

---

**Universidade Estadual de Campinas**

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

---

**Tese de Doutorado**

# **Cálculo Fracionário e Aplicações**

por

**Rubens de Figueiredo Camargo**

**Orientador: Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira**

**Co-orientador: Prof. Dr. Ary Orozimbo Chiacchio**

---

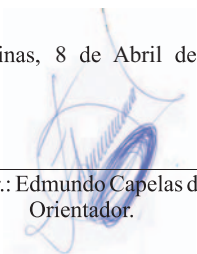
# Folha de Rosto

---

## Cálculo Fracionário e Aplicações

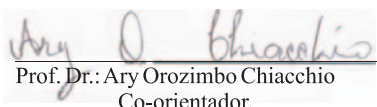
Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Rubens de Figueiredo Camargo e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 8 de Abril de 2009.



---

Prof. Dr.: Edmundo Capelas de Oliveira  
Orientador.



---

Prof. Dr.: Ary Orozimbo Chiacchio  
Co-orientador.

Banca Examinadora:

- 1—Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira.
- 2—Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga.
- 3—Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar.
- 4—Prof. Dr. Jayme Vaz Júnior.
- 5—Prof. Dr. José Luiz Boldrini.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de doutor em Matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecário: Miriam Cristina Alves

|                                                                                                                                                                                  |                                                         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| Camargo, Rubens de Figueiredo                                                                                                                                                    |                                                         |
| C14t                                                                                                                                                                             | Cálculo Fracionário e Aplicações / Rubens de Figueiredo |
| Camargo - - Campinas, [S.P. :s.n.], 2009.                                                                                                                                        |                                                         |
| Orientador : Edmundo Capelas de Oliveira, Ary Orozimbo Chiacchio.                                                                                                                |                                                         |
| Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.                                                              |                                                         |
| 1. Calculo Fracionário. 2. Equações diferenciais fracionárias<br>3. Funções de Mittag-Leffler. 4. Transformadas integrais.                                                       |                                                         |
| I. Oliveira, Edmundo Capelas de. II. Chiacchio, Ary Orozimbo. III Universidade Estadual de Campinas. IV Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. V. Título. |                                                         |

Título em Inglês: Fractional Calculus and Applications

Palavras-chave em Inglês (Keywords): 1. Fractional calculus 2. Fractional differential equations, 3. Mittag-Leffler functions, 4. Integral transform.

Área de concentração: Análise.

Titulação: Doutor em Matemática.

Banca Examinadora: Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira (IMECC-UNICAMP)  
. Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga (IBILCE-UNESP)  
. Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar (IFT-UNESP)  
. Prof. Dr. Jayme Vaz Júnior(IMECC-UNICAMP)  
. Prof. Dr. José Luiz Boldrini (IMECC-UNICAMP).

Data da defesa: 31/03/2009.

Programa de pós-graduação: Doutorado em Matemática.

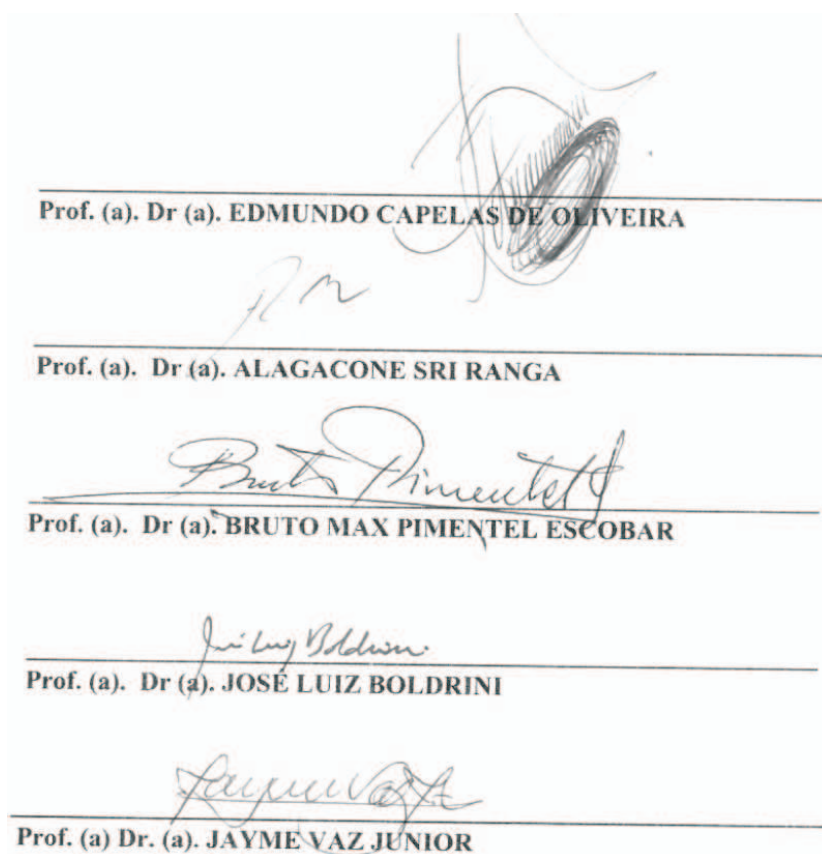
# Cálculo Fracionário e Aplicações

por **Rubens de Figueiredo Camargo**

Tese submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de doutor em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Tese defendida em 31 de Março de 2009 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.:





*“Existe uma coisa que uma longa existência me ensinou: toda a nossa ciência, comparada à realidade, é primitiva e inocente; e, portanto, é o que temos de mais valioso.”*  
*Albert Einstein.*

---

# Agradecimentos

---

Gostaria de agradecer a todos que contribuíram direta e indiretamente para a elaboração deste trabalho, em especial:

- Ao meu orientador Edmundo, a quem devo todos os méritos deste trabalho, pela amizade, dedicação e exemplo.
- Ao meu co-orientador Ary por suas valiosas idéias e correções.
- Ao CNPq por ter financiado este projeto.
- Ao meu grande amigo Daniel Guerreiro por sua amizade e sua ajuda imprescindível para a elaboração da parte gráfica deste trabalho.
- Aos professores doutores Francesco Mainardi (Universidade de Bologna, Itália), José Antonio Tenreiro Machado (Instituto de Engenharia do Porto, Portugal) e João Maurício Rosário (Unicamp) por importantes discussões e terem sugerido várias referências.
- À minha mãe e minha irmã por terem sido sempre meu porto seguro de carinho e amor.
- À minha futura esposa Claudia, e sua família, pelo companheirismo, carinho e dedicação.
- A todos meus irmãos e amigos de treino da *Unicamp Swimming Society Reloaded* por terem cuidado da saúde do meu corpo e da minha mente.
- A todos colegas de curso e amigos que fiz durante esses dez anos de Unicamp.
- Acima de tudo agradeço a Deus por ter me concedido a dádiva de conviver com todas estas pessoas maravilhosas.

---

# Resumo

---

Apresentamos neste trabalho um estudo sistemático e detalhado sobre integrais e derivadas de ordens arbitrárias, o assim chamado cálculo de ordem não-inteira, popularizado com o nome de *Cálculo Fracionário*. Em particular, discutimos e resolvemos equações diferenciais e integrodiferenciais de ordem não-inteira e suas aplicações em diversas áreas do conhecimento, bem como apresentamos resultados inéditos, isto é, teoremas de adição, envolvendo as funções de Mittag-Leffler.

Após abordar as diferentes definições para a derivada de ordem não-inteira, justificamos o fato de utilizarmos, em nossas aplicações, a definição de derivada conforme proposta por Caputo, mais restritiva, e não a definição segundo Riemann-Liouville, embora seja esta a mais difundida.

Nas aplicações apresentamos uma generalização para a equação diferencial associada ao problema do telégrafo na versão fracionária, cuja solução, obtida de duas maneiras distintas, deu origem a dois novos teoremas de adição envolvendo as funções de Mittag-Leffler. Numa segunda aplicação, discutimos o conhecido sistema de Lotka-Volterra na versão fracionária; por fim, introduzimos e resolvemos uma equação integrodiferencial fracionária, a assim chamada, equação de Langevin generalizada fracionária.

---

# Abstract

---

At this work we present a systematic and detailed study about integrals and derivatives of arbitrary order, the so-called non-integer order calculus, popularized with the name *Fractional Calculus*. Particularly, we discuss and solve non-integer order differential and integrodifferential equations and its applications into several areas of the knowledge, as well as introduce some new results, i.e., addition theorems, involving the Mittag-Leffler functions.

After approaching the different definitions to the non-integer order derivative, we justify the fact that we use, in our applications, the definition proposed by Caputo to the fractional derivative, which is more restrictive, instead of the Riemann-Liouville ones, although this one is best known.

Into the applications we presented a fractional generalization to the equation associated with the telegraph's problem, whose solution, obtained by two different ways, was the origin of two new addition theorems to the Mittag-Leffler functions. As a second application, we present the fractional version of the Lotka-Volterra system; finally, we introduce and solve the fractional generalized Langevin equation.

---

# Sumário

---

|                                                          |           |
|----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introdução</b>                                        | <b>1</b>  |
| <b>1 Cálculo Fracionário</b>                             | <b>7</b>  |
| 1.1 Introdução . . . . .                                 | 7         |
| 1.2 Origem do Cálculo Fracionário . . . . .              | 7         |
| 1.3 Contribuições de Abel e Liouville . . . . .          | 9         |
| 1.4 Uma Grande Controvérsia . . . . .                    | 11        |
| 1.5 Contribuições de Riemann . . . . .                   | 11        |
| 1.5.1 Origem da Definição de Riemann-Liouville . . . . . | 12        |
| 1.6 Heaviside e os Operadores Generalizados . . . . .    | 15        |
| 1.7 Contribuições do Século Passado . . . . .            | 15        |
| 1.8 Abordagem Clássica . . . . .                         | 16        |
| <b>2 Justificativas</b>                                  | <b>19</b> |
| 2.1 Cálculo Elementar . . . . .                          | 19        |
| 2.2 Variáveis Complexas . . . . .                        | 20        |
| <b>3 Integração Fracionária</b>                          | <b>25</b> |
| 3.1 Definição da Integral Fracionária . . . . .          | 26        |
| 3.2 Exemplos de Integrais Fracionárias . . . . .         | 27        |
| 3.3 Técnicas de Integração Fracionária . . . . .         | 29        |

|          |                                                                           |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.4      | Relação entre Integrais de Ordem Inteira e de Ordem Não-Inteira . . . . . | 31        |
| 3.5      | Transformada de Laplace . . . . .                                         | 32        |
| 3.5.1    | Linearidade . . . . .                                                     | 32        |
| 3.5.2    | Convolução . . . . .                                                      | 32        |
| 3.5.3    | Transformada de Laplace Inversa . . . . .                                 | 33        |
| 3.5.4    | Cálculo da Transformada . . . . .                                         | 34        |
| 3.6      | A Lei dos Expoentes para Integrais Fracionárias . . . . .                 | 36        |
| 3.7      | Fórmula de Leibniz para Integrais Fracionárias . . . . .                  | 38        |
| <b>4</b> | <b>A Derivada Fracionária</b>                                             | <b>41</b> |
| 4.1      | Definição de Riemann-Liouville . . . . .                                  | 42        |
| 4.2      | Derivada Fracionária Segundo Caputo . . . . .                             | 43        |
| 4.3      | Caputo $\times$ Riemann-Liouville . . . . .                               | 44        |
| 4.3.1    | Transformada de Laplace e Convolução . . . . .                            | 46        |
| 4.4      | Lei dos Expoentes para Derivadas Fracionárias . . . . .                   | 47        |
| 4.5      | Derivada Fracionária Segundo Weyl . . . . .                               | 48        |
| 4.6      | Derivada Fracionária Segundo Grünwald-Letnikov . . . . .                  | 52        |
| 4.7      | Derivada Fracionária Segundo Riesz . . . . .                              | 54        |
| 4.8      | Fórmula de Leibniz para Derivada Fracionária . . . . .                    | 56        |
| 4.8.1    | Demonstração da Fórmula de Leibniz Generalizada . . . . .                 | 57        |
| <b>5</b> | <b>Inicialização</b>                                                      | <b>61</b> |
| 5.1      | Prova da Inicialização não Constante . . . . .                            | 62        |
| 5.2      | Definições para o Cálculo Fracionário Inicializado . . . . .              | 63        |
| 5.3      | Integral de Riemann-Liouville . . . . .                                   | 63        |
| 5.3.1    | Inicialização Terminal . . . . .                                          | 63        |

|          |                                                                           |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 5.3.2    | Inicialização Lateral . . . . .                                           | 65        |
| 5.4      | Inicialização para a Derivada Fracionária Segundo Riemann-Liouville . . . | 65        |
| 5.4.1    | Inicialização Terminal . . . . .                                          | 65        |
| 5.4.2    | Inicialização Lateral . . . . .                                           | 66        |
| 5.5      | Inicialização para a Derivada Fracionária Segundo Caputo . . . . .        | 67        |
| <b>6</b> | <b>Funções de Mittag-Leffler</b>                                          | <b>69</b> |
| 6.1      | Função de Mittag-Leffler de um Parâmetro . . . . .                        | 69        |
| 6.2      | Função de Mittag-Leffler de Dois Parâmetros . . . . .                     | 70        |
| 6.2.1    | Relações de Recorrência . . . . .                                         | 71        |
| 6.2.2    | Relação Integral . . . . .                                                | 72        |
| 6.2.3    | Fórmula de Duplicação . . . . .                                           | 73        |
| 6.2.4    | Relação com a Função Gama Incompleta . . . . .                            | 73        |
| 6.2.5    | Relação com a Função Erro . . . . .                                       | 74        |
| 6.3      | Função de Mittag-Leffler Generalizada . . . . .                           | 77        |
| 6.3.1    | Relação com a Função de Dois Parâmetros . . . . .                         | 77        |
| 6.4      | Transformada de Laplace . . . . .                                         | 78        |
| 6.5      | Novos Teoremas para a Função de Mittag-Leffler . . . . .                  | 81        |
| 6.6      | Aplicações e Casos Particulares . . . . .                                 | 86        |
| 6.7      | Comportamento Gráfico . . . . .                                           | 87        |
| <b>7</b> | <b>Equação do Telégrafo Fracionária</b>                                   | <b>97</b> |
| 7.1      | Função de Green . . . . .                                                 | 98        |
| 7.2      | Caso Particular $\alpha = \beta$ . . . . .                                | 101       |
| 7.3      | Regras de Soma para a Função de Mittag-Leffler . . . . .                  | 102       |
| 7.3.1    | Teoremas de Adição . . . . .                                              | 104       |

|          |                                                                |            |
|----------|----------------------------------------------------------------|------------|
| <b>8</b> | <b>Sistema de Lotka-Volterra Fracionário</b>                   | <b>107</b> |
| 8.1      | O Sistema de Lotka-Volterra . . . . .                          | 108        |
| 8.2      | Sistema de Lotka-Volterra Fracionário . . . . .                | 109        |
| 8.3      | Exemplo Numérico . . . . .                                     | 110        |
| <b>9</b> | <b>Equação de Langevin Fracionária</b>                         | <b>113</b> |
| 9.1      | Equação de Langevin Generalizada . . . . .                     | 114        |
| 9.2      | Equação de Langevin Fracionária Generalizada . . . . .         | 115        |
| 9.3      | Uma Função de Correlação Particular . . . . .                  | 117        |
| 9.4      | Núcleos e a Função de Mittag-Leffler<br>Generalizada . . . . . | 118        |
|          | <b>Conclusões</b>                                              | <b>121</b> |
| <b>A</b> | <b>Sobre as Funções Beta e Gama</b>                            | <b>123</b> |
| A.1      | Definições . . . . .                                           | 123        |
| A.2      | Relação entre as Funções Beta e Gama . . . . .                 | 124        |
| A.3      | Integração no Plano Complexo e a Função Gama . . . . .         | 125        |
|          | <b>Bibliografia</b>                                            | <b>127</b> |



---

# Introdução

---

Este texto tem por objetivo ser o primeiro trabalho escrito em português a fazer um estudo completo e detalhado sobre integrais e derivadas de ordens arbitrárias, o assim chamado cálculo fracionário, em particular equações diferenciais de ordem não-inteira e suas aplicações em diversas áreas do conhecimento, bem como apresentar alguns resultados inéditos.

O cálculo fracionário tem sua origem em 30 de Setembro de 1695 em uma carta escrita por l'Hospital ao seu amigo Leibniz [83, 94], na qual o significado de uma derivada de ordem meio é proposto e discutido.

A resposta de Leibniz ao seu amigo, somada à contribuição de inúmeros brilhantes matemáticos como Euler, Lagrange, Laplace, Fourier, Abel, Heaviside, Liouville, entre outros, levaram às primeiras definições de derivadas e integrais de ordens não-inteiras, que no final do século XIX, devido primordialmente as definições propostas por Riemann-Liouville e Grünwald-Letnikov, pareciam estar completas.

Até próximo ao final do século passado o desenvolvimento do cálculo fracionário deu-se estritamente no campo da matemática pura, sem grandes aplicações em outras áreas. Contudo, em 1969 M. Caputo, em seu livro *Elasticità e Dissipazione* [17], resolveu problemas de viscoelasticidade utilizando uma nova definição, proposta por ele, para a derivada de ordem fracionária. Além disso, o autor utilizou sua definição para descrever problemas de sismologia [18]. Por outro lado, a assim chamada derivada fracionária de Grünwald-Letnikov, mostrou-se bastante eficiente para resolver problemas numéricos [28, 108] e em 1998 Lorenzo e Hartley [71, 72] propuseram uma interpretação geométrica para a derivada fracionária utilizando esta mesma definição. Além disso, destacamos o trabalho de Podlubny [58, 95] no qual interpretações físicas e geométricas são propostas para a derivada e a integral fracionárias, em casos particulares.

A partir das definições introduzidas por Caputo e Grünwald-Letnikov, que têm um caráter local, nas últimas décadas diversos autores mostraram que a modelagem feita a partir do cálculo fracionário oferece uma descrição mais fina de fenômenos naturais que aquela feita a partir do cálculo usual, tendo em vista que derivadas fracionárias proporcionam uma excelente descrição para efeitos de memória e propriedades hereditárias de diversos materiais, como por exemplo, polímeros. Este efeito de memória é um dos importantes aspectos do cálculo fracionário [71, 72].

A maneira canônica de se utilizar o cálculo fracionário para refinar a descrição de um fenômeno é substituir a derivada de ordem inteira da equação diferencial ordinária ou parcial, que o descreve, por uma de ordem não-inteira. De maneira natural, este método nos conduz a equações diferenciais de ordem não-inteira e à necessidade de se resolver tais equações; entretanto métodos efetivos de se resolver tais equações não podem ser encontrados nem nos mais avançados trabalhos acerca do cálculo fracionário. Isto somado ao fato de termos uma série de definições não equivalentes para a derivada fracionária e uma não evidente interpretação nem física nem geométrica, contribuiu para a não utilização em larga escala do cálculo fracionário.

Outro fator que faz com que a solução de uma equação diferencial de ordem não-inteira costume ser mais complexa do que a da respectiva equação de ordem inteira [56, 63, 64, 74], advém do fato de o conhecimento das funções inerentes ao cálculo fracionário não ser tão avançado quanto o conhecimento das funções relacionadas ao cálculo de ordem inteira, as assim chamadas funções especiais [15].

Dentre as funções relacionadas ao cálculo fracionário, uma das mais importantes é a função de Mittag-Leffler, que tem um papel fundamental no estudo de equações diferenciais de ordem não-inteira. A função original, contendo um parâmetro complexo, foi introduzida em 1903 pelo matemático sueco Gosta Mittag-Leffler [84] como uma generalização para a função exponencial. Em 1905 Wiman [115] e mais tarde Humbert-Agarwal [60] introduziram a assim chamada função de Mittag-Leffler de dois parâmetros como uma possível generalização para a função de Mittag-Leffler original. Esta função tem aplicação em diversos problemas envolvendo derivadas fracionárias [78, 83]. Depois destas duas funções vários autores propuseram outras generalizações utilizando três parâmetros, em particular, Prabhakar [97] e mais recentemente Chamati-Tonchev [24]. Também mencionamos um trabalho recente de Shukla-Prajapati [107] no qual é apresentada outra generalização para a função de Mittag-Leffler.

No presente trabalho, além de apresentar um estudo detalhado das funções de Mittag-Leffler estabelecemos novas relações para estas funções [34, 36, 38], particularmente, teoremas de adição.

Apesar das dificuldades anteriormente mencionadas, importantes resultados e generalizações foram obtidos, através do cálculo fracionário, em diversas áreas do conhecimento tais como, probabilidade [94], biomatemática [31, 35], psicologia [109], funções especiais [67, 112] e mecânica dos fluidos, fenômenos de transporte e redes elétricas [30]. Destacamos a seguir alguns destes resultados.

Há alguns anos atrás Mainardi [75] resolveu quatro equações associadas a vários fenômenos físicos substituindo derivadas de ordem inteira por derivadas de ordem não-inteira nas respectivas equações diferenciais parciais associadas a estes fenômenos. Dentre

as referidas equações destacamos, as equações diferenciais ordinárias associadas ao relaxamento e à oscilação, e equações diferenciais parciais associadas com difusão e propagação de onda, todas elas discutidas em termos da metodologia da transformada de Laplace<sup>2</sup>. O mesmo autor [77] discute as soluções fundamentais para a equação diferencial fracionária de onda-difusão, novamente substituindo a derivada temporal por uma derivada de ordem não-inteira. Além disso, uma interessante relação de reciprocidade envolvendo a correspondente função de Green é obtida. Finalmente, o autor mostra que a equação diferencial fracionária de onda-difusão pode governar processos generalizados com interpolação e extrapolação, dependendo da ordem não-inteira, isto é, generalizando a equação de difusão clássica.

Destacamos ainda que Caputo [20] discutiu a equação associada ao movimento de um ponto oscilando livremente em um meio viscoso na versão fracionária, isto é, trocando o termo de viscosidade por uma derivada de ordem fracionária. Beyer-Kempfler [12] recuperaram o problema apresentado por Caputo, como caso particular, do problema onde o termo de viscosidade é não-local. Para discutir esta equação, isto é, para obter a solução única para a equação diferencial de ordem fracionária os autores utilizaram a metodologia da transformada de Fourier. Além disso, eles apresentam a existência e unicidade da solução e estendem o resultado para a equação generalizada das oscilações em um meio viscoso.

Por outro lado, há vários autores que consideram a derivada fracionária na parte espacial. Orsingher-Zhao [89] discutem a equação (espacial) fracionária do telégrafo através da técnica da transformada de Fourier. Em particular, eles discutem o caso unidimensional de uma partícula que se move para frente e para trás com saltos de amplitudes aleatórias. Orsingher-Beghin [90] discutiram as equações (temporais) fracionárias do telégrafo e processos envolvendo a equação do telégrafo com tempo browniano, no qual mostraram que alguns processos são governados por equações (temporais) fracionárias do telégrafo. Uma discussão matemática envolvendo as propriedades da solução também é apresentada. Cascaval et al. [22] discutem a equação (temporal) fracionária do telégrafo utilizando a abordagem de Riemann-Liouville para resolver o problema de Cauchy. Momani [85] discute soluções analíticas e aproximadas para a equação do telégrafo com parte temporal fracionária e para a equação do telégrafo com parte espacial fracionária utilizando o chamado método da decomposição Adomianiana [2]. Destacamos que aqui, no presente trabalho, é apresentada e resolvida uma generalização para a equação do telégrafo tendo tanto a parte espacial quanto a parte temporal fracionárias [38].

É fundamental citar que existem áreas onde a utilização do cálculo fracionário é indispensável, como por exemplo no estudo de alguns sistemas de alta energia discutidos por Lorenzo e Hartley [71, 72] e na teoria de fractais [79], onde a derivada fracionária tem outra interpretação. O desenvolvimento da teoria de fractais abriu novos campos

---

<sup>2</sup>Em uma das seções do trabalho de Mainardi é apresentada uma interessante discussão sobre a essência do assim chamado cálculo fracionário de Riemann-Liouville. Além disso, é estabelecida a conexão com a definição de derivada fracionária segundo Caputo.

e perspectivas para a teoria de derivadas fracionárias, especialmente na modelagem de sistemas dinâmicos e estruturas porosas.

Além disso, a assim chamada difusão anômala, que ocorre quando na difusão há um crescimento não linear da variância no decorrer do tempo, tem o seu estudo intimamente ligado ao cálculo de ordem não-inteira, sendo possível, neste caso, analisar a derivada de ordem não-inteira como uma taxa de variação mais fina [27, 93]. A difusão anômala pode ser classificada em duas classes distintas, as quais necessitam de diferentes modelos físicos, ambos envolvendo a assim chamada equação (espacial) fracionária de difusão. A função de Green e os propagadores para a equação multidimensional de difusão envolvendo o Laplaciano fracionário foram obtidos por Hanyga [52].

No trabalho de Chen [27] a origem da difusão anômala é investigada através da conjectura de duas hipóteses: (a) Invariância Fracionária e (b) Equivalência Fractal. É proposto um modelo através do conceito da derivada de Hausdorff e discutido o problema de Cauchy associado à equação de difusão anômala unidimensional. Por fim, mencionamos dois artigos de Saxena et al., nos quais os autores estudam as soluções de várias equações fracionárias, em particular, a equação de difusão [103] e a equação de reação-difusão [104].

Uma aplicação do cálculo fracionário em matemática financeira foi recentemente apresentada por Wyss [117], que obteve a solução para a assim chamada equação de Black-Scholes através da metodologia da transformada de Laplace. Novamente, esta é uma aplicação na qual a derivada temporal é substituída por uma derivada de ordem não-inteira.

Inúmeros problemas quânticos são discutidos através da equação de Schrödinger que descreve o comportamento mecânico-quântico não relativístico. Guo-Xu [50] discutem algumas aplicações físicas da equação de Schrödinger fracionária associada a uma partícula livre e a um poço de potencial infinito, bem como apresentam a função de Green em um espalhamento quântico. Bhatti [13] apresenta uma discussão para a equação de propagação de onda de Schrödinger através da metodologia da justaposição de transformadas, ou seja, a transformada de Laplace na parte temporal e a transformada de Fourier na parte espacial. É calculada a correspondente função de Green de modo a discutir o princípio de incerteza.

Arikoglu-Ozkol [6] implementaram o assim chamado método da transformada diferencial no campo das equações diferenciais fracionárias, mostrando ser esta técnica de aplicação simples. São discutidos exemplos numéricos.<sup>3</sup>

Por fim, não podemos deixar de citar o livro de Miller-Ross [83], no qual os autores apresentam, de maneira minuciosa, o desenvolvimento do cálculo fracionário até o ano de 1970 tendo como base a definição de Riemann-Liouville para a derivada fracionária.

---

<sup>3</sup>No artigo de Arikoglu-Ozkol, também é mencionada uma aplicação, até onde sabemos, inédita do cálculo fracionário em Psicologia [3]. Os autores mostram a importância das funções de Mittag-Leffler como uma generalização para a função exponencial.

Lamentavelmente este livro não menciona os trabalhos de Caputo. Oldham-Spanier [87], o primeiro e um dos mais importantes livros no tema, apresenta uma série de aplicações do cálculo fracionário. Além disso, citamos o livro de Pudlubny [94] que além de ser bastante completo tem um enfoque bastante prático, sem deixar de ser rigoroso, e tem suas aplicações baseadas na derivada fracionária segundo Caputo. Por fim, mencionamos que várias outras aplicações podem ser encontradas nos livros Samko et al. [100], Kyriakova [67] e Kilbas et al. [65].

Convém notar que a teoria aqui apresentada pode ser estudada em termos das assim chamadas derivadas fracionárias generalizadas, no sentido de distribuições [69] que, neste trabalho, não serão consideradas.

Aqui, neste trabalho apresentamos uma visão geral do cálculo fracionário, passando por seu desenvolvimento histórico, definições mais aceitas para a integral e a derivada fracionárias, equações diferenciais fracionárias, métodos para se resolver tais equações e aplicações. Como um dos objetivos principais deste trabalho é tornar esta bela e poderosa teoria mais acessível às ciências, em todo desenvolvimento foi dado um enfoque maior às abordagens diretamente relacionadas com aplicações reais, isto é, na maioria das aplicações utilizamos a definição de Caputo para a derivada de ordem arbitrária, conforme ficará mais claro no decorrer do texto. É importante ressaltar que não tratamos aqui do problema relativo às dimensões físicas, tal problema foi estudado num trabalho recente de Inizan [61].

Este trabalho contém 9 capítulos dispostos da seguinte maneira. No Capítulo 1 é apresentada uma visão geral do cálculo fracionário, sua origem, principais contribuições de matemáticos importantes e primeiras aplicações. Também discutimos brevemente um dos pontos polêmicos da teoria, isto é, se a derivada de uma constante é ou não nula e finalizamos o capítulo apresentando a abordagem clássica para as diferentes definições da derivada fracionária.

No Capítulo 2 apresentamos a justificativa formal para se aceitar a definição de Riemann-Liouville para a integral de ordem fracionária, ou seja, justificamos a definição a partir da fórmula integral de Cauchy, clássico resultado da teoria de funções analíticas.

No Capítulo 3 formalizamos a definição da integral fracionária, apresentamos técnicas para o seu cálculo, bem como alguns exemplos, estabelecemos uma relação entre integrais de ordens inteiras e fracionárias, introduzimos a transformada de Laplace, mostramos a validade da assim chamada lei dos expoentes para integrais fracionárias e por fim demonstramos a fórmula de Leibniz.

No Capítulo 4 fazemos um desenvolvimento para a derivada fracionária, análogo ao feito no Capítulo 3 para a integral fracionária, além disso, é apresentada a definição de Caputo para a derivada fracionária, analisamos sobre quais hipóteses a lei dos expoentes se aplica para a derivada fracionária e finalizamos o capítulo com a fórmula de Leibniz para derivada fracionária segundo Caputo.

No Capítulo 5 utilizamos um trabalho de Lorenzo e Hartley acerca de funções de inicialização para a derivada e a integral fracionárias [72], para justificar o fato de termos adotado a definição de Caputo em nosso trabalho.

No Capítulo 6 apresentamos um estudo detalhado da função de Mittag-Leffler, passando por sua definição formal, generalizações, transformada de Laplace, relações com outras funções especiais e finalizamos apresentando dois teoremas originais envolvendo a função de Mittag-Leffler, bem como algumas consequências destes resultados.

Nos Capítulos 7, 8 e 9 apresentamos nossas aplicações. Mais precisamente, no Capítulo 7 propomos e resolvemos a equação do telégrafo fracionária, tomando tanto a derivada temporal quanto a derivada espacial como sendo de ordens não-inteiras, obtendo uma série de importantes consequências. Novos resultados, envolvendo as funções de Mittag-Leffler, são obtidos e demonstrados de forma indireta e os resultados sendo confirmados pela demonstração formal.

No Capítulo 8 discutimos a generalização fracionária do sistema dinâmico de Lotka-Volterra que descreve, por exemplo, os sistemas presa-predador, parasita-hospedeiro e planta-herbívoros [1, 35].

No Capítulo 9 apresentamos e discutimos uma generalização fracionária da equação integrodiferencial de Langevin, que pode ser encarada como uma forma natural de se estudar a difusão anômala, [45, 46, 96].

Por fim, no Apêndice apresentamos um estudo sobre as funções gama e beta. Finalizamos com nossas conclusões e trabalhos futuros.

# Cálculo Fracionário

---

## 1.1 Introdução

O cálculo fracionário tem sua origem na seguinte questão: *É possível estender o significado de uma derivada de ordem inteira,  $d^n y/dx^n$ , quando  $n$  é uma fração?* Tempos depois, buscou-se solução para esta indagação no caso em que  $n$  passa a ser um irracional ou complexo. Uma vez que esta questão foi respondida afirmativamente, o nome mais preciso para a teoria que vamos abordar seria *cálculo de ordem arbitrária*, contudo utilizamos a denominação clássica, ou seja, *cálculo fracionário*.

Neste texto, mostramos inicialmente um apanhado histórico, comentando, sem discutir a validade, algumas tentativas de justificar a resposta afirmativa para a indagação, bem como descrevemos as primeiras utilizações práticas do cálculo fracionário. Por fim, comentamos os eventuais erros cometidos, apresentamos as definições para integrais fracionárias mais aceitas e introduzimos o assunto de nosso próximo passo, isto é, a justificativa de utilizarmos tais definições.

## 1.2 Origem do Cálculo Fracionário

Em 1695 l'Hôpital perguntou, em carta, ao seu amigo Leibniz, pai da notação moderna do cálculo diferencial, qual seria o significado de  $D^n y \equiv d^n y/dx^n$  quando  $n$  fosse igual a  $1/2$ . Mesmo sem muito rigor e com um tom profético Leibniz afirmou: *Segue que  $D^{1/2}x$  será igual a  $x\sqrt{dx} : x$ . Este é um aparente paradoxo do qual um dia importantes aplicações serão obtidas.*

A idéia de uma derivada de ordem genérica também não escapou da atenção de Euler que em 1730 escreveu que a dificuldade em se obter tais derivadas poderia ser mais bem entendida com o auxílio de interpolações na derivada.

Já Lagrange contribuiu de maneira indireta para o cálculo fracionário quando, em 1772, desenvolveu a assim chamada lei dos expoentes, isto é;

$$\frac{d^m}{dx^m} \cdot \frac{d^n}{dx^n} y = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} y.$$

Em notação moderna, o ponto na equação acima é substituído pela simples justaposição (uma vez que o ponto não denota uma multiplicação). Embora tenha sido demonstrado que a lei dos expoentes não é válida para toda função  $y$ , quando  $n$  e  $m$  são arbitrários, esta foi de grande utilidade no desenvolvimento da teoria do cálculo fracionário [83].

Em 1812, Laplace definiu a derivada fracionária em termos de uma integral, e em 1819 a primeira menção, em um texto científico, às derivadas de ordem fracionária foi feita por Lacroix. Em um livro de mais de 700 páginas, Lacroix dedicou menos de duas destas a um problema que visava obter a derivada de ordem fracionária de um polinômio  $y = x^m$ . Para tanto, partiu do seguinte fato: No caso em que  $n$  é um número natural temos, para  $m \geq n$ , que

$$\frac{d^n}{dx^n} y = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad (1.1)$$

sendo assim, fazendo uso da função gama [15] poder-se-ia concluir que quando  $n$  não é um número natural temos

$$\frac{d^n}{dx^n} y = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}. \quad (1.2)$$

Um caso particular da equação acima pode ser obtido tomando-se  $m = 1$  e  $n = 1/2$ , de onde segue o resultado

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} y = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}. \quad (1.3)$$

É interessante notar que apesar de ser em certa instância ingênua, a dedução feita por Lacroix coincide, neste caso, com a obtida pelo método mais aceito nos tempos atuais, ou seja, o método proposto por Riemann-Liouville, entretanto esta, ao contrário daquela, possibilita várias aplicações interessantes como vamos ver adiante.

Fourier, 1822, também não se absteve do estudo das derivadas de ordem fracionária. Seu estudo está baseado na seguinte representação integral<sup>1</sup>:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \cos[p(x-\alpha)] dp. \quad (1.4)$$

---

<sup>1</sup>Esta representação integral é conhecida hoje como representação integral de Fourier [33].



Seja  $k \in \mathbb{N}$ . Temos, então,

$$\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{se } n = (1 + 4k) \\ -\cos x & \text{se } n = (2 + 4k) \\ \operatorname{sen} x & \text{se } n = (3 + 4k) \\ \cos x & \text{se } n = 4k, \end{cases}$$

de onde podemos escrever

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos[p(x - \alpha)] = p^n \cos\left[p(x - \alpha) + \frac{n\pi}{2}\right].$$

A partir da equação anterior, Fourier concluiu que para  $u$  arbitrário obtemos

$$\frac{d^u}{dx^u} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} p^u \cos\left[p(x - \alpha) + \frac{u\pi}{2}\right] dp. \quad (1.5)$$

### 1.3 Contribuições de Abel e Liouville

Apesar de vários outros notáveis matemáticos terem se dedicado ao cálculo fracionário Abel foi o primeiro a encontrar, em 1823, uma aplicação para esta teoria. Utilizando o cálculo fracionário Abel resolveu o problema da tautócrona, isto é, *determinar a curva tal que o tempo de descida de um corpo abandonado sobre ela e sujeito à ação da gravidade seja o mesmo independentemente do ponto onde este seja abandonado*<sup>2</sup>. A formulação de Abel nos leva à seguinte equação integral

$$\tau = \int_0^x (x - t)^{-1/2} f(t) dt, \quad (1.6)$$

na qual  $\tau$  é o tempo de descida. A integral da equação acima, como vamos ver adiante, exceto por um fator multiplicativo  $1/\Gamma(1/2)$  é um caso particular da definição de integração fracionária de ordem  $1/2$ . Tendo essas informações em mente e aceitando que, neste caso, a lei dos expoentes de Lagrange é válida, podemos escrever, aplicando a derivada de ordem  $1/2$  em ambos os lados da equação, que

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} \tau = \sqrt{\pi} f(x). \quad (1.7)$$

---

<sup>2</sup>O problema da tautócrona relativista foi discutido por Kamath [62].

Então determinamos a expressão para  $f(x)$  a partir do cálculo da derivada de ordem  $1/2$  de  $\tau$  em relação à variável  $x$ .

Uma importante constatação a ser feita é que a derivada fracionária de uma constante nem sempre é igual a zero. Este é um dos pontos polêmicos da teoria, que será mais bem discutido adiante e que traz consigo uma das questões em aberto na teoria: Qual é a interpretação geométrica da derivada fracionária? Esta é uma pergunta extremamente pertinente uma vez que a interpretação clássica de que a derivada é a taxa de variação não se aplica neste contexto, como ficou claro na aplicação proposta por Abel.

As contribuições de Abel e Fourier chamaram a atenção de Liouville que foi o autor do primeiro grande estudo do cálculo fracionário. Seu ponto de partida, em 1832, foi a seguinte relação

$$D^m e^{ax} = a^m e^{ax}.$$

A partir desta ele concluiu que

$$D^u e^{ax} = a^u e^{ax},$$

na qual  $u$  é arbitrário. De maneira natural, se  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}$ , podemos escrever

$$D^\nu f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\nu e^{a_n x}. \quad (1.8)$$

A equação acima é conhecida como primeira fórmula de Liouville para a derivada fracionária. Esta expressão generaliza de maneira natural a noção de derivada, uma vez que  $\nu$  pode ser natural, fracionário, real ou complexo. Contudo, esta definição está condicionada a uma classe bastante restrita de funções, esta restrição é a motivação para o desenvolvimento da segunda definição, dada a seguir.

Sejam  $a > 0$  e  $x > 0$ . Consideremos a seguinte integral

$$I = \int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-xu} du.$$

Introduzindo a mudança de variável  $xu = t$  e tendo a definição da função gama [15] em mente podemos escrever

$$\begin{aligned} I &= x^{-a} \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt \\ &= x^{-a} \Gamma(a). \end{aligned}$$

Isolando  $x^{-a}$  na equação acima e aplicando o operador  $D^\nu$  em ambos os lados da equação obtemos

$$D^\nu x^{-a} = \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} u^{a+\nu-1} e^{-xu} du,$$

ou seja,

$$D^\nu x^{-a} = \frac{(-1)^\nu \Gamma(a + \nu)}{\Gamma(a)} x^{-(a+\nu)}. \quad (1.9)$$

Apesar de elegante, esta segunda definição de Liouville também está restrita a uma não muito ampla classe de funções, isto é, as funções do tipo  $x^{-a}$  (com  $a > 0$ ).

## 1.4 Uma Grande Controvérsia

Como mencionamos anteriormente, a derivada de ordem fracionária de uma constante, calculada pelo método de Lacroix, pode não ser nula. Uma vez que o cálculo fracionário deve generalizar o cálculo de ordem inteira<sup>3</sup>, é necessário que esta questão seja muito bem trabalhada de forma que a teoria do cálculo fracionário não seja inconsistente.

William Center [23] foi um dos pesquisadores que dedicou algum tempo a esta questão. Utilizando  $x^0$  para denotar a unidade e o método de Lacroix para calcular derivadas, Center concluiu, a partir da equação (1.2), que a derivada de ordem  $1/2$  de uma constante é dada por

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} x^0 = \frac{1}{\Gamma(1/2)} x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}. \quad (1.10)$$

Entretanto, utilizando a segunda definição de Liouville para a derivada fracionária,

$$\frac{(-1)^{1/2} \Gamma(a + 1/2)}{\Gamma(a)} x^{-(a+1/2)},$$

Center tomou o limite  $a \rightarrow 0^+$  e concluiu, a partir do resultado  $\lim_{a \rightarrow 0} \Gamma(a) = \infty$ , que

$$D^{1/2} x^0 = \lim_{a \rightarrow 0} D^{1/2} x^{-a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^{1/2} \Gamma(a + 1/2)}{\Gamma(a)} x^{-(a+1/2)} = 0. \quad (1.11)$$

Sem concluir qual das duas possibilidades era a correta, Center sensatamente afirmou que: *O dilema imposto por estas duas equações fica reduzido ao entendimento exato do que significa  $d^u x^0 / dx^u$ . Quando esta questão for respondida teremos automaticamente a solução do suposto dilema.*

## 1.5 Contribuições de Riemann

Uma descoberta póstuma mostrou que nos tempos de graduação Riemann também se preocupou com o cálculo fracionário. Esta descoberta foi publicada em 1892, e

---

<sup>3</sup>No sentido de que a derivada de uma função mede a taxa de variação da mesma e, portanto, a derivada de uma constante é nula.

nesta Riemann sugeria uma generalização para a série de Taylor e para as derivadas, a saber<sup>4</sup>:

$$J^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt + \Psi(x). \quad (1.12)$$

Para minimizar a ambiguidade advinda do limite inferior da integral acima,  $c$ , Riemann introduziu a função complementar  $\Psi(x)$ . A introdução desta função complementar em detrimento de uma mais bem elaborada definição de  $c$ , acabou por tornar ineficiente e demasiadamente complexa a definição dada por Riemann. Nos dias atuais a assim chamada definição de Riemann-Liouville para a integração fracionária é exatamente a dada pela equação (1.12), porém sem a função complementar e com  $J^\nu$  substituído por  ${}_c J_x^\nu$ , com  $c$  e  $x$  denotando os limites de integração inferior e superior, respectivamente.

### 1.5.1 Origem da Definição de Riemann-Liouville

O primeiro trabalho intimamente ligado a assim chamada definição de Riemann-Liouville data de 1869 e foi publicado por Sonin [108]. O ponto de partida de seu trabalho foi a bem conhecida fórmula integral de Cauchy envolvendo a derivada de ordem  $n$ , ou seja,

$$D^n f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi. \quad (1.13)$$

Obviamente, tomar a derivada fracionária de  $f(z)$  não consiste simplesmente em mudar, na equação acima,  $n \in \mathbb{N}$  por  $\nu \notin \mathbb{N}$  e  $n!$  por  $\Gamma(\nu + 1)$ , pois ao tomar  $n \notin \mathbb{N}$  na equação acima o integrando deixa de possuir um pólo e passa a possuir um ponto de ramificação em  $z = \xi$ , e consequentemente o contorno  $C$  deve ser mudado para algum contorno do tipo Bromwich modificado [33].

As modificações acima foram feitas em detalhes por Laurent em 1878 em um trabalho que trata de operadores generalizados [68]. O referido trabalho foi o ponto de partida para o desenvolvimento moderno do cálculo fracionário. Laurent também se baseou na fórmula integral de Cauchy para formular sua definição, entretanto utilizou um contorno aberto, tal método conduziu à seguinte definição para a integral de ordem arbitrária  $\nu$

$${}_c J_x^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt, \quad \operatorname{Re}(\nu) > 0. \quad (1.14)$$

Note que a definição dada por Laurent coincide com a proposta por Abel, equação (1.6), no caso em que  $\nu = 1/2$ , e com a proposta por Riemann, equação (1.12), no caso em

---

<sup>4</sup>Embora alguns autores utilizem a notação  $D^{-\nu}$  para a integral fracionária de ordem  $\nu$ , neste trabalho deixamos o símbolo  $D$  apenas para a derivada. Para denotar a integral de ordem  $\nu$  utilizamos a notação moderna, introduzida por Gorenflo e Mainardi [49],  $J^\nu$ .

que  $x > c$ , extraindo-se a função complementar. A versão mais usada da equação acima é aquela em que  $c = 0$ ,

$${}_0J_x^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt, \quad \operatorname{Re}(\nu) > 0. \quad (1.15)$$

Esta forma é conhecida como integral fracionária de Riemann-Liouville. A seguir discutimos condições para que a integral da equação (1.14) seja convergente para os valores de  $c = 0$ , ou seja, as chamadas funções da classe de Riemann e  $c = -\infty$ , isto é, as chamadas funções da classe de Liouville.

### •Funções da Classe de Riemann

Uma condição suficiente para que uma função  $f$  seja da classe de Riemann é que

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = O(x^{1-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0. \quad (1.16)$$

Exemplos de funções desta classe são, constantes e funções do tipo

$$x^a, \quad a > -1. \quad (1.17)$$

### •Funções da Classe de Liouville

Por outro lado quando  $c = -\infty$  a equação (1.14) toma a forma

$${}_{-\infty}J_x^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt, \quad \operatorname{Re}(\nu) > 0. \quad (1.18)$$

Uma condição suficiente para que a integral na equação (1.18) seja convergente, ou seja, que  $f$  seja da classe de Liouville é que

$$f(-x) = O(x^{-\nu-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0, \quad x \rightarrow \infty. \quad (1.19)$$

As funções do tipo

$$x^{-a}, \quad a > \nu > 0, \quad (1.20)$$

são exemplos de funções da classe de Liouville. Entretanto, se  $-1 < a < 0$ , então dependendo dos valores de  $\nu$  as duas classes podem se sobrepor.

No caso em que  $f(t) = e^{at}$ , com  $\operatorname{Re}(a) > 0$ , pela equação (1.18), podemos escrever

$${}_{-\infty}J_x^\nu e^{ax} = a^{-\nu} e^{ax}.$$

Se considerarmos que a lei dos expoentes,  $D[J^\nu f(x)] = D^{1-\nu} f(x)$  é válida neste caso, sendo  $0 < \nu < 1$ , temos que  $\mu = 1 - \nu > 0$  a equação acima pode ser escrita como

$${}_{-\infty}D_x^\mu e^{ax} = a^\mu e^{ax}, \quad \operatorname{Re}(a) > 0.$$

Concluimos, desta forma, que a primeira fórmula de Liouville, equação (1.8), é condizente com o procedimento aqui utilizado.

Por outro lado, se  $f(x) = x^{-a}$ ,  $a > \nu > 0$  temos, pelas equações (1.18) e (1.20)

$$-_{\infty}J_x^{\nu}x^{-a} = (-1)^{-\nu}\frac{\Gamma(a-\nu)}{\Gamma(a)}x^{-a+\nu},$$

para  $x < 0$ , além disso, se  $0 < \nu < 1$ , então  $\mu = 1 - \nu > 0$  e

$$-_{\infty}D_x^{\mu}x^{-a} = (-1)^{\mu}\frac{\Gamma(a+\mu)}{\Gamma(a)}x^{-a-\mu}.$$

Este é o mesmo resultado obtido por Liouville em sua segunda definição, equação (1.9), porém nesta equação tinha-se como hipótese que  $x > 0$  e aqui temos que  $x < 0$ . De fato, se  $x > 0$  o resultado é válido apenas para  $0 < \nu < a < 1$ .

Sendo  $f(x) = x^a$  e  $\nu > 0$ , temos a partir da integral fracionária de Riemann-Liouville, equação (1.15), que

$${}_0J_x^{\nu}x^a = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\nu+1)}x^{a+\nu}, \quad a > -1, \quad (1.21)$$

mais uma vez admitindo que a lei dos expoentes é válida e tomando  $0 < \nu < 1$ ,

$${}_0D_x^{\nu}x^a = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-\nu+1)}x^{a-\nu}, \quad a > -1. \quad (1.22)$$

Evidentemente para  $f(x) = x$  e  $\nu = 1/2$  na equação acima obtemos o mesmo resultado obtido por Lacroix. Além disso, podemos agora tentar elucidar a questão proposta por Center para a derivada de ordem fracionária de uma constante. Considerando  $f(x) = 1$  e  $\nu = 1/2$ , a equação (1.22) nos mostra que

$${}_0D_x^{1/2}x^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-1/2+1)}x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}.$$

Por outro lado, Center se equivocou ao utilizar a definição de Liouville para mostrar que a derivada de ordem meio de uma constante é nula, uma vez que uma constante não é uma função da classe de Liouville e sim da classe de Riemann.

Outra definição de integral fracionária que vem se tornando mais comum é a dada por Weyl, isto é,

$${}_xW_{\infty}^{-\nu}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_x^{\infty}(t-x)^{\nu-1}f(t)dt, \quad \text{Re}(\nu) > 0. \quad (1.23)$$

A definição acima pode ser obtida a partir da equação (1.18) através da mudança da variável  $t = -\tau$  [83].

## 1.6 Heaviside e os Operadores Generalizados

Oliver Heaviside publicou, em 1892, uma grande quantidade de artigos dedicados à resolução de equações diferenciais lineares através da metodologia dos operadores generalizados [57]. Tal método, posteriormente conhecido como *Cálculo Operacional de Heaviside*, é bastante aplicável em problemas de engenharia, como por exemplo na teoria de transmissão de corrente elétrica em cabos.

Como já mencionamos, o cálculo operacional de Heaviside tem como objeto operadores lineares. Denotando o operador diferenciação por  $p$  e tratando este como se fosse uma constante, a equação do calor,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t) = a^2 \frac{\partial}{\partial t}u(x, t)$$

com  $a^2$  uma constante positiva, toma a seguinte forma

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u = a^2 p u,$$

cujas solução geral é dada por

$$u(x, t) = A e^{x a p^{1/2}} + B e^{-x a p^{1/2}},$$

na qual  $A$  e  $B$  são constantes. Esta é exatamente a solução que teríamos se  $p$  fosse constante. Como  $p$  não é constante, Heaviside expandiu a exponencial em potências de  $p^{1/2} = d^{1/2}/dx^{1/2} = D^{1/2}$  e a validade do resultado obtido foi posteriormente comprovada utilizando-se a definição de Riemann-Liouville. Na teoria dos circuitos elétricos Heaviside utilizou frequentemente o operador  $p^{1/2}$  e sua interpretação para  $D^{1/2}(1)$  coincide com a apresentada na seção anterior, ou seja,  $d^{1/2}/dx^{1/2}x^0 = (\sqrt{\pi x})^{-1}$ . Uma vez que constantes são funções da classe de Riemann e não da classe de Liouville, operadores de Heaviside devem ser interpretados no contexto dos operadores de Riemann,  ${}_0D'_x$ .

Heaviside não era um pesquisador muito rigoroso, por esta razão, embora seus resultados fossem corretos, somente foram bem aceitos depois de alguns anos quando Bromwich os formalizou de modo consistente [83].

## 1.7 Contribuições do Século Passado

Entre os anos de 1900 e 1970 poucas contribuições foram feitas à teoria do cálculo fracionário. Porém em 1974, por iniciativa da University of New Haven, foi realizado o primeiro congresso internacional sobre cálculo fracionário. Neste congresso uma gama muito

grande de assuntos foi tratada, incluindo o cálculo fracionário propriamente dito, operadores generalizados, inequações obtidas através do cálculo fracionário e aplicações do cálculo fracionário em modelos estatísticos [32].

Os resultados deste congresso foram notáveis. Poucos anos após sua realização o número de pesquisadores voltados para o cálculo fracionário aumentou significativamente e em 1984 o segundo congresso internacional foi promovido pela University of Strathclyde, na Escócia [81].

Nos anos 80 o Japão foi responsável por grandes avanços teóricos, em especial, no estudo de equações diferenciais de ordem não-inteira e suas aplicações. Muitos destes resultados foram apresentados no terceiro congresso internacional, sediado na universidade Nihon de Tokyo, no Japão [8].

Embora o cálculo fracionário tenha sofrido uma considerável evolução neste período algumas questões desta teoria permanecem em aberto, entre elas uma de fundamental importância: É possível encontrar uma interpretação geométrica para a derivada de ordem não-inteira?

## 1.8 Abordagem Clássica

Nesta seção apresentamos a forma mais utilizada das integrais fracionárias de Riemann, Liouville e Riemann-Liouville e algumas propriedades elementares de tais integrais<sup>5</sup>. Como ficou claro pelo que expusemos até aqui existe mais de uma definição de integração fracionária, por conveniência consideramos: a versão de Riemann como sendo

$${}_c J_x^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt, \quad x > c \quad (1.24)$$

a versão de Liouville

$${}_{-\infty} J_x^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt \quad (1.25)$$

bem como a versão de Riemann-Liouville

$${}_0 J_x^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt. \quad (1.26)$$

A maioria de nossos estudos será baseada nesta última versão. Além dessas três versões utilizamos também a versão de Weyl, isto é,<sup>6</sup>

$${}_x W_\infty^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_x^\infty (t-x)^{\nu-1} f(t) dt.$$

---

<sup>5</sup>Como neste ponto estamos apenas apresentando um apanhado histórico, não introduzimos aqui a versão que para nós será a mais importante, i.e., a definição da derivada fracionária devida a Caputo, que será apresentada em detalhes no Capítulo 4.

<sup>6</sup>A definição aqui apresentada é a mesma da equação (1.23).



Uma observação trivial que conecta as definições desta seção aos estudos propostos por Heaviside, ou seja, operadores lineares, é que todas as definições de (1.24) a (1.26) são exemplos de operadores lineares, isto é, sendo  $D$  a representação de qualquer um deles,  $\alpha, \beta$  constantes e  $f, g$  funções, temos

$$D[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha Df(x) + \beta Dg(x). \quad (1.27)$$

Um de nossos objetivos para os próximos capítulos é convencer o leitor que as definições apresentadas nesta seção são de fato bastante aceitáveis e completas.

# Justificativas

Neste capítulo temos como objetivo justificar a aceitação das definições apresentadas na última seção do capítulo anterior. Para tanto, utilizamos dois diferentes procedimentos baseados, respectivamente, no cálculo elementar e nas variáveis complexas. Iniciamos este capítulo definindo a notação para a derivada e para a integral de ordens fracionárias.

## 2.1 Cálculo Elementar

Para recuperar e justificar o resultado da equação (1.24) consideremos a seguinte integral

$$I = \int_c^x dx_1 \int_c^{x_1} dx_2 \int_c^{x_2} dx_3 \cdots \int_c^{x_{n-1}} f(t) dt,$$

na qual  $f$  é uma função real e contínua no intervalo  $[c, b]$  e  $b > x$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Mostramos a seguir que a integral da equação acima coincide com a definição de  ${}_c J_x^\nu f(x)$ , dada pela equação (1.24), no caso em que  $\nu = n \in \mathbb{N}$ . Reescrevendo o lado direito da equação acima temos

$$I = \int_c^x K_n(x, t) f(t) dt, \quad (2.1)$$

na qual o núcleo  $K_n(x, t)$  é uma função de  $n$ ,  $x$  e  $t$ . Mostramos que esta função faz sentido mesmo quando  $n \notin \mathbb{N}$  e definimos  ${}_c J_x^\nu f(x)$ , para todo  $\nu$  tal que  $\text{Re}(\nu) > 0$ , por

$${}_c J_x^\nu f(x) = \int_c^x K_\nu(x, t) f(t) dt. \quad (2.2)$$

Para provar o que foi dito acima consideramos uma função  $G(x, t)$  contínua em  $[c, b] \times [c, b]$ , com  $b > x$ . Sabemos, pelo teorema de Goursat, que

$$\int_c^x dx_1 \int_c^{x_1} G(x_1, t) dt = \int_c^x dt \int_t^x G(x_1, t) dx_1.$$

Em particular para  $G(x, t) \equiv f(t)$  podemos escrever

$$\int_c^x dx_1 \int_c^{x_1} f(t) dt = \int_c^x dt \int_t^x f(x_1) dx_1 = \int_c^x (x - t) f(t) dt.$$

De maneira análoga, para  $n = 3$  podemos escrever

$${}_c J_x^3 f(x) = \int_c^x dx_1 \left[ \int_c^{x_1} (x_1 - t) f(t) dt \right] = \int_c^x f(t) dt \int_t^x (x_1 - t) dx_1 = \int_c^x f(t) \frac{(x_1 - t)^2}{2} dt$$

Repetindo este procedimento  $n$  vezes concluímos que

$$K_n(x, t) = \frac{(x - t)^{n-1}}{(n - 1)!} = \frac{(x - t)^{n-1}}{\Gamma(n)}. \quad (2.3)$$

Então segue-se que a função  $K_n(x, t)$  está bem definida para  $n > 0$ , ou seja, que é plausível a definição de  ${}_c J_x^\nu f(x)$  dada pela equação (1.24), isto é,

$${}_c J_x^\nu f(x) = \int_c^x K_\nu(x, t) f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x - t)^{\nu-1} f(t) dt. \quad (2.4)$$

## 2.2 Variáveis Complexas

Sejam  $f(z)$  uma função complexa, analítica em uma região aberta do plano complexo  $\mathbf{A}$ ,  $A$  uma região aberta em  $\mathbf{A}$  e  $C$  a curva que descreve a fronteira de  $A$ . Nestas condições, como já mencionamos anteriormente [33], a fórmula integral de Cauchy nos possibilita calcular a derivada de  $f(z)$ , ou seja,

$$D^n f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

Como havíamos mencionado, no capítulo anterior, tomar a derivada de ordem fracionária não consiste simplesmente em mudar, na equação acima,  $n \in \mathbb{N}$  por  $\nu \notin \mathbb{N}$  e  $n!$  por  $\Gamma(\nu + 1)$ , pois ao tomar  $\nu \notin \mathbb{N}$  na equação acima o integrando deixa de possuir um pólo e passa a possuir um ponto de ramificação em  $z = \xi$ . Por esta razão, vamos definir  ${}_c D_x^\nu f(x)$  da seguinte maneira<sup>1</sup>

$${}_c D_x^\nu f(x) = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{2\pi i} \int_{H_a} (\xi - x)^{-\nu-1} f(\xi) d\xi = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{2\pi i} \int_c^{(x+)} (\xi - x)^{-\nu-1} f(\xi) d\xi, \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup>Por simplicidade tomamos  $z = x \in \mathbb{R}$ . O caso em que  $z \notin \mathbb{R}$  pode ser recuperado através de uma simples translação.

na qual  $Ha$  denota um contorno do tipo Hankel [34] orientado no sentido anti-horário, como nos mostra a Figura 2.1, enquanto que a segunda igualdade é devida ao teorema de Cauchy [33].

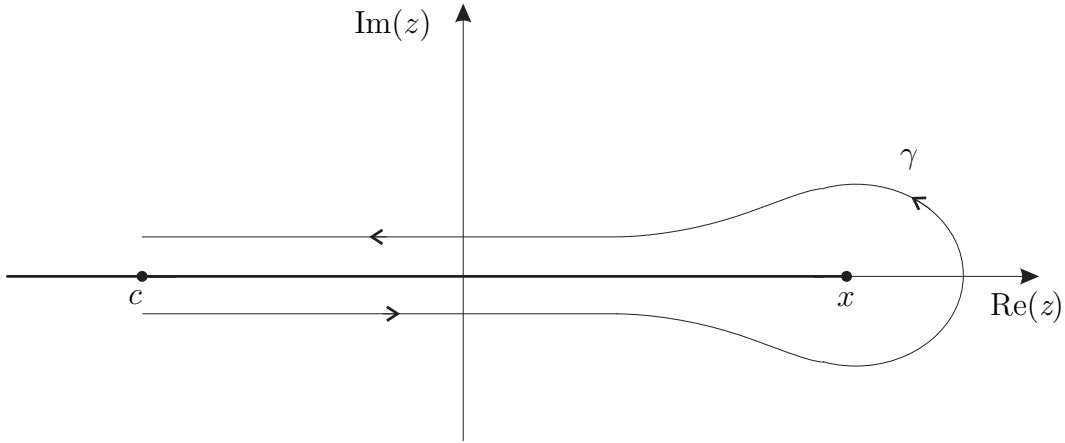


Figura 2.1: Contorno de Hankel.

Sendo  $f(z)$  uma função analítica, o integrando da equação (2.5) possui singularidades apenas ao longo do ramo de logaritmo, (em **negrito** na Figura 2.1) desta forma podemos, pelo teorema de Cauchy, deformar o contorno de Hankel como nos mostra a Figura 2.2. O contorno, conhecido como contorno de Bromwich modificado, torna os cálculos mais simples pois podemos dividi-lo em três partes: dois segmentos de reta,  $[c, x - r]$ , denotados por  $L_1$  e,  $L_2$ , e uma circunferência,  $\gamma$ , de raio  $r$  e centrada em  $x$ .

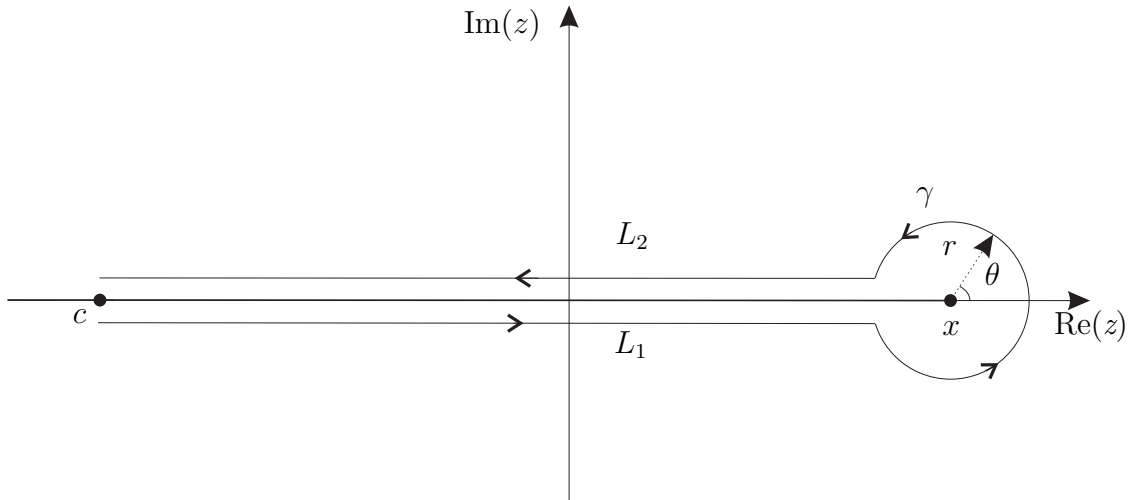


Figura 2.2: Contorno de Bromwich modificado.

Note que a constante  $c$  é escolhida de forma, em princípio arbitrária, respeitando

apenas a condição  $x > c$ .

Supondo que  $\xi - x$  é um número positivo, definimos  $\ln(\xi - x)^{-\nu-1}$  como sendo um número real. Podemos escrever para  $\xi$  em  $\gamma$  a expressão<sup>2</sup>

$$(\xi - x)^{-\nu-1} = e^{(-\nu-1) [\ln |\xi-x| + i\theta]}.$$

Uma vez que o contorno está orientado no sentido anti-horário,  $\theta = \pi$  em  $L_1$  e

$$(\xi - x)^{-\nu-1} = e^{(-\nu-1) [\ln |\xi-x| + i\pi]} = e^{(-\nu-1) [\ln(x-\xi) + i\pi]}$$

em  $L_2$ ,  $\theta = -\pi$ , consequentemente

$$(\xi - x)^{-\nu-1} = e^{(-\nu-1) [\ln(x-\xi) - i\pi]}.$$

Levando em conta estas considerações podemos calcular, para  $\text{Re}(\nu) < 0$ , a integral da equação (2.5) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \int_c^{(x+)} (\xi - x)^{-\nu-1} f(\xi) d\xi &= \int_{L_2} + \int_{\gamma} + \int_{L_1} \\ &= e^{i(\nu+1)\pi} \int_c^{x-r} (x-t)^{-\nu-1} f(t) dt \\ &+ \int_{\gamma} (\xi - x)^{-\nu-1} f(\xi) d\xi + e^{-i(\nu+1)\pi} \int_{x-r}^c (x-t)^{-\nu-1} f(t) dt, \end{aligned}$$

na qual  $t = \text{Re}(\xi)$ . Temos que a integral sobre a curva  $\gamma$  é nula, quando tomamos o limite  $r \rightarrow 0$ , de fato

$$\int_{\gamma} (\xi - x)^{-\nu-1} f(\xi) d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} r^{-\nu-1} e^{-i(\nu+1)\theta} f(x + re^{i\theta}) (ire^{i\theta} d\theta),$$

de onde podemos escrever

$$\left| \int_{\gamma} (\xi - x)^{-\nu-1} f(\xi) d\xi \right| \leq r^{-\text{Re}(\nu)} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x + re^{i\theta})| d\theta,$$

ou seja,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma} (\xi - x)^{-\nu-1} f(\xi) d\xi = 0.$$

Sendo assim, podemos escrever, tomando o limite  $r \rightarrow 0$ , que

$$\int_c^{(x+)} (\xi - x)^{-\nu-1} f(\xi) d\xi = [e^{i(\nu+1)\pi} - e^{-i(\nu+1)\pi}] \int_c^x (x-t)^{-\nu-1} f(t) dt,$$

---

<sup>2</sup>Dados um número complexo  $z$ , seu argumento  $\theta$  e um parâmetro  $t$ , podemos escrever:  $z = |z|e^{i\theta}$ , de onde  $z^t = e^{t \ln z} \Rightarrow z^t = e^{t(\ln |z| + i\theta)}$ .

ou ainda,

$$\begin{aligned} {}_cD_x^\nu f(x) &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \int_c^{(x+)} (\xi-x)^{-\nu-1} f(\xi) d\xi, \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1) \operatorname{sen}(\nu+1)\pi}{\pi} \int_c^x (x-t)^{-\nu-1} f(t) dt. \end{aligned}$$

No Apêndice mostramos em detalhes que

$$\frac{\Gamma(\nu+1) \operatorname{sen}(\nu+1)\pi}{\pi} = \frac{1}{\Gamma(-\nu)}. \quad (2.6)$$

Tendo em vista as duas últimas equações, chegamos ao resultado desejado, isto é,

$${}_cD_x^\nu f(x) \equiv {}_cJ_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_c^x (x-t)^{-\nu-1} f(t) dt; \quad \operatorname{Re}(\nu) < 0. \quad (2.7)$$

No caso em que  $c > 0$  temos a versão de Riemann para a integral de ordem fracionária, para  $c = 0$  temos a versão de Riemann-Liouville e para  $c = -\infty$ , temos a versão de Liouville. Uma discussão mais profunda sobre qual é o valor mais preciso para a constante  $c$  é apresentada no Capítulo 5.

# Integração Fracionária

---

Nos capítulos anteriores, além de mostrar os aspectos históricos referentes ao cálculo fracionário, apresentamos uma série de justificativas para torná-lo o mais lógico e intuitivo possível. Nos capítulos que se seguem, iniciamos o desenvolvimento de nossa teoria matemática. Começamos com uma formalização da integral fracionária de Riemann-Liouville, definindo cuidadosamente a classe de funções na qual este operador pode ser aplicado. Alguns exemplos de integrais fracionárias são apresentados e discutidos. Como vamos ver adiante, esta análise requer o conhecimento de algumas funções especiais como, por exemplo, as funções de Mittag-Leffler<sup>1</sup> [34]  $E_{\alpha,\beta}(z)$  e as funções  $C_t(\nu, a)$  e  $S_t(\nu, a)$ .

Também apresentamos técnicas que possibilitam o cálculo de integrais fracionárias de funções mais complexas, dentre elas destacamos a generalização da fórmula de Leibniz para integrais fracionárias e uma relação que estabelecemos entre integrais de ordem inteira e ordem não-inteira.

Na penúltima seção apresentamos a demonstração formal de um dos pilares do desenvolvimento desta teoria, a assim chamada lei dos expoentes para integrais fracionárias, isto é, mostramos que  ${}_0J^\nu({}_0J^\mu) = {}_0J^{\nu+\mu}$  para todos  $\nu$  e  $\mu$  positivos. Concluimos este capítulo com um estudo da transformada de Laplace, em particular mostramos o teorema da convolução e utilizamos este para calcular a transformada de Laplace de algumas integrais fracionárias. A transformada de Laplace, como vamos ver mais adiante, será frequentemente utilizada neste trabalho, em especial, quando estivermos estudando equações diferenciais fracionárias.

---

<sup>1</sup>Recomenda-se, fortemente, que o leitor que não tenha familiaridade com estas funções avance até o Capítulo 6 para uma melhor compreensão dos assuntos que se seguem.

No próximo capítulo, um estudo similar ao desenvolvido neste é feito para a derivada fracionária para que assim possamos passar ao estudo das equações diferenciais fracionárias e suas aplicações.

### 3.1 Definição da Integral Fracionária

Como havíamos mencionado, estamos interessados em investigar os diversos aspectos da integral fracionária de Riemann-Liouville. Nesta primeira seção apresentamos a definição formal, seguindo a notação moderna introduzida por Gorenflo e Mainardi [49].

Sejam  $X$  um número maior que zero,  $f$  uma função contínua por partes em  $[0, X]$  e  $\nu \geq 1$ . Neste caso temos, por resultados do cálculo de ordem inteira, que a integral de Riemann

$$\int_0^t (t - \xi)^{\nu-1} f(\xi) d\xi$$

existe para todo  $t \in [0, X]$ . Sabemos, também pelo cálculo elementar, que existem condições mais gerais para que a integral acima convirja, como por exemplo, que  $f$  seja contínua em  $(0, X]$  e que tenha comportamento similar a  $t^\lambda$  para  $-1 < \lambda < 0$  em uma vizinhança da origem, e se  $0 < \text{Re}(\nu) < 1$ , então a integral acima existe como integral imprópria, contudo para os nossos estudos a condição  $f$  contínua por partes é suficiente.

**Definição 1** Sejam  $\text{Re}(\nu) > 0$ ,  $f$  uma função contínua por partes em  $(0, \infty)$  e integrável em qualquer subintervalo de  $[0, \infty)$ . Então para  $t > 0$  denotamos por  $J^\nu$  e definimos a integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem  $\nu$  como sendo a seguinte integral

$${}_0J^\nu f(t) = J^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t - \xi)^{\nu-1} f(\xi) d\xi. \quad (3.1)$$

Embora utilizemos a notação  $J^\nu$  para designar a integral fracionária de Riemann-Liouville, em alguns casos em que possam ocorrer ambiguidades ou em que os limites de integração forem o foco de nosso estudo, como no Capítulo 5, vamos recorrer à notação clássica,  ${}_0D^{-\nu} f(t)$ , para a integral de ordem  $\nu$  de  $f(t)$ .

Façamos agora algumas considerações acerca da definição acima. Assim como já havíamos observado anteriormente, a equação (3.1) é uma integral imprópria quando  $0 < \text{Re}(\nu) < 1$ . A hipótese de que  $f$  é contínua por partes em  $(0, \infty)$  é tomada com o intuito de que funções que tenham comportamento similar a  $\ln t$  e  $t^\mu$ , com  $-1 < \mu < 0$  em uma vizinhança da origem também tenham sua integral fracionária definida. Definimos  $\mathbf{C}$  como sendo a classe das funções que satisfazem a Definição 1.

Como um primeiro exemplo calculamos a integral de ordem não-inteira,  $\nu$ , de um



monômio  $x^\mu$  com  $\mu > -1$ . Pela definição temos que

$$J^\nu x^\mu = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} t^\mu dt = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x \left[ x \left( 1 - \frac{t}{x} \right) \right]^{\nu-1} t^\mu dt. \quad (3.2)$$

Sendo  $u = t/x$  podemos escrever

$$\begin{aligned} J^\nu x^\mu &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 x^\nu (1-u)^{\nu-1} (xu)^\mu du = \frac{x^{\nu+\mu}}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 u^\mu (1-u)^{\nu-1} du \\ &= \frac{x^{\nu+\mu}}{\Gamma(\nu)} B(\mu+1, \nu) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} x^{\nu+\mu}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

na qual a terceira e quarta igualdades são devidas à definição da função beta e à equação (A.4), respectivamente. A primeira constatação a ser feita acerca da equação anterior é que esta recupera o resultado da integração de ordem inteira. Além disso, note que o lado direito da equação (3.2) é essencialmente a função beta<sup>2</sup> e como  $\mu + \text{Re}(\nu)$  pode ser negativo, concluímos, através deste exemplo o porquê de termos  $t > 0$  em nossa definição da integral fracionária. Com o intuito de evitar complicações matemáticas, não relacionadas ao cálculo fracionário em si, tomamos a constante  $\nu$  como sendo real e deixamos explícito nos casos em que isto não se verificar<sup>3</sup>.

## 3.2 Exemplos de Integrais Fracionárias

Iniciamos esta seção discutindo alguns casos triviais de integrais de ordem fracionária. Mesmo para estes casos mais elementares é de fundamental importância que o leitor tenha conhecimento sobre as funções apresentadas no Capítulo 6.

Como consequência natural do exemplo que já discutimos na equação (3.3), isto é, a integral fracionária de  $x^\mu$  com  $\mu > -1$ , temos que a integral fracionária de uma constante  $K$  é dada por

$$J^\nu K = \frac{K}{\Gamma(\nu+1)} t^\nu, \quad \nu > 0. \quad (3.4)$$

Como vamos ver a seguir, mesmo o cálculo de integrais fracionárias de funções simples costuma passar por relevantes complicações, isto justifica a quantidade, em certa instância pequena, de exemplos apresentados.

Seja  $f(t) = e^{at}$ , com  $a \in \mathbb{R}$ . Uma vez que a função  $e^{at}$  é de classe **C**, temos, pela Definição 1, que

$$J^\nu e^{at} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\xi)^{\nu-1} e^{a\xi} d\xi, \quad \nu > 0.$$

---

<sup>2</sup>Veja Apêndice, equação (A.2).

<sup>3</sup>Uma discussão envolvendo operadores fracionários com  $\nu$  complexo pode ser encontrada em [73].

Introduzindo a mudança de variável  $x = t - \xi$  podemos escrever

$$J^\nu e^{at} = \frac{e^{at}}{\Gamma(\nu)} \int_0^t x^{\nu-1} e^{-ax} dx, \quad \nu > 0.$$

Claramente o lado direito da equação acima não é uma função elementar, porém podemos fazer uma associação entre ela e a função gama incompleta<sup>4</sup> [15, 34], denotada por  $\gamma^*$  e definida da seguinte maneira

$$\gamma^*(\nu, t) = \frac{1}{\Gamma(\nu) t^\nu} \int_0^t \xi^{\nu-1} e^\xi d\xi. \quad (3.5)$$

A partir das equações anteriores podemos escrever

$$J^\nu e^{at} = t^\nu e^{at} \gamma^*(\nu, at).$$

Não é de se espantar que a equação acima seja extremamente frequente no estudo de equações diferenciais de ordem não-inteira, uma vez que esta representa a integral fracionária da função exponencial. No Capítulo 6, mostramos que<sup>5</sup>

$$E_{1,\mu+1}(x) = e^x \gamma^*(\mu, x)$$

na qual  $E_{\alpha,\beta}(x)$  é a assim chamada função de Mittag-Leffler de dois parâmetros. Desta forma concluímos que

$$J^\nu e^{at} = t^\nu e^{at} \gamma^*(\nu, at) = t^\nu E_{1,\mu+1}(at). \quad (3.6)$$

Como já havíamos mencionamos anteriormente, importantes propriedades das funções gama incompleta e de Mittag-Leffler podem ser encontradas no Capítulo 6 e em [34].

A partir da definição da integral fracionária para as funções seno e co-seno definimos, respectivamente, as funções  $S_t(\nu, a)$  e  $C_t(\nu, a)$ , da seguinte maneira

$$S_t(\nu, a) \equiv J^\nu \sin at = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t \xi^{\nu-1} \sin[a(t - \xi)] d\xi, \quad \nu > 0 \quad (3.7)$$

$$C_t(\nu, a) \equiv J^\nu \cos at = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t \xi^{\nu-1} \cos[a(t - \xi)] d\xi, \quad \nu > 0. \quad (3.8)$$

Tendo obtido uma expressão para a integral fracionária das funções seno, co-seno e exponencial, passemos ao estudo de um caso mais complicado. Seja  $f(t)$  definida da seguinte maneira

$$f(t) = (a - t)^\lambda, \quad a > t > 0.$$

Claramente  $f \in \mathbf{C}$ , logo podemos calcular sua integral fracionária, ou seja,

$$J^\nu (a - t)^\lambda = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t - \xi)^{\nu-1} (a - \xi)^\lambda d\xi.$$

---

<sup>4</sup>Veja Capítulo 6.

<sup>5</sup>Ver equação (6.13).

Sendo  $x = \frac{t - \xi}{a - \xi}$ , temos que

$$\xi = \frac{t - ax}{1 - x} \quad \text{e} \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{t - a}{(1 - x)^2}.$$

Introduzindo a mudança de variável descrita acima, podemos escrever

$$J^\nu(a - t)^\lambda = \int_{t/a}^0 \left[ \frac{t(1 - x) - t + ax}{1 - x} \right] \left[ \frac{a(1 - x) - t + ax}{1 - x} \right] \frac{[-(a - t)]}{(1 - x)^2} dx,$$

rearranjando os termos obtemos

$$J^\nu(a - t)^\lambda = \int_{t/a}^0 \frac{-1}{(1 - x)^{\nu+\lambda+1}} [x(a - t)]^{\nu-1} (a - t)^\lambda (a - t) dx,$$

ou ainda

$$J^\nu(a - t)^\lambda = \frac{(a - t)^{\nu+\lambda}}{\Gamma(\nu)} \int_0^{t/a} x^{\nu-1} (1 - x)^{-\nu-\lambda-1} dx.$$

A integral da equação acima é justamente a definição da função beta incompleta<sup>6</sup> [83], logo

$$J^\nu(a - t)^\lambda = \frac{(a - t)^{\nu+\lambda}}{\Gamma(\nu)} B_{t/a}(\nu, -\lambda - \nu). \quad (3.9)$$

### 3.3 Técnicas de Integração Fracionária

De maneira geral, explicitar a integral de ordem fracionária de uma função  $f(\xi)$  nada mais é do que tentar efetuar a integral

$$\int_0^t (t - \xi)^{\nu-1} f(\xi) d\xi, \quad \nu > 0.$$

Realizar estes cálculos é, na maioria dos casos, uma tarefa um tanto árdua, dada a natureza do núcleo  $(t - \xi)^{\nu-1}$ . Contudo, este núcleo também nos permite desenvolver técnicas que permitam o cálculo imediato de integrais fracionárias para uma ampla classe de funções. O objetivo desta seção é desenvolver tais técnicas.

Seja  $f \in \mathbf{C}$ . Mostremos que

$$J^\nu[t f(t)] = t J^\nu f(t) - \nu J^{\nu+1} f(t). \quad (3.10)$$

Temos, pela Definição (3.1), que

$$J^\nu[t f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t - \xi)^{\nu-1} [\xi f(\xi)] d\xi.$$

---

<sup>6</sup>Veja Capítulo 6.

Substituindo o termo entre colchetes, da equação acima, por

$$[t - (t - \xi)]f(\xi) = \xi f(\xi),$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} J^\nu[t f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t - \xi)^{\nu-1} [t - (t - \xi)] f(\xi) d\xi \\ &= \frac{t}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t - \xi)^{\nu-1} [f(\xi)] d\xi + \\ &\quad - \frac{\nu}{\Gamma(\nu + 1)} \int_0^t (t - \xi)^\nu [f(\xi)] d\xi, \end{aligned}$$

de onde segue o resultado desejado, isto é,

$$J^\nu[t f(t)] = t J^\nu f(t) - \nu J^{\nu+1} f(t).$$

Como consequências da equação (3.10) temos que

$$\begin{aligned} J^\nu[t e^{at}] &= t E_t(\nu, a) - \nu E_t(\nu + 1, a), & \nu > 0 \\ J^\nu[t \cos at] &= t C_t(\nu, a) - \nu C_t(\nu + 1, a), & \nu > 0 \\ J^\nu[t \sin at] &= t S_t(\nu, a) - \nu S_t(\nu + 1, a), & \nu > 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Passemos a generalização da equação (3.10). Seja  $p$  um número não-inteiro, temos que

$$J^\nu[t^p f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t - \xi)^{\nu-1} [\xi^p f(\xi)] d\xi.$$

Façamos uma mudança similar à que havíamos feito anteriormente, isto é,

$$\xi^p = [t - (t - \xi)]^p = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} t^{p-k} (t - \xi)^k,$$

onde  $\binom{p}{k}$  para  $p \notin \mathbb{Z}$  é dado pela equação abaixo [83]

$$\binom{-z}{n} = \frac{\Gamma(1 - z)}{n! \Gamma(1 - z - n)} = (-1)^n \frac{\Gamma(z + n)}{n! \Gamma(z)} = (-1)^n \binom{z + n - 1}{n}. \tag{3.12}$$

Combinando as duas equações anteriores temos que

$$\begin{aligned} J^\nu[t^p f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} t^{p-k} \int_0^t (t - \xi)^{\nu+k-1} f(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} \Gamma(\nu + k) t^{p-k} J^{\nu+k} f(t). \end{aligned}$$

Utilizando a equação (3.12) podemos escrever a generalização da equação (3.10) da seguinte maneira

$$J^\nu[t^p f(t)] = \sum_{k=0}^p \binom{-\nu}{k} [D^k t^p] [J^{\nu+k} f(t)]. \tag{3.13}$$

### 3.4 Relação entre Integrais de Ordem Inteira e de Ordem Não-Inteira

Seja  $f$  uma função contínua em  $[0, X]$ . A integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem  $\nu$  é dada por

$$\begin{aligned} J^\nu f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t - \xi)^{\nu-1} f(\xi) d\xi, \quad \nu > 0, \quad 0 < t \leq X \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (x)^{\nu-1} f(t - x) dx, \end{aligned} \quad (3.14)$$

na qual a segunda igualdade é devida a uma mudança de variável. Além disso, se a função  $f$  for analítica em  $a$  para todo  $a \in [0, X]$ , temos que [83]

$$f(t - x) = f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{D^k f(t)}{k!} x^k$$

e a série da equação acima converge uniformemente para todo  $x$  pertencente a  $(0, t)$ . Substituindo o resultado da equação anterior em (3.14) podemos escrever

$$\begin{aligned} J^\nu f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} f(t) \int_0^t x^{\nu-1} dx \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t x^\nu \left[ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{D^k f(t)}{k!} x^{k-1} \right] dx. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Uma vez que, por hipótese, a convergência é uniforme podemos comutar o somatório e a integral, ou seja,

$$J^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} f(t) \int_0^t x^{\nu-1} dx + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{D^k f(t)}{k!} \left( \int_0^t x^{\nu+k-1} dx \right).$$

Calculando as integrais resultantes obtemos a seguinte equação

$$J^\nu f(t) = \frac{f(t) t^\nu}{\nu \Gamma(\nu)} + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{D^k f(t)}{k!} \left( \frac{t^{\nu+k}}{\nu + k} \right),$$

a partir da qual podemos escrever

$$J^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k D^k f(t)}{k! (\nu + k)} t^{\nu+k}. \quad (3.16)$$

A equação acima apresenta uma relação entre as integrais de ordens não-inteira e inteira, que é justamente o resultado que buscávamos.

## 3.5 Transformada de Laplace

A transformada de Laplace [33] é uma ferramenta fundamental para o desenvolvimento de nossa teoria, em especial quando estudamos equações diferenciais de ordem fracionária. Por esta razão dedicamos esta seção à uma breve revisão acerca da transformada de Laplace<sup>7</sup> e ao cálculo da transformada de Laplace de algumas integrais fracionárias.

**Definição 2** Seja  $f(t)$  uma função definida no intervalo  $0 \leq t < \infty$ . Definimos a transformada de Laplace de  $f(t)$ , denotada por  $F(s)$  ou por  $\mathcal{L}[f(t)]$ , como sendo a integral

$$F(s) \equiv \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

na qual  $s$ , chamado *parâmetro da transformada*, é tal que  $\text{Re}(s) > 0$ .

A convergência da integral acima, numa região do plano complexo, pode ser garantida para uma classe bastante ampla de funções chamadas *admissíveis*.

**Definição 3** Uma função  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada admissível ou de ordem exponencial se as condições abaixo são satisfeitas:

- a) A função  $f$  for contínua por partes em  $[0, \infty)$ .
- b) Existirem duas constantes positivas  $M$  e  $\mu$  tais que para todo  $t \in [0, \infty)$  vale a desigualdade

$$|f(t)| < Me^{\mu t}.$$

Neste caso também dizemos que  $f(t)$  é de ordem exponencial  $\mu$ . Além disso, sabemos que a transformada de Laplace de uma função admissível existe e está bem definida<sup>8</sup>.

### 3.5.1 Linearidade

A linearidade da transformada de Laplace, bem como a linearidade das transformadas de Fourier, Mellin e Hankel, advém do fato delas estarem definidas em termos de integrais, que são operadores lineares [33].

### 3.5.2 Convolução

Em geral, a transformada de Laplace do produto de duas funções não é o produto das transformadas, porém introduzimos a seguir o conceito de produto de convolução, que é um

---

<sup>7</sup>Para uma análise mais minuciosa recomendamos a leitura da referência [33].

<sup>8</sup>A demonstração deste fato (teorema) também pode ser encontrada em [33].

produto conveniente no sentido em que esta propriedade seja válida, isto é, a transformada do produto de convolução é o produto das transformadas. Vamos ver adiante que esta propriedade é de fundamental importância no cálculo de transformadas de Laplace de integrais fracionárias.

**Definição 4** Sejam  $f(t)$  e  $g(t)$  duas funções de ordem exponencial  $\alpha$  e  $\beta$  e com transformadas de Laplace  $F(s)$  e  $G(s)$ , respectivamente, no intervalo  $[0, \infty)$ . Definimos a convolução de  $f(t)$  e  $g(t)$ , denotada por  $(f * g)(t)$  como sendo

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau.$$

Calculemos a transformada de Laplace de um produto de convolução, isto é,

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau.$$

Introduzindo a mudança de variável  $t - \tau = \tau'$  podemos escrever

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \int_{-\tau}^\infty d\tau \int_0^t e^{-s(\tau+\tau')} f(\tau)g(\tau') d\tau.$$

Definindo-se  $g(t) = 0$  para  $t < 0$ , o limite superior em vez de  $t$  pode ser tomado  $\infty$ , logo

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \int_0^\infty g(\tau')e^{-s\tau'} d\tau' \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau} d\tau = F(s)G(s),$$

i.e., a transformada de Laplace do produto de convolução é o produto das transformadas.

### 3.5.3 Transformada de Laplace Inversa

Tendo utilizado a transformada de Laplace, na resolução de um problema envolvendo uma equação diferencial e condições iniciais, para que possamos recuperar a solução da equação original, ou ainda, a solução da equação associada ao problema de partida devemos introduzir o conceito de transformada de Laplace inversa o qual é dado pelo teorema que se segue.

**Definição<sup>9</sup> 5** Seja  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  a transformada de Laplace da função  $f(t)$ . Então  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$  é dada por:

---

<sup>9</sup>A definição que apresentamos aqui é, na verdade, um teorema, cuja demonstração é dada em [33].

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st}ds & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

onde a integração deve ser efetuada ao longo de uma reta  $s = \gamma$  no plano complexo, com  $s = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . O número complexo  $\gamma$  deve ser escolhido de tal forma que todas as singularidades do integrando estejam à sua esquerda, isto é,  $\text{Re}(s) > \gamma$ . No caso em que nenhuma das singularidades é ponto de ramificação podemos utilizar o chamado *contorno de Bromwich* enquanto que nos casos em que há pontos de ramificação utilizamos o *contorno de Bromwich modificado* [33].

### 3.5.4 Cálculo da Transformada

Nesta seção, vamos apresentar a transformada de Laplace de algumas funções e vamos mostrar como, através destas transformadas e do teorema da convolução, podemos calcular uma série de integrais fracionárias.

Sabemos que as funções  $t^\mu$ , com  $\mu > -1$ ,  $e^{at}$ ,  $t^{\mu-1}e^{at}$ , com  $\mu > 0$ ,  $\cos at$  e  $\sin at$  pertencem a classe **C** e são de ordem exponencial. Além disso, cálculos elementares<sup>10</sup> mostram que

$$\mathfrak{L}\{t^\mu\} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+1}} \Rightarrow \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+1}}\right] = t^\mu \quad (3.17)$$

$$\mathfrak{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \Rightarrow \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at} \quad (3.18)$$

$$\mathfrak{L}\{t^{\mu-1}e^{at}\} = \frac{\Gamma(\mu)}{(s-a)^\mu} \Rightarrow \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{\Gamma(\mu)}{(s-a)^\mu}\right] = t^{\mu-1}e^{at} \quad (3.19)$$

$$\mathfrak{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2} \Rightarrow \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos at \quad (3.20)$$

$$\mathfrak{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2} \Rightarrow \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right] = \sin at. \quad (3.21)$$

Sendo  $f$  e  $g$  pertencentes a **C** e de ordem exponencial,  $F(s)$  e  $G(s)$  suas respectivas transformadas de Laplace, temos, pelo teorema da convolução, que

$$\mathfrak{L}[(f * g)(t)] = \mathfrak{L}\left\{\int_0^t f(t-\xi)g(\xi)d\xi\right\} = F(s)G(s).$$

Além disso,

$$\mathcal{J}^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\xi)^{\nu-1} f(\xi) d\xi,$$

---

<sup>10</sup>Veja [33].



ou seja, a definição da integral fracionária pode ser interpretada como o produto de convolução de duas funções. Tendo isto em mente podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\{J^\nu f(t)\} &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \mathfrak{L}\{t^{\nu-1}\} \mathfrak{L}\{f(t)\} \\ &= s^{-\nu} F(s), \quad \nu > 0,\end{aligned}\tag{3.22}$$

para  $\nu = 0$  a equação acima não está determinada, contudo temos que

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \mathfrak{L}\left\{\frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\right\} = \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{1}{s^\nu} = 1.\tag{3.23}$$

Utilizando os resultados das equações (3.17)-(3.22) podemos escrever, para  $\nu, \mu > 0$ , que

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\{J^\nu t^\mu\} &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+\nu+1}} &\Rightarrow &\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+\nu+1}}\right] = J^\nu t^\mu \\ \mathfrak{L}\{J^\nu e^{at}\} &= \frac{1}{s^\nu(s-a)} &\Rightarrow &\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\nu(s-a)}\right] = J^\nu e^{at} \\ \mathfrak{L}\{J^\nu t^{\mu-1} e^{at}\} &= \frac{\Gamma(\mu)}{s^\nu(s-a)^\mu} &\Rightarrow &\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{\Gamma(\mu)}{s^\nu(s-a)^\mu}\right] = J^\nu t^{\mu-1} e^{at} \\ \mathfrak{L}\{J^\nu \cos at\} &= \frac{1}{s^{\nu-1}(s^2+a^2)} &\Rightarrow &\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\nu-1}(s^2+a^2)}\right] = J^\nu \cos at \\ \mathfrak{L}\{J^\nu \sin at\} &= \frac{a}{s^\nu(s^2+a^2)} &\Rightarrow &\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^\nu(s^2+a^2)}\right] = J^\nu \sin at.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Passemos agora ao cálculo da transformada de Laplace de integrais fracionárias de derivadas e de derivadas de integrais fracionárias. Como de costume, tomemos  $f$  e sua derivada  $Df$  como sendo funções definidas em  $[0, \infty)$ , pertencente à classe  $\mathbf{C}$  e de ordem exponencial. Neste caso, podemos escrever, pela equação (3.22), que

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\{J^\nu [Df(t)]\} &= s^{-\nu} \mathfrak{L}\{Df(t)\} \\ &= s^{-\nu} [sF(s) - f(0)], \quad \nu > 0,\end{aligned}\tag{3.25}$$

na qual  $F(s)$  é a transformada de Laplace de  $f(t)$ .

Sabemos que se  $f$  é uma função contínua em  $[0, \infty)$ ,  $\nu > 0$ ,  $Df$  é contínua e de classe  $\mathbf{C}$  então<sup>11</sup> são válidas as seguintes equações

$$J^{\nu-1}[Df(t)] = J^\nu f(t) - \frac{f(0)}{\Gamma(\nu+1)} t^\nu\tag{3.26}$$

---

<sup>11</sup>A demonstração deste fato pode ser encontrada no Capítulo 3 da referência [83].

$$D[J^\nu f(t)] = J^\nu[Df(t)] + \frac{f(0)}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1}. \quad (3.27)$$

Utilizando as três últimas equações podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{D[J^\nu f(t)]\} &= \mathfrak{L}\{J^\nu[Df(t)]\} + f(0)\mathfrak{L}\left\{\frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\right\} \\ &= s^{-\nu}[sF(s) - f(0)] + s^{-\nu}f(0) \\ &= s^{1-\nu}F(s), \quad \nu > 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

No caso em que  $\nu = 0$ , recuperamos a expressão

$$\mathfrak{L}\{Df(t)\} = sF(s) - f(0). \quad (3.29)$$

Note que embora não seja esse o resultado que obtemos ao substituir diretamente  $\nu = 0$  na equação (3.28), esta aparente descontinuidade vem do fato que

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} = 0.$$

Comparando a equação acima com a equação (3.23), fica claro que os operadores transformada de Laplace e limite são não comutativos<sup>12</sup>.

Lembrando que  $J^\nu e^{at} = E_t(\nu, a)$ ,  $J^\nu \cos at = C_t(\nu, a)$  e  $J^\nu \sin at = S_t(\nu, a)$ , e utilizando (3.24), concluímos os últimos resultados desta seção, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\{E_t(\nu, a)\} &= \frac{1}{s^\nu(s-a)} &\Rightarrow &\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\nu(s-a)}\right] = E_t(\nu, a) \\ \mathfrak{L}\{C_t(\nu, a)\} &= \frac{1}{s^{\nu-1}(s^2+a^2)} &\Rightarrow &\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{\nu-1}(s^2+a^2)}\right] = C_t(\nu, a) \\ \mathfrak{L}\mathfrak{L}\{S_t(\nu, a)\} &= \frac{a}{s^\nu(s^2+a^2)} &\Rightarrow &\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^\nu(s^2+a^2)}\right] = S_t(\nu, a). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Outras maneiras de calcular a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler e consequentemente das funções  $C_t(\nu, a)$  e  $S_t(\nu, a)$ , podem ser encontradas em [34].

## 3.6 A Lei dos Expoentes para Integrais Fracionárias

No cálculo de ordem inteira as propriedades dos operadores integral e derivada com respeito às leis de comutação e soma de expoentes são bem conhecidas. Sabemos que

$$J^m J^n = J^{m+n}, \quad D^m D^n = D^{m+n},$$

---

<sup>12</sup>De fato, esta não comutatividade vem do fato que, exceto nos casos em que temos convergência uniforme, a comutatividade dos operadores limite e integral não pode ser garantida.

onde  $m, n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . A equação acima é conhecida como *Lei dos Expoentes*, para integrais e para derivadas, respectivamente.

Nesta seção utilizamos a transformada de Laplace e o produto de convolução, bem como relações entre as funções gama e beta<sup>13</sup>, para demonstrar a lei dos expoentes para integrais fracionárias, que é um dos mais importantes resultados para o desenvolvimento de nossa teoria. Como vamos ver no próximo capítulo esta propriedade não se aplica, em geral, para derivadas de ordem fracionária.

TEOREMA 1: Sendo  $J$  o operador integral fracionária,  $\alpha, \beta \geq 0$  temos que

$$J^\alpha J^\beta = J^{\alpha+\beta}, \quad (3.31)$$

ou seja, a chamada propriedade de semigrupo e consequentemente a propriedade comutativa [7],  $J^\alpha J^\beta = J^\beta J^\alpha$ , são satisfeitas.

DEMONSTRAÇÃO: Inicialmente introduzimos a seguinte função auxiliar

$$\Phi_\alpha(t) = \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha > 0, \quad (3.32)$$

na qual o subíndice  $+$  denota que a função é nula para  $t < 0$ . Uma vez que  $\alpha > 0$ , a função  $\Phi_\alpha(t)$  é localmente absolutamente integrável em  $\mathbb{R}^+$ , ou seja,  $\Phi_\alpha(t) \in \mathbf{C}$ .

Como já havíamos mostrado na seção anterior a integral fracionária pode ser interpretada como sendo o produto de convolução de duas funções, isto é,

$$J^\alpha f(t) = \Phi_\alpha(t) * f(t), \quad \alpha > 0. \quad (3.33)$$

Mostremos a seguinte relação

$$\Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) = \Phi_{\alpha+\beta}(t). \quad (3.34)$$

Através da definição do produto de convolução podemos escrever

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) &= \int_0^t \frac{\tau^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} d\tau \\ &= \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \tau^{\alpha-1} (1-\tau/t)^{\beta-1} d\tau, \end{aligned}$$

Introduzindo a mudança de variável  $u = \tau/t$ , utilizando o resultado da equação (A.4) e a definição da função beta podemos escrever

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) &= \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)\mathbf{B}(\alpha, \beta)} \int_0^1 (ut)^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} (t du) \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)\mathbf{B}(\alpha, \beta)} \int_0^1 (u)^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} du \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \Phi_{\alpha+\beta}(t). \end{aligned}$$

---

<sup>13</sup>Ver Apêndice.

Tendo demonstrado o resultado da equação (3.34) e tendo em vista a equação (3.33) concluímos a demonstração da lei dos expoentes da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} J^\alpha J^\beta f(t) &= \Phi_\alpha(t) * J^\beta f(t) = \Phi_\alpha(t) * \Phi_\beta(t) f(t) = \\ &= \Phi_{\alpha+\beta}(t) * f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t) \end{aligned}$$

na qual  $f$  é tal que  $J^\gamma f(t)$  faz sentido para todo  $\gamma > 0$  ■

### 3.7 Fórmula de Leibniz para Integrais Fracionárias

De grande importância para o cálculo convencional, a fórmula de Leibniz nos dá a expressão para a derivada de ordem  $n$  do produto de duas funções<sup>14</sup>  $f(t)$  e  $g(t)$ , em termos de suas derivadas de ordem menor que  $n$  e é dada por

$$D^n[f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [D^k g(t)][D^{n-k} f(t)]. \quad (3.35)$$

Sabemos [83] que para uma função  $f$  pertencente à classe  $\mathbf{C}$ , para  $g(t) = t^p$ , com  $p \in \mathbb{N}$  e sendo  $\nu > 0$ , podemos escrever<sup>15</sup>

$$J^\nu[f(t)t^p] = \sum_{k=0}^p \binom{-\nu}{k} [D^k t^p][J^{\nu+k} f(t)]. \quad (3.36)$$

O objetivo desta seção é mostrar que a equação acima é válida para toda função  $g$  analítica em  $a$ , para todo  $a \in [0, X]$ , ou seja, demonstrar o seguinte teorema:

**TEOREMA 2:** Seja  $f$  contínua em  $[0, X]$  e  $g$  analítica em  $a$ , para todo  $a \in [0, X]$ . Então, se  $\nu > 0$  e  $0 < t \leq X$  temos

$$J^\nu[f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\nu}{k} [D^k g(t)][J^{\nu+k} f(t)]. \quad (3.37)$$

**DEMONSTRAÇÃO:** Sendo  $f$  contínua em  $[0, X]$  e  $g$  analítica em  $a$ , para todo  $a \in [0, X]$  temos, por definição, que

$$D[f(t)g(t)] = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t - \xi)^{\nu-1} [f(\xi)g(\xi)] d\xi,$$

---

<sup>14</sup>Em todos os casos considerados, salvo disposto em contrário,  $f$  e  $g$  têm todas derivadas de ordem inteira e pertencem a classe  $\mathbf{C}$ .

<sup>15</sup>No próximo capítulo estendemos a fórmula acima para derivadas fracionárias.

além disso, como por hipótese  $g$  é analítica, temos

$$g(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{D^k g(t)}{k!} (t - \xi)^k = g(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{D^k g(t)}{k!} (t - \xi)^k.$$

Agora, utilizando os resultados das duas últimas equações podemos escrever

$$\begin{aligned} J^\nu[f(t)g(t)] &= g(t)J^\nu f(t) + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t - \xi)^\nu f(\xi) \\ &\quad \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{D^k g(t)}{k!} (t - \xi)^{k-1}. \end{aligned}$$

Uma vez que  $f$  é contínua em  $[0, X]$  e  $\nu > 0$  o produto  $(t - \xi)^\nu f(\xi)$  é limitado em  $[0, t]$  e uma vez que  $f \in \mathbf{C}$  a integral converge uniformemente, ou seja, podemos comutar o somatório e a integral de modo a escrever

$$\begin{aligned} J^\nu[f(t)g(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\nu + k)}{k! \Gamma(\nu)} [D^k g(t)] [J^{\nu+k} f(t)] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-\nu}{k} [D^k g(t)] [J^{\nu+k} f(t)], \end{aligned} \tag{3.38}$$

que é justamente o resultado que desejávamos ■

# A Derivada Fracionária

Sendo  $D = d/dx$  o *operador diferencial* e  $n$  um número natural, o significado de  $D^n f(x)$ , a derivada de ordem  $n$  da função  $f$ , é bastante conhecido. Nos capítulos anteriores, atribuímos um sentido para  $J^\nu$ , com  $\text{Re}(\nu) > 0$ , isto é, definimos a integral fracionária de ordem  $\nu$ .

Neste capítulo, apresentamos as definições de Riemann-Liouville, Caputo, Weyl e Grünwald-Letnikov para o *operador fracionário*<sup>1</sup>,  $D^\beta$ , com  $\text{Re}(\beta) > 0$ , ou seja, apresentamos possíveis definições para a derivada de ordem fracionária.

A escolha mais precisa do operador fracionário dependerá do problema que tivermos abordando, por exemplo, mostramos que a definição de Caputo é mais conveniente quando estamos estudando equações diferenciais com condições iniciais [26] e que a definição de Grünwald-Letnikov [51, 71, 72] é a mais conveniente quando trabalhamos com problemas numéricos.

Neste trabalho um de nossos principais objetivos é resolver equações diferenciais, por esta razão mostramos que para todas as definições anteriormente citadas a derivada fracionária de polinômios coincide, tendo em vista a ampla gama de problemas que podem ser resolvidos pelo método de Frobenius [16].

Este capítulo está disposto da seguinte maneira: Apresentamos as definições mais conhecidas para a derivada fracionária e discutimos as diferenças entre as duas mais amplamente difundidas, a saber Caputo e Riemann-Liouville. Discutimos a não validade da lei dos expoentes para a derivada fracionária e concluímos o capítulo apresentando a fórmula de Leibniz para derivadas de ordem fracionária segundo Caputo e Riemann-Liouville.

<sup>1</sup>Embora denotado de mesma forma fica claro que aqui este operador tem um sentido generalizado.

## 4.1 Definição de Riemann-Liouville

A definição da derivada de ordem fracionária, segundo Riemann-Liouville, está baseada essencialmente no fato de a derivada ser a operação inversa da integração e na lei dos expoentes, e estabelece que a derivada de ordem fracionária é a derivada de ordem inteira de uma determinada integral de ordem fracionária da seguinte maneira:

Sendo  $\beta \in \mathbb{C}$  com  $\operatorname{Re}(\beta) > 0$ ,  $n$  o menor inteiro maior que  $\operatorname{Re}(\beta)$  e  $\nu = n - \beta$ , podemos escrever

$$0 < \operatorname{Re}(\nu) \leq 1.$$

Definimos a derivada de ordem  $\beta$  de  $f(x)$ , para  $x > 0$  por

$${}_0D_x^\beta f(x) = D^n [J^\nu f(x)], \quad (4.1)$$

na qual  $D^n$  é a derivada de ordem  $n$  inteira e  $J^\nu$  é a integral de Riemann-Liouville de ordem  $\nu$ , conforme equação (3.1).

Façamos inicialmente uma observação trivial. Sendo  $n \in \mathbb{N}$  e  $I$  o operador identidade temos que

$${}_0D_x^n J^n = I, \quad J^n {}_0D_x^n \neq I, \quad (4.2)$$

ou seja,  ${}_0D_x^n$  é o operador inverso de  $J^n$  à esquerda e não o é à direita. De fato podemos notar que

$$J^n {}_0D_t^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}, \quad t > 0. \quad (4.3)$$

Desta forma, convém ressaltar que a derivada fracionária de ordem  $\beta \in \mathbb{R}$  segundo Riemann-Liouville,  ${}_0D_x^\beta$ , foi definida como sendo a inversa à esquerda de  $J^\beta$ , ou seja,

$${}_0D_x^\beta J^\beta = I, \quad \beta > 0. \quad (4.4)$$

Para motivar a definição apresentada vamos calcular a derivada de ordem  $\beta$  da função  $f(x) = x^\mu$ ,  $\mu > -1$  e vamos recuperar o resultado da equação (1.2). Pela equação (4.1) temos que<sup>2</sup>

$$D^\beta f(x) = D^n [J^\nu x^\mu].$$

Sabemos, pelo resultado da equação (3.3), que

$$J^\nu x^\mu = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + \nu + 1)} x^{\nu + \mu}$$

logo, sendo  $\operatorname{Re}(\nu) > 0$ ,  $x > 0$  podemos escrever, pela equação (4.1), que

---

<sup>2</sup>Deste ponto em diante, quando estivermos utilizando a definição de Riemann-Liouville, omitimos subíndices do operador fracionário  $D$ , contudo seu significado permanece claro. Nos casos em que possam surgir ambiguidades, deixamos os subíndices explícitos.

$$\begin{aligned}
D^\beta x^\mu &= D^n \left[ \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} x^{\nu+\mu} \right] \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu-n+1)} x^{\nu+\mu-n}.
\end{aligned}$$

Uma vez que  $\nu = n - \beta$  podemos reescrever a equação acima de modo a recuperar o resultado da equação (1.2), isto é,

$$D^\beta x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\beta+1)} x^{\mu-\beta}. \quad (4.5)$$

Convém ressaltar que, no recente trabalho [58] encontramos uma interpretação física para a derivada segundo Riemann-Liouville.

## 4.2 Derivada Fracionária Segundo Caputo

Vimos na seção anterior que, segundo Riemann-Liouville, a derivada fracionária é a derivada de ordem inteira de uma integral fracionária. Nesta seção apresentamos a definição da derivada fracionária segundo Caputo que é bastante similar à de Riemann-Liouville, porém invertendo a ordem de integração fracionária com a ordem de derivação.

Novamente, tomamos  $\beta \in \mathbb{C}$  tal que  $\text{Re}(\beta) > 0$ ,  $n$  o menor inteiro maior que  $\text{Re}(\beta)$  e  $\nu = n - \beta$ , ou seja,  $0 < \text{Re}(\nu) \leq 1$ . Nestas condições, a derivada de ordem  $\beta$  de  $f(x)$ , segundo Caputo [49], denotada por  $D_*^\beta$ , é definida da seguinte maneira

$$D_*^\beta f(x) = {}_c J_x^\nu [D^n f(x)] \quad (4.6)$$

na qual  $x > 0$ . Com exceção do índice  $*$ , os índices têm o mesmo significado que na derivada fracionária segundo Riemann-Liouville e para  $\beta = n \in \mathbb{N}$  definimos  $D_*^\beta = D^n$ , ou seja,

$$D_*^\beta f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\beta+1-n}} d\tau, & n-1 < \beta < n \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t) & \beta = n. \end{cases} \quad (4.7)$$

Claramente, esta definição é mais restritiva que a definição de Riemann-Liouville uma vez que requer a integrabilidade da derivada de ordem  $n$  da função. Sempre que utilizarmos o operador  $D_*^\beta$  será considerado que esta hipótese é satisfeita.

De maneira análoga ao que fizemos para a derivada segundo Riemann-Liouville, calculemos, segundo Caputo, a derivada de ordem  $\beta$  da função  $f(x) = x^\mu$ ,  $\mu > -1$  e  $\mu \neq 0$ .



Sabemos que

$$D^n x^\mu = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu - n + 1)} x^{\mu-n}$$

além disso temos, pela equação (3.3), que

$$J^\nu x^{\mu-n} = \frac{\Gamma(\mu - n + 1)}{\Gamma(\mu - n + \nu + 1)} x^{\mu-n-\nu}.$$

A partir das equações acima podemos escrever

$$\begin{aligned} D_*^\beta x^\mu = J^\nu [D^n x^\mu] &= J^\nu \left[ \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu - n + 1)} x^{\mu-n} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + \nu - n + 1)} x^{\nu+\mu-n}. \end{aligned}$$

Uma vez que  $\nu = n - \beta$  podemos reescrever a equação acima de modo a recuperar o resultado da equação (4.5), ou seja,

$$D_*^\beta x^\mu = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu - \beta + 1)} x^{\mu-\beta},$$

que é exatamente o resultado desejado.

### 4.3 Caputo $\times$ Riemann-Liouville

Antes de introduzirmos a definição da derivada fracionária segundo Weyl apresentamos uma discussão envolvendo as versões de Caputo e de Riemann-Liouville. Inicialmente notemos que sendo  $f(t)$  uma função na qual a integral e a derivada fracionárias podem ser aplicadas temos

$$D^\beta f(t) = D^m [J^{m-\beta} f(t)] \neq J^{m-\beta} [D^m f(t)] = D_*^\beta f(t) \quad (4.8)$$

ou seja, de maneira geral, ao comutar a integral fracionária com a derivada, alteramos o resultado final.

Convém ressaltar que se  $f(t)$  e suas derivadas de ordem inteira menores que  $m$  se anulam em  $t = 0^+$  a comutação é possível<sup>3</sup>. É por esta razão que a derivada fracionária de ordem  $\beta \in \mathbb{R}$  da função  $f(x) = x^\mu$ ,  $\mu > -1$  e  $\mu \neq 0$ , coincide quando utilizamos a versão

---

<sup>3</sup>De fato, para que possamos comutar a integral com a derivada é suficiente que em ambos os casos a integral convirja uniformemente [70].

de Riemann-Liouville e a versão de Caputo, pois  $f^{(n)}(0^+) = 0$  para todo  $n \leq m - 1$ . De fato, integrando por partes podemos escrever para  $m - 1 < \beta < m$  e  $t > 0$ ,

$$D^\beta f(t) = D_*^\beta f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\beta}}{\Gamma(k-\beta+1)} f^{(k)}(0^+). \quad (4.9)$$

Utilizando o resultado da equação (4.5), podemos reescrever a equação acima da seguinte maneira

$$D_*^\beta f(t) = D^\beta \left( f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0^+) \right). \quad (4.10)$$

A equação (4.10) mostra que a derivada fracionária segundo Caputo incorpora os valores iniciais da função e de suas derivadas de ordem inteira menores que ou iguais a  $m - 1$ . Este fato é crucial para o desenvolvimento do cálculo fracionário como vamos ver, em detalhes, no Capítulo 5.

Embora para polinômios não-constantes as definições segundo Riemann-Liouville e Caputo para a derivada fracionária coincidam, isto não ocorre para constantes, uma vez que na definição de Caputo primeiro tomamos a derivada de ordem inteira e depois a integral fracionária. A derivada de ordem fracionária segundo Caputo de uma constante é nula, ou seja,

$$D_*^\beta 1 = 0, \quad (4.11)$$

o que não ocorre quando calculamos a derivada segundo Riemann-Liouville<sup>4</sup>. Partindo da interpretação física deste fato, alguns autores<sup>5</sup> julgam que a derivada segundo Caputo é mais precisa que a derivada segundo Riemann-Liouville.

Observemos outras importantes diferenças entre a definição de Caputo e a definição de Riemann-Liouville. Pela equação (4.5) temos que

$$D^\beta t^{\beta-1} = 0, \quad \beta > 0, \quad t > 0, \quad (4.12)$$

pois  $\Gamma(x) \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow 0$ .

A partir das equações (4.8)-(4.12) podemos escrever para duas funções com derivada de ordem  $\beta$  coincidentes,  $t > 0$  e  $m - 1 < \beta < m$ , que

$$D^\beta f(t) = D^\beta g(t) \iff f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^m c_j t^{\beta-j}, \quad (4.13)$$

---

<sup>4</sup>Veja equação (1.10).

<sup>5</sup>Na referência [26] os autores concluem que dizer que a derivada fracionária de uma constante não é nula seria o mesmo que dizer que em um sistema em equilíbrio a energia não se dissipa, o quê consequentemente tornaria a definição de Caputo mais precisa.

$$D_*^\beta f(t) = D_*^\beta g(t) \iff f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^m c_j t^{m-j}, \quad (4.14)$$

nas quais  $c_j$  são constantes arbitrárias.

Podemos utilizar o resultado da equação (4.12) como exemplo de que  $D^\beta$  não é o inverso à direita de  $J^\beta$ , pois

$$J^\beta D^\beta t^{\beta-1} = 0 \quad \text{mas} \quad D^\beta J^\beta t^{\beta-1} = t^{\beta-1}, \quad \beta > 0, \quad t > 0. \quad (4.15)$$

Através das definições e formalmente tomando o limite  $\beta \rightarrow (m-1)$  podemos notar outra importante diferença

$$\begin{aligned} \beta \rightarrow (m-1) &\implies D^\beta f(t) \rightarrow D^m J f(t) = D^{m-1} f(t) \\ \beta \rightarrow (m-1) &\implies D_*^\beta f(t) \rightarrow J D^m f(t) = D^{m-1} f(t) - f^{(m-1)}(0^+). \end{aligned} \quad (4.16)$$

### 4.3.1 Transformada de Laplace e Convolução

Consideremos agora a transformada de Laplace nas duas formulações para a derivada fracionária. Para a derivada fracionária de Riemann-Liouville a transformada de Laplace requer o conhecimento de condições iniciais dadas em termos da integral  $J^{m-\alpha}$  e de suas derivadas de ordem  $k = 1, 2, \dots, m-1$  uma vez que [49]

$$\mathfrak{L}\{D^\beta f(t)\} = s^\beta F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} D^k J^{(m-\beta)} f(0^+) s^{m-1-k}, \quad (4.17)$$

e de maneira análoga

$$\mathfrak{L}^{-1} \left\{ s^\beta F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} D^k J^{(m-\beta)} f(0^+) s^{m-1-k} \right\} = D^\beta f(t), \quad (4.18)$$

nas quais  $F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\}$  e  $m-1 < \beta < m$ .

Já a derivada fracionária segundo Caputo parece ser mais apropriada quando utilizamos a metodologia da transformada de Laplace para a resolução de uma equação diferencial de ordem não-inteira, por exemplo, uma vez que requer o conhecimento de condições iniciais dadas na função e em suas derivadas de ordem inteira, que são fisicamente interpretáveis. De fato, notemos que

$$J^\beta D_*^\beta f(t) = J^\beta J^{m-\beta} D^m f(t) = J^m D^m f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!}. \quad (4.19)$$

Além disso, temos, pela definição do produto de convolução, que

$$D_*^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\beta-1} \frac{d^m}{d\tau^m} f(\tau) d\tau = \frac{t^{m-\beta-1}}{\Gamma(m-\beta)} * \left( \frac{d^m}{dt^m} f(t) \right),$$

na qual  $m-1 < \beta < m$ .

Segundo a equação (3.22) temos que

$$\mathfrak{L}\{J^\beta f(t)\} = s^{-\beta} F(s) \iff \mathfrak{L}^{-1}\{s^{-\beta} F(s)\} = J^\beta f(t), \quad \beta > 0,$$

na qual  $F(s)$  é a transformada de Laplace de  $f(t)$ . Aplicando a transformada de Laplace na equação (4.19) e utilizando a equação anterior podemos escrever, para o primeiro termo, que

$$\mathfrak{L}\{J^\beta D_*^\beta f(t)\} = s^{-\beta} \mathfrak{L}\{D_*^\beta f(t)\}.$$

Por outro lado, aplicando a transformada no último termo da equação (4.19) temos<sup>6</sup>

$$\mathfrak{L}\{J^\beta D_*^\beta f(t)\} = F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) s^{-k-1}.$$

Combinando os resultados das três últimas equações obtemos a expressão para a transformada de Laplace da derivada segundo Caputo, isto é,

$$\mathfrak{L}\{D_*^\beta f(t)\} = s^\beta F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) s^{\beta-k-1}, \quad (4.20)$$

e de maneira análoga para a transformada inversa

$$\mathfrak{L}^{-1}\{s^\beta F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) s^{\beta-k-1}\} = D_*^\beta f(t). \quad (4.21)$$

Tendo em vista as consequências de se comutar a ordem de integração com a de derivação e o fato de não haver, até a presente data, uma definição que se possa tomar como sendo a mais adequada sempre, utilizamos cada uma das definições segundo a conveniência dos problemas em questão.

## 4.4 Lei dos Expoentes para Derivadas Fracionárias

Vimos na Seção 3.6 que a assim chamada lei dos expoentes se aplica para integrais de ordem fracionária. Em geral, ambos operadores  $D^\beta$  e  $D_*^\beta$  não satisfazem esta propriedade.

---

<sup>6</sup>Note que  $\mathfrak{L}\{t^k/k!\} = s^{-k-1} \iff \mathfrak{L}^{-1}\{s^{-k-1}\} = t^k/k!$ .

A não aplicabilidade da lei dos expoentes para derivadas de ordem fracionária pode ser separada em dois casos,

$$\begin{cases} \text{(a)} & D^\alpha D^\beta f(t) = D^\beta D^\alpha f(t) \neq D^{\alpha+\beta} f(t) \\ \text{(b)} & D^\alpha D^\beta g(t) \neq D^\beta D^\alpha g(t) = D^{\alpha+\beta} g(t). \end{cases} \quad (4.22)$$

Utilizamos a equação (4.5), função  $f(t) = t^{-1/2}$ ,  $\alpha = \beta = 1/2$  para verificar o caso (a). Temos que

$$D^{1/2}f(t) = 0, \quad D^{1/2}D^{1/2}f(t) = 0, \quad \text{mas} \quad D^{1/2+1/2}f(t) \neq 0.$$

Para dar um exemplo relativo ao caso (b) novamente utilizamos a equação (4.5),  $g(t) = t^{1/2}$  e  $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = 3/2$ . Sendo assim

$$D^{1/2}g(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad D^{3/2}g(t) = 0, \quad \text{mas} \quad D^{1/2}D^{3/2}g(t) = 0,$$

$$D^{3/2}D^{1/2}g(t) = \frac{-t^{3/2}}{4}, \quad \text{e} \quad D^{1/2+3/2}g(t) = D^2g(t) = \frac{-t^{3/2}}{4}.$$

Uma análise detalhada da *Lei dos Expoentes* pode ser encontrada no livro de Miller e Ross [83]. Para os nossos objetivos é suficiente destacar um dos resultados mais importantes lá apresentado.

**TEOREMA 3:** Seja  $f(t) = t^\lambda \eta(t)$  ou  $f(t) = t^\lambda \ln t \eta(t)$ , na qual  $\lambda > -1$  e  $\eta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$  com raio de convergência  $R$ , então para  $0 \leq t < R$ , as seguintes fórmulas são válidas:

$$\begin{cases} \mu \geq 0 & \text{e} & 0 \leq \nu \leq \mu & \implies & D^\nu J^\mu f(t) = J^{\mu-\nu} f(t), \\ \mu \geq 0 & \text{e} & \nu > \mu & \implies & D^\nu J^\mu f(t) = D^{\mu-\nu} f(t), \\ 0 \leq \mu < \lambda + 1 & \text{e} & \nu \geq 0 & \implies & D^\nu D^\mu f(t) = D^{\mu+\nu} f(t). \end{cases} \quad (4.23)$$

A demonstração deste teorema no caso em que  $f(t)$  não tem o fator  $\ln t$ , segue como consequência da definição dos operadores  $J$  e  $D$ . A demonstração completa do teorema pode ser encontrada em [83].

## 4.5 Derivada Fracionária Segundo Weyl

Vimos, nas seções anteriores, que tanto a definição segundo Riemann-Liouville quanto a definição segundo Caputo para derivada fracionária de ordem  $\beta$  da função  $f(x) = x^\mu$ ,

$\mu > -1$  e  $\mu \neq 0$  no caso em que  $c = 0$  é dada por

$$\frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu - \beta + 1)} x^{\mu - \beta},$$

ou seja, nenhuma das duas definições é aplicável a  $f(x) = 1/x$  pois a função acima não está definida para  $\mu = -1$ .

**Definição 4** Definimos a classe de funções **S** como sendo o conjunto de funções infinitamente diferenciáveis em todos os pontos, de tal maneira que suas derivadas de ordem  $n$  sejam de ordem  $t^{-n}$ .

Com o intuito de escapar da controvérsia advinda da ordem de integração e derivação, discutida na seção anterior, introduzimos a derivada de Weyl em conformidade com Miller e Ross [83], isto é, definimos a derivada da integral de Weyl para uma função  $f$  pertencente à classe **S**, pois neste caso as integrais

$$\int_0^\infty x^{\nu-1} f(x+t) dx, \quad \text{e} \quad \int_0^\infty x^{\nu-1} \frac{\partial}{\partial t} f(x+t) dx,$$

são uniformemente convergentes, de onde segue que

$$\begin{aligned} D[W^{-\nu} f(t)] &= D \left[ \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty x^{\nu-1} f(x+t) dx \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty x^{\nu-1} Df(x+t) dx, \end{aligned}$$

na qual  $W^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty x^{\nu-1} f(x+t) dx$  é a definição de Weyl para a derivada fracionária. É conveniente ressaltar que, por definição, a função  $f(x) = 1/x$ , cuja derivada fracionária não estava definida para as derivadas fracionárias segundo Riemann-Liouville e Caputo, pertence à classe de funções **S**.

Uma conclusão natural do que foi discutido anteriormente é que

$$D^n[W^{-\nu} f(t)] = W^{-\nu}[D^n f(t)]. \quad (4.24)$$

Contudo, por conveniência, utilizamos o operador  $E = -D$  para<sup>7</sup> definir a derivada fracionária de ordem  $\beta$  segundo Weyl da seguinte maneira: Sendo  $n$  o menor inteiro maior que  $\beta$  e

$$\nu = n - \beta,$$

---

<sup>7</sup>Os detalhes desta conveniência podem ser vistos em [83]. Numa visão mais simplista, podemos pensar que esta mudança do operador  $D$  para o operador  $E$  é feita de modo a tornar a derivada fracionária de  $x^{-1}$  coerente com o resultado advindo do cálculo diferencial usual.

definimos a derivada de ordem  $\beta$  segundo Weyl,  $W^\beta$ , por

$$W^\beta f(t) = E^n[W^{-\nu} f(t)], \quad \text{Re}(\beta) > 0. \quad (4.25)$$

Pelas razões anteriormente mencionadas, finalizamos esta seção calculando explicitamente a derivada fracionária segundo Weyl de  $f(x) = 1/x$ .

Cálculos envolvendo a função gama, similares ao que fizemos para calcular a derivada fracionária de polinômios segundo Riemann-Liouville, nos permitem escrever

$$W^\nu x^{-\mu} = \frac{\Gamma(\mu - \nu)}{\Gamma(\mu)} x^{\nu - \mu}, \quad 0 < \text{Re}(\nu) < \text{Re}(\mu), \quad x > 0. \quad (4.26)$$

Logo, para  $f(x) = 1/x$  podemos escrever

$$W^\nu x^{-1} = \frac{\Gamma(1 - \nu)}{\Gamma(1)} x^{\nu - 1},$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned} W^\beta x^{-1} &= E^n[W^\nu x^{-1}] \\ &= E^n \left[ \frac{\Gamma(1 - \nu)}{\Gamma(1)} x^{\nu - 1} \right] \\ &= (-1)^{n+1} \Gamma(n + 1 - \nu) x^{\nu - n - 1} \\ &= (-1)^{n+1} \Gamma(\beta + 1) x^{-(\beta + 1)}, \end{aligned}$$

onde a última igualdade é devida às definições de  $\nu$  e  $n$ . Note que quando  $\beta = 1$ , e conseqüentemente  $n = 2$ , recuperamos a derivada, no sentido usual, de  $f(x) = 1/x$ , isto é,  $-x^{-2}$ .

Além dos resultados referentes à função  $f(x) = 1/x$ , a derivada fracionária segundo Weyl pode ser utilizada para propor uma possível interpretação geométrica da função  $g(x) = \sin(ax)$ , na qual  $a$  é uma constante. Note que esta interpretação não é válida, em geral. Sabemos do cálculo elementar que

$$\begin{aligned} D^0 \sin(ax) &= \sin \left( ax + \frac{0 \times \pi}{2} \right) \\ D^1 \sin(ax) &= a \cos(ax) = a \sin \left( ax + \frac{1 \times \pi}{2} \right) \\ D^2 \sin(ax) &= a^2 \cos \left( ax + \frac{1 \times \pi}{2} \right) = a^2 \sin \left( ax + \frac{2 \times \pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Mostra-se, trivialmente, por indução que

$$D^n \sin(ax) = a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right). \quad (4.27)$$

Além disso, pensando a integração como processo inverso da diferenciação, ou seja,  $D^{-1}$ , podemos dizer que a equação (4.27) é válida para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Também pela equação (4.27) podemos interpretar a derivação como uma rotação de  $\pi/2$  no sentido anti-horário e a integração como uma rotação no sentido horário, como nos mostra a Figura 4.1.

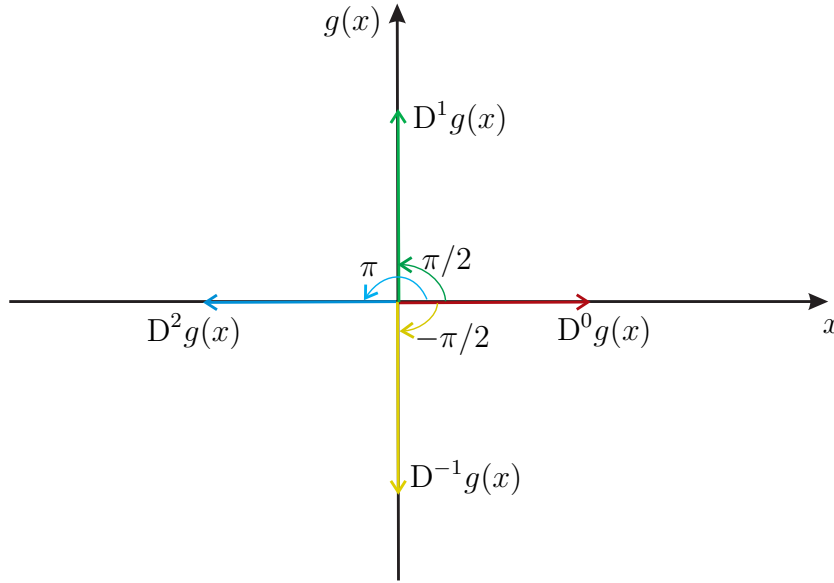


Figura 4.1: Possível interpretação geométrica para  $D^n g(x)$ .

Tomando  $n = \alpha \in \mathbb{R}$  na equação (4.27) obtemos a seguinte equação

$$D^\alpha \sin(ax) = a^\alpha \sin\left(ax + \frac{\alpha\pi}{2}\right), \quad (4.28)$$

que pode ser considerada como uma rotação, no sentido horário, de um ângulo  $\alpha$ , como nos mostra a Figura 4.2.

O processo de generalização da equação (4.27) para a equação (4.28) que apresentamos é bastante ingênuo, porém o resultado da equação (4.28) é o mesmo obtido quando utilizamos a derivada de Weyl para calcular a derivada de ordem  $\alpha$  de  $g(x)$ .

Uma interessante e recente aplicação que utiliza a derivada fracionária de Weyl pode ser encontrada em [11], na qual o autor estuda o problema das assim chamadas esferas de fluidos com fronteira fracionária.



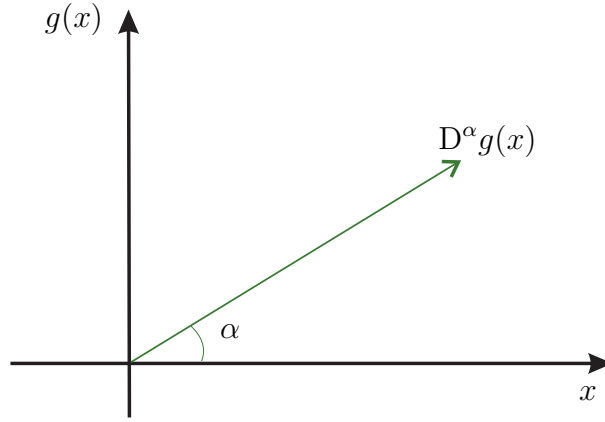


Figura 4.2: Possível interpretação geométrica para  $D^\alpha g(x)$ .

## 4.6 Derivada Fracionária Segundo Grünwald-Letnikov

Embora haja outras definições<sup>8</sup> para o operador fracionário, finalizamos este capítulo apresentando a definição de Grünwald-Letnikov [51], dada a grande aplicabilidade desta definição em problemas numéricos e por esta não apresentar a dependência da constante  $c$ , que é um dos pontos polêmicos desta teoria, como vamos ver em detalhes no próximo capítulo.

Além disso, em um belíssimo par de trabalhos Lorenzo e Hartely [71, 72] utilizam a definição de Grünwald-Letnikov para propor, numericamente, uma interpretação geométrica para a derivada fracionária. No trabalho [95] Podlubny propõe uma interpretação física para a derivada segundo Grünwald-Letnikov. Apresentamos aqui uma motivação para a derivada de Grünwald-Letnikov bem como uma interpretação probabilística para a mesma no caso da derivada de ordem  $1/2$ .

Mencionamos que utilizando a derivada fracionária segundo Grünwald-Letnikov, para calcular a derivada de um polinômio não-constante encontramos o mesmo resultado que obtivemos utilizando a definição de Riemann-Liouville ou Caputo e que como nosso interesse primordial é a resolução de equações diferenciais, na forma analítica, quando possível, não entramos em muitos detalhes desta definição e recomendamos fortemente a leitura das referências [51, 83, 94]. Como uma aplicação recente desta formulação mencionamos o artigo [92] no qual o autor utiliza a definição de Grünwald-Letnikov, para resolver a equação diferencial fracionária de onda-difusão no caso em que há simetria cilíndrica.

Sejam  $f$  uma função definida em um intervalo qualquer e  $x_0$  um ponto fixo no

---

<sup>8</sup>Estas definições podem ser encontradas na referência [83].

interior deste intervalo. Sabemos, pela definição de derivada que

$$D^1 f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h},$$

$$D^2 f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - 2f(x_0 - h) + f(x_0 - 2h)}{h^2},$$

utilizando uma indução e o triângulo de Pascal obtemos

$$D^n f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f[x_0 - mh]}{h^n}.$$

Sendo  $\beta$  um número real, a definição de Grünwald-Letnikov para  $D^\beta$  aplicado na função  $f$  e calculada em  $x_0$  é dada pela generalização da fórmula anterior, ou seja, [83]

$$D^\beta f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{\beta}{m} f[x_0 - mh]}{h^\beta}. \quad (4.29)$$

Fica claro, pela equação acima, que ao calcular o valor da derivada fracionária em um dado ponto  $x_0$  levamos em conta o valor da função em uma quantidade de pontos maior que a da respectiva derivada de ordem inteira. Além disso, no particular caso em que a variável é temporal, ao considerarmos a derivada fracionária da função estamos levando em conta o comportamento da função em momentos anteriores ao que estamos medindo, esta é a razão pela qual dizemos que a derivação de ordem não inteira conserva efeitos de memória e, conseqüentemente, oferece uma descrição mais fina de fenômenos.

No caso em que  $\beta = 1/2$  temos

$$D^{1/2} f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - 1/2 f(x_0 - h) - 1/4 f(x_0 - 2h) - \dots}{h^{1/2}}.$$

Como  $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 1$  podemos pensar a derivada de ordem  $1/2$  como uma média entre o valor presente da função e seus valores passados.

É importante ressaltar que a série apresentada na equação (4.29) é justamente o aparente paradoxo ao qual Leibniz se referiu em sua carta a l'Hôpital<sup>9</sup>.

---

<sup>9</sup>Ver Seção 1.2.

## 4.7 Derivada Fracionária Segundo Riesz

Nesta seção apresentamos a integral fracionária de Riesz, também conhecida como potencial de Riesz, com o intuito de definir a derivada fracionária de Riesz que é de fundamental importância, por exemplo, no estudo de equações diferenciais de ordem não inteira, nas quais uma de suas variáveis assume valores em toda reta.

Iniciamos com a definição da integral de Riemann-Liouville à esquerda que é justamente a nossa definição da integral de Riemann, dada pela equação (1.24), ou seja,

$$J_+^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt, \quad x > a.$$

Por outro lado, a definição da assim chamada integral de Riemann-Liouville à direita é dada por

$$J_-^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_x^b (t-x)^{\nu-1} f(t) dt \quad \nu > 0.$$

Definimos a integral fracionária de Riesz por [5]

$$\begin{aligned} J_*^\nu f(x) &= \frac{J_+^\nu f(x) + J_-^\nu f(x)}{2} \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\nu)} \int_a^b |x-t|^{\nu-1} f(t) dt. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Note que há outras formas de se definir a integral de Riesz, em particular, a que inclui um fator de  $1/\cos(\pi\nu/2)$  é comumente encontrada [106].

De maneira geral, e nos casos em que utilizamos a definição do potencial de Riesz, os limites da integral acima são  $a = -\infty$  e  $b = +\infty$ . Desta forma a equação (4.30) é válida para apenas para uma classe especial de funções [5, 106], chamadas funções da classe de Riesz<sup>10</sup>.

Definimos a derivada fracionária de Riesz de maneira análoga à que fizemos para a integral, isto é, em termos das derivadas de Riemann-Liouville à esquerda e à direita.

A derivada fracionária de Riemann-Liouville à esquerda coincide com a nossa definição usual para a derivada de Riemann-Liouville, ou seja,

$$\begin{aligned} D_+^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\beta-1} f(t) dt \\ &= D_+^n J_+^{n-\beta} f(x). \end{aligned}$$

---

<sup>10</sup>Neste trabalho sempre que estivermos considerando a integral ou a derivada fracionária de Riesz de uma função estaremos assumindo que esta pertence a classe de funções de Riesz.

Já a derivada fracionária de Riemann-Liouville à direita é definida por

$$\begin{aligned} D_-^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_x^b (t-x)^{n-\beta-1} f(t) dt \\ &= (-1)^n D^n J_-^{n-\beta} f(x). \end{aligned}$$

Desta forma, definimos derivada fracionária de Riesz<sup>11</sup> por

$$\begin{aligned} D_R^\beta f(x) &= \frac{D_+^\beta f(x) + (-1)^n D_-^\beta f(x)}{2} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^b |x-t|^{n-\beta-1} f(t) dt. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Concluimos esta seção apresentando a definição que será utilizada em nossas aplicações, isto é, a definição de Riesz-Caputo. A derivada fracionária de Caputo à esquerda coincide com a nossa definição usual para a derivada de Caputo, logo,

$$\begin{aligned} D_{*+}^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_a^x (x-t)^{n-\beta-1} \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) dt \\ &= J_+^{n-\beta} D^n f(x). \end{aligned}$$

Definimos a derivada fracionária de Caputo à direita por

$$\begin{aligned} D_{*-}^\beta f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_x^b (t-x)^{n-\beta-1} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n f(t) dt \\ &= J_-^{n-\beta} (-1)^n D^n f(x). \end{aligned}$$

Sendo assim, definimos derivada fracionária de Riesz-Caputo por

$$\begin{aligned} D_{RC}^\beta f(x) &= \frac{D_{*+}^\beta f(x) + (-1)^n D_{*-}^\beta f(x)}{2} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_a^b |x-t|^{n-\beta-1} \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) dt. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Novamente, ressaltamos que em geral consideramos os limites da integral acima como sendo  $a = -\infty$  e  $b = +\infty$ .

---

<sup>11</sup>Esta definição também é encontrada na literatura com o nome de derivada fracionária de Riesz no sentido de Riemann-Liouville.

## 4.8 Fórmula de Leibniz para Derivada Fracionária

No capítulo anterior mostramos a fórmula de Leibniz para integrais fracionárias, ou seja, mostramos o resultado da equação (3.37), a qual nos diz que se  $f$  é uma função contínua em  $[0, X]$  e  $g$  é analítica em  $a$ , para todo  $a$  pertencente a  $[0, X]$  então<sup>12</sup>

$$J^\nu[f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^p \binom{-\nu}{k} [D^k g(t)][J^{\nu+k} f(t)], \quad \nu > 0.$$

Além disso, mostramos um caso particular da equação acima bastante aplicável, isto é, no caso em que  $g$  é um polinômio e  $f \in \mathbf{C}$ , também podemos escrever

$$J^\nu[f(t)t^p] = \sum_{k=0}^p \binom{-\nu}{k} [D^k t^p][J^{\nu+k} f(t)], \quad \nu > 0,$$

na qual  $p$  é um inteiro positivo.

O objetivo desta seção é mostrar um resultado análogo para derivadas de ordem fracionária, ou seja, queremos saber sobre quais condições a fórmula

$$D^\nu[f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu}{k} [D^k g(t)][D^{\nu-k} f(t)], \quad \nu > 0 \quad (4.33)$$

é válida. Iniciemos com o seguinte lema:

LEMA 1: Se  $f(x)$  é uma função pertencente à classe  $\mathbf{C}$  em  $(a, b)$ , então

$$D^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} f^{(n)}(x), \quad \alpha > 0, \quad x \in (a, b). \quad (4.34)$$

DEMONSTRAÇÃO: Uma vez que  $f$  pertence a classe  $\mathbf{C}$  em  $(a, b)$  ela é analítica em  $(a, b)$  e, sendo assim, pode ser representada pela série

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (x-t)^n.$$

Como  $\alpha > 0$  e  $f \in \mathbf{C}$ , temos que a definição para a derivada fracionária de Riemann-Liouville coincide com a de Caputo, ou seja, sendo  $m-1 < \alpha < m$  e  $\beta = m - \alpha$  temos que  $D^\alpha f(x) = J^\beta D^m f(x) = D^m J^\beta f(x)$ . Utilizando este fato, a representação em série para  $f(t)$  e tendo em vista as propriedades das funções pertencentes à classe<sup>13</sup>  $\mathbf{C}$ , podemos escrever

---

<sup>12</sup>Note que  $\binom{-\nu}{k} = (-1)^k \frac{\Gamma(\nu+k)}{k! \Gamma(\nu)}$ .

<sup>13</sup>Como  $f \in \mathbf{C}$  podemos comutar o somatório com a derivada.

$$\begin{aligned}
D^\alpha f(x) &= D^m J^\beta f(x) \\
&= D^m \left[ J^\beta \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (x-t)^n \right] \\
&= D^m \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\beta}{n} \frac{x^{n+\beta} f^{(n)}(x)}{\Gamma(1+\beta+n)} \right].
\end{aligned}$$

Utilizando a fórmula de Leibniz para derivadas de ordem inteira, dada pela equação (3.35), podemos escrever

$$\begin{aligned}
D^\alpha f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\beta}{n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{x^{n-\alpha+k} f^{(n+k)}(x)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\beta}{n} \binom{m}{k} \frac{x^{n-\alpha+k} f^{(n+k)}(x)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)}.
\end{aligned}$$

Note que podemos tomar o limite superior do segundo somatório como sendo infinito pois  $\binom{n}{j} = 0$  se  $j > n$ . Introduzindo a mudança de variável  $j = n + k$  e invertendo a ordem dos somatórios podemos escrever<sup>14</sup>

$$\begin{aligned}
D^\alpha f(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^j \binom{-\beta}{n} \binom{m}{j-n} \right] \frac{x^{j-\alpha} f^{(j)}(x)}{\Gamma(j-\alpha+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} \frac{x^{j-\alpha} f^{(j)}(x)}{\Gamma(j-\alpha+1)},
\end{aligned}$$

que é justamente o resultado que buscávamos ■

#### 4.8.1 Demonstração da Fórmula de Leibniz Generalizada

De posse do lema anterior podemos demonstrar o teorema que se segue.

TEOREMA 4: Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  funções analíticas em  $[a, b]$ . Então

$$D^\alpha [f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} [D^k g(t)] [D^{\nu-k} f(t)], \quad (4.35)$$

para  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\alpha \neq -1, -2, \dots$

---

<sup>14</sup>A segunda igualdade é devida à equação (3.12).

DEMONSTRAÇÃO: Pela equação (4.34) temos que

$$D^\alpha(fg) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} (fg)^{(n)}.$$

Utilizando, novamente, a fórmula de Leibniz para o caso inteiro e comutando os dois somatórios<sup>15</sup>, podemos escrever

$$\begin{aligned} D^\alpha(fg) &= \sum_{j=0}^{\infty} g^{(j)} \sum_{n=j}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \binom{n}{j} \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} f^{(n-j)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} g^{(j)} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n+j} \binom{n+j}{j} \frac{(x-a)^{n+j-\alpha}}{\Gamma(n+j+1-\alpha)} f^{(n)}. \end{aligned}$$

Utilizando o fato que  $\binom{\alpha}{n+j} \binom{n+j}{j} = \binom{\alpha}{j} \binom{\alpha-j}{n}$  obtemos

$$\begin{aligned} D^\alpha(fg) &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} g^{(j)} \sum_{n=j}^{\infty} \binom{\alpha-j}{n} \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} f^{(n)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} g^{(j)} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-j}{n} \frac{(x-a)^{n+j-\alpha}}{\Gamma(n+j+1-\alpha)} f^{(n)}. \end{aligned}$$

A partir da equação (4.34) com  $\alpha - j$  ao invés de  $\alpha$  obtemos

$$D^\alpha(fg) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} g^{(j)} [D^{\alpha-j} f(t)],$$

que é justamente o resultado que buscávamos ■

Note que, embora o resultado da equação acima esteja correto para funções  $f$  e  $g$  analíticas, a fórmula traz consigo o incômodo fato que a derivada fracionária de  $fg$  não é, trivialmente, igual à derivada fracionária de  $gf$ . A fórmula

$$D^\alpha(fg) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\gamma-j+1)\Gamma(\gamma+j+1)} [D^{\alpha-\gamma-j} f] [D^{\gamma+j} g], \quad (4.36)$$

na qual  $\gamma$  é arbitrário, foi originalmente publicada por Watanable [116] e a exata região na qual ela é válida foi determinada por Osler [91]. Aqui, apresentamos a demonstração

---

<sup>15</sup>Temos que  $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty}$ .

baseada no trabalho de Trenevski [111]. Sejam,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $f$  e  $g$ , duas funções analíticas. Sem perda de generalidade podemos supor que

$$f(t) = \frac{t^m}{\Gamma(m+1)} \quad \text{e} \quad g(t) = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)}.$$

Desta forma utilizando a linearidade do operador diferencial podemos escrever:

$$D^\alpha(fg) = D^\alpha \left\{ \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)} \frac{t^{m+n}}{\Gamma(n+m+1)} \right\}.$$

Utilizando o resultado da equação (4.5) temos que

$$D^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}$$

de onde podemos escrever

$$D^\alpha(fg) = \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)} \frac{t^{m+n-\alpha}}{\Gamma(n+m-\alpha+1)}.$$

Substituindo a expressão anterior no lado direito da equação (4.36), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\gamma-j+1)\Gamma(\gamma+j+1)} [D^{\alpha-\gamma-j} f] [D^{\gamma+j} g] &= \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1) t^{n+j-\alpha+\gamma} t^{m-j-\gamma}}{\Gamma(j+\gamma+1)\Gamma(\alpha-j-\gamma+1)\Gamma(n+j-\alpha-\gamma+1)\Gamma(m-j-\gamma+1)}. \end{aligned}$$

Para obter o resultado da equação (4.35) devemos demonstrar que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+m-\alpha+1)}{\Gamma(m-j-\gamma+1)\Gamma(n+j-\alpha-\gamma)\Gamma(j+\gamma+1)\Gamma(\alpha-j-\gamma+1)} &= \\ &= \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}. \end{aligned}$$

Para tanto, introduzimos os seguintes parâmetros

$$a = n - \gamma, \quad b = m + \gamma - \alpha, \quad c = \gamma \quad \text{e} \quad d = \alpha - \gamma.$$

Desta forma, o lado esquerdo da penúltima equação acima pode ser escrita da seguinte forma

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a-j+1)\Gamma(b+j+1)} \frac{\Gamma(c+d+1)}{\Gamma(c+j+1)\Gamma(d-j+1)}.$$

Para completar a prova, basta compararmos o coeficiente de  $t^{a+c}$  na identidade

$$(1+x)^{a+b}(1+x)^{c+d} = (1+x)^{a+b+c+d}.$$



# Inicialização

A questão da inicialização, isto é, a escolha de uma função complementar, como proposta por Riemann em uma publicação póstuma<sup>1</sup>, ou a escolha mais apropriada para a constante  $c$ , é uma questão comumente negligenciada na literatura. A definição de Liouville para a integral fracionária, com o limite inferior  $-\infty$ , e a definição de Riemann, com o limite inferior arbitrário  $c$  estão essencialmente ligadas à inicialização. Miller-Ross [83] ressaltam o fato de que para a lei dos expoentes fazer sentido a função  $f(t)$ , a ser integrada ou diferenciada, bem como suas derivadas de ordem inteira, devem ser nulas para  $t \leq c$ .

No mesmo livro é mencionado um relato sobre a história do cálculo fracionário, na qual é citada uma referência feita por A. Cayley ao artigo no qual Riemann define a derivada fracionária utilizando a função complementar<sup>2</sup>, a saber: *Ao meu ver, a grande dificuldade da teoria de Riemann está na interpretação da função complementar...* Miller-Ross dizem ainda: *A existência ou não da função complementar foi motivo de muita confusão. Liouville e Peacock cometeram erros e a função complementar de Riemann tornou-se demasiadamente trabalhosa.*

Em um trabalho recente Lorenzo e Hartley [72] apresentam um estudo profundo sobre a inicialização através de uma função complementar. Neste capítulo apresentamos uma discussão do referido trabalho.

---

<sup>1</sup>Ver Seção 1.5.

<sup>2</sup>Ver equação (1.12).

## 5.1 Prova da Inicialização não Constante

Na solução de equações diferenciais de ordem fracionária, muitos autores ([29, 83, 88], entre outros) têm implicitamente inferido que uma inicialização constante, isto é, sem a função complementar, ou com um conjunto de constantes, representando os valores das integrais e derivadas de ordem fracionária (em  $t = 0$ ) fornecem uma representação adequada para os chamados efeitos de memória<sup>3</sup> para cada integral e derivada. Mostramos a seguir que isso não é verdade.

Consideremos duas integrais<sup>4</sup> de ordem  $q$  da função<sup>5</sup>  $f(t)$ , ambas com a inicialização constante, sendo uma iniciada em  $t = a$  e outra em  $t = c > a$  e mostremos que para elas coincidirem devemos introduzir uma função que depende do tempo e não uma constante.

Temos que

$${}_aD_t^{-q}f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t - \tau)^{q-1} f(\tau) d\tau \quad \text{e} \quad {}_cD_t^{-q}f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_c^t (t - \tau)^{q-1} f(\tau) d\tau.$$

Logo, admitindo que  $f(t)$  é nula para todo  $t \leq a$ , temos que o período entre  $t = a$  e  $t = c$  deve ser levado em conta de tal forma que as duas definições coincidam. Para tanto, uma inicialização,  $\Psi$ , deve ser adicionada a  ${}_cD_t^{-q}f(t)$ , ou seja,

$${}_cD_t^{-q}f(t) + \Psi = {}_aD_t^{-q}f(t), \quad t > c.$$

A partir da equação acima podemos escrever

$$\Psi = {}_aD_t^{-q}f(t) - {}_cD_t^{-q}f(t),$$

de onde segue que

$$\Psi = \int_a^c (t - c)^{q-1} f(\tau) d\tau \equiv {}_aD_c^{-q}f(t), \quad t > c. \quad (5.1)$$

A equação acima mostra o resultado que buscávamos, isto é, que  $\Psi$  é uma função da variável independente  $t$ . Utilizando  $q = 1$  na equação (5.1), recuperamos o caso ordinário

$$\Psi = \int_a^c f(\tau) d\tau = \text{constante}.$$

Tendo mostrado a necessidade de uma inicialização não constante, passemos às definições do cálculo fracionário inicializado.

---

<sup>3</sup>Memória para nós é a referência ao período imediatamente anterior ao que iniciamos a integração, isto é, para os valores de  $t \leq c$ .

<sup>4</sup>Neste capítulo, por conveniência e simplicidade nos cálculos, voltamos para a notação clássica,  ${}_aD_t^{-q}f(t)$ , para denotar a derivada fracionária de ordem  $q$ .

<sup>5</sup>Todas as funções aqui consideradas satisfazem as hipóteses de convergência estabelecidas anteriormente, conforme a Seção 1.5.1.

## 5.2 Definições para o Cálculo Fracionário Inicializado

Várias formulações podem servir de base para o cálculo fracionário inicializado, como por exemplo as formulações de Riemann-Liouville e Grünwald-Letnikov. Uma vez que estamos interessados em resoluções de equações diferenciais em forma analítica, a formulação de Caputo e de Riemann-Liouville serão as únicas consideradas nesta seção<sup>6</sup>.

Nesta seção, dois tipos de inicialização são considerados, a *inicialização terminal*, na qual se supõe que o operador fracionário de Riemann-Liouville, i.e., o operador diferintegral, somente pode ser inicializado eficazmente antes do instante inicial,  $t = c$ , e a *inicialização lateral*, na qual uma inicialização inteiramente arbitrária, pode ser aplicada ao operador diferintegral no tempo  $t = c$ . Nas discussões seguintes, consideramos que a variável temporal  $t$  é a variável independente e que  $f(t)$  é a função a ser diferintegrada.

## 5.3 Integral de Riemann-Liouville

### 5.3.1 Inicialização Terminal

Consideramos que, a integração fracionária de interesse se inicia em  $t = c$ ,  $f(t) = 0$  para todo  $t \leq a$  e que integração fracionária ocorra para  $t > c \geq a$ . Definimos o *intervalo de inicialização* como sendo a região  $a \leq t \leq c$ .

A definição clássica da integral de ordem fracionária somente será aceita nesta seção no caso em que o diferintegrando  $f(t) = 0$  para todo  $t \leq a$ , isto é,

$${}_a D_t^{-\nu} f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^t (t - \tau)^{\nu-1} f(\tau) d\tau, \quad \nu \geq 0, t > a.$$

Nos demais casos, ou seja, nos casos em que o limite inferior da integral é  $c > a$ , utilizamos a seguinte definição para a integral fracionária<sup>7</sup>

$${}_c D_t^{-\nu} f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^t (t - \tau)^{\nu-1} f(\tau) d\tau + \Psi(f, -\nu, a, c, t), \quad \nu \geq 0, t > a. \quad (5.2)$$

A função  $\Psi(f, -\nu, a, c, t)$  é a chamada função de inicialização e é definida de modo que

$${}_a D_t^{-\nu} f(t) = {}_c D_t^{-\nu} f(t) \quad t > c, \quad (5.3)$$

---

<sup>6</sup>Uma formulação tendo como base a definição de Grünwald-Letnikov pode ser encontrada em [71, 72].

<sup>7</sup>A equação (5.2) mostra que ou a função a ser diferintegrada,  $f(t)$ , e suas derivadas de ordem inteira têm um comportamento muito específico, ou uma função não constante de inicialização deve ser utilizada. Vamos usar o argumento negativo,  $-\nu$ , na definição da função  $\Psi$ , para enfatizar o fato de estarmos lidando, inicialmente, com integrais fracionárias.

ou seja,

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^t (t - \tau)^{\nu-1} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^t (t - \tau)^{\nu-1} f(\tau) d\tau + \Psi(f, -\nu, a, c, t).$$

Como  $\int_a^t g(\tau) d\tau = \int_a^c g(\tau) d\tau + \int_c^t g(\tau) d\tau$ , podemos escrever,

$$\Psi(f, -\nu, a, c, t) = {}_a D_c^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^c (t - \tau)^{\nu-1} f(\tau) d\tau, \quad t > c, \nu > 0. \quad (5.4)$$

Esta expressão para  $\Psi(t)$  aplica-se para a condição de inicialização terminal. Claramente,  $\Psi$  fornece à definição da integral fracionária os efeitos do passado, ou seja, os efeitos da integral fracionária de  $f(t)$  de  $a$  a  $c$ . Este efeito evidentemente vai influenciar o comportamento da função depois do instante  $t = c$ . A função  $\Psi$  tem o poder de permitir que a função  $f(t)$  e suas derivadas se iniciem em valores diferentes de zero, o chamado valor  ${}_a D_c^{-q} f(t)|_{t=c}$ . Além disso, a função  $\Psi$  continua contribuindo para o comportamento da integral fracionária depois de  $t = c$ , que é justamente o resultado que havíamos obtido na seção anterior, ou seja, que a função  $\Psi$ , que é adicionada à integral fracionária é uma função do tempo e não apenas uma constante.

Para as integrais de ordem inteira, a função  $\Psi$  pode ser obtida a partir da equação (5.4) através de uma indução e da integração por partes,

$$\Psi(f, -n, a, c, t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (5.5)$$

na qual, para cada  $i$ ,  $c_i$  denota uma constante. O resultado da equação acima recupera o resultado obtido através do cálculo usual, com as *constantes de integração*.

É importante ressaltar que a inicialização de uma integral fracionária de ordem  $q$  de uma função  $f(t)$  não é única no sentido que se segue. Suponhamos que  $f(t)$  seja dada pela seguinte composição de funções,

$$f(t) = g(t)U(t - c) + h(t)[U(t - a) - U(t - c)]$$

na qual  $U(t)$  é a função degrau unitário, isto é,

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Desta forma a função a ser diferenciada é  $g(t)U(t - c)$  e a função na qual a inicialização está baseada é  $h(t)[(U(t - a) - U(t - c))]$ .

Isto é análogo a escolher uma constante arbitrária para inicializar a integração de  $dy/dx$  na solução de uma equação diferencial ordinária.

### 5.3.2 Inicialização Lateral

Quando utilizamos a inicialização lateral a equação (5.2) continua sendo a definição operacional, contudo

$$\Psi = \Psi(t),$$

ou seja,  $\Psi$  é arbitrária e consequentemente a equação (5.4) não se aplica em todos os casos.

## 5.4 Inicialização para a Derivada Fracionária Segundo Riemann-Liouville

Antes de estendermos a definição das seções anteriores para a derivada fracionária é conveniente levantarmos duas questões: *Derivadas de ordem fracionária necessitam de uma função de inicialização? Neste contexto, derivadas de ordem inteira necessitam de uma função de inicialização?* Como nossa intuição está acostumada a trabalhar com ordens de derivação inteiras, onde a derivada pode ser interpretada como a taxa de variação da função e consequentemente a derivada de constantes é nula, é natural imaginarmos que não há necessidade de uma função de inicialização.

Contudo, em um estudo sobre as representações de sistemas semi-infinitos utilizando equações diferenciais fracionárias Lorenzo e Hartley [55, 71] sugerem que a derivada fracionária não é uma propriedade local como no caso inteiro. Além disso, para resolver este tipo de equação diferencial fracionária uma função de inicialização é necessária para ajustar os efeitos das distribuições. Outro aspecto que foi sugerido pelos autores é que, no contexto fracionário, as derivadas de ordem inteira necessitam de uma função de inicialização, o que, segundo os autores, faz com que as respostas para as duas questões do início desta seção sejam sim. Sendo assim, podemos passar para as definições da derivada fracionárias com a função de inicialização.

### 5.4.1 Inicialização Terminal

Em analogia ao que fizemos para a integral fracionária, definimos a derivada fracionária de tal forma que

$${}_c D_t^q f(t) = {}_a D_t^q f(t), \quad \forall t > c \geq a, \operatorname{Re}(q) \geq 0.$$

Além disso, é necessário exigir compatibilidade entre as derivadas inicializadas em  $t = a$  e  $t = c$ , para  $t > c$ , de onde segue que

$${}_c D_t^q {}_c D_t^{-p} f(t) = {}_a D_t^q {}_c D_t^{-p} f(t), \quad q > 0, t > c \geq a.$$

Expandindo os termos da equação acima, utilizando as generalizações da seção anterior, temos

$${}_cD_t^q \left[ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_c^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau + \Psi(f, -p, a, c, t) \right] =$$

$${}_aD_t^q \left[ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau + \Psi(f, -p, a, a, t) \right]$$

Uma vez que  $\Psi(f, -p, a, a, t) = 0$ , podemos escrever, pelas duas equações anteriores, que

$$\frac{d^m}{dt^m} \left[ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_c^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau + \Psi(f, -p, a, c, t) \right] + \Psi(h_1, m, a, c, t) =$$

$$= \frac{d^m}{dt^m} \left[ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \right] + \Psi(h_2, -p, a, a, t),$$

na qual  $h_1 = {}_aD_t^{-p} f(t)$  e  $h_2 = {}_aD_t^{-p} f(t)$ . As derivadas de ordem inteira são não inicializadas em  $t = a$ , portanto  $\Psi(h_2, m, a, a, t) = 0$ , desta forma, utilizando as equações anteriores temos

$$\Psi(h_1, m, a, c, t) = \frac{d^m}{dt^m} \left[ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^c (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau - \Psi(f, -p, a, c, t) \right]. \quad (5.6)$$

### 5.4.2 Inicialização Lateral

Definimos a derivada fracionária com inicialização lateral da seguinte maneira

$${}_cD_t^q f(t) = {}_cD_t^m \left[ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_c^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau + \Psi(f, -p, a, c, t) \right], \quad \text{Re}(q) \geq 0, t > c, \quad (5.7)$$

e  $m$  é o menor inteiro maior que  $\text{Re}(q)$  e  $q = m - p$ , ou equivalentemente

$${}_cD_t^q f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \left[ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_c^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \right] + \frac{d^m}{dt^m} \Psi(f, -p, a, c, t) + \Psi(h, m, a, c, t)$$

na qual  $t > c$  e  $h(t) = {}_aD_t^{-p} f(t)$ . Note que neste caso ambos os termos da inicialização são arbitrários, mas eles podem ser tomados como um único termo

$$\Psi(f, q, a, c, t) \equiv \frac{d^m}{dt^m} \Psi(f, -p, a, c, t) + \Psi(h, m, a, c, t)$$

No caso da inicialização terminal para a integral, parte da equação acima,  $\Psi(f, -p, a, c, t)$ , deve ser definida como na equação (5.6).

## 5.5 Inicialização para a Derivada Fracionária Segundo Caputo

Mostramos na equação (4.9) que dado  $m - 1 < \beta < m$  temos

$$D^\beta f(t) = D_*^\beta f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\beta}}{\Gamma(k-\beta+1)} f^{(k)}(0),$$

ou seja, a derivada fracionária segundo Caputo incorpora o valor da função e de suas derivadas de ordem inteira e menores que  $\beta$  em  $t = 0^+$ , isto é, os efeitos de memória, e portanto não é necessário utilizar uma função de inicialização, uma vez que a subtração do polinômio de Taylor de grau  $m - 1$  implica na regularização da derivada fracionária.

Por esta razão e pela argumentação apresentada na Seção 4.3, neste trabalho quando estudamos equações diferenciais de ordem fracionária utilizamos a derivada fracionária segundo a formulação de Caputo.

# Funções de Mittag-Leffler

Assim como o desenvolvimento do cálculo elementar depende intrinsecamente do conhecimento das funções a ele relacionadas, suas características e propriedades, também o desenvolvimento do cálculo fracionário está diretamente relacionado com o conhecimento das funções a ele relacionadas. Por esta razão, antes de passarmos às aplicações do cálculo fracionário vamos apresentar, neste capítulo, a assim chamada função de Mittag-Leffler [34, 78], uma das mais importantes e comuns funções relacionadas ao cálculo de ordem não-inteira. Apresentamos sua definição, generalizações, transformada de Laplace, propriedades e relações com outras funções especiais. Além disso, apresentamos um resultado original [36, 38] envolvendo a chamada função de Mittag-Leffler com dois parâmetros e uma série de consequências a ele relacionadas.

## 6.1 Função de Mittag-Leffler de um Parâmetro

A função de Mittag-Leffler,  $E_\alpha(z)$  é uma função complexa<sup>1</sup> que depende de um parâmetro complexo  $\alpha$  com  $\text{Re}(\alpha) > 0$  e, conforme introduzida por Mittag-Leffler [84], é dada a partir da seguinte expressão

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (6.1)$$

<sup>1</sup>Utilizamos a notação  $E_\alpha(x)$  no lugar de  $E_\alpha(z)$  nos casos em que a variável for real.



que pode ser interpretada com uma generalização para a função exponencial visto que, no caso em que  $\alpha = 1$ , podemos escrever

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \quad (6.2)$$

## 6.2 Função de Mittag-Leffler de Dois Parâmetros

A função de Mittag-Leffler de dois parâmetros tem um papel importante no desenvolvimento do cálculo fracionário e foi originalmente introduzida por Agarwal [4] da seguinte maneira<sup>2</sup>

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad \operatorname{Re}(\beta) > 0. \quad (6.3)$$

como sendo uma outra possível generalização da função de Mittag-Leffler à qual se reduz no caso em que  $\beta = 1$ , isto é,

$$E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z).$$

Além disso, segue da equação (6.3) que:

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}, \quad (6.4)$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}. \quad (6.5)$$

De maneira mais geral temos a seguinte relação:

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\}. \quad (6.6)$$

Por ser uma generalização da função exponencial é de se esperar que as funções seno e co-seno hiperbólicos também sejam casos particulares da função de Mittag-Leffler, de fato

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh z, \quad (6.7)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh z}{z}. \quad (6.8)$$

---

<sup>2</sup>A generalização original de Agarwal é dada por  $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+\frac{\beta-1}{\alpha}}}{\Gamma(\beta+\alpha n)}$ , contudo aqui apresentamos apenas a forma mais utilizada, isto é, a definição apresentada na equação (6.3).

As chamadas funções seno e co-seno fracionários também podem ser escritas em termos da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros, de fato

$$Sc_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{(2-\alpha)k+1}}{\Gamma((2-\alpha)k+2)} = zE_{2-\alpha,2}(-z^{2-\alpha}),$$

$$Cs_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{(2-\alpha)k+1}}{\Gamma((2-\alpha)k+1)} = zE_{2-\alpha,1}(-z^{2-\alpha}).$$

Sendo assim, as propriedades das funções seno e co-seno fracionários podem ser mostradas a partir das propriedades das funções de Mittag-Leffler de dois parâmetros.

### 6.2.1 Relações de Recorrência

Nesta seção apresentamos relações de recorrência, mostramos um resultado envolvendo uma relação contígua e concluímos com uma representação integral para a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros em termos de uma outra função de Mittag-Leffler porém com os dois parâmetros sendo iguais.

Utilizando a definição da função de Mittag-Leffler em termos de uma série, podemos escrever a relação de recorrência envolvendo a derivada

$$\frac{d}{dz}E_{\alpha,\beta}(z) = z\frac{d}{dz}E_{\alpha,\alpha+\beta}(z) + E_{\alpha,\alpha+\beta}(z) \quad (6.9)$$

bem como a relação envolvendo a mudança de argumento da função de Mittag-Leffler

$$E_{\mu,\beta}(z^{\mu/\alpha}) = E_{\alpha,\beta}(z). \quad (6.10)$$

Por outro lado, uma relação contígua envolvendo o parâmetro  $\beta$ , no caso em que  $\text{Re}(\beta) > 1$ , é dada por

$$\alpha z \frac{d}{dz}E_{\alpha,\beta}(z) = E_{\alpha,\beta-1}(z) + (1-\beta)E_{\alpha,\beta}(z), \quad (6.11)$$

que será mostrada a seguir.

A fim de mostrar a expressão anterior, consideramos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}E_{\alpha,\beta}(z) &= \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \\ &= \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \frac{z}{\Gamma(\alpha + \beta)} + \frac{z^2}{\Gamma(2\alpha + \beta)} + \frac{z^3}{\Gamma(3\alpha + \beta)} + \dots \right] \\ &= \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} + \frac{2z}{\Gamma(2\alpha + \beta)} + \frac{3z^2}{\Gamma(3\alpha + \beta)} + \dots + \frac{nz^{n-1}}{\Gamma(n\alpha + \beta)} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Por outro lado podemos escrever

$$\begin{aligned}
E_{\alpha, \beta-1}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta - 1)} \\
&= \left[ \frac{1}{\Gamma(\beta - 1)} + \frac{z}{\Gamma(\alpha + \beta - 1)} + \frac{z^2}{\Gamma(2\alpha + \beta - 1)} + \frac{z^3}{\Gamma(3\alpha + \beta - 1)} + \dots \right] \\
&= \left[ \frac{\beta - 1}{\Gamma(\beta)} + \frac{z(\alpha + \beta - 1)}{\Gamma(\alpha + \beta)} + \frac{z^2(2\alpha + \beta - 1)}{\Gamma(2\alpha + \beta)} + \frac{z^3(3\alpha + \beta - 1)}{\Gamma(3\alpha + \beta)} + \dots \right],
\end{aligned}$$

na qual a segunda igualdade se deve à relação de recorrência da função gama<sup>3</sup>.

A partir da equação acima podemos escrever

$$\begin{aligned}
E_{\alpha, \beta-1}(z) - \beta E_{\alpha, \beta}(z) &= \frac{-1}{\Gamma(\beta)} + \frac{z(\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha + \beta)} + \frac{z^2(2\alpha - 1)}{\Gamma(2\alpha + \beta)} + \frac{z^3(3\alpha - 1)}{\Gamma(3\alpha + \beta)} + \dots \\
&= - \left[ \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \frac{z}{\Gamma(\alpha + \beta)} + \frac{z^2}{\Gamma(2\alpha + \beta)} + \frac{z^3}{\Gamma(3\alpha + \beta)} + \dots \right] + \\
&+ \alpha z \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} + \frac{2z}{\Gamma(2\alpha + \beta)} + \frac{3z^2}{\Gamma(3\alpha + \beta)} + \dots \right] \\
&= -E_{\alpha, \beta}(z) + \alpha z \frac{d}{dz} E_{\alpha, \beta}(z),
\end{aligned}$$

que é o resultado desejado.

## 6.2.2 Relação Integral

Com auxílio da equação (A.5), apresentamos a seguir uma relação integral envolvendo uma função de Mittag-Leffler com os dois parâmetros iguais, isto é, a seguinte integral

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \frac{z}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} E_{\alpha, \alpha}(zt^{\alpha}) dt,$$

que, num particular caso, isto é, para  $\alpha = 1 = \beta$  fornece a seguinte expressão

$$E_{1,1}(z) = 1 + z \int_0^1 E_{1,1}(zt) dt$$

uma identidade, como podemos verificar.

---

<sup>3</sup>A relação  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  implica em  $\frac{1}{\Gamma(z-1)} = \frac{z-1}{\Gamma(z)}$ .

### 6.2.3 Fórmula de Duplicação

Vamos apresentar nesta seção, em analogia à fórmula de duplicação de arcos na trigonometria, uma expressão envolvendo a função de Mittag-Leffler com uma outra função de Mittag-Leffler porém com os parâmetros sendo um o dobro do outro, ou ainda, a chamada fórmula de duplicação para a clássica função de Mittag-Leffler.

TEOREMA 5: Sendo  $z \in \mathbb{C}$  e  $\alpha$  um parâmetro real, temos:

$$E_{2\alpha}(z) = \frac{1}{2}[E_{\alpha}(z^{1/2}) + E_{\alpha}(-z^{1/2})]. \quad (6.12)$$

DEMONSTRAÇÃO: Vamos explicitar a soma que aparece no segundo membro, a saber,

$$\begin{aligned} E_{\alpha}(z^{1/2}) + E_{\alpha}(-z^{1/2}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k/2}}{\Gamma(\alpha k + 1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{k/2}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \\ &= \left[ 1 + \frac{z^{1/2}}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{z}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{z^{3/2}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \cdots \right] + \\ &\quad + \left[ 1 - \frac{z^{1/2}}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{z}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{z^{3/2}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \cdots \right] \\ &= 2 \left[ 1 + \frac{z}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{z^2}{\Gamma(4\alpha + 1)} + \frac{z^3}{\Gamma(6\alpha + 1)} + \cdots \right] \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2\alpha k + 1)} \\ &= 2E_{2\alpha}(z), \end{aligned}$$

que é justamente o resultado enunciado na equação (6.12).

### 6.2.4 Relação com a Função Gama Incompleta

A função gama incompleta,  $\gamma^*(\alpha, x)$ , é uma função inteira na variável  $x$  contendo um parâmetro e pode ser definida pela seguinte integral

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

com  $\text{Re}(\alpha) > 0$ , ou ainda, em termos da função hipergeométrica confluyente [15],  ${}_1F_1(a; c; x)$ , na seguinte forma

$$\gamma(\alpha, x) = \frac{x^{\alpha}}{\alpha} {}_1F_1(\alpha; \alpha + 1; -x),$$

sendo a representação em série da função hipergeométrica confluyente, dada por

$${}_1F_1(a; c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!},$$

com  $(a)_k$  sendo o símbolo de Pochhammer, conforme equação (6.23), a seguir.

Aqui, nesta seção, apresentamos a função de Mittag-Leffler, com o primeiro parâmetro igual a unidade, em termos da função gama incompleta bem como em termos da função hipergeométrica confluyente.

Utilizando a definição da função gama incompleta e tomando  $\alpha = 1$  na expressão para a função de Mittag-Leffler obtemos

$$E_{1,\mu+1}(x) = e^x \gamma^*(\mu, x) \quad (6.13)$$

enquanto que, em termos da função hipergeométrica confluyente, temos

$$\begin{aligned} E_{1,\mu}(x) &= \frac{e^x}{\Gamma(\mu)} {}_1F_1(\mu - 1; \mu; -x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} {}_1F_1(1; \mu; x). \end{aligned}$$

A partir das relações envolvendo as funções hipergeométricas confluentes é possível obter várias relações com a função de Mittag-Leffler com um dos parâmetros conhecido.

### 6.2.5 Relação com a Função Erro

Finalizamos esta seção mostrando que a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros também tem como caso particular a função erro [34].

TEOREMA 6: Para todo  $z \in \mathbb{C}$  temos

$$E_{\frac{1}{2},1}(iz) = e^{-z^2} [1 + \operatorname{erf}(iz)] = e^{-z^2} [\operatorname{erfc}(-iz)]. \quad (6.14)$$

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos a seguinte relação [34]

$$\frac{n!}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^n} dt = \frac{n!}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{np+1}}{(np+1)p!} \quad (6.15)$$

que para  $n = 2$  fornece uma representação para a função erro em termos de um somatório, isto é<sup>4</sup>,

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)p!}. \quad (6.16)$$

---

<sup>4</sup>Note, pela equação (6.16), que a função erro é ímpar o que torna a segunda igualdade da equação (6.14) trivial.

Para demonstrar a equação (6.14) utilizamos a representação acima e a definição da função de Mittag-Leffler para  $iz$ , ou seja,

$$\begin{aligned} E_{\frac{1}{2},1}(iz) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{\Gamma(\frac{k}{2} + 1)} \\ &= 1 + \frac{iz}{\Gamma(1 + 1/2)} - z^2 - \frac{iz^3}{\Gamma(2 + 1/2)} + \frac{z^4}{2} + \frac{iz^5}{\Gamma(3 + 1/2)} - \frac{z^6}{3!} - \dots \end{aligned}$$

Separando as potências pares,  $P_p$ , e as potências ímpares,  $P_i$  podemos escrever:

$$\begin{aligned} P_p &= 1 - z^2 + \frac{z^4}{2} - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^8}{4!} - \frac{z^{10}}{5!} + \dots \\ P_i &= \frac{z}{\Gamma(1 + 1/2)} - \frac{z^3}{\Gamma(2 + 1/2)} + \frac{z^5}{\Gamma(3 + 1/2)} - \frac{z^7}{\Gamma(4 + 1/2)} + \dots \end{aligned} \quad (6.17)$$

de onde concluimos que

$$P_p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^k}{k!} = e^{-z^2}. \quad (6.18)$$

Utilizando a relação de recorrência da função gama [15],

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \left(n - \frac{5}{2}\right) \dots \left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

podemos escrever, para a segunda equação de (6.17), que

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{z}{\Gamma(1 + 1/2)} - \frac{z^3}{\Gamma(2 + 1/2)} + \frac{z^5}{\Gamma(3 + 1/2)} - \frac{z^7}{\Gamma(4 + 1/2)} + \dots \\ &= \frac{z}{\frac{1}{2} \Gamma(1/2)} - \frac{z^3}{\frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma(1/2)} + \frac{z^5}{\frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma(1/2)} - \frac{z^7}{\frac{7}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma(1/2)} \\ &= \frac{2}{\Gamma(1/2)} \left[ z - \frac{2z^3}{3} + \frac{2^2 z^5}{5 \cdot 3} - \frac{2^3 z^7}{7 \cdot 5 \cdot 3} + \dots \right], \end{aligned} \quad (6.19)$$

ou ainda, utilizando o conceito de duplo fatorial [15], na forma

$$P_i = \frac{2}{\Gamma(1/2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k z^{2k+1}}{(2k+1)!!}.$$

Finalmente, utilizando a relação  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  e as equações (6.17)–(6.19), obtemos

$$E_{\frac{1}{2},1}(iz) = e^{-z^2} + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k z^{2k+1}}{(2k+1)!!}. \quad (6.20)$$

Para concluir que  $E_{\frac{1}{2},1}(iz) = e^{-z^2}[1 + \operatorname{erf}(iz)]$  basta verificar, pela equação (6.20), que  $e^{-z^2} \operatorname{erf}(iz)$  é igual a soma das potências ímpares de  $E_{\frac{1}{2},1}(iz)$ . Para tanto consideremos a representação para a função erro dada pela equação (6.16), ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(iz) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (iz)^{2p+1}}{(2p+1)p!} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i (z)^{2p+1}}{(2p+1)p!}. \end{aligned}$$

Sendo assim, temos

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2i} e^{-z^2} \operatorname{erf}(iz) = e^{-z^2} \left[ z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5 \cdot 2!} + \frac{z^7}{7 \cdot 3!} + \frac{z^9}{9 \cdot 4!} + \cdots \right].$$

Utilizando a representação em série para  $e^{-z^2}$  temos

$$\begin{aligned} e^{-z^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2i} \operatorname{erf}(iz) &= z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z^2)^k}{k!} \\ &+ \frac{z^3}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z^2)^k}{k!} \\ &+ \frac{z^5}{5 \cdot 2!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z^2)^k}{k!} \\ &+ \frac{z^7}{7 \cdot 3!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z^2)^k}{k!} + \cdots \end{aligned}$$

Expandindo os somatórios do lado direito da equação acima podemos escrever

$$\begin{aligned}
e^{-z^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2i} \operatorname{erf}(iz) &= z - \frac{z^3}{1!} + \frac{z^5}{2!} - \frac{z^7}{3!} + \cdots \\
&+ \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{3} + \frac{z^7}{3 \cdot 2!} - \frac{z^9}{3 \cdot 3!} + \cdots \\
&+ \frac{z^5}{5 \cdot 2!} - \frac{z^7}{5 \cdot 2!} + \frac{z^9}{5 \cdot 2! \cdot 2!} - \frac{z^{11}}{5 \cdot 2! \cdot 3!} + \cdots \\
&+ \frac{z^7}{7 \cdot 3!} - \frac{z^9}{7 \cdot 3!} + \frac{z^{11}}{7 \cdot 3! \cdot 2!} - \frac{z^{13}}{7 \cdot 3! \cdot 3!} + \cdots \\
&= z - \frac{2z^3}{3} + \frac{2^2 z^5}{5 \cdot 3} - \frac{2^3 z^7}{7 \cdot 5 \cdot 3} + \cdots
\end{aligned}$$

de onde segue-se

$$e^{-z^2} \operatorname{erf}(iz) = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k z^{2k+1}}{(2k+1)!!}, \quad (6.21)$$

que é o resultado desejado ■

## 6.3 Função de Mittag-Leffler Generalizada

Dentre as diversas formas de se generalizar a função de Mittag-Leffler [107] de dois parâmetros a proposta por Prabhakar [97] é aquela que será utilizada nas aplicações, em particular no estudo da equação do telégrafo fracionária [35, 38].

A generalização proposta por Prabhakar é dada por

$$E_{\alpha,\beta}^{\rho}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!}, \quad (6.22)$$

na qual  $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$  e  $(\rho)_k$  é o símbolo de Pochhammer,

$$(\rho)_0 = 1, \quad (\rho)_k = \frac{\Gamma(\rho + k)}{\Gamma(\rho)} \equiv \rho(\rho + 1) \cdots (\rho + k - 1). \quad (6.23)$$

Note que  $E_{\alpha,\beta}^1(z) = E_{\alpha,\beta}(z)$ .

### 6.3.1 Relação com a Função de Dois Parâmetros

Nesta seção estabelecemos uma importante relação entre a função de Mittag-Leffler generalizada  $E_{\alpha,\beta}^m(z)$  e a derivada de ordem  $m = 0, 1, 2, \dots$  da função de Mittag-Leffler de



dois parâmetros. Sendo  $E_{\alpha,\beta}^{(m)}(z) = \frac{\partial^m}{\partial z^m} E_{\alpha,\beta}(z)$ , podemos escrever, a partir da definição da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, a relação

$$E_{\alpha,\nu}^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{\Gamma(\alpha k + \alpha m + \nu)} \frac{z^k}{k!}.$$

A fim de introduzir o símbolo de Pochhammer,  $(\rho)_k = \frac{\Gamma(\rho+k)}{\Gamma(\rho)} = \frac{(\rho+k-1)!}{(\rho-1)!}$ , tomamos  $m = \rho-1$  e reescrevemos a equação anterior da seguinte forma,

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\nu}^{(\rho-1)}(z) &= (\rho-1)! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+\rho-1)!}{(\rho-1)!} \frac{z^k/k!}{\Gamma(\alpha k + \alpha(\rho-1) + \nu)} \\ &= (\rho-1)! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k + \alpha(\rho-1) + \nu)} \frac{z^k}{k!}. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável  $\rho \rightarrow \rho+1$  podemos escrever

$$E_{\alpha,\nu}^{(\rho)}(z) = \rho! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_k}{\Gamma(\alpha k + \alpha\rho + \nu)} \frac{z^k}{k!}.$$

Por fim, introduzindo a mudança de variável  $\nu = \beta - \alpha\rho$  temos

$$E_{\alpha,\beta-\alpha\rho}^{(\rho)}(z) = \rho! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho+1)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!}.$$

Utilizando a definição da função de Mittag-Leffler generalizada, dada pela equação (6.22), podemos escrever

$$E_{\alpha,\beta-\alpha\rho}^{(\rho)}(z) = \rho! E_{\alpha,\beta}^{\rho+1}(z),$$

ou ainda,

$$E_{\alpha,\beta}^{(k)}(z) = k! E_{\alpha,\beta+\alpha k}^{k+1}(z), \quad (6.24)$$

para  $k = 0, 1, 2, 3 \dots$

A partir da equação (6.24), justifica-se trabalhar com a função  $E_{\alpha,\beta}^k(z)$  em vez da  $k$ -ésima derivada da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros.

## 6.4 Transformada de Laplace

Nesta seção vamos utilizar a relação existente entre a função de Mittag-Leffler, e suas generalizações, com a função exponencial de modo a obter suas transformadas de Laplace. Para isto, calculamos a transformada de Laplace da função  $t^k e^{at}$ .

Inicialmente notemos que

$$\int_0^\infty e^{-t} e^{\pm z t} dt = \frac{1}{1 \mp z}, \quad |z| < 1. \quad (6.25)$$

De fato, utilizando a representação em série para  $e^z$ , podemos escrever

$$\int_0^\infty e^{-t} e^{\pm z t} dt = \frac{1}{1 \mp z} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(\pm z)^k}{k!} \int_0^\infty e^{-t} t^k dt = \sum_{k=0}^\infty (\pm z)^k = \frac{1}{1 \mp z},$$

na qual a terceira igualdade é devida à definição da função gama<sup>5</sup>.

Simulando uma derivada em relação a  $z$  em ambos os lados da equação (6.25) obtemos

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^k e^{\pm z t} dt = \frac{k!}{(1 \mp z)^{k+1}} \quad |z| < 1.$$

Introduzindo a mudança de variável  $\pm z = \pm a - p + 1$  na equação anterior obtemos a transformada de Laplace da função  $t^k e^{\pm at}$ , ou seja,

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^k e^{\pm at} dt = \frac{k!}{(p \mp a)^{k+1}}, \quad \text{Re}(p) > |a|.$$

Utilizamos o mesmo procedimento para calcular a transformada de Laplace da função  $t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$ . Então, temos, pela definição que

$$\mathfrak{L}\{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha)\} = \int_0^\infty e^{-st} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha) dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{(\pm a)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha k + \beta - 1} dt.$$

Introduzindo a mudança de variável  $st = u$  temos, novamente utilizando a definição da função gama, que

$$\mathfrak{L}\{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha)\} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(\pm a)^k}{s^{\alpha k + \beta}} = \frac{1}{s^\beta} \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{\pm a}{s^\alpha}\right)^k = \frac{1}{s^\beta} \frac{1}{1 \mp a/s^\alpha} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha \mp a}.$$

Derivando ambos os lados  $k$  vezes em relação a  $a$  e utilizando a regra da cadeia<sup>6</sup>

$$\mathfrak{L}\{t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm at^\alpha)\} = \frac{k! s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha \mp a)^{k+1}}, \quad (6.26)$$

na qual  $E_{\alpha,\beta}^{(k)}(z) = \frac{\partial^k}{\partial z^k} E_{\alpha,\beta}(z)$ .

Um interessante resultado a partir do qual obtemos a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler generalizada é obtido quando desenvolvemos o lado esquerdo da equação (6.26). Calculando explicitamente  $\mathfrak{L}\{t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(at^\alpha)\}$  podemos escrever:

---

<sup>5</sup>Ver equação (A.1).

<sup>6</sup>Segue, pela regra da cadeia, que  $\partial/\partial a = t^\alpha \partial/\partial(at^\alpha)$ .

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}\{t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(at^\alpha)\} &= \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha k + \beta - 1} \sum_{n=k}^\infty \frac{n!}{(n-k)! \Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{(at^\alpha)^{n-k}}{n!} dt \\
&= \sum_{n=k}^\infty \frac{n!}{(n-k)! \Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{a^{n-k}}{s^{\alpha n + \beta}} \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha k + \beta - 1} du \\
&= \frac{1}{s^\beta} \sum_{n=k}^\infty \frac{n!}{(n-k)!} \frac{a^{n-k}}{s^{\alpha n}} \\
&= \frac{1}{s^{\alpha k + \beta}} \sum_{n=0}^\infty \frac{(n+k)!}{(n)!} \left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^n.
\end{aligned}$$

Utilizando a equação anterior e o resultado da equação (6.26) podemos escrever

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(n+k)!}{n!k!} \left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^n = \frac{s^{\alpha(k+1)}}{(s^\alpha - a)^{k+1}}.$$

Reescrevendo a equação anterior em termos do símbolo de Pochhammer e tomando a mudança de variável  $k+1 = \rho$  temos

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(\rho)_n}{n!} \left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^n = \frac{s^{\alpha\rho}}{(s^\alpha - a)^\rho}. \quad (6.27)$$

De posse da equação (6.27) podemos calcular a transformada de Laplace de  $t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}^\rho(at^\alpha)$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}\{t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}^\rho(at^\alpha)\} &= \int_0^\infty e^{-st} t^{\beta-1} \sum_{n=0}^\infty \frac{(\rho)_n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{(at^\alpha)^n}{n!} dt \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{a^n}{n! \Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{1}{s^{\alpha n + \beta}} \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha n + \beta - 1} du \\
&= \frac{1}{s^\beta} \sum_{n=0}^\infty \frac{(\rho)_n}{n!} \left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^n \\
&= \frac{1}{s^\beta} \frac{s^{\alpha\rho}}{(s^\alpha - a)^\rho},
\end{aligned}$$

na qual a penúltima igualdade se deve a equação (6.27). Explicitando ainda mais o resultado da equação anterior temos a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler generalizada, ou seja, em geral

$$\mathfrak{L}\{t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}^\rho(\pm at^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha\rho - \beta}}{(s^\alpha \mp a)^\rho}. \quad (6.28)$$

Temos que a transformada inversa pode ser escrita da seguinte forma<sup>7</sup>

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{s^{\alpha\rho-\beta}}{(s^\alpha \mp \lambda)^\rho} \right] = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\rho(\pm \lambda t^\alpha), \quad (6.29)$$

com  $\text{Re}(s) > 0$  e  $\text{Re}(\beta) > 0$ .

## 6.5 Novos Teoremas para a Função de Mittag-Leffler

No próximo capítulo, vamos ver que ao resolver a assim chamada equação do telégrafo fracionária [35, 38, 39] por dois caminhos distintos chegamos a dois resultados novos, teoremas de adição, envolvendo a função de Mittag-Leffler generalizada. Apresentamos a seguir os teoremas, suas demonstrações formais, bem como alguns corolários.

TEOREMA 7. Sejam  $x, y \in \mathbb{R}$  com  $|x| < 1$  e  $|y| < 1$ . Se  $x \neq y$  então

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-xy)^k E_{\alpha, 2\alpha k + 2\alpha}^{k+1}(x+y) = \sum_{k=0}^{\infty} (x+y)^k E_{2\alpha, \alpha k + 2\alpha}^{k+1}(-xy) = \frac{x E_{\alpha, 2\alpha}(x) - y E_{\alpha, 2\alpha}(y)}{x - y}. \quad (6.30)$$

DEMONSTRAÇÃO.<sup>8</sup> A demonstração da primeira igualdade segue diretamente da definição da função de Mittag-Leffler generalizada, isto é,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (-xy)^k E_{\alpha, 2\alpha k + 2\alpha}^{k+1}(x+y) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-xy)^k \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\ell+1)}{\Gamma(\ell+1)} \frac{1}{\Gamma(\alpha\ell + 2\alpha k + 2\alpha)} \frac{(x+y)^\ell}{\ell!} = \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} (x+y)^\ell \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\ell+k+1)}{\Gamma(k+1)} \frac{1}{\Gamma(2\alpha k + \alpha\ell + 2\alpha)} \frac{(-xy)^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (x+y)^\ell E_{2\alpha, \alpha\ell + 2\alpha}^{\ell+1}(-xy). \end{aligned}$$

Demonstremos agora a segunda igualdade. Sendo  $|x| < 1$ ,  $|y| < 1$ , a partir da definição da função de Mittag-Leffler generalizada podemos escrever para o primeiro membro da equação (6.30)

$$\Omega \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (-xy)^k E_{\alpha, 2\alpha k + 2\alpha}^{k+1}(x+y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-xy)^k \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(k+1)_\ell}{\Gamma(\alpha\ell + 2\alpha k + 2\alpha)} \frac{(x+y)^\ell}{\ell!}.$$

---

<sup>7</sup>Note que, para obter a transformada de Laplace inversa da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros basta tomarmos  $\rho = 1$  e para a transformada de Laplace inversa da função de Mittag-Leffler clássica  $\rho = \beta = 1$ .

<sup>8</sup>A demonstração deste teorema foi originalmente por nós obtida a partir de duas formas distintas de se calcular a função de Green associada à equação do telegrafo fracionária, como vamos ver no próximo capítulo.

Utilizando a expressão do binomial e rearranjando os somatórios podemos escrever

$$\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-xy)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=n}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\ell+1)}{\Gamma(\alpha\ell+2\alpha k+2\alpha)} \frac{x^{\ell-n} y^n}{n!(\ell-n)!}.$$

Introduzindo a mudança  $\ell \rightarrow \ell + n$  na equação anterior obtemos

$$\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-xy)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\ell+n+1)}{\Gamma(\alpha\ell+\alpha n+2\alpha k+2\alpha)} \frac{x^\ell}{\ell!}.$$

Fazendo a mudança de índices,  $n \rightarrow n - k$  e  $\ell \rightarrow \ell - k$  temos

$$\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{y^n}{(n-k)!} \sum_{\ell=k}^{\infty} \frac{\Gamma(\ell+n-k+1)}{\Gamma(\alpha\ell+\alpha n+2\alpha)} \frac{x^\ell}{(\ell-k)!}$$

que pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} y^n \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell}{\Gamma(\alpha\ell+\alpha n+2\alpha)} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(\ell+n-k)!}{(n-k)!(\ell-k)!}$$

com  $n \geq k$  e  $\ell \geq k$ , nos demais casos  $\Omega = 0$ .

A fim de efetuar a soma em  $k$  utilizamos a seguinte relação para os coeficientes binomiais [98]:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{a-k}{m} = \binom{a-n}{m-n}.$$

Desta forma concluímos, para o primeiro membro da equação (6.30), que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-xy)^k E_{\alpha, 2k\alpha+2\alpha}^{k+1}(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell y^n}{\Gamma(\alpha\ell+\alpha n+2\alpha)}.$$

Por outro lado, o segundo membro da equação anterior, pode ser escrito da seguinte forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell y^n}{\Gamma(\alpha\ell+\alpha n+2\alpha)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell}{\Gamma(\alpha\ell+2\alpha)} \sum_{n=0}^{\ell} \left(\frac{y}{x}\right)^n.$$

A partir da seguinte expressão

$$\frac{x^{\ell+1} - y^{\ell+1}}{x - y} = x^\ell \sum_{n=0}^{\ell} \left(\frac{y}{x}\right)^n$$

válida para  $x \neq y$ , obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{\ell} y^n}{\Gamma(\alpha \ell + \alpha n + 2\alpha)} &= \frac{1}{x-y} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{\ell+1} - y^{\ell+1}}{\Gamma(\alpha \ell + 2\alpha)} \\ &= \frac{1}{x-y} \left\{ x \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{\ell}}{\Gamma(\alpha \ell + 2\alpha)} - y \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{y^{\ell}}{\Gamma(\alpha \ell + 2\alpha)} \right\}. \end{aligned}$$

Utilizando a equação (6.22) com  $\rho = 1$  temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{\ell} y^n}{\Gamma(\alpha \ell + \alpha n + 2\alpha)} = \frac{x E_{\alpha, 2\alpha}(x) - y E_{\alpha, 2\alpha}(y)}{x - y}$$

o que prova o teorema ■

TEOREMA 8. Sejam  $x, y \in \mathbb{R}$  com  $|x| < 1$  e  $|y| < 1$ . Se  $x \neq y$  então

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} (-xy)^k [E_{\alpha, 2\alpha k+1}^{k+1}(x+y) - (x+y) E_{\alpha, 2\alpha k+\alpha+1}^{k+1}(x+y)] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (y+z)^k \{E_{2\alpha, \alpha k+1}^{k+1}(-yz) - (y+z) E_{2\alpha, \alpha k+\alpha+1}^{k+1}(-yz)\} = \frac{x E_{\alpha}(y) - y E_{\alpha}(x)}{x - y}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

DEMONSTRAÇÃO.<sup>9</sup> Seja  $\Omega_1 \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (-xy)^k E_{\alpha, 2\alpha k+1}^{k+1}(x+y)$ . Temos, pela definição da função de Mittag-Leffler generalizada, que

$$\Omega_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (-xy)^k \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(k+1)_{\ell}}{\Gamma(\alpha \ell + 2\alpha k + 1)} \frac{(x+y)^{\ell}}{\ell!}.$$

Utilizando a expressão associada ao binômio

$$(x+y)^{\ell} = \sum_{n=0}^{\ell} \frac{\ell!}{n!(\ell-n)!} x^{\ell-n} y^n$$

e rearranjando os somatórios, podemos escrever

$$\Omega_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (-xy)^k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=n}^{\infty} \frac{(k+1)_{\ell}}{\Gamma(\alpha \ell + 2\alpha k + 1)} \frac{x^{\ell-n} y^n}{n!(\ell-n)!}.$$

---

<sup>9</sup>A demonstração da primeira igualdade é análoga a feita no teorema anterior, isto é, segue diretamente da definição da função de Mittag-Leffler generalizada.

Introduzindo a mudança de índices  $\ell \rightarrow \ell + n$ , obtemos

$$\Omega_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (-xy)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(k+1)_{\ell+n}}{\Gamma(\alpha\ell + \alpha n + 2\alpha k + 1)} \frac{x^\ell}{\ell!}.$$

Utilizando a definição do símbolo de Pochhammer<sup>10</sup> temos

$$\Omega_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-xy)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\ell + n + k + 1)}{\Gamma(\alpha\ell + \alpha n + 2\alpha k + 1)} \frac{x^\ell}{\ell!}.$$

As mudanças de índices  $n \rightarrow n - k$  e  $\ell \rightarrow \ell - k$  nos conduzem à seguinte expressão

$$\Omega_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-xy)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \sum_{\ell=k}^{\infty} \frac{\Gamma(\ell - k + n + 1)}{\Gamma(\alpha\ell + \alpha n + 1)} \frac{x^{\ell-k}}{\ell!}.$$

Visto que todos somatórios convergem uniformemente podemos mudar a ordem, de onde segue que

$$\Omega_1 = \sum_{n=0}^{\infty} y^n \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell}{\Gamma(\alpha\ell + \alpha n + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(\ell + n - k)!}{(\ell - k)!(n - k)!},$$

ou ainda,

$$\Omega_1 = \sum_{n=0}^{\infty} y^n \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell}{\Gamma(\alpha\ell + \alpha n + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\ell + n - k}{\ell - k} \binom{n}{n - k},$$

agora, utilizando a propriedade do binômio (complementar), na forma

$$\Omega_1 = \sum_{n=0}^{\infty} y^n \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell}{\Gamma(\alpha\ell + \alpha n + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\ell + n - k}{n} \binom{n}{k}.$$

Uma vez que [98]

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{a - k}{m} = \binom{a - n}{m - n},$$

concluimos que

$$\Omega_1 \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (-xy)^k E_{\alpha, 2\alpha k + 1}^{k+1}(x + y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell y^n}{\Gamma(\alpha\ell + \alpha n + 1)}. \quad (6.32)$$

De maneira inteiramente análoga temos

$$\Omega_2 \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (-xy)^k (x + y) E_{\alpha, 2\alpha k + \alpha + 1}^{k+1}(x + y) = (x + y) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell y^n}{\Gamma(\alpha\ell + \alpha n + \alpha + 1)}. \quad (6.33)$$

---

<sup>10</sup> $(\beta)_k = \frac{\Gamma(\beta + k)}{\Gamma(\beta)}.$

Sendo<sup>11</sup>  $\Lambda \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (-xy)^k [E_{\alpha, 2\alpha k+1}^{k+1}(x+y) - (x+y)E_{\alpha, 2\alpha k+\alpha+1}^{k+1}(x+y)] = \Omega_1 - \Omega_2$ , podemos escrever

$$\Lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell y^n}{\Gamma(\alpha\ell + \alpha n + 1)} - (x+y) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell y^n}{\Gamma(\alpha\ell + \alpha n + \alpha + 1)},$$

ou ainda,

$$\Lambda = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell}{\Gamma(\alpha\ell + 1)} \sum_{n=0}^{\ell} \left(\frac{y}{x}\right)^n - (x+y) \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell}{\Gamma(\alpha\ell + \alpha + 1)} \sum_{n=0}^{\ell} \left(\frac{y}{x}\right)^n.$$

Utilizando a soma da série geométrica

$$x^\ell \sum_{n=0}^{\ell} \left(\frac{y}{x}\right)^n = \frac{x^{\ell+1} - y^{\ell+1}}{x - y},$$

com  $x \neq y$  podemos escrever

$$\Lambda = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{\ell+1} - y^{\ell+1}}{x - y} \frac{1}{\Gamma(\alpha\ell + 1)} - (x+y) \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{\ell+1} - y^{\ell+1}}{x - y} \frac{1}{\Gamma(\alpha\ell + \alpha + 1)}.$$

Fazendo a mudança de índice  $\ell \rightarrow \ell - 1$  no segundo somatório da expressão anterior, temos<sup>12</sup>

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{x-y} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{\ell+1} - y^{\ell+1}}{\Gamma(\alpha\ell + 1)} - \frac{x+y}{x-y} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{x^\ell - y^\ell}{\Gamma(\alpha\ell + 1)} \\ &= \frac{1}{x-y} \{xE_\alpha(x) - yE_\alpha(y) - (x+y)x E_{\alpha, \alpha+1}(x) + (x+y)y E_{\alpha, \alpha+1}(y)\} \\ &= \frac{1}{x-y} \{xE_\alpha(x) - yE_\alpha(y) - (x+y)[E_\alpha(x) - 1] + (x+y)[E_\alpha(y) - 1]\} \\ &= \frac{x E_\alpha(y) - y E_\alpha(x)}{x - y}. \end{aligned}$$

Sendo assim, concluímos que

$$\Lambda = \sum_{k=0}^{\infty} (-xy)^k [E_{\alpha, 2\alpha k+1}^{k+1}(x+y) - (x+y)E_{\alpha, 2\alpha k+\alpha+1}^{k+1}(x+y)] = \frac{x E_\alpha(y) - y E_\alpha(x)}{x - y},$$

que é justamente o resultado que buscávamos ■

---

<sup>11</sup>Note que  $\Lambda$  equivale ao lado esquerdo da equação (6.31).

<sup>12</sup>A terceira igualdade a seguir é devida ao fato  $xE_{\alpha, \alpha+1}(x) = E_{\alpha, 1}(x) - 1 = E_\alpha(x) - 1$ .



## 6.6 Aplicações e Casos Particulares

Iniciamos esta seção apresentando algumas consequências naturais advindas dos teoremas 7 e 8, acima demonstrados. Apresentamos estes resultados como corolários.

COROLÁRIO 1. Para  $x \in \mathbb{R}$  com  $|x| < 1$  temos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k E_{\alpha, 2\alpha k + 2\alpha}(2x) = \left(1 + x \frac{d}{dx}\right) E_{\alpha, 2\alpha}(x). \quad (6.34)$$

DEMONSTRAÇÃO. Utilizando a regra de l'Hôpital e tomando o limite  $y \rightarrow x$  na equação (6.30) segue-se o resultado ■

COROLÁRIO 2. Para  $x \in \mathbb{R}$  com  $|x| < 1$  temos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k [E_{\alpha, 2\alpha k + 1}^{k+1}(2x) - 2x E_{\alpha, 2\alpha k + \alpha + 1}^{k+1}(2x)] = E_{\alpha}(x) - x E'_{\alpha}(x). \quad (6.35)$$

DEMONSTRAÇÃO. Novamente utilizando a regra de l'Hôpital e tomando o limite  $y \rightarrow x$  na equação (6.31) segue-se o resultado ■

COROLÁRIO 3. Para  $x \in \mathbb{R}$  com  $|x| < 1$  temos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} E_{\alpha, 2\alpha k + 2\alpha}(0) = \frac{E_{\alpha, 2\alpha}(x) + E_{\alpha, 2\alpha}(-x)}{2} = E_{2\alpha, 2\alpha}(x^2). \quad (6.36)$$

DEMONSTRAÇÃO. Novamente utilizando a regra de l'Hôpital e agora tomando o limite  $y \rightarrow -x$  na equação (6.30) obtemos o resultado desejado ■

COROLÁRIO 4. Para  $x \in \mathbb{R}$  com  $|x| < 1$  temos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} E_{\alpha, 2\alpha k + 1}^{k+1}(0) = \frac{E_{\alpha}(x) + E_{\alpha}(-x)}{2} = E_{2\alpha}(x^2). \quad (6.37)$$

DEMONSTRAÇÃO. Mais uma vez utilizando a regra de l'Hôpital e o limite  $y \rightarrow -x$  na equação (6.31) obtemos o resultado da equação (6.37) ■

Note que para  $\alpha = 1$  a equação (6.37) recupera a representação em série para a função co-seno hiperbólico. Além disso, utilizando a relação existente entre a função de Mittag-Leffler generalizada e a função hipergeométrica confluyente,

$$\Gamma(\beta)E_{1,\beta}^\rho(x) = {}_1F_1(\rho; \beta; x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{(\beta)_k} \frac{x^k}{k!},$$

com  $\rho, \beta \in \mathbb{C}$ , e tomando  $\alpha = 1$  em todas as relações acima podemos escrever vários novos resultados envolvendo regras de soma e teoremas de adição para a função hipergeométrica confluyente. Explicitamos aqui apenas dois destes resultados.

Tomando  $\alpha = 1$  na equação (6.31) podemos escrever a seguinte nova regra de soma para a função hipergeométrica confluyente

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-xy)^k}{(2k+1)!} {}_1F_1(k+1; 2k+2; x+y) = \frac{e^x - e^y}{x-y}. \quad (6.38)$$

Concluimos esta seção com o resultado obtido através da equação anterior, tomando o limite  $y \rightarrow x$ , ou seja,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{(2k+1)!} {}_1F_1(k+1; 2k+2; 2x) = e^x. \quad (6.39)$$

## 6.7 Comportamento Gráfico

Como já dissemos anteriormente, e vamos observar no capítulo das aplicações, o cálculo fracionário é uma importante ferramenta para refinar a descrição de fenômenos naturais, em particular, aqueles que possuem dependência temporal.

Assim como a resolução de uma equação diferencial parcial com coeficientes constantes tem sua solução dada, em vários casos, em termos da função exponencial, uma equação diferencial de ordem não-inteira tem, em muitos casos, sua solução dada em termos de funções de Mittag-Leffler<sup>13</sup>.

Sendo assim, ao entender a forma que a função de Mittag-Leffler generaliza a função exponencial estamos, de certa forma, entendendo o porquê de, em alguns casos, uma equação diferencial de ordem não-inteira fornecer uma descrição mais fina de um dado fenômeno do que a respectiva equação de ordem inteira.

---

<sup>13</sup>Neste sentido, podemos dizer que a função de Mittag-Leffler é a generalização fracionária da função exponencial.

A fim de elucidar este entendimento apresentamos a seguir alguns gráficos referentes à função de Mittag-Leffler de dois parâmetros. Estes gráficos foram obtidos com o programa MATLAB. Para tanto, fixamos o valor de  $\beta$  e consideramos valores de  $\alpha$ . Iniciamos nossa análise gráfica considerando  $\beta = 1$ , isto é, consideramos inicialmente a função de Mittag-Leffler clássica. Como em muitas aplicações consideramos derivadas de ordem inferior a um, apresentamos uma análise para  $\alpha < 1$ , no particular caso em que  $\beta = 1$ .

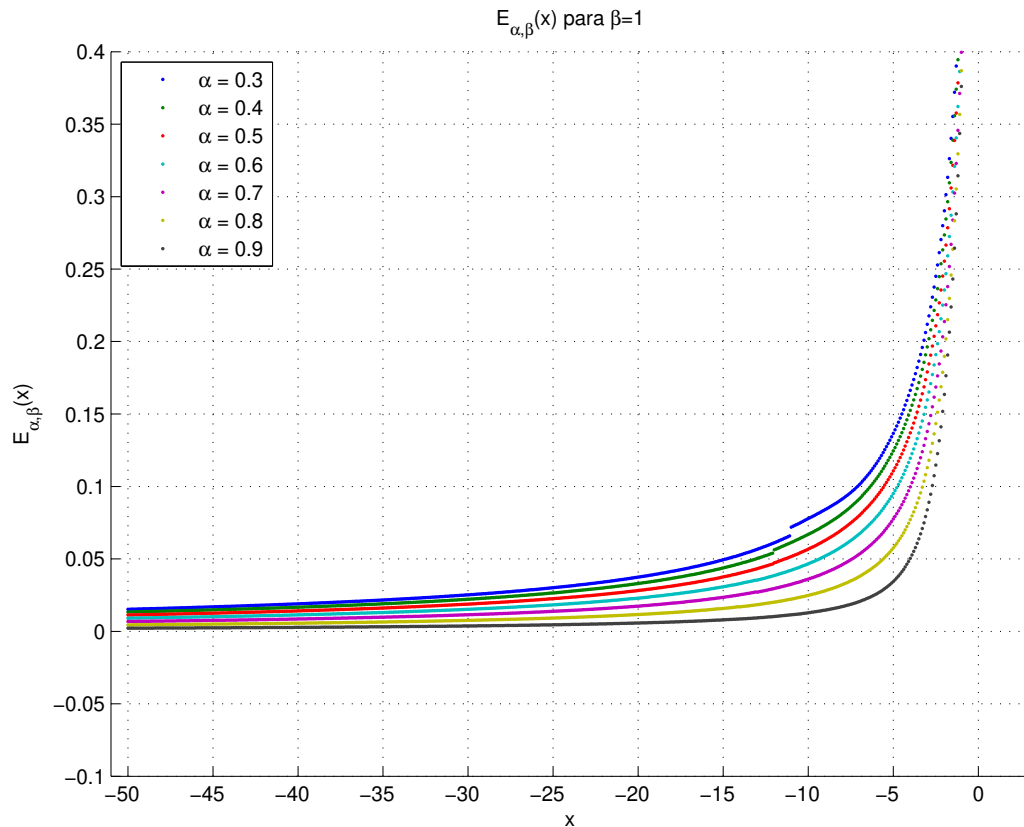


Figura 6.1: Gráfico de  $E_{\alpha}(x)$  para  $0 < \alpha < 1$ .

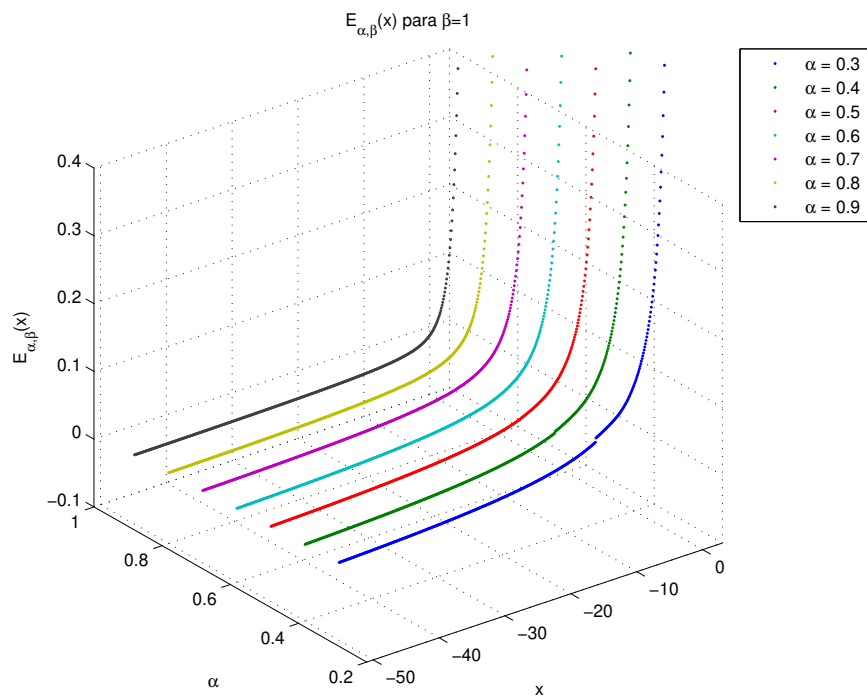


Figura 6.2: Gráfico tridimensional de  $E_{\alpha}(x)$  para  $0 < \alpha < 1$ .

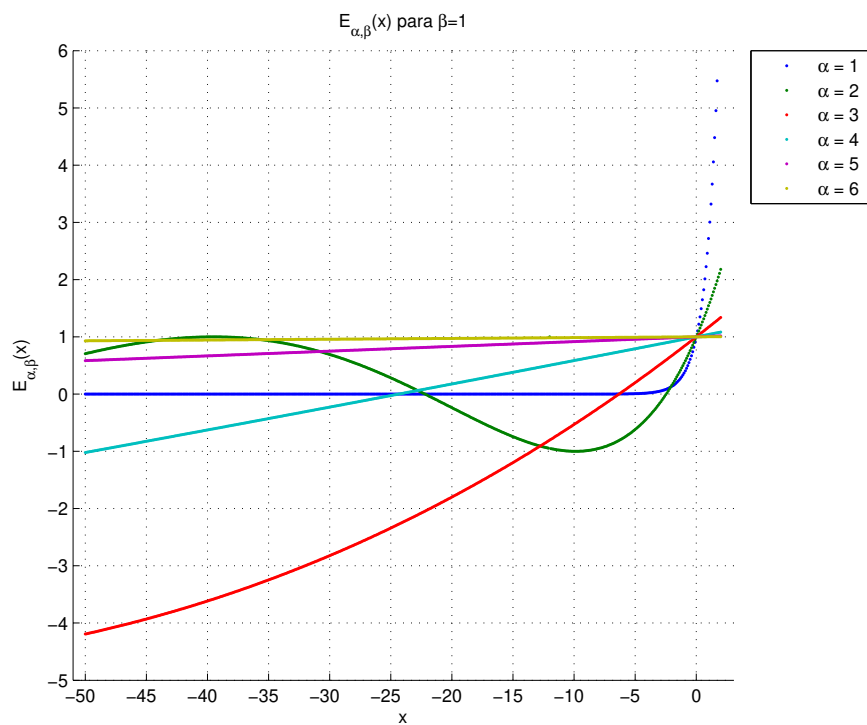


Figura 6.3: Gráfico de  $E_{\alpha}(x)$  para  $\alpha \geq 1$ .

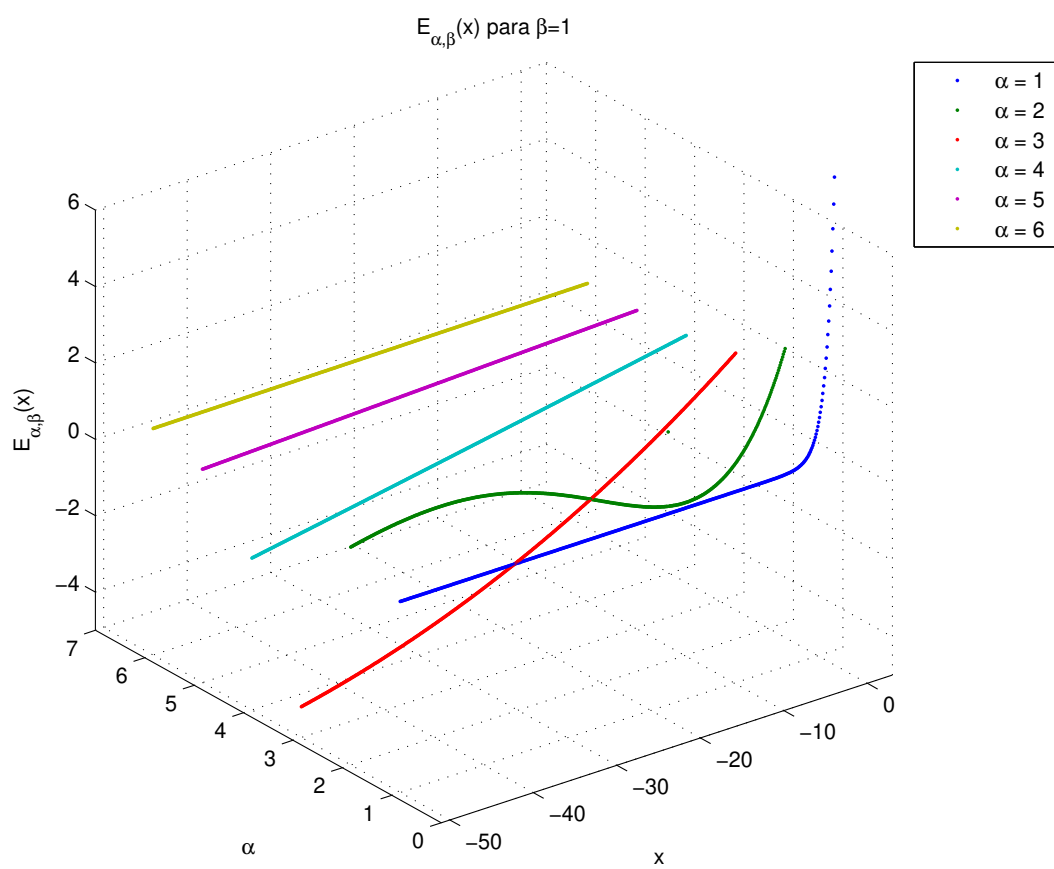


Figura 6.4: Gráfico tridimensional de  $E_{\alpha}(x)$  para  $\alpha \geq 1$ .

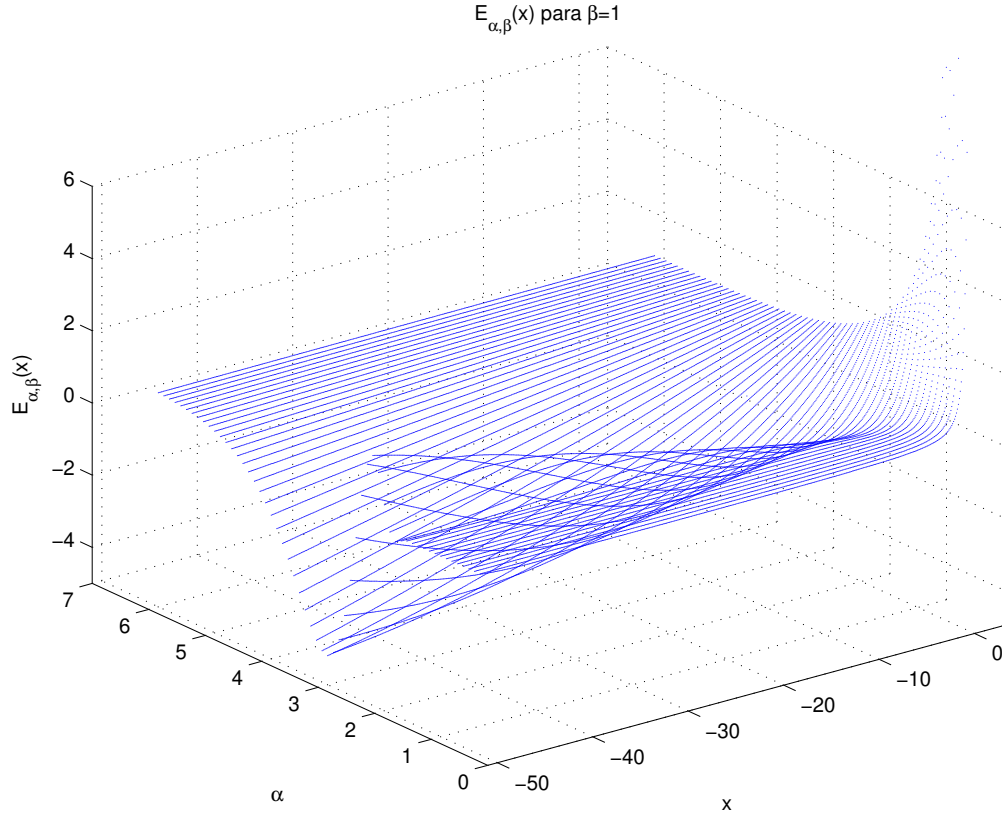


Figura 6.5: Superfície gerada por  $E_{\alpha}(x)$ .

Nos gráficos referentes à função de Mittag-Leffler clássica podemos observar os diferentes comportamentos da função para diferentes valores de  $\alpha$ . Em azul,  $\alpha = 1$ , temos a função exponencial, note que para valores de  $\alpha \geq 4$ , a função apresenta um comportamento praticamente linear e a medida que  $\alpha$  aumenta a inclinação da reta, referente a função de Mittag-Leffler, diminui. Para valores muito grandes de  $\alpha$  a inclinação é praticamente nula. Além disso, destacamos que  $E_{\alpha}(0) = 1$  para qualquer valor de  $\alpha$ . Por fim, notamos o comportamento bastante similar de  $E_{\alpha}(x)$  para valores de  $\alpha$  menores que 1. A seguir estudamos o caso em que  $\beta = 2$ .

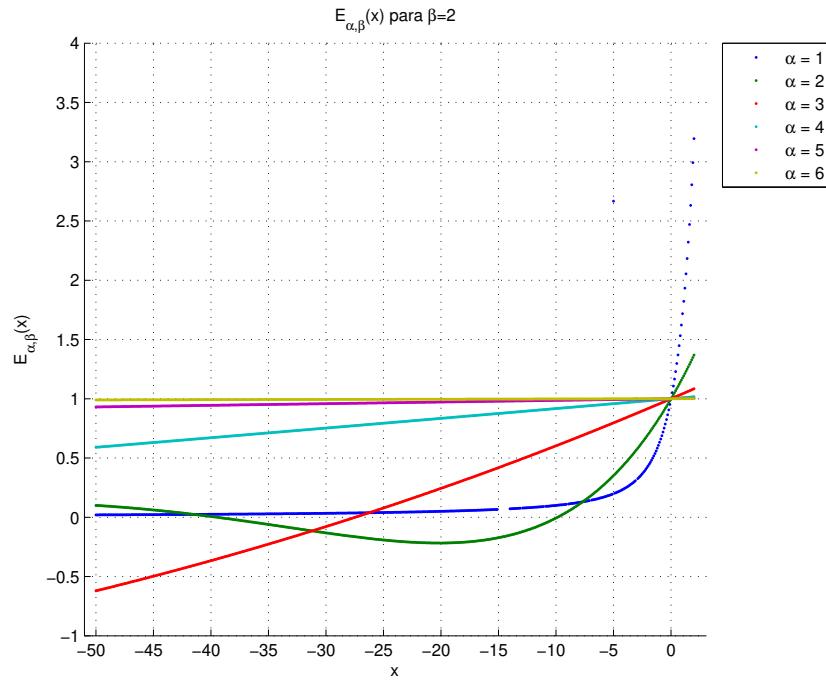


Figura 6.6: Gráfico de  $E_{\alpha,2}(x)$  para vários valores de  $\alpha$ .

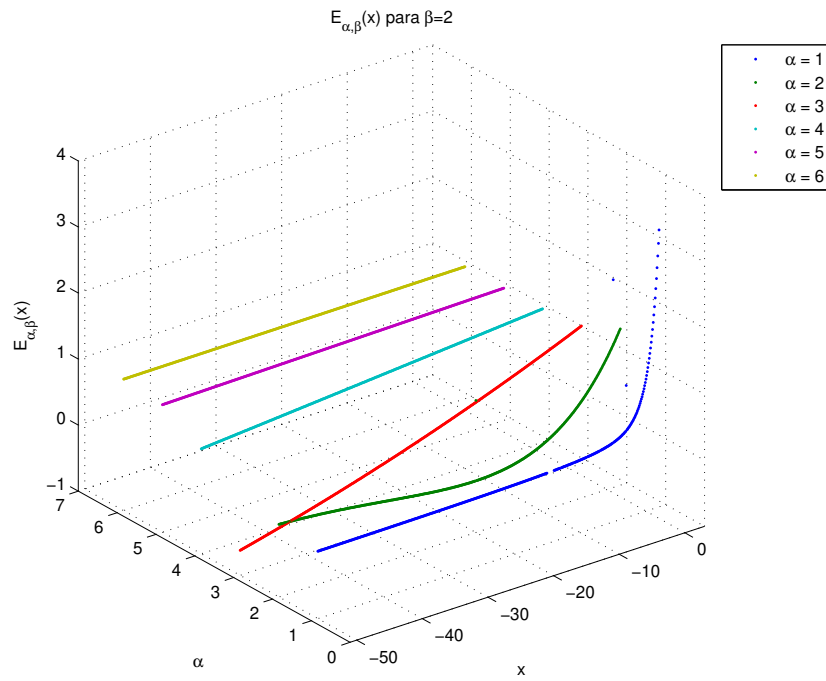


Figura 6.7: Gráfico tridimensional de  $E_{\alpha,2}(x)$  para vários valores de  $\alpha$ .

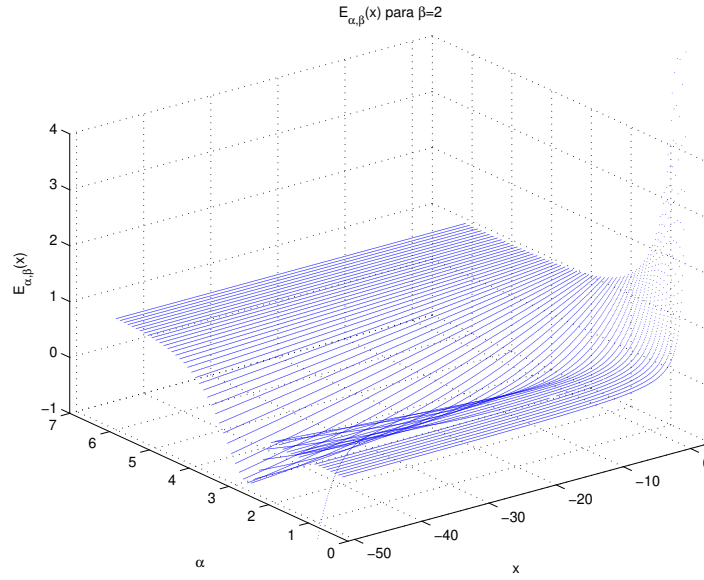


Figura 6.8: Superfície gerada por  $E_{\alpha,2}(x)$ .

Nos gráficos anteriores notamos que a função  $E_{\alpha,2}(x)$  tem um comportamento bastante similar ao da função de Mittag-Leffler de um parâmetro. Porém, as curvas são menos sinuosas, como fica claro ao observar, por exemplo, as funções  $E_{2,2}(x)$  e  $E_2(x)$  e, na maioria dos pontos, temos que  $|E_{\alpha,2}(x)| \leq |E_\alpha(x)|$ .

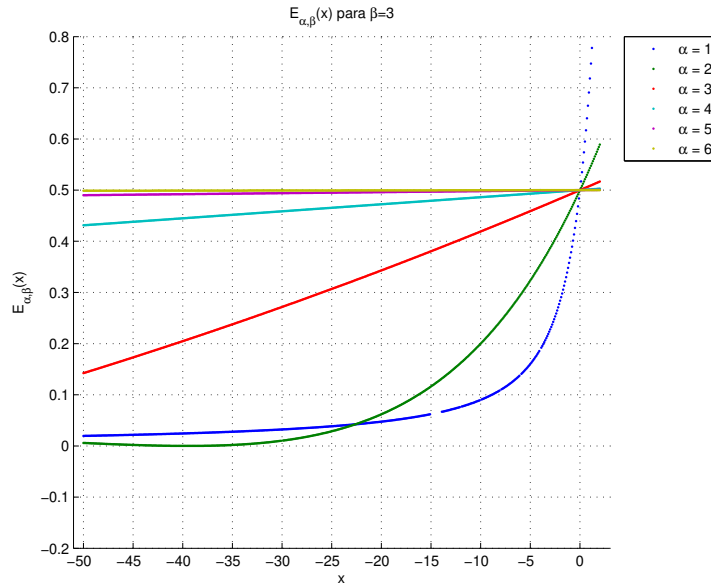


Figura 6.9: Gráfico de  $E_{\alpha,3}(x)$  para vários valores de  $\alpha$ .



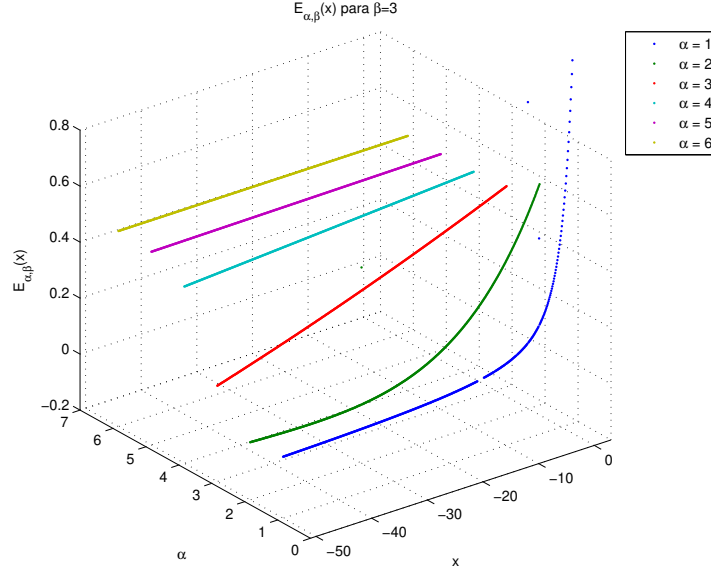


Figura 6.10: Gráfico tridimensional de  $E_{\alpha,3}(x)$  para vários valores de  $\alpha$ .

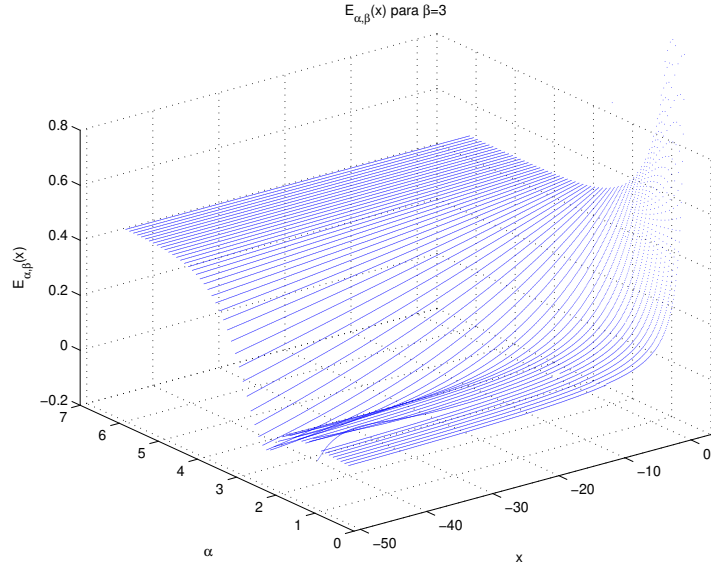


Figura 6.11: Superfície gerada por  $E_{\alpha,3}(x)$ .

Ao observar os gráficos para  $E_{\alpha,3}(x)$ , com  $\alpha \geq 1$ , notamos que embora este também tenha um comportamento similar ao da função  $E_{\alpha}(x)$  este não admite valores negativos, o que pode ser um fator importante ao se modelar um evento.

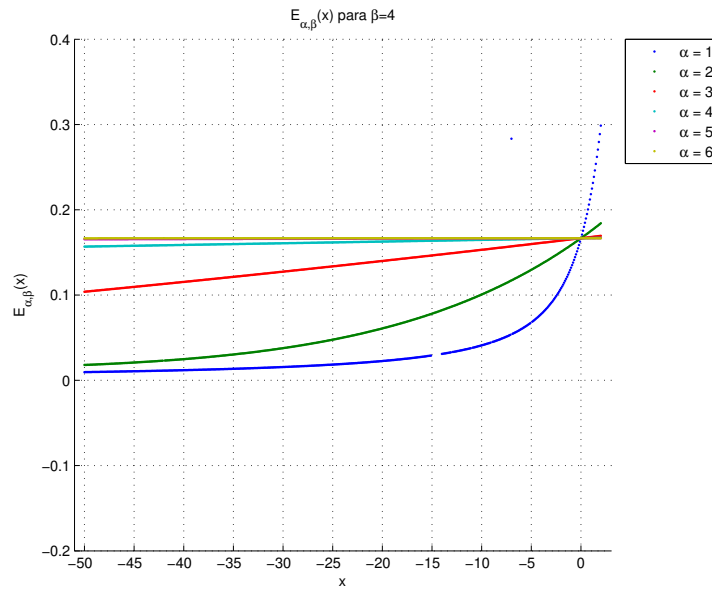


Figura 6.12: Gráfico de  $E_{\alpha,4}(x)$  para vários valores de  $\alpha$ .

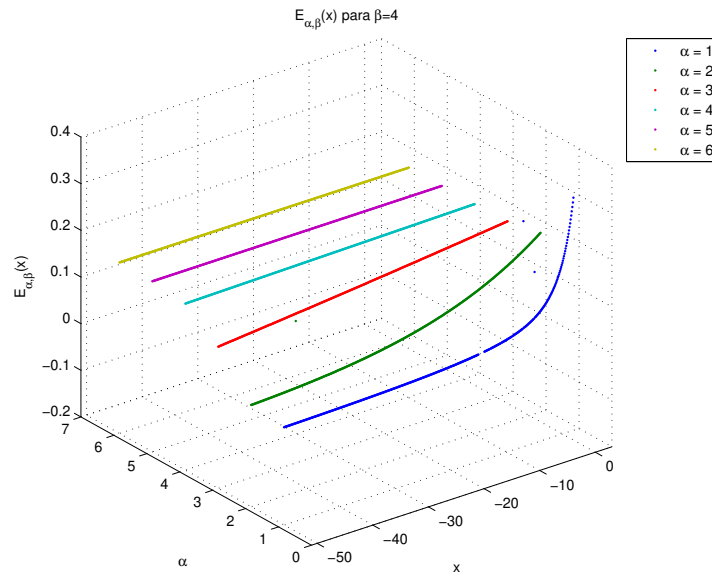


Figura 6.13: Gráfico tridimensional de  $E_{\alpha,4}(x)$  para vários valores de  $\alpha$ .

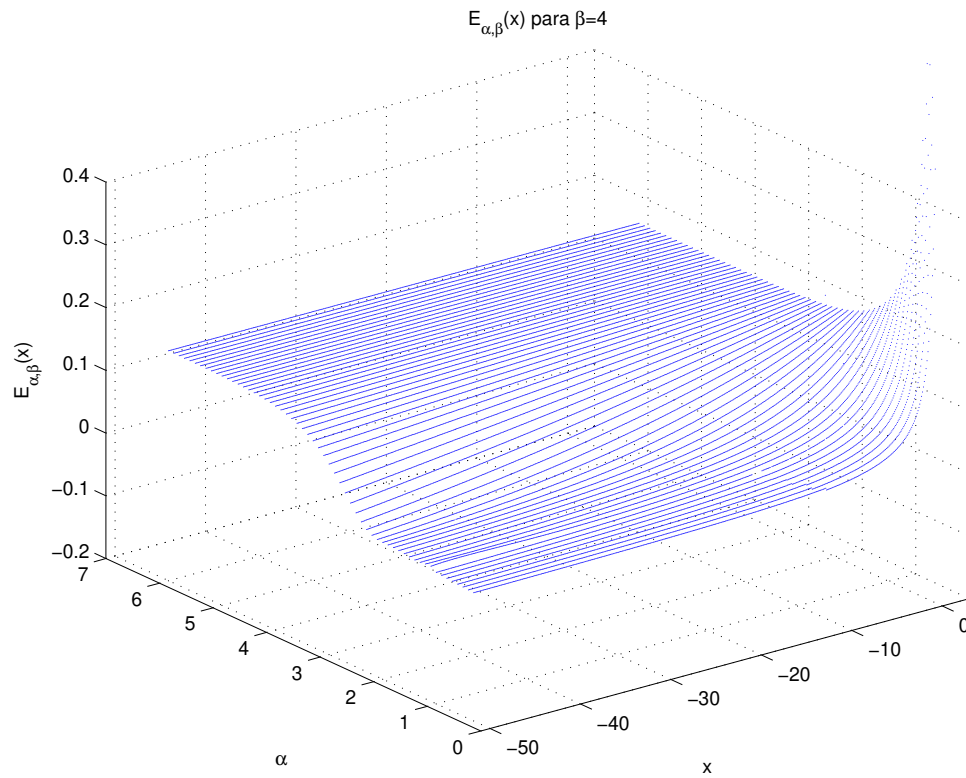


Figura 6.14: Superfície gerada por  $E_{\alpha,4}(x)$ .

Fica claro ao analisar todos os gráficos que quanto menor o valor de  $\beta$  mais rapidamente se dá a convergência da função  $E_{\alpha,\beta}$ , para a reta  $y = 0$ , a medida que aumentamos o valor de  $\alpha$ . Além disso, pudemos analisar a forma que a função de Mittag-Leffler generaliza a função exponencial o que, em determinados eventos, pode ser útil para entender o porquê de um modelo que utiliza derivadas fracionárias, generalizar o respectivo modelo que utiliza derivadas inteiras.

# Equação do Telégrafo Fracionária

A análise matemática do comportamento das linhas de transmissão elétrica iniciou-se a partir dos trabalhos de Maxwell, Kelvin e Heaviside. Em 1855 Kelvin formulou o modelo de difusão de corrente em um cabo submarino. O modelo previu de maneira correta o fraco desempenho do primeiro cabo submarino de telégrafo através do Atlântico, que ficou inutilizado depois da transmissão de apenas setecentas mensagens, devido às fortes correntes empregadas. Quando o segundo cabo foi colocado, no ano de 1866, as recomendações de Kelvin foram adotadas e este obteve maior sucesso. Trinta anos mais tarde, em 1885, Heaviside publicou um artigo no qual descrevia suas análises sobre propagação em cabos e a forma moderna da assim chamada equação do telégrafo.

A equação do telégrafo, é uma equação diferencial parcial utilizada para descrever vários fenômenos tais como voltagem e corrente em uma linha de transmissão elétrica e propagação de onda. A equação do telégrafo pode ser dada pela equação

$$(a D_t^2 + b D_t - c D_x^2) \mathbb{G}_{\alpha, \beta}^{\gamma}(x, t) = F(x, t), \quad (7.1)$$

na qual  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes reais, com  $a$  e  $c \neq 0$ . Neste capítulo é apresentada e resolvida uma generalização para a equação do telégrafo tendo tanto a parte espacial quanto a parte temporal considerada no sentido de Caputo fracionárias [38].

Para discutir a equação (7.1) utilizamos a metodologia da justaposição de transformadas [33], isto é, aplicamos a transformada de Laplace na parte temporal e a transformada de Fourier na parte espacial e recuperamos a solução do problema original através das respectivas transformadas inversas<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Lembramos que não tratamos aqui do problema relativo às dimensões físicas, tal problema pode ser encontrado em [61].

A fim de aprimorar, no sentido de uma possível generalização, a clássica equação do telégrafo, permitimos que a ordem das derivadas, tanto espacial quanto temporal, possa tomar valores não inteiros, isto é, consideramos a equação diferencial fracionária associada ao problema do telégrafo. Esta generalização nos permite recuperar o problema clássico através de um caso particular enquanto que o caso geral permanece para estudos futuros, ou seja, uma interpretação para a equação diferencial fracionária.

Este capítulo está disposto da maneira que se segue. Na Seção 7.1, apresentamos o cálculo da função de Green associada à equação (espacial e temporal) do telégrafo fracionária. Na Seção 7.2, um caso particular é resolvido através de outro método. Na Seção 7.3, a partir da comparação dos resultados para a função de Green recuperamos os teoremas 7 e 8 demonstrados formalmente na Seção 6.5.

## 7.1 Função de Green

Nesta seção investigamos a solução de uma equação diferencial parcial fracionária (EDPF) com o segundo membro igual ao produto de duas funções do tipo delta de Dirac, isto é, calculamos a assim chamada função de Green associada a esta equação.

Sejam  $a, b$  e  $c$  constantes reais e  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  parâmetros reais satisfazendo as seguintes condições  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $0 < \beta \leq 1$  e  $0 < \gamma \leq 1$ . Sendo  $D_\xi \equiv \partial/\partial\xi$  com  $\xi$  igual a  $t$ , variável temporal considerada no sentido de Caputo, ou igual a  $x$ , variável espacial considerada no sentido de Riesz.

Consideramos a seguinte EDPF, para a variável temporal  $t > 0$  e variável espacial  $-\infty < x < \infty$

$$\left( a D_t^{2\alpha} + b D_t^\beta - c D_x^{2\gamma} \right) \mathbb{G}_{\alpha,\beta}^\gamma(x, t) = \lambda_1 \delta(t) \delta(x) \quad (7.2)$$

com  $\lambda_1$  sendo uma constante real. A solução da equação (7.2) pode ser interpretada como a função de Green fracionária. Outra maneira de introduzir a função de Green fracionária pode ser encontrada em [77]. Para  $\alpha = \beta = \gamma = 1$  recuperamos a clássica equação diferencial do telégrafo. Sendo assim, a equação (7.2) pode, de fato, ser interpretada como uma generalização da clássica equação do telégrafo. Esta equação também descreve a difusão anômala e o propagador de sinais como mostrado por Mainardi [77].

Para resolver a equação (7.2), primeiramente consideramos todas as constantes  $a, b$  e  $c$  diferentes de zero. Os casos em que algumas delas podem ser nulas devem ser discutidos como casos particulares. Além disso, devemos distinguir dois casos: (i) Se  $\beta \neq 1$  a equação é sempre uma EDPF e (ii) se  $\beta = 1$  temos duas possibilidades, i.e., EDPF, como nos mostra a Tabela 1 e EDP, como na Tabela 2 abaixo

|                |                    |                         |  |
|----------------|--------------------|-------------------------|--|
| $\alpha = 1/2$ | $0 < \gamma < 1/2$ | Primeira ordem no tempo |  |
|                | $1/2 < \gamma < 1$ | Primeira ordem no tempo |  |
| $\alpha = 1$   | $0 < \gamma < 1/2$ | Segunda ordem no tempo  |  |
|                | $1/2 < \gamma < 1$ | Segunda ordem no tempo  |  |

|                |                    |                          |          |
|----------------|--------------------|--------------------------|----------|
| $\gamma = 1/2$ | $0 < \alpha < 1/2$ | Primeira ordem no espaço |          |
|                | $1/2 < \alpha < 1$ | Primeira ordem no espaço |          |
| $\gamma = 1$   | $0 < \alpha < 1/2$ | Segunda ordem no espaço  | ( [77] ) |
|                | $1/2 < \alpha < 1$ | Segunda ordem no espaço  | ( [77] ) |

Tabela 1. Casos em que  $\beta \neq 1$ , sempre tem-se uma EDPF.

|                |                |                                                       |
|----------------|----------------|-------------------------------------------------------|
| $\alpha = 1/2$ | $\gamma = 1/2$ | Primeira ordem no tempo e no espaço                   |
| $\alpha = 1$   | $\gamma = 1$   | Segunda ordem (Equação do Telégrafo Clássica)         |
| $\alpha = 1/2$ | $\gamma = 1$   | Segunda ordem no espaço (Equação de Difusão Clássica) |
| $\alpha = 1$   | $\gamma = 1/2$ | Segunda ordem no tempo                                |

Tabela 2. Casos em que  $\beta = 1$ , sempre tem-se uma EDP.

Por outro lado, temos duas possibilidades para o parâmetro  $n$ , da derivada fracionária: (i)  $n = 1$  para  $0 < \alpha \leq 1/2$  e (ii)  $n = 2$  para  $1/2 < \alpha \leq 1$ .

Como já mencionamos, discutimos a equação (7.2) através da justaposição de transformadas de Laplace na parte temporal e Fourier na parte espacial, no caso em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes não nulas. Sem perda de generalidade consideramos a seguinte equação

$$\left( D_t^{2\alpha} + 2\lambda D_t^\beta - D_x^{2\gamma} \right) \mathbb{G}_{\alpha,\beta}^\gamma(x, t) = \lambda_1 \delta(t) \delta(x) \quad (7.3)$$

na qual  $\lambda$  é constante. Esta equação também pode ser interpretada como a generalização do caso unidimensional discutido por Hanyga [53].

A fim de resolver o caso geral tomamos as seguintes condições iniciais

$$\mathbb{G}_{\alpha,\beta}^\gamma(x, 0) = \lambda_2 \delta(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t} [\mathbb{G}_{\alpha,\beta}^\gamma(x, t)]_{t=0} = 0$$

com  $\lambda_2$  uma constante real, e as seguintes condições de contorno

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \mathbb{G}_{\alpha,\beta}^\gamma(x, t) = 0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{G}_{\alpha,\beta}^\gamma(x, t) \right].$$

Para  $\gamma = 1$ ,  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 1$  temos o caso anteriormente discutido por Orsingher-Beghin [90]. De maneira geral, devemos distinguir as soluções, isto é, para a equação diferencial não-homogênea com  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = 0$  temos a função de Green propriamente dita e, para a equação homogênea,  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 1$  temos o assim chamado propagador.

Seja  $\tilde{\mathbb{G}}_{\alpha,\beta}^{\gamma}(x, s)$  a transformada de Laplace na parte temporal da função  $\mathbb{G}_{\alpha,\beta}^{\gamma}(x, t)$  definida pela seguinte integral

$$\tilde{\mathbb{G}}_{\alpha,\beta}^{\gamma}(x, s) = \int_0^{\infty} \mathbb{G}_{\alpha,\beta}^{\gamma}(x, t) e^{-st} dt$$

com  $\text{Re}(s) > 0$ . Aplicando a transformada de Laplace na equação (7.3) podemos escrever

$$(s^{2\alpha} + 2\lambda s^{\beta} - c^2 D_x^{2\gamma}) \tilde{\mathbb{G}}_{\alpha,\beta}^{\gamma}(x, s) = [\lambda_1 + \lambda_2(s^{2\alpha-1} + 2\lambda s^{\beta-1})]\delta(x). \quad (7.4)$$

Seja  $\hat{\mathbb{G}}_{\alpha,\beta}^{\gamma}(\omega, s)$  a transformada de Fourier da função  $\tilde{\mathbb{G}}_{\alpha,\beta}^{\gamma}(x, s)$ , definida por

$$\hat{\mathbb{G}}_{\alpha,\beta}^{\gamma}(\omega, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbb{G}}_{\alpha,\beta}^{\gamma}(x, s) e^{i\omega x} dx$$

a qual temos para a derivada<sup>2</sup>

$$\mathfrak{F} \left[ \left( -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^{\gamma/2} \tilde{\mathbb{G}}_{\alpha,\beta}^{\gamma}(x, s) \right] = |\omega|^{\gamma} \hat{\mathbb{G}}_{\alpha,\beta}^{\gamma}(\omega, s).$$

Aplicando a transformada de Fourier na equação (7.4) obtemos uma equação algébrica<sup>3</sup>, cuja solução é dada, em termos de  $\Lambda = -|\omega|^{2\gamma}$ , por

$$\hat{\mathbb{G}}_{\alpha,\beta}^{\gamma}(\omega, s) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2(s^{2\alpha-1} + 2\lambda s^{\beta-1})}{s^{2\alpha} + 2\lambda s^{\beta} + \Lambda}. \quad (7.5)$$

Para obter a solução de nosso problema devemos calcular as transformadas inversas. Para tanto, inicialmente calculamos a transformada de Laplace inversa. Manipulando a equação (7.5) podemos escrever

$$\hat{\mathbb{G}}_{\alpha,\beta}^{\gamma}(\omega, s) = \frac{\Omega}{\Lambda} \frac{\Lambda s^{-\beta}}{s^{2\alpha-\beta} + 2\lambda} \frac{1}{1 + \frac{\Lambda s^{-\beta}}{s^{2\alpha-\beta} + 2\lambda}} = \Omega \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Lambda^k \frac{s^{-\beta k - \beta}}{(s^{2\alpha-\beta} + 2\lambda)^{k+1}},$$

onde  $\Omega = \lambda_1 + \lambda_2(s^{2\alpha-1} + 2\lambda s^{\beta-1})$ . A segunda igualdade da equação acima é devida ao fato de estarmos considerando  $|\Lambda s^{-\beta} / (s^{2\alpha-\beta} + 2\lambda)| < 1$ .

Utilizando a linearidade da transformada inversa e a equação (6.26) temos

$$\tilde{\mathbb{G}}_{\alpha,\beta}^{\gamma}(\omega, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\Lambda)^k \left\{ \lambda_1 t^{2\alpha k + 2\alpha - 1} E_{2\alpha-\beta, 2\alpha k + 2\alpha}^{k+1}(-\mu t^{2\alpha-\beta}) + \right. \quad (7.6)$$

---

<sup>2</sup>Esta relação pode ser generalizada para o operador Laplaciano da seguinte forma [82]  $\mathfrak{F}[(-\Delta)^{\mu/2} f(\vec{x})] = |\omega|^{\mu} \mathfrak{F}[f(\vec{x})]$  onde  $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \dots + \omega_n^2$ .

<sup>3</sup>No caso em que a EDPF possui coeficientes constantes, a equação transformada é sempre algébrica.

$$+ \lambda_2 t^{2\alpha k} \left[ E_{2\alpha-\beta, 2\alpha k+1}^{k+1}(-\mu t^{2\alpha-\beta}) + \mu t^{2\alpha-\beta} E_{2\alpha-\beta, 2\alpha k+2\alpha-\beta+1}^{k+1}(-\mu t^{2\alpha-\beta}) \right] \}$$

na qual  $\mu = 2\lambda$ ,  $E_{\alpha,\beta}^\rho(x)$  é a função de Mittag-Leffler introduzida na Seção 6.3 e  $\bar{\mathbb{G}}_{\alpha,\beta}^\gamma(\omega, t)$  é a transformada de Laplace inversa de  $\hat{\mathbb{G}}_{\alpha,\beta}^\gamma(\omega, s)$ .

Para obter a solução da equação (7.3), satisfazendo as condições correspondentes, ou seja, a função de Green fracionária, calculamos a transformada de Fourier inversa. Calculemos a integral

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{\alpha,\beta}^\gamma(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbb{G}}_{\alpha,\beta}^\gamma(\omega, t) e^{-i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-\Lambda)^k \left\{ \lambda_1 t^{2\alpha k+2\alpha-1} E_{2\alpha-\beta, 2\alpha k+2\alpha}^{k+1}(-\mu t^{2\alpha-\beta}) + \right. \\ &\quad + \lambda_2 t^{2\alpha k} \left[ E_{2\alpha-2\alpha, 2\alpha k+1}^{k+1}(-\mu t^{2\alpha-\beta}) \right. \\ &\quad \left. + \mu t^{2\alpha-\beta} E_{2\alpha-\beta, 2\alpha k+2\alpha-\beta+1}^{k+1}(-\mu t^{2\alpha-\beta}) \right] \left. \right\} e^{-i\omega x} d\omega. \end{aligned}$$

Tendo em mente a relação  $\mathfrak{F}[|t|^\lambda](x) = \sqrt{\pi} 2^{\lambda+1} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})}{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})} |x|^{-\lambda-1}$ , válida para  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda \neq -1 - 2m$  com  $m \in \mathbb{N}_0$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{\alpha,\beta}^\gamma(x, t) &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\gamma\pi k) \cdot \Gamma(2\gamma k + 1) \cdot |x|^{-2\gamma k-1} \\ &\quad \cdot \left\{ \lambda_1 t^{2\alpha k+2\alpha-1} E_{2\alpha-\beta, 2\alpha k+2\alpha}^{k+1}(-\mu t^{2\alpha-\beta}) \right. \\ &\quad + \lambda_2 t^{2\alpha k} \left[ E_{2\alpha-\beta, 2\alpha k+1}^{k+1}(-\mu t^{2\alpha-\beta}) \right. \\ &\quad \left. + \mu t^{2\alpha-\beta} E_{2\alpha-\beta, 2\alpha k+2\alpha-\beta+1}^{k+1}(-\mu t^{2\alpha-\beta}) \right] \left. \right\}, \end{aligned} \tag{7.7}$$

com  $x \neq 0$ . Esta expressão é a função de Green fracionária associada à equação (7.3).

## 7.2 Caso Particular $\alpha = \beta$

Nesta seção discutimos a equação (7.3) no caso em que  $\alpha = \beta$  e recuperamos, para valores específicos dos parâmetros, o resultado obtido por Orsingher-Beghin [90] como vamos ver na seção seguinte. Tomando  $\alpha = \beta$  na equação (7.3) obtemos

$$(\mathbb{D}_t^{2\alpha} + 2\lambda \mathbb{D}_t^\alpha - \mathbb{D}_x^{2\gamma}) \mathbb{G}_{\alpha,\alpha}^\gamma(x, t) = \lambda_1 \delta(t) \delta(x)$$



cuja solução, satisfazendo as mesmas condições impostas anteriormente, pode ser obtida através da equação (7.7), com  $0 < \gamma < 1$ ,  $0 < \alpha < 1$ , ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_{\alpha,\alpha}^{\gamma}(x,t) &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\gamma\pi k) \cdot \Gamma(2\gamma k + 1) \cdot |x|^{-2\gamma k-1} \\ &\cdot \left\{ \lambda_1 t^{\alpha(k+2)-1} E_{\alpha,\alpha k+2\alpha}^{k+1}(-\mu t^{\alpha}) \right. \\ &+ \left. \lambda_2 t^{2\alpha k} \left[ E_{\alpha,\alpha k+1}^{k+1}(-\mu t^{\alpha}) + \mu t^{\alpha} E_{\alpha,\alpha k+\alpha+1}^{k+1}(-\mu t^{\alpha}) \right] \right\}.\end{aligned}$$

Notemos que no limite em que  $2\gamma k$  é um número inteiro, a expressão para a transformada de Fourier se simplifica para

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[|t|^{2n+1}](x) &= 2(-1)^{n+1}(2n+1)!|x|^{-2n-2} \quad \text{para } x \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}_0 \\ \mathfrak{F}[|t|^{2n}](x) &= 0 \quad \text{para } x \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

Se considerarmos os parâmetros  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 1$ , no caso  $\gamma = 1$ , temos o propagador,

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_{\alpha,\alpha}^{1P}(x,t) &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{\frac{2k+1}{2}} (2k)! \cdot |x|^{-2k-1} \\ &\cdot t^{2\alpha k} \left[ E_{\alpha,\alpha k+1}^{k+1}(-\mu t^{\alpha}) + \mu t^{\alpha} E_{\alpha,\alpha k+\alpha+1}^{k+1}(-\mu t^{\alpha}) \right],\end{aligned}$$

por outro lado tomando  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = 0$  podemos escrever a função de Green, ou seja,

$$\mathbb{G}_{\alpha,\alpha}^{1G}(x,t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{\frac{2k+1}{2}} (2k)! |x|^{-2k-1} t^{\alpha(k+2)-1} E_{\alpha,\alpha k+2\alpha}^{k+1}(-\mu t^{\alpha}).$$

### 7.3 Regras de Soma para a Função de Mittag-Leffler

Nesta seção apresentamos dois novos resultados envolvendo as funções de Mittag-Leffler, ambos consequências do nosso cálculo para a função de Green fracionária.

Outra maneira de se resolver a equação (7.3) no caso em que  $\alpha = \beta$  é considerar o denominador na equação (7.5) escrito na seguinte forma

$$s^{2\alpha} + 2\lambda s^{\alpha} + \Lambda = (s^{\alpha} - \mu_1)(s^{\alpha} - \mu_2)$$

onde  $\mu_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \Lambda}$  e  $\mu_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \Lambda}$  com  $\Lambda = -|\omega|^{2\gamma}$ . Utilizando estas expressões

podemos escrever

$$\begin{aligned}
\hat{G}_{\alpha,\alpha}^{\gamma}(\omega, s) &= \frac{\lambda_1}{s^{\alpha} - \mu_1} \cdot \frac{1}{s^{\alpha} - \mu_2} + \\
&+ \lambda_2 \left( \frac{s^{2\alpha-1}}{s^{\alpha} - \mu_1} \cdot \frac{1}{s^{\alpha} - \mu_2} + 2\lambda \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - \mu_1} \cdot \frac{1}{s^{\alpha} - \mu_2} \right) \\
&= \frac{\lambda_1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_1 s^{-\alpha}}{s^{\alpha} - \mu_1} - \frac{\mu_2 s^{-\alpha}}{s^{\alpha} - \mu_2} \right) + \\
&+ \frac{\lambda_2}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \frac{\mu_1 s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - \mu_1} - \frac{\mu_2 s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - \mu_2} + 2\lambda \left[ \frac{\mu_1 s^{-1}}{s^{\alpha} - \mu_1} - \frac{\mu_2 s^{-1}}{s^{\alpha} - \mu_2} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Através da linearidade da transformada de Laplace inversa e da equação (6.29), com  $\rho = 1$ , obtemos as seguintes expressões para a transformada de Laplace inversa

$$\begin{aligned}
\bar{G}_{\alpha,\alpha}^{\gamma}(\omega, t) &= \lambda_1 \frac{t^{2\alpha-1}}{\mu_1 - \mu_2} [\mu_1 E_{\alpha,2\alpha}(\mu_1 t^{\alpha}) - \mu_2 E_{\alpha,2\alpha}(\mu_2 t^{\alpha})] \\
&+ \frac{\lambda_2}{\mu_1 - \mu_2} [\mu_1 E_{\alpha,1}(\mu_1 t^{\alpha}) - \mu_2 E_{\alpha,1}(\mu_2 t^{\alpha})] + \\
&+ \frac{2\lambda \lambda_2 t^{\alpha}}{\mu_1 - \mu_2} [\mu_1 E_{\alpha,\alpha+1}(\mu_1 t^{\alpha}) - \mu_2 E_{\alpha,\alpha+1}(\mu_2 t^{\alpha})].
\end{aligned}$$

Em particular, no caso em que  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 1$  e utilizando a relação

$$x E_{\alpha,\alpha+1}(x) = E_{\alpha,1}(x) - 1$$

recuperamos o resultado obtido por Orsingher-Beghin [90].

Por outro lado, tomando  $\alpha = \beta$  na equação para a transformada de Fourier inversa, equação (7.6), temos, para  $\mu = 2\lambda$ , que

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbb{G}}_{\alpha,\alpha}^{\gamma}(\omega, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-\Lambda)^k \left\{ \lambda_1 t^{2\alpha k + 2\alpha - 1} E_{\alpha,2\alpha k + 2\alpha}^{k+1}(-\mu t^{\alpha}) + \right. \\
&+ \left. \lambda_2 t^{2\alpha k} [E_{\alpha,2\alpha k + 1}^{k+1}(-\mu t^{\alpha}) + \mu t^{\alpha} E_{\alpha,2\alpha k + \alpha + 1}^{k+1}(-\mu t^{\alpha})] \right\}.
\end{aligned}$$

Discutimos dois casos interessantes associados a  $\bar{\mathbb{G}}_{\alpha,\alpha}^{\gamma}(\omega, t)$ . Inicialmente consideramos  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 1$ , nas duas equações anteriores, logo,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-\Lambda)^k t^{2\alpha k} [E_{\alpha,2\alpha k + 1}^{k+1}(-\mu t^{\alpha}) + \mu t^{\alpha} E_{\alpha,2\alpha k + \alpha + 1}^{k+1}(-\mu t^{\alpha})] =$$

$$= \frac{\mu_1 E_{\alpha,1}(\mu_1 t^\alpha) - \mu_2 E_{\alpha,1}(\mu_2 t^\alpha)}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{2\lambda t^\alpha}{\mu_1 - \mu_2} [\mu_1 E_{\alpha,\alpha+1}(\mu_1 t^\alpha) - \mu_2 E_{\alpha,\alpha+1}(\mu_2 t^\alpha)],$$

onde  $\mu_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \Lambda}$  e  $\mu_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \Lambda}$  com  $\Lambda = -|\omega|^{2\gamma}$ , que pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} (-\Lambda \xi^2)^k [E_{\alpha,2\alpha k+1}^{k+1}(-\mu \xi) + \mu \xi E_{\alpha,2\alpha k+\alpha+1}^{k+1}(-\mu \xi)] = \\ & = \frac{\mu_1 E_{\alpha}(\mu_1 \xi) - \mu_2 E_{\alpha}(\mu_2 \xi)}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{2\lambda \xi}{\mu_1 - \mu_2} [\mu_1 E_{\alpha,\alpha+1}(\mu_1 \xi) - \mu_2 E_{\alpha,\alpha+1}(\mu_2 \xi)], \end{aligned}$$

onde  $\xi = t^\alpha$  e utilizamos a relação  $E_{\alpha,1}(x) = E_{\alpha}(x)$ .

Simplificamos o segundo membro da equação anterior de modo a obter

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-\Lambda \xi^2)^k [E_{\alpha,2\alpha k+1}^{k+1}(-\mu \xi) + \mu \xi E_{\alpha,2\alpha k+\alpha+1}^{k+1}(-\mu \xi)] = \frac{\mu_1 E_{\alpha}(\mu_2 \xi) - \mu_2 E_{\alpha}(\mu_1 \xi)}{\mu_1 - \mu_2}. \quad (7.8)$$

Analogamente, tomando, agora,  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = 0$  obtemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-\Lambda)^k t^{2\alpha k} E_{\alpha,2\alpha k+2\alpha}^{k+1}(-\mu t^\alpha) = \frac{\mu_1 E_{\alpha,2\alpha}(\mu_1 t^\alpha) - \mu_2 E_{\alpha,2\alpha}(\mu_2 t^\alpha)}{\mu_1 - \mu_2},$$

ou ainda

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-\Lambda \xi^2)^k E_{\alpha,2\alpha k+2\alpha}^{k+1}(-\mu \xi) = \frac{\mu_1 E_{\alpha,2\alpha}(\mu_1 \xi) - \mu_2 E_{\alpha,2\alpha}(\mu_2 \xi)}{\mu_1 - \mu_2}, \quad (7.9)$$

novamente  $t^\alpha = \xi$  e  $\mu_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \Lambda}$  e  $\mu_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \Lambda}$  com  $\Lambda = -|\omega|^{2\gamma}$ .

As equações (7.8) e (7.9) podem ser interpretadas como novas regras de soma envolvendo as funções de Mittag-Leffler. Na próxima seção apresentamos estes resultados na forma de teoremas.

### 7.3.1 Teoremas de Adição

Um teorema de adição [36, 43] é uma fórmula matemática que, para uma função particular  $f$ , estabelece uma relação entre  $f(x+y)$  e  $f(x)$  e  $f(y)$ , como por exemplo na clássica fórmula de soma de arcos

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

Existem formas canônicas de se apresentar os assim chamados teoremas de adição envolvendo funções especiais. Aqui, utilizamos um problema físico, a equação do telégrafo

fracionária, para apresentar os novos teoremas de adição associados à função de Mittag-Leffler generalizada. Note que estes teoremas e suas consequências já foram apresentados e formalmente demonstrados na Seção 6.5.

TEOREMA 7. Sejam  $x, y \in \mathbb{R}$  com  $|x| < 1$  e  $|y| < 1$ . Se  $x \neq y$  então

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-xy)^k E_{\alpha, 2\alpha k + 2\alpha}^{k+1}(x+y) = \frac{x E_{\alpha, 2\alpha}(x) - y E_{\alpha, 2\alpha}(y)}{x - y}.$$

TEOREMA 8. Sejam  $x, y \in \mathbb{R}$  com  $|x| < 1$  e  $|y| < 1$ . Se  $x \neq y$  então

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-xy)^k [E_{\alpha, 2\alpha k + 1}^{k+1}(x+y) - (x+y) E_{\alpha, 2\alpha k + \alpha + 1}^{k+1}(x+y)] = \frac{x E_{\alpha}(y) - y E_{\alpha}(x)}{x - y}.$$

DEMONSTRAÇÃO. As demonstrações dos teoremas 7 e 8 são obtidas diretamente através da introdução das mudanças de variáveis  $\mu_1 \xi = x$  e  $\mu_2 \xi = y$  nas equações (7.9) e (7.8) respectivamente.

# Sistema de Lotka-Volterra Fracionário

---

O modelo de Lotka-Volterra é composto por um par de equações diferenciais que descrevem as interações entre presa e predador em seu caso mais simples (uma população de predador e uma população de presas). Este modelo foi desenvolvido por volta de 1920, independentemente, por Alfred Lotka e por Vito Volterra e é caracterizado por oscilações tanto na população de predadores quanto na de presas, com o pico da oscilação de predadores ocorrendo logo após o pico da oscilação de presas.

Este modelo tem sérias restrições, do ponto de vista da modelagem: 1) a população de presas cresce exponencialmente na ausência do predador; 2) a população de predadores morre de fome na ausência da presa (ao invés de buscar uma nova espécie de presa); 3) predadores podem comer uma quantidade infinita de presas e 4) não há complexidade ambiental (isto é, ambas populações estão se movendo aleatoriamente em um meio homogêneo).

Destacamos ainda, que o sistema de Lotka-Volterra tem diversas aplicações em biologia, como por exemplo, para descrever os modelos parasita-hospedeiro [59], crescimento de plantas e as interações planta-herbívoro [54], dentre outras

Neste capítulo propomos uma generalização fracionária para o sistema de Lotka-Volterra utilizando derivadas fracionárias no sentido de Caputo. O objetivo desta generalização é minimizar os efeitos das restrições anteriormente citadas [35]. Este capítulo está disposto da seguinte maneira: na Seção 8.1 apresentamos o clássico sistema de Lotka-Volterra; na Seção 8.2 apresentamos e resolvemos o sistema de Lotka-Volterra fracionário linearizado e na Seção 8.3 apresentamos um exemplo numérico.

## 8.1 O Sistema de Lotka-Volterra

Sejam  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  constantes. Por simplicidade, denotamos  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$ . Nestas condições o sistema associado ao problema presa-predador é dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - yb), \\ \frac{dy}{dt} = -y(c - xd). \end{cases} \quad (8.1)$$

Este sistema quase linear apresenta dois pontos críticos,  $P(0, 0)$  e  $Q(c/d, a/b)$ . O primeiro é um ponto de sela que não será discutido aqui. Neste trabalho concentramos nossa atenção no ponto  $Q$ .

Consideramos as constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  como sendo positivas,  $Q$  é um ponto que representa a coexistência de predadores e presas em equilíbrio. Nosso objetivo é investigar se este ponto crítico é estável.

Introduzindo as mudanças de variáveis  $u = x - c/d$  e  $v = y - a/b$ , trasladamos o ponto crítico para,  $R(0, 0)$ <sup>1</sup>, associado ao seguinte sistema nas variáveis  $u$  e  $v$ .

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{b}{d}(vc + uvd), \\ \frac{dv}{dt} = \frac{d}{b}(ua + uvb). \end{cases}$$

Sabemos que o correspondente sistema linearizado

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{bc}{d}v, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{ad}{b}u. \end{cases}$$

possui elipses centradas no ponto crítico como trajetórias, as assim chamadas trajetórias linearizadas.

Para encontrar as trajetórias no sistema original, nas variáveis  $x$  and  $y$ , basta dividir a segunda equação de (8.1) pela primeira, desta forma temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \frac{c - xd}{a - yb}.$$

Após resolver este sistema obtemos

$$f(x, y) \equiv c \ln x - xd + a \ln y - by = K,$$

---

<sup>1</sup>Este ponto  $R$  não deve ser confundido com o ponto  $P$ , associado ao sistema nas variáveis  $x$  e  $y$ .

na qual  $K$  é a constante de integração. As trajetórias definidas pelo sistema são as curvas de nível da função  $f(x, y)$ .

Na próxima seção, modelamos o sistema presa-predador através do assim chamado sistema de Lotka-Volterra fracionário e para resolvê-lo utilizamos a metodologia da transformada de Laplace.

## 8.2 Sistema de Lotka-Volterra Fracionário

Como afirmamos anteriormente, o sistema original de Lotka-Volterra possui uma série de restrições. Compensar estas restrições é a motivação para introduzir a generalização fracionária do sistema [37], ou seja,

$$\begin{cases} D_t^\alpha x(t) \equiv \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} x(t) &= a x(t) - b x(t)y(t), \\ D_t^\beta y(t) \equiv \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} y(t) &= -c y(t) + d x(t)y(t). \end{cases} \quad (8.2)$$

na qual  $0 < \alpha, \beta \leq 1$ ,  $a, b, c$  e  $d$  são constantes positivas e as derivadas fracionárias são tomadas no sentido de Caputo [19]. Este é um sistema não linear no qual  $x(t)$  denota o número de presas e  $y(t)$  o de predadores ambos no instante  $t$ . Note que permitimos que as derivadas nas equações (8.2) sejam de ordens diferentes. O objetivo deste procedimento é compensar a restrição 4, mencionada na introdução do presente capítulo. Numa situação real  $\alpha$  e  $\beta$ , assim como  $a, b, c$  e  $d$  devem ser determinados experimentalmente.

A dimensão efetiva do sistema,  $\mathcal{D}$ , é dada pela soma das ordens da equação, i.e.,  $\mathcal{D} = \alpha + \beta$ . Este tipo de generalização de sistemas dinâmicos através de derivadas fracionárias foi utilizado, por exemplo, na descrição de fenômenos de viscoelasticidade como o sangue humano [110].

De maneira análoga à feita na seção anterior introduzimos as variáveis

$$x(t) = u(t) + \frac{c}{d} \quad \text{e} \quad y(t) = v(t) + \frac{a}{b}.$$

Utilizando a derivada fracionária no sentido de Caputo, o sistema linearizado correspondente é dado por

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(t) &= -\frac{bc}{d} v(t), \\ D_t^\beta v(t) &= \frac{ad}{b} u(t). \end{cases} \quad (8.3)$$

A fim de resolver o sistema fracionário linearizado tomamos a transformada de Laplace nas duas equações, de onde podemos escrever

$$F(s) = u(0) \frac{s^{\alpha+\beta-1}}{s^{\alpha+\beta} + ac} - v(0) \frac{bc}{d} \frac{s^{\beta-1}}{s^{\alpha+\beta} + ac}$$

e

$$G(s) = v(0) \frac{s^{\alpha+\beta-1}}{s^{\alpha+\beta} + ac} + u(0) \frac{ad}{b} \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha+\beta} + ac}$$

na qual  $u(0)$  e  $v(0)$  denotam, respectivamente, as populações iniciais de presa e predador. Além disso,

$$F(s) \equiv \mathcal{L}[u(t)] \quad \text{e} \quad G(s) \equiv \mathcal{L}[v(t)].$$

Introduzindo a notação  $u(0) = u_0$  e  $v(0) = v_0$  e tomando a transformada de Laplace inversa podemos escrever a solução, isto é,

$$u(t) = u_0 E_{\alpha+\beta}(-ac t^{\alpha+\beta}) - v_0 \frac{bc}{d} t^\alpha E_{\alpha+\beta, \alpha+1}(-ac t^{\alpha+\beta}) \quad (8.4)$$

e

$$v(t) = v_0 E_{\alpha+\beta}(-ac t^{\alpha+\beta}) + u_0 \frac{ad}{b} t^\beta E_{\alpha+\beta, \beta+1}(-ac t^{\alpha+\beta}) \quad (8.5)$$

na qual  $E_\mu(x)$  e  $E_{\mu, \nu}(x)$  denotam as funções de Mittag-Leffler de um e de dois parâmetros.

### 8.3 Exemplo Numérico

A fim de ilustrar numericamente o resultado obtido na seção anterior consideramos um sistema da forma de (8.2), com  $a = 2$ ,  $b = 3/2$ ,  $c = 2$  e  $d = 1/2$ . Além disso, vamos supor que  $x(0) = 1000$  e  $y(0) = 150$ .

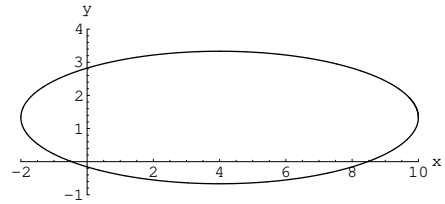
As Figuras 8.1 e 8.2 mostram diversas curvas obtidas através das equações (8.4) e (8.5), utilizadas para resolver o sistema. Cada curva corresponde a uma combinação particular dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  que definem a derivada fracionária de  $x(t)$  e  $y(t)$ . Estas curvas mostram como  $\alpha$  e  $\beta$  interferem na convergência para o ponto crítico  $Q(4, 4/3)$ . Para  $\alpha = \beta = 1$ , a curva é uma elipse centrada em  $Q$ , ou seja, de fato recuperamos o caso envolvendo derivadas de ordem inteira. À medida em que reduzimos a dimensão efetiva do sistema, ou seja,  $\alpha + \beta$ , a convergência para o ponto  $Q$  é acelerada. Note que curvas bastante similares foram obtidas para os pares  $(\alpha = 0.9, \beta = 0.9)$  e  $(\alpha = 1, \beta = 0.8)$ , assim como para  $(\alpha = 0.8, \beta = 0.8)$  e  $(\alpha = 1, \beta = 0.6)$ .

É importante ressaltar que as figuras foram obtidas utilizando o MATLAB e mostram apenas a linha de tendência, sendo assim elas devem ser interpretadas da seguinte maneira, toda vez que a curva toca o eixo  $y$  a população de presas se extingue, desta forma, há uma queda significativa no número de predadores, por outro lado, se a curva toca o eixo  $x$

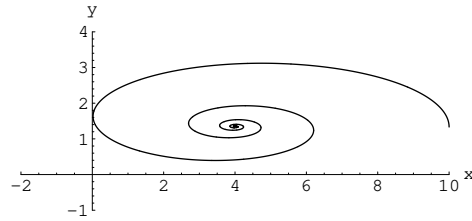


a população de predadores se estingue, conseqüentemente, a população de presas aumenta. Além disso, a solução nos mostra que quando a dimensão efetiva do sistema é menor que 1.8 as soluções não têm problemas de extinção, o que, dependendo do problema que estamos modelando, pode ser uma vantagem bastante significativa do sistema fracionário em relação ao sistema de ordem inteira.

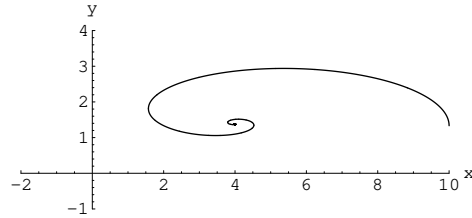
Os resultados que se seguem foram obtidos fixando  $\beta$  e variando  $\alpha$ . Os resultados em que  $\alpha$  é fixo e  $\beta$  varia são bastante similares e por isso não foram mostrados na figura.



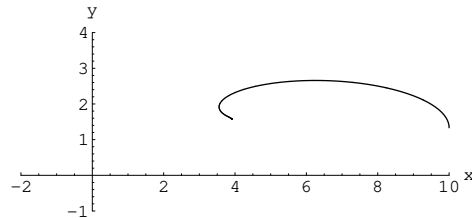
(a)  $\alpha = 1, \beta = 1$ .



(b)  $\alpha = 0.9, \beta = 0.9$ .

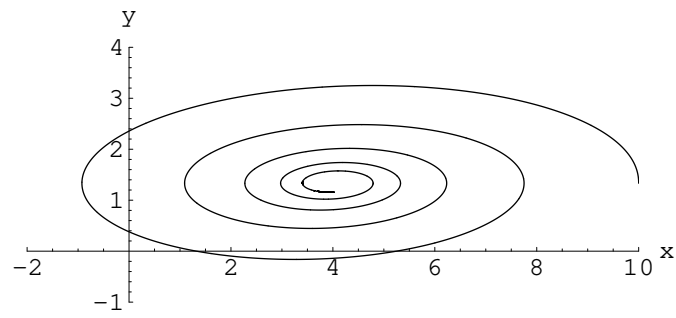


(c)  $\alpha = 0.8, \beta = 0.8$ .

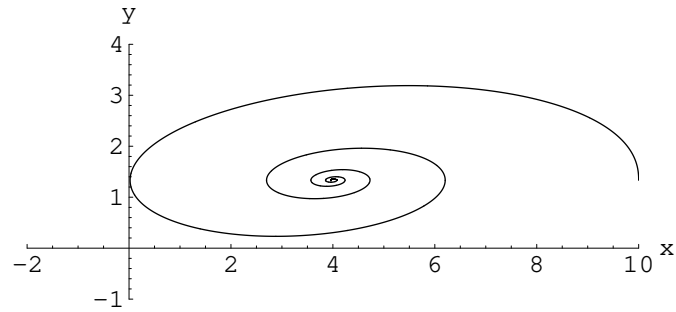


(d)  $\alpha = 0.6, \beta = 0.6$ .

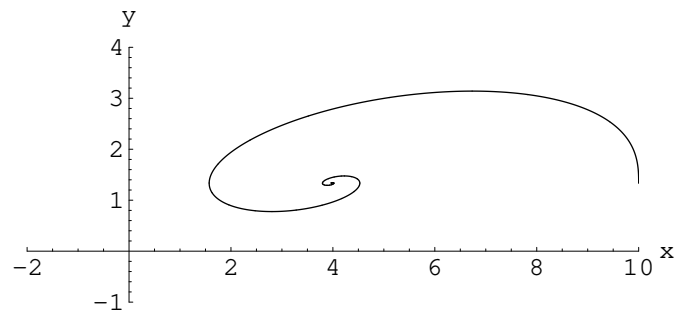
Figura 8.1: Curvas obtidas para valores de  $\alpha = \beta$ . Os dois eixos estão em escala de 1 para 1000.



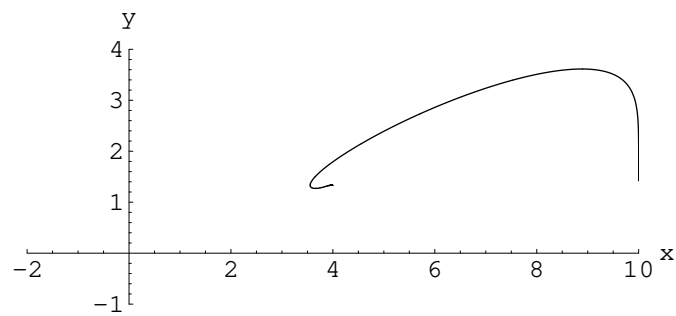
(a)  $\alpha = 1, \beta = 0.9$ .



(b)  $\alpha = 1, \beta = 0.8$ .



(c)  $\alpha = 1, \beta = 0.6$ .



(d)  $\alpha = 1, \beta = 0.2$ .

Figura 8.2: Curvas obtidas para valores de  $\alpha \neq \beta$ . Os dois eixos estão em escala de 1 para 1000.

# Equação de Langevin Fracionária

Nos últimos dez anos tem havido um crescimento no número de processos envolvendo difusão anômala. Estes processos ocorrem em inúmeras áreas do conhecimento como, por exemplo, na Biologia [25, 66] e na Física [9, 14, 80].

Em um recente trabalho [99] uma função de Mittag-Leffler foi introduzida no estudo da equação cinética, deslocamentos aleatórios e difusão anômala [82]. Outro recente trabalho [113] mostra a solução exata da equação de Langevin para uma partícula harmonicamente confinada. Os mesmos autores [114] apresentam e discutem a difusão anômala induzida por uma *função de Mittag-Leffler correlacionada a um ruído*, na qual os autores apresentam alguns casos particulares que caracterizam o ruído. Além disso, de acordo com o valor do expoente da difusão anômala, eles distinguem subdifusão e superdifusão. Também neste trabalho são citados artigos nos quais a teoria foi aplicada com sucesso. Mencionamos ainda, que a difusão anômala desempenha um importante papel no estudo da onda de reação-difusão [44, 45].

Uma forma natural de se estudar a difusão anômala é através da equação de Langevin generalizada [96]. No referido artigo os autores mostram como o comportamento de longo prazo do deslocamento médio quadrático, para os sistemas descritos pela equação de Langevin generalizada, dependem das propriedades da função de correlação e do núcleo de memória.

No presente capítulo estudamos a versão fracionária da equação de Langevin generalizada na ausência de um campo determinístico<sup>1</sup>. Este capítulo está disposto da seguinte maneira: Na Seção 9.1 apresentamos alguns resultados associados à clássica equação de

<sup>1</sup>Novamente para as correspondentes dimensões físicas recomendamos o trabalho de Inizan [61].

Langevin generalizada, incluindo a metodologia da transformada de Laplace, a qual é utilizada para obter a solução em termos da função de relaxação. Na Seção 9.2 introduzimos a versão fracionária da equação de Langevin generalizada, recuperando os resultados da Seção 9.1. Na Seção 9.3 utilizando uma função de correlação particular obtemos a função de relaxação. Na Seção 9.4 apresentamos nossos principais resultados, ou seja, calculamos explicitamente os núcleos em termos da função de Mittag-Leffler generalizada.

## 9.1 Equação de Langevin Generalizada

Nesta seção apresentamos a clássica equação de Langevin generalizada (ELG) e sua solução em termos de uma função de relaxação que caracteriza o processo físico, obtida através da transformada de Laplace.

A abordagem clássica, conhecida como teoria de Ornstein-Uhlenbeck (ou Einstein-Ornstein-Uhlenbeck) do movimento Browniano foi inicialmente apresentada por Langevin, enquanto que a difusão usual e o movimento Browniano estão associados com a equação de Langevin. A equação de Langevin clássica e sua generalização, foram revistas com um tratamento fracionário alguns anos atrás por Mainardi-Pironi [76]. Neste trabalho os autores discutem a equação de Langevin associada apenas à velocidade. Para discutir a equação de Langevin associada ao deslocamento é necessário calcular uma integral em relação à variável temporal.

A ELG, na ausência de um campo determinístico, é dada por

$$D_t^2 x(t) + \int_0^t \mu(t - \xi) D_\xi x(\xi) d\xi = F(t) \quad (9.1)$$

com  $D_y \equiv d/dy$  na qual  $y = t, \xi$ , e  $\mu(t)$  é o núcleo de memória dissipativa e  $F(t)$  é uma força aleatória. Consideramos a equação (9.1) com duas condições determinísticas, isto é,  $x(0) = x_0$ , condição inicial, e  $\dot{x}(0) = v_0$ , velocidade inicial da partícula de massa unitária.

Para resolver a equação (9.1) introduzimos a transformada de Laplace. Utilizando o teorema da convolução podemos escrever

$$[s^2 + s\hat{\mu}(s)]\hat{x}(s) = x_0[s + \hat{\mu}(s)] + v_0 + \hat{F}(s) \quad (9.2)$$

na qual  $\hat{\mu}(s)$ ,  $\hat{x}(s)$  e  $\hat{F}(s)$  denotam, respectivamente, as transformadas de Laplace de  $\mu(t)$ ,  $x(t)$  e  $F(t)$ , e  $s$  é o parâmetro da transformada de Laplace.

Introduzindo a função de relaxação,  $H(t)$ , como sendo a transformada de Laplace inversa, i.e.,

$$\hat{H}(s) = \frac{1}{s^2 + s\hat{\mu}(s)} \quad (9.3)$$

podemos escrever

$$\widehat{x}(s) = \widehat{H}(s)\{x_0[s + \widehat{\mu}(s)] + v_0 + \widehat{F}(s)\},$$

cujas respectivas transformadas inversas são dadas por

$$x(t) = x_0 + v_0 H(t) + \int_0^t H(t - \xi) F(\xi) d\xi$$

a qual pode ser reescrita na seguinte forma

$$x(t) = \langle x(t) \rangle + \int_0^t H(t - \xi) F(\xi) d\xi \quad (9.4)$$

onde consideramos  $\langle x(t) \rangle = x_0 + v_0 H(t)$ .

A primeira derivada da equação (9.4) é dada por

$$\dot{x}(t) = \langle \dot{x}(t) \rangle + \int_0^t h(t - \xi) F(\xi) d\xi \quad (9.5)$$

na qual  $\langle \dot{x}(t) \rangle = v_0 h(t)$  e a função de relaxação,  $h(t)$ , é a derivada de  $H(t)$ , i.e.,  $h(t) = \dot{H}(t)$ . Desta forma, temos

$$\widehat{h}(s) = \frac{1}{s + \widehat{\mu}(s)} \equiv s \widehat{H}(s)$$

com as condições  $H(0) = 0$  e  $h(0) = 1$ , obtidas através das equações (9.4) e (9.5).

Novamente, com auxílio das equações (9.4) e (9.5), podemos discutir as equações explícitas para as variáveis associadas à equação (9.1), em particular a difusão anômala e a distribuição de probabilidades [96].

## 9.2 Equação de Langevin Fracionária Generalizada

Existem várias maneiras de se explicar fenômenos envolvendo difusão anômala, em particular, estendendo a definição de entropia na estatística convencional de Gibbs-Boltzmann bem como, através da equação de Fokker-Planck com derivadas fracionárias ou com coeficientes associados à difusão variando no tempo [46].

Aqui, nesta seção, seguindo a via da generalização fracionária, apresentamos e discutimos a assim chamada equação de Langevin fracionária generalizada (ELFG), considerando a metodologia da transformada de Laplace de maneira similar a feita para a ELG na seção anterior.

A ELFG, versão fracionária da ELG, é definida por

$$D_t^\alpha x(t) + \int_0^t \mu(t - \xi) D_\xi^\beta x(\xi) d\xi = F(t) \quad (9.6)$$

com  $1 < \alpha \leq 2$  e  $0 < \beta \leq 1$ . O operador  $D$  denota a derivada fracionária considerada no sentido de Caputo.

Aqui  $x(t)$  representa a posição de uma partícula,  $\mu(t - t')$  o núcleo de memória dissipativa o qual é tomado de maneira similar ao utilizado em [114], i.e., em termos de uma função de Mittag-Leffler<sup>2</sup> e  $F(t)$  é uma força gaussiana. Tomando os limites  $\alpha \rightarrow 2$  e  $\beta \rightarrow 1$ , os resultados envolvendo a ELG são recuperados.

Por outro lado, em um recente trabalho [101] foi apresentado uma classe de ELG com derivadas fracionárias, também no sentido de Caputo. Os autores discutem um sistema envolvendo processos de difusão com uma função de correlação de dois tipos: a exponencial, a lei de força e os termos associados ao campo determinístico iguais a zero, ou seja, a equação (9.6) para o caso em que  $0 < \alpha < 1$  e  $\beta = 1$ . O mesmo autor [102] discute a equação de Langevin fracionária com a derivada fracionária no sentido de Riemann-Liouville. Ele compara estes resultados com os obtidos em [101] considerando o termo determinístico como sendo nulo. Foi discutida recentemente [114], a difusão anômala induzida por uma função de correlação de ruído como sendo uma função Mittag-Leffler. No trabalho os autores obtêm a expressão exata para os valores principais, variância e coeficientes de difusão para uma partícula em termos da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros e suas derivadas. Mencionamos que a equação discutida naquele trabalho é uma ELG, ao contrário da equação apresentada em [102], que é uma ELFG.

Aqui, discutimos as soluções analíticas da equação (9.6) através da transformada de Laplace. Desta forma, aplicando a transformada de Laplace na equação (9.6) e utilizando a relação que envolve a transformada de Laplace e derivadas [38], obtemos

$$[s^\alpha + s^\beta \hat{\mu}(s)]\hat{x}(s) = s^{\alpha-1}x_0 + s^{\alpha-2}v_0 + x_0 s^{\beta-1}\hat{\mu}(s) + \hat{F}(s)$$

a qual para  $\alpha = 2$  e  $\beta = 1$  recupera a equação (9.2).

Introduzindo a função de relaxação,  $H(t)$ , podemos escrever a equação anterior na seguinte forma

$$\hat{x}(s) = \hat{H}(s) \left\{ \frac{x_0}{s} [s^\alpha + s^\beta \hat{\mu}(s)] + v_0 s^{\alpha-2} + \hat{F}(s) \right\}$$

cujas transformada inversa, denotada por  $\mathfrak{L}^{-1}[f(s)]$ , pode ser escrita como

$$x(t) = x_0 + v_0 \mathfrak{L}^{-1} \left[ \hat{H}(s) s^{\alpha-2} \right] + \mathfrak{L}^{-1} \left[ \hat{H}(s) \hat{F}(s) \right].$$

Utilizando o teorema de convolução, associado à transformada de Laplace, obtemos a solução

$$x(t) = x_0 + v_0 \mathfrak{L}^{-1} \left[ \hat{H}(s) s^{\alpha-2} \right] + \int_0^t H(t - \xi) F(\xi) d\xi$$

---

<sup>2</sup>Como o ruído estacionário é exponencialmente correlacionado parece natural propor uma generalização utilizando a função de Mittag-Leffler.

onde  $\hat{H}(s)$  é a transformada de Laplace da função  $H(t)$ . A partir deste ponto devemos distinguir uma função de relaxação particular.

Como já dissemos anteriormente, para  $\alpha = 2$  e  $\beta = 1$  os resultados associados à equação (9.1), bem como suas consequências, são mostrados em [101]. Estes resultados são generalizações no sentido em que, consideramos sua versão fracionária e tomamos o modelo de função correlacionada como sendo uma função de Mittag-Leffler conveniente, ou seja, a clássica função de Mittag-Leffler com um parâmetro, como considerado em [114].

### 9.3 Uma Função de Correlação Particular

Nesta seção explicitamos o cálculo dos núcleos,  $H(t)$  e  $h(t)$ , que aparecem nas expressões envolvendo variâncias [82], supostas na forma

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(t) &= k_B T [2I(t) - H^2(t)] \\ \sigma_{vv}(t) &= k_B T [1 - h^2(t)] \\ \sigma_{xv}(t) &= k_B T H(t) [1 - h(t)]\end{aligned}\tag{9.7}$$

onde

$$I(t) = \int_0^t d\xi H(\xi),$$

$k_B$  é a constante de Boltzmann e  $T$  é temperatura absoluta do meio [96].

A equação (9.1) representa um sistema em estado de equilíbrio, as funções  $\mu(t)$ , o núcleo de memória dissipativa e  $C(t)$ , a função de correlação, são relacionadas pelo conhecido teorema de flutuação-dissipação [96]

$$C(t) = k_B T \mu(t).$$

Aqui, consideramos o caso no qual o núcleo de memória dissipativa pode ser escrito da seguinte forma [114]

$$\mu(t) = \gamma_\lambda E_\lambda[-(t/\tau)^\lambda]/\tau^\lambda\tag{9.8}$$

com  $0 < \lambda < 2$ . Temos que  $\mu(t)$  deve ser determinado por um mecanismo dinâmico associado ao processo físico.  $E_\lambda(\cdot)$  é a função de Mittag-Leffler de um parâmetro<sup>3</sup>,  $\gamma_\lambda$  é

---

<sup>3</sup>A função de Mittag-Leffler clássica, para  $0 < \lambda < 1$ , é uma função estritamente monótona e para  $1 < \lambda \leq 2$  pode ser decomposta em uma função completamente monótona somada a uma contribuição oscilatória [105].

uma constante que depende de  $\lambda$  mas não possui dependência temporal e  $\tau$  é a memória temporal característica. O caso particular para  $\lambda = 1$  é associado com processo de Ornstein-Uhlenbeck padrão [10]. Utilizando a expressão (9.8) a função de correlação pode ser escrita como

$$C(t) = C_0(\lambda)\tau^{-\lambda}E_\lambda[-(t/\tau)^\lambda]$$

onde  $\tau$  age como uma memória temporal característica e  $C_0(\lambda) = \gamma_\lambda k_B T$  é o coeficiente de proporcionalidade dependendo do parâmetro  $\lambda$ .

Procedendo de maneira análoga à feita na Seção 9.1, utilizando o núcleo de memória dissipativa dado pela equação (9.8), podemos escrever a respectiva transformada da seguinte forma

$$\hat{\mu}(s) = \gamma_\lambda \frac{s^{\lambda-1}}{1 + s^\lambda \tau^\lambda} \quad (9.9)$$

a qual fornece a transformada de Laplace correspondente à função de relaxação

$$\hat{H}(s) = \hat{H}_0(s) + \hat{H}_1(s) \quad (9.10)$$

com  $\hat{H}_1(s) = \tau^{-\lambda} s^{-\lambda} \hat{H}_0(s)$  na qual  $\hat{H}_0(s)$  é dado pela seguinte expressão

$$\hat{H}_0(s) = \frac{s^{\lambda-\alpha}}{s^\lambda + (\gamma_\lambda/\tau^\lambda) s^{\lambda+\beta-\alpha-1} + (1/\tau^\lambda)} \quad (9.11)$$

que para  $\alpha = 2 = 2\beta$  recupera os resultados obtidos em [114].

## 9.4 Núcleos e a Função de Mittag-Leffler Generalizada

Nesta última seção, utilizando a equação (9.11) obtemos os núcleos necessários para se calcular as variâncias. Todos os resultados são apresentados em termos da função de Mittag-Leffler generalizada, ao contrário da notação utilizada em [114] no qual os autores apresentam os resultados em termos da derivada da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros<sup>4</sup>.

Devemos agora calcular a transformada de Laplace inversa da equação (9.11). Para tanto, utilizamos a definição da transformada de Laplace para escrever

---

<sup>4</sup>A relação entre a função de Mittag-Leffler generalizada e a derivada da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros foi estabelecida pela equação (6.24).



$$\mathfrak{L}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^\rho(a t^\alpha)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha k + \beta - 1} dt.$$

Note que podemos comutar a integral e o somatório da equação acima, pois tanto a integral como o somatório convergem uniformemente.

Através da integral acima e da definição da série geométrica temos

$$\mathfrak{L}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^\rho(a t^\alpha)] = \frac{s^{\alpha\rho-\beta}}{(s^\alpha - a)^\rho}$$

na qual  $\operatorname{Re}(s) > 0$ ,  $\operatorname{Re}(\beta) > 0$ ,  $a \in \mathbb{C}$ , e  $|as^{-\alpha}| < 1$ , cuja correspondente transformada inversa é dada por

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{s^{\alpha\rho-\beta}}{(s^\alpha - a)^\rho} \right] = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\rho(a t^\alpha).$$

Utilizando a equação anterior e a série geométrica podemos escrever a seguinte relação

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{s^{\rho-1}}{s^\alpha + A s^\beta + B} \right] = t^{\alpha-\rho} \sum_{r=0}^{\infty} (-A)^r t^{(\alpha-\beta)r} E_{\alpha,\alpha+1-\rho+(\alpha-\beta)r}^{r+1}(-B t^\alpha) \quad (9.12)$$

na qual  $\operatorname{Re}(\alpha) > \operatorname{Re}(\beta) > 0$ .

Para calcular a transformada de Laplace inversa da equação (9.11) utilizamos a relação obtida na equação (9.12) e obtemos

$$H_0(t) \equiv \mathfrak{L}^{-1}[\widehat{H}_0(s)] = t^{\alpha-1} \sum_{r=0}^{\infty} \left( -\frac{\gamma_\lambda}{\tau^\lambda} \right)^r t^{\nu r} E_{\lambda,\alpha+\nu r}^{r+1} [-(t/\tau)^\lambda] \quad (9.13)$$

onde  $\nu = \alpha - \beta + 1$ .

Procedendo como anteriormente temos

$$H_1(t) \equiv \mathfrak{L}^{-1}[\widehat{H}_1(s)] = (t/\tau)^\lambda t^{\alpha-1} \sum_{r=0}^{\infty} \left( -\frac{\gamma_\lambda}{\tau^\lambda} \right)^r t^{\nu r} E_{\lambda,\lambda+\alpha+\nu r}^{r+1} [-(t/\tau)^\lambda]. \quad (9.14)$$

Por outro lado, para obter o núcleo  $h(t)$  a transformada de Laplace inversa é calculada da seguinte maneira

$$h_0(t) = \mathfrak{L}^{-1}[s\widehat{H}_0(s)] \quad \text{e} \quad h_1(t) = \mathfrak{L}^{-1}[s\widehat{H}_1(s)]$$

então obtemos  $h(t) = h_0(t) + h_1(t)$ . De maneira similar temos

$$h_0(t) = t^{\alpha-2} \sum_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{\gamma_\lambda}{\tau^\lambda}\right)^r t^{\nu r} E_{\lambda, \alpha-1+\nu r}^{r+1} [-(t/\tau)^\lambda] \quad (9.15)$$

e

$$h_1(t) = (t/\tau)^\lambda t^\alpha \sum_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{\gamma_\lambda}{\tau^\lambda}\right)^r t^{\nu r} E_{\lambda, \lambda+\alpha+1+\nu r}^{r+1} [-(t/\tau)^\lambda] \quad (9.16)$$

onde  $\nu = \alpha - \beta + 1$ .

Finalmente, por integração, obtemos  $I(t) = I_0(t) + I_1(t)$ , onde

$$I_0(t) \equiv \int_0^t d\xi H_0(\xi) = t^\alpha \sum_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{\gamma_\lambda}{\tau^\lambda}\right)^r t^{\nu r} E_{\lambda, \alpha+1+\nu r}^{r+1} [-(t/\tau)^\lambda] \quad (9.17)$$

e

$$I_1(t) = (t/\tau)^\lambda t^\alpha \sum_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{\gamma_\lambda}{\tau^\lambda}\right)^r t^{\nu r} E_{\lambda, \lambda+\alpha+1+\nu r}^{r+1} [-(t/\tau)^\lambda] \quad (9.18)$$

com  $\nu = \alpha - \beta + 1$ .

As equações (9.13)-(9.18), generalizam os resultados obtidos em [114] e são os resultados mais importantes deste capítulo. Com estes núcleos podemos obter a evolução temporal do valor da posição,  $\langle x(t) \rangle = x_0 + v_0 H(t)$ , e a velocidade,  $\langle \dot{x}(t) \rangle = v_0 h(t)$ , assim como as variâncias dos processos, a partir das equações (9.7).

---

# Conclusões

---

A diferenciação, normalmente denotada por  $D = d/dx$ , é familiar para todos que já tenham estudado o cálculo elementar. Além disso, para uma dada função  $f$  a derivada de ordem  $n$  da função  $f$ , denotada por  $D^n = d^n f(x)/dx^n$ , é bem definida e suas interpretações física e geométrica são conhecidas, no caso em que  $f$  é uma função conveniente e  $n$  é um número natural. Em 1695 numa famosa carta l'Hôpital questionou seu amigo Leibniz a respeito do possível significado de  $D^n f$  no caso em que  $n$  fosse um número fracionário. Em sua resposta Leibniz utilizou uma série infinita<sup>5</sup> para calcular  $D^{1/2}x$  e profetizou: *Este é um aparente paradoxo do qual um dia importantes aplicações serão obtidas*. A partir daquela data o cálculo fracionário chamou a atenção de outros importantes matemáticos, tais como, Euler, Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Laurent entre outros. Graças à contribuição destes e de outros importantes matemáticos, em 1884 a teoria de operadores generalizados atingiu um nível de formalismo e coesão suficientes para dar início aos estudos mais modernos. A partir deste ponto a teoria se estendeu de modo a incluir operadores  $D^\nu$ , com  $\nu$  podendo ser um número natural, inteiro, racional, irracional e até mesmo complexo. Desta forma, o nome *cálculo fracionário* é menos preciso que *cálculo de ordem arbitrária*, entretanto, por tradição, encontramos as duas denominações para a mesma teoria.

Durante aproximadamente três séculos a teoria do cálculo de ordem arbitrária desenvolveu-se exclusivamente no campo da matemática pura, sem grandes aplicações.

Entretanto, nas últimas décadas a importância do cálculo de ordem arbitrária tornou-se evidente, com a utilização de equações diferenciais de ordem não inteira para modelar a descrição de diversos fenômenos, em especial os que possuem dependência temporal, tendo em vista que derivadas fracionárias proporcionam uma excelente descrição para efeitos de memória e propriedades hereditárias<sup>6</sup> [21]. Notou-se que, na maioria dos casos, a modelagem feita a partir de equações de ordem não inteira fornecia uma descrição mais precisa que a respectiva de ordem inteira.

No presente trabalho, tínhamos o interesse de estudar a fundo o cálculo de ordem arbitrária, desde suas origens históricas, definições mais aceitas e verificar a sua consistência teórica e foi exatamente isso que fizemos nos cinco primeiros capítulos do presente trabalho.

---

<sup>5</sup>De fato, a série utilizada por Leibniz é a base da definição de Gröwald-Letnikov.

<sup>6</sup>De maneira geral, os efeitos de memória e as propriedades hereditárias são negligenciadas quando utilizamos o cálculo de ordem inteira.

Além disso, objetivávamos dar um grande enfoque prático, por esta razão demos maior destaque às definições de Caputo, Riesz e Grünwald-Letnikov, para a derivada fracionária, visto que elas têm um caráter local, bem como exploramos as diferenças e pontos em comum destas definições com a clássica definição de Riemann-Liouville.

Assim como em muitos casos a solução de uma equação diferencial parcial com coeficientes constantes está associada à função exponencial, também, em muitos casos, a solução de uma equação diferencial fracionária com coeficientes constantes está associada às funções de Mittag-Leffler, que para valores específicos de seus parâmetros recuperam a função exponencial.<sup>7</sup> Sendo assim, o conhecimento profundo destas funções é uma ferramenta imprescindível para o estudo das equações diferenciais fracionárias. Por esta razão, dedicamos o Capítulo 6 deste trabalho ao estudo das funções de Mittag-Leffler. Destacamos ainda, que neste capítulo apresentamos um resultado original, um teorema de adição, para as funções de Mittag-Leffler, cuja demonstração, consequências e aplicações, resultaram em uma série de trabalhos [34, 36, 39, 43] e apresentações orais em congressos [40, 41, 42].

A equação do telégrafo é uma equação diferencial parcial utilizada para descrever vários fenômenos dentre eles, voltagem e corrente em uma linha de transmissão elétrica e propagação de onda. No Capítulo 7 apresentamos um de nossos principais resultados [38], ou seja, introduzimos e discutimos uma generalização fracionária para a equação do telégrafo e recuperamos, como casos particulares, uma série de resultados clássicos.

Por outro lado, a difusão anômala [114], que ocorre quando na difusão há um crescimento não linear da variância no decorrer do tempo, encontra uma série de aplicações em Biologia [25] e em Física [9]. Uma forma natural de se estudar a difusão anômala é através da equação de Langevin, que além disso, possui uma série de aplicações relacionadas a estatística. No Capítulo 9 apresentamos e resolvemos uma generalização fracionária para esta importante equação.

Continuações naturais deste trabalho são as mais diversas possíveis, podem ser feitas tanto no campo da matemática pura, na busca de mais relações envolvendo as funções relacionadas ao cálculo fracionário [47], na pesquisa de métodos mais efetivos de se resolver as equações diferenciais fracionárias, bem como na busca de novas generalizações e consequente refinamento de modelos já existentes. Ainda mais, não menos importante, no estudo das equações diferenciais parciais com coeficientes não constantes, em particular, como nos trabalhos de Gafiychuk et. al [48] e de Nishimoto [86].

Concluimos fazendo uma analogia entre o cálculo fracionário e a mecânica quântica. Assim como a mecânica de Newton parecia estar completa até o surgimento das teorias de Einstein, também o cálculo como nós o conhecíamos parecia estar completo, e com o advento do cálculo fracionário estamos diante de uma evolução cujas consequências podem ser tão formidáveis quanto às advindas da física quântica.

---

<sup>7</sup>Desta forma, as funções de Mittag-Leffler podem ser encaradas como generalizações fracionárias para a função exponencial.

# Sobre as Funções Beta e Gama

---

Neste apêndice, temos por objetivo mostrar alguns resultados envolvendo as funções gama e beta, também conhecidas como funções de Euler de segunda e primeira espécies, respectivamente [15]. Finalizamos o apêndice mostrando o resultado da fórmula (2.6).

## A.1 Definições

A função gama, denotada por  $\Gamma(z)$ , é definida pela integral imprópria

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\text{A.1})$$

com  $\text{Re}(z) > 0$  de modo que a integral convirja.

Através de uma integração por partes e uma mudança de variável podemos concluir que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

ou seja, a função gama generaliza o conceito de fatorial.

Por outro lado, a função beta, denotada por  $B(p, q)$ , é definida por

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt. \quad (\text{A.2})$$

Introduzindo a mudança de variável  $t = \sin^2 \theta$  podemos escrever a função beta da seguinte

maneira

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta. \quad (\text{A.3})$$

## A.2 Relação entre as Funções Beta e Gama

Mostramos a seguir uma importante relação envolvendo as funções gama e beta, que é essencial para mostrar o resultado da fórmula (2.6), isto é,

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (\text{A.4})$$

Para tanto, consideramos o produto

$$\begin{aligned} \Gamma(p) \Gamma(q) &= \int_0^\infty e^{-u} u^{p-1} du \int_0^\infty e^{-v} v^{q-1} dv \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u-v} u^{p-1} v^{q-1} dv du. \end{aligned}$$

Tomando  $u = x^2$  e  $v = y^2$  podemos escrever

$$\Gamma(p) \Gamma(q) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy.$$

Introduzindo as coordenadas polares no plano,  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ , temos

$$\Gamma(p) \Gamma(q) = 2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2p+2q-1} dr 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta.$$

Utilizando a definição da função beta dada pela equação (A.3), obtemos

$$\Gamma(p) \Gamma(q) = 2B(p, q) \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2p+2q-1} dr.$$

Por fim, considerando  $t = r^2$  na integral da equação acima obtemos

$$\Gamma(p) \Gamma(q) = B(p, q) \int_0^\infty e^{-t} t^{p+q-1} dt, \quad (\text{A.5})$$

de onde segue que

$$\Gamma(p) \Gamma(q) = B(p, q) \Gamma(p+q)$$

que é justamente o resultado desejado.

### A.3 Integração no Plano Complexo e a Função Gama

Como consequência da equação (A.4) temos que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = B(z, 1-z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{1+t} dt. \quad (\text{A.6})$$

Calculamos a seguir a integral na equação anterior e obtemos outra importante relação envolvendo a função gama a partir da qual deduzimos o resultado da equação (2.6).

Consideremos a seguinte integral no plano complexo

$$\int_\gamma \frac{\xi^{z-1}}{1+\xi} d\xi,$$

cujo integrando tem um pólo simples em  $\xi = -1$  e um ponto de ramificação em  $\xi = 0$  visto que  $0 < \text{Re}(z) < 1$ . O contorno  $\gamma$ , ilustrado na Figura A.1, é composto de duas circunferências concêntricas  $C_R$  e  $C_\varepsilon$ , de raios  $R$  e  $\varepsilon$ , respectivamente, e dois segmentos de reta  $L_1$  e  $L_2$ .

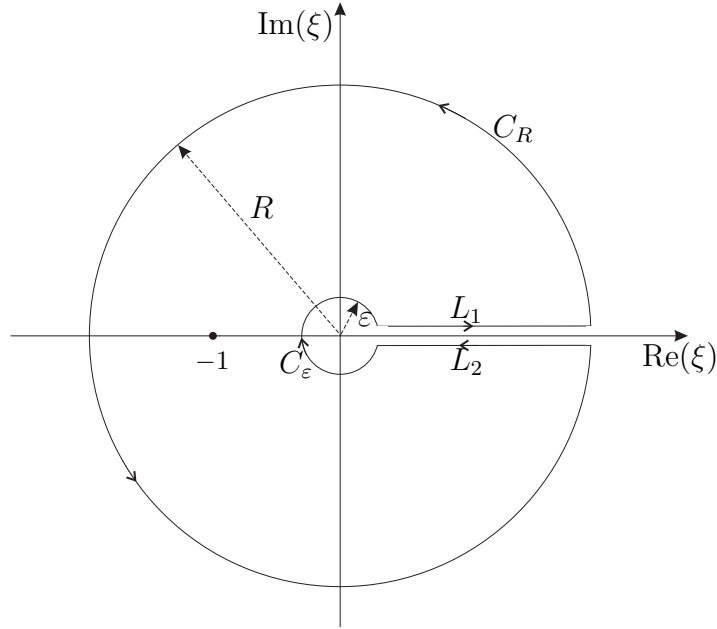


Figura A.1: Contorno para a integral (A.6).

Utilizando o teorema dos resíduos [33] podemos escrever:

$$\int_\gamma \frac{\xi^{z-1}}{1+\xi} d\xi = 2\pi i \text{Res} \left[ \left( \frac{\xi^{z-1}}{1+\xi} \right); \xi = -1 \right] = 2\pi i (-1)^{z-1} = 2\pi i e^{i\pi(\alpha-1)},$$

na qual  $\text{Res}[f(\xi); \xi = a]$ , denota o resíduo de  $f(\xi)$  no ponto  $\xi = a$ . Percorrendo o contorno  $\gamma$  podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\xi^{z-1}}{1+\xi} d\xi &= \int_{\varepsilon}^R \frac{x^{z-1}}{1+x} dx + \int_{C_R} \frac{\xi^{z-1}}{1+\xi} d\xi + \\ &+ \int_R^{\varepsilon} \frac{(xe^{2\pi i})^{z-1}}{1+x} dx + \int_{C_{\varepsilon}} \frac{\xi^{z-1}}{1+\xi} d\xi \\ &= 2\pi i e^{i\pi(\alpha-1)}. \end{aligned}$$

A integral sobre  $C_{\varepsilon}$  pode ser calculada através da mudança de variável

$$\xi = \varepsilon e^{i\theta} \quad \text{com} \quad 0 < \theta < 2\pi$$

de onde

$$\int_{C_{\varepsilon}} \frac{x^{z-1}}{1+x} dx = \int_{2\pi}^0 \frac{(\varepsilon e^{i\theta})^{z-1} \varepsilon i e^{i\theta}}{1 + \varepsilon e^{i\theta}} d\theta.$$

Como a integral é tomada em relação a  $\theta$  ao tomar o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  podemos comutar o limite com a integral, de onde segue que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_{\varepsilon}} \frac{x^{z-1}}{1+x} dx = 0.$$

Pelo lema de Jordan [33], a integral em  $C_R$  é nula quando  $R \rightarrow \infty$ . Desta forma tomando os limites  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $R \rightarrow \infty$  temos para as integrais em  $L_1$  e em  $L_2$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{z-1}}{1+x} dx + e^{2\pi i(z-1)} \int_{\infty}^0 \frac{x^{z-1}}{1+x} dx = 2\pi i e^{i\pi(z-1)}$$

ou ainda, multiplicando-se os dois lados da equação acima por  $e^{-i\pi(z-1)}$  na forma

$$[e^{-i\pi(z-1)} - e^{i\pi(z-1)}] \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1}}{1+x} dx = 2\pi i,$$

e finalmente,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{z-1}}{1+x} dx = \frac{-\pi}{\text{sen}[\pi(z-1)]} = \frac{\pi}{\text{sen} \pi z}.$$

Concluimos, portanto, que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\text{sen} \pi z}. \quad (\text{A.7})$$

Para recuperar o resultado da equação (2.6), ou seja,

$$\frac{\Gamma(\nu+1) \text{sen}(\nu+1)\pi}{\pi} = \frac{1}{\Gamma(-\nu)}$$

basta tomarmos  $z = \nu + 1$  na equação (A.7) e rearranjar.



---

# Referências Bibliográficas

---

- [1] A. S. Ackleh, D. F. Marshall and H. E. Heatherly, *Extinction in a Lotka-Volterra Predador-Prey Model*, J. Appl. Math. Stoch. Anal., **13**, 287-297, (2000).
- [2] G. Adomian, *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1994).
- [3] W. M. Ahmad and R. El-Khazali, *Fractional-Order Dynamical Models of Love*, Chaos, Solitons & Fractals, **33**, 1367-1375, (2007).
- [4] R. P. Argawal, *A Propos d'une Note de M. Pierre Humbert*, C. R. Seances Acad. Sci., **236**, 2031-2032, (1953).
- [5] O. P. Argrawal, *Fractional Variational Calculus in Terms of Riesz Fractional Derivatives*, J. Phys. A: Math. Theor. **40**, 6287-6303, (2007).
- [6] A. Arikoglu and I. Ozkol, *Solution of Fractional Differential Equations by Using Differential Transform Method*, Chaos, Solitons & Fractals, **34**, 1473-1481, (2007).
- [7] M.F.Atiyah and I.G. MacDonald *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading MA, (1969).
- [8] Bagley, R., *On the Fractional Order Initial Problem and its Engineering Applications*, Proceedings of the International Conference of Fractional Calculus and its Applications, College of Engineering, Nihon University, Tokyo, May-June 1986, (1990).
- [9] J. D. Bao and Y. Z. Zhuo, *Investigation on Anomalous Diffusion for Nuclear Fusion Reaction*, Phys. Rev. C, **67**, 064606, (2003).
- [10] A. Baule and R. Friedrich, *Two-Point Correlation Function of the Fractional Ornstein-Uhlenbeck Process*, Europhys. Lett., **79**, 60004, (2007).
- [11] S. Bayin, E. N. Glass and J. P. Krisch, *Fractional Boundaries for Fluid Spheres*, J. Math. Phys. **47**, 012501 (2006)
- [12] H. Beyer and S. Kempfner, *Definition of Physically Consistent Damping Laws with Fractional Derivatives*, Z. angew. Math. Mech., **75**, 623-635, (1995).

- [13] M. Bhatti, *Fractional Schrödinger Wave Equation and Fractional Uncertainty Principle*, Int. J. Contemp. Math. Sciences, **2**, 943-950, (2007).
- [14] J. Bisquert, *Interpretation of a Fractional Diffusion Equation with Nonconserved Probability Density in Terms of Experimental Systems with Trapping or Recombination*, Phys.Rev. **72**, 011109 (2005).
- [15] E. Capelas de Oliveira, *Funções Especiais com Aplicações*, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2005).
- [16] E. Capelas de Oliveira e J. Emílio Maiorino, *Introdução aos Métodos de Matemática Aplicada*, Segunda Edição, Editora da Unicamp, Campinas, (2003).
- [17] M. Caputo, *Elasticità e Dissipazione*, Zanichelli, Bologna, (1969).
- [18] M. Caputo, *Lectures on Seismology and Rheological Tectonics*, Univ. degli Studi di Roma, “La Sapienza”, 1992-1993.
- [19] M. Caputo, *Vibrations of an Infinite Viscoelastic Layer with a Dissipative Memory*, J. Acoust. Soc. Amer., **56**, 897-904, (1974).
- [20] M. Caputo, *Vibrations of an Infinite Plate with a Frequency Independent Damping*, J. Acoust. Soc. Amer., **60**, 634-641, (1976).
- [21] M. Caputo and F. Mainardi, *A New Dissipation Model Based on Memory Mechanism*, Pure and Applied Geophysics, 91, **8**, 134-147, (1971).
- [22] R. C. Cascaval, E. C. Eckstein, C. L. Frota and J. A. Goldstein, *Fractional Telegraph Equations*, J. Math. Anal. Appl., **276**, 145-159, (2002).
- [23] W. Center, *On the Value of  $(d/dx)^\theta x^0$  When  $\theta$  is a Positive Proper Fraction*, Cambridge Dublin Math. J., **3**, 163-169, (1848).
- [24] H. Chamati and N. S. Tonchev, *Generalized Mittag-Leffler Functions in the Theory of Finite-Size Scaling for Systems With Strong Anisotropy and/ or Long-Range Interaction*, J. Phys. A: Math. Gen., **39**, 469-478, (2006).
- [25] S. Chaudhury and B. J. Cherayil, *Complex Chemical Kinetics in Single Enzyme Molecules: Kramer’s Model With Fractional Gaussian Noise*, J. Chem. Phys., **125**, 024904, (2006).
- [26] W. Chen and S. Holm, *Modified Szabo’s Wave Equation Models for Lossy Media Obeying Frequency Power Law*, J. Acoust. Soc. Am., **114** (5), 2570-2574, (2003).
- [27] W. Chen, *Time-Space Fabric Underlying Anomalous Diffusion, Chaos, Solitons and Fractals*, **28**, 923-929 (2006).

- [28] M. Ciesielski and J. Leszczynski, *Numerical Simulations of Anomalous Diffusion*, CRM-2003, Computer Methods in Mechanics, arxiv:math-ph/0309007v1 (2003).
- [29] H. T. Davis, *The Theory of Linear Operators*, The Principia Press, Bloomington, (1936).
- [30] L. Debnath, *Recent Applications of Fractional Calculus to Science and Engineering*, Int. J. Math. Math. Sci., **54**, 3413-3442, (2003).
- [31] E. F. Elshehawey, E. M. E. Elbarbary, N.A.S. Afifi and M. El-Shahed, *On the Solution of the Endolymph Equation Using Fractional Calculus*, Appl. Math. Comput., **124**, 337-341, (2001)
- [32] A. Erdélyi, *Fractional Integrals of Generalized Functions*, Proceedings of the International Conference of Fractional Calculus and its Applications, University of New Haven, West Haven, Conn, June 1974; Springer-Verlag, New York, (1975).
- [33] R. Figueiredo Camargo, *Do Teorema de Cauchy ao Método de Cagniard*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, (2005).
- [34] R. Figueiredo Camargo, E. Capelas de Oliveira e Ary O. Chiacchio, *Sobre a Função de Mittag-Leffler*, R. P. 15/06, (2006).
- [35] R. Figueiredo Camargo, E. Capelas de Oliveira and F. A. M. Gomes, *The Replacement of Lotka-Volterra Model by a Formulation Involving Fractional Derivatives*, R. P. 10/07, (2007).
- [36] R. Figueiredo Camargo, Ary O. Chiacchio and E. Capelas de Oliveira, *Addition Theorems Associated with the Generalized Mittag-Leffler Functions*, Relatório de Pesquisa R.P. 34/07 (2007).
- [37] R. Figueiredo Camargo, E. Capelas de Oliveira and F. A. M. Gomes, *The Replacement of Lotka-Volterra Model by a Formulation Involving Fractional Derivatives*, II Conference on Computacional and Mathematical Population Dynamics, julho de 2007, Campinas, (2007).
- [38] R. Figueiredo Camargo, Ary O. Chiacchio and E. Capelas de Oliveira, *Differentiation to Fractional Orders and the Fractional Telegraph Equation*, J. Math. Phys., **49**, 033505, (2008) [DOI 10.1063/1.2890375].
- [39] R. Figueiredo Camargo, Ary O. Chiacchio and E. Capelas de Oliveira, *Teorema de Adição para as Funções de Mittag-Leffler*, submetido à revista TEMA: Tendências em Matemática Aplicada (2008).
- [40] R. Figueiredo Camargo, Ary O. Chiacchio and E. Capelas de Oliveira, *Funções de Mittag-Leffler: Teorema de Adição e Aplicações*, 67º Seminário Brasileiro de Análise, IME - USP - campus de São Paulo, (2008).

- [41] R. Figueiredo Camargo, Ary O. Chiacchio and E. Capelas de Oliveira, *Teorema de Adição para as Funções de Mittag-Leffler*, XXXI Congresso Nacional de Matemática Aplicada, UNAMA - campus de Belém do Pará, (2008).
- [42] R. Figueiredo Camargo, J. Vaz Jr. and E. Capelas de Oliveira, *A Closed Representation to the Green's Function Associated with the Time-Telegraph Equation*, 3<sup>th</sup> Applied Robotics and Collaborative Systems Engineering, ROBOCONTROL'08, UNESP - campus de Bauru, (2008).
- [43] R. Figueiredo Camargo, Ary O. Chiacchio and E. Capelas de Oliveira, *Equação do Telégrafo Fracionária e as Funções de Mittag-Leffler*, R. P. 06/08 (2008).
- [44] R. Figueiredo Camargo, Ary O. Chiacchio and E. Capelas de Oliveira, *One-Sided and Two-Sided Green's Functions*, Relatório de Pesquisa R.P. 21/08 (2008).
- [45] R. Figueiredo Camargo, R. Charnet and E. Capelas de Oliveira, *On Some Fractional Green's Functions*, J. Math. Phys., (2009).
- [46] R. Figueiredo Camargo, Ary O. Chiacchio, R. Charnet and E. Capelas de Oliveira, *On the Fractional Langevin Equations*, Relatório de Pesquisa R.P. 01/09 (2009).
- [47] R. Figueiredo Camargo, J. Vaz Jr. and E. Capelas de Oliveira, *On the Generalized Mittag-Leffler Function and its Application in Fractional Telegraph Equation*, Relatório de Pesquisa R.P. 04/09 (2009).
- [48] V. Gafiyichul, B. Datsko, V. Meleshko and D. Black Mose, *Analysis of the Solutions of Coupled Nonlinear Fractional Reaction-Diffusion Equations*, Chaos, Solitons and Fractals, In Press, (2008).
- [49] R. Gorenflo and F. Mainardi, *Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order*, CISM Lectures Notes, 223-276, (2000).
- [50] X. Guo and M. Xu, *Some Physical Applications of Fractional Schrödinger Equation*, J. Math. Phys., **47**, 082104 (2006).
- [51] A. K. Grünwald, *Über begrenzte Derivationen und Deren Anwendung (Sobre a Derivação e suas Aplicações)*, Z. Angew. Math. Phys., **12**, 441-480 (1867).
- [52] A. Hanyga, *Multidimensional Solutions of Space-Fractional Diffusion Equations*, Proc. R. Soc. Lond., **457A**, 2993-3005, (2001).
- [53] A. Hanyga, *Multidimensional Solutions of Time-Fractional Diffusion-Wave Equations*, Proc. R. Soc. Lond. A, **458**, 933-957, (2002).
- [54] Harmke van Oene, E. J. Mieleke van Deursen and Frank Berendse, *Plant-Herbivore Interaction and Its Consequences for Succession in Wetland Ecosystems: A Modeling Approach*, Ecosystems, **2**, 122-138, (1999).

- [55] T. T. Hartley and C. F. Lorenzo, *Insights Into the Initialization of Fractional Order Operators via Semi-Infinite Lines*, NASA TM-1998-208407, (1998).
- [56] T. T. Hartley and C. F. Lorenzo, *A Solution to the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation*, NASA/TP-1998-208693 (1998).
- [57] O. Heaviside, *Electrical Papers*, Macmillan, London, (1892).
- [58] N. Heymans and I. Podlubny *Physical Interpretation of Initial Conditions for Fractional Differential Equations with Riemann-Liouville Fractional Derivative*, Rheol. Acta, **45** 765-772, (2006).
- [59] R. D. Holt, Andrew P. Dobson, Michael Begon, Roger G. Bowers and Eric M. Schaubert, *Parasite Establishment in Host Communities*, Ecology Letters, **6**, 837 - 842, (2003).
- [60] P. Humbert and R. P. Agarwal, *Sur la Fonction de Mittag-Leffler et Quelques-unes de ses Généralisations*, Bull. Sci. Mathématiques, **77**, 180-185, (1953).
- [61] P. Inizan, *Homogeneous Fractional Embeddings*, J. Math. Phys., **49**, 082901, (2008).
- [62] S. G. Kamath, *Relativistic Tautochrone*, J. Math. Phys., **33**, 934-940, (1991).
- [63] S. Kempfner and L. Gaul, *Global Solutions of Fractional Linear Differential Equations*, Z. Angew. Math. Mech., **76**, 571-572, (1996).
- [64] A.A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Mathematics Studies, Vol.204, Edited by Jan Van Mill, Elsevier, Amsterdam, (2006).
- [65] A. A. Kilbas, M. Rivero, L. Rodríguez-Gerná and J. J. Tujillo,  *$\alpha$ -Analytic Solutions of Some Linear Fractional Differential Equations with Variable Coefficientes*, Appl. Math. Comput., **187**, 239-249 (2007).
- [66] S. C. Kou and X. S. Xie, *Generalized Langevin Equation with Fractional Gaussian Noise: Subdiffusion Within a Single Protein Molecule*, Phys. Rev. Lett., **93**, 180603, (2004).
- [67] V. S. Kyriakova, *Generalized Fractional Calculus and Applications*, Pitman Res. Notas in Math. Ser., 301, Longman, Harlow (1994).
- [68] H. Laurent, *Sur le Calcul des Dérivées à Indices Quelconques*, Nouv. Ann. Math., **3**(3), 240-252, (1884).
- [69] C. Li and W. Dang *Remarks on Fractional Derivatives*, Appl. Math. Comput., **187**, 777-784, (2007).

- [70] E. L. Lima, *Análise no Espaço  $\mathbb{R}^n$* , Editora Universidade de Brasília, Ed. E. Blücher Ltda., Brasília, (1980).
- [71] C. F. Lorenzo and T. T. Hartley *Initialization, Conceptualization, and Application in the Generalized Fractional Calculus*, NASA/TP-1998-208415 (1998).
- [72] C. F. Lorenzo and T. T. Hartley *Initialized Fractional Calculus* NASA/TP-2000-209943, (2000).
- [73] E. R. Love, *Fractional Derivatives of Imaginary Order*, J. London Math. Soc., **3**, 241-259, (1971).
- [74] Y. Luchko and R. Gorenflo, *An Operational Method for Solving Fractional Differential Equations with the Caputo Derivatives*, Acta. Math. Vietnamica, **24**, 207-233, (1999).
- [75] F. Mainardi, *Fractional Relaxation-Oscillation and Fractional Diffusion-Wave Phenomena*, Chaos, Solitons & Fractals, **7**, 1461-1477, (1996).
- [76] F. Mainardi and P. Pironi, *The Fractional Langevin Equation: Brownian Motion Revisited*, Extracta Mathematicae, **11**, 140-154, (1996).
- [77] F. Mainardi, *The Fundamental Solutions for the Fractional Diffusion-Wave Equation*, Appl. Math. Lett., **9**, 23-28, (1996).
- [78] F. Mainardi and R. Gorenflo, *On Mittag-Leffler-Type Functions in Fractional Evolution Processes*, J. Comput. Appl. Math., **118**, 283-299, (2000).
- [79] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco, (1992).
- [80] A. M. Mathai, R. K. Saxena, and H. J. Haubold, *A Certain Class of Laplace Transform With Applications to Reaction and Reaction-Diffusion Equations*, Astrophys. Space Sci., **305**, 283-288, (2006).
- [81] A. C. McBride and G. F. Roach, *Fractional Calculus*, University of Strathclyde, Glasgow, (1984).
- [82] R. Metzler and J. Klafter, *The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Kinetic Equation*, Phys. Reports, **339**, 1-77, (2000).
- [83] K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons, Wiley-Interscience, (1993).
- [84] G. M. Mittag-Leffler, *Sur la Nouvelle Fonction  $E_\alpha(x)$* , C. R. Acad. Sci., **137**, 554-558, (1903).
- [85] S. Momani, *Analytic and Approximate Solutions of the Space- and Time-Fractional Telegraph Equations*, Appl. Math. Comput., **170**, 1126-1134, (2005).

- [86] K. Nishimoto, *Applications to the Solutions of Linear Second Order Differential Equations of Fuchs Type*, in Fractional Calculus, eds. A. C. McBride, G. F. Roach, Boston: Pitman Adv. Publ. Progr., Res. Notes Math., **138**, 140-153 (1985).
- [87] K. B. Oldham and J. Spanier *The Fractional Calculus*, Academic Press, London, (1984).
- [88] K. B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus-Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Vol. 111 Mathematics in Science and Engineering, Ed. Bellman, R. Academic Press, San Diego, (1999).
- [89] E. Orsingher and X. Zhao, *The Space-Fractional Telegraph Equation and the Related Fractional Telegraph Process*, Chin. Ann. Math., **24B**, 45-56, (2003).
- [90] E. Orsingher and L. Beghin, *Time-Fractional Telegraph Equations and Telegraph Processes With Brownian Time*, Probab. Theory Relat. Fields, **128**, 141-160, (2004).
- [91] T. J. Osler, *A Further Extension of the Leibniz Rule to Fractional Derivatives and its Relation to Parseval's Formula*, SIAM J. Math. Anal., **3**, 1-16, (1972).
- [92] N. Özdemir and D. Karadeniz, *Fractional Diffusion-Wave Problem in Cylindrical Coordinates*, Phys. Lett. A 372, **38** 5968-5972, (2008).
- [93] I. T. Pedron e R. S. Mendes, *Difusão Anômala e Equações Generalizadas de Difusão*, Rev. Bras. Ens. Fis. **2**, 251-258, (2005).
- [94] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, Vol.198, Academic Press, San Diego, (1999).
- [95] I. Podlubny, *Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integral and Fractional Differentiation*, Frac. Cal. Appl. Anal., **5**, 367-386 (2002).
- [96] J. M. Porrà, K. G. Wang and J. Masoliver, *Generalized Langevin Equations: Anomalous Diffusion and Probability Distributions*, Phys. Rev. E, **53**, 5872-5881, (1996).
- [97] T. R. Prabhakar, *A Singular Integral Equation With Generalized Mittag-Leffler Function in the Kernel*, Yokohama Math. J, **19**, 7-15, (1971).
- [98] A. P. Prudnikov, Y. A. Brychkov and O. I. Marichev, *Integrals and Series*, vol. I, II, III, Elementary Functions, Gordon and Breach, New York, (1986).
- [99] Rui Yu and H. Zhang, *New Function of Mittag-Leffler Type and Its Application in the Fractional Diffusion-Wave Equation*, Chaos, Solitons & Fractals, **30**, 946-955, (2006).
- [100] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, (1993).

- [101] K. Sau Fa, *Generalized Langevin Equation with Fractional Derivative and Long-Time Correlation Function*, Phys. Rev. E, **73**, 061104 (2006).
- [102] K. Sau Fa, *Fractional Langevin Equation and Riemann-Liouville Fractional Derivative*, Eur. Phys. J. E., **24**, 139-143 (2007).
- [103] R. K. Saxena, A. M. Mathai and H. J. Haubold, *Solutions of Certain Fractional Kinetic Equations and a Fractional Diffusion Equation*, arXiv:0704.1916v2 [math.CA] (2007).
- [104] R. K. Saxena, A. M. Mathai and H. J. Haubold, *Solutions of Fractional Reaction-Diffusion Equations in Terms of Mittag-Leffler Functions*, arXiv:0708.2265v1 [math.CA] (2007).
- [105] E. Scalas, R. Gorenflo and F. Mainardi, *Fractional Calculus and Continuous-Time Finance*, Physica A, **284**, 376-384, (2000).
- [106] S. Shen, F. Liu, V. Anh and I. Turner *The Fundamental Solution and Numerical Solution of the Riesz Fractional Advection-Dispersion Equation*, IMA Journal of Applied Mathematics, **73**, 850-872, (2008).
- [107] A. K. Shukla and J. C. Prajapati, *On a Generalization of Mittag-Leffler Function and its Properties*, J. Math. Anal. Appl., **336**, 797-811, (2007).
- [108] N. Ya. Sonin, *On Differentiation With Arbitrary Index*, Moscow Mat. Sb., **6**, 1-38, (1869).
- [109] J. C. Sprott, *Dynamical Models of Love*, Nonlinear Dyn. Psyc. Life Sci., **8** 303-313, (2004).
- [110] G. B. Thurston, *Viscoelasticity of Human Blood*, Biophys. J., **12**, 1205-1217, (1972).
- [111] K. Trincevski, *New Approach to the Fractional Derivatives*, Int. J. Math. Math., **2003**, 315-325, (2003).
- [112] N. Virchenko and I. Fedotova, *Generalized Associated Legendre Functions an Their Applications*, World Scientific, Singapore, (2001).
- [113] A. D. Viñales and M. A. Despósito, *Anomalous Diffusion: Exact Solution of the Generalized Langevin Equation for Harmonically Bounded Particle*, Phys. Rev. E, **73**, 016111 (2006).
- [114] A. D. Viñales and M. A. Despósito, *Anomalous Diffusion Induced by a Mittag-Leffler Correlated Noise*, Phys. Rev. E, **75**, 042102, (2007).
- [115] A. Wiman, *Über den Fundamental Satz in der Theorie der Funktionen  $E_\alpha(x)$*  (Sobre o Teorema Fundamental na Teoria das Funções  $E_\alpha(x)$ ), Acta Math, **29**, 191-201, (1905).



- [116] Y.Watanabe, *Notes on the Generalized Derivative of Riemann-Liouville and Its Applications to Leibniz's Formula I and II*, Tôhoku Math., **24**, 8-41, (1931).
- [117] W. Wyss, *The Fractional Black-Scholes Equation*, *Frac. Cal. Appl. Anal.*, **3**, 51-60, (2000).