



RONALDO ANTONIO DOS SANTOS

ANÁLISE DE UM MODELO PARA COMBUSTÃO EM UM MEIO
POROSO COM DUAS CAMADAS

CAMPINAS
2013



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

RONALDO ANTONIO DOS SANTOS

ANÁLISE DE UM MODELO PARA COMBUSTÃO EM UM MEIO
POROSO COM DUAS CAMADAS

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica da Universidade Estadual de
Campinas como parte dos requisitos exigidos para a
obtenção do título de Doutor em Matemática

Orientador: Dr. Marcelo Martins dos Santos

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA PELO ALUNO Ronaldo Antonio dos Santos
E ORIENTADA PELO PROF. DR. Marcelo Martins dos Santos

Assinatura do Orientador

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Marcelo Martins dos Santos", written over a horizontal line.

CAMPINAS
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

Santos, Ronaldo Antonio dos, 1974-
Sa59a Análise de um modelo para combustão em um meio poroso com duas camadas / Ronaldo Antonio dos Santos. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Marcelo Martins dos Santos.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações de reação-difusão. 2. Combustão. 3. Método monótono. 4. Parametrix. I. Santos, Marcelo Martins dos, 1961-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Analysis of a model for combustion in a porous medium with two layers

Palavras-chave em inglês:

Reaction-diffusion equations

Combustion

Monotone method

Parametrix

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora:

Marcelo Martins dos Santos [Orientador]

Lucas Catão de Freitas Ferreira

Eduardo Cardoso de Abreu

Dan Marchesin

Jesus Carlos da Mota

Data de defesa: 29-10-2013

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 29 de outubro de 2013 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS



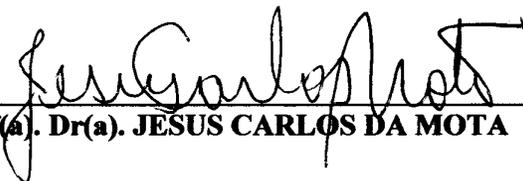
Prof(a). Dr(a). LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA



Prof(a). Dr(a). EDUARDO CARDOSO DE ABREU



Prof(a). Dr(a). DAN MARCHESIN



Prof(a). Dr(a). JESUS CARLOS DA MOTA

Abstract

In this work we prove the existence of a global solution for a nonlinear system consisting of two parabolic equations coupled to two ordinary differential equations. Such a system models a combustion process in a porous medium with two layers in which compressibility effects are neglected, but heat transfer between the layers as well as heat conduction are taken into account. We obtained a classical solution under the assumptions that the initial data is bounded, Lipschitz and belongs to some L^p space, with $1 < p < \infty$.

Keywords: Reaction-diffusion equations, Combustion, Monotone method, Parametrix.

Resumo

Neste trabalho provamos a existência de solução global para um sistema não linear constituído de duas equações parabólicas acopladas a duas equações diferenciais ordinárias. Tal sistema modela um processo de combustão em um meio poroso com duas camadas, em que os efeitos de compressibilidade são desprezados, mas a troca de calor entre as camadas, bem como a propagação de calor por convecção são levadas em conta. Supondo que os dados iniciais são lipschitzianos, limitados e pertencentes a algum espaço L^p , $1 < p < \infty$, obtivemos solução clássica para o problema.

Palavras-chave: Equações de reação-difusão, Combustão, Método monótono, Parametrix.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Solução Fundamental	4
1.2 A convolução e algumas desigualdades úteis	7
1.3 Regularidade	8
1.4 Método monótono de sub e supersoluções para sistemas parabólicos	9
2 Dependência com relação aos coeficientes	11
2.1 Solução fundamental	11
2.2 O problema de Cauchy	22
3 Combustão em um meio poroso com duas camadas	28
3.1 O modelo	28
3.2 Solução local	29
3.3 Solução global	33
Conclusão	47
Referências	49

*“Somos muitos Severinos iguais em tudo e na sina: a
de abrandar estas pedras suando-se muito em cima...”*
João Cabral de Melo Neto

*À minha esposa Adriana e aos
meus filhos Ronaldo e Rafael.*

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos:

A Deus, pela oportunidade oferecida.

À minha família e em especial à minha mãe Neuza pelo carinho e amor.

Ao meu orientador, Marcelo Martins dos Santos, pela orientação segura e paciente.

À família de minha esposa, em especial à minha sogra Ivany, pela grande ajuda prestada principalmente na ocasião do nascimento de nosso segundo filho.

Aos professores do IMECC/UNICAMP, por cursos extremamente interessantes e instrutivos.

À minha irmã Raquel, meu cunhado Marcelo e meus afilhados Sérgio e Graziela, por terem tornado nossa estada em Campinas muito agradável.

Aos amigos(as) Alda, Carlos, David, Elisa, Igor, Julio, Manuela, Pedro, Régis e Renato, por compartilharem comigo conhecimentos e alegrias.

Aos professores do IME/UFG, pelo incentivo e apoio, em especial aos professores(as): Gisele A. P. Gusmão, Jesus C. da Mota, Ronaldo A. Garcia e Shirlei Serconek.

Aos funcionários do IMECC/UNICAMP e da UFG, pelo apoio e cuidado com as questões burocráticas.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Lista de Símbolos

- T Um número real positivo
- Ω_T $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq T\}$
- $C_0 = C_0(\mathbb{R})$ Espaço das funções contínuas que tendem a zero em $\pm\infty$
- $C = C(\Omega_T)$ Espaço das funções contínuas em Ω_T
- $C^2 = C^2(\mathbb{R})$ Espaço das funções contínuas que possuem as duas primeiras derivadas contínuas
- $C_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} = C_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)$ Espaço vetorial normado das funções Hölder contínuas com expoente $\alpha \in (0, 1]$, ou seja, o espaço das funções $u : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\|u\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} < \infty$, munido da norma $\|\cdot\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}$ definida abaixo
- $C^{2,1} = C^{2,1}(\Omega_T)$ Espaço das funções que possuem duas derivadas espaciais contínuas e uma derivada temporal contínua
- $L^p = L^p(\mathbb{R})$ Espaço das funções mensuráveis que possuem a potência p de seu módulo integrável, com $p \in (1, \infty)$
- $L^\infty([0, T] : L^p(\mathbb{R}))$ Espaço das funções mensuráveis $u : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\sup_{ess[0, T]} \|u(t)\|_{L^p} < \infty$
- $\|\cdot\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}$ Norma de Hölder em Ω_T , i.e., $\sup_{\Omega_T} |u(x, t)| + \sup_{(x,t) \neq (y,s)} \frac{|u(x,t) - u(y,s)|}{|x-y|^\alpha + |t-s|^{\frac{\alpha}{2}}}$, $\alpha \in (0, 1]$
- $\|\cdot\|_\alpha$ Norma de Hölder em \mathbb{R} , i.e., $\sup_{\Omega_T} |u(x)| + \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}$, $\alpha \in (0, 1]$

- $\|\cdot\|_{L^p}$ Norma em L^p , i.e. $\|u\|_{L^p} = (\int_{\mathbb{R}} |u|^p dx)^{\frac{1}{p}}$
- $\|\cdot\|_{\infty}$ $\|u\|_{\infty} = \sup_D |u(x)|$, sendo D o domínio da u .
- $L = L_{[v]}$ O operador $\partial_t - a\partial_{xx} + b\partial_x + c$, sendo $v = (a, b, c)$
- $\Gamma(x, \xi, t, \tau)$ Solução fundamental da equação $Lu = 0$
- $Z(x - \xi, \xi, t, \tau)$ Solução fundamental da equação $\partial_t u - a(\xi, t)\partial_{xx} u = 0$
- $\phi(x, \xi, t, \tau)$ Solução da equação integral de Volterra com núcleo $LZ(x - \xi, \xi, t, \tau)$
- $\Gamma(x)$ Função especial Gama, $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$
- $B(x, y)$ Função especial Beta, $B(x, y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt$
- $D_x, \frac{\partial}{\partial x}, \partial_x$ Derivada parcial em relação a x
- ∇F Gradiente de F
- $\nabla_u F(u, t)$ Gradiente de F em relação a u
- $f * g$ Convolução de f e g
- $\tilde{U} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ Supersolução de um sistema de equações parabólicas
- $\hat{U} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ Subsolução de um sistema de equações parabólicas
- $\langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle$ $\{U = (u_1, u_2) : u_i \in C(\Omega_T), \hat{u}_i \leq u_i \leq \tilde{u}_i \text{ e } i = 1, 2\}$
- $[a, b]^c$ Complementar do intervalo $[a, b]$ em \mathbb{R}
- $B(R, \lambda, \alpha)$ $\{(a, b, c) \in (C_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\Omega_T))^3; \lambda < a \text{ e } \|a\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}, \|b\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}, \|c\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} < R\}$, com $R > 0, \lambda > 0$ e $\alpha \in (0, 1]$
- Σ O conjunto $\{(u_1, u_2) \in (C_{1, \frac{1}{2}}(\Omega_T))^2; \|u_i\|_{1, \frac{1}{2}} \leq M_i, i = 1, 2\}$, com $M_i > 0$ para $i = 1, 2$
- $K = K(c_1, \dots, c_n)$ Constante determinada pelos parâmetros c_1, \dots, c_n .

Introdução

O estudo de frentes de combustão em meios porosos encontra sua motivação em processos de recuperação de petróleo que envolvem combustão. Nos últimos anos vários foram os trabalhos que contribuíram para o melhor entendimento desses processos. Um dos primeiros modelos, para tal análise, foi dado por Gottfried [13] em 1965 e generalizado por Crookston, Culham, Chen e Gulf [3] alguns anos mais tarde. Trata-se de um sistema não-linear de reação-difusão-convecção obtido a partir das leis de conservação e cuja não-linearidade, o número de equações e de parâmetros no modelo completo, impõem grandes dificuldades à análise.

Uma alternativa para enfrentar tais dificuldades é a busca por soluções do tipo onda viajante. Essa abordagem, seguida por Mota et. al. [4, 5] e Schecter e Marchesin [23, 24], tem dado bons resultados no estudo de frentes de combustão em reservatórios com duas fases (óleo e gás). Recentemente, Mota e Schecter [7] propuseram um modelo para a propagação de uma frente de combustão em um meio poroso com duas camadas. Sob hipóteses de incompressibilidade e levando em conta a troca de calor entre as camadas, eles obtiveram um sistema formado por duas equações parabólicas, que modelam a propagação do calor, acopladas a duas equações diferenciais ordinárias, que modelam a concentração de combustível em cada camada. Nesse trabalho, Mota e Schecter provam a existência de uma solução especial do tipo onda viajante, a qual eles chamaram de onda viajante forte. A relação entre o coeficiente de transferência de calor entre as camadas e a existência de tais soluções foi estudada. Além disso, os autores também fizeram um estudo numérico do modelo. Outros autores, como em [12], vem seguindo essa mesma abordagem.

Numa outra direção, Mota e Santos [6] iniciaram um estudo do modelo proposto em [7] com vista a obter solução do problema de Cauchy associado. Para tanto, fizeram uso do método monótono para provar que o problema de Cauchy associado ao sistema proposto em [7] possui uma única solução global, desde que as funções de concentração de combustível sejam conhecidas. Nosso trabalho continua o estudo iniciado por Mota e Santos. Retiramos a hipótese de que as concentrações de combustível são conhecidas e provamos a existência de solução global empregando um método consideravelmente diferente daquele empregado por Mota e Santos em [6]. A mudança no método empregado se justifica pelo fato de que ao retirarmos a hipótese de que as funções de concentração de combustível são conhecidas, as equações envolvidas passam de semilineares para quasilineares e isso impõe sérias dificuldades a aplicação do método monótono. Em nossa abordagem a obtenção da solução local está fortemente apoiada em um estudo detalhado da solução fundamental. Tal estudo foi feito a partir do método usado para a construção da solução fundamental chamado de “parametrix” e cujas ideias iniciais devemos a E. E. Levi [16]. O método, em toda sua generalidade, pode ser encontrado em Friedman [11], Ladyzenskaja, Solonnikov e

Ural'ceva [15] e Il'in, Kalashnikov e Oleinik [14]. Com vistas a demonstrar que tal solução local poderia ser estendida a uma solução global, foi necessário estimar tanto as funções que modelam as temperaturas quanto as suas derivadas. A primeira estimativa foi obtida aplicando o método monótono e considerando as sub e supersoluções obtidas em Mota e Santos [6]. Para obter a estimativa da derivada espacial, aplicamos o método utilizado em Oleinik e Kruzhkov [17]. Tal abordagem exigiu que a solução tivesse um certo decaimento no infinito, que foi obtido exigindo que o dado inicial pertença a $L^p(\mathbb{R})$, para algum $1 < p < \infty$. Tal imposição foi uma das sugestões dadas pelo professor Dr. Lucas C. F. Ferreira, a quem gostaria de deixar registrado meus sinceros agradecimentos.

Em linhas gerais, o trabalho está organizado como segue:

O Capítulo 1 contém os resultados clássicos que foram utilizados ao longo do trabalho. As demonstrações são omitidas, mas as referências para obtê-las são indicadas. Apenas nos casos em que apresentamos alguma observação ou alguma consequência desses resultados a demonstração é apresentada. Nesse capítulo também apresentamos um pequeno resumo da construção da solução fundamental pelo método “parametrix”.

O Capítulo 2 contém uma análise da solução fundamental obtida pelo método “parametrix”. Tal análise evidencia a dependência da solução fundamental de uma equação parabólica em relação ao dado inicial, à função de reação e aos coeficientes da equação. Estudamos também a dependência com relação ao tempo T das constantes que aparecem nas estimativas da solução fundamental e de suas derivadas. O teorema principal desse capítulo é o Teorema 2.2.1, o qual apresenta as consequências dessa análise ao problema de Cauchy.

O Capítulo 3 contém a prova da existência de solução clássica para o problema proposto por Mota e Schecter [7]. Iniciamos obtendo a solução local. Definimos um operador linear em um espaço de Hölder e, usando as estimativas do Capítulo 1, provamos que esse operador deixa uma bola invariante nesse espaço de Hölder, desde que T seja suficientemente pequeno. Embora não verifiquemos que esse operador seja uma contração, a limitação no espaço de Hölder, i.e., o Lema 3.2.1, é suficiente para obter a solução local.

Ainda neste capítulo, provamos que a solução local pode ser estendida a uma solução global. Usando o método monótono e as sub e supersoluções obtidas por Mota e Santos em [6], provamos que as funções que representam a temperatura são uniformemente limitadas em relação a T , v. Corolário 3.3.2. A fim de obter a estimativa para a primeira derivada da função temperatura, inicialmente provamos que a solução possui mais regularidade que aquela inicialmente obtida Teorema 3.2.2. Isso possibilita derivar em x o sistema e aplicar a abordagem adotada por Oleinik e Kruzhkov em [17]. Dessa forma, em certas condições, obtemos no Lema 3.3.5 uma limitação para a primeira derivada espacial das funções que representam a temperatura. Inspirado no trabalho de Frid e Santos [10], provamos no Lema 3.3.6 a existência de um decaimento uniforme para tais derivadas. A demonstração se apoia em resultados sobre convolução e é o ponto em que verificamos a necessidade de que o dado inicial esteja em L^p , $1 < p < \infty$. Obtendo uma estimativa para a derivada espacial da função temperatura foi possível definir a solução fundamental em $\mathbb{R} \times [0, T^*]$, sendo T^* o tempo maximal de existência da solução. Usando a representação integral da solução mostramos que ela tem, em T^* , a mesma regularidade que o dado inicial. Isso permite aplicar o método usado para obter a solução local para provar que a solução existe para um tempo maior que T^* , evidenciando a impossibilidade da existência de um tempo maximal finito para a existência

da solução.

No Capítulo 4 fazemos considerações finais e apresentamos direções em que pretendemos seguir em trabalhos futuros.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos as principais definições e resultados que serão utilizados ao longo da tese. A maior parte desses resultados são apresentados sem as suas respectivas demonstrações, mas os textos clássicos nos quais tais demonstrações podem ser encontradas são indicados. Nosso principal objetivo é oferecer ao leitor um texto que seja o mais auto-suficiente possível, sem torná-lo excessivamente repetitivo. Iniciamos com a construção e propriedades da solução fundamental de uma equação parabólica de segunda ordem.

1.1 Solução Fundamental

A solução fundamental de equações parabólicas de segunda ordem ocupa um papel de destaque em nosso trabalho. Nesta seção apresentamos um resumo de sua construção juntamente com suas principais propriedades.

Consideramos a equação

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)u = 0, \quad (1.1.1)$$

onde os coeficientes a , b e c são funções definidas em $\Omega_T = \{(x, t); x \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq T\}$.

Supondo que

(A1) L é uniformemente parabólico em Ω_T , i.e., existem constantes positivas λ_0 e λ_1 tais que

$$\lambda_0 \leq a(x, t) \leq \lambda_1, \quad (x, t) \in \Omega_T; \quad (1.1.2)$$

(A2) Os coeficientes de L são funções em $C_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)$, para algum $0 < \alpha \leq 1$.

Definição 1.1.1. [11, p. 3] A solução fundamental de $Lu = 0$ é uma função $\Gamma(x, \xi, t, \tau)$ definida para todo (x, t) , $(\xi, \tau) \in \Omega_T$ com $t > \tau$ e que satisfaz as seguintes condições:

1. Para $(\xi, \tau) \in \Omega_T$ fixo ela satisfaz, como função de (x, t) , $Lu = 0$.
2. Para toda função real e contínua $f(x)$, se $|f(x)| \leq Ke^{hx^2}$, para constantes K e h , onde $h \leq \frac{1}{4\lambda_1 T}$, então

$$\lim_{t \searrow \tau} \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x, \xi, t, \tau) f(\xi) d\xi = f(x).$$

A construção da solução fundamental, em toda sua generalidade, pode ser encontrada em [15], [11] e [14]. Com as hipóteses (A1) e (A2) acima, existe uma única solução fundamental Γ de $Lu = 0$ tal que Γ e suas derivadas parciais $\frac{\partial \Gamma}{\partial t}$ e $\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}$ são funções contínuas no domínio $\{x, \xi \in \mathbb{R}, 0 \leq \tau < t \leq T\}$; v. [15, §4, Teorema 1]. Em linhas gerais tal construção é feita da seguinte forma: Definimos

$$\Gamma(x, \xi, t, \tau) = Z(x - \xi, \xi, t, \tau) + \int_{\tau}^t \int_{\mathbb{R}} Z(x - y, y, t, \sigma) \phi(y, \xi, \sigma, \tau) dy d\sigma \quad (1.1.3)$$

onde $(x, t), (\xi, \tau) \in \Omega_T$ com $\tau < t$,

$$Z(x - \xi, \xi, t, \tau) = \frac{1}{(4\pi a(\xi, \tau)(t - \tau))^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a(\xi, \tau)(t-\tau)}} \quad (1.1.4)$$

e

$$\phi(x, \xi, t, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (LZ)_m(x - \xi, \xi, t, \tau), \quad (1.1.5)$$

com

$$(LZ)_{m+1}(x - \xi, \xi, t, \tau) = \int_{\tau}^t \int_{\mathbb{R}} [LZ(x - y, y, t, \sigma)] (LZ)_m(y - \xi, \xi, \sigma, \tau) dy d\sigma \quad (1.1.6)$$

e $(LZ)_1 = LZ = (a(\xi, \tau) - a(x, t)) \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + b \frac{\partial Z}{\partial x} + cZ$.

Esse procedimento para a construção da solução fundamental é chamado método parametrix e é devido a E. E. Levi; ver [16, 11, 15]. Na construção da solução fundamental são determinadas estimativas tanto para a solução fundamental e suas derivadas quanto para as funções envolvidas na construção. As principais propriedades são as seguintes, onde (x, t) e (ξ, τ) denotam pontos quaisquer em Ω_T , com $t > \tau$:

Para a função $Z(x - \xi, \xi, t, \tau)$ e suas derivadas temos que

$$|D_t^r D_x^s Z(x - \xi, \xi, t, \tau)| \leq K(t - \tau)^{-\frac{1+2r+s}{2}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}, \quad (1.1.7)$$

sendo r e s inteiros não negativos quaisquer, $K = K(\lambda_0, \lambda_1)$ e $C = C(\lambda_1)$ constantes positivas.

Fixado (ξ, τ) , a função $Z(x - \xi, \xi, t, \tau)$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(\xi, \tau) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Além disso, temos

$$\int Z(z, \xi, t, \tau) dz = 1 \quad (1.1.8)$$

e conseqüentemente, para $2r + s > 0$,

$$\int D_t^r D_z^s Z(z, \xi, t, \tau) dz = 0. \quad (1.1.9)$$

Finalmente, Z e suas derivadas são Hölder contínuas em ξ , i.e.,

$$|D_t^r D_z^s Z(z, \xi, t, \tau) - D_t^r D_z^s Z(z, \xi', t, \tau)| \leq \frac{K |\xi - \xi'|^\alpha}{(t - \tau)^{-\frac{2r+s+1}{2}}} e^{-C \frac{z^2}{t-\tau}}, \quad (1.1.10)$$

sendo $K = K(\lambda_0, \lambda_1, \|a\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}})$ e $C = C(\lambda_1)$ constantes positivas.

Para a função $\phi(x, \xi, t, \tau)$, temos as estimativas

$$|\phi(x, \xi, t, \tau)| \leq \frac{K}{(t - \tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}, \quad (1.1.11)$$

onde $K = K(\lambda_0, \lambda_1, \|a\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}, \|b\|_{\infty}, \|c\|_{\infty}, T)$ e $C = C(\lambda_1)$ são constantes positivas, sendo que a primeira é contínua em T , e, para $0 < \gamma < \alpha$,

$$|\phi(x, \xi, t, \tau) - \phi(y, \xi, t, \tau)| \leq \frac{K|x - y|^\gamma}{(t - \tau)^{\frac{3-(\alpha-\gamma)}{2}}} \left(e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} + e^{-C \frac{(y-\xi)^2}{t-\tau}} \right), \quad (1.1.12)$$

onde $K = K(\lambda_0, \lambda_1, \|a\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}, \|b\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}, \|c\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}, T)$ e $C = C(\lambda_1)$ são constantes positivas, sendo que a primeira é contínua em T .

Finalmente, para a função $\Gamma(x, \xi, t, \tau)$, temos

$$|D_t^r D_x^s \Gamma(x, \xi, t, \tau)| \leq \frac{K}{(t - \tau)^{\frac{1+2r+s}{2}}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}, \quad (1.1.13)$$

onde r e s são inteiros não negativos tais que $2r + s \leq 2$, $K = K(\lambda_0, \lambda_1, \|a\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}, \|b\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}, \|c\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}, T)$ e $C = C(\lambda_1)$ são constantes positivas, sendo que a primeira é contínua em T .

Além disso, a solução fundamental é não negativa. De fato, limitações por baixo para a função $\Gamma(x, \xi, t, \tau)$ podem ser encontradas em [14] e [1].

Consideramos agora o problema de Cauchy

$$\begin{cases} Lu(x, t) = f(x, t), & em \mathbb{R} \times (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & em \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.1.14)$$

onde L é definido como em (1.1.1) com coeficientes Hölder contínuos e $|f(x, t)|, |u_0(x)| \leq Ke^{hx^2}$, onde K e h são constantes positivas, com $h < (4\lambda_1 T)^{-1}$.

O Teorema a seguir apresenta uma fórmula de representação da solução do problema de Cauchy (1.1.14) a partir da solução fundamental.

Teorema 1.1.2. Se, além das condições de crescimento exponencial especificadas acima, $f(x, t)$ e $u_0(x)$ são funções contínuas em Ω_T e \mathbb{R} , respectivamente e se, além disso, $f(x, t)$ é localmente Hölder contínua em x , uniforme com respeito a t , então a função

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x, \xi, t, 0) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x, \xi, t, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

é a única solução de classe $C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R} \times [0, T])$ do problema de Cauchy (1.1.14) dentre as funções com crescimento no máximo exponencial.

A prova de qua a função $u(x, t)$ dada pela fórmula acima é de fato solução do problema de Cauchy (1.1.14) pode ser encontrada em [11, p. 25]. A unicidade decorre do princípio de Phragmén-Lindelöf (ver [21, p.182]).

Observação 1.1.3. No caso particular em que $c(x, t) \equiv 0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}} \Gamma(x, \xi, t, \tau) d\xi = 1 \text{ e } \int_{\mathbb{R}} D_t^r D_x^s \Gamma(x, \xi, t, \tau) d\xi = 0, \quad 0 < 2r + s \leq 2.$$

Com efeito, neste caso $u(x, t) = t$ é a única solução (de classe $C^{2,1}$ e de crescimento no máximo exponencial no infinito) do problema

$$\begin{cases} Lu(x, t) = 1, & \text{em } \mathbb{R} \times (0, T], \\ u(x, 0) = 0, & \text{em } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.1.15)$$

Então, pelo Teorema (1.1.2), temos que

$$t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x, \xi, t, \tau) d\xi d\tau.$$

Daí obtemos que $h(\tau) \equiv \int \Gamma(x, \xi, t, \tau) d\xi = 1$. Com efeito, suponhamos que exista $\tau_0 \in [0, T]$ tal que $h(\tau_0) > 1$. Da continuidade de $h(\tau)$ existe um intervalo $[a, b] \subset [0, T]$ tal que $h(\tau) > 1$ para todo $\tau \in [a, b]$. Desse modo $b - a = \int_0^b \int \Gamma(x, \xi, t, \tau) d\xi d\tau - \int_0^a \int \Gamma(x, \xi, t, \tau) d\xi d\tau = \int_a^b \int \Gamma(x, \xi, t, \tau) d\xi d\tau > b - a$, o que é uma contradição. Supor $\int \Gamma(x, \xi, t, \tau_0) d\xi < 1$ também acarreta contradição semelhante. Concluímos que $\int \Gamma(x, \xi, t, \tau) d\xi \equiv 1$ e segue das estimativas (1.1.13) e do Teorema da Derivação Dominada de Lebesgue que $\int_{\mathbb{R}} D_t^r D_x^s \Gamma(x, \xi, t, \tau) d\xi = 0, \quad 0 < 2r + s \leq 2$.

1.2 A convolução e algumas desigualdades úteis

Nesta seção apresentamos algumas propriedades da convolução entre duas funções, juntamente com desigualdades bastante úteis para o nosso trabalho.

Iniciamos com um resultado que trata da limitação de um operador em L^p .

Teorema 1.2.1. [9, p. 193] Sejam K uma função mensurável em \mathbb{R}^2 e $1 \leq p \leq \infty$. Suponhamos que exista uma constante $C > 0$ tal que $\int |K(x, y)| dx \leq C$ para quase todo $y \in \mathbb{R}$ e $\int |K(x, y)| dy \leq C$ para quase todo $x \in \mathbb{R}$. Se $f \in L^p(\mathbb{R})$ então a integral $Tf(x) = \int K(x, y)f(y)dy$ converge absolutamente para quase todo $x \in \mathbb{R}$, $Tf \in L^p(\mathbb{R})$ e $\|Tf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$.

Teorema 1.2.2. (Desigualdade de Minkowski para integrais, [9, p. 194]) Sejam f uma função mensurável em \mathbb{R}^2 e $1 \leq p \leq \infty$. Se $f(\cdot, y) \in L^p(\mathbb{R})$ para quase todo $y \in \mathbb{R}$ e a função $y \mapsto \|f(\cdot, y)\|_{L^p}$ pertence a L^1 então $f(x, \cdot) \in L^1$ para quase todo $x \in \mathbb{R}$, a função $x \mapsto \int f(x, y)dy$ pertence a L^p e $\|\int f(\cdot, y)dy\|_{L^p} \leq \int \|f(\cdot, y)\|_{L^p} dy$.

Como consequência desses teoremas temos os seguintes corolários.

Corolário 1.2.3. Sejam F uma função real derivável, com $F(0) = 0$ e $|F'| \leq K, \quad 1 \leq p \leq \infty$ e $\Gamma(x, \xi, t, \tau)$ a solução fundamental da equação (1.1.1). Fixando $0 \leq \tau < t \leq T$ definamos a função na variável $x, G(x, t, \tau) := \int \Gamma(x, \xi, t, \tau)F(u(\xi, \tau))d\xi$. Se $u(\cdot, s) \in L^p(\mathbb{R})$ para todo $s \in [0, T]$ então $G(\cdot, t, \tau) \in L^p(\mathbb{R})$.

Demonstração. Da estimativa (1.1.13) da solução fundamental, temos que $\int |\Gamma(x, \xi, t, \tau)| d\xi \leq C$ e $\int |\Gamma(x, \xi, t, \tau)| dx \leq C$, para algum $C > 0$. Temos ainda que $\|F(u(\cdot, \tau))\|_{L^p} = \|F(u(\cdot, \tau)) - F(0)\|_{L^p} \leq \|F'\|_\infty \|u(\cdot, \tau)\|_{L^p}$. Portanto, segue do Teorema 1.2.1 que $\|G(\cdot, t, \tau)\|_{L^p} \leq CK \|u(\cdot, \tau)\|_{L^p}$. \square

Corolário 1.2.4. Nas condições do Corolário 1.2.3, se $u \in L^\infty((0, T); L^p(\mathbb{R}))$ e $H(x, t) := \int_0^t G(x, t, \tau) d\tau$ então $H(\cdot, t) \in L^p$, para todo $t \in (0, T]$.

Demonstração. Pela demonstração do Corolário 1.2.3 temos que $\sup_{\tau \in [0, t]} \|G(\cdot, t, \tau)\|_{L^p} \leq CK \sup_{\tau \in [0, t]} \|u(\cdot, \tau)\|_{L^p} < \infty$, logo, pelo Teorema 1.2.2 vem que $\|H(\cdot, t)\|_{L^p} = \|\int_0^t G(\cdot, t, \tau) d\tau\|_{L^p} \leq \int_0^t \|G(\cdot, t, \tau)\|_{L^p} d\tau < \infty$, para todo $t \in (0, T]$. \square

A seguir apresentamos um resultado referente à convolução entre duas funções. Sejam f e g funções mensuráveis em \mathbb{R} . A convolução de f e g é a função definida por $f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy$ para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que a integral exista.

Teorema 1.2.5. [9, p. 241] Se $f \in L^p(\mathbb{R})$ e $g \in L^q(\mathbb{R})$, sendo p e q expoentes conjugados, com $1 < p < \infty$, então $(f * g)(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f * g \in C_0(\mathbb{R})$. Mais ainda, $f * g$ é limitada e uniformemente contínua e $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

Lema 1.2.6. Sejam $F \in C^1(\mathbb{R})$, com $F(0) = 0$, $\Gamma(x, \xi, t, \tau)$ a solução fundamental da equação (1.1.1) e $t > \tau$ fixos. Definindo $G_s(x, t, \tau) := \int \partial_x^s \Gamma(x, \xi, t, \tau) F(u(\xi, \tau)) d\xi$, $s = 0, 1$. Se $u(\cdot, \tau) \in C_0(\mathbb{R})$ então $G_s(\cdot, t, \tau) \in C_0(\mathbb{R})$.

Demonstração. Usamos que C_0 é o fecho do espaço C_c^∞ (conjunto das funções de classe C^∞ com suporte compacto) na topologia do supremo (v. e.g. Proposição 4.35 em [9]). Seja $u_n(\cdot, \tau) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ uma sequência que converge para $u(\cdot, \tau)$ uniformemente. Para cada n temos que

$$0 \leq \left| \int \partial_x^s \Gamma(x, \xi, t, \tau) F(u_n(\xi, \tau)) d\xi \right| \leq \int \frac{K}{(t-\tau)^{\frac{1+s}{2}}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} |F(u_n(\xi, \tau))| d\xi$$

Como, t e τ estão fixos e tendo em vista que $\frac{K}{(t-\tau)^{\frac{1+s}{2}}} e^{-C \frac{(\cdot)^2}{t-\tau}} \in L^p(\mathbb{R})$ e $|F(u_n(\cdot, \tau))| \in L^q(\mathbb{R})$,

$0 < p, q < \infty$, decorre do Teorema 1.2.5 que a convolução $\int \frac{K}{(t-\tau)^{\frac{1+s}{2}}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} F(u_n(\xi, \tau)) d\xi \in C_0(\mathbb{R})$.

Agora observemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \left| \int \partial_x^s \Gamma(x, \xi, t, \tau) F(u(\xi, \tau)) d\xi \right| \leq \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \left| \int \partial_x^s \Gamma(x, \xi, t, \tau) F(u^n(\xi, \tau)) d\xi \right| + \\ &\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \left| \int \partial_x^s \Gamma(x, \xi, t, \tau) (F(u) - F(u^n))(\xi, \tau) d\xi \right| \leq \left\| \int \partial_x^s \Gamma(x, \xi, t, \tau) (F(u) - F(u^n))(\xi, \tau) d\xi \right\|_\infty \\ &\leq \|\partial_x^s \Gamma(\cdot, t, \tau)\|_1 \|F(u(\cdot, \tau)) - F(u_n(\cdot, \tau))\|_\infty \leq \|\partial_x^s \Gamma(\cdot, t, \tau)\|_1 \bar{K} \|u(\cdot, \tau) - u_n(\cdot, \tau)\|_\infty, \end{aligned}$$

onde \bar{K} é uma constante que limita $|F'|$ avaliada no conjunto determinado pelas imagens de u e u_n . Como o primeiro fator aqui não depende de n e o segundo tende a zero quando n tende a infinito, temos o resultado desejado. \square

1.3 Regularidade

Esta seção tem por objetivo apresentar um importante resultado sobre regularidade de soluções de equações parabólicas com coeficientes suaves.

Teorema 1.3.1. [11, p. 72] Seja L um operador parabólico, como em (1.1.1), em um domínio D e assumamos que

$$D_x^m a_{ij}, D_x^m b_i, D_x^m c, D_x^m f \quad (0 \leq m \leq p) \quad (1.3.1)$$

sejam Hölder contínuas em D . Se u é uma solução de $Lu = f$ em D então

$$D_x^m u, D_t D_x^k u \quad (0 \leq m \leq p+2, 0 \leq k \leq p) \quad (1.3.2)$$

existem e são Hölder contínuas em D .

1.4 Método monótono de sub e supersoluções para sistemas parabólicos

O método monótono para equações parabólicas foi estabelecido por David Sattinger em [22]. Mais tarde foi estendido para algumas classes de sistemas parabólicos por Chia-Ven Pao em [20]. Tal método possibilita, entre outras coisas, encontrar solução clássica para sistemas parabólicos do tipo

$$\begin{cases} L_i u_i = F_i(x, t, u_1, u_2), & \text{em } \mathbb{R} \times (0, T], \\ u_i(x, 0) = u_{i,0}, & \text{em } \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.4.1)$$

onde, para $i = 1, 2$, L_i é definido como em (1.1.1), $u_{i,0}$ é uma função Hölder contínua em \mathbb{R} , os coeficientes de L_i são Hölder contínuos em Ω_T e F_i é Hölder contínua em $\Omega_T \times J_1 \times J_2$, para algum conjunto limitado $J_1 \times J_2 \subset \mathbb{R}^2$.

A seguir definimos os principais elementos que possibilitam a obtenção de solução para o sistema (1.4.1).

Definição 1.4.1. Dizemos que o par $\tilde{U} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$, com $\tilde{u}_i \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, T]) \cap C(\Omega_T)$, $i = 1, 2$ e $|\tilde{u}_i(x, t)| \leq K e^{hx^2}$, sendo K e h constantes positivas, é uma supersolução para o sistema (1.4.1) se

$$\begin{cases} L_i \tilde{u}_i \geq F_i(x, t, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2), & \text{em } \mathbb{R} \times (0, T], \\ \tilde{u}_i(x, 0) \geq u_{i,0}, & \text{em } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.4.2)$$

De modo análogo, dizemos que $\hat{U} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2)$, com $\hat{u}_i \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, T]) \cap C(\Omega_T)$, $i = 1, 2$ e $|\hat{u}_i(x, t)| \leq K e^{hx^2}$, é uma subsolução se satisfaz a desigualdade inversa de (1.4.2).

Definição 1.4.2. Dizemos que uma função $F_i \equiv F_i(x, t, u_1, u_2)$, é quase monótona não decrescente se, fixado (x, t, u_i) , F_i é não decrescente com respeito a u_j , com $j \neq i$.

Definição 1.4.3. Dizemos que uma função $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ é quase monótona não decrescente em algum retângulo $J_1 \times J_2$ se tanto F_1 , quanto F_2 são funções quase monótonas não decrescentes para $(u_1, u_2) \subset J_1 \times J_2$.

Definição 1.4.4. Dizemos que um par de sub e supersoluções é ordenado e denotamos por $\hat{U} \leq \tilde{U}$ se $\hat{u}_i \leq \tilde{u}_i$, para todo $i = 1, 2$. O conjunto $\langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle = \{(u_1, u_2) \in C(\Omega_T); (\hat{u}_1, \hat{u}_2) \leq (u_1, u_2) \leq (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)\}$ é chamado de setor determinado pela sub e supersoluções.

Se o setor $\langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle$ está contido em $J_1 \times J_2$ então, na definição de quase monotona, é suficiente tomarmos $J_1 \times J_2 = \langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle$.

O teorema a seguir apresenta o principal resultado desse método.

Teorema 1.4.5. [19, p. 393] Sejam \hat{U} e \tilde{U} sub e supersoluções ordenadas do sistema (1.4.1), $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ uma função quase monótona não decrescente e satisfazendo $|F_i(\cdot, U) - F_i(\cdot, V)| \leq K|U - V|$ em $\langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle$, $i = 1, 2$. Então o sistema (1.4.1) tem uma única solução clássica no setor $\langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle$.

A demonstração se baseia na construção de sequências que convergem monotonicamente para a solução U .

Capítulo 2

Dependência com relação aos coeficientes

O objetivo deste capítulo é analisar a dependência da solução fundamental com relação aos coeficientes e estabelecer estimativas para a solução do problema de Cauchy em termos do dado inicial, da função de reação e dos coeficientes da equação.

2.1 Solução fundamental

Nossa análise da dependência da solução fundamental com respeito aos coeficientes da equação segue a mesma linha utilizada para a construção da solução fundamental; ver [15] e [11]. O ingrediente adicional foi o cuidado em explicitar a dependência com relação aos coeficientes. Iniciamos com algumas notações.

Definição 2.1.1. Sejam R , λ e α reais positivos, com $0 < \alpha \leq 1$ e $\lambda < R$. Definimos $B(R, \lambda, \alpha) = \{(a(x, t), b(x, t), c(x, t)) \in (C_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\Omega_T))^3; \lambda \leq a, \text{ e } \|a\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}, \|b\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}, \|c\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} < R\}$ e, dados $v, \bar{v} \in B(R, \lambda, \alpha)$, $\|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} = \max\{\|a - \bar{a}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}, \|b - \bar{b}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}, \|c - \bar{c}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}\}$.

Dado $v = (a, b, c) \in B(R, \lambda, \alpha)$, denotamos por

$$L_{[v]}u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)u = 0 \quad (2.1.1)$$

e

$$\Gamma_{[v]}(x, \xi, t, \tau) = Z_{[v]}(x - \xi, t, \xi, \tau) + \int_{\tau}^t \int_{\mathbb{R}} Z_{[v]}(x - y, y, t, \sigma) \phi_{[v]}(y, \xi, \sigma, \tau) dy d\sigma \quad (2.1.2)$$

a equação parabólica e sua respectiva solução fundamental.

Lema 2.1.2. Dados $v, \bar{v} \in B(R, \lambda, \alpha)$, temos que

$|(D_x^s Z_{[v]} - D_x^s Z_{[\bar{v}]})(x - \xi, \xi, t, \tau)| \leq K \|a - \bar{a}\|_{\infty} \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{s+1}{2}}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{(t-\tau)}}$, para $s = 0, 1, 2$, onde $C < \frac{1}{4R}$ e $K = K(R, \lambda)$ são constantes positivas.

Demonstração. Tendo em vista que $Z_{[v]}(x - \xi, \xi, t, \tau) = \frac{1}{(4\pi a(\xi, \tau)(t - \tau))^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4a(\xi, \tau)(t - \tau)}}$, tanto ela quanto as suas derivadas com relação a x dependem do coeficiente a de $L_{[v]}$, mas não dos outros coeficientes b e c . Calculando diretamente a derivada de $D_x^s Z_{[v]}$ com relação a a , encontramos

$$|D_a D_x^s Z_{[v]}(x - \xi, \xi, t, \tau)| \leq \frac{K}{(t - \tau)^{\frac{s+1}{2}}} e^{-C \frac{(x - \xi)^2}{(t - \tau)}}, \text{ com } s = 0, 1, 2,$$

onde K e C são constantes positivas satisfazendo as condições do lema.

O resultado segue da desigualdade acima e do Teorema do Valor Médio. \square

A seguir estudamos o comportamento da função ϕ , definida em (1.1.5). Para isso, faz-se necessário um resultado auxiliar sobre a função Gama ($\Gamma(x)$), apresentado no lema a seguir.

Lema 2.1.3. Sejam $A > 0$, $0 < \alpha \leq 1$ e $\Gamma(x)$ a função especial Gama. Então a série $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mA^m}{\Gamma(\frac{m\alpha}{2})}$ é convergente.

Demonstração. Usando a notação $\frac{mA^m}{\Gamma(\frac{m\alpha}{2})} = b_m$, temos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b_{m+1}}{b_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m+1)A^{m+1}\Gamma\left(\frac{m\alpha}{2}\right)}{mA^m\Gamma\left(\frac{(m+1)\alpha}{2}\right)} = \lim_{m \rightarrow \infty} A \frac{m+1}{m} \frac{\Gamma\left(\frac{m\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Como, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m+1}{m} = 1$ e

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\Gamma\left(\frac{m\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\Gamma\left(\frac{m\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{B\left(\frac{m\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^1 t^{\frac{m\alpha}{2}-1} (1-t)^{\frac{\alpha}{2}-1} dt = 0, \end{aligned}$$

o resultado segue do Teste da Razão.

Aqui, $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ é a função Beta, $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ é a função Gama e, para todo x e y positivos, vale a relação $\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(x, y)$ (v. [18, p. 41]). \square

Lema 2.1.4. Sejam $\phi_{[v]}$ e $\phi_{[\bar{v}]}$ definidas em (1.1.5), $0 \leq \beta \leq 1$ e $0 < \gamma < \alpha$. Se $v, \bar{v} \in B(R, \lambda, \alpha)$ então

$$|(\phi_{[v]} - \phi_{[\bar{v}]})(x, \xi, t, \tau)| \leq \frac{K \|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}}{(t - \tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} e^{-C \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}} \quad (2.1.3)$$

e

$$\begin{aligned} &|(\phi_{[v]}(x, \xi, t, \tau) - \phi_{[\bar{v}]}(x, \xi, t, \tau)) - (\phi_{[v]}(y, \xi, t, \tau) - \phi_{[\bar{v}]}(y, \xi, t, \tau))| \leq \quad (2.1.4) \\ &\leq \frac{K \|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}^{\beta} |x - y|^{\gamma(1-\beta)}}{(t - \tau)^{\frac{3-(\alpha-\gamma(1-\beta))}{2}}} \left(e^{-C \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}} + e^{-C \frac{(y - \xi)^2}{t - \tau}} \right), \end{aligned}$$

onde $C < \frac{1}{4R}$ e $K = K(R, \lambda, \alpha, T)$ são constantes positivas, sendo K contínua em relação a T .

Demonstração. A demonstração de (2.1.3) segue da desigualdade abaixo, a qual provamos por indução.

$$|((LZ_{[v]})_m - (LZ_{[\bar{v}]})_m)(x, t, \xi, \tau)| \leq mK^m \left(\frac{\pi}{C}\right)^{\frac{m-1}{2}} \|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} \frac{(\Gamma(\frac{\alpha}{2}))^m}{\Gamma(\frac{m\alpha}{2})} \frac{1}{(t - \tau)^{\frac{3-m\alpha}{2}}} e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}, \quad (2.1.5)$$

onde $L \equiv L_{[v]}$. Para $m = 1$, temos

$$\begin{aligned} & |((L_{[v]}Z_{[v]})_1 - (L_{[\bar{v}]}Z_{[\bar{v}]})_1)(x - \xi, \xi, t, \tau)| \leq |(a(\xi, \tau) - a(x, t))\partial_{xx}Z_{[v]} + b(x, t)\partial_x Z_{[v]} \\ & \quad + c(x, t)Z_{[v]} - ((\bar{a}(\xi, \tau) - \bar{a}(x, t))\partial_{xx}Z_{[\bar{v}]} + \bar{b}(x, t)\partial_x Z_{[\bar{v}]} + \bar{c}(x, t)Z_{[\bar{v}]})| \\ & \leq |((a(\xi, \tau) - a(x, t)) - ((\bar{a}(\xi, \tau) - \bar{a}(x, t))))|\partial_{xx}Z_{[v]}| \\ & \quad + |(\bar{a}(\xi, \tau) - \bar{a}(x, t))|\partial_{xx}Z_{[v]} - \partial_{xx}Z_{[\bar{v}]}| + |b(x, t) - \bar{b}(x, t)|\partial_x Z_{[v]}| \\ & \quad + |\bar{b}(x, t)|\partial_x Z_{[v]} - \partial_x Z_{[\bar{v}]}| + |c(x, t) - \bar{c}(x, t)|Z_{[v]}| + |\bar{c}(x, t)|Z_{[v]} - Z_{[\bar{v}]}| \equiv I. \end{aligned}$$

Do Lema 2.1.2 e da estimativa (1.1.7), após algumas estimativas, usando e.g.

$$|x - \xi|^\alpha e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} = \left(\frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right)^\alpha (t - \tau)^{\alpha/2} e^{-\frac{1}{8R}\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} e^{-(C - \frac{1}{8R})\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} \leq K(t - \tau)^{\alpha/2} e^{-C'\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}},$$

$C' \equiv \{\text{uma nova constante } C'\}$, obtemos

$$\begin{aligned} I & \leq K\|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{2}{(t - \tau)^{\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2}}} e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} + \frac{2}{(t - \tau)} e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} + \frac{2}{(t - \tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} \right) \\ & \leq \frac{K\|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}}{(t - \tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}, \end{aligned}$$

onde $C < \frac{1}{4R}$ e $K = K(R, \lambda, \alpha, T)$ são constantes, sendo K contínua em T .

Da hipótese de indução e da definição (1.1.6), e somando e subtraindo termos, obtemos:

$$\begin{aligned}
 & |((L_{[v]}Z_{[v]})_{m+1} - (L_{[\bar{v}]}Z_{[\bar{v}]})_{m+1})(x - \xi, \xi, t, \tau)| \\
 & \leq \left| \int_{\tau}^t \int_{\mathbb{R}} [L_{[v]}Z_{[v]}(x - y, y, t, \sigma)](L_{[v]}Z_{[v]})_m(y - \xi, \xi, \sigma, \tau) \right. \\
 & \quad \left. - [L_{[\bar{v}]}Z_{[\bar{v}]}(x - y, y, t, \sigma)](L_{[\bar{v}]}Z_{[\bar{v}]})_m(y - \xi, \xi, \sigma, \tau) dy d\sigma \right| \\
 & \leq \int_{\tau}^t \int_{\mathbb{R}} |(L_{[v]}Z_{[v]} - L_{[\bar{v}]}Z_{[\bar{v}]})(x - y, y, t, \sigma)| |(L_{[v]}Z_{[v]})_m(y - \xi, \xi, \sigma, \tau)| dy d\sigma \\
 & + \int_{\tau}^t \int_{\mathbb{R}} |L_{[\bar{v}]}Z_{[\bar{v}]}(x - \xi, \xi, t, \tau)| |(L_{[v]}Z_{[v]})_m(y - \xi, \xi, \sigma, \tau) - (L_{[\bar{v}]}Z_{[\bar{v}]})_m(y - \xi, \xi, \sigma, \tau)| dy d\sigma \\
 & \leq \int_{\tau}^t \int_{\mathbb{R}} K \frac{\|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}}{(t - \sigma)^{\frac{3-\alpha}{2}}} e^{-C \frac{(x-y)^2}{t-\sigma}} K^m \left(\frac{\pi}{C}\right)^{\frac{m-1}{2}} \frac{(\Gamma(\frac{\alpha}{2}))^m}{\Gamma(\frac{m\alpha}{2})} \frac{1}{(\sigma - \tau)^{\frac{3-m\alpha}{2}}} e^{-C \frac{(y-\xi)^2}{\sigma-\tau}} dy d\sigma \\
 & + \int_{\tau}^t \int_{\mathbb{R}} K \frac{1}{(t - \sigma)^{\frac{3-\alpha}{2}}} e^{-C \frac{(x-y)^2}{t-\sigma}} m K^m \left(\frac{\pi}{C}\right)^{\frac{m-1}{2}} \|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} \frac{(\Gamma(\frac{\alpha}{2}))^m}{\Gamma(\frac{m\alpha}{2})} \frac{1}{(\sigma - \tau)^{\frac{3-m\alpha}{2}}} e^{-C \frac{(y-\xi)^2}{\sigma-\tau}} dy d\sigma \\
 & = (m + 1) K^{m+1} \left(\frac{\pi}{C}\right)^{\frac{m-1}{2}} \|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} \frac{(\Gamma(\frac{\alpha}{2}))^m}{\Gamma(\frac{m\alpha}{2})} \int_{\tau}^t \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(t - \sigma)^{\frac{3-\alpha}{2}}} e^{-C \frac{(x-y)^2}{t-\sigma}} \frac{1}{(\sigma - \tau)^{\frac{3-m\alpha}{2}}} e^{-C \frac{(y-\xi)^2}{\sigma-\tau}},
 \end{aligned}$$

onde usamos que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-C \frac{(x-y)^2}{t-\sigma}} e^{-C \frac{(y-\xi)^2}{\sigma-\tau}} dy = \left(\frac{\pi}{C}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(t - \sigma)(\sigma - \tau)}{t - \tau}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}$$

e

$$\int_{\tau}^t \frac{1}{(t - \sigma)^{\frac{2-\alpha}{2}}} \frac{1}{(\sigma - \tau)^{\frac{2-m\alpha}{2}}} d\sigma = \frac{1}{(t - \tau)^{\frac{2-(m+1)\alpha}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{m\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{(m+1)\alpha}{2})}$$

(v. [15, p. 362]).

Portanto,

$$\begin{aligned}
 & |((L_{[v]}Z_{[v]})_{m+1} - (L_{[\bar{v}]}Z_{[\bar{v}]})_{m+1})(x - \xi, \xi, t, \tau)| \\
 & \leq (m + 1) K^{m+1} \left(\frac{\pi}{C}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{(\Gamma(\frac{\alpha}{2}))^{m+1}}{\Gamma(\frac{(m+1)\alpha}{2})} \frac{\|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}}{(t - \tau)^{\frac{3-(m+1)\alpha}{2}}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}.
 \end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração da desigualdade (2.1.5).

A desigualdade (2.1.5), (1.1.5) e o Lema 2.1.3 implicam que

$$\begin{aligned}
 & |(\phi_{[v]} - \phi_{[\bar{v}]})(x, \xi, t, \tau)| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |((L_{[v]}Z_{[v]})_m - (L_{[\bar{v}]}Z_{[\bar{v}]})_m)(x - \xi, \xi, t, \tau)| \\
 & \leq \sum_{m=1}^{\infty} m K^m \left(\frac{\pi}{C}\right)^{\frac{m-1}{2}} \frac{(\Gamma(\frac{\alpha}{2}))^m}{\Gamma(\frac{m\alpha}{2})} \frac{\|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}}{(t - \tau)^{\frac{3-m\alpha}{2}}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} \\
 & \leq K \frac{\|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}}{(t - \tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}},
 \end{aligned}$$

onde $C < \frac{1}{4R}$ e $K = \sum_{m=1}^{\infty} mK^m \left(\frac{\pi}{C}\right)^{\frac{m-1}{2}} \frac{(\Gamma(\frac{\alpha}{2}))^m}{\Gamma(\frac{m\alpha}{2})} T^{\frac{(m-1)\alpha}{2}}$ são constantes positivas. Observamos que estimamos $t - \tau$ por T . Isso conclui a demonstração da estimativa (2.1.3).

Para demonstrar (2.1.4), escrevemos

$$|(\phi_{[v]}(x, \xi, t, \tau) - \phi_{[\bar{v}]}(x, \xi, t, \tau)) - (\phi_{[v]}(y, \xi, t, \tau) - \phi_{[\bar{v}]}(y, \xi, t, \tau))| \equiv J = J^\beta \cdot J^{1-\beta}.$$

Usando a estimativa (2.1.3) em J^β e a estimativa (1.1.12) em $J^{1-\beta}$ obtemos a estimativa desejada e concluímos a demonstração do Lema. Notemos que podemos estimar J por $|(\Phi_{[v]} - \Phi_{[\bar{v}]})(x, \xi, t, \tau)| + |(\Phi_{[v]} - \Phi_{[\bar{v}]})(y, \xi, t, \tau)|$ e também por $|\Phi_{[v]}(x, \xi, t, \tau) - \Phi_{[v]}(y, \xi, t, \tau)| + |\Phi_{[\bar{v}]}(x, \xi, t, \tau) - \Phi_{[\bar{v}]}(y, \xi, t, \tau)|$. \square

Lema 2.1.5. Sejam $v, \bar{v} \in B(R, \lambda, \alpha)$ e $0 < \beta < 1$. Se $\Gamma_{[v]}$ e $\Gamma_{[\bar{v}]}$ são as respectivas soluções fundamentais de $L_{[v]}u = 0$ e $L_{[\bar{v}]}u = 0$, então

$$|(D_x^s \Gamma_{[v]} - D_x^s \Gamma_{[\bar{v}]})(x, \xi, t, \tau)| \leq \frac{K \|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{s+1}{2}}}, \quad s = 0, 1, \quad (2.1.6)$$

$$\begin{aligned} & |(\partial_{xx} \Gamma_{[v]} - \partial_{xx} \Gamma_{[\bar{v}]})(x, \xi, t, \tau)| \quad (2.1.7) \\ & \leq K (\|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}^\beta) \left(\frac{1}{|x - \xi|^{1-(\alpha-\gamma(1-\beta))} (t-\tau)^{1-\frac{\gamma(1-\beta)}{2}}} + \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \right) e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & |(\partial_t \Gamma_{[v]} - \partial_t \Gamma_{[\bar{v}]})(x, \xi, t, \tau)| \quad (2.1.8) \\ & \leq K (\|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}^\beta) \left(\frac{1}{|x - \xi|^{1-(\alpha-\gamma(1-\beta))} (t-\tau)^{1-\frac{\gamma(1-\beta)}{2}}} + \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \right) e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}, \end{aligned}$$

onde $C < \frac{1}{4R}$ e $K = K(R, \lambda, \alpha, T)$ são constantes positivas, sendo K contínua em T .

Demonstração. Iniciamos a demonstração pelo caso $s = 0$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} & |(\Gamma_{[v]} - \Gamma_{[\bar{v}]})(x, \xi, t, \tau)| \leq |(Z_{[v]} - Z_{[\bar{v}]})(x - \xi, \xi, t, \tau)| + \\ & + \int_{\tau}^t \int_{\mathbb{R}} |Z_{[v]}(x - y, y, t, \sigma) \phi_{[v]}(y, \xi, \sigma, \tau) - Z_{[\bar{v}]}(x - y, y, t, \sigma) \phi_{[\bar{v}]}(y, \xi, \sigma, \tau)| dy d\sigma \leq \\ & \leq |Z_{[v]} - Z_{[\bar{v}]}| + \int_{\tau}^t \int_{\mathbb{R}} |Z_{[v]} - Z_{[\bar{v}]}| |\phi_{[v]}| + |Z_{[\bar{v}]}| |\phi_{[v]} - \phi_{[\bar{v}]}| dy d\sigma. \end{aligned}$$

Aplicando as estimativas (1.1.7) e (1.1.11) e os Lemas 2.1.2 e 2.1.4, segue que

$$\begin{aligned} |(\Gamma_{[v]} - \Gamma_{[\bar{v}]})(x, \xi, t, \tau)| & \leq \frac{K \|a - \bar{a}\|_{\infty} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \\ & + \int_{\tau}^t \int_{\mathbb{R}} \frac{K \|a - \bar{a}\|_{\infty} e^{-C \frac{(x-y)^2}{t-\sigma}}}{(t-\sigma)^{\frac{1}{2}}} \frac{K}{(\sigma-\tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} e^{-C \frac{(y-\xi)^2}{\sigma-\tau}} dy d\sigma \\ & + \int_{\tau}^t \int_{\mathbb{R}} \frac{K}{(t-\sigma)^{\frac{1}{2}}} e^{-C \frac{(x-y)^2}{t-\sigma}} \frac{K \|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}}{(\sigma-\tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} e^{-C \frac{(y-\xi)^2}{\sigma-\tau}} dy d\sigma. \end{aligned}$$

Tendo em vista que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-C \frac{(x-y)^2}{t-\sigma}} e^{-C \frac{(y-\xi)^2}{\sigma-\tau}} dy = \left(\frac{\pi}{C}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(t-\sigma)(\sigma-\tau)}{t-\tau}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}, \quad (2.1.9)$$

segue que

$$\begin{aligned}
 & |(\Gamma_{[v]} - \Gamma_{[\bar{v}]})(x, \xi, t, \tau)| \\
 & \leq \left(1 + \left(\frac{\pi}{C} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\tau}^t (\sigma - \tau)^{-1 + \frac{\alpha}{2}} d\sigma + \left(\frac{\pi}{C} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\tau}^t (t - \sigma)^{-1 + \frac{\alpha}{2}} d\sigma \right) \frac{K \|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}}{(t - \tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-C \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}} \\
 & \leq \frac{K \|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}}{(t - \tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-C \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}}
 \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

onde $K = K(R, \lambda, \alpha, T)$ é contínua em T .

No caso em que $s = 1$, temos

$$\begin{aligned}
 & (\partial_x \Gamma_{[v]} - \partial_x \Gamma_{[\bar{v}]})(x, \xi, t, \tau) \\
 & = (\partial_x Z_{[v]} - \partial_x Z_{[\bar{v}]})(x - \xi, \xi, t, \tau) \\
 & + \int_{\tau}^t \int \partial_x Z_{[v]}(x - y, y, t, \sigma) \phi_{[v]}(y, \xi, \sigma, \tau) - \partial_x Z_{[\bar{v}]}(x - y, y, t, \sigma) \phi_{[\bar{v}]}(y, \xi, \sigma, \tau) dy d\sigma \\
 & = (\partial_x Z_{[v]} - \partial_x Z_{[\bar{v}]}) + \int_{\tau}^t \int (\partial_x Z_{[v]} - \partial_x Z_{[\bar{v}]}) \phi_{[v]} dy d\sigma + \int_{\tau}^t \int \partial_x Z_{[\bar{v}]} (\phi_{[v]} - \phi_{[\bar{v}]}) dy d\sigma \\
 & \equiv J_1 + J_2 + J_3.
 \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 2.1.2 em J_1 , obtemos

$$|J_1| = |(\partial_x Z_{[v]} - \partial_x Z_{[\bar{v}]})(x - \xi, \xi, t, \tau)| \leq \frac{K \|a - \bar{a}\|_{\infty}}{t - \tau} e^{-C \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}}. \tag{2.1.11}$$

Aplicando o Lema 2.1.2, a estimativa (1.1.11) e a identidade (2.1.9), obtemos

$$\begin{aligned}
 |J_2| & \leq \int_{\tau}^t \int |(\partial_x Z_{[v]} - \partial_x Z_{[\bar{v}]})(x - y, y, t, \sigma)| |\phi_{[v]}(y, \xi, \sigma, \tau)| dy d\sigma \\
 & \leq \int_{\tau}^t \int \frac{K \|a - \bar{a}\|_{\infty}}{t - \sigma} e^{-C \frac{(x - y)^2}{t - \sigma}} \frac{K}{(\sigma - \tau)^{\frac{3 - \alpha}{2}}} e^{-C \frac{(y - \xi)^2}{\sigma - \tau}} dy d\sigma \\
 & \leq \frac{K \|a - \bar{a}\|_{\infty}}{(t - \sigma)^{\frac{1}{2}}} e^{-C \frac{(x - y)^2}{t - \sigma}} \int_{\tau}^t (t - \sigma)^{-\frac{1}{2}} (\sigma - \tau)^{-1 + \frac{\alpha}{2}} d\sigma \\
 & \leq \frac{K \|a - \bar{a}\|_{\infty}}{(t - \tau)^{\frac{2 - \alpha}{2}}} e^{-C \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}} \leq \frac{K \|a - \bar{a}\|_{\infty}}{t - \tau} e^{-C \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}}.
 \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

Como as constantes vindas do Lema 2.1.2 e da estimativa (1.1.11) dependem continuamente de T , o mesmo ocorre para a constante, $K = K(R, \lambda, \alpha, T)$, que aparece na limitação de J_2 .

Finalmente, aplicando o Lema 2.1.4, a estimativa (1.1.7) e a identidade (2.1.9), obtemos

$$\begin{aligned}
 |J_3| &\leq \int_{\tau}^t \int |\partial_x Z_{[\bar{v}]}(x-y, y, t, \sigma)| |(\phi_{[v]} - \phi_{[\bar{v}]})(y, \xi, \sigma, \tau)| dy d\sigma \\
 &\leq \int_{\tau}^t \int \frac{K}{t-\sigma} e^{-C\frac{(x-y)^2}{t-\sigma}} \frac{K\|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}}{(\sigma - \tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} e^{-C\frac{(y-\xi)^2}{\sigma-\tau}} dy d\sigma \\
 &\leq \frac{K\|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} \int_{\tau}^t (t-\sigma)^{-\frac{1}{2}} (\sigma - \tau)^{-1+\frac{\alpha}{2}} d\sigma \\
 &\leq \frac{K\|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}}{t-\tau} e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}},
 \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

sendo $K = K(R, \lambda, \alpha, T)$ contínua em T .

Das estimativas (2.1.11), (2.1.12) e (2.1.13), concluímos que

$$|(\partial_x \Gamma_{[v]} - \partial_x \Gamma_{[\bar{v}]})(x, \xi, t, \tau)| \leq \frac{K\|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}}{t-\tau} e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}},$$

para uma constante $K = K(R, \lambda, \alpha, T)$ contínua em T .

No caso em que $s = 2$, temos

$$\begin{aligned}
 &(\partial_{xx} \Gamma_{[v]} - \partial_{xx} \Gamma_{[\bar{v}]})(x, \xi, t, \tau) \\
 &= (\partial_{xx} Z_{[v]} - \partial_{xx} Z_{[\bar{v}]})(x - \xi, \xi, t, \tau) \\
 &+ \int_{\tau}^t \int \partial_{xx} Z_{[v]}(x-y, y, t, \sigma) \phi_{[v]}(y, \xi, \sigma, \tau) - \partial_{xx} Z_{[\bar{v}]}(x-y, y, t, \sigma) \phi_{[\bar{v}]}(y, \xi, \sigma, \tau) dy d\sigma \\
 &= (\partial_{xx} Z_{[v]} - \partial_{xx} Z_{[\bar{v}]}) + \int_{\tau}^t \int (\partial_{xx} Z_{[v]} - \partial_{xx} Z_{[\bar{v}]}) \phi_{[v]} dy d\sigma + \int_{\tau}^t \int \partial_{xx} Z_{[\bar{v}]} (\phi_{[v]} - \phi_{[\bar{v}]}) dy d\sigma \\
 &\equiv I_1 + I_2 + I_3.
 \end{aligned}$$

Do Lema 2.1.2, temos

$$|I_1| = |(\partial_{xx} Z_{[v]} - \partial_{xx} Z_{[\bar{v}]})(x - \xi, \xi, t, \tau)| \leq \frac{K\|a - \bar{a}\|_{\infty}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}. \tag{2.1.14}$$

Para obter estimativa para I_2 , escrevemos

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{\tau}^t \int (\partial_{xx} Z_{[v]} - \partial_{xx} Z_{[\bar{v}]})(x-y, y, t, \sigma) \phi_{[v]}(y, \xi, \sigma, \tau) dy d\sigma \\
 &= \int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} \int (\partial_{xx} Z_{[v]} - \partial_{xx} Z_{[\bar{v}]}) \phi_{[v]} dy d\sigma + \int_{\frac{t+\tau}{2}}^t \int (\partial_{xx} Z_{[v]} - \partial_{xx} Z_{[\bar{v}]}) \phi_{[v]} dy d\sigma \\
 &\equiv I_2' + I_2''.
 \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 2.1.2, a estimativa (1.1.11) e a identidade (2.1.9) em I_2' , obtemos

$$\begin{aligned}
 |I'_2| &\leq \int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} \int \frac{K\|a - \bar{a}\|_{\infty}}{(t - \sigma)^{\frac{3}{2}}} e^{-C\frac{(x-y)^2}{t-\sigma}} \frac{K}{(\sigma - \tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} e^{-C\frac{(y-\xi)^2}{\sigma-\tau}} dy d\sigma \\
 &\leq \frac{K\|a - \bar{a}\|_{\infty}}{(t - \tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} \int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} (t - \sigma)^{-1} (\sigma - \tau)^{-1+\frac{\alpha}{2}} d\sigma \\
 &\leq \frac{K\|a - \bar{a}\|_{\infty}}{(t - \tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}
 \end{aligned}$$

Para estimar I''_2 , escrevemos

$$\begin{aligned}
 I''_2 &= \int_{\frac{t+\tau}{2}}^t \int (\partial_{xx} Z_{[v]} - \partial_{xx} Z_{[\bar{v}]})(x - y, y, t, \sigma) \phi_{[v]}(y, \xi, \sigma, \tau) dy d\sigma \\
 &= \int_{\frac{t+\tau}{2}}^t \int (\partial_{xx} Z_{[v]} - \partial_{xx} Z_{[\bar{v}]})(x - y, y, t, \sigma) (\phi_{[v]}(y, \xi, \sigma, \tau) - \phi_{[v]}(x, \xi, \sigma, \tau) + \phi_{[v]}(x, \xi, \sigma, \tau)) dy d\sigma \\
 &= \int_{\frac{t+\tau}{2}}^t \int (\partial_{xx} Z_{[v]} - \partial_{xx} Z_{[\bar{v}]})(x - y, y, t, \sigma) (\phi_{[v]}(y, \xi, \sigma, \tau) - \phi_{[v]}(x, \xi, \sigma, \tau)) dy d\sigma \\
 &+ \int_{\frac{t+\tau}{2}}^t \int ((\partial_{xx} Z_{[v]} - \partial_{xx} Z_{[\bar{v}]})(x - y, y, t, \sigma) - (\partial_{xx} Z_{[v]} - \partial_{xx} Z_{[\bar{v}]})(x - y, x, t, \sigma)) \phi_{[v]}(x, \xi, \sigma, \tau) dy d\sigma,
 \end{aligned}$$

tendo em vista que $\int (\partial_{xx} Z_{[v]}(x - y, x, t, \sigma) - \partial_{xx} Z_{[\bar{v}]}(x - y, x, t, \sigma)) dy = 0$ (v. (1.1.9)).

Aplicando o Lema 2.1.2 e as estimativas (1.1.10), (1.1.11) e (1.1.12), temos

$$\begin{aligned}
 |I''_2| &\leq \int_{\frac{t+\tau}{2}}^t \int \frac{K\|a - \bar{a}\|_{\infty}}{(t - \sigma)^{\frac{3}{2}}} e^{-C\frac{(x-y)^2}{t-\sigma}} \frac{K|x - y|^{\gamma}}{(\sigma - \tau)^{\frac{3-(\alpha-\gamma)}{2}}} \left(e^{-C\frac{(y-\xi)^2}{\sigma-\tau}} + e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{\sigma-\tau}} \right) dy d\sigma \\
 &+ \int_{\frac{t+\tau}{2}}^t \int K\|a - \bar{a}\|_{\infty}^{\beta} \left(\frac{e^{-C\frac{(x-y)^2}{t-\sigma}}}{(t - \sigma)^{\frac{3}{2}}} \right)^{\beta} |x - y|^{\alpha(1-\beta)} \left(\frac{e^{-C\frac{(x-y)^2}{t-\sigma}}}{(t - \sigma)^{\frac{3}{2}}} \right)^{1-\beta} \left(\frac{e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{\sigma-\tau}}}{(\sigma - \tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} \right) dy d\sigma \\
 &\leq \int_{\frac{t+\tau}{2}}^t \int \frac{K\|a - \bar{a}\|_{\infty}}{(t - \sigma)^{\frac{3-\gamma}{2}}} e^{-C\frac{(x-y)^2}{t-\sigma}} \frac{1}{(\sigma - \tau)^{\frac{3-(\alpha-\gamma)}{2}}} \left(e^{-C\frac{(y-\xi)^2}{\sigma-\tau}} + e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{\sigma-\tau}} \right) dy d\sigma \\
 &+ \int_{\frac{t+\tau}{2}}^t \int K\|a - \bar{a}\|_{\infty}^{\beta} \frac{e^{-C\frac{(x-y)^2}{t-\sigma}}}{(t - \sigma)^{\frac{3-\alpha(1-\beta)}{2}}} \frac{e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{\sigma-\tau}}}{(\sigma - \tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} dy d\sigma \\
 &\leq K(\|a - \bar{a}\|_{\infty} + \|a - \bar{a}\|_{\infty}^{\beta}) \frac{e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}}{(t - \tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, obtemos

$$|I_2| \leq |I'_2| + |I''_2| \leq K(\|a - \bar{a}\|_{\infty} + \|a - \bar{a}\|_{\infty}^{\beta}) \frac{e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}}{(t - \tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}}. \quad (2.1.15)$$

De modo semelhante, obtemos uma estimativa para

$$I_3 = \int_{\tau}^t \int \partial_{xx} Z_{[\bar{v}]}(x-y, y, t, \sigma) (\phi_{[v]} - \phi_{[\bar{v}]}) (y, \xi, \sigma, \tau) dy d\sigma.$$

Em virtude de (1.1.9), podemos escrever

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\tau}^t \int \partial_{xx} Z_{[\bar{v}]}(x-y, y, t, \sigma) [(\phi_{[v]} - \phi_{[\bar{v}]}) (y, \xi, \sigma, \tau) - (\phi_{[v]} - \phi_{[\bar{v}]}) (x, \xi, \sigma, \tau)] dy d\sigma \\ &+ \int_{\tau}^t \int (\partial_{xx} Z_{[\bar{v}]}(x-y, y, t, \sigma) - \partial_{xx} Z_{[\bar{v}]}(x-y, x, t, \sigma)) (\phi_{[v]} - \phi_{[\bar{v}]}) (x, \xi, \sigma, \tau) dy d\sigma \\ &= I'_3 + I''_3. \end{aligned}$$

Considerando $x \neq \xi$ e aplicando o Lema 2.1.4 e a estimativa (1.1.7) em I'_3 , obtemos

$$\begin{aligned} |I'_3| &\leq \int_{\tau}^t \int \frac{K}{(t-\sigma)^{\frac{3}{2}}} e^{-C\frac{(x-y)^2}{t-\sigma}} \frac{K \|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}^{\beta} |x-y|^{\gamma(1-\beta)}}{(\sigma-\tau)^{\frac{3-(\alpha-\gamma(1-\beta))}{2}}} \left(e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{\sigma-\tau}} + e^{-C\frac{(y-\xi)^2}{\sigma-\tau}} \right) dy d\sigma \\ &\leq \int_{\tau}^t \int \frac{K}{(t-\sigma)^{\frac{3-\gamma(1-\beta)}{2}}} e^{-C\frac{(x-y)^2}{t-\sigma}} \frac{K \|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}^{\beta}}{(\sigma-\tau)^{\frac{3-(\alpha-\gamma(1-\beta))}{2}}} \left(e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{\sigma-\tau}} + e^{-C\frac{(y-\xi)^2}{\sigma-\tau}} \right) dy d\sigma \\ &\leq K \|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}^{\beta} \int_{\tau}^t \frac{1}{(t-\sigma)^{\frac{3-\gamma(1-\beta)}{2}}} \frac{1}{(\sigma-\tau)^{\frac{3-(\alpha-\gamma(1-\beta))}{2}}} e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{\sigma-\tau}} \left(\int e^{-C\frac{(x-y)^2}{t-\sigma}} dy \right) d\sigma \\ &+ K \|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}^{\beta} \int_{\tau}^t \frac{1}{(t-\sigma)^{\frac{3-\gamma(1-\beta)}{2}}} \frac{1}{(\sigma-\tau)^{\frac{3-(\alpha-\gamma(1-\beta))}{2}}} \left(\int e^{-C\frac{(x-y)^2}{t-\sigma}} e^{-C\frac{(y-\xi)^2}{\sigma-\tau}} dy \right) d\sigma \\ &\leq K \|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}^{\beta} \int_{\tau}^t \frac{1}{(t-\sigma)^{\frac{2-\gamma(1-\beta)}{2}}} \frac{1}{(\sigma-\tau)^{\frac{3-(\alpha-\gamma(1-\beta))}{2}}} e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{\sigma-\tau}} d\sigma \\ &+ \frac{K \|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}^{\beta}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} \int_{\tau}^t \frac{1}{(t-\sigma)^{\frac{2-\gamma(1-\beta)}{2}}} \frac{1}{(\sigma-\tau)^{\frac{2-(\alpha-\gamma(1-\beta))}{2}}} d\sigma \\ &\leq K \|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}^{\beta} \left(\frac{1}{(t-\tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} + \frac{1}{|x-\xi|^{1-(\alpha-\gamma(1-\beta))} (t-\tau)^{1-\frac{\alpha(1-\beta)}{2}}} \right) e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} \\ &+ \frac{K \|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}^{\beta}}{(t-\tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} \\ &\leq K \|v - \bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}^{\beta} \left(\frac{1}{|x-\xi|^{1-(\alpha-\gamma(1-\beta))} (t-\tau)^{1-\frac{\gamma(1-\beta)}{2}}} + \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} \right) e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}. \end{aligned}$$

Para estimar I_3'' , usamos o Lema 2.1.4 e a propriedade (1.1.10). Com isso, temos que

$$\begin{aligned}
 |I_3''| &\leq \int_{\tau}^t \int \frac{K|x-y|^\alpha}{(t-\sigma)^{\frac{3}{2}}} e^{-C\frac{(x-y)^2}{t-\sigma}} \frac{\|v-\bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}}{(\sigma-\tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{\sigma-\tau}} dy d\sigma \\
 &\leq K\|v-\bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} \int_{\tau}^t \frac{1}{(t-\sigma)^{\frac{3-\alpha}{2}}} \frac{1}{(\sigma-\tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{\sigma-\tau}} \left(\int e^{-C\frac{(x-y)^2}{t-\sigma}} dy \right) d\sigma \\
 &\leq K\|v-\bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} \int_{\tau}^t \frac{1}{(t-\sigma)^{\frac{2-\alpha}{2}}} \frac{1}{(\sigma-\tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{\sigma-\tau}} d\sigma \\
 &\leq K\|v-\bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} \int_{\tau}^t \frac{T^{\frac{\alpha-\gamma(1-\beta)\beta}{2}}}{(t-\sigma)^{\frac{2-\gamma(1-\beta)}{2}}} \frac{T^{\frac{\gamma(1-\beta)}{2}}}{(\sigma-\tau)^{\frac{3-(\alpha-\gamma(1-\beta))}{2}}} e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{\sigma-\tau}} d\sigma \\
 &\leq K\|v-\bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1}{|x-\xi|^{1-(\alpha-\gamma(1-\beta))} (t-\tau)^{1-\frac{\gamma(1-\beta)}{2}}} + \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} \right) e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}.
 \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
 |I_3| &\leq |I_3'| + |I_3''| \tag{2.1.16} \\
 &\leq K(\|v-\bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} + \|v-\bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}^\beta) \left(\frac{1}{|x-\xi|^{1-(\alpha-\gamma(1-\beta))} (t-\tau)^{1-\frac{\gamma(1-\beta)}{2}}} + \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} \right) e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}.
 \end{aligned}$$

Das estimativas (2.1.14), (2.1.15) e (2.1.16) segue

$$\begin{aligned}
 |(\partial_{xx}\Gamma_{[v]} - \partial_{xx}\Gamma_{[\bar{v}]})(x, \xi, t, \tau)| \\
 \leq K(\|v-\bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}} + \|v-\bar{v}\|_{\alpha, \frac{\alpha}{2}}^\beta) \left(\frac{1}{|x-\xi|^{1-(\alpha-\gamma(1-\beta))} (t-\tau)^{1-\frac{\gamma(1-\beta)}{2}}} + \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \right) e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}.
 \end{aligned}$$

onde a contante $K = K(R, \lambda, \alpha, T)$ é contínua com respeito a T . Com efeito, as constantes que aparecem no Lema 2.1.2 e nas estimativas (1.1.7) e (1.1.10) não dependem de T . A constante que aparece na estimativa do Lema 2.1.4 é apresentada com mais detalhes, sendo constatada a continuidade com respeito a T . Nas estimativas (1.1.11) e (1.1.12), as constantes são obtidas de modo análogo ao que é feito no Lema 2.1.4 e, portanto, também são contínuas em T . Concluímos assim a demonstração da estimativa (2.1.7).

Finalmente, a demonstração de (2.1.8) segue de (2.1.6) e (2.1.7), já que

$$\partial_t \Gamma_{[v]} = a \partial_{xx} \Gamma_{[v]} - b \partial_x \Gamma_{[v]} - c \Gamma_{[v]} \quad \text{e} \quad \partial_t \Gamma_{[\bar{v}]} = \bar{a} \partial_{xx} \Gamma_{[\bar{v}]} - \bar{b} \partial_x \Gamma_{[\bar{v}]} - \bar{c} \Gamma_{[\bar{v}]}.$$

□

Além das estimativas obtidas acima, também é possível avaliar o comportamento da solução fundamental quando seus parâmetros convergem pontualmente para determinadas funções. Isso é feito no lema a seguir.

Lema 2.1.6. Sejam $v_n, v \in B(R, \lambda, \alpha)$ e $\Gamma_{[v_n]}$ e $\Gamma_{[v]}$ as respectivas soluções fundamentais de $L_{[v]}u = 0$ e $L_{[v_n]}u = 0$. Se $v_n(x, t)$ converge para $v(x, t)$, para todo $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$, então $\Gamma_{[v_n]}(x, \xi, t, \tau)$ converge para $\Gamma_{[v]}(x, \xi, t, \tau)$, para todo $(x, t), (\xi, \tau) \in \mathbb{R} \times [0, T]$, com $t > \tau$.

Demonstração. Tendo em vista a expressão de $\Gamma_{[v_n]}$, dada em (2.1.2), vamos inicialmente estudar a convergência pontual de $Z_{[v_n]}$ e $\phi_{[v_n]}$.

Verificamos diretamente de (1.1.4) que

$$D_t^r D_x^s Z_{[v_n]} \rightarrow D_t^r D_x^s Z_{[v]} \quad (2.1.17)$$

pontualmente, sendo r e s inteiros não negativos.

Para provar que $\phi_{[v_n]}$ converge pontualmente a $\phi_{[v]}$, observamos que

$$L_{[v_n]}(Z_{[v_n]}) = (a_n(\xi, \tau) - a_n(x, t))\partial_{xx}Z_{[v_n]} + b_n(x, t)\partial_x Z_{[v_n]} + c_n(x, t)Z_{[v_n]}.$$

Portanto, segue de (2.1.17) que

$$L_{[v_n]}(Z_{[v_n]}) \rightarrow L_{[v]}(Z_{[v]}) \quad (2.1.18)$$

pontualmente. Além disso, temos

$$|L_{[v_n]}(Z_{[v_n]}(x - \xi, \xi, t, \tau))| \leq \frac{K}{(t - \tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}, \quad (2.1.19)$$

onde K e C são constantes que não dependem de n .

Seja $(L_{[v_n]})_m$ definido em (1.1.6). Por indução em m , temos que $(L_{[v_n]})_m \rightarrow (L_{[v]})_m$, pontualmente quando n tende a infinito. De fato, seguindo a construção da solução fundamental em [15, p. 362], temos

$$|(L_{[v_n]})_m(Z_{[v_n]}(x - \xi, \xi, t, \tau))| \leq K^m \left(\frac{\pi}{C}\right)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Gamma^m(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{m\alpha}{2})} \frac{1}{(t - \tau)^{\frac{3-m\alpha}{2}}} e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}. \quad (2.1.20)$$

Assim,

$$|(L_{[v_n]})(Z_{[v_n]}(x - y, y, t, \sigma))(L_{[v_n]})_m(Z_{[v_n]}(y - \xi, \xi, \sigma, \tau))| \leq \frac{K e^{-C\frac{(x-y)^2}{t-\sigma}}}{(t-\sigma)^{\frac{3-\alpha}{2}}} K^m \left(\frac{\pi}{C}\right)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Gamma^m(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{m\alpha}{2})} \frac{e^{-C\frac{(y-\xi)^2}{\sigma-\tau}}}{(\sigma-\tau)^{\frac{3-m\alpha}{2}}}$$

e pela hipótese de indução $(L_{[v_n]})(Z_{[v_n]})(L_{[v_n]})_m(Z_{[v_n]}) \rightarrow (L_{[v]})(Z_{[v]})(L_{[v]})_m(Z_{[v]})$, pontualmente. Então, pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$(L_{[v_n]})_{m+1}(Z_{[v_n]}(x - \xi, \xi, t, \tau)) = \int_{\tau}^t \int (L_{[v_n]})(Z_{[v_n]}(x - y, y, t, \sigma))(L_{[v_n]})_m(Z_{[v_n]}(y - \xi, \xi, \sigma, \tau)) dy d\sigma$ converge para $(L_{[v]})_{m+1}(Z_{[v]}(x - \xi, \xi, t, \tau))$.

A estimativa (2.1.20) garante a convergência uniforme de $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (L_{[v_n]})(Z_{[v_n]})_m(x - \xi, \xi, t, \tau)$ em relação a (x, ξ) e $t - \tau > \delta$, para cada $\delta > 0$ fixado, e, portanto, $\phi_{[v_n]} \rightarrow \phi_{[v]}$, pontualmente.

Para concluir a demonstração do lema, observamos que

$$|Z_{[v_n]}(x - y, y, t, \sigma)\phi_{[v_n]}(y, \xi, \sigma, \tau)| \leq \frac{K}{(t-\sigma)^{\frac{1}{2}}} e^{-C\frac{(x-y)^2}{t-\sigma}} \frac{1}{(\sigma-\tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}} e^{-C\frac{(y-\xi)^2}{\sigma-\tau}}$$

e que $Z_{[v_n]}\phi_{[v_n]}$ converge pontualmente para $Z_{[v]}\phi_{[v]}$. Novamente pelo Teorema da Convergência Dominada segue que

$$\int_{\tau}^t \int Z_{[v_n]}\phi_{[v_n]} dy d\sigma \rightarrow \int_{\tau}^t \int Z_{[v]}\phi_{[v]} dy d\sigma.$$

Concluimos que $\Gamma_{[v_n]} \rightarrow \Gamma_{[v]}$, pontualmente. □

2.2 O problema de Cauchy

Nesta seção, utilizando as estimativas obtidas na seção anterior, apresentamos estimativas para a soluções de um problema de Cauchy em termos do dado inicial, da função de reação e dos parâmetros.

Teorema 2.2.1. Sejam $T > 0$, $v = (a, b, 0)$, $\bar{v} = (\bar{a}, \bar{b}, 0) \in B(R, \lambda, 1)$, $f, \bar{f} \in C_{1, \frac{1}{2}}(\Omega_T)$ e u_0, \bar{u}_0 funções lipschitzianas e limitadas em \mathbb{R} . Se u e \bar{u} são as respectivas soluções dos problemas

$$L_{[v]}u = f, \quad \text{em } \mathbb{R} \times (0, T], \quad u(x, 0) = u_0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.2.1)$$

e

$$L_{[\bar{v}]}u = \bar{f}, \quad \text{em } \mathbb{R} \times (0, T], \quad u(x, 0) = \bar{u}_0 \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.2.2)$$

então

$$\begin{aligned} \|u - \bar{u}\|_{1, \frac{1}{2}} \leq & K[\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta + \|u_0 - \bar{u}_0\|_1 \\ & + T^{\frac{1}{2}}(\|f\|_{1, \frac{1}{2}} + 1)(\|f - \bar{f}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta)], \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

sendo $K = K(R, \lambda, T, \|u_0\|_1)$, contínua em relação a T .

Demonstração. Segue do Teorema 1.1.2 que

$$\begin{aligned} (u - \bar{u})(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} \Gamma_{[v]}(x, \xi, t, 0)u_0(\xi) - \Gamma_{[\bar{v}]}(x, \xi, t, 0)\bar{u}_0(\xi)d\xi \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma_{[v]}(x, \xi, t, \tau)f(\xi, \tau) - \Gamma_{[\bar{v}]}(x, \xi, t, \tau)\bar{f}(\xi, \tau)d\xi d\tau \\ &\equiv V(x, t) + W(x, t). \end{aligned}$$

Desse modo, basta determinarmos estimativas para V e W .

Aplicando o Lema 2.1.5 e a estimativa (1.1.13) em V , temos

$$\begin{aligned} |V(x, t)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |\Gamma_{[v]}(x, \xi, t, 0)u_0(\xi) - \Gamma_{[\bar{v}]}(x, \xi, t, 0)\bar{u}_0(\xi)|d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |(\Gamma_{[v]} - \Gamma_{[\bar{v}]})(x, \xi, t, 0)u_0(\xi)| + |\Gamma_{[\bar{v}]}(x, \xi, t, 0)(u_0(\xi) - \bar{u}_0(\xi))|d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{K\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}}} e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t}} \|u_0\|_\infty + \frac{K}{t^{\frac{1}{2}}} e^{-C\frac{(x-\xi)^2}{t}} \|u_0 - \bar{u}_0\|_\infty d\xi \\ &\leq K(\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|u_0 - \bar{u}_0\|_\infty), \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

sendo $K = K(R, \lambda, T, \|u_0\|_\infty)$ contínua em relação a T , pois as constantes que aparecem no Lema 2.1.5 e na estimativa 1.1.13 são contínuas em relação a T .

Tendo em vista a Observação 1.1.3, podemos escrever

$$\begin{aligned} \partial_x V(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} \partial_x \Gamma_{[v]}(x, \xi, t, 0)u_0(\xi) - \partial_x \Gamma_{[\bar{v}]}(x, \xi, t, 0)\bar{u}_0(\xi)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\partial_x \Gamma_{[v]} - \partial_x \Gamma_{[\bar{v}]})(x, \xi, t, 0)(u_0(\xi) - u_0(x))d\xi \\ &+ \int \partial_x \Gamma_{[\bar{v}]}(x, \xi, t, 0)[(u_0(\xi) - \bar{u}_0(\xi)) - (u_0(x) - \bar{u}_0(x))]d\xi. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 2.1.5 e a estimativa (1.1.13), obtemos

$$\begin{aligned}
 |\partial_x V(x, t)| &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{K \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} \|u_0\|_1 |x - \xi|}{t} + \frac{K \|u_0 - \bar{u}_0\|_1 |x - \xi|}{t} \right) e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t}} d\xi \quad (2.2.5) \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{K \|u_0\|_1 \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}}} + \frac{K \|u_0 - \bar{u}_0\|_1}{t^{\frac{1}{2}}} \right) e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t}} d\xi \\
 &\leq K (\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|u_0 - \bar{u}_0\|_1),
 \end{aligned}$$

onde escrevemos $\frac{|x-\xi|}{t} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t}} = \frac{1}{t^{1/2}} \left(\frac{|x-\xi|}{t^{1/2}} e^{-(C/2) \frac{(x-\xi)^2}{t}} \right) e^{-(C/2) \frac{(x-\xi)^2}{t}} \leq \text{const.} \frac{1}{t^{1/2}} e^{-(C/2) \frac{(x-\xi)^2}{t}}$ e $K = K(R, \lambda, T, \|u_0\|_1)$ é contínua em relação a T .

Para obter a Hölder continuidade com respeito a t , usamos novamente a Observação 1.1.3 e, escrevemos

$$\begin{aligned}
 &V(x, t) - V(x, t') \\
 &= \int_{\mathbb{R}} (\Gamma_{[v]}(x, t, \xi, 0) - \Gamma_{[v]}(x, t', \xi, 0)) u_0(\xi) - (\Gamma_{[\bar{v}]}(x, t, \xi, 0) - \Gamma_{[\bar{v}]}(x, t', \xi, 0)) \bar{u}_0(\xi) d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{t'}^t \partial_t \Gamma_{[v]}(x, s, \xi, 0) u_0(\xi) - \partial_t \Gamma_{[\bar{v}]}(x, s, \xi, 0) \bar{u}_0(\xi) ds d\xi \\
 &= \int_{t'}^t \int_{\mathbb{R}} (\partial_t \Gamma_{[v]} - \partial_t \Gamma_{[\bar{v}]})(x, s, \xi, 0) u_0(\xi) + \partial_t \Gamma_{[\bar{v}]}(x, s, \xi, 0) (u_0 - \bar{u}_0)(\xi) d\xi ds \\
 &= \int_{t'}^t \int_{\mathbb{R}} (\partial_t \Gamma_{[v]} - \partial_t \Gamma_{[\bar{v}]})(x, s, \xi, 0) (u_0(\xi) - u_0(x)) d\xi ds \\
 &+ \int_{t'}^t \int_{\mathbb{R}} \partial_t \Gamma_{[\bar{v}]}(x, s, \xi, 0) [(u_0 - \bar{u}_0)(\xi) - (u_0 - \bar{u}_0)(x)] d\xi ds.
 \end{aligned}$$

Portanto, aplicando o Lema 2.1.5 e a estimativa (1.1.13), obtemos

$$\begin{aligned}
 & |V(x, t) - V(x, t')| \tag{2.2.6} \\
 & \leq \int_{t'}^t \int_{\mathbb{R}} |\partial_t \Gamma_{[v]} - \partial_t \Gamma_{[\bar{v}]}(x, s, \xi, 0)| |u_0(\xi) - u_0(x)| d\xi ds \\
 & + \int_{t'}^t \int_{\mathbb{R}} |\partial_t \Gamma_{[\bar{v}]}(x, s, \xi, 0)| |(u_0 - \bar{u}_0)(\xi) - (u_0 - \bar{u}_0)(x)| d\xi ds \\
 & \leq \int_{t'}^t \int_{\mathbb{R}} K(\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta) \|u_0\|_1 |x - \xi| \left(\frac{1}{|x - \xi|^{\gamma(1-\beta)} s^{\frac{2-\gamma(1-\beta)}{2}}} + \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} \right) e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{s}} d\xi ds \\
 & + \int_{t'}^t \int_{\mathbb{R}} \frac{K \|u_0 - \bar{u}_0\|_1 |x - \xi|}{s^{\frac{3}{2}}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{s}} d\xi ds \\
 & \leq \int_{t'}^t \int_{\mathbb{R}} K(\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta) \|u_0\|_1 \left(\frac{T^{\frac{1}{2}}}{s} + \frac{1}{s} \right) e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{s}} d\xi ds \\
 & + \int_{t'}^t \int_{\mathbb{R}} \frac{K \|u_0 - \bar{u}_0\|_1}{s} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{s}} d\xi ds \\
 & \leq K(\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta + \|u_0 - \bar{u}_0\|_1) \int_{t'}^t \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{s}} d\xi ds \\
 & \leq K(\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta + \|u_0 - \bar{u}_0\|_1) \int_{t'}^t \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} ds \\
 & \leq K(\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta + \|u_0 - \bar{u}_0\|_1) (t - t')^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

sendo $K = K(R, \lambda, T, \|u_0\|_1)$ contínua em relação a T .

Das estimativas (2.2.4), (2.2.5) e (2.2.6), temos

$$\|V\|_{1, \frac{1}{2}} \leq K(R, \lambda, T, \|u_0\|_1) (\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta + \|u_0 - \bar{u}_0\|_1), \tag{2.2.7}$$

sendo $K(R, \lambda, T, \|u_0\|_1)$ contínua em relação a T .

De modo semelhante, podemos estimar W . De fato,

$$\begin{aligned}
 W(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Gamma_{[v]}(x, \xi, t, \tau) f(\xi, \tau) - \Gamma_{[\bar{v}]}(x, \xi, t, \tau) \bar{f}(\xi, \tau) d\xi d\tau \\
 &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\Gamma_{[v]} - \Gamma_{[\bar{v}]}) (x, \xi, t, \tau) f(\xi, \tau) + \Gamma_{[\bar{v}]}(x, \xi, t, \tau) (f - \bar{f})(\xi, \tau) d\xi d\tau.
 \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 2.1.5 e a estimativa (1.1.13), obtemos

$$\begin{aligned}
 |W(x, t)| &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |(\Gamma_{[v]} - \Gamma_{[\bar{v}]}) (x, \xi, t, \tau) f(\xi, \tau)| + |\Gamma_{[\bar{v}]}(x, \xi, t, \tau) (f - \bar{f})(\xi, \tau)| d\xi d\tau \tag{2.2.8} \\
 &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} K(\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} \|f\|_\infty + \|f - \bar{f}\|_\infty) \frac{1}{(t - \tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} d\xi d\tau \\
 &\leq K(R, \lambda, T) (\|f\|_\infty + 1) T (\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|f - \bar{f}\|_\infty).
 \end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
 |\partial_x W(x, t)| &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |(\partial_x \Gamma_{[v]} - \partial_x \Gamma_{[\bar{v}]})(x, \xi, t, \tau) f(\xi, \tau) + \partial_x \Gamma_{[\bar{v}]}(x, \xi, t, \tau) (f - \bar{f})(\xi, \tau)| d\xi d\tau \quad (2.2.9) \\
 &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} K(\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} \|f\|_{\infty} + \|f - \bar{f}\|_{\infty}) \frac{1}{(t - \tau)} e^{-C \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}} d\xi d\tau \\
 &\leq K(R, \lambda, T)(\|f\|_{\infty} + 1) T^{\frac{1}{2}} (\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|f - \bar{f}\|_{\infty})
 \end{aligned}$$

Para obter a Hölder continuidade em t , escrevemos

$$\begin{aligned}
 W(x, t) - W(x, t') &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} [(\Gamma_{[v]}(x, \xi, t, \tau) f(\xi, \tau) - \Gamma_{[\bar{v}]}(x, \xi, t, \tau) \bar{f}(\xi, \tau)) - (\Gamma_{[v]}(x, \xi, t', \tau) f(\xi, \tau) - \Gamma_{[\bar{v}]}(x, \xi, t', \tau) \bar{f}(\xi, \tau))] d\xi d\tau \\
 &= \int_{t'}^t \int_{\mathbb{R}} (\Gamma_{[v]}(x, \xi, t, \tau) f(\xi, \tau) - \Gamma_{[\bar{v}]}(x, \xi, t, \tau) \bar{f}(\xi, \tau)) d\xi d\tau \\
 &+ \int_0^{t'} \int_{\mathbb{R}} [(\Gamma_{[v]}(x, \xi, t, \tau) - \Gamma_{[v]}(x, \xi, t', \tau)) f(\xi, \tau) - (\Gamma_{[\bar{v}]}(x, \xi, t, \tau) - \Gamma_{[\bar{v}]}(x, \xi, t', \tau)) \bar{f}(\xi, \tau)] d\xi d\tau \\
 &= \int_{t'}^t \int_{\mathbb{R}} ((\Gamma_{[v]} - \Gamma_{[\bar{v}]})(x, \xi, t, \tau)) f(\xi, \tau) + \Gamma_{[\bar{v}]}(x, \xi, t, \tau) (f - \bar{f})(\xi, \tau) d\xi d\tau \\
 &+ \int_{t' - \epsilon}^{t'} \int_{\mathbb{R}} [(\Gamma_{[v]}(x, \xi, t, \tau) - \Gamma_{[v]}(x, \xi, t', \tau)) f(\xi, \tau) - (\Gamma_{[\bar{v}]}(x, \xi, t, \tau) - \Gamma_{[\bar{v}]}(x, \xi, t', \tau)) \bar{f}(\xi, \tau)] d\xi d\tau \\
 &+ \int_0^{t' - \epsilon} \int_{\mathbb{R}} \int_{t'}^t [\partial_t \Gamma_{[v]}(x, \xi, s, \tau) f(\xi, \tau) - \partial_t \Gamma_{[\bar{v}]}(x, \xi, s, \tau) \bar{f}(\xi, \tau)] ds d\xi d\tau \\
 &\equiv W_1 + W_2 + W_3
 \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 2.1.5 e a estimativa (2.1.13) em W_1 , obtemos

$$\begin{aligned}
 |W_1| &\leq \int_{t'}^t \int_{\mathbb{R}} (K \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} \|f\|_{\infty} + K \|f - \bar{f}\|_{\infty}) \frac{e^{-C \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}}}{(t - \tau)^{\frac{1}{2}}} d\xi d\tau \quad (2.2.10) \\
 &\leq K(R, \lambda, T)(\|f\|_{\infty} + 1) T^{\frac{1}{2}} (\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|f - \bar{f}\|_{\infty}) (t - t')^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Aplicando a estimativa (2.1.13) em W_2 , obtemos

$$\begin{aligned}
 |W_2| &\leq \int_{t' - \epsilon}^{t'} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{K}{(t - \tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-C \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}} + \frac{K}{(t' - \tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-C \frac{(x - \xi)^2}{t' - \tau}} \right) (\|f\|_{\infty} + \|\bar{f}\|_{\infty}) d\xi d\tau \quad (2.2.11) \\
 &\leq K(\|f\|_{\infty} + \|\bar{f}\|_{\infty}) \epsilon.
 \end{aligned}$$

Considerando a Observação 1.1.3, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 W_3 &= \int_0^{t' - \epsilon} \int_{\mathbb{R}} \int_{t'}^t [\partial_t \Gamma_{[v]}(x, \xi, s, \tau) f(\xi, \tau) - \partial_t \Gamma_{[\bar{v}]}(x, \xi, s, \tau) \bar{f}(\xi, \tau)] ds d\xi d\tau \\
 &= \int_0^{t' - \epsilon} \int_{t'}^t \int_{\mathbb{R}} [(\partial_t \Gamma_{[v]} - \partial_t \Gamma_{[\bar{v}]})(x, \xi, s, \tau) (f(\xi, \tau) - \bar{f}(\xi, \tau)) \\
 &\quad + \partial_t \Gamma_{[\bar{v}]}(x, \xi, s, \tau) ((f - \bar{f})(\xi, \tau) - (f - \bar{f})(x, \tau))] d\xi ds d\tau
 \end{aligned}$$

Aplicando, novamente, o Lema 2.1.5 e a estimativa (2.1.13) em W_3 e denotando por $K_1 = K(\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta) \|f\|_{1, \frac{1}{2}}$, temos

$$\begin{aligned}
 |W_3| &\leq \int_0^{t'-\epsilon} \int_{t'}^t \int_{\mathbb{R}} K_1 \left(\frac{1}{|x - \xi|^{\gamma(1-\beta)} (s - \tau)^{\frac{2-\gamma(1-\beta)}{2}}} + \frac{1}{(s - \tau)^{\frac{3}{2}}} \right) e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{s-\tau}} |x - \xi| \quad (2.2.12) \\
 &\quad + \frac{K}{(s - \tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{s-\tau}} \|f - \bar{f}\|_{1, \frac{1}{2}} |x - \xi| d\xi ds d\tau \\
 &\leq K(1 + \|f\|_{1, \frac{1}{2}}) [\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta \\
 &\quad + \|f - \bar{f}\|_{1, \frac{1}{2}}] \int_0^{t'-\epsilon} \int_{t'}^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{|x - \xi|^{1-\gamma(1-\beta)}}{(s - \tau)^{\frac{2-\gamma(1-\beta)}{2}}} + \frac{|x - \xi|}{(s - \tau)^{\frac{3}{2}}} \right) e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{s-\tau}} d\xi ds d\tau \\
 &\leq K(1 + \|f\|_{1, \frac{1}{2}}) [\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta \\
 &\quad + \|f - \bar{f}\|_{1, \frac{1}{2}}] \int_0^{t'-\epsilon} \int_{t'}^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{(s - \tau)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{s - \tau} \right) e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{s-\tau}} d\xi ds d\tau \\
 &\leq K(1 + \|f\|_{1, \frac{1}{2}}) [\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta \\
 &\quad + \|f - \bar{f}\|_{1, \frac{1}{2}}] (T^{\frac{1}{2}} + 1) \int_0^{t'-\epsilon} \int_{t'}^t \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s - \tau} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{s-\tau}} d\xi ds d\tau \\
 &\leq K(1 + \|f\|_{1, \frac{1}{2}}) [\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta + \|f - \bar{f}\|_{1, \frac{1}{2}}] \int_0^{t'-\epsilon} \int_{t'}^t \frac{1}{(s - \tau)^{\frac{1}{2}}} ds d\tau \\
 &\leq K(1 + \|f\|_{1, \frac{1}{2}}) [\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta + \|f - \bar{f}\|_{1, \frac{1}{2}}] T(t - t')^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Como a estimativa (2.2.11) vale para todo $\epsilon > 0$, concluímos, de (2.2.10), (2.2.11) e (2.2.12), que

$$|W(x, t) - W(x, t')| \leq K(\|f\|_{1, \frac{1}{2}} + 1) (\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta + \|f - \bar{f}\|_{1, \frac{1}{2}}) T^{\frac{1}{2}} (t - t')^{\frac{1}{2}}, \quad (2.2.13)$$

sendo $K = K(R, \lambda, T)$ contínua em relação a T .

Segue de (2.2.8), (2.2.9) e (2.2.13) que

$$\|W\|_{1, \frac{1}{2}} \leq K(R, \lambda, T) T^{\frac{1}{2}} (\|f\|_{1, \frac{1}{2}} + 1) (\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta + \|f - \bar{f}\|_{1, \frac{1}{2}}). \quad (2.2.14)$$

Finalmente obtemos de (2.2.7) e (2.2.14) que

$$\|u - \bar{u}\|_{1, \frac{1}{2}} \leq \|V\|_{1, \frac{1}{2}} + \|W\|_{1, \frac{1}{2}} \leq \quad (2.2.15)$$

$$K(\|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta + \|u_0 - \bar{u}_0\|_1 + T^{\frac{1}{2}} (\|f\|_{1, \frac{1}{2}} + 1) (\|f - \bar{f}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}} + \|v - \bar{v}\|_{1, \frac{1}{2}}^\beta)),$$

sendo $K = K(R, \lambda, T, \|u_0\|_1)$, contínua em T . \square

Em particular temos a seguinte estimativa para uma solução de (2.2.1)

Corolário 2.2.2. Nas condições do Teorema 2.2.1, se u é solução de (2.2.1) então

$$\|u\|_{1, \frac{1}{2}} \leq K(R, \lambda, T, \|u_0\|_1) (\|u_0\|_1 + T^{\frac{1}{2}} (\|f\|_{1, \frac{1}{2}} + 1) \|f\|_{1, \frac{1}{2}}), \quad (2.2.16)$$

sendo $K(R, \lambda, T, \|u_0\|_1)$ uma constante positiva e contínua em relação a T .

Demonstração. A demonstração segue do Teorema 2.2.1 fazendo $\bar{v} = v$, $\bar{f} = 2f$ e $\bar{u}_0 = 2u_0$. \square

Capítulo 3

Combustão em um meio poroso com duas camadas

O objetivo deste capítulo é estudar um sistema que modela a propagação de uma frente de combustão em um meio poroso com duas camadas. O modelo proposto por Schecter e Mota em [7] foi estudado com vista à obtenção de soluções do tipo onda viajante. Em seguida Santos e Mota em [6] provaram a existência de solução global para o problema de Cauchy associado a esse sistema, mas com a condição de que as funções de concentração fossem conhecidas. Neste trabalho abordamos o problema sem a hipótese de concentração conhecida. Em linhas gerais, fazemos inicialmente uma breve apresentação do modelo, provamos a existência de solução local e, em seguida, a existência de solução global.

3.1 O modelo

Em um meio poroso unidimensional são consideradas duas camadas paralelas. Cada camada contém uma concentração de combustível inicial. Como é de costume denotamos por $x \in \mathbb{R}$ a variável espacial, enquanto que $t > 0$ denota a variável temporal. O sistema, formado por equações parabólicas não lineares acopladas a equações diferenciais ordinárias, é deduzido a partir das Leis de conservação, da Lei de Darcy e de uma versão da Lei de Arrhenius que descreve a taxa de consumo de combustível na reação química. O modelo leva em conta a transferência de calor entre as camadas e impõe a hipótese de incompressibilidade do fluido. Denotamos por $u_i = u_i(x, t)$ e $y_i = y_i(x, t)$, $i = 1, 2$, a temperatura e concentração de combustível em cada camada. Nessas condições o sistema obtido em [7] é dado por

$$\begin{cases} ((a_i + b_i y_i) u_i)_t + c_i (u_i)_x = d_i y_i f(u_i) + (-1)^i q (u_1 - u_2) + \lambda_i (u_i)_{xx}, \\ (y_i)_t = -A_i y_i f(u_i), \end{cases} \quad (3.1.1)$$

sendo $t > 0$, $0 < x < \ell$, $a_i, b_i, c_i, d_i, A_i, \lambda_i, q$, $i = 1, 2$, são constantes positivas,

$$f(u) = \begin{cases} e^{-\frac{E}{u}}, & \text{se } u > 0 \\ 0, & \text{se } u \leq 0 \end{cases}, \quad (3.1.2)$$

e E uma constante positiva.

Dentre as constantes que aparecem no modelo destacamos a constante q : o coeficiente de transferência de calor entre as camadas. Em [7], resultados sobre a existência de solução do tipo onda viajante foram obtidos tanto para q suficientemente grande quanto para q suficientemente pequeno.

O problema de Cauchy para o Sistema (3.1.1) é escrito da forma

$$\begin{cases} (u_i)_t - \frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i} (u_i)_{xx} + \frac{c_i}{a_i + b_i y_i} (u_i)_x = \frac{b_i A_i u_i + d_i}{a_i + b_i y_i} y_i f(u_i) + (-1)^i q \frac{u_1 - u_2}{a_i + b_i y_i}, \\ (y_i)_t = -A_i y_i f(u_i), \\ (u_i(x, 0), y_i(x, 0)) = (u_{i,0}(x), y_{i,0}(x)). \end{cases} \quad (3.1.3)$$

A análise desse problema é o nosso principal objetivo.

3.2 Solução local

Nesta seção provamos a existência de solução local para o problema (3.1.3). Seja $A(u_1, u_2) = (w_1, w_2)$, onde (w_1, w_2) é a solução do problema

$$\begin{cases} L_{[v(u_i)]}(w_i) = F_i(u_1, u_2, y_i), & \text{em } \mathbb{R} \times (0, T], \\ (y_i)_t = -A_i y_i f(u_i), & \text{em } \mathbb{R} \times (0, T], \\ (w_i(x, 0), y_i(x, 0)) = (u_{i,0}(x), y_{i,0}(x)), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

com $u_{i,0}$ e $y_{i,0} \geq 0$ sendo funções lipschitzianas e limitadas, $f(u)$ definida em (3.1.2), $y_i(u_i) = y_{i,0}(x) e^{-A_i \int_0^t f(u_i(x,s)) ds}$ (obtida resolvendo a segunda equação em (3.2.1)), $v_i(u_i) = \left(\frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i(u_i)}, \frac{c_i}{a_i + b_i y_i(u_i)}, 0 \right)$ e $F_i(u_1, u_2, y_i) = \frac{b_i A_i u_i + d_i}{a_i + b_i y_i} y_i f(u_i) + (-1)^i q \frac{u_1 - u_2}{a_i + b_i y_i}$. Observe que dado (u_1, u_2) , tanto os coeficientes de $L_{[v(u_i)]}$ quanto $F_i(u_1, u_2, y_i)$ ficam determinados. Assim, w_i é obtida como a solução do problema de Cauchy para uma equação linear.

O lema a seguir mostra que o operador A deixa uma bola invariante no espaço das funções Hölder contínuas, desde que T seja suficientemente pequeno.

Lema 3.2.1. Sejam $0 < T \leq 1$, $R_i = \frac{\lambda_i + c_i}{a_i} \left(1 + \frac{2b_i}{a_i} \|y_{i,0}\|_1 \right)$, $K(R_i, \frac{\lambda_i}{a_i + b_i \|y_{i,0}\|_\infty}, T, \|u_{i,0}\|_1)$ a constante dada no Corolário 2.2.2, $K_i = \sup_{0 \leq T \leq 1} K(R_i, \frac{\lambda_i}{a_i + b_i \|y_{i,0}\|_\infty}, T, \|u_{i,0}\|_1)$, $M_i > K_i \|u_{i,0}\|_1$ e $\Sigma = \{(u_1, u_2) \in (C_{1, \frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T]))^2 : \|u_i\|_{1, \frac{1}{2}} \leq M_i\}$, $i = 1, 2$. Nestas condições o operador $A : \Sigma \rightarrow \Sigma$ está bem definido desde que T seja suficientemente pequeno.

Demonstração. Inicialmente observamos que dado $(u_1, u_2) \in \Sigma$ podemos obter $y_i(u_i)$ explicitamente resolvendo $(y_i)_t = -A_i y_i f(u_i)$. Segue que

$$y_i(x, t) = y_{i,0}(x) e^{-A_i \int_0^t f(u_i(x,s)) ds} \quad (3.2.2)$$

e, portanto, $0 \leq y_i \leq \|y_{i,0}\|_\infty$, $i = 1, 2$.

Calculando a norma de Hölder de y_i , obtemos

$$\begin{aligned}
 \|y_i\|_{1, \frac{1}{2}} &\leq \|y_{i,0}\|_1 \left\| e^{-A_i \int_0^t f(u_i(x,s)) ds} \right\|_{1, \frac{1}{2}} & (3.2.3) \\
 &= \|y_{i,0}\|_1 \left(\sup_{(x,t) \in \Omega_T} \left(e^{-A_i \int_0^t f(u_i(x,s)) ds} \right) + \sup_{(x,t), (\bar{x}, \bar{t}) \in \Omega_T} \left(\frac{|e^{-A_i \int_0^t f(u_i(x,s)) ds} - e^{-A_i \int_0^{\bar{t}} f(u_i(\bar{x},s)) ds}|}{|x - \bar{x}| + |t - \bar{t}|^{\frac{1}{2}}} \right) \right) \\
 &\leq \|y_{i,0}\|_1 \left(1 + \sup_{(x,t), (\bar{x}, \bar{t}) \in \Omega_T} \left(\frac{|e^{-A_i \int_0^t f(u_i(x,s)) ds} - e^{-A_i \int_0^{\bar{t}} f(u_i(\bar{x},s)) ds}|}{|x - \bar{x}|} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sup_{(x,t), (\bar{x}, \bar{t}) \in \Omega_T} \left(\frac{|e^{-A_i \int_0^t f(u_i(\bar{x},s)) ds} - e^{-A_i \int_0^{\bar{t}} f(u_i(\bar{x},s)) ds}|}{|t - \bar{t}|^{\frac{1}{2}}} \right) \right) \\
 &\leq \|y_{i,0}\|_1 \left(1 + \sup_{(x,t), (\bar{x}, \bar{t}) \in \Omega_T} \left(A_i \int_0^t \frac{|f(u_i(x,s)) - f(u_i(\bar{x},s))|}{|x - \bar{x}|} ds \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sup_{(x,t), (\bar{x}, \bar{t}) \in \Omega_T} \left(\frac{A_i \int_0^{\bar{t}} |f(u_i(\bar{x},s))| ds}{|t - \bar{t}|^{\frac{1}{2}}} \right) \right) \\
 &\leq \|y_{i,0}\|_1 \left(1 + \sup_{(x,t), (\bar{x}, \bar{t}) \in \Omega_T} \left(A_i \int_0^t \|f'\|_{\infty} \|u_i\|_{1, \frac{1}{2}} ds \right) + \sup_{(x,t), (\bar{x}, \bar{t}) \in \Omega_T} \left(A_i \|f\|_{\infty} |t - \bar{t}|^{\frac{1}{2}} \right) \right) \\
 &\leq \|y_{i,0}\|_1 (1 + T A_i \|u_i\|_{1, \frac{1}{2}} \|f'\|_{\infty} + T^{\frac{1}{2}} A_i) \\
 &\leq \|y_{i,0}\|_1 (1 + T A_i M_i \|f'\|_{\infty} + T^{\frac{1}{2}} A_i) \leq 2 \|y_{i,0}\|_1,
 \end{aligned}$$

desde que $T^{\frac{1}{2}} + T A_i M_i \|f'\|_{\infty} \leq 1$.

Além disso, $v_i(u_i) \in B\left(R_i, \frac{\lambda_i}{a_i + b_i \|y_{i,0}\|_{\infty}}, 1\right)$ (v. Definição 2.1.1). De fato,

como $v_i(u_i) = \left(\frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i(u_i)}, \frac{c_i}{a_i + b_i y_i(u_i)}, 0\right)$, temos

$$\begin{aligned}
 \left\| \frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i(u_i)} \right\|_{1, \frac{1}{2}} &= \sup_{(x,t) \in \Omega_T} \left| \frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i(u_i)} \right| + \sup_{(x,t), (\bar{x}, \bar{t}) \in \Omega_T} \frac{\left| \frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i(u_i(x,t))} - \frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i(u_i(\bar{x}, \bar{t}))} \right|}{|x - \bar{x}| + |t - \bar{t}|^{\frac{1}{2}}} \\
 &\leq \frac{\lambda_i}{a_i} + \frac{b_i \lambda_i}{a_i^2} \left(\sup_{(x,t), (\bar{x}, \bar{t}) \in \Omega_T} \frac{|y_i(u_i(x,t)) - y_i(u_i(\bar{x}, \bar{t}))|}{|x - \bar{x}| + |t - \bar{t}|^{\frac{1}{2}}} \right) \\
 &\leq \frac{\lambda_i}{a_i} + \frac{b_i \lambda_i}{a_i^2} \|y_i\|_{1, \frac{1}{2}} \leq \frac{\lambda_i}{a_i} + \frac{2b_i \lambda_i \|y_{i,0}\|_1}{a_i^2},
 \end{aligned}$$

onde usamos a estimativa (3.2.3).

De maneira análoga, podemos verificar que $\left\| \frac{c_i}{a_i + b_i y_i(u_i)} \right\|_{1, \frac{1}{2}} \leq \frac{c_i}{a_i} + \frac{2b_i c_i \|y_{i,0}\|_1}{a_i^2}$ e, portanto,

$$\left\| \frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i(u_i)} \right\|_{1, \frac{1}{2}} + \left\| \frac{c_i}{a_i + b_i y_i(u_i)} \right\|_{1, \frac{1}{2}} \leq \frac{\lambda_i + c_i}{a_i} \left(1 + \frac{2b_i \|y_{i,0}\|_1}{a_i} \right) = R_i$$

Somando-se a essas observações o fato de que $0 < \frac{\lambda_i}{a_i + b_i \|y_{i,0}\|_\infty} \leq \frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i(u_i)}$, concluímos que $v_i(u_i) \in B\left(R_i, \frac{\lambda_i}{a_i + b_i \|y_{i,0}\|_\infty}, 1\right)$.

Com as observações acima, segue do Teorema 1.1.2 que o problema

$$\begin{cases} L_{[v_i(u_i)]}(w_i) = F_i(u_1, u_2, y_i), & \text{em } \mathbb{R} \times (0, T], \\ w_i(x, 0) = u_{i,0}(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.2.4)$$

possui solução única no espaço das funções $C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R} \times [0, T])$ com crescimento no máximo exponencial no infinito.

Aplicando o Corolário 2.2.2, temos

$$\begin{aligned} \|w_i\|_{1, \frac{1}{2}} &\leq K\left(R_i, \frac{\lambda_i}{a_i + b_i \|y_{i,0}\|_\infty}, T, \|u_{i,0}\|_1\right) \left[\|u_{i,0}\|_1 + T^{\frac{1}{2}}(\|F_i(u_1, u_2, y_i)\|_{1, \frac{1}{2}} + 1)\|F_i(u_1, u_2, y_i)\|_{1, \frac{1}{2}}\right] \\ &\leq K_i \left[\|u_{i,0}\|_1 + T^{\frac{1}{2}}(\|F_i(u_1, u_2, y_i)\|_{1, \frac{1}{2}} + 1)\|F_i(u_1, u_2, y_i)\|_{1, \frac{1}{2}}\right] \\ &\leq K_i[\|u_{i,0}\|_1 + T^{\frac{1}{2}}\bar{K}(M_1, M_2, \|y_{i,0}\|_1)] \leq M_i, \end{aligned}$$

desde que T seja suficientemente pequeno. □

Teorema 3.2.2. Se T é suficientemente pequeno então o problema (3.1.3), para $u_{i,0}, y_{i,0}$ positivas, limitadas e lipschitzianas, possui uma solução $(u_1, u_2, y_1(u_1), y_2(u_2))$, com $u_i \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, T]) \cap C_{1, \frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T])$, $i = 1, 2$.

Demonstração. Sejam Σ , o conjunto definido no Lema 3.2.1, e $A : \Sigma \rightarrow \Sigma$ o operador definido em (3.2.1). Dado $(w_1, w_2) \in \Sigma$ consideramos a sequência $(w_1^{(n)}, w_2^{(n)})$ definida por, $(w_1^{(n)}, w_2^{(n)}) = A(w_1^{(n-1)}, w_2^{(n-1)})$ e $(w_1^{(1)}, w_2^{(1)}) = (w_1, w_2)$.

Para T suficientemente pequeno, segue do Lema 3.2.1 que $(w_1^{(n)}, w_2^{(n)}) \in \Sigma$, para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $\|w_i^{(n)}\|_{1, \frac{1}{2}} \leq M_i$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde M_i é a constante definida no Lema 3.2.1. Do Teorema de Arzelà-Ascoli (v. [8, p. 635]), existe (u_1, u_2) contínua em $\mathbb{R} \times [0, T]$ e subsequência $(w_1^{(n)}, w_2^{(n)})$ tal que $(w_1^{(n)}, w_2^{(n)})$ converge para (u_1, u_2) uniformemente em compactos.

Em virtude do Teorema 1.1.2 podemos escrever

$$w_i^{(n+1)}(x, t) = \quad (3.2.5)$$

$$\int \Gamma_{[v_i(w_i^{(n)})]}(x, \xi, t, 0) u_{i,0}(\xi) d\xi + \int_0^t \int \Gamma_{[v_i(w_i^{(n)})]}(x, \xi, t, \tau) F_i(w_1^{(n)}, w_2^{(n)}, y_i(w_i^{(n)}))(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

com

$$v_i(w_i^{(n)}) = \left(\frac{\lambda_i}{a_i + y_i(w_i^{(n)})}, \frac{c_i}{a_i + y_i(w_i^{(n)})}, 0 \right) \quad (3.2.6)$$

e

$$y_i(w_i^{(n)})(x, t) = y_{i,0}(x) e^{-A_i \int_0^t f(w_i^{(n)}(x, s)) ds}. \quad (3.2.7)$$

Como $w_i^{(n)}$ converge para u_i , $i = 1, 2$, temos que $y_i(w_i^{(n)})$, $v_i(w_i^{(n)})$ e $F_i(w_1^{(n)}, w_2^{(n)}, y_i(w_i^{(n)}))$ convergem para $y_i(u_i)$, $v_i(u_i)$ e $F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))$, respectivamente. Tal convergência é uniforme em

compactos, tendo em vista que $w_i^{(n)}$ converge desta maneira e que f' é limitada em \mathbb{R} e ∇F_i é limitado em $[0, M_1] \times [0, M_2] \times [0, \|y_{i,0}\|_\infty]$. Além disso, como $\|w_i^{(n)}\|_{1, \frac{1}{2}} \leq M_i$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\|u_i\|_{1, \frac{1}{2}} \leq M_i$ e portanto, $v_i(w_i^{(n)}), v_i(u_i) \in B\left(R_i, \frac{\lambda_i}{a_i + b_i \|y_{i,0}\|_\infty}, 1\right)$, $i = 1, 2$ (v. Definição 2.1.1).

Aplicando o Lema 2.1.6, temos que $\Gamma_{[v_i(w_i^{(n)})]}$ converge pontualmente para $\Gamma_{[v_i(u_i)]}$.

Como $|\Gamma_{[v_i(w_i^{(n)})]}(x, \xi, t, 0)u_{i,0}(\xi)| \leq \frac{K}{t^{\frac{1}{2}}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t}}$

e

$|\Gamma_{[v_i(w_i^{(n)})]}(x, \xi, t, \tau)F_i(w_1^{(n)}, w_2^{(n)}, y_i(w_i^{(n)}))(\xi, \tau)| \leq \frac{K}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}$,

sendo K e C constantes independentes de n , segue então, pelo Teorema da Convergência Dominada, que

$$u_i(x, t) = \int \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, 0)u_{i,0}(\xi)d\xi + \int_0^t \int \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, \tau)F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau)d\xi d\tau. \quad (3.2.8)$$

Tendo em vista o Teorema 1.1.2, segue que $(u_1, u_2, y_1(u_1), y_2(u_2))$ é solução do sistema (3.1.3), com $u_i \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, T]) \cap C_{1, \frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T])$, $i = 1, 2$. \square

Isso conclui a demonstração da existência de solução local do sistema (3.1.3) em $C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, T]) \cap C_{1, \frac{1}{2}}(\Omega_T)$. Com vista à obter solução global vamos exigir que $u_{i,0} \in L^p$, para algum $p \in (1, \infty)$. Neste caso, demonstramos que existe T , possivelmente menor do que aquele já obtido, para o qual u_i , $i = 1, 2$, pertence a $L^\infty((0, T); L^p(\mathbb{R}))$, isto é, $u_i(\cdot, t) \in L^p(\mathbb{R})$ para todo $t \in [0, T]$ e o $\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} < \infty$ (Notamos que aqui “para todo $t \in [0, T]$ ” é equivalente a “para todo $t \in (0, \bar{T})$ ”, visto que u é uma função contínua).

Lema 3.2.3. Sejam $T > 0$ e $\Sigma \subset (C_{1, \frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T]))^2$, como no Lema 3.2.1, $p \in (1, \infty)$ e A o operador definido em (3.2.1). Se $(u_1, u_2) \in \Sigma$, $(u_{1,0}, u_{2,0}), (u_1(\cdot, t), u_2(\cdot, t)) \in (L^p(\mathbb{R}))^2$, para todo $t \in [0, T]$, e $A(u_1, u_2) = (w_1, w_2)$, então $(w_1(\cdot, t), w_2(\cdot, t)) \in (L^p(\mathbb{R}))^2$, para todo $t \in [0, T]$. Além disso, existem $\bar{T} \leq T$ e R , positivos, tais que se $\|u_i(\cdot, t)\|_{L^p} \leq R$, para todo $t \in [0, \bar{T}]$ então $\|w_i(\cdot, t)\|_{L^p} \leq R$, para todo $t \in [0, \bar{T}]$.

Demonstração. Como em (3.2.5) podemos escrever

$$w_i(x, t) = \int \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, 0)u_{i,0}(\xi)d\xi + \int_0^t \int \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, \tau)F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))d\xi d\tau.$$

Decorre do Corolário 1.2.3 que, fixados $t > \tau$, $\int \Gamma u_{i,0}d\xi$ e $\int \Gamma F_i(u_1, u_2)d\xi$ pertencem a $L^p(\mathbb{R})$, onde abreviamos a notação escrevendo $\Gamma = \Gamma_{[v_i(u_i)]}$ e $F_i(u_1, u_2) = F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))$.

Do Corolário 1.2.4 segue que $\int_0^t \int \Gamma F_i(u_1, u_2)d\xi d\tau$ pertence a $L^p(\mathbb{R})$, para todo $t \in [0, T]$. Isso conclui a demonstração da primeira parte do lema.

Para demonstrar a segunda parte do lema observamos que

$$\Gamma(x, \xi, t, \tau) \leq \frac{K}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}},$$

sendo $K = K(T)$, contínua em T (v. (1.1.13)). Denotamos por $\bar{K} = \sup_{0 \leq \bar{T} \leq T} K(\bar{T})$. Segue que

$$\int \Gamma(x, \xi, t, \tau)dx \leq \int \frac{\bar{K}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} dx \leq \bar{\bar{K}},$$

e

$$\int \Gamma(x, \xi, t, \tau) d\xi \leq \int \frac{\bar{K}}{(t - \tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-C \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}} d\xi \leq \bar{K},$$

sendo \bar{K} uma constante positiva que não depende de \bar{T} . Vamos tomar $R > \bar{K} \max_{i=1,2} \{\|u_{i,0}\|_{L^p}\}$. Usaremos o símbolo $\nabla_u F_i$ para representar o gradiente de F_i nas duas primeiras coordenadas e $\|\nabla_u F_i\|_\infty = \sup_{[0, M_1] \times [0, M_2] \times [0, \|y_{i,0}\|_\infty]} |\nabla_u F_i(u_1, u_2, y_i)|$, já que $(u_1, u_2) \in \Sigma$ e $0 \leq y_i \leq \|y_{i,0}\|_\infty$. Tomamos então $M = \max_{i=1,2} \{\|\nabla F_i\|_\infty\}$. Deste modo, aplicando os Teoremas 1.2.1 e 1.2.2, temos que

$$\begin{aligned} \|w_i(\cdot, t)\|_{L^p} &\leq & (3.2.9) \\ &\leq \left\| \int \Gamma(\cdot, \xi, t, 0) u_{i,0}(\xi) d\xi \right\|_{L^p} + \left\| \int_0^t \int \Gamma(\cdot, \xi, t, \tau) F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau) d\xi d\tau \right\|_{L^p} \\ &\leq \left\| \int \Gamma(\cdot, \xi, t, 0) u_{i,0}(\xi) d\xi \right\|_{L^p} + \int_0^t \left\| \int \Gamma(\cdot, \xi, t, \tau) F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau) d\xi \right\|_{L^p} d\tau \\ &\leq \bar{K} \|u_{i,0}\|_{L^p} + \bar{K} \int_0^t \|F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\cdot, \tau)\|_{L^p} d\tau \\ &\leq \bar{K} \|u_{i,0}\|_{L^p} + \bar{K} \int_0^t \|(F_i(u_1, u_2, y_i(u_i)) - F_i(0, 0, y_i(u_i)))(\cdot, \tau)\|_{L^p} d\tau \\ &\leq \bar{K} \|u_{i,0}\|_{L^p} + \bar{K} \int_0^t \|(\nabla_u F_i)(u_1, u_2)(\cdot, \tau)\|_{L^p} d\tau \\ &\leq \bar{K} \|u_{i,0}\|_{L^p} + \bar{K} M \int_0^t (\|u_1(\cdot, \tau)\|_{L^p} + \|u_2(\cdot, \tau)\|_{L^p}) d\tau \\ &\leq \bar{K} \|u_{i,0}\|_{L^p} + \bar{K} M 2 R \bar{T} \leq R, \end{aligned}$$

desde que \bar{T} seja suficientemente pequeno. □

Lema 3.2.4. Nas condições e notações do Lema 3.2.3, se u_i , $i = 1, 2$, são as funções obtidas no Teorema 3.2.2, então $\|u_i(\cdot, t)\|_{L^p} < R$, para todo $t \in [0, T]$, $i = 1, 2$ (diminuindo T se necessário).

Demonstração. Para $i = 1, 2$, seja u_i^n a subsequência obtida na demonstração do Teorema 3.2.2, a qual converge a u_i uniformemente em compactos. Do Lema 3.2.3 temos que $\|u_i^n\|_{L^\infty((0, T); L^p(\mathbb{R}))} \leq R$ e portanto, pelo Teorema de Banach-Alaoglu (v. [2, p. 130]), existe $\bar{u}_i \in L^\infty((0, T); L^p(\mathbb{R}))$ e uma subsequência u_i^n tal que $u_i^n \rightharpoonup \bar{u}_i$. Como u_i^n converge pontualmente para u_i temos que $u_i = \bar{u}_i$ e portanto $\|u_i(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq R$, para todo $t \in [0, T]$ (notando que u_i é contínua, logo, $\|u_i\|_{L^\infty((0, T); L^p(\mathbb{R}))} \leq R$ é equivalente a $\|u_i(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq R$ para todo $t \in [0, T]$). □

3.3 Solução global

O objetivo desta seção é mostrar a existência de uma solução **global** para o problema (3.1.3). Mais precisamente, sob a condição de que os dados iniciais $u_{i,0}$, $i = 1, 2$, sejam funções lipschitzianas, limitadas, não-negativas e pertencentes a algum espaço L^p , $1 < p < \infty$, e $y_{i,0} \in C^2$, $i = 1, 2$, com $y_{i,0}$ e $y'_{i,0}$ limitadas, mostraremos que o problema possui uma solução $U = (u_1, u_2)$ no espaço $X := (C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, \infty)))^2 \cap (C_{1, \frac{1}{2}, \text{loc}}(\mathbb{R} \times [0, \infty)))^2 \cap (L_{\text{loc}}^\infty((0, \infty); L^p(\mathbb{R})))^2$, satisfazendo a condição

$0 \leq u_i(x, t) \leq \varphi(t)$, $i = 1, 2$, para todo $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, onde $\varphi(t) = (\|u_{1,0}\|_\infty + \|u_{2,0}\|_\infty + \beta)e^{\alpha t} - \beta$, sendo $\alpha = \max_{i=1,2} \left\{ \frac{A_i b_i \|y_{i,0}\|_\infty}{a_i} \right\}$ e $\beta = \max_{i=1,2} \left\{ \frac{d_i}{A_i b_i} \right\}$. A expressão “loc” na notação acima quer dizer localmente em relação ao tempo, ou seja, $U|[0, T]$ pertence ao espaço X_T , sendo $X_T := (C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, T]))^2 \cap (C_{1, \frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T]))^2 \cap (L^\infty((0, T); L^p(\mathbb{R})))^2$, para qualquer $T \in (0, \infty)$.

Um cálculo direto mostra que as funções $\hat{U} := (0, 0)$ e $\tilde{U} := (\varphi(t), \varphi(t))$ (φ definida acima) constituem um par de sub e supersolução do sistema parabólico em (3.1.3), para quaisquer funções y_i , Hölder contínuas, limitadas e não-negativas, em qualquer domínio $\mathbb{R} \times [0, T]$ em que estas funções estejam definidas [6]. Aplicando o Teorema 1.4.5, mostramos que a solução dada no Teorema 3.2.2 pertence ao setor $\langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_T$, sendo $T > 0$ o mesmo obtido no Teorema 3.2.2, e $\langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_{T^*} \subset \langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle$ (v. Definição 1.4.4). Mais precisamente, obtemos o seguinte teorema

Teorema 3.3.1. Sejam $u_{i,0}$, $y_{i,0}$ limitadas, lipschitzianas, não negativas, $T > 0$ e (u_1, u_2, y_1, y_2) , com $u_i \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, T]) \cap C_{1, \frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T])$, $i = 1, 2$, a solução do problema (3.1.3) obtida no Teorema 3.2.2. Então, $U = (u_1, u_2) \in \langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_T$, onde \hat{U} e \tilde{U} são as funções definidas acima.

Demonstração. Seja (u_1, u_2, y_1, y_2) a solução dada no Teorema 3.2.2 em $C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, T]) \cap C_{1, \frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T])$. Consideremos o problema dado por

$$\begin{cases} L_{[v(u_i)]}(w_i) = F_i(w_1, w_2, y_i), & \text{em } \mathbb{R} \times (0, T], \\ w_i(x, 0) = u_{i,0}(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Tomemos $M = M_1 + M_2$, sendo M_i , $i=1,2$, as constantes definidas no Lema 3.2.1, $\alpha = \max_{i=1,2} \left\{ \frac{A_i b_i \|y_{i,0}\|_\infty}{a_i} \right\}$ e $\beta = \max_{i=1,2} \left\{ \frac{d_i}{A_i b_i} \right\}$. Nessas condições $\hat{V} = (-M, -M)$ e $\tilde{V} = (\phi(t), \phi(t))$, com $\phi(t) = (M + \beta)e^{\alpha t} - \beta$, formam um par ordenado de sub e supersoluções para o sistema (3.3.1). Como (u_1, u_2) é solução do sistema (3.3.1) em $C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, T]) \cap C_{1, \frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T])$, $\hat{V} \leq (u_1, u_2) \leq \tilde{V}$ e $F = (F_1, F_2)$ é quase monótona não decrescente, segue do Teorema 1.4.5, que $U = (u_1, u_2)$ é a única solução do sistema (3.3.1) no setor $\langle \hat{V}, \tilde{V} \rangle_T$. Por outro lado, \hat{U} e \tilde{U} também formam um par ordenado de sub e supersoluções do sistema (3.3.1). Então, o Teorema 1.4.5 garante também a existência de uma solução no setor $\langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_T$. Como o setor $\langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_T \subset \langle \hat{V}, \tilde{V} \rangle_T$ e temos unicidade nesse setor maior, concluímos que $U \in \langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_T$. \square

Seja $[0, T^*)$, $0 < T^* \leq \infty$, um intervalo máximo no qual existe uma solução U^* em $X_{T^*} \cap \langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_{T^*}$, ou seja, se U é uma solução de (3.1.3) em $X_T \cap \langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_T$ com $T \geq T^*$ que coincide com U^* em $[0, T^*)$ então $T = T^*$. (A existência de T^* pode ser obtida da forma padrão usando o Lema de Zorn: ordenamos o conjunto dos pares $(U, X_T \cap \langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_T)$, em que $U \in X_T \cap \langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_T$ é solução de (3.1.3), $T > 0$, pela relação $(U, X_T \cap \langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_T) \leq (U', X_{T'} \cap \langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_{T'})$ se $T \leq T'$ e U' restrita a $[0, T]$ coincide com U . Todo subconjunto \mathcal{C} desse conjunto que seja totalmente ordenado tem a cota superior $(\bar{U}, X_{\bar{T}} \cap \langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_{\bar{T}})$, onde o intervalo $[0, \bar{T}]$ é a união dos intervalos $[0, T]$ tais que $(U, X_T \cap \langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_T) \in \mathcal{C}$ e $\bar{U}|[0, T] := U$, qualquer que seja $(U, X_T \cap \langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_T) \in \mathcal{C}$. Então, pelo Lema de Zorn, o conjunto de todos os pares acima $(U, X_T \cap \langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_T)$ tem um elemento máximo, ou seja, existe um par $(U^*, X_{T^*} \cap \langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_{T^*})$ tal que se $(U, X_T \cap \langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_T)$ é outro par tal que $(U, X_T \cap \langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_T) \geq (U^*, X_{T^*} \cap \langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_{T^*})$ então $(U, X_T \cap \langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_T) \leq (U^*, X_{T^*} \cap \langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_{T^*})$, i.e. $T \leq T^*$ e $U|[0, T^*) = U^*$.) O conteúdo dessa seção consiste em

mostrar que $T^* = \infty$, qualquer que seja o intervalo máximo $[0, T^*)$. Faremos isso (como usual) supondo que $T^* < \infty$ e obtendo uma contradição.

A estrutura de nossa demonstração é a seguinte: inicialmente provamos que as soluções fundamentais para as equações parabólicas que aparecem em (3.1.3) existem em $\mathbb{R} \times [0, T^*]$, verificando que os coeficientes de tais equações pertencem a $C_{1, \frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T^*])$; em seguida, fazemos uso da fórmula (3.2.8) para obter a regularidade da solução em T^* . No que se segue denotamos por U , (u_1, u_2) ou (u_1, u_2, y_1, y_2) uma solução máxima do sistema (3.1.3), i.e. uma solução do sistema (3.1.3) em X_{T^*} onde $[0, T^*)$ é um intervalo máximo, i.e. com T^* definido acima.

Começemos mostrando a limitação da solução.

Corolário 3.3.2. A solução máxima é limitada, i.e. existe uma constante $K(T^*)$ tal que $|u_i(x, t)| \leq K(T^*)$ para todo $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T^*)$, $i = 1, 2$.

Demonstração. Da definição da solução máxima, temos que $U \in \langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_{T^*}$. Portanto, $0 \leq u_i \leq \varphi(t) \leq \varphi(T^*)$, $i = 1, 2$. \square

Lema 3.3.3. Sejam $0 < T < T^*$, (u_1, u_2, y_1, y_2) solução do problema (3.1.3), com $u_i \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, T]) \cap C_{1, \frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T]) \cap L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R}))$, e p, q expoentes conjugados, com $1 < p < \infty$. Então dado $t \in (0, T]$ temos que $\partial_x u_i(\cdot, t) \in C_0(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$. Além disso, se $y_{i,0} \in C^2$, $i = 1, 2$, então $\partial_x^3 u_i$ e $\partial_t \partial_x u_i$ existem em $\mathbb{R} \times (0, T]$.

Demonstração. Para provar a primeira parte, fixamos $t \in (0, T]$ e, usando (3.2.8), escrevemos

$$\partial_x u_i(x, t) = \int \partial_x \Gamma(x, \xi, t, 0) u_{i,0}(\xi) d\xi + \int_0^t \int \partial_x \Gamma(x, \xi, t, \tau) F_i(\xi, \tau) d\xi d\tau := V(x, t) + W(x, t).$$

Agora observamos que

$$0 \leq |V(x, t)| = \left| \int \partial_x \Gamma(x, \xi, t, 0) u_{i,0}(\xi) d\xi \right| \leq \int \frac{K}{t} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t}} u_{i,0}(\xi) d\xi.$$

Tendo em vista que $u_{i,0} \in L^p$, com $1 < p < \infty$ e $e^{-C \frac{(\cdot)^2}{t}} \in L^q$, sendo q o expoente conjugado de p , decorre do Teorema 1.2.5 que $V(\cdot, t)$ pertence a $C_0(\mathbb{R})$.

Fixando também τ , com $\tau < t$, o mesmo argumento acima prova que $G(\cdot, t, \tau) \in C_0(\mathbb{R})$, onde $G(x, t, \tau) = \int \partial_x \Gamma(x, \xi, t, \tau) F_i(\xi, \tau) d\xi$. Tendo em vista que $|G(x, t, \tau)| \leq \frac{K}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}$ e que esta última função é integrável em $[0, t]$, segue do Teorema da Convergência Dominada que $W(\cdot, t) \in C_0(\mathbb{R})$.

Para provar a segunda parte, observamos que, fixado T , $u_i \in C_{1, \frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T])$ e $w_i = u_i$ satisfaz a equação parabólica $L_{[v(u_i)]}(w_i) = F_i(u_1, u_2, y_i)$ em $\mathbb{R} \times (0, T]$. Tendo em vista que os coeficientes da equação acima e F_i são funções Hölder contínuas, decorre do Teorema 1.3.1 que $\partial_x u_i$ é localmente Hölder contínua. Por outro lado, o fato de $\partial_x u_i$ ser localmente Hölder contínua implica que os coeficientes da equação acima têm derivada com relação a x localmente Hölder contínuas e que $(F_i)_x$ também é localmente Hölder contínua. Então, aplicando novamente o Teorema 1.3.1 obtemos a existência tanto de $\partial_x^3 u_i$ quanto de $\partial_t \partial_x u_i$. \square

Nosso objetivo a seguir é mostrar que existe uma constante K tal que, para todo $T < T^*$, tenhamos $|(u_i)_x| \leq K$ em $\mathbb{R} \times (0, T]$.

Observação 3.3.4. Uma vez fixado $T_1 < T^*$, a existência de uma constante K que limita $\partial_x u_i$ em $\mathbb{R} \times (0, T_1]$ decorre diretamente do fato de $u_i \in C_{1, \frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T_1])$. Assim, é suficiente obter uma limitação para a derivada na faixa $\mathbb{R} \times (T_1, T]$, com $T_1 < T < T^*$, que seja independente de T .

Vale ressaltar que o argumento acima não implica na limitação da derivada em $(0, T^*)$ tendo em vista que $\|u_i\|_{1, \frac{1}{2}}$, em $\mathbb{R} \times [0, T_1]$, poderia tender a infinito quando T_1 se aproxima de T^* .

O lema a seguir estabelece uma limitação para $\partial_x u_i(x, t)$, $i = 1, 2$, para $(x, t) \in [a, b] \times [\epsilon, T]$, onde $-\infty < a < b < \infty$ e $\epsilon > 0$, que independe do intervalo $[a, b]$ e de T , mas isso no caso em que os máximos de $\partial_x u_1(x, t)$ e $\partial_x u_2(x, t)$ ocorrem simultaneamente em $(a, b) \times (\epsilon, T]$ ou o máximo de $\partial_x u_i$ ocorre em $(a, b) \times (\epsilon, T]$ e $\partial_x u_j$ é limitada em $\mathbb{R} \times (0, T^*)$, $i, j = 1, 2$ com $i \neq j$.

Lema 3.3.5. Sejam $0 < T < T^*$, $p \in (0, \infty)$, $u_{i,0} \in L^p$ positiva, limitada e lipschitziana, $y_{i,0} \in C^2$, positiva, com $y_{i,0}$ e $y'_{i,0}$ limitadas, e (u_1, u_2, y_1, y_2) a solução de (3.1.3), com $u_i \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, T] \cap C_{1, \frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T] \cap L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R})))$, $i = 1, 2$. Dados $-\infty < a < b < \infty$ e $0 < \epsilon < T$, se os pontos de máximo de $|\partial_x u_1|$ e $|\partial_x u_2|$ em $[a, b] \times [\epsilon, T]$ ocorrem apenas em $(a, b) \times (\epsilon, T]$ ou se o ponto de máximo de $|\partial_x u_i|$ ocorre apenas em $(a, b) \times (\epsilon, T]$ e $\partial_x u_j$ é limitada em $\mathbb{R} \times (0, T^*)$, onde $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, então existe uma constante K , independente de $[a, b]$ e de T , tal que $|\partial_x u_i(x, t)| \leq K$ em $[a, b] \times [\epsilon, T]$.

Demonstração. Motivados por [17], fazemos a substituição $u_i = h_i(v_i)$, onde $h_i(v_i) = K(T^*) \left(-2 + 3e \int_0^{v_i} e^{-s^{m_i}} ds \right)$, sendo m_i uma constante a ser escolhida, para $i = 1, 2$, e $K(T^*)$ a constante dada no Corolário 3.3.2. Tendo em vista que $0 \leq u_i \leq \varphi(T) < \varphi(T^*)$, a definição acima implica que v_i está bem definida pela equação $u_i = h_i(v_i)$ e, além disso, $\frac{2}{3e} \leq v_i \leq \bar{v} < 1$, quaisquer que sejam os números positivos m_i , $i = 1, 2$. De fato,

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_i \leq \varphi(T) \\ 0 &\leq K(T^*) \left(-2 + 3e \int_0^{v_i} e^{-s^{m_i}} ds \right) \leq \varphi(T) \\ 0 &\leq -2 + 3e \int_0^{v_i} e^{-s^{m_i}} ds \leq \frac{\varphi(T)}{K(T^*)} < 1. \end{aligned}$$

Tomando $\bar{v} = \frac{\frac{\varphi(T)}{K(T^*)} + 2}{3}$, temos

$$-2 + 3e \int_0^{\bar{v}} e^{-s^{m_i}} ds \geq -2 + 3e \int_0^{\bar{v}} e^{-1} ds = \frac{\varphi(T)}{K(T^*)}$$

e portanto, $v_i \leq \bar{v}$. Por outro lado,

$$-2 + 3e \int_0^{\frac{2}{3e}} e^{-s^{m_i}} ds \leq -2 + 3e \int_0^{\frac{2}{3e}} ds = 0.$$

Segue que $\frac{2}{3e} \leq v_i$.

Com essa substituição, temos que v_i satisfaz a seguinte equação

$$(v_i)_t - \left(\frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i} \right) (v_i)_{xx} + \left(\frac{c_i}{a_i + b_i y_i} \right) (v_i)_x - \left(\frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i} \right) \frac{h_i''}{h_i'} (v_i)_x^2 = \frac{F_i(h_1(v_1), h_2(v_2))}{h_i'(v_i)}.$$

Derivando com relação a x , temos

$$(v_i)_{tx} + \frac{\lambda_i b_i (y_i)_x}{(a_i + b_i y_i)^2} (v_i)_{xx} - \frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i} (v_i)_{xxx} - \frac{c_i b_i (y_i)_x}{(a_i + b_i y_i)^2} (v_i)_x + \frac{c_i}{a_i + b_i y_i} (v_i)_{xx} \quad (3.3.2)$$

$$+ \frac{\lambda_i b_i (y_i)_x}{(a_i + b_i y_i)^2} \frac{h_i''}{h_i'} (v_i)_x^2 - \frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i} \left(\frac{h_i''}{h_i'} \right)' (v_i)_x^3 - \frac{2\lambda_i}{a_i + b_i y_i} \frac{h_i''}{h_i'} (v_i)_x (v_i)_{xx} = \left(\frac{F_i(h_1(v_1), h_2(v_2))}{h_i'(v_i)} \right)_x.$$

Tendo em vista que $(v_i)_x$ é contínua em $\mathbb{R} \times (0, T]$, podemos tomar $p_i = \max\{|(v_i)_x|\}$ em $[a, b] \times [\epsilon, T]$. Em virtude da definição de v_i , temos que se o ponto de máximo de $|(u_i)_x|$ em $[a, b] \times [\epsilon, T]$ ocorre apenas em $(a, b) \times (\epsilon, T]$ então o mesmo vale para $\frac{1}{3eK(T^*)} |(u_i)_x|$ e, como consequência, também será verdade para $|(v_i)_x|$. Com efeito,

$|(u_i)_x(x, t)| = 3eK(T^*) e^{-v_i(x, t)^{m_i}} |(v_i)_x(x, t)|$, assim, para todo $(x, t) \in [a, b] \times [\epsilon, T]$, temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{3eK(T^*)} |(u_i)_x(x, t)| - |(v_i)_x(x, t)| \right| &\leq \left| \frac{1}{3eK(T^*)} |(u_i)_x(x, t)| - \frac{e^{v_i(x, t)^{m_i}}}{3eK(T^*)} |(u_i)_x(x, t)| \right| \\ &\leq |1 - e^{v_i(x, t)^{m_i}}| \frac{1}{3eK(T^*)} |(u_i)_x(x, t)| \\ &\leq |1 - e^{\bar{v}^{m_i}}| \frac{1}{3eK(T^*)} \|(u_i)_x\|_\infty, \end{aligned}$$

onde $\|(u_i)_x\|_\infty$ é o máximo de $|(u_i)_x|$ em $[a, b] \times [\epsilon, T]$. Logo, $|(v_i)_x|$ converge para $\frac{1}{3eK(T^*)} |(u_i)_x(x, t)|$, uniformemente em (x, t) , quando m_i tende a infinito. A convergência uniforme juntamente com o fato de o máximo de $|(u_i)_x|$ ocorrer apenas em $(a, b) \times (\epsilon, T]$ garante que o máximo de $|(v_i)_x|$ também ocorrerá apenas em $(a, b) \times (\epsilon, T]$, desde que m_i seja suficientemente grande.

Considerando que os máximos de $|(v_i)_x|$, $i = 1, 2$, em $[a, b] \times [\epsilon, T]$, ocorrem em $(a, b) \times (\epsilon, T]$, temos que existem pontos $(x_i, t_i) \in (a, b) \times (\epsilon, T]$, $i = 1, 2$, tais que $|(v_i)_x(x_i, t_i)| = p_i$, i.e., no ponto de máximo $(x_i, t_i) \in (a, b) \times (\epsilon, T]$, temos $(v_i)_x(x_i, t_i) = \pm p_i$.

Fazemos inicialmente o caso em que $(v_i)_x(x_i, t_i) = p_i$, $i = 1, 2$. No caso em que $p_i = 0$, podemos tomar $K = 0$. Supondo então $p_i > 0$, temos que $(v_i)_{xt}(x_i, t_i) \geq 0$, $(v_i)_{xx}(x_i, t_i) = 0$ e $(v_i)_{xxx}(x_i, t_i) \leq 0$, logo, calculando (3.3.2) em $(x_i, t_i) \in (a, b) \times (\epsilon, T]$, obtemos

$$- \frac{c_i b_i (y_i)_x}{(a_i + b_i y_i)^2} p_i + \frac{\lambda_i b_i (y_i)_x}{(a_i + b_i y_i)^2} \frac{h_i''}{h_i'} p_i^2 - \frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i} \left(\frac{h_i''}{h_i'} \right)' p_i^3 \leq \left(\frac{F_i(h_1(v_1), h_2(v_2))}{h_i'(v_i)} \right)_x. \quad (3.3.3)$$

Da definição da função h_i , temos

$$\begin{aligned} h_i' &= 3eK(T^*) e^{-v^{m_i}}, \\ h_i'' &= -3eK(T^*) m_i v^{m_i-1} e^{-v^{m_i}}, \\ \frac{h_i''}{h_i'} &= -m_i v^{m_i-1}, \\ \left(\frac{h_i''}{h_i'} \right)' &= -m_i(m_i - 1) v^{m_i-2}. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Segue de (3.2.2) que

$$(y_i)_x = y'_{i0}(x) e^{-A_i \int_0^t f(h_i(v_i)) ds} + y_{i0}(x) e^{-A_i \int_0^t f(h_i(v_i)) ds} (-A_i \int_0^t f'(h_i(v_i)) h_i'(v_i) (v_i)_x(x, s) ds), \quad (3.3.5)$$

Logo, no ponto $(x_i, t_i) \in (a, b) \times (\epsilon, T]$, obtemos a estimativa

$$|(y_i)_x| \leq K(1 + 3T^* eK(T^*)p_i) \leq K_1(1 + p_i), \quad (3.3.6)$$

onde a constante K_1 não depende da escolha particular do intervalo $[a, b]$, nem de T .

Da definição de F_i em (3.2.1) segue que

$$F_i(h_1(v_1), h_2(v_2))_x = -\frac{(b_i A_i h_i(v_i) + d_i) y_i f(h_i(v_i)) + (-1)^i q(h_1(v_1) - h_2(v_2))}{(a_i + b_i y_i)^2} b_i (y_i)_x + \\ + \frac{b_i A_i h'_i(v_i)(v_i)_x y_i f(h_i(v_i)) + (b_i A_i h_i(v_i) + d_i)[(y_i)_x f(v_i) + y_i f'(h_i(v_i)) h'_i(v_i)(v_i)_x] + (-1)^i q(h'_1(v_1)(v_1)_x - h'_2(v_2)(v_2)_x)}{a_i + b_i y_i}$$

e portanto

$$|F_i(h_1(v_1), h_2(v_2))_x| \leq K(1 + p_i + p_j), \quad \text{sendo } i \neq j$$

e K independe da escolha particular do intervalo $[a, b]$ e de T .

$$\text{Como } \left(\frac{F_i}{h'_i(v_i)} \right)_x = \frac{(F_i)_x h'_i(v_i) - F_i h''_i(v_i)(v_i)_x}{(h'_i(v_i))^2}, \text{ segue que}$$

$$\left| \left(\frac{F_i}{h'_i(v_i)} \right)_x \right| \leq \frac{|(F_i)_x| |h'_i(v_i)| - |F_i| |h''_i(v_i)| |(v_i)_x|}{(h'_i(v_i))^2} \leq K(1 + p_i + p_j), \quad \text{sendo } i \neq j \quad (3.3.7)$$

Substituindo (3.3.4), (3.3.6) e (3.3.7) em (3.3.3), temos

$$-\frac{c_i b_i K_1 (1 + p_i)}{(a_i + b_i y_i)^2} p_i - \frac{\lambda_i b_i K_1 (1 + p_i) m_i v_i^{m_i - 1}}{(a_i + b_i y_i)^2} p_i^2 + \frac{\lambda_i m_i (m_i - 1) v_i^{m_i - 2}}{a_i + b_i y_i} p_i^3 \leq K(1 + p_i + p_j)$$

ou

$$-\frac{c_i b_i K_1 (1 + p_i)}{(a_i + b_i y_i)^2} p_i - \frac{\lambda_i b_i K_1 m_i v_i^{m_i - 1}}{(a_i + b_i y_i)^2} p_i^2 + \left((m_i - 1) - \frac{b_i v_i K_1}{(a_i + b_i y_i)} \right) \frac{\lambda_i m_i v_i^{m_i - 2}}{(a_i + b_i y_i)} p_i^3 \leq K(1 + p_i + p_j).$$

Como $0 \leq y_i \leq \|y_{i,0}\|_\infty$ e $\frac{2}{3e} \leq v_i \leq 1$, temos que

$$-\frac{c_i b_i K_1 (1 + p_i)}{a_i^2} p_i - \frac{\lambda_i b_i K_1 m_i}{a_i^2} p_i^2 + \left((m_i - 1) - \frac{b_i K_1}{a_i} \right) \frac{\lambda_i m_i v_i^{m_i - 2}}{(a_i + b_i y_i)} p_i^3 \leq K(1 + p_i + p_j).$$

Lembramos que K_1 , na desigualdade (3.3.6), não depende de m_i . Assim, podemos tomar m_i suficientemente grande, de modo que p_1 e p_2 satisfazem

$$\begin{cases} \alpha p_1^3 - \beta p_1^2 - \gamma p_1 - 1 \leq p_2 \\ \bar{\alpha} p_2^3 - \bar{\beta} p_2^2 - \bar{\gamma} p_2 - 1 \leq p_1 \end{cases} \quad (3.3.8)$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$ e $\bar{\gamma}$ são positivos e independem da escolha de $[a, b]$ e T . No primeiro quadrante (i.e. $p_1 \geq 0$ e $p_2 \geq 0$), a região determinada por (3.3.8) é limitada. Portanto existe uma constante $\bar{K}(T^*)$, tal que $0 < p_i \leq \bar{K}(T^*)$.

De modo análogo podemos demonstrar que o mesmo ocorre quando $\partial_x v_1(x_1, t_1) = p_1$ e $\partial_x v_2(x_2, t_2) = -p_2$ ou $\partial_x v_1(x_1, t_1) = -p_1$ e $\partial_x v_2(x_2, t_2) = -p_2$. De fato, suponhamos agora que $\partial_x v_1(x_1, t_1) = p_1$ e $\partial_x v_2(x_2, t_2) = -p_2$. Neste caso, temos que $(v_1)_{xt}(x_1, t_1) \geq 0$, $(v_1)_{xx}(x_1, t_1) = 0$

e $(v_1)_{xxx}(x_1, t_1) \leq 0$. Enquanto que no ponto (x_2, t_2) , temos $(v_2)_{xt}(x_2, t_2) \leq 0$, $(v_2)_{xx}(x_2, t_2) = 0$ e $(v_2)_{xxx}(x_2, t_2) \geq 0$.

Calculando (3.3.2) em (x_i, t_i) , obtemos

$$\begin{cases} -\frac{c_1 b_1 (y_1)_x}{(a_1 + b_1 y_1)^2} p_1 + \frac{\lambda_1 b_1 (y_1)_x}{(a_1 + b_1 y_1)^2} \frac{h_1''}{h_1'} p_1^2 - \frac{\lambda_1}{a_1 + b_1 y_1} \left(\frac{h_1''}{h_1'}\right)' p_1^3 \leq \left(\frac{F_1(h_1(v_1), h_2(v_2))}{h_1'(v_1)}\right)_x \\ \frac{c_2 b_2 (y_2)_x}{(a_2 + b_2 y_2)^2} p_2 + \frac{\lambda_2 b_2 (y_2)_x}{(a_2 + b_2 y_2)^2} \frac{h_2''}{h_2'} p_2^2 + \frac{\lambda_2}{a_2 + b_2 y_2} \left(\frac{h_2''}{h_2'}\right)' p_2^3 \geq \left(\frac{F_2(h_1(v_1), h_2(v_2))}{h_2'(v_2)}\right)_x \end{cases} \quad (3.3.9)$$

$$\begin{cases} -\frac{c_1 b_1 K_1 (1+p_1)}{(a_1 + b_1 y_1)^2} p_1 - \frac{\lambda_1 b_1 K_1 (1+p_1) m_1 v_1^{m_1-1}}{(a_1 + b_1 y_1)^2} p_1^2 + \frac{\lambda_1 m_1 (m_1-1) v_1^{m_1-2}}{a_1 + b_1 y_1} p_1^3 \leq K(1+p_1+p_2) \\ \frac{c_2 b_2 K_1 (1+p_2)}{(a_2 + b_2 y_2)^2} p_2 + \frac{\lambda_2 b_2 K_1 (1+p_2) m_2 v_2^{m_2-1}}{(a_2 + b_2 y_2)^2} p_2^2 - \frac{\lambda_2 m_2 (m_2-1) v_2^{m_2-2}}{a_2 + b_2 y_2} p_2^3 \geq -K(1+p_1+p_2) \end{cases} \quad (3.3.10)$$

Novamente, para m_i suficientemente grande, temos que p_1 e p_2 satisfazem

$$\begin{cases} \alpha p_1^3 - \beta p_1^2 - \gamma p_1 - 1 \leq p_2 \\ \bar{\alpha} p_2^3 - \bar{\beta} p_2^2 - \bar{\gamma} p_2 - 1 \leq p_1 \end{cases} \quad (3.3.11)$$

e, portanto (p_1, p_2) encontra-se numa região limitada do plano.

Finalmente suponha que $(v_1)_x(x_1, t_1) = -p_1$ e $(v_2)_x(x_2, t_2) = -p_2$. Neste caso, em (x_i, t_i) , temos que $(v_i)_{xt}(x_i, t_i) \leq 0$, $(v_i)_{xx}(x_i, t_i) = 0$ e $(v_i)_{xxx}(x_i, t_i) \geq 0$.

Calculando (3.3.2) no ponto (x_i, t_i) , obtemos,

$$\frac{c_i b_i (y_i)_x}{(a_i + b_i y_i)^2} p_i + \frac{\lambda_i b_i (y_i)_x}{(a_i + b_i y_i)^2} \frac{h_i''}{h_i'} p_i^2 + \frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i} \left(\frac{h_i''}{h_i'}\right)' p_i^3 \geq \left(\frac{F_i(h_1(v_1), h_2(v_2))}{h_i'(v_i)}\right)_x \quad (3.3.12)$$

$$\frac{c_i b_i K_1 (1+p_i)}{(a_i + b_i y_i)^2} p_i + \frac{\lambda_i b_i K_1 (1+p_i) m_i v_i^{m_i-1}}{(a_i + b_i y_i)^2} p_i^2 - \frac{\lambda_i m_i (m_i-1) v_i^{m_i-2}}{a_i + b_i y_i} p_i^3 \geq -K(1+p_1+p_2)$$

Novamente, para m_i suficientemente grande, temos

$$\begin{cases} \alpha p_1^3 - \beta p_1^2 - \gamma p_1 - 1 \leq p_2, \\ \bar{\alpha} p_2^3 - \bar{\beta} p_2^2 - \bar{\gamma} p_2 - 1 \leq p_1, \end{cases} \quad (3.3.13)$$

e assim, (p_1, p_2) encontra-se numa região limitada do plano.

Observe que se $\partial_x v_2$ é limitada em $\mathbb{R} \times (0, T^*)$, a primeira desigualdade em (3.3.8) é suficiente para limitar $\partial_x v_1$. Do mesmo modo que se $\partial_x v_1$ é limitada em $\mathbb{R} \times (0, T^*)$, a segunda desigualdade em (3.3.8) é suficiente para limitar $\partial_x v_2$.

Como $(u_i)_x = h_i'(v_i)(v_i)_x$ e h_i' , dada em (3.3.4), é limitada, a limitação de $(v_i)_x$ por uma constante que independa da escolha do intervalo $[a, b]$ e de T nos assegura a limitação $(u_i)_x$, também por uma constante que independe da escolha do intervalo $[a, b]$ e de T . \square

O lema a seguir será usado para justificar a limitação de $\partial_x u_i$ em $\mathbb{R} \times (0, T^*)$.

Lema 3.3.6. Sejam $[\bar{t}, \bar{\bar{t}}] \subset (0, T^*)$ e $\epsilon > 0$. Se (u_1, u_2, y_1, y_2) é a solução de (3.1.3), com $u_i \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, T]) \cap C_{1, \frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T]) \cap L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R}))$, $i = 1, 2$ e $0 < \bar{\bar{t}} \leq T$, então existe um intervalo $[a, b]$ e uma constante $K = K(T)$ tal que $|\partial_x u_i(x, t)| \leq K\epsilon^{\frac{1}{2}}$, para $i = 1, 2$, e para todo $(x, t) \in [a, b]^c \times [\bar{t}, \bar{\bar{t}}]$.

Demonstração. Seja $t \in [\bar{t}, \bar{\bar{t}}]$. Da fórmula de representação da solução, dada em (3.2.8), temos que

$$\begin{aligned} \partial_x u_i(x, t) &= \\ &= \int \partial_x \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, 0) u_{i,0}(\xi) d\xi + \int_0^t \int \partial_x \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, \tau) F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &= \int \partial_x \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, 0) u_{i,0}(\xi) d\xi + \int_0^{t-\epsilon} \int \partial_x \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, \tau) F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &\quad + \int_{t-\epsilon}^t \int \partial_x \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, \tau) F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau) d\xi d\tau \end{aligned}$$

e portanto, usando a estimativa (1.1.13), obtemos

$$\begin{aligned} |\partial_x u_i(x, t)| &\leq \int \frac{K}{t} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t}} |u_{i,0}(\xi)| d\xi + \int_0^{t-\epsilon} \int \frac{K}{t-\tau} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} |F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau)| d\xi d\tau \\ &\quad + \int_{t-\epsilon}^t \int \frac{K}{t-\tau} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} |F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau)| d\xi d\tau \\ &\leq \int \frac{K}{\bar{t}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{\bar{t}}} |u_{i,0}(\xi)| d\xi + \int_0^{t-\epsilon} \int \frac{K}{\epsilon} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{\bar{t}}} |F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau)| d\xi d\tau \\ &\quad + \int_{t-\epsilon}^t \int \frac{K}{t-\tau} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}} |F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau)| d\xi d\tau. \end{aligned}$$

A limitação de u_i dada no Corolário 3.3.2, garante que (u_1, u_2, y_i) , $i = 1, 2$, pertence a uma região limitada em \mathbb{R}^3 . Seja $\|F_i\|_\infty$ o supremo do $|F_i|$, nessa região. Segue que

$$\begin{aligned} |\partial_x u_i(x, t)| &\leq \int \frac{K}{\bar{t}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{\bar{t}}} |u_{i,0}(\xi)| d\xi + \int_0^{\bar{t}} \int \frac{K}{\epsilon} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{\bar{t}}} |F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau)| d\xi d\tau \\ &\quad + K \|F_i\|_\infty \int_{t-\epsilon}^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau \\ &\leq \int \frac{K}{\bar{t}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{\bar{t}}} |u_{i,0}(\xi)| d\xi + \int_0^{\bar{t}} \int \frac{K}{\epsilon} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{\bar{t}}} |F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau)| d\xi d\tau + K \epsilon^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Em virtude do Teorema 1.2.5, as duas integrais que aparecem do lado direito da desigualdade acima pertencem a C_0 e não dependem de $t \in [\bar{t}, \bar{\bar{t}}]$. Dessa forma, tomando $[a, b]$ um intervalo para o qual essas integrais sejam menores que $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ em $[a, b]^c$, teremos $|\partial_x u_i(x, t)| \leq K \epsilon^{\frac{1}{2}}$ para todo $(x, t) \in [a, b]^c \times [\bar{t}, \bar{\bar{t}}]$. A constante K é essencialmente a mesma que aparece na estimativa (1.1.13). \square

Finalmente provamos a limitação de $\partial_x u_i(x, t)$ em $\mathbb{R} \times (0, T^*)$.

Lema 3.3.7. Se (u_1, u_2, y_1, y_2) é solução máxima de (3.1.3) em $X_{T^*} \cap \langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_{T^*}$, então existe uma constante $\bar{K} > 0$, tal que $|\partial_x u_i(x, t)| \leq \bar{K}$ para todo $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T^*)$, $i = 1, 2$.

Demonstração. Fixemos $T_1 \in (0, T^*)$. Seja $\bar{K} > 0$ uma constante estritamente maior que o máximo entre a constante obtida no Lema 3.3.5 e a constante dada na Observação 3.3.4. Inicialmente, vamos supor que tanto $(u_1)_x$ quanto $(u_2)_x$ são ilimitadas em $\mathbb{R} \times (0, T^*)$. Deste modo, existe $T \in (0, T^*)$ tal que $|(u_1)_x| > \bar{K}$ em algum ponto de $\mathbb{R} \times (0, T]$. Sejam $\bar{t} = \inf\{t; |\partial_x u_1(x, t)| > \bar{K}, \text{ para algum } x \in \mathbb{R}\}$ e (x_n, t_n) uma sequência de pontos para os quais $|\partial_x u_1(x_n, t_n)| > \bar{K}$, com $t_n \searrow \bar{t}$. Temos que $\bar{t} > T_1$. Sejam K a constante presente no enunciado do Lema 3.3.6 e $\epsilon > 0$ tal que $K\epsilon^{\frac{1}{2}} < \bar{K}$. Em virtude do Lema 3.3.6 existe um intervalo $[a, b]$ tal que $|\partial_x u_1(x, t)| \leq \bar{K}$ para todo $(x, t) \in [a, b]^c \times [\bar{t}, \bar{t} + \epsilon]$. Desse modo, tomando N suficientemente grande de modo que $t_n - \bar{t} < \epsilon$ para $n > N$, temos $x_n \in [a, b]$ para todo $n > N$. Portanto existe $\bar{x} \in [a, b]$ e uma subsequência de (x_n) tal que $x_n \rightarrow \bar{x}$. Segue da continuidade de $|\partial_x u_1|$ em $\mathbb{R} \times (0, T]$ que $|\partial_x u_1(\bar{x}, \bar{t})| = \bar{K}$ é o máximo de $|\partial_x u_1|$ em $\mathbb{R} \times (0, \bar{t}]$. De modo análogo, supondo $\partial_x u_2$ ilimitada, obtemos um ponto (\bar{x}, \bar{t}) tal que $|\partial_x u_2(\bar{x}, \bar{t})| = \bar{K}$ é o máximo de $|\partial_x u_2|$ em $\mathbb{R} \times (0, \bar{t}]$. Temos que $\bar{t} > T_1$ e sem perda de generalidade vamos supor $\bar{t} \leq \bar{t}$ (caso contrário, trocamos u_1 por u_2).

Se $\bar{t} = \bar{t}$ então tomando (A, B) um intervalo que contenha os pontos \bar{x} e \bar{x} obtemos uma contradição ao Lema 3.3.5, tendo em vista que tanto o ponto de máximo de $|\partial_x u_1|$ quanto o ponto de máximo de $|\partial_x u_2|$ ocorrem em $(A, B) \times (\frac{\bar{t}}{2}, \bar{t}]$ e ambas não são limitadas pela constante dada no Lema 3.3.5.

No caso em que $\bar{t} < \bar{t}$ o Lema 3.3.6 garante a existência de um intervalo (A, B) para o qual $|\partial_x u_1| < \bar{K}$ em $[A, B]^c \times [\bar{t}, \bar{t}]$. Dessa forma, obtemos que tanto o ponto de máximo de $|\partial_x u_1|$ quanto o ponto de máximo de $|\partial_x u_2|$ em $[A, B] \times [\frac{\bar{t}}{2}, \bar{t}]$ ocorrem em $(A, B) \times (\frac{\bar{t}}{2}, \bar{t}]$, e os respectivos máximos não são limitados pela constante dada no Lema 3.3.5. Assim, concluímos que, supor $\partial_x u_i, i = 1, 2$, ilimitadas em $\mathbb{R} \times (0, T^*]$ leva a uma contradição do Lema 3.3.5.

Vamos supor agora que $\partial_x u_1$ é ilimitada e $\partial_x u_2$ é limitada em $\mathbb{R} \times (0, T^*)$. Repetindo o argumento inicial para $\partial_x u_1$, obtemos que o ponto de máximo (\bar{x}, \bar{t}) de $|\partial_x u_1|$ em $\mathbb{R} \times (0, \bar{t}]$ ocorre em $(A, B) \times (\frac{\bar{t}}{2}, \bar{t}]$ e o máximo $|\partial_x u_1(\bar{x}, \bar{t})| = \bar{K}$ é maior que a constante dada no enunciado do Lema 3.3.5. Juntando a isso o fato de que $\partial_x u_2$ é limitada em $\mathbb{R} \times (0, T^*)$, temos, novamente, uma contradição do Lema 3.3.5.

Concluímos que a constante \bar{K} limita $|\partial_x u_i|$ em $\mathbb{R} \times (0, T^*)$, $i = 1, 2$.

□

Lema 3.3.8. Se (u_1, u_2, y_1, y_2) uma solução máxima de (3.1.3) em $X_{T^*} \cap \langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_{T^*}$. Nessas condições, os coeficientes de (3.1.3) podem ser definidos em T^* de modo a pertencerem a $C_{1, \frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T^*])$.

Demonstração. Como os coeficientes das equações parabólicas em (3.1.3) são da forma $v_i(u_i) = \left(\frac{\lambda_i}{a_i + b_i y_i(u_i)}, \frac{c_i}{a_i + b_i y_i(u_i)}, 0 \right)$, com $y_i(u_i)(x, t) = y_{i,0}(x) e^{-A_i \int_0^t f(u_i(x,s)) ds}$ e $i = 1, 2$, temos

$$\partial_x y_i(x, t) = \left(y'_{i,0}(x) - A_i y_{i,0}(x) \int_0^t f'(u_i(x, s)) \partial_x u_i(x, s) ds \right) e^{-A_i \int_0^t f(u_i(x, s)) ds} \quad (3.3.14)$$

e segue das hipóteses sobre $y_{i,0}$, da limitação de f' e do Lema 3.3.7 que limita $(u_i)_x$ que

$$|(y_i)_x(x, t)| \leq K(1 + T^* \|(u_i)_x\|_\infty), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T^*) \quad (3.3.15)$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
 |y_i(x, t) - y_i(x, t')| &\leq y_{i,0}(x) |e^{-A_i \int_0^t f(u(x,s)) ds} - e^{-A_i \int_0^{t'} f(u(x,s)) ds}| \\
 &\leq K \left| \int_0^t f(u_i(x, s)) ds - \int_0^{t'} f(u_i(x, s)) ds \right| \\
 &\leq K \left| \int_{t'}^t f(u(x, s)) ds \right| \leq K(t - t') \\
 &\leq K(T^*)^{\frac{1}{2}}(t - t')^{\frac{1}{2}}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T^*).
 \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

e

$$|y_i(x, t)| \leq \|y_{i,0}\|_{\infty} \tag{3.3.17}$$

Concluimos assim que $y_i \in C_{1, \frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T^*))$ e, dessa forma, podemos definir $y_i(x, T^*) := \lim_{t \rightarrow T^*} y_i(x, t)$, $i = 1, 2$, obtendo $y_i \in C_{1, \frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T^*])$. Como os coeficientes das equações parabólicas são dados pela composição de y_i com uma função de derivada limitada, concluimos que tais coeficientes também pertencem a $C_{1, \frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T^*])$. Definindo $y_i(x, T^*)$ como acima, temos que $v_i(u_i) \in (C_{1, \frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T^*]))^3$. \square

Em virtude do Lema 3.3.8, temos que os coeficientes da equação parabólica (3.1.3) pertencem a $C_{1, \frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T^*])$, com a observação de que $y_i(x, T^*)$ é definida como o limite de $y_i(x, t)$, quando t tende a T^* . Vamos denotar por $\Gamma_i(x, \xi, t, \tau)$ a solução fundamental de (3.1.3) em $\mathbb{R} \times [0, T^*]$ e continuamos usando $\Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, \tau)$ para a solução fundamental de (3.1.3) em $\mathbb{R} \times [0, T]$, com $0 < T < T^*$. Seguem algumas observações a respeito dessas soluções fundamentais.

Observação 3.3.9. A solução fundamental $\Gamma_i(x, \xi, t, \tau)$, $(x, t), (\xi, \tau) \in \mathbb{R} \times [0, T^*]$, $\tau < t$, $i = 1, 2$, de (3.1.3) é contínua nas variáveis x , t , ξ e τ (v. [14, p. 67]). Além disso, a solução fundamental é única (v. [14, Teorema 1, p. 67]). Segue que $\Gamma_i(x, \xi, t, \tau) = \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, \tau)$, para todo $(x, t), (\xi, \tau) \in \mathbb{R} \times [0, T^*)$, $t > \tau$. Assim,

$$\lim_{T \rightarrow T^*} \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, T, \tau) = \Gamma_i(x, \xi, T^*, \tau)$$

e

$$|\Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, \tau)| \leq \frac{K}{(t - \tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-C \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}},$$

para todo $(x, t), (\xi, \tau) \in \mathbb{R} \times [0, T]$, $t > \tau$, para uma constante K que não depende de T .

Vamos agora provar a existência de solução clássica global para o problema (3.1.3). No que se segue, por *solução clássica global* queremos dizer de classe $C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ e $C_{1, \frac{1}{2}, loc}(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ denota o espaço das funções em $C_{1, \frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T])$ para todo $T > 0$.

Teorema 3.3.10. Sejam $u_{i,0}$, $i = 1, 2$, funções lipschitzianas, limitadas, não-negativas e pertencentes a $L^p(\mathbb{R})$ para algum $p \in (1, \infty)$ e $y_{i,0} \in C^2$ e não-negativa, $i = 1, 2$, com $y_{i,0}$ e $y'_{i,0}$ funções limitadas, então o problema (3.1.3) admite solução em X .

Demonstração. Segue do Lema 3.3.8 que os coeficientes das equações parabólicas que aparecem em (3.1.3) pertencem a $C_{1,\frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T^*])$. Isso garante a existência da solução fundamental associada à equação em $\mathbb{R} \times [0, T^*]$. (É importante notar a solução fundamental já existia para todo $T < T^*$. No entanto, a constante que aparece nas estimativas da solução fundamental poderiam tentar a infinito quando T se aproximasse de T^* , tendo em vista que tal constante depende da norma de Hölder dos coeficientes.)

Da definição de T^* , no início da seção, segue que, para todo $T \in (0, T^*)$, o problema (3.1.3) admite solução (u_1, u_2, y_1, y_2) , com $u_i \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, T]) \cap C_{1,\frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T]) \cap L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R}))$, $i = 1, 2$. Usando o Teorema 1.1.2 podemos representar u_i na forma integral, isto é,

$$u_i(x, t) = \int \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, 0) u_{i,0}(\xi) d\xi + \int_0^t \int \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, \tau) F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (3.3.18)$$

Como $u_{i,0}$ é limitada, segue da Observação 3.3.9 que

$$|\Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, \tau) u_{i,0}(\xi)| \leq \frac{K}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}, \text{ para todo } (x, t), (\xi, \tau) \in \mathbb{R} \times [0, T^*), t > \tau.$$

Além disso, temos que

$$|\Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, \tau) F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau)| \leq \frac{K}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}}, \text{ para todo } (x, t), (\xi, \tau) \in \mathbb{R} \times [0, T^*), t > \tau.$$

Pois, $F_i(x, y, z)$ é uma função contínua na região $[0, \|u_1\|_\infty] \times [0, \|u_2\|_\infty] \times [0, \|y(u_i)\|_\infty]$ a qual é limitada em virtude da definição de y_i em (3.2.2) e da limitação de u_i , $i = 1, 2$, dada no Corolário 3.3.2. Lembramos que, neste caso, a constante K independe de T .

Com isso, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada para passar o limite quando t tende a T^* e obter

$$\begin{aligned} u_i(x, T^*) &:= & (3.3.19) \\ &= \lim_{t \rightarrow T^*} \left(\int \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, 0) u_{i,0}(\xi) d\xi + \int_0^t \int \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, \tau) F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau) d\xi d\tau \right) \\ &= \int \Gamma_i(x, \xi, T^*, 0) u_{i,0}(\xi) d\xi + \int_0^{T^*} \int \Gamma_i(x, \xi, T^*, \tau) F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Vamos denotar por

$$u_i^*(x, t) = \begin{cases} u_i(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T^*) \\ u_i(x, T^*), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

e provar que $y_i(x, T^*)$, obtido no Lema 3.3.8, é dado por $y_i(x, T^*) = y_{i,0} e^{-A_i \int_0^{T^*} f(u_i^*(x,s)) ds}$. De fato, da Hölder continuidade de y_i em $\mathbb{R} \times [0, T^*]$, temos que

$$\begin{aligned} |y_i(x, T^*) - y_i(x, t)| &\leq K(T^* - t)^{\frac{1}{2}} \\ y_i(x, t) - K(T^* - t)^{\frac{1}{2}} &\leq y_i(x, T^*) \leq y_i(x, t) + K(T^* - t)^{\frac{1}{2}} \\ y_{i,0}(x) e^{-A_i \int_0^t f(u_i(x,s)) ds} - K(T^* - t)^{\frac{1}{2}} &\leq y_i(x, T^*) \leq y_{i,0}(x) e^{-A_i \int_0^t f(u_i(x,s)) ds} + K(T^* - t)^{\frac{1}{2}} \\ y_{i,0}(x) e^{-A_i \int_0^t f(u_i^*(x,s)) ds} - K(T^* - t)^{\frac{1}{2}} &\leq y_i(x, T^*) \leq y_{i,0}(x) e^{-A_i \int_0^t f(u_i^*(x,s)) ds} + K(T^* - t)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Fazendo $t \rightarrow T^*$, segue $y_i(x, T^*) = y_{i,0} e^{-A_i \int_0^{T^*} f(u_i^*(x,s)) ds}$.

Dessa forma, podemos escrever

$$u_i^*(x, T^*) = \int \Gamma_{[v_i(u_i^*)]}(x, \xi, t, 0) u_{i,0}(\xi) d\xi + \int_0^t \int \Gamma_{[v_i(u_i^*)]}(x, \xi, t, \tau) F_i(u_1^*, u_2^*, y_i(u_i^*))(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (3.3.20)$$

para todo $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T^*]$.

De agora em diante, vamos suprimir o asterisco de u_i^* e escrever simplesmente $u_i(x, t)$ definida em $\mathbb{R} \times [0, T^*]$. Nosso próximo passo é mostrar que $u_i(x, t)$ converge à $u_i(x, T^*)$, uniformemente. De fato,

$$\begin{aligned} u(x, T^*) - u(x, t) &= \int (\Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, T^*, 0) - \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, 0)) u_{i,0}(\xi) d\xi \\ &+ \int_0^{T^*} \int \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, T^*, \tau) F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau) d\xi d\tau - \int_0^t \int \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, \tau) F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &= \int (\Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, T^*, 0) - \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, 0)) u_{i,0}(\xi) d\xi + \int_t^{T^*} \int \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, T^*, \tau) F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &+ \int_0^t \int (\Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, T^*, \tau) - \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, \tau)) F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

Considerando $\frac{T^*}{2} \leq t \leq T^*$, temos

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \int (\Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, T^*, 0) - \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, 0)) u_{i,0}(\xi) d\xi \right| \\ &= \left| \int \partial_t \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, s, 0) (T^* - t) u_{i,0}(\xi) d\xi \right| \\ &\leq \int \frac{K}{s^{\frac{3}{2}}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{s}} |T^* - t| \|u_{i,0}\|_\infty d\xi = \frac{K}{s} |T^* - t| \leq \frac{2K}{T^*} |T^* - t| \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_t^{T^*} \int \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, T^*, \tau) F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau) d\xi d\tau \right| \\ &\leq \int_t^{T^*} \int \frac{K}{(T^* - \tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{T^* - \tau}} \|F_i\|_\infty d\xi d\tau \\ &\leq \int_t^{T^*} K \|F_i\|_\infty d\tau = K \|F_i\|_\infty (T^* - t) \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

$$\begin{aligned}
 |I_3| &= \left| \int_0^t \int \left(\Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, T^*, \tau) - \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, \tau) \right) F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau) d\xi d\tau \right| \quad (3.3.24) \\
 &= \left| \int_0^t \int \int_t^{T^*} \partial_t \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, s, \tau) F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau) ds d\xi d\tau \right| \\
 &= \left| \int_0^t \int_t^{T^*} \int \partial_t \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, s, \tau) F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau) d\xi ds d\tau \right| \\
 &= \left| \int_0^t \int_t^{T^*} \int \partial_t \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, s, \tau) (F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau) - F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(x, \tau)) d\xi ds d\tau \right| \\
 &\leq \int_0^t \int_t^{T^*} \int \frac{K}{(s-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-C \frac{(x-\xi)^2}{s-\tau}} \|\nabla F_i\|_\infty (\|(u_1)_x\|_\infty + \|(u_2)_x\|_\infty + \|(y_i)_x\|_\infty) |x - \xi| d\xi ds d\tau \\
 &= \int_0^t \int_t^{T^*} \int \frac{K}{s-\tau} e^{-C^* \frac{(x-\xi)^2}{s-\tau}} d\xi ds d\tau \leq K \int_0^t \int_t^{T^*} \frac{1}{(s-\tau)^{\frac{1}{2}}} ds d\tau \\
 &= K \int_0^t [(T^* - \tau)^{\frac{1}{2}} - (t - \tau)^{\frac{1}{2}}] d\tau \leq K \int_0^t (T^* - t)^{\frac{1}{2}} d\tau \\
 &\leq KT^*(T^* - t)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

As desigualdades (3.3.22), (3.3.23) e (3.3.24) mostram que a convergência de $u_i(x, t)$ para $u_i(x, T^*)$ é uniforme.

Vejamos agora mais algumas propriedades de $u_i(x, T^*)$. Inicialmente vemos que $u_i(x, T^*)$ é limitada em virtude do Corolário 3.3.2 e é lipschitziana devido ao Lema 3.3.7. Aplicando, na equação (3.3.20), os Teoremas 1.2.1 e 1.2.2, temos

$$\begin{aligned}
 &\|u_i(\cdot, t)\|_{L^p} \\
 &\leq \left\| \int \Gamma_{[v_i(u_i)]}(\cdot, \xi, t, 0) u_{i,0}(\xi) d\xi \right\|_{L^p} + \left\| \int_0^t \int \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, \tau) F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau) d\xi d\tau \right\|_{L^p} \\
 &\leq C_1 + \int_0^t \left\| \int \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, \tau) F_i(u_1, u_2, y_i(u_i))(\xi, \tau) d\xi \right\|_{L^p} d\tau \\
 &\leq C_1 + \int_0^t \left\| \int \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, \tau) (F_i(u_1, u_2, y_i(u_i)) - F_i(0, 0, y_i(u_i))) (\xi, \tau) d\xi \right\|_{L^p} d\tau \\
 &\leq C_1 + \int_0^t \left\| \int \Gamma_{[v_i(u_i)]}(x, \xi, t, \tau) \nabla_u F_i(u_1(\xi, \tau), u_2(\xi, \tau)) d\xi \right\|_{L^p} d\tau \\
 &\leq C_1 + C_2 \int_0^t (\|u_1(\cdot, \tau)\|_{L^p} + \|u_2(\cdot, \tau)\|_{L^p}) d\tau, \quad i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Logo, $\|u_1(\cdot, t)\|_{L^p} + \|u_2(\cdot, t)\|_{L^p} \leq C_1 + C_2 \int_0^t (\|u_1(\cdot, \tau)\|_{L^p} + \|u_2(\cdot, \tau)\|_{L^p}) d\tau$. Fazendo $\phi(t) = \|u_1(\cdot, t)\|_{L^p} + \|u_2(\cdot, t)\|_{L^p}$, temos que $\phi(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \phi(\tau) d\tau$. Segue da desigualdade de Gronwall para integrais (ver [8, p. 625]) que $\phi(t) \leq C_1(1 + C_2 t e^{C_2 t})$, para todo $t \in [0, T^*)$ e, portanto,

$$\|u_i(\cdot, t)\|_{L^p} \leq C_1(1 + C_2 T^* e^{C_2 T^*}), \quad \text{para todo } t \in [0, T^*).$$

Segue do Lema de Fatou que $u_i(x, T^*) \in L^p$. Com isso, temos que $u_i(x, T^*)$ e $y_i(x, T^*)$, $i = 1, 2$, estão nas mesmas condições que os dados iniciais $u_{i,0}$ e $y_{i,0}$, $i = 1, 2$, no Teorema 3.2.2 e no Corolário 3.2.4. Isso permite aplicar o Teorema 3.2.2, juntamente com o Corolário 3.2.4, para obter a existência de solução do problema (3.1.3) em $\mathbb{R} \times [0, T^* + \epsilon]$, i.e., com $u_i \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times$

$(0, T^* + \epsilon) \cap C_{1, \frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T^* + \epsilon]) \cap L^\infty([0, T^* + \epsilon]; L^p(\mathbb{R}))$, $i = 1, 2$, contrariando o fato de que T^* é maximal. O argumento para concluir que $(u_1, u_2) \in \langle \hat{U}, \tilde{U} \rangle_{T^* + \epsilon}$ é o mesmo utilizado no Teorema 3.3.1, sendo $M_i = \|u_i\|_{1, \frac{1}{2}}$ em $\mathbb{R} \times [0, T^* + \epsilon]$, $i = 1, 2$. Concluimos que T^* não é finito e portanto o Teorema está provado. \square

Conclusão

A busca por uma solução global para o problema de Cauchy associado a um sistema composto de duas equações parabólicas não lineares acopladas a duas equações diferenciais ordinárias, dado em (3.1.3), foi a diretriz deste trabalho. A abordagem escolhida levou em conta os trabalhos [7] e [6], publicados anteriormente. Principalmente o trabalho [6], onde Mota e Santos impõem que as funções de concentração sejam Hölder contínuas e limitadas (Teoremas 2 e 3 em [6]). As condições impostas às funções de concentração determinam as propriedades dos coeficientes das equações parabólicas do sistema (3.1.3) e nos indicaram que o espaço das funções Hölder contínuas seria adequado à busca de uma solução para o problema geral.

A escolha do espaço das funções Hölder contínuas possibilitou-nos trabalhar com a fórmula integral de representação da solução (Teorema 1.1.2) e mostrou a necessidade de obter propriedades a respeito das soluções fundamentais envolvidas.

No Capítulo 1, fizemos um estudo das propriedades da solução fundamental que nos seriam úteis: estimativas para a solução fundamental que evidenciaram a dependência com relação aos coeficientes (Lema 2.1.5), dependência contínua em T das constantes envolvidas em tais estimativas, resultado sobre convergência pontual da solução fundamental em termos da convergência pontual dos coeficientes da equação (Lema 2.1.6) e as consequências desses resultados no problema de Cauchy (Teorema 2.2.1).

Iniciamos o Capítulo 2 utilizando as propriedades obtidas no Capítulo 1 para provar a existência de solução local para o problema (3.1.3) (Teorema 3.2.2), embora nossa expectativa, com relação a essas estimativas obtidas no Capítulo 1, fosse a de provar que o operador definido em (3.2.1) era uma contração em $C_{1, \frac{1}{2}}(\mathbb{R} \times [0, T])$, para T suficientemente pequeno, nós não conseguimos verificar esse fato. Nesse ponto nosso maior prejuízo foi a falta de unicidade para a solução obtida. No Teorema 3.3.1 provamos que a solução local pertence a um setor determinado pelos dados iniciais, fato importante para obter a limitação da solução maximal; Corolário 3.3.2.

A sequência do Capítulo 2 é dedicada a demonstrar a existência de solução global para o problema (3.1.3). Supondo a existência de um tempo maximal de existência da solução, T^* , foi necessário encontrar uma estimativa uniforme para a derivada espacial da solução em $\mathbb{R} \times (0, T^*)$. Nesse ponto, usamos a mesma abordagem usada por Oleinik e Kruzhkov [17] e introduzimos a hipótese de que os dados iniciais pertencem a algum espaço $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. O papel dessa nova hipótese, nessa abordagem, foi o de controlar a derivada espacial quando $|x| \rightarrow \infty$.

Finalmente, consideramos que a abordagem utilizada neste trabalho foi adequada e bastante produtiva, tendo em vistas os resultados obtidos. No entanto, alguns pontos ainda nos chamam a atenção e serão, certamente, temas de trabalhos futuros. Entre essas questões estão:

- A prova da unicidade de solução.
- A obtenção de solução com dados menos regulares.
- O estudo do comportamento assintótico da solução.
- O estudo do problema em domínios limitados.

Referências

- [1] Aronson, D. G. *Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation*, Bull. Amer. Math. Soc., **73**, (6), (1967), 890-896.
- [2] Conway, John B., *A course in functional analysis*, 2^a Ed., Springer, (1990).
- [3] Crookston, R. B. et al. *A numerical simulation model for thermal recovery processes*, Soc. Pet. Eng. J., **19**, (1), (1979), 37-58. .
- [4] Da Mota, J. C., Dantas W. and Marchesin, D. *Combustion fronts in porous media*, SIAM J. Appl. Math., **62**, (6), (2002), 2175-2198.
- [5] Da Mota, J. C., Dantas, W. and Marchesin, D. *Traveling waves for combustion in porous media*, Int. Ser. Num. Math. Birkhauser, **129**, (1999), 177-187.
- [6] Da Mota, J. C. and Santos, M. M. *An application of the monotone iterative method to a combustion problem in porous media*, Nonlinear Analysis: Real World Application, **12**, (2), (2011), 1192-1201.
- [7] Da Mota, J. C. and Schecter, S. *Combustion fronts in a porous medium with two layers*, Journal of Dynamics and Differential Equations, **18**, (3), (2006), 615-665.
- [8] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*, AMS, 19, (1998).
- [9] Folland, G. B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, 2nd. ed. John Wiley and sons, (1999).
- [10] Frid, H. and Santos, M. M., *Non-strictly hyperbolic systems of conservation laws of the conjugate type*, **19**, (1-2), (1994), 27-59.
- [11] Friedman, A. *Partial differential equations of parabolic type*, Dover Publications, New York, (2008), originally published in (1964) by Prentice-Hall.
- [12] Ghazaryan, A. et al. *Stability of gasless combustion fronts in one-dimensional solids*, Arch. Ration. Mech. Anal., **198**, (3), (2010), 981-1030.
- [13] Gottfried, B. S., *A mathematical model of thermal oil recovery in linear systems*, Soc. Pet. Eng. J., **5**, (3), (1965), 196-210.

- [14] Il'IN, A. M., Kalashnikov, A. S. and Oleinik, O. A. *Linear equations of the second order of parabolic type*, Russian Mathematical Survey, **17**, (1), (1962), 1-143.
- [15] Ladyzenskaja, O. A. Solonnikov, V. A. and Ural'ceva, N. N. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Traduzido do Russo por S. Smith, American Mathematical Society, (1968).
- [16] Levi, E. E. *Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche ale derivate parziale*, Rend. del Circ. Mat. Palermo, **24**, (1), (1907), 275-317.
- [17] Oleinik, O. A. and Kruzhkov, S. N. *Quasilinear second order parabolic equations with many independent variable*, Russ. Math. Surv., **16**, (5), (1961), 105-146.
- [18] Olver, F. W. J., *Asymptotics and special functions*, A K Peters, Massachusetts, (1974).
- [19] Pao, C. V. *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, Plenum Press, New York and London, (1992).
- [20] Pao, C. V. *Parabolic systems in unbounded domains I. Existence and dynamics*, J. Math. Anal. Applic., **217**, (1), (1998), 129-160.
- [21] Protter, M. H. and Weinberger, H. F., *Maximum principles in differential equations*, Springer-Verlang, New York (1984).
- [22] Sattinger, D. H. *Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J., **21**, (1972), 979-1000.
- [23] Schecter, S. and Marchesin, D. *Geometric singular perturbation analysis of oxidation heat pulses for two-phase flow in porous media*, Bol. Soc. Bras. Mat., **32**, (3), (2001), 237-270.
- [24] Schecter, S. and Marchesin, D. *Oxidation heat pulses in two-phase expansive flow in porous media*, ZAMP, **54**, (1), (2003), 48-53.