



Tiago Nunes Castilho

Variedades de Prym e semigrupos de Weierstrass

**CAMPINAS
2013**



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Tiago Nunes Castilho

Variedades de Prym e semigrupos de Weierstrass

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica da Universidade Estadual de
Campinas como parte dos requisitos exigidos para a
obtenção do título de Doutor em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim

Este exemplar corresponde à versão final da tese
defendida pelo aluno Tiago Nunes Castilho e orientada
pelo prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim

A handwritten signature in black ink, which appears to read "Marcos Jardim", is written over a horizontal line. Below the line, the text "Assinatura do Orientador" is printed in a bold, sans-serif font.

CAMPINAS
ANO

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

C278v Castilho, Tiago Nunes, 1983-
Variedades de Prym e semigrupos de Weierstrass / Tiago Nunes Castilho. –
Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Marcos Benevenuto Jardim.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Weierstrass, Pontos de. 2. Recobrimento duplo de curva. 3. Variedades
abelianas. I. Jardim, Marcos Benevenuto, 1973-. II. Universidade Estadual de
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Prym varieties and Weierstrass semigroup

Palavras-chave em inglês:

Weierstrass points

Double coverings of curves

Abelian varieties

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora:

Marcos Benevenuto Jardim [Orientador]

Paulo Roberto Brumatti

Renato Vidal da Silva Martins

Cícero Fernandes de Carvalho

André Luis Contiero

Data de defesa: 05-12-2013

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 05 de dezembro de 2013 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



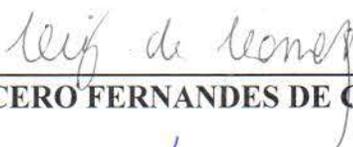
Prof(a). Dr(a). MARCOS BENEVENUTO JARDIM



Prof(a). Dr(a). PAULO ROBERTO BRUMATTI



Prof(a). Dr(a). RENATO VIDAL DA SILVA MARTINS



Prof(a). Dr(a). CÍCERO FERNANDES DE CARVALHO



Prof(a). Dr(a). ANDRÉ LUIS CONTIERO

Abstract

In this thesis we present results about Prym varieties and Weierstrass semigroups, both in the context of ramified double covers of curves. From the description of the Prym variety by a set of linear fibrations, we study the duality between the place where the Gauss map on the Prym-Theta divisor degenerates and the branch divisor of the double covering, in which we prove a relation between the fibers of the Gauss map and the Weierstrass semigroups of branched points of the double covering.

Resumo

Esta tese trata de variedades de Prym e de semigrupos de Weierstrass, ambos no contexto de recobrimentos duplos de curvas ramificados. A partir da descrição da variedade de Prym em termos de um conjunto de fibrações lineares do recobrimento, estuda-se a dualidade entre o lugar onde a aplicação de Gauss sobre o divisor Prym-Theta se degenera e o divisor de ramos do recobrimento duplo, em que prova-se uma relação entre as fibras da aplicação de Gauss e os semigrupos de Weierstrass das ramificações do recobrimento.

Sumário

1	Introdução	1
2	Preliminares	17
	Toros Complexos e Variedades Abelianas	17
	Toros Complexos	18
	Variedades Abelianas	24
	A Aplicação de Gauss	26
	Curvas Algébricas e Jacobianas	28
	Fibrações Lineares sobre Curvas	28
3	Recobrimentos Duplos de Curvas	37
	Recobrimentos Duplos de Curvas	37
	Recobrimentos Duplos	38
	Recobrimentos Duplos e Fibrações Lineares	39
	A aplicação Norma N_π	40
	Recobrimentos Duplos e Ternas (C, \mathcal{L}, B)	42
	Exemplos: construções de recobrimentos duplos ramificados	44
	Variedades de Prym	45
	Variedades de Prym	45
	Variedades de Prym: descrição topológica	48
	Semigrupos de Weierstrass e Recobrimentos Duplos	49

4	O Divisor Prym-Theta e os Semigrupos de Weierstrass	55
	O Divisor Prym-Theta	55
	A Aplicação de Gauss sobre o Divisor Prym-Theta	57
	As Fibras da Aplicação de Gauss G_{Ξ} e os Semigrupos de Weierstrass	62
5	Semigrupos Numéricos e $\mathcal{A}(\tilde{H})$	65
	Semigrupos Numéricos e Recobrimentos	65
	O Conjunto $\mathcal{A}(\tilde{H})$	69
	O Semigrupo $2H + (\delta - 1)\mathbb{N}$	72
	Recobrimentos e Semigrupos Simétricos	73
6	O Teorema Principal e Aplicações	77
	Lemas de Invariância das Fibras de \mathcal{P}	79
	O Teorema Principal e as Fibras de \mathcal{P}	80
	Semigrupos Prescritos	82
6.1	Aplicações e Estudo de Casos	83
	$\delta \geq 6$ e $g = 2$	83
	Curvas Bielípticas e Pontos Subcanônicos	89

In Memoriam

*Ao meu pai,
Tercides,
(06.07.1957 – 26.02.2011)*

*“(…) pues estamos
en mundo tan singular,
que el vivir sólo es soñar;
y la experiencia me enseña
que el hombre que vive, sueña
lo que es, hasta despertar.
(…)
¿Qué es la vida? Una ilusión,
una sombra, una ficción,
y el mayor bien es pequeño;
que toda la vida es sueño,
y los sueños, sueños son.”*

Calderón de la Barca,
La vida es sueño

Dedico

*À minha mãe e à minha vó,
Celeste e Mariana.*

*Ao meu irmão e à minha cunhada,
Tomas e Adriana.*

*Aos meus sogros e a sua pequena,
Wagner, Ivete e Giovanna.*

*À minha esposa,
Camile, a minha Cá,
presente de Deus, amor da vida.*

EM FRONTISPÍCIO

*“Eu vos compensarei pelos anos que
o gafanhoto comeu...”*
(Joel, 2 : 25)

O Senhor prometera nos compensar os anos
que a legião dos gafanhotos devorara,
meu coração, mas a promessa era tão rara
que achei mais natural vê-Lo mudar de planos

que afinal ocupar-Se de assuntos tão mundanos.
Assombra-me, portanto, ver uma luz tão clara
fecundar-me as cantigas, coração meu - repara
como crescem espigas entre escombros humanos...

Naturalmente, quem sou eu para que Deus
cumprisse em minha vida promessa tão perfeita,
e no entanto hei-Lo arando, limpando os olhos meus,

fazendo-os ver que, no trigal em que se deita
a luz dourada e musical, se algo perdeu-se
foi como o grão - entre a seara e a colheita.

Bruno Tolentino

AGRADECIMENTOS

Decerto porque somos especialmente gratos àqueles que nos auxiliam nas vicissitudes, ao expor um agradecimento, o podemos confundir com uma confissão. Não farei distinção...

Agradeço primeiramente ao meu orientador, o Prof. Marcos Jardim, a quem dei preocupações além da conta... Não só por sua orientação e por mostrar-se solícito em todos os momentos que me foram necessários, mas também por sua atenção e confiança aos meus interesses peculiares na matemática. Agradeço também ao Prof. Fernando Torres, que teve os olhos presentes nesta tese, não só com dicas e discussões como também pela sugestão da questão mestra que orientou todo este trabalho.

Aos membros todos presentes na banca, agradeço pelas sugestões e conselhos.

Ao Prof. André Contieri, agradeço pela atenção e pelo cuidado com a leitura do texto, estou convencido de que suas sugestões servirão de orientação aos desdobramentos que farei a partir deste trabalho. Existem muitas semelhanças na natureza dos nossos interesses e acredito que as idas e vindas que este ambiente acadêmico nos proporciona nos coloque ainda, vez ou outra, num mesmo lugar.

Ao Prof. Renato Vidal, agradeço por sua arguição cortês e elogiosa acerca da introdução que escrevi para esta tese, foi com certeza um presente. Ouvi-o reconhecer aquilo que foi o meu esforço sincero, dar ao texto a melhor expressão do significado e da importância do que foi desenvolvido.

Ao Prof. Cícero de Carvalho, agradeço por todos os seus apontamentos, tanto acerca de certas incorreções contidas no trabalho, quanto acerca de certos rumos e alternativas que podem ser tomados e desenvolvidos a partir do que foi feito.

Ao Prof. Paulo Brumatti, agradeço não só por que é, sem dúvida alguma, o professor a quem devo o meu verdadeiro interesse em álgebra, mas pela convivência constante desde idos da minha formação em matemática até o desfecho da defesa.

Por sua hospitalidade e por aceitar me orientar por um certo período, agradeço à Prof^{ta}. Ana Cristina da Universidade de Salamanca. Agradeço ao grupo todo de professores desta universidade que, com paciência, ouviram em mal espanhol os meus seminários e teceram comentários valiosos. Em especial, ao Prof. Esteban Gonzáles, por suas sugestões que, sem dúvida, foram essenciais para os rumos deste trabalho. Agradeço aos amigos que ali fiz, pelas numerosas e saborosas “charlas” regadas com “café y leche”.

À Capes e à CNPq, agradeço por em momentos diferentes financiarem os meus estudos.

Finalmente, agradeço àquelas pessoas todas que influenciaram esta empreitada acadêmica de um modo um tanto mais distinto.

Agradeço aos meus familiares e amigos, desde os mais próximos aos mais distantes, alguns dos quais me auxiliaram com sincera hospitalidade e o requinte de um lar confortável para estes anos todos de labuta universitária. Não é possível medir o impacto deles sobre este trabalho, eles que, ou pela boa conversa ou uma comemoração qualquer, muitas vezes me trouxeram de volta quando perdido em abstrações, não raras vezes, vãs.

Agradeço de modo mais especial aquela a quem pertença, a minha esposa. Existe, sem dúvida, uma luminosidade em nosso companheirismo... A vejo nitidamente em certos momentos, quando me ocorre a imagem daquela troca de sorrisos, nesses minutos em que se experimenta certa liberdade, a certeza de uma alegria sincera, um bom vinho e uma conversa agradável, minutos esses de imaculada espontaneidade, onde tudo, assim parece, permanecerá para sempre, que serão marcas da nossa personalidade. Agradeço a ela, Camile, não só por esses momentos preciosos, mas também por aceitar viver comigo aqueles outros em que extravaso certas excentricidades duramente compreensíveis. O seu valor em minha vida é inestimável, pois transforma minhas vicissitudes em pura poesia...

Agradeço aos meus pais, são eles, sem dúvida, a quem mais devo, é aquela gratidão difícil de pronunciar, e, assim mesmo, silenciosa, sei que basta. Deixo a eles o meu olhar babão de pura e sincera admiração...

Agradeço por fim, porém acima de tudo, a Deus, por fazer-me reconhecê-Lo naquele nível profundo onde razão verdadeira e amor verdadeiro equiparam-se - fonte infinita que mana com morna mansuetude o que bebe e embebe as criaturas (ainda que de noite seja!, como sabia João da Cruz...). Se não mais me espantam as percepções de que a realidade edifica-se deste dom, dom de Deus, é por ser tal como a fina música, qual matéria em delírio, que nas junções dos sons, com seus desagues e imersões, revelam um todo maior significativo, buscado tão só por antes ter-se mostrado pronto ao artista, a clara alusão a uma promessa...

“(…)

Deus, que concebe o cântaro e o separa
da argila lentamente, foi fazendo
do meu aprendizado o Seu compêndio
de opacidades cada vez mais claras,
e com silêncios sempre mais esplêndidos
foi limando, aguçando o que escutara.”

Introdução

A questão que orienta esta tese foi proposta pelo prof. Dr. Fernando Torres em uma conversa informal: *dada uma variedade de Prym com uma polarização Prym-Theta, o que se pode dizer dos semigrupos de Weierstrass das ramificações dos recobrimentos duplos que percorrem a fibra da variedade pela aplicação de Prym?*

Durante minha estada na Universidade de Salamanca, o prof. Dr Esteban Gonzales, a partir de [52], confirmou a intuição: *parte do esforço atual da teoria de Prym's tem em conta que certas informações, e talvez também acerca dos semigrupos de Weierstrass nas ramificações dos recobrimentos, podem ser encontradas no lugar onde a aplicação de Gauss sobre o divisor da polarização se degenera. Se se pretende recuperar elementos do recobrimento na variedade de Prym, deve-se olhar para o divisor Prym-Theta associado.*

Esta idéia é motivada pelo método de Andreotti para a demonstração do Teorema de Torelli, que recupera a curva no lugar onde a aplicação de Gauss sobre o divisor Theta da Jacobiana se degenera (cf. [1]). Uma vez que os divisores Theta sobre uma Jacobiana diferem apenas por translações, então é possível recuperar a curva a partir da polarização canônica da sua Jacobiana associada. O mesmo não pode ser feito a partir do divisor Prym-Theta, de tal, em contraste com o caso da Jacobiana, não é possível recuperar a curva do recobrimento por este método (cf. [68]). Decerto isto não esgota as questões, pois deixa a que trata acerca de quais informações podem ser recuperadas.

Um ponto de vista, que define um ponto de partida na teoria de recobrimentos duplos, é a possibilidade de descrevê-los por ternas de elementos da curva recoberta. Tanto a variedade de Prym associada ao recobrimento duplo, quanto os semigrupos de Weierstrass das ramificações, ambos podem ser descritos em termos desses elementos. Com isto em vista, considera-se a dualidade entre o lugar onde a aplicação de Gauss sobre o divisor Prym-Theta se degenera e o divisor de ramos do recobrimento duplo (cf. [52, seção 4.1]). A partir desta dualidade investiga-se as possíveis relações entre os semigrupos de Weierstrass das ramificações do recobrimento e as fibras da aplicação de Gauss sobre o divisor Prym-Theta associado. De fato, esta tese pretende mostrar que existe uma relação possível. Mas

em contraste com o caso das Jacobianas, não é da polarização da variedade de Prym que as informações são recuperadas, mas da órbita promovida pelas translações de um divisor Prym-Theta prescrito, que neste caso não é distinguível na polarização.

Nas seções desta introdução que se seguem, passo a descrever o que foi comentado acima. Os resultados demonstrados da tese encontram-se mencionados nesta descrição, são os Teoremas A, B, C, D e E . Os detalhes das definições e das propriedades são dados ao longo dos capítulos da dissertação.

Detalhes técnicos à parte, importa não perder de vista alguns dados históricos que narram os desdobramentos de ambas as teorias. É certo que algumas origens e alguns locais somente podem ser acessados por fantasia especulativa. Contudo, não há dúvidas quanto a época e o local a partir dos quais surgiram as duas classes de objetos tratadas nesta tese. Foi na University of Berlin, no século XIX, em que se deu o florescimento da análise complexa, ali estiveram contemporaneamente estes dois matemáticos cujos nomes dão título a esta tese - Karl Weierstrass e Friedrich Prym. Nas referências [13] e [19] é possível encontrar um relato conciso tanto das origens quanto dos desdobramentos posteriores dos estudos realizados a partir de Weierstrass e Prym que merecem maior destaque, alguns dos quais são brevemente mencionados no decorrer da dissertação, notadamente baseados nestas referências.

Recobrimentos Duplos e Ternas (C, \mathcal{L}, B)

Um *curva* é uma curva projetiva complexa, irredutível e não-singular.

O ponto de partida da dissertação é a descrição de recobrimentos duplos de curvas por ternas de elementos da curva recoberta (cf. [56]). O método deriva de um modo particular de construir fibrações vetoriais a partir de variedades prescritas via o *push forward* de uma fibração linear por recobrimentos finitos.

Se $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ é um recobrimento duplo com ramos nos pontos do divisor B , então a inversa da fibração linear $\text{coker}(\mathcal{O}_C \rightarrow \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}})$ é uma fibração linear \mathcal{L} tal que $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}} \simeq \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}^{-1}$ e $\mathcal{L}^2 \simeq \mathcal{O}_C(B)$. Reciprocamente, dados $\mathcal{L} \in \text{Pic}(C)$ e $B \in |\mathcal{L}^2|$, existe um único recobrimento duplo $\pi : \mathbf{Spec}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}^{-1}) \rightarrow C$, com ramos nos pontos do divisor B , tal que $\pi_*\mathcal{O}_{\mathbf{Spec}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}^{-1})} \simeq \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}^{-1}$.

As construções são inversas uma da outra. Isto significa que recobrimentos duplos de curvas são completamente determinados por ternas do tipo (C, \mathcal{L}, B) . O espaço $\mathcal{R}_{g,\delta}$ das

ternas parametriza o conjunto das classes de isomorfismos de recobrimentos duplos de curvas de gênero g ramificados precisamente em δ pontos.

Esta descrição por ternas permite relatar os variados objetos associados aos recobrimentos duplos em termos desses elementos. No que segue passo a relatar o modo como os objetos de interesse desta tese - as variedades de Prym e os semigrupos de Weierstrass das ramificações do recobrimento - podem ser relatados nesses termos. Isto permitirá ao final enunciar os Teoremas principais.

Recobrimentos Duplos e Semigrupos de Weierstrass

“From the 1980s onward, the literature on Weierstrass points and related questions started to grow very fast, and in the last 20 years the number of papers which have appeared on this subject are already more than three times what has been published in the previous thirty.”

Andrea Del Centina
(cf. [13, pag.56])

Dada uma curva C , o *semigrupo de Weierstrass* de um ponto $x \in C$ é o conjunto de todas as ordens possíveis das funções meromorfas que admitem o próprio x como único pólo. Mais especificamente, este é o subsemigrupo de \mathbb{N} dado por

$$H(x) := \{\eta \in \mathbb{N}_0 ; \exists f \in \mathbb{C}(C) \text{ com } (f)_\infty = \eta x\} \cup \{0\}.$$

As *lacunas de Weierstrass* associadas ao ponto x são os inteiros positivos do complemento $G(x) := \mathbb{N} \setminus H(x)$, enquanto que os inteiros de $H(x)$ são as *não-lacunas de Weierstrass* associadas ao ponto x . A existência de uma função meromorfa com um único pólo em x de ordem η é equivalente a uma inclusão própria dos espaços das seções $H^0(C, \mathcal{O}_C((\eta-1)x)) \subsetneq H^0(C, \mathcal{O}_C(\eta x))$. Pelo Teorema de Riemann-Roch, que calcula as dimensões dos espaços das seções em termos do gênero g da curva C , existem precisamente g lacunas $\ell_1 < \dots < \ell_g$ associadas a cada ponto x . Este resultado é a versão para curvas algébricas do *Luckensatz* de Weierstrass, cuja versão atual é conhecida como *Teorema das Lacunas*. Mostra que, apesar da sua definição local, é possível resgatar informações globais sobre a curva a partir dos semigrupos de Weierstrass de seus pontos.

O cálculo das lacunas permite distinguir um conjunto de pontos sobre a curva, os *pontos de Weierstrass*, que são os pontos cuja g -ésima lacuna ℓ_g é distinta de g . Dentre os temas

desenvolvidos posteriores ao *Luckensatz*, dois deles são de interesse desta tese: um trata de estudar as propriedades aritméticas dos semigrupos numéricos arbitrários tratados por analogia com os semigrupos de Weierstrass. O outro trata da descrição de curvas com pontos com semigrupos de Weierstrass prescritos.

A questão sobre a possibilidade de um semigrupo numérico arbitrário H ser um semigrupo de Weierstrass foi originalmente dada por Hurwitz em 1893 (cf. [30]). Somente longo tempo depois, em 1980, Buchwitz forneceu um critério, a partir do qual foi possível fornecer exemplos de semigrupos numéricos que não satisfazem tal exigência (cf. [11]). Desde o exemplo de Buchwitz, a caracterização de semigrupos numéricos por semigrupos de Weierstrass é um problema de intensa investigação, e muitos outros resultados e exemplos foram obtidos desde então (cf. [37, 72]).

O problema de estudar curvas com pontos com semigrupos de Weierstrass prescritos pressupõe a seguinte questão: *quais propriedades geométricas das curvas podem ser descritas a partir de propriedades exclusivamente aritméticas dos semigrupos?* Uma curva, por exemplo, admitindo um ponto com uma primeira não-lacuna não-nula n prescrita, pode ser identificada com um recobrimento de \mathbb{P}^1 de grau n , tendo um ponto totalmente ramificado. Problemas de classificação acerca das classes de curvas pontuadas com um semigrupo de Weierstrass prescrito, são de grande interesse e servem de orientação para muitas das pesquisas realizadas (cf. [14, 60, 70]). Dentro da teoria de semigrupos numéricos arbitrários, são importantes os trabalhos [38, 40, 42] que investigam casos circunstanciais para a primeira não-lacuna não-nula.

O âmbito dessas questões que interessa para esta tese é dos recobrimentos duplos de curvas. Segundo uma observação de Kato (cf. [32]), existe uma relação possível entre os semigrupos de Weierstrass de uma ramificação e do seu ramo correspondente. Tal relação pode ser dada em termos da terna que define o recobrimento duplo. De fato, se $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ é um recobrimento duplo determinado pela terna (C, \mathcal{L}, B) e $\pi(\tilde{x}) = x$ é um ramo, então os semigrupos $H(\tilde{x})$ e $H(x)$ podem ser relatados pela seguinte decomposição do espaço de seções (cf. [10]),

$$H^0(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}(n\tilde{x})) = H^0(C, \mathcal{O}_C(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor x)) \oplus H^0(C, \mathcal{L}^{-1}(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor x)).$$

Pelo Teorema de Riemann-Roch, existem exatamente g não-lacunas ímpares $\gamma_1, \dots, \gamma_g \in H(\tilde{x})$, todas menores que $2\tilde{g}$, tais que

$$H(\tilde{x}) = 2H(x) \cup \{\gamma_1, \dots, \gamma_g\} \cup \{2\tilde{g}, \rightarrow\}.$$

Uma vez que $H(x)$ é o conjunto dos inteiros positivos m tais que $2m \in H(\tilde{x})$, para determinar o semigrupo $H(\tilde{x})$ a partir do semigrupo $H(x)$, basta descrever as não-lacunas ímpares γ'_i s. Mais geralmente, dado um conjunto de semigrupos prescritos $\mathcal{C} = \{H_1, \dots, H_\delta\}$, pode-se considerar o conjunto das curvas C admitindo um divisor efetivo e reduzido B , tais que $\mathcal{C}(B) = \mathcal{C}$, isto é, tais que os semigrupos de Weierstrass de cada ponto do divisor B é um dos H'_i s. Fixado um conjunto típico \mathcal{C} , o conjunto

$$\mathcal{R}_{g,\delta}(\mathcal{C}) = \{(C, \mathcal{L}, B) \in \mathcal{R}_{g,\delta} \ ; \ \mathcal{C}(B) = \mathcal{C}\},$$

é formado pelos recobrimentos duplos de $\mathcal{R}_{g,\delta}$ cujos ramos são pontos com semigrupos de Weierstrass pertencentes ao conjunto de atribuições \mathcal{C} . A questão que interessa a esta tese tem haver com a descrição das não-lacunas ímpares dos semigrupos de Weierstrass das ramificações de um recobrimento $(C, \mathcal{L}, B) \in \mathcal{R}_{g,\delta}(\mathcal{C})$.

Por analogia aos semigrupos de Weierstrass das ramificações dos recobrimentos duplos, pode-se considerar semigrupos numéricos arbitrários que são recobrimentos quocientes de outros semigrupos numéricos (cf. [64]). Dado um semigrupo numérico H estuda-se semigrupos numéricos \tilde{H} que são *recobrimentos duplos* de H no seguinte sentido

$$H = \{\eta \in \mathbb{N} \ ; \ 2\eta \in \tilde{H}\}.$$

Por definição, o semigrupo \tilde{H} determina o semigrupo H completamente. Aqui é natural a pergunta quanto aos semigrupos \tilde{H} e H sobre quando a propriedade de ser Weierstrass de um implica ou não a do outro. A maneira que melhor se destaca para atacar este problema é mesmo quanto a classificação de tais semigrupos quando aparecem nas ramificações dos recobrimentos duplos de curvas (cf. [37]). O método passa pela identificação de critérios para que esta condição se realize. Pela fórmula de Riemann-Hurwitz, por exemplo, é necessário que os gêneros \tilde{g} de \tilde{H} e g de H sejam tais que $\tilde{g} \geq 2g$. Em [73], Torres forneceu um outro critério dependendo apenas do gênero. Ele noticiou que cada semigrupo de Weierstrass \tilde{H} de gênero \tilde{g} com um número $g \leq (\tilde{g} - 4)/6$ de lacunas pares, é o semigrupo de Weierstrass da ramificação de um recobrimento duplo de uma curva de gênero g . Uma vez dadas as condições necessárias dos semigrupos de Weierstrass nas ramificações dos recobrimentos duplos, pode-se construir semigrupos numéricos que não são semigrupos de Weierstrass (cf. [37, 38, 41, 43]).

Jacobianas e o Método de Andreotti

“The Jacobian has always been the corner-stone in the analysis of algebraic curves and compact Riemann surfaces.”

David Mumford
(cf. [58, pag. 260])

A Jacobiana de uma curva C é o toro complexo

$$J(C) := H^0(C, \omega_C)^* / H_1(C, \mathbb{Z}).$$

Por ser uma variedade projetiva, a Jacobiana é uma variedade abeliana. Sua projetivização é dada por uma fibração linear que pode ser determinada de forma canônica. Qualquer divisor Θ sobre $J(C)$ tal que a fibração linear $\mathcal{O}_{J(C)}(\Theta)$ define uma polarização canônica é chamado de *divisor Theta* de $J(C)$. A correspondência que associa a curva algébrica C ao par $(J(C), \mathcal{O}_{J(C)}(\Theta))$ define uma ponte entre a teoria de curvas algébricas e a teoria de variedades abelianas principalmente polarizadas, o que permite estudar os elementos da curva C a partir das variadas descrições possíveis da Jacobiana $J(C)$. O isomorfismo de Abel-Jacobi, $Pic^0(C) \xrightarrow{\cong} J(C)$, por exemplo, descreve a Jacobiana como o grupo das fibrações lineares de grau zero sobre C . A partir da variedade $Pic^{g-1}(C)$ das fibrações lineares de grau $g - 1$, pode-se definir um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} & & Pic^{g-1}(C) \\ & \nearrow \rho & \downarrow \alpha \\ C^{(g-1)} & \longrightarrow & J(C), \end{array}$$

em que α é a torção pela inversa de uma fibração linear prescrita de $Pic^{g-1}(C)$. Pela fórmula de Poincaré, o conjunto $\alpha(W_{g-1})$ é um divisor Theta da variedade Jacobiana. Não existe um modo canônico de distinguir o divisor Θ na sua classe de equivalência algébrica, mas sendo $\mathcal{O}_J(\Theta)$ uma fibração linear principal, dois divisores Theta quaisquer diferem por uma translação.

Pelo Teorema da Singularidade de Riemann, os pontos não-singulares da variedade $W_{g-1} := \rho(C^{(g-1)})$ são as fibrações lineares representadas pelos divisores regulares de $C^{(g-1)}$. A aplicação de Gauss G_Θ sobre o divisor Θ pode ser definida a partir das fibrações lineares de W_{g-1} , fazendo corresponder a cada fibração linear de W_{g-1}^{ns} o hiperplano gerado

pelo divisor regular associado no espaço canônico:

$$\begin{aligned} G_\Theta : W_{g-1}^{ns} &\longrightarrow \mathbb{G}(g-2, \mathbb{P}H^0(C, \omega_C)^*) \\ \rho(D) &\longmapsto \overline{\phi_{\omega_C}(D)}. \end{aligned}$$

O Teorema de Torelli assegura a possibilidade de recuperar da Jacobiana canonicamente polarizada a sua curva associada. O método de Andreotti consiste em recuperar a curva no lugar \mathfrak{B}_{G_Θ} onde a aplicação de Gauss se degenera (cf. [1]). Isto segue do seguinte fato: a aplicação de Gauss G_Θ se degenera precisamente sobre os divisores $D+x$ tais que $K_C - D - 2x$ é linearmente equivalente a um divisor efetivo. Isto significa que o hiperplano determinado por $G_\Theta(D+x)$ é tangente ao modelo canônico da curva (cf. [31, Lemma 5.3], [16, pag. 691]).

Teorema (Torelli). *Se C e C' são curvas tais que $(J(C), \Theta)$ e $(J(C'), \Theta')$ são isomorfas como variedades abelianas polarizadas, então C e C' são isomorfas.*

Demonstração: (esboço) A imagem $\phi_{\omega_C}(C)$ é a hipersuperfície dos tangentes sobre a curva, que é o lugar dos ramos \mathfrak{B}_{G_Θ} onde a aplicação de Gauss G_Θ se degenera. Daí, $\mathfrak{B}_{G_\Theta}^* = C$

□

Indicando por \mathcal{M}_g o espaço das curvas de gênero g e por \mathcal{A}_g o espaço de variedades abelianas principalmente polarizadas, segue do Teorema de Torelli que a aplicação

$$\begin{aligned} J : \mathcal{M}_g &\longrightarrow \mathcal{A}_g \\ C &\longmapsto (J(C), \mathcal{O}_C(\Theta)), \end{aligned}$$

chamada *morfismo de Torelli*, é injetora. O *problema de Schottky* consiste em determinar quando variedades abelianas principalmente polarizadas estão na imagem do morfismo de Torelli. A questão é um problema de intensa investigação e trata da caracterização de toros complexos projetivos que são Jacobianas de curvas (cf. [8, 19, 57]).

Recobrimentos Duplos e Variedades de Prym

“The theory of Prym varieties was dormant for a long time, until revived by D. Mumford around 1970. It now plays a substantial role in some contemporary theories, for example integrable systems, the Kadomtsev-Petviashvili equation (KP equation), in the deformation theory of two-dimensional Schrödinger operators, in relation to Calabi-Yau three-folds and string theory, in the study of the generalized theta divisors on the moduli spaces of stable vector bundles over an algebraic curve,...”

Lesfari, A., (cf. [49])

Uma questão particular na teoria de Jacobianas é sobre as influências que suas subvariedades exercem sobre a curva. Nesta direção, a teoria de variedades de Prym descreve um método tendo como ponto de partida um dado recobrimento duplo $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$. A partir disto estuda-se a subvariedade $\pi^*J(C)$ de $J(\tilde{C})$ obtida pelo pullback da Jacobiana $J(C)$ de C . A *variedade de Prym* associada ao recobrimento duplo π é a subvariedade P_π da Jacobiana de \tilde{C} , complementar a subvariedade $\pi^*J(C)$. Como tal, assim como a própria Jacobiana, pode ser descrita como um conjunto de classes de fibrações lineares a partir da terna (C, \mathcal{L}, B) que define o recobrimento duplo π . De fato, a aplicação norma N_π entre as Jacobianas associa cada $M \in \text{Pic}^0(\tilde{C})$ à fibração linear de $\text{Pic}^0(C)$ definida por

$$N_\pi(M) \simeq \det(\pi_*M) \otimes \mathcal{L}.$$

Se π é um recobrimento duplo ramificado, então $\text{Ker } N_\pi$ é conexo e se tem a seguinte descrição

$$P_\pi = \text{Ker } N_\pi.$$

A restrição do divisor $\tilde{\Theta}$ de $J(\tilde{C})$ sobre P_π define um divisor $i_{P_\pi}^* \tilde{\Theta}$, chamado divisor *Prym-Theta*, cujo tipo da polarização associada é $D = (1, \dots, 1, 2, \dots, 2)$, onde 1 aparece $(\delta/2 - 1)$ vezes e 2 aparece g vezes. A *aplicação de Prym* é a aplicação definida por

$$\mathcal{R}_{g,\delta} \longrightarrow \mathcal{A}_{g-1+\frac{\delta}{2},D} \quad , \quad (\tilde{C} \xrightarrow{\pi} C) \longmapsto (P_\pi, \mathcal{O}_{P_\pi}(i_{P_\pi}^* \tilde{\Theta})),$$

onde $\mathcal{A}_{g-1+\frac{\delta}{2},D}$ é o conjunto das variedades abelianas com polarizações com tipo D .

A aplicação de Prym é a análoga da aplicação de Torelli. Por analogia ao *problema de Torelli*, se levanta o *problema de Prym-Torelli* acerca da possibilidade de caracterizar os recobrimentos duplos a partir da variedade de Prym associada: é injetiva a aplicação de Prym? Em geral, a resposta é negativa. Por exemplo, a fibra da aplicação de Prym associada a uma curva bi-hiperelíptica, cujo recobrimento bi-hiperelíptico ramifica-se em dois

pontos, pode ser parametrizada por um conjunto infinito (cf. [15]). Por outro lado, asserções acerca das dimensões dos espaços em termos de g e de δ garantem, ao menos genericamente, que o recobrimento (C, \mathcal{L}, B) pode ser recuperado na sua imagem em $\mathcal{A}_{g-1+\frac{\delta}{2}, D}$ pela aplicação de Prym (cf. [52]).

Como subvariedade de um toro complexo, a variedade de Prym admite uma descrição topológica:

$$P_\pi = \frac{H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})^*}{H_1(\tilde{C}, Z)^-}.$$

Quando o recobrimento duplo não tem ramificações, as seções da fibração linear $\omega_C \otimes \mathcal{L}$ são chamadas de *diferenciais de Prym*, em razão de Friedrich Prym. Consta que, aparentemente, esta foi a razão para Mumford ter inventado o nome *Prym Varieties* em [56], em que não só trouxe à tona uma parte da teoria de funções complexas até então esquecida, como também desenvolveu uma teoria algébrica de Prym's, firmemente ancorada na moderna geometria algébrica (cf. [19, pag. 1], [45, pag. 380]).

A variedade de Prym P_π é um toro complexo quociente do dual $H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})^*$ por um reticulado. Portanto, o espaço tangente projetivizado em qualquer ponto de P_π , transladado para a origem, identifica-se com $\mathbb{P}H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})^*$. Por analogia ao método de Andreotti para a demonstração do Teorema de Torelli, estuda-se o lugar onde a aplicação de Gauss G_Ξ sobre o divisor Prym-Theta Ξ se degenera. O ponto de partida é a possibilidade de representar o conjunto Ξ^{ns} dos pontos não singulares de Ξ pelas fibrações lineares do conjunto

$$\widehat{\Xi}^{ns} = \{\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{D}) ; \tilde{D} \in \tilde{C}^{(\tilde{g}-1)}, N_\pi(\tilde{D}) \simeq \omega_C \otimes \mathcal{L} \text{ e } h^0(\tilde{C}, \tilde{D}) = 1\}.$$

A aplicação de Gauss G_Ξ pode ser definida a partir do conjunto de fibrações lineares $\widehat{\Xi}^{ns}$. Sua imagem define hiperplanos do dual $\mathbb{P}H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})^*$ dados pela norma $N_\pi(\tilde{D})$ dos divisores \tilde{D} que representam os elementos de $\widehat{\Xi}^{ns}$. Isto permite estudar as interseções destes hiperplanos com o modelo de C no espaço das seções da fibração linear $\omega_C \otimes \mathcal{L}$. Existe uma relação estreita entre as ramificações de π e os hiperplanos do espaço das seções da fibração linear $\omega_C \otimes \mathcal{L}$ dados pelos divisores $\tilde{D} \in \Xi^{ns}$ que definem o lugar onde a aplicação de Gauss G_Ξ se degenera. De fato, se \tilde{C} é livre de bitangentes e a fibração linear $\omega_C \otimes \mathcal{L}$ é globalmente gerada, então a aplicação de Gauss G_Ξ se degenera sobre os pontos $\tilde{E} + \alpha\tilde{x} \in \Xi^{ns}$, onde \tilde{x} é uma ramificação de π e o divisor \tilde{E} é livre de ramificações e pontos involutivos entre si (cf. Cor. 4.2). Nessas condições é possível contar a cardinalidade das

fibras da aplicação de Gauss onde ela se degenera:

$$\#G_{\Xi}^{-1}(G_{\Xi}(\tilde{E} + \alpha\tilde{x})) = 2^{2g-2+\delta/2-\alpha}.$$

Pondo

$$\mathcal{A}(\pi)_x := \{\alpha \in \mathbb{N} ; \exists \tilde{E} + \alpha\tilde{x} \in \Xi^{ns} \text{ e } \tilde{x} \notin \tilde{E}\},$$

então

$$\mathcal{A}(\pi)_x = \{2g - 2 + \delta/2 - \log_2 \#G_{\Xi}^{-1}(G_{\Xi}(\tilde{D})) ; \tilde{x} \in \tilde{D} \text{ e } \tilde{D} \in \mathfrak{R}_{G_{\Xi}}\}.$$

O Teorema seguinte é um resultado desta tese e demonstra uma conexão entre a cardinalidade das fibras da aplicação de Gauss G_{Ξ} com os semigrupos de Weierstrass das ramificações e dos ramos do recobrimento duplo.

Teorema (A). *Seja $\pi : \tilde{C} = (C, \mathcal{L}, B) \rightarrow C$ um recobrimento duplo ramificado tal que \tilde{C} é livre de bitangentes e a fibração linear $\omega_C \otimes \mathcal{L}$ é globalmente gerada. Dado um ramo $\pi(\tilde{x}) = x$, sejam γ a primeira não-lacuna ímpar de $H(\tilde{x})$ e $c + 1$ a primeira não-lacuna de $H(x)$. Então*

$$\mathcal{A}(\pi)_x = \{\alpha \in \mathbb{N} ; \alpha \leq \min\{\gamma - 1, 2c + 1\} \text{ e } 2\alpha + 1 \notin H(\tilde{x})\}.$$

□

Este Teorema mostra que os conjuntos $\mathcal{A}(\pi)_x$ s são completamente determinados pelos semigrupos das ramificações dos recobrimentos. Isto sugere que estes conjuntos possam ter propriedades aritméticas. De fato, em vista deste Teorema um análogo do conjunto $\mathcal{A}(\pi)_x$ pode ser definido no contexto da teoria de semigrupos numéricos, onde tais propriedades podem ser estudadas.

Consequências do Teorema A

A variedade de Prym P , associada a um recobrimento duplo $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$, admite uma polarização L_P dada pelo divisor Prym-Theta Ξ . Em contraste com a polarização da Jacobiana, a polarização L_P sobre a variedade de Prym não é principal. Isto significa que não se pode afirmar que os divisores que definem a polarização L_P são obtidos um do outro por translações. A dualidade entre os ramos do recobrimento π e o lugar onde a

aplicação de Gauss sobre o divisor Prym-Theta se degenera, deve ser estudada a partir do par (P, Ξ) . Entretanto, dado Ξ , é possível considerar a órbita $Orb(\Xi)$ dos divisores que são translações de Ξ . A cardinalidade das fibras da aplicação de Gauss G_Ξ sobre os pontos do ramo \mathfrak{B}_{G_Ξ} são invariantes nesta órbita. Mais ainda, no conjunto dos pares (X, Ξ) , onde X é uma variedade abeliana e Ξ é um divisor que define uma polarização, pode-se definir uma relação \sim , onde $(X_1, \Xi_1) \sim (X_2, \Xi_2)$ se existe um isomorfismo $f : X_1 \rightarrow X_2$ tal que os divisores $f(\Xi_1)$ e Ξ_2 diferem por uma translação. O conjunto das classes pode ser denotado por

$$\mathbf{P}_{g-1+\frac{\delta}{2}, D} = \left\{ (X, \Xi) \ ; \ (X, \mathcal{O}_X(\Xi)) \text{ é uma variedade abeliana} \right. \\ \left. \text{com tipo } D \text{ e dimensão } g-1+\frac{\delta}{2} \right\} / \sim.$$

Isto define uma aplicação

$$\mathcal{P} : \mathcal{R}_{g, \delta} \longrightarrow \mathbf{P}_{g-1+\frac{\delta}{2}, D} \ , \ (\tilde{C} \xrightarrow{\pi} C) \longmapsto (P_\pi, i_{P_\pi}^* \tilde{\Theta}).$$

A aplicação de Prym associa um recobrimento duplo $(\tilde{C} \xrightarrow{\pi} C)$ à variedade de Prym polarizada $(P_\pi, \mathcal{O}_P(i_{P_\pi}^* \tilde{\Theta}))$ (cf. pag. 8).

Dado um recobrimento duplo $\pi \in \mathcal{R}_{g, \delta}$ com divisor de ramos B , defina

$$\mathcal{A}(\pi) := \{\mathcal{A}(\pi)_x \ ; \ x \in B\}.$$

Teorema (B). *Suponha que $\delta \geq 6$ e $g \geq 2$. Dado $(P, \Xi) \in \mathcal{P}(\mathcal{R}_{g, \delta})$, o conjunto $\mathcal{A}(\pi)$ é o mesmo, qualquer que seja $\pi \in \mathcal{P}^{-1}(P, \Xi)$.*

□

Acerca do conjunto $\mathcal{A}(\pi)$, quando π percorre a fibra de $(P, \mathcal{O}_P(\Xi))$ pela aplicação de Prym, nada pode-se afirmar.

A partir dos Teoremas A e B, e de propriedades aritméticas dos conjuntos $\mathcal{A}(\pi)_x$'s, é possível verificar que certos invariantes do par (P, Ξ) determinam não-lacunas ímpares das ramificações dos recobrimentos duplos $\pi \in \mathcal{P}^{-1}(P, \Xi)$. Este é o conteúdo do próximo Teorema. Para enunciá-lo, note que, em vista do Teorema B, se $\delta \geq 6$ e $g \geq 2$, dado $(P, \Xi) \in \mathcal{P}(\mathcal{R}_{g, \delta})$, pode-se considerar o conjunto

$$\mathcal{A}(P, \Xi) := \mathcal{A}(\pi),$$

onde π é qualquer recobrimento duplo na fibra $\mathcal{P}^{-1}(P, \Xi)$. Em particular, pode-se escrever

$$\mathcal{A}(P, \Xi) = \{\mathcal{A}(P, \Xi)_j ; j = 1, \dots, \delta\},$$

onde dado um recobrimento duplo $\pi \in \mathcal{P}^{-1}(P, \Xi)$, existe um ramo $\pi(\tilde{x}_j) = x_j$ tal que

$$\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \mathcal{A}(\pi)_{x_j}.$$

Em geral, o conjunto $\mathcal{A}(P, \Xi)_j$ não determina a primeira não-lacuna $c_j + 1$ do ramo correspondente do recobrimento. Em vista disto, a questão pode ser tratada a partir de curvas com pontos prescritos. Mais especificamente, pode-se considerar um conjunto $\mathcal{C} = \{H_1, \dots, H_\delta\}$ de semigrupos numéricos prescritos e o conjunto $\mathcal{R}_{g,\delta}(\mathcal{C})$ dos recobrimientos duplos de $\mathcal{R}_{g,\delta}$ cujos semigrupos de Weierstrass dos pontos do divisor de ramos são precisamente os semigrupos do conjunto \mathcal{C} (cf. pag. 5). Considere a aplicação

$$\mathcal{P}_{\mathcal{C}} : \mathcal{R}_{g,\delta}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{P}_{g-1+\frac{\delta}{2}, D} \quad , \quad (\tilde{C} \xrightarrow{\pi} C) \longmapsto (P_\pi, i_{P_\pi}^* \tilde{\Theta}).$$

Com estas notações, pode-se demonstrar o seguinte Teorema.

Teorema (C). *Suponha que $\delta \geq 6$ e $g \geq 2$. Dado $(P, \Xi) \in \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(\mathcal{R}_{g,\delta}(\mathcal{C}))$ existem δ conjuntos de inteiros ímpares*

$$\mathcal{I}_1 = \{\gamma_{11} < \dots < \gamma_{1i_1}\}, \dots, \mathcal{I}_\delta = \{\gamma_{\delta 1} < \dots < \gamma_{\delta i_\delta}\},$$

dependentes do par (P, Ξ) , onde os γ'_{jk} s são tais que

$$\left[\frac{\gamma_{jk}}{2}\right] \leq \min\{\gamma_{j1} - 1, 2c_j + 1\} \quad e \quad \left[\frac{\gamma_{jk}}{2}\right] \notin \mathcal{A}(P, \Xi)_j,$$

com \mathcal{I}_j vazio se, e somente se, $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \{1, \dots, 2c_j + 1\}$, e tais que, para cada ramo $\pi(\tilde{x}_j) = x_j$ de um recobrimento duplo $\pi \in \mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{-1}(P, \Xi)$, por uma troca de índices, os ímpares de \mathcal{I}_j correspondem precisamente as i_j primeiras não-lacunas ímpares da ramificação \tilde{x}_j de π .

□

Por um método aritmético é possível verificar que \mathcal{I}_j é vazio sempre que $\delta > 4c_j + 4$ (em particular se $\delta > 4g + 4$), neste caso $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \{1, \dots, 2c_j + 1\}$ e não há mais o que fazer. Restará o caso $\delta \leq 4c_j + 4$, que pode ser tratado circunstancialmente.

Dois casos particulares serão estudados para exemplificar os resultados. O primeiro trata das descrições explícitas dos conjuntos $\mathcal{A}(P, \Xi)_j$ s quando $g = 2$ e $\delta \geq 6$, que são as hipóteses minimais sobre o gênero g e o índice de ramificação δ para a aplicação do Teorema B e seus Corolários. O segundo será um estudo sobre $\mathcal{A}(P, \Xi)_j$ considerando recobrimentos duplos cujos pontos dos divisores dos ramos e das ramificações são pontos especiais sobre as curvas, os pontos subcanônicos, que são os pontos cujos semigrupos de Weierstrass são semigrupos simétricos. Como consequência de propriedades aritméticas, o seguinte Teorema será demonstrado.

Teorema (D). *Seja $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ um recobrimento duplo ramificado tal que \tilde{C} é livre de bitangentes e a fibração linear semicanônica associada é globalmente gerada. Seja Ξ o divisor Prym-Theta da variedade de Prym P correspondente ao recobrimento. Seja $\pi(\tilde{x}_j) = x_j$ um ramo tal que a primeira não-lacuna $c_j + 1$ satisfaz $4 \leq \delta \leq 4c_j + 4$. Dentre as condições a seguir, duas implicam a terceira:*

- 1) *O ponto x_j é um ponto subcanônico.*
- 2) *O ponto \tilde{x}_j é um ponto subcanônico.*
- 3) *$\delta/2 - 1 \notin \mathcal{A}(P, \Xi)_j$.*

Neste caso,

$$H(\tilde{x}_j) = 2H(x_j) + (\delta - 1)\mathbb{N}.$$

Se, mais ainda, $2c_j + 4 \leq \delta \leq 4c_j + 4$, então $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \{1, 2, \dots, 2c_j + 1\} \setminus \{\frac{\delta}{2} - 1\}$.

□

Por aplicação do Teorema B se tem o seguinte Teorema.

Teorema (E). *Seja $\mathcal{C} = \{H_1, \dots, H_\delta\}$ um conjunto de semigrupos numéricos todos eles semigrupos simétricos. Suponha que $g \geq 2$ e $\delta \geq 6$. Dado $(P, \Xi) \in \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(\mathcal{R}_{g, \delta}(\mathcal{C}))$, as seguintes asserções são equivalentes*

- 1) *para cada recobrimento duplo $\pi \in \mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{-1}(P, \Xi)$, existe um ramo $\pi(\tilde{x}_j) = x_j$, cuja primeira não-lacuna $c_j + 1$ satisfaz $4 \leq \delta \leq 4c_j + 4$, tal que \tilde{x}_j é um ponto subcanônico;*
- 2) *existe um índice j tal que $\delta/2 - 1 \notin \mathcal{A}(P, \Xi)_j$.*

Neste caso,

$$H(\tilde{x}_j) = 2H(x_j) + (\delta - 1)\mathbb{N}.$$

Se, mais ainda, $2c_j + 4 \leq \delta \leq 4c_j + 4$, então $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \{1, 2, \dots, 2c_j + 1\} \setminus \{\frac{\delta}{2} - 1\}$.

Os Teoremas enunciados são os resultados desta tese, eles tratam da descrição dos semi-grupos de Weierstrass das ramificações dos recobrimentos duplos em termos dos elementos de $\mathcal{A}(P, \Xi)$. O conjunto $\mathcal{A}(P, \Xi)$ é obtido do par (P, Ξ) , permanecendo invariante por translações de Ξ . Estes resultados fornecem respostas parciais para a questão proposta pelo prof Dr Fernando Torres (cf. pag. 1).

Plano de Desenvolvimento da Tese

No que segue um breve comentário acerca do conteúdo de cada capítulo.

Capítulo 1. O Capítulo 1 é precisamente este capítulo de introdução. O conteúdo aqui expresso é um esboço argumentativo cuja expansão é o conteúdo da dissertação. Os comentários e os resultados enunciados serão reformulados e reescritos com maiores detalhes ao longo dos capítulos que seguem.

Capítulo 2. O Capítulo 2 trata das notações e dos materiais preliminares acerca das teorias de variedades abelianas e curvas algébricas que serão utilizados sem maiores comentários ao longo de toda a dissertação. A argumentação se desenvolve com pouca atenção para as demonstrações dos resultados enunciados, acentuando apenas aquelas que são relevantes ao escopo da dissertação.

Capítulo 3. O Capítulo 3 trata da descrição dos recobrimentos duplos por ternas (C, \mathcal{L}, B) . Os dois objetos centrais desta tese - as *variedades de Prym* e os *semigrupos de Weierstrass* das ramificações dos recobrimentos - serão enunciados e descritos em termos destas ternas. Os resultados enunciados são conhecidos de livros e periódicos. Em contraste com o Capítulo 2, aqui é dado maior cuidado com as demonstrações, visto que trata-se do material base para o que segue.

Capítulo 4. O Capítulo 4 contém enunciado o primeiro resultado desta tese - o Teorema A dado na introdução. O ponto de partida é a descrição da variedade de Prym e do divisor Prym-Theta associado em termos de um conjunto de fibras lineares do recobrimento. Estuda-se a dualidade entre o lugar onde a aplicação de Gauss sobre o divisor Prym-Theta se degenera e o divisor de ramos do recobrimento duplo, a partir da qual prova-se o Teorema.

Capítulo 5. O Capítulo 5 trata das propriedades aritméticas de um conjunto de inteiros positivos $\mathcal{A}(\tilde{H})$ definido por analogia ao conjunto descrito no Teorema A. O propósito é tratá-lo no contexto de semigrupos numéricos. Para efeitos de aplicações descritas no Capítulo 6, o caso especial sobre semigrupos simétricos será abordado.

Capítulo 6. O Capítulo 6 é um capítulo de aplicações do Teorema A. Neste capítulo serão demonstrados os demais Teoremas enunciados nesta introdução, sendo alguns deles resultados consequentes da aritmética desenvolvida no Capítulo 5. Na parte final descreve-se um método para construir torres de recobrimentos duplos a partir de um certo número de pontos satisfazendo uma determinada relação. Deste modo, a partir de curvas bielípticas, pode-se construir torres de recobrimentos duplos cujos ramos e ramificações são todos eles pontos subcanônicos, o que permitirá fornecer exemplos explícitos satisfazendo as hipóteses dos Teoremas enunciados.

Preliminares

A maneira usual de descrever as possibilidades geométricas de uma variedade complexa X é a partir da existência de morfismos projetivos $X \rightarrow \mathbb{P}_N$. A existência deste modelo projetivo está condicionada a existência de uma fibração linear, que permite a modelagem da variedade no espaço projetivizado associado ao espaço das seções. O cálculo das dimensões, a graduação, as interseções, todos esses e outros, formam o arcabouço técnico que permite algumas descrições geométricas da variedade.

São duas as variedades complexas tratadas nesta tese: as curvas não-singulares projetivas e as respectivas Jacobianas. Neste capítulo preliminar serão apresentados os materiais de apoio, assim como serão fixadas as notações, que serão utilizados sem maiores comentários ao longo de todo o texto. Trata-se de um capítulo de referência e sua leitura pode ser dispensável ao leitor bem familiarizado com as teorias de variedades abelianas e curvas algébricas.

Toros Complexos e Variedades Abelianas

Jacobianas de curvas são toros complexos projetivos. Em geral, toros complexos não são variedades projetivas. A existência de uma estrutura projetiva sobre um toro complexo está condicionada a existência de uma certa forma bilinear não-degenerada, que pode ser construída a partir de um fibrado linear. Esse conjunto especial de toros projetivos forma uma classe de variedades chamadas de *variedades abelianas*. O conteúdo do que segue trata da descrição de alguns tópicos concernentes a teoria de fibrações lineares sobre toros complexos. Tem-se em vista uma certa generalidade que visa não restringir-se apenas à teoria de Jacobianas, mas que trata de toros complexos em geral, pois a questão fundamental nesta dissertação são as influências das subvariedades das Jacobianas sobre as curvas. As referências auxiliares desta seção são [44, 45, 46, 54].

Toros Complexos

Um *toro complexo* de dimensão g é um quociente $X := V/\Lambda$, onde V é um espaço vetorial complexo de dimensão g e Λ um reticulado em V . A topologia sobre X é a induzida pelo recobrimento universal $\pi : V \rightarrow X$, $v \mapsto \bar{v} := v + \Lambda$. Com esta topologia, X é conexo, compacto e não-singular. Existe uma identificação natural $\Lambda = Ker(\pi) \simeq \pi_1(X) \simeq H_1(X, \mathbb{Z})$. A adição sobre V induz uma estrutura de grupo abeliano sobre X . Dadas duas bases $\{e_1, \dots, e_g\}$ de V e $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}\}$ de Λ , a matriz dos coeficientes

$$\Pi := (\lambda_{ij}) \in M_{g \times 2g}(\mathbb{C}),$$

chamada *matriz período*, indica a possibilidade de projetivização do toro complexo X . De fato, o toro complexo X é uma variedade projetiva se, e somente se, existe uma matriz alternada não degenerada $A \in M_g(\mathbb{C})$ que satisfaz as *relações de Riemann*

$$\Pi A^{-1} \Pi^t > 0 \quad e \quad i \Pi A^{-1} \bar{\Pi} > 0.$$

A existência de uma matriz A satisfazendo as relações de Riemann é equivalente a existência de uma fibração linear ampla sobre X , a partir da qual pode-se associar uma forma alternada cuja matriz descrita em uma certa base é precisamente a matriz A . Esta forma alternada determina a classe de equivalência analítica de uma fibração linear. O conteúdo do que segue trata desta estreita ligação entre fibrações lineares amplas e formas não-degeneradas sobre toros complexos.

Toros Complexos e Fibrações Lineares

Dados um toro complexo $X = V/\Lambda$ e uma fibração linear $L \in Pic(X)$, a partir de uma base $\{f_0, \dots, f_N\}$ do espaço das seções $H^0(L)$, a aplicação $\varphi_L = (f_0 : \dots : f_N) : X \rightarrow \mathbb{P}^N$, dada por $\varphi_L(\bar{x}) = (f_0(\bar{x}) : \dots : f_N(\bar{x}))$, define um morfismo de X no espaço projetivo \mathbb{P}^N . A maneira usual de descrever a fibração linear L é por seu pullback via a aplicação canônica $\pi : V \rightarrow X$. Uma vez que a fibração linear π^*L é trivial, pode ser descrita por uma função global ϑ . Além de trivial, π^*L deve ser invariante por translações por

elementos $\lambda \in \Lambda$. Deste modo, deve-se ter $t_\lambda^* \pi^* L = \pi^* L$, logo $\vartheta/\vartheta \circ t_\lambda \in \mathcal{O}_V^*$, portanto é uma função holomorfa do tipo $\mathbf{e}(g) = \exp(2i\pi g)$, onde $g : \Lambda \times V \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa na segunda variável. Assim,

$$\vartheta(x + \lambda) = \mathbf{e}(g(\lambda, x))\vartheta(x).$$

A função $\mathbf{e}(g)$ é chamada *fator de automorfismo* de L e a função ϑ *função theta* para o fator $\mathbf{e}(g)$. Expandindo $\vartheta(x + \lambda + \mu)$ e pondo $g_\lambda(\cdot) := g(\lambda, \cdot)$ verifica-se a relação co-cíclica

$$\mathbf{e}(g_{\lambda+\mu}(x)) = \mathbf{e}(g_\mu(x + \lambda))\mathbf{e}(g_\lambda(x)).$$

Daí que para cada $x \in V$,

$$g_{\lambda+\mu}(x) \equiv g_\mu(x + \lambda) + g_\lambda(x) \pmod{\mathbb{Z}}.$$

A sequência $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\mathbf{e}} \mathcal{O}_X^* \rightarrow 1$ induz $H^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z}) \simeq \text{Alt}^2(\Lambda, \mathbb{Z})$. Logo $L \mapsto c_1(L)$ corresponde uma forma bilinear alternada para L chamada *primeira classe de Chern* da fibração linear L .

Teorema 2.1. *Existe um isomorfismo $H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} \text{Alt}^2(\Lambda, \mathbb{Z})$, o qual aplica a primeira classe de Chern $c_1(L)$ da fibração linear L com fator $\mathbf{e}(g)$, na forma alternada*

$$E_L(\lambda, \mu) := g_\mu(x + \lambda) + g_\lambda(x) - g_\lambda(x + \mu) - g_\mu(x),$$

para todos $\lambda, \mu \in \Lambda$ e $x \in V$. Sua extensão \mathbb{R} -linear define uma forma alternada $E_L : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo $E_L(\Lambda, \Lambda) \subseteq \mathbb{Z}$ e $E_L(iv, iw) = E_L(v, w)$. Reciprocamente, dada uma forma alternada $E : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $E_L(\Lambda, \Lambda) \subseteq \mathbb{Z}$ e $E(iv, iw) = E(v, w)$, existe uma fibração linear L tal que E representa a primeira classe de Chern $c_1(L)$.

Demonstração: Este teorema sintetiza em um mesmo enunciado os seguintes resultados de [45]: Teorema 2.1.2 e Proposição 2.1.6.

□

Segue do Teorema 2.1 que, via uma extensão \mathbb{R} -linear, existe uma forma canônica de associar à fibração linear L uma forma hermitiana:¹

$$H_L(v, w) := E_L(iv, w) + iE_L(v, w).$$

¹Diz-se que $H : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ é hermitiana se é \mathbb{C} -linear na primeira variável e $H(v, w) = \overline{H(w, v)}$.

A correspondência $E(v, w) \mapsto H(v, w) := E(iv, w) + iE(v, w)$ define uma bijeção entre o conjunto das formas alternadas E sobre V , com valores reais e tais que $E(iv, iw) = E(v, w)$, e o conjunto das formas hermitianas H . A forma E é reobtida de H uma vez que $E = \text{Im } H$.

Não é possível dar uma descrição da fibração linear L somente em termos da sua forma hermitiana associada H , resta um elemento residual, um *semicaráter* para H , que é uma aplicação $\chi : \Lambda \rightarrow S^1$ que em termos de H satisfaz a relação

$$\chi(\lambda + \mu) = \chi(\lambda)\chi(\mu)\mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\text{Im } H(\lambda, \mu)\right),$$

para todos $\lambda, \mu \in \Lambda$. Dado um semicarater χ para H , o *fator canônico* associado é definido por

$$a_{(H, \chi)} : \Lambda \times V \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad a_{H, \chi}(\lambda, v) = \chi(\lambda)\mathbf{e}(H(v, \lambda)/2i + H(\lambda, \lambda)/4i).$$

Uma vez que

$$a_{(H_1, \chi_1)} \cdot a_{(H_2, \chi_2)} = a_{(H_1 + H_2, \chi_1 \cdot \chi_2)},$$

o conjunto $\mathcal{P}(\Lambda)$ dos fatores canônicos pode ser descrito como o conjunto dos pares (H, χ) , sendo que, com o produto $(H_1, \chi_1)(H_2, \chi_2) := (H_1 + H_2, \chi_1\chi_2)$, é um grupo. Por definição, $a_{(0, \chi)} = \chi$ são os fatores canônicos associados aos semicaracteres para a forma hermitiana nula, logo são caracteres em $\text{Hom}(\Lambda, S^1)$. A aplicação $\chi \mapsto a_{(0, \chi)}$ define uma inclusão canônica de $\text{Hom}(\Lambda, S^1)$ no grupo $\mathcal{P}(\Lambda)$. Por outro lado, existe uma aplicação canônica $\mathcal{P}(\Lambda) \rightarrow \text{Pic}(X)$. De fato, $a_{(0, \chi)} \in \mathcal{P}(\Lambda)$ induz uma ação de Λ sobre a fibração trivial $V \times \mathbb{C} \rightarrow V$ via a aplicação $(\lambda, (v, t)) \mapsto (v + \lambda, a_{(H, \chi)}(\lambda, v)t)$. O quociente

$$L(H, \chi) := V \times \mathbb{C} / \Lambda$$

é uma fibração linear sobre X . Seja $NS(X)$ o grupo de *Néron-Severi* das formas hermitianas $H : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $\text{Im } H(\Lambda, \lambda) \subseteq \mathbb{Z}$. O grupo $NS(X)$ identifica-se com o conjunto das formas alternadas na imagem da primeira aplicação de Chern.

Teorema (Appel-Humbert). *A aplicação $(H, \chi) \mapsto L(H, \chi)$ define um isomorfismo de seqüências exatas*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(\Lambda, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\Lambda) & \longrightarrow & NS(X) \longrightarrow 0 \\ & & \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & = \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Pic}^0(C) & \longrightarrow & \text{Pic}(X) & \longrightarrow & NS(X) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Demonstração: Cf. 2.2.3 de [45].

□

Pelo Teorema de Appel-Humbert, toda fibração linear $L \in \text{Pic}(X)$ é completamente determinada pela sua forma hermitiana associada H e pelo semicarater χ para H , portanto é do tipo $L(H, \chi)$. Dada uma forma hermitiana H , denota-se por $\text{Pic}^H(X)$ o conjunto das classes de fibrações lineares cuja forma hermitiana associada é precisamente H . Em particular, $\text{Pic}^0(X)$ é o grupo das classes das fibrações lineares cuja forma hermitiana associada é a forma nula 0 .

Uma vez que toda aplicação holomorfa entre toros complexos é a composição de um homomorfismo com uma translação, pode-se considerar tais aplicações separadamente. Dado um homomorfismo $f : X' \rightarrow X$, existe um único homomorfismo \mathbb{C} -linear $F : V' \rightarrow V$, a *representação analítica* de f , tal que $F(\Lambda) \subseteq \Lambda$ e $f \circ \pi' = \pi \circ F$. A restrição $F_{\Lambda'} : \Lambda' \rightarrow \Lambda$ é a *representação racional* de f . Dada uma fibração linear $L = L(H, \chi) \in \text{Pic}(X)$, então

$$\lambda_{f^*L} = f^* \circ \lambda_L \circ f,$$

onde

$$f^*L = L(F^*H, F_{\Lambda'}^*\chi).$$

Muitas das principais propriedades entre toros complexos são invariantes por *isogenias*, que são homomorfismos sobrejetores entre toros complexos cujo núcleo é um subgrupo finito. O *expoente* $e := e(f)$ de uma isogenia f é o expoente do grupo finito $\text{Ker}(f)$, isto é, e é o menor inteiro positivo n tal que $n\text{Ker}(f) = 0$. Um dos principais aspectos de interesse acerca das isogenias é que se e é o expoente de uma isogenia $f : X \rightarrow X'$ então existe uma isogenia $g : X' \rightarrow X$, única a menos de isomorfismo, tal que $g \cdot f = e_X$ e $f \cdot g = e_{X'}$. Isto significa que isogenias definem uma relação de equivalência no conjunto dos toros complexos.

Um exemplo importante de isogenia é a multiplicação por um número natural $n_X : X \rightarrow X$, $x \mapsto nx$. O conjunto $X_n := \text{Ker}(n_X)$ é o *grupo de n -divisores* de X , isomorfo ao grupo $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$.

Um subconjunto $X' \subseteq X$ é um *subtoro* se existe um subespaço $V' \subseteq V$ e um reticulado Λ' de V' tal que $\Lambda' \subseteq V' \cap \Lambda$ e $X' = V'/\Lambda'$. Se $f : X \rightarrow X'$ é um homomorfismo de toros complexos, então $\text{Img}(f)$ é um subtoro de X' e $\text{Ker}(f)$ é um subgrupo fechado de X . A

componente conexa $(Ker(f))_0$ de $Ker(f)$ contendo 0 é um subtoro de X de índice finito em $Ker(f)$.

Acerca das translações, dado $\bar{x} \in X$, comparando as formas hermitianas associadas e os semicarateres, se tem que

$$t_{\bar{x}}^*L(H, \chi) \simeq L(H, \chi \mathbf{e}(Im H(x, \cdot))).$$

Duas fibrações lineares são ditas *analiticamente equivalentes*² se suas formas hermitianas associadas coincidem. Da equação acima, segue que classes de equivalência analítica são fixas por translações.

Teorema (do Quadrado).

$$t_{\bar{x}+\bar{y}}^*L = t_{\bar{x}}^*L \otimes t_{\bar{y}}^*L \otimes L^{-1} \quad \forall x, y \in V.$$

□

Pelo Teorema do Quadrado, a aplicação

$$\lambda_L : X \longrightarrow Pic^0(X), \quad \lambda_L(\bar{x}) = t_{\bar{x}}^*L \otimes L^{-1}$$

é um homomorfismo de grupos que satisfaz $\lambda_{L \otimes L'}(\bar{x}) = \lambda_L(\bar{x}) \otimes \lambda_{L'}(\bar{x})$ e $\lambda_{L^{-1}}(\bar{x}) = \lambda_L(\bar{x})^{-1}$.

O grupo $Pic^0(X)$ admite uma estrutura de toro complexo dual ao toro complexo X . De fato, considere o \mathbb{C} -espaço vetorial $\bar{\Omega} = Hom_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ das \mathbb{C} -formas antilineares $V \rightarrow \mathbb{C}$. O conjunto $\hat{\Lambda} := \{l \in \bar{\Omega}, Im l(\Lambda) \subseteq \mathbb{Z}\}$ é um reticulado de $\bar{\Omega}$. Deste modo, o quociente $\hat{X} = \bar{\Omega}/\hat{\Lambda}$ é um toro complexo, chamado *dual* de X . Por um lado, a aplicação $Hom(\Lambda, \mathbb{S}^1) \rightarrow Pic^0(X)$, $\chi \mapsto L(0, \chi)$ define um isomorfismo. Por outro lado, a aplicação $\bar{\Omega} \rightarrow Hom(\Lambda, \mathbb{S}^1)$, $l \mapsto \mathbf{e}(Im l(\cdot))$ é sobrejetora com núcleo $\hat{\Lambda}$. Portanto, existe um isomorfismo

$$\hat{X} \xrightarrow{\simeq} Pic^0(X).$$

O diagrama comutativo abaixo mostra como se relacionam os principais objetos discutidos

²A definição de equivalência analítica dada em [45] não é esta, mas é equivalente a esta (cf. pag 39).

Demonstração: (\Leftarrow) Segue de que translações são invariantes em classes de equivalência analítica. (\Rightarrow) Pela Proposição 2.1, $L' \otimes L^{-1} \in Pic^0(X)$. Como L não é degenerada então $\lambda_L : X \rightarrow Pic^0(X)$ é uma isogenia, logo é sobrejetora, portanto $L' \otimes L^{-1} = \lambda_L(x) = t_x^*L \otimes L^{-1}$ para algum $x \in X$. Daí, $L' \simeq t_x^*L$.

□

Variedades Abelianas

Uma *variedade abeliana* X é um toro complexo projetivo $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$. Pelo Teorema de Chow, uma variedade abeliana é uma variedade algébrica. A descrição de toros complexos com uma estrutura projetiva depende da amplitude das fibrações lineares sobre X .

Seja L uma fibração linear com forma associada $E = Im H$, então $E(\Lambda, \Lambda) \subseteq \mathbb{Z}$. Por um teorema elementar da divisão, existe uma base $\lambda_1, \dots, \lambda_g, \mu_1, \dots, \mu_g$, chamada *simplética*, tal que a forma alternada E escreve-se como sendo uma matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix},$$

onde $D = diag(d_1, \dots, d_g)$ com os d_i 's sendo inteiros positivos tais que $d_i | d_{i+1}$. A g -úpla (d_1, \dots, d_g) , unicamente determinada por E e por Λ , é o *tipo* de L . Diz-se que a fibração linear L é *principal* se $d_g = 1$, isto é, se L é do tipo $(1, \dots, 1)$.

O reticulado Λ age naturalmente na fibração π^*L , esta ação induz um isomorfismo $H^0(L) \xrightarrow{\simeq} H^0(\mathcal{O}_V)^\Lambda$, onde $H^0(\mathcal{O}_V)^\Lambda$ é o espaço das funções holomorfas sobre V que são invariantes pelos elementos de Λ . Este isomorfismo depende do fator $\mathbf{e}(g)$ de L . Mais precisamente, $H^0(L)$ pode ser identificado com o conjunto das funções holomorfas $\vartheta : V \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$\vartheta(x + \lambda) = \mathbf{e}(g(\lambda, x))\vartheta(x),$$

que são as funções theta associadas ao fator $\mathbf{e}(g)$ (cf. [45, 3.2]). Deste modo, existe um morfismo $\varphi_L : X \rightarrow \mathbb{P}H^0(L)$ definido a partir de uma base de funções theta de $H^0(L)$ por

$$\varphi_L(\bar{x}) = (\vartheta_1(x) : \dots : \vartheta_N(x)),$$

onde $N = h^0(L)$. Esta aplicação não depende do fator de automorfismo da fibração linear L , mas depende da escolha da base de $H^0(L)$, a aplicação φ_L é bem definida a menos de uma transformação em $\mathbb{P}H^0(L)$. O teorema seguinte descreve a condição de amplitude da fibração linear L em termos do kernel de λ_L e relaciona-o com o tipo da fibração linear.

Teorema 2.2. *Uma fibração linear $L \in \text{Pic}(X)$ é ampla se, e somente se, L é positiva definida. Neste caso,*

$$h^0(L) = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_g,$$

onde (d_1, \dots, d_g) é o tipo da polarização L . Mais ainda, λ_L é uma isogenia e $K(L)$ é um grupo abeliano finito tal que

$$K(L) \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^g \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z} \right)^2.$$

Demonstração: Este teorema sintetiza em um mesmo enunciado os seguintes resultados de [45]: Teorema 4.5.4, Lema 3.1.4 e Corolário 3.2.8

□

Segue do Teorema 2.1 e do Teorema 2.2 que uma fibração linear ampla L é principal se, e somente se, $h^0(L) = 1$. O kernel $K(L)$ é o grupo dos elementos $\bar{x} \in X$ tais que $t_{\bar{x}}^*L \simeq L$. Esta invariância de L em relação aos elementos de $K(L)$ torna o enunciado do Teorema 2.2 bastante intuitivo, visto que os inteiros d_i 's são obtidos a partir da forma alternada associada ao fator de automorfismo da fibração linear, que é invariante pela ação do reticulado.

Seja X uma variedade abeliana. Segue do Teorema 2.2 que uma condição necessária e suficiente para que X admita uma estrutura de variedade projetiva é a existência de uma forma hermitiana positiva definida $H : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$. Se A é a matriz dos coeficientes da forma alternada $E = \text{Im } H$, então a matriz A é não-degenerada, alternada, e satisfaz as relações de Riemann (cf. pag.18). Uma *polarização* sobre X é uma fibração linear L cuja forma hermitiana associada H é positiva definida. Neste caso, diz-se também que a forma hermitiana positiva definida H é uma *polarização* sobre X . Os pares (X, L) e (X, H) são chamados de *variedades abelianas polarizadas*. Um *homomorfismo* $f : (X', L') \rightarrow (X, L)$ entre variedades abelianas polarizadas é um homomorfismo de toros complexos $f : X' \rightarrow X$ tal que L' e f^*L são algebricamente equivalentes (a noção de equivalência algébrica é a mesma que de equivalência analítica).

A Aplicação de Gauss

Dado um toro complexo $X = V/\Lambda$, cada espaço tangente $T_x X$ identifica-se com V . Seja (X, L) uma variedade abeliana polarizada de dimensão g . Os divisores reduzidos $D \in |L|$ não só existem como não estão em uma posição especial (cf. [45, seç. 4.4]). Denote por D^{ns} a parte não singular de um divisor reduzido D . Dado $\bar{w} \in D^{ns}$, o tangente $T_{D, \bar{w}}$ é um espaço vetorial de dimensão $g - 1$, que transladado para a origem, é um subespaço do espaço vetorial $T_{X,0} = V$. A *aplicação de Gauss* de D em X é a aplicação que associa a cada ponto $\bar{w} \in D^{ns}$ o tangente $T_{D, \bar{w}}$ transladado para um subespaço de $T_{X,0}$:

$$\begin{aligned} G_D : D^{ns} &\longrightarrow \mathbb{G}(g - 2, g - 1) \\ \bar{w} &\longmapsto \mathbb{P}T_{D, \bar{w}} \subseteq \mathbb{P}T_{X,0}. \end{aligned}$$

Por passagem ao dual, a imagem de um ponto pela aplicação de Gauss pode ser descrita pelo espaço de dimensão 1 que define o anulador do tangente de D neste ponto. Esta descrição pode ser dada em termos das funções theta. De fato, seja $\pi : V \rightarrow X$ a projeção canônica. Existe uma função theta $\vartheta \in H^0(X, L)$, unicamente determinada a menos de uma constante, tal que $\pi^* D = (\vartheta)$. Se v_1, \dots, v_g são as coordenadas com respeito a uma base complexa de V , então a equação do espaço tangente $T_{D, \bar{w}}$ no ponto $\bar{w} \in D$ é

$$\sum_{i=1}^g \frac{\partial \vartheta}{\partial v_i} (v_i - w_i) = 0.$$

O subespaço do dual V^* determinado por $T_{D, \bar{w}}$ é o espaço vetorial de dimensão 1 gerado pelo vetor $(\partial \vartheta / \partial v_1(w), \dots, \partial \vartheta / \partial v_g(w))$. A aplicação de Gauss $G_D : D^{ns} \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ de D é definida por

$$G_D(\bar{w}) = \left(\partial \vartheta / \partial v_1(w) : \dots : \partial \vartheta / \partial v_g(w) \right).$$

Um dos principais aspectos acerca da aplicação de Gauss sobre um divisor D é que ela permanece invariante mediante translações de D . Não pode-se afirmar que dados dois divisores $D, E \in |L|$ um pode ser obtido do outro por uma translação, a menos que L seja uma polarização principal. De fato, neste caso o homomorfismo $\lambda_{\mathcal{O}_X(D)}$ é sobrejetor, portanto existe $x \in X$ tal que $\mathcal{O}_X(E - D) \simeq t_x^* \mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(D)^{-1}$, daí que $E \sim t_x^* D$. Uma vez que $h^0(C, \mathcal{O}_X(E)) = 1$, existe um único divisor na classe de E , portanto $E = t_x^* D$. Este é o caso das Jacobianas de curvas e seus divisores canônicos, esses são obtidos um do outro por uma translação (cf. adiante).

Mediante isogenias algumas propriedades da aplicação de Gauss são preservadas, ou facilmente descritas numa outra. Este é o conteúdo do próximo lema.

Lema 2.1. *Sejam $f : X \rightarrow X'$ uma isogenia entre variedades abelianas e $Y \subseteq X$ uma subvariedade irredutível de dimensão k . Seja G a aplicação de Gauss sobre Y e G' a aplicação de Gauss sobre $f(Y)$, então 1) $df \circ G = G' \circ f$; 2) df induz um isomorfismo de $Im(G)$ sobre $Im(G')$; 3) $deg(G) = deg(f) \cdot deg(G')$; 4) df induz um isomorfismo do lugar dos ramos \mathfrak{B}_G de G sobre o lugar dos ramos $\mathfrak{B}_{G'}$ de G' .*

Demonstração: (cf. [6, Lema 3.1.1]) Todas as condições seguem do fato de que f é um isomorfismo local.

□

Dada uma isogenia entre variedades abelianas $f : (X', L') \rightarrow (X, L)$, não é possível distinguir canonicamente divisores em $|L'|$ e em $|f^*L|$ tais que ambos sejam distintos apenas por uma translação. Uma isogenia entre variedades abelianas tais que uma distinção canônica deste tipo é possível, transfere, numa outra, informações acerca da aplicação de Gauss, que é invariante por translações.

Dado um divisor $D \in |L|$, pode-se considerar a seguinte órbita no conjunto de divisores de X :

$$Orb(D) := \{t_x^*D ; x \in X\}.$$

Uma vez que a aplicação de Gauss é invariante por translações, é invariante em qualquer órbita $Orb(D)$. Em geral, se $E \in Orb(D)$ então $E = t_x^*D$, daí $E \sim t_x^*D$, isto é, $\mathcal{O}_X(E)$ é algebricamente equivalente a fibração linear L . Isto significa que a fibração linear associada a cada divisor $E \in Orb(D)$, permanece na classe de equivalência algébrica de L . Em particular, cada par $(X, \mathcal{O}_X(E))$ permanece na classe de isogenia do par (X, L) . Se H é a forma hermitiana associada a fibração linear L , então existe uma aplicação

$$Orb(D) \rightarrow Pic^H(X) \quad , \quad E \mapsto \mathcal{O}_X(E).$$

Não é possível afirmar que se $E \sim t_x^*D$ então $E \in Orb(D)$, a menos que $h^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = 1$, caso este tal que a polarização L é principal. Isto significa que, em geral, dado $L' \in Pic^H(X)$, não é possível afirmar que existe $E \in Orb(D)$ tal que $\mathcal{O}_X(E) \simeq L'$, apesar de serem fibrações lineares algebricamente equivalentes.

A restrição aos elementos de $K(L)$ descreve o conjunto $Orb(D)$ como a união disjunta dos seguintes conjuntos

$$Orb_{K(L)}(D) := \{t_x^*D ; x \in K(L)\} \quad e \quad Orb_{X \setminus K(L)}(D) := \{t_x^*D ; x \in X \setminus K(L)\}.$$

Uma vez que $K(L)$ é o conjunto dos elementos x tais que $t_x^*L \simeq L$, cada $E \in Orb_{K(L)}(D)$ é tal que $E \sim D$. Por outro lado, cada $E' \in Orb_{X \setminus K(L)}(D)$ é tal que $E' \not\sim D$.

É sempre possível supor um conjunto $Orb_{K(L)}(D)$ que tem um elemento que não o próprio divisor D . De fato, existe um aberto denso $U \subset |L|$ tal que para todo divisor $D \in U$, se $t_x^*D = D$ então $x = 0$ (cf. [45, sec. 4.4]).

Curvas Algébricas e Jacobianas

Um *curva* é uma curva projetiva complexa, irredutível e não-singular. O conteúdo do que segue reúne os principais resultados do vasto material acerca da teoria existente na literatura. Assim como no caso de toros complexos, o ponto de vista é sobre as descrições geométricas a partir das fibrações lineares que podem ser definidas sobre a curva. Algumas referências auxiliares são [3, 23, 53]. No que concerne a teoria de Jacobianas, além das já indicadas, também pode-se utilizar as seguintes referências ([45, 58]).

Fibrações Lineares sobre Curvas

Dado um divisor $D \in Div(C)$ sobre a curva C , denota-se por $\mathcal{O}_C(D)$ a sua fibração linear associada. A correspondência $D \mapsto \mathcal{O}_C(D)$ define um isomorfismo functorial entre o grupo das classes de equivalência de divisores sobre C sobre o grupo das fibrações lineares. Se $L = \mathcal{O}_C(D)$, então convencionam-se

$$deg L := deg D \quad e \quad h^0(C, D) := h^0(C, \mathcal{O}_C(D)).$$

Seja $C^{(n)}$ o espaço quociente do n -produto cartesiano de C pela ação do n -produto simétrico S_n . Este espaço parametriza os divisores efetivos sobre C de grau n . Se $Pic^n(C)$

é o conjunto das fibrações lineares sobre C de grau n então existe uma inclusão natural

$$\begin{aligned} \rho : C^{(n)} &\hookrightarrow \text{Pic}^n(C) \\ D &\longmapsto \mathcal{O}_C(D). \end{aligned}$$

Dada uma fibração linear $L \in \text{Pic}^n(C)$, a fibra $\rho^{-1}(L)$ é o sistema linear $|L|$ de grau n definido por L . Fixada uma fibração linear $L_n \in \text{Pic}^n(C)$, a aplicação

$$\begin{aligned} \alpha_{L_n} : \text{Pic}^n(C) &\longrightarrow \text{Pic}^0(C) \\ L &\longmapsto L \otimes L_n^{-1} \end{aligned}$$

define uma bijeção. Fixado um divisor $D_n \in C^{(n)}$, define-se a composta

$$\begin{aligned} \alpha_{D_n} := \alpha_{\mathcal{O}_C(D_n)} \circ \rho : C^{(n)} &\longrightarrow \text{Pic}^0(C) \\ D &\longmapsto \mathcal{O}_C(D - D_n) \end{aligned}$$

As aplicações acima definem um diagrama comutativo,

$$\begin{array}{ccc} & \text{Pic}^n(C) & \\ & \nearrow \rho & \downarrow \alpha_{\mathcal{O}_C(D_n)} \\ C^{(n)} & \xrightarrow{\alpha_{D_n}} & \text{Pic}^0(C) \end{array}$$

Dados dois divisores $D, E \in \text{Div}(C)$ denota-se $E < D$ se a diferença $D - E$ é linearmente equivalente a um divisor efetivo. Mais ainda, denota-se $E \in D$ se todos os pontos do suporte de E são pontos do suporte de D . A notação simplificada $L(D) := L \otimes \mathcal{O}_C(D)$ descreve a torção da fibração linear L pela fibração linear $\mathcal{O}_C(D)$.

As descrições geométricas de uma curva são obtidas a partir das suas manifestações no espaço das seções das fibrações lineares associadas. Para cada ponto da curva, considera-se no espaço dual os hiperplanos que o contém. Daí que, dada uma fibração linear ampla $L \in \text{Pic}(C)$, a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_L : C &\longrightarrow \mathbb{P}H^0(C, L)^* \\ x &\longmapsto |L(-x)| + x \end{aligned}$$

é o morfismo definido pelo sistema linear $|L|$. A imagem de $\phi_L(x)$ são os hiperplanos de

$\mathbb{P}H^0(L)$ contendo x ([23, pag. 176]). A curva C_L no espaço das seções cujo dual é $\phi_L(C)$ é um *modelo* projetivo de C (cf. [17, 34]). As configurações geométricas de C_L dependem das condições de amplitude e globalidade da fibração linear L , que podem ser garantidas a partir de certas condições sobre o grau da fibração linear. De fato, se $\deg L \geq g$ então L é globalmente gerado, e se $\deg L \geq 2g + 1$ então L é muito amplo (cf. [50, prop. 7.4.4]).

Mais geralmente, dado um divisor efetivo $D \in \text{Div}(C)$, denota-se por

$$\phi_L(D) := |L(-D)| + D$$

o conjunto dos hiperplanos de $\mathbb{P}H^0(L)$ contendo os pontos do suporte de D . O *span* de D no espaço $\mathbb{P}H^0(L)$, que é a interseção dos hiperplanos de $\phi_L(D)$, é denotado por $\overline{\phi_L(D)}$.

Dentre as fibrações lineares sobre uma curva algébrica, a fibração *canônica* ω_C , que é a fibração linear associada a classe do divisor canônico K_C , é a única fibração linear sobre C tal que

$$h^0(C, \omega_C) = g \quad e \quad \deg \omega_C = 2g - 2.$$

O Teorema de Riemann-Roch calcula a dimensão do espaço das seções de uma fibração linear, em termos da fibração canônica.

Teorema (Riemann-Roch). *Dado $L \in \text{Pic}(C)$,*

$$h^0(C, L) - h^0(C, \omega_C \otimes L^{-1}) = \deg L - g + 1.$$

□

Segue do Teorema de Riemann-Roch que se $\deg L \geq 2g - 1$ então $h^0(C, L) = \deg L - g + 1$. Quando $\deg L \leq 2g - 1$, o Teorema de Clifford fornece uma cota para a dimensão do espaço das seções em termos do grau do divisor, além de dar um critério útil para a curva C ser hiperelíptica.

Teorema (Clifford). *Seja $D \in \text{Div}(C)$ um divisor efetivo tal que $\deg D \leq 2g - 1$ e $h^0(C, \omega_C(-D)) > 0$, então*

$$h^0(C, D) \leq \frac{\deg D}{2} + 1,$$

sendo que a igualdade vale se D é o divisor nulo ou o canônico, ou se C é hiperelíptica e D é linearmente equivalente a um múltiplo do divisor hiperelíptico.

□

O *modelo canônico* de C é a curva no espaço das seções da fibração canônica cujo dual é $\phi_{\omega_C}(C)$. As interseções do modelo canônico com os hiperplanos de $\mathbb{P}H^0(C, \omega_C)$ permitem uma outra descrição para o Teorema de Riemann-Roch em versão geométrica.

Teorema (Riemann-Roch Geométrico). *Dado um divisor efetivo $D \in \text{Div}(C)$,*

$$h^0(C, D) = \text{deg } D - \dim \overline{\phi_{\omega_C}(D)}.$$

□

Um divisor $D \in C^{(g-1)}$ é *regular* se $h^0(C, \omega_C(-D)) = 1$, ou equivalente, se $h^0(C, D) = 1$. Isto significa que existe um único hiperplano no espaço projetivo $\mathbb{P}H^0(\omega_C)$ que contém o span dos pontos do suporte de D . Um hiperplano $\mathbb{P}H^0(\omega_C)$ é *genérico* se está em uma posição não especial em relação ao modelo canônico da curva, isto é, se é o único hiperplano obtido pelo span de um divisor regular de grau $g - 1$. Um hiperplano gerado pelo span de um divisor $E + x \in C^{(g-1)}$ é *tangente* no ponto x se $K_C - E - 2x$ é linearmente equivalente a um divisor efetivo. Um hiperplano gerado pelo span de um divisor $E + x + y \in C^{(g-1)}$ é *bitangente* nos pontos x e y se $K_C - E - 2x - 2y$ é linearmente equivalente a um divisor efetivo.

No Capítulo 3 será importante considerar curvas que não possuem dois pontos bitangentes, isto é, que são *livres de bitangentes*. Um critério pode ser obtido a partir do Teorema de Clifford e do Teorema Geométrico de Riemann-Roch. Este é o conteúdo do próximo Lema.

Lema 2.2. *Se C é hiperelíptica então C admite bitangência. Suponha que C é uma curva de gênero $g \geq 4$. Então C é livre de bitangentes se, e somente se, C não é hiperelíptica.*

Demonstração: Dados dois pontos $x, y \in C$, segue do Teorema geométrico de Riemann-Roch que $h^0(C, 2x + 2y) = 4 - \dim \overline{xy}$. Logo, existe bitangência em x e y se, e somente se, $h^0(C, 2x + 2y) = 3$. Se C é hiperelíptica então dois pontos x e y distintos ramificados pelo recobrimento hiperelíptico (pontos de Weierstrass) são tais que $h^0(C, 2x + 2y) = 3$ (cf. [36]). Isto demonstra a primeira parte. Suponha que $g \geq 4$. Se $h^0(C, 2x + 2y) = 3$, então $3 = h^0(C, 2x + 2y) \leq \frac{\text{deg}(2x+2y)}{2} + 1 = 3$, logo a expressão dada pela desigualdade de Clifford é uma igualdade. Uma vez que $h^0(C, 2x + 2y) = 3$ e $h^0(C, \omega_C(-2x - 2y)) \geq 2$, o divisor $2x + 2y$ não é um múltiplo do divisor canônico. Segue do Teorema de Clifford que C é hiperelíptica.

Jacobianas

Dada uma curva C , a aplicação

$$\begin{array}{ccc} H_1(C, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^0(\omega_C)^* = \text{Hom}(H^0(\omega_C), \mathbb{C}) \\ \gamma & \longmapsto & \gamma : H^0(\omega_C) \longrightarrow \mathbb{C} \\ & & \omega \longmapsto \int_{\gamma} \omega \end{array}$$

é injetora, logo $H_1(C, \mathbb{Z})$ é um reticulado em $H^0(\omega_C)^*$. A *Jacobiana* de C é o toro complexo de dimensão g definido pelo quociente

$$J(C) := H^0(\omega_C)^* / H_1(C, \mathbb{Z}).$$

Cada divisor de grau zero $D \in \text{Div}^0(C)$ se escreve como $D = \sum_{j=i}^N (p_i - q_i)$ para certos pontos $p_i, q_i \in C$. A classe da forma linear $\omega \mapsto \sum_{j=i}^N \int_{p_i}^{q_i} \omega$ em $J(C)$ depende apenas de D . Logo, a correspondência

$$D \longmapsto \left\{ \omega \mapsto \sum_{j=i}^N \int_{p_i}^{q_i} \omega \right\} \pmod{H_1(C, \mathbb{Z})}$$

define uma aplicação $\text{Div}^0(C) \rightarrow J(C)$, chamada *aplicação de Abel-Jacobi* de C . Esta aplicação é um homomorfismo sobrejetor cujo núcleo é o grupo $\text{Div}_P(C)$ dos divisores principais sobre C . Por passagem ao quociente, identificando o grupo das classes de equivalência de divisores de grau zero com o respectivo grupo das fibrações lineares de grau zero, se tem o *isomorfismo de Abel-Jacobi*,

$$\text{Pic}^0(C) \xrightarrow{\cong} J(C).$$

Ao longo do texto, sem maiores comentários, ambas as interpretações da Jacobiana estarão sendo utilizadas: ora os elementos serão interpretados apenas como pontos de $J(C)$ sendo que a notação $+$ estará sendo utilizada para a lei de grupo, ora os elementos serão interpretados como fibrações lineares de grau zero sobre C e a notação para a lei de

grupo será \otimes .

Como $J(C) = 0$ sempre que $g = 0$, pode-se supor $g \geq 1$ para se estudar a Jacobiana de uma curva. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}$ uma base de $H_1(C, \mathbb{Z})$ e $\omega_1, \dots, \omega_g$ uma base de $H^0(\omega_C)$. Seja l_1, \dots, l_g a base de $H^0(\omega_C)^*$ dual de $\omega_1, \dots, \omega_g$, então $l_i(\omega_j) = \delta_{ij}$. Pelo que foi visto acima, pode-se supor $\lambda_i \in H^0(\omega_C)^*$ e portanto $\lambda_i = \sum_{j=1}^g (\int_{\lambda_i} \omega_j) l_j$. A matrix $\Pi = (\int_{\lambda_j} \omega_i)$ é a matrix *período* de $J(C)$ com respeito as bases dadas. O ponto central da descrição da Jacobiana nesses termos provém das relações de Riemann, que afirma que existe uma base tal que $\Pi = (Id_g, \tau)$, onde τ é simétrica e $Im(\tau)$ é positiva definida. As colunas de Π geram um reticulado em \mathbb{C}^g e este é da forma $\Lambda_\Pi := \mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g$, isto é, Λ_Π é gerado pelos vetores $(\int_{\lambda_i} \omega_1, \dots, \int_{\lambda_i} \omega_g)$. Identifica-se \mathbb{C}^g com $H^0(\omega_C)^*$ e identifica-se $H_1(C, \mathbb{Z})$ com Λ_Π . Portanto $J(C) \simeq \mathbb{C}^g / \Lambda_\Pi$. Isto fornece uma nova descrição da Jacobiana. Uma vez que $Im(\tau)$ é positiva definida, então a aplicação $H : \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}$, $(z, w) \mapsto z^t Im(\tau)^{-1} \bar{w}$, define uma forma hermitiana positiva definida. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{C}^g$ vetores tais que suas coordenadas são inteiros, então $Im H(a + \tau b, c + \tau d) = a^t d - b^t c \in \mathbb{Z}$, isto é, $Im H(\Lambda_\Pi, \Lambda_\Pi) \subseteq \mathbb{Z}$. Isto mostra que H é uma polarização sobre $J(C)$. Na base na qual $\Pi = (Id, \tau)$, a forma $Im H$ é do tipo $\begin{pmatrix} 0 & 1_g \\ -1_g & 0 \end{pmatrix}$, isto é, H é uma polarização principal. A expansão do esboço argumentativo acima é a demonstração do seguinte teorema.

Teorema 2.3. *O par $(J(C), H)$ é uma variedade abeliana principalmente polarizada.*

□

A polarização H definida acima é chamada de *polarização canônica* de $J(C)$. Qualquer divisor Θ sobre $J(C)$, tal que a forma hermitiana da fibração linear $\mathcal{O}_{J(C)}(\Theta)$ define uma polarização canônica, é chamado de *divisor Theta* de $J(C)$. Os pares $(J(C), \Theta)$ e $(J(C), \mathcal{O}_{J(C)}(\Theta))$ são chamados de *variedades Jacobianas canonicamente polarizadas*.

Não existe um modo canônico de distinguir o divisor Θ na sua classe de equivalência algébrica. Mas sendo $\mathcal{O}_J(\Theta)$ uma fibração linear principal, dois divisores Theta quaisquer diferem por uma translação. Pela fórmula de Poincaré, a variedade $W_{g-1} := \rho(C^{(g-1)})$ define um divisor Theta na Jacobiana $J(C)$. Deste modo, fixado $x \in C$, existe $\eta \in Pic^{g-1}(C)$ tal que $W_{g-1} = \alpha_\eta^* \Theta$. Quando Θ é um divisor simétrico, isto é, tal que $[-1]_J^* \Theta = \Theta$, então $W_{g-1} = \alpha_\kappa^* \Theta$, onde $\kappa^2 \simeq \omega_C$, isto é, κ é uma theta-characteristic. Este resultado é o *Teorema de Riemann*.

Dado um ponto $x_0 \in C$, a aplicação de *Abel-Jacobi* $\alpha_{x_0} : C \rightarrow J(C)$, $x \mapsto \mathcal{O}_C(x - x_0)$, define não só um mergulho $C \hookrightarrow J(C)$ mas também um isomorfismo $\alpha_{x_0}^* : Pic^0(J(C)) \rightarrow$

$Pic^0(C)$. Uma vez que a polarização canônica é principal, o homomorfismo

$$\begin{aligned} \lambda_{\Theta} &:= \lambda_{\mathcal{O}_{J(C)}(\Theta)} : J(C) \longrightarrow Pic^0(J(C)) \\ \eta &\longmapsto t_{\eta}^* \mathcal{O}_{J(C)}(\Theta) \otimes \mathcal{O}_{J(C)}(\Theta)^{-1}, \end{aligned}$$

associado a fibração linear $\mathcal{O}_{J(C)}(\Theta)$, é um isomorfismo, e satisfaz

$$(\alpha_c^*)^{-1} = -\lambda_{\Theta}.$$

A aplicação $\rho : C^{(g-1)} \rightarrow W_{g-1} \subset Pic^{(g-1)}(C)$ aplica todo o espaço projetivo $|D|$ num único ponto $\mathcal{O}_C(D)$. Se o sistema linear $|D|$ tem dimensão positiva, então este é um ponto singular da variedade W_{g-1} . De fato, este é o conteúdo do Teorema da Singularidade de Riemann.

Teorema (Singularidade de Riemann). *Dado $L \in Pic^{(g-1)}(C)$,*

$$mult_L W_{g-1} = h^0(C, L).$$

□

Segue do Teorema da Singularidade que

$$W_{g-1}^{ns} = \{\rho(D) ; h^0(C, D) = 1\},$$

ou seja, os divisores regulares de C definem o conjunto dos pontos que não são singulares na variedade W_{g-1} .

A Aplicação de Gauss sobre o Divisor Theta Θ

Dado um ponto $x_0 \in C$, existe um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} & Pic^{g-1}(C) & \\ & \nearrow \rho & \downarrow \alpha_{\mathcal{O}_C((g-1)x_0)} \\ C^{(g-1)} & \xrightarrow{\alpha_{(g-1)x_0}} & J(C), \end{array}$$

onde a aplicação $\alpha_{\mathcal{O}_C((g-1)x_0)} : \text{Pic}^{g-1}(C) \rightarrow J(C)$ é uma bijeção. A variedade $\alpha_{(g-1)x}(W_{g-1})$ é um divisor da variedade Jacobiana, logo difere do divisor Θ por uma translação. A aplicação de Gauss sobre Θ pode ser definida a partir dos elementos de W_{g-1} , fazendo corresponder a cada fibração linear de W_{g-1}^{ns} o hiperplano gerado pelo divisor regular associado:

$$\begin{aligned} G_\Theta : W_{g-1}^{ns} &\longrightarrow \mathbb{G}(g-2, \mathbb{P}H^0(C, \omega_C)^*) \\ \rho(D) &\longmapsto \overline{\phi_{\omega_C}(D)}. \end{aligned}$$

Um hiperplano genérico no espaço $\mathbb{P}H^0(C, \omega_C)$ intercepta o modelo canônico em $2g-2$ pontos. Portanto, as fibras genéricas da aplicação de Gauss G_Θ têm exatamente $\binom{2g-2}{g-1}$ elementos, são as $g-1$ escolhas que se pode fazer dentre estes $2g-2$ pontos da interseção, todas elas tendo a mesma imagem pela aplicação de Gauss.

A aplicação de Gauss G_Θ não depende da escolha do divisor Θ , portanto cada informação que lhe é intrínseca é uma informação intrínseca da variedade abeliana polarizada $(J(C), \mathcal{O}_J(\Theta))$. Pelo Lema 2.1, tanto o lugar das ramificações \mathfrak{R}_{G_Θ} quanto o lugar dos ramos \mathfrak{B}_{G_Θ} são invariantes por isomorfismos. O seguinte Lema descreve os divisores regulares de $C^{(g-1)}$ sobre os quais a aplicação de Gauss se degenera.

Lema 2.3. *O lugar em W_{g-1} onde a aplicação de Gauss G_Θ se degenera é o lugar dos pontos $\rho(D+x)$ onde $D+x \in C^{(g-1)}$ é um divisor regular tal que $K_C - D - 2x$ é linearmente equivalente a um divisor efetivo.*

Demonstração: Veja (Lema 5.3 [31]) e (pag.691,[16]). Convém ressaltar que [16] anuncia que a descrição dada para o lugar da ramificação da aplicação de Gauss dada na pag. 247 de [3] está errada.

□

Teorema (Torelli). *Se C e C' são curvas tais que $(J(C), \Theta)$ e $(J(C'), \Theta')$ são isomorfas como variedades abelianas polarizadas, então C e C' são isomorfas.*

Demonstração: (esboço) A imagem $\phi_{\omega_C}(C)$ é a hipersuperfície dos tangentes sobre a curva, que é o lugar dos ramos \mathfrak{B}_{G_Θ} onde a aplicação de Gauss G_Θ se degenera. Daí, $\mathfrak{B}_{G_\Theta}^* = C$

□

Indicando por \mathcal{M}_g o espaço das curvas de gênero g e por \mathcal{A}_g o espaço das variedades abelianas principalmente polarizadas (cf. [45]), segue do Teorema de Torelli que a aplicação

$$\begin{aligned} J : \mathcal{M}_g &\longrightarrow \mathcal{A}_g \\ C &\longmapsto (J(C), \mathcal{O}_C(\Theta)) \end{aligned}$$

chamada *morfismo de Torelli*, é injetora. O *problema de Schottky* consiste em determinar quando variedades abelianas principalmente polarizadas estão na imagem do morfismo de Torelli (cf. [8, 19, 57]). A questão trata da caracterização de toros complexos que são Jacobianas.

Recobrimentos Duplos de Curvas

Recobrimentos duplos de curvas podem ser descritos por ternas de elementos da curva recoberta (cf. [56]). O método deriva de um modo particular de construir fibrações vetoriais a partir de variedades prescritas via o *push forward* de uma fibração linear por recobrimentos finitos. Esta descrição permite relatar os diversos objetos associados aos recobrimentos duplos em termos desses elementos.

O conteúdo deste capítulo divide-se em três seções que tratam cada qual, respectivamente, da descrição dos recobrimentos duplos por ternas e dos dois desses objetos que são de interesse desta tese - as variedades de Prym e os semigrupos de Weierstrass nas ramificações do recobrimento.

Recobrimentos Duplos de Curvas

Dada uma curva C , uma maneira de definir morfismos finitos $\tilde{C} \rightarrow C$ é a partir da descrição de feixes coerentes \mathcal{F} sobre C . De fato, o seguinte resultado é conhecido (cf. [27, pag. 128] e [50, p.175]).

Lema. *Seja \mathcal{F} um feixe coerente de \mathcal{O}_C -álgebras. Existe um único morfismo $\pi : \mathbf{Spec} \mathcal{F} \rightarrow C$, finito, tal que $\pi_* \mathcal{O}_{\mathbf{Spec} \mathcal{F}} \simeq \mathcal{F}$. Reciprocamente, se $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ é um morfismo finito tal que $\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}} \simeq \mathcal{F}$, então $\tilde{C} \simeq \mathbf{Spec} \mathcal{F}$.*

□

O grau do morfismo dado no Lema é precisamente a dimensão das fibras de \mathcal{F} . A descrição dos recobrimentos duplos de C , com as devidas normalizações não-singulares, decorre da descrição dos feixes coerentes sobre C cuja dimensão das fibras é precisamente 2. Cada tal feixe é completamente determinado por um par (\mathcal{L}, B) , onde $\mathcal{L}^2 \simeq \mathcal{O}_C(B)$, sendo

B precisamente o divisor dos ramos do recobrimento associado. Daí que recobrimentos duplos são ternas do tipo (C, \mathcal{L}, B) .

Esta seção serve ao propósito de descrever a correspondência indicada acima a partir do Lema. Em um primeiro momento serão descritas as relações entre os recobrimentos duplos e as fibrações lineares, onde serão ressaltadas algumas interações entre a imagem direta π_* , o pull-back π^* e a aplicação norma N_π . Algumas referências auxiliares são [7, pag.42], [20, pag. 42], [27, pag.306], [59, seq.3] e [56].

Recobrimentos Duplos

Seja C uma curva de gênero g . Para cada recobrimento duplo $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ correspondem o divisor de ramificação R de \tilde{C} e o divisor de ramos B de C , ambos divisores efetivos, reduzidos e de mesmo grau δ , que é o índice de ramificação do recobrimento π . A fórmula de Riemann-Hurwitz compara os divisores canônicos das curvas em termos do divisor de ramificação:

$$K_{\tilde{C}} \sim \pi^* K_C + R.$$

Em particular,

$$2\tilde{g} - 2 = 4g - 4 + \delta,$$

onde \tilde{g} é o gênero de \tilde{C} . Dois recobrimentos $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ e $\pi' : \tilde{C}' \rightarrow C'$ são isomorfos se existem isomorfismos $\tilde{\alpha} : \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}'$ e $\alpha : C \rightarrow C'$ tais que $\pi' \circ \tilde{\alpha} = \alpha \circ \pi$. Denota-se por \mathcal{R}_g a classe de isomorfismos de todos os recobrimentos duplos $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ tais que o gênero da curva C é g ; por \mathcal{R}_C a classe de isomorfismos de todos os recobrimentos duplos de C ; por $\mathcal{R}_{g,\delta}$ a classe de isomorfismos de todos os recobrimentos duplos em \mathcal{R}_g ramificados em δ pontos; por $\mathcal{R}_C(B)$ a classe de isomorfismos de todos os recobrimentos duplos de C com ramos no divisor B de C ; por $\mathcal{R}_{C,\delta}$ a classe de isomorfismos de todos os recobrimentos duplos de C ramificados em δ pontos.

Dado um recobrimento duplo $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$, existe uma involução $\sigma : \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}$ que permuta as fibras de π . A involução σ é um automorfismo sobre \tilde{C} tal que

$$\sigma^2 = 1 \quad e \quad \pi \circ \sigma = \pi.$$

Os pontos fixos de σ são precisamente as ramificações de π . A curva algébrica C é a curva quociente \tilde{C}/σ do recobrimento duplo dada pela ação do automorfismo σ . Isto mostra a

possibilidade de caracterizar a curva C a partir do recobrimento duplo \tilde{C} . O que segue trata da questão recíproca, qual seja, acerca da caracterização do recobrimento duplo \tilde{C} a partir de elementos da curva recoberta C .

Recobrimientos Duplos e Fibrações Lineares

Seja $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ um recobrimento duplo de curvas. A aplicação entre as fibrações

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_C &\longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}} \\ s &\longmapsto s \circ \pi \end{aligned}$$

é injetora. Uma vez que as dimensões das fibras de \mathcal{O}_C e $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}$ são 1 e 2 respectivamente, existe uma fibração linear invertível \mathcal{L} que define a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}} \longrightarrow \mathcal{L}^{-1} \longrightarrow 0.$$

A fibração linear \mathcal{L} é precisamente o inverso da fibração $\text{coker}(\mathcal{O}_C \rightarrow \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}})$. Aplicando o determinante na sequência verifica-se que $\mathcal{L} \simeq (\det \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}})^{-1}$. A aplicação $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}} \rightarrow \mathcal{O}_C$, $a \mapsto (a + \sigma(a))/2$ define uma seção para a sequência, logo

$$\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}} \simeq \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}^{-1}.$$

Uma vez que o recobrimento π é finito,

$$H^0(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}) = H^0(C, \mathcal{O}_C) \oplus H^0(C, \mathcal{L}^{-1}).$$

Em particular,

$$h^0(C, \mathcal{L}^{-1}) = 0 \quad e \quad h^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}) = g - 1 + \text{deg}(\mathcal{L}),$$

sendo a primeira igualdade decorrente de que as curvas em questão são geometricamente conexas e reduzidas (cf. [50, pag. 279]), enquanto a segunda segue da primeira pelo Teorema de Riemann-Roch. Mais geralmente, dado um divisor $\tilde{D} = \pi^*D$, segue da fórmula

da projeção que

$$\begin{aligned}\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{D}) &\simeq \pi_*(\pi^*\mathcal{O}_C(D) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{C}}) \\ &\simeq \mathcal{O}_C(D) \otimes (\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}^{-1}) \\ &\simeq \mathcal{O}_C(D) \oplus \mathcal{L}^{-1}(D).\end{aligned}$$

A aplicação Norma N_π

O recobrimento duplo $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ estende-se linearmente a uma aplicação sobre o conjunto dos divisores do recobrimento. Esta, por sua vez, estende-se ao espaço das fibrações lineares mantendo uma estreita relação com a fibração linear \mathcal{L} associada ao recobrimento. O conteúdo do que segue trata desta aplicação, a *aplicação norma*, definida primeiramente da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}N_\pi : Div(\tilde{C}) &\longrightarrow Div(C) \\ \sum n_i \tilde{x}_i &\longmapsto \sum n_i \pi(\tilde{x}_i).\end{aligned}$$

A fórmula de Riemann-Hurwitz interage com a aplicação norma e compara os divisores canônicos em termos dos ramos:

$$N_\pi(K_{\tilde{C}}) \sim 2K_C + B.$$

As composições da aplicação norma N_π com o pull-back π^* de π são tais que

$$\pi^*N_\pi(\tilde{D}) = \tilde{D} + \sigma(\tilde{D}) \quad e \quad N_\pi(\pi^*(D)) = 2D.$$

A relação da aplicação norma com a imagem direta π_* é mais elaborada e será descrita no Lema seguinte.

Lema 3.1. *Dado um divisor $\tilde{D} \in Div(\tilde{C})$,*

$$\det \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{D}) \simeq \mathcal{O}_C(N_\pi(\tilde{D})) \otimes \mathcal{L}^{-1}.$$

Demonstração: (esboço) Pode-se supor que ambas as curvas são afins. Uma vez que π

é um morfismo finito, então $R^1\pi_*\mathcal{O}_C(-\tilde{D}) = 0$ qualquer que seja o divisor \tilde{D} . Suponha primeiro que o divisor \tilde{D} é efetivo. Aplicando a induzida π_* e o determinante na seqüência exata $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{C}}(-\tilde{D}) \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{C}} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{D}} \rightarrow 0$, se tem que $\det \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}} \simeq \det \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}(-\tilde{D}) \otimes \det \mathcal{O}_{\tilde{D}}$. Uma vez que $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{D}} \simeq \bigoplus_{i=1}^2 \mathcal{O}_{N_\pi(\tilde{D})}$, então $\det \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{D}} \simeq \mathcal{O}_C(N_\pi(\tilde{D}))$. Para um divisor arbitrário \tilde{D} , escreva $\tilde{D} = \tilde{D}_1 - \tilde{D}_2$ como a diferença de dois divisores efetivos. Tensorizando a seqüência exata $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{C}}(-\tilde{D}_1) \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{C}} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{D}_1} \rightarrow 0$ por $\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{D}_2)$, e aplicando nesta seqüência a induzida π_* , se tem a seqüência exata $0 \rightarrow \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}(-\tilde{D}) \rightarrow \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{D}_2) \rightarrow \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{D}_1} \rightarrow 0$. Portanto, $\det \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{D}) \simeq \det \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}(-\tilde{D}_2) \otimes \det \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{D}_1} \simeq \det \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{C}}(N_\pi(-\tilde{D}_2)) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{C}}(N_\pi(\tilde{D}_1)) \simeq \det \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{C}}(N_\pi(\tilde{D}))$.

□

Segue do Lema 3.1 que a aplicação norma estende-se sobre os conjuntos $Pic^n(\tilde{C})$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} N_\pi : Pic^n(\tilde{C}) &\longrightarrow Pic^n(C) \\ \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\sum n_i \tilde{x}_i) &\longmapsto \mathcal{O}_C(\sum n_i \pi(\tilde{x}_i)). \end{aligned}$$

Se $M \in Pic(\tilde{C})$ então

$$N_\pi(M) \simeq \det(\pi_*M) \otimes \mathcal{L}.$$

Lema 3.2. *As fibrações canônicas $\omega_{\tilde{C}}$ e ω_C comparam-se em termos da fibração linear \mathcal{L} e da aplicação norma N_π pelos isomorfismos*

$$\det \pi_*\omega_{\tilde{C}} \simeq \omega_C^2 \otimes \mathcal{L} \quad , \quad N_\pi(\omega_{\tilde{C}}) \simeq (\omega_C \otimes \mathcal{L})^2 \quad e \quad \omega_{\tilde{C}} \simeq \pi^*(\omega_C \otimes \mathcal{L}).$$

Demonstração: (esboço) As fibrações canônicas $\omega_{\tilde{C}}$ e ω_C comparam-se via a induzida π_* da seguinte maneira: $\pi_*\omega_{\tilde{C}} \simeq Hom_C(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}, \omega_C) \simeq (\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}})^* \otimes \omega_C$. Para provar as duas primeiras relações, basta aplicar o determinante. Para provar a terceira relação, basta usar que a fibração canônica $\omega_{\tilde{C}}$ é caracterizada por seu grau $2\tilde{g} - 2$ e por sua dimensão \tilde{g} , e estes correspondem ao grau e a dimensão da fibração linear $\pi^*(\omega_C \otimes \mathcal{L})$. De fato, uma vez que $deg \omega_C \otimes \mathcal{L} = 2g - 2 + \delta/2$, então $deg \pi^*(\omega_C \otimes \mathcal{L}) = 2\tilde{g} - 2$. Por outro lado, uma vez que $\pi_*(\pi^*(\omega_C \otimes \mathcal{L})) \simeq (\omega_C \otimes \mathcal{L}) \otimes (\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}) \simeq (\omega_C \otimes \mathcal{L}) \otimes (\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}^{-1}) \simeq (\omega_C \otimes \mathcal{L}) \oplus \omega_C$, se tem que $h^0(\tilde{C}, \pi^*(\omega_C \otimes \mathcal{L})) = h^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}) + h^0(C, \omega_C) = (g - 1 + \delta/2) + g = 2g - 1 + \delta/2 = \tilde{g}$. Portanto, $\omega_{\tilde{C}} \simeq \pi^*(\omega_C \otimes \mathcal{L})$.

□

Corolário 3.1. $\pi^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{\tilde{C}}(R)$ e $\mathcal{L}^2 \simeq \mathcal{O}_C(B)$. Em particular, $\deg(\mathcal{L}) = \delta/2$.

Demonstração: Segue da fórmula de Riemann-Hurwitz e do Lema 3.2. De fato, são três as afirmações do enunciado e serão demonstradas na ordem em que são enunciadas.

(1^o) $\mathcal{O}_{\tilde{C}}(R) \simeq \mathcal{O}_{\tilde{C}}(K_{\tilde{C}} - \pi^*K_C) \simeq \omega_{\tilde{C}} \otimes \pi^*\omega_C^{-1} \simeq \omega_{\tilde{C}} \otimes (\pi^*(\omega_C \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1}))^{-1} \simeq \omega_{\tilde{C}} \otimes (\omega_{\tilde{C}} \otimes \pi^*\mathcal{L}^{-1})^{-1} \simeq \pi^*\mathcal{L}$. (2^o) $\mathcal{O}_C(B) \simeq \mathcal{O}_C(N_{\pi}(K_{\tilde{C}}) - 2K_C) \simeq (\mathcal{L} \otimes \omega_C)^2 \otimes \omega_C^{-2} \simeq \mathcal{L}^2$.

(3^o) Basta notar que δ é exatamente o grau do divisor de ramos B .

□

Recobrimentos Duplos e Ternas (C, \mathcal{L}, B)

Pelo conteúdo acima, dado um recobrimento duplo $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$, associa-se canonicamente uma terna (C, \mathcal{L}, B) , onde \mathcal{L} é uma fibração linear tal que $\mathcal{L}^2 \simeq \mathcal{O}_C(B)$ e B é o divisor de ramos do recobrimento. O conteúdo do que segue trata da questão recíproca: obtêm-se um recobrimento duplo de C a partir da escolha de uma fibração linear $\mathcal{L} \in \text{Pic}(C)$ e de um isomorfismo $\mathcal{L}^{-2} \rightarrow \mathcal{O}_C(-B)$, o qual depende da escolha do divisor reduzido B . Tais construções são inversas uma da outra, daí que os recobrimentos duplos determinam e são determinados por ternas deste tipo.

Foi visto que a fibração linear \mathcal{L} associada ao recobrimento duplo $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ define um isomorfismo entre a fibração vetorial $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}}$ e a fibração vetorial $\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}^{-1}$. Em particular, esta admite uma estrutura induzida de \mathcal{O}_C -álgebra. Devido a unicidade,

$$\tilde{C} \simeq \mathbf{Spec}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}^{-1}).$$

Como será visto a seguir, não existe uma única estrutura de \mathcal{O}_C -álgebra sobre $\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}^{-1}$, mas cada qual depende da escolha do divisor de ramos.

Seja \mathcal{L} uma fibração linear sobre C . Dado um divisor efetivo e reduzido $B \in |\mathcal{L}^2|$, existe um isomorfismo

$$\phi : \mathcal{L}^{-2} \longrightarrow \mathcal{O}_C(-B) \subseteq \mathcal{O}_C.$$

Este isomorfismo induz sobre o \mathcal{O}_C -módulo coerente $\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}^{-1}$ uma estrutura de \mathcal{O}_C -álgebra onde a operação soma é a usual e a operação multiplicação é dada por

$$(a + l) \cdot (b + m) := (a \cdot b + \phi(l \otimes m), a \cdot m + b \cdot l),$$

sendo a e b seções de \mathcal{O}_C e l e m seções de \mathcal{L} . A projeção natural

$$\pi : \mathbf{Spec}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}^{-1}) \longrightarrow C = \mathbf{Spec}(\mathcal{O}_C)$$

é um recobrimento duplo. De fato, C pode ser recoberto por abertos afins $U_i = \mathbf{Spec} R_i$, onde $\pi^{-1}(U_i) = \mathbf{Spec}(R_i[x]/(x^2 - \beta_i))$, $\beta_i \in R_i$. Os zeros de β_i são os pontos x_i onde $\phi(\mathcal{L}^{-2}) \neq \mathcal{O}_C$, isto é, são os pontos do divisor B . Portanto, o divisor B é o divisor de ramos de π (cf. [56]). Das considerações feitas, segue que $\pi_*\mathcal{O}_{\mathbf{Spec}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}^{-1})} \simeq \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}^{-1}$.

O conteúdo do Teorema seguinte é uma síntese do que foi discutido até aqui.

Teorema 3.1. *Se $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ é um recobrimento duplo com ramos nos pontos do divisor B , então a inversa da fibração linear $\text{coker}(\mathcal{O}_C \rightarrow \pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}})$ é uma fibração linear \mathcal{L} tal que*

$$\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}} \simeq \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}^{-1} \quad e \quad \mathcal{L}^2 \simeq \mathcal{O}_C(B).$$

Reciprocamente, dados $\mathcal{L} \in \text{Pic}(C)$ e $B \in |\mathcal{L}^2|$, existe um único recobrimento duplo $\pi : \mathbf{Spec}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}^{-1}) \rightarrow C$ com ramos nos pontos do divisor B tal que $\pi_\mathcal{O}_{\mathbf{Spec}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}^{-1})} \simeq \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}^{-1}$. As construções são inversas uma da outra; em qualquer caso*

$$\omega_{\tilde{C}} \simeq \pi^*(\omega_C \otimes \mathcal{L}) \quad e \quad N_{\pi}(M) \simeq \det(\pi_*M) \otimes \mathcal{L}, \quad M \in \text{Pic}(C)$$

□

Pelo Teorema, 3.1 existe uma correspondência 1 – 1 entre o conjunto dos recobrimentos duplos $\pi : \tilde{C} \rightarrow C \in \mathcal{R}_{g,\delta}$ e o conjunto das ternas do tipo (C, \mathcal{L}, B) . Dados dois recobrimentos duplos isomorfos, $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ e $\pi' : \tilde{C}' \rightarrow C'$, diz-se também, sem ambiguidade, que as ternas (C, \mathcal{L}, B) e (C', \mathcal{L}', B') associadas aos recobrimentos, são isomorfas.

O Corolário seguinte é uma aplicação da teoria de variedades abelianas.

Corolário 3.2 ([15]). *Dado um divisor efetivo e reduzido $B \in \text{Div}(C)$ de grau par δ , existem exatamente 2^{2g} fibrações lineares não equivalentes $\mathcal{L} \in \text{Pic}^{\delta/2}(C)$ tais que $\mathcal{L}^2 \simeq \mathcal{O}_C(B)$. Em particular,*

$$\#\mathcal{R}_C(B) = 2^{2g}.$$

Demonstração: A multiplicação por 2 sobre a Jacobiana J da curva C define uma isogenia $2_J : J \rightarrow J$, $M \mapsto M^{\otimes 2}$, cujo núcleo é um subgrupo isomorfo ao grupo $(\mathbb{Z}_2)^{2g}$. Logo, existem exatamente 2^{2g} fibrações lineares, $M_1, \dots, M_{2g} \in J$, não equivalentes, tais

que $M_i^2 \simeq \mathcal{O}_C$. Por outro lado, fixado um ponto $x_0 \in C$, uma vez que 2_J é sobrejetora, existe um divisor D de grau zero tal que $2D \sim B - \delta x_0$. Defina $\mathcal{L}_i := M_i(D + \frac{\delta}{2}x_0)$. Para provar a unicidade, basta ver que se $\mathcal{L}^2 \simeq \mathcal{O}_C(B)$, então $(\mathcal{L}(-D - \frac{\delta}{2}x_0))^2 \simeq \mathcal{L}^2(-2D - \delta x_0) \simeq \mathcal{O}_C$, isto é, para algum índice i , $\mathcal{L} \simeq M_i(D + \frac{\delta}{2}x_0)$.

□

Exemplos: construções de recobrimentos duplos ramificados

A seguir dois exemplos de como construir recobrimentos duplos a partir dos conceitos acima.

1) (cf. [43, teo. 2.2]) Dado um divisor reduzido $B \in \text{Div}(C)$ pretende-se construir um recobrimento duplo cujos pontos do suporte de B sejam ramos. Seja $D = D' + B$ um divisor reduzido tal que $\text{deg}(2D - B) \geq 2g + 1$, então $|2D - B|$ é muito amplo. Pelo Teorema de Bertini, existe um divisor efetivo e reduzido B' tal que

$$2D \sim B + B'.$$

Defina $\mathcal{L} := \mathcal{O}_C(D)$. Uma vez que $\mathcal{L}^2 \simeq \mathcal{O}_C(B + B')$, pode-se considerar o recobrimento duplo definido por $(C, \mathcal{L}, B + B')$.

2) (cf. [15]) Dados dois recobrimentos duplos (C, \mathcal{L}, B) e (C, \mathcal{L}', B') , ambos sobre C , associa-se um terceiro recobrimento duplo de C por $(C, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'(-B, B'), B + B' - 2(B, B'))$. Se os divisores B e B' são disjuntos então o divisor dos ramos deste terceiro recobrimento é precisamente a soma de ambos. Se os divisores B e B' são iguais então este terceiro recobrimento não ramifica-se. Esta associação permuta estes três recobrimentos entre si, correspondendo cada dois ao terceiro. Isto mostra que \mathcal{R}_C admite uma estrutura de grupo de expoente 2. Esta operação, quando restrita a $\mathcal{R}_{C,0}$, coincide com o produto usual sobre os pontos de ordem 2 sobre a Jacobiana da curva.

Variedades de Prym

Pelo Teorema da Irredutibilidade de Poincaré, dada uma subvariedade $Y \hookrightarrow X$ de uma variedade abeliana, existe uma maneira canônica de descrever uma outra subvariedade complementar $Z \hookrightarrow X$ e uma isogenia $Y \times Z \rightarrow X$ (cf. [45, 54]). A *variedade de Prym* associada ao recobrimento duplo $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ é a subvariedade da Jacobiana $J(\tilde{C})$ de \tilde{C} , complementar a subvariedade $\pi^*J(C)$. O conteúdo do que segue trata dessas duas subvariedades com o propósito de descrevê-las em termos dos elementos que definem o recobrimento duplo. Algumas referências auxiliares são [45, 56, 59, 63, 65].

Variedades de Prym

Sejam $\pi : \tilde{C} = (C, \mathcal{L}, B) \rightarrow C$ um recobrimento duplo de curvas algébricas, \tilde{J} e J as Jacobianas associadas e $\lambda_{\tilde{\Theta}}$ e λ_{Θ} as polarizações, onde $\tilde{\Theta}$ e Θ são os divisores Theta correspondentes. Entre \tilde{J} e J pode-se considerar as aplicações

$$\pi^* : J \rightarrow \tilde{J} \quad e \quad N_{\pi} : \tilde{J} \rightarrow J,$$

que são relatadas por

$$N_{\pi} \circ \pi^* = 2_J \quad e \quad \pi^* \circ N_{\pi} = 1_{\tilde{J}} + \sigma,$$

onde σ é a involução associada ao recobrimento π . Fixados pontos $\pi(\tilde{x}_0) = x_0$, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C} & \xrightarrow{\alpha_{\tilde{x}_0}} & \tilde{J} \\ \pi \downarrow & & \downarrow N_{\pi} \\ C & \xrightarrow{\alpha_{x_0}} & J. \end{array}$$

As aplicações $\alpha_{\tilde{x}_0}^*$ e $\alpha_{x_0}^*$ são isomorfismos tais que $(\alpha_{\tilde{x}_0}^*)^{-1} = -\lambda_{\tilde{\Theta}}$ e $(\alpha_{x_0}^*)^{-1} = -\lambda_{\Theta}$ (cf. pag.34). Aplicando $Pic^0(\cdot)$ no diagrama acima, se tem o seguinte diagrama de aplicações

$$\begin{array}{ccc} \tilde{J} & \xrightarrow{\lambda_{\tilde{\Theta}}} & Pic^0(\tilde{J}) \\ \uparrow \pi^* & & \uparrow N_{\pi}^* \\ J & \xrightarrow{\lambda_{\Theta}} & Pic^0(J), \end{array} \quad \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ (\pi^*)^* \end{array} \right)$$

logo

$$(\pi^*)^* = \lambda_\Theta \circ N_\pi \circ \lambda_{\tilde{\Theta}}^{-1} \quad e \quad N_\pi^* = \lambda_{\tilde{\Theta}} \circ \pi^* \circ \lambda_\Theta^{-1}.$$

O morfismo π^* se decompõe em uma isogenia j e um mergulho i_{π^*J} . Denotando por λ_{π^*J} a polarização induzida por $\lambda_{\tilde{\Theta}}$ sobre π^*J , se tem o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 C & \xleftarrow{\pi} & \tilde{C} & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 J & \xrightarrow{j} & \pi^*J & \xrightarrow{i_{\pi^*J}} & \tilde{J} \\
 \swarrow 2_J & \searrow \simeq \lambda_\Theta & \downarrow \lambda_{\pi^*J} & & \downarrow \simeq \lambda_{\tilde{\Theta}} \\
 J & \xleftarrow{j^*} & Pic^0(\pi^*J) & \xleftarrow{i_{\pi^*J}^*} & Pic^0(\tilde{J}) \\
 \uparrow & & & & \uparrow \\
 & & & & N_\pi
 \end{array}$$

Lema 3.3. *Os divisores $(\pi^*)^*\tilde{\Theta}$ e 2Θ definem polarizações algebricamente equivalentes.*

Demonstração: Uma vez que $\lambda_{\tilde{\Theta}}^{-1} \circ \lambda_{2\Theta} = 2_J = N_\pi \circ \pi^* = \lambda_{\tilde{\Theta}}^{-1} \circ (\pi^*)^* \circ \lambda_{\tilde{\Theta}} \circ \pi^* = \lambda_{\tilde{\Theta}}^{-1} \circ \lambda_{(\pi^*)^*\tilde{\Theta}}$, então $\lambda_{2\Theta} = \lambda_{(\pi^*)^*\tilde{\Theta}}$. Pela Proposição 2.1, as polarizações induzidas pelos divisores $(\pi^*)^*\tilde{\Theta}$ e 2Θ são algebricamente equivalentes.

□

A componente conexa $(Ker N_\pi)_0$ é a subvariedade de \tilde{J} obtida canonicamente pelo Teorema da Redutibilidade de Poincaré (cf. [45, 54]). A descrição desta subvariedade em termos dos elementos definidos acima é o conteúdo do próximo Lema, que é o ponto de partida para a definição principal deste capítulo.

Lema 3.4.

$$Ker(i_{Ker(N_\pi)_0}^* \circ \lambda_{\tilde{\Theta}}) = \pi^*J = Ker(1 - \sigma^*) = (1 + \sigma^*)\tilde{J}$$

e

$$Ker(i_{\pi^*J}^* \circ \lambda_{\tilde{\Theta}}) = Ker(N_\pi)_0 = Ker(1 + \sigma^*)_0 = (1 - \sigma^*)\tilde{J}.$$

Mais ainda,

$$dim Ker(N_\pi)_0 = \tilde{g} - g \quad e \quad dim \pi^*J = g.$$

Demonstração: Uma vez que $\dim J = g$ então também $\dim \pi^* J = g$. Como $\pi^* \circ N_\pi = 1_{\tilde{J}} + \sigma^*$, então $\text{Ker}(N_\pi)_0 = \text{Ker}(1_J + \sigma^*)_0$, e sua dimensão é $\tilde{g} - g$. Por um lado, se têm as seguintes inclusões $(1_J - \sigma^*)\tilde{J} \subseteq \text{Ker}(1_J + \sigma^*)_0$ e $\text{Ker}(1_J - \sigma^*)_0 \subseteq \pi^* J$. Por outro lado, verifica-se que a aplicação $\pi^* \circ N_\pi$ restrita a $\text{Ker}(1_J - \sigma^*)$ é a isogenia $2\tilde{J}$. Portanto, $\text{Ker}(1_J - \sigma^*) = \pi^* J$ e $\dim(1_J - \sigma^*)\tilde{J} = \tilde{g} - g = \dim \text{Ker}(1_J + \sigma^*)$. Daí, $(1_J - \sigma^*)\tilde{J} = \text{Ker}(1_J + \sigma^*)_0$.

□

É conhecido que o número de componentes conexas de $\text{Ker} N_\pi$ é a cardinalidade de $\text{Ker} \pi^*$. Por outro lado, π^* é injetora se, e somente se, π é ramificado. Daí que, se o recobrimento duplo $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ é ramificado, então $\text{Ker} N_\pi$ é uma variedade conexa (cf. [33, lemma1.1], [56, 63]).

A variedade de Prym associada ao recobrimento duplo ramificado π é a variedade de dimensão $\tilde{g} - g$ definida por

$$P_\pi := \text{Ker} N_\pi.$$

Define-se a variedade de Prym para recobrimentos que não são ramificados como sendo a componente conexa de $\text{Ker} N_\pi$ contendo a origem. Contudo, a menos de breves comentários contextualmente distinguíveis, em nenhum momento ao longo da dissertação esta hipótese estará sendo assumida.

A definição da variedade de Prym como a componente conexa da aplicação norma contendo a origem é usual (cf. [52]), mas convém chamar a atenção que trata-se de uma descrição distinta da dada na referência [45]. Naquele caso define-se a variedade de Prym como sendo um caso especial das variedades de Prym-Tyurim, que são variedades que admitem polarizações principais. Segundo um teorema de Mumford (cf. [56]), estas definições coincidem apenas se o recobrimento duplo é ramificado no máximo em dois pontos.

Denote por λ_{P_π} a polarização induzida por $\lambda_{\tilde{C}}$ sobre P_π .

Lema 3.5. $\text{Ker}(\lambda_{\pi^* J}) = \pi^* J \cap P_\pi = \text{Ker}(\lambda_{P_\pi})$.

Demonstração: Basta notar que $\text{Ker}(\lambda_{\pi^* J}) = \text{Ker}(i_{\pi^* J}^* \circ \lambda_{\tilde{C}} \circ i_{\pi^* J}) = i_{\pi^* J}^{-1}(\text{Ker}(i_{\pi^* J}^* \circ \lambda_{\tilde{C}})) = i_{\pi^* J}^{-1}(\text{Ker} N_\pi) = \pi^* J \cap P_\pi$. A outra igualdade é obtida analogamente.

□

Pelo Lema 3.4, a dimensão da variedade de Prym é dada por

$$\dim P_\pi = \tilde{g} - g = g - 1 + \frac{\delta}{2}.$$

Pelo Lema 3.3, o tipo da polarização associada ao divisor $(\pi^*)^*\tilde{\Theta}$ é $(2, \dots, 2)$, onde 2 ocorre g vezes. Disto, e do Lema 3.5, segue que a restrição do divisor $\tilde{\Theta}$ sobre P_π define um divisor $i_{P_\pi}^*\tilde{\Theta}$ associado ao recobrimento duplo π , chamado divisor *Prym-Theta*, cujo tipo da polarização associada é

$$D = (1, \dots, 1, 2, \dots, 2),$$

onde 1 aparece $(\frac{\delta}{2} - 1)$ vezes e 2 aparece g vezes. Em particular, a polarização induzida pelo divisor Prym-Theta é principal se, e somente se, $\delta = 2$. Este é o resultado que foi demonstrado por Mumford em [56], incluindo o caso em que o recobrimento duplo não é ramificado (cf. [45, 12.3.3]).

Considere os espaços

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{g,\delta} &= \{\text{recobrimentos duplos de curvas de gênero } g \text{ ramificados em } \delta \text{ pontos}\} \\ \mathcal{A}_{g-1+\frac{\delta}{2},D} &= \{\text{variedades abelianas com polarização } D \\ &\quad \text{e dimensão } g - 1 + \frac{\delta}{2}\} \end{aligned}$$

A aplicação de Prym é a definida por

$$\mathcal{R}_{g,\delta} \longrightarrow \mathcal{A}_{g-1+\frac{\delta}{2},D} \quad , \quad (\tilde{C} \xrightarrow{\pi} C) \longmapsto (P_\pi, \mathcal{O}_{P_\pi}(i_{P_\pi}^*\tilde{\Theta})).$$

As descrições dos espaços das variedades abelianas com polarizações com um tipo prescrito são dadas em [45, cap. 8].

Variedades de Prym: descrição topológica

Dado um recobrimento duplo $\pi : \tilde{C} = (C, \mathcal{L}, B) \rightarrow C$, a variedade de Prym P_π é a subvariedade da Jacobiana $J(\tilde{C})$ cujos elementos são os anti-invariantes pela ação da induzida σ^* da involução associada ao recobrimento, enquanto que os elementos de π^*J são os invariantes (cf. Lema 3.4). Isto permite descrever a variedade de Prym como o

quociente de um subespaço do espaço de seções $H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}})$ (cf. [47]). De fato, a descrição topológica da Jacobiana de \tilde{C} é o toro complexo

$$J(\tilde{C}) = \frac{H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}})^*}{H_1(\tilde{C}, Z)}.$$

A ação de σ induzida sobre os espaços $H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}})^*$ e $H_1(\tilde{C}, Z)$ os decompõem em uma parte de elementos invariantes e outra parte de elementos anti-invariantes: uma vez que $\pi_*\omega_{\tilde{C}} \simeq \omega_C \oplus (\omega_C \otimes \mathcal{L})$, então $H^0(\tilde{C}, \pi_*\omega_{\tilde{C}}) = H^0(C, \omega_C) \oplus H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})$, sendo que os elementos do espaço $H^0(C, \omega_C)$ são os elementos invariantes pela ação, enquanto que os elementos do espaço $H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})$ são os elementos anti-invariantes pela ação. Daí,

$$P_\pi = \frac{H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})^*}{H_1(\tilde{C}, Z)^-},$$

onde $H_1(\tilde{C}, Z)^-$ corresponde a parte dos elementos anti-invariantes de $H_1(\tilde{C}, Z)$ obtida pela ação da involução σ . A variedade de Prym P_π é um toro complexo quociente do dual $H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})^*$ pelo reticulado $H_1(\tilde{C}, Z)^-$. Portanto, o espaço tangente projetivizado em qualquer ponto de P_π , transladado para a origem, identifica-se com $\mathbb{P}H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})^*$.

A aplicação de Gauss sobre os pontos não-singulares do divisor Prym-Theta fornece hiperplanos em $\mathbb{P}H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})^*$. Isto permite estudar as interseções destes hiperplanos com o modelo de C no espaço das seções definido pela fibração linear $\omega_C \otimes \mathcal{L}$, também chamada de fibração *semicanônica*. Tal é o conteúdo do Capítulo 3.

Semigrupos de Weierstrass e Recobrimentos Duplos

Os semigrupos de Weierstrass das ramificações dos recobrimentos duplos podem ser descritos em termos dos elementos que descrevem o recobrimento. Este é o conteúdo desta seção, cujas referências auxiliares são [10, 71].

O semigrupo de Weierstrass de um ponto $x \in C$ é o subsemigrupo de \mathbb{N} dado por

$$H(x) := \{\eta \in \mathbb{N}_0 ; \exists f \in \mathbb{C}(C) \text{ com } (f)_\infty = \eta x\} \cup \{0\}.$$

A existência de uma função meromorfa com um único pólo em x de ordem η , é equivalente a uma inclusão própria $H^0(C, \mathcal{O}_C((\eta - 1)x)) \subsetneq H^0(C, \mathcal{O}_C(\eta x))$. Portanto, o semigrupo

$H(x)$ caracteriza-se a partir da cadeia de espaços de seções

$$\mathbb{C} \simeq H^0(C, \mathcal{O}_C) \subseteq H^0(C, \mathcal{O}_C(x)) \subseteq H^0(C, \mathcal{O}_C(2x)) \subseteq \dots$$

As lacunas de Weierstrass associadas ao ponto x são os inteiros positivos do complemento $G(x) := \mathbb{N} \setminus H(x)$, enquanto que os inteiros de $H(x)$ são as não-lacunas de Weierstrass associadas ao ponto x . Pelo Teorema de Riemann Roch,

$$\#G(x) = g \quad e \quad G(x) = \{\ell_1 < \dots < \ell_g\},$$

sendo que, necessariamente, $\ell_1 = 1$ e $\ell_g \leq 2g - 1$. Um ponto de Weierstrass é um ponto x tal que a g -ésima lacuna ℓ_g é diferente de g . Em particular, $G(x) = \{1, \dots, g\}$ sempre que x não é um ponto de Weierstrass (cf. [3, pag. 41]).

A primeira não-lacuna não-nula $c + 1$ do semigrupo $H(x)$ é o primeiro inteiro positivo que satisfaz a desigualdade $H^0(C, \mathcal{O}_C(cx)) \subsetneq H^0(C, \mathcal{O}_C((c + 1)x))$. Em particular, $h^0(C, \mathcal{O}_C(cx)) = 0$ e $h^0(C, \mathcal{O}_C((c + 1)x)) = 1$. Nos capítulos posteriores, esta primeira não-lacuna terá um importância distinguida para os resultados anunciados.

Seja $\pi : \tilde{C} = (C, \mathcal{L}, B) \rightarrow C$ um recobrimento duplo ramificado. O conteúdo do que segue trata das relações possíveis entre os semigrupos de Weierstrass que aparecem nas ramificações do recobrimento em relação aos semigrupos de Weierstrass dos ramos correspondentes.

Dado um ramo $\pi(\tilde{x}) = x$ de π , pretende-se relacionar os semigrupos $H(\tilde{x})$ e $H(x)$. A aplicação entre as fibrações

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_C([\frac{n}{2}]x) & \longrightarrow & \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}(n\tilde{x}) \\ s & \longmapsto & s \circ \pi \end{array}$$

é injetora. Uma vez que as dimensões das fibras de $\mathcal{O}_C([\frac{n}{2}]x)$ e $\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}(n\tilde{x})$ são 1 e 2 respectivamente, existe uma fibração linear invertível \mathcal{M} que define a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C([\frac{n}{2}]x) \longrightarrow \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}(n\tilde{x}) \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

Aplicando o determinante nesta sequência e usando que $\mathcal{M} \simeq \det \mathcal{M}$, segue do Lema

3.1 que

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &\simeq \det \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}(n\tilde{x}) \otimes \det(\mathcal{O}_C([\frac{n}{2}]x))^{-1} \\ &\simeq N_\pi(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(n\tilde{x})) \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{O}_C(-[\frac{n}{2}]x) \\ &\simeq \mathcal{L}^{-1}([\frac{n+1}{2}]x). \end{aligned}$$

A aplicação $\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}(n\tilde{x}) \rightarrow \mathcal{O}_C([\frac{n}{2}]x)$, $a \mapsto (a + \sigma(a))/2$, define uma seção para a sequência, logo

$$\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}(n\tilde{x}) = \mathcal{O}_C([\frac{n}{2}]x) \oplus \mathcal{L}^{-1}([\frac{n+1}{2}]x).$$

Uma vez que o recobrimento π é finito,

$$H^0(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}(n\tilde{x})) = H^0(C, \mathcal{O}_C([\frac{n}{2}]x)) \oplus H^0(C, \mathcal{L}^{-1}([\frac{n+1}{2}]x)).$$

Por esta decomposição, o cálculo das dimensões dos espaços das seções fornece informações sobre os semigrupos de Weierstrass tanto do ramo x quanto da ramificação correspondente \tilde{x} .

Lema 3.6. *Dados um recobrimento duplo $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ com ramo $\pi(\tilde{x}) = x$ e um inteiro positivo a ,*

(1) $2a \in H(\tilde{x})$ se, e somente se, $a \in H(x)$.

(2) $2a + 1 \in H(\tilde{x})$ se, e somente se, $h^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}(-(a+1)x)) = h^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}(-ax))$.

Demonstração: As equivalências em ambos os itens são consequências do Teorema de Riemann-Roch.

□

O Lema 3.6 está essencialmente demonstrado em [10], sendo que o item (1) foi anunciado por Kato em [32]. O Corolário seguinte é o Lema 3.6 em forma equivalente.

Corolário 3.3. *Dados um recobrimento duplo $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ com ramo $\pi(\tilde{x}) = x$ e um inteiro positivo a ,*

(1) $2a \in G(\tilde{x})$ se, e somente se, $a \in G(x)$.

(2) $2a + 1 \in G(\tilde{x})$ se, e somente se, $h^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}(-(a+1)x)) = h^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}(-ax)) - 1$.

□

Pelo Lema 3.6, os elementos pares do semigrupo $H(\tilde{x})$ determinam e são determinados pelo semigrupo $H(x)$, enquanto que os elementos ímpares de $H(\tilde{x})$ são obtidos a partir da cadeia de inclusões dos espaços das seções

$$H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}) \supseteq H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}(-x)) \supseteq H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}(-2x)) \dots$$

A primeira não-lacuna ímpar $\gamma = 2\beta + 1$ do semigrupo $H(\tilde{x})$ é tal que β é o primeiro inteiro positivo que satisfaz a igualdade $H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}(-\beta x)) = H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}(-(\beta+1)x))$. Assim como a primeira não-lacuna de $H(x)$, a primeira não-lacuna ímpar γ de $H(\tilde{x})$ terá um importância distinguida para os resultados anunciados.

Corolário 3.4. *Existem exatamente g não-lacunas ímpares $\gamma = \gamma_1, \dots, \gamma_g \in H(\tilde{x})$ menores que $2\tilde{g}$.*

Demonstração: Uma vez que $h^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}) = g - 1 + \delta/2$ e $\deg(\omega_C \otimes \mathcal{L}) = 2g - 2 + \delta/2$, então g é precisamente o número de igualdades na cadeia de inclusões dos espaços das seções $H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}) \supseteq H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}(-x)) \supseteq H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}(-2x)) \dots$

□

Pelo Corolário 3.4, para determinar o semigrupo $H(\tilde{x})$ basta determinar as não-lacunas ímpares γ_i 's, uma vez que

$$H(\tilde{x}) = 2H(x) \cup \{\gamma_1, \dots, \gamma_g\} \cup \{2\tilde{g}, \rightarrow\}.$$

No Capítulo 5, algumas propriedades desses semigrupos serão dadas em um contexto exclusivamente aritmético. A motivação é o cálculo das dimensões dos espaços das seções a partir das não-lacunas ímpares γ_i 's. Por indução, pondo $\gamma_i = 2\beta_i + 1$, pode-se verificar que

$$h^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}(-\beta_i x)) = g - 1 + \delta/2 + \beta_1 - \beta_i + (i - 1).$$

Exemplo (cf. [43])

Dado um ponto $x \in C$ pretende-se construir um recobrimento duplo π com ramo $\pi(\tilde{x}) = x$ cujo índice de ramificação δ é tal que $\delta - 1 \in H(\tilde{x})$.

Para cada inteiro par $\delta \geq 2g + 2$, o sistema linear $|(\delta - 1)x|$ é muito amplo. Pelo Teorema de Bertini, existe um divisor efetivo e reduzido B tal que $\delta x \sim x + B$. Defina $\mathcal{L} := \mathcal{O}_C(\delta/2x)$. Uma vez que $\mathcal{L}^2 \simeq \mathcal{O}_C(x + B)$, pode-se considerar o recobrimento duplo definido por $\tilde{C} = (C, \mathcal{L}, x + B)$. Seja \tilde{x} a ramificação sobre x por este recobrimento. Uma vez que $\deg(\mathcal{L}^{-1}((\delta - 1)/2x)) < 0$ e $\mathcal{L}^{-1}((\delta/2)x) \simeq \mathcal{O}_C$, então $h^0(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}((\delta - 2)\tilde{x})) = h^0(C, \mathcal{O}_C((\frac{\delta}{2} - 1)x))$ e $h^0(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}((\delta - 1)\tilde{x})) = h^0(C, \mathcal{O}_C((\frac{\delta}{2} - 1)x)) + 1$. Portanto, $\delta - 1 \in H(\tilde{x})$.

O Divisor Prym-Theta e os Semigrupos de Weierstrass

Por analogia ao método de Andreotti para o Teorema de Torelli (cf. [1]), pode-se considerar o lugar onde a aplicação de Gauss sobre o divisor Prym-Theta se degenera. Os pontos deste conjunto podem ser representados por um conjunto específico de divisores regulares do recobrimento duplo. Com tal descrição, pode-se contar as cardinalidades das fibras da aplicação de Gauss. O propósito deste capítulo é determinar esses elementos, que são invariantes por translações do divisor Prym-Theta. O resultado principal desta tese, o Teorema A dado na introdução, será enunciado e demonstrado. Algumas referências auxiliares para este capítulo são [45, cap.4.4], [52, seç.4], [17, 34].

O Divisor Prym-Theta

Seja $\pi : \tilde{C} : (C, \mathcal{L}, B) \rightarrow C$ um recobrimento duplo com divisor Prym-Theta associado Ξ . Por analogia com o divisor Theta da Jacobiana, pode-se representar o divisor Ξ como um subconjunto de fibrações lineares de $W_{\tilde{g}-1}$. De fato, defina

$$\hat{P}_\pi = N_\pi^{-1}(\omega_C \otimes \mathcal{L}) \quad e \quad \hat{\Xi} := W_{\tilde{g}-1} \cap \hat{P}_\pi.$$

Dual ao isomorfismo entre J e $Pic^{\tilde{g}-1}(C)$, que associa $M \mapsto \omega_C \otimes \mathcal{L} \otimes M$, pode-se identificar $(\hat{P}_\pi, \hat{\Xi})$ com (P_π, Ξ) . O ponto de partida para provar esta afirmação é o seguinte Lema.

Lema 4.1 ([56]). *Existe uma fibração linear $\tilde{\kappa}$ sobre \tilde{C} tal que*

$$\tilde{\kappa}^2 \simeq \omega_{\tilde{C}} \quad e \quad N_\pi(\tilde{\kappa}) \simeq \omega_C \otimes \mathcal{L}.$$

Demonstração: Seja κ uma fibração linear sobre C tal que $\kappa^2 \simeq \omega_C$ (theta-characteristics)

e sejam x_1, \dots, x_s ramos de π , onde $s = \delta/2$. Uma vez que $\deg \mathcal{L}(-\sum_{i=1}^s \tilde{x}_i) = 0$, existe um divisor D tal que $\mathcal{O}_C(2D) \simeq \mathcal{L}(-\sum_{i=1}^s x_i)$, onde $\tilde{x}_i \in \tilde{C}$ é tal que $\pi(\tilde{x}_i) = x_i$. Defina $\tilde{\kappa} := \pi^*(\kappa(D)) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\sum_{i=1}^s x_i)$.

□

Corolário 4.1. *Seja $\tilde{\kappa}$ como no Lema 4.1, então a aplicação $P_\pi \rightarrow \hat{P}_\pi$, dada por $M \mapsto M \otimes \tilde{\kappa}$, define uma bijeção entre P_π e \hat{P}_π . Mais ainda, a menos de uma translação de $\tilde{\Theta}$, esta aplicação também define uma bijeção $\Xi \rightarrow \hat{\Xi}$.*

Demonstração: Seja $M \in P_\pi$, então $N_\pi(M \otimes \tilde{\kappa}) \simeq N_\pi(M) \otimes N_\pi(\tilde{\kappa}) \simeq \mathcal{O}_C \otimes (\omega_C \otimes \mathcal{L}) \simeq \omega_C \otimes \mathcal{L}$, logo $M \otimes \tilde{\kappa} \in \hat{P}$. Reciprocamente, seja $N \in \hat{P}$, então $N_\pi(N \otimes \tilde{\kappa}^{-1}) \simeq N_\pi(N) \otimes N_\pi(\tilde{\kappa}^{-1}) \simeq (\omega_C \otimes \mathcal{L}) \otimes (\omega_C \otimes \mathcal{L})^{-1} \simeq \mathcal{O}_C$. Isto mostra que existe uma bijeção $P_\pi \rightarrow \hat{P}_\pi$. Uma vez que $W_{\tilde{g}-1} - \tilde{\kappa}$ e $\tilde{\Theta}$ são algebricamente equivalentes, transladando $\tilde{\Theta}$ se necessário, pode-se supor diretamente que $W_{\tilde{g}-1} = \tilde{\Theta} + \tilde{\kappa}$ (cf. pag. 33). Daí que os elementos de $\hat{\Xi}$ são os elementos $M \otimes \tilde{\kappa}$ tais que $M \in \Xi$. Isto mostra que a aplicação anunciada define uma bijeção $\Xi \rightarrow \hat{\Xi}$.

□

Pelo Teorema da Singularidade de Riemann (cf. pag. 34), os pontos não-singulares de $W_{\tilde{g}-1}$ são as fibrações lineares $\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{D})$ representadas pelos divisores efetivos e regulares de grau $\tilde{g} - 1$, isto é, tais que $h^0(\tilde{C}, \tilde{D}) = 1$. Para descrever os divisores cujas fibrações lineares representam a parte não-singular de $\hat{\Xi}$, será utilizado o seguinte Lema.

Lema 4.2. *Seja $D \in \text{Div}^d(C)$ e considere o diagrama de aplicações*

$$\begin{array}{ccc} N_\pi^{-1}|D| & \hookrightarrow & \tilde{C}^d \\ \downarrow & & \downarrow N_\pi \\ |D| & \hookrightarrow & C^d. \end{array}$$

Seja $\tilde{D} = \pi^*A + \tilde{E} \in N_\pi^{-1}|D|$, onde A e \tilde{E} são divisores efetivos sendo A de grau máximo.

1) $N_\pi^{-1}|D|$ é não-singular em \tilde{D} se, e somente se, $h^0(C, N_\pi(\tilde{D}) - A) = h^0(C, N_\pi(\tilde{D})) - \deg(A)$.

2) Suponha que $N_\pi^{-1}|D|$ é não-singular em \tilde{D} , então $N_\pi|_{N_\pi^{-1}|D|} : N_\pi^{-1}|D| \rightarrow |D|$ não se degenera em \tilde{D} se, e somente se, $N_\pi : \tilde{C}^d \rightarrow C^d$ não se degenera em \tilde{D} .

Demonstração: (cf. [34, prop. 0.1]).

□

Lema 4.3. *O conjunto dos pontos não-singulares de $\widehat{\Xi}$ é descrito pelo seguinte conjunto de classes de divisores regulares*

$$\widehat{\Xi}^{ns} = \{\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{D}) ; \tilde{D} \in \tilde{C}_{reg}^{(g-1)}, N_{\pi}(\tilde{D}) \simeq \omega_C \otimes \mathcal{L} \text{ e } h^0(\tilde{C}, \tilde{D}) = 1\}.$$

Em particular,

$$\text{Sing } \widehat{\Xi} = (\text{Sing } W_{\tilde{g}-1}) \cap \widehat{P}_{\pi}.$$

Demonstração: (esboço) Por um lado, $\widehat{\Xi}^{ns} \subseteq W_{\tilde{g}-1}^{ns}$, logo cada $\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{D}) \in \widehat{\Xi}^{ns}$ é tal que $N_{\pi}(\tilde{D}) \simeq \omega_C \otimes \mathcal{L}$ e $h^0(\tilde{C}, \tilde{D}) = 1$. Basta mostrar que todo $\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{D}) \in W_{\tilde{g}-1}^{ns} \cap \widehat{P}$ é um ponto não-singular de $\widehat{\Xi}$. De fato, suponha que $\tilde{D} = \pi^*A + \tilde{E}$, onde A e \tilde{E} são divisores efetivos sendo A de grau máximo. Disto, e da fórmula da projeção (cf. pag 40), segue que $1 = h^0(\tilde{C}, \tilde{D} - \tilde{E}) = h^0(\tilde{C}, \pi^*A) = h^0(C, A) + h^0(C, \mathcal{L}^{-1}(A))$, logo $h^0(C, \mathcal{L}^{-1}(A)) = 0$. Pelo Teorema de Riemann-Roch, $h^0(C, N_{\pi}(\tilde{D}) - A) = h^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}(-A)) = g - 1 + \delta/2 - \text{deg}A = h^0(C, N_{\pi}(\tilde{D})) - \text{deg}(A)$. Pelo Lema 4.2, o resultado segue.

□

A Aplicação de Gauss sobre o Divisor Prym-Theta

Dado um recobrimento duplo $\pi : \tilde{C} : (C, \mathcal{L}, B) \rightarrow C$, a variedade de Prym P associada é um toro complexo que é um quociente de $H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})^*$ por um reticulado (cf. pag. 49). Cada espaço tangente $T_{P,x}$ identifica-se com $H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})^*$. Seja Ξ o divisor Prym-Theta associado. Dado $p \in \Xi^{ns}$, o tangente $T_{\Xi,p}$ é um espaço vetorial de dimensão $g-2-\delta/2$, que, transladado para a origem, é um subespaço do espaço vetorial $T_{P,0} = H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})^*$. O tangente projetivizado $\mathbb{P}T_{P,0}$ identifica-se com $\mathbb{P}H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})^*$, o espaço dos hiperplanos de $\mathbb{P}H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})$. A *aplicação de Gauss* de Ξ em P é a aplicação que associa a cada ponto $p \in \Xi^{ns}$ o tangente projetivizado $\mathbb{P}T_{\Xi,p}$ transladado a um subespaço de $\mathbb{P}T_{P,0}$, isto é,

$$\begin{aligned} G_{\Xi} : \Xi^{ns} &\longrightarrow \mathbb{G}(g-3-\delta/2, \mathbb{P}H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})^*) \\ p &\longmapsto \mathbb{P}T_{\Xi,p} \subseteq \mathbb{P}T_{P,0} \end{aligned}$$

Por passagem ao dual, a imagem de um ponto pela aplicação de Gauss pode ser descrita pelo espaço de dimensão 1 que define o anulador do tangente de Ξ neste ponto:

$$G_{\Xi} : \Xi^{ns} \longrightarrow \mathbb{P}H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}).$$

O conteúdo do que segue trata das relações entre a aplicação de Gauss G_{Ξ} do divisor Prym-Theta Ξ e a aplicação de Gauss $G_{\tilde{\Theta}}$ do divisor Theta $\tilde{\Theta}$ da Jacobiana $J(\tilde{C})$. Uma vez que a aplicação de Gauss G_{Ξ} descreve hiperplanos em $\mathbb{P}H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})^*$, pode-se estudar suas interseções com o modelo de C no espaço das seções definido pela fibração linear $\omega_C \otimes \mathcal{L}$.

A *aplicação semicanônica* é a aplicação

$$\phi_{\mathcal{L}} : C \longrightarrow \mathbb{P}H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})^* \quad , \quad \phi_{\mathcal{L}}(x) = |\omega_C \otimes \mathcal{L}(-x)| + x,$$

definida pelo dual do morfismo dado pelo sistema linear $|\omega_C \otimes \mathcal{L}|$. O *modelo semicanônico* de C é a curva $C_{\mathcal{L}}$ no espaço $\mathbb{P}H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})$, cujo dual é $\phi_{\mathcal{L}}(C)$ (cf. [17, 52]).

Suponha que a fibração semicanônica $\omega_C \otimes \mathcal{L}$ é globalmente gerada. Isto significa que o modelo semicanônico não está contido em nenhum hiperplano do espaço $\mathbb{P}H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})$. Uma vez que $\deg(\omega_C \otimes \mathcal{L}) = \tilde{g} - 1$, cada hiperplano no espaço intercepta a curva semicanônica em $\tilde{g} - 1$ pontos, contando multiplicidades.

Dado um divisor $D \in C^{(\tilde{g}-1)}$, o span $\overline{\phi_{\mathcal{L}}(D)}$ define um hiperplano em $\mathbb{P}H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})^*$ (cf. pag. 30). Isto define uma aplicação associada à fibração semicanônica $\omega_C \otimes \mathcal{L}$, a aplicação $s : C^{\tilde{g}-1} \rightarrow \mathbb{P}H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})^*$ dada por $D \mapsto \overline{\phi_{\mathcal{L}}(D)}$, chamada de aplicação *secante*. Compondo a aplicação secante s com a aplicação norma N_{π} , se tem uma aplicação $S : \tilde{C}^{\tilde{g}-1} \rightarrow \mathbb{P}H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})^*$ dada pelo seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}^{(\tilde{g}-1)} & & \\ N_{\pi} \downarrow & \searrow s & \\ C^{(\tilde{g}-1)} & \xrightarrow{s} & \mathbb{P}H^0(\omega_{\tilde{C}} \otimes \mathcal{L})^*. \end{array}$$

O dual $\overline{\phi_{\mathcal{L}}(D)}^{\vee}$ é um ponto de $\mathbb{P}H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})$ dado pelo subespaço de $H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})$ de dimensão 1 que gera o anulador do hiperplano $\overline{\phi_{\mathcal{L}}(D)}$. Isto define uma aplicação $s^{\vee} : C^{\tilde{g}-1} \rightarrow \mathbb{P}H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})$, dada por $D \mapsto \overline{\phi_{\mathcal{L}}(D)}^{\vee}$, que é a aplicação secante dualizada. Analogamente, compondo a aplicação s^{\vee} com a aplicação norma N_{π} , se tem uma aplicação

$S^\vee : \tilde{C}^{\tilde{g}-1} \rightarrow \mathbb{P}H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})$ dada pelo seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}^{(\tilde{g}-1)} & & \\ N_\pi \downarrow & \searrow S^\vee & \\ C^{(\tilde{g}-1)} & \xrightarrow{s^\vee} & \mathbb{P}H^0(\omega_{\tilde{C}} \otimes \mathcal{L}). \end{array}$$

Uma vez que $H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}}) \simeq H^0(C, \omega_C) \oplus H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})$, então $\mathbb{P}H^0(C, \omega_C)$ é um $(g - 1)$ -plano de $\mathbb{P}H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}})$, enquanto que $\mathbb{P}H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})$ é um $(g - 2 + \delta/2)$ -plano de $\mathbb{P}H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}})$. Deste modo, pode-se definir uma aplicação $h : \mathbb{P}H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}}) \rightarrow \mathbb{P}H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})$, que é a aplicação projeção com centro em $\mathbb{P}H^0(C, \omega_C)$ (cf. [53, pag. 98]). Por dualidade, define-se a projeção $h^\vee : \mathbb{P}H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}})^* \rightarrow \mathbb{P}H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L})^*$ com centro $\mathbb{P}H^0(C, \omega_C)^*$. O diagrama seguinte é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C} & \xrightarrow{\phi_{\omega_{\tilde{C}}}} & \mathbb{P}H^0(\omega_{\tilde{C}})^* \\ \pi \downarrow & & \downarrow h^\vee \\ C & \xrightarrow{\phi_{\mathcal{L}}} & \mathbb{P}H^0(\omega_{\tilde{C}} \otimes \mathcal{L})^*. \end{array}$$

Mais geralmente, o diagrama seguinte é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}^{(\tilde{g}-1)} & \longrightarrow & \mathbb{P}H^0(\omega_{\tilde{C}})^* \\ N_\pi \downarrow & \searrow S & \downarrow h^\vee \\ C^{(\tilde{g}-1)} & \xrightarrow{s} & \mathbb{P}H^0(\omega_{\tilde{C}} \otimes \mathcal{L})^*. \end{array}$$

Pelo Lema 4.3, pode-se supor $\hat{\Xi}^{ns} \hookrightarrow \tilde{C}_{reg}^{\tilde{g}-1}$. Identificando $(\tilde{J}, \tilde{\Theta})$ com $(Pic^{\tilde{g}-1}(\tilde{C}), W_{\tilde{g}-1})$, e identificando (P_π, Ξ) com $(\hat{P}_\pi, \hat{\Xi})$, a aplicação de Gauss sobre o divisor Prym-Theta corresponde a aplicação secante dualizada S^\vee restrita ao conjunto $\hat{\Xi}^{ns}$ dos divisores regulares $\tilde{D} \in \tilde{C}^{(\tilde{g}-1)}$ tais que $N_\pi(\tilde{D}) \simeq \omega_C \otimes \mathcal{L}$, logo

$$G_{\Xi}(\tilde{D}) = S^\vee(\tilde{D}).$$

as fibrações lineares $M \in \widehat{P}$ são caracterizadas pela condição

$$\sigma M \otimes M \simeq \omega_{\widetilde{C}},$$

onde σ é a involução associada ao recobrimento duplo. Disto segue que, dados dois pontos \tilde{x} e \tilde{y} que sejam ou ambos ramificados ou involutivos entre si, se $\widetilde{E} + \tilde{x} + \tilde{y} \in \widehat{P}$, então $K_{\widetilde{C}} - \widetilde{E} - 2\tilde{x} - 2\tilde{y} \sim \sigma\widetilde{E}$, logo é um divisor linearmente equivalente a um divisor efetivo, o que significa bitangência em \tilde{x} e \tilde{y} (cf. pag. 31).

Corolário 4.2. *Seja $\pi : \widetilde{C} = (C, \mathcal{L}, B) \rightarrow C$ um recobrimento duplo ramificado tal que \widetilde{C} é livre de bitangentes e a fibração linear $\omega_C \otimes \mathcal{L}$ é globalmente gerada. A aplicação de Gauss $G_{\Xi} : \Xi^{ns} \rightarrow \mathbb{P}H^0(\omega_C \otimes \mathcal{L})$ se degenera sobre os pontos $\widetilde{E} + \alpha\tilde{x} \in \Xi^{ns}$, onde \tilde{x} é uma ramificação de π e o divisor \widetilde{E} é livre de ramificações e pontos involutivos entre si. Mais ainda, o lugar dos ramos $\mathfrak{B}_{G_{\Xi}}$ da aplicação de Gauss G_{Ξ} é dual ao lugar dos ramos da aplicação $\phi_{\mathcal{L}} \circ \pi$. Em particular, se a fibração linear $\omega_C \otimes \mathcal{L}$ é muito ampla, então $\mathfrak{B}_{G_{\Xi}}$ consiste de δ hiperplanos distintos.*

Demonstração: Uma vez que \widetilde{C} é livre de bitangentes, os divisores de \widehat{P} não possuem mais que duas ramificações e não possuem dois pontos involutivos entre si. Disto, e do Teorema 4.1, segue que os divisores $\widetilde{D} \in \widehat{\Xi}^{ns}$ onde G_{Ξ} se degenera são os que não contém pontos distintos involutivos e que contém uma única ramificação. Isto demonstra a primeira parte enunciada. Para provar a afirmação sobre $\mathfrak{B}_{G_{\Xi}}$ basta ver que o dual de cada $G_{\Xi}(\widetilde{E} + \alpha\tilde{x})$, onde \tilde{x} é uma ramificação de π , é um hiperplano em $|\omega_C \otimes \mathcal{L}(-\pi(\tilde{x}))| + \pi(\tilde{x})$. Para provar a última parte, seja \tilde{y} uma outra ramificação e suponha que $|\omega_C \otimes \mathcal{L}(-\pi(\tilde{x}))| + \pi(\tilde{x})$ e $|\omega_C \otimes \mathcal{L}(-\pi(\tilde{y}))| + \pi(\tilde{y})$ não são distintos, então $\pi(\tilde{y}) \in Bs|\omega_C \otimes \mathcal{L}(-\pi(\tilde{x}))|$, o que implica que a fibração linear $\omega_C \otimes \mathcal{L}$ não é muito ampla.

□

Pelo Corolário 4.2, com as mesmas hipóteses, o conjunto dos hiperplanos (de hiperplanos) que definem o lugar dos ramos $\mathfrak{B}_{G_{\Xi}}$ da aplicação de Gauss G_{Ξ} é dado por

$$\{|\omega_C \otimes \mathcal{L}(-x)| + x ; x \in B\}.$$

Os conteúdos do Teorema 4.1 e do Corolário 4.2 estão essencialmente em [52, seq. 4], onde um resultado análogo foi demonstrado partindo da escolha de um recobrimento duplo genérico, que garante as hipóteses dos resultados enunciados. Argumentação similar pode

ser encontrada em [34] no contexto de recobrimentos duplos não-ramificados. A distinção dos resultados acima está na descrição explícita dada para os divisores cujas fibrações lineares associadas definem o lugar onde a aplicação de Gauss G_{Ξ} se degenera.

As Fibras da Aplicação de Gauss G_{Ξ} e os Semigrupos de Weierstrass

Seja $\pi : \tilde{C} = (C, \mathcal{L}, B) \rightarrow C$ um recobrimento duplo com variedade de Prym associada P e divisor Prym-Theta associado Ξ . Nesta seção será demonstrada a existência de uma conexão entre a cardinalidade das fibras da aplicação de Gauss G_{Ξ} com os semigrupos de Weierstrass das ramificações e dos ramos do recobrimento duplo.

Se o recobrimento π é livre de bitangentes e a fibração semicanônica $\omega \otimes \mathcal{L}$ é globalmente gerada, então, pelo Corolário 4.2, existe uma dualidade entre os ramos de π e o lugar dos ramos da aplicação de Gauss G_{Ξ} . Com isto em vista, convém considerar o conjunto de inteiros

$$\mathcal{A}(\pi)_x := \{\alpha \in \mathbb{N} ; \exists \tilde{E} + \alpha\tilde{x} \in \Xi^{ns} \text{ e } \tilde{x} \notin \tilde{E}\}.$$

Os inteiros $\alpha \in \mathcal{A}(\pi)_x$ são tais que sobre algum $\tilde{E} + \alpha\tilde{x} \in \widehat{\Xi}^{ns}$, tal que $\tilde{x} \notin \tilde{E}$, a aplicação de Gauss G_{Ξ} se degenera. Os Lemas seguintes são o ponto de partida para o resultado principal desta tese, seus conteúdos tratam acerca das paridades das dimensões dos espaços das seções (cf. [34, 35]).

Lema 4.4 ([29]). *Seja L uma fibração linear sobre C . Dados dois divisores efetivos e disjuntos $D, E \in \text{Div}(C)$, se $h^0(C, L) = h^0(C, L(-D))$ então $h^0(C, L(-E)) = h^0(C, L(-D - E))$. Em particular, se $p \notin \text{Bs}|L|$ e $p \notin D$ então $p \notin \text{Bs}|L(D)|$.*

Demonstração: Por hipótese $H^0(C, L) = H^0(C, L(-D))$. Como D, E são disjuntos, então $H^0(C, L(-(D+E))) = H^0(C, L(-D)) \cap H^0(C, L(-E)) = H^0(C, L) \cap H^0(C, L(-E))$, logo $H^0(C, L(-(D+E))) = H^0(C, L(-E))$, pois, sendo E e D efetivos, ambos os espaços estão contidos em $H^0(C, L)$.

□

Lema 4.5. *Dados $M \in \widehat{P}_{\pi}$ e $p \in \tilde{C}$, então $p \notin \text{Bs}|M|$ se, e somente se, $\sigma(p) \in \text{Bs}|M(\sigma(p))|$.*

Demonstração: Se $M \in \widehat{P}$ então $\sigma M \otimes M \simeq \omega_{\tilde{C}}$. Pelo Teorema de Riemann-Roch, $p \notin \text{Bs}|M| \Leftrightarrow p \in \text{Bs}|\omega_{\tilde{C}} \otimes M^{-1}(p)| \Leftrightarrow p \in \text{Bs}|(\sigma M)(p)| \Leftrightarrow \sigma(p) \in \text{Bs}|M(\sigma(p))|$.

□

Corolário 4.3. *Dados $M \in \widehat{P}_\pi$ e $p \in \widetilde{C}$ um ponto não ramificado de π , então $p \notin Bs|M|$ se, e somente se, $h^0(\widetilde{C}, M(\sigma(p) - p)) = h^0(\widetilde{C}, M) - 1$.*

Demonstração: (\Rightarrow) Suponha que o ponto $p \notin Bs|M|$. Pelo Lema 4.4, uma vez que p não é um ponto de ramificação, $p \notin Bs|M(\sigma(p))|$. Pelo Lema 4.5, $\sigma(p) \in Bs|M(\sigma(p))|$. Logo, $h^0(\widetilde{C}, M(\sigma(p) - p)) = h^0(\widetilde{C}, M(\sigma(p))) - 1 = h^0(\widetilde{C}, M) - 1$. (\Leftarrow) Se $h^0(\widetilde{C}, M(\sigma(p) - p)) = h^0(\widetilde{C}, M) - 1$, então $h^0(\widetilde{C}, M(\sigma(p))) \geq h^0(\widetilde{C}, M) > h^0(\widetilde{C}, M(\sigma(p) - p))$, logo $h^0(\widetilde{C}, M(\sigma(p))) = h^0(\widetilde{C}, M)$. Daí que $\sigma(p) \in Bs|M(\sigma(p))|$. Pelo Lema 4.5, $p \notin Bs|M|$.

□

O Teorema seguinte, que é o Teorema A dado no capítulo de introdução, é o resultado principal desta tese e descreve uma conexão entre a cardinalidade das fibras da aplicação de Gauss G_Ξ e os semigrupos de Weierstrass das ramificações e dos ramos do recobrimento duplo. Dado um ramo $\pi(\tilde{x}) = x$, dois elementos dos semigrupos $H(\tilde{x})$ e $H(x)$ devem ser destacados, a saber, a primeira não-lacuna ímpar γ de $H(\tilde{x})$ e a primeira não-lacuna não-nula $c + 1$ de $H(x)$.

Teorema 4.2 (A). *Seja $\pi : \widetilde{C} = (C, \mathcal{L}, B) \rightarrow C$ um recobrimento duplo ramificado tal que \widetilde{C} é livre de bitangentes e a fibração linear $\omega_C \otimes \mathcal{L}$ é globalmente gerada. Dado um ramo $\pi(\tilde{x}) = x$, sejam γ a primeira não-lacuna ímpar de $H(\tilde{x})$ e $c + 1$ a primeira não-lacuna não-nula de $H(x)$. Então*

$$\mathcal{A}(\pi)_x = \{\alpha \in \mathbb{N} ; \alpha \leq \min\{\gamma - 1, 2c + 1\} \text{ e } 2\alpha + 1 \notin H(\tilde{x})\}.$$

Demonstração: Seja Ξ o divisor Prym-Theta associado ao recobrimento duplo π . O Teorema será demonstrado por contra-inclusão dos conjuntos na ordem em que estão enunciados.

(C) Dado $\alpha \in \mathcal{A}(\pi)_x$, existe um divisor efetivo $\widetilde{D} = \widetilde{E} + \alpha\tilde{x} \in \widehat{\Xi}^{ns}$ tal que o ponto $\tilde{x} \notin \widetilde{E}$. Uma vez que $h^0(C, \widetilde{D}) = 1$, todo ponto do divisor \widetilde{E} é um ponto base do divisor \widetilde{D} . Logo, $1 = h^0(\widetilde{C}, \widetilde{D}) = h^0(\widetilde{C}, \widetilde{D} - \alpha\tilde{x}) = h^0(\widetilde{C}, \mathcal{O}_{\widetilde{C}}(\alpha\tilde{x})) = h^0(C, \mathcal{O}_C([\alpha/2]x)) + h^0(C, \mathcal{L}^{-1}[(\alpha + 1)/2]x)$. Isto implica que $h^0(C, \mathcal{O}_C([\alpha/2]x)) = 1$ e $h^0(C, \mathcal{L}^{-1}[(\alpha + 1)/2]x) = 0$, daí que $[\alpha/2] \leq c$ e $[(\alpha + 1)/2] \leq [\gamma/2]$, logo $\alpha \leq 2c + 1$ e $\alpha \leq \gamma - 1$. Portanto $\alpha \leq \min\{\gamma - 1, 2c + 1\}$. Como $\tilde{x} \notin \widetilde{E}$, o ramo correspondente $x \notin N_\pi(\widetilde{E})$. Segue que o divisor $N_\pi(\widetilde{E})$ é um divisor de $|\omega_C \otimes \mathcal{L}(-\alpha x)|$ que não contém o ponto x , isto implica a inclusão própria

$H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}(-\alpha x)) \supsetneq H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}(-(\alpha + 1)x))$, portanto $2\alpha + 1 \notin H(\tilde{x})$ (cf. Lema 3.6).

(\supset) Seja $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \leq \min\{\gamma - 1, 2c + 1\}$ e $2\alpha + 1 \notin H(\tilde{x})$. Uma vez que $2\alpha + 1 \notin H(\tilde{x})$ então $H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}(-\alpha x)) \supsetneq H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{L}(-(\alpha + 1)x))$, logo existe um divisor efetivo $E \in |\omega_C \otimes \mathcal{L}(-\alpha x)|$ tal que o ponto $x \notin E$. Seja \tilde{E} um divisor efetivo tal que $N_\pi(\tilde{E}) = E$ e considere o divisor $\tilde{D} = \tilde{E} + \alpha\tilde{x}$. Então $N_\pi(\tilde{D}) \in |\omega_C \otimes \mathcal{L}|$, daí que $\tilde{D} = \tilde{E} + \alpha\tilde{x} \in \hat{\Xi}$, sendo que o ponto $\tilde{x} \notin \tilde{E}$. Basta mostrar a possibilidade de se supor que o divisor \tilde{D} é um divisor regular. Para isto uma argumentação similar à demonstração de [35, Cor. 2.2] pode ser utilizada (cf. tbm [34, sec. 3]). Suponha que $h^0(\tilde{C}, \tilde{D}) \geq 2$, então algum ponto $\tilde{p} \in \tilde{E}$ não é ponto base de \tilde{D} . De fato, caso contrário $2 \leq h^0(\tilde{C}, \tilde{D}) = h^0(\tilde{C}, \tilde{D} - \tilde{E}) = h^0(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\alpha\tilde{x})) = h^0(C, \mathcal{O}_C([\alpha/2]x)) + h^0(C, \mathcal{L}^{-1}([\alpha + 1]/2]x)) = 1$, o que é uma contradição (cf. Lema 4.4). Seja o ponto $\tilde{p} \in \tilde{E}$ que não é um ponto base do divisor \tilde{D} . O divisor \tilde{D} já é suportado pela ramificação \tilde{x} , assim sendo, o ponto \tilde{p} não é uma ramificação de π , pois \tilde{C} é livre de bitangentes. Pelo Corolário 4.3, $h^0(\tilde{C}, \tilde{D} + \sigma(\tilde{p}) - \tilde{p}) = h^0(\tilde{C}, \tilde{D}) - 1$. Uma vez que o ponto $\tilde{p} \in \tilde{D}$, o divisor $\tilde{D} + \sigma(\tilde{p}) - \tilde{p}$ é efetivo. Logo, se $h^0(\tilde{C}, \tilde{D} + \sigma(\tilde{p}) - \tilde{p}) = 1$ então $\tilde{D} + \sigma(\tilde{p}) - \tilde{p} \in \hat{\Xi}^{ns}$. Caso contrário basta aplicar o mesmo procedimento para este divisor. Deste modo, pode-se supor diretamente que $h^0(\tilde{C}, \tilde{D}) = 1$. Por definição de \tilde{D} segue que $\alpha \in \mathcal{A}(\pi)_x$.

□

O Teorema 4.2 mostra que os conjuntos $\mathcal{A}(\pi)'_x$ s são completamente determinados pelos semigrupos das ramificações dos recobrimentos. Isto sugere que estes conjuntos podem ter propriedades aritméticas. De fato, em vista do Teorema 4.2, um análogo do conjunto $\mathcal{A}(\pi)_x$ pode ser definido no contexto da teoria de semigrupos numéricos, onde tais propriedades podem ser estudadas. Tal é o conteúdo do próximo capítulo. Buscando estabelecer aplicações, casos especiais, tais como semigrupos simétricos, serão tratados. De posse de algumas propriedades aritméticas, no Capítulo 6 algumas consequências e aplicações do Teorema 4.2 poderão ser enunciadas.

Semigrupos Numéricos e $\mathcal{A}(\tilde{H})$

Os *semigrupos de recobrimento* são definidos por analogia com os semigrupos de Weierstrass que aparecem nas ramificações dos recobrimentos duplos de curvas (cf. pag. 49). A vantagem é a possibilidade de tratá-los apenas sob um ponto de vista aritmético.

Um conjunto $\mathcal{A}(\cdot)$ pode ser definido por analogia com o descrito no Teorema 4.2. Um aspecto de abordagem trata do problema de caracterizar, a partir deste conjunto, as não-lacunas ímpares que aparecem no semigrupo do recobrimento associado. Este capítulo trata desta questão tendo este ponto de vista. Com o objetivo de submetê-lo a aplicações, o caso especial acerca de semigrupos simétricos será considerado. Algumas referências auxiliares são [64, 71, 73, 74].

Semigrupos Numéricos e Recobrimentos

Semigrupos de Weierstrass motivam o estudo de subsemigrupos H de \mathbb{N}_0 . Quando o complemento $G := \mathbb{N}_0 \setminus H$ é um conjunto finito, de cardinalidade (gênero) g , tais subsemigrupos são chamados de *semigrupos numéricos*. Os elementos $\ell_1 < \dots < \ell_g \in G$ são chamados de *lacunas*, enquanto que os elementos de H são chamados de *não-lacunas*. A *multiplicidade* do semigrupo H é a primeira não-lacuna não-nula de H .

Por ser fechado pela soma, propriedades aritméticas do semigrupo H podem ser obtidas. Para que exista alguma lacuna ℓ_i deve-se supor $g > 0$. Neste caso, têm-se sempre $\ell_1 = 1$ e $\ell_g \leq 2g - 1$. Dada uma não-lacuna $m \in H$, então $\ell_i - m \in G$. Seja m_i a i -ésima não-lacuna de H . Se $m_1 = 1$ então $g = 0$. Se $m_1 = 2$ então $m_i = 2i$. Suponha $m_i \geq 3$, então

$$\begin{aligned} m_i &\geq 2i + 1 & (i = 1, \dots, g - 2); \\ m_{g-1} &\geq 2g - 2; \\ m_g &= 2g. \end{aligned}$$

Estas propriedades aritméticas são bem conhecidas e estarão sendo usadas sem maiores comentários ao longo do que segue (cf. [71, 73, 74]).

Um semigrupo numérico \tilde{H} que caracteriza o semigrupo H pela condição

$$H = \{n \in \mathbb{N}_0 ; 2n \in \tilde{H}\},$$

é chamado *semigrupo de recobrimento* de H (cf. [64]). Por definição,

$$2n \in \tilde{H} \Leftrightarrow n \in H \quad e \quad 2n \in \tilde{G} \Leftrightarrow n \in G.$$

Ambas as equivalências estão de acordo com o Lema 3.6. O número de lacunas pares em \tilde{G} é precisamente o gênero g de H .

Conforme [73, Lemma 2.4], \tilde{H} é um semigrupo g -hiperelíptico. Parte do esforço na teoria de semigrupos de recobrimento tem em vista as possibilidades de caracterizar semigrupos g -hiperelípticos por semigrupos de Weierstrass nas ramificações dos recobrimentos duplos de curvas de gênero g . Pela fórmula de Riemann-Hurwitz, por exemplo, é necessário que o gênero \tilde{g} de \tilde{H} seja tal que $\tilde{g} \geq 2g$. Em [73], um outro critério foi dado dependendo apenas do gênero: cada semigrupo de Weierstrass g -hiperelíptico \tilde{H} de gênero $\tilde{g} \geq 6g + 4$, é o semigrupo de Weierstrass da ramificação de um recobrimento duplo de uma curva de gênero g . As descrições para os semigrupos de Weierstrass nas ramificações dos recobrimentos duplos permitem a construção de semigrupos numéricos que não são semigrupos de Weierstrass (cf. [37, 38, 41, 43]).

Uma vez que $2g + i \in H$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$, então

$$\{4g + 2i ; i \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \tilde{H}.$$

A partir desta propriedade é possível descrever o número de não-lacunas ímpares de \tilde{H} que são menores que $2\tilde{g}$. Este é o conteúdo do próximo Lema, que é a versão aritmética do Corolário 3.4.

Lema 5.1. *Existem exatamente g não-lacunas ímpares $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ em \tilde{H} menores que $2\tilde{g}$.*

Demonstração: Existem exatamente \tilde{g} não-lacunas entre 0 e $2\tilde{g} - 1$. Destas, sejam \tilde{H}_p o conjunto das não-lacunas pares e \tilde{H}_i o conjunto das não-lacunas ímpares. Daí que $\#\tilde{H}_i = \tilde{g} - \#\tilde{H}_p$. Uma vez que existem exatamente g não-lacunas em H menores que $2g$, existem exatamente g não-lacunas pares em \tilde{H} menores que $4g$. São dois os casos que

devem ser considerados. 1^o) Suponha que $2g < \tilde{g}$. Neste caso $4g \leq 2\tilde{g} - 2$ e entre $4g$ e $2\tilde{g} - 2$, contando ambos, existem $\tilde{g} - 2g$ não-lacunas pares. Daí que $\#\tilde{H}_p = g + (\tilde{g} - 2g)$, portanto $\#\tilde{H}_i = g$. 2^o) Suponha que $\tilde{g} \leq 2g$. Neste caso $2\tilde{g} - 1 < 4g$ e entre $2\tilde{g}$ e $4g - 2$, contando ambos, existem exatamente $2g - \tilde{g}$ não-lacunas pares. Daí que $\#\tilde{H}_p = g - (2g - \tilde{g})$, portanto $\#\tilde{H}_i = g$.

□

Pelo Lema 5.1,

$$\tilde{H} = 2H \cup \{\gamma_1, \dots, \gamma_g\} \cup \{2\tilde{g}, \rightarrow\},$$

onde $\gamma_1 < \dots < \gamma_g$ são todas as não-lacunas ímpares de \tilde{H} menores que $2\tilde{g}$. Esta descrição garante que para obter o semigrupo \tilde{H} a partir do semigrupo H , basta conhecer as não-lacunas ímpares γ_i 's. Em vista do Lema seguinte, a primeira não-lacuna ímpar de \tilde{H} ,

$$\gamma := \gamma_1,$$

pode ser destacada.

Lema 5.2. *Seja γ a primeira não-lacuna ímpar de \tilde{H} . Existe um único subconjunto de lacunas $N \subseteq \{m - \gamma \in G ; m \in H\}$ tal que*

$$\tilde{H} = \{2H + \gamma\mathbb{N}\} \cup \{2N + \{\gamma\}\}.$$

Mais ainda, os gêneros \tilde{g} de \tilde{H} e g de H comparam-se com a cardinalidade de N pela igualdade

$$\tilde{g} = 2g - 1 + \frac{\gamma + 1}{2} - \#N.$$

Demonstração: (cf. [64]) Uma vez que toda não-lacuna par de \tilde{H} é um elemento do conjunto $2H$, basta definir N em termos das não-lacunas ímpares. De fato, cada diferença $\gamma' - \gamma$, onde γ' é uma não-lacuna ímpar de \tilde{H} maior que γ , é um par positivo $2a$, onde ou $a \in H$ ou $a \in G$, pois o conjunto dos números naturais é precisamente a união disjunta desses dois conjuntos. Se $a \in H$ então $\gamma' \in 2H + \gamma\mathbb{N}$. Defina N como sendo o subconjunto dos elementos $a \in G$ obtidos pela condição $\gamma' - \gamma = 2a$. Cada $a \in N$ é tal que $a + \gamma \notin G$, pois se $a + \gamma \in G$, uma vez que $\gamma' + \gamma = 2(a + \gamma)$, deve-se ter $\gamma' + \gamma \in \tilde{G}$, o que é absurdo. Portanto N é um subconjunto do conjunto $\{m - \gamma \in G ; m \in H\}$. Para provar a igualdade que descreve o gênero \tilde{g} basta observar que o conjunto das lacunas \tilde{G} é a união disjunta

dos conjuntos $2G$, $\{1, 3, \dots, \gamma - 2\}$ e $2(G \setminus N) + \{\gamma\}$, cada qual com respectivamente g , $\frac{\gamma-1}{2}$ e $g - \#N$ elementos.

□

A cardinalidade do conjunto $\{m \in H ; m - \gamma \notin H\}$ é precisamente γ (cf. [64]). Mais ainda, este conjunto contém a não-lacuna nula, portanto $\#N \leq \gamma - 1$.

Na teoria de recobrimentos duplos de curvas, o índice de ramificação é a diferença que relaciona os graus dos divisores canônicos das curvas dado pela fórmula de Riemann-Hurwitz. Por analogia, define-se o *índice de ramificação* de \tilde{H} sobre H como sendo o inteiro

$$\delta := 2\tilde{g} - 4g + 2.$$

A primeira não-lacuna ímpar γ de \tilde{H} e o índice de ramificação δ podem ser comparados em termos da cardinalidade do conjunto N descrito no Lema 5.2:

$$\delta = \gamma + 1 - 2(\#N).$$

O Corolário seguinte segue disto imediatamente.

Corolário 5.1. *O índice de ramificação δ e as g primeiras não-lacunas ímpares $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ de \tilde{H} são relatados pelas desigualdades*

$$\delta - 1 \leq \gamma_i - 2i + 2 \quad e \quad \gamma_i \leq 2g + \delta + 2i - 3, \quad i = 1, \dots, g.$$

Mais ainda, $\gamma = \delta - 1$ se, e somente se,

$$\tilde{H} = 2H + (\delta - 1)N.$$

Demonstração: Uma vez que $\delta = \gamma + 1 - 2(\#N)$, então $\delta - 1 \leq \gamma$. Para provar a primeira desigualdade basta observar que $\gamma_i \leq \gamma_{i+1} - 2$ e usar indução para provar que $\gamma \leq \gamma_i - 2i + 2$. Para provar a segunda desigualdade, uma vez que $\gamma_g \leq 2\tilde{g} - 1$ e $\gamma_i \leq \gamma_{i+1} - 2$, basta usar a definição e indução. Para provar a equivalência, basta notar que ambas as condições são equivalentes a condição $\#N = 0$ (cf. Lema 5.2).

□

Pelo Corolário 5.1, para que se tenha $\gamma = \delta - 1$ é necessário e suficiente que se tenha $\delta - 1 \in \tilde{H}$.

O Conjunto $\mathcal{A}(\tilde{H})$

Dado um semigrupo \tilde{H} que é um recobrimento duplo do semigrupo H , sejam γ a primeira não-lacuna ímpar de \tilde{H} e $c + 1$ a multiplicidade de H . Pelo Lema 5.1,

$$\tilde{H} = 2H \cup \{\gamma_1, \dots, \gamma_g\} \cup \{2\tilde{g}, \rightarrow\},$$

onde $\gamma = \gamma_1 < \dots < \gamma_g$ são todas as não-lacunas ímpares de \tilde{H} menores que ou iguais a $2\tilde{g} - 1$. O conteúdo desta seção trata do conjunto

$$\mathcal{A}(\tilde{H}) := \{\alpha \in \mathbb{N}; \alpha \leq \min\{\gamma - 1, 2c + 1\} \text{ e } 2\alpha + 1 \notin \tilde{H}\}.$$

As condições impostas sobre os elementos de $\mathcal{A}(\tilde{H})$ estão de acordo com o Teorema 4.2. O propósito é obter propriedades aritméticas. Por definição,

$$\mathcal{A}(\tilde{H}) \subseteq \{1, \dots, \min\{2c + 1, \gamma - 1\}\}.$$

Lema 5.3.

$$\mathcal{A}(\tilde{H}) = \{1, \dots, \min\{\gamma - 1, 2c + 1\}\} \cap \left[\frac{\{\text{ímpares de } \tilde{G}\}}{2} \right].$$

Em particular, dada uma sequência de inteiros $\beta_1 < \dots < \beta_i \leq \min\{\gamma - 1, 2c + 1\}$, então $2\beta_1 + 1 < \dots < 2\beta_i + 1$ são as i primeiras não-lacunas ímpares de \tilde{H} se, e somente se, $\beta_1 < \dots < \beta_i$ são precisamente os i primeiros elementos não pertencentes a $\mathcal{A}(\tilde{H})$.

Demonstração: Segue da definição: por uma lado $\mathcal{A}(\tilde{H}) \subseteq \{1, \dots, \min\{2c + 1, \gamma - 1\}\}$; por outro lado, todo $\alpha \in \mathcal{A}(\tilde{H})$ é tal que $2\alpha + 1 \in \tilde{G}$, logo $\alpha \in \{[\text{ímpares de } \tilde{G}]/2\}$.

□

O conteúdo do próximo Lema mostra que o conjunto $\mathcal{A}(\tilde{H})$ possui certas propriedades aritméticas herdadas dos semigrupos.

Lema 5.4. *Dados $m < \alpha_i$ tais que $\alpha_i \in \mathcal{A}(\tilde{H})$ e $m \in H$, existe $\alpha_j \in \mathcal{A}(\tilde{H})$ tal que $\alpha_i - \alpha_j = m$.*

Demonstração: Seja $\alpha \in \mathcal{A}(\tilde{H})$. Uma vez que $m < \alpha \leq \min\{\gamma - 1, 2c + 1\}$, então $0 < \alpha - m \leq \min\{\gamma - 1, 2c + 1\}$. Se $2(\alpha - m) + 1 \in \tilde{H}$, então $2\alpha + 1 = (2(\alpha - m) + 1) + (2m)$ é a soma de duas não-lacunas de \tilde{H} , daí que $2\alpha + 1 \in \tilde{H}$, o que é absurdo. Portanto $\alpha - m \in \mathcal{A}(\tilde{H})$.

□

Pelo Lema 5.3, se

$$\mathcal{I}(\tilde{H}) := \{\gamma = \gamma_1 < \dots < \gamma_i\}$$

é o conjunto das i primeiras não-lacunas ímpares de \tilde{H} tais que

$$\left[\frac{\gamma_k}{2}\right] \leq \min\{\gamma - 1, 2c + 1\},$$

então um ímpar $2\beta + 1 \in \mathcal{I}(\tilde{H})$ se, e somente se, $\beta \notin \mathcal{A}(\tilde{H})$ e $\beta \leq \min\{\gamma - 1, 2c + 1\}$. Isto mostra que, possivelmente, conhecendo a multiplicidade $c + 1$ de H , o conjunto $\mathcal{A}(\tilde{H})$ determina e é determinado pelo conjunto $\mathcal{I}(\tilde{H})$.

Uma vez que $2c + 2$ é a primeira não-lacuna par de \tilde{H} , a multiplicidade $c + 1$ de H é determinada por \tilde{H} . Além disso, deve-se ter $c \leq g$, pois caso contrário $g + 1 < c + 1$ e G teria no mínimo $g + 1$ lacunas, o que é uma contradição. Para efeitos de computação, convém ressaltar ainda algumas outras relações aritméticas entre as não-lacunas ímpares γ_i 's, o inteiro c e a primeira não-lacuna ímpar $2m + 1$ de H . Uma vez que $\tilde{H} \subseteq H$, então γ é uma não-lacuna ímpar de H , logo $c + 1 \leq 2m + 1 \leq \gamma$, daí que

$$c \leq 2m \leq \gamma_i - 2i + 1.$$

Se $\gamma_i = 2\beta_i + 1$ então

$$\left[\frac{c + 1}{2}\right] \leq m \leq \beta_i - i + 1.$$

Mais ainda, uma vez que $\gamma_i + 2(c + 1) \in \tilde{H}$ então $\gamma_{i+1} \leq \gamma_i + 2(c + 1)$. Daí que, em termos da primeira não-lacuna ímpar γ ,

$$2m + 1 \leq \gamma_i \leq \gamma + 2(i - 1)(c + 1).$$

Pelo Lema 5.3, se $\beta_i \leq \min\{\gamma - 1, 2c + 1\}$, então $\beta_1 < \dots < \beta_i$ são precisamente os i primeiros elementos não pertencentes a $\mathcal{A}(\tilde{H})$. Em particular,

$$\{1, \dots, [(c + 1)/2] - 1, \dots, m - 1\} \subseteq \mathcal{A}(\tilde{H}).$$

Isto motiva o estudo de subconjuntos $\{1, 2, \dots, \alpha\} \subseteq \mathcal{A}(\tilde{H})$, tendo em vista a descrição daqueles que $\alpha + 1 \notin \mathcal{A}(\tilde{H})$.

Lema 5.5. *O conjunto $\{1, \dots, \alpha\} \subseteq \mathcal{A}(\tilde{H})$ se, e somente se, $\alpha \leq \min\{(\gamma - 3)/2, 2c + 1\}$. Mais ainda, se $\alpha < \min\{(\gamma - 3)/2, 2c + 1\}$ então $\alpha + 1 \in \mathcal{A}(\tilde{H})$. Em particular,*

- 1) $\mathcal{A}(\tilde{H}) = \{1, \dots, 2c\}$ se, e somente se, $\gamma = 4c + 3$. Neste caso, $\mathcal{I}(\tilde{H}) = \{\gamma\}$.
- 2) $\mathcal{A}(\tilde{H}) = \{1, \dots, 2c + 1\}$ se, e somente se, $\gamma > 4c + 3$. Neste caso, $\mathcal{I}(\tilde{H}) = \emptyset$.

Demonstração: (\Rightarrow) Suponha que $\{1, \dots, \alpha\} \subseteq \mathcal{A}(\tilde{H})$, então $\alpha \leq 2c + 1$. Por outro lado, todo inteiro $a \in \{1, \dots, \alpha\}$ é tal que $2a + 1 \notin \tilde{H}$, logo $2\alpha + 3 \leq \gamma$. Portanto $\alpha \leq \min\{(\gamma - 3)/2, 2c + 1\}$. (\Leftarrow) Se $\alpha \leq \min\{(\gamma - 3)/2, 2c + 1\}$ então todo elemento $a \in \{1, \dots, \alpha\}$ é tal que $a \leq \alpha \leq \min\{(\gamma - 3)/2, 2c + 1\}$ e satisfaz $2a + 1 < 2\alpha + 3 \leq \gamma$, logo $2a + 1 \notin \tilde{H}$. Uma vez que $a \leq \min\{\gamma - 1, 2c + 1\}$, então $\{1, \dots, \alpha\} \subseteq \mathcal{A}(\tilde{H})$. A primeira equivalência enunciada no lema está demonstrada. Suponha que $\alpha < \min\{(\gamma - 3)/2, 2c + 1\}$, então $2(\alpha + 1) + 1 = 2\alpha + 3 < \gamma$, logo $2(\alpha + 1) + 1 \notin \tilde{H}$. Uma vez que $\alpha + 1 \leq \min\{\gamma - 1, 2c + 1\}$, então $\alpha + 1 \in \mathcal{A}(\tilde{H})$. Isto prova a segunda afirmação do Lema. Para provar os itens (1) e (2) basta observar que, pela primeira parte, o conjunto $\{1, \dots, 2c\} \subseteq \mathcal{A}(\tilde{H})$ se, e somente se, $4c + 3 \leq \gamma$. Pela segunda parte, se $4c + 3 < \gamma$ então $2c + 1 \in \mathcal{A}(\tilde{H})$.

□

Corolário 5.2. *Suponha que $\alpha < 2c + 1$, então $\mathcal{A}(\tilde{H}) = \{1, 2, \dots, \alpha\}$ se, e somente se, $\gamma = 2\alpha + 3$. Neste caso, mais ainda, se $\alpha < \beta \leq \min\{\gamma - 1, 2c + 1\}$ então $2\beta + 1$ é uma não-lacuna de \tilde{H} .*

Demonstração: A primeira parte segue do Lema 5.5. A segunda parte segue do Lema 5.3.

□

Convém buscar propriedades dos conjuntos $\mathcal{A}(\tilde{H})$ descritas em termos do índice de ramificação δ do semigrupo \tilde{H} em relação ao semigrupo H .

Corolário 5.3. 1) Suponha que $\delta > 4c + 4$, então $\mathcal{A}(\tilde{H}) = \{1, \dots, 2c + 1\}$. Neste caso, $\mathcal{I}(\tilde{H}) = \emptyset$.

2) Suponha que $4 \leq \delta \leq 4c + 4$, então $\mathcal{A}(\tilde{H}) \supseteq \{1, \dots, \delta/2 - 2\}$.

Demonstração: Para provar (1), se $\delta > 4c + 4$ então $4c + 3 < \delta - 1 \leq \gamma$, e o resultado segue do Lema 5.5. Para provar (2), se $4 \leq \delta \leq 4c + 4$, uma vez que $\delta - 1 \leq \gamma$, então $\delta/2 - 2 < \min\{\gamma - 1, 2c + 1\}$. Logo, todo $a \leq \delta/2 - 2$ é tal que $a \in \mathcal{A}(\tilde{H})$, pois $2a + 1 < \delta - 1 \leq \gamma$. Portanto, $\mathcal{A}(\tilde{H}) \supseteq \{1, \dots, \delta/2 - 2\}$.

□

Pelo Corolário 5.3, para todo $\delta > 4g + 4$ o conjunto $\mathcal{A}(\tilde{H})$ fica completamente determinado pela multiplicidade $c + 1$ de H . O caso $\delta \leq 4c + 4$ pode ser tratado circunstancialmente.

O Semigrupo $2H + (\delta - 1)\mathbb{N}$

Semigrupos do tipo $2H + (\delta - 1)\mathbb{N}$ são frequentemente estudados na teoria de semigrupos (cf. [43]). Por definição, trata-se de um semigrupo que é um recobrimento duplo do semigrupo H , sendo δ o índice de ramificação e $\delta - 1$ sua primeira não-lacuna ímpar (cf. Cor. 5.1). O conteúdo do próximo Corolário mostra que semigrupos do tipo $2H + (\delta - 1)\mathbb{N}$ guardam estreitas relações com o conjunto $\mathcal{A}(2H + (\delta - 1)\mathbb{N})$.

Corolário 5.4. 1) Suponha que $4 \leq \delta \leq 4c + 4$. Então $\tilde{H} = 2H + (\delta - 1)\mathbb{N}$ se, e somente se, $\delta/2 - 1 \notin \mathcal{A}(\tilde{H})$.

2) Suponha que $2c + 4 \leq \delta \leq 4c + 4$. Então $\tilde{H} = 2H + (\delta - 1)\mathbb{N}$, se, e somente se, $\mathcal{A}(\tilde{H}) = \{1, 2, \dots, 2c + 1\} \setminus \{\delta/2 - 1\}$.

Em ambos os casos, $\gamma = \delta - 1$.

Demonstração: 1) Se $\delta \leq 4c + 4$ então $\delta/2 - 1 \leq 2c + 1$. Uma vez que $\delta - 1 \leq \gamma$ então também $\delta/2 - 1 \leq \gamma - 1$. Portanto, $\delta/2 - 1 \leq \min\{\gamma - 1, 2c + 1\}$. Agora basta notar que, nessas condições, $\delta/2 - 1 \notin \mathcal{A}(\tilde{H})$ se, e somente se, $\delta - 1 \in \tilde{H}$. Pelo Corolário 5.1, o resultado segue.

2) Pelo item (1) basta supor que $\tilde{H} = 2H + (\delta - 1)\mathbb{N}$ e mostrar que $\delta/2 - 1$ é o único elemento menor que $2c + 1$ não pertencente ao conjunto $\mathcal{A}(\tilde{H})$. Pelo Lema 5.3, basta mostrar que

a não-lacuna ímpar γ_2 de \tilde{H} é tal que $[\gamma_2/2] \geq 2c + 2$, isto é, que $[\gamma_2/2]$ é maior que todo elemento de $\mathcal{A}(\tilde{H})$. De fato, a primeira não-lacuna ímpar de \tilde{H} é $\gamma = \delta - 1$ e a segunda não-lacuna ímpar escreve-se como $\gamma_2 = 2m + a(\delta - 1)$, onde m é uma não-lacuna de H e a é um ímpar positivo. Uma vez que $2(c + 1) + (\delta - 1) \in \tilde{H}$, deve-se ter $2m + a(\delta - 1) \leq 2(c + 1) + (\delta - 1)$, isto é, $2(m - (c + 1)) \leq (1 - a)(\delta - 1)$. Se $m = 0$ então $\gamma_2 = a(\delta - 1)$ onde a é um inteiro positivo ímpar maior que 1. Daí que $a(\delta - 1) \leq 2(c + 1) + (\delta - 1)$, o que implica $\delta - 1 \leq c + 1$, o que contradiz as asserções da hipótese acerca do índice ramificação. Logo $m \neq 0$. Como $c + 1$ é a multiplicidade de H então $m - (c + 1) \geq 0$. Daí que $a = 1$ e $m = c + 1$, portanto $\gamma_2 = \delta - 1 + 2(c + 1) = 2(\delta/2 + c) + 1$, isto é, $[\gamma_2/2] = \delta/2 + c$. Uma vez que $\delta \geq 2c + 4$, segue, conforme afirmado, que $[\gamma_2/2] \geq 2c + 2$.

□

Corolário 5.5. 1) *Suponha que $4 \leq \delta \leq 4c + 4$. Então*

$$\mathcal{A}(2H + (\delta - 1)\mathbb{N}) \supseteq \{1, \dots, \delta/2 - 2\}.$$

2) *Suponha que $2c + 4 \leq \delta \leq 4c + 4$. Então*

$$\mathcal{A}(2H + (\delta - 1)\mathbb{N}) = \{1, 2, \dots, 2c + 1\} \setminus \{\frac{\delta}{2} - 1\}.$$

Demonstração: O item (1) segue do Corolário 5.3. O item (2) segue do Corolário 5.4.

□

Por um lado, o Lema 5.5 mostra que em geral, a partir do conjunto $\mathcal{A}(\tilde{H})$, não é possível determinar as não-lacunas ímpares de \tilde{H} . No entanto, se α_i é o i -ésimo elemento de $\mathcal{A}(\tilde{H})$, e $\alpha_i \neq i$, então ao menos a primeira não-lacuna ímpar γ é determinável. Por outro lado, o Lema 5.5 mostra que sob certas hipóteses pode-se determinar o inteiro c . Isto sugere algumas questões: **1^o**) Quando $\mathcal{A}(\tilde{H})$ determina a multiplicidade $c + 1$ de H ? **2^o**) Quando $\mathcal{A}(\tilde{H})$ determina a primeira não-lacuna ímpar γ de \tilde{H} ? **3^o**) Quando $\mathcal{A}(\tilde{H})$ determina o semigrupo H ? **4^o**) Quando $\mathcal{A}(\tilde{H})$ determina o semigrupo \tilde{H} ? **5^o**) Dado um conjunto típico \mathcal{A} , existe \tilde{H} tal que $\mathcal{A}(\tilde{H}) = \mathcal{A}$?

Recobrimentos e Semigrupos Simétricos

Um semigrupo numérico H é *simétrico* se $\ell_g = 2g - 1$. Os semigrupos simétricos correspondem aos semigrupos de Weierstrass dos pontos subcanônicos (cf. [10]). Para que um semigrupo numérico H seja simétrico é suficiente que $2g - 1 \in G$. Em particular, são caracterizados pela condição

$$\ell \in G \Leftrightarrow (2g - 1) - \ell \in H.$$

De fato, para cada não-lacuna $m \in H$ tal que $\ell_i - m > 0$ deve-se ter $\ell_i - m \in G$, logo existem exatamente $g - 1$ lacunas menores que $2g - 1$ da forma $2g - 1 - m$, portanto todas as lacunas são deste tipo.

Dado um semigrupo \tilde{H} que é um recobrimento duplo de um semigrupo H , algumas relações de simetria também podem ser dadas. Por exemplo, $4g - 2 \notin \tilde{H}$ se, e somente se, $2g - 1 \in G$, o que ocorre se, e somente se, o semigrupo H é simétrico.

O conteúdo do que segue trata do conjunto $\mathcal{A}(\tilde{H})$ nos casos em que \tilde{H} ou H são semigrupos simétricos. Por definição, $\tilde{g} = 2g - 1 + \delta/2$, ou seja, pode-se descrever o gênero \tilde{g} em termos de g e δ . Convém que alguns enunciados sejam dados em termos desses elementos, uma vez que o ponto de vista parte da descrição dos semigrupos de recobrimentos a partir do semigrupo recoberto.

Lema 5.6. *Suponha que \tilde{H} é um semigrupo simétrico. Então, $\alpha \in \mathcal{A}(\tilde{H})$ se, e somente se, $2g - 2 + \delta/2 - \alpha \in H$ e $1 \leq \alpha \leq \min\{\gamma - 1, 2c + 1\}$. Em particular, os elementos do conjunto $\mathcal{A}(\tilde{H})$ são os inteiros positivos dados no centro das desigualdades abaixo:*

$$1 \leq 2g - 2 + \delta/2 - h \leq \min\{\gamma - 1, 2c + 1\}, \text{ onde } h \in H.$$

Demonstração: Seja α tal que $1 \leq \alpha \leq \min\{2c + 1, \gamma - 1\}$. Se \tilde{H} é um semigrupo simétrico, então $\alpha \in \mathcal{A}(\tilde{H}) \Leftrightarrow 2\alpha + 1 \in \tilde{G} \Leftrightarrow (2g - 1) - (2\alpha + 1) \in \tilde{H} \Leftrightarrow 2(\tilde{g} - \alpha - 1) \in \tilde{H} \Leftrightarrow \tilde{g} - \alpha - 1 \in H \Leftrightarrow 2g - 2 + \delta/2 - \alpha \in H$.

□

Lema 5.7. *Suponha que $\tilde{g} \leq \min\{\gamma, 2c + 2\}$. Então $\tilde{g} - 1 \in \mathcal{A}(\tilde{H})$ se, e somente se, \tilde{H} é um semigrupo simétrico. Neste caso, $\delta = 2, 4$ ou 6 .*

Demonstração: Suponha que $\tilde{g} \leq \min\{\gamma, 2c + 2\}$. Então $\tilde{g} - 1 \in \mathcal{A}(\tilde{H})$ se, e somente se, $2\tilde{g} - 1 \in \tilde{G}$. Esta condição é equivalente a condição de simetria do semigrupo \tilde{H} . Para

provar a segunda parte, note que uma vez que $c \leq g$, deve-se ter que $\tilde{g} - 1 \leq 2c + 1 \leq 2g + 1 = 2g - 2 + \delta/2 + (3 - \delta/2) = \tilde{g} - 1 + (3 - \delta/2)$, logo $\delta = 2, 4$ ou 6 .

□

Lema 5.8. *Dentre as condições a seguir, duas implicam a terceira:*

- 1) H é simétrico;
- 2) \tilde{H} é simétrico;
- 3) $\tilde{H} = 2H + (\delta - 1)\mathbb{N}$.

Demonstração: Primeiro deve-se notar que $(2\tilde{g} - 1) - 2(2g - 1) = \delta - 1$, ou equivalente, $2\tilde{g} - 1 = 2(2g - 1) + (\delta - 1)$. Suponha que \tilde{H} e H são ambos semigrupos simétricos. Uma vez que H é simétrico, então $2g - 1 \in G$, logo $2(2g - 1) \in \tilde{G}$. Uma vez que \tilde{H} também é simétrico, se tem que $\delta - 1 \in \tilde{H}$, logo $\tilde{H} = 2H + (\delta - 1)\mathbb{N}$ (cf. Cor 5.1). Isto mostra que (1) e (2) implicam (3). Agora suponha que $\tilde{H} = 2H + (\delta - 1)\mathbb{N}$. Basta provar que $2\tilde{g} - 1 \in \tilde{H}$ se, e somente se, $2g - 1 \in H$. De fato, se $2g - 1 \in H$ então $2\tilde{g} - 1 = 2(2g - 1) + (\delta - 1)$ é a soma de duas não-lacunas de \tilde{H} , portanto $2\tilde{g} - 1 \in \tilde{H}$. Reciprocamente, suponha que $2\tilde{g} - 1 \in \tilde{H}$ mas que $2g - 1 \in G$. Uma vez que $(2\tilde{g} - 1) - (\delta - 1) = 2(2g - 1)$, então $2g - 1 \in N$ (cf. demonstração do Lema 5.2). Mas $\#N = 0$. Portanto, $2g - 1 \in H$.

□

Corolário 5.6. *Suponha que $4 \leq \delta \leq 4c + 4$. Dentre as condições a seguir, duas implicam a terceira:*

- 1) H é simétrico;
- 2) \tilde{H} é simétrico;
- 3) $\delta/2 - 1 \notin \mathcal{A}(\tilde{H})$

Neste caso, $\tilde{H} = 2H + (\delta - 1)\mathbb{N}$. Se, mais ainda, $2c + 4 \leq \delta \leq 4c + 4$, então $\mathcal{A}(\tilde{H}) = \{1, 2, \dots, 2c + 1\} \setminus \{\frac{\delta}{2} - 1\}$

Demonstração: Segue do Lema 5.8 e do Corolário 5.4, uma vez que duas quaisquer condições implicam que $\tilde{H} = 2H + (\delta - 1)\mathbb{N}$.

□

O Teorema Principal e Aplicações

Neste capítulo apresenta-se reunido o discutido nos demais, e trata de algumas consequências do Teorema 4.2 e das propriedades aritméticas obtidas no capítulo precedente. Os demais Teoremas enunciados na introdução serão demonstrados, sendo alguns deles resultados consequentes da aritmética desenvolvida no Capítulo 5. Dois casos particulares serão estudados. O primeiro trata das descrições explícitas dos conjuntos $\mathcal{A}(P, \Xi)'_j$ s quando $g = 2$ e $\delta \geq 6$, que são as hipóteses minimais sobre o gênero g e o índice de ramificação δ para a aplicação do Teorema 6.1 e seus Corolários. A segunda aplicação trata de recobrimentos duplos cujas ramificações são pontos subcanônicos. A partir de curvas bielípticas é possível construir tais recobrimentos, fornecendo exemplos explícitos satisfazendo as hipóteses dos enunciados.

O Teorema Principal: consequências

Seja $\pi : \tilde{C} = (C, \mathcal{L}, B) \rightarrow C$ um recobrimento duplo ramificado tal que \tilde{C} é livre de bitangentes e a fibração semicanônica associada é globalmente gerada. Seja G_{Ξ} a aplicação de Gauss sobre o divisor Prym-Theta Ξ da variedade de Prym correspondente ao recobrimento duplo. Dado um ramo $\pi(\tilde{x}) = x$, por definição, $\mathcal{A}(\pi)_x = \{\alpha \in \mathbb{N} ; \exists \tilde{E} + \alpha \tilde{x} \in \Xi^{ns} \text{ e } \tilde{x} \notin \tilde{E}\}$. Pelo Teorema 4.2, este conjunto pode ser descrito a partir dos semigrupos de Weierstrass de \tilde{x} e x . Com as notações do capítulo precedente,

$$\mathcal{A}(\pi)_x = \mathcal{A}(H(\tilde{x})).$$

O conjunto $\mathcal{A}(\pi)_x$ possui propriedades aritméticas, as mesmas do conjunto $\mathcal{A}(H(\tilde{x}))$. Pelo Lema 5.3, se

$$\mathcal{I}(\pi)_x := \{\gamma = \gamma_1 < \dots < \gamma_i\}$$

é o conjunto das i primeiras não-lacunais ímpares de $H(\tilde{x})$ tais que

$$\left[\frac{\gamma_k}{2}\right] \leq \min\{\gamma - 1, 2c + 1\},$$

onde $c + 1$ é a multiplicidade de $H(x)$, então um ímpar $2\beta + 1 \in \mathcal{I}(\pi)_x$ se, e somente se, $\beta \notin \mathcal{A}(\pi)_x$ e $\beta \leq \min\{\gamma - 1, 2c + 1\}$. Em particular, conhecendo a multiplicidade $c + 1$ de $H(x)$, o conjunto $\mathcal{A}(\pi)_x$ determina e é determinado pelo conjunto $\mathcal{I}(\pi)_x$.

Defina

$$\mathcal{A}(\pi) := \{\mathcal{A}(\pi)_x ; x \in B\}.$$

A aplicação de Gauss G_{Ξ} coincide com a restrição ao conjunto $\widehat{\Xi}^{ns}$ da aplicação secante no espaço de seções da fibração linear semicanônica (cf. pag. 60). Dado $\tilde{E} + \alpha\tilde{x} \in \widehat{\Xi}^{ns}$ tal que $\tilde{x} \notin \tilde{E}$, se tem que

$$\#G_{\Xi}^{-1}(G_{\Xi}(\tilde{E} + \alpha\tilde{x})) = 2^{2g-2+\delta/2-\alpha}.$$

Isto permite descrever os inteiros $\alpha \in \mathcal{A}(\pi)_x$ em termos de g , δ e do lugar em $\mathfrak{R}_{G_{\Xi}}$ dado pelos divisores da forma $\tilde{E} + \alpha\tilde{x}$. De fato, este é o conteúdo do próximo resultado, que é um Corolário que sintetiza o que foi discutido.

Corolário 6.1. *Seja $\pi : \tilde{C} = (C, \mathcal{L}, B) \rightarrow C$ um recobrimento duplo de uma curva de gênero g ramificado em δ pontos. Suponha que \tilde{C} é livre de bitangentes e a fibração semicanônica $\omega_C \otimes \mathcal{L}$ é globalmente gerada. Seja G_{Ξ} a aplicação de Gauss sobre o divisor Prym-Theta Ξ da variedade de Prym correspondente ao recobrimento duplo. Para cada ramo $\pi(\tilde{x}) = x$,*

$$\mathcal{A}(\pi)_x = \{2g - 2 + \delta/2 - \log_2 \#G_{\Xi}^{-1}(G_{\Xi}(\tilde{D})) ; \tilde{x} \in \tilde{D} \text{ e } G_{\Xi}(\tilde{D}) \in \mathfrak{B}_{G_{\Xi}}\}.$$

Em particular, $\mathcal{A}(\pi)$ é determinado pelo par (P, Ξ) .

Demonstração: Por definição, $\alpha \in \mathcal{A}(\pi)_x$ se, e somente se, existe $\tilde{E} + \alpha\tilde{x} \in \widehat{\Xi}^{ns}$ tal que $\tilde{x} \notin \tilde{E}$. Uma vez que $\#G_{\Xi}^{-1}(G_{\Xi}(\tilde{E} + \alpha\tilde{x})) = 2^{2g-2+\delta/2-\alpha}$, então $\alpha = 2g - 2 + \delta/2 - \log_2 \#G_{\Xi}^{-1}(G_{\Xi}(\tilde{E} + \alpha\tilde{x}))$. O conjunto dos hiperplanos (de hiperplanos) que definem o lugar dos ramos $\mathfrak{B}_{G_{\Xi}}$ da aplicação de Gauss G_{Ξ} é dado por $\{|\omega_C \otimes \mathcal{L}(-x)| + x ; x \in B\}$ (cf. pag. 60), onde os hiperplanos de $|\omega_C \otimes \mathcal{L}(-x)| + x$ no espaço semicanônico são dados, precisamente, pelos divisores do tipo $N_{\pi}(\tilde{E} + \alpha\tilde{x})$. Para provar a última afirmação do enunciado, basta notar que as cardinalidades das fibras de G_{Ξ} sobre cada hiperplano onde se degenera, dependem apenas do par (P, Ξ) (cf. Lema 2.1).

□

Dada uma variedade de Prym polarizada (P, L_P) , não é possível distinguir canonicamente um divisor Ξ tal que $L_P \simeq \mathcal{O}_P(\Xi)$, pois $h^0(P, L_P) = 2^g$ (cf. Teo. 2.2). Entretanto, dado Ξ , é possível considerar a órbita $Orb(\Xi)$ dos divisores que são translações de Ξ (cf. pag. 27). A cardinalidade das fibras da aplicação de Gauss G_Ξ sobre \mathfrak{B}_{G_Ξ} são invariantes nesta órbita (cf. Lema 2.1). Mais ainda, no conjunto dos pares (X, Ξ) , onde X é uma variedade abeliana e Ξ é um divisor que define uma polarização, pode-se definir uma relação \sim onde $(X_1, \Xi_1) \sim (X_2, \Xi_2)$ se existe um isomorfismo $f : X_1 \rightarrow X_2$ tal que os divisores $f(\Xi_1)$ e Ξ_2 diferem por uma translação. O conjunto das classes pode ser denotado por

$$\mathbf{P}_{g-1+\frac{\delta}{2}, D} = \left\{ (X, \Xi) \ ; \ (X, \mathcal{O}_X(\Xi)) \text{ é uma variedade abeliana} \right. \\ \left. \text{com tipo } D \text{ e dimensão } g-1+\frac{\delta}{2} \right\} / \sim .$$

Isto define uma aplicação

$$\mathcal{P} : \mathcal{R}_{g, \delta} \longrightarrow \mathbf{P}_{g-1+\frac{\delta}{2}, D} \ , \ (\tilde{C} \xrightarrow{\pi} C) \longmapsto (P_\pi, i_{P_\pi}^* \tilde{\Theta}).$$

Note que não trata-se da aplicação de Prym que associa um recobrimento duplo $(\tilde{C} \xrightarrow{\pi} C)$ à variedade de Prym polarizada $(P_\pi, \mathcal{O}_P(i_{P_\pi}^* \tilde{\Theta}))$ (cf. pag. 48).

No que segue pretende-se aplicar o Teorema 4.2 nas ramificações dos recobrimentos duplos de uma fibra de \mathcal{P} . Para isto é preciso garantir que tais recobrimentos duplos sejam livres de bitangentes e que a respectiva fibração semicanônica associada seja globalmente gerada. Em outras palavras, tais propriedades devem ser invariantes quando o recobrimento duplo percorre uma fibra $\mathcal{P}^{-1}(P, \Xi)$.

Lemas de Invariância das Fibras de \mathcal{P}

Os resultados dessa seção tratam de hipóteses sobre g e δ que possam garantir que os recobrimentos duplos ramificados em δ pontos sejam livres de bitangentes e tais que a fibração semicanônica associada seja globalmente gerada.

Parte da demonstração do Lema seguinte é uma aplicação da teoria de semigrupos de Weierstrass no contexto de recobrimentos duplos.

Lema 6.1. *Seja $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ um recobrimento duplo ramificado em δ pontos. 1) Suponha que $g \geq 2$, então \tilde{C} é livre de bitangentes se, e somente se, \tilde{C} não é hiperelíptica. 2) Suponha que $\delta \geq 6$ e $g \geq 2$ então \tilde{C} não é hiperelíptica e é livre de bitangentes.*

Demonstração: 1) Uma vez que $g \geq 2$ e $\delta \geq 2$ então $\tilde{g} \geq 4$. Neste caso, o resultado segue do Lema 2.2. 2) Suponha agora que $\delta \geq 6$, então $[\tilde{g}/2] \geq g + 1$. Isto implica que toda ramificação \tilde{x} do recobrimento duplo π é um ponto de Weierstrass. De fato, caso contrário $G(\tilde{x}) = \{1, \dots, \tilde{g}\}$, daí que os $[\tilde{g}/2]$ ímpares do conjunto $\{\tilde{g} + 1, \dots, 2\tilde{g} - 1\}$ são precisamente as g primeiras não-lacunas ímpares $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ de $H(\tilde{x})$, isto é, $g = [\tilde{g}/2]$ (cf. cor. 3.4). Desta contradição segue que \tilde{x} é um ponto de Weierstrass. Segue disto que, se \tilde{C} é hiperelíptica, então $2 \in H(\tilde{x})$, logo $1 \in H(\pi(\tilde{x}))$, daí que $g = 0$. Portanto \tilde{C} não é hiperelíptica. Pela primeira parte, \tilde{C} é livre de bitangentes. □

Lema 6.2. *A fibração linear $\omega_C \otimes \mathcal{L}$ é globalmente gerada se $\delta \geq 4$ e é muito ampla se $\delta \geq 6$.*

Demonstração: Uma fibração linear sobre uma curva de gênero g é globalmente gerada sempre que seu grau for maior que ou igual a $2g$; e será muito ampla sempre que seu grau for maior que ou igual a $2g + 1$. Uma vez que $\deg(\omega_C \otimes \mathcal{L}) = 2g - 2 + \delta/2$, as condições na hipótese sobre o índice de ramificação δ implicam a conclusão do lema. □

Pelos Lemas 6.1 e 6.2, se $g \geq 2$ e $\delta \geq 6$ então não só o recobrimento duplo é livre de bitangentes como a fibração semicanônica associada $\omega_C \otimes \mathcal{L}$ é muito ampla.

O Teorema Principal e as Fibras de \mathcal{P}

Em vista dos Lemas precedentes, pode-se aplicar o Teorema 4.2 nas ramificações dos recobrimentos duplos que percorrem uma mesma fibra $\mathcal{P}^{-1}(P, \Xi)$. Isto permite enunciar o seguinte Teorema, que é o Teorema B dado no capítulo de introdução.

Teorema 6.1 (B). *Suponha que $\delta \geq 6$ e $g \geq 2$. Dado $(P, \Xi) \in \mathcal{P}(\mathcal{R}_{g,\delta})$, o conjunto $\mathcal{A}(\pi)$ é o mesmo, qualquer que seja $\pi \in \mathcal{P}^{-1}(P, \Xi)$.*

Demonstração: Pelos Lemas 6.1 e 6.2, todo $\pi \in \mathcal{P}^{-1}(P, \Xi)$ é livre de bitangentes e a respectiva fibração semicanônica é uma fibração linear muito ampla. Pelo Corolário 6.1, para cada tal π , o conjunto $\mathcal{A}(\pi)$ pode ser obtido do par (P, Ξ) .

□

Acerca do conjunto $\mathcal{A}(\pi)$, quando π percorre a fibra de $(P, \mathcal{O}_P(\Xi))$ pela aplicação de Prym, nada pode-se afirmar.

Em vista do Teorema 6.1 e do Corolário 6.1, se $\delta \geq 6$ e $g \geq 2$, dado $(P, \Xi) \in \mathcal{P}(\mathcal{R}_{g,\delta})$, pode-se considerar o conjunto

$$\mathcal{A}(P, \Xi) := \mathcal{A}(\pi),$$

onde π é qualquer recobrimento duplo na fibra $\mathcal{P}^{-1}(P, \Xi)$. Dados dois recobrimentos $\pi, \pi' \in \mathcal{P}^{-1}(P, \Xi)$, por uma troca de índices, pode-se sempre supor que $\mathcal{A}(\pi)_{x_i} = \mathcal{A}(\pi')_{x'_i}$. Em particular, pode-se escrever

$$\mathcal{A}(P, \Xi) = \{\mathcal{A}(P, \Xi)_j ; j = 1, \dots, \delta\},$$

onde dado um recobrimento duplo $\pi \in \mathcal{P}^{-1}(P, \Xi)$, existe um ramo $\pi(\tilde{x}_j) = x_j$ tal que

$$\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \mathcal{A}(\pi)_{x_j}.$$

As ramificações de outro recobrimento duplo escolhido na fibra $\mathcal{P}^{-1}(P, \Xi)$ determinam, por uma troca de índices, os mesmos conjuntos $\mathcal{A}(P, \Xi)_j$'s.

Corolário 6.2. *Suponha que $\delta \geq 6$ e $g \geq 2$. Dados $(P, \Xi) \in \mathcal{P}(\mathcal{R}_{g,\delta})$ e um isomorfismo $f : P' \rightarrow P$ então $\mathcal{A}(P', f^*\Xi) = \mathcal{A}(P, t_x^*\Xi)$, para todo $x \in P$. Em particular, $\mathcal{A}(P, \Xi) = \mathcal{A}(P, t_x^*\Xi)$ para todo $x \in P$.*

Demonstração: Segue do Teorema 6.1, uma vez que $(P, t_x^*\Xi) \sim (P', f^*\Xi)$.

□

O Corolário 6.2 mostra que, fixado um divisor Prym-Theta Ξ , os conjuntos $\mathcal{A}(P, \Xi')$ são invariantes quando Ξ' percorre a órbita $Orb(\Xi)$.

Semigrupos Prescritos

Dado um elemento $\alpha \in \mathcal{A}(P, \Xi)_j$, ainda que se possa afirmar a desigualdade $\alpha \leq 2c_j + 1$, não é possível afirmar que o conjunto $\mathcal{A}(P, \Xi)_j$ determina a não-lacuna $c_j + 1$. Naturalmente, a partir de casos circunstanciais que restringem as possibilidades, pode-se esperar que algumas caracterizações possam ser dadas. Pode-se, por exemplo, considerar um conjunto \mathcal{C} de atribuições e curvas pontuadas em pontos admitindo os atributos de \mathcal{C} . Em particular, interessa considerar recobrimentos duplos tais que esses pontos são precisamente os pontos que definem o divisor dos ramos do recobrimento.

Seja $\mathcal{C} = \{H_1, \dots, H_\delta\}$ um conjunto de δ semigrupos numéricos prescritos e considere o conjunto das curvas C admitindo divisores efetivos e reduzidos B tais que $\mathcal{C}(B) = \mathcal{C}$, isto é, tais que os semigrupos de Weierstrass de cada ponto do divisor B é um dos H_i 's. Seja $c_j + 1$ a multiplicidade de H_j . Fixado um conjunto típico \mathcal{C} , a partir do conjunto

$$\mathcal{R}_{g,\delta}(\mathcal{C}) = \{(C, \mathcal{L}, B) \in \mathcal{R}_{g,\delta} \ ; \ \mathcal{C}(B) = \mathcal{C}\},$$

é possível definir a seguinte restrição de \mathcal{P} ,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{C}} : \mathcal{R}_{g,\delta}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{P}_{g-1+\frac{\delta}{2}, D} \ , \ (\tilde{C} \xrightarrow{\pi} C) \longmapsto (P_\pi, i_{P_\pi}^* \tilde{\Theta}).$$

O Teorema seguinte, que é o Teorema C dado no capítulo de introdução, é uma consequência do Teorema 6.1 e dos comentários subsequentes. Nesta versão, a ênfase é sobre a descrição das não-lacunas ímpares das ramificações dos recobrimentos em termos das primeiras não-lacunas prescritas dos ramos e do par (P, Ξ) .

Teorema 6.2 (C). *Suponha que $\delta \geq 6$ e $g \geq 2$. Dado $(P, \Xi) \in \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(\mathcal{R}_{g,\delta}(\mathcal{C}))$, existem δ conjuntos de inteiros ímpares*

$$\mathcal{I}_1 = \{\gamma_{11} < \dots < \gamma_{1i_1}\}, \dots, \mathcal{I}_\delta = \{\gamma_{\delta 1} < \dots < \gamma_{\delta i_\delta}\},$$

dependentes do par (P, Ξ) , onde os γ'_{jk} s são tais que

$$\left[\frac{\gamma_{jk}}{2}\right] \leq \min\{\gamma_{j1} - 1, 2c_j + 1\} \quad e \quad \left[\frac{\gamma_{jk}}{2}\right] \notin \mathcal{A}(P, \Xi)_j,$$

com \mathcal{I}_j vazio se, e somente se, $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \{1, \dots, 2c_j + 1\}$, e tais que, para cada ramo $\pi(\tilde{x}_j) = x_j$ de um recobrimento duplo $\pi \in \mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{-1}(P, \Xi)$, por uma troca de índices, se tem que $\mathcal{I}(\pi)_{x_j} = \mathcal{I}_j$, ou seja, os ímpares de \mathcal{I}_j correspondem precisamente as i_j primeiras

não-lacunadas ímpares da ramificação \tilde{x}_j de π .

Demonstração: Pelo Teorema 6.1, $\mathcal{A}(\pi)$ é o mesmo para todo recobrimento duplo $\pi \in \mathcal{P}_c^{-1}(P, \Xi)$. Dados $\pi \in \mathcal{P}_c^{-1}(P, \Xi)$ e um ramo $\pi(\tilde{x}) = x$, sejam $c + 1$ a multiplicidade de $H(x)$ e $\mathcal{I} = \{\gamma_1 < \dots < \gamma_i\}$ o conjunto das primeiras não-lacunadas ímpares de $H(\tilde{x})$ tais que $[\gamma_i/2] \leq \min\{\gamma - 1, 2c + 1\}$. Uma vez dado \mathcal{C} , o conjunto \mathcal{I} é completamente determinado pelo conjunto $\mathcal{A}(H(\tilde{x}))$. Pelo Corolário 5.3, o conjunto \mathcal{I} é vazio se, e somente se, $\mathcal{A}(H(\tilde{x})) = \{1, \dots, 2c_j + 1\}$. Uma vez que $\mathcal{A}(\pi)$ é o conjunto de todos os $\mathcal{A}(H(\tilde{x}))$ tomados nas ramificações de π , considerando as δ ramificações, existem δ conjuntos $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_\delta$ do tipo descrito, cada qual correspondendo uma ramificação.

□

6.1 Aplicações e Estudo de Casos

Nesta seção serão considerados alguns casos particulares sobre os quais serão aplicados alguns resultados obtidos. São dois os casos de interesse. No primeiro serão dadas as descrições explícitas dos conjuntos $\mathcal{A}(P, \Xi)'_j$ s quando $g = 2$ e $\delta \geq 6$. O segundo trata de recobrimentos duplos cujas ramificações são pontos subcanônicos. A partir de curvas bielípticas é possível construir tais recobrimentos, fornecendo exemplos explícitos satisfazendo as hipóteses dos enunciados.

$$\delta \geq 6 \text{ e } g = 2$$

Nesta primeira aplicação serão dadas as descrições dos conjuntos $\mathcal{A}(P, \Xi)'_j$ s quando $g = 2$ e $\delta \geq 6$. Os casos se dividem em vista das possibilidades do índice de ramificação δ . O Corolário 5.6 será utilizado para demonstrar que as condições de simetria dos semigrupos de Weierstrass das ramificações do recobrimento podem ser estabelecidas a partir dos conjuntos $\mathcal{A}(P, \Xi)'_j$ s.

Caso 1: $\delta \geq 6$ e $g = 2$

Suponha que $\delta \geq 6$ e $g = 2$ e seja $(P, \Xi) \in \mathcal{P}(\mathcal{R}_{2,\delta})$. Pela fórmula de Riemann-Hurwitz, o gênero de cada recobrimento duplo $\pi : \tilde{C} \rightarrow C \in \mathcal{P}^{-1}(P, \Xi)$ é tal que $\tilde{g} = \delta/2 + 3$. Seja

$\pi(\tilde{x}_j) = x_j$ um ramo. Por uma troca de índices pode-se supor

$$\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \mathcal{A}(H(\tilde{x}_j)).$$

Sendo $g = 2$, a curva C é hiperelíptica. Para o semigrupo de Weierstrass do ramo x_j existem duas possibilidades: 1^o) $H(x_j) = \{0, 3, \rightarrow\}$; caso este tal que x_j não é um ponto de Weierstrass de C , daí que $c_j = 2$. 2^o) $H(x_j) = \{0, 2, 4, \rightarrow\}$; caso este tal que x_j é um ponto de Weierstrass de C , daí que $c_j = 1$.

Sejam γ_1 e γ_2 as duas primeiras não-lacunas ímpares de $H(\tilde{x}_j)$, então

$$H(\tilde{x}_j) = 2H(x_j) \cup \{\gamma_1, \gamma_2\}$$

e

$$\{\gamma_1, \gamma_2\} \subseteq \{\delta - 1, \delta + 1, \delta + 3, \delta + 5\}.$$

Alguns resultados podem ser obtidos consequentes da aritmética do capítulo precedente. De fato, uma vez que $\gamma_1 + 2(c + 1) \in H(\tilde{x}_j)$ então $\gamma_2 \leq \gamma_1 + 2(c + 1)$. A partir dessas propriedades aritméticas dos semigrupos é possível montar uma tabela.

Possibilidades de $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ Caso $\delta \geq 6$ e $g = 2$	
$c = 1$	$c = 2$
$\{\delta - 1, \delta + 3\}$	$\{\delta - 1, \delta + 5\}$
$\{\delta + 1, \delta + 5\}$	$\{\delta + 1, \delta + 3\}$
$\{\delta + 3, \delta + 5\}$	$\{\delta + 1, \delta + 5\}$
	$\{\delta + 3, \delta + 5\}$

Tabela 6.1: Possibilidades de $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ para o caso $\delta \geq 6$ e $g = 2$.

Corolário 6.3. *O semigrupo de Weierstrass $H(\tilde{x}_j)$ é simétrico se, e somente se, $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ é um dos conjuntos a seguir*

1) $\{\delta - 1, \delta + 3\}$; caso este tal que x_j é um ponto de Weierstrass.

2) $\{\delta + 1, \delta + 3\}$; caso este tal que x_j não é um ponto de Weierstrass.

Em particular, $H(x_j)$ e $H(\tilde{x}_j)$ são ambos simétricos se, e somente se, $\{\gamma_1, \gamma_2\} = \{\delta - 1, \delta + 3\}$.

Demonstração: De fato, uma vez que $2\tilde{g} - 1 = \delta + 5$, então $H(\tilde{x}_j)$ é simétrico se, e somente se, $\delta + 5$ é uma lacuna de \tilde{x}_j . A equivalência segue ao se eliminar as possibilidades

na Tabela 6.1. Para provar a segunda parte, basta notar que se $H(\tilde{x}_j)$ é simétrico, segue do Lema 5.8 que $H(x_j)$ é simétrico se, e somente se, $\delta - 1 \in H(\tilde{x}_j)$.

□

O conteúdo do que segue trata das possibilidades de $\mathcal{A}(P, \Xi)_j$ em termos das possibilidades de γ_1 e γ_2 . O seguinte Lema restringe os caso que devem ser analisados.

Lema 6.3. *Se x_j não é um ponto de Weierstrass, então $\delta > 12$ se, e somente se, $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Se x_j é um ponto de Weierstrass, então $\delta > 8$ se, e somente se, $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \{1, 2, 3\}$.*

Demonstração: Basta ver que c_j é 1 ou 2 conforme o ponto x_j é ou não é um ponto de Weierstrass, daí aplicar o Corolário 5.3.

□

Para o caso tal que $H(\tilde{x}_j) = 2H(x_j) + (\delta - 1)\mathbb{N}$, a tabela seguinte, que segue dos Corolários 5.3 e 5.4, descreve as possibilidades de $\mathcal{A}(P, \Xi)_j$ em termos do índice ramificação δ .

Caso $g = 2$ e $\delta \geq 6$ $H(\tilde{x}_j) = 2H(x_j) + (\delta - 1)\mathbb{N}$		
	$\mathcal{A}(P, \Xi)_j$	
δ	$c = 1$	$c = 2$
> 12	$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$
12	$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$
10	$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3, 5\}$
8	$\{1, 2\}$	$\{1, 2, 4, 5\}$
6	$\{1, 3\}$	$\{1, 3, 4\}$

Tabela 6.2: Possibilidades de $\mathcal{A}(P, \Xi)_j$ em termos de δ .

Pelo Lema 6.3, os casos a serem analisados são

- 2) $\delta = 6$, $g = 2$ e $c = 1$ ou 2
- 3) $\delta = 8$, $g = 2$ e $c = 1$ ou 2
- 4) $\delta = 10$, $g = 2$ e $c = 2$
- 5) $\delta = 12$, $g = 2$ e $c = 2$

Os casos serão tratados separadamente. As possibilidades de $\mathcal{A}(P, \Xi)_j$ em termos das possibilidades de γ_1 e γ_2 serão descritas em tabelas. Subsequente a cada tabela, um

Corolário será enunciado descrevendo as possibilidades de simetria dos semigrupos de Weierstrass de x_j e \tilde{x}_j . O que se tem em vista com estes resultados é a possibilidade de resgatar, a partir do conjunto $\mathcal{A}(P, \Xi)_j$, informações sobre os semigrupos de Weierstrass.

Caso 2: $\delta = 6$, $g = 2$ e $c = 1$ ou 2

Neste caso $\{\gamma_1, \gamma_2\} \subseteq \{5, 7, 9, 11\}$ e $2\tilde{g} - 1 = 11$. Pela Tabela 6.3, o par $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ é determinado por $\mathcal{A}(P, \Xi)_j$.

Caso $g = 2$ e $\delta = 6$			
$c = 1$		$c = 2$	
$\{\gamma_1, \gamma_2\}$	$\mathcal{A}(P, \Xi)_j$	$\{\gamma_1, \gamma_2\}$	$\mathcal{A}(P, \Xi)_j$
$\{5, 9\}$	$\{1, 3\}$	$\{5, 11\}$	$\{1, 3, 4\}$
$\{7, 11\}$	$\{1, 2\}$	$\{7, 9\}$	$\{1, 2, 5\}$
$\{9, 11\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{7, 11\}$	$\{1, 2, 4\}$
		$\{9, 11\}$	$\{1, 2, 3\}$

Tabela 6.3: Possibilidades de $\mathcal{A}(P, \Xi)_j$ para o caso $g = 2$ e $\delta = 6$.

Corolário 6.4. *O semigrupo $H(\tilde{x}_j)$ é simétrico se, e somente se, das duas uma*

1) $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \{1, 2, 5\}$; caso este tal que x_j não é um ponto de Weierstrass de C .

2) $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \{1, 3\}$; caso este tal que x_j é um ponto de Weierstrass de C .

Em particular, $H(x_j)$ e $H(\tilde{x}_j)$ são ambos simétricos se, e somente se, $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \{1, 3\}$.

Demonstração: Pelo Corolário 6.3, o semigrupo $H(\tilde{x}_j)$ é simétrico se, e somente se, o conjunto $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ ou é $\{5, 9\}$ ou é $\{7, 9\}$, respectivamente se x_j é ou não é um ponto de Weierstrass. A equivalência segue ao se eliminar as possibilidades na Tabela 6.3. Para provar a segunda parte, basta notar que se o semigrupo $H(x_j)$ é simétrico então o ponto x_j é um ponto de Weierstrass.

□

Caso 3: $\delta = 8$, $g = 2$ e $c = 1$ ou 2

Neste caso $\{\gamma_1, \gamma_2\} \subseteq \{7, 9, 11, 13\}$ e $2\tilde{g} - 1 = 13$.

Caso $g = 2$ e $\delta = 8$			
$c = 1$		$c = 2$	
$\{\gamma_1, \gamma_2\}$	$\mathcal{A}(P, \Xi)_j$	$\{\gamma_1, \gamma_2\}$	$\mathcal{A}(P, \Xi)_j$
$\{7, 11\}$	$\{1, 2\}$	$\{7, 13\}$	$\{1, 2, 4, 5\}$
$\{9, 13\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{9, 11\}$	$\{1, 2, 3\}$
$\{11, 13\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{9, 13\}$	$\{1, 2, 3, 5\}$
		$\{11, 13\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$

Tabela 6.4: Possibilidades de $\mathcal{A}(P, \Xi)_j$ para o caso $g = 2$ e $\delta = 8$.

Pela Tabela 6.4, se x_j não é um ponto de Weierstrass, então o par $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ é determinado por $\mathcal{A}(P, \Xi)_j$. Se x_j é um ponto de Weierstrass, então o caso $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \{1, 2, 3\}$ não determina o par $\{\gamma_1, \gamma_2\}$, sendo duas as possibilidades, a saber, $\{9, 13\}$ ou $\{11, 13\}$.

Corolário 6.5. *O semigrupo $H(\tilde{x}_j)$ é simétrico se, e somente se, das duas uma*

1) $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \{1, 2, 3\}$ e x_j não é um ponto de Weierstrass de C .

2) $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \{1, 2\}$; caso este tal que x_j é um ponto de Weierstrass de C .

Em particular, $H(x_j)$ e $H(\tilde{x}_j)$ são ambos simétricos se, e somente se, $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \{1, 2\}$.

Demonstração: Pelo Corolário 6.3, o semigrupo $H(\tilde{x}_j)$ é simétrico se, e somente se, o conjunto $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ ou é $\{7, 11\}$ ou é $\{9, 11\}$, respectivamente se x_j é ou não é um ponto de Weierstrass. A equivalência segue ao se eliminar as possibilidades na Tabela 6.4. Para provar a segunda parte, basta notar que se o semigrupo $H(x_j)$ é simétrico então o ponto x_j é um ponto de Weierstrass.

□

Note que em contraste com o Corolário 6.4, no item (1), é preciso impor que x_j não é um ponto de Weierstrass.

Caso $g = 2$ e $\delta = 10$			
$c = 1$		$c = 2$	
$\{\gamma_1, \gamma_2\}$	$\mathcal{A}(P, \Xi)_j$	$\{\gamma_1, \gamma_2\}$	$\mathcal{A}(P, \Xi)_j$
$\{9, 13\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{9, 15\}$	$\{1, 2, 3, 5\}$
$\{11, 15\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{11, 13\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$
$\{13, 15\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{11, 15\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$
		$\{13, 15\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$

Tabela 6.5: Possibilidades de $\mathcal{A}(P, \Xi)_j$ para o caso $g = 2$ e $\delta = 10$.

Caso 4: $\delta = 10$, $g = 2$ e $c = 1$ ou 2

Neste caso $\{\gamma_1, \gamma_2\} \subseteq \{9, 11, 13, 15\}$ e $2\tilde{g} - 1 = 15$.

Pela Tabela 6.5, se x_j não é um ponto de Weierstrass então o caso $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \{1, 2, 3, 4\}$ não determina o par $\{\gamma_1, \gamma_2\}$, sendo duas as possibilidades, a saber, $\{11, 13\}$ ou $\{11, 15\}$. Se x_j é um ponto de Weierstrass, então nada pode-se afirmar.

Corolário 6.6. *Se o semigrupo $H(\tilde{x}_j)$ é simétrico então das duas uma*

1) $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \{1, 2, 3, 4\}$; caso este tal que o ponto x_j não é um ponto de Weierstrass de C .

2) $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \{1, 2, 3\}$; caso este tal que o ponto x_j é um ponto de Weierstrass de C .

Em particular, se $H(x_j)$ e $H(\tilde{x}_j)$ são ambos simétricos, então $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \{1, 2, 3\}$.

Demonstração: Pelo Corolário 6.3, o semigrupo $H(\tilde{x}_j)$ é simétrico se, e somente se, o conjunto $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ ou é $\{9, 13\}$ ou é $\{11, 13\}$, respectivamente se x_j é ou não é um ponto de Weierstrass. O resultado segue ao se eliminar as possibilidades na Tabela 6.5. Para provar a segunda parte, basta notar que se o semigrupo $H(x_j)$ é simétrico então o ponto x_j é um ponto de Weierstrass.

□

Em contraste com os casos anteriores, não é possível recuperar a informação acerca das simetrias dos semigrupos a partir do conjunto $\mathcal{A}(P, \Xi)_j$. O mesmo ocorre com o caso seguinte.

Caso $g = 2$ e $\delta = 12$			
$c = 1$		$c = 2$	
$\{\gamma_1, \gamma_2\}$	$\mathcal{A}(P, \Xi)_j$	$\{\gamma_1, \gamma_2\}$	$\mathcal{A}(P, \Xi)_j$
$\{11, 15\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{11, 17\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$
$\{13, 17\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{13, 15\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$
$\{15, 17\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{13, 17\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$
		$\{15, 17\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$

Tabela 6.6: Possibilidades de $\mathcal{A}(P, \Xi)_j$ para o caso $g = 2$ e $\delta = 12$.

Caso 6: $\delta = 12$, $g = 2$ e $c = 1$ ou 2

Neste caso $\{\gamma_1, \gamma_2\} \subseteq \{11, 13, 15, 17\}$ e $2\tilde{g} - 1 = 17$.

Pela Tabela 6.6, se x_j não é um ponto de Weierstrass então o caso $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ não determina o par $\{\gamma_1, \gamma_2\}$, sendo três as possibilidades, a saber, $\{13, 15\}$, $\{13, 17\}$ ou $\{15, 17\}$. Se x_j é um ponto de Weierstrass, então nada pode-se afirmar.

Corolário 6.7. *Se o semigrupo $H(\tilde{x}_j)$ é simétrico então das duas uma*

1) $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; caso este tal que o ponto x_j não é um ponto de Weierstrass de C .

2) $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \{1, 2, 3\}$; caso este tal que o ponto x_j é um ponto de Weierstrass de C .

Em particular, se $H(x_j)$ e $H(\tilde{x}_j)$ são ambos simétricos, então $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \{1, 2, 3\}$.

Demonstração: Pelo Corolário 6.3, o semigrupo $H(\tilde{x}_j)$ é simétrico se, e somente se, o conjunto $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ ou é $\{11, 15\}$ ou é $\{13, 15\}$, respectivamente se x_j é ou não é um ponto de Weierstrass. O resultado segue ao se eliminar as possibilidades na Tabela 6.6. Para provar a segunda parte, basta notar que se o semigrupo $H(x_j)$ é simétrico então o ponto x_j é um ponto de Weierstrass.

□

Curvas Bielípticas e Pontos Subcanônicos

Um ponto x sobre uma curva C é *subcanônico* se $\omega_C \simeq \mathcal{O}_C((2g - 2)x)$ (cf. [10]).

Lema 6.4. *Um ponto x é um ponto subcanônico de C se, e somente se, o semigrupo de Weierstrass $H(x)$ é um semigrupo simétrico.*

Demonstração: (\Rightarrow) Se x é um ponto subcanônico de C então $h^0(C, \mathcal{O}_C((2g-2)x)) = g$. Por outro lado, pelo Teorema de Riemann-Roch, $h^0(C, \mathcal{O}_C((2g-1)x)) = (2g-1) - g + 1 = g$. Logo $\ell_g = 2g - 1$. Portanto $H(x)$ é um semigrupo simétrico. (\Leftarrow) A g -ésima não-lacuna $2g \in H(x)$ é tal que $h^0(C, \mathcal{O}_C(2gx)) = g + 1$. Se $H(x)$ é simétrico então $\ell_g = 2g - 1$, logo $H^0(C, \mathcal{O}_C((2g-2)x)) = H^0(C, \mathcal{O}_C((2g-1)x)) \subsetneq H^0(C, \mathcal{O}_C(2g)) = g + 1$. Isto mostra que $h^0(C, \mathcal{O}_C((2g-2)x)) = g$. Uma vez que $(2g-2)x$ tem grau $2g-2$ então $(2g-2)x \sim K_C$. Portanto x é um ponto subcanônico de C .

□

O propósito do que segue é construir recobrimentos duplos cujos ramos e ramificações são pontos subcanônicos das curvas. As construções destes recobrimentos duplos descrevem um método para obter exemplos explícitos de semigrupos que satisfazem as hipóteses do Corolário 5.6. A motivação são os pontos de Weierstrass sobre as curvas bielípticas que aparecem no divisor de ramificação do recobrimento bielíptico. Por esta razão, a descrição dos semigrupos de Weierstrass desses pontos é o ponto de partida do conteúdo que será tratado a seguir. Algumas referências auxiliares são [4, 5, 10, 61]

Curvas Bielípticas

Uma curva C é *bielíptica* se é um recobrimento duplo de uma curva elíptica E . Quando o gênero de C é $g \geq 6$ este recobrimento é único. Curvas elípticas são caracterizadas pelo gênero igual a 1. Pela fórmula de Riemann-Hurwitz, o recobrimento bielíptico ramifica-se precisamente em $2g - 2$ pontos, onde g é o gênero de C .

Lema 6.5. *Seja $p : C \rightarrow E$ um recobrimento bielíptico de gênero $g \geq 6$ com ramo $p(x) = e$ então os semigrupos de Weierstrass possíveis do ponto x são os seguintes:*

Tipo I: $\{4, 6, \dots, 2g-4, 2g-2, 2g-1, \rightarrow\}$; caso este tal que $(2g-2)x \notin |\omega_C|$.

Tipo II: $\{4, 6, \dots, 2g-4, 2g-3, 2g-2, 2g, \rightarrow\}$; caso este tal que $(2g-2)x \in |\omega_C|$.

Demonstração: Uma vez que o gênero de uma curva elíptica é 1 então o semigrupo de Weierstrass $H(x)$ contém $\{4, 6, \dots, 2g, \rightarrow\}$ e existe exatamente uma não-lacuna ímpar $\gamma \in H(x)$ tal que $\gamma \leq 2g-1$. Uma vez que p ramifica-se sobre $2g-2$ pontos então $\gamma = 2g-3$ ou $2g-1$, logo os dois tipos de semigrupos são os únicos possíveis. Resta verificar a condição

equivalente sobre a fibração canônica. Em ambos os casos se tem $2g - 2 \in H(x)$, logo $H^0(C, \mathcal{O}_C((2g-2)x)) \supsetneq H^0(C, \mathcal{O}_C((2g-3)x)) \supseteq H^0(C, \mathcal{O}_C((2g-4)x))$. Em qualquer caso $h^0(C, \mathcal{O}_C(nx)) = [n/2]$ sempre que $2 \leq n \leq 2g-4$. Em particular, $h^0(C, \mathcal{O}_C((2g-4)x)) = g-1$. Disto segue que $\gamma = 2g-3$ se, e somente se, $h^0(C, \mathcal{O}_C((2g-2)x)) = g$. Esta última condição sobre o divisor $(2g-2)x$ o caracteriza como equivalente ao divisor canônico.

□

Entre os dois tipos, o semigrupo de tipo II é o único que é um semigrupo simétrico. Corresponde, portanto, aos semigrupos de Weierstrass dos pontos subcanônicos sobre a curva bielíptica.

A partir de curvas bielípticas é possível construir recobrimentos duplos cujos semigrupos de Weierstrass dos ramos são simétricos. O ponto de partida é o seguinte Lema.

Lema 6.6. *Seja E uma curva elíptica. Dado um inteiro positivo s , existem s^2 pontos distintos e_1, \dots, e_{s^2} sobre E tais que $se_i \sim se_j$, podendo ser ordenados de forma que*

$$ae_1 \sim e_1 + e_2 + \dots + e_a,$$

para todo $1 \leq a \leq s^2$. Em particular, se a é um múltiplo de s , então

$$ae_i \sim e_1 + e_2 + \dots + e_a,$$

para todo $1 \leq i \leq s^2$.

Demonstração: Existem s^2 pontos distintos e_1, \dots, e_{s^2} sobre E tais que $se_i \sim se_j$ (cf. [4, 61]). Prova-se as condições exigidas na hipótese por indução sobre a . Escolha $a-1$ pontos distintos e_1, \dots, e_{a-1} sobre E tais que $se_i \sim se_j$. O grau do divisor $ae_1 - \sum_{j=1}^{a-1} e_j$ é 1, logo, pelo Teorema de Riemann-Roch, existe um único e_a , dependendo de e_1 , tal que $ae_1 \sim e_1 + \dots + e_{a-1} + e_a$. Uma vez que $se_i \sim se_j$, segue que $se_a \sim s(ae_1 - (e_1 + \dots + e_{a-1})) \sim ase_1 - (se_1 + \dots + se_{a-1}) \sim ase_1 - (a-1)se_1 \sim se_1$. Isto demonstra a primeira parte. Para provar a segunda parte, basta notar que se a é um múltiplo de s então $ae_i \sim ae_j$. Pela primeira parte, e_1, \dots, e_a são tais que $ae_1 \sim e_1 + \dots + e_a$, portanto $ae_i \sim e_1 + \dots + e_a$.

□

Corolário 6.8. *Dados $g \geq 6$ e s tais que $s|g-1$ e $2g-2 \leq s^2$, existe uma curva bielíptica C de gênero g e $2g-2$ pontos x_1, \dots, x_{2g-2} cujos semigrupos de Weierstrass são do tipo II e tais que*

$$2sx_i \sim 2sx_j \quad e \quad (2g-2)x_i \sim x_1 + \dots + x_{2g-2} \sim K_C,$$

para todo $1 \leq i \leq 2g-2$.

Demonstração: Seja E uma curva elíptica. Pelo Lema 6.6, existem s^2 pontos sobre E dentre os quais pode-se escolher $2g-2$ pontos e_1, \dots, e_{2g-2} tais que $se_i \sim se_j$ e $(2g-2)e_i \sim e_1 + \dots + e_{2g-2}$. A fibração linear $\mathcal{L} = \mathcal{O}_E((g-1)e_1)$ define um recobrimento duplo $p : C = (E, \mathcal{L}, e_1 + \dots + e_{2g-2}) \rightarrow E$ de gênero g . Seja x_i o ponto de C sobre e_i por este recobrimento duplo. O divisor canônico sobre uma curva elíptica é trivial, logo $\omega_E \otimes \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_E((g-1)e_1)$, daí que $\omega_C \simeq \mathcal{O}_C((2g-2)x_1)$. Por outro lado, a ramificação x_1 é tal que $\mathcal{O}_C(x_1 + \dots + x_{2g-2}) \simeq p^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_C((2g-2)x_1)$, logo $x_1 + \dots + x_{2g-2} \sim (2g-2)x_1$. Como $s|g-1$, então $(g-1)e_1 \sim (g-1)e_i$, daí que $(2g-2)x_1 \sim (2g-2)x_i$.

□

Os pontos sobre a curva bielíptica obtidos no Corolário 6.8 são todos eles pontos subcanônicos. Isto mostra que existem curvas bielípticas de gênero g com um mínimo de $2g-2$ pontos subcanônicos para cada $g \geq 6$.

Pontos Subcanônicos e Recobrimentos Duplos

O conteúdo do que segue trata de recobrimentos duplos contendo ramificações que são pontos subcanônicos (cf. [10]). O propósito é obter consequências do Teorema principal em termos das propriedades aritméticas discutidas no capítulo precedente.

Corolário 6.9. *Dados $g \geq 6$ e um par $\delta \leq 2g-2$, existe um recobrimento duplo de uma curva bielíptica de gênero g ramificado em δ pontos subcanônicos.*

Demonstração: Pelo Corolário 6.8, existe uma curva bielíptica C de gênero g com $2g-2$ pontos subcanônicos x_1, \dots, x_{2g-2} . Seja $B = x_1 + \dots + x_\delta$ e escolha uma fibração linear \mathcal{L} tal que $B \in |\mathcal{L}^2|$. A terna (C, \mathcal{L}, B) define um recobrimento duplo ramificado em δ pontos subcanônicos

□

Lema 6.7. *Seja $\pi : \tilde{C} = (C, \mathcal{L}, B) \rightarrow C$ um recobrimento duplo com ramo $\pi(\tilde{x}) = x$, então \tilde{x} é um ponto subcanônico de \tilde{C} se, e somente se, $\omega_C \otimes \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_C((\tilde{g} - 1)x)$.*

Demonstração: Uma vez que o recobrimento duplo π é ramificado, o pullback π^* é uma aplicação injetora. Segue que $\omega_{\tilde{C}} \simeq \mathcal{O}_{\tilde{C}}((2\tilde{g} - 2)\tilde{x})$ se, e somente se, $\pi^*(\omega_C \otimes \mathcal{L}) \simeq \pi^*\mathcal{O}_C((\tilde{g} - 1)x)$, o que ocorre se, e somente se, $\omega_C \otimes \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_C((\tilde{g} - 1)x)$.

□

Corolário 6.10. *Seja $\pi : \tilde{C} = (C, \mathcal{L}, B) \rightarrow C$ um recobrimento duplo com ramo $\pi(\tilde{x}) = x$ e suponha que \tilde{x} é um ponto subcanônico de \tilde{C} . Sejam ℓ_1, \dots, ℓ_g as lacunas de $H(x)$ e $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ as não-lacunas ímpares de $H(\tilde{x})$, então $\gamma_i = 2(\tilde{g} - \ell_{g-i+1}) - 1$.*

Demonstração: Pelo Lema 6.7, o ponto \tilde{x} é um ponto subcanônico de \tilde{C} se, e somente se, $\omega_C \otimes \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_C((\tilde{g} - 1)x)$. Agora basta notar que $\gamma_i = 2a_i + 1 \in H(\tilde{x}) \Leftrightarrow h^0(C, \omega \otimes \mathcal{L}(-a_i x)) = h^0(C, \omega \otimes \mathcal{L}(-(a_i + 1)x) \Leftrightarrow h^0(C, \mathcal{O}_C((\tilde{g} - 1 - a_i)x)) = h^0(C, \mathcal{O}_C((\tilde{g} - 1 - a_i - 1)x)) \Leftrightarrow \tilde{g} - 1 - a_i \in G(x)$. Uma vez que existem precisamente g não-lacunas ímpares γ_i s, basta notar que as g lacunas de $G(x)$ são todas desta forma.

□

Pelo Lema 6.4, os semigrupos de Weierstrass simétricos correspondem aos pontos subcanônicos das curvas. O Teorema seguinte, que é o Teorema D dado no capítulo de introdução, uma aplicação das propriedades aritméticas do capítulo 5 e do conteúdo acima.

Teorema 6.3 (D). *Seja $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ um recobrimento duplo ramificado tal que \tilde{C} é livre de bitangentes e a fibração linear semicanônica associada é globalmente gerada. Seja Ξ o divisor Prym-Theta da variedade de Prym P correspondente ao recobrimento. Seja $\pi(\tilde{x}_j) = x_j$ um ramo tal que a multiplicidade $c_j + 1$ satisfaz $4 \leq \delta \leq 4c_j + 4$. Dentre as condições a seguir, duas implicam a terceira:*

- 1) O ponto x_j é um ponto subcanônico.
- 2) O ponto \tilde{x}_j é um ponto subcanônico.
- 3) $\delta/2 - 1 \notin \mathcal{A}(P, \Xi)_j$.

Neste caso,

$$H(\tilde{x}_j) = 2H(x_j) + (\delta - 1)\mathbb{N}.$$

Se, mais ainda, $2c_j + 4 \leq \delta \leq 4c_j + 4$, então $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \{1, 2, \dots, 2c_j + 1\} \setminus \{\frac{\delta}{2} - 1\}$.

Demonstração: Por uma troca de índices pode-se supor $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \mathcal{A}(H(\tilde{x}_j))$. Uma vez que os semigrupos de Weierstrass simétricos correspondem aos pontos subcanônicos das curvas, basta aplicar o Corolário 5.6 e o Lema 5.8.

□

Dado um conjunto de semigrupos numéricos $\mathcal{C} = \{H_1, \dots, H_\delta\}$, seja $\mathcal{R}_{g,\delta}(\mathcal{C})$ o conjunto dos recobrimentos duplos cujos semigrupos de Weierstrass dos ramos correspondentes são os semigrupos do conjunto \mathcal{C} (cf. pag. 82). Seja $c_j + 1$ a multiplicidade de H_j . O Teorema seguinte, que é o Teorema E dado no capítulo de introdução, é uma aplicação do Teorema 6.3 nos recobrimentos duplos que percorrem uma fibra $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{-1}(P, \Xi)$.

Teorema 6.4 (E). *Seja $\mathcal{C} = \{H_1, \dots, H_\delta\}$ um conjunto de semigrupos numéricos todos eles semigrupos simétricos. Suponha que $g \geq 2$ e $\delta \geq 6$. Dado $(P, \Xi) \in \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(\mathcal{R}_{g,\delta}(\mathcal{C}))$, as seguintes asserções são equivalentes*

1) *para cada recobrimento duplo $\pi \in \mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{-1}(P, \Xi)$, existe um ramo $\pi(\tilde{x}_j) = x_j$, cuja multiplicidade $c_j + 1$ satisfaz $4 \leq \delta \leq 4c_j + 4$, tal que \tilde{x}_j é um ponto subcanônico;*

2) *existe um índice j tal que $\delta/2 - 1 \notin \mathcal{A}(P, \Xi)_j$.*

Neste caso,

$$H(\tilde{x}_j) = 2H(x_j) + (\delta - 1)\mathbb{N}.$$

Se, mais ainda, $2c_j + 4 \leq \delta \leq 4c_j + 4$, então $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \{1, 2, \dots, 2c_j + 1\} \setminus \{\frac{\delta}{2} - 1\}$.

Demonstração: Pelos Lemas 6.1 e 6.2, todo $\pi \in \mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{-1}(P, \Xi)$ é livre de bitangentes e a respectiva fibração linear semicanônica é muito ampla. Por definição de \mathcal{C} , o semigrupo de Weierstrass de cada ramo $\pi(\tilde{x}_i) = x_i$ é simétrico. Como na demonstração do Teorema 6.3, por uma troca de índices pode-se supor $\mathcal{A}(P, \Xi)_j = \mathcal{A}(\pi)_{x_j}$. Agora basta aplicar o Corolário 5.6 e o Lema 5.8.

□

Torres de Recobrimentos Duplos e Semigrupos Simétricos

Em vista dos resultados precedentes pode-se considerar recobrimentos duplos cujos ramos e ramificações sejam pontos subcanônicos. O conteúdo do segue trata de como construir tais recobrimentos em algumas situações.

Dados um par $\delta \geq 4$ e a tais que $2^a | \delta$, considere uma curva C_0 admitindo um divisor $B_0 = e_1 + \dots + e_\delta$ cujos pontos são tais que

$$\delta e_i \sim e_1 + e_2 + \dots + e_\delta \quad e \quad \frac{\delta}{2^a} e_i \sim \frac{\delta}{2^a} e_j.$$

Pelo Corolário 6.8, curvas deste tipo existem. Defina o recobrimento duplo $C_1 = (C_0, \mathcal{L}_0, B_0) \rightarrow C_0$, onde $\mathcal{L}_0 \simeq \mathcal{O}_{C_0}(\frac{\delta}{2} e_i)$. Seja x_{1i} o ponto de ramificação deste recobrimento duplo sobre o ramo e_i . O divisor $R_1 = x_{11} + \dots + x_{1\delta}$ sobre C_1 é o divisor de ramificação do recobrimento duplo C_1 , e seus pontos são tais que

$$\delta x_{1i} \sim x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1\delta} \quad e \quad \frac{\delta}{2^{a-1}} x_{1i} \sim \frac{\delta}{2^{a-1}} x_{1j}.$$

Uma cadeia de recobrimentos duplos

$$C_a \rightarrow \dots \rightarrow C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \rightarrow C,$$

todos eles ramificados precisamente em δ pontos, pode ser construída indutivamente pelas ternas $C_n = (C_{n-1}, \mathcal{L}_{n-1}, B_{n-1}) \rightarrow C_{n-1}$, pondo $B_{n-1} = R_{n-1}$ e $\mathcal{L}_{n-1} \simeq \mathcal{O}_{C_{n-1}}(\frac{\delta}{2} x_{(n-1)i})$, onde $x_{(n-1)i}$ é o ramo no divisor B_{n-1} cuja ramificação associada por este recobrimento duplo é x_{ni} , sendo que

$$\delta x_{ni} \sim x_{n1} + x_{n2} + \dots + x_{n\delta} \quad e \quad \frac{\delta}{2^{a-i}} x_{ni} \sim \frac{\delta}{2^{a-i}} x_{nj}.$$

A cadeia de pontos ramificados

$$x_{ai} \mapsto \dots \mapsto x_{ni} \rightarrow x_{(n-1)i} \mapsto \dots \mapsto x_{1i} \mapsto e_i,$$

induz uma cadeia de inclusões dos semigrupos de Weierstrass,

$$H(x_{ai}) \subseteq \dots \subseteq H(x_{ni}) \subseteq H(x_{(n-1)i}) \subseteq \dots \subseteq H(x_{1i}) \subseteq H(e_i),$$

onde $H(x_{ni})$ é um recobrimento duplo do semigrupo $H(x_{(n-1)i})$. Denote por $c_{ni} + 1$ a

multiplicidade de $H(x_{ni})$.

Não sendo necessário distinguir todas as ramificações de um recobrimento da cadeia, usa-se simplesmente a notação x_n para a ramificação cujo ramo associado pelo recobrimento duplo $C_n \rightarrow C_{n-1}$ é x_{n-1} . Correspondentemente denota-se $c_n = c_{ni}$. Seja g_n o gênero da curva C_n . Indutivamente mostra-se que

$$g_n = 2^n g_0 - (2^n - 1) + (2^n - 1) \frac{\delta}{2} \quad e \quad c_n = \min\{\delta - 2, 2^n c_0 + (2^n - 1)\}.$$

Lema 6.8. *Com as notações acima.*

1) $H(x_n) = 2H(x_{n-1}) + (\delta - 1)\mathbb{N}$.

2) Se algum $H(x_n)$ é simétrico, então todo $H(x_m)$ é simétrico.

Demonstração: Por definição, cada recobrimento duplo é tal que $C_n = (C_{n-1}, \mathcal{L}_{n-1}, B_{n-1})$, onde $B_{n-1} = R_{n-1}$ e $\mathcal{L}_{n-1} \simeq \mathcal{O}_{C_{n-1}}(\frac{\delta}{2}x_{n-1})$, qualquer que seja $x_{n-1} \in B_{n-1}$. Uma vez que $\deg(\mathcal{L}_{n-1}^{-1}([\delta - 1]/2x_{n-1})) < 0$ e $\mathcal{L}_{n-1}^{-1}(\delta/2x_{n-1}) \simeq \mathcal{O}_{C_{n-1}}$, então $h^0(C_n, \mathcal{O}_{C_n}((\delta - 2)x_n)) = h^0(C_{n-1}, \mathcal{O}_{C_{n-1}}((\delta/2 - 1)x_{n-1}))$ e $h^0(C_n, \mathcal{O}_{C_n}((\delta - 1)x_n)) = h^0(C_{n-1}, \mathcal{O}_{C_{n-1}}((\delta/2 - 1)x_{n-1})) + 1$, logo $\delta - 1 \in H(x_n)$. Isto mostra que $H(x_n) = 2H(x_{n-1}) + (\delta - 1)\mathbb{N}$. Para provar o item (2), basta aplicar indutivamente o Lema 5.8.

□

No que segue, supõem-se sempre que $\delta \geq 6$ e $g \geq 2$. Seja

$$\mathcal{A}_n := \mathcal{A}(H(x_n)).$$

Se for necessário distinguir a i -ésima ramificação x_{ni} de $C_n \rightarrow C_{n-1}$, então usa-se a notação correspondente \mathcal{A}_{ni} .

Os resultados seguintes visam descrever \mathcal{A}_n em termos de δ dado em relação a multiplicidade $c_0 + 1$ do ramo da curva C_0 da torre de recobrimentos.

Lema 6.9. *Com as notações acima. Seja $n \leq a$.*

1) Se $\delta > 2^{n+2}(c_0 + 1)$ então $\delta > 4c_n + 4$.

2) Se $\delta \leq 2^{n+2}(c_0 + 1)$, então $\delta \leq 4c_n + 4$.

3) Se $\delta \geq 2^{n+1}(c_0 + 1) + 2$, então $\delta \geq 2c_n + 4$.

4) Se $2^{n+1}(c_0 + 1) + 2 \leq \delta \leq 2^{n+2}(c_0 + 1)$, então $2c_n + 4 \leq \delta \leq 4c_n + 4$.

Demonstração: Uma vez que $c_n = \min\{\delta - 2, 2^n c_0 + (2^n - 1)\}$, então $4c_n + 4 = \min\{4\delta - 4, 2^{n+2}(c_0 + 1)\}$ e $2c_n + 4 = \min\{2\delta, 2^{n+1}(c_0 + 1) + 2\}$. Disto, o resultado segue por computação direta.

□

Corolário 6.11. *Suponha que $\delta > 2^{n+1}(c_0 + 1)$, então $\mathcal{A}_n = \{1, 2, \dots, 2c_n + 1\}$.*

Demonstração: Basta aplicar o Lema 6.9 e o Corolário 5.3.

□

Corolário 6.12. *Suponha que $6 \leq \delta \leq 2^{n+2}(c_0 + 1)$. Dentre as condições a seguir, duas delas implicam a terceira:*

1) $H(x_{n-1})$ é simétrico;

2) $H(x_n)$ é simétrico;

3) $\delta/2 - 1 \notin \mathcal{A}_n$

Neste caso, se, mais ainda, $2^{n+1}(c_0 + 1) + 2 \leq \delta \leq 2^{n+2}(c_0 + 1)$, então

$$\mathcal{A}_n = \{1, 2, \dots, 2c_n + 1\} \setminus \left\{ \frac{\delta}{2} - 1 \right\}.$$

Demonstração: Basta aplicar o Lema 6.9 e o Corolário 5.6.

□

Torre de Recobrimentos e Curvas Bielípticas

Pelo Corolário 6.8, dados $g \geq 6$ e a tais que $2^a | (g - 1)$, existe uma curva bielíptica $p: E_1 \rightarrow E$, de gênero g , e $2g - 2$ pontos subcanônicos x_1, \dots, x_{2g-2} tais que

$$\frac{2g-2}{2^a} x_i \sim \frac{2g-2}{2^a} x_j \quad e \quad (2g-2)x_i \sim x_1 + \dots + x_{2g-2}.$$

Por analogia com o que foi feito acima, uma cadeia de recobrimentos duplos,

$$E_a \rightarrow \dots \rightarrow E_n \rightarrow E_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow E_2 \rightarrow E_1 \rightarrow E,$$

pode ser construída a partir da curva bielíptica $p : E_1 \rightarrow E$, todos eles ramificados em $2g - 2$ pontos subcanônicos. Pelo Lema 6.8, os semigrupos de Weierstrass dos pontos que aparecem em uma ramificação $x_n \mapsto x_{n-1}$ de um recobrimento duplo $E_n \rightarrow E_{n-1}$ são relacionados por

$$H(x_n) = 2H(x_{n-1}) + (2g - 3)\mathbb{N}.$$

Mais ainda,

$$g_n = (2^n - 1)g - 2^n + 2 \quad e \quad c_n = \min\{2g - 4, 2^{n+1} - 1\}.$$

Alguns resultados acima podem ser reescritos.

Lema 6.10. *Com as notações acima. Seja $n \leq a$.*

- 1) Se $g > 2^{n+2} + 1$, então $2g - 2 > 4c_n + 4$.
- 2) Se $g \leq 2^{n+2} + 1$, então $2g - 2 \leq 4c_n + 4$.
- 3) Se $g \geq 2^{n+1} + 2$, então $2g - 2 \geq 2c_n + 4$.
- 4) Se $2^{n+1} + 2 \leq g \leq 2^{n+2} + 1$, então $2c_n + 4 \leq 2g - 2 \leq 4c_n + 4$.

Demonstração: Uma vez que $c_0 = 1$ e $\delta = 2g - 2$, basta aplicar o Lema 6.9.

□

Corolário 6.13. *Suponha que $g > 2^{n+2} + 1$, então $\mathcal{A}_n = \{1, 2, \dots, 2^{n+2} - 1\}$.*

Demonstração: Pelo Lema 6.10, se $g > 2^{n+2} + 1$ então $2g - 2 > 4c_n + 4$. Por outro lado, $2g - 4 > 2^{n+1} - 1$, logo $c_n = 2^{n+1} - 1$. Daí que $2c_n + 1 = 2^{n+2} - 1$. Basta aplicar o Corolário 5.3.

□

Corolário 6.14. *Suponha que $4 \leq g \leq 2^{n+2} + 1$. Dentre as condições a seguir, duas delas implicam a terceira:*

- 1) $H(x_{n-1})$ é simétrico;
- 2) $H(x_n)$ é simétrico;
- 3) $\delta/2 - 1 \notin \mathcal{A}_n$

Neste caso, se, mais ainda, $2^{n+1} + 2 \leq g \leq 2^{n+2} + 1$, então

$$\mathcal{A}_n = \{1, 2, \dots, 2^{n+2} - 1\} \setminus \{g - 2\}.$$

Demonstração: Se $g > 2^{n+1} + 2$ então $c_n = 2^{n+1} - 1$. Daí, $2c_n + 1 = 2^{n+2} - 1$. Por outro lado, $\delta/2 - 1 = g - 2$. Basta aplicar o Lema 6.9 e o Corolário 5.6.

□

É sempre possível escolher inteiros positivos g e a tais que $2^a | (g-1)$, satisfazendo qualquer uma das hipóteses do Lema 6.10. De fato, por exemplo, dado a , para $b = 3$ ou 4 , o número $g = 2^a b + 1$ satisfaz o item (4) para $n = a$. Isto significa que é sempre possível construir recobrimentos duplos de curvas satisfazendo as hipóteses dos resultados enunciados.

Referências Bibliográficas

- [1] Andreotti, A., *On a theorem of Torelli*, Amer. J. Math., 80, 801-828 (1958).
- [2] Arbarello, E., *Weierstrass points and moduli of curves*, Compos. Math., 29, 325-342 (1974).
- [3] Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths, P. A., Harris, J. *Geometry of Algebraic Curves, Vol 1*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (1985).
- [4] Ballico, E., Centina, A., *Ramification Points of double covering of curves and Weierstrass Points*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 178, 293-313 (1999).
- [5] Ballico, E., Kim, S. J., *The Weierstrass points of bielliptic curves*, Indagationes Math., 9, 111-159 (1998).
- [6] Bardelli, F., Pirola, G. P., *Curves of genus g lying on a g -dimensional Jacobian variety*, Inventiones Mathematicae, 95, no. 2, 263-276 (1989).
- [7] Barth, W., Peters, C., Van De Ven, A., *Compact Complex Surfaces*, Ergebn. der Mathem. 4, Springer (1984).
- [8] Beauville, A., *Prym Varieties and the Schottky Problem*, Inventiones mathematicae, 41, 149-196 (1977).
- [9] Beauville, A., Ramanan, S., Narasimhan, M. S., *Spectral curves and the generalised theta divisor*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 398, 169-179 (1989).
- [10] Bullock, E. M., *Subcanonical Points on Algebraic Curve*, Ph.D. Thesis, Harvard University, arXiv:1002.2984 submitted on 16 Feb 2010 (2009).
- [11] Buchweitz, R. O., *On Zariski's criterion for equisingularity and non-smoothable curves*, Preprint 113, University of Hannover (1980).
- [12] Carvalho, C. F., Torres, F. O., *On numerical semigroup related to covering of curves*, Semigroup Forum, 67, 344-354 (2003).

- [13] Centina, A. D., *Weierstrass points and their impact in the study of algebraic curves: a historical account from the Luckensatz to the 1970s*, Annali dell'Universita di Ferrara, 54, 1, 37-59 (2008).
- [14] Contiero, A., Stöhr, K-O, *Upper bounds for the dimension of moduli spaces of curves with symmetric Weierstrass semigroups*, Ph.D. Thesis, IMPA, arXiv:1211.2011. submitted on 8 Nov 2012 (2010).
- [15] Dalaljan, S. G., *The Prym Varieties of a double covering of a hyperelliptic curve with two branch points*, Matematicheskii Sbornik, 140, 2, 255-267 (1975).
- [16] Debarre, O., *Le lieu des variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier a deux composantes*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 25, no. 6, 697-707 (1992).
- [17] Debarre, O., *Sur le probleme de Torelli pour les varieties de Prym*, Amer. J. Math., 111, no. 1, 111-134 (1989).
- [18] Donagi, R., Smith, R. C. *The structure of the Prym map*. Acta Math., 146(1-2), 25-102 (1981).
- [19] Farkas, G., *Prym varieties and their moduli*, arXiv:1104.2886v2 (2012).
- [20] Friedman, R., *Algebraic surfaces and holomorphic vector bundles*, Universitext, Berlin, New York: Springer-Verlag (1998).
- [21] Friedman, R; Smith, R., *The generic Torelli theorem for the Prym map*, Inventiones Mathematicae, 67, no. 3, 473-490 (1982).
- [22] Gómez-González, E., *Cyclic covering of a smooth curve and branch locus of the moduli space smooth curves*, Contemporary Mathematics, 20, 183-196 (1999).
- [23] Griffiths, P.; Harris, J., *Principles of algebraic geometry*, , Wiley, New York. (1978).
- [24] Harris, J., *Algebraic Geometry - A First Course*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (1992).
- [25] Harris, J., Morrison, I. *Moduli of curves*, Springer-Verlag, New York, (1998).
- [26] Haure, M., *Recherches sur les points de Weierstrass d'une curbe plane algébriques*, Ann. ÉcoleNor. Sup., 13, 115-196 (1896).

- [27] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (1977).
- [28] Homma, M., *The Weierstrass semigroup of a pair of points on a curve*, Archiv der Mathematik, 67, 4, 337-348 (1996).
- [29] Homma, M., Kim, S. J., *Goppa codes with Weierstrass pairs*, J. Pure Appl. Algebra, 162, 273-290 (2001).
- [30] Hurwitz, A. *Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich*, Mathematische Annalen, 41, 403-442 (1893).
- [31] Jong, R., *Theta Functions on the Theta Divisors*, arXiv:math/0611810, Submitted on 27 Nov 2006 (2006).
- [32] Kato, T., *On the order of a zero of the theta function*, Kodai Math. Sem. Rep., 28, 4, 390-407 (1977).
- [33] Kanev, V., *Hurwitz spaces of triple coverings of elliptic curves and moduli spaces of abelian threefolds*, Ann. Mat. Pura Appl, 183, 333-374 (2004).
- [34] Kanev, V., *Recovering of curves with involution by extended Prym data*, Mathematische Annalen, 299, no 1, 391-414 (1994).
- [35] Kanev, V., *Special line bundles on curves with involution*, Mathematische Zeitschrift, 222, 2, 213-229 (1996).
- [36] Kim, S. J., *On the index of the Weierstrass semigroup of a pair of points on a curve*, Arch. Math., 62, 73-82 (1994).
- [37] Komeda, J., *Double Coverings of Curves and Non-Weierstrass Semigroups*, Communications in Algebra, 41, 1, 312-324 (2013).
- [38] Komeda, J., *On the existence of Weierstrass gap sequences on curves of genus ≤ 8* , Journal of Pure and Applied Algebra, 97, 1, 51-71 (1994).
- [39] Komeda, J., *On Non-Weierstrass gap sequences*, Res. Rep. Kanagawa Inst. Technology, Part B Science and technology, 13, 215-222 (1989).
- [40] Komeda, J., *On Weierstrass points whose first non-gaps are four*. J. Reine. Angew. Math. 341, 68-86 (1983).

- [41] Komeda, J., *Weierstrass semigroups on a double covering of a curve of lower genus*, In preparation.
- [42] Komeda, J., *Weierstrass semigroups whose minimum positive integers are even*, Archiv der Mathematik, 89, 1, 52-59 (2007).
- [43] Komeda, J., Ohbuchi, A., *On double coverings of a pointed non-singular curve with any Weierstrass semigroup*, Tsukuba J. Math., 31, 205-215 (2007).
- [44] Lang, S., *Abelian Varieties*, Interscience Pub (1959).
- [45] Lange, H., Birkenhake, C., *Complex Abelian Varieties*, Springer-Verlag (2003).
- [46] Lange, H., Birkenhake, C., *Complex Tori*, Progress in Mathematics (1999).
- [47] Lange, H., Ortega, A., *Prym varieties of cyclic covering*, Geometriae Dedicata, 150, 1, 391-403 (2011).
- [48] Lange, H., Sernesi, E., *Quadrics containing a Prym-canonical curve*, J. Algebraic Geom., 5(2), 387-399 (1996).
- [49] Lesfari, A., *Prym varieties and applications*, Journal of Geometry and Physics, 58, 9, 1063-1079 (2008).
- [50] Liu, Q., *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, Oxford University Press, New York (2002).
- [51] McCrory, C., *Secant Planes of Space Curves*, Preprint (1993).
- [52] Marcucci, V. O., Pirola, G. P., *Generic Torelli theorem for Prym varieties of ramified coverings*, arXiv:1010.4483, submitted on 21 Oct 2010 (2010).
- [53] Miranda, R., *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, 5 (1995).
- [54] Mumford, D., *Abelian Varieties*, Oxford Univ. Press (1970).
- [55] Mumford, D., *Varieties defined by quartic forms*, in Questions on Algebraic Varieties, 95-100 (1970).
- [56] Mumford, D., *Prym varieties I*, in Contributions to Analysis, Academic Press, New York, 325-350 (1974).

- [57] Mumford, D. *Curves and their Jacobians*, The University of Michigan Press (1975).
- [58] Mumford, D. *The Red Book of Varieties and Schemes*, Springer-Verlag (1999).
- [59] Nagaraj, D. S., Ramanan, S., *Polarisations of type $(1,2,\dots,2)$ on abelian varieties*, Duke Math. J., 80, 1, 157-194 (1995).
- [60] Oliveira, G., Stöhr, K.-O. *Moduli spaces of curves with quasi-symmetric Weierstrass gap sequences*, Geom. Dedicata, 67, 65-82 (1997).
- [61] Park, J., *A note on Weierstrass points of bielliptic curves*, Manuscripta Mathematica, 95, 1, 33-45 (1998).
- [62] Rauch, H., *Weierstrass points, branch points, and moduli of Riemann surfaces*, Comm. Pure Appl. Math. 12, 543-560 (1959).
- [63] Recillas, S. and Rodríguez, R., *Prym varieties and fourfold covers II. The dihedral case*, The geometry of Riemann surfaces and abelian varieties, 397 (796), 177-191 (2006).
- [64] Robles-Pérez, A., Rosales, N., Vasco, P., *The doubles of a numerical semigroup*, Journal of Pure and Applied Algebra, 213, 387-396 (2009).
- [65] Shokurov, V. V., *Prym varieties: theory and applications*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 47, no 4, 785-855 (1983).
- [66] Silverman, J. H., *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (1986).
- [67] Silverman, J. H., Hindry, M., *Diophantine Geometry - An Introduction*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (2000).
- [68] Smith, R., Varley, R., *The curve of Prym canonical Gauss divisors on a Prym theta divisor*, Transactions of the American Mathematical Society, 353, 12, 4949-4962 (2001).
- [69] Smith, R., Varley, R., *The Prym Torelli problem: an update and a reformulation as a question in birational geometry*, Contemporary Mathematics, 312, Amer. Math. Soc., 235-264 (2002).
- [70] Stöhr, K.-O., *On the moduli spaces of Gorenstein curves with symmetric Weierstrass semigroups*, J. reine angew. Math., 441, 189-213 (1993).

- [71] Torres, F., *On γ -hyperelliptic Numerical Nemigroups*, Semigroup Forum, 55, 364-379 (1997).
- [72] Torres, F., *The approach of Stöhr-Voloch to the Hasse-Weil bound with applications to optimal curves and plane arcs*, Lecture Notes, Campinas.
- [73] Torres, F., *Weierstrass points and double coverings of curves with application: symmetric numerical semigroups which cannot be realized as Weierstrass semigroup*, Manuscripta Math, 83, 39-58 (1994).
- [74] Torres, F., *Remarks on numerical semigroups*, arXiv:alg-geom/9512012 Submitted on 19 Dec. 1995 (1995).