



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica - IMECC



Dissertação de Mestrado

**TRAJETÓRIAS SOBRE O GLOBO TERRESTRE:
Um Estudo da Geometria da Esfera nos Mapas Cartográficos**

por

Vera Lúcia Vieira de Camargo

Mestrado Profissional em Matemática

Orientador: Prof. Dr. João Eloir Strapasson

Co-Orientadora: Prof^a. Dr^a. Sueli Irene Rodrigues Costa

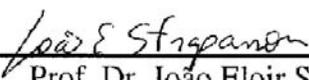
CAMPINAS – SP

2009

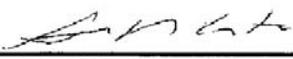
TRAJETÓRIAS SOBRE O GLOBO TERRESTRE: Um Estudo da Geometria da Esfera nos Mapas Cartográficos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Vera Lúcia Vieira de Camargo** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 26 de Fevereiro de 2009.



Prof. Dr. João Eloir Strapasson
Orientador



Profª Drª. Sueli Irene Rodrigues Costa
Co-Orientadora

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. João Eloir Strapasson (DMAT/UFPR)
2. Profª. Drª. Sandra Augusta Santos – (IMECC-UNICAMP)
3. Prof. Dr. Sérgio Roberto Nobre (IGCE - UNESP/RIO CLARO)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica – UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

C14t	<p>Camargo, Vera Lúcia Vieira de</p> <p>Trajelórias sobre o globo terrestre: um estudo da geometria da esfera nos mapas cartográficos/Vera Lúcia Vieira de Camargo -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2009.</p> <p align="center">Orientadores : João Eloir Strapasson; Sueli Irene Rodrigues Costa</p> <p align="center">Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.</p> <p align="center">1. Geodésia (Matemática) 2. Loxodromia. 3. Geometria da esfera. 4. Cartografia. I. Strapasson, João Eloir. II. Costa, Sueli Irene Rodrigues. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.</p>
------	---

Título em inglês: Trajectories on the earth's surfaces: a study of the geometry of the sphere in cartographical maps.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Geodesics (Mathematics) . 2. Loxodrome. 3. Sphere geometry. 4. Cartography.

Área de concentração: Geometria

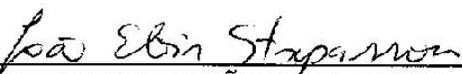
Titulação: Mestre em Matemática

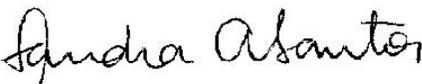
Banca examinadora: Prof. Dr. João Eloir Strapasson (DMAT-UFPR)
 Prof. Dr. Sérgio Roberto Nobres (IGCE-UNESP)
 Profa. Dra. Sandra Augusta Santos
 (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 26/02/2009

Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 26 de fevereiro de 2009 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.


Prof. (a). Dr (a). JOÃO ELOIR STRAPASSON


Prof. (a). Dr (a). SANDRA AUGUSTA SANTOS


Prof. (a). Dr (a). SÉRGIO ROBERTO NOBRE

*Dedico este trabalho
ao meu esposo Jocimal,
a minha mãe Dona Clotilde
e aos meus filhos Ariadne, Matheus e André Luís
grandes amores de minha vida.*

*A Ciência é ótima
ao contar as sementes
no interior dos frutos,
mas é bem mais reticente
ao contar os frutos latentes
em uma simples semente.
(MACHADO, 1997)*

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida e por sempre estar do meu lado.

Ao Prof. Dr. João Eloir Strapasson, pela orientação deste trabalho e grande auxílio nas implementações dos programas computacionais.

A Prof^a. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa, co-orientadora deste trabalho, profissional e pessoa admirável, pelo grande apoio e atenção recebida durante o desenvolvimento deste trabalho e principalmente por ter acreditado em meu potencial e também, pelo grande empenho na implantação e desenvolvimento do Mestrado Profissional no estado de Mato Grosso.

Aos Professores Dr. Sérgio Roberto Nobre e Prof^a. Dra. Sandra Augusta Santos pela participação na banca examinadora deste trabalho e pelas valiosas sugestões.

Ao meu esposo Jocimal, pelo imenso apoio recebido e pela compreensão durante minhas ausências para cursar este mestrado.

A todos os amigos do mestrado, em especial, a Mara (MA), Vera Graciani (MT) e Lúdio (MT), pelo grande companheirismo e amizade durante esta jornada e, também, pelos inesquecíveis momentos que vivemos juntos, doces lembranças que guardarei para sempre.

Ao amigo Cristiano Torezzan, pela amizade, apoio e carinho durante esta jornada.

Ao Prof. João Frederico Meyer, pelo apoio e amizade durante o período que estivemos estudando em Campinas.

Ao Prof. Miguel Tadayuki Koga e Prof^a Maria Zoraide Soares da UNEMAT pelo apoio e amizade e também pelo grande empenho no processo de implantação do Mestrado Profissional em Matemática no estado de Mato Grosso.

Aos professores da UNICAMP, que lutaram e acreditaram na possibilidade do Mestrado Profissional acontecer em regiões distantes dos grandes centros e que assim possibilitou aos professores dos estados de Mato Grosso e Maranhão aprofundarem seus conhecimentos em Matemática e resultar em melhorias no ensino de Matemática destes estados.

A amiga Darci pelo grande incentivo, torcida e apoio recebido durante a realização deste mestrado.

Aos chefes de Departamento de Matemática da UNEMAT/Campus Universitário de Sinop Prof^a Celma Evangelista Ramos, Prof. Érico Fernando Martins e Prof. Milton Luís Neri Pereira pela compreensão e apoio durante a realização deste mestrado.

RESUMO

CAMARGO, V.L.V. de. **TRAJETÓRIAS SOBRE O GLOBO TERRESTRE: Um Estudo da Geometria da Esfera nos Mapas Cartográficos.** Campinas – SP: Universidade Estadual de Campinas, 2009. Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título em Mestre em Matemática.

Este trabalho buscou explorar os conceitos e propriedades da geometria da esfera no espaço usual e as projeções cartográficas cilíndricas, em especial, a de Mercator e a equidistante meridiana. Dentre os vários conceitos e aspectos históricos abordados no trabalho, destacamos o estudo comparativo entre duas maneiras de caminhar sobre o globo terrestre, uma pela geodésica (curva de menor distância entre dois pontos) e a outra pela *loxodromia* (curva que mantém o ângulo constante com os meridianos e que teve grande importância nas navegações marítimas e aéreas). Discutimos as deformações que ocorrem nas projeções do globo no plano, o que nos possibilitou estabelecer um comparativo entre o trajeto loxodrômico, que se projeta no mapa de Mercator como uma reta com a curva geodésica entre dois pontos. As representações das projeções apresentadas no trabalho foram implementadas num programa computacional de cálculo simbólico e de visualização. O texto contempla várias possibilidades de abordagem para os cursos de graduação em Matemática e áreas afins, em particular, nas disciplinas de Geometria Analítica e Cálculo, pois estabelece uma conexão entre a Geometria e a Geografia por meio de um instigante exemplo de como a Matemática pode ajudar na compreensão do espaço em que vivemos.

Palavras-chave: Geodésicas, *Loxodromia*, Geometria da Esfera, Cartografia.

ABSTRACT

CAMARGO, V.L.V. de. **TRAJECTORIES ON THE EARTH'S SURFACE: A Study of the Geometry of the sphere in cartographical maps.** Campinas – SP: Universidade Estadual de Campinas, 2009. Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título em Mestre em Matemática.

Concepts and properties of the sphere geometry are explored here in connection with cylindrical cartographic projections, specially the Mercator and the equidistant meridian projections. The approach include some of the historical aspects of the development of maps and the focus is on the comparison between two paths connecting two different locations on the Earth: the geodesic (shortest path) and the loxodrome which meets any meridian at constant angle and has been so important for navigation. We discuss the projection distortions from the globe to the plane maps. Expressions for the projections and parametrizations and 2D and 3D plottings were developed within the framework of a symbolic calculus and visualization computer system. The content explored here may disclosure several possibilities of approaching this subject in exercises and student research projects for standard Analytical Geometry and Calculus courses as one more example of how mathematics provide us with tools for understanding the world we live.

Key words: Geodesics, *Loxodrome*, sphere geometry, cartography.

LISTA DE FIGURAS

1.1 Representação do Mapa do Ptolomeu. Extraída de [24]	04
1.2 Elipsóide de Revolução	06
1.3 Referenciais sobre o globo terrestre. Extraída de [5, p. 88]	07
1.4 Mapa de Fusos Horários. Extraída de [6, p. 19].....	09
1.5 Orientação da longitude. Extraída de [5, p. 88].....	10
1.6 Latitude e longitude no globo terrestre	10
1.7 Latitude e longitude como intersecção de superfícies	11
1.8 Coordenadas polares (r, θ) do ponto P.....	11
1.9 Coordenadas esféricas (ρ, θ, φ) do ponto P	12
1.10 Coordenadas geográficas (θ, ϕ) do ponto P no globo terrestre	13
2.1 Intersecção da esfera \mathcal{S} com o plano α passando pelo centro O.	16
2.2 Intersecção da esfera \mathcal{S} com o plano α passando por C. Adaptada [6,p.4].....	16
2.3 Círculos máximo e menor. Extraída de [5, p. 82]	17
2.4 Geodésica conectando Los Angeles e Londres. Extraída de [11, p. 44]	22
2.5 Pontos A e B situados no mesmo paralelo. Extraída de [6, p.38].....	25
2.6 Trajetórias de menor distância entre Calgary – Londres – Campinas	28
2.7 Ângulo esférico. Extraída de [5, p. 83].....	29
2.8 Triângulo esférico. Extraída de [5, p. 87].....	29
2.9 Ângulos internos de triângulos esféricos. Extraída de [10, p. 140]	30
2.10 Dupla lua com ângulo α . Extraída de [10, p. 141]	31
2.11 Triângulo esférico e o triângulo antipodal atrás da esfera.....	32
2.12 Três duplas luas sobrepostas. Extraída de [10, p. 145]	32
2.13 Região da esfera ao redor do ponto P.....	35
2.14 Projeção Estereográfica – Mapa do Hemisfério Sul. Extraída de [8, p. 43]	36
3.1 Latitude ϕ e longitude θ no globo terrestre	42
3.2 Latitude ϕ e co-latitude φ do ponto P	42
3.3 Função S que leva pontos do plano para o globo terrestre	42
3.4 Ilustração da transformação dos pontos do mapa para o globo terrestre	43
3.5 Projeção Cilíndrica Equidistante. Extraída de [18]	44
3.6 Base ortonormal.....	53
3.7 Curva geodésica ligando P_1 e P_2	53
3.8 Trajetória geodésica na proj. cilíndrica equidistante dos pontos de coordenadas geográficas $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ e $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$	56

3.9	Trajectoria geodésica de P_1 a P_2 na proj. cilíndrica eqüidistante..	56
3.10	Trajectoria geodésica de P_3 a P_4 ..	57
3.11	Trajectoria geodésica de P_5 a P_6 .	57
4.1	Representação de uma porção do globo no mapa de Mercator.	59
4.2	Trajektorias entre dois pontos orientada na linha e rumo..	60
4.3	Espirál esférica...	61
4.4	Trajectoria sobre a linha de rumo no globo terrestre	62
4.5	Curva loxodrômica com direção de 60°	62
4.6	Trajektorias sobre a <i>loxodromia</i> (azul) e pela geodésica(vermelho)	63
4.7	Projeção cilíndrica (1) .Extraída de [3]	64
4.8	Projeção cilíndrica (2) . Extraída de [21]	64
4.9	Fatia do globo terrestre e representação correspondente no mapa de Mercator	65
4.10	Representação do mesmo local no globo e no mapa de Mercator	67
4.11	Projeção de Mercator e as latitudes alongadas	68
4.12	Mapa de Mercator com variação de latitude de $-89,8^\circ$ S e 83° N	73
4.13	Extraída de [19]	77
4.14	Curvas geodésicas e loxodrômica das trajetórias entre Londres (A) – Calgary (B) e Londres – Campinas (C)	78
4.15	Trajectoria geodésica (vermelho) e a <i>loxodromia</i> de A_1 a A_2 .	79
4.16	Trajectoria hipotética percorrida pelos navegadores no descobrimento do Brasil	80
4.17	Rota Manaus – Brasília pela <i>loxodromia</i> e pela geodésica no mapa de Mercator...	81
4.18	Mapa de Mercator com destaque na América do Sul e Groenlândia	84
4.19	Mapa de Mercator com destaque na América do Norte e do Sul, África e Antártida	85
4.20	Dois exemplos ilustrando as trajetórias pela <i>loxodromia</i> e pela geodésica	88
4.21	Projeção <i>Gnomônica</i> . Gerada no <i>Mathematica</i> . Autor: Eric W. Weisstein	93

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	XV
INTRODUÇÃO	01
1 A REPRESENTAÇÃO DO GLOBO TERRESTRE NOS MAPAS E OS REFERENCIAIS CARTOGRÁFICOS	03
1.1 BREVE HISTÓRICO	03
1.2 MAPAS E CARTAS	05
1.3 O FORMATO DA TERRA	06
1.4 REFERENCIAS SOBRE O GLOBO TERRESTRE.....	07
1.5 SISTEMA DE COORDENADAS E COORDENADAS GEOGRÁFICAS	11
1.5.1 Relação das coordenadas polares com as coordenadas cartesianas	11
1.5.2 Coordenadas esféricas	12
1.5.3 Coordenadas geográficas e sua relação com as coordenadas esféricas.....	13
2 A GEOMETRIA DA ESFERA	15
2.1 A ESFERA	15
2.2 A INTERSECÇÃO DE UM PLANO E A SUPERFÍCIE ESFÉRICA	15
2.3 CÍRCULOS MÁXIMOS E CÍRCULOS MENORES	17
2.4 DISTÂNCIAS E GEODÉSICAS NA ESFERA	18
2.4.1 Geodésica	18
2.4.2 Cálculo da geodésica entre dois pontos na esfera	23
2.4.2.1 Distância entre dois pontos na esfera situados no equador ou num meridiano	23

2.4.2.2 Distância entre dois pontos quaisquer na esfera	25
2.5 ÂNGULO ESFÉRICO	28
2.6 TRIÂNGULO ESFÉRICO	29
2.6.1 Definição	30
2.6.2 A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico	30
2.7 ÁREA DE UMA DUPLA LUA	31
2.8 ÁREA E A SOMA DOS ÂNGULOS DE UM TRIÂNGULO ESFÉRICO	31
2.9 EULER FINALMENTE PROVA QUE NÃO É POSSÍVEL PLANIFICAR A TERRA	34
2.10 PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA	36
2.11 ÁREA DA ESFERA	39
3 O MAPA LATITUDE-LONGITUDE	41
3.1 SISTEMA DE COORDENADAS LATITUDE E LONGITUDE.....	41
3.2 PROJEÇÃO CILÍNDRICA EQUIDISTANTE MERIDIANA	43
3.3 PARAMETRIZANDO A CURVA GEODÉSICA NO MAPA LATITUDE - LONGITUDE	46
3.3.1 A função inversa S^{-1} que leva pontos da esfera para o plano	47
3.3.2 Parametrização da trajetória geodésica na esfera	52
3.3.3 Geodésica no mapa latitude – longitude $(S^{-1}(c(t)))$	53
3.4 EXEMPLOS DE TRAJETÓRIAS GEODÉSICAS NO MAPA LATITUDE - LONGITUDE.....	56
4 O MAPA DE MERCATOR	59
4.1 O PROBLEMA DA NAVEGAÇÃO E O MAPA DE MERCATOR	60
4.2 AS PROPRIEDADES MATEMÁTICAS PRESENTES NA CRIAÇÃO DO MAPA DE MERCATOR.....	64
4.2.1 Distâncias horizontais são alongadas	65
4.2.2 Distâncias verticais também são alongadas.....	66

4.2.3 O deslocamento é alongado do fator $\sec \phi$	67
4.2.4 Como locar os paralelos no Mapa de Mercator? Prenúncios dos conceitos do Cálculo	69
4.3 O CONTEXTO HISTÓRICO DO MAPA DE MERCATOR	70
4.4 DEFORMAÇÕES E OS FATORES DE ESCALA NO MAPA DE MERCATOR	71
4.4.1 Ao longo dos meridianos (M_m)	71
4.4.2 Ao longo dos paralelos (M_p)	72
4.5 PARAMETRIZAÇÕES DA TRAJETÓRIA GEODÉSICA E DA <i>LOXODROMIA</i> NO MAPA DE MERCATOR	73
4.5.1 Transformações do Mapa de Mercator para o mapa latitude-longitude, para o globo e suas inversas	73
4.5.2 Trajetória geodésica no Mapa de Mercator	77
4.6 A PROJEÇÃO DE MERCATOR PRESERVA ÂNGULO	81
4.7 DEFORMAÇÕES DA ÁREA NO MAPA DE MERCATOR	82
4.8 DISTÂNCIAS GEODÉSICAS E LOXODRÔMICAS	86
CONSIDERAÇÕES FINAIS	89
REFERENCIAIS BIBLIOGRÁFICOS	91
APÊNDICE	93
A – Projeção Gnomônica	93
B – Avaliando $\int \sec \phi d\phi$	94

INTRODUÇÃO

Historicamente, o problema de se representar a superfície terrestre sobre uma superfície plana é um problema matemático, filosófico, geográfico e sócio-cultural, tendo em vista que grande parte dos mapas construídos ao longo dos tempos visou atender às mais diversas necessidades humanas e assim sendo, tem atraído invenções das mais variadas formas ao longo destes dois milênios. [1]

Neste contexto, este trabalho se preocupou em explorar os conceitos matemáticos envolvidos na criação de dois mapas cartográficos, o de latitude-longitude e o de Mercator, buscando compreender como a trajetória geodésica e loxodrômica sobre o globo terrestre são retratadas. A escolha por estas trajetórias deu-se em função de que a trajetória geodésica é o menor caminho entre dois pontos e a *loxodromia* permite caminhar no globo terrestre numa curva que mantém o ângulo constante com os meridianos, representada no Mapa de Mercator como uma linha reta, ferramenta que foi muito útil para as navegações marítimas do século XVI.

Este assunto raramente é tratado nos cursos de graduação em Matemática e durante o desenvolvimento deste trabalho, pudemos perceber o quanto o tema é envolvente e pode ser tratado como suplemento em cursos de Geometria Analítica e Cálculo Diferencial e Integral e, além disso, é um caminho para o desenvolvimento de um trabalho interdisciplinar entre Matemática e Geografia numa abordagem que permite associar a Matemática a contextos práticos das necessidades humanas.

Este trabalho está organizado em quatro capítulos assim distribuídos:

No Capítulo 1 apresentamos um breve histórico dos mapas, os referenciais sobre o globo terrestre e a relação do sistema de coordenadas cartesianas com as geográficas (latitude-longitude). Incluímos também a construção geométrica das intersecções das superfícies da esfera, planos e cone, que permitem entrelaçar o conceito de latitude e longitude com a Geometria Analítica. No Capítulo 2, apresentamos os conceitos e propriedades da geometria da esfera, a trajetória geodésica na esfera (que é a rota ótima para navegação aérea e marítima), a impossibilidade de se planificar o globo terrestre sem distorções e um exemplo disto por meio da

projeção estereográfica. No Capítulo 3, tratamos do mapa de coordenadas latitude-longitude associado à projeção cilíndrica equidistante meridiana, parametrizamos a curva geodésica nesta projeção e implementamos num programa computacional de cálculo simbólico e de visualização os traçados de geodésicas no globo e no mapa. No Capítulo 4, abordamos o Mapa de Mercator, descrevemos as necessidades práticas do contexto social em que este mapa foi concebido, as propriedades matemáticas presentes na sua criação e sua vinculação com os conceitos do Cálculo, as deformações de trajetões e de área no processo de planificação neste tipo de projeção, a parametrização da trajetória da *loxodromia* e da geodésica neste mapa e finalizamos fazendo um comparativo entre as distâncias nestes dois tipos de trajetória. Assim como no Capítulo 3, implementamos computacionalmente várias construções envolvendo trajetórias no globo e na projeção plana de Mercator. Neste capítulo, foi possível também, fazer algumas conjecturas a respeito da rota da navegação que conduziu ao “descobrimento” do Brasil.

Nosso propósito é que este material possa ser utilizado por professores e alunos em aulas, estudos suplementares e na proposição e desenvolvimento de trabalhos e projetos nas disciplinas de Cálculo e Geometria Analítica.

Capítulo 1

A REPRESENTAÇÃO DO GLOBO TERRESTRE NOS MAPAS E OS REFERENCIAIS CARTOGRÁFICOS

Neste capítulo apresentamos um breve histórico sobre a Cartografia, introduzimos os referenciais utilizados para o globo terrestre e as relações trigonométricas para as coordenadas esféricas e geográficas. As principais referências utilizadas foram [3], [4] e [5].

1.1 BREVE HISTÓRICO

A atividade de confeccionar mapas é uma atividade humana que vem sendo desenvolvida desde os tempos remotos, mas tornou-se mais intensa a partir de meados do século XV em função das grandes navegações que passaram a exigir mapas cada vez mais confiáveis e informativos. Foi neste contexto que a Cartografia (do grego *chartis* = mapa e *graphein* = escrita), que é a arte ou ciência de confeccionar mapas tendo como objetivo expressar informações da superfície terrestre foi se desenvolvendo. Arte porque está associada à estética, à simplicidade, à clareza e à harmonia e, ciência porque depende dos conceitos da Astronomia e da Matemática.

Na Grécia Antiga surgiram os primeiros fundamentos da Cartografia, com Hiparco (séc. II a.C) que para determinar posições na superfície da Terra, deu a primeira solução do problema sobre a representação da Terra sobre o plano idealizando uma projeção cônica. Foi junto aos gregos também que apareceram a concepção de esfericidade da Terra, os primeiros conceitos de latitude, longitude, pólos, equador e trópicos, bem como a idealização dos primeiros sistemas de projeção. [4] Este conhecimento da Grécia Antiga se concentra particularmente nos trabalhos do astrônomo, geógrafo e cartógrafo grego Cláudio Ptolomeu (aproximadamente 85-165 d.C).

O Mapa de Cláudio Ptolomeu teve vida longa e serviu de inspiração a vários cartógrafos, navegadores e astrônomos do século XV e XVI, construído a partir de informações de navegadores, mercadores e exércitos que percorriam grandes distâncias, bem como das posições geográficas de algumas localidades já conhecidas da época, como as das cidades de Alexandria, Siena e outras. Este mapa tinha um formato curioso, pois o Oceano Índico era representado como

um mar no interior rodeado por terra conforme ilustra a Figura 1.1. Aos poucos foi se percebendo a sua falibilidade em função das novas informações que surgiam decorrentes principalmente do alcance cada vez maior das navegações. No entanto, muito dos novos mapas confeccionados posteriormente se iniciavam a partir dele.



Figura 1.1 Representação do Mapa de Ptolomeu. Extraída de [24]

A navegação foi um dos elementos propulsores para que fosse intensificada a confecção de mapas cada vez mais confiáveis e informativos e foi neste cenário que foi criado um mapa muito especial, denominado Mapa de Mercator, desenvolvido no século XVI para atender às necessidades práticas das navegações, dotado de propriedades matemáticas muito interessantes, tema este que será abordado no Capítulo 4 deste trabalho.

Considerando que o objetivo principal dos mapas consiste em representar partes do globo terrestre em um plano, os cartógrafos passaram muito tempo buscando descobrir um mapa que pudesse representar as localidades do globo, preservando na mesma escala, as distâncias entre elas. Esta busca perdurou até o século XVIII, quando Euler (1707-1783) prova que tal intento não é possível, conforme detalhamos no Capítulo 2. Desta forma, reconheceu-se que não há mapas ideais e a maneira mais próxima de se representar a superfície terrestre com vistas a conservar as posições dos pontos que estão sobre ela, bem como as dimensões que estão em uma escala única é por meio de globos, no entanto, para isto seria necessário um globo de dimensões exageradas. Por exemplo, em um globo de diâmetro 1,28 metros, a escala é de aproximadamente 1/10.000.000 o que não nos permite representar detalhes inferiores a 2 quilômetros e, somando-se as dificuldades de manuseá-lo por meio de traçados ou plotagem de pontos, isto exclui a possibilidade da utilização deste sistema. [3]

Surge então a necessidade de se representar a superfície terrestre ou parte dela, aproximadamente esférica, sobre um papel plano. No entanto, como já comentamos, neste processo sempre aparecem deformações, decorrentes do fato fundamental que a superfície de uma esfera (ou de um elipsóide) não é desenvolvível no plano.

Atualmente, a Cartografia está aliada a recursos tecnológicos e desenvolve-se com o auxílio de satélites e computadores que vieram alterar profundamente a forma como os dados geográficos são adquiridos, processados e representados. Em função do avanço tecnológico, a maioria dos mapas apresenta boa precisão, pois antes que estes sejam elaborados, o levantamento é realizado de forma minuciosa, envolvendo diversas técnicas e recursos tecnológicos, como o sensoriamento remoto, a cartografia digital e o geoprocessamento. Além disto, as fotografias aéreas e as imagens obtidas por satélites são hoje em dia fontes excelentes de informações para a confecção de mapas.

Considerando que o nosso trabalho visa estabelecer uma conexão da Matemática com a Cartografia, para facilitar a compreensão do assunto abordado por este trabalho, apresentamos a seguir alguns conceitos cartográficos que darão sustentação para o nosso trabalho.

1.2 MAPAS E CARTAS

Na literatura da Cartografia há uma distinção entre mapas e cartas, conforme apresentamos a seguir:

Mapa é a representação do globo terrestre, ou de porções da superfície terrestre sobre uma superfície plana numa determinada escala, com indicações de fronteiras políticas, características físicas, localização de cidades e outras informações geográficas, sócio-políticas ou econômicas. Geralmente o mapa não tem um caráter técnico ou científico especializado, servindo mais para finalidades ilustrativas ou culturais.

Já uma **carta**, também representa o globo terrestre sobre um plano, é construído de forma sistemática, mas especialmente construída para uma finalidade prática específica da atividade humana ou em atividade técnica científica, que serve como ferramenta para avaliação de distâncias, direções com grau de precisão compatível com a escala, ou na determinação da posição através das coordenadas geográficas (latitude e longitude). Cartas são produzidas em

escala média ou grande e constituídas por linhas convencionais (paralelos e meridianos), em especial, as que são utilizadas na navegação são denominadas de *cartas náuticas*. [3]

1.3 O FORMATO DA TERRA

Assume-se historicamente que o homem tenha imaginado a Terra como uma superfície plana. A idéia de esfericidade nasceu na Grécia Antiga e, no tempo de Cláudio Ptolomeu a forma da Terra já era admitida como sendo esférica. Alguns historiadores consideram que a concepção da Terra como formato plano volta a prevalecer na Idade Média no mundo ocidental até o século XV, época em que a Terra como forma esférica volta a predominar.

No século XVII, Newton lança a idéia do achatamento da Terra, tendo em vista que não sendo a Terra um corpo rígido, em função de seu movimento de rotação, ela não poderia ter um formato esférico, mas sim o de um elipsóide achatado nos pólos, o que desencadeou uma série de pesquisas pelos franceses no séc. XVIII, que passam a conceber a Terra na forma de um elipsóide achatado nos pólos. Na realidade, as pesquisas realizadas no final do séc. XIX e início do séc. XX eliminam de vez a hipótese de que a Terra fosse um elipsóide geometricamente regular, pelo contrário, chegou-se a conclusão de que a superfície da Terra possui muitas irregularidades exteriores e assim sendo, seu formato não tem uma representação matemática muito simples. Buscando contornar esta falta de representação matemática explícita para a superfície da Terra, foi concebido o geóide, que é o sólido formado pela superfície do nível médio dos mares, supondo-o recobrimdo toda a Terra e prolongando através dos continentes. Apesar disso, o geóide ainda não é uma superfície geometricamente definida e, a forma da Terra que mais se aproxima da real é o de um elipsóide de revolução. [4] No entanto, foram vários os valores das medidas obtidas dos elementos do elipsóide na Terra e assim tornou-se necessário adotar o Elipsóide Internacional de Referência (de Hayford), recomendado pela Conferência de Madrid em 1924 cujos parâmetros de referência são:

- Raio equatorial $a = 6.378.388,00$ metros
- Raio polar $b = 6.356.911,52$ metros.

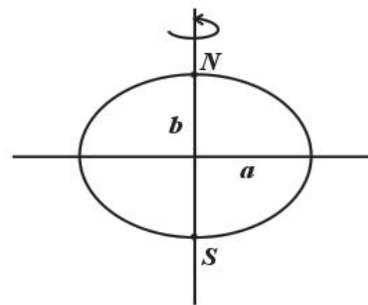


Figura 1.2 Elipsóide de Revolução

Obtemos assim um achatamento de $\mu = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{297} \cong 0,003367$ e excentricidade $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = 0,0819927$. (Ver Referência [4])

O valor relativamente pequeno de e permite-nos, com a finalidade didática, desprezar este achatamento e adotar a esfera como superfície teórica da Terra.

1.4 REFERENCIAIS SOBRE O GLOBO TERRESTRE

Uma das questões fundamentais da Cartografia é o estabelecimento de um sistema de coordenadas sobre a Terra, de maneira que cada ponto sobre a superfície possa ser relacionado a este sistema. Inicia com os antigos gregos os primeiros conceitos de meridianos e paralelos bem como o sistema de coordenadas geográficas denominados: **latitude** e **longitude**¹ e assim, os pontos da superfície da Terra são referidos a um sistema de linhas imaginárias (meridianos e paralelos). O conjunto de paralelos e meridianos representado em uma carta é obtido por um sistema de projeção e os pontos da região a representar são localizados por suas coordenadas geográficas. [4]

Estas coordenadas são definidas tendo em vista alguns referenciais, conforme ilustrado na Figura 1.3. Buscamos caracterizá-los a seguir, tendo como base as referências [3], [5] e [6].

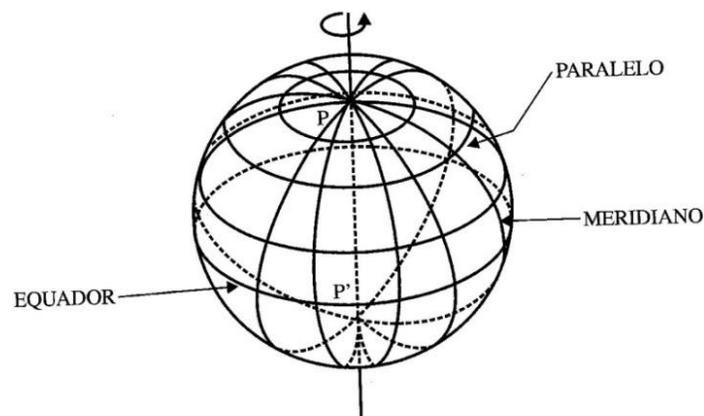


Figura 1.3 Referenciais sobre o globo terrestre. Extraída de [5, p.88]

¹ O problema de se determinar a longitude no mar foi um dos maiores desafios científicos da humanidade que perdurou até o século XVIII. A busca de solução para tal problema envolveu expoentes como Galileu e Newton. No entanto, foi o relojoeiro inglês John Harrison que apresentou uma solução mecânica: um relógio que registrava a passagem do tempo no mar com precisão. (Ver referência [2])

- **Eixo da Terra:** É a linha em torno da qual a Terra realiza o seu movimento de rotação, de Oeste para Leste.
- **Pólos:** O eixo da Terra intercepta a superfície terrestre em dois pontos, P e P' que são os pólos. O ponto P situa-se no hemisfério norte e P' no hemisfério sul, sendo denominados respectivamente de Pólo Norte e Pólo Sul. Fazendo o centro do globo terrestre representado pela esfera de centro O e raio R coincidir com a origem dos eixos cartesianos tridimensionais, definimos como **pólo norte** o ponto $n = (0,0,R)$ e o **pólo sul** como $s = (0,0,-R)$.
- **Linha do equador:** Linha de latitude zero obtida da intersecção da superfície da Terra (círculo máximo) com o plano mediatriz do segmento \overline{ns} . Divide a Terra em duas “semi-esferas”, uma é o hemisfério norte e o outro o hemisfério sul.
- **Meridiano de Greenwich:** Linha de longitude zero e é metade do grande círculo obtido da intersecção da “esfera terrestre” com o semiplano perpendicular ao plano do equador que tem por bordo o eixo da Terra e passa por Greenwich (Reino Unido próximo à Londres). O Meridiano de Greenwich é antípoda de uma região composta predominantemente por água onde está localizada a Linha Internacional de Mudança de Data e que não é definida a longitude (π e $-\pi$). Antes de Greenwich outros meridianos foram tomados como referência e em 1767, o Observatório Real da Inglaterra publicou as tabelas de posições lunares mais completas da época e os navegantes já usavam Greenwich para calcular longitudes. Essa prática tornou-se oficial somente em 1884, quando a Conferência Internacional dos Meridianos em Washington estabeleceu Greenwich como meridiano de referência.
- **Paralelos:** São círculos paralelos ao equador. Pontos situados no mesmo paralelo possuem a mesma latitude. O equador também é um paralelo e é o único paralelo que é um círculo máximo. Os demais, tanto no hemisfério norte ou sul, vão diminuindo suas proporções a medida que se afastam do equador, até se transformarem em um dos pólos, o norte ou sul. Existem outros paralelos importantes, como: o **Trópico de Câncer** (de latitude aproximada $23^{\circ}27'N$), **Trópico de Capricórnio** (de latitude aproximada $23^{\circ}27'S$), **Círculo Polar Ártico** (de latitude $66^{\circ}33'N$) e **Círculo Polar Antártico** (de latitude $66^{\circ}33'S$).
- **Meridianos:** são semicircunferências que ligam os pólos norte e sul por meio de um arco máximo, ou seja, são arcos contidos em circunferências máximas que passam pelos pólos. [6]
- **Linha Internacional de Mudança de Data (LID):** O meridiano de 180° no Oceano Índico marca esta linha, também chamado de Antimeridiano de Greenwich. Quando se cruza esta

linha há uma diferença de um dia no calendário. Se atravessarmos a LID do leste para oeste, o calendário deve ser atrasado de um dia e no sentido contrário, a data deve ser adiantada de um dia.

- **Ortodromia:** É o arco de menor distância entre dois pontos. Se considerarmos o formato da Terra como esférico, este será um arco de círculo máximo que une estes dois pontos sobre a superfície da Terra, na linguagem matemática é chamado de geodésica.
- **Azimute:** É o ângulo formado entre a direção norte-sul do meridiano e a direção considerada, sendo contado no sentido anti-horário, tendo a linha do pólo norte como referência inicial.
- **Loxodromia** ou **Linha de Rumo:** É a linha que faz um ângulo constante com os sucessivos meridianos (azimute constante).
- **Milha Náutica:** Corresponde aproximadamente ao valor aproximado de 1' (minuto) de um grande círculo $\left(\frac{1}{60 \cdot 180}\right)$, ou seja, é um ângulo de 1' que pode ser medido sobre o equador ou ao longo de um meridiano e equivale a aproximadamente 1852 metros.
- **Fusos Horários:** Se em Sinop-MT (longitude $55^{\circ}27'36''$ a Oeste) o sol está em seu ponto mais alto no céu isto não ocorre no mesmo instante em Campinas-SP que está localizada na longitude $47^{\circ}4'59''$ a Oeste. Com o intuito de estabelecer um padrão foi dividido o globo em 24 faixas meridionais, aproximadamente iguais, uma vez que a Terra leva 24 horas para realizar uma volta completa com o movimento de rotação e resultaram disto os **fusos horários**. Cada fuso horário corresponde a uma faixa limitada por dois meridianos, distantes de 15° um do outro. Disto resulta que países muito extensos possuem vários fusos horários, como é o caso do Brasil que possui quatro. Já países como o Paraguai e Itália possuem um único fuso horário e isto pode ser observado no mapa oficial de fusos horários da Figura 1.4 a seguir, onde as faixas são seguidas aproximadamente, por determinação de cada país.

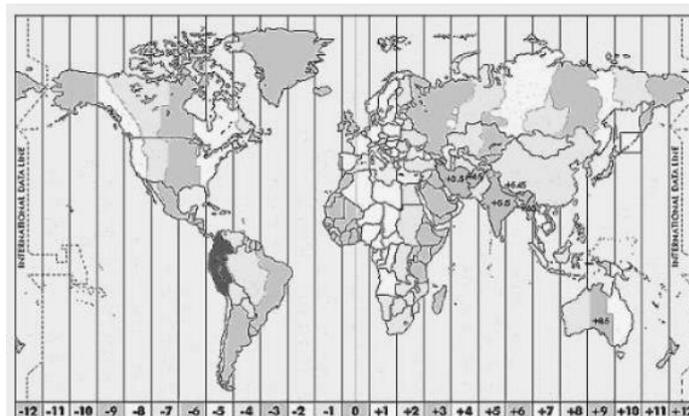


Figura 1.4 Mapa de Fusos Horários. Extraída de [6, p.19]

- **Longitude geográfica (θ):** é a medida do ângulo, compreendida entre o Meridiano de Greenwich e o meridiano onde está situado o ponto sobre a esfera. A marcação vai de 0° a 180° (para Leste) e 0° a -180° (para Oeste) tendo como referência o Meridiano de Greenwich, conforme Figuras 1.5 e 1.6. OBS: As letras E e W são comumente utilizadas para localização da longitude e são abreviaturas das palavras inglesas East e West que em português significam Leste e Oeste, respectivamente.
- **Latitude geográfica (ϕ)** de um ponto P sobre a superfície terrestre é a medida do ângulo (em graus) entre o plano do Equador e o segmento de reta que liga o ponto ao centro do globo, ou também podemos definir como a medida do arco de meridiano que passa pelo ponto P e está compreendido entre o equador e o paralelo onde o ponto está situado, conforme ilustra a Figura 1.6. A latitude é expressa em graus e varia de 0° a 90° para o norte e de 0 a 90° ao sul do equador, conforme a posição que esteja localizado o ponto.

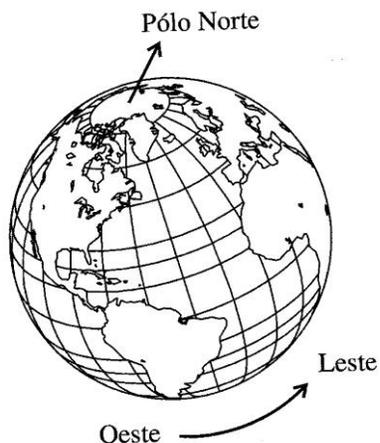


Figura 1.5 Orientação da longitude. Extraída de [5, p.88]

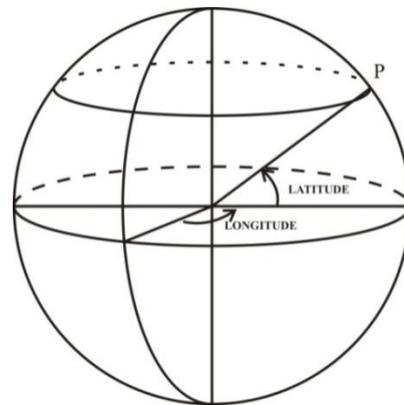


Figura 1.6 Latitude e longitude no globo terrestre.

É interessante observar que podemos estabelecer uma conexão com a Geometria Analítica, onde os paralelos podem ser vistos como as intersecções de cones com a superfície esférica terrestre, enquanto que os meridianos são intersecções destas com semiplanos que tem a reta base no eixo dos pólos, conforme ilustra a Figura 1.7. Assim, o paralelo de ϕ é a intersecção da superfície esférica terrestre com o cone, com eixo de simetria no eixo polar e semi-reta geratriz formando um ângulo ϕ com o plano do equador (plano $z = 0$). A equação cartesiana deste cone é $z = \operatorname{tg} \phi \sqrt{x^2 + y^2}$ e o raio da circunferência deste paralelo sobre a Terra é $r(\phi) = \text{raio da Terra} \cdot \cos \phi$. Já o meridiano de θ é determinado pela intersecção imaginária

da superfície da Terra com um semiplano vertical que contém o eixo polar ($x = 0$ e $y = 0$) e faz um ângulo θ com o semiplano que contém o Meridiano de Greenwich.

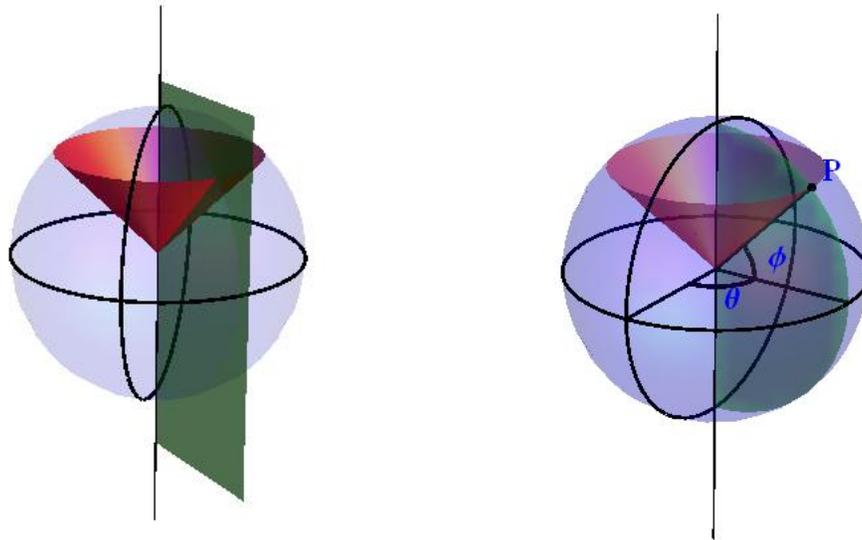


Figura 1.7 Latitude e longitude como intersecção de superfícies.

1.5 SISTEMA DE COORDENADAS E COORDENADAS GEOGRÁFICAS

Para a representação da Terra em um mapa plano o sistema de coordenadas cartesianas é usualmente utilizado e desta maneira, nesta subsecção estabelecemos uma inter-relação do sistema de coordenadas cartesianas com o sistema das coordenadas geográficas (longitude-latitude). Os referenciais para o desenvolvimento apresentado a seguir são baseados em [7], [8] e [9].

1.5.1 Relação das coordenadas polares com as coordenadas cartesianas

Seja o par (x, y) das coordenadas cartesianas do ponto P da Figura 1.8 e (r, θ) o correspondente par de coordenadas polares, então:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

$$\operatorname{tg} \theta = y/x \text{ com } x \neq 0 \quad \text{e} \quad r^2 = x^2 + y^2$$

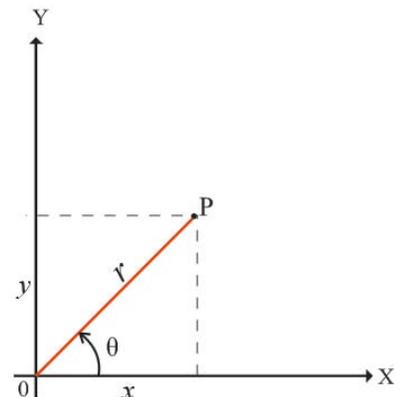


Figura 1.8 Coordenadas polares (r, θ) do ponto P .

Como o enfoque de nosso trabalho envolve os pontos que estão sobre o globo terrestre, apresentamos a seguir como matematicamente podemos caracterizar um ponto no espaço em coordenadas esféricas e a partir disto, como as coordenadas geográficas se relacionam com este sistema de coordenadas.

1.5.2 Coordenadas esféricas

As coordenadas esféricas (ρ, θ, φ) de um ponto P no espaço, estão indicadas na figura a seguir, onde $\rho = |OP|$ é a distância da origem a P; θ é o mesmo que em coordenadas polares e φ é o ângulo medido entre o eixo z positivo e o segmento OP.

Em consequência da definição $\rho \geq 0$, $r \in [0, \infty[$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\varphi \in [0, \pi]$

A relação entre as coordenadas retangulares e as coordenadas esféricas pode ser verificada na Figura 1.9, pois dos triângulos OPQ e OPP' temos que $z = \rho \cos \varphi$.

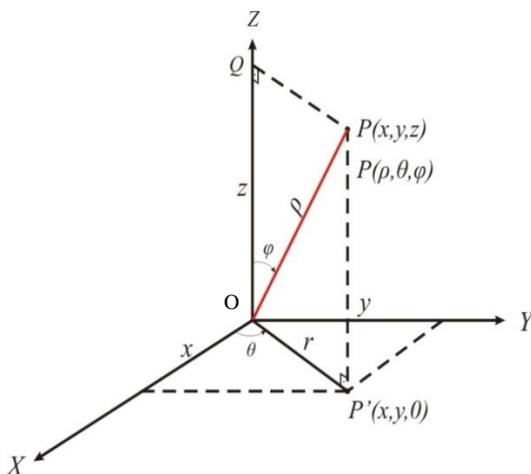


Figura 1.9 Coordenadas esféricas (ρ, θ, φ) do Ponto P.

Por outro lado, das coordenadas polares temos que $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ e, desta maneira, para converter das coordenadas esféricas para coordenadas retangulares temos as seguintes equações:

$$x = \rho \cos \theta \sin \varphi \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi \quad z = \rho \cos \varphi \quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Obtendo: $(x, y, z) = (\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi)$

1.5.3 Coordenadas geográficas e sua relação com as coord. esféricas

As coordenadas geográficas ou terrestres no sistema latitude-longitude (θ, ϕ) utilizadas para se localizar pontos no globo terrestre, conforme Figura 1.10, estão associadas com as coordenadas esféricas. Consideremos as coordenadas xyz com origem no centro da Terra, com eixo dos z passando pelos pólos norte e sul, com o pólo norte no eixo positivo. O plano do equador corresponde ao plano xy com o eixo dos x passando pelo meridiano de Greenwich e o eixo de z corresponde à linha que passa pelos pólos. Os meridianos são metades dos *grandes círculos*, conforme abordaremos no Capítulo 2, que passam pelos pólos norte e sul e são determinados por θ , podendo ser a leste ou a oeste do Meridiano de Greenwich. A longitude θ varia de 0 a $\pm 180^\circ$, positivo quando no sentido leste e negativo quando a oeste.

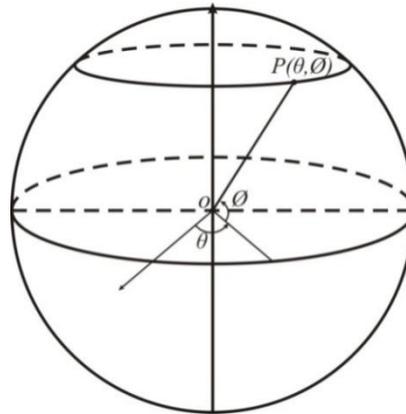


Figura 1.10 Coordenadas geográficas (θ, ϕ) de um ponto P no globo terrestre.

Já as latitudes são dadas em graus no sentido norte ou sul a partir do equador. Assim o ângulo φ das coordenadas esféricas é medido a partir do pólo norte, enquanto que o ângulo ϕ que corresponde à latitude do ponto é medido a partir do equador. Desta forma φ e ϕ são complementares. Então, a latitude de um ponto P será determinada por $\phi(P) = \frac{\pi}{2} - \varphi(P)$. Com o intuito de padronizar nossas notações, utilizamos neste trabalho a letra grega θ para denotar a longitude do ponto que varia no intervalo de $]-\pi, \pi[$ e ϕ para denotar a latitude do ponto variando de $\left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Em uma esfera de raio R , os pontos com longitude θ e latitude ϕ de um ponto P em coordenadas cartesianas são:

$$(x, y, z) = (R \cos \theta \cos \phi, R \sin \theta \cos \phi, R \sin \phi), \quad (1.1)$$

com $\theta \in]-\pi, \pi[$ e $\phi \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Agora se pretendermos encontrar os valores de ϕ e θ recorreremos às coordenadas cartesianas, considerando $\|(x, y)\| > 0$, baseado em (1.1) teremos que:

$$\phi = \arcsen(z/R) \text{ no intervalo de } \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

Já para se obter um único θ entre $]-\pi, \pi[$ utilizamos simultaneamente qualquer uma das equações a seguir:

$$tg\theta = \frac{y}{x}, \text{ com } x \neq 0$$

$$cotg\theta = \frac{x}{y}, \text{ com } y \neq 0$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ com } x^2 + y^2 \neq 0$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ com } x^2 + y^2 \neq 0$$

Ao longo deste trabalho consideraremos a parametrização da superfície como uma aplicação injetiva com derivadas parciais contínuas, $\delta: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, U aberto e tal que $\left\{ \frac{\partial \delta}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \delta}{\partial v}(u, v) \right\}$ seja linearmente independente $\forall u, v \in U$. A imagem de δ , portanto é uma superfície regular. [9] À região U do plano denominaremos “mapa”. Com um certo abuso, também denominaremos de mapa à inversa de δ restrita a sua imagem.

Capítulo 2

A GEOMETRIA DA ESFERA

Para o desenvolvimento deste capítulo as principais referências utilizadas foram [5], [6], [8], [9] e [10].

2.1 A ESFERA

Uma esfera é definida a partir de um número r (denominado raio) não nulo e um ponto O (centro) no espaço. Se considerarmos o ponto O e r um número real positivo denominamos *superfície esférica* ou *esfera* de centro O e raio r o conjunto de todos os pontos P do espaço cuja distância a O é igual a r .

$$\mathcal{S}(O, r) = \{P \mid d_{O,P} = r\}$$

Os pontos do espaço cuja distância a O é menor que r são interiores e aqueles cuja distância a O é maior que r são exteriores. Se interceptarmos com um plano uma superfície esférica a secção transversal será sempre uma circunferência. Em especial, quando pensamos na superfície terrestre, o equador é obtido através da intersecção de um plano que passa pelo centro O da Terra com a superfície terrestre e perpendicular ao eixo dos pólos. O raio do equador tem medida igual ao do modelo do globo terrestre e este é a maior circunferência da superfície esférica, assim como todas as demais circunferências obtidas da intersecção da superfície esférica com um plano que passa pelo centro. Estas circunferências são chamadas de *grandes círculos* (ou círculos máximos).

2.2 A INTERSECÇÃO DE UM PLANO E A SUPERFÍCIE ESFÉRICA

Teorema 2.2.1 - *A intersecção de uma superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é uma circunferência de mesmo centro e mesmo raio que a superfície esférica.*

Prova:

Seja uma superfície esférica \mathcal{S} com centro O e raio r e um plano α que passa por O . Se interceptarmos \mathcal{S} com o plano α , a intersecção $\alpha \cap \mathcal{S}$ é o conjunto de todos os pontos de α cuja distância a O é igual a r , que é exatamente a definição de uma circunferência de centro O e de raio r , completando assim a demonstração. ■

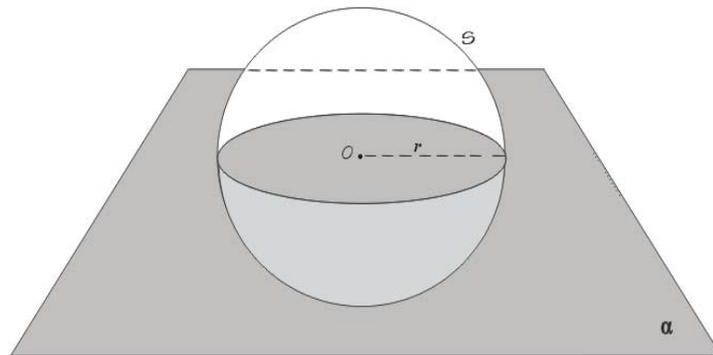


Figura 2.1 Intersecção da esfera \mathcal{S} com o plano α passando pelo centro O . Adaptada de [6, p.3]

Teorema 2.2.2 – *Se um plano intercepta um ponto interior de uma superfície esférica, então a intersecção do plano com a superfície esférica é uma circunferência.*

Prova: Seja α o plano que intercepta a superfície esférica, que não passa pelo centro O e que contém no seu interior um ponto qualquer X de $\alpha \cap \mathcal{S}$. Seja também C o pé da perpendicular a α traçada a partir de O , mostraremos a seguir que a intersecção $\alpha \cap \mathcal{S}$ é uma circunferência de centro C .

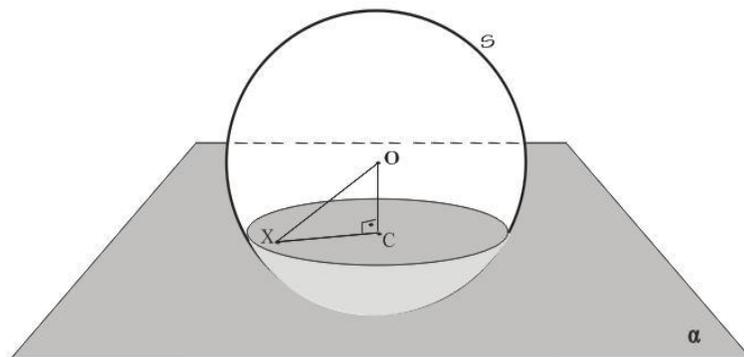


Figura 2.2 Intersecção da esfera \mathcal{S} com o plano α passando pelo centro O . Adaptada de [6, p.4]

$OX < r$ haja vista que X situa-se no interior de S. No triângulo retângulo OCX temos que \overline{OX} é a hipotenusa e \overline{OC} é um cateto e assim, $OC < OX < r$. O ΔOCX tem um ângulo reto em C, pois \overline{OC} é perpendicular ao plano α e assim, ΔOCX é um triângulo retângulo. Do Teorema de Pitágoras, $OC^2 + CX^2 = r^2 \Rightarrow CX = \sqrt{r^2 - OC^2}$. Logo X pertence a circunferência de centro C e raio $\sqrt{r^2 - OC^2}$ e fica provado que $\alpha \cap \mathcal{S}$ está contida na circunferência de centro C e raio $\sqrt{r^2 - OC^2}$. Precisamos provar também que todo ponto da circunferência pertence à intersecção do plano com a superfície esférica. Tomemos X um ponto qualquer da circunferência em α com centro em C e raio $\sqrt{r^2 - OC^2}$. Utilizando novamente o Teorema de Pitágoras resulta que $OX^2 = OC^2 + CX^2$, mas $CX^2 = r^2 - OC^2$, então $OX^2 = OC^2 + r^2 - OC^2 \Rightarrow OX^2 = r^2 \therefore OX = r$ e, portanto, X pertence à superfície esférica. ■

Quando um plano intercepta a superfície esférica passando pelo seu centro denominamos de **circunferência máxima** da superfície esférica, tendo em vista que estas são as circunferências de maior raio contidas na superfície esférica.

Na Cartografia é muito comum o termo “círculo” ser utilizado para designar “circunferência”, por exemplo, o meridiano e o equador são denominados como círculos máximos. Como este tipo de linguagem é tradicionalmente utilizado na literatura cartográfica, neste trabalho, utilizamos a denominação “círculo máximo”, assim como “grande círculo”, subentendendo que se trata de uma circunferência máxima.

2.3 CÍRCULOS MÁXIMOS E CÍRCULOS MENORES

Quando um plano intercepta uma esfera obtemos desta intersecção um círculo máximo ou um círculo menor. Os círculos são máximos quando o plano intercepta a esfera passando pelo seu centro C e são círculos menores quando este não for o caso, conforme ilustrado na Figura 2.3. O conceito de círculo máximo será extremamente útil para compreendermos o próximo tópico, que tratará sobre distâncias e geodésicas na esfera.

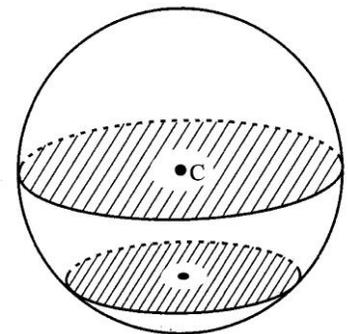


Figura 2.3 Círculos máximo e menor. Extraído de [5, p. 82]

2.4 DISTÂNCIAS E GEODÉSICAS NA ESFERA

A distância entre dois pontos sobre uma superfície é a menor distância que podemos obter dentre todos os caminhos (sobre a superfície) ligando estes dois pontos. Sabemos da geometria euclidiana plana que quando os pontos estão situados no plano, a menor distância é um segmento de reta que os interliga. Por outro lado, em uma esfera não temos segmentos de retas, pois ela é uma superfície curva em todas as direções. Como então medir a distância entre dois pontos na superfície esférica? Mostraremos a seguir que a curva que realiza a menor distância entre dois pontos A e B sobre a esfera será o menor arco do *círculo máximo* que contém esses pontos.

Embora, por A e B possamos considerar outros círculos, a distância entre eles sempre será medida ao longo do único círculo máximo a que pertencem os pontos A e B, porque por este caminho encontramos a menor distância entre estes pontos, esta é uma característica de uma geodésica, assunto que abordamos a seguir.

2.4.1 Geodésica

A menor curva ligando dois pontos em uma superfície regular é uma geodésica neste espaço. Na linguagem atual da Geometria Diferencial, *geodésica* sobre superfícies regulares são curvas cuja normal principal², coincide com a normal à superfície. [9]

As geodésicas no plano são retas. Da esfera são os *grandes círculos* \mathcal{C} , pois estes são obtidos interceptando a esfera com um plano que passa pelo centro O e desta forma, a normal principal em um ponto $p \in \mathcal{C}$ está na direção da reta que conecta p a O e como se trata de uma esfera, a normal está na mesma direção. As geodésicas de um cilindro podem ser círculos obtidos pela intersecção do cilindro com planos normais ao seu eixo ou retas geratrizes ou hélices da

² Para curvas regulares $\alpha(s)$, com derivadas contínuas até segunda ordem e parametrizadas pelo comprimento de arco, a direção normal principal é dada pelo vetor aceleração $\alpha''(s)$. [9] Se a curva regular $F(t), F: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ for dada num parâmetro qualquer e $F'(t)$ e $F''(t)$ forem linearmente independente, a direção da normal principal para cada t é dada pelo vetor $v(t) = F''(t) - \frac{\langle F''(t), F'(t) \rangle}{\langle F'(t), F'(t) \rangle} F'(t)$, que é perpendicular a $F'(t)$ e pertence ao plano gerado por $F'(t)$ e $F''(t)$ (plano osculador à curva). Já a direção normal à superfície regular parametrizada $(x, y, z) = \Psi(u, v)$, $\Psi: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ correspondente a cada par (u, v) é dada pelo vetor $N(u, v) = \frac{\partial \Psi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Psi}{\partial v}(u, v)$. Portanto dentro das condições acima e sendo $F(t) = \Psi(g(t))$, uma curva sobre a superfície $\Psi(u, v)$, (onde $(u, v) = g(t)$ é curva regular plana contida em U). Uma caracterização de geodésica pode ser dada por $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial u}(g(t)) \times \frac{\partial \Psi}{\partial v}(g(t)) \right) \times v(t) = 0$, para todo $t \in I$.

forma $(\cos as, \sin as, bs)$, onde a e b constantes. Em geral para superfícies regulares uma curva sobre uma superfície que minimize a distância será uma geodésica. [9] No caso específico da esfera este resultado pode ser provado de forma mais direta usando os conceitos de Cálculo de que os trajetos de comprimento mínimo na esfera são os arcos menores dos grandes círculos, conforme Teorema 2.4.1.1 a seguir. Assumimos aqui que os trajetos são realizados por curvas parametrizadas com derivada contínua e tais que o vetor derivada se anule no máximo em pontos isolados. As referências aqui são [8] e [11].

Teorema 2.4.1.1: *O menor caminho entre dois pontos em uma esfera \mathfrak{S} é um arco de um círculo máximo.*

Prova:

Consideremos dois pontos A e B arbitrários em uma esfera. Devemos provar que, de todas as rotas que conectam estes dois pontos, a de menor distância será o arco do *círculo máximo* ou *grande círculo* contendo os pontos A e B.

Seja $r: [a, b] \rightarrow \mathfrak{S}$ uma curva parametrizada sobre \mathfrak{S} com $r(a) = A$ e $r(b) = B$, $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ com funções coordenadas continuamente deriváveis. Temos que o comprimento desta curva é dado por:

$$\begin{aligned} \text{comprimento}(r) &= L_{A,B} = \int_a^b \|r'(t)\| dt & (2.1) \\ L_{A,B} &= \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt \end{aligned}$$

Tomemos \mathfrak{S} como uma esfera de raio R cujo centro está na origem do sistema de coordenadas cartesianas e dois pontos de coordenadas geográficas $A(\theta_1, \phi_1)$ e $B(\theta_2, \phi_2)$, sendo que a latitude ϕ é medida a partir do equador em radianos e a longitude θ medida a partir do primeiro meridiano.

Devemos agora mostrar que qualquer outro caminho conectando os pontos A e B sobre a esfera terá um comprimento maior ou igual a $R(\angle A\hat{O}B)$ que é o comprimento do arco seguindo o grande círculo.

Para isso, imaginemos que estejamos viajando partindo de A para qualquer outro ponto sobre a esfera. Nosso trajeto está sendo determinado por duas funções: $\phi(t)$ e $\theta(t)$, sendo estas a nossa latitude e longitude, respectivamente, em cada instante t .

Para determinarmos o comprimento de nossa trajetória integramos a função velocidade em função do tempo durante o intervalo de nossa viagem.

No tempo t nossa latitude é $\phi(t)$ e a longitude é $\theta(t)$. O nosso *vetor posição* no tempo t é dado por:

$$r(t) = (R \cos \phi(t) \cos \theta(t), R \cos \phi(t) \sin \theta(t), R \sin \phi(t))$$

O *vetor velocidade* em função do tempo t é obtido derivando as coordenadas do *vetor posição*:

$$r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

Resolvendo obtemos:

$$x'(t) = -R \sin \phi(t) \frac{d\phi}{dt} \cos \theta(t) - R \cos \phi(t) \sin \theta(t) \frac{d\theta}{dt}$$

$$y'(t) = -R \sin \phi(t) \frac{d\phi}{dt} \sin \theta(t) + R \cos \phi(t) \cos \theta(t) \frac{d\theta}{dt}$$

$$z'(t) = R \cos \phi(t) \frac{d\phi}{dt}$$

A velocidade escalar no tempo t é a norma do vetor velocidade:

$$\|r'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

$$\|r'(t)\| = R \cdot \sqrt{\left[-\sin \phi(t) \frac{d\phi}{dt} \cos \theta(t) - \cos \phi(t) \sin \theta(t) \frac{d\theta}{dt} \right]^2 + \left[-\sin \phi(t) \frac{d\phi}{dt} \sin \theta(t) + \cos \phi(t) \cos \theta(t) \frac{d\theta}{dt} \right]^2 + \left[\cos \phi(t) \frac{d\phi}{dt} \right]^2}$$

Desenvolvendo temos que:

$$\bullet \left[-\sin \phi(t) \frac{d\phi}{dt} \cos \theta(t) - \cos \phi(t) \sin \theta(t) \frac{d\theta}{dt} \right]^2 =$$

$$\left[-\sin \phi(t) \frac{d\phi}{dt} \cos \theta(t) \right]^2 + 2 \sin \phi(t) \frac{d\phi}{dt} \cos \theta(t) \cos \phi(t) \sin \theta(t) \frac{d\theta}{dt} + \left[\cos \phi(t) \sin \theta(t) \frac{d\theta}{dt} \right]^2$$

- $\left[-\text{sen } \phi(t) \frac{d\phi}{dt} \text{sen } \theta(t) - \text{cos } \phi(t) \text{cos } \theta(t) \frac{d\theta}{dt} \right]^2 =$
 $\left[-\text{sen } \phi(t) \frac{d\phi}{dt} \text{sen } \theta(t) \right]^2 - 2 \text{sen } \phi(t) \frac{d\phi}{dt} \text{sen } \theta(t) \text{cos } \phi(t) \text{cos } \theta(t) \frac{d\theta}{dt} +$
 $\left[\text{cos } \phi(t) \text{cos } \theta(t) \frac{d\theta}{dt} \right]^2$
- $\left[\text{cos } \phi(t) \frac{d\phi}{dt} \right]^2 = \text{cos}^2 \phi \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2.$

Assim temos:

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 =$$

$$R \left(\text{sen}^2 \phi \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 (\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta) + \text{cos}^2 \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 (\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta) + \text{cos}^2 \phi \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right).$$

$$\text{Sendo } \text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$$

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = R \left(\text{sen}^2 \phi \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \text{cos}^2 \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \text{cos}^2 \phi \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right)$$

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = R \left((\text{sen}^2 \phi + \text{cos}^2 \theta) \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \text{cos}^2 \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right)$$

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = R \left(\left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \text{cos}^2 \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \quad (2.2)$$

Por outro lado, a velocidade em função do tempo é dada por:

$$\|r'(t)\| = R \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \quad (2.3)$$

Substituindo (2.2) em (2.3) resulta que:

$$\|r'(t)\| = R \sqrt{\left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \text{cos}^2 \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2}$$

Retomando em (2.1), temos:

$$L_{\widehat{AB}} = \text{comp}(r) = R \int_a^b \|r'(t)\| dt$$

$$\text{Mas, por outro lado } \|r'(t)\| \geq \sqrt{\left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2} = \left| \frac{d\phi}{dt} \right| \geq -\frac{d\phi}{dt} \rightarrow L_{\widehat{AB}} \geq R \int_a^b -\frac{d\phi}{dt} dt$$

Podemos supor que A e B estejam sobre o mesmo meridiano e que $\phi(A) \geq \phi(B)$, pois caso não estejam temos que uma rotação (que é isometria no espaço) poderá levar o grande círculo passando por A e B em pontos \tilde{A} e \tilde{B} sobre o mesmo meridiano.

Teremos $[\phi(a) - \phi(b)] = \angle B\hat{O}A = \text{comp}(AB)$ que implica:

$$L_{\overline{AB}} \geq R[\phi(a) - \phi(b)] = R \angle B\hat{O}A \quad (2.4)$$

Assim a distância de A até B em $r(t)$ nunca será menor que o comprimento da rota que liga os dois pontos no *grande círculo*, que no caso é o meridiano, completando assim a prova. ■

Um exemplo de geodésica no globo terrestre é apresentado na referência [11], conectando Los Angeles a Londres, que ao longo da trajetória, atravessa o Canadá, cruza a Groenlândia (Dinamarca) e chega em Londres (Reino Unido), conforme ilustra a Figura 2.4 a seguir.

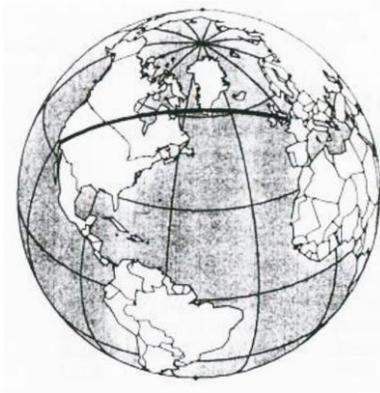


Figura 2.4 Geodésica conectando Los Angeles e Londres. Extraída de [11, p.44]

Quanto maior o raio da circunferência, mais ela se aproxima de uma reta, ou seja, um círculo de raio maior tem menor curvatura que um de raio menor, haja vista que a curvatura C de uma circunferência de raio r é $C = 1/r$, sendo então a curvatura inversamente proporcional ao raio. Como quanto maior o raio, menor será a curvatura, resulta que as circunferências de maior raio contidas na esfera são as circunferências máximas e, é razoável esperar que a menor distância sobre a esfera entre dois pontos A e B seja o comprimento do menor arco \widehat{AB} da *circunferência máxima* que passa por A e B.

E, de fato, como foi provado pelo Teorema 2.4.1.1, a rota menor entre dois pontos que estão sobre a Terra se encontra quando se segue uma a rota no arco de um *círculo máximo*, ou seja, a geodésica (menor curva ligando dois pontos na esfera) que é o menor arco da circunferência máxima da superfície esférica contendo estes pontos. A escolha do caminho que

minimize a distância no globo pode não ser tão significativa para curtas distâncias, mas pode fazer bastante diferença para longas distâncias.

Para encontrar o arco do *grande círculo* entre dois pontos dados em uma esfera, precisamos inicialmente determinar o plano determinado por estes dois pontos e o centro da esfera. A secção transversal obtida quando este plano intercepta a superfície esférica é o *grande círculo* ou *círculo máximo* que passa pelos pontos iniciais dados. No globo terrestre exemplos de círculos máximos são os meridianos e o equador. Assim, se pretendemos percorrer a trajetória entre dois pontos que estão na mesma latitude não nula a menor distância entre eles não é a rota percorrida no paralelo desta latitude e este fato foge de nossa percepção intuitiva. Isto é viajando em pontos de mesma latitude, estamos indo no sentido leste ou oeste, mas este não é o menor caminho, como discutiremos mais a frente. Em geral, percorrer uma trajetória numa direção constante, é conveniente para a navegação, no entanto, não é o menor caminho entre dois pontos, salvo se estivermos na linha do equador ou na rota de dois pontos que estão em um mesmo meridiano.

Observamos que pode haver mais de uma geodésica interligando dois pontos. No caso da esfera, passando pelo pólo norte e pólo sul há infinitas geodésicas conectando-os e, isto ocorre se e somente se estivermos considerando pontos diametralmente opostos. Em qualquer outra situação haverá apenas uma geodésica ligando dois pontos da esfera.

2.4.2 CÁLCULO DA DISTÂNCIA GEODÉSICA ENTRE DOIS PONTOS NA ESFERA

2.4.2.1 Distância entre dois pontos na esfera situados no equador ou num mesmo meridiano

Quando se trata de distância entre dois pontos contidos em um mesmo paralelo ou mesmo meridiano, quando caminhamos sobre estes é suficiente conhecermos a medida α do ângulo $\angle A\hat{O}B$, sendo O centro da superfície esférica terrestre e multiplicá-lo pela medida do raio da Terra. Como o comprimento do arco é proporcional à medida do ângulo central correspondente, então temos:

$$\frac{360^\circ}{\alpha^\circ} = \frac{2\pi R}{d_{A,B}} \quad \rightarrow \quad d_{A,B} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} 2\pi R \quad (2.5)$$

Para pontos que estão na mesma longitude, a diferença entre as latitudes pode ser utilizada para determinar α e, de forma análoga, para os que estão sobre o equador, a diferença entre as longitudes nos permite encontrar o valor de α .

Por exemplo, as cidades de Cuiabá (capital de Mato Grosso) e Alta Floresta – MT estão situadas aproximadamente no mesmo meridiano, cuja longitude corresponde a $56^\circ 05'$ (ao Oeste). Já suas latitudes correspondem respectivamente a $15^\circ 36'$ e $9^\circ 52'$ (ao sul). O valor de α corresponde à diferença de latitude das cidades, isto é, $5^\circ 44' \cong 5,733^\circ$. Tomando o raio da Terra como 6400 Km, segue de (2.1) que a distância do trajeto entre estas duas cidades caminhando sobre o meridiano será de:

$$d_{A,B} = \frac{5,733^\circ}{360^\circ} 2\pi \cdot 6400 \cong 640 \text{ km} .$$

O mesmo ocorre com as cidades de Curitiba-PR e Goiânia-GO que estão sobre o meridiano $49,25^\circ$ W (ao oeste) e suas latitudes aproximadas são respectivamente $25,4^\circ$ e $16,7^\circ$, ambas ao sul. As referidas cidades estão a diferença de latitude de $8,7^\circ$ e utilizando (2.5), obtemos:

$$d_{A,B} = \frac{8,7^\circ}{360^\circ} 2\pi \cdot 6400 \cong 971,8 \text{ km}$$

Já as cidades de Quito no Equador e Entebbe na Uganda estão na linha do Equador, portanto se situam em um *círculo máximo*, estão localizadas nas longitudes $78^\circ 35'$ (oeste) e $32^\circ 27'$ (leste) respectivamente. A diferença de suas longitudes é de aproximadamente 111° , o que resulta numa distância de $\frac{111^\circ}{360^\circ} 2\pi \cdot 6400 \cong 12.399 \text{ km}$ se nosso trajeto for sobre o equador, considerando o raio da Terra aproximadamente igual a 6400 km.

Os exemplos apresentados aqui tratam de pontos que estão situados em *círculos máximos*, ou seja, localizados em um mesmo meridiano ou no Equador.

Agora se tomarmos, por exemplo, duas cidades localizadas no mesmo paralelo, sem ser no equador, conforme ilustra a Figura 2.5, a distância mais curta entre elas não será o menor arco \widehat{AB} do paralelo, mas sim o menor arco do *círculo máximo* que passa por A e B, conforme provado no Teorema 2.4.1.1. e neste caso, para se calcular a distância entre estes dois pontos a

fórmula (2.1) não nos servirá e para tais situações apresentaremos a solução na próxima subsecção.

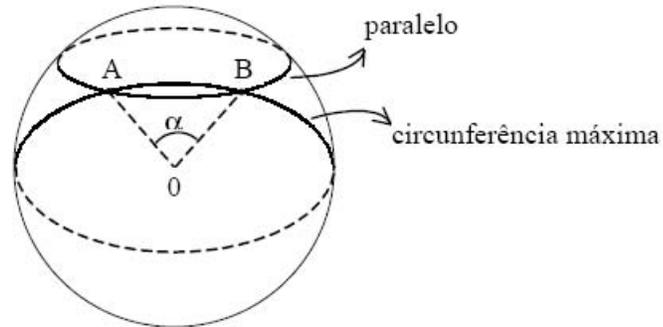


Figura 2.5 Pontos A e B situados no mesmo paralelo. Extraída de [6, p. 38]

2.4.2.2 Distância entre dois pontos quaisquer na esfera

Vimos no item 2.4.2.1 como calcular distâncias entre dois pontos situados em um mesmo meridiano ou no equador. Com o auxílio da geometria vetorial, mostraremos a seguir como calcular a distância entre dois pontos quaisquer em uma esfera. Pela própria definição de distância, a distância entre os pontos P_1 e P_2 na superfície esférica é a distância geodésica, que é medida do arco P_1P_2 determinado pelo círculo máximo que passa por P_1 e P_2 .

Para simplificar o desenvolvimento, consideraremos novamente o raio da esfera unitária e o centro desta coincidente com a origem do sistema de coordenadas cartesianas.

Tomemos dois pontos A e B com latitudes ϕ_1 e ϕ_2 e longitudes θ_1 e θ_2 dadas em radianos, respectivamente. Como visto no Capítulo 1, as coordenadas tridimensionais dos pontos na esfera unitária são:

$$P_1 = (\cos \phi_1 \cos \theta_1, \cos \phi_1 \sin \theta_1, \sin \phi_1) \text{ e } P_2 = (\cos \phi_2 \cos \theta_2, \cos \phi_2 \sin \theta_2, \sin \phi_2)$$

Com o centro da esfera também é o centro do grande círculo que conecta P_1 e P_2 , $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$ têm origem no centro do sistema de coordenadas adotado e comprimento igual ao raio do *grande círculo*. O ângulo formado por estes dois vetores (o menor dos dois ângulos) indica-nos a porção que teremos que caminhar para ir de um ponto ao outro. Da Geometria Analítica o cosseno do ângulo α entre dois vetores é dado pela razão entre o produto escalar (ou interno) dos dois vetores e o produto das normas dos respectivos vetores.

$$\cos \alpha = \frac{\langle OP_1, OP_2 \rangle}{\|OP_1\| \|OP_2\|},$$

como no nosso caso, o raio é unitário, teremos que:

$$\cos \alpha = \langle OP_1, OP_2 \rangle \Rightarrow \alpha = \text{Arc cos } \langle OP_1, OP_2 \rangle$$

$$\langle OP_1, OP_2 \rangle = (\cos \phi_1 \cos \theta_1, \cos \phi_1 \sin \theta_1, \sin \phi_1) \cdot (\cos \phi_2 \cos \theta_2, \cos \phi_2 \sin \theta_2, \sin \phi_2)$$

$$\langle OP_1, OP_2 \rangle = (\cos \phi_1 \cos \theta_1 \cos \phi_2 \cos \theta_2 + \cos \phi_1 \sin \theta_1 \cos \phi_2 \sin \theta_2 + \sin \phi_1 \sin \phi_2)$$

$$\langle OP_1, OP_2 \rangle = (\cos \phi_1 \cos \phi_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) + \sin \phi_1 \sin \phi_2).$$

$$\text{Como } \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

$$\langle OP_1, OP_2 \rangle = (\cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin \phi_1 \sin \phi_2).$$

Logo o ângulo α formado entre os dois vetores é determinado por:

$$\alpha = \text{Arc cos } (\cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin \phi_1 \sin \phi_2). \quad (2.6)$$

Se considerarmos o raio da esfera unitário ocorre que a medida do ângulo em radiano é a própria distância entre os dois pontos.

Para uma esfera de raio R qualquer, teremos que a distância entre os pontos $P_1(\theta_1, \phi_1)$ e $P_2(\theta_2, \phi_2)$ é:

$$\text{distância}_{P_1, P_2} = R \text{Arc cos } (\cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin \phi_1 \sin \phi_2). \quad (2.7)$$

Resumindo:

Para se obter a distância entre dois pontos quaisquer P e Q no globo terrestre conhecendo-se as suas coordenadas geográficas, procedemos da seguinte maneira:

- Obtemos inicialmente as coordenadas correspondentes em coordenadas cartesianas e usando o produto interno $\langle OP, OQ \rangle$, determinamos $\alpha = m(\angle P\hat{O}Q)$. A distância então procurada será:

$$d_{P,Q} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} 2\pi R$$

Exemplo 2.4.2.2.1: Para exemplificar, vamos calcular a menor distância entre Sinop/MT/Brasil e Campinas/SP/Brasil:

Em Sinop/MT a latitude vale aproximadamente $11^\circ 51'$ (ao Sul) e longitude $55^\circ 30'$ (ao oeste). Assim, em radianos, a latitude e longitude de Sinop valem, respectivamente

$$\phi_1 = -\frac{11,85\pi}{180} (S) \text{ e } \theta_1 = -\frac{55,50\pi}{180} (W).$$

Em Campinas/SP a latitude é aproximadamente $22^{\circ}54'$ (ao Sul) e $47^{\circ}04'$ (ao Oeste), que em radianos correspondem respectivamente a

$$\phi_2 = -\frac{22,9\pi}{180} (S) \text{ e } \theta_2 = -\frac{47,06\pi}{180} (W).$$

Como as cidades estão localizadas ao sul e ao oeste, então as suas coordenadas serão negativas.

Para se determinar o ângulo entre as duas cidades, considerando o centro da Terra como origem e utilizando a equação (2.7), obtemos que

$\alpha = \text{Arc cos}(\cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \text{sen } \phi_1 \text{sen } \phi_2)$ vale aproximadamente 0,2385 rad.

Considerando o raio da Terra aproximadamente igual a 6400 km obtemos que a distância entre as cidades envolvidas será:

$$\text{distância}_{\text{Sinop}, \text{Campinas}} = 6400 \cdot 0,2385 \cong 1526,4 \text{ km}$$

Exemplo 2.4.2.2.2: Sejam as coordenadas geográficas das cidades abaixo:

- **Londres - Inglaterra:** Latitude: $51,5^{\circ}$ (Norte) e 0° de longitude
- **Calgary - Canadá:** Latitude: $51,5^{\circ}$ (Norte) e longitude: 114° (oeste)
- **Campinas - Brasil:** Latitude: $22^{\circ}54'$ (ao Sul) e longitude: $47^{\circ}04'$ (ao Oeste)

a) Qual das cidades está mais próxima de Londres: Campinas ou Calgary?

- Distância entre Londres e Calgary:

$$\alpha = \text{Arc cos} \left(\cos \frac{51,5\pi}{180} \cos \frac{51,5\pi}{180} \cos \left(-\frac{114\pi}{180} - 0 \right) + \text{sen} \frac{51,5\pi}{180} \text{sen} \frac{51,5\pi}{180} \right)$$

$$\alpha \cong 1,09859$$

$$\text{distância}_{\text{Londres}, \text{Calgary}} = R \cdot \alpha = 6400 \cdot 1,09859 \cong 7031 \text{ km}$$

- Distância entre Londres e Campinas:

$$\alpha = \text{Arc cos} \left(\cos \frac{51,5\pi}{180} \cos -\frac{22,9\pi}{180} \cos \left(-\frac{47,06\pi}{180} - 0 \right) + \text{sen} \frac{51,5\pi}{180} \text{sen} -\frac{22,9\pi}{180} \right)$$

$$\alpha \cong 1,48457$$

$$\text{distância}_{\text{Londres}, \text{Campinas}} = R \cdot \alpha = 6400 \cdot 1,48457 \cong 9501 \text{ km}$$

Logo Calgary – Canadá é mais próxima de Londres do que Campinas – Brasil.

Simulando estas trajetórias no site <http://www.daftlogic.com/projects-google-maps-distance-calculator.htm>, pudemos observá-las em uma projeção cilíndrica eqüidistante, e, além disto, constatamos que para ir de Londres até Calgary, a trajetória do círculo máximo passa pelo sul da Groelândia conforme ilustra a Figura 2.6.



Figura 2.6 Trajetórias de menor distância entre Calgary – Londres – Campinas gerada em [18]

b) De quantos quilômetros a distância entre Londres e Calgary pelo paralelo $51,5^\circ$ excede a do círculo máximo?

A distância pelo círculo máximo é aproximadamente 7031 km , como calculado no item

(a). Por outro lado, a trajetória de Londres a Calgary pelo paralelo $51,5^\circ$ (N) será:

$$2\pi R \frac{114^\circ}{360^\circ} \cdot \cos(\phi) = 6400 \cdot \cos\left(\frac{51,5\pi}{180}\right) \cdot \frac{114\pi}{180} \cong 7927 \text{ km}$$

Portanto, se a rota escolhida for pelo paralelo $51,5^\circ$ N, a trajetória será aproximadamente 896 km mais longa que pelo círculo máximo. Estas mesmas trajetórias serão abordadas no Capítulo 4 na perspectiva do Mapa de Mercator.

2.5 ÂNGULO ESFÉRICO

Quando estamos trabalhando no plano referimo-nos a ângulo entre duas retas. Na esfera, os *círculos máximos* assumem o papel das retas e assim, dois *círculos máximos* se interceptam em dois pontos antipodais e desta maneira, é possível falar sobre ângulo entre dois grandes

círculos. Considerando que o *grande círculo* é obtido da intersecção da esfera com um plano que contém o centro da esfera podemos definir o ângulo entre dois grandes círculos como sendo o ângulo entre os planos correspondentes.

Para obtermos o ângulo entre a intersecção de dois grandes arcos torna-se necessário uma suave adaptação. O ângulo esférico é definido como sendo a intersecção entre dois grandes círculos e a sua medida é a mesma do ângulo plano formado pelas tangentes no ponto de intersecção, conforme ilustra a Figura 2.7.

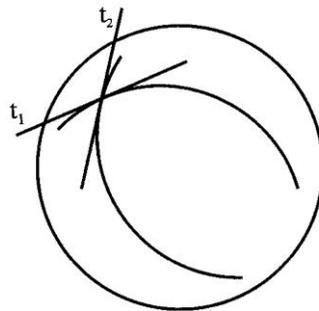


Figura 2.7 Ângulo esférico. Extraída de [5, p. 83]

2.6 TRIÂNGULO ESFÉRICO

Sejam A, B e C três pontos distintos na esfera e não pertencentes a um mesmo *círculo máximo*, conforme ilustra a Figura 2.8. Um triângulo esférico ABC sobre a esfera consiste em um “triângulo” cujos três vértices estão ligados pelos círculos máximos que se interceptam dois a dois.

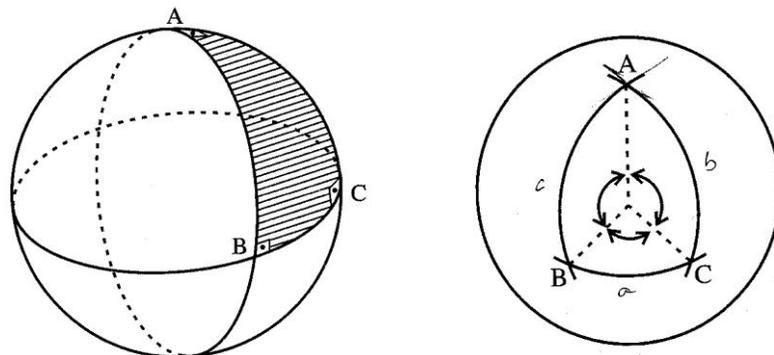


Figura 2.8 Triângulos Esféricos. Extraída de [5, p. 87]

2.6.1 Definição

Um triângulo esférico em S^2 é uma terna (x, y, z) de pontos em S^2 que são linearmente independentes como vetores no \mathbb{R}^3 .

2.6.2 A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico

Para um triângulo no plano a soma dos ângulos internos é sempre π radianos, mas para um triângulo esférico a soma dos ângulos internos pode ser qualquer número entre π e 3π radianos (exclusive):

$$\pi < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 3\pi \quad (2.8)$$

A justificativa para tal desigualdade pode ser obtida se considerarmos que cada ângulo de um triângulo esférico é formado por dois grandes círculos e desta forma, deve ser menor que π radianos e, conseqüentemente a soma destes ângulos necessariamente, deve ser menor que 3π radianos. A Figura 2.9 a seguir ilustra os ângulos de triângulos esféricos de quatro situações, sendo que a última trata-se de um triângulo esférico degenerado, pois tem um dos ângulos igual a π .

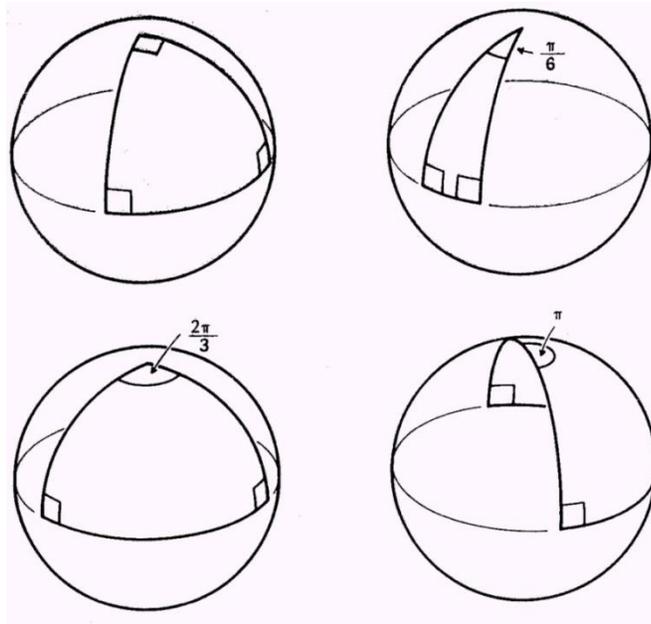


Figura 2.9 Ângulos internos de triângulos esféricos. Extraída de [10, p. 140]

2.7 ÁREA DE UMA DUPLA LUA

Definição 2.7.1: *Dupla lua é a região de uma esfera que está entre a intersecção de dois grandes círculos da esfera.*

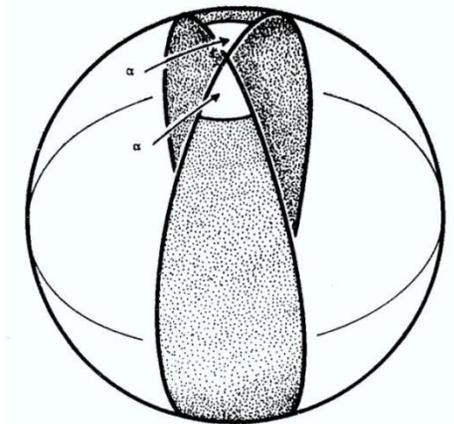


Figura 2.10 Dupla lua com ângulo α . Extraída de [10, p. 141]

Se a *dupla lua* é formada por dois grandes círculos que se interceptaram em um ângulo α radianos, então a área da lua é igual a $\frac{2\alpha}{2\pi}$ vezes o total da área da superfície esférica de raio R que é $4\pi R^2$. Temos então uma razão de proporção entre o ângulo α da dupla lua e a área da superfície esférica.

$$\frac{\text{Área(setor)}}{\text{Área(esfera)}} = \frac{\text{Área(dupla lua)}}{4\pi R^2} = \frac{2\alpha}{2\pi}$$

Desta forma obtemos que

$$\text{Área lua dupla} = \frac{\alpha}{\pi} 4\pi R^2$$

$$\text{Área lua dupla} = 4\alpha R^2, \quad (2.9)$$

onde α é o ângulo em radianos entre os *grandes círculos* que definem a *dupla lua*.

2.8 ÁREA E A SOMA DOS ÂNGULOS E DE UM TRIÂNGULO ESFÉRICO

Teorema 2.8.1 *A soma dos ângulos de um triângulo esférico de área A numa esfera de raio R excede de $\frac{A}{R^2}$ o valor de π .*

Seja A a área de um triângulo esférico com ângulos α, β e γ sobre uma esfera de raio R . Devemos mostrar que $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{R^2}$, onde as medidas dos ângulos são dadas em radianos e R é o raio da esfera.

Inicialmente prolongamos os lados do triângulo esférico ao redor da esfera e assim obtemos três grandes círculos, como mostra a Figura 2.11.

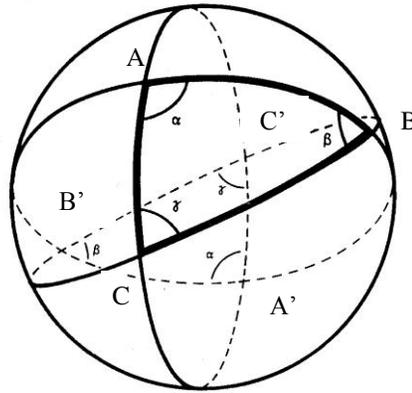


Figura 2.11 Triângulo esférico e o triângulo antipodal atrás da esfera. Extraída de [10, p. 142]

Um triângulo antipodal idêntico ao inicial é formado atrás da esfera. De acordo com a equação (2.9) esta dupla lua de ângulos α, β e γ , tem áreas respectivamente iguais a $A(AA') = 4\alpha R^2, A(BB') = 4\beta R^2$ e $A(CC') = 4\gamma R^2$.

Quando tomamos as três luas duplas sombreadas simultaneamente teremos que todas as partes da superfície da esfera são cobertas pelo menos uma vez e o triângulo e seu antipodal serão hachurados 3 vezes, uma vez para cada lua, conforme mostra a Figura 2.12 a seguir:

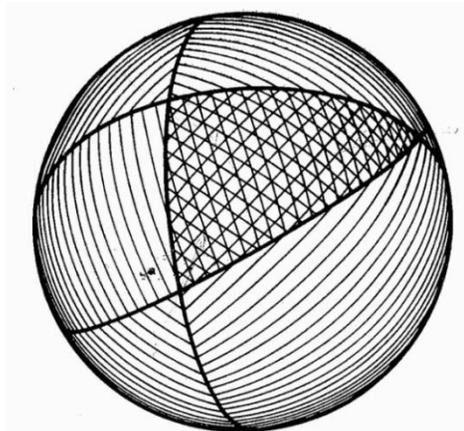


Figura 2.12 Três duplas luas sobrepostas. Extraída de [10, p. 145]

Como são dois triângulos de áreas iguais, teremos que a soma das áreas das duplas luas terá quatro vezes a mais a área do triângulo esférico de área A_{ABC} para completar a área total da superfície esférica, assim:

$$\begin{aligned} A_{sup.esf.} &= A(AA') + A(BB') + A(CC') - 4A_{ABC} \\ 4\pi R^2 &= 4\alpha R^2 + 4\beta R^2 + 4\gamma R^2 - 4A_{ABC} \end{aligned}$$

Fazendo $A_{ABC} = A$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{R^2} \quad (2.10)$$

De (2.10) podemos também obter a área A do triângulo esférico em função de seus ângulos:

$$\begin{aligned} A &= R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \\ A_{triang.esf.} &= R^2(\text{soma dos ângulos} - \pi) \end{aligned} \quad (2.11)$$

A equação (2.11) relaciona a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico com a sua área. De acordo com Weeks (1980), esta equação aparece em 1629 no livro *Invention nouvelle em L'Algebre* de Albert Girard e traz implícita propriedades muito interessantes.

O valor (*soma dos ângulos* - π) é frequentemente chamado de *ângulo em excesso* do triângulo esférico. Se considerarmos um triângulo esférico no globo terrestre formado por um dos vértices no pólo norte e os outros dois no equador separado de 1° de longitude, obtemos um ângulo de excesso de $(\pi/2 + \pi/2 + \pi/180) - \pi = \pi/180$. A área deste triângulo será então $A = \left(\frac{\pi R^2}{180}\right) \cong 71.488,7 \text{ Km}^2$, que excede a área do estado do Rio de Janeiro, que é de aproximadamente 43.696 km^2 .

Desta relação temos que a soma dos ângulos do triângulo esférico deve sempre ultrapassar a π radianos, diferentemente do que ocorre com a soma dos ângulos internos de todos os triângulos no plano que sempre é igual a π radianos. Outra propriedade muito interessante é que dois triângulos esféricos com mesmos ângulos devem possuir a mesma área, diferentemente do que acontece com dois triângulos no plano com ângulos congruentes, que embora sejam semelhantes, não necessariamente possuem a mesma área.

Esta distinção clara entre as geometrias da esfera e do plano leva a outra questão crucial em nossa abordagem: - Quão fiel pode ser um mapa plano da esfera? Ou mais especificamente: -

Há um mapa plano de uma esfera, ou uma porção dela que todas as rotas dos grandes círculos entre dois pontos sejam representados por segmentos de reta e ainda são preservados os ângulos?

Se considerarmos três pontos A, B e C sobre a esfera, como vimos anteriormente os lados deste triângulo são arcos de grandes círculos, então a imagem deste no plano deveria ser um usual triângulo plano, com vértices em A, B e C. Mas a soma dos ângulos do triângulo plano será π ou 180° , enquanto que em um triângulo esférico a soma dos ângulos internos é sempre maior que 180° . Desta maneira nosso mapa plano não conserva ângulo. Uma pergunta similar a esta, foi colocada por muito tempo pelos cartógrafos: - É possível construir um mapa plano representando o globo de forma que a distância entre dois quaisquer pontos neste mapa, medida em linha reta seja a mesma correspondente no globo, multiplicada por um fator de escala? Este fator de escala deveria atender então à seguinte razão: $\frac{\text{distância entre dois pontos no mapa}}{\text{distância entre os mesmos dois pontos no globo}} = m$ e, assim estaria garantido que todo ponto do globo teria sua imagem correspondente no mapa plano e os grandes círculos do globo seriam representados como segmentos de reta.

Na próxima seção apresentamos a prova dada por Euler que não existe tal mapa plano que conserve simultaneamente área e ângulo.

2.9 EULER FINALMENTE PROVA QUE NÃO É POSSÍVEL PLANIFICAR A TERRA

Historicamente os cartógrafos buscaram encontrar uma forma de representar o globo terrestre em um mapa planificado de forma que reproduzisse as diferentes localidades do globo terrestre preservando, na mesma escala, as distâncias entre elas. Desta maneira, o mapa estaria livre de distorções. Em outras palavras, procurou-se construir um mapa plano para o qual a distância entre quaisquer dois de seus pontos é sempre igual a um múltiplo fixo da distância entre os pontos correspondentes no globo.

Isto perdurou até o século XVIII, quando um dos maiores expoentes da Matemática de todos os tempos, o suíço Leonardo Euler (1707-1783) demonstrou a impossibilidade desse feito. Foi no trabalho “Sobre as Representações de uma Superfície Esférica no Plano” entregue à Academia de Ciências de St. Petersburg, que Euler provou que este intento era impossível. Mostraremos a seguir a prova de que é impossível planificar a esfera.

Prova do Teorema de Euler:

Consideremos uma pequena região ao redor de um ponto P da esfera de raio R . Seja também um ponto Q sobre a esfera, com $\widehat{PQ} = r$. Uma circunferência de raio s pode ser formada por todos os pontos que distam r de P na esfera conforme a Figura 2.13.

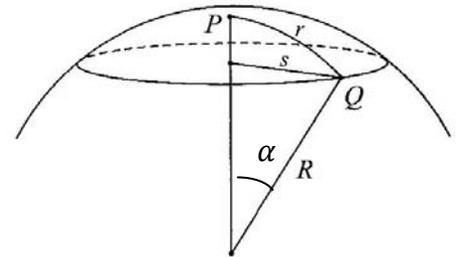


Figura 2.13 Região da esfera ao redor do ponto P .

Raciocinando por absurdo, suponhamos que os pontos da esfera possam ser representados em um plano por um fator de escala m e assim sendo, o arco de comprimento r ao longo de um grande círculo da esfera seria transformado num segmento retilíneo de comprimento r vezes um fator de escala m no mapa plano. Assim, todos os pontos que equidistam r de P na esfera deveriam ser mapeados por pontos que distam de mr de P no plano. A nova circunferência obtida no plano teria comprimento $2\pi mr$. Por outro lado os pontos Q na esfera com $\widehat{PQ} = r$, formariam uma circunferência de raio s com $s < r$, pois da Geometria Elementar, temos que $r = \alpha R$ e observando a Figura 2.13 temos que $s = R \sin \alpha$. Como $\alpha > \sin(\alpha)$ resulta que $s < r$. Desta maneira o comprimento da circunferência de raio s representado no plano a um fator de escala m seria $2\pi ms$ que é menor que $2\pi mr$. Não podemos ter uma imagem com circunferência de comprimento igual a $2\pi mr$ e menor que $2\pi mr$ ao mesmo tempo, o que nos conduz a uma contradição e conclui a demonstração. ■

Este resultado é fácil de ser imaginado quando se busca tomar uma porção de uma bola de borracha oca e tentamos torná-la plana. Para isto torna-se necessário esticar uma parte, encolher outra e neste processo é introduzida uma série de deformações, que se reflete sobre os ângulos, os comprimentos e as áreas. Não se pode eliminá-las totalmente, mas é possível conservar uma ou outra de suas propriedades.

Ao contrário da esfera, a métrica do cilindro pode ser localmente preservada no plano, pois se cortarmos um cilindro por uma das geratrizes podemos desenrolá-lo sobre uma parte do plano.

Diante destes resultados, a representação da superfície da Terra, seja ela de formato elipsoidal ou esférica, sobre uma superfície plana ou sobre uma superfície planificável provoca

deformações ou distorções inevitáveis e, assim, diferentes técnicas são utilizadas para se obter determinadas propriedades desejáveis, sendo necessário para isto fazer dilatações, compressões ou até mesmo “rasgos” para atender propósitos específicos. Na próxima seção, apresentamos a projeção estereográfica para ilustrar uma destas possibilidades.

2.10 PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA

Este tipo de projeção é um exemplo de mapa azimutal³, onde os pontos da superfície da Terra são projetados sobre um plano tangente, de um ponto de vista situado na posição diametralmente oposta ao ponto de tangência. Por exemplo, se o pólo sul é o ponto central, então o ponto de vista está no pólo norte, como ilustra a figura a seguir:

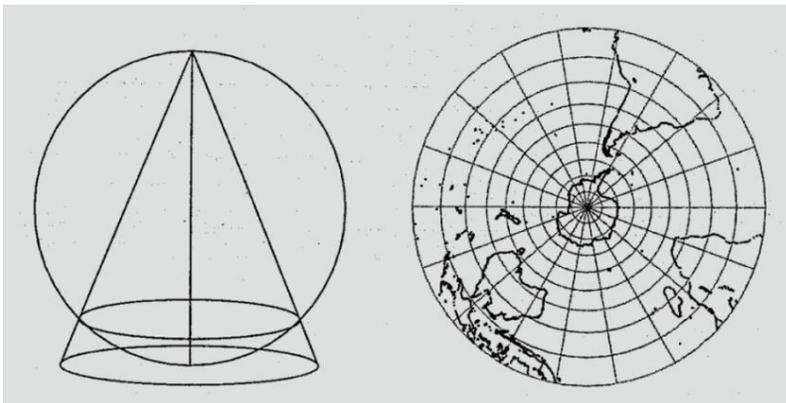


Figura 2.14 Projeção Estereográfica – Mapa do hemisfério sul.
Extraída de [8, p.43]

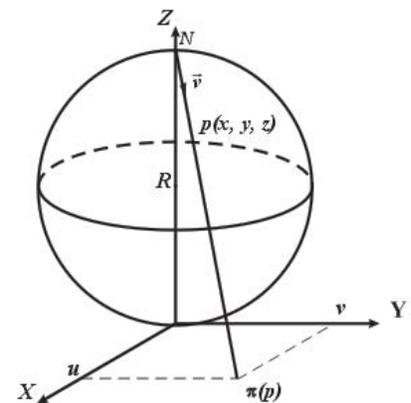


Figura 2.15 Projeção Estereográfica.

Vamos obter as coordenadas dos pontos (u, v) que pertencem a projeção estereográfica em função dos pontos (x, y, z) da esfera. A projeção estereográfica dos pontos da esfera sobre o plano partindo do pólo norte, conforme Figura 2.15, é deduzida a seguir. Para isto, vamos parametrizar a reta que faz este trajeto, passando pelo pólo norte e interceptando o plano XY.

³ Mapa que sempre mostra a rota mais curta do ponto central como linha reta, isto é verdade, pois neste mapa as retas que saem do ponto central correspondem a grandes círculos.

Consideremos a esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\}$ de centro $O = (0, 0, 1)$ no espaço \mathbb{R}^3 . Seja também $N = (0, 0, 2) \in \mathbb{R}^3$ o pólo norte desta esfera.

Definimos uma aplicação $\pi: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, que associa um ponto $p \in S^2 \setminus \{N\}$ a um ponto de coordenadas $(u, v) = \pi(x, y, z)$ pertencente ao plano XY .

A reta que passa pelo pólo norte (ponto N) e pelo ponto p qualquer da esfera é determinada pelo conjunto:

$$\{Q = N + t(p - n) = (0, 0, 2) + t(x, y, z - 2)\}, \text{ com } t \in \mathbb{R} \text{ ou}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \\ z - 2 \end{pmatrix}$$

Precisamos de $\pi(p)$ e podemos obtê-lo fazendo a reta interceptar o plano xy e neste caso, $\pi(p) = Q$ e como $\pi(p) \in$ ao plano XY , ele será da forma $(X, Y, 0)$, com $X, Y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - 2 \end{pmatrix}$$

Da igualdade resulta: $X = tx$, $Y = ty$ e $t = \frac{2}{2-z}$

Substituindo obtemos que:

$$X = \frac{2}{2-z}x \quad \text{e} \quad Y = \frac{2}{2-z}y$$

Assim,

$$(X, Y) = \left(\frac{2}{2-z}x, \frac{2}{2-z}y \right)$$

Como $(X, Y) = (u, v)$

$$\pi(x, y, z) = (u, v) = \left(\frac{2}{2-z}x, \frac{2}{2-z}y \right) \quad (2.12)$$

π assim definida é denominada de **projeção estereográfica**.

A projeção estereográfica tem uma propriedade especial que é a de preservar ângulos, ou seja, ela é conforme. Uma forma de mostrar isto, colocado de maneira bastante resumida, usando a geometria diferencial é olharmos para a parametrização da esfera e calcularmos a matriz de sua

primeira forma fundamental⁴, mostrando que esta é múltipla da matriz identidade (vide a referência [9]).

Isto acontece, porque se tomarmos duas curvas no plano $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ na região de parametrização, teremos que $\alpha'(t)$ e $\beta'(t)$ são retas tangentes a elas e o ângulo θ entre elas, com $\alpha'(t)$ e $\beta'(t) \neq 0$ é dado por:

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t), \beta'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\| \|\beta'(t)\|},$$

sendo $\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t))$ e $\beta'(t) = (\beta_1'(t), \beta_2'(t))$.

Quando tomamos a imagem das curvas no espaço por uma parametrização $\delta(u,v)$ teremos $\gamma(t) = \delta(\alpha(t))$ e $\lambda(t) = \delta(\beta(t))$.

Podemos obter o ângulo $\tilde{\theta}$ entre $\gamma'(t)$ e $\lambda'(t)$ que são retas tangentes a estas curvas na superfície, com $\gamma'(t)$ e $\lambda'(t) \neq 0$ calculando

$$\cos \tilde{\theta} = \frac{\langle \gamma'(t), \lambda'(t) \rangle}{\|\gamma'(t)\| \|\lambda'(t)\|},$$

sendo $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \gamma_3'(t))$ e $\lambda'(t) = (\lambda_1'(t), \lambda_2'(t), \lambda_3'(t))$

Por outro lado, da Regra da Cadeia, temos que o produto escalar

$$\langle \gamma'(t), \lambda'(t) \rangle = [\alpha_1'(t) \quad \alpha_2'(t)] \begin{bmatrix} \langle \frac{\partial \delta}{\partial u}, \frac{\partial \delta}{\partial u} \rangle & \langle \frac{\partial \delta}{\partial u}, \frac{\partial \delta}{\partial v} \rangle \\ \langle \frac{\partial \delta}{\partial u}, \frac{\partial \delta}{\partial v} \rangle & \langle \frac{\partial \delta}{\partial v}, \frac{\partial \delta}{\partial v} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1'(t) \\ \beta_2'(t) \end{bmatrix}$$

Se calcularmos a matriz da primeira forma fundamental:

$$\mathcal{F}_1 = \begin{bmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \frac{\partial \delta}{\partial u}, \frac{\partial \delta}{\partial u} \rangle & \langle \frac{\partial \delta}{\partial u}, \frac{\partial \delta}{\partial v} \rangle \\ \langle \frac{\partial \delta}{\partial u}, \frac{\partial \delta}{\partial v} \rangle & \langle \frac{\partial \delta}{\partial v}, \frac{\partial \delta}{\partial v} \rangle \end{bmatrix} \text{ e obtivermos}$$

$$\mathcal{F}_1 = \begin{bmatrix} k(u,v) & 0 \\ 0 & k(u,v) \end{bmatrix} = k(u,v) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ que é múltipla da identidade então:}$$

⁴ Seja $\gamma(t) = \delta(u(t), v(t))$ uma curva numa superfície \mathfrak{S} , totalmente descrita por um mapa δ , a matriz da primeira

forma fundamental é definida como: $\mathcal{F}_1 = \begin{bmatrix} \langle \frac{\partial \delta}{\partial u}(q), \frac{\partial \delta}{\partial u}(q) \rangle & \langle \frac{\partial \delta}{\partial u}(q), \frac{\partial \delta}{\partial v}(q) \rangle \\ \langle \frac{\partial \delta}{\partial u}(q), \frac{\partial \delta}{\partial v}(q) \rangle & \langle \frac{\partial \delta}{\partial v}(q), \frac{\partial \delta}{\partial v}(q) \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{bmatrix}$,

sendo $q = (u(t), v(t))$.

$\langle \gamma'(t), \lambda'(t) \rangle = k(u, v) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [\alpha'(t) \quad \beta'(t)]$ e neste caso o ângulo $\tilde{\theta}$ é igual a θ e desta maneira, o mapa preserva o ângulo, ou seja, é conforme.

Diante do exposto, vamos mostrar que a projeção estereográfica é conforme.

A função inversa $\delta: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ é dada por:

$$\delta(u, v) = \pi^{-1}(u, v) = (x, y, z) = \left(\frac{4u}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4}, \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4} \right)$$

$$\pi^{-1}(u, v) = \frac{2}{u^2 + v^2 + 4} (2u, 2v, u^2 + v^2)$$

pois $\pi_o \pi^{-1} = (u, v)$

Precisamos da matriz da primeira forma fundamental de π^{-1} de S :

$$\mathcal{F}_I = \begin{vmatrix} \langle \pi_u^{-1}, \pi_u^{-1} \rangle & \langle \pi_u^{-1}, \pi_v^{-1} \rangle \\ \langle \pi_u^{-1}, \pi_v^{-1} \rangle & \langle \pi_v^{-1}, \pi_v^{-1} \rangle \end{vmatrix}$$

$$\langle \pi_u^{-1}, \pi_u^{-1} \rangle = \frac{16}{(u^2 + v^2 + 4)^2},$$

$$\langle \pi_v^{-1}, \pi_v^{-1} \rangle = \frac{16}{(u^2 + v^2 + 4)^2},$$

$$\langle \pi_u^{-1}, \pi_v^{-1} \rangle = 0$$

$$\mathcal{F}_I = \begin{vmatrix} \frac{16}{(u^2 + v^2 + 4)^2} & 0 \\ 0 & \frac{16}{(u^2 + v^2 + 4)^2} \end{vmatrix}.$$

Fazendo $k(u, v) = \frac{16}{(u^2 + v^2 + 4)^2}$, teremos: $\mathcal{F}_I = \begin{vmatrix} k(u, v) & 0 \\ 0 & k(u, v) \end{vmatrix}$

Portanto, a projeção estereográfica é conforme.

2.11 ÁREA DA ESFERA

Para determinar a área de regiões sobre uma superfície esférica vamos inicialmente tomar a equação $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ e calcular o elemento de área da superfície

$$dA = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy.$$

Calculando as derivadas parciais temos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \text{ e } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \text{ e então:}$$

$$\begin{aligned} dA &= \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + 1} dx dy = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2} + 1} dx dy \\ &= \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + R^2 - x^2 - y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \end{aligned}$$

$$dA = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

Mudando para coordenadas cilíndricas obtemos:

$$dx dy = r dr d\theta \text{ e } r^2 = x^2 + y^2 \text{ e assim:}$$

$$dA = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} r dr d\theta$$

Integrando o elemento de área de superfície na região que vai do raio interno $r = R \cos(\phi + \Delta\phi)$ ao raio externo $r = R \cos\phi$ com $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ e ângulo polar entre θ e $\theta + \Delta\theta$, temos:

$$\text{Área} = R \int_{\theta}^{\theta + \Delta\theta} \int_{r=R \cos(\phi + \Delta\phi)}^{r=R \cos(\phi)} \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r dr d\theta$$

Tomando $r = R \cos u$ com $\phi \leq u \leq \phi + \Delta\phi$, temos $dr = -R \sin u du$

$$\text{Área} = R \int_{\theta}^{\theta + \Delta\theta} \int_{u=\phi + \Delta\phi}^{u=\phi} \frac{R \cos u \cdot -R \sin u du d\theta}{R \sin u}$$

$$\text{Área} = R^2 [\text{sen}(\phi + \Delta\phi) - \text{sen}\phi] \Delta\theta$$

Esta é, portanto, a área do setor de esfera entre as latitudes ϕ e $\phi + \Delta\phi$ e longitudes θ e $\theta + \Delta\theta$ quando expressas em radianos. Tomando o caso limite em que $\phi = 0$ e $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ e θ variando entre 0 a 2π , temos que a área da semi-esfera é $2\pi R^2$.

Apresentado os conceitos da geometria da esfera, nos próximos capítulos apresentamos o desenvolvimento de um estudo envolvendo as propriedades matemáticas de dois mapas, o de latitude-longitude e o de Mercator.

Capítulo 3

O MAPA LATITUDE-LONGITUDE

Consideremos como anteriormente os pontos do globo descritos pelas coordenadas (ρ, θ, φ) , com $R = \rho$ constante, localizados num sistema de linhas imaginárias (meridianos e paralelos), cujos parâmetros das coordenadas são (θ, ϕ) , isto é, longitude-latitude. O conjunto de paralelos e meridianos representado em um mapa é obtido por um sistema de projeção e os pontos da região a representar são localizados por suas coordenadas geográficas (latitude-longitude) num sistema de eixos coordenados cartesianos x e y .

Ao se estruturar a representação gráfica de um mapa da Terra, precisamos do par (A, f) onde $A \subset \mathcal{S}$ e $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ seja uma função injetiva. Portanto, f é uma bijeção com sua imagem. Como é necessário retratar a geometria da esfera, torna-se necessário que a função f e sua inversa sejam diferenciáveis, isto é, f possua um difeomorfismo sobre sua imagem.

Para ilustrar uma transformação, podemos referir-nos à projeção estereográfica que leva o conjunto de pontos $A = \mathcal{S} - \{N\}$ da esfera para o plano por meio de uma função injetiva, conforme já abordado em 2.10.

Os conteúdos abordados neste capítulo estão baseados nas referências [8] e [12].

3.1 SISTEMA DE COORDENADAS LATITUDE E LONGITUDE

Seja dado um ponto $P \in \mathcal{S}$ no globo terrestre, cujas coordenadas esféricas são (ρ, θ, φ) . Como já visto, a latitude ϕ de P é um número real $\phi(P) = \frac{\pi}{2} - m(P\hat{O}N)$ ou $\phi(P) = \frac{\pi}{2} - \varphi(P)$. A latitude é 0 no equador $\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$ nos pólos norte e sul respectivamente, conforme ilustram as figuras 3.1 e 3.2, quando a medida é tomada em radianos.

A longitude θ de P é o ângulo medido entre os vetores \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} onde $A = (R, 0, 0)$ (Figura 3.1). A longitude quando dada em radianos varia no intervalo de $]-\pi, \pi[$ e não é definida em Γ (*Linha Internacional de Mudança de Data*), pois é duplamente determinada nos pontos de longitude $-\pi$ e π e também não é definida nos pólos.

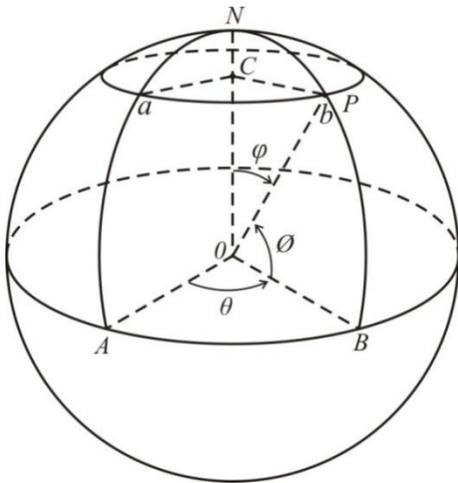


Figura 3.1 Latitude ϕ e longitude θ no globo terrestre.

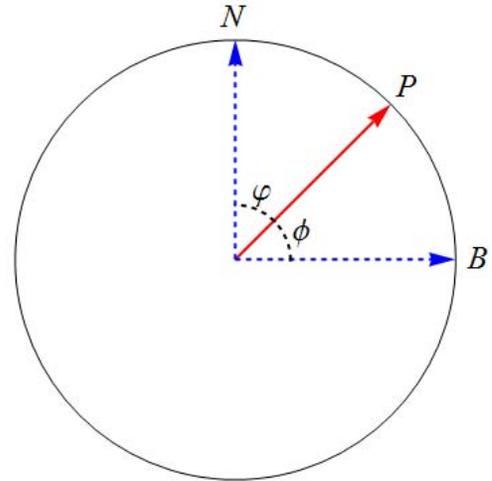


Figura 3.2 Latitude ϕ e co-latitude φ do ponto P.

Dado o sistema de eixos coordenados bidimensional (θ, ϕ) em radianos, definimos **mapa** de latitude-longitude como sendo o par $(\mathcal{S} \setminus \Gamma, S^{-1})$, onde S^{-1} é dada por $S^{-1} = (\theta(P), \phi(P)) \in \mathbb{R}^2$ cuja imagem é o retângulo $]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Como já comentado, neste sistema de coordenadas latitude-longitude para representar os pontos da superfície terrestre num plano, tendo como origem a linha do equador e o meridiano que passa pelo ponto $a = (R, 0, 0)$. Neste sistema as latitudes serão positivas ao norte e negativas ao sul, já as longitudes, serão positivas a leste e negativa ao oeste. Por exemplo, a cidade de Cuiabá-MT está localizada na latitude $15^{\circ}35'45''$ ao sul e longitude $56^{\circ}05'49''$ ao oeste. Para situá-la neste nosso sistema de coordenadas, as coordenadas geográficas correspondem a $\theta \cong -56,097 \cdot \frac{\pi}{180}$ radianos e $\phi \cong -15,596 \cdot \frac{\pi}{180}$ radianos.

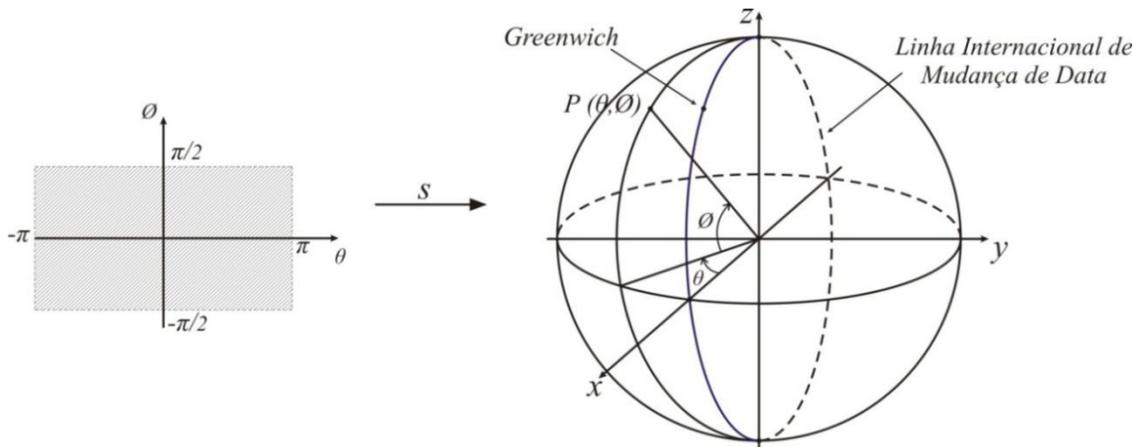


Figura 3.3 Função S que leva os pontos do plano para o globo terrestre.

A transformação S que leva os pontos do plano para a esfera de raio unitário centrada na origem é dada pela equação:

$$S(\theta, \phi) = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, \sin\phi) \in \mathbb{R}^3, \text{ c/ } \theta \in]-\pi, \pi[, \phi \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[. \quad (3.1)$$

As Figuras 3.3 e 3.4 ilustram a transformação S e seu mapa (região de parametrização ou imagem da “projeção” S^{-1}).

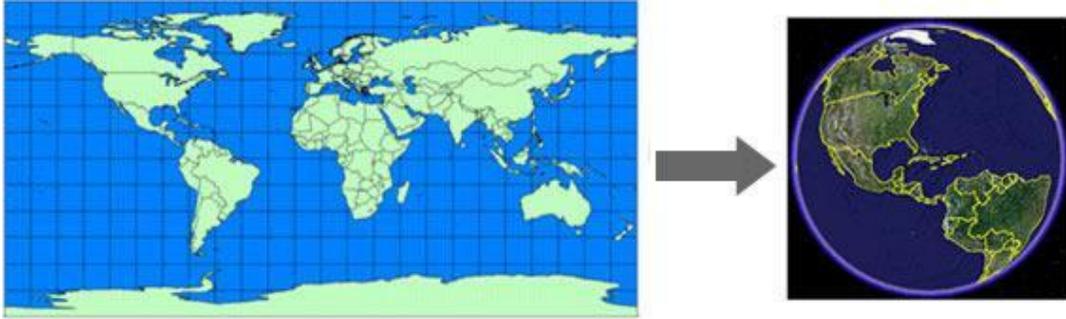


Figura 3.4 Ilustração da transformação dos pontos do mapa para o globo terrestre. Extraída de [19]

Na Cartografia, a projeção dada por S^{-1} é denominada Projeção Cilíndrica Equidistante Meridiana, cujas características apresentamos a seguir:

3.2 PROJEÇÃO CILÍNDRICA EQUIDISTANTE MERIDIANA

A projeção cilíndrica descrita acima é desenvolvível em um cilindro que é tangente no equador, com seu eixo coincidindo com o da Terra. Ao desenvolvermos a superfície do cilindro em um plano, o equador será representado por uma reta e os meridianos de longitude serão linhas paralelas entre si, com espaçamentos equidistantes e perpendiculares ao equador. Os paralelos serão também linhas retas, paralelas ao equador e perpendiculares aos meridianos. Se considerarmos o equador como paralelo padrão (verdadeira grandeza), a longitude e a latitude são mapeadas diretamente nos eixos x e y respectivamente, e a projeção será um retângulo de proporção 2:1 e o quadriculado tem formato quadrado, conforme ilustra a Figura 3.5 (usualmente este tipo de projeção é denominado de *plate carré* ou carta plana).

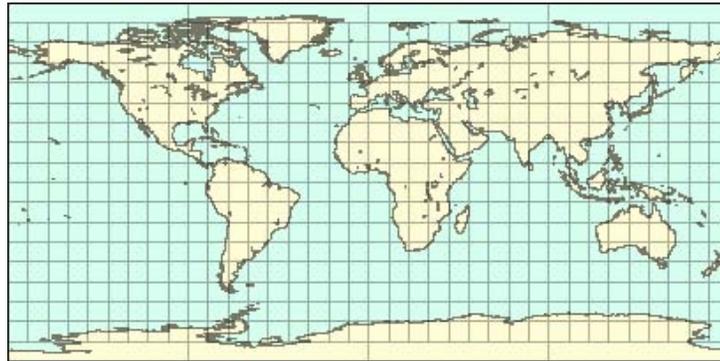


Figura 3.5 Projeção Cilíndrica Equidistante. Extraída de [20].

Seja o ponto A na esfera e a' sua representação sobre o cilindro, y a distância do ponto a ao equador e ϕ a latitude do ponto A . A seguir, vamos mostrar que S^{-1} é a única projeção com as características acima, a menos do referencial (equador e meridiano de Greenwich).

Fator de escala e as Coordenadas de uma Projeção Cilíndrica Equidistante

Para encontrarmos as coordenadas deste mapa plano, inicialmente apresentamos os fatores de escala ao longo dos meridianos (M_m) e dos paralelos (M_p) que permitem encontrarmos a lei de formação para construir um sistema de coordenadas longitude-latitude de forma que sejam preservadas as distâncias ao longo dos meridianos e ao longo do equador.

a) Fator de Escala (coeficiente de deformação) ao longo dos meridianos (M_m)

Para uma projeção cilíndrica, a representação será retangular com o eixo x representando as longitudes. Os paralelos de latitude ϕ são mostrados no mapa como um segmento de reta horizontal de equação $y = f(\phi)$, onde f é uma função específica. Em um globo de raio unitário o arco de qualquer meridiano entre as latitudes ϕ e $(\phi + t)$ tem comprimento t enquanto sua imagem no mapa tem comprimento $f(\phi + t) - f(\phi)$. Disto, resulta que

$\Delta dist_{mapa} = f(\phi + t) - f(\phi)$ enquanto $\Delta dist_{globo} = t$. Em função disto, o fator de escala M_m ao longo do meridiano no ponto de latitude ϕ é dado por:

$M_m = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\phi+t) - f(\phi)}{t} = f'(\phi)$, que é a derivada da função altura para representar os paralelos.

b) Fator de Escala (coeficiente de deformação) ao longo dos paralelos (M_p)

A distância horizontal entre a representação das linhas verticais no mapa representando as latitudes θ e $\theta + t$ é simplesmente t . Já no globo, que consideramos de raio unitário, a circunferência de latitude ϕ tem comprimento $2\pi \cos \phi$, então o arco do paralelo de longitudes θ e $\theta + t$ é um arco de comprimento $\frac{t}{2\pi} (2\pi \cos \phi) = t \cos \phi$

$$M_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta dist_{mapa}}{\Delta dist_{globo}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t \cos \phi} = \sec \phi$$

No equador temos que $\phi = 0$ e assim o fator de escala neste paralelo é 1, assumindo que nesta projeção cilíndrica o equador não tenha deformação em relação ao globo, e ainda, que a deformação nos paralelos independe de θ , teremos um fator de escala constante ao longo de um mesmo paralelo, mas que varia ao longo de paralelos distintos.

Resumindo, no mapa cilíndrico os fatores de escala são determinados por:

$M_m = f'(\phi)$ e $M_p = \sec \phi$. Como pretendemos construir um mapa eqüidistante nos meridianos, então $M_m = f'(\phi) = 1$. Considerando o paralelo como um segmento de reta horizontal de altura $y = f(\phi)$ e como $f'(\phi) = \frac{df}{d\phi} = 1$ se integrarmos ambos os lados obtemos

$$\text{que } f(\phi) = \phi + c$$

Como para $\phi = 0^\circ$, $y = 0$ então a constante de integração c também vale zero, e desta forma:

$$f(\phi) = \phi$$

Concluimos que esta projeção consiste no conjunto dos pontos $(x, y) = (\theta, f(\phi)) = (\theta, \phi)$.

Assim, numa projeção cilíndrica eqüidistante meridiana, a escala sobre o equador e sobre todos os meridianos é 1. No entanto, nos paralelos a representação no mapa é multiplicada pelo fator de escala $\sec \phi$.

A *projeção cilíndrica eqüidistante meridiana* que corresponde às coordenadas do mapa latitude-longitude não preserva ângulos, ao contrário da estereográfica e da de Mercator. Da mesma maneira como procedemos anteriormente, usando resumidamente a geometria diferencial, utilizaremos a parametrização da esfera (3.1) para determinar a matriz de sua primeira forma

fundamental mostrando que esta não é um múltiplo da matriz identidade. (conforme a referência [9]).

$S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por:

$$S(\theta, \phi) = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, \sin\phi) \in \mathbb{R}^3, \theta \in]-\pi, \pi[, \phi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Precisamos da matriz da primeira forma fundamental de S :

$$\mathcal{F}_1 = \begin{vmatrix} \langle S_\theta, S_\theta \rangle & \langle S_\theta, S_\phi \rangle \\ \langle S_\theta, S_\phi \rangle & \langle S_\phi, S_\phi \rangle \end{vmatrix}$$

$$\langle S_\theta, S_\theta \rangle = 1$$

$$\langle S_\theta, S_\phi \rangle = 0$$

$$\langle S_\phi, S_\phi \rangle = \cos^2\phi$$

$$\mathcal{F}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2\phi \end{vmatrix}.$$

Assim a matriz da primeira forma não é múltipla da matriz identidade, portanto, a projeção não é conforme.

Deduziremos a seguir a representação de uma trajetória geodésica entre dois pontos neste tipo de projeção cartográfica, que denominaremos neste trabalho de mapa latitude-longitude.

3.3 PARAMETRIZANDO A CURVA GEODÉSICA NO MAPA LATITUDE-LONGITUDE

Para determinar a função que descreve a trajetória geodésica entre dois pontos no mapa plano latitude-longitude percorremos os seguintes passos: 1) Inicialmente encontramos a transformação S^{-1} dos pontos da esfera para o mapa plano; 2) Determinamos a função parametrizada $c(t)$ que descreve a trajetória da curva geodésica que interliga dois pontos na esfera; 3) finalmente fazemos a composição $S^{-1}(c(t))$.

Posteriormente apresentaremos na seção 3.4 deste capítulo, algumas geodésicas neste tipo de projeção que foram construídas num software de cálculo simbólico.

3.3.1 A função inversa S^{-1} que leva pontos da esfera para o plano

Da equação (3.1), temos que dado um ponto P com coordenadas geográficas (longitude-latitude), as coordenadas cartesianas tridimensionais de P na esfera de raio unitário são dadas por $S(\theta, \phi) = (x, y, z) = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, \sin\phi) \in \mathbb{R}^3$, onde θ corresponde à longitude $-\pi < \theta < \pi$ e ϕ à latitude $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$. Para simplificar nossos cálculos consideramos inicialmente o raio da esfera unitário.

Seja P um ponto na esfera, O o seu centro, $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = (x, y, z) = (r_1, r_2, r_3)$ e OP' a projeção de \overrightarrow{OP} sobre o plano xy .

Encontramos a seguir expressões locais para a função inversa parametrizada $S^{-1}(r_1, r_2, r_3) = (\theta, \phi)$:

$$\text{Temos que } (x, y, z) = (r_1, r_2, r_3) = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, \sin\phi)$$

Determinando a função da coordenada θ de S^{-1} :

i) Dividindo r_2 por r_1 temos:

$r_2/r_1 = \tan\theta$ e conseqüentemente $\theta = \text{Arc tg}(r_2/r_1)$, com $r_1 \neq 0$, ou seja, esta função não pode ser utilizada para representar os pontos que estão no meridiano de longitude $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ ou nos pólos $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$, situações estas em que $r_1 = \cos\theta\cos\phi = 0$.

Analisemos agora o intervalo que esta função é válida:

Como a função θ é a inversa da função tangente (Gráfico 1), torna-se necessário definir o intervalo que vamos trabalhar para que a função seja bem definida e injetiva. Tendo em vista as características do sistema de coordenadas latitude-longitude que construímos, optamos convenientemente ao intervalo $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, ou seja, $r_1 > 0$.

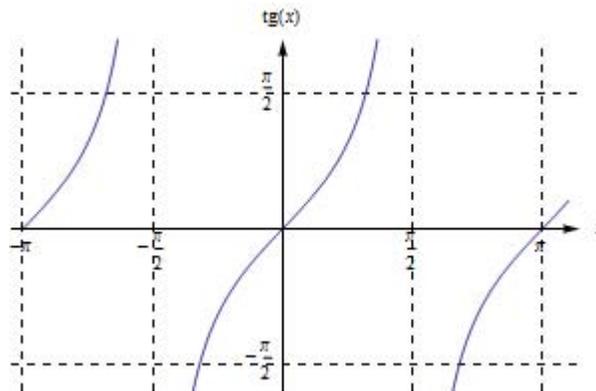


Gráfico 1 – Gráfico da função tangente

Em especial se $r_1 < 0$, podemos utilizar $S^{-1}(r_1, r_2, r_3) = \left(-\text{Arc tg} \left(\frac{r_2}{r_1}\right), \text{Arc sen } r_3\right)$

ii) Dividindo r_1 por r_2 :

Também podemos fazer $r_1/r_2 = \text{cotg } \theta$ que implica em $\theta = \text{Arc cotg} (r_1/r_2)$, com $r_2 \neq 0$. Como $r_2 = \text{sen } \theta \cos \phi$ esta função não está determinada para $\text{sen } \theta = 0$ ou $\cos \phi = 0$, isto é, para os pontos que tenham longitude $\theta = \pm \pi$ (Linha Internacional de Mudança de Data) e, também para o Meridiano de Greenwich $\theta = 0$ ou nos pólos ($\phi = \pm \frac{\pi}{2}$), tendo em vista que nestas condições resultaria em $r_2 = \text{sen } \theta \cos \phi = 0$.

Além disso, a função θ é a inversa da função cotangente (Gráfico 2) e, de forma similar a i) torna-se necessário definir o domínio e neste caso, optamos em trabalhar no que corresponde ao intervalo $0 < \theta < \pi$. Mas como veremos a seguir há outra expressão local para S^{-1} que inclui o $\theta = 0$ e, portanto, esta opção é descartada.

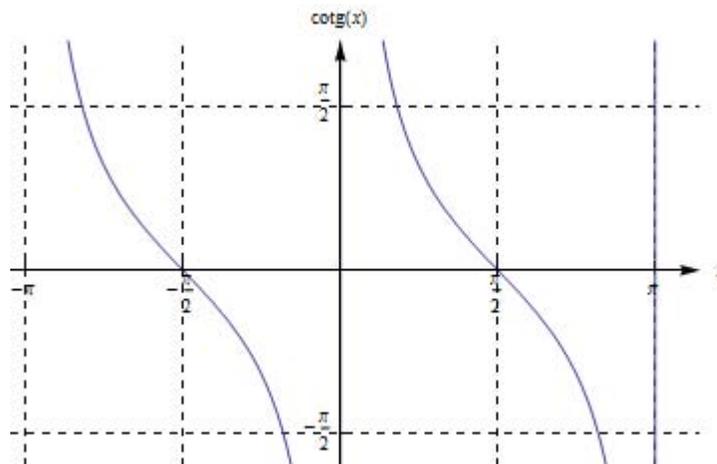


Gráfico 2 – Gráfico função cotangente

Determinando a função da coordenada ϕ de S^{-1} :

Resolvendo o sistema temos que $\phi = \text{Arc sen } r_3$. Como a função $\text{sen } \phi$ é invertível no intervalo $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$, intervalo que nos interessa representar no mapa, então o domínio de S^{-1} , neste caso, independe de ϕ , diferente do que ocorre com θ .

De i e ii obtemos as seguintes funções inversas parametrizadas:

$$S^{-1}(r_1, r_2, r_3) = \left(\text{Arc tg} \left(\frac{r_2}{r_1} \right), \text{Arc sen } r_3 \right)$$

$$S^{-1}(r_1, r_2, r_3) = \left(\text{Arc cotg} \left(\frac{r_1}{r_2} \right), \text{Arc sen } r_3 \right)$$

Diante do resultado encontrado verificamos que encontraríamos algumas limitações na hora de representar trajetórias entre dois pontos, por exemplo, que partisse da longitude 0 e fosse até a de $\frac{2\pi}{3}$, encontraríamos pontos de descontinuidade para ambas funções. Então buscamos outro possível caminho para encontrar S^{-1} , deduzido a seguir:

$$\text{Temos que } OP' = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \text{ e } \cos \theta = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}},$$

que resulta em:

$$\theta = \text{Arc cos} \left(\frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \right), \text{ com } r_1^2 + r_2^2 \neq 0$$

De forma similar à que procedemos anteriormente, a função-coordenada θ é a inversa da função cosseno (Gráfico 3) o que torna necessário definir o domínio para que a função seja bijetiva. Neste caso, escolhemos o intervalo $0 \leq \theta < \pi$.

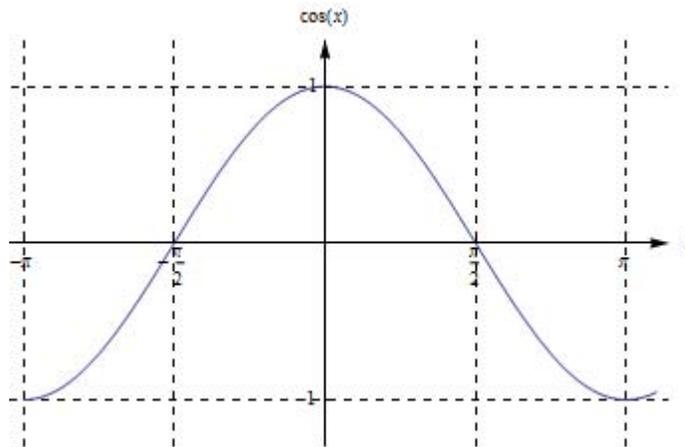


Gráfico 3 – Gráfico da Função Cosseno

Constatamos que o domínio desta função é parecido com o da função cotangente, com a vantagem de inserir o ponto de longitude 0.

Se utilizarmos estas mesmas ferramentas, podemos determinar também a função da coordenada ϕ . Iniciamos determinando φ (das coordenadas esféricas), para posteriormente chegarmos a ϕ (latitude) fazendo $\phi = \pi/2 - \varphi$.

φ representa o ângulo formado entre $r(t)$ e o eixo z e pode ser determinada utilizando o cosseno do ângulo formado entre dois vetores:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{r} \cdot \vec{e}_3}{\|\vec{r}\| \|\vec{e}_3\|} = \frac{(r_1, r_2, r_3) \cdot (0, 0, 1)}{R} = r_3$$

Assim, obtemos: $\varphi = \text{Arc cos } r_3$. Como $\phi = \pi/2 - \varphi$, então a latitude ϕ será determinada por $\phi = \pi/2 - \text{Arc cos } r_3$.

$$\phi = \text{Arc sen } r_3,$$

onde r_3 é a terceira coordenada do vetor \overrightarrow{OP} , ou seja, $r_3 = \text{sen } \phi$, o que coincide com a função-coordenada ϕ que obtemos no primeiro modo de encontrar a função inversa.

Assim, a função S^{-1} também pode ser determinada por:

$$S^{-1}(r_1, r_2, r_3) = \left(\text{Arc cos} \left(\frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \right), \text{Arc sen } r_3 \right),$$

com $r_1^2 + r_2^2 \neq 0$ (ou $r_3 \neq \pm 1$).

Note que a restrição da função não se constitui em um problema para nosso estudo, uma vez que $r_1^2 + r_2^2 = 0$, corresponde aos pontos situados nos pólos.

Diante do desenvolvimento apresentado até agora, obtemos as expressões para S^{-1} que levam os pontos da esfera para o plano a seguir, cujos domínios serão especificados no resumo organizado na tabela adiante.

Para obtermos a representação no plano de pontos que estejam situados na região onde θ varia no intervalo $]-\pi, 0]$, podemos fazer uma reflexão da função anterior, invertendo o sinal da primeira coordenada.

$$S^{-1}(r_1, r_2, r_3) = \left(-\text{Arc cos} \left(\frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \right), \text{Arc sen } r_3 \right), \quad (3.2)$$

com $r_1^2 + r_2^2 \neq 0$ e $r_3 \neq \pm 1$

Resumindo as transformações:

- **Função S que leva pontos do mapa latitude-longitude para a esfera de raio unitário:**

$$S(\theta, \phi) = (\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, \sin\phi), \text{ c/ } \theta \in]-\pi, \pi[, \phi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

- **Expressões locais para S^{-1} que levam pontos do globo para o mapa latitude-longitude:**

$$S^{-1}(r_1, r_2, r_3) = \left(\text{Arc tg}\left(\frac{r_2}{r_1}\right), \text{Arc sen } r_3\right) \quad (3.3)$$

$$\text{com } r_1 > 0 \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right).$$

$$S^{-1}(r_1, r_2, r_3) = \left(-\text{Arc tg}\left(\frac{r_2}{r_1}\right), \text{Arc sen } r_3\right) \quad (3.4)$$

$$\text{com } r_1 < 0 \left(|\theta| > \frac{\pi}{2}\right).$$

$$S^{-1}(r_1, r_2, r_3) = \left(\text{Arc cos}\left(\frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}\right), \text{Arc sen } r_3\right) \quad (3.5)$$

$$\text{com } r_2 \geq 0 \left(0 \leq \theta < \pi\right), r_3^2 \neq 1.$$

$$S^{-1}(r_1, r_2, r_3) = \left(-\text{Arc cos}\left(\frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}\right), \text{Arc sen } r_3\right), \quad (3.6)$$

$$\text{com } r_2 \leq 0 \left(-\pi < \theta \leq 0\right), r_3^2 \neq 1.$$

Notamos que S^{-1} não está definida nos pólos, nem na linha de data e estas singularidades serão singularidades a serem tratadas com cautela.

Observamos que as expressões para a transformação inversa S^{-1} quando o raio da esfera considerada na parametrização for R , serão as mesmas em relação à primeira coordenada. Na segunda coordenada teremos a expressão $\text{Arc sen}\left(\frac{r_3}{R}\right)$.

Apresentadas as expressões locais transformação da esfera para o plano, o próximo passo será então parametrizar a trajetória geodésica no mapa plano, para posteriormente fazer a composição com a função inversa S^{-1} .

3.3.2 Parametrização da trajetória geodésica na esfera

Para determinarmos a forma paramétrica que representa a trajetória de uma partícula que vai de P_1 e P_2 pela geodésica (*grande círculos*) em um mapa plano de coordenadas (θ, ϕ) , inicialmente desenvolvemos uma estratégia para levar os pontos pertencentes ao arco do grande círculo $\widehat{P_1P_2}$ da esfera de raio unitário para o mapa plano.

Sejam v_1 e v_2 os vetores $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$ respectivamente. Precisamos encontrar uma base ortonormal β' composta por $\{v_1, v_2\}$. Tomando $v_1 = \overrightarrow{OP_1} = P_1$ e v_2' como sendo a projeção de $v_2 = \overrightarrow{OP_2} = P_2$ e ortogonal a v_1 teremos que:

$$v_2' = v_2 - cv_1. \quad (3.7)$$

Como v_2' é ortogonal a v_1 , então $\langle v_1, v_2' \rangle = 0$ e conseqüentemente $\langle v_1, v_2 - cv_1 \rangle = 0$

$$c = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle}.$$

Substituindo em (3.7), resulta que:

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1,$$

sendo que $\frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle}$ é a projeção de v_2 na direção de v_1 .

Como o raio da esfera é unitário $\langle v_1, v_1 \rangle = 1$ e assim temos:

$$v_2' = v_2 - \langle v_1, v_2 \rangle v_1.$$

Normalizando v_2' resulta que

$$u_2 = \frac{v_2 - \langle v_1, v_2 \rangle \cdot v_1}{\|v_2 - \langle v_1, v_2 \rangle \cdot v_1\|}$$

Tomemos $u_2 = P_{22}$, $v_1 = P_1$ e $v_2 = P_2$ e notamos que P_{22} pertence ao plano gerado por P_1 e P_2 que também está na esfera, pertencendo ao menor arco $\widehat{P_1P_2}$ do *grande círculo* que liga P_1 e P_2 .

Considerando a base ortonormal determinada por $\beta' = \{P_1, P_{22}\}$, a curva $c(t) = (c_1(t), c_2(t), c_3(t))$ que compõe os pontos do arco do círculo máximo de $\widehat{P_1P_2}$ na esfera, ou seja, a equação paramétrica da curva da geodésica será dada por:

$$c(t) = P_1 \cos t + P_{22} \sin t, \quad t \in [0, \text{Arc cos}\langle P_1, P_2 \rangle]. \quad (3.8)$$

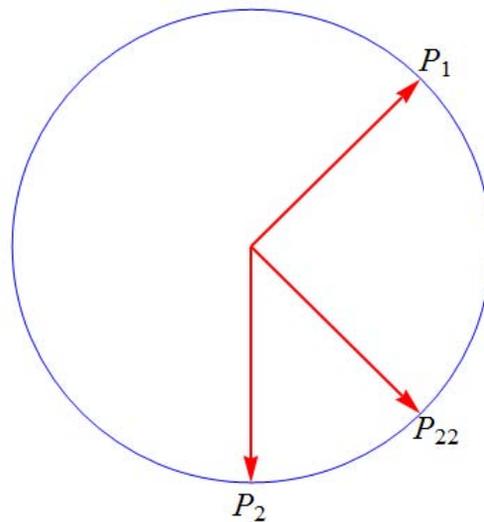


Figura 3.6 Base Ortonormal.

A trajetória geodésica na esfera ligando os pontos $P_1\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$ a $P_2\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$ está ilustrada a seguir:

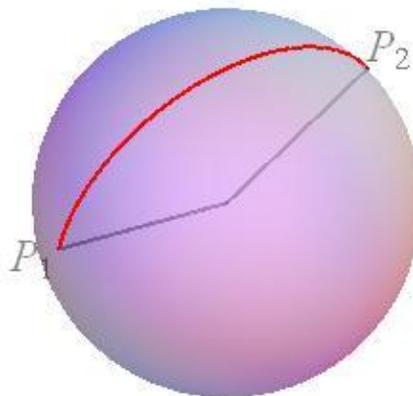


Figura 3.7 Curva geodésica ligando P_1 e P_2 .

3.3.3 Geodésica no mapa latitude-longitude ($S^{-1}(c(t))$)

Dados dois pontos $P_1 = (\theta_1, \phi_1)$ e $P_2 = (\theta_2, \phi_2)$ cujas coordenadas parametrizadas na esfera são:

$P_1 = (\cos\theta_1 \cos\phi_1, \sin\theta_1 \cos\phi_1, \sin\phi_1)$ e $P_2 = (\cos\theta_2 \cos\phi_2, \sin\theta_2 \cos\phi_2, \sin\phi_2)$, considerando $0 \leq t \leq t_1$ e desta forma, o ângulo $m(P_1 \hat{O} P_2) = t_1 = \text{Arc cos}\langle P_1, P_2 \rangle$.

Aplicando a inversa S^{-1} em $c_i(t)$, obtemos as seguintes expressões para a trajetória geodésica no mapa latitude-longitude, conforme a região em que $c(t)$ esteja contida.

$$S^{-1}(c_1(t), c_2(t), c_3(t)) = \left(\text{Arc tg} \left(\frac{c_2(t)}{c_1(t)} \right), \text{Arc sen}(c_3(t)) \right), \quad (3.9)$$

se $c_1(t) > 0$, $c_3(t) \neq \pm 1$.

$$S^{-1}(c_1(t), c_2(t), c_3(t)) = \left(-\text{Arc tg} \left(\frac{c_2(t)}{c_1(t)} \right), \text{Arc sen}(c_3(t)) \right), \quad (3.10)$$

se $c_1(t) < 0$, $c_3(t) \neq \pm 1$.

$$S^{-1}((c_1(t), c_2(t), c_3(t))) = \left(\text{Arc cos} \left(\frac{c_1(t)}{\sqrt{c_1(t)^2 + c_2(t)^2}} \right), \text{Arc sen}(c_3(t)) \right), \quad (3.11)$$

se $c_2(t) \geq 0$, $c_3(t) \neq \pm 1$.

$$S^{-1}((c_1(t), c_2(t), c_3(t))) = \left(-\text{Arc cos} \left(\frac{c_1(t)}{\sqrt{c_1(t)^2 + c_2(t)^2}} \right), \text{Arc sen}(c_3(t)) \right), \quad (3.12)$$

se $c_2(t) \leq 0$ e $c_3(t) \neq \pm 1$.

Exemplo de uma trajetória geodésica

Dado dois pontos $P_1 = (\theta_1, \phi_1) = \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ e $P_2 = (\theta_2, \phi_2) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, temos

$$P_1 = (\cos\theta_1 \cos\phi_1, \sin\theta_1 \cos\phi_1, \sin\phi_1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$P_2 = (\cos\theta_2 \cos\phi_2, \sin\theta_2 \cos\phi_2, \sin\phi_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Para $0 \leq t \leq t_1$, temos que $t_1 = \text{Arc cos}\langle P_1, P_2 \rangle = \text{Arc cos} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \right)$.

Cálculo de P_{22} :

Como estudado anteriormente:

$$P_{22} = \frac{P_2 - \langle P_1, P_2 \rangle \cdot P_1}{\|P_2 - \langle P_1, P_2 \rangle \cdot P_1\|}$$

$$P_{22} = \frac{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left\|\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\|}$$

$$P_{22} = \left(-\sqrt{\frac{1}{34}(7-4\sqrt{2})}, \sqrt{\frac{2}{17}(5+2\sqrt{2})}, \sqrt{\frac{1}{34}(7-4\sqrt{2})}\right)$$

Cálculo de $c(t)$:

Aplicando (3.8) aos pontos envolvidos na trajetória obtemos:

$$c(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cos t + \left(-\sqrt{\frac{1}{34}(7-4\sqrt{2})}, \sqrt{\frac{2}{17}(5+2\sqrt{2})}, \sqrt{\frac{1}{34}(7-4\sqrt{2})}\right) \sin t$$

$$c(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t - \sqrt{\frac{1}{34}(7-4\sqrt{2})} \sin t, \sqrt{\frac{2}{17}(5+2\sqrt{2})} \sin t, \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t + \sqrt{\frac{1}{34}(7-4\sqrt{2})} \sin t\right).$$

No intervalo de longitude da trajetória do problema optamos por aplicar (3.11) em $c(t)$:

$$S^{-1}(c(t)) = S^{-1}(c_1(t), c_2(t), c_3(t)) = \left(\text{Arc cos} \left(\frac{c_1(t)}{\sqrt{c_1(t)^2 + c_2(t)^2}}\right), \text{Arc sen } c_3(t)\right)$$

$$= \left(\text{Arc cos} \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t - \sqrt{\frac{1}{34}(7-4\sqrt{2})} \sin t}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t - \sqrt{\frac{1}{34}(7-4\sqrt{2})} \sin t\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{17}(5+2\sqrt{2})} \sin t\right)^2}}\right), \text{Arc sen} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t + \sqrt{\frac{1}{34}(7-4\sqrt{2})} \sin t\right)\right).$$

A Figura 3.8 mostra a trajetória geodésica de P_1 a P_2 no mapa latitude-longitude, associada à projeção cilíndrica equidistante meridiana. Esta figura foi construída no Programa *Mathematica* em função de seus pacotes disponíveis para a construção de mapas cartográficos e o fácil acesso no período da elaboração deste trabalho.

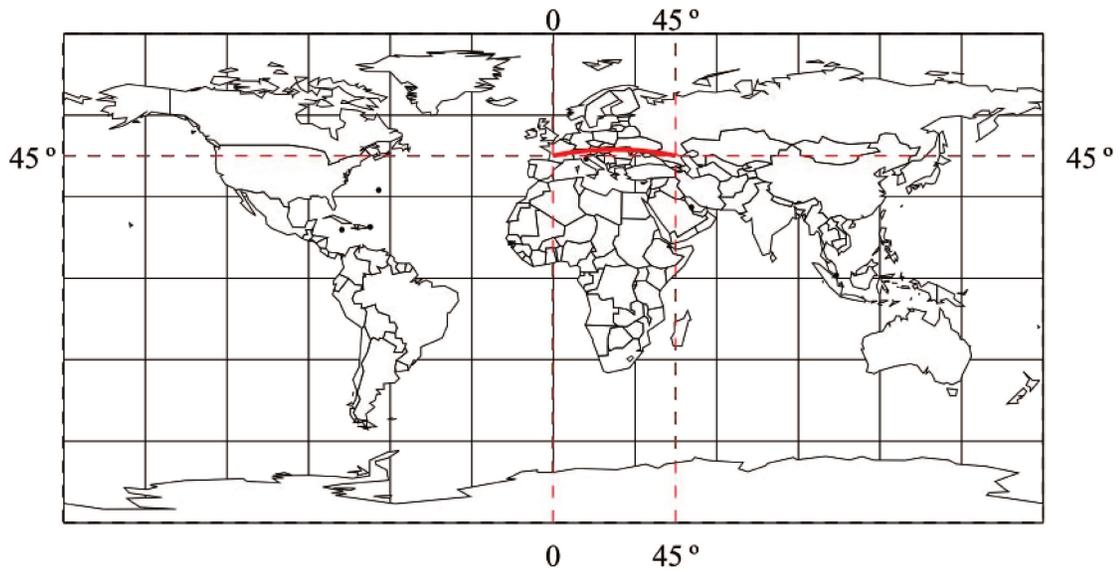


Figura 3.8 – Trajetória Geodésica na proj. cilíndrica equidistante dos pontos de coordenadas geográficas $(0, \frac{\pi}{4})$ e $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

3.4 EXEMPLOS DE TRAJETÓRIAS GEODÉSICAS NO MAPA LATITUDE-LONGITUDE

A) Consideremos a rota geodésica no globo partindo do ponto $P_1(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6})$ para chegar ao ponto $P_2(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$. Para construirmos a curva geodésica no mapa plano verificamos que a variação do intervalo da longitude pertence ao domínio da função:

$$S^{-1}(c_1(t), c_2(t), c_3(t)) = \left(\text{Arc tg} \left(\frac{c_2(t)}{c_1(t)} \right), \text{Arc sen} (c_3(t)) \right), \text{ com } c_1(t) \neq 0$$

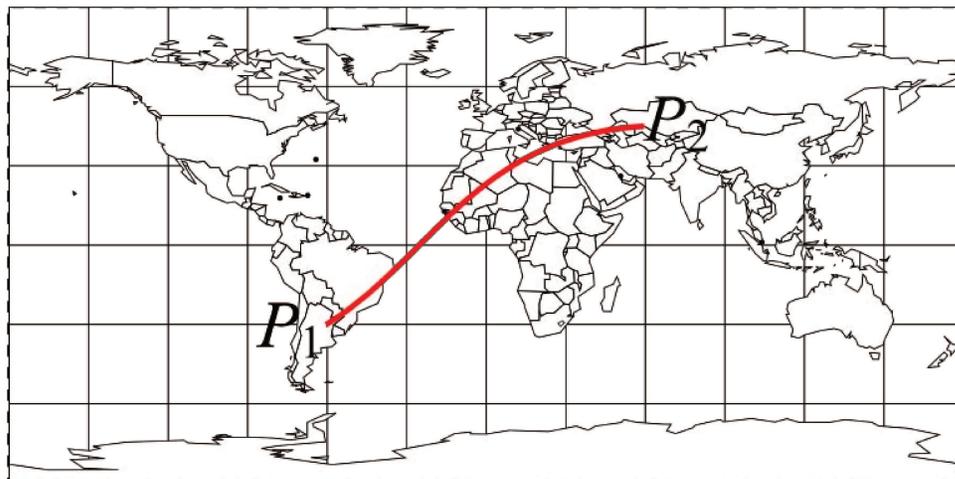


Figura 3.9 Trajetória geodésica de P_1 a P_2 na proj. cilíndrica equidistante meridiana.

- B) Partindo do ponto $P_3(0, \frac{\pi}{4})$ e seguimos pela rota geodésica até $P_4(\frac{7\pi}{9}, -\frac{\pi}{6})$, verificamos inicialmente que o intervalo de variação da longitude está no intervalo de $0 \leq \theta < \pi$ e assim utilizamos a expressão $S^{-1}((c_1(t), c_2(t), c_3(t))) = \left(\text{Arc cos} \left(\frac{c_1(t)}{\sqrt{c_1(t)^2 + c_2(t)^2}} \right), \text{Arc sen} (c_3(t)) \right)$ para construir a representação gráfica.

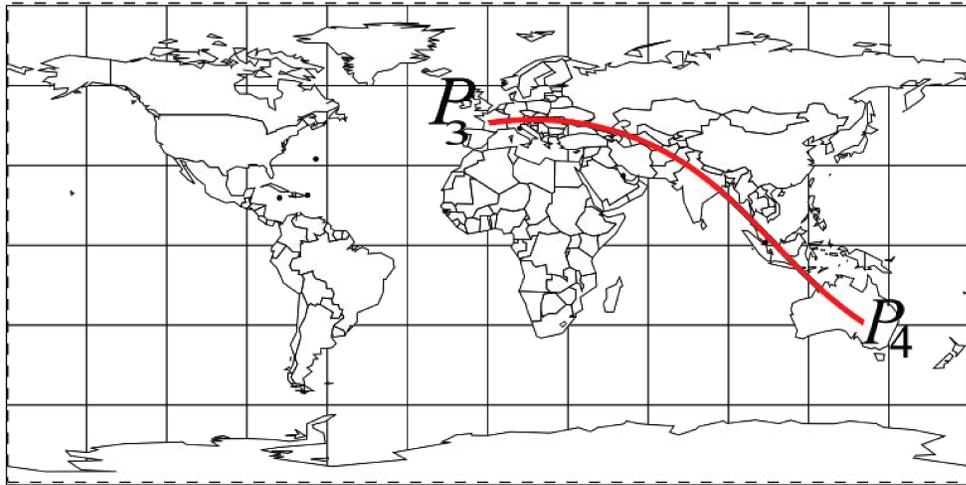


Figura 3.10 Trajetória geodésica de P_3 a P_4 .

- C) Saindo de $P_5(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ até $P_6(0, -\frac{5\pi}{12})$, utilizamos

$S^{-1}((c_1(t), c_2(t), c_3(t))) = \left(-\text{Arc cos} \left(\frac{c_1(t)}{\sqrt{c_1(t)^2 + c_2(t)^2}} \right), \text{Arc sen} (c_3(t)) \right)$ para obter o traçado da curva geodésica da Figura 3.11.

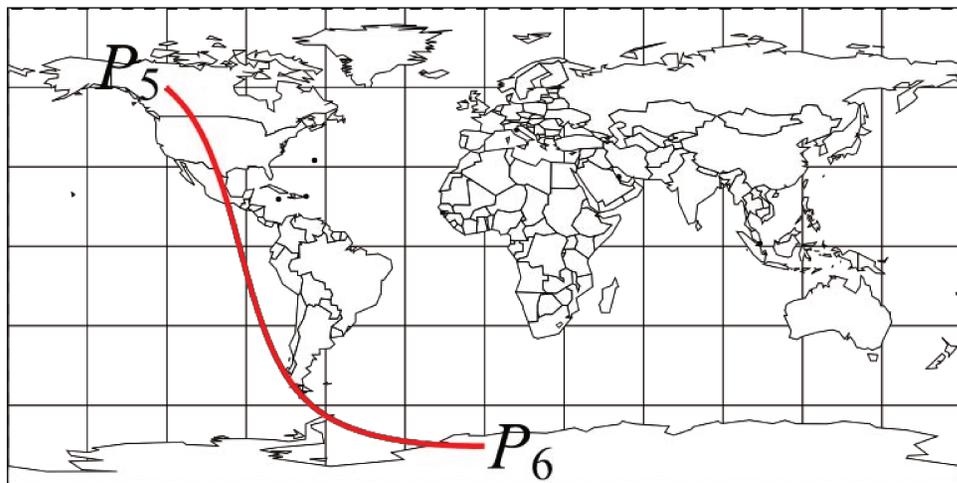


Figura 3.11 Trajetória geodésica de P_5 a P_6 .

Neste capítulo deduzimos as expressões para as trajetórias geodésicas no sistema de coordenadas latitude-longitude correspondentes a uma projeção cartográfica cilíndrica eqüidistante meridiana. Estas expressões serão utilizadas no estudo que apresentamos no próximo capítulo, onde será abordado um mapa que revolucionou a Cartografia em seu tempo, com propriedades muito especiais e que trazia em seu processo de concepção algumas idéias embrionárias do Cálculo, o Mapa de Mercator.

Capítulo 4

O MAPA DE MERCATOR

Neste capítulo apresentamos a forma como o geógrafo e cartógrafo Gerhard Kremer (1512-1594) nascido na região de Flandres (hoje Bélgica), conhecido pelo nome latinizado Gerardus Mercator, utilizou os conceitos matemáticos na criação de seu mapa que serviu como instrumento para a navegação do século XVI, e no auge dos descobrimentos deu suporte para os navegadores vencerem grandes distâncias via oceano. Este mapa possui atributos muito significativos, pois ao traçarmos a trajetória entre dois pontos por uma linha reta ele fornece a orientação de como seguir um trajeto no globo terrestre orientados pela agulha da bússola com direção sempre constante sendo que os ângulos medidos no mapa são os mesmos do globo terrestre. Estes atributos fizeram do Mapa de Mercator uma forte ferramenta aliada da navegação. O que é muito instigante é que além deste mapa envolver as projeções geométricas, Mercator utilizou os conceitos intuitivos de integração, um século antes da sistematização formal do Cálculo Diferencial e Integral. Num segundo momento apresentamos as parametrizações da *loxodromia* e da *ortodromia* no mapa, bem como o cálculo da distância nestes dois tipos de trajetórias e representações gráficas de algumas destas curvas. Por último, tratamos também das distorções de área que ocorrem neste tipo de projeção. As principais referências utilizadas neste capítulo foram: [2], [3], [8] e [13].

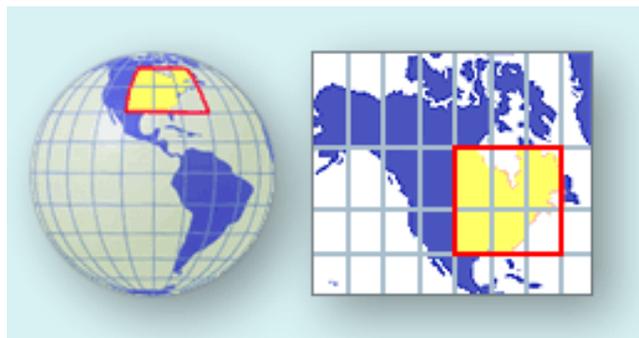


Figura 4.1 – Representação de uma porção do globo no Mapa de Mercator. Extraída de [21].

4.1 O PROBLEMA DA NAVEGAÇÃO E O MAPA DE MERCATOR

Historicamente os navegadores antes do tempo de Mercator utilizavam o céu para se orientar, através das constelações e também da posição do sol, que além da direção indicava também a hora.

Agora imagine um navegador tendo que se deslocar de uma localidade para outra por meio de um navio, utilizando somente com uma bússola e mapas. Quais propriedades deveria ter um mapa para que ele chegue ao seu destino? A estratégia de seguir trajetórias sempre na mesma direção, já era utilizada no tempo de Mercator, tendo em vista que os navegadores poderiam se orientar com a agulha magnética da bússola com ângulo sempre constante e deste modo, eles cruzariam todos os meridianos do globo terrestre com a mesma inclinação.[13] Uma trajetória deste tipo é denominada de *linha de rumo* ou *loxodromia* ou *loxodromes* (do latim *loxos* – inclinação e *dromes* - correndo).

Foi buscando atender a este tipo de problema que Mercator elaborou seu mapa, de tal forma que, traçando uma trajetória entre duas localidades com uma linha reta, o ângulo permanecesse sempre constante com os meridianos da Terra, conforme ilustrado na Figura 4.2. Para isto, os ângulos medidos na Terra deveriam ser iguais aos do mapa e assim procedendo, a direção de rumo poderia ser determinada diretamente no mapa.

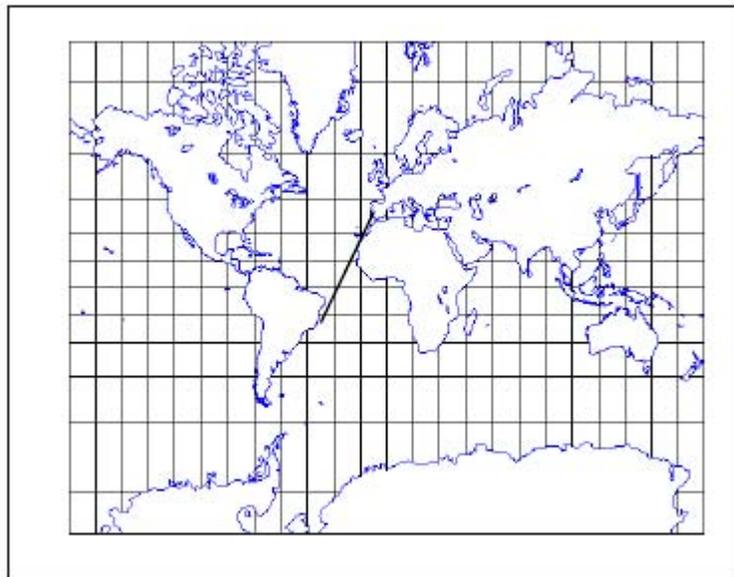


Figura 4.2 Trajetória entre dois pontos orientada pela linha de rumo.

Diferentemente das projeções cartográficas que precederam ao Mapa de Mercator de 1569, este não usava uma malha de coordenadas aleatórias, mas apoiava-se na matematização da forma como Mercator concebia a Terra, ou seja, como uma esfera e não como uma superfície bidimensional o que o permitiu traçar um sistema de coordenadas no qual as distorções estivessem matematicamente e antecipadamente controladas. Esta projeção não foi construída para uma simples representação do mundo, mas sim, para finalidades práticas da navegação [15]. Do ponto de vista da navegação, a projeção de Mercator apresenta uma característica gráfica de utilização incomparável, uma vez que a *loxodromia* é representada por uma linha reta, que faz com os meridianos um ângulo constante e igual ao seu azimute, que é o ângulo formado com o norte magnético da Terra e, cuja inclinação pode ser medida diretamente no mapa. Assim, mantendo a mesma direção na bússola, o navio chega tranquilamente ao seu destino.

Por outro lado, a forma da curva produzida pela *loxodromia* no globo terrestre é uma curva tridimensional que se continuada, vai sendo espiralada nas proximidades dos pólos sem, no entanto, chegar a tocá-los. Na realidade, se considerarmos um navio seguindo uma rota mantendo sempre a mesma inclinação com os meridianos a curva obtida será uma **espiral esférica**, que tem um número infinito de revoluções orbitais, com a distância entre elas diminuindo com a aproximação da curva a qualquer um dos pólos, como ilustra a figura a seguir:

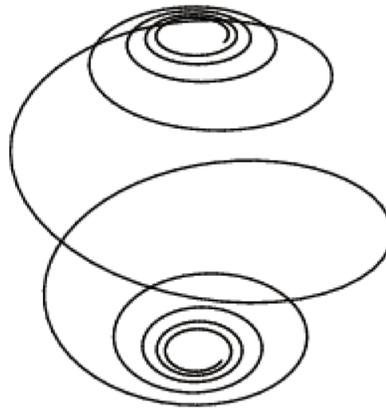


Figura 4.3 Espiral esférica. Extraída de [22].

Ressalte-se que a trajetória da *loxodromia* no globo terrestre só não será um pedaço de uma espiral esférica nos casos de trajetórias entre dois pontos situados no mesmo meridiano ou no mesmo paralelo, pois nestes casos, a curva será o menor arco da circunferência do meridiano ou do paralelo que liga os dois pontos. Os ângulos constantes nestes casos são 0 e $\frac{\pi}{2}$ respectivamente.

A Figura 4.4 a seguir ilustra em (a) a *loxodromia* em b) o arco de *loxodromia* que une os pontos 1 e 2. Note que os ângulos P1A, PAB, PBC são todos iguais no rumo entre os pontos 1 e 2. A figura (c) mostra a forma espiral no globo terrestre da *loxodromia*. A Figura 4.5 ilustra uma trajetória loxodrômica que parte do equador no rumo 60° . Exemplo extraído de [17] Podemos observar nela que a curva forma com os meridianos ângulos sempre iguais e que, seguindo para os pólos, a curva tem formato de espiral.

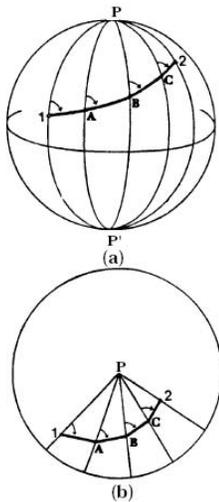


Figura 4.4 Trajetória sobre a Linha de Rumo no globo terrestre.



Figura 4.5 Curva loxodrômica com direção de 60° .

Pelo exposto até aqui, podemos concluir que uma exigência básica para a utilização de um sistema de projeção para finalidades náuticas no tempo de Mercator é que este representasse as trajetórias por linhas retas e, foi justamente para atender esta necessidade que Mercator idealizou seu mapa. Mercator publicou em 1569 sua Carta Universal (planisférico).

Por outro lado, para a navegação, seja ela náutica ou aérea, é importante também se considerar a trajetória de menor distância entre dois pontos sobre a superfície da Terra (geodésica), que se considerada como esférica, é o arco do círculo máximo que os une, denominada pela Cartografia de *ortodromia*. No entanto, surge outro problema, pois sobre uma *ortodromia*, exige-se mudanças constantes de rumo, já que os arcos de círculos máximos formam ângulos variáveis com os meridianos, não sendo funcional para a navegação baseada apenas na bússola, pois o recomendável neste caso é, sempre que possível, é seguir pela *linha de rumo*, pois esta faz um ângulo sempre constante com sucessivos meridianos.

A Figura 4.6 ilustra duas trajetórias entre dois pontos no Mapa de Mercator, uma seguindo pela *loxodromia* (em azul) e a outra pela *ortodromia* (em vermelho) e permite observar nesta última, a variação constante de direção.

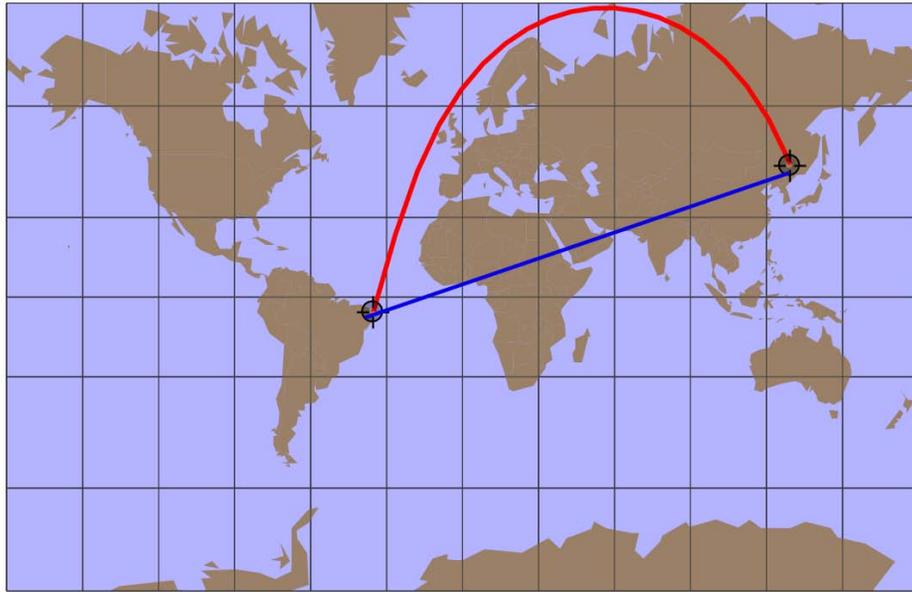


Figura 4.6 Trajetórias sobre a *loxodromia* (azul) e pela *geodésica* (vermelho).

No sistema moderno de navegação marítima e aérea são associados dois tipos de mapas para programar rotas entre localidades, o Mapa Gnomônico e o de Mercator. A projeção gnomônica (ver Apêndice 1) tem a propriedade de representar todos os círculos máximos em linhas retas e assim sendo, permite encontrar a rota de menor distância entre dois pontos por uma linha reta, mas tendo o inconveniente do ângulo (direção) no percurso mudar constantemente. Para resolver este problema uma solução é associar de forma adequada as duas formas de projeções, selecionando convenientemente as intersecções com os meridianos ao longo do curso do grande círculo na projeção gnomônica e posteriormente plotando-se no mapa de Mercator. Segmentos de reta são desenhados entre aqueles pontos como linhas de rumo que são facilmente seguidas e se aproximam da rota do círculo máximo.[13]

No que se refere a classificação, a projeção de Mercator é uma **projeção cilíndrica equatorial conforme**⁵. **Cilíndrica**, porque a superfície da Terra é projetada inicialmente em um

⁵ A denominação de uma determinada projeção em Cartografia é dada na seguinte ordem: a) natureza da superfície de projeção adotada (plano, cilindro ou cone); b) situação da superfície de projeção em relação à superfície da Terra e c) classificação da projeção quanto à propriedade que conserva.[3]

cilindro, conforme ilustrado na Figura 4.7, que posteriormente é aberto e desenrolado sobre o plano. **Equatorial**, em função de que o cilindro é tangente à superfície da Terra no equador (ver figura 4.8) e **conforme** porque os ângulos são representados no plano sem deformação e em consequência disto a forma de regiões de pequenas áreas são mantidas.

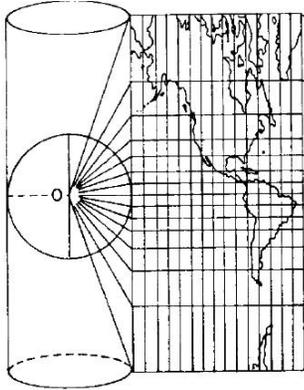


Figura 4.7 – Projeção cilíndrica (1).
Extraída de [3].

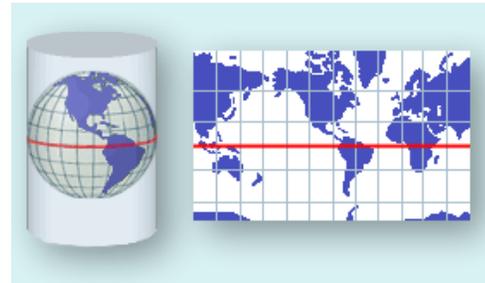


Figura 4.8 Projeção Cilíndrica (2). Extraída de [21]

4.2 AS PROPRIEDADES MATEMÁTICAS PRESENTES NA CRIAÇÃO DO MAPA DE MERCATOR

Baseado na referência [13], apresentamos a seguir as idéias que nortearam a criação do mapa de Mercator. Para construí-lo, inicialmente tomamos o equador como uma linha de rumo na direção leste-oeste, que no mapa é representado por uma reta horizontal. Os meridianos também são tomados como linhas de rumo, mas na direção norte-sul que são representados no mapa por uma família de retas verticalmente espaçadas uniformemente. Por outro lado, sabemos que o ângulo que cada paralelo faz com os meridianos é de 90° e, assim sendo, as retas que representam os paralelos devem ser perpendiculares à família de retas que representam os meridianos. Até agora, muito fácil, mas como garantir que a representação das outras linhas de rumo sejam retas no mapa? Precisamos colocar os paralelos das latitudes com tal espaçamento que as linhas de rumo sejam retas no mapa. Para isso, devemos estudar primeiro o alongamento horizontal que deve ocorrer no mapa.

4.2.1 Distâncias horizontais são alongadas

As distâncias entre os meridianos em todos os paralelos no mapa deverão ser iguais, pois os meridianos no globo são paralelos. Assim sendo, as distâncias entre os meridianos em cada paralelo no mapa serão proporcionalmente maiores que as distâncias no globo. Vamos então estudar este alongamento horizontal. Seja o globo terrestre representado por uma fatia da esfera de raio R , conforme mostra a Figura 4.9 a seguir, de maneira que \widehat{AB} e \widehat{PQ} sejam arcos de paralelos entre dois meridianos, sendo o primeiro, parte do equador e o segundo, parte do paralelo de latitude ϕ .

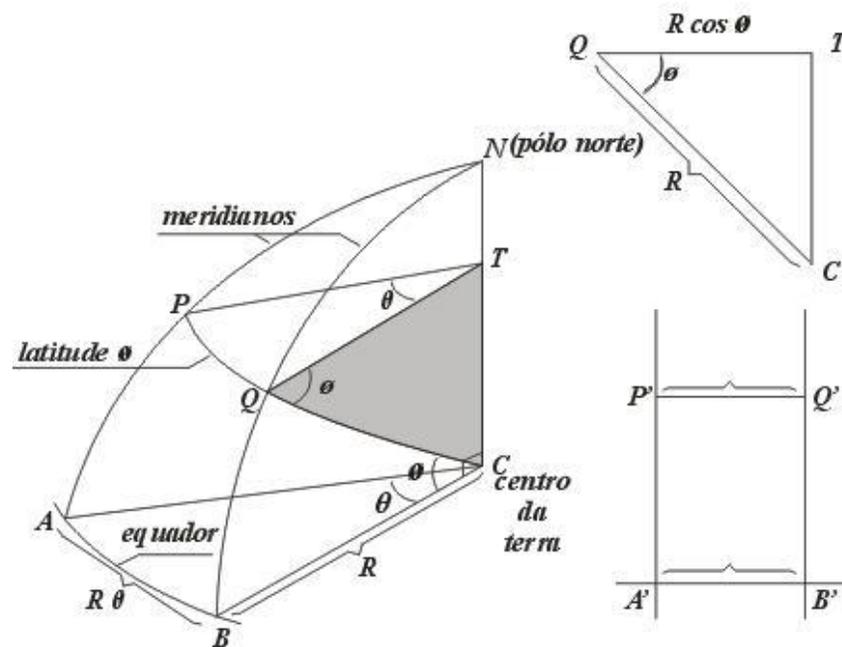


Figura 4.9 Fatia do globo terrestre e representação correspondente no mapa de Mercator.

Temos que $A'B'$ é o correspondente de \widehat{AB} no mapa plano. Temos ainda a condição de que distâncias ao longo do equador devem ser conservadas na construção do mapa plano de acordo com a escala desejada.

Pela geometria elementar temos que $\widehat{AB} = R\theta$.

Sendo \widehat{PQ} de latitude ϕ ao norte, resulta que $QT = R \cos \phi$

O setor PTQ tem o mesmo ângulo central do setor ACB , então o comprimento de $\widehat{PQ} = QT \theta = R \cos \phi \theta = R \theta \cos \phi$. Como $\widehat{AB} = R \theta$ resulta que

$$\widehat{PQ} = \widehat{AB} \cos \phi. \quad (4.1)$$

Na representação do mapa plano temos a correspondência $\widehat{AB} = A'B'$ e, como nele os meridianos são paralelos, então $\widehat{AB} = A'B' = P'Q'$.

De (4.1) temos então $\widehat{PQ} = P'Q' \cos \phi$ e então

$$P'Q' = \widehat{PQ} \frac{1}{\cos \phi}, \text{ ou seja}$$

$$P'Q' = \widehat{PQ} \sec \phi. \quad (4.2)$$

De (4.2) podemos perceber que o comprimento de $P'Q'$ no mapa é o comprimento de \widehat{PQ} multiplicado pelo fator $\sec \phi$. Como $\sec \phi > 1$ para valores de ϕ entre 0 e 90° , a representação das distâncias entre os meridianos vão se expandindo do fator $\sec \phi$ e as distorções vão aumentando conforme $|\cos \phi|$ tende a zero (próximo aos pólos). O próximo passo será descobrir como proceder para determinar a distância para locar as linhas dos paralelos ao longo dos meridianos.

4.2.2 Distâncias verticais também são alongadas

Mercator percebeu que, assim como aconteceu o alongamento da distância entre os meridianos, cada distância vertical do paralelo de latitude ϕ poderia também ser esticada no mapa com o mesmo fator $\sec \phi$ e assim, ficariam preservados os ângulos.

Como a linha de rumo corta todos os meridianos sob um mesmo ângulo na Terra e o mapa é conforme, denominação dada aos mapas que possuem a propriedade de conservar ângulos, resulta que, as linhas de rumo do mapa deverão cortar todas as verticais paralelas do meridiano sob um ângulo fixo e a curva que faz isto é a reta. Então o segredo estava em descobrir qual o espaçamento correto entre as linhas horizontais no mapa que preservasse os ângulos.

4.2.3 O deslocamento é alongado do fator $\sec \phi$

Seja um ponto P com latitude ϕ que se desloca de Δz ao longo de uma linha de rumo e que faz um ângulo α com o meridiano local e seu complementar seja $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, conforme Figura 4.10.

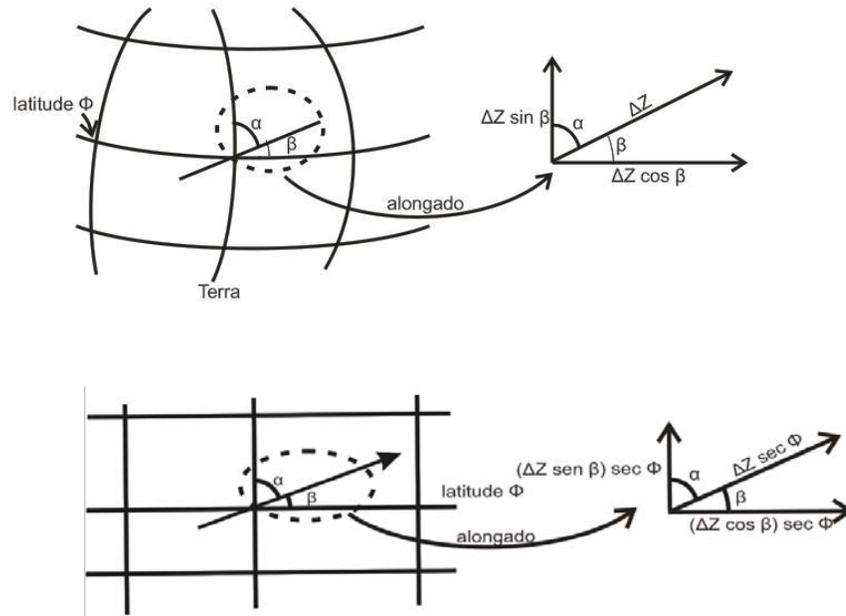


Figura 4.10 Representação do mesmo local no globo e no mapa de Mercator.

O que este deslocamento implicará no mapa de Mercator? As componentes horizontal e vertical de Δz são respectivamente: $\Delta z \cos \beta$ e $\Delta z \sin \beta$. Como vimos o deslocamento horizontal é aumentado pelo fator $\sec \phi$ e se os ângulos α e β forem preservados no mapa, a componente vertical também será multiplicada pelo fator $\sec \phi$ para preservar o ângulo da linha de rumo com os meridianos. Assim o deslocamento de Δz no globo resultará em $\Delta z' = \Delta z \sec \phi$ no mapa, pois:

$$\begin{aligned} \Delta z'^2 &= \Delta z^2 \sin^2 \beta \sec^2 \phi + \Delta z^2 \cos^2 \beta \sec^2 \phi \\ \Delta z'^2 &= \Delta z^2 \sec^2 \phi (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) \end{aligned}$$

$$\text{Resultando que} \quad \Delta z' = \Delta z \sec(\phi) \quad (4.3)$$

Podemos então afirmar que a *linha de rumo* no mapa plano será retilínea e fará o mesmo ângulo α com as imagens de todos os meridianos.

Resumindo: para se obter linhas de rumo retas no mapa precisamos preservar os ângulos do globo sobre o mapa e como as distâncias horizontais na latitude ϕ no globo são alongadas pelo fator $\sec \phi$ quando transportadas para o mapa, para preservar o ângulo devemos alongar os comprimentos verticais ao longo do meridiano no mesmo fator $\sec \phi$ na latitude ϕ , o que será feito na próxima seção.

A Figura 4.11 a seguir, extraída da referência [3], ilustra o processo desta transformação na projeção. Em A mostra-se verticalmente um fuso do globo terrestre com dois círculos desenhados em posições diferentes. Em B esticaram-se horizontalmente os dois meridianos exteriores de forma a ficarem paralelos, verifica-se aí que os círculos tornam-se elipses, ficando o do norte mais distorcido que o do sul. Mas a projeção é conforme, então ela deve conservar as formas em áreas pequenas e desta maneira, tem-se que esticar verticalmente as elipses até que elas retomem tornem novamente sua forma inicial, ou seja, circular, representada em C. Podemos notar visualmente que o círculo da parte do norte do setor ficou com diâmetro visualmente maior que o da parte inferior. Assim, na projeção de Mercator a escala das longitudes é constante, mas a escala das latitudes varia e, desta maneira, as distâncias neste tipo de mapa só serão verdadeiras se forem lidas na escala das latitudes.

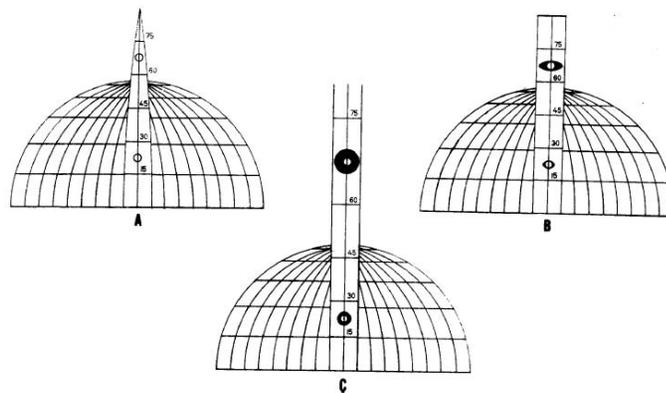


Figura 4.11 Projeção de Mercator e as latitudes alongadas. Extraída de [3].

4.2.4 Como locar os paralelos no Mapa de Mercator? Prenúncios dos conceitos do Cálculo

Sabemos que quando nos movimentamos ao longo de um meridiano, a latitude muda continuamente. Então o que significa alongar a distância vertical ao longo do meridiano com o mesmo fator $\sec \phi$? Como determinar o comprimento do segmento $A'P'$ a partir do arco \widehat{AB} ?

Seja ϕ_o a latitude do ponto P e $D(\phi_o)$ a distância no mapa de Mercator ao longo do meridiano de longitude θ_o . Se conhecermos $D(\phi_o)$ saberemos como locar este paralelo no mapa, que corresponde ao comprimento do segmento $A'P'$ da Figura 4.9.

Inicialmente vamos decompor o arco \widehat{AB} numa soma de deslocamentos elementares $\Delta u = R \Delta \phi$ com ϕ variando de 0 a ϕ_o . Como vimos, no mapa, cada um desses deslocamentos deve ser aumentado pelo fator $\sec \phi$, resultando $\Delta u \sec \phi = R \sec \phi \Delta \phi$. Para facilitar o desenvolvimento, vamos considerar o raio como unitário. Podemos observar que conforme ϕ varia ao longo de cada meridiano, o respectivo deslocamento elementar é multiplicado por um valor diferente de $\sec \phi$ e, desta maneira, o deslocamento $A'P'$ será aproximadamente igual à soma de todos os deslocamentos elementares.

Conforme aumenta o valor ϕ e, conseqüentemente, de $\sec \phi$, as parcelas deste somatório vão aumentando cada vez mais, o que resulta no aumento das distâncias verticais de forma bem mais acentuada do que nas distâncias horizontais no mapa.

Se $D(\phi)$ é a distância vertical no mapa do paralelo de latitude ϕ e tomando o maior dos comprimentos dos subintervalos $\Delta \phi_i \rightarrow 0$, obteremos aproximações cada vez melhores de $D(\phi)$ e aplicando o limite temos:

$$D(\phi_o) = A'P' = \lim_{\substack{\max \Delta \phi_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \sec \bar{\phi}_i \Delta \phi_i, \quad (4.4)$$

onde $\bar{\phi}_i \in [\phi_{i-1}, \phi_i]$.

Na linguagem atual do Cálculo, sendo $d(\phi) = \sec \phi$ contínua no intervalo de $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ o limite da soma corresponde à definição da Integral Definida.

$$D(\phi_o) = A'P' = \lim_{\substack{\max \Delta \phi_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \sec \bar{\phi}_i \Delta \phi_i = \int_0^{\phi_o} \sec \phi \, d\phi. \quad (4.5)$$

Assim, se quisermos encontrar a distância para colocar o paralelo ϕ_o no Mapa de Mercator devemos calcular a integral:

$$D(\phi_o) = \int_0^{\phi_o} \sec u \, du \quad (4.6)$$

4.3 O CONTEXTO HISTÓRICO DO MAPA DE MERCATOR

Pode-se notar pela expressão acima que para se plotar os paralelos de latitude no mapa de Mercator, era necessário saber calcular o valor de $\int \sec \phi \, d\phi$ para valores de $0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}$, mas como ele procedia antes mesmo de se conhecer o conceito de integral como conhecemos atualmente? Mercator não conheceu o Cálculo, mas ele sabia como proceder para colocar os paralelos em seu mapa. As idéias intuitivas do conceito da integral como limite da soma, que foram desenvolvidas somente no século seguinte por Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716) já estavam ali gravitando no engenho de Mercator. Naturalmente, com os recursos da época, seu mapa continha pequenos erros na colocação dos paralelos e no mapeamento dos rios e continentes, tendo em vista que sua fonte foram velhos mapas e roteiros de viagens notoriamente imprecisos. O matemático Edward Wright publicou em 1599 a primeira explicação do Mapa de Mercator utilizando o somatório $\sum R \sec \phi \Delta\phi$. Por meio de sua obra, Wright forneceu à navegação uma tabela das aproximações da somatória da integral $R \int \sec \phi \, d\phi$ para valores de ϕ entre 0 a 45° em intervalos de 1 minuto.

Os geógrafos da época que quisessem entender a construção de Mercator era necessário estimar o valor desta somatória. É muito possível que estas estimativas partissem de idéias que seriam sistematizadas depois no conceito de logaritmo (Napier) e nas tabelas de funções trigonométricas. Em 1620 Edmund Gunter publicou a tabela de logaritmos da tangente. Mais tarde em 1645, Henry Bond publicou a *Epitome of Navigation* que trazia sua descoberta para a integral: $\int_0^{\phi} \sec u \, du = -\ln[\operatorname{tg}(\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \phi))]$ que à época não foi provada, mas que teve contribuições de matemáticos como John Collins, Nicolaus Mercator, W. Oughtred e John Wallis que se basearam na comparação de tabelas e gráficos. Este resultado parece ser subjacente às estimativas de $\sum R \sec \phi \Delta\phi$ feitas até então. Durante a década de 1660 Newton e Leibniz desenvolveram suas sistematizações do Cálculo Diferencial e Integral. Em 1668 James Gregory

provou a integral da secante anteriormente apresentada, utilizando um argumento geométrico extremamente complicado. Nas próximas décadas já era possível encontrar cálculos mais simples de $\int \sec \phi d\phi$ e os matemáticos eram bastante conscientes que eles tinham que produzir a matemática necessária para prover de precisão a projeção de Mercator, considerando esta uma tarefa importante e relevante.[13] Assim, $\int \sec \phi d\phi$ foi um caso de integral inicialmente tratada como soma, tendência dominante da época e posteriormente podemos encontrar os valores da integral da secante através de qualquer uma das seguintes antiderivadas:

$$\int \sec \phi d\phi = \ln|\sec \phi + \operatorname{tg} \phi| + c$$

$$\int \sec \phi d\phi = -\ln \left| \operatorname{tg} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \right] \right| + c$$

$$\int \sec \phi d\phi = \ln \left| \operatorname{tg} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right) \right] \right| + c$$

onde c é uma constante arbitrária. (Apêndice 2)

O mapa de Mercator foi muito importante para a Cartografia e para a navegação, pois ele simplificou a tarefa para os navegadores trafegarem nos mares, uma vez que para se projetar a linha de rumo, bastaria traçar uma simples reta ligando as duas localidades no mapa.

Muitas foram as versões produzidas para o mapa de Mercator buscando precisão o suficiente para satisfazer as necessidades das navegações e tudo isto foi produzido antes da invenção do Cálculo. [13]

4.4 DEFORMAÇÕES E OS FATORES DE ESCALA NO MAPA DE MERCATOR

4.4.1 Ao longo dos meridianos (M_m)

Para uma projeção cilíndrica, a representação no mapa é retangular, com o eixo x representando as longitudes e os paralelos de latitude ϕ estão representados por linhas horizontais de coordenadas $y = F(\phi)$. Em um globo de raio unitário o arco de qualquer meridiano entre ϕ e $(\phi + t)$ tem comprimento t enquanto sua imagem no mapa tem comprimento $F(\phi + t) - F(\phi)$. Disto, resulta que

$\Delta dist_{mapa} = F(\phi + t) - F(\phi)$ enquanto $\Delta dist_{globo} = t$. Em função disto, o fator de escala, que será denotado de M_m ao longo do meridiano no ponto de latitude ϕ é dado por:

$$M_m = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\phi + t) - F(\phi)}{t} = F'(\phi),$$

que é a derivada da função altura para locar os paralelos.

4.4.2 Ao longo dos paralelos (M_p)

A distância horizontal entre a representação das linhas verticais no mapa representando as longitudes θ e $\theta + t$ é simplesmente t . Já no globo, a circunferência de latitude ϕ tem comprimento $2\pi R \cos\phi$, então o arco do paralelo de longitudes θ e $\theta + t$ é um arco de comprimento $\frac{t}{2\pi} 2\pi \cos(\phi) = t \cos(\phi)$

$$M_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta dist_{mapa}}{\Delta dist_{globo}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t \cos\phi} = \sec \phi$$

Então neste mapa retangular o fator de escala é determinado por:

$$M_m = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\phi+t)-F(\phi)}{t} = F'(\phi)$$

Considerando que pretendemos construir um mapa conforme, então $M_m = M_p$ que resulta que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\phi+t)-F(\phi)}{t} = F'(\phi) = \sec \phi$

Se considerarmos o paralelo como um segmento de reta horizontal de altura $y = F(\phi)$ e $\frac{dF}{d\phi} = F'(\phi) = \sec \phi$ e em seguida integrar ambos os lados obtemos:

$F(\phi) = \int \sec \phi d\phi = \ln|\sec \phi + tg \phi| + c$, onde c é uma constante de integração.

Se tomarmos $\phi = 0$, teremos $h = 0$ e $c = 0$ e nestas condições:

$$F(\phi) = \ln|\sec \phi + tg \phi| \quad (4.7)$$

Quando as latitudes estão se aproximando de $\pm \frac{\pi}{2}$ o fator de escala $\sec \phi$ tende ao infinito.

O mapa a seguir ilustra as deformações de área nas baixas latitudes (Antártida) no Mapa de Mercator, tema que discutiremos a seguir.



Figura 4.12 Mapa de Mercator com variação de latitudes de $-89,8^\circ$ S e 83° N

4.5 PARAMETRIZAÇÕES DA TRAJETÓRIA GEODÉSICA E DA LOXODROMIA NO MAPA DE MERCATOR

4.5.1 Transformações do Mapa de Mercator para o mapa latitude-longitude, para o globo e suas inversas

Com o objetivo de determinarmos as transformações parametrizadas da geodésica e da *loxodromia* no Mapa de Mercator e no globo, apresentamos a seguir as transformações mapa latitude-longitude \rightarrow mercator, mercator \rightarrow globo e suas respectivas inversas.

a) Função F que leva pontos do Mapa Latitude-Longitude para o Mapa de Mercator:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{MAPA LAT-LONG.} & \xrightarrow{F} & \text{MERCATOR} \\
 (\theta, \phi) & \longrightarrow & (\theta, \psi)
 \end{array}$$

Como já deduzido anteriormente, precisamos alongar as distâncias verticais para plotar os paralelos no Mapa de Mercator e assim a transformação F será:

$$(\theta, \phi) \xrightarrow{F} \left(\theta, \psi = \int_0^\phi \sec u \, du \right).$$

Da equação (4.7) temos

$$\psi = \int_0^\phi \sec u \, du = \ln|\sec \phi + \operatorname{tg} \phi|.$$

Logo

$$F(\theta, \phi) = (\theta, \ln|\sec \phi + \operatorname{tg} \phi|), \quad (4.8)$$

com $\phi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e $\theta \in]-\pi, \pi[$.

b) Função F^{-1} que leva pontos do Mapa de Mercator para o mapa Latitude -Longitude:

$$\begin{array}{ccc} & F^{-1} & \\ \text{MAPA LAT-LONG.} & \longleftarrow & \text{MERCATOR} \\ (\theta, \phi) & \longleftarrow & (\theta, \psi) \end{array}$$

Temos que determinar $F^{-1}(\theta, \psi) = (\theta, \phi)$, onde ψ depende de ϕ .

Partindo de $\psi = \ln|\sec \phi + \operatorname{tg} \phi|$

$$(e^\psi)^2 = e^{2\ln|\sec \phi + \operatorname{tg} \phi|} = e^{\ln|\sec \phi + \operatorname{tg} \phi|^2}$$

$$(e^\psi)^2 = (\sec \phi + \operatorname{tg} \phi)^2 = \left(\frac{1}{\cos \phi} + \frac{\operatorname{sen} \phi}{\cos \phi} \right)^2$$

$$e^{2\psi} = \frac{(1 + \operatorname{sen} \phi)^2}{\cos^2 \phi} = \frac{(1 + \operatorname{sen} \phi)(1 + \operatorname{sen} \phi)}{1 - \operatorname{sen}^2 \phi}$$

$$e^{2\psi} = \frac{(1 + \operatorname{sen} \phi)(1 + \operatorname{sen} \phi)}{(1 + \operatorname{sen} \phi)(1 - \operatorname{sen} \phi)} = \frac{(1 + \operatorname{sen} \phi)}{(1 - \operatorname{sen} \phi)}$$

$$e^{2\psi}(1 - \operatorname{sen} \phi) = (1 + \operatorname{sen} \phi)$$

$$e^{2\psi} - e^{2\psi} \operatorname{sen} \phi = 1 + \operatorname{sen} \phi$$

$$\operatorname{sen} \phi (e^{2\psi} + 1) = 1 - e^{2\psi}$$

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{1 - e^{2\psi}}{1 + e^{2\psi}} \Rightarrow \phi = \operatorname{Arc Sen} \left(\frac{1 - e^{2\psi}}{1 + e^{2\psi}} \right)$$

$$\text{Como } \operatorname{senh} \psi = \frac{e^\psi - e^{-\psi}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{cosh} \psi = \frac{e^\psi + e^{-\psi}}{2},$$

resultando que:

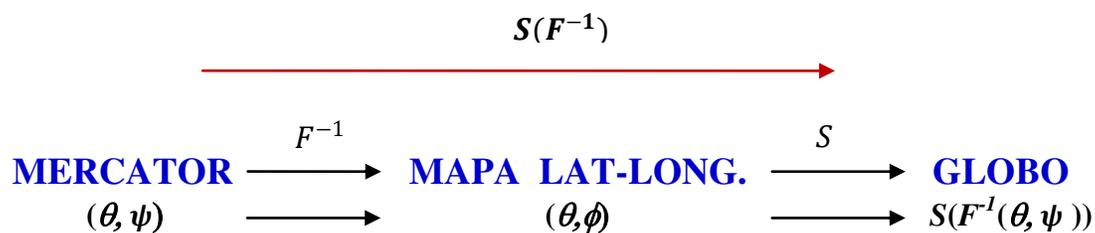
$$\operatorname{tgh} \psi = \frac{\operatorname{senh} \psi}{\operatorname{cosh} \psi} = \frac{e^{\psi} - e^{-\psi}}{e^{\psi} + e^{-\psi}} = \frac{1 - e^{-2\psi}}{1 + e^{-2\psi}}$$

Assim obtemos:

$$F^{-1}(\theta, \psi) = (\theta, \operatorname{Arc Sen}(\operatorname{tgh} \psi)), \quad (4.9)$$

com $\psi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e $\theta \in]-\pi, \pi[$.

c) A composição $M = S(F^{-1})$ que leva os pontos do Mapa de Mercator para o globo esférico:



$$\text{De (4.9) } F^{-1}(\theta, \psi) = (\theta, \operatorname{Arc Sen}(\operatorname{tgh}(\psi)))$$

$$\text{Seja } M(\theta, \psi) = S(F^{-1}(\theta, \psi))$$

$$M(\theta, \psi) = (\cos(\operatorname{Arc sen}(\operatorname{tgh}\psi)) \cos \theta, \cos(\operatorname{Arc sen}(\operatorname{tgh} \psi)) \operatorname{sen} \theta, \operatorname{sen}(\operatorname{Arc sen}(\operatorname{tgh} \psi))).$$

Podemos simplificar $\operatorname{Arc sen}(\operatorname{tgh} \psi)$, conforme segue:

$$\cos \psi = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \psi}$$

Como a função $\psi = \ln|\sec \phi + \operatorname{tg} \phi|$ então sua imagem está no 1º e 4º quadrantes e desta maneira $\cos \psi > 0$, então:

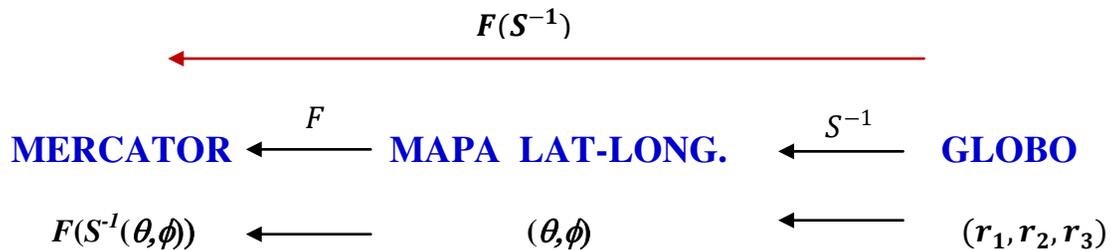
$$\begin{aligned}
 \cos \psi &= \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \psi} = \sqrt{1 - (\operatorname{sen}(\operatorname{Arcsen}(\operatorname{tgh} \psi)))^2} \\
 &= \sqrt{1 - (\operatorname{tgh} \psi)^2} = \sqrt{(\operatorname{sech} \psi)^2} = \operatorname{sech} \psi
 \end{aligned}$$

Substituindo em $M(\theta, \psi)$, obtemos:

$$M(\theta, \psi) = (\operatorname{sech} \psi \cos \theta, \operatorname{sech} \psi \operatorname{sen} \theta, \operatorname{tgh} \psi), \quad (4.10)$$

com $\psi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e $\theta \in]-\pi, \pi[$.

d) A composição $M^{-1} = F(S^{-1})$ que leva os pontos do globo esférico para o Mapa do Mercator:



Como apresentado anteriormente $F(\theta, \phi) = (\theta, \ln|\sec \phi + \operatorname{tg} \phi|)$.

Desta maneira as composições $M^{-1}(r_1, r_2, r_3) = F(S^{-1}(r_1, r_2, r_3))$ serão:

i) Para $r_2 \geq 0$:

$$M^{-1}(r_1, r_2, r_3) = \left(\operatorname{Arc} \cos \left(\frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \right), \ln \sec |(\operatorname{Arc} \operatorname{sen} r_3) + \operatorname{tg}(\operatorname{Arc} \operatorname{sen} r_3)| \right),$$

com r_1 e $r_2 \neq 0$.

Simplificando $\sec(\operatorname{Arc} \operatorname{sen} r_3)$ e $\operatorname{tg}(\operatorname{Arc} \operatorname{sen} r_3)$ de $M^{-1}(r_1, r_2, r_3)$ obtemos:

$$M^{-1}(r_1, r_2, r_3) = \left(\operatorname{Arc} \cos \left(\frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \right), \ln \left| \frac{1+r_3}{\sqrt{1-r_3^2}} \right| \right),$$

com $r_1^2 + r_2^2 \neq 0$, $r_3 \neq \pm 1$.

De fato, como mostramos a seguir:

Tomando $w = \operatorname{Arc} \operatorname{sen} r_3$

$$\cos w = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 w}, \text{ pois } w \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ que resulta em } \cos w > 0.$$

$$\sec w = \frac{1}{\cos w} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\operatorname{sen} w)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\operatorname{sen}(\operatorname{Arc} \operatorname{sen} r_3))^2}}$$

$$\sec(\operatorname{Arc} \operatorname{sen} r_3) = \frac{1}{\sqrt{1 - (r_3)^2}}$$

$$\operatorname{tg} w = \frac{\operatorname{sen} w}{\cos w} = \frac{\operatorname{sen} w}{\sqrt{1 - (\operatorname{sen} w)^2}} = \frac{\operatorname{sen} w}{\sqrt{1 - (\operatorname{sen}(\operatorname{Arc} \operatorname{sen} r_3))^2}}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arc} \operatorname{sen} r_3) = \frac{\operatorname{sen} w}{\sqrt{1 - (r_3)^2}}.$$

$$\text{Logo } \ln|\sec(\operatorname{Arc} \operatorname{sen} r_3) + \operatorname{tg}(\operatorname{Arc} \operatorname{sen} r_3)| = \ln \left| \frac{1+r_3}{\sqrt{1-r_3^2}} \right|$$

ii) De forma análoga obtemos $M^{-1}(r_1, r_2, r_3)$ para $r_2 < 0$:

$$M^{-1}(r_1, r_2, r_3) = \left(-\text{Arc cos} \left(\frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \right), \ln \left| \frac{1 + r_3}{\sqrt{1 - r_3^2}} \right| \right)$$

Escrevendo a função $M^{-1}(r_1, r_2, r_3)$ definida por partes, temos:

$$M^{-1}(r_1, r_2, r_3) = \begin{cases} \left(\text{Arc cos} \left(\frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \right), \ln \left| \frac{1 + r_3}{\sqrt{1 - r_3^2}} \right| \right), & \text{se } r_2 \geq 0 \\ \left(-\text{Arc cos} \left(\frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \right), \ln \left| \frac{1 + r_3}{\sqrt{1 - r_3^2}} \right| \right), & \text{se } r_2 < 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

com $r_1^2 + r_2^2 \neq 0$, $r_3 \neq \pm 1$ e $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$.

Lembrando que:

$$(r_1, r_2, r_3) = (x, y, z) = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, \sin\phi), c / -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2} \text{ e } -\pi < \theta < \pi.$$

A transformação $M^{-1}(r_1, r_2, r_3)$ permite-nos encontrar a transformação dos pontos do globo para o Mapa de Mercator, com exceção dos pontos situados no pólo e na LID conforme ilustra o esquema a seguir:

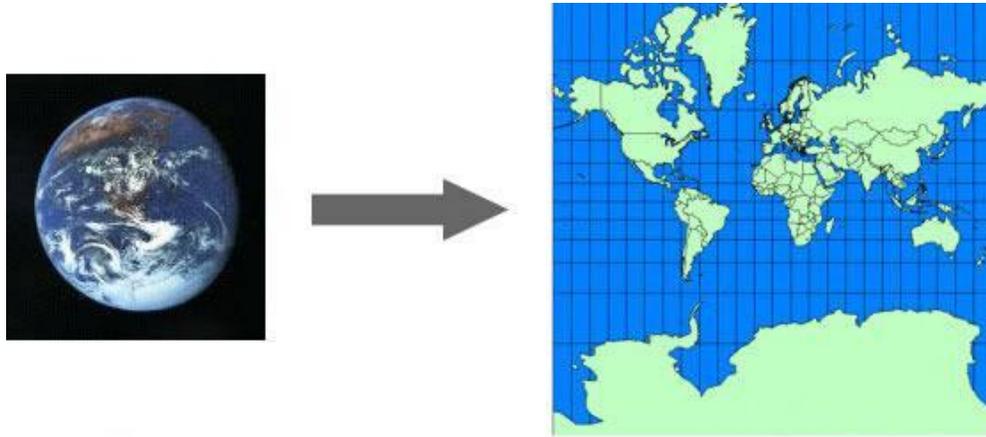


Figura 4.13 Extraída de [19]

Agora resta-nos determinar a transformação dos pontos da curva geodésica no globo para o mapa de Mercator, tema que será abordado a seguir.

4.5.2 Trajetória geodésica no Mapa de Mercator

Tomando os resultados obtidos em (4.11), determinamos a seguir a função que descreve a curva geodésica no mapa de Mercator.

Limitaremos nosso foco a estudar as curvas geodésicas situadas em duas regiões do globo, uma para $r_2 \geq 0$ e a outra $r_2 < 0$, que equivale a $0 \leq \theta < \pi$ e $-\pi < \theta \leq 0$.

Uma parametrização da curva geodésica é determinada por meio da composição $G(t) = F(S^{-1}(c(t)))$, onde $c(t)$ é a parametrização do *grande círculo* em $t \in [0, \text{Arc cos}\langle P_1, P_2 \rangle]$.

$$G(c_1(t), c_2(t), c_3(t)) = \begin{cases} \left(\text{Arc cos} \left(\frac{c_1(t)}{\sqrt{c_1(t)^2 + c_2(t)^2}} \right), \ln \left| \frac{1 + c_3(t)}{\sqrt{1 - c_3(t)^2}} \right| \right), & \text{se } c_2(t) \geq 0 \\ \left(-\text{Arc cos} \left(\frac{c_1(t)}{\sqrt{c_1(t)^2 + c_2(t)^2}} \right), \ln \left| \frac{1 + c_3(t)}{\sqrt{1 - c_3(t)^2}} \right| \right), & \text{se } c_2(t) < 0 \end{cases}, \quad (4.12)$$

com $c_1(t)^2 + c_2(t)^2 \neq 0$ e $c_3 \neq 1$.

A expressão (4.12) está bem definida, exceto para $c_1(t)^2 + c_2(t)^2 = 0$ e neste caso sendo $c_1(t)^2 + c_2(t)^2 + c_3(t)^2 = 1$ resulta em $c_3(t) = \pm 1$, ou seja, nos pólos.

Retomando o exemplo tratado na subseção 3.3.3.2 das trajetórias entre Calgary – Londres – Campinas, utilizamos as funções paramétricas deduzidas (4.11) e (4.12) para plotarmos as curvas geodésicas(vermelha) e a loxodrômicas(azul) nos dois trechos e mais a frente apresentaremos o cálculo da distância nos dois tipos de trajetórias e uma comparação entre elas.

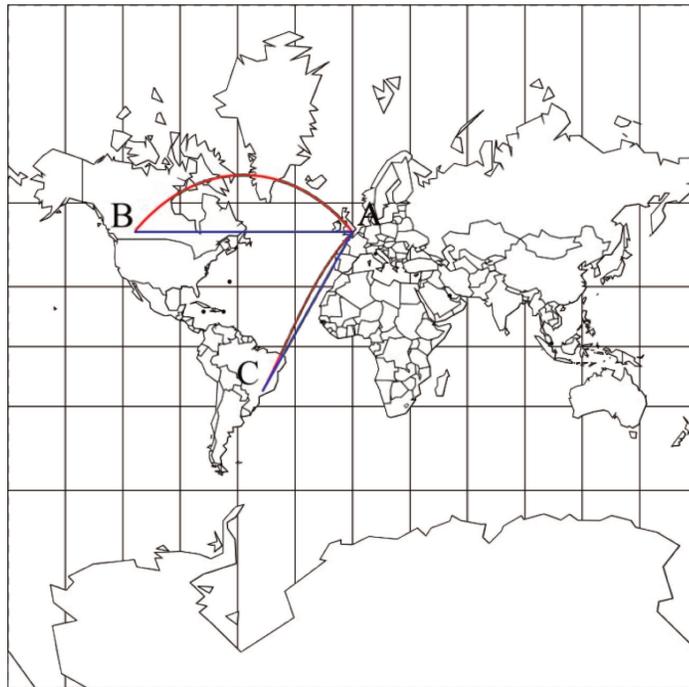


Figura 4.14 Curvas geodésica e loxodrômica das trajetórias Londres(A) - Calgary (B) e Londres(A) – Campinas(C).

Nas trajetórias de Londres para Calgary, pode se observar que o caminho pela *loxodromia* segue em direção constante, cuja representação no Mapa de Mercator é uma reta. Já pela geodésica o trajeto atravessa o sul da Groenlândia, o nordeste do Canadá e finalmente chega a Calgary situado no sudoeste deste país. Qual trajetória tem a menor distância? Pelo aspecto visual, a priori, parece nos indicar pelo primeiro caminho, mas na realidade, a segundo que nos fornece a menor distância e isto ocorre em função da deformação que a curva sofre no mapa de Mercator. Na figura a seguir, buscamos traçar as duas trajetórias de Calgary – Londres, a azul é a *loxodromia* e a vermelha a geodésica. Na próxima subseção apresentamos qual a diferença entre as distâncias ao percorrermos as duas trajetórias.

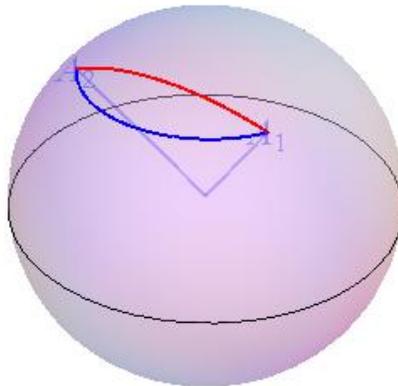


Figura 4.15 Trajetória geodésica (vermelho) e a *loxodromia* (azul) de A_1 a A_2 .

Com o objetivo de situar no contexto histórico possível prática da navegação ocorrida algumas décadas antes do tempo de Mercator, construímos uma trajetória hipotética pela *loxodromia* conforme Figura 4.16 simulando um possível caminho percorrido pelos navegadores no descobrimento do Brasil em dois trechos: de Lisboa a Cabo Verde e posteriormente de Cabo Verde ao Brasil. Fizemos uma descoberta muito curiosa. Constatamos que a inclinação da reta que nos fornece a linha de rumo entre Lisboa e Cabo Verde é de aproximadamente 28° . Já no segundo trecho, há um pequeno desvio de aproximadamente $1^\circ 42'$ em relação ao primeiro trecho e que prosseguindo nesta nova linha de rumo resulta no local que avista Monte Pascoal em Porto Seguro no Brasil. Acreditamos que isto também mostra indícios de que o “achamento” do Brasil não foi ao acaso, conforme apontado por vários historiadores, pois a rota parece ter sido orientada

por uma linha de rumo, isto é, uma direção constante com os meridianos, o que pode significar que esta técnica de navegação já era conhecida pelos navegadores antes mesmo da invenção do mapa de Mercator, pois conforme o relato em [16], o fato da imagem da *loxodromia* no mapa ser uma reta já havia sido observado e estudado antes pelo matemático português Pedro Nunes (1502-1578).

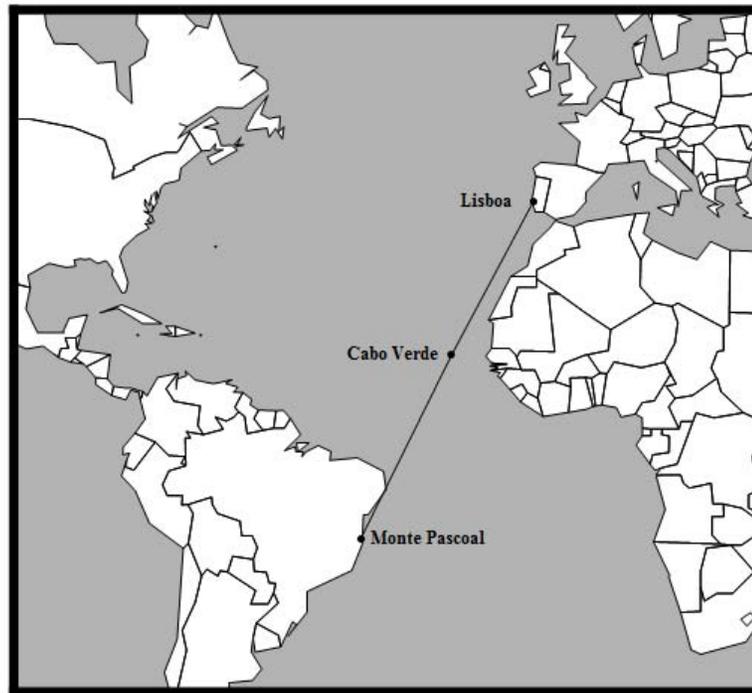


Figura 4.16 Trajetória hipotética percorrida pelos navegadores no descobrimento do Brasil.

Outro trajeto que esboçamos também foi o de Manaus – Brasília, trecho em que ocorreu o acidente aéreo em 2006 entre o Boeing 737-800 da GOL linhas aéreas e o Legacy N600L de uma companhia americana. Plotamos a *ortodromia* e a *loxodromia* entre as cidades e, constatamos que o ponto onde ocorreu o acidente das aeronaves na Serra do Caximbo no Pará está praticamente alinhado com a *loxodromia*, dando indícios de que os aviões estavam voando próximo da linha de rumo, possivelmente rota do tráfego aéreo a diferentes altitudes neste percurso.

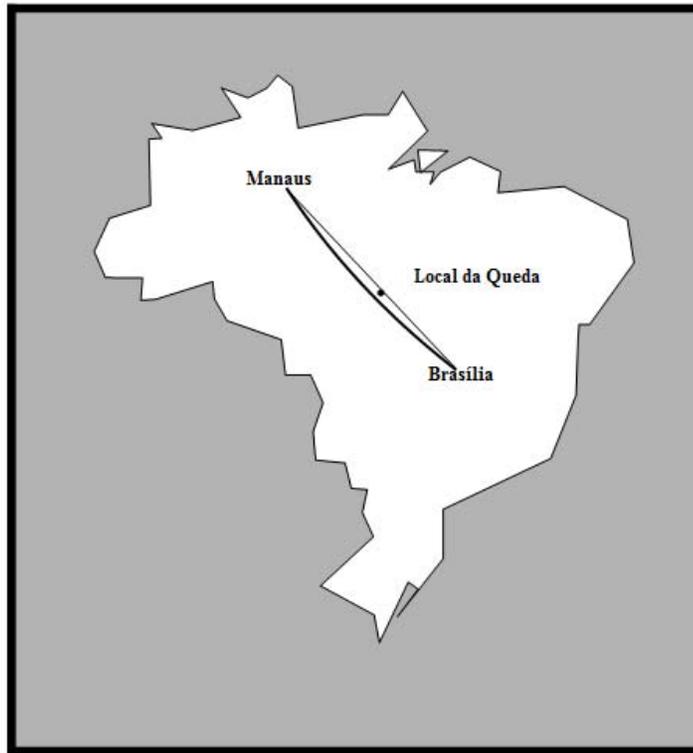


Figura 4.17 Rota Manaus – Brasília pela *loxodromia* e pela *geodésica* no mapa de Mercator.

Como já mencionado anteriormente, todo mapa sofre algum tipo de distorção, seja no ângulo, na área ou no comprimento. Em especial, na projeção de Mercator, se tem a vantagem dela ser uma projeção conforme, ou seja, são preservados os ângulos do globo terrestre, no entanto, o comprimento e a área não são preservados.

4.6 A PROJEÇÃO DE MERCATOR PRESERVA ÂNGULO

Assim como a projeção estereográfica abordada na seção 2.10, a projeção de Mercator, também é conforme. Da mesma maneira como procedemos anteriormente, para mostrar esta propriedade usando a geometria diferencial, utilizaremos a parametrização da esfera (4.10) para determinar a matriz de sua primeira forma fundamental, mostrando que esta é múltipla da matriz identidade. [9]

A função paramétrica $M: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ é dada por:

$$M(\theta, \psi) = (\operatorname{sech} \psi \cos \theta, \operatorname{sech} \psi \sin \theta, \operatorname{tgh} \psi)$$

Precisamos da matriz da primeira forma fundamental de $M(\theta, \psi)$:

$$\mathcal{F}_I = \begin{vmatrix} \langle M(\theta, \psi)_\theta, M(\theta, \psi)_\theta \rangle & \langle M(\theta, \psi)_\theta, M(\theta, \psi)_\psi \rangle \\ \langle M(\theta, \psi)_\theta, M(\theta, \psi)_\psi \rangle & \langle M(\theta, \psi)_\psi, M(\theta, \psi)_\psi \rangle \end{vmatrix}$$

$$\langle M(\theta, \psi)_\theta, M(\theta, \psi)_\theta \rangle = \operatorname{sech}^2 \psi$$

$$\langle M(\theta, \psi)_\psi, M(\theta, \psi)_\psi \rangle = \operatorname{sech}^2 \psi$$

$$\langle M(\theta, \psi)_\theta, M(\theta, \psi)_\psi \rangle = 0$$

$$\mathcal{F}_I = \begin{vmatrix} \operatorname{sech}^2 \psi & 0 \\ 0 & \operatorname{sech}^2 \psi \end{vmatrix}.$$

Fazendo $k(\psi, \theta) = \operatorname{sech}^2 \psi$, temos:

$$\mathcal{F}_I = \begin{vmatrix} k(\psi, \theta) & 0 \\ 0 & k(\psi, \theta) \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{F}_I = k(\psi, \theta) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Portanto, a projeção de Mercator é conforme.

4.7 DEFORMAÇÕES DA ÁREA NO MAPA DE MERCATOR

No comprimento, o mapa de Mercator sofre deformação nos meridianos e paralelos do fator $M_p = M_m = \sec \phi$, onde ϕ é a latitude do ponto em que estamos fazendo a medida, tomando o raio do globo como unitário. Comentamos a seguir a deformação que ocorre na área.

Para determinar a distorção de área, tomamos a área de uma pequena região no globo e comparamos com sua área na imagem da região no mapa. A razão entre estas duas áreas é um razoável caminho para comparação, assim:

$$M_A = \text{distorção da área} = \frac{\text{Área no mapa}}{\text{Área no globo}} \quad (4.13)$$

Na realidade, estas distorções serão diferentes nas regiões que circundam cada ponto do globo e desta forma, ela deve ser calculada localmente para pequenas regiões, por isso é necessário considerar o elemento de área do globo e do mapa. Para que um mapa represente todas as áreas corretamente, a razão (4.13) deve ser igual a 1 em todos os pontos, como ocorre nas projeções cilíndrica e azimutal de Lambert, nos Mapas de Gall-Peters e de Mollweide e na projeção sinusoidal. [8] Na prática, o que ocorre é que se trabalha numa determinada escala para produzirmos uma versão menor da Terra e então, afirmar que um mapa conserva a área é dizer que todas as áreas estão numa mesma proporção.

Elemento de área no globo esférico

Vamos considerar uma região da superfície esférica coberta por um grande número de blocos bem pequenos (infinitésimos).

Deduzimos anteriormente na equação (4.1) que o comprimento de um paralelo é $R \cos \phi_o$. Tomando um elemento de área de um ponto situado entre dois meridianos de longitude θ e $\theta + \Delta\theta$ e, entre os paralelos de latitudes ϕ_o e $\phi_o + \Delta\phi$, temos a área:

$$A_{bloco\ globo} = R\Delta\theta R \cos(\phi_o + \Delta\phi)$$

Fazendo $\Delta\phi \rightarrow 0$

$$A_{bloco\ globo} = R^2 \cos\phi_o \Delta\theta \Delta\phi \quad (4.14)$$

Elemento de área no Mapa de Mercator

Para determinar a distorção da área num dado mapa, temos que comparar as áreas dos blocos do globo esférico quadriculado com as imagens das áreas destes blocos no mapa. No caso do Mapa de Mercator, as imagens destes blocos são retângulos e, como as linhas dos meridianos são mostradas verticalmente e estão igualmente espaçadas, então a largura de qualquer retângulo formado entre dois meridianos é $\Delta\theta$ e a altura é $\int_{\phi_o}^{\phi_o + \Delta\phi} \sec t \, dt$.

$$A_{bloco\ -mercator} = \Delta\theta \int_{\phi_o}^{\phi_o + \Delta\phi} \sec t \, dt,$$

podemos minorar $\int_{\phi_o}^{\phi_o + \Delta\phi} \sec \phi \, d\phi$, como estamos trabalhando com infinitésimos, esta minoração é também uma aproximação linear, já que a diferencial da função $\int_0^\phi \sec(u) \, du$ em ϕ_o é dada por $d\left(\int_0^\phi \sec u \, du\right)(\phi_o) = \sec(\phi_o) \, d\phi$

$$A_{bloco\ -mercator} = \sec \phi_o \Delta\theta \Delta\phi. \quad (4.15)$$

Diante das áreas do elemento de área (4.14) e (4.15), a deformação de área no Mapa de Mercator calculando a razão (4.13) é:

$$M_A = \frac{A_{bloco\ -mercator}}{A_{bloco\ -globo}} = \frac{\sec \phi_o \Delta\theta \Delta\phi}{R^2 \cos\phi_o \Delta\theta \Delta\phi}$$

$$M_A = \frac{A_{bloco\ -mercator}}{A_{bloco\ -globo}} = \frac{\sec^2 \phi_o}{R^2} \quad (4.16)$$

Supondo o raio unitário então

$$M_A = \sec^2 \phi$$

Para exemplificar, no equador onde $\phi = 0$ $M_A = 1$, então no equador o mapa não sofre, no limite, deformação de área, ou seja, áreas de regiões pequenas situadas próximas do equador não são quase deformadas. Seguem na tabela abaixo, valores do fator de deformação da área para alguns valores de ϕ .

Latitude ϕ (em graus):	Fator de distorção de área (M_A):
0	1
$\pm 45^\circ$	2
$\pm 60^\circ$	4
$\pm 80^\circ$	33
$\pm 85^\circ$	133

Este resultado explica matematicamente as razões pelos quais neste mapa países situados em altas latitudes sofrem tantas deformações. Um exemplo frequentemente citado é o da Groenlândia que, quando representada em uma projeção de Mercator, aparece maior que a América do Sul situada próxima ao equador, apesar desta última ter área oito vezes maior que a primeira, conforme ilustra a Figura 4.18.

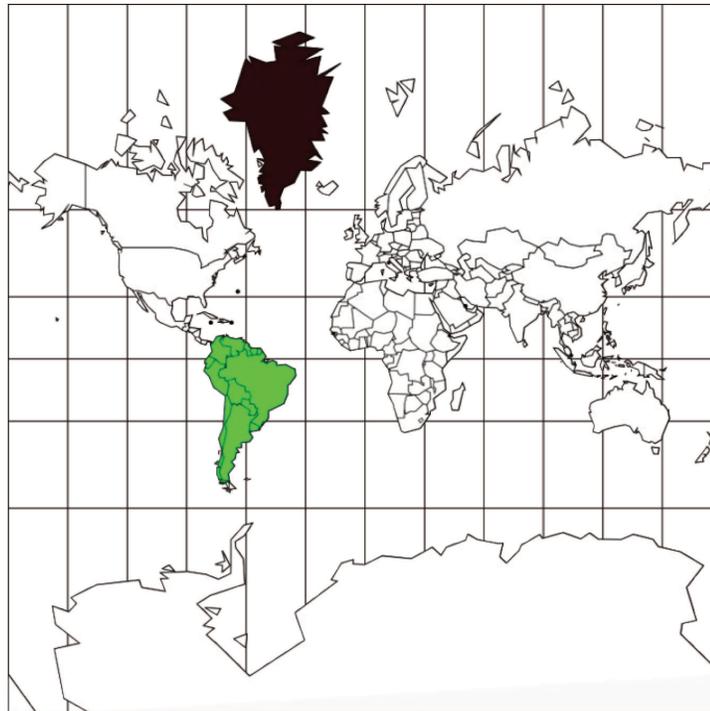


Figura 4.18 Mapa de Mercator com destaque na América do Sul e Groenlândia.

Observe as regiões destacadas no Mapa de Mercator da Figura 4.19 a seguir:

O que se pode dizer ao comparar a área da África e América do Norte? E a da América do Sul com a Antártida? Visualmente, a América do Norte parece bem maior que a África, assim como a Antártida em relação a América do Sul, no entanto, observando os valores da tabela das áreas a seguir, pode se constatar que não é isto o que ocorre.

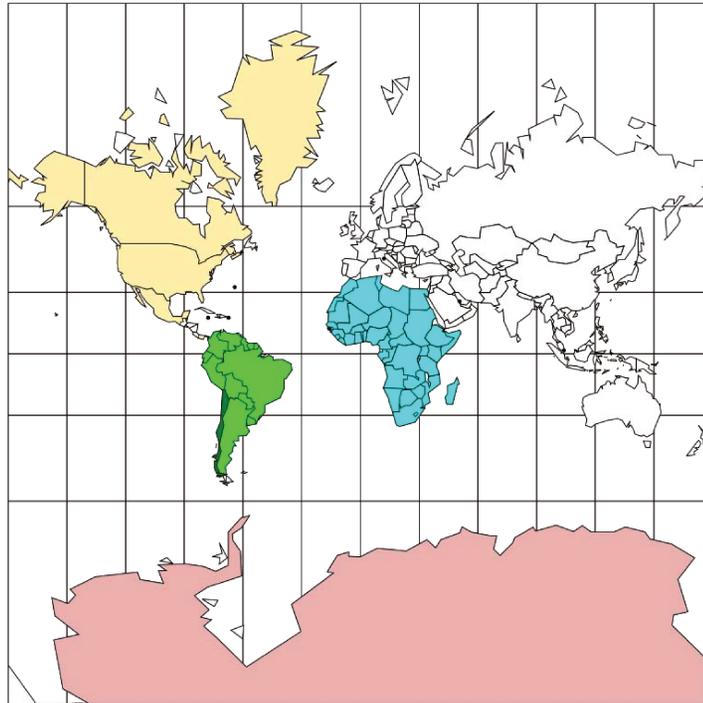


Figura 4.19 Mapa de Mercator com destaque a América do Norte e do Sul, África e Antártida.

Região	Área em (milhas quadradas)
África	11.687.188
América do norte	9.357.294
América do sul	6.880.638
Antartida	5.100.023

Dados extraídos de [23].

4.8 DISTÂNCIAS GEODÉSICAS E LOXODRÔMICAS

Na subseção 2.4.3.2 mostramos como determinar a distância geodésica entre dois pontos no globo conhecidas suas coordenadas geográficas por meio da equação (2.7). Já para obter a distância loxodrômica precisamos inicialmente encontrar uma função da reta no mapa de Mercator:

As coordenadas dos pontos são afetadas pela função $F(\theta, \phi) = (\theta, \psi = \ln|\sec \phi + \operatorname{tg} \phi)$ e, assim sendo, a equação parametrizada da reta loxodrômica passando pelos pontos de coordenadas (θ_1, ψ_1) e (θ_2, ψ_2) é dada por:

$$r(\theta) = \left(\theta, \frac{\psi_2 - \psi_1}{\theta_2 - \theta_1} \theta + \psi_1 \right)$$

Precisamos da função paramétrica da curva que representa esta reta no globo, então fazemos uma aplicação $\gamma(\theta) = S(r(\theta))$.

$$\gamma(\theta) = S \left(\theta, \frac{\psi_2 - \psi_1}{\theta_2 - \theta_1} \theta + \psi_1 \right),$$

chamando $p = \frac{\psi_2 - \psi_1}{\theta_2 - \theta_1}$

$$\gamma(\theta) = S(\theta, p\theta + \psi_1) = (\cos \theta \cos(p\theta + \psi_1), \operatorname{sen} \theta \cos(p\theta + \psi_1), \operatorname{sen}(p\theta + \psi_1)).$$

Fazendo $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta), z(\theta))$, teremos que $\gamma'(\theta) = (x'(\theta), y'(\theta), z'(\theta))$.

$$x'(\theta) = \operatorname{sen} \theta \cos(p\theta + \psi_1) + \cos \theta \frac{d}{d\theta} (\cos(p\theta + \psi_1))$$

$$y'(\theta) = \cos \theta \cos(p\theta + \psi_1) + \operatorname{sen} \theta \frac{d}{d\theta} (\cos(p\theta + \psi_1))$$

$$z'(\theta) = \frac{d}{d\theta} (\operatorname{sen}(p\theta + \psi_1)).$$

Obtido $\gamma'(\theta)$, a distância entre dois pontos P_1 e P_2 no globo na curva loxodrômica será determinada por:

$$L_{P_1 P_2} = R \int_{\theta_1}^{\theta_2} \|\gamma'(\theta)\| d\theta,$$

onde R é o raio da Terra.

Outro modo de encontrar a distância na curva loxodrômica é o seguinte:

Seja $\tilde{r}(t)$ a equação paramétrica da reta do Mapa de Mercator que contém os pontos de coordenadas (x_1, ψ_1) e (x_2, ψ_2) :

$$\tilde{r}(t) = (x_1, \psi_1) + t((x_2, \psi_2) - (x_1, \psi_1))$$

$$\tilde{r}(t) = (x_1 + t(x_2 - x_1), \psi_1 + t(\psi_2 - \psi_1)),$$

com $\psi = \ln|\sec \phi + tg \phi|$.

Fazendo $a(t) = x_1 + t(x_2 - x_1)$ e $b(t) = \psi_1 + t(\psi_2 - \psi_1)$ teremos que a equação paramétrica da curva no globo será:

$$\tilde{\gamma}(t) = S(a(t), b(t))$$

$$\tilde{\gamma}(t) = (\cos a(t) \cos b(t), \cos a(t) \operatorname{sen} b(t), \operatorname{sen} b(t)).$$

Determinando $\tilde{\gamma}'(t)$ e $\|\tilde{\gamma}'(\theta)\|$, podemos determinar o comprimento da curva no globo, que corresponde à distância procurada:

$$L_{P_1 P_2} = R \int_0^1 \|\tilde{\gamma}'(t)\| dt.$$

Como as coordenadas da linha de rumo envolvem combinações de funções logarítmicas e trigonométricas, para o cálculo aproximado do trajeto loxodrômico utilizamos o computador.

Implementamos no *Mathematica* as expressões para o cálculo das distâncias dos casos a) Calgary – Londres; b) Londres – Campinas e obtivemos os seguintes resultados:

Localidade A:	Localidade B:	Distância aproximada pela Ortodromia (km):	Distância aproximada pela Loxodromia (km):
Londres (Reino Unido)	Calgary (Canadá)	7031	7927
Londres (Reino Unido)	Campinas (Brasil)	9501	9531

Para trajetórias situadas próximas do equador, a *loxodromia* e a geodésica praticamente se confundem, no entanto, para grandes travessias, principalmente em altas latitudes, a diferença de distâncias pode ser significativa. Podemos verificar esta diferença no primeiro trecho há uma diferença de aproximadamente 896 km.

Implementamos no *Mathematica* as situações (A) e (B) da Figura 4.20 para plotar os dois tipos de trajetórias no globo, onde a geodésica está representada em vermelho e a *loxodromia* em azul, prolongamos esta última em preto para obter a espiral esférica.

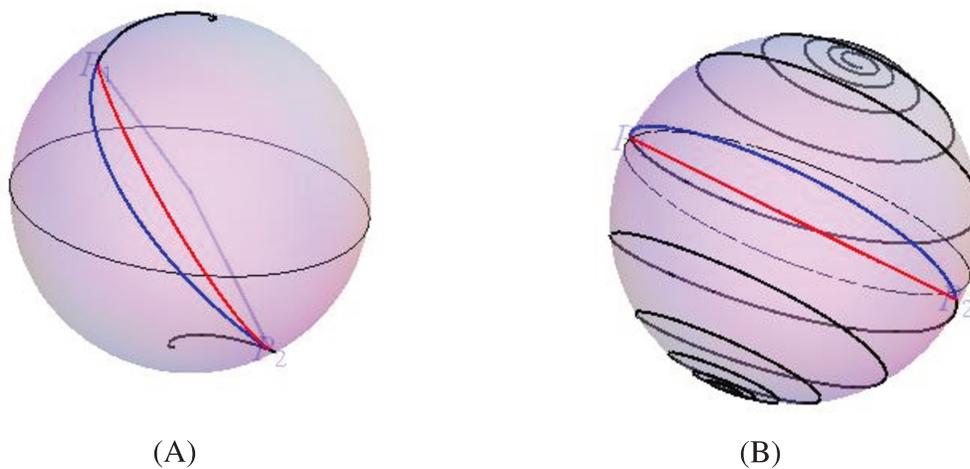


Figura 4.20 Dois exemplos ilustrando as trajetórias pela *loxodromia* e pela geodésica.

Finalizamos assim nosso estudo sobre a matemática envolvida em duas maneiras especiais de caminhar sobre o globo terrestre, pela geodésica e pela *loxodromia* e suas respectivas representações no mapa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho desenvolvemos um estudo buscando compreender a geometria da esfera retratada nos mapas, focando em especial, as trajetórias no globo terrestre pela geodésica e pela *loxodromia*.

Para isto, trouxemos para este trabalho os referenciais cartográficos e geográficos, um estudo da geometria da esfera e dois tipos de mapas cilíndricos, o mapa cilíndrico equidistante meridiano, que corresponde ao sistema de coordenadas geográfica latitude-longitude e o Mapa de Mercator. Para este último abordamos seu aspecto histórico, as propriedades, as deformações, as parametrizações, sua aplicabilidade e um comparativo entre a *loxodromia* e a curva geodésica neste tipo de mapa.

Utilizamos neste trabalho o Programa *Mathematica* para a implementação computacional das curvas nos mapas e no globo, embora seja possível o uso de outros softwares, no entanto, em função do tempo disponível para o desenvolvimento deste trabalho, deixamos como uma perspectiva futura.

Para o desenvolvimento deste trabalho, além dos conceitos e propriedades matemáticos e dos recursos computacionais envolvidos, tornou-se necessário buscar compreender, no limite de nosso estudo, o contexto de outras áreas do conhecimento, como a Cartografia, a Geografia e a História o que resultou num trabalho interdisciplinar, que para sala de aula é bastante interessante, pois permite entrelaçar as áreas e superar a forma fragmentada como são tratados os conteúdos nos cursos.

Como perspectivas futuras, pretendemos socializar e divulgar este trabalho em forma de seminário e/ou mini-curso em eventos da área e utilizá-lo nas aulas de graduação como motivação e aplicação do Cálculo, bem como, nos disponibilizar a orientar trabalhos de conclusão de curso na graduação com foco nesta temática. Temos ainda intenção de participar de projetos que se proponham a elaborar material para o ensino envolvendo a Geometria do Globo Terrestre.

Além disso, almejamos realizar um estudo sobre a influência da variação dos parâmetros θ (longitude) e ϕ (latitude) na aproximação entre as curvas geodésica e loxodrômica.

REFERENCIAIS BIBLIOGRÁFICOS

- [1] SNYDER, J.P. **Flattening the Earth: Two Thousand Years of Map Projections**. Chicago USA. The University of Chicago Press, 1993.
- [2] SOBEL, D. **Longitude: A verdadeira história do gênio solitário que resolveu o maior problema científico do século XVIII**. Trad. Bazán Tecnologia e Linguística. São Paulo: Companhia das Letras, 2008.
- [3] MIGUENS, A.P. **Navegação: A Ciência e a Arte: Navegação Costeira, Estimada e em águas restritas. Vol. 1**. Disponível em http://www.mar.mil.br/dhn/bhmn/publica_manual.nav1.html. Acesso em 20.01.08
- [4] BAKKER, M.P.R. **Cartografia: Noções Básicas**. Marinha do Brasil- Hidrografia e Navegação, DH21-1, 1965.
- [5] COUTINHO, L. **Convite às Geometrias não-euclidianas**. Rio de Janeiro. Editora Interciência, 2001.
- [6] ALVES, S. **A Geometria do Globo Terrestre**. Mini-Curso apresentado na II Bienal da SBM em 2004 na UFBA. Disponível em www.bienasbm/M29.pdf. Acesso em 20.01.08.
- [7] STEWART, J. **Cálculo. Vol 2**. 5ª edição. São Paulo, Thomson Learning, 2006.
- [8] FEEMANN, T.G. **Portraits of the Earth: A Mathematician Looks at Maps**. AMS- American Mathematical Society, USA, 2002.
- [9] CARMO, M.P. do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. SBM. Rio de Janeiro, 2005.
- [10] WEEKS, J.R. **The Shape of Space. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics**, New York, 1980.
- [11] JENNINGS, G.A. Spherical Geometry. Cap. 2. In: **Modern Geometry with Applications**. Springer, 1997.
- [12] BERGER, M. **Geometry II**. Editora Spring-Verlag, Alemanha, 1987.

- [13] TUCHINSKY, P.P. Mercator's World Map and the Calculus. Module 206. In: **UMAP - Modules and Monographs in undergraduate mathematics and its applications**. Cambridge, 1981. p. 677-727.
- [14] <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk>. Acesso em 10.01.09.
- [15] SEEMANN, J. Mercator e os Geógrafos: Em Busca de uma “projeção” do mundo. In: **Mercator- Revista de Geografia da UFC**, ano 02, número 03, 2003. p.7-18
- [16] PICADO, J. **Apontamentos de GEOMETRIA DIFERENCIAL**. Departamento de Matemática – Universidade de Coimbra, 2006. Disponível em <http://www.mat.uc.pt/~picado/geomdif/0506/Apontamentos/sebenta.pdf>
- [17] MIGUENS, A.P. **Navegação: A Ciência e a Arte: Navegação Astronômica e Derrotas. Vol. 2**. Disponível em http://www.mar.mil.br/dhn/bhmn/publica_manualnav2.html. Acesso em 23.03.08
- [18] <http://www.daftlogic.com/projects-google-maps-distance-calculator.htm>. Acesso em 17.12.08
- [19] <http://www.earth.google.com/intl/pt-BR/userguide/V4/ug-importdata.html>. Acesso em 15.12.2008.
- [20] <http://www.progonos.com/furuti/MapProj/Normal/ProjCyl/projCyl..html>. Acesso em 25.01.2008.
- [21] http://nationalatlas.gov/articles/mapping/a_projections.html. Acesso em 25.01.2008.
- [22] <http://mathworld.wolfram.com/SphericalSpiral.html>. Acesso em 10.01.2009.
- [23] http://college.cengage.com/mathematics/larson/calculus_analytic/7e/instructors/downloads/lab10der.pdf. Acesso em 03.01.2009.
- [24] <http://www.heladiva.net/Sovereignty.htm>. Acesso em 19.03.2009.

APÊNDICES

A - Projeção Gnomônica

Este tipo de projeção provavelmente já era conhecida por Tales de Mileto cerca de 600 a.C. A projeção *gnomônica* utiliza como superfície de projeção um plano tangente à superfície da Terra, cujos pontos são projetados geometricamente, a partir do centro da Terra.

Este tipo de projeção apresenta todos os tipos de deformações, ela não é equidistante, nem conforme e nem equivalente. As distorções são grandes, as formas, as distâncias e as áreas são muito mal representadas, a não ser nas proximidades do ponto de tangência. A projeção *gnomônica* tem a propriedade de representar todos os círculos máximos em linhas retas e assim os meridianos, aparecem como linhas retas. Já os paralelos, exceto o equador aparecem como linhas curvas. Neste tipo de projeção, como em todas as projeções azimutais, os azimutes a partir do ponto de tangência são representados sem deformações. [3]

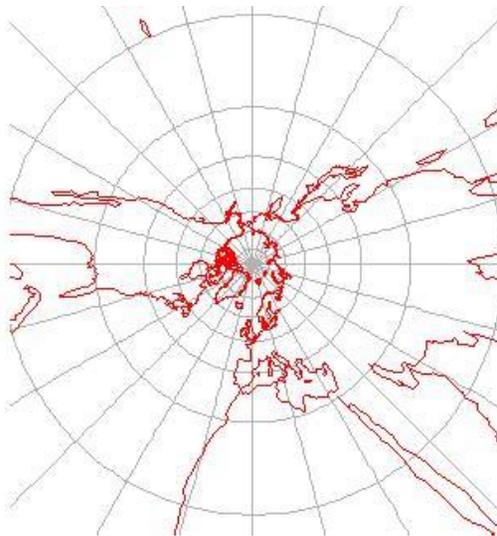


Figura 4.21 Projeção Gnomônica. Gerada no Mathematica. Autor Eric W. Weisstein.

B - Avaliando $\int \sec \phi \, d\phi$

B.1) Provando que

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c$$

- **A Forma Usual**

$$\int \sec x \, dx = \int \sec x \frac{(\sec x + \operatorname{tg} x)}{(\sec x + \operatorname{tg} x)} \, dx$$

$$\int \frac{\sec^2 x + \sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} \, dx$$

Fazendo mudança de variável:

$$u = \sec x + \operatorname{tg} x$$

$$\frac{du}{dx} = \sec x \operatorname{tg} x + \sec^2 x$$

Substituindo na integral:

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c$$

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c$$

, onde c é uma constante de integração.

- **Por Frações Parciais**

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{dx}{\cos x}$$

Multiplicando o numerador e denominador por $\cos x$

$$\int \frac{\cos x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} \, dx = \int \frac{\cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{sen} x)} \, dx$$

As frações parciais de

$$\frac{1}{(1 + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{sen} x)} = \frac{A}{1 + \operatorname{sen} x} + \frac{B}{1 - \operatorname{sen} x}$$

$$1 = A(1 - \operatorname{sen} x) + B(1 + \operatorname{sen} x)$$

$$\text{Para } x = \frac{\pi}{2}$$

$$1 = 2B \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$\text{Para } x = \frac{3\pi}{2}$$

$$1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Substituindo na integral, obtemos:

$$\int \sec x \, dx = \int \cos x \left[\frac{1/2}{1 + \operatorname{sen} x} + \frac{1/2}{1 - \operatorname{sen} x} \right] dx$$

$$\int \sec x \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} dx$$

Fazendo a mudança de variável:

$$u = 1 + \operatorname{sen} x \qquad z = 1 - \operatorname{sen} x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x \qquad \frac{dz}{dx} = -\cos x$$

$$\int \sec x \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} - \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \ln|u| - \frac{1}{2} \ln|z| + c$$

$$= \frac{1}{2} \ln|1 + \operatorname{sen} x| - \frac{1}{2} \ln|1 - \operatorname{sen} x| + c$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} \right| + c$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} \cdot \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} \right| + c$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1 + \operatorname{sen} x)^2}{1 - (\operatorname{sen} x)^2} \right| + c$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1 + \operatorname{sen} x)^2}{\cos^2 x} \right| + c$$

$$= \ln \left| \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} \right| + c$$

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c$$

B.2) A forma de Gregory(1638-1675)

Buscaremos chegar a

$$\int \sec x \, dx = -\ln \operatorname{tg} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right] + c$$

Retomando as relações trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \quad \text{que resulta } \operatorname{sen}(\theta) = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta \cos \frac{1}{2}\theta$$

$$\text{Por outro lado } \cos\theta = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \cos \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

Então:

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{1}{\cos x} \, dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} = \int \frac{dx}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} =$$

$$\text{Se tomarmos } y = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$$

$$- \int \frac{2dy}{2 \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} \cos^2 y} = - \int \frac{\sec^2 y}{\operatorname{tg} y}$$

$$\text{Chamando } u = \operatorname{tg} y \text{ teremos } \frac{du}{dy} = \sec^2 y$$

$$= - \int \frac{\sec^2 y}{\operatorname{tg} y} = -\ln |\operatorname{tg} y| + c = -\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right| + c$$