cor mais clara que a pele normal, com diminuição da sensibilidade. Mais comum em crianças.



Figura 1.3: Hanseníase Paucibacelar. Fonte: Sinan NET

- ii- **Hanseníase Paucibacelar:** forma também benigna e localizada, ocorre em pessoas com alta resistência ao bacilo. Caracteriza-se por poucas manchas ou apenas uma, avermelhada, levemente elevada (como uma placa) e com limites bem definidos. Há ausência de sensibilidade, dor, fraqueza e atrofia muscular.



Figura 1.4: Hanseníase Multibacelar. Fonte: Sinan NET

- iii- **Hanseníase Multibacelar:** neste caso o bacilo se multiplica muito, levando a um quadro mais grave. Há atrofia muscular, inchaço das pernas e surgimento de nódulos na pele. Os órgãos internos também são acometidos pela doença.

1.3.3 Taxa de Prevalência de Hanseníase

Apresentamos aqui três dos principais indicadores relativos à hanseníase, destacando particularmente a **taxa de prevalência**, por ser o indicador que mede a magnitude da doença em uma região e que permite a comparação entre as diferentes regiões ou diferentes momentos da epidemia de hanseníase, e portanto fornece subsídios ao planejamento das ações de saúde pública.

Conceituação: Número de casos de hanseníase (código A30 da CID-10) em curso de tratamento, por 10 mil habitantes, existentes na população residente em determinado espaço geográfico, na data de referência do ano considerado.

A definição de caso em curso de tratamento de hanseníase baseia-se em critérios adotados pelo Ministério da Saúde para orientar ações de vigilância epidemiológica e controle da doença em todo o país.

Interpretação: Estima a magnitude da epidemia, com base na totalidade de casos em tratamento no momento da avaliação (prevalência por ponto) numa determinada população em intervalo de tempo determinado, e a população exposta ao risco de adquirir a doença (suscetíveis)².

Taxas elevadas de prevalência de hanseníase refletem, em geral, baixos níveis de condições de vida e desenvolvimento socioeconômico e falta de atenção à saúde pública. Indicam deficiências operacionais dos serviços de saúde para diagnosticar, tratar e curar os casos ocorridos anualmente. No Brasil, as taxas são classificadas em: baixa, média, alta, muito alta, e situação hiperendêmica. Quando a prevalência se mantém baixa (menos que um caso por 10 mil), a hanseníase não é considerada um problema de saúde pública [ver tabela 1.5].

Método de Cálculo: Os indicadores são aproximações quantificadoras de de-

²Ver Capítulo 2, seção 2.4

terminados fenômenos, são usados para descrever determinada situação e para acompanhar mudanças ou tendências em um período e tempo. O principal indicador epidemiológico da hanseníase utilizado pelo Ministério da Saúde é a taxa de prevalência calculada conforme a expressão mostrada na terceira linha da tabela 1.5.

Indicadores*	Construção	Utilidade	Parâmetros
1. Coeficiente de detecção anual de casos novos, por 10 mil hab.	$\frac{\text{Casos novos residentes diagnosticados no ano}}{\text{População total residente em 1/7/ano}} \times 10 \text{ mil}$	Determinar a tendência secular da endemia e medir a intensidade das atividades de detecção dos casos	Hiperendêmico: $\geq 4,0/10$ mil hab. Muito alto: $4,0 - 2,0/10$ mil hab. Alto: $2,0 - 1,0/10$ mil hab. Médio: $1,0 - 0,2/10$ mil hab. Baixo: $< 0,2/10$ mil hab.
2. Coeficiente de detecção anual de casos novos, na população de 0 a 14 anos, por 10 mil hab.	$\frac{\text{Casos novos residentes, com 0 a 14 anos de idade, diagnosticados no ano}}{\text{População residente, com idade entre 0 e 14 anos, em 1/7/ano}} \times 10 \text{ mil}$	Determinar a tendência secular da endemia	Hiperendêmico: $\geq 1,0/10$ mil hab. Muito alto: $1,0 - 0,5/10$ mil hab. Alto: $0,5 - 0,25/10$ mil hab. Médio: $0,25 - 0,05/10$ mil hab. Baixo: $< 0,05/10$ mil hab.
3. Coeficiente de prevalência por 10 mil hab.	$\frac{\text{Casos existentes residentes (em registro ativo) em 31/12/ano}}{\text{População total residente em 31/12/ano}} \times 10 \text{ mil}$	Medir a magnitude da doença	Hiperendêmico: $\geq 20,0/10$ mil hab. Muito alto: $20,0 - 0,0/10$ mil hab. Alto: $10,0 - 5,0/10$ mil hab. Médio: $5,0 - 1,0/10$ mil hab. Baixo: $< 1,0/10$ mil hab.

Figura 1.5: Indicadores da hanseníase. Fonte: Sinan – SES.

1.3.4 Diferenciação Regional

Apresentamos a seguir a distribuição regional da hanseníase no Brasil. O mapa (fig 1.6), o gráfico (fig 1.7) e a tabela (fig 1.8) ilustram o grau de endemia nas diferentes unidades e a série histórica referente à prevalência e detecção de casos novos da doença. Convém notar que no gráfico 1.7 o eixo da esquerda indica os coeficientes anuais de prevalência enquanto o eixo da direita indica os coeficientes de detecção para o mesmo período 1985 a 2003.

Observa-se uma expansão da hanseníase em focos localizados nas regiões Norte, Centro-Oeste e Nordeste com os mais altos índices do país, provavelmente associados às frentes de colonização agrícola da Amazônia Legal a partir dos anos

70 e ao crescimento desordenado de determinadas cidades e regiões metropolitanas [20].



Figura 1.6: Prevalência Brasil - 2005. Sinan NET

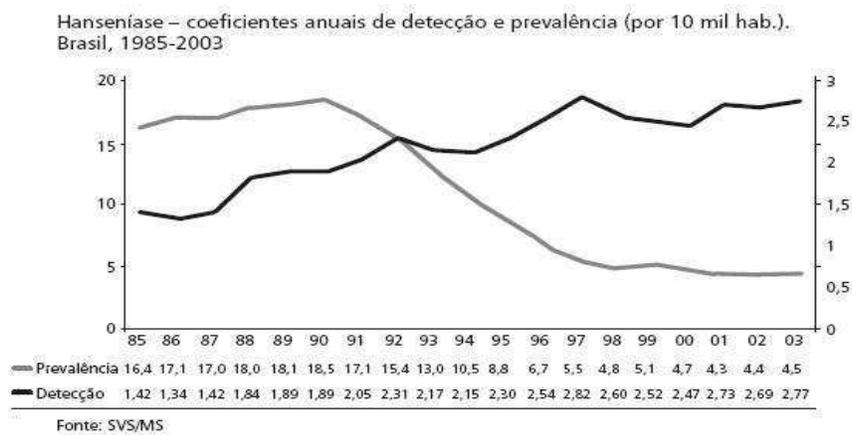


Figura 1.7: Prevalência e detecção Brasil - 1985 a 2003. Sinan NET

Coeficientes de prevalência e de detecção da hanseníase segundo macrorregião. Brasil, 2003*

Macrorregião	Prevalência		Detecção	
	Nº	Coef./10 mil	Nº	Coef./10 mil
Brasil	79.908	4,52	49.026	2,77
Norte	15.764	11,44	10.488	7,61
Nordeste	33.234	6,73	17.380	3,52
Sudeste	18.079	2,40	10.917	1,45
Centro-Oeste	10.783	8,75	8.057	6,54

Fonte: Sinan/ATDS/SES

*Dados atualizados em 31/3/2004

Figura 1.8: Prevalência e detecção por macrorregiões do Brasil - 2003.

1.3.5 Localização Geográfica e Referências de Imperatriz

A cidade de Imperatriz localiza-se na região sudoeste do Estado do Maranhão está localizada a 5°31'32" de latitude sul e 47°26'35" de longitude oeste (ver mapa figura 1.9) e tem uma população com mais de 230 mil habitantes constituída principalmente por migrantes das regiões Nordeste, Sudeste e Centro-Oeste do Brasil, e é marcada por profundos contrastes sociais, na figura 1.10 apresentamos alguns indicadores que julgamos importantes na avaliação da atual situação da epidemia.

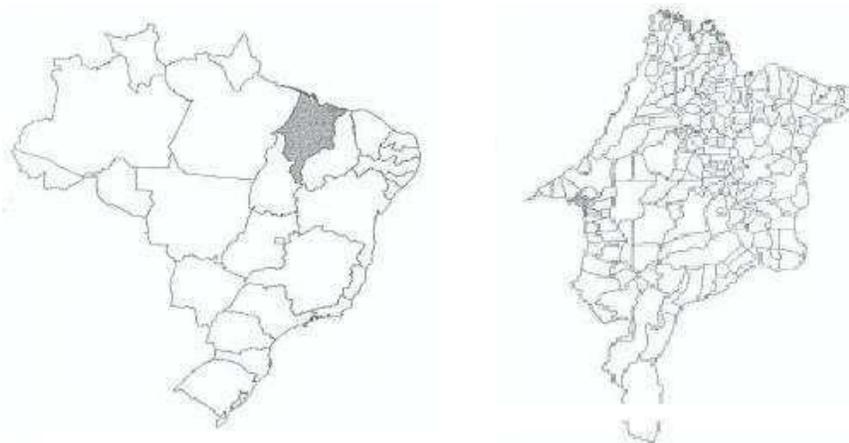


Figura 1.9: Brasil - Maranhão - Imperatriz.

Indicadores Demográficos			
	Imperatriz	Maranhão	Brasil
População total ¹	231.659	5.943.807	179.108.134
Densidade demográfica ²	150,48	17	19,92
Grau de urbanização ²	94,84	59,53	81,25
Indicadores Sociais			
Cobertura de rede de abastecimento de água (pop. urbana) ²	91,95	74,64	88,50
Cobertura de sistemas de esgotamento sanitário ²	66,20	35,02	69,52
Cobertura de sistemas de coleta de lixo (pop. urbana) ²	88,86	53,10	90,50
Indicadores de Morbidade			
Taxa de incidência de tuberculose ³	58,34	46,87	41,74
Taxa de prevalência de hanseníase ³	63,14	20,17	6,75
Prevalência de desnutrição ⁴	11,21	9,39	6,13

Fonte: IBGE / SINAN / SIAB

1- Estimativa 2004; 2- Senso 2000; 3- SINAN 2003; SIAB-1° Sem/2004.

Figura 1.10: Indicadores demográficos sociais e de morbidade.

1.3.6 A hanseníase em Imperatriz

O município de Imperatriz apresenta um dos mais altos índices de prevalência de hanseníase do país, variando de 36,62 a 18,34 por 10.000 habitantes em 1994 e 2006, respectivamente e com média no período de aproximadamente 26,81/10 mil habitantes (Brasil: 8,35/10.000, Nordeste 7,42/10.000 e Maranhão: 17,89/10.000 em 2006). A tabela 1.11 mostra a variação do número de infecciosos por ano e por mês de notificação:

INVESTIGAÇÃO DE HANSENIASE – SINANW													
Frequência por Ano da Notificação e Mês da Notificação													
Ano	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez	Total
1994	59	57	64	49	63	35	58	55	50	29	46	33	598
1995	60	46	48	53	61	47	48	90	54	61	51	42	661
1996	70	43	79	109	96	54	74	55	69	57	63	41	810
1997	81	62	46	80	33	67	83	51	57	115	93	45	813
1998	61	74	75	70	67	59	54	47	51	50	65	61	734
1999	89	66	72	54	56	39	53	114	61	58	46	27	735
2000	56	73	65	48	53	52	43	203	49	39	43	39	763
2001	61	59	67	47	53	27	49	55	44	48	50	25	585
2002	63	64	69	50	44	51	40	44	63	57	39	42	626
2003	46	55	62	63	52	48	36	35	53	26	42	38	556
2004	30	40	52	58	51	52	38	55	35	23	40	25	499
2005	36	36	40	44	33	49	34	68	60	86	56	47	589
2006	45	47	60	39	34	33	38	50	30	37	39	21	473
Total	757	722	799	764	696	613	648	922	676	686	673	486	8442

Figura 1.11: Variação do Número de infecciosos por Hanseníase no Município de Imperatriz - 1994 a 2006. Fonte: Secretaria de Saúde de Imperatriz / Sinan NET

O número de suscetíveis, pessoas que mantém contato contínuo e prolongado

com os infecciosos, é mostrado na figura 1.12. Nota-se que Imperatriz apresenta a mais desfavorável entre os municípios com maiores taxas de detecção, com média superior a 600 casos notificados anualmente entre 1994 e 2006.

Entre as localidades com com maiores taxas, 40 % contam menos de 10.000 habitantes e 25 % entre 10.000 e 20.000 habitantes. Somente Marabá, no Estado do Pará e Imperatriz no Maranhão têm mais de 100.000 habitantes [20], portanto Imperatriz com mais de 230.000 habitantes assume uma posição atípica em relação aos demais municípios no que se refere à hanseníase.

Os fatores associados à distribuição espacial da hanseníase, de modo geral, podem se agrupar em naturais e sociais. Entre as premissas sociais, destacam-se condições desfavoráveis de vida, a desnutrição ou algumas carências nutricionais, além de condições higiênicas e movimentos migratórios. Chama a atenção a coincidência entre municípios com altas taxas de detecção e rodovias federais de implantação posterior à década de 70, como a rodovia Anápoles-Belém (BR 153) também conhecida com Belém-Brasília[20], que passa por Imperatriz e marca o início de uma explosão demográfica a partir dos anos 70, resultante de imigrações provenientes principalmente de estados das regiões Sul, Sudeste e Centro-Oeste.

INVESTIGAÇÃO DE HANSENIASE – SINANW	
Contato Registrado por Ano da Notificação	
Ano da Notificação	Contato Registrado
1994	2785
1995	3020
1996	3362
1997	3388
1998	2717
1999	2564
2000	3014
2001	2112
2002	1898
2003	2243
2004	1850
2005	2180
2006	1803
Total	32936

Figura 1.12: Tabela 3.5 - Variação do Número de Suscetíveis a Hanseníase no Município de Imperatriz - 1994 a 2006. Fonte: Secretaria de Saúde de Imperatriz / Sinan NET

Modelos Matemáticos e Epidemiológicos

2.1 Introdução

Uma vez que o primeiro objetivo deste trabalho é a apresentação de um modelo matemático simplificado para a descrição da epidemia de hanseníase, baseado em dados relativos à população do município de Imperatriz - MA e na dinâmica da hanseníase, faremos neste capítulo uma descrição sucinta dos conceitos fundamentais da epidemiologia matemática necessários para a boa compreensão do assunto em vista. As principais referências utilizadas neste capítulo foram: [1], [2],[3] [10], [14], [15], [18], [19], [28].

2.2 Modelos Matemáticos

Podemos dizer que os avanços da matemática no final da segunda metade do

último milênio foram dominados por discussões sobre modelos como alternativas aos testes experimentais. O mundo dos modelos, como conjunto, corpo, espaço vetorial e espaço topológico, consiste essencialmente em objetos matemáticos abstratos em lugar de objetos que aparecem na vida diária das pessoas, incluindo professores de matemática [15].

O processo de tradução Realidade-Modelo pode ser ilustrado como na figura 2.1. Tudo começa com delimitação de um foco simplificador, parte de uma realidade complexa associada ao problema em questão (objeto de nosso estudo); em seguida partimos para abstrações e tradução contextual capaz de identificar os elementos fundamentais da questão, como escolha das variáveis do problema, formulação de hipóteses e tradução para uma linguagem própria da área em que se está trabalhando e, em seguida, transportá-los para uma representação capaz de ser manipulada por artifícios ou métodos de solução (modelo matemático). Uma vez concretizado, o modelo representa uma interpretação da realidade em foco, que nos leva à formulação de perguntas e respostas que vão colaborar para sua aceitação ou não (validação do modelo).

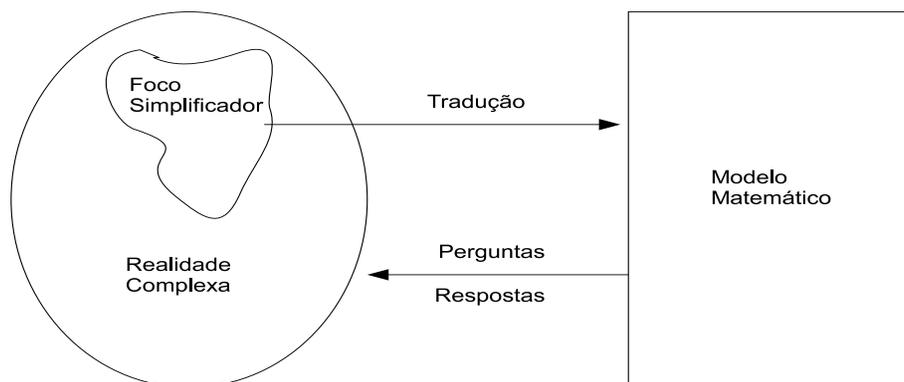


Figura 2.1: Processo de Tradução Realidade - Modelo.

Um modelo pode ser considerado bom ou ruim, simples ou sofisticado, estético ou feio, útil ou inútil, mas sentimos-nos menos inclinados a chama-los de verdadeiro ou falso. Modelos são representações simplificadas da realidade que preservam, para determinadas situações e enfoques, uma equivalência adequada [15]. Um modelo deve sempre terminar em reticência, jamais em um ponto final.

O modelo matemático mais simples é o conjunto dos números naturais $1, 2, 3, \dots$, que é usado para contar objetos quando são desprezadas todas as propriedades dos objetos, exceto seu número [15]. Observamos que modelos numéricos são modelos lógicos, portanto distintos dos modelos que pretendem retratar a realidade ou alguma parte desta.

Contar um, dois, três, ..., é um modelo formal, independe da realidade. Segundo Hugo é contar nada¹ de alguma forma é bem diferente de se contar um brinquedo, dois brinquedos, três brinquedos, ..., por exemplo.

Daí a necessidade de se fazer a distinção muito clara entre o modelo e a parte do mundo exterior que se supõe que ele represente. Esse princípio é hoje corrente em muitos ramos da ciência [15].

Um modelo matemático é limitado às hipóteses lançadas para seu desenvolvimento. Segundo Bassanezi [2], um modelo epidemiológico (sistema de equações diferenciais) que considera o grupo de infecciosos como sendo homogêneo, onde todos os elementos têm as mesmas propriedades é um exemplo de modelo objetivo (representações de um objeto ou fato concreto).

Assim, neste trabalho, não apresentamos uma definição precisa, mas adotamos o conceito simples: “Modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado”. Para uma análise mais detalhada sobre modelos matemáticos sugerimos uma leitura de [2].

2.3 Evolução da Epidemiologia Matemática

A epidemiologia matemática relacionada à transmissão de infecções tem dupla finalidade: descrever o fenômeno observado e estudar os efeitos de um mecanismo de intervenção no sistema hospedeiro-parasita. Para alcançar estas finalidades, utiliza-se modelos matemáticos. Os modelos epidemiológicos fundamentam-se em

¹Hugo Ricardo Souza (2000-) criança de 2ª série que questionou o autor sobre o sentido de contar um, dois, três,... sem referência a algum objeto concreto como seus brinquedos

hipóteses que quantificam alguns aspectos do fenômeno biológico da interação hospedeiro-parasita [28].

Assim, a epidemiologia matemática analisa, por exemplo, o modo de transmissão e a gravidade de uma epidemia, a capacidade de indução de imunidade, além da influência das condições bióticas ou abióticas. Por exemplo: quantidade de doentes (indivíduos sintomáticos) ou portadores (indivíduos assintomáticos), condições sociais como saneamento, acesso ao sistema de saúde, estado nutricional da população e as mudanças climáticas. Dessa forma, um modelo matemático que representa uma epidemia baseia-se na quantificação dos conhecimentos biológicos e da interação hospedeiro-parasita. De onde se conclui que os modelos matemáticos epidemiológicos devem estar se aprimorando continuamente segundo as descobertas das ciências biológicas, que por outro lado se beneficiam dos modelos, para seu desenvolvimento e novas descobertas (é a natureza da vida!).

Assim, os modelos matemáticos estão em constante aprimoramento utilizando-se de descobertas no campo das ciências médicas e biológicas.

Em epidemiologia matemática as interações hospedeiros-parasitas podem ser classificadas de acordo com a interação dos indivíduos com os micro-organismos. Pode-se observar a evolução natural da doença nos indivíduos infecciosos e expostos e também determinar os níveis de concentração do agente infeccioso e de anticorpos correspondentes em cada indivíduo considerado. Dependendo do caso teremos um estudo dinâmico ou estacionário da transmissão da doença.

No estudo estático, a epidemiologia matemática permite obter a prevalência e incidência da doença a partir de sua duração. No estudo dinâmico, a epidemiologia matemática permite estudar a variação da incidência² e da fração de indivíduos infectantes ao longo do tempo [28].

²-A incidência relaciona o número de casos novos em um determinado tempo.

2.3.1 Objetivos da Epidemiologia Matemática

O objetivo da epidemiologia matemática é descrever quantitativamente o fenômeno e fornecer informações epidemiológicas sobre os parâmetros envolvidos:

- i- Força de infecção: é a incidência per capita ou taxa de ataque (λ de uma doença): dada pela incidência relativa ao número de indivíduos da população [28].
- ii- Razão de reprodutividade basal, R_0 : número de casos secundários que um caso primário é capaz de produzir em uma população totalmente suscetível.

Os parâmetros acima, por dependerem do formalismo matemático considerado, são obtidos a partir das equações do modelo matemático adotado.

Observamos que se a razão de reprodutividade basal for menor que um, ($R_0 < 1$), então a doença se extinguirá, se $R_0 \geq 1$, a doença permanecerá em estado endêmico.

2.3.2 Paradigmas da Epidemiologia Matemática

O interesse pelo estudo de epidemias de doenças infecciosas tem seu registro já na obra *Epidemia* de Hipócrates³ (458 - 377 a.C.), mas um marco considerado na aplicação sistemática de matemática como suporte de estudo e entendimento das doenças infecciosas foi o trabalho “Essai d’une nouvelle analyse de la mortalité causée par la peste vérole et des avantages de l’inoculation pour la prévenir” de Daniel Bernoulli⁴ (1700 - 1782) publicado em 1760; cujo objetivo principal é influenciar a política de saúde pública. Somente depois de decorridos 146 anos foram formuladas teorias específicas sobre transmissão de doenças infecciosas em

³Hipócrates, - Pai da Medicina)

⁴Matemático francês)

uma expressão matemática simples nos modelos de Hamer em 1906 e Ross (1857 - 1932) de 1908 [28].

Hamer postulou que a propagação de epidemias depende da forma de interação (contato) entre indivíduos suscetíveis e infecciosos, resultando em um dos conceitos mais importantes na epidemiologia matemática, o **princípio da ação das massas**. Este princípio foi originalmente formulado em um modelo em que se considerava tempo discretizado, mas Ross trasladou-o para o modelo de malária com tempo contínuo [28]. Os trabalhos de Hamer e Ross foram baseados em modelos determinísticos. Em 1955 e 1956 Bartlett propôs modelos baseados em considerações estocásticas.

Posteriormente as ideias de Hamer e Ross foram desenvolvidas em detalhes por Soper (1893-1977) em 1929, que estudou os mecanismos responsáveis pela periodicidade das epidemias. Sendo que já em 1927 Kermack (1898-1970) e McKendrick (1876-1943) estabeleceram a **teoria do valor limiar**, que juntamente com o **princípio da ação das massas** representam a pedra fundamental da Epidemiologia Matemática Moderna.

Outros aspectos foram acrescentados ao longo do tempo, tais como a extensão da teoria do valor limiar, por Whiter em 1955, levando em consideração modelos determinísticos e estocásticos mais complexos.

Em 1986 Anderson e May (1936- ?) mostraram a importância da heterogeneidade da transmissão das infecções no trabalho “The invasion, persistence and spread of infectious diseases within animal and plant communities”, marcando significativos avanços à Epidemiologia Matemática.

2.4 Conceitos Epidemiológicos

Apresentamos a seguir os principais termos epidemiológicos correntes utilizados neste trabalho, considerando as diferentes nomenclaturas existentes [].

Doença notificável: doenças, geralmente de natureza infecciosa, cuja no-

tificação de ocorrência é obrigatória por lei;

Efeito debilitante: efeito debilitante da infecção de um hospedeiro por um parasita;

Endemia: ocorrência de uma doença por um determinado período de tempo;

Epidemia: ocorrência de uma doença excedendo a expectativa normal;

Epidemiologia: estudo da dinâmica de doenças transmissíveis em uma população considerada;

Extinção epidêmica: extinção de um parasita por serem os números de infecciosos tão baixos imediatamente após uma epidemia, que é possível remover todos eles por efeito de pequenas flutuações randômicas;

Exposto: indivíduo infectado que ainda não é capaz de transmitir a doença;

Força de infecção: taxa per capita de infecção de suscetíveis;

Incidência: taxa de aparecimento de casos novos numa população. Classicamente medida como "taxa de ataque";

Infecção: replicação de um microparasita em seu hospedeiro, podendo haver ou não doença;

Infeccioso: indivíduo infectado que ativamente transmite a doença;

Período de incubação: intervalo de tempo entre o momento da infecção e o aparecimento de sintomas da doença, a partir do qual são adotadas medidas curativas e/ou preventivas;

Período infeccioso: é o período subsequente (imediatamente) ao período latente, e no qual doentes são capazes de transmitir a infecção para qualquer hospedeiro suscetível;

Período latente: intervalo de tempo entre o momento da infecção e a existência material da infecção no organismo do indivíduo suscetível;

Prevalência: número total ou proporcional de casos em curso de tratamento numa determinada população e num determinado momento temporal;

Removido: indivíduo retirado da interação suscetível-infeccioso por recuperação com imunidade temporária ou permanente, por isolamento até a cura e a conquista da imunidade ou por morte;

Suscetível: indivíduo não infectado que pode contrair a infecção (indivíduo não imune);

Taxa de contato: taxa de contato entre suscetíveis e infecciosos. Medido em indivíduos por unidade de tempo;

Transmissão: processo pelo qual um patógeno passa de uma fonte de infecção para um novo hospedeiro.

2.5 Diferentes Modelos Epidemiológicos

Apresentamos agora, com o objetivo de ilustração, alguns modelos matemáticos aplicados à epidemiologia, destacando em cada caso a forma compartimental do modelo e o sistema de equações de diferenças finitas em tempo discreto,⁵. “Um sistema de compartimentos consiste essencialmente de um número finito de sistemas interligados, chamados compartimentos, que trocam entre si e com o meio ambiente, quantidade ou concentração de material” [2].

Os compartimentos são definidos levando em consideração as características ou propriedades físicas e epidemiológicas de cada doença específica.

⁵Modelos contínuos com equações diferenciais podem ser encontrados na literatura específica, sugerimos aos interessados a leituras de [3],[10],[14], associado à situação problema

O modelo associado ao processo epidêmico refere-se a uma população P dividida em classes disjuntas, em geral, de suscetíveis (S), expostos (E), infecciosos (I), e removidos (R). As proporções de cada classe na população variam com o tempo, e serão denotadas por $S(t) = S_t$, $E(t) = E_t$, $I(t) = I_t$, $R(t) = R_t$, respectivamente para um tempo discreto t .

Convém observar que, num modelo fechado, temos a igualdade:

$$S_t + E_t + I_t + R_t = 1,$$

considerando a porcentagem de cada subclasse populacional.

2.5.1 Hipóteses

Em qualquer um dos modelos estamos considerando as seguintes hipóteses:

Hipótese 1:

A população considerada tem um tamanho fixo P , que é suficientemente grande em cada compartimento.

Se o modelo inclui dinâmica vital, então os nascimentos e mortes ocorrem com a mesma taxa e todos recém nascidos são considerados suscetíveis (modelo fechado).

Indivíduos são retirados de cada classe por morte com uma taxa proporcional ao tamanho da classe, denominada taxa de remoção por unidade de tempo.

Hipótese 2:

A população é uniforme e homogeneamente distribuída. A taxa de contato é o número médio de contatos por infeccioso na unidade de tempo considerada.

Um contato de um infeccioso é uma interação que resulta na infecção de um indivíduo suscetível. O tipo de contato depende de cada doença específica.

Hipótese 3:

Recuperados são transferidos da classe dos infecciosos para a classe dos removidos com taxa proporcional ao número de infecciosos, denominada de taxa de

remoção por recuperação.

O período latente é nulo, isto é, indivíduos infecciosos tornam-se imediatamente infecciosos.

A propagação de uma infecção entre os indivíduos de uma mesma população pode ser ilustrada como no diagrama da figura 2.2

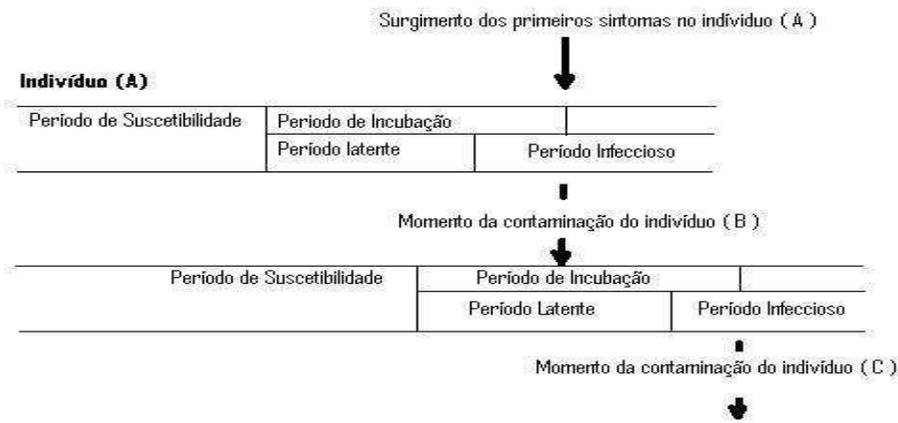


Figura 2.2: Propagação de uma infecção.

2.5.2 Modelo tipo *SI*

É utilizado no caso hipotético de uma epidemia na qual não há recuperação dos doentes. Um caso típico poderia ser representado pela AIDS, causada por agente viral. O esquema compartimental sem dinâmica vital é representado pela figura 2.3.

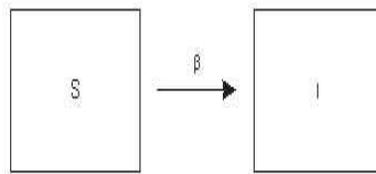


Figura 2.3: Esquema Compartimental de uma Epidemia - (Modelo *SI*).

No caso de uma população de tamanho fixo P , a taxa α de crescimento dos infecciosos é a mesma responsável pelo decréscimo dos suscetíveis.

A dinâmica do modelo é dada pelo sistema de equações de diferenças

$$\begin{cases} S_{t+1} - S_t = -\alpha S_t I_t \\ I_{t+1} - I_t = \alpha S_t I_t \\ S_0 > 0, I_0 > 0 \text{ e } S_t + I_t = 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Sendo $\alpha S_t I_t$ a taxa de movimentação da classe dos suscetíveis (S) para a classe dos infecciosos (I).

Os termos S_t e I_t representam, em P , a proporção dos suscetíveis e infecciosos num dado período t , respectivamente.

2.5.3 Modelo tipo *SIS*

Utilizado quando a recuperação da doença não confere imunidade ao indivíduo. É o caso das meningites e doenças venera (causadas por agente bacterial) ou malária e dengue (causadas por agente protozoário). Nestes casos, um indivíduo que passa da classe dos suscetíveis (S) para a classe dos infecciosos (I) posteriormente pode voltar para a classe dos suscetíveis (S), após sua recuperação. A representação compartimental do processo epidemiológico *SIS* é mostrada na figura 2.4.

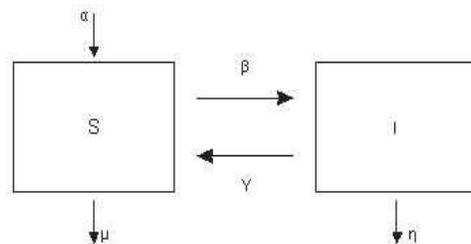


Figura 2.4: Esquema Compartimental de uma Epidemia - (Modelo *SIS* com dinâmica vital).

Assim o problema com valores iniciais S_0 e I_0 para o sistema SIS com dinâmica vital é dado pelo sistema

$$\begin{cases} S_{t+1} - S_t = \alpha(I_t + S_t) - \beta S_t I_t + \gamma I_t - \mu S_t \\ I_{t+1} - I_t = \beta S_t I_t - (\eta + \gamma) I_t \\ S_0 > 0, I_0 > 0 \text{ e } S_t + I_t = 1, \end{cases} \quad (2.2)$$

onde:

$\alpha(P)$: Corresponde aos recém-nascidos em relação a P , sendo $\alpha(P) = \mu(S_t) + \eta(I_t)$;

$-\beta S_t I_t$: Representa a taxa de infecciosidade (transmissão) a partir da classe dos suscetíveis S para a classe dos infecciosos I ;

μS_t : Corresponde à taxa de mortalidade na classe dos suscetíveis;

$\beta S_t I_t$: Representa a taxa de crescimento da classe dos infecciosos I ;

ηI_t : Corresponde à taxa de mortalidade na classe dos infecciosos;

γI_t : Representa a taxa com que os infecciosos se recuperam (sem imunidade) e retornam à classe dos suscetíveis.

Observa-se que o crescimento dos infecciosos I , $\beta S_t I_t$, é igual ao decréscimo dos suscetíveis S , $-\beta S_t I_t$.

2.5.4 Modelo tipo SIR

Utilizado quando os indivíduos se recuperam com imunidade, no caso de doenças causadas por agente viral, como sarampo, caxumba e varíola por exemplo. O processo epidemiológico compartimental, sem dinâmica vital para o modelo SIR pode ser esquematizado pela figura 2.5.

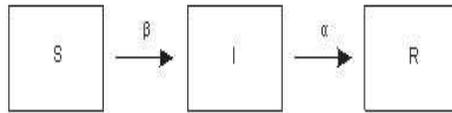


Figura 2.5: Esquema Compartimental de uma Epidemia - (Modelo SIR sem dinâmica vital).

Onde $\alpha > 0$ é o coeficiente de infecciosidade e β é a taxa de remoção. Estamos supondo a não ocorrência de nascimento, e que só ocorram mortes causadas pela doença.

O modelo matemático em tempo discreto que descreve a epidemia (*SIR* sem dinâmica vital) é dado pelo sistema de equação de diferenças:

$$\begin{cases} S_{t+1} - S_t = -\alpha S_t I_t \\ I_{t+1} - I_t = \alpha S_t I_t - \beta I_t \\ R_{t+1} - R_t = \beta I_t \\ S_0 > 0, I_0 > 0 \text{ e } R_0 \geq 0 \text{ e } S_t + I_t + R_t = 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Os parâmetros α e β são conhecidos para cada tipo de doença considerada.

As equações em **2.3** nos dizem, respectivamente que:

- i) O número de indivíduos suscetíveis decresce a uma taxa proporcional ao número de encontro com os infecciosos;
- ii) Os infecciosos aumentam na mesma proporção em que diminuem os sadios;
- iii) Os infecciosos diminuem na mesma proporção em que são removidos os que são curados ou mortos;
- iv) A variação dos removidos (retirados) é proporcional à quantidade dos infecciosos.

Observamos que no tempo inicial $t = 0$ a segunda equação do sistema **2.3** nos diz que $I_1 - I_0 > 0 \Leftrightarrow \alpha S_0 I_0 - \beta I_0 > 0 \Leftrightarrow I_0(\alpha S_0 - \beta) > 0$ o que implica em $S_0 > \frac{\beta}{\alpha}$.

Traduzindo em palavras, o número de infecciosos será crescente quando a proporção da população de suscetíveis for maior que $\frac{\beta}{\alpha}$.

O valor $\mu = \frac{\beta}{\alpha}$, $\mu > 0$, é chamado de limiar epidêmico. O termo epidêmico significa que para algum tempo $t > 0$ ocorre $I_t > I_0$.

O número $\lambda_0 = \frac{\beta}{\alpha} S_0$ é denominado taxa de reprodução básica da doença, e representa o número médio de infecções secundárias resultante da introdução de um único indivíduo infectado na classe dos suscetíveis. Se ocorrer $\lambda_0 > 1$, então teremos uma epidemia.

Nota: “O modelo *SIR* é considerado bastante simples para descrever qualquer epidemia, mas a partir dele o estudo teórico de modelos matemáticos em epidemiologia ganhou tanta força que não seria nenhum exagero afirmar que atualmente existem muito mais modelos que doenças!” [2].

2.6 Equações de Diferenças Finitas

Apresentamos uma breve introdução das equações de diferenças finitas como embasamento teórico para uma melhor compreensão dos modelos discretos. Enquanto nos modelos contínuos formulados recorrendo-se à equações diferenciais a variável independente (tempo) flui continuamente, nos modelos discretos expressos por equações de diferenças, as grandezas são medidas em intervalos como uma hora, um dia, um ano, etc..., formando sequências de pontos isolados.

A análise de modelos discretos é feita estabelecendo relações entre os valores dos elementos da sequência do estágio $t + 1$ e do estágio t . Estas relações denominam-se fórmulas de recursivas ou equações de diferenças [1].

O comportamento da sequência solução de uma equação de diferenças finitas é de fundamental importância em muitos modelos matemáticos, assim sugerimos a leitura de [19], [1], [10], [18], para um aprofundamento no assunto.

Definição: Equação de diferenças finitas é uma relação da forma

$$y_{t+k} = f(y_t, y_{t+1}, y_{t+2}, \dots, y_{t+k-1}), \quad (2.4)$$

onde $f : L \subset \mathbb{N} \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$, entre a variável independente⁶ t , a variável dependente

⁶Os valores da variável independente t são igualmente espaçados com amplitude 1, isto é, $\Delta t = 1$ denota uma unidade de tempo. Por exemplo, um dia, um mês, um ano, etc...

y e sua diferença finita.

A incógnita de uma equação de diferenças finitas é uma sequência $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_{t-1}, y_t, y_{t+1}, \dots)$, cujos termos devem satisfazer uma relação dada.

Quando a expressão de f é conhecida, dizemos que: $y_{t+1} = f(y_t)$ é uma equação de primeira ordem, $y_{t+2} = f(y_t, y_{t+1})$ é uma equação de segunda ordem, e, de modo geral, $y_{t+k} = f(y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+k-1})$ é uma equação de diferenças de ordem k [19].

A ordem de uma equação de diferenças finitas é a diferença máxima dos intervalos de diferença da equação

Observamos que uma igualdade do tipo $y_{t+1} = f(y_t)$ nos diz que o estado (ou contagem) de um sistema no tempo $t+1$ depende apenas da contagem (ou estado) no tempo anterior t . Ou seja, a dinâmica do sistema é estabelecida pela sua evolução temporal, numa forma de recorrência. Assim, uma vez fixado um valor inicial y_0 para a variável dependente, toda equação de primeira ordem $y_{t+1} = f(y_t)$ admite uma solução $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_t, \dots)$ com valor inicial y_0 . Bastando para isto tomar $y_1 = f(y_0)$, $y_2 = f(y_1)$, $y_3 = f(y_2)$, e assim sucessivamente.

Da mesma forma, uma vez fixados os valores y_0 e y_1 , uma equação de segunda ordem $y_{t+2} = f(y_t, y_{t+1})$ admite uma solução $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_t, \dots)$ cujos valores iniciais são os números y_0 e y_1 dados, tais que $y_2 = f(y_0, y_1)$, $y_3 = f(y_1, y_2), \dots$

Generalizando, dizemos que uma equação de diferenças de ordem k possui uma solução cujos k valores iniciais são fixados arbitrariamente.

A solução de uma equação de diferenças é uma relação funcional definida para todo valor da variável independente $t \in N$ e satisfazendo a equação dada. Em outras palavras, é uma expressão que fornece o valor da variável dependente y num estágio t em função desse estágio e dos valores de y nos estágios anteriores.

2.6.1 Exemplo:

Seja a equação $y_{t+1} = ay_t + b$, onde $a, b \in R$, uma equação de diferenças finitas de primeira ordem. Se a sequência $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_t, \dots)$ é uma solução com valor inicial y_0 dado, temos:

$$y_1 = ay_0 + b$$

$$y_2 = ay_1 + b = a^2y_0 + (1 + a)b$$

$$y_3 = ay_2 + b = a^3y_0 + (1 + a + a^2)b$$

$$y_4 = ay_3 + b = a^4y_0 + (1 + a + a^2 + a^3)b$$

$$y_5 = ay_4 + b = a^5y_0 + (1 + a + a^2 + a^3 + a^4)b$$

⋮

$$y_t = ay_{t-1} + b = a^t y_0 + (1 + a + a^2 + \dots + a^{t-1})b.$$

Portanto, a solução geral de

$$y_{t+1} = ay_t + b, \tag{2.5}$$

é a fórmula recursiva

$$y_t = \begin{cases} y_0 a^t + \left(\frac{1 - a^t}{1 - a} \right) b, & \text{se } a \neq 1 \\ y_0 + tb, & \text{se } a = 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

2.6.1.1 Comportamento da solução quando $b=0$:

Quando $b = 0$, a equação homogênea associada

$$y_{t+1} - ay_t = 0, \tag{2.7}$$

poderá ser resolvida supondo uma solução geral da forma $y_t = k\lambda^t$, que substituída na equação **2.7** resulta em $k\lambda^{t+1} - ak\lambda^t = 0$ o que implica em

$$k\lambda^t[\lambda - a] = 0, \tag{2.8}$$

de onde resulta $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = a$.

Para $t = 0$, temos $y_0 = k\lambda^0$, o que implica em $k = y_0$ e assim:

$$y_t = \begin{cases} y_0 a^t, & \text{se } y_0 \neq 0 \\ 0, & \text{se } y_0 = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

que é uma solução da equação **2.7**.

Para o valor inicial $y_0 \neq 0$ dado, podemos observar o seguinte:

i) Se $a > 1$, y_t cresce indefinidamente;

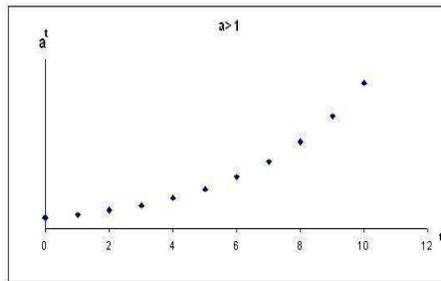


Figura 2.6: Crescimento ilimitado da solução.

ii) Se $a = 1$, y_t é constante;

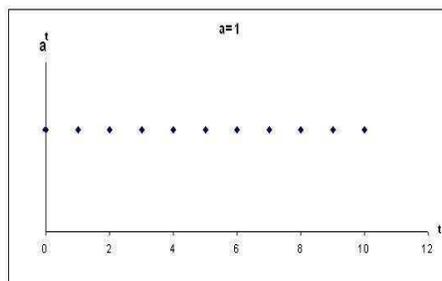


Figura 2.7: Sequencia constante como solução.

iii) Se $0 < a < 1$, y_t decresce tendendo a zero;

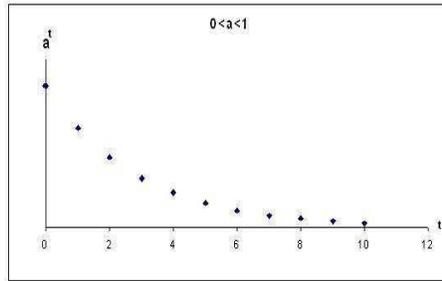


Figura 2.8: Decrescimento da solução para zero.

iv) Se $-1 < a < 0$, y_t oscila convergindo para zero;

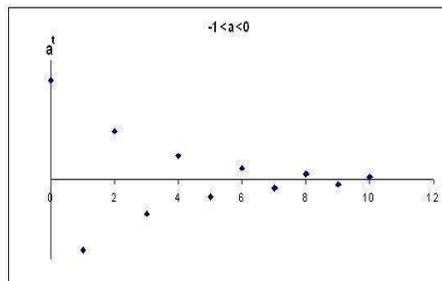


Figura 2.9: Solução oscila convergindo para zero.

v) Se $a = -1$, y_t oscila entre dois pontos;

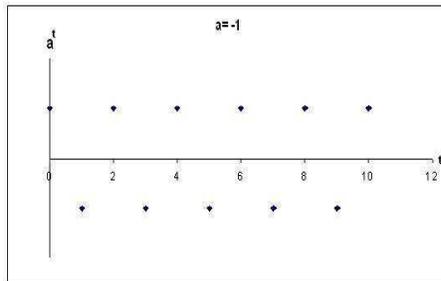


Figura 2.10: Solução oscila entre dois valores.

vi) Se $a < -1$, y_t oscila divergindo;

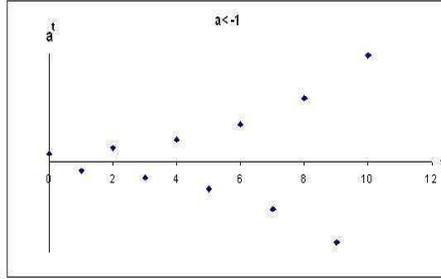


Figura 2.11: Solução oscila divergindo.

2.6.1.2 Caso $b \neq 0$:

No caso mais geral a equação **2.5**, não homogênea, de primeira ordem, a coeficientes constantes, tem solução, quando $a \neq 1$ dada por:

$$y_t = y_0 a^t + \left(\frac{1 - a^t}{1 - a} \right) b, \quad (2.10)$$

ou

$$y_t = y_0 a^t + \frac{b}{1 - a} - \left(\frac{b}{1 - a} \right) a^t \quad (2.11)$$

Fazendo $\frac{b}{1 - a} = y^*$ em **2.11** temos

$$y_t = (y_0 - y^*) a^t + y^* \quad (2.12)$$

Nota-se que a equação **2.12** é uma simplificação de **2.10** que facilita a análise comportamental da sequência-solução da equação não homogênea

$$y_{t+1} - y_t = b, \quad \text{para } y_0 \text{ dado.} \quad (2.13)$$

Assim, $y_{t+1} > y_t$ é equivalente a $(y_0 - y^*) a^{t+1} + y^* > (y_0 - y^*) a^t + y^*$, ou seja,

$$a(y_0 - y^*) a^t > (y_0 - y^*) a^t. \quad (2.14)$$

Para $y^* \neq y_0$, temos que $a > 1$, dessa forma:

- i) Se $|a| > 1$, y_t cresce indefinidamente;
- ii) Se $|a| = 1$, y_t permanece constante;
- iii) Se $|a| < 1$, y_t decresce.

Modelagem Matemática da Hanseníase no Município de Imperatriz

3.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos a aplicação de um modelo simplificado discreto do tipo SI (suscetível-infecciosos) na avaliação da dinâmica da hanseníase no município de Imperatriz-MA com base em dados relativos ao período compreendido entre 1994 e 2006, fornecidos pela Secretaria Municipal de Saúde.

O modelo apresentado é uma simplificação de um modelo tipo SIR (suscetíveis, infecciosos e removidos) para uma população constituída apenas por contatos registrados ou suscetíveis, S_t , e infectados, I_t .

A escolha deste modelo foi motivada por tratar-se de um primeiro estudo desta natureza relativo à doença em Imperatriz. Diante disto, trabalhamos com suposições iniciais que nos permitiram a concretização do modelo proposto. No

entanto, cabe lembrar que tais simplificações podem levar a discussões e interpretações distorcidas e distantes da realidade. Neste caso deve-se posteriormente substituir ou melhorar o modelo aqui apresentado a fim de se obter resultados mais realistas.

3.2 O Modelo *SIR*

Um modelo compartimental discreto simples para o estudo da hanseníase pode ser formado com três compartimentos: S_t de suscetíveis, I_t de infecciosos e R_t de removidos. Os suscetíveis, também denominados contatos registrados, são pessoas sadias que têm contato direto e prolongado com os infecciosos e coabitam com os mesmos. Os infecciosos são os que transmitem a doença e os retirados ou removidos são os curados ou mortos.

O processo epidemiológico para o modelo SIR pode ser esquematizado como na figura 3.1

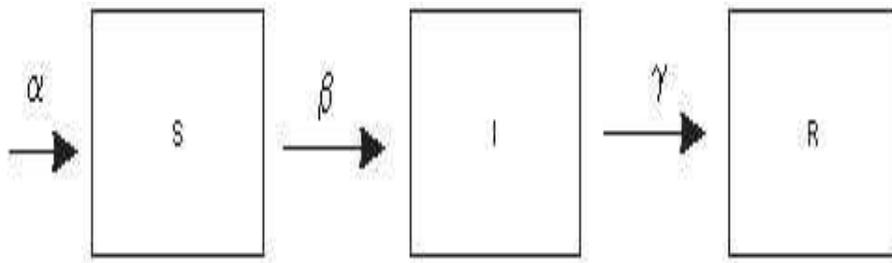


Figura 3.1: Esquema compartimental do modelo simplificado *SIR*.

E sistema de equações de diferenças correspondente será

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{t+1} - S_t = \mu(S_t + I_t - R_t) - \beta S_t I_t \\ I_{t+1} - I_t = \beta S_t I_t - \gamma I_t \\ R_{t+1} - R_t = \gamma I_t \\ S_t + I_t + R_t = 1 \\ S_0 > 0, I_0 > 0, R_0 > 0 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Sistema 3.1: Modelo SIR

onde:

μ = taxa de crescimento da população

β = taxa de transmissão

γ = taxa de recuperação ou remoção

Uma simplificação do modelo 3.1 pode ser obtida supondo que a população se restringe apenas a suscetíveis e infecciosos, tomando $S_t + I_t = 1$. Nesse caso o modelo 3.1 pode ser re-escrito por

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{t+1} - S_t = \mu(S_t + I_t) - \beta S_t I_t \\ I_{t+1} - I_t = \beta S_t I_t - \gamma I_t \\ S_0 > 0, I_0 > 0 \quad e \quad S_t + I_t = 1 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Sistema 3.2: Modelo SI

Onde a expressão $\mu(S_t + I_t)$ na primeira equação nos diz que os recém nascidos filhos de infecciosos são sadios.

3.3 O Modelo Simplificado SI

Apresentamos agora uma simplificação do modelo 3.2 para avaliação da epidemia de hanseníase em Imperatriz-MA fazendo $\mu(S_t + I_t) = \alpha S_t$, onde alfa é

a taxa de crescimento dos suscetíveis. Isto significa que estamos supondo que a classe I_t dos infectados não procria.

O modelo proposto inicialmente apresenta apenas dois compartimentos S , dos suscetíveis¹ e I dos infecciosos². Neste estudo não se está considerando a imunidade natural em relação à hanseníase, que é o caso da maioria dos indivíduos de uma população. A população, P é considerada homogênea e uniformemente distribuída, tendo um tamanho fixo. P é formada apenas por infecciosos e suscetíveis.

O processo epidemiológico pode ser esquematizado pelo sistema compartimental da figura 3.2.

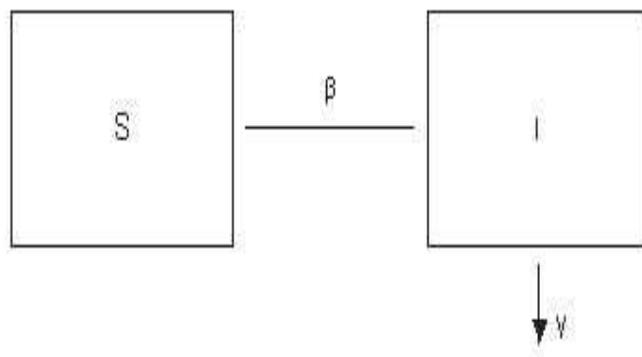


Figura 3.2: Esquema compartimental do modelo simplificado SI .

O modelo matemático escolhido para descrever a epidemia é dado pelo sistema de equações de diferenças finitas 3.2.

$$\begin{cases} S_{t+1} - S_t = \alpha S_t - \beta S_t I_t \\ I_{t+1} - I_t = \beta S_t I_t - \gamma I_t \\ S_0 = S_0 > 0 \quad \text{e} \quad I_0 = I_0 > 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

Sistema 3.3: Modelo simplificado SI

¹Pessoas não infectadas que podem contrair a doença pelo convívio com os infecciosos.

²Pessoas infecciosas que ativamente transmitem o bacilo (independente da forma: virchowiana ou tuberculoide)

onde:

α = Taxa de crescimento da classe dos suscetíveis;

β = Taxa de transmissão (ou taxa de infecciosidade) proporcional ao contato entre os indivíduos;

γ = Taxa de decrescimento da classe dos infecciosos (taxa de cura e mortalidade).

Os valores S_0 e I_0 para o tempo inicial $t = 0$ são as condições iniciais do problema.

Vamos considerar uma população P formada somente com suscetíveis e infecciosos. Assim P depende do tempo. Entretanto, por simplicidade, podemos considerar as subpopulações S_t e I_t como partes ou porcentagens de P em cada instante. Logo

$$S_{t+1} + I_{t+1} = 1. \quad (3.4)$$

Convém notar que a taxa de crescimento, β , dos infecciosos é a mesma taxa de decrescimento dos suscetíveis, e que a taxa de decrescimento, γ , da classe dos infectados é determinada levando-se em consideração os dados fornecidos pela Secretaria Municipal de Saúde, referente às notificações e contatos registrados.

O modelo representado pelo sistema **3.3** é um modelo dinâmico em tempo discreto.

Ano (t)	Infectados I(t)	Suscetíveis S(t)	População(P)
1994	598	2.785	-
1995	661	3.020	294.902
1996	810	3.362	274.104
1997	813	3.388	225.399
1998	734	2.717	224.984
1999	735	2.564	224.564
2000	763	3.014	230.566
2001	585	2.112	230.770
2002	626	1.898	231.136
2003	556	2.243	231.397
2004	499	1.850	231.659
2005	589	2.180	232.253
2006	473	1.803	232.562
2007	427	1.648	232.861
	8.869	34.584	

Tabela 3.3: Número de Infecciosos, Suscetíveis e População de Imperatriz - 1994 a 2007. Fonte: Secretaria de Saúde de Imperatriz

Trata-se de um modelo bastante simplificado, que teve como motivação inicial os altos índices de infecciosos no município de Imperatriz no Maranhão, conforme mostra a segunda coluna da tabela 3.3.

Isolando o valor de S_t na primeira equação do sistema **3.3**, temos

$$S_t = \frac{S_{t+1}}{1 + \alpha - \beta I_t}, \text{ para } I_t \neq \frac{1 + \alpha}{\beta}. \quad (3.5)$$

Substituindo S_t na segunda equação do sistema **3.3**, obtemos

$$I_{t+1} = I_t + \beta I_t \left[\frac{S_{t+1}}{1 + \alpha - \beta I_t} \right] - \gamma I_t,$$

ou ainda,

$$I_{t+1} = (1 - \gamma)I_t + \frac{\beta I_t S_{t+1}}{1 + \alpha - \beta I_t}. \quad (3.6)$$

Uma vez que no sistema **3.3** o tamanho da população estudada não aparece explicitamente, a situação problema considerada fica reduzida à resolução de uma equação de diferenças. Assim, substituindo na equação **3.6** o valor de S_{t+1} obtido de **3.4** resulta

$$I_{t+1} = (1 - \gamma)I_t + \frac{\beta I_t (1 - I_{t+1})}{1 + \alpha - \beta I_t}. \quad (3.7)$$

Desenvolvendo a equação **3.7**,

$$\begin{aligned} I_{t+1} + \left(\frac{\beta I_t}{1 + \alpha - \beta I_t} \right) I_{t+1} &= (1 - \gamma)I_t + \frac{\beta I_t}{1 + \alpha - \beta I_t} \quad \Leftrightarrow \\ \left[1 + \left(\frac{\beta I_t}{1 + \alpha - \beta I_t} \right) \right] I_{t+1} &= \left[(1 - \gamma) + \frac{\beta}{1 + \alpha - \beta I_t} \right] I_t \quad \Leftrightarrow \\ \left[\frac{1 + \alpha - \beta I_t + \beta I_t}{1 + \alpha - \beta I_t} \right] I_{t+1} &= \left[\frac{(1 - \gamma)(1 + \alpha - \beta I_t) + \beta}{1 + \alpha - \beta I_t} \right] I_t \quad \Leftrightarrow \\ \left[\frac{1 + \alpha}{1 + \alpha - \beta I_t} \right] I_{t+1} &= \left[\frac{(1 - \gamma)(1 + \alpha) + \beta - (1 - \gamma)\beta I_t}{1 + \alpha - \beta I_t} \right] I_t \quad \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\left[\frac{1+\alpha}{1+\alpha-\beta I_t}\right]I_{t+1} = \left[\frac{(1-\gamma)(1+\alpha)+\beta}{1+\alpha-\beta I_t}\right]I_t - \left[\frac{(1-\gamma)\beta}{1+\alpha-\beta I_t}\right]I_t^2. \quad (3.8)$$

Multiplicando a equação **3.8** por $\frac{1+\alpha-\beta I_t}{1+\alpha}$, ($\alpha \neq -1$) obtemos

$$I_{t+1} = \left[\frac{(1-\gamma)(1+\alpha)+\beta}{1+\alpha}\right]I_t - \left[\frac{(1-\gamma)\beta}{1+\alpha}\right]I_t^2,$$

isto é,

$$I_{t+1} = [(1-\gamma) + \frac{\beta}{1+\alpha}]I_t - [(1-\gamma)\frac{\beta}{1+\alpha}]I_t^2, \quad (3.9)$$

que é uma equação de diferenças não linear de primeira ordem, primeiro grau a coeficientes constantes.

Fazendo $a = 1 - \gamma$, $b = \frac{\beta}{1 + \alpha}$ e substituindo-os na equação **3.9**, obtemos

$$I_{t+1} = (a + b)I_t - abI_t^2, \quad (3.10)$$

que é uma equação logística em tempo discreto.

Dessa forma, o modelo nos diz que a quantidade I de infecciosos terá um crescimento logístico onde $\mu_1 = a + b$ é a taxa de crescimento dos infecciosos e $\mu_2 = ab$ é a medida dos efeitos de inibição, decorrentes do tratamento, investimento em saneamento básico, campanhas de conscientização, etc... que reduzem o crescimento da epidemia.

Notamos que a equação logística em **3.10** é equivalente à equação

$$I_{t+1} = (a + b)I_t \left[1 - \frac{abI_t}{a + b}\right], \quad (3.11)$$

que com a mudança de parâmetro $a + b = r$, fica:

$$I_{t+1} = rI_t \left[1 - \frac{abI_t}{r}\right]. \quad (3.12)$$

Fazendo a transformação $\frac{ab}{r}I_t = H_t$ equivalente a $I_t = \frac{r}{ab}H_t$ ($a \neq 0$ e $b \neq 0$), temos:

$$\frac{r}{ab}H_{t+1} = r\frac{r}{ab}H_t(1 - H_t),$$

de onde

$$H_{t+1} = rH_t(1 - H_t), \quad r > 0 \quad (3.13)$$

O valor de H_t na equação **3.13**, representa neste modelo, a proporção anual da população infecciosa pela hanseníase no tempo t . Assim, o crescimento logístico no ano seguinte, H_{t+1} , será de rH_t , enquanto o fator $(1 - H_t)$ condiciona a densidade de infecciosos de forma que acima de um nível $H_t = 1$, estes se extinguem, uma vez que H_t não está definida para valores negativos.

Se ocorrerem valores de r menores que um ($0 < r < 1$), a infecção entra em declínio e vai para a extinção, independentemente do valor inicial admissível da população de infectados H_0 , pois sua taxa de reprodução está abaixo da unidade [2], [1].

3.3.1 Ponto de Equilíbrio.

Os pontos ou estado de equilíbrio de uma equação de diferenças de primeira ordem,

$$H_{t+1} = f(H_t), \quad (3.14)$$

são dados pelos pontos fixos da função f , isto é,

$$H_{t+1} = f(H_t) = H_t = H^*, \quad (3.15)$$

cuja interpretação é vista no gráfico da figura 3.4.

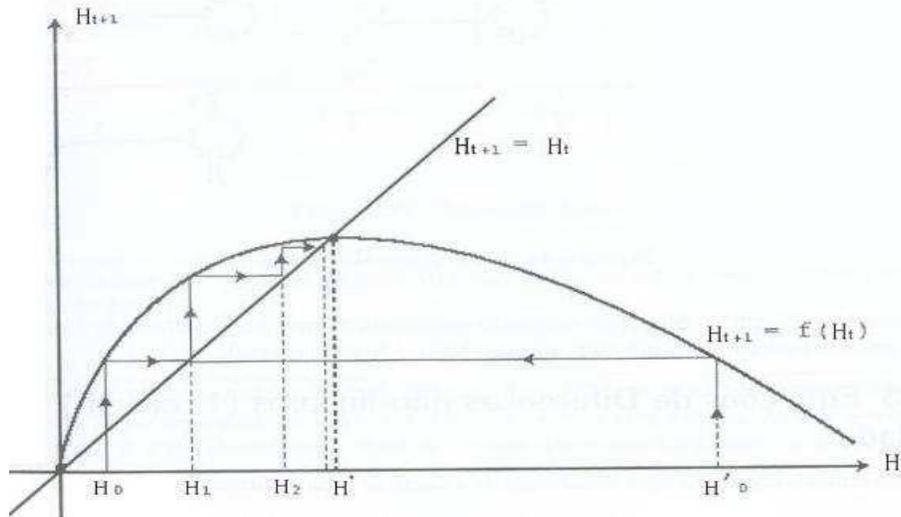


Figura 3.4: Ponto fixo.[2]

Assim, considerando a equação logística **3.13**, temos

$$H^* = f(H^*) = rH^*(1 - H^*), \quad (3.16)$$

de onde $rH^*(1 - H^*) = H^* \Leftrightarrow rH^* - rH^*H^* = H^*$, que é equivalente a $r(H^*)^2 + (1 - r)H^* = 0$ ou ainda,

$$H^* [rH^* - (r - 1)] = 0, \quad (3.17)$$

cujas soluções são os pontos fixos ou estados de equilíbrio.

Resolvendo a equação **3.17** obtemos

$$\begin{cases} H_1^* = 0, & \text{(ponto trivial)} \\ H_2^* = 1 - \frac{1}{r}, & H_2^* > 0 \text{ (ponto não trivial)}. \end{cases} \quad (3.18)$$

Os autovalores associados à equação logística **3.13** são dados por

$$\lambda = \left. \frac{d(f(H_t))}{d(H_t)} \right|_{H_t=H^*}, \quad (3.19)$$

derivando a equação **3.13** em relação a H_t , temos

$$\frac{d(f(H_t))}{d(H_t)} = r(1 - H_t) - rH_t,$$

que é equivalente à

$$\frac{d(f(H_t))}{d(H_t)} = r - 2rH_t. \quad (3.20)$$

Levando em consideração as igualdades **3.18** e **3.19**, obtemos:

- i) $\lambda_1 = r$, para $H_t = H_1^* = 0$ (solução trivial); neste caso não existe população de infectados, e levando em consideração a igualdade **3.13**, nenhum elemento da população poderá ser infectado.
- ii) $\lambda_2 = 2 - r$, para $H_t = H_2^* = 1 - \frac{1}{r} > 0$, neste caso H_2^* será um ponto de equilíbrio diferente de zero, isto é, não trivial.

Para o ponto de equilíbrio H_2^* , não trivial, o comportamento da população H_t é analisado em função dos valores do parâmetro $r = a + b$, nos seguintes casos [2]:

- a) Se $0 < r < 1$, o ponto $H_1^* = 0$ é assintoticamente estável e $H_2^* < 0$ é instável.

Assim, qualquer que seja o valor inicial, H_0 de infectados, aceitável para H , as sucessivas populações tenderão para a extinção, isto é, os valores de H_t convergem para zero para todo valor de r positivo e menor que 1 (um).

- b) Se $r = 1$, $H_1^* = 0$, $H_2^* = 0$ é o centro de um ciclo limite, e os valores de H_t convergem fracamente para zero.

- c) Se $r > 1$, os valores de H_t convergem para H_2^* igual a $1 - \frac{1}{r}$, portanto divergem de H_1^* que é instável. H_2^* será assintoticamente estável se $|2 - r| < 1$, isto é, se $1 < r < 3$, de onde podemos deduzir que para qualquer população inicial de infectados, H_0 , com r entre 1 e 3, a dinâmica populacional conduzirá para o estado $H_2^* = 1 - \frac{1}{r}$, que é estável e a sequência de valores de H_t converge monotonicamente para H_2^* .

- d) Se $r = 3$, $H_2^* = \frac{2}{3}$. Aparecem oscilações de período 2 (ciclos de 2 pontos) que satisfazem o sistema, alternando entre termos crescentes e decrescentes. Portanto não haverá convergência.

3.4 Aplicação na Avaliação da Hanseníase no Município de Imperatriz-MA

Aplicamos o modelo SI desenvolvido com parâmetros obtidos dos dados da epidemia de hanseníase na cidade de Imperatriz. Para tanto, faremos cinco projeções a partir do valor proporcional de infecciosos utilizando a equação logística

$$I_{t+1} = rI_t(1 - I_t). \quad (3.21)$$

Na primeira projeção o valor do parâmetro r foi calculado com base nos dados da doença, nas demais tomamos pequenas perturbações no parâmetro a fim analisar a sensibilidade da equação.

3.4.1 Cálculo dos Parâmetros α , β , γ e r

Do que foi visto no capítulo 1 referente à dinâmica da hanseníase, a relação entre os infecciosos e as pessoas de seu convívio diário, os suscetíveis, é fundamental no controle da epidemia.

O número total acumulado no período de 1994 a 2006 é de 8.442 infecciosos contra 32.936 suscetíveis, numa proporção de aproximadamente 1 por 4. Estamos supondo para efeito de aplicação do modelo uma população $P = 41.378$ indivíduos, soma dos infecciosos e dos suscetíveis. Uma vez que pelas hipóteses do modelo proposto $S_t + I_t = P_t$ temos que, de acordo com a relação (3.4) os valores iniciais, proporcionais, de infecciosos e suscetíveis são dados por $I_o = 0,2040$ e $S_o = 0,7960$, respectivamente.

A estimativa dos parâmetros α , taxa de crescimento e β , taxa de transmissão foram obtidos por ajuste linear (regressão) a partir das curvas dos suscetíveis e dos infecciosos em função do tempo (tabela 3.3), geradas utilizando-se o Excel.

Considerando o comportamento da população total do município nos cinco primeiros anos do período de estudo, a estimativa de α e β foi feita tomando a variação do número de suscetíveis e infecciosos somente a partir do ano de 1997, conforme gráficos da figura 3.5 e figura 3.6.

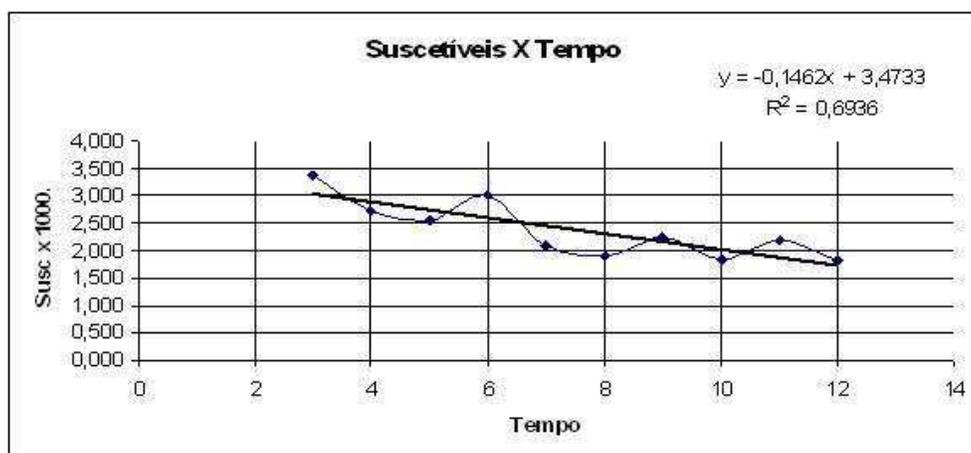


Figura 3.5: Linha de Tendência (Regressão Linear) do Número de Suscetíveis a Hanseníase no Município de Imperatriz - 1997 a 2006.

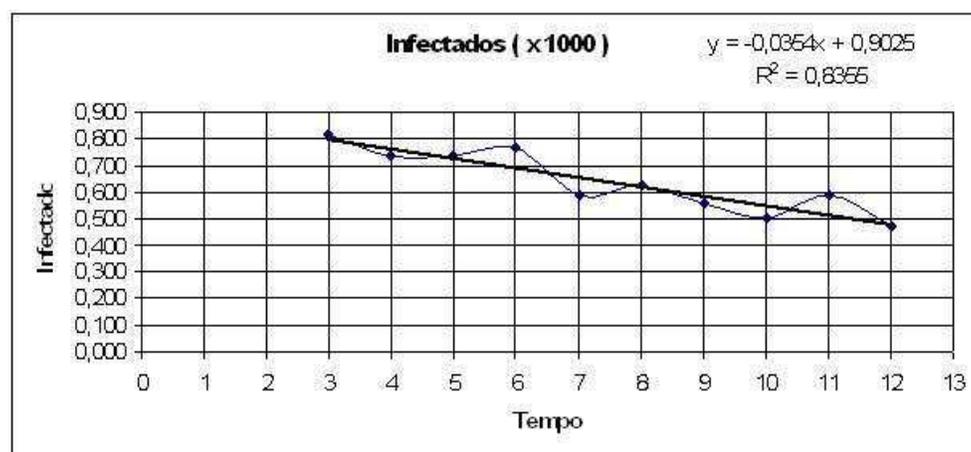


Figura 3.6: Linha de Tendência (Regressão Linear) do Número de Infecciosos por Hanseníase no Município de Imperatriz - 1997 a 2006.

$$\alpha = -0,146 \quad (3.22)$$

e

$$\beta = -0,035. \quad (3.23)$$

Os valores negativos de α e de β indicam a tendência de decrescimento da doença no município.

O parâmetro

$$\gamma = -0,031. \quad (3.24)$$

foi determinado considerando-se o valor de $\beta = -0,035$ e variação de valores do número de infecciosos e suscetíveis no período de 1997 a 2006, substituídos na segunda equação do sistema (3.1) e tomando a média dos valores conforme a Tabela 3.7.

Ano (t)	$\gamma(t)$	
1997	-0,0228	
1998	-0,0994	
1999	-0,1307	
2000	0,1245	
2001	-0,1463	
2002	0,0433	
2003	0,0215	
2004	-0,2471	
2005	0,1182	
2006	0,0322	
γ (Média)	-0,0307	
Desvio Padrão	0,121757	
γ + Desvio padrão	0,09110	
γ - Desvio padrão	-0,15242	

Tabela 3.7: Variação da Taxa de Removidos - 1997 a 2006.

De acordo com as igualdades (3.9) e (3.10) o parâmetro $r = a + b$ fica determinado por

$$r = 1 + \gamma + \frac{\beta}{1 + \alpha} \quad (3.25)$$

substituindo os valores de α , β e γ na igualdade **3.25** temos,

$$r = 0,928. \quad (3.26)$$

3.4.2 Projeções da População de Infecciosos no Município de Imperatriz.

O crescimento da população de infecciosos em Imperatriz-MA pode ser avaliada pela equação logística

$$I_{t+1} = rI_t(1 - I_t) \quad (3.27)$$

com valor inicial $I_0 = 0,2040$ e $r = 0,928$.

A tabela 3.8 apresenta as projeções da população de infecciosos I_t obtidas pela equação logística **3.27** com valor inicial $I_0 = 0,2040$ e o parâmetro r assumindo respectivamente os valores $r = 0,928$, $r_1 = 0,685$, $r_2 = 0,807$, $r_3 = 0,868$ e $r_4 = 1,171$.

Ano	Tempo	0,928	0,685	0,807	0,868	1,171
(t)	(t)	I(t)	I(t)	I(t)	I(t)	I(t)
2006	0	0,204	0,204	0,204	0,204	0,204
2007	1	0,151	0,111	0,131	0,141	0,190
2008	2	0,119	0,080	0,092	0,105	0,180
2009	3	0,097	0,060	0,067	0,082	0,173
2010	4	0,081	0,045	0,051	0,065	0,168
2011	5	0,069	0,035	0,039	0,053	0,163
2012	6	0,060	0,027	0,030	0,043	0,160
2013	7	0,052	0,021	0,024	0,036	0,157
2014	8	0,046	0,017	0,019	0,030	0,155
2015	9	0,041	0,013	0,015	0,025	0,154
2016	10	0,036	0,011	0,012	0,021	0,152
2017	11	0,032	0,008	0,009	0,018	0,151
2018	12	0,029	0,007	0,007	0,016	0,150
2019	13	0,027	0,005	0,006	0,013	0,150
2020	14	0,024	0,004	0,005	0,011	0,149
2021	15	0,022	0,003	0,004	0,010	0,148
2022	16	0,020	0,003	0,003	0,008	0,148
2023	17	0,018	0,002	0,002	0,007	0,148
2024	18	0,016	0,002	0,002	0,006	0,147
2025	19	0,015	0,001	0,002	0,005	0,147
2026	20	0,014	0,001	0,001	0,005	0,147
2027	21	0,012	0,001	0,001	0,004	0,147
2028	22	0,011	0,001	0,001	0,003	0,147
2029	23	0,010	0,001	0,001	0,003	0,147
2030	24	0,010	0,001	0,001	0,003	0,146
2031	25	0,009	0,000	0,000	0,002	0,146
2032	26	0,008	0,000	0,000	0,002	0,146
2033	27	0,007	0,000	0,000	0,002	0,146

Ano	Tempo	0,928	0,685	0,807	0,868	1,171
(t)	(t)	I(t)	I(t)	I(t)	I(t)	I(t)
2034	28	0,007	0,000	0,000	0,001	0,146
2035	29	0,006	0,000	0,000	0,001	0,146
2036	30	0,006	0,000	0,000	0,001	0,146
2037	31	0,005	0,000	0,000	0,001	0,146
2038	32	0,005	0,000	0,000	0,001	0,146
2039	33	0,005	0,000	0,000	0,001	0,146
2040	34	0,004	0,000	0,000	0,001	0,146
2041	35	0,004	0,000	0,000	0,001	0,146
2042	36	0,004	0,000	0,000	0,000	0,146
2043	37	0,003	0,000	0,000	0,000	0,146
2044	38	0,003	0,000	0,000	0,000	0,146
2045	39	0,003	0,000	0,000	0,000	0,146
2046	40	0,003	0,000	0,000	0,000	0,146
2047	41	0,002	0,000	0,000	0,000	0,146
2048	42	0,002	0,000	0,000	0,000	0,146
2049	43	0,002	0,000	0,000	0,000	0,146
2050	44	0,002	0,000	0,000	0,000	0,146
2051	45	0,002	0,000	0,000	0,000	0,146
2052	46	0,002	0,000	0,000	0,000	0,146
2053	47	0,002	0,000	0,000	0,000	0,146
2054	48	0,001	0,000	0,000	0,000	0,146
2055	49	0,001	0,000	0,000	0,000	0,146
2056	50	0,001	0,000	0,000	0,000	0,146
2057	51	0,001	0,000	0,000	0,000	0,146
2058	52	0,001	0,000	0,000	0,000	0,146
2059	53	0,001	0,000	0,000	0,000	0,146
2060	54	0,001	0,000	0,000	0,000	0,146
2061	55	0,001	0,000	0,000	0,000	0,146
2062	56	0,001	0,000	0,000	0,000	0,146

Tabela 3.8: Projeção do Número de Infecciosos pelo Modelo Proposto, para diferentes valores de r / 2006 a 2062.

Na terceira coluna, a projeção de I_t considera o "valor real" de γ , nas demais colunas o valor de γ foi substituído na relação **3.23** por $\gamma - 2\sigma^2$, $\gamma - \sigma^2$, $\gamma + \sigma^2$ e

$\gamma + 2\sigma^2$ com a finalidade de avaliarmos a sensibilidade da equação logística 3.25 a pequenas variações do parâmetro r .

Uma vez que $0 < r < 1$ podemos afirmar que a tendência da epidemia no município de Imperatriz é de extinção independentemente do valor inicial de infecciosos I_0 , pois sua taxa de reprodução basal está abaixo da unidade. No entanto a convergência para zero é bastante fraca já que o parâmetro r está muito próximo de um ($r = 0,928$), conforme a terceira coluna da tabela 3.3. Este fato se explica pelos arredondamentos dos valores proporcionais de infectados, suscetíveis e dos parâmetros α , β e γ associados aos dados relativos à doença em Imperatriz.

Observa-se também que as projeções de I_t para $r_1 = 0,685$, $r_2 = 0,807$ e $r_3 = 0,868$ levam à extinção da doença mais rapidamente (ver quarta, quinta e sexta colunas da tabela 3.8), e refletem uma pequena perturbação na taxa de decréscimo dos infecciosos, nota-se também que a convergência para um valor estável $I^* \neq 0$ só ocorre quando $1 < r < 3$, que é caso de $r_4 = 1,171$ na sétima coluna da tabela 3.8, onde a estabilidade ocorre depois de 24 iterações no ano de 2030, para $I^* = 0,146$ evidenciando a sensibilidade do modelo a pequenas variações do parâmetro r , o que demonstra que o problema da epidemia de hanseníase no município de Imperatriz - MA pode ser amenizado ou mesmo resolvido com políticas públicas de saúde que tenham efeito sobre os parâmetros do modelo proposto o que é mostrado por exemplo, quando tomamos $r = 1,19$ onde a estabilidade ocorrerá entre 2012 e 2013 com população $I^* = 0,160$.

A tendência ao declínio ou estabilidade da doença no Município já vem ocorrendo, embora de maneira bastante lenta, desde 1997 como indica o gráfico 3.9 de tendência da população de infecciosos

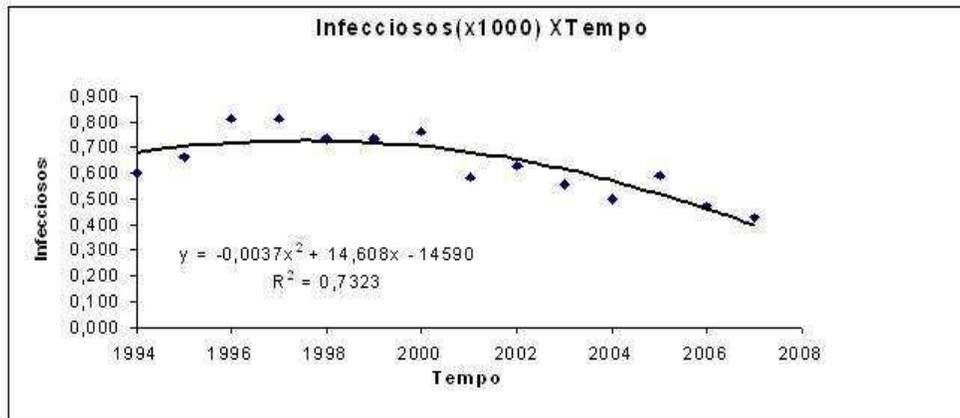


Figura 3.9: Variação da População de Infecciosos por Hanseníase no Município de Imperatriz - 1994 a 2007.

As projeções obtidas no modelo fechado com base nos dados da terceira coluna da tabela 3.8 também apontam para o declínio da hanseníase em Imperatriz de forma mais acelerada que a tendência atual (gráfico 3.10), enquanto nas colunas quarto e sete as simulações obtidas variando o parâmetro r da equação logística $I_{t+1} = rI_t(1 - I_t)$ para os valores $r_1 = 0,685$ e $r_4 = 1,171$, respectivamente, indicam a extinção da doença em 2031 ou 2042 (gráfico 3.11).



Figura 3.10: Projeção do Número de Infecciosos (parâmetro $r = 0,928$).

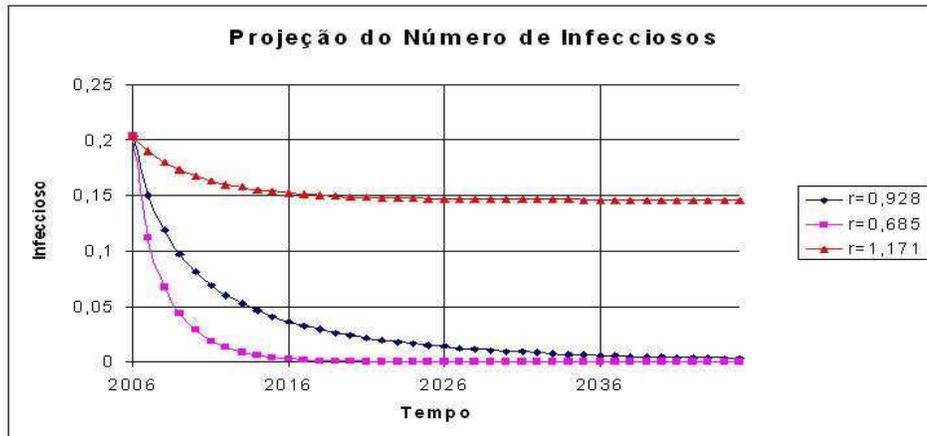


Figura 3.11: Projeção do Número de Infecciosos (parâmetros $r = 0,928$, $r = 0,685$ e $r = 1,171$).

Considerações Finais

Este trabalho é uma breve iniciação ao estudo e aplicação das equações de diferenças finitas. Fizemos a opção por modelos em tempo discreto motivados principalmente pelo fato de que em tais modelos sempre é possível simulações numéricas e construções de gráficos que revelam tendência de comportamento de suas soluções.

Por se tratar de uma iniciação ao estudo da modelagem de doenças, não tratamos com profundidade e fundamentação teórica os modelos comportamentais e os sistemas de equações de diferenças finitas aqui abordados. Convém salientar que o modelo usado é de fato muito simples para modelar uma doença relativamente complexas, portanto tem-se ainda um problema em aberto para elaboração e implementação de modelos mais completos que descrevam de forma mais realista a dinâmica da hanseníase e de outras edemias. A intenção inicial da dissertação foi aliar de maneira satisfatória a parte didática(educacional) com a pesquisa e nossa proposta é dar continuidade ao trabalho priorizando a questão científica. Neste sentido pretendemos trabalhar com modelos mais abrangentes de Equações de Diferenças Finitas e Equações Diferenciais análogas.

O modelo simplificado apresentado para o estudo da epidemia de hanseníase em Imperatriz recaiu numa equação logística, que é uma equação de diferença finita não linear de primeira ordem e primeiro grau com coeficientes constantes, e nos permitiu analisar a dinâmica da doença em função de um parâmetro r de um valor inicial da população de infecciosos I_0 obtido acumulando a série histórica de valores de casos registrados no município.

O parâmetro r foi obtido em função das taxas α de detecção do número de suscetíveis, β de infecciosidade proporcional ao número de contatos e γ de

decrescimento do número de infecciosos. No caso dos dados reais fornecidos pela Secretaria de Saúde do Município obtivemos um valor aproximado de $r = 0,928$, que para o valor inicial proporcional de infecciosos $I_o = 0,2040$ resultou num fraco declínio para extinção da doença, não ocorrendo antes de 2062.

Posteriormente fizemos quatro simulações variando o parâmetro r para os valores $r_1 = 0,685$, $r_2 = 0,807$, $r_3 = 0,868$ e $r_4 = 1,171$ a fim de analisar a sensibilidade da equação logística a pequenas variações do valor do parâmetro.

No primeiro e no segundo casos a doença se extinguirá no ano de 2031, no terceiro caso a extinção ocorrerá no ano de 2034 e no quarto caso a doença não se extingue, mas se estabiliza em 2030 conforme mostra a figura (3.8) do capítulo 3. O que indica que o problema pode ser resolvido ou pelo menos amenizado com aplicação de políticas de saúde pública adequadas. Observa-se ainda que para o valor de $r = 1,19$ o equilíbrio na população de infecciosos $I^* = 0.160$ ocorreria a curto prazo entre os anos de 2012 e 2013.

Conclusão, apesar de Imperatriz apresentar a situação mais desfavorável dentre as cidades com mais de 100.000 habitantes, com média superior a 600 casos novos por ano de notificação no período estudado, as projeções obtidas no modelo desenvolvido, assim como os gráficos de tendência da situação real, apontam para um declínio e provável extinção da hanseníase no Município. O sucesso dependerá da implementação de políticas públicas eficientes voltadas não apenas ao combate da doença isoladamente, mas também à erradicação das condições sociais desfavoráveis como falta de saneamento básico, desnutrição, analfabetismo e pobreza, entre outras.

Anexo

Depoimento da Irmã Giulliana Villa, coordenadora da Vila João XXII, abrigo de Hansenianos em Imperatriz – Maranhão.

MITRA DIOCESANA DE IMPERATRIZ

VILA JOÃO XXIII

Av. Newton Bello nº 1557 – Cx. Postal 56

65919-050 Imperatriz – MA

CNPJ 12.084.745/0020-28 – Fone: (99) 3524 – 4146

Imperatriz, 08 de fevereiro de 2009.

As atividades da Vila João XXIII foram iniciadas em maio de 1974. Dom Marcelino, Bispo daquela época, preparou a casa em 1972/73 para acolher doentes de Hanseníase que eram assistidos por alguns Frades em Imperatriz, Porto Franco, Estreito e Carolina, território da Prelazia. A ideia era de dar uma esperança maior para estes doentes e ajudá-los a superar o preconceito geral.

Naquele 1974, quando abrimos as portas recebemos doentes de Hanseníase e de Tuberculose. Para os Hansenianos o tratamento tinha a duração de dez anos, para os casos mais graves, e cinco anos pelos casos mais leves. A discriminação era muito grande e o atendimento muito precário; somente o Dr. Noletto atendia aqueles que chegassem ao Hospital São Raimundo. Quando iniciamos o atendimento da nossa casa, conversamos com ele para dar o acompanhamento aos nossos internos uma vez por semana.

Com esta ideia de que os doentes de Hanseníase poderiam ter vida normal, encaminhamos todos os mais jovens e as crianças para as escolas municipais, para

frequentarem normalmente cada um na sua série, para este fim conversamos, antes de tudo, com as diretoras e professoras, e fizemos umas palestras com os pais dos alunos.

Em janeiro de 1984 iniciamos o movimento do Dia do Hanseniano, com cartazes, folhetos, pequena representação teatral dos jovens da Paróquia de Fátima, palestra do Dr. Cacildo, dermatologista, que contou com a presença de trezentas pessoas, alguns doentes corajosos expuseram os próprios problemas de vivência nas igrejas paroquiais.

Em 1985, após o movimento todo na cidade, tivemos um churrasco na nossa casa com grande participação do povo, festa que continua até hoje. Toda movimentação é para esclarecer ao povo em geral que nada impede ao doente de hanseníase de continuar a própria vida normalmente, com a responsabilidade de fazer o tratamento para própria saúde e dos outros.

Pelos nossos registros de atendimento, de maio de 1974 até dezembro de 1986, passaram pela nossa casa 1750 pacientes. Depois deste ano foi iniciado o tratamento atual com o sistema PQT e as coisas mudaram um pouco, o controle foi diferente, já tinha atendimento no Posto de Saúde Três Poderes e nós começamos a receber somente os internos encaminhados. Nos anos seguintes foi inserido o serviço em todas as equipes de Saúde Familiar, assim foi estabelecido um controle mais apurado.

Aqui abaixo vai uma listagem de atendimento da nossa casa:

Maio 1974 até Dezembro 1986 – 1750 pacientes

1987	141 <i>internos</i>	16806 <i>Pac.Dias</i>
1988	132 <i>internos</i>	17906 <i>Pac.Dias</i>
1989	130 <i>internos</i>	18180 <i>Pac.Dias</i>
1990	133 <i>internos</i>	16672 <i>Pac.Dias</i>
1991	116 <i>internos</i>	18073 <i>Pac.Dias</i>
1992	120 <i>internos</i>	15931 <i>Pac.Dias</i>
1993	111 <i>internos</i>	16766 <i>Pac.Dias</i>

1994	107 <i>internos</i>	16455 <i>Pac.Dias</i>
1995	131 <i>internos</i>	16307 <i>Pac.Dias</i>
1996	113 <i>internos</i>	15250 <i>Pac.Dias</i>
1997	105 <i>internos</i>	16004 <i>Pac.Dias</i>
1998	095 <i>internos</i>	14258 <i>Pac.Dias</i>
1999	112 <i>internos</i>	15376 <i>Pac.Dias</i>
2000	091 <i>internos</i>	15224 <i>Pac.Dias</i>
2001	092 <i>internos</i>	14790 <i>Pac.Dias</i>
2002	086 <i>internos</i>	10605 <i>Pac.Dias</i>
2003	081 <i>internos</i>	11580 <i>Pac.Dias</i>
2004	083 <i>internos</i>	11677 <i>Pac.Dias</i>
2005	090 <i>internos</i>	11989 <i>Pac.Dias</i>
2006	127 <i>internos</i>	12782 <i>Pac.Dias</i>
2007	118 <i>internos</i>	12247 <i>Pac.Dias</i>
2008	096 <i>internos</i>	11248 <i>Pac.Dias</i>

Foram muitas as batalhas que foram feitas e realizadas para com os doentes de Hanseníase, quem nos acompanha a vários anos é o Dr. Pedro Júlio, que participou de um encontro da AIFO e que está sempre conosco nesta luta que deve ser mantida ainda por um tempo, até eliminar esta doença deste lado do Brasil.

Às vezes tivemos apoio das autoridades locais, às vezes não, mas sempre batalhamos para eliminar a discriminação e o preconceito que ainda hoje persiste, e complica a vida das pessoas, não obstante a isso, conseguimos que muitos moradores de Imperatriz, se sensibilizassem com a questão e trabalhassem conosco nesta luta contra o preconceito.

Irmã Giulliana Villa

Referências Bibliográficas

- [1] Bald, Atelmo A., *Modelos Determinísticos com Equações de Diferenças de Fenômenos Biológicos*, - Dissertação de Mestrado, Editora da UNICAMP, IMECC, Campinas, (1993).
- [2] Bassanezi, R. C., *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática*, São Paulo, Contexto, 2006.
- [3] Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr., W. C., *Equações Diferenciais com Aplicações*, São Paulo. Harba, 1988.
- [4] Batschelet, E., *Introdução à Matemática para Biocientistas*, Rio de Janeiro, Interciência e EDUSP, (1975).
- [5] Brasil, Ministério da Saúde. Secretaria de Vigilância em Saúde. *Guia de Vigilância Epidemiológica* - Brasília: Ministério da Saúde, 2005.
- [6] Braver, S. e Castillo-Chaves, C. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology: Texts in Applied Mathematics*, V - 40, New York, Springer-Verlang, 2001.
- [7] Burghes, D. N. and Borrie, B. A., *Modelling With Differential Equations*, New York, Ellis Horwood Ltd., 1981.
- [8] Chianc, Alpha C., *Fundamental Methods of Mathematical Economics*,Tokyo, McGraw-hill-Kogakusha, 1974.
- [9] Daley, D. J. and Gani, J., *Epidemic Modelling : An Introduction* - Cambridge Studies in Mathematical Biology - v. 14, Cambridge University, U. K. , 1999.

- [10] Edelstein- Keshet L., *Mathematical Models in Biology*, New York, Random-House, 1988.
- [11] Emérito, A. de Pádua., *Modelos Matemáticos Determinísticos em Doenças Transmissíveis*, Dissertação de Mestrado, UNICAMP, IMECC, Campinas, (1989).
- [12] Eves, Howard, *Introdução à história da matemática / Howard Eves; trad. Hygino H. Domingues –2 ed. - Campinas, SP: Ed.da UNICAMP, 1997.*
- [13] Flores, C. D. Escobar, *Modelagem Matemática para Hanseníase* , - Dissertação de Mestrado, UNICAMP, IMECC, Campinas, (1995).
- [14] Fulford, G. ; Forrester, P. ; Jones, A. *Modelling with Differential and Difference Equation* - Cambridge University, U.K. , 2000.
- [15] Garding, L., *Encontro com a Matemática*, Brasília, UnB, 1981.
- [16] Isolda, L. Yuli M., *O Estudo de Modelos Matemáticos para o Crescimento de Tumores e o Uso de Quimioterapia*, - Dissertação de Mestrado, Editora da UNICAMP, IMECC, Campinas, (1992).
- [17] Lehman, Linda F. et al., *Para uma Vida Melhor: Vamos Fazer Exercícios*, Belo Horizonte, ALM Internacional, 1997.
- [18] Levy, H. and Lessman, F., *Finite Difference Equations*, New York, Dover Publications, 1992.
- [19] Lima, Elon L. *Álgebra Linear* - Rio de Janeiro, IMPA, 2006.
- [20] Magalhães, M. C. Cavalcanti e Rojas, L. Iñiguez. *Diferenciação Territorial da Hanseníase no Brasil. Epidemiologia a serviço da saúde*, Brasília: Ministério da Saúde, 2007.
- [21] Ministério da Saúde, *Guia para o Controle da Hanseníase*, Brasília, Ministério da Saúde , 2002.

- [22] Ministério da Saúde, *Legislação Sobre Controle da Hanseníase no Brasil*, Brasília, Ministério da Saúde, 2000.
- [23] Murray, J. D., *Mathematical Biology*, Berlin, Springer-Verlang, 2002.
- [24] Saaty, Thomas L. *Modern Nonlinear Equation - ?*.
- [25] Silva, J. Gilson S. *Uma Aplicação da Teoria Linear de Otimização - Monografia de Graduação*, São Luis, UFMA, 1987.
- [26] Waltman, Paul, *Deterministic Threshold Models in the Theory of Epidemics - Lecture Notes in Biomathematics*, Berlin, Springer-Verlang, 1974.
- [27] Yamanie, Taro *Matemática para Economistas*, São Paulo, Atals, 1972.
- [28] Yang Hyun Mo. *Epidemiologia Matemática; Estudo dos Efeitos da Vacinação em Doenças de Transmissão Direta*, Campinas, UNICAMP, 2001.