



SAMUEL AUGUSTO WAINER

**GEOMETRIA RIEMANNIANA E SEMI-RIEMANNIANA NO
FIBRADO DE CLIFFORD E APLICAÇÕES**

CAMPINAS
2013



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

SAMUEL AUGUSTO WAINER

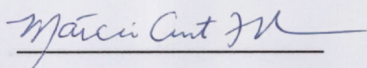
GEOMETRIA RIEMANNIANA E SEMI-RIEMANNIANA NO FIBRADO
DE CLIFFORD E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica da Universidade
Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos
para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Márcio Antônio de Faria Rosa

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA
DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO
SAMUEL AUGUSTO WAINER, E ORIENTADA PELO
PROF. DR MÁRCIO ANTÔNIO DE FARIA ROSA.

Assinatura do Orientador



CAMPINAS
ANO

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

W133g Wainer, Samuel Augusto, 1989-
Geometria riemanniana e semi-riemanniana no fibrado de Clifford e aplicações / Samuel Augusto Wainer. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Márcio Antônio de Faria Rosa.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Clifford, Álgebra de. 2. Spinor - Análise. 3. Geometria riemanniana. 4. Superfícies mínimas. I. Rosa, Márcio Antônio de Faria, 1959-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Riemannian and semi-riemannian geometry on Clifford fiber bundle and applications

Palavras-chave em inglês:

Clifford algebras

Spinor analysis

Riemannian geometry

Minimal surfaces

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Márcio Antônio de Faria Rosa [Orientador]

Rafael de Freitas Leão

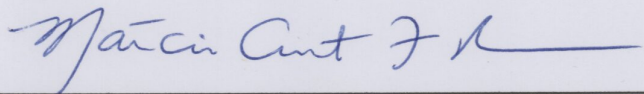
Alexandre Luis Trovon de Carvalho

Data de defesa: 08-11-2013

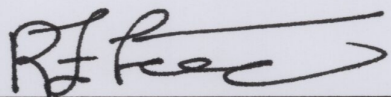
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 08 de novembro de 2013 e aprovada

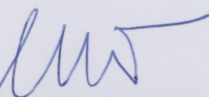
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). MÁRCIO ANTONIO DE FARIA ROSA



Prof.(a). Dr(a). RAFAEL DE FREITAS LEÃO



Prof.(a). Dr(a). ALEXANDRE LUIS TROVON DE CARVALHO

Abstract

The main objective of this dissertation is a rigorous study of several mathematical concepts that are essential in Modern Physics theories, e.g., the necessary algebra to a rigorous definition of the concept of spinor and the differential geometry and topology that permits the introduction of spinor fields in a differentiable manifold M ($\dim M = m$) endowed with a metric \mathbf{g} with signature (p, q) . The question that guided this study was: how the formalism of Clifford Fiber Bundle of differential forms and theory of Extensors can be applied to the geometry of differentiable manifolds and their submanifolds, producing interesting results? We believe that this work answers this question by showing that in this formalism: (i) the remarkable structure of the curvature extensor of a submanifold M of \mathbb{R}^n (endowed with a metric with signature $(\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q})$) and endowed with the Levi-Civita connection D of $\mathbf{g} = \mathbf{i}^* \overset{\circ}{\mathbf{g}}$ and its relation with the shape extensor and the shape biform of M (generalization of the Weringarten shape operator); (ii) a remarkable relation between the Ricci operator of (M, \mathbf{g}, D) and the square of the shape operator.

Resumo

O principal objetivo dessa dissertação é o estudo rigoroso de diversos conceitos matemáticos que são essenciais em teorias da Física Moderna, como, e.g., a álgebra necessária para a definição rigorosa do conceito de espinor e a geometria diferencial e topologia que permitem a introdução de campos de espinores em variedades diferenciáveis M ($\dim M = m$) dotadas de uma métrica \mathbf{g} de assinatura (p, q) . A pergunta que norteou nosso estudo foi: de que maneira o formalismo do fibrado de Clifford de formas diferenciais e a teoria de extensores pode ser aplicado na geometria de uma variedade diferenciável e suas subvariedades, produzindo resultados interessantes? Acreditamos que o presente trabalho responda esta questão ao mostrar neste formalismo: (i) a notável estrutura do extensor de curvatura de uma subvariedade M de \mathbb{R}^n (equipada com uma métrica de assinatura $(\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q})$) e equipada com a conexão de Levi-Civita D de $\mathbf{g} = \mathbf{i}^* \overset{\circ}{\mathbf{g}}$ e sua relação com extensor de formato e com a biforma de formato de M (generalizações do operador de formato de Weringarten); (ii) uma relação notável entre o operador de Ricci de (M, \mathbf{g}, D) e o quadrado do operador de forma.

SUMÁRIO

Introdução	1
1 Capítulo Algébrico	3
1.1 Álgebra Tensorial	3
1.1.1 Cotensores	3
1.2 Produto interno em \mathbf{V} e \mathbf{V}^*	5
1.3 Álgebra Exterior, de Grassmann e de Clifford	7
1.3.1 Produto Escalar em $\bigwedge \mathbf{V}$, $\bigwedge \mathbf{V}^*$ e Álgebra de Grassmann	8
1.3.2 Álgebras de Clifford	9
1.3.3 Propriedade Universal das Álgebras de Clifford	10
1.3.4 Propriedades	11
1.3.5 Extensores	12
1.3.6 (p, q) -Extensores	13
1.3.7 Classificação das Álgebras de Clifford Reais	13
1.3.8 Classificação das Álgebras de Clifford Complexas	15
1.4 Representações, Idempotentes e Ideais Minimais de $\mathbb{R}_{p,q}$	17
1.4.1 Idempotentes e Ideais Minimais	18
1.4.2 Encontrando os Idempotentes	21
1.5 Grupo de Clifford e subgrupos e $\mathbb{R}_{p,q}^0$	22
1.5.1 As subálgebras pares $\mathbb{R}_{p,q}^0$	22
1.5.2 Grupo de Clifford	23
1.6 Os Conceitos de Espinores	25
1.6.1 Espinores Algébricos	26
1.6.2 a-espinores, c-espinores e os o-espinores	30
1.6.3 Construção e Representação de a-espinores e de Métricas Espinoriais	33
1.6.4 Espinores Algébricos em $\mathbb{R}_{3,0}$	39

2	Capítulo Geométrico	41
2.1	Variedades Diferenciáveis	41
2.1.1	Vetores Tangentes	43
2.2	Fibrados, Fibrados Principais e Fibrados Vetoriais	45
2.2.1	Fibrado dos Referenciais	47
2.2.2	Fibrado dos Referenciais Ortonormais	48
2.3	Fibrados de Clifford, Fibrados Espinoriais e Estrutura Spin	48
2.4	Estrutura Spin	49
2.5	Existência de Estrutura Spin	49
2.5.1	Grupos de Cohomologia de Čech	50
2.5.2	Classes de Stiefel-Whitney	51
2.6	Campos Espinoriais	53
2.7	Mais Algumas Definições	54
2.7.1	Aplicação Diferencial e o Pull-back	55
2.7.2	Subvariedades	56
2.8	Geometria Diferencial no Fibrado de Hodge	57
2.8.1	Estruturas Riemannianas e Lorentzianas em M	57
2.8.2	Fibrado de Hodge	58
2.9	Geometria Riemanniana e Semi-Riemanniana no Fibrado de Clifford $\mathcal{Cl}(M, \mathbf{g})$	59
2.9.1	O Operador de Dirac	59
2.9.2	Equações de Estrutura	60
2.9.3	Representação dos Campos de Clifford como somas de Formas Diferenciais	63
2.9.4	Operador padrão de Dirac	63
2.9.5	O Quadrado do Operador de Dirac	65
2.9.6	Algumas Relações Importantes em $\mathcal{Cl}(M, \mathbf{g})$	67
2.10	Propriedades de uma Subvariedade M de \mathring{M} Herdadas de \mathring{M}	77
2.10.1	Caso Particular, $\mathring{M} \simeq \mathbb{R}^n$	79
2.10.2	As Curvaturas Média e Gaussiana de M	81
2.10.3	Operador projeção \mathbf{P} , Operador de Formato \mathbf{S} e a Biforma de Formato \mathcal{S}	84
2.10.4	$\mathbf{S}(\hat{v}) = \mathbf{S}(v) = \partial_u \wedge \mathbf{P}_u(\hat{v})$ e $\mathbf{S}(\hat{v}_\perp) = \partial_u \lrcorner \mathbf{P}_u(\hat{v})$	87
2.10.5	$\hat{v} \wedge v = \partial \wedge v + \mathcal{S}(v)$ e $\hat{v} \lrcorner v = \partial \lrcorner v$	90
2.11	Biforma da Curvatura $\mathfrak{R}(u \wedge v)$ Expressa em Termos do Operador de Formato	91
2.11.1	Expressões Equivalentes para $\mathfrak{R}(u \wedge v)$	91
2.11.2	$\mathbf{S}^2(v) = -\partial \wedge \partial(v)$	93
2.12	Algumas identidades envolvendo \mathbf{P} e \mathbf{P}_u	95
2.13	Algumas Identidades Notáveis	98

3	Sobre Espinores e Superfícies Mínimas e Máximas	101
3.1	Superfícies Paramétricas	101
3.1.1	Uma Interpretação Geométrica dos Espinores de Pauli	102
3.1.2	Superfícies na Forma Explícita	103
3.1.3	Mais Alguns Detalhes Sobre Superfícies Não-Paramétricas	108
3.1.4	Parâmetros Isotérmicos	108
3.1.5	Campos Espinoriais e Superfícies Minimais e Maximais	112
3.1.6	Superfícies Mínimas e Máximas Associadas a Campos Vetoriais Isotrópicos	114
3.2	Imagens das Superfícies Mínimas e Máximas Geradas pelo Maple	117
A	Falaco Solitons	129
B	Pontos Extremos do Quociente de Formas Quadráticas	131
C	Espaços Afins \mathcal{A}^n	133
	Bibliografia	135

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, em primeiro lugar, pela capacitação concedida, sem a qual não poderia ter sido realizado o presente trabalho.

Agradeço a minha família que, com muito carinho e apoio, não mediu esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

Agradeço a Maiara, por toda sua ajuda, que mesmo nos momentos mais difíceis estava do meu lado.

Agradeço ao CNPQ pelo suporte financeiro.

Finalmente, agradeço ao meu orientador pela paciência e dedicação com que orientou meus estudos, e pelo entusiasmo com que esclareceu minhas dúvidas.

INTRODUÇÃO

Esta é uma dissertação de Matemática Pura. Porém devemos desde já anunciar que a motivação inicial para sua elaboração surgiu com o nosso desejo de modelarmos geométrica e topologicamente² os **FS** (“Falaco Solitons”), descobertos pelo Professor R. M. Kiehn [26]. De fato um **FS** é uma notável estrutura física, um defeito topológico (na água) facilmente criado em uma simples piscina sob determinadas condições³. Para eventualmente atingirmos nosso objetivo faz-se necessário o conhecimento de diversas teorias matemáticas. Na presente dissertação, estudamos e desenvolvemos alguns dos pré-requisitos matemáticos necessários para um futuro estudo completo dos **FS**, bem como de objetos de natureza analoga que podem ser vistos como subvariedades de dimensões maiores que as dos **FS**, como por exemplo buracos de minhoca na Relatividade Geral [45]. Com esse intuito, o trabalho está estruturado em três capítulos:

Capítulo 1 Nesse capítulo, intitulado algébrico, definimos as álgebras de Clifford reais e complexas de dimensão finita, e apresentamos na seção 1.6.1 uma definição matemática rigorosa desse conceito que, em nossa opinião, esclarece e complementa as definições destes objetos que são fornecidas em textos de Física e também de Matemática.

Capítulo 2 Esse é o capítulo mais importante da dissertação. Desenvolvemos usando o formalismo do fibrado de Clifford de formas diferenciais e a teoria de extensores uma formulação da geometria de uma variedade diferenciável M ($\dim M = m$) equipada com uma métrica \mathbf{g} de assinatura (p, q) (com $p + q = m$) e uma conexão de Riemann-Cartan ∇ compatível com \mathbf{g} . Em seguida analisamos com detalhes a geometria de uma subvariedade orientável M de $\mathring{M} \simeq \mathbb{R}^n$ (equipada com $\mathring{\mathbf{g}}$,

²Bem como em uma segunda etapa entendermos o comportamento dinâmico destas estruturas como resultado de um campo de velocidades em um líquido como soluções de uma equação de Navier-Stokes.

³Na Seção 3.2 encontramos alguns dos modelos propostos por Kiehn dos **FS**.

uma métrica de assinatura $(\mathring{p}, \mathring{q})$, $\mathring{p} + \mathring{q} = n$, e com a conexão de Levi-Civita de $\mathring{\mathbf{g}}$) e tal que $\mathbf{g} : i^*\mathring{\mathbf{g}}$ onde i aplicação de inclusão $i : M \rightarrow \mathring{M}$ e M encontra-se equipada com a conexão de Levi-Civita de \mathbf{g} . Introduzimos diversos conceitos que não aparecem nas formulações padrões dos textos de geometria diferencial, por exemplo, o operador de Dirac e seu quadrado; e um campo dito *biforma de curvatura* para o qual obtemos diversas expressões equivalentes em termos do operador de projeção $\mathbf{P} : \text{sec}\mathcal{C}\ell(\mathring{M}, \mathring{\mathbf{g}}) \rightarrow \text{sec}\mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$ e do operador de formato \mathbf{S} e da biforma de formato \mathcal{S} . Mostramos também um resultado notável: que o quadrado do operador de Dirac possui duas decomposições distintas, uma delas permitindo definir um operador extensorial muito importante dito operador de Ricci e que este operador é o negativo do quadrado do operador de formato \mathbf{S} . A dissertação também analisa com alguma profundidade as condições necessárias e suficientes para que campos espinoriais possam ser definidos em uma estrutura (M, \mathbf{g}) .

Capítulo 3 Campos espinorias ditos Euclidianos e de Majorana são usados para uma apresentação da teoria de superfícies minimais e maximais, conceitos importantes para a formulação de diversas teorias físicas modernas. Apresentamos no final vários superfícies geradas pelo programa Maple que eventualmente podem servir como um modelo para os **FS**.

Mais detalhes sobre o conteúdo dos capítulos, podem ser encontrados no Sumário.

CAPÍTULO 1

CAPÍTULO ALGÉBRICO

1.1 Álgebra Tensorial

Aqui trabalharemos apenas com espaços vetoriais de dimensão finita. Seja \mathbf{V} um espaço vetorial sobre o corpo dos reais \mathbb{R} e seja, $\dim \mathbf{V} = n, n \in \mathbb{N}$. Denotamos o espaço dual de \mathbf{V} por \mathbf{V}^* . Note que $\dim \mathbf{V}^* = \dim \mathbf{V}$. Os elementos de \mathbf{V} são chamados de vetores e os elementos de \mathbf{V}^* são chamados de covetores ou 1-formas.

1.1.1 Cotensores

Definição 1. Chamamos de espaço dos k -cotensores, denotado por $T_k(\mathbf{V})$, o conjunto de todas as transformações k -lineares τ_k tal que

$$\tau_k : \underbrace{\mathbf{V} \times \mathbf{V} \times \dots \times \mathbf{V}}_{k\text{-vezes}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

onde identificamos $T_0(\mathbf{V}) \equiv \mathbb{R}$, e $T_1(\mathbf{V}) \equiv \mathbf{V}^*$.

Multicotensores

Definição 2. Considere a soma direta exterior $T(\mathbf{V}^*) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \oplus T_k(\mathbf{V}) \equiv \bigoplus_{k=0}^{\infty} T_k(\mathbf{V})$. Um multicotensor de ordem $N_\tau \in \mathbb{N}$ é um elemento de $T(\mathbf{V}^*)$ da forma $\tau = \sum_{k=0}^{N_\tau} \oplus \tau_k$, $\tau_k \in T_k(\mathbf{V})$, de forma que todas as componentes $\tau_k \in T_k(\mathbf{V})$ de τ são nulas para $k > N_\tau$. $T(\mathbf{V}^*)$ é chamado de espaço dos multicotensores.

Por vezes é conveniente denotarmos um elemento de $T(\mathbf{V}^*)$ por

$$\tau = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k, \dots). \quad (1.2)$$

¹Note que esta definição, como aplicações multilineares, coincide com a definição mais geral apresentada em [24] pois estamos considerando espaços de dimensão finita.

Definição 3. O operador k -ésima parte é uma transformação $\langle \rangle_k : T(\mathbf{V}^*) \rightarrow T(\mathbf{V}^*)$ tal que para todos $j, k \in \mathbb{N}, j \neq k$ tenhamos que $\langle \langle \tau \rangle_k \rangle_j = 0$, onde $\langle \langle \tau \rangle_k \rangle_j \in T_j(\mathbf{V})$. Onde, se $\tau = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k, \dots) \in T(\mathbf{V}^*)$ teremos $\langle \tau \rangle_k = (0, \dots, 0, \tau_k, 0, \dots)$.

Definição 4. Um multicotensor $\tau \in T(\mathbf{V}^*)$ é dito homogêneo de grau k se e somente se $\tau = \langle \tau \rangle_k$.

Produto Tensorial de Multicotensores

Definição 5. O produto tensorial de multicotensores é uma aplicação $\otimes : T(\mathbf{V}^*) \times T(\mathbf{V}^*) \rightarrow T(\mathbf{V}^*)$ tal que:

- (i) Se $a, b \in T_0(\mathbf{V}) = \mathbb{R}, a \otimes b = ab$.
- (ii) Se $a \in \mathbb{R}$ e $\tau \in T_p(\mathbf{V}), p \geq 1$, então $a \otimes \tau = \tau \otimes a = a\tau$.
- (iii) Se $\sigma \in T_i(\mathbf{V})$ e $\tau \in T_j(\mathbf{V}),$ com $i, j \geq 1$ assim $\sigma \otimes \tau \in T_{i+j}(\mathbf{V})$ e é tal que para $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_{i+j} \in \mathbf{V}$ teremos

$$\sigma \otimes \tau(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_{i+j}) = \sigma(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i)\tau(\mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_{i+j}). \quad (1.3)$$

- (iv) O produto tensorial é distributivo pela direita e pela esquerda e é associativo, i.e., para $a, b \in \mathbb{R}, \sigma \in T_i(\mathbf{V}), \tau \in T_j(\mathbf{V}), \phi \in T_k(\mathbf{V})$

$$\begin{aligned} (\sigma + \tau) \otimes \phi &= \sigma \otimes \phi + \tau \otimes \phi, \\ \phi \otimes (\sigma + \tau) &= \phi \otimes \sigma + \phi \otimes \tau, \\ (\sigma \otimes \tau) \otimes \phi &= \sigma \otimes (\tau \otimes \phi). \end{aligned} \quad (1.4)$$

- (v) Se $\sigma, \tau \in T(\mathbf{V}^*)$ então

$$\langle \sigma \otimes \tau \rangle_k = \sum_{j=0}^k \langle \sigma \rangle_j \otimes \langle \tau \rangle_{k-j}. \quad (1.5)$$

Observação 6. Note que podemos definir os multitensores assim como seu produto de maneira análoga a feita acima. É também possível estender a definição do produto tensorial permitindo o produto de um r -tensor com um s -cotensor. Denotaremos, como usual, por $T_s^r(\mathbf{V}) = \mathbf{V} \otimes \dots \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}^* \otimes \dots \mathbf{V}^* \equiv \mathbf{V}^* \otimes \dots \mathbf{V}^* \otimes \mathbf{V} \otimes \dots \mathbf{V}$ o espaço dos r -contravariante e s -covariante tensores. $\mathbf{P} \in T_s^r(\mathbf{V})$ é uma transformação $(r+s)$ -multilinear

$$\mathbf{P} : \underbrace{\mathbf{V} \times \mathbf{V} \times \dots \times \mathbf{V}}_{s\text{-vezes}} \times \underbrace{\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}^* \times \dots \times \mathbf{V}^*}_{r\text{-vezes}} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Se $\mathbf{P} \in T_s^r(\mathbf{V})$ e $\mathbf{S} \in T_q^p(\mathbf{V})$ definimos de maneira análoga o produto tensorial de \mathbf{P} por \mathbf{S} como a transformação multilinear $\mathbf{P} \otimes \mathbf{S} \in T_{s+q}^{r+p}(\mathbf{V})$. A soma direta exterior $\mathcal{T}(\mathbf{V}) \equiv \bigoplus_{r=0, s=0}^{\infty} T_s^r(\mathbf{V})$ equipada com o produto tensorial é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , chamdo de álgebra tensorial de \mathbf{V} .

Involuções

Definição 7. A involução principal ou involução de grau é um automorfismo $\hat{\cdot} : T(\mathbf{V}^*) \rightarrow T(\mathbf{V}^*)$ (ou $T(\mathbf{V}) \rightarrow T(\mathbf{V})$) tal que:

- (i) se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\hat{\alpha} = \alpha$;
- (ii) se $\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_k \in T_k(\mathbf{V})$, $k \geq 1$, $(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_k)^\hat{\cdot} = (-1)^k \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_k$;
- (iii) se $a, b \in \mathbb{R}$ e $\sigma, \tau \in T(\mathbf{V}^*)$ então $(a\sigma + b\tau)^\hat{\cdot} = a\hat{\sigma} + b\hat{\tau}$;
- (iv) se $\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k$, $\tau_k \in T_k(\mathbf{V})$ então

$$\hat{\tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\tau}_k. \quad (1.7)$$

Definição 8. O operador transposição² é um antiautomorfismo $\tilde{\cdot} : T(\mathbf{V}^*) \rightarrow T(\mathbf{V}^*)$ (ou $T(\mathbf{V}) \rightarrow T(\mathbf{V})$) tal que:

- (i) se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\tilde{\alpha} = \alpha$;
- (ii) se $\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_k \in T_k(\mathbf{V})$, $k \geq 1$, $(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_k)^\tilde{\cdot} = \alpha_k \otimes \dots \otimes \alpha_1$;
- (iii) se $a, b \in \mathbb{R}$ e $\sigma, \tau \in T(\mathbf{V}^*)$ então $(a\sigma + b\tau)^\tilde{\cdot} = a\tilde{\sigma} + b\tilde{\tau}$;
- (iv) se $\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k$, $\tau_k \in T_k(\mathbf{V})$ então

$$\tilde{\tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\tau}_k, \quad (1.8)$$

onde $\tilde{\tau}$ é chamado de transposto de τ .

Definição 9. A composição da involução principal com a transposição, denotada pelo símbolo $-$ é chamada por alguns autores de conjugação e, $\bar{\tau}$ é chamado de conjugado de τ . Temos $\bar{\tau} = (\tilde{\tau})^\hat{\cdot} = (\hat{\tau})^\tilde{\cdot}$.

1.2 Produto interno em \mathbf{V} e \mathbf{V}^*

Definição 10. Uma correlação é uma aplicação linear $\tau : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}^*$. Uma correlação define naturalmente um 2-cotensor $\mathbf{g} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ através de

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \tau(\mathbf{v})(\mathbf{u}).$$

Se $\ker \tau = \{0\}$ a correlação é dita não-degenerada. Dizemos também que \mathbf{V} e o 2-cotensor \mathbf{g} são não-degenerados.

²Também chamado de reversão.

Definição 11. Um tensor métrico é um 2-cotensor \mathbf{g} que é simétrico e não-degenerado. Uma base $\{\mathbf{e}_k\}$ de \mathbf{V} é dita ortonormal se $\mathbf{g}(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k)$ é igual a $+1$ ou igual a -1 e $\mathbf{g}(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = 0$ para $j \neq k$. Temos

$$\mathbf{g}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{g}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = \mathfrak{g}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j = 1, 2, \dots, p, \\ -1 & \text{se } i = j = p + 1, p + 2, \dots, p + q, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad (1.9)$$

com $p + q = n$. A assinatura de \mathbf{g} é definida por q e por vezes dizemos que a métrica tem assinatura (p, q) . Denotamos $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ e chamamos o ponto \cdot de produto escalar ou produto interno em \mathbf{V} . O par (\mathbf{V}, \mathbf{g}) é chamado de espaço quadrático.

Considere a correlação $\# : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}^*$ dada por $\mathbf{V} \ni \mathbf{v} \mapsto \#\mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{v}, \cdot) \in \mathbf{V}^*$ tal que dado $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$, tenhamos

$$\#\mathbf{v}(\mathbf{w}) = \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad (1.10)$$

se \mathbf{g} é não-degenerado teremos que $\#$ é um isomorfismo. Dizemos que \mathbf{g} induz um isomorfismo natural entre \mathbf{V} e \mathbf{V}^* .

Definição 12. Uma métrica em \mathbf{V}^* é um 2-tensor $\mathbf{g} \in T^2(\mathbf{V})$, i.e., uma transformação $\mathbf{g} : \mathbf{V}^* \times \mathbf{V}^* \rightarrow \mathbb{R}$ que é simétrico e não-degenerado. Vamos introduzir um produto escalar em \mathbf{V}^* por

$$\alpha \cdot_{\mathbf{g}} \beta = \mathbf{g}(\alpha, \beta), \quad (1.11)$$

para $\alpha, \beta \in \mathbf{V}^*$, quando o tensor métrico envolvido na definição do produto escalar estiver claro pelo contexto, usaremos o símbolo \cdot ao invés de $\cdot_{\mathbf{g}}$.

Estaremos particularmente interessados numa métrica $\mathbf{g} \in T^2(\mathbf{V})$ tal que se $\{\varepsilon^k\}$ é a base de \mathbf{V}^* dual a uma base $\{\mathbf{e}_k\}$ de \mathbf{V} ($\varepsilon^k(\mathbf{e}_j) = \delta_j^k$), então

$$\mathbf{g}(\varepsilon^i, \varepsilon^j) = \mathbf{g}(\varepsilon^j, \varepsilon^i) = \mathfrak{g}^{ij}, \quad (1.12)$$

e $\mathfrak{g}^{ij} \mathfrak{g}_{jk} = \delta_k^i$, ou seja, a matriz com elementos \mathfrak{g}^{ij} é a inversa da matriz com elementos \mathfrak{g}_{ij} .

Seja $\flat = \#^{-1} : \mathbf{V}^* \rightarrow \mathbf{V}$, assim teremos $\flat : \mathbf{V}^* \ni \alpha \mapsto \flat\alpha = \mathbf{g}(\alpha, \cdot) \in \mathbf{V}$. Note ainda que $\alpha \cdot \beta = \mathbf{g}(\flat\alpha, \flat\beta)$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{g}(\#\mathbf{v}, \#\mathbf{w})$. Esses isomorfismos são chamados por alguns autores de *isomorfismos musicais*.

Definição 13. Seja $\{\varepsilon^k\}$ uma base de \mathbf{V}^* dual a uma base $\{\mathbf{e}_k\}$ de \mathbf{V} . Uma base $\{\mathbf{e}^k\}$ de \mathbf{V} é dita base recíproca de $\{\mathbf{e}_k\}$ se e somente se $\mathbf{e}^k = \flat\varepsilon^k$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$. E também, uma base $\{\varepsilon_k\}$ de \mathbf{V}^* é chamada de base recíproca de $\{\varepsilon^k\}$ se e somente se $\varepsilon_k = \#\mathbf{e}_k$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$.

Pode-se verificar facilmente que $\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^k$ e $\varepsilon^k \cdot \varepsilon_j = \delta_j^k$.

1.3 Álgebra Exterior, de Grassmann e de Clifford

Definição 14. A álgebra exterior de \mathbf{V} é a álgebra quociente

$$\bigwedge \mathbf{V} = \frac{T(\mathbf{V})}{I}, \quad (1.13)$$

onde $I \subset T(V)$ é o ideal bilateral³ em $T(V)$ gerado pelos elementos da forma $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$, com $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Os elementos de $\bigwedge \mathbf{V}$ serão chamados de multivetores⁴.

Seja $\pi : T(V) \rightarrow \bigwedge \mathbf{V}$ a projeção canônica de $T(V)$ sobre $\bigwedge \mathbf{V}$. A multiplicação em $\bigwedge \mathbf{V}$ será denotada por $\wedge : \bigwedge \mathbf{V} \rightarrow \bigwedge \mathbf{V}$, chamada de *produto exterior* e definida como:

Definição 15. Para $\pi(A), \pi(B) \in \bigwedge \mathbf{V}$,

$$\pi(A) \wedge \pi(B) := \pi(A \otimes B) = [A \otimes B], \quad (1.14)$$

onde $\otimes : T(V) \rightarrow T(V)$ é o produto tensorial usual.

A álgebra $\bigwedge \mathbf{V}$ é uma álgebra 2^n -dimensional associativa com unidade e \mathbb{Z} -graduada, i.e.,

$$\begin{aligned} \bigwedge \mathbf{V} &= \bigoplus_{r=0}^n \bigwedge^r \mathbf{V}, \\ \bigwedge^r \mathbf{V} \wedge \bigwedge^s \mathbf{V} &\subset \bigwedge^{r+s} \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

$r, s \geq 0$, onde $\bigwedge^r \mathbf{V} = \pi(T^r(\mathbf{V}))$ ($\bigwedge^0 \mathbf{V} = \mathbb{R}, \bigwedge^1 \mathbf{V} = \mathbf{V}, \bigwedge^r \mathbf{V} = \{0\}$ para $r > n$). Se $A \in \bigwedge^r \mathbf{V}$ dizemos que A é homogêneo e teremos

$$A \wedge B = (-1)^{rs} B \wedge A, \quad (1.16)$$

com, $\mathbf{B} \in \bigwedge^s \mathbf{V}$.

A álgebra $\bigwedge \mathbf{V}$ herda os operadores $\hat{\cdot}, \tilde{\cdot}, -$ da álgebra tensorial $T(\mathbf{V})$, e teremos

$$\begin{aligned} (AB)^\wedge &= \hat{A}\hat{B}, \\ (AB)^\sim &= \tilde{B}\tilde{A}, \\ (A)^- &= (\tilde{A})^\wedge = (\hat{A})^\sim \end{aligned} \quad (1.17)$$

para todo $A, B \in \bigwedge \mathbf{V}$, com $\hat{A} = A$ se $A \in \mathbb{R}$, $\hat{A} = -A$ se $A \in \mathbf{V}$ e $\tilde{A} = A$ se $A \in \mathbb{R}$ ou $A \in \mathbf{V}$.

Note que podemos fazer definições completamente análogas para \mathbf{V}^* , $\bigwedge \mathbf{V}^* = \frac{T(\mathbf{V}^*)}{I}$.

³Dada uma álgebra associativa \mathcal{A} , um ideal bilateral I é uma subálgebra de \mathcal{A} tal que para qualquer $a, b \in \mathcal{A}$ e $y \in I$, tem-se $ayb \in I$.

⁴Fazemos a mesma construção da álgebra exterior usando \mathbf{V}^* ao invés de \mathbf{V} , os elementos dessa álgebra serão chamados de *multiformas*.

1.3.1 Produto Escalar em $\bigwedge \mathbf{V}$, $\bigwedge \mathbf{V}^*$ e Álgebra de Grassmann

Suponhamos que \mathbf{V} e \mathbf{V}^* estejam equipados com os seguintes tensores métricos $\mathbf{g} \in T_2(\mathbf{V})$ e $\mathbf{g} \in T^2(\mathbf{V}^*)$ de assinatura (p, q) (com \mathbf{g} dada pela Eq.(1.12)). Usaremos estes tensores métricos para induzirmos um produto escalar em $\bigwedge \mathbf{V}$ e $\bigwedge \mathbf{V}^*$. Faremos para exemplificar em $\bigwedge \mathbf{V}^*$:

Definição 16. *O produto escalar em $\bigwedge \mathbf{V}^*$ é a aplicação linear $\cdot : \bigwedge \mathbf{V}^* \times \bigwedge \mathbf{V}^* \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$A \cdot B = \det(\mathbf{g}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)), \quad (1.18)$$

para elementos homogêneos $A = u_1 \wedge \dots \wedge u_r \in \bigwedge^r \mathbf{V}^*$ e $B = v_1 \wedge \dots \wedge v_r \in \bigwedge^r \mathbf{V}^*$, $u_i, v_i \in \mathbf{V}$, $i = 1, \dots, r$. Estendemos este produto por linearidade a todo $\bigwedge \mathbf{V}^*$ e temos a ortogonalidade $A \cdot B = 0$ se $\mathbf{A} \in \bigwedge^r \mathbf{V}^*$, $\mathbf{B} \in \bigwedge^s \mathbf{V}^*$, $r \neq s$. Note que teremos $a \cdot b = ab$ se $a, b \in \bigwedge^0 \mathbf{V}^* \equiv \mathbb{R}^5$.

Seja $\tau_{\mathbf{g}}$ uma orientação no espaço vetorial métrico $(\mathbf{V}^*, \mathbf{g})$ dada por n -vetor de volume $\tau_{\mathbf{g}} \in \bigwedge^n \mathbf{V}^*$ tal que

$$\tilde{\tau}_{\mathbf{g}} \cdot \tau_{\mathbf{g}} = (-1)^q. \quad (1.19)$$

Com isso podemos introduzir um isomorfismo natural entre os espaços $\bigwedge^r \mathbf{V}^*$ e $\bigwedge^{n-r} \mathbf{V}^*$ ($r = 0, \dots, n$).

Definição 17. *O operador estrela de Hodge (ou dual de Hodge) é a aplicação linear $\star : \bigwedge^r \mathbf{V}^* \rightarrow \bigwedge^{n-r} \mathbf{V}^*$ tal que*

$$A \wedge \star B = (A \cdot B) \tau_{\mathbf{g}}, \quad (1.20)$$

para todo $A, B \in \bigwedge^r \mathbf{V}^*$. Podemos estender esse operador para o isomorfismo $\star : \bigwedge \mathbf{V}^* \rightarrow \bigwedge \mathbf{V}^*$ por linearidade.

A inversa $\star^{-1} : \bigwedge^{n-r} \mathbf{V} \rightarrow \bigwedge^r \mathbf{V}$ do operador estrela de Hodge é dada por

$$\star^{-1} A = (-1)^{r(n-r)} \text{sgn } \mathbf{g} \star A, \quad (1.21)$$

para $A \in \bigwedge^{n-r} \mathbf{V}$ e onde $\text{sgn } \mathbf{g} = \det \mathbf{g} / |\det \mathbf{g}|$.

Contrações

Definição 18. *Para multivetores $X, Y, Z \in \bigwedge \mathbf{V}$ as contrações à esquerda (\lrcorner) e à direita (\llcorner) são as aplicações $\lrcorner : \bigwedge \mathbf{V} \times \bigwedge \mathbf{V} \rightarrow \bigwedge \mathbf{V}$ e $\llcorner : \bigwedge \mathbf{V} \times \bigwedge \mathbf{V} \rightarrow \bigwedge \mathbf{V}$ tais que*

$$\begin{aligned} (X_r \lrcorner Y_s) &= \langle X_r Y_s \rangle_{|r-s|}, \\ (X \lrcorner Y) \cdot Z &= Y \cdot (\tilde{X} \wedge Z), \\ (X \llcorner Y) \cdot Z &= X \cdot (Z \wedge \tilde{Y}). \end{aligned} \quad (1.22)$$

⁵Quando não houver risco de confusão denotaremos \cdot por $\cdot_{\mathbf{g}}$.

Onde $X = \sum_k X_k$ e $Y = \sum_k Y_k$, com $X_k = \langle X \rangle_k$ e $Y_k = \langle Y \rangle_k$. Por vezes as contrações (\lrcorner) e (\llcorner) são chamadas de produto interior. Munindo o espaço vetorial $\bigwedge \mathbf{V}$ com todas essas estruturas, podemos fazer a seguinte definição. Definições completamente análogas são feitas para \mathbf{V}^* .

Definição 19. Chamamos de álgebra de Grassman de multivetores a estrutura algébrica $(\bigwedge \mathbf{V}, \wedge, \lrcorner, \llcorner)$, que será simplesmente denotada por $(\bigwedge \mathbf{V}, \mathbf{g})$.

Temos as seguintes propriedades:

(i) Para $a, b \in \mathbb{R}$, e $Y \in \bigwedge \mathbf{V}$

$$\begin{aligned} a \lrcorner b &= a \llcorner b = ab, \\ a \lrcorner Y &= a \llcorner Y = aY. \end{aligned} \tag{1.23}$$

(ii) Para $a, b_1, \dots, b_k \in \mathbf{V}$

$$a \lrcorner (b_1 \wedge \dots \wedge b_k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} (a \cdot b_j) b_1 \wedge \dots \wedge \hat{b}_j \wedge \dots \wedge b_k, \tag{1.24}$$

(iii) Para $Y_k \in \bigwedge^k \mathbf{V}$ e $Y_j \in \bigwedge^j \mathbf{V}$ com $j \leq k$

$$Y_j \lrcorner Y_k = (-1)^{j(k-j)} Y_k \llcorner Y_j. \tag{1.25}$$

(iv) Para $Y_k \in \bigwedge^k \mathbf{V}$ e $Y_j \in \bigwedge^j \mathbf{V}$

$$\begin{aligned} Y_j \lrcorner Y_k &= 0, \text{ se } j > k, \\ Y_j \llcorner Y_k &= 0, \text{ se } j < k. \end{aligned} \tag{1.26}$$

1.3.2 Álgebras de Clifford

A cada espaço vetorial \mathbf{V} n -dimensional, munido de um produto interno (2-cotensor simétrico e não-degenerado) está associado uma única álgebra de Clifford, da seguinte maneira:

Definição 20. A álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ de um espaço vetorial (\mathbf{V}, \mathbf{g}) dotado de uma métrica \mathbf{g} é definida como a álgebra quociente

$$\mathcal{Cl}(\mathbf{V}, \mathbf{g}) = \frac{T(\mathbf{V})}{I_{\mathbf{g}}}, \tag{1.27}$$

onde $I_{\mathbf{g}} \subset T(\mathbf{V})$ é o ideal bilateral de $T(\mathbf{V})$ gerado pelos elementos da forma $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} - 2\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{1}$, com $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Os elementos de $\mathcal{Cl}(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ so, por vezes, chamados de “nmeros de Clifford”.

Álgebras de Clifford geradas por formas bilineares (2-cotensores) simétricas são normalmente chamadas de *ortogonais*, de forma a distinguir das álgebras de Clifford *simpléticas*, que são geradas por formas bilineares anti-simétricas.

Seja \mathbf{q} a forma quadrática associada a forma bilinear simétrica \mathbf{g} , ou seja, $\mathbf{q} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}; \mathbf{q}(\mathbf{v}) = \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Considere também $I_{\mathbf{q}}$ o ideal bilateral de $T(\mathbf{V})$ gerado pelos elementos da forma $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{q}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{1}$, para $\mathbf{v} \in \mathbf{V} = T^1(\mathbf{V})$; note que teremos $I_{\mathbf{q}} = I_{\mathbf{g}}$. Então podemos denotar $\mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{q}) = \mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{g}) = \frac{T(\mathbf{V})}{I_{\mathbf{q}}}$.

Seja $\pi_{\mathbf{g}} : T(\mathbf{V}) \rightarrow \mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ a projeção canônica de $T(\mathbf{V})$ sobre $\mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{g})$. A multiplicação em $\mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ será denotada por justaposição e chamada de *produto de Clifford*, da seguinte maneira:

Definição 21. Para $A, B \in \mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{g})$,

$$\pi_{\mathbf{g}}(A)\pi_{\mathbf{g}}(B) := \pi_{\mathbf{g}}(A \otimes B) = [A \otimes B], \quad (1.28)$$

onde $\otimes : T(\mathbf{V}) \rightarrow T(\mathbf{V})$ é o produto tensorial usual.

Note que \mathbf{V} está naturalmente mergulhado em $T(\mathbf{V})$, basta identificar o vetor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ com o elemento $i(\mathbf{v}) = (0, \mathbf{v}, \dots, 0, \dots) \in T(\mathbf{V})$. Se considerarmos $i_{\mathbf{q}} = \pi_{\mathbf{q}} \circ i$, temos \mathbf{V} mergulhado em $\mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{q})$, pois note que a aplicação $i_{\mathbf{q}}$ é injetora. Assim, identificamos \mathbf{V} com $i_{\mathbf{q}}(\mathbf{V})$ em $\mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{q})$ ($\mathbf{V} \equiv i_{\mathbf{q}}(\mathbf{V})$).

Note também que $\mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{q}), \mathbf{q} \equiv 0$ é $\wedge \mathbf{V}$ a álgebra exterior de \mathbf{V} .

1.3.3 Propriedade Universal das Álgebras de Clifford

Proposição 22. Se \mathcal{A} é uma álgebra associativa com unidade sobre um corpo \mathbb{K} (aqui vamos trabalhar apenas com \mathbb{R}), então toda aplicação linear $\phi : \mathbf{V} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $(\phi(\mathbf{v}))^2 = \mathbf{q}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{1}, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ pode ser estendida de maneira única a um homomorfismo $\Phi : \mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{q}) \rightarrow \mathcal{A}$

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{q}) & \\ i_{\mathbf{q}} \uparrow & \searrow \Phi & \\ & \mathbf{V} \xrightarrow{\phi} & \mathcal{A} \end{array} \quad (1.29)$$

Demonstração. Toda aplicação linear $\phi : \mathbf{V} \rightarrow \mathcal{A}$ pode ser estendida a um único homomorfismo $\phi' : T(\mathbf{V}) \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $\phi'(\mathbf{v}) = \phi(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Basta tomar

$$\phi'(\mathbf{v}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_{i_r}) = \phi(\mathbf{v}_{i_1}) \dots \phi(\mathbf{v}_{i_r}), \text{ e } \phi'(1) = 1 \quad (1.30)$$

e estender por linearidade. Observe que $I_{\mathbf{q}} \subset \ker \phi'$ pois $\phi'(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - I_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{1}) = \phi'(\mathbf{v}) \otimes \phi'(\mathbf{v}) - I_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}) \cdot \phi'(1) = \phi(\mathbf{v}) \cdot \phi(\mathbf{v}) - I_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}) \cdot 1 = I_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}) \cdot 1 - I_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}) \cdot 1 = 0$, logo ϕ' induz um homomorfismo sobrejetor

$$\begin{array}{l} \Phi : \mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{q}) = \frac{T(\mathbf{V})}{I_{\mathbf{q}}} \rightarrow \mathcal{A}, \\ [A] \mapsto \phi'(A). \end{array} \quad (1.31)$$

E assim está provada a proposição. ■

Suponha que \mathcal{C} é uma álgebra associativa com unidade sobre um corpo \mathbb{K} e $j : \mathbf{V} \rightarrow \mathcal{B}$ um mergulho com a propriedade de que toda aplicação linear $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathcal{A}$ (\mathcal{A} uma álgebra associativa com unidade sobre um corpo \mathbb{K}), tal que $(f(\mathbf{v}))^2 = \mathbf{q}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{1}, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ estenda a um único homomorfismo $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$. Então o isomorfismo entre $i_{\mathbf{q}}(\mathbf{V}) \subset \mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{q})$ e $j(\mathbf{V}) \subset \mathcal{C}$ induz um isomorfismo entre $\mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{q})$ e \mathcal{C} .

1.3.4 Propriedades

Seja $\mathcal{C}l^0(\mathbf{V}, \mathbf{q})$ a imagem de $\bigoplus_{k=0}^{\infty} T^{2k}(\mathbf{V})$ em $\mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{q})$ através de $\pi_{\mathbf{q}}$ (projeção canônica); e seja $\mathcal{C}l^1(\mathbf{V}, \mathbf{q})$ a imagem de $\bigoplus_{k=0}^{\infty} T^{2k+1}(\mathbf{V})$ em $\mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{q})$ através de $\pi_{\mathbf{q}}$. Tal decomposição define $\mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{q})$ como uma álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada, i.e.,

$$(i) \quad \mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{q}) = \mathcal{C}l^0(\mathbf{V}, \mathbf{q}) \oplus \mathcal{C}l^1(\mathbf{V}, \mathbf{q}),$$

$$(ii) \quad \text{Se } A \in \mathcal{C}l^i(\mathbf{V}, \mathbf{q}), B \in \mathcal{C}l^j(\mathbf{V}, \mathbf{q}) \text{ então } AB \in \mathcal{C}l^k(\mathbf{V}, \mathbf{q}) \text{ tal que } k = (i + j) \bmod 2.$$

Os elementos de $\mathcal{C}l^0(\mathbf{V}, \mathbf{q})$ formam uma subálgebra de $\mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{q})$ chamada de *subálgebra par* de $\mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{q})$, por vezes denotada por $\mathcal{C}l^+(\mathbf{V}, \mathbf{q})$. Os elementos de $\mathcal{C}l^1(\mathbf{V}, \mathbf{q})$ são chamados ímpares, note que $\mathcal{C}l^1(\mathbf{V}, \mathbf{q})$ não é uma subálgebra, por vezes denotada por $\mathcal{C}l^-(\mathbf{V}, \mathbf{q})$. Podemos definir as seguintes aplicações:

Definição 23. Involução Principal: *É um automorfismo α em $\mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{q})$ construído a partir de $i_{\mathbf{q}} : \mathbf{V} \rightarrow \mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{q})$, onde $\alpha(\mathbf{v}) = -i_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Note que $(\alpha(\mathbf{v}))^2 = \mathbf{q}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{1}$, assim pela Prop.(22) podemos estender $\alpha : \mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{q}) \rightarrow \mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{q})$. Temos $\alpha(A) = A$ se $A \in \mathcal{C}l^0(\mathbf{V}, \mathbf{q})$ e $\alpha(B) = -B$ se $B \in \mathcal{C}l^1(\mathbf{V}, \mathbf{q})$. Denotamos $\alpha(A) = \hat{A}$. Note que a graduação em $\mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{q})$ pode ser definida em termos de $\hat{}$*

$$\mathcal{C}l^i(\mathbf{V}, \mathbf{q}) = \{A \in \mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{q}); \hat{A} = (-1)^i A, i = 0, 1\}. \quad (1.32)$$

Definição 24. Transposição: *É um antiautomorfismo em $\mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{q})$ definido a partir da transposição definida em $T(\mathbf{V})$ (Def.(8)). Note que $A \in I_{\mathbf{q}} \Rightarrow \tilde{A} \in I_{\mathbf{q}}$. Portanto podemos definir $(\pi_{\mathbf{q}}(A))^\sim = \pi_{\mathbf{q}}(\tilde{A})$.*

Definição 25. Conjugação: *É um antiautomorfismo em $\mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ definido como a composição da involução principal com a transposição, denotada pelo símbolo $-$. Temos $\bar{\tau} = (\tilde{A})^\wedge = (\hat{A})^\sim$.*

Uma consequência indireta da universalidade é que $\mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{q})$ é isomorfa, como espaço vetorial sobre \mathbb{R} , à álgebra de Grassmann $(\bigwedge \mathbf{V}, \mathbf{g})$. Existe um mergulho natural ([27] pág.10) $\bigwedge \mathbf{V} \hookrightarrow \mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{g})$. Então $\mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ é um espaço vetorial 2^n -dimensional sobre \mathbb{R} e dado $A \in \mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ podemos escrever:

$$A = \sum_{r=0}^n \langle A \rangle_r, \quad (1.33)$$

com $\langle A \rangle_r \in \bigwedge \mathbf{V} \hookrightarrow \mathcal{C}l(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ a projeção de A em $\bigwedge^r \mathbf{V}$.

O produto de Clifford satisfaz: [15]:

(i) $\forall a \in \mathbb{R} \text{ e } Y \in \bigwedge \mathbf{V} \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(\mathbf{V}, \mathbf{g}) \Rightarrow aY = Ya$

(ii) $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(\mathbf{V}, \mathbf{g}) \text{ e } Y \in \bigwedge \mathbf{V} \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ teremos

$$\mathbf{v}Y = \mathbf{v} \lrcorner Y + \mathbf{v} \wedge Y \text{ e } Y\mathbf{v} = Y \lrcorner \mathbf{v} + Y \wedge \mathbf{v}. \quad (1.34)$$

(iii) $\forall X, Y, Z \in \bigwedge \mathbf{V} \Rightarrow X(YZ) = (XY)Z$.

Se o espaço vetorial $(\mathbf{V}^*, \mathbf{g})$ é orientado por $\tau_{\mathbf{g}}$, podemos estender o operador estrela de Hodge definido para a álgebra de Grassmann para a álgebra $\mathcal{C}\ell(\mathbf{V}^*, \mathbf{g})$, tomando $\star : \mathcal{C}\ell(\mathbf{V}^*, \mathbf{g}) \rightarrow \mathcal{C}\ell(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ dada por

$$\star A = \sum_r \star \langle A \rangle_r. \quad (1.35)$$

De forma que com algum trabalho conseguimos as seguintes propriedades ([47] pág. 33):

Para $A_r \in \bigwedge^r \mathbf{V}$ e $B_s \in \bigwedge^s \mathbf{V}$, $r, s \geq 0$:

$$\begin{aligned} A_r \wedge (\star B_s) &= B_s \wedge (\star A_r); & r = s, \\ A_r \cdot (\star B_s) &= B_s \cdot (\star A_r); & r + s = n, \\ A_r \wedge (\star B_s) &= (-1)^{r(s-1)} \star (\tilde{A}_r \lrcorner B_s); & r \leq s, \\ A_r \lrcorner (\star B_s) &= (-1)^{rs} \star (\tilde{A}_r \wedge B_s); & r + s \leq n, \\ \star A_r &= \tilde{A}_r \lrcorner \tau_{\mathbf{g}} = \tilde{A}_r \tau_{\mathbf{g}}, \\ \star \tau_{\mathbf{g}} &= \text{sgn} \hat{\mathbf{g}}; & \star 1 = \tau_{\mathbf{g}}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Proposição 26. Se $\{\mathbf{e}_i\}; i = 1, \dots, n$ é uma base de \mathbf{V} , identificamos $\pi_{\mathbf{q}}(\mathbf{V}) \equiv \mathbf{V}$ e $\pi_{\mathbf{q}}(\mathbf{e}_i) \equiv \mathbf{e}_i$, então $\mathbf{1}$ com os produtos $\mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_k}; 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ formam um conjunto de geradores para o espaço linear $\mathcal{C}\ell(\mathbf{V}, \mathbf{q})$.

Demonstração. Um elemento de $\mathcal{C}\ell(\mathbf{V}, \mathbf{q}) = \mathcal{C}\ell(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ é uma soma finita de termos da forma $i_{\mathbf{q}}(\varphi^{i_1 \dots i_k} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_k})$. Em $\mathcal{C}\ell(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ teremos $\mathbf{e}_{i_j} \mathbf{e}_{i_{j+1}} = \mathbf{e}_{i_{j+1}} \mathbf{e}_{i_j} + 2\mathbf{g}(\mathbf{e}_{i_j}, \mathbf{e}_{i_{j+1}}) \cdot \mathbf{1}$ e $\mathbf{e}_{i_j} \mathbf{e}_{i_j} = \mathbf{q}(\mathbf{e}_{i_j}) \cdot \mathbf{1}$, logo, qualquer sequência $\mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_k}$ pode ser reordenada de modo que nenhum termo repetido apareça e $i_{\mathbf{q}}(\mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_k}) = \mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_k}$. ■

Corolário 27. Se $\{\mathbf{e}_i\}; i = 1, \dots, n$ é uma base ortogonal de \mathbf{V} então $\mathcal{C}\ell(\mathbf{V}, \mathbf{q})$ é gerada por $\mathbf{1}$ e \mathbf{e}_i sujeito às relações

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i &= \mathbf{q}(\mathbf{e}_{i_j}) \cdot \mathbf{1}, \\ \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j &= -\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i, i \neq j. \end{aligned} \quad (1.37)$$

1.3.5 Extensores

Seja \mathbf{W} um subespaço arbitrário de $\bigwedge \mathbf{V}$. Considere os seguintes subespaços arbitrários $\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_m$ de $\bigwedge \mathbf{V}$

Definição 28. Uma aplicação multilinear $t : \mathbf{W}_1 \times \dots \times \mathbf{W}_m \rightarrow \mathbf{W}$ é chamada de um *extensor sobre \mathbf{V}* [47].

1.3.6 (p, q) -Extensores

Definição 29. *Sejam $p, q \in \mathbb{N}$ com $0 \leq p, q \leq n$. Um extensor \mathbf{V} com domínio $\bigwedge^p \mathbf{V}$ e contradomínio $\bigwedge^q \mathbf{V}$ é chamado de um (p, q) -extensor sobre \mathbf{V} . O espaço vetorial real dos (p, q) -extensores sobre \mathbf{V} é denotado por $\text{ext}(\bigwedge^p \mathbf{V}, \bigwedge^q \mathbf{V})$.*

Note que se $\dim \mathbf{V} = n$ então $\dim \text{ext}(\bigwedge^p \mathbf{V}, \bigwedge^q \mathbf{V}) = \binom{n}{p} \binom{n}{q}$.

1.3.7 Classificação das Álgebras de Clifford Reais

Se \mathbf{V} é um espaço vetorial real n -dimensional munido de um produto interno (forma bilinear simétrica não-degenerada), $\mathbf{g} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$, então existe uma base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ de \mathbf{V} tal que $\mathbf{g}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = \mathbf{q}(\mathbf{e}_i) = \pm 1$ e $\mathbf{g}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ para $i \neq j$.

Definição 30. *Seja $\mathbb{R}^{p,q}$ ($p + q = n$) o espaço vetorial \mathbb{R}^n munido de um tensor métrico \mathbf{g} de assinatura (p, q) . Denotaremos por $\mathbb{R}_{p,q} = \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{p,q}, \mathbf{g})$ a álgebra de Clifford de $\mathbb{R}^{p,q}$.*

Veremos agora que as álgebras de Clifford $\mathbb{R}_{p,q}$ são isomorfas a álgebras de matrizes sobre \mathbb{R}, \mathbb{C} ou \mathbb{H} , reais, complexos e quatérnios, respectivamente.

Proposição 31. *Seja $\mathbb{K}(n)$ a álgebra das matrizes $n \times n$ sobre \mathbb{K} , então,*

$$\begin{aligned} \text{i) } \mathbb{R}_{1,0} &\simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & \text{ii) } \mathbb{R}_{0,1} &\simeq \mathbb{C}, & \text{iii) } \mathbb{R}_{2,0} &\simeq \mathbb{R}(2), \\ \text{iv) } \mathbb{R}_{0,2} &\simeq \mathbb{H}, & \text{v) } \mathbb{R}_{1,1} &\simeq \mathbb{R}(2). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Demonstração. *i)* Se \mathbf{e}_1 é base de \mathbb{R} , $\{\mathbf{1}, \mathbf{e}_1\}$ com $\mathbf{e}_1^2 = 1$ é uma base de $\mathbb{R}_{1,0}$. Assim definimos o isomorfismo $\mathbb{R}_{1,0} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &\mapsto (1, 1), \\ \mathbf{e}_1 &\mapsto (1, -1), \end{aligned} \quad (1.39)$$

onde identificamos $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = (\mathbb{R} \cup \{0\}) \oplus (\{0\} \cup \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$,

ii) Se \mathbf{e}_1 é base de \mathbb{R} , $\{\mathbf{1}, \mathbf{e}_1\}$ com $\mathbf{e}_1^2 = -1$ é uma base de $\mathbb{R}_{0,1}$. Assim definimos o isomorfismo $\mathbb{R}_{0,1} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &\mapsto 1, \\ \mathbf{e}_1 &\mapsto \mathbf{i}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

iii) Se $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ é base de \mathbb{R}^2 , $\{\mathbf{1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\}$ com $\mathbf{e}_i^2 = 1, i = 1, 2$ e $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$ é uma base de $\mathbb{R}_{2,0}$. Assim definimos o isomorfismo $\mathbb{R}_{2,0} \rightarrow \mathbb{R}(2)$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathbf{e}_1 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{e}_2 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

iv) Se $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ é base de \mathbb{R}^2 , $\{\mathbf{1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\}$ com $\mathbf{e}_i^2 = -1, i = 1, 2$ e $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$ é uma base de $\mathbb{R}_{0,2}$. Assim definimos o isomorfismo $\mathbb{R}_{2,0} \rightarrow \mathbb{H}$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &\mapsto 1, & \mathbf{e}_1 &\mapsto \mathbf{i}, \\ \mathbf{e}_2 &\mapsto \mathbf{j}, & \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 &\mapsto \mathbf{k} = \mathbf{ij}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

v) Se $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ é base de \mathbb{R}^2 , $\{\mathbf{1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\}$ com $\mathbf{e}_1^2 = 1, \mathbf{e}_2^2 = -1$ e $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$ é uma base de $\mathbb{R}_{1,1}$. Assim definimos o isomorfismo $\mathbb{R}_{1,1} \rightarrow \mathbb{R}(2)$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathbf{e}_1 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{e}_2 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

E a proposição está provada. ■

Teorema 32.

- i) $\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(m) \simeq \mathbb{R}(m \cdot n), \forall n, m \in \mathbb{N}$,
- ii) $\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K} \simeq \mathbb{K}(n); \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C} \text{ ou } \mathbb{H}, \forall n \in \mathbb{N}$,
- iii) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, iv) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathbb{C}(2)$, v) $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathbb{R}(4)$.

Demonstração. Para demonstração, consulte a pág. 189 de [39]. ■

Teorema 33.

- i) $\mathbb{R}_{n,0} \otimes \mathbb{R}_{0,2} \simeq \mathbb{R}_{0,n+2}$,
- ii) $\mathbb{R}_{0,n} \otimes \mathbb{R}_{2,0} \simeq \mathbb{R}_{n+2,0}$,
- iii) $\mathbb{R}_{p,q} \otimes \mathbb{R}_{1,1} \simeq \mathbb{R}_{p+1,q+1}$.

Demonstração. i) Seja $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n+2}\}$ uma base ortogonal de \mathbb{R}^{n+2} com produto interno tal que $\mathbf{q}(\mathbf{e}_i) = -1, i = 1, \dots, n+2$. Considere $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ os geradores básicos ortogonais de $\mathbb{R}_{n,0}$ com produto interno tal que $\mathbf{q}'(\mathbf{e}_i) = 1, i = 1, \dots, n$ e $\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2$ os geradores básicos ortogonais de $\mathbb{R}_{0,2}$ com produto interno tal que $\mathbf{q}''(\mathbf{e}_i) = -1, i = 1, 2$. Defina

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^{n+2} &\rightarrow \mathbb{R}_{n,0} \otimes \mathbb{R}_{0,2} \text{ por} \\ \phi(\mathbf{e}_i) &= \begin{cases} \mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}''_1 \mathbf{e}''_2 & \text{para } 1 \leq i \leq n, \\ \mathbf{1} \otimes \mathbf{e}''_{i-n} & \text{para } i = n+1, n+2. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.46)$$

Temos $(\phi(\mathbf{e}_i))^2 = \mathbf{q}(\mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ para $i = 1, \dots, n+2$. Estendendo por linearidade temos $(\phi(\mathbf{v}))^2 = \mathbf{q}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+2}$. Logo pela propriedade universal Prop.(22), ϕ se estende ao homomorfismo $\tilde{\phi} : \mathbb{R}_{0,n+2} \rightarrow \mathbb{R}_{n,0} \otimes \mathbb{R}_{0,2}$. Como $\tilde{\phi}$ leva um conjunto de geradores de $\mathbb{R}_{0,n+2}$ a um conjunto de geradores de $\mathbb{R}_{n,0} \otimes \mathbb{R}_{0,2}$ e $\dim(\mathbb{R}_{0,n+2}) = \dim(\mathbb{R}_{n,0} \otimes \mathbb{R}_{0,2})$ temos que $\tilde{\phi}$ é um isomorfismo.

ii) Análogo a i).

iii) Seja $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{p+1}, \bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_{q+1}\}$ uma base ortogonal de \mathbb{R}^{p+q+2} com produto interno tal que $\mathbf{q}(\mathbf{e}_i) = 1, i = 1, \dots, p+1$ e $\mathbf{q}(\bar{\mathbf{e}}_j) = -1, j = 1, \dots, q+1$. Sejam $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n; \bar{\mathbf{e}}'_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}'_n$ e $\mathbf{e}''_1, \bar{\mathbf{e}}''_1$ os geradores de $\mathbb{R}_{p,q}$ e $\mathbb{R}_{1,1}$ respectivamente. Defina

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^{p+q+2} &\rightarrow \mathbb{R}_{p,q} \otimes \mathbb{R}_{1,1} \text{ por} \\ \phi(\mathbf{e}_i) &= \begin{cases} \mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}''_1 \bar{\mathbf{e}}''_1 & \text{para } 1 \leq i \leq p, \\ \mathbf{1} \otimes \mathbf{e}''_1 & \text{para } i = p+1. \end{cases} \\ \phi(\bar{\mathbf{e}}_j) &= \begin{cases} \bar{\mathbf{e}}'_j \otimes \mathbf{e}''_1 \bar{\mathbf{e}}''_1 & \text{para } 1 \leq j \leq q, \\ \mathbf{1} \otimes \bar{\mathbf{e}}''_1 & \text{para } j = q+1. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.47)$$

Estendendo por linearidade temos $(\phi(\mathbf{v}))^2 = \mathbf{q}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{p+q+2}$. Logo pela propriedade universal Prop.(22) ϕ se estende ao homomorfismo $\tilde{\phi} : \mathbb{R}_{p+1,q+1} \rightarrow \mathbb{R}_{p,q} \otimes \mathbb{R}_{1,1}$ e como no caso acima o resultado segue. ■

Se usarmos os isomorfismos do Teorema (33) repetidas vezes teremos o seguinte corolário, que classifica todas as álgebras de Clifford reais.

Corolário 34. (Periodicidade) Para $n \geq 0$ existem isomorfismos

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \mathbb{R}_{n+8,0} &\simeq \mathbb{R}_{n,0} \otimes \mathbb{R}_{8,0}, \\ \text{ii)} \quad \mathbb{R}_{0,n+8} &\simeq \mathbb{R}_{0,n} \otimes \mathbb{R}_{0,8}, \\ \text{iii)} \quad \mathbb{R}_{p,q+8} &\simeq \mathbb{R}_{p,q} \otimes \mathbb{R}_{0,8}, \end{aligned} \quad (1.48)$$

onde $\mathbb{R}_{0,8} \simeq \mathbb{R}_{8,0} \simeq \mathbb{R}(16)$.

Podemos reunir esses resultados na tabela a seguir (onde $\mu = [n/2]$ significa a parte inteira de $n/2$):

$p - q$ mod 8	0	1	2	3	4	5	6	7
		$\mathbb{R}(2^\mu)$				$\mathbb{H}(2^{\mu-1})$		
$\mathbb{R}_{p,q}$	$\mathbb{R}(2^\mu)$	\oplus	$\mathbb{R}(2^\mu)$	$\mathbb{C}(2^\mu)$	$\mathbb{H}(2^{\mu-1})$	\oplus	$\mathbb{H}(2^{\mu-1})$	$\mathbb{C}(2^\mu)$
		$\mathbb{R}(2^\mu)$				$\mathbb{H}(2^{\mu-1})$		

Tabela 1. Representação das álgebras Clifford $\mathbb{R}_{p,q}$ como álgebras de matrizes.

1.3.8 Classificação das Álgebras de Clifford Complexas

Definição 35. Seja \mathbf{V} um espaço vetorial sobre \mathbb{R} tal que $\dim_{\mathbb{R}} \mathbf{V} = 2m = n$. Uma aplicação linear

$$\mathbf{J} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}, \quad (1.49)$$

tal que

$$\mathbf{J}^2 = -Id_{\mathbf{V}}, \quad (1.50)$$

é chamada de uma aplicação estrutura complexa.

Definição 36. Seja \mathbf{V} como na definição anterior. O par (\mathbf{V}, \mathbf{J}) é chamado de estrutura de espaço vetorial complexo, denotado por $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}$, se

$$z\mathbf{v} = (a + ib)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{J}\mathbf{v}, \quad (1.51)$$

onde $z \in \mathbb{C}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Teremos $\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{V}_{\mathbb{C}} = m$.

Definição 37. Uma complexificação de \mathbf{V} é uma estrutura complexa associada com o espaço vetorial real $\mathbf{V} \oplus \mathbf{V}$, onde $\mathbf{J}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (-\mathbf{w}, \mathbf{v})$. O espaço vetorial complexo resultante é denotado por $\mathbf{V}^{\mathbb{C}}$. Tome $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$, elementos de $\mathbf{V}^{\mathbb{C}}$ são normalmente denotados por $\mathbf{c} = \mathbf{v} + i\mathbf{w}$, e se $\mathbb{C} \ni z = a + ib$ teremos

$$z\mathbf{c} = (a\mathbf{v} - b\mathbf{w}) + i(b\mathbf{v} + a\mathbf{w}), \quad (1.52)$$

claramente, temos que $\dim_{\mathbb{C}} \mathbf{V}^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{V}$. Podemos notar ainda que $\mathbb{C} \otimes \mathbf{V} \simeq \mathbf{V}^{\mathbb{C}}$ onde o isomorfismo é dado por $z \otimes \mathbf{v} \mapsto z\mathbf{v}$. Dada uma forma bilinear simétrica \mathbf{g} em \mathbf{V} , definimos a sua extensão $\mathbf{g}^{\mathbb{C}}$ para $\mathbf{V}^{\mathbb{C}}$ como

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{\mathbb{C}}(\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 + i\mathbf{w}_2) &= (\mathbf{g}(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) - \mathbf{g}(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2)) + i(\mathbf{g}(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2) + \mathbf{g}(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1)), \\ \mathbf{g}^{\mathbb{C}}(\mathbf{v}_1 \otimes z_1, \mathbf{v}_2 \otimes z_2) &= \mathbf{g}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \otimes z_1 z_2. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Proposição 38. Seja o par (\mathbf{V}, \mathbf{g}) um espaço quadrático sobre \mathbb{R} e $\mathcal{Cl}(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ a sua álgebra de Clifford real. Considere a álgebra de Clifford complexa $\mathcal{Cl}(\mathbf{V}^{\mathbb{C}}, \mathbf{g}^{\mathbb{C}})$ para o espaço quadrático complexificado $(\mathbf{V}^{\mathbb{C}}, \mathbf{g}^{\mathbb{C}})$. Então

$$\mathcal{Cl}(\mathbf{V}^{\mathbb{C}}, \mathbf{g}^{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}(\mathbf{V}, \mathbf{g}). \quad (1.54)$$

Demonstração. Defina $\phi : \mathbb{C} \otimes \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ de forma que tenhamos $\phi(a \otimes \mathbf{v}) = a \otimes \mathbf{v}$, onde subentendemos que $\mathbf{v} = i_{\mathbf{g}}(\mathbf{v})$ do lado direito dessa equação. Assim $(\phi(a \otimes \mathbf{v}))^2 = (a \otimes \mathbf{v})(a \otimes \mathbf{v}) = aa \otimes \mathbf{v}\mathbf{v} = \mathbf{g}^{\mathbb{C}}(a \otimes \mathbf{v}, a \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$. Logo pela propriedade universal Prop.(22), ϕ se estende ao homomorfismo $\tilde{\phi} : \mathcal{Cl}(\mathbf{V}^{\mathbb{C}}, \mathbf{g}^{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}(\mathbf{V}, \mathbf{g})$. Como $\tilde{\phi}$ leva um conjunto de geradores de $\mathcal{Cl}(\mathbf{V}^{\mathbb{C}}, \mathbf{g}^{\mathbb{C}})$ a um conjunto de geradores de $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ e $\dim(\mathcal{Cl}(\mathbf{V}^{\mathbb{C}}, \mathbf{g}^{\mathbb{C}})) = \dim(\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}(\mathbf{V}, \mathbf{g}))$ temos que $\tilde{\phi}$ é um isomorfismo. ■

Definição 39. Seja $\mathbb{C}^{p,q} = \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}^{p,q} = (\mathbb{R}^{p,q})^{\mathbb{C}}$. Denotamos $\mathbb{C}_{p,q} = \mathcal{Cl}(\mathbb{C}^{p,q}, \mathbf{g}^{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{p,q}, \mathbf{g}) = \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}_{p,q}$.

A seguir veremos que as álgebras de Clifford complexas dependem apenas da paridade de $n = p + q$. Denotaremos portanto $\mathbb{C} \otimes \mathbb{R}_{p,q} \simeq \mathbb{C}_{p,q} = \mathbb{C}_n$ ⁷.

Se $n = 2k$ é par, $p - q = 0, 2, 4, 6$

$$\begin{aligned} p - q = 0 \pmod{8}, \mathbb{C}_{p,q} &\simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}_{p,q} \simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(2^k) \simeq \mathbb{C}(2^k), \\ p - q = 2 \pmod{8}, \mathbb{C}_{p,q} &\simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}_{p,q} \simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(2^k) \simeq \mathbb{C}(2^k), \\ p - q = 4 \pmod{8}, \mathbb{C}_{p,q} &\simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}_{p,q} \simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{H}(2^{k-1}) \simeq \mathbb{C}(2^k), \\ p - q = 6 \pmod{8}, \mathbb{C}_{p,q} &\simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}_{p,q} \simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{H}(2^{k-1}) \simeq \mathbb{C}(2^k). \end{aligned} \quad (1.55)$$

⁷Note que esta construção poderia ser simplificada consideravelmente, se tivéssemos notado que que todas as formas quadráticas não degeneradas em \mathbb{C}^n são equivalentes [27] (pág.27).

Se $n = 2k + 1$ é ímpar, $p - q = 1, 3, 5, 7$

$$\begin{aligned}
p - q = 1 \pmod 8, \mathbb{C}_{p,q} &\simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}_{p,q} \simeq \mathbb{C} \otimes (\mathbb{R}(2^k) \oplus \mathbb{R}(2^k)) \simeq \mathbb{C}(2^k) \oplus \mathbb{C}(2^k), \\
p - q = 3 \pmod 8, \mathbb{C}_{p,q} &\simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}_{p,q} \simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}(2^k) \simeq \mathbb{C}(2^k) \oplus \mathbb{C}(2^k), \\
p - q = 5 \pmod 8, \mathbb{C}_{p,q} &\simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}_{p,q} \simeq \mathbb{C} \otimes (\mathbb{H}(2^{k-1}) \oplus \mathbb{H}(2^{k-1})) \simeq \mathbb{C}(2^k) \oplus \mathbb{C}(2^k), \\
p - q = 7 \pmod 8, \mathbb{C}_{p,q} &\simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}_{p,q} \simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}(2^k) \simeq \mathbb{C}(2^k) \oplus \mathbb{C}(2^k).
\end{aligned} \tag{1.56}$$

Dessa forma, para as álgebras de Clifford complexas teremos

n par	$\mathbb{C}_{2k} = \mathbb{C}(2^k)$
n ímpar	$\mathbb{C}_{2k+1} = \mathbb{C}(2^k) \oplus \mathbb{C}(2^k)$

Tabela 2. Representação das álgebras Clifford \mathbb{C}_n como álgebras de matrizes.

1.4 Representações, Idempotentes e Ideais Minimais de $\mathbb{R}_{p,q}$

Definição 40. *Um álgebra associativa \mathcal{A} é simples se os únicos ideais bilaterais são $\{0\}$ e \mathcal{A} .*

Definição 41. *Um elemento $e \in \mathcal{A}$ é chamado idempotente se $e^2 = e$. Um idempotente é dito primitivo se não puder ser escrito como a soma de dois idempotentes ortogonais não-nulos, i. e., $e \neq e_1 + e_2$, com $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$ e $e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2$.*

Definição 42. *Agora, seja \mathcal{A} uma álgebra associativa e simples sobre o corpo \mathbb{F} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}), e seja \mathbf{S} um módulo sobre um anel de divisão $\mathbb{K} \supset \mathbb{F}$ e seja $\mathbf{E} = \text{End}_{\mathbb{K}} \mathbf{S} = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{S}, \mathbf{S})$ a álgebra dos endomorfismos de \mathbf{S} , ou seja a álgebra das transformações $T : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$, tal que $T(as_1 + bs_2) = aT(\mathbf{s}_1) + bT(\mathbf{s}_2), \forall a, b \in \mathbb{K}$ e $\forall \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in \mathbf{S}$.*

Definição 43. *Uma representação de \mathcal{A} em \mathbf{S} é um \mathbb{K} -homomorfismo⁸ de álgebras $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{E} = \text{End}_{\mathbb{K}} \mathbf{S}$ que leva a unidade de \mathcal{A} em $\text{Id}_{\mathbf{E}}$. A dimensão $\dim_{\mathbb{K}} \mathbf{S}$ é chamada de grau da representação.*

Definição 44. *A adição em \mathbf{S} junto com a transformação $\mathcal{A} \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}, (a, x) \mapsto \rho(a)x$ transforma \mathbf{S} num \mathcal{A} -módulo⁹, chamado de módulo de representação à esquerda.*

Observação 45. *Temos que se \mathcal{A} é uma álgebra sobre \mathbb{F} e \mathbf{S} é um \mathcal{A} -módulo, então \mathbf{S} pode ser sempre considerado como um espaço vetorial sobre \mathbb{F} e, a transformação $\chi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{E} = \text{End}_{\mathbb{K}} \mathbf{S}, a \mapsto \chi_a$ tal que $\chi_a(\mathbf{s}) = a\mathbf{s}, \mathbf{s} \in \mathbf{S}$, é uma representação de \mathcal{A} em \mathbf{S} , denominada representação regular. Assim o estudo de \mathcal{A} -módulos é então equivalente ao estudo de \mathbb{F} -representações de \mathcal{A} .*

⁸Lembremos que um \mathbb{K} -homomorfismo de álgebras é uma transformação \mathbb{K} -linear ρ tal que $\forall A, B \in \mathcal{A}, \rho(AB) = \rho(A)\rho(B)$.

⁹Note que temos módulos à direita e à esquerda, assim podemos definir também representação modular à direita de \mathcal{A} definindo a transformação $\mathbf{S} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{S}, (x, a) \mapsto x\rho(a)$. Isto torna \mathbf{S} num \mathcal{A} -módulo à direita, chamado de módulo de representação à direita.

Definição 46. Uma representação ρ é fiél se o seu núcleo é zero, i.e., $\rho(a)x = 0, \forall x \in \mathbf{S} \Rightarrow a = 0$. O núcleo de ρ é também conhecido como o anulador de seu módulo.

Definição 47. ρ é dita simples ou irredutível se os únicos subespaços invariantes de $\rho(a), \forall a \in \mathcal{A}$, são \mathbf{S} e $\{0\}$.

Quando não houver risco de confusão $\rho(a)x$ será denotada por $a * x$ ou ax .

Observação 48. Seja \mathcal{A} uma álgebra semissimples¹⁰. Uma representação $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{E} = \text{End}_{\mathbb{K}}\mathbf{S}$ é redutível, então o espaço \mathbf{S} pode ser escrito como uma soma direta não trivial, $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \oplus \mathbf{S}_2$ tal que $\rho(a)(\mathbf{S}_i) \subseteq \mathbf{S}_i, i = 1, 2, \forall a \in \mathcal{A}$. Neste caso, escrevemos $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2; \rho_i = \rho|_{\mathbf{S}_i}, i = 1, 2$.

Definição 49. Duas representações $\rho_i : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{E} = \text{End}_{\mathbb{K}}\mathbf{S}, i = 1, 2$, são ditas equivalentes se existe um isomorfismo \mathbb{K} -linear $\phi : \mathbf{S}_1 \rightarrow \mathbf{S}_2$ tal que

$$\phi \circ \rho_1(a) \circ \phi^{-1} = \rho_2(a), \forall a \in \mathcal{A}. \quad (1.57)$$

Considere a representação $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{E} = \text{End}_{\mathbb{K}}\mathcal{A}, a \mapsto L_a$ tal que $L_a(b) = ab, b \in \mathcal{A}$. Denominamos L a *representação regular*. Seja $I \subseteq \mathcal{A}$ tal que $L(a)(I) \subseteq I, \forall a \in \mathcal{A}$ e I é minimal com essa propriedade. Por definição I é um ideal à esquerda minimal da álgebra \mathcal{A} . Portanto, o espaço de representação associado a uma representação regular irredutível é um ideal à esquerda minimal da álgebra, sendo, para o estudo a seguir, de fundamental importância o estabelecimento de algumas propriedades de ideais minimais das álgebras $\mathbb{R}_{p,q}$, bem como encontrá-los.

1.4.1 Idempotentes e Ideais Minimais

Para os desenvolvimentos que se seguem vamos estabelecer alguns resultados concernentes a ideais minimais das álgebras $\mathbb{R}_{p,q}$.

Podemos observar das tabelas 1 e 2 das álgebras de Clifford reais e complexas, respectivamente, que todas as álgebras $\mathbb{R}_{p,q}$ ou \mathbb{C}_n são da forma $\mathbb{K}(m)$ ou $\mathbb{K}(m) \oplus \mathbb{K}(m)$ onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} para algum m . Desta forma, a teoria de representação de tais álgebras é bastante simples.

Definição 50. Definimos as matrizes $E_{ij} \in \mathbb{K}(m)$ tais que seus elementos são da forma $(E_{ij})_{rs} = \delta_{ir}\delta_{js}$.

Note que assim teremos que o conjunto

$$\{E_{ij}, 1 \leq i, j \leq m\}, \quad (1.58)$$

é uma base de $\mathbb{K}(m)$.

¹⁰Que definiremos aqui, como sendo uma álgebra que pode ser decomposta como $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_n$, onde cada \mathcal{A}_i ($i = 1, \dots, n$) é simples.

Proposição 51. *Temos que os seguintes conjuntos I são ideais à esquerda de $\mathbb{K}(m)$*

$$I = \langle E_{1j_1}, E_{2j_1}, \dots, E_{mj_1}, E_{1j_2}, E_{2j_2}, \dots, E_{mj_2}, E_{1j_k}, E_{2j_k}, \dots, E_{mj_k} \rangle, \quad (1.59)$$

onde a notação $\langle S \rangle$ significa o espaço gerado pelo conjunto S e $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq m$. Ou seja, os elementos de I são matrizes cujas colunas p_1, p_2, \dots, p_l são nulas, onde $\{p_1, p_2, \dots, p_l\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$.

Demonstração. Suponha $I \neq \{0\}$. Seja $a \in I$ portanto $a = \sum_{i,j}^m a^{ij} E_{ij}$, assim sejam i, j tais que $a^{ij} \neq 0$, logo $(\frac{1}{a^{ij}} E_{ki})a \in I \Rightarrow E_{kj} \in I \forall k$. Assim, se considerarmos o conjunto $\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ dos índices tais que $a^{ijs} \neq 0$ para algum i , temos que o resultado segue. ■

Corolário 52. *Temos que os seguintes conjuntos I de $\mathbb{K}(m)$ são ideais minimais*

$$I = \langle E_{1A}, \dots, E_{mA} \rangle \quad (1.60)$$

para alguma $A = 1, \dots, m$. Ou seja, seus elementos são matrizes cujas colunas são todas nulas com exceção de uma. Assim, podemos identificar os elementos desses ideais minimais de $\mathbb{K}(m)$ com matrizes colunas.

Proposição 53. *Os ideais colunas à esquerda I de $\mathbb{K}(m)$ são da forma $I = \mathbb{K}(m)e$ onde e é um idempotente.*

Demonstração. Suponha $I \neq \{0\}$. Note que assim segue

$$I = \langle E_{1j_1}, E_{2j_1}, \dots, E_{mj_1}, E_{1j_2}, E_{2j_2}, \dots, E_{mj_2}, E_{1j_k}, E_{2j_k}, \dots, E_{mj_k} \rangle, \quad (1.61)$$

segundo a notação acima. Teremos portanto $I = \mathbb{K}(m)(E_{j_1j_1} + E_{j_2j_2} + \dots + E_{j_kj_k})$ pois temos $E_{ijs} = E_{ijs}(E_{j_1j_1} + E_{j_2j_2} + \dots + E_{j_kj_k}), \forall i, s$. E o elemento $(E_{j_1j_1} + E_{j_2j_2} + \dots + E_{j_kj_k})$ é claramente um idempotente. ■

Proposição 54. *Seja e um idempotente, o ideal $\mathbb{K}(m)e$ é minimal $\Leftrightarrow e$ é primitivo.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que e não seja primitivo, portanto existem idempotentes não nulos e_1, e_2 tais que $e = e_1 + e_2$, com $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$ e $e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2$. Teremos que $\mathbb{K}(m)e = \mathbb{K}(m)e_1 \oplus \mathbb{K}(m)e_2$. De fato, claramente $\mathbb{K}(m)e \subseteq \mathbb{K}(m)e_1 \oplus \mathbb{K}(m)e_2$ pois $e = e_1 + e_2$ e a intersecção de $\mathbb{K}(m)e_1$ e $\mathbb{K}(m)e_2$ é nula pois $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$; e note que $e_i = ee_i = e_1e_i, i = 1, 2$ portanto $\mathbb{K}(m)e_1 \oplus \mathbb{K}(m)e_2 = \mathbb{K}(m)e_1e \oplus \mathbb{K}(m)e_2e \subseteq \mathbb{K}(m)e$ como $e_1, e_2 \neq 0 \Rightarrow \mathbb{K}(m)e_1, \mathbb{K}(m)e_2 \neq \{0\}$ portanto o ideal $\mathbb{K}(m)e$ não é minimal.

(\Leftarrow) Suponha $\mathbb{K}(m)e$ não minimal, assim existe ideal $\{0\} \neq I \subsetneq \mathbb{K}(m)e$, temos $I = \mathbb{K}(m)\bar{e}$ para algum idempotente \bar{e} logo $\bar{e} \in \mathbb{K}(m)e \Rightarrow \bar{e} = xe \Rightarrow \bar{e}\bar{e} = \bar{e}$; usando esse fato e que $e = e\bar{e} + e(1 - \bar{e})$ concluímos que e não é primitivo, pois pode ser escrito como a soma de dois idempotentes não nulos e ortogonais $e\bar{e}$ e $e(1 - \bar{e})$. ■

Se e é um idempotente primitivo, temos $I = \mathbb{K}(m)e = \langle E_{1A}, E_{2A}, \dots, E_{mA} \rangle$ para algum $A = 1, \dots, m$, note que se considerarmos o idempotente E_{AA} teremos $I = \mathbb{K}(m)e =$

$\mathbb{K}(m)E_{AA}$, ou seja, por simplicidade podemos considerar apenas os idempotentes primitivos E_{AA} , quando estamos tratando com ideais minimais.

Um elemento de $e\mathbb{K}(m)e$ é da forma

$$\underbrace{\left(\sum_i a^i E_{iA}\right)}_e \left(\sum_{j,k} b^{jk} E_{jk}\right) \underbrace{\left(\sum_l a^l E_{lA}\right)}_e = \sum_{i,j,k,l} a^i a^l b^{jk} E_{iA} E_{jk} E_{lA} = \sum_k b^{Ak} a^k \underbrace{\left(\sum_i a^i E_{iA}\right)}_e = ce, \quad (1.62)$$

onde $c \in \mathbb{K}$ e note que usamos $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$. Com essa análise podemos concluir que $e\mathbb{K}(m)e \simeq \mathbb{K}e \simeq e\mathbb{K} \simeq \mathbb{K}$.

Seja I um ideal minimal de $\mathbb{K}(m)$, com as ideias expostas acima, temos que os elementos de I podem ser vistos como matrizes colunas, ou seja, $I \simeq \mathbb{K}^n$ portanto $\text{End}_{\mathbb{K}} I \simeq \mathbb{K}(m)$.

Com esses resultados e a classificação das álgebras $\mathbb{R}_{p,q}$ (tabelas 1), teremos o seguinte:

Teorema 55. *Se $p + q$ é par ou ímpar com $p - q \neq 1 \pmod{4}$, então*

$$\mathbb{R}_{p,q} \simeq \mathbb{K}(m) \simeq \text{End}_{\mathbb{K}}(I_{p,q}), \quad (1.63)$$

onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} ; e $I_{p,q} = \mathbb{R}_{p,q}e_{p,q}$, onde $e_{p,q}$ é um idempotente primitivo de $\mathbb{R}_{p,q}$.

$$\dim_{\mathbb{K}}(I_{p,q}) = m, \quad (1.64)$$

e

$$\mathbb{K} \simeq e\mathbb{K}(m)e, \quad (1.65)$$

onde e é a representação de $e_{p,q}$ em $\mathbb{K}(m)$.

Se $p + q$ é ímpar, com $p - q = 1 \pmod{4}$, então

$$\mathbb{R}_{p,q} \simeq \mathbb{K}(m) \oplus \mathbb{K}(m) \simeq \text{End}_{\mathbb{K}}(I_{p,q}) \oplus \text{End}_{\mathbb{K}}(\overline{I_{p,q}}) \quad (1.66)$$

onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{H} ; onde $I_{p,q} = \mathbb{R}_{p,q}e_{p,q}$ e $\overline{I_{p,q}} = \mathbb{R}_{p,q}\overline{e_{p,q}}$, onde $e_{p,q}$ e $\overline{e_{p,q}}$ são idempotentes primitivos de $\mathbb{R}_{p,q}$.

$$\dim_{\mathbb{K}}(I_{p,q}) = \dim_{\mathbb{K}}(\overline{I_{p,q}}) = m, \quad (1.67)$$

e

$$\mathbb{K} \oplus \mathbb{K} \simeq (e \oplus \overline{e})(\mathbb{K}(m) \oplus \mathbb{K}(m))(e \oplus \overline{e}), \quad (1.68)$$

onde $e \oplus 0$ é a representação de $e_{p,q}$ em $\mathbb{K}(m) \oplus \mathbb{K}(m)$ e $0 \oplus \overline{e}$ é a representação de $\overline{e_{p,q}}$ em $\mathbb{K}(m) \oplus \mathbb{K}(m)$.

Demonstração. Para a prova do teorema veja, e.g., [16]. ■

Seja $\mathbb{K}(m) \simeq \text{End}_{\mathbb{K}}(I_{p,q}) \simeq \mathbb{R}_{p,q} \ni x$, para acharmos uma representação de x em $\mathbb{K}(m)$ usamos o isomorfismo $\varphi : \mathbb{R}_{p,q} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(I_{p,q})$ definido por $\varphi(x) = L_x \in \text{End}_{\mathbb{K}}(I_{p,q})$, sendo $L_x : I_{p,q} \rightarrow I_{p,q}$ a restrição à $I_{p,q}$ de $\mathbf{L}_x : \mathbb{R}_{p,q} \rightarrow \mathbb{R}_{p,q}$, definida por $\mathbf{L}_x(y) = xy, \forall x, y \in \mathbb{R}_{p,q}$; com isso dado $x \in \mathbb{R}_{p,q}$ tomamos uma base $\{\mathcal{E}_i\}$ do ideal $I_{p,q}$ e estudamos a ação de x sobre esta base, ou seja, $x\mathcal{E}_i = \sum_j x_{ji}\mathcal{E}_j$, e (x_{ij}) é a matriz que representa x . Para o caso $\mathbb{K}(m) \oplus \mathbb{K}(m) \simeq \mathbb{R}_{p,q} \ni x$, fazemos construção análoga.

1.4.2 Encontrando os Idempotentes

Para concluir esse assunto é oportuno estabelecermos um resultado que nos permita obter um idempotente em $\mathbb{R}_{p,q}$. Vamos seguir aqui as construções e demonstrações feitas em [49].

No que segue utilizaremos a notação de multi-índices: seja $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n=p+q}\}$ um conjunto de geradores ortonormais de $\mathbb{R}_{p,q}$, um elemento de $\mathbb{R}_{p,q}$ da forma $\mathbf{e}_{\mu_1} \dots \mathbf{e}_{\mu_k}$ será denotado por

$$\mathbf{e}_I = \mathbf{e}_{\mu_1 \dots \mu_k} = \mathbf{e}_{\mu_1} \dots \mathbf{e}_{\mu_k}, \quad (1.69)$$

onde denotamos por $I = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ o conjunto de multi-índices.

Teorema 56. *Seja $\mathbb{R}_{p,q}$ a álgebra de Clifford de $\mathbb{R}^{p,q}$ e $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n=p+q}\}$ uma base ortonormal desse espaço quadrático. Encontramos um idempotente primitivo de $\mathbb{R}_{p,q}$ da forma*

$$\mathbf{e}_{p,q} = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_{I_1}) \dots \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_{I_k}), \quad (1.70)$$

onde $\{\mathbf{e}_{I_1}, \dots, \mathbf{e}_{I_k}\}$ é um conjunto de elementos de $\mathbb{R}_{p,q}$ que comutam entre si e tais que $(\mathbf{e}_{I_i})^2 = 1$ para $i = 1, \dots, k$ que geram um grupo de ordem 2^k onde $k = q - r_{q-p}$, onde r_i são os números de Radon-Hurwitz definidos por

i		0	1	2	3	4	5	6	7
r_i		0	1	2	2	3	3	3	3

(1.71)

com a relação de recorrência $r_{i+8} = r_i + 4$.

Demonstração. Tomemos um elemento \mathbf{e}_{I_1} de $\mathbb{R}_{p,q}$ tal que $(\mathbf{e}_{I_1})^2 = 1$. Dessa forma, os elementos

$$\mathbf{f}_1^+ = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_{I_1}) \text{ e } \mathbf{f}_1^- = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{e}_{I_1}), \quad (1.72)$$

são idempotentes tais que $\mathbf{f}_1^+ + \mathbf{f}_1^- = 1$ e ortogonais $\mathbf{f}_1^+ \mathbf{f}_1^- = \mathbf{f}_1^- \mathbf{f}_1^+ = 0$. Então podemos decompor $\mathbb{R}_{p,q}$ da seguinte forma:

$$\mathbb{R}_{p,q} = \mathbb{R}_{p,q} \mathbf{f}_1^+ \oplus \mathbb{R}_{p,q} \mathbf{f}_1^-. \quad (1.73)$$

Note que pela simetria entre \mathbf{f}_1^+ e \mathbf{f}_1^- , teremos $\dim \mathbb{R}_{p,q} \mathbf{f}_1^+ = \dim \mathbb{R}_{p,q} \mathbf{f}_1^- = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$.

Seja agora \mathbf{e}_{I_2} um outro elemento de $\mathbb{R}_{p,q}$ tal que $(\mathbf{e}_{I_2})^2 = 1$. Então

$$\mathbf{f}_2^+ = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_{I_2}) \text{ e } \mathbf{f}_2^- = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{e}_{I_2}), \quad (1.74)$$

são idempotentes tais que $\mathbf{f}_2^+ + \mathbf{f}_2^- = 1$ e $\mathbf{f}_2^+ \mathbf{f}_2^- = \mathbf{f}_2^- \mathbf{f}_2^+ = 0$.

Se \mathbf{e}_{I_1} e \mathbf{e}_{I_2} comutam podemos construir quatro idempotentes:

$$\mathbf{f}_1^+ \mathbf{f}_2^+, \mathbf{f}_1^+ \mathbf{f}_2^-, \mathbf{f}_1^- \mathbf{f}_2^+ \text{ e } \mathbf{f}_1^- \mathbf{f}_2^-, \quad (1.75)$$

todos ortogonais entre si, cuja soma dá a identidade. Assim a álgebra $\mathbb{R}_{p,q}$ pode ser decomposta na soma de quatro ideais cada um com dimensão 2^{n-2} .

Se continuarmos com esse raciocínio poderemos formar um conjunto de 2^k idempotentes da forma

$$\frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_{I_1}) \dots \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_{I_k}), \quad (1.76)$$

e decompor $\mathbb{R}_{p,q}$ na soma de 2^k ideais cada um com dimensão 2^{n-k} . Podemos continuar com esse processo até que 2^{n-k} seja igual a m , que é a dimensão de um ideal minimal, onde temos $\mathbb{R}_{p,q} \simeq \mathbb{K}(m)$ ou $\mathbb{R}_{p,q} \simeq \mathbb{K}(m) \oplus \mathbb{K}(m)$. Agora com algum trabalho, podemos notar que k é dado pela fórmula acima. ■

Observação 57. *Um elemento de um ideal minimal à esquerda de uma álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ é dito um representante de um a-espinor se $\mathcal{Cl}(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ for uma álgebra simples e um representante de um semi a-espinor se $\mathcal{Cl}(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ for a soma de álgebras simples (que são ditas semisimples). A razão do termo representante usado acima ficara claro após a Seção 1.6.*

Tendo em mente as considerações acima podemos identificar os elementos de ideais minimais de acordo a classificação que fizemos das álgebras de Clifford. Considerando o caso das álgebras de Clifford simples (\mathbb{R} ou \mathbb{C}) teremos, por exemplo, $\mathbb{R}_{p,q} \simeq \mathbb{K}(m)$ (com $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$). Assim, um ideal minimal à esquerda de $\mathbb{R}_{p,q}$ é isomorfo a \mathbb{K}^m , ou seja nesse caso os representantes dos a-espinores são vistos como elementos de \mathbb{K}^m . No caso da álgebra ser semisimples temos $\mathbb{R}_{p,q} \simeq \mathbb{K}(m) \oplus \mathbb{K}(m)$ e um ideal minimal à esquerda é isomorfo a \mathbb{K}^m . Neste caso os representantes dos semi a-espinores também são classificados como elementos de \mathbb{K}^m . Nesse caso a soma de dois representantes de semi a-espinores é chamada de um representante de um a-espinor (note que nesse caso o ideal não será minimal). Assim para uma álgebra semisimples um representante de um a-espinor será um elemento de $\mathbb{K}^m \oplus \mathbb{K}^m$. Ou seja, olhando a tabela de classificação das álgebras de Clifford reais e complexas fica fácil classificar os a-espinores.

1.5 Grupo de Clifford e subgrupos e $\mathbb{R}_{p,q}^0$

1.5.1 As subálgebras pares $\mathbb{R}_{p,q}^0$

Definimos $\mathbb{R}_{p,q}^0 = \mathcal{Cl}^0(\mathbb{R}_{p,q}, \mathbf{q})$. Se olharmos a tabela de classificação das álgebras $\mathbb{R}_{p,q}$ veremos que normalmente temos $\mathbb{R}_{p,q} \not\simeq \mathbb{R}_{q,p}$, ao mesmo tempo que $\mathbb{R}_{p,q}^0 \simeq \mathbb{R}_{q,p}^0$. A prova deste resultado será dada em seguida.

Proposição 58. $\mathbb{R}_{p,q}^0 \simeq \mathbb{R}_{p,q-1}$.

Demonstração. Seja $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_{p+1}, \dots, \mathbf{e}_{p+q}\}$ uma base ortogonal de \mathbb{R}^{p+q} com produto interno tal que $\mathbf{q}(\mathbf{e}_i) = 1, i = 1, \dots, p$ e $\mathbf{q}(\mathbf{e}_j) = -1, j = p+1, \dots, p+q$. Seja \mathbb{R}^{p+q-1} o subespaço de \mathbb{R}^{p+q} gerado por $\{\mathbf{e}_i\}, i = 1, \dots, p+q-1$. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^{p+q-1} \rightarrow \mathbb{R}_{p,q}^0$ dada por $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_{p+q}, i \neq p+q$. Note que para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{p+q-1}$ teremos $f(\mathbf{x})^2 = \mathbf{x}^2 = \mathbf{q}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{1}$. Pela propriedade da universalidade Prop.(22) f se estende

a um homomorfismo de álgebras $\tilde{f} : \mathbb{R}_{p,q-1} \rightarrow \mathbb{R}_{p,q}^0$. Como \tilde{f} leva um conjunto de geradores de $\mathbb{R}_{p,q-1}$ a um conjunto de geradores de $\mathbb{R}_{p,q}^0$ e $\dim(\mathbb{R}_{p,q-1}) = \dim(\mathbb{R}_{p,q}^0)$ temos que \tilde{f} é um isomorfismo. Assim a proposição está provada. ■

Proposição 59. $\mathbb{R}_{p,q}^0 \simeq \mathbb{R}_{q,p-1}$

Demonstração. Fazemos como no caso anterior, mas usando $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_i$. ■

Corolário 60. $\mathbb{R}_{p,q}^0 \simeq \mathbb{R}_{q,p}^0$.

Demonstração. $\mathbb{R}_{p,q}^0 \simeq \mathbb{R}_{q,p-1} \simeq \mathbb{R}_{q,p}^0$. ■

1.5.2 Grupo de Clifford

O conjunto dos elementos inversíveis de $\mathbb{R}_{p,q}$ constitui um grupo não-abeliano que é denotado por $\mathbb{R}_{p,q}^*$. Podemos definir os homomorfismos[31](pág.220):

$$\begin{aligned} \text{Ad} : \mathbb{R}_{p,q}^* &\rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}_{p,q}); u \mapsto \text{Ad}_u, \text{ com } \text{Ad}_u(x) = uxu^{-1}, \text{ e} & (1.77) \\ \hat{\text{Ad}} : \mathbb{R}_{p,q}^* &\rightarrow \text{Gl}(\mathbb{R}_{p,q}); u \mapsto \hat{\text{Ad}}_u, \text{ com } \text{Ad}_u(x) = ux\hat{u}^{-1}. \end{aligned}$$

Definição 61. O grupo de Clifford-Lipschitz é o conjunto

$$\Gamma_{p,q} = \{u \in (\mathbb{R}_{p,q}^0)^* \cup (\mathbb{R}_{p,q}^1)^* \mid \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{p,q}, \text{Ad}_u(\mathbf{v}) = u\mathbf{v}u^{-1} \in \mathbb{R}^{p,q}\}. \quad (1.78)$$

Observe que $\hat{\text{Ad}}_u = \text{Ad}_u$ para $u \in \mathbb{R}_{p,q}^0$.

Proposição 62. Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{p,q}$ e $\mathbf{q}(\mathbf{v}) \neq 0$, então $\text{Ad}_{\mathbf{v}}(\mathbb{R}^{p,q}) = \mathbb{R}^{p,q}$.

Demonstração. Basta notar que $\mathbf{v} = \mathbf{v}, \mathbf{v}^{-1} = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{q}(\mathbf{v})}$ e que $2\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}\mathbf{w} + \mathbf{w}\mathbf{v}$ para $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{p,q}$. Assim $\text{Ad}_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \mathbf{v}\mathbf{w}\mathbf{v}^{-1} = (2\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \mathbf{w}\mathbf{v})\left(\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{q}(\mathbf{v})}\right) = -\mathbf{w} + 2\frac{\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w})}{\mathbf{q}(\mathbf{v})}\mathbf{v}$. Assim o resultado segue. ■

Proposição 63. O núcleo de $\text{Ad} : \Gamma_{p,q} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}_{p,q})$ é o grupo multiplicativo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Demonstração. Seja $g \in \text{KerAd}$, então $g\mathbf{v} = \mathbf{v}g, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{p,q}$. Escreva $g = g_0 + g_1, g_0 \in \mathbb{R}_{p,q}^0, g_1 \in \mathbb{R}_{p,q}^1$. Assim, $(g_0 + g_1)\mathbf{v} = \mathbf{v}(g_0 + g_1)$:

$$\begin{cases} g_0\mathbf{v} = \mathbf{v}g_0 \\ g_1\mathbf{v} = \mathbf{v}g_1 \end{cases}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{p,q}. \quad (1.79)$$

Seja $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ uma base ortogonal de \mathbb{R}^{p+q} . Podemos escrever $g_0 = a_0 + \mathbf{e}_1 b_0$. Se aplicarmos a involução em g_0 concluímos que $a_0 \in \mathbb{R}_{p,q}^0$ e $b_0 \in \mathbb{R}_{p,q}^1$. Fazendo $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1$ em Eq.(1.79) temos $g_0\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 g_0 \Rightarrow \mathbf{e}_1 a_0 + \mathbf{e}_1^2 b_0 = a_0 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 b_0 \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 a_0 - \mathbf{e}_1^2 b_0$, pois $a_0 \in \mathbb{R}_{p,q}^0$ e $b_0 \in \mathbb{R}_{p,q}^1$. Portanto $\mathbf{e}_1^2 b_0 = \mathbf{q}(\mathbf{e}_1) b_0 = 0 \Rightarrow b_0 = 0$, assim g_0 não envolve \mathbf{e}_1 . Aplicando o mesmo argumento com os outros vetores da base, mostramos que g_0 não envolve nenhum deles, e portanto g_0 é múltiplo de $\mathbf{1}$. $g_0 = t \cdot \mathbf{1}, t \in \mathbb{R}$.

Podemos usar o mesmo argumento para $g_1 = a_1 + \mathbf{e}_1 b_1$ e concluímos que g_1 não envolve $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. Como $g_1 \in \mathbb{R}_{p,q}^1$ temos $g_1 = 0$. Logo $g = g_0 \in \mathbb{R}$ e como g é inversível, $g \in \mathbb{R}^*$. ■

Definição 64. O conjunto $\Gamma_{p,q}^0 = \Gamma_{p,q} \cap \mathbb{R}_{p,q}^0$ é chamado de grupo de Clifford-Lipshitz especial.

Definição 65. O grupo $\text{Pin}_{p,q}$ é o subgrupo de $\Gamma_{p,q}$ tal que

$$\text{Pin}_{p,q} = \{u \in \Gamma_{p,q} \mid N(u) = \pm 1\}, \quad (1.80)$$

onde

$$N : \mathbb{R}_{p,q} \rightarrow \mathbb{R}_{p,q}, N(x) = \langle \bar{x}x \rangle_0. \quad (1.81)$$

Definição 66. O grupo $\text{Spin}_{p,q}$ é o conjunto

$$\text{Spin}_{p,q} = \{u \in \Gamma_{p,q}^0 \mid N(u) = \pm 1\}. \quad (1.82)$$

Definição 67. O grupo $\text{Spin}_{p,q}^e$ é o conjunto

$$\text{Spin}_{p,q}^e = \{u \in \Gamma_{p,q} \mid N(u) = +1\}. \quad (1.83)$$

O índice e , significa que $\text{Spin}_{p,q}^e$ é a componente conexa com a identidade. Pode-se provar que $\text{Spin}_{p,q}^e$ é conexo para todos os pares (p, q) com a exceção de $\text{Spin}_{1,0}^e \simeq \text{Spin}_{0,1}^e$ [47].

Seja \mathbf{G} a matriz diagonal $n \times n$ cujas entradas G_{ij} são

$$\mathbf{G} = [G_{ij}] = \text{diag}(1, 1, \dots, -1, -1, \dots, -1), \quad (1.84)$$

com p números positivos e q negativos.

Definição 68. $O_{p,q} \subset \text{End}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{p,q}$ é o chamado de grupo ortogonal, tal que as matrizes $n \times n$ reais \mathbf{L} que representam $O_{p,q}$, são tais que

$$\mathbf{LGL}^T = \mathbf{G}, \quad \det \mathbf{L}^2 = 1, \quad (1.85)$$

ou seja, as transformações contidas em $O_{p,q}$ preservam a norma em $\mathbb{R}^{p,q}$.

Definição 69. $\text{SO}_{p,q} \subset \text{End}_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{p,q}$ é o chamado de grupo ortogonal, tal que as matrizes $n \times n$ reais \mathbf{L} que representam $O_{p,q}$, são tais que

$$\mathbf{LGL}^T = \mathbf{G}, \quad \det \mathbf{L}^2 = 1, \quad (1.86)$$

ou seja, as transformações contidas em $\text{SO}_{p,q}$ preservam a norma e a orientação espacial em $\mathbb{R}^{p,q}$.

Definição 70. O grupo $\text{SO}_{p,q}^e$ é a componente conexa a identidade de $\text{SO}_{p,q}$ ¹¹.

¹¹Os grupos $O_{p,q}$ e $\text{SO}_{p,q}$ são grupos de Lie, veja a Definição (89).

Teorema 71. ([49] pág.164) ([47] pág.70) $Ad|_{\text{Pin}_{p,q}} : \text{Pin}_{p,q} \rightarrow \text{O}_{p,q}$ é sobrejetora com núcleo \mathbb{Z}_2 .

$Ad|_{\text{Spin}_{p,q}} : \text{Spin}_{p,q} \rightarrow \text{SO}_{p,q}$ é sobrejetora com núcleo \mathbb{Z}_2 . $Ad|_{\text{Spin}_{p,q}^e} : \text{Spin}_{p,q}^e \rightarrow \text{SO}_{p,q}^e$ é sobrejetora com núcleo \mathbb{Z}_2 .

Portanto teremos,

$$\text{O}_{p,q} = \frac{\text{Pin}_{p,q}}{\mathbb{Z}_2}, \text{SO}_{p,q} = \frac{\text{Spin}_{p,q}}{\mathbb{Z}_2}, \text{SO}_{p,q}^e = \frac{\text{Spin}_{p,q}^e}{\mathbb{Z}_2}. \quad (1.87)$$

Teorema 72. Para $p + q \leq 4$, $\text{Spin}(p, q) = \{u \in \mathbb{R}_{p,q}^0 \mid N(u) = \pm 1\}$.

Demonstração. Note que $\text{Spin}(p, q) \subseteq \{u \in \mathbb{R}_{p,q}^0 \mid N(u) = \pm 1\}$ é trivial. Nos resta mostrar então que se $u \in \mathbb{R}_{p,q}^0$ é tal que $N(u) = \pm 1$ implica em que $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{p,q}$ teremos $Ad_u(\mathbf{v}) = \hat{A}d_u(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{p,q}$. Mas note que se $u \in \mathbb{R}_{p,q}^0$ teremos $\mathbf{w} = \hat{A}d_u(\mathbf{v}) = Ad_u(\mathbf{v}) = u\mathbf{v}u^{-1}$. Como $u \in \mathbb{R}_{p,q}^0 \Rightarrow \mathbf{w} \in \mathbb{R}_{p,q}^1$. Seja $\mathbf{e}_i, i = 1, \dots, 4$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{p,q}, p + q = 4$. Temos $\bar{\mathbf{w}} = -u\mathbf{v}u^{-1} = -\mathbf{w}$. Escrevendo na base:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \sum_i w^i \mathbf{e}_i + \sum_{i,j,k} w^{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \\ \bar{\mathbf{w}} &= -\sum_i w^i \mathbf{e}_i + \sum_{i,j,k} w^{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k ; w^i, w^{ijk} \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (1.88)$$

pois $\bar{\mathbf{e}}_i = -\mathbf{e}_i$ e $\overline{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$. Daqui $w^{ijk} = 0, \forall i, j, k$ portanto $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{p,q}$. ■

1.6 Os Conceitos de Espinores

Os espinores foram introduzidos originalmente em 1913 por É. Cartan em [9].

Seja $\phi \in \mathbb{C}^3$, um vetor complexo associado à dois vetores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{3,0}$ (ortogonais entre si e de mesma norma) de forma que tenhamos $\phi = \mathbf{v} + i\mathbf{w}, i = \sqrt{-1}$. O vetor $\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$, $\phi^i = v^i + iw^i, i = 1, 2, 3$, satisfaz a equação:

$$(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + (\phi^3)^2 = 0, \quad (1.89)$$

e é dito *nulo* ou *isotrópico*.

A Eq.(1.89), implica na redução de um grau de liberdade complexo de nosso vetor complexo. Podemos portanto expressar, e.g., ϕ^1, ϕ^2, ϕ^3 em termos de somente dois números complexos independentes φ_0 e φ_1 como segue :

$$\phi^1 = \varphi_0^2 - \varphi_1^2; \phi^2 = -i(\varphi_0^2 + \varphi_1^2); \phi^3 = 2\varphi_0\varphi_1. \quad (1.90)$$

Segundo Cartan os números complexos φ_0, φ_1 são as componentes de um espinor euclidiano bidimensional $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$ (simples) puro [10, 11]. Da Eq.(1.90) vemos imediatamente que os espinores $\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -\varphi_0 \\ -\varphi_1 \end{pmatrix}$ determinam o mesmo vetor complexo $\phi \in \mathbb{C}^3$. Ao conjunto $\mathbb{C}^2 = \{\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}, \varphi_0, \varphi_1 \in \mathbb{C}\}$ Cartan chamou de espaço espinorial. Como veremos mais

avante o espaço \mathbb{C}^2 é dito carregar a representação $D^{1/2}$ do grupo $SU(2)$ que é o grupo de recobrimento universal do grupo (especial) de rotações em $\mathbb{R}^{3,0}$.

No que segue formalizaremos o conceito de espinor a partir dos resultados apresentados na Seção 1.4. Acreditamos que nossa abordagem baseada em [46] seja mais inteligível do que a apresentação desse conceito como aparece em textos de Física, por exemplo em [3, 27, 38].

1.6.1 Espinores Algébricos

Começaremos introduzindo o conceito de espinores algébricos. Os (vii) passos a seguir são essenciais para a Definição 79:

- (i) No que segue \mathbf{V} é um espaço vetorial n -dimensional sobre os reais \mathbb{R} . Seja

$$\mathbf{g} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.91)$$

uma métrica de assinatura (p, q) .

- (ii) Seja $SO(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ o grupo de endomorfismos de \mathbf{V} que preserva \mathbf{g} a orientação espacial¹². Pela definição que demos de $SO_{p,q}$ vemos que $SO(\mathbf{V}, \mathbf{g}) \simeq SO_{p,q}$, mas note que esse isomorfismo não é natural pois ele só pode ser exibido após fixarmos uma base ortonormal em \mathbf{V} . Sua componente conexa com a identidade é denotada por $SO^e(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ e $SO^e(\mathbf{V}, \mathbf{g}) \simeq SO_{p,q}^e$.
- (iii) Denotaremos novamente por $\mathcal{C}\ell(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ a álgebra de Clifford de \mathbf{V} associada a (\mathbf{V}, \mathbf{g}) e por $\text{Spin}^e(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ ($\simeq \text{Spin}_{p,q}^e$) a componente conexa com a identidade do grupo Spin , $\text{Spin}(\mathbf{V}, \mathbf{g}) \simeq \text{Spin}_{p,q}$. Sabemos que pelo Teorema (71) que $\frac{\text{Spin}^e(\mathbf{V}, \mathbf{g})}{\mathbb{Z}_2} \simeq SO(\mathbf{V}, \mathbf{g})$. Seja então \mathbf{L} o homomorfismo $2 : 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{L} : \text{Spin}^e(\mathbf{V}, \mathbf{g}) &\rightarrow SO^e(\mathbf{V}, \mathbf{g}), \\ u &\mapsto \mathbf{L}(u) \equiv \mathbf{L}_u, \end{aligned} \quad (1.92)$$

de forma que $\text{Spin}^e(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ age em \mathbf{V} , identificado pela inclusão em $\mathcal{C}\ell(\mathbf{V}, \mathbf{g}) \simeq \mathbb{R}_{p,q}$, da seguinte maneira¹³:

$$\begin{aligned} \text{Spin}^e(\mathbf{V}, \mathbf{g}) \ni u &\mapsto \text{Ad}_u \in \text{Aut}\mathcal{C}\ell(\mathbf{V}, \mathbf{g}) \\ \text{Ad}_u|_{\mathbf{V}} : \mathbf{V} &\rightarrow \mathbf{V}, \mathbf{v} \mapsto u\mathbf{v}u^{-1} =: \mathbf{L}_u(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (1.93)$$

$\mathbf{L}_u(\mathbf{v})$ denota a ação padrão de \mathbf{L}_u em \mathbf{v} , como $\mathbf{L}_u \in SO^e(\mathbf{V}, \mathbf{g})$

$$\mathbf{g}(\mathbf{L}_u(\mathbf{v}), \mathbf{L}_u(\mathbf{v})) = \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{v}). \quad (1.94)$$

¹²Tal significa que duas bases de \mathbf{V} relacionadas por um elemento de $SO(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ estão relacionadas por uma matriz (representado o elemento de $SO(\mathbf{V}, \mathbf{g})$) com determinante positivo.

¹³ $\text{Aut}\mathcal{C}\ell(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ denota os automorfismos de $\mathcal{C}\ell(\mathbf{V}, \mathbf{g})$.

(iv) Escolha arbitrariamente uma base ortonormal

$$b_0 = \{\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_p, \mathbf{E}_{p+1}, \dots, \mathbf{E}_{p+q}\} \quad (1.95)$$

de \mathbf{V} , que a partir de agora chamaremos de base fiducial, ou referencial fiducial¹⁴. Seja \mathcal{B} o conjunto de todas as bases ortonormais de \mathbf{V} que podem ser obtidas de b_0 através de um endomorfismo em $\text{SO}^e(\mathbf{V}, \mathbf{g})$. Com essa escolha definimos a aplicação $1 - 1$

$$\Sigma : \text{SO}^e(\mathbf{V}, \mathbf{g}) \rightarrow \mathcal{B}, \quad (1.96)$$

dado por:

$$\mathbf{L}_u \mapsto \Sigma(\mathbf{L}_u) := \Sigma_{\mathbf{L}_u} = \mathbf{L}_u b_0, \quad (1.97)$$

onde $\Sigma_{\mathbf{L}_u} = \mathbf{L}_u b_0$ é uma maneira de escrevermos $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_{p+1}, \dots, \mathbf{e}_{p+q}\} \in \mathcal{B}$, tal que

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{L}_u(\mathbf{e})_i := L_{.i}^j \mathbf{e}_j, \quad i, j = 1, \dots, p + q. \quad (1.98)$$

Dessa maneira podemos identificar uma base vetorial b de \mathbf{V} com a isometria \mathbf{L}_u que leva o referencial fiducial b_0 em b . O referencial fiducial b_0 será também denotada por $\Sigma_{\mathbf{L}_0}$, onde $\mathbf{L}_0 = e$, o elemento identidade de $\text{SO}^e(\mathbf{V}, \mathbf{g})$.

Antes de prosseguirmos, introduzimos ainda as seguintes definições:

Definição 73. *Seja $b_0 \in \mathcal{B}$ o referencial fiducial e escolha um elemento arbitrário $u_0 \in \text{Spin}^e(\mathbf{V}, \mathbf{g})$. Fixe um par (u_0, b_0) e o denomine referencial espinorial fiducial.*

Definição 74. *O espaço $\{(u, b), ubu^{-1} = u_0 b_0 u_0^{-1}\} \subseteq \text{Spin}^e(\mathbf{V}, \mathbf{g}) \times \mathcal{B}$ será chamado de espaço dos referenciais espinoriais algébricos e será denotado por S .*

Observação 75. *É de fundamental importância para o que segue, observar que a Definição (74) implica que um dado $b \in \mathcal{B}$ determina dois e somente dois referenciais espinoriais, (u, b) e $(-u, b)$, desde que $\pm ub(\pm u^{-1}) = u_0 b_0 u_0^{-1}$.*

Definição 76. *Agora vamos estender a construção em (iv) trocando $\text{SO}^e(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ pelo seu grupo de recobrimento $\text{Spin}^e(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ e \mathcal{B} por S . Para tanto introduzimos a aplicação $1 - 1$*

$$\begin{aligned} \Xi : \text{Spin}^e(\mathbf{V}, \mathbf{g}) &\rightarrow S, \\ u &\mapsto \Xi(u) := \Xi_u = (u, b), \end{aligned} \quad (1.99)$$

onde $ubu^{-1} = u_0 b_0 u_0^{-1} = b_0$. O referencial espinorial fiducial será denotado por Ξ_0 . Fica claro da Eq.(1.99) que

$$\Xi(-u) \equiv \Xi_{-u} = (-u, b) \neq (u, b) = \Xi_u. \quad (1.100)$$

A ação à direita natural de $a \in \text{Spin}^e(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ denotada por \bullet em S é dada por

$$a \bullet \Xi_u = a \bullet (u, b) = (ua, \text{Ad}_{a^{-1}} b) = (ua, a^{-1} ba). \quad (1.101)$$

¹⁴Em inglês “fiducial frame”.

Observe que se $\Xi_{u'} = (u', b') = u' \bullet \Xi_0$ e $\Xi_u = (u, b) = u \bullet \Xi_0$ então,

$$\Xi_{u'} = (u^{-1}u') \bullet \Xi_u = (u', u'^{-1}ubu^{-1}u'). \quad (1.102)$$

Note que existe uma aplicação natural 2-1

$$\mathbf{s} : S \rightarrow \mathcal{B}, \quad \Xi_{\pm u} \mapsto b = (\pm u)b_0(\pm u^{-1}), \quad (1.103)$$

tal que

$$\mathbf{s}((u^{-1}u') \bullet \Xi_u) = \text{Ad}_{(u^{-1}u')^{-1}}(\mathbf{s}(\Xi_u)). \quad (1.104)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \mathbf{s}((u^{-1}u') \bullet \Xi_u) &= \mathbf{s}((u^{-1}u') \bullet (u, b)) \\ &= u'^{-1}ub(u'^{-1}u)^{-1} = b' \\ &= \text{Ad}_{(u^{-1}u')^{-1}}b = \text{Ad}_{(u^{-1}u')^{-1}}(\mathbf{s}(\Xi_u)). \end{aligned} \quad (1.105)$$

Isso significa que as ações à direita de $\text{Spin}^e(\mathbf{V}, \mathbf{g})$, em S e \mathcal{B} , respectivamente, comutam. Notemos também que os referenciais espinoriais $\Xi_u, \Xi_{-u} \in S$, que são claramente distintos, determinam o mesmo referencial vetorial $\Sigma_{\mathbf{L}_u} = \mathbf{s}(\Xi_u) = \mathbf{s}(\Xi_{-u}) = \Sigma_{\mathbf{L}_{-u}}$. Temos,

$$\Sigma_{\mathbf{L}_u} = \Sigma_{\mathbf{L}_{-u}} = \mathbf{L}_{uu_0^{-1}}\Sigma_{\mathbf{L}_{u_0}}, \quad \mathbf{L}_{uu_0^{-1}} \in \text{SO}^e(\mathbf{V}, \mathbf{g}). \quad (1.106)$$

Em resumo, podemos dizer que o espaço S dos referenciais espinoriais algébricos pode ser visto como uma *extensão* do espaço \mathcal{B} dos *referenciais vetoriais*, onde mesmo se dois referenciais vetoriais tiverem os mesmos vetores ordenados, eles serão considerados distintos se o eixo de rotação espacial de um referencial for rotado por um múltiplo ímpar de 2π em relação ao outro referencial, e considerado o mesmo se for rotado por um múltiplo par de 2π , isso se deve ao fato de o grupo $\text{SO}^e(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ não ser simplesmente conexo para $\dim \mathbf{V} \geq 2$. Para mais detalhes [1, 18, 20, 38].

(vi) Antes de prosseguirmos é importante estabelecermos mais algumas notações. Vimos anteriormente como construir um ideal minimal à esquerda (à direita) numa dada álgebra de Clifford a partir de uma base vetorial $b \in \mathcal{B}$ para $\mathbf{V} \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ dada. Essa construção nos sugere rotular um dado idempotente primitivo, que corresponde à esse ideal, com o subíndice b . Entretanto, levando em consideração a discussão acima sobre referenciais vetoriais e referenciais espinoriais algébricos e suas relações, se mostrará mais útil para o que se segue, indexar o dado idempotente primitivo e seu ideal correspondente com um subíndice u , i.e., Ξ_u . Esta notação também é justificada pelo fato de um dado idempotente, de acordo com a definição 79, ser o representante de um espinor particular num dado referencial espinorial Ξ_u .

(vii) Agora note que pelo Teorema 53 temos que um ideal minimal à esquerda de $\mathcal{C}\ell(\mathbf{V}, \mathbf{g})$ é do tipo

$$I_{\Xi_u} = \mathcal{C}\ell(\mathbf{V}, \mathbf{g})e_{\Xi_u}, \quad (1.107)$$

onde e_{Ξ_u} é um idempotente primitivo de $\mathcal{C}\ell(\mathbf{V}, \mathbf{g})$.

É fácil ver que os ideais $I_{\Xi_u} = \mathcal{Cl}(\mathbf{V}, \mathbf{g})e_{\Xi_u}$ e $I_{\Xi_{u'}} = \mathcal{Cl}(\mathbf{V}, \mathbf{g})e_{\Xi_{u'}}$, tal que

$$e_{\Xi_{u'}} = (u'^{-1}u)e_{\Xi_u}(u'^{-1}u)^{-1} \quad (1.108)$$

$u, u' \in \text{Spin}^e(\mathbf{V}, \eta)$ são isomorfos.

Definição 77. *Dois ideais $I_{\Xi_u} = \mathcal{Cl}(\mathbf{V}, \mathbf{g})e_{\Xi_u}$ e $I_{\Xi_{u'}} = \mathcal{Cl}(\mathbf{V}, \mathbf{g})e_{\Xi_{u'}}$ tais que seus idempotentes geradores estão relacionados por Eq.(1.108) são ditos geometricamente equivalentes.*

Observação 78. *Se u é simplesmente um elemento do grupo de Clifford, então os ideais são ditos algebricamente equivalentes.*

Mas note que nenhuma relação de equivalência foi definida até agora. Temos:

$$I_{\Xi_{u'}} = I_{\Xi_u}(u'^{-1}u)^{-1}, \quad (1.109)$$

Espinores Algébricos do tipo I_{Ξ_u}

Seja $\{I_{\Xi_u}\}$ o conjunto de todos os ideais minimais geometricamente equivalentes a um dado ideal minimal $I_{\Xi_{u_0}}$ como definido na Eq.(1.109). Seja,

$$\mathfrak{T} = \{(\Xi_u, \Psi_{\Xi_u}) \mid u \in \text{Spin}^e(\mathbf{V}, \mathbf{g}), \Xi_u \in S, \Psi_{\Xi_u} \in I_{\Xi_u}\}. \quad (1.110)$$

Tome $\Xi_u, \Xi_{u'} \in S$, $\Psi_{\Xi_u} \in I_{\Xi_u}$, $\Psi_{\Xi_{u'}} \in I_{\Xi_{u'}}$. Definimos uma relação de equivalência \mathcal{E} em \mathfrak{T} por:

$$(\Xi_u, \Psi_{\Xi_u}) \sim (\Xi_{u'}, \Psi_{\Xi_{u'}}), \quad (1.111)$$

se e somente se $us(\Xi_u)u^{-1} = u's(\Xi_{u'})u'^{-1}$ e

$$\Psi_{\Xi_{u'}}u'^{-1} = \Psi_{\Xi_u}u^{-1}. \quad (1.112)$$

Definição 79. *Uma classe de equivalência*

$$\Psi_{\Xi_u} = [(\Xi_u, \Psi_{\Xi_u})] \in \mathfrak{T}/\mathcal{E} \quad (1.113)$$

é chamada de um espinor algébrico do tipo I_{Ξ_u} para $\mathcal{Cl}(\mathbf{V}, \mathbf{g})$. Um elemento $\psi_{\Xi_u} \in I_{\Xi_u}$ é dito um representante do espinor algébrico Ψ_{Ξ_u} no referencial espinorial Ξ_u .

Observe que os pares (Ξ_u, Ψ_{Ξ_u}) e $(\Xi_{-u}, \Psi_{\Xi_{-u}}) = (\Xi_{-u}, -\Psi_{\Xi_u})$ são equivalentes, mas os pares (Ξ_u, Ψ_{Ξ_u}) e $(\Xi_{-u}, -\Psi_{\Xi_{-u}}) = (\Xi_{-u}, \Psi_{\Xi_u})$ não são. Damos uma estrutura linear ao espaço (sobre o corpo dos reais) ao conjunto \mathfrak{T} , onde:

$$\begin{aligned} a[(\Xi_u, \Psi_{\Xi_u})] + b[(\Xi_{u'}, \Psi'_{\Xi_{u'}})] &= [(\Xi_u, a\Psi_{\Xi_u})] + [(\Xi_{u'}, b\Psi'_{\Xi_{u'}})], \\ (a+b)[(\Xi_u, \Psi_{\Xi_u})] &= a[(\Xi_u, \Psi_{\Xi_u})] + b[(\Xi_u, \Psi_{\Xi_u})]. \end{aligned} \quad (1.114)$$

1.6.2 a-espinores, c-espinores e os o-espinores

A definição de espinores algébricos que acabamos de introduzir é essencial para a definição de campos espinoriais em variedades que possuam estrutura spin como veremos no próximo Capítulo. Contudo, antes de investigarmos esta questão é oportuno saber como a definição apresentada se relaciona com outras definições de espinores que o leitor encontrará ao consultar textos de Física e de teoria de representações do grupos ortogonais e seus recobrimentos. Aqui recordaremos brevemente as principais definições, seguindo as ideias apresentadas em [17].

- (i) A definição covariante [7], onde um particular tipo de espinor covariante (c-espinor), em uma dada base espinorial, é um elemento de um dado espaço vetorial complexo (que carrega uma particular representação de um grupo Spin) e dotado de uma métrica espinorial invariante sob ações de um dado grupo Spin.
- (ii) A definição por ideais [11, 40, 19], onde um particular tipo de espinor algébrico (e-espinor), em uma dada base espinorial, é um elemento de um ideal lateral (definido pelo idempotente e) numa algebra de Clifford apropriada. Quando o idempotente e é primitivo nós escrevemos a-espinor ao invés de e-espinor.
- (iii) A definição como operador [21], onde um particular tipo de espinor operatorial (o-espinor) é um número de Clifford numa álgebra de Clifford apropriada $\mathbb{R}_{p,q}$. Para mais detalhes veja [17].

Para nossa formulação, começaremos por lembrar alguns dos tipos de c-espinores usado na literatura de Física.

c-espinores de Pauli

Estes objetos são usualmente identificados como os vetores de um espaço 2-dimensional \mathbb{C}^2 equipado com a métrica espinorial

$$\beta_p : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \beta_p(\psi, \phi) = \psi^* \phi,$$

$$\psi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \phi = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, x_i, y_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \psi^* = (x_1^*, x_2^*), \quad (1.115)$$

onde o símbolo x^* significa o complexo conjugado de $x \in \mathbb{C}$.

Observação 80. *Nesta definição e nas demais nesta seção ao denotarmos um dado espinor por φ fica subentendido que estamos nos referindo à φ como um representante numa dada base espinorial Ξ_u de um objeto abstrato φ como introduzido na Definição 79 onde os elementos do ideal gerado por um dado idempotente são representados por matrizes colunas complexas. Mais especificamente recordemos que se φ_{Ξ_u} e $\varphi_{\Xi_{u'}}$ são os representantes de φ em I_{Ξ_u} e $I_{\Xi_{u'}}$, temos que ação do grupo $\text{Spin}_{3,0}^e$ em φ_{Ξ_u} é tal que (veja a Eq.(1.112))*

$$u \cdot \varphi_{\Xi_0} \mapsto \varphi_{\Xi_u} = \varphi_{\Xi_0} u, \quad u, \in \text{Spin}_{3,0}^e \quad (1.116)$$

Contudo note que como ideais geometricamente equivalentes possuem a mesma representação matricial tanto φ_{Ξ_u} como $\varphi_{\Xi_{uu}}$, pertencem ao mesmo espaço \mathbb{C}^2 . Assim, se φ e φ' são os representantes de φ_{Ξ_u} e $\varphi_{\Xi_{u'}}$ em \mathbb{C}^2 a Eq.(1.116) se traduz em

$$\varphi' = u\varphi, \quad (1.117)$$

onde $u \in \mathbb{C}(2)$ é o representante $D^{\frac{1}{2}}$ de $u \in \text{Spin}_{3,0}^e \simeq SU(2)$. A relação explícita entre φ_{Ξ_u} e φ será dada na Seção 1.6.4.

Note que a métrica espinorial é invariante sob a ação do grupo¹⁵ $SU(2) \simeq \text{Spin}_{3,0}^e$, i.e.,

$$\beta_p(u\psi, u\phi) = \beta_p(\psi, \phi) \quad (1.118)$$

ou seja a métrica é invariante por mudança de referencial espinorial. Dizemos que os espinores de Pauli carregam a representação fundamental irredutível $D^{\frac{1}{2}}$ de $SU(2)$ [17]. Os c-espinores que acabamos de introduzir podem ser identificados com os espinores puros de Cartan mencionados no início da Seção 1.6.

c-espinores de Weyl

Estes objetos foram introduzidos por Weyl [50]. Temos as seguintes definições.

Espinores Não-Pontuados Contravariantes Estes objetos são elementos de um espaço vetorial complexo 2-dimensional \mathbb{C}^2 equipado com a seguinte métrica espinorial

$$\beta : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \beta(\eta, \xi) = \eta^t \mathbf{C} \xi, \\ \eta = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix}, \eta^t = (\eta^1, \eta^2), \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essa métrica espinorial é invariante sob ação do grupo $SL(2, \mathbb{C})$, i.e.,

$$\beta(u\eta, u\xi) = \beta(\eta, \xi) \Leftrightarrow u^t \mathbf{C} u = \mathbf{C} \Leftrightarrow u \in D^{(1/2,0)}. \quad (1.119)$$

Aqui u é a representação matricial bidimensional $D^{(1/2,0)}$ de $SL(2, \mathbb{C}) \simeq \text{Spin}_{1,3}^e$.

Espinores Não-Pontuados Covariantes Estes objetos são elementos do espaço dual

$(\mathbb{C}^2)^* =: \overset{\Delta}{\mathbb{C}^2}$ definidos por

$$\overset{\Delta}{\mathbb{C}^2} \ni \overset{\Delta}{\eta} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}; \quad \overset{\Delta}{\eta}(\xi) = \overset{\Delta}{\eta} \xi := \beta(\eta, \xi), \\ (\eta_1, \eta_2) = \overset{\Delta}{\eta} := \eta^t \mathbf{C} = (\eta^2, -\eta^1). \quad (1.120)$$

¹⁵ $SU(2)$ é o recobrimento universal de $SO_{3,0}$.

Espinores Pontuados Contravariantes Estes objetos são elementos do espaço dual $(\mathbb{C}^2)^* =: \overset{\cdot}{\mathbb{C}^2}$ definidos por

$$\overset{\cdot}{\mathbb{C}^2} \ni \dot{\eta} =: (\eta_1, \eta_2) := (\eta^{*1}, \eta^{*2}) = \eta^*, \eta \in \mathbb{C}^2, \quad (1.121)$$

podemos equipar $\overset{\cdot}{\mathbb{C}^2}$ com a seguinte métrica espinorial

$$\dot{\beta} : \overset{\cdot}{\mathbb{C}^2} \times \overset{\cdot}{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}, \dot{\beta}(\dot{\eta}, \dot{\xi}) = \dot{\eta} \mathbf{C} \dot{\xi}^t, \quad (1.122)$$

e temos que

$$\dot{\beta}(\dot{\eta}, \dot{\xi}) = \beta(\dot{\eta} u^*, \dot{\xi} u^*) \Leftrightarrow u^* \mathbf{C} u^{*t} = \mathbf{C}. \quad (1.123)$$

Espinores Pontuados Covariantes Estes objetos são elementos do espaço dual $\left(\overset{\cdot}{\mathbb{C}^2}\right)^* =: \overset{\Delta}{\mathbb{C}^2}$ definidos por

$$\overset{\Delta}{\mathbb{C}^2} \ni \overset{\Delta}{\xi} := \dot{\beta}(\cdot, \dot{\xi}); \dot{\eta}(\overset{\Delta}{\xi}) := \dot{\eta} \overset{\Delta}{\xi} = \dot{\eta} \mathbf{C} \dot{\xi}^t, \quad (1.124)$$

daqui segue que

$$\overset{\Delta}{\xi} = \mathbf{C} \dot{\xi}^t = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^2 \\ -\xi^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^{*2} \\ -\xi^{*1} \end{pmatrix}. \quad (1.125)$$

Portanto as leis de transformação dos espinores pontuados sob a ação do grupo $SL(2, \mathbb{C})$ são

$$\dot{\eta} \mapsto \dot{\eta} u^*; \overset{\Delta}{\eta} \mapsto (u^*)^{-1} \overset{\Delta}{\eta}. \quad (1.126)$$

As matrizes u e $(u^*)^{-1}$ são as representações não equivalentes $D^{(\frac{1}{2}, 0)}$ e $D^{(0, \frac{1}{2})}$ de $SL(2, \mathbb{C})$ [17].

c-espinores de Dirac (na Representação de Weyl)

Estes são elementos de um espaço vetorial complexo 4-dimensional \mathbb{C}^4 , equipado com a seguinte métrica espinorial

$$\beta_d : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C},$$

$$\beta_d(\psi_d, \phi_d) = \psi_d^t \mathbf{B} \phi_d, \quad (1.127)$$

onde um elemento desse espaço é da forma

$$\overset{\Delta}{\mathbb{C}^2} \oplus \overset{\Delta}{\mathbb{C}^2} = \mathbb{C}^4 \ni \psi_d = \dot{\eta} \oplus \overset{\Delta}{\xi} = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}. \quad (1.128)$$

Na base canônica de \mathbb{C}^4 a matriz \mathbf{B} é a representação de β_d e

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \begin{pmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & \mathbf{C} \end{pmatrix}, \\ \beta_d(\psi_d, \phi_d) &= \beta_d(\rho(u)\psi_d, \rho(u)\phi_d), \\ \rho(u) &= \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & (u^*)^{-1} \end{pmatrix}, u \in SL(2, \mathbb{C}).\end{aligned}\tag{1.129}$$

A lei de transformação dos c-espinores de Dirac, sob a ação de $SL(2, \mathbb{C})$, é então

$$\psi_d \mapsto \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & (u^*)^{-1} \end{pmatrix} \psi_d.\tag{1.130}$$

Dizemos assim que os c-espinores de Dirac, carregam a representação $D^{(\frac{1}{2}, 0)} \oplus D^{(0, \frac{1}{2})}$ de $SL(2, \mathbb{C})$.

1.6.3 Construção e Representação de a-espinores e de Métricas Espinoriais

Vamos agora mostrar como representar alguns c-espinores numa álgebra $\mathbb{R}_{p,q}$ conveniente, fazendo portanto contato com a definição abstrata dada na seção 1.6.1. Dada uma álgebra de Clifford real $\mathbb{R}_{p,q}$, chamamos de um a-espinor, um elemento de um ideal minimal à esquerda (direita) $\mathbb{R}_{p,q}e_{p,q}$ ($e_{p,q}\mathbb{R}_{p,q}$) ou $\mathbb{R}_{p,q}^0e_{p,q}^0$ ($e_{p,q}^0\mathbb{R}_{p,q}^0$), onde $e_{p,q}$ e $e_{p,q}^0$ são idempotentes primitivos de $\mathbb{R}_{p,q}$.

Dadas as definições do grupo $\text{Spin}_{p,q}$ e dos a-espinores num ideal $I_{p,q} = \mathbb{R}_{p,q}e_{p,q}$, podemos introduzir uma métrica em $I_{p,q}$ que mimetiza os resultados da seção anterior e que é invariante sob as transformações $\psi \mapsto u\psi$, $u \in \text{Spin}_{p,q}^e$, $\psi \in I_{p,q}$.

Sabemos que a involução principal é um automorfismo, enquanto a transposição e a conjugação são antiautomorfismos. A imagem de um idempotente primitivo por um isomorfismo é um idempotente primitivo. Um automorfismo (antiautomorfismo) transforma um elemento de um ideal minimal à esquerda num elemento de um ideal minimal à esquerda (direita). Para vermos isso, note que se $\psi \in I_{p,q}$, então $\psi = xe_{p,q}$ com $x \in \mathbb{R}_{p,q}$ e

$$\begin{aligned}\hat{\psi} &= (xe_{p,q})^\wedge = \hat{x}\hat{e}_{p,q} \Rightarrow \hat{\psi} \in \hat{I}_{p,q} = \mathbb{R}_{p,q}\hat{e}_{p,q}, \\ \tilde{\psi} &= (xe_{p,q})^\sim = \tilde{e}_{p,q}\tilde{x} \Rightarrow \tilde{\psi} \in \tilde{I}_{p,q} = \tilde{e}_{p,q}\mathbb{R}_{p,q}, \\ \bar{\psi} &= (xe_{p,q})^\bar{} = \bar{e}_{p,q}\bar{x} \Rightarrow \bar{\psi} \in \bar{I}_{p,q} = \bar{e}_{p,q}\mathbb{R}_{p,q},\end{aligned}\tag{1.131}$$

Se usarmos o isomorfismo $\mathbb{R}_{p,q} \simeq \text{End}_{\mathbb{K}}(I_{p,q}) \simeq \mathbb{K}(m)$, quando $\mathbb{R}_{p,q}$ é simples, identificaremos os elementos de ideais minimais à esquerda de $\mathbb{R}_{p,q}$ com matrizes colunas de $\mathbb{K}(m)$. Daqui, $\psi \in I_{p,q}$ tem uma representação como uma matriz coluna em $\mathbb{K}(m)$, então $\hat{\psi}$ e $\tilde{\psi}$ tem como representações matrizes linha de $\mathbb{K}(m)$, portanto teremos que $\hat{\psi}\varphi$ e $\tilde{\psi}\varphi$ são elementos de \mathbb{K} , para $\psi, \varphi \in I_{p,q}$.

Portanto podemos definir os seguintes produtos escalares em $I_{p,q}$

$$\beta_i = I_{p,q} \times I_{p,q} \rightarrow \mathbb{K}, i = 1, 2, \quad (1.132)$$

$\beta_1(\psi, \varphi) = \tilde{\psi}\varphi$ e $\beta_2(\psi, \varphi) = \bar{\psi}\varphi, \forall \psi, \varphi \in I_{p,q}$. Lounesto em [30] obtém esses produtos escalares e classifica os grupos de automorfismos desses produtos, i. e., os homomorfismos, $I_{p,q} \rightarrow I_{p,q}, \psi \mapsto s\psi, s \in \mathbb{R}_{p,q}$, que preservam o produto na Eq.(1.132). Note que de $\beta_1(s\psi, s\varphi) = \beta_1(\psi, \varphi)$ temos $\tilde{s}s = 1$ e de $\beta_2(s\psi, s\varphi) = \beta_2(\psi, \varphi)$ temos $\bar{s}s = 1$. Lounesto denotou por $G_1 = \{s \in \mathbb{R}_{p,q}; \tilde{s}s = 1\}, G_2 = \{s \in \mathbb{R}_{p,q}; \bar{s}s = 1\}$.

Em [17] é estabelecida uma relação entre o grupo $\text{Spin}_{p,q}^e$ e os grupos G_1 e G_2 de forma que podemos introduzir em uma álgebra $\mathbb{R}_{p,q}$ (para apropriados p e q) os resultados sobre c-espinores descritos nas seções anteriores. Para tanto devemos inserir o conceito de métrica espinorial em uma dada álgebra de Clifford.

Note que $\text{Spin}_{p,q}^e \subset \mathbb{R}_{p,q}^0$, portanto é interessante definirmos uma métrica num ideal $I_{p,q}^0 = \mathbb{R}_{p,q}^0 e_{p,q}^0$. Assim aproveitamos que para $s \in \mathbb{R}_{p,q}^0$ teremos $\tilde{s} = \bar{s}$ e definimos a seguinte métrica espinorial

$$\beta : I_{p,q}^0 \times I_{p,q}^0 \rightarrow \mathbb{K}, \quad (1.133)$$

$$\beta(\psi, \varphi) = \tilde{\psi}\varphi. \quad (1.134)$$

Note que $G = \{s \in \mathbb{R}_{p,q}^0; \bar{s}s = 1\}$ é o grupo de automorfismos que mantém a métrica espinorial invariante e $G \subset G_1, G \subset G_2$.

Sabemos que para $p + q \leq 4$

$$\text{Spin}_{p,q}^e = \{u \in \mathbb{R}_{p,q}^0; \tilde{u}u = \bar{u}u = 1\}. \quad (1.135)$$

Assim temos uma nova interpretação para um grupo $\text{Spin}_{p,q}^e$ quando $p + q \leq 4$; de fato, esse é o grupo que deixa a métrica espinorial Eq.(1.133) invariante. O importante é que agora podemos reproduzir a construção dos c-espinores dentro de álgebras de Clifford apropriadas. Seguindo as construções feitas em [17], vamos refazer a construção dos a-espinores de Pauli em $\mathbb{R}_{3,0}$.

a-Espinores de Pauli

Consideremos a álgebra de Pauli $\mathbb{R}_{3,0} \simeq \mathbb{C}(2)$, gerada por $\mathbf{1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ tal que $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = 2\delta_{ij}, i, j = 1, 2, 3$, e seja

$$\begin{aligned} x &= a_1\mathbf{1} + a_2\mathbf{e}_1 + a_3\mathbf{e}_2 + a_4\mathbf{e}_3 + a_5\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_6\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + a_7\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + a_8\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}_{3,0}, \\ a_i &\in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 8. \end{aligned} \quad (1.136)$$

Vamos obter primeiramente a chamada representação espinorial para essa álgebra. Considere o idempotente $\mathbf{e}_{3,0} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{e}_3)$. Conforme discutido acima temos $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_{3,0}\mathbf{e}_{3,0} = \frac{\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_{3,0}}{2} = \frac{2^3}{2} = 2^2$, portanto $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{R}_{3,0}\mathbf{e}_{3,0} = 2$ e assim $I_{3,0} = \mathbb{R}_{3,0}\mathbf{e}_{3,0}$ é um ideal minimal à

esquerda de $\mathbb{R}_{3,0}$. Com uma breve inspeção vemos que $\{\mathbf{e}_{3,0}, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_{3,0}, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_{3,0}, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_{3,0}\}$ é uma base sobre \mathbb{R} de $I_{3,0}$. Um elemento $y = e_{3,0}xe_{3,0} \in e_{3,0}\mathbb{R}_{3,0}e_{3,0} \simeq \mathbb{C}e_{3,0} \simeq \mathbb{C}$ tem a forma

$$y = [(a_1 + a_4)\mathbf{1} + (a_5 + a_8)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]e_{3,0}, \quad (1.137)$$

assim identificaremos com \mathbb{C} o subespaço de $\mathbb{R}_{3,0}$ gerado por $\{\mathbf{1}, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\}$ sobre \mathbb{R} e denotaremos $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{I}$. Note que \mathbf{I} comuta com todos os elementos da álgebra e $\mathbf{I}^2 = -\mathbf{1}$. Escrevemos $z = xe_{3,0} \in \mathbb{R}_{3,0}e_{3,0}$ na forma

$$z = [(a_1 + a_4)\mathbf{1} + (a_5 + a_8)\mathbf{I}]e_{3,0} + [(a_2 + a_6)\mathbf{1} + (a_3 + a_7)\mathbf{I}]\mathbf{e}_1e_{3,0}, \quad (1.138)$$

assim $\alpha = \{\mathbf{e}_{3,0}, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_{3,0}\}$ é base de $I_{3,0}$ sobre \mathbb{C} , que chamaremos de uma base espinorial para $I_{3,0} = \mathbb{R}_{3,0}e_{3,0}$.

Considere o idempotente $\bar{e}_{3,0} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{e}_3)$. Pelo mesmo argumento anterior teremos que $\bar{I}_{3,0} = \mathbb{R}_{3,0}\bar{e}_{3,0}$ é um ideal minimal à esquerda de $\mathbb{R}_{3,0}$. Aqui $\{\bar{e}_{3,0}, \mathbf{e}_1\bar{e}_{3,0}, \mathbf{e}_2\bar{e}_{3,0}, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\bar{e}_{3,0}\}$ é uma base sobre \mathbb{R} de $\bar{I}_{3,0}$. $\bar{e}_{3,0}\mathbb{R}_{3,0}\bar{e}_{3,0} \simeq \mathbb{C}\bar{e}_{3,0} \simeq \mathbb{C}$. Escrevemos $\bar{z} = x\bar{e}_{3,0} \in \mathbb{R}_{3,0}\bar{e}_{3,0}$ na forma

$$\bar{z} = [(a_1 - a_4)\mathbf{1} + (-a_5 + a_8)\mathbf{I}]\bar{e}_{3,0} + [(a_2 - a_6)\mathbf{1} + (-a_3 + a_7)\mathbf{I}]\mathbf{e}_1\bar{e}_{3,0}, \quad (1.139)$$

assim $\beta = \{\bar{e}_{3,0}, \mathbf{e}_1\bar{e}_{3,0}\}$ é base de $\bar{I}_{3,0}$ sobre \mathbb{C} , que chamaremos de uma base espinorial para $\bar{I}_{3,0} = \mathbb{R}_{3,0}\bar{e}_{3,0}$.

Para conseguirmos uma representação conveniente para $\mathbb{R}_{3,0}$ em $\mathbb{C}(2)$ consideraremos as bases α e β de $I_{3,0}$ e $\bar{I}_{3,0}$ e denotaremos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{11} &= e_{3,0}, \mathcal{E}_{21} = \mathbf{e}_1e_{3,0}, \\ \mathcal{E}_{12} &= \mathbf{e}_1\bar{e}_{3,0}, \mathcal{E}_{22} = \bar{e}_{3,0}, \end{aligned} \quad (1.140)$$

note que teremos $\mathcal{E}_{ij}\mathcal{E}_{kl} = \delta_{jk}\mathcal{E}_{il}; i, j, k, l = 1, 2$. Seja $x \in \mathbb{R}_{3,0} \simeq I_{3,0} \oplus \bar{I}_{3,0} \simeq \mathbb{C}(2)$, podemos escrever

$$x = x_{11}\mathcal{E}_{11} + x_{21}\mathcal{E}_{21} + x_{12}\mathcal{E}_{12} + x_{22}\mathcal{E}_{22}, x_{ij} \in \mathbb{C}, i, j = 1, 2. \quad (1.141)$$

Portanto, em vista de Eq.(1.58) e Eq.(1.141) temos que

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R}_{3,0} &\rightarrow \mathbb{C}(2) \\ x &= x_{11}\mathcal{E}_{11} + x_{21}\mathcal{E}_{21} + x_{12}\mathcal{E}_{12} + x_{22}\mathcal{E}_{22} \\ &\mapsto x_{11}E_{11} + x_{21}E_{21} + x_{12}E_{12} + x_{22}E_{22}, \end{aligned} \quad (1.142)$$

é um isomorfismo de álgebras. Considerando as seguintes relações

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= \mathcal{E}_{11} + \mathcal{E}_{22}, \mathbf{e}_1 = \mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_{21}, \\ \mathbf{e}_3 &= \mathcal{E}_{11} - \mathcal{E}_{22}, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = \mathcal{E}_{21} - \mathcal{E}_{12}, \\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 &= \mathbf{I}\mathbf{e}_3 = \mathbf{I}\mathcal{E}_{11} - \mathbf{I}\mathcal{E}_{22}, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{I}\mathbf{e}_1 = \mathbf{I}\mathcal{E}_{12} + \mathbf{I}\mathcal{E}_{21}, \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{I}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = \mathbf{I}\mathcal{E}_{21} - \mathbf{I}\mathcal{E}_{12}, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{I}\mathbf{1} = \mathbf{I}\mathcal{E}_{11} + \mathbf{I}\mathcal{E}_{22}, \end{aligned} \quad (1.143)$$

conseguimos então a seguinte representação matricial para $\mathbb{R}_{3,0}$

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \rho(\mathbf{e}_2) &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \rho(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (1.144)$$

que são as conhecidas matrizes de Pauli $\sigma_i = \rho(\mathbf{e}_i)$, $i = 1, 2, 3$.

Com isso dispomos das seguintes representações matriciais para $\mathbb{R}_{3,0} \ni x, \hat{x}, \tilde{x}, \bar{x}$

$$\begin{aligned}\mathbb{C}(2) \ni x &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \hat{x} = \begin{pmatrix} x_{22}^* & -x_{21}^* \\ -x_{12}^* & x_{11}^* \end{pmatrix}, \\ \tilde{x} &= \begin{pmatrix} x_{11}^* & x_{21}^* \\ x_{12}^* & x_{22}^* \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (1.145)$$

Estamos capacitados agora para introduzirmos a seguinte métrica espinorial

$$\beta_d : I_{3,0} \times I_{3,0} \rightarrow \mathbb{C}; \quad \beta_d(\psi, \varphi) = \bar{\psi}^1 \varphi^1 + \bar{\psi}^2 \varphi^2, \quad \psi, \varphi \in I_{3,0}. \quad (1.146)$$

A representação de β_d na base α é então

$$[\beta_d]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}_2, \quad (1.147)$$

logo, $\beta_d(\psi, \varphi) = \beta_d(u\psi, u\varphi) \Leftrightarrow u^*u = 1 \Leftrightarrow u \in U(2)$.

Agora, se $x \in \mathbb{R}_{3,0}^0 \simeq \mathbb{R}_{0,2} \simeq \mathbb{H}$, temos a seguinte representação para x na base α

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2^* \\ x_2 & x_1^* \end{pmatrix}; \quad \tilde{x} = \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1^* & x_2^* \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix}, \quad (1.148)$$

Então, $N(x) = \bar{x}x = \det x \cdot 1 \Rightarrow N(x) = 1 \Leftrightarrow \det x = 1$. Ou seja, os elementos $u \in \mathbb{R}_{3,0}^0$ tal que $\beta_d(u\psi, u\varphi) = \beta_d(\psi, \varphi)$, $\psi, \varphi \in I_{3,0}^0 = \mathbb{R}_{3,0}^0 \mathbf{e}_{3,0}$, satisfazem $\bar{u}u = 1$ e $\det u = 1$, i.e., $u \in SU(2) \simeq \text{Spin}_3^e$. Completamos então a afirmação de que os c -espinores de Pauli são representados por elementos de $I_{3,0}^0$. Dizemos assim que os espinores de Pauli carregam a representação $D^{1/2}$ de $SU(2)$.

Representação Espinorial de $\mathbb{R}_{1,2}$

Para alguns desenvolvimentos do Captulo 4 é necessário conhecermos a representações espinoriais fundamentais de $\mathbb{R}_{1,2}$ e de $\mathbb{R}_{2,1}$. Consideremos a álgebra $\mathbb{R}_{1,2} \simeq \mathbb{C}(2)$, gerada por $\mathbf{1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ tal que $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i = 2\zeta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, onde $\zeta_{ij} = \text{diag}(1, -1, -1)$ e seja

$$\begin{aligned}x &= a_1 \mathbf{1} + a_2 \mathbf{e}_1 + a_3 \mathbf{e}_2 + a_4 \mathbf{e}_3 + a_5 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + a_6 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + a_7 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + a_8 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}_{1,2}, \\ a_i &\in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 8.\end{aligned}\quad (1.149)$$

Considere o idempotente $e_{1,2} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)$. Novamente temos $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_{1,2}e_{1,2} = \frac{\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_{1,2}}{2} = \frac{2^3}{2} = 2^2$, portanto $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{R}_{1,2}e_{1,2} = 2$ e assim $I_{1,2} = \mathbb{R}_{1,2}e_{1,2}$ é um ideal minimal à esquerda de $\mathbb{R}_{1,2}$. Com um pouco de cálculo vemos que $\{e_{1,2}, \mathbf{e}_1e_{1,2}, \mathbf{e}_3e_{1,2}, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3e_{1,2}\}$ é uma base sobre \mathbb{R} de $I_{1,2}$. Um elemento $y = e_{1,2}xe_{1,2} \in e_{1,2}\mathbb{R}_{1,2}e_{1,2} \simeq \mathbb{C}e_{1,2} \simeq \mathbb{C}$ tem a forma

$$y = [(a_1 + a_5)\mathbf{1} + (a_4 + a_8)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]e_{1,2}, \quad (1.150)$$

assim identificaremos com \mathbb{C} o subespaço de $\mathbb{R}_{1,2}$ gerado por $\{\mathbf{1}, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\}$ sobre \mathbb{R} e denotaremos $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{I}$. Note que \mathbf{I} comuta com todos os elementos da álgebra e $\mathbf{I}^2 = -\mathbf{1}$. Escrevemos $z = xe_{2,1} \in \mathbb{R}_{1,2}e_{1,2}$ na forma

$$z = [(a_1 + a_5)\mathbf{1} + (a_4 + a_8)\mathbf{I}]e_{1,2} + [(a_2 + a_3)\mathbf{1} + (a_6 + a_7)\mathbf{I}]\mathbf{e}_1e_{1,2}, \quad (1.151)$$

assim $\alpha = \{e_{2,1}, \mathbf{e}_1e_{2,1}\}$ é base de $I_{1,2}$ sobre \mathbb{C} , que chamaremos de uma base espinorial para $I_{1,2} = \mathbb{R}_{1,2}e_{1,2}$.

Considere o idempotente $\bar{e}_{1,2} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)$. Pelo mesmo argumento de antes teremos que $\bar{I}_{1,2} = \mathbb{R}_{1,2}\bar{e}_{1,2}$ é um ideal minimal à esquerda de $\mathbb{R}_{1,2}$. Aqui $\{\bar{e}_{1,2}, \mathbf{e}_1\bar{e}_{1,2}, \mathbf{e}_2\bar{e}_{1,2}, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\bar{e}_{1,2}\}$ é uma base sobre \mathbb{R} de $\bar{I}_{1,2}$. $\bar{e}_{1,2}\mathbb{R}_{1,2}\bar{e}_{1,2} \simeq \mathbb{C}\bar{e}_{1,2} \simeq \mathbb{C}$. Escrevemos $\bar{z} = x\bar{e}_{1,2} \in \mathbb{R}_{1,2}\bar{e}_{1,2}$ na forma

$$\bar{z} = [(a_1 - a_5)\mathbf{1} + (-a_4 + a_8)\mathbf{I}]\bar{e}_{1,2} + [(a_2 - a_3)\mathbf{1} + (-a_6 + a_7)\mathbf{I}]\mathbf{e}_1\bar{e}_{1,2}, \quad (1.152)$$

assim $\beta = \{\bar{e}_{1,2}, \mathbf{e}_1\bar{e}_{1,2}\}$ é base de $\bar{I}_{1,2}$ sobre \mathbb{C} , que chamaremos de uma base espinorial para $\bar{I}_{1,2} = \mathbb{R}_{1,2}\bar{e}_{1,2}$.

Para conseguirmos uma representação conveniente para $\mathbb{R}_{1,2}$ em $\mathbb{C}(2)$ consideraremos as bases α e β de $I_{1,2}$ e $\bar{I}_{1,2}$ e denotaremos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{11} &= e_{1,2}, \mathcal{E}_{21} = \mathbf{e}_1e_{1,2}, \\ \mathcal{E}_{12} &= \mathbf{e}_1\bar{e}_{1,2}, \mathcal{E}_{22} = \bar{e}_{1,2}, \end{aligned} \quad (1.153)$$

note que teremos $\mathcal{E}_{ij}\mathcal{E}_{kl} = \delta_{jk}\mathcal{E}_{il}; i, j, k, l = 1, 2$. Seja $x \in \mathbb{R}_{1,2} \simeq I_{1,2} \oplus \bar{I}_{1,2} \simeq \mathbb{C}(2)$, podemos escrever

$$x = x_{11}\mathcal{E}_{11} + x_{21}\mathcal{E}_{21} + x_{12}\mathcal{E}_{12} + x_{22}\mathcal{E}_{22}, x_{ij} \in \mathbb{C}, i, j = 1, 2. \quad (1.154)$$

Portanto, em vista de Eq.(1.58) e Eq.(1.154) temos que

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R}_{2,1} &\rightarrow \mathbb{C}(2) \\ x &= x_{11}\mathcal{E}_{11} + x_{21}\mathcal{E}_{21} + x_{12}\mathcal{E}_{12} + x_{22}\mathcal{E}_{22} \mapsto \\ &\mapsto x_{11}E_{11} + x_{21}E_{21} + x_{12}E_{12} + x_{22}E_{22}, \end{aligned} \quad (1.155)$$

é um isomorfismo de álgebras. Considerando as seguintes relações

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= \mathcal{E}_{11} + \mathcal{E}_{22}, \mathbf{e}_1 = \mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_{21}, \\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 &= \mathcal{E}_{11} - \mathcal{E}_{22}, \mathbf{e}_2 = \mathcal{E}_{21} - \mathcal{E}_{12}, \\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 &= \mathbf{I}\mathcal{E}_2 = \mathbf{I}\mathcal{E}_{21} - \mathbf{I}\mathcal{E}_{12}, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{I}\mathbf{e}_1 = \mathbf{I}\mathcal{E}_{12} + \mathbf{I}\mathcal{E}_{21}, \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{I}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{I}\mathcal{E}_{11} - \mathbf{I}\mathcal{E}_{22}, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{I}\mathbf{1} = \mathbf{I}\mathcal{E}_{11} + \mathbf{I}\mathcal{E}_{22}, \end{aligned} \quad (1.156)$$

conseguimos então a seguinte representação matricial para $\mathbb{R}_{1,2}$

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \rho(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \rho(\mathbf{e}_2) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{1.157}$$

Representação espinorial de $\mathbb{R}_{2,1}$

Consideremos agora a álgebra $\mathbb{R}_{2,1} \simeq \mathbb{R}(2) \oplus \mathbb{R}(2)$, gerada por $\mathbf{1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ tal que $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i = 2\vartheta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, onde $\vartheta_{ij} = \text{diag}(1, 1, -1)$ e seja

$$\begin{aligned}x &= a_1 \mathbf{1} + a_2 \mathbf{e}_1 + a_3 \mathbf{e}_2 + a_4 \mathbf{e}_3 + a_5 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + a_6 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + a_7 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + a_8 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}_{2,1}, \\ a_i &\in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 8.\end{aligned}\tag{1.158}$$

Considerando os elementos $\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$, temos $(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)^2 = 1$ e $(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)^2 = 1$. E eles comutam: $(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1$ e $(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1$. Considere os idempotentes $f_1^\pm = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)$ e $f_2^\pm = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)$. Portanto temos que os idempotentes $g_1 = f_1^+ f_2^+$, $g_2 = f_1^+ f_2^-$, $g_3 = f_1^- f_2^+$, $g_4 = f_1^- f_2^-$ são primitivos.

Temos que $I_{2,1}^1 = \mathbb{R}_{2,1} g_1$ é um ideal minimal à esquerda de $\mathbb{R}_{2,1}$. Note que $\alpha_1 = \{g_1, \mathbf{e}_2 g_1\}$ é uma base sobre \mathbb{R} de $I_{2,1}^1$.

Temos que $I_{2,1}^2 = \mathbb{R}_{2,1} g_2$ é um ideal minimal à esquerda de $\mathbb{R}_{2,1}$. Note que $\alpha_2 = \{g_2, \mathbf{e}_2 g_2\}$ é uma base sobre \mathbb{R} de $I_{2,1}^2$.

Temos que $I_{2,1}^3 = \mathbb{R}_{2,1} g_3$ é um ideal minimal à esquerda de $\mathbb{R}_{2,1}$. Note que $\alpha_3 = \{g_3, \mathbf{e}_2 g_3\}$ é uma base sobre \mathbb{R} de $I_{2,1}^3$.

Temos que $I_{2,1}^4 = \mathbb{R}_{2,1} g_4$ é um ideal minimal à esquerda de $\mathbb{R}_{2,1}$. Note que $\alpha_4 = \{g_4, \mathbf{e}_2 g_4\}$ é uma base sobre \mathbb{R} de $I_{2,1}^4$.

Para conseguirmos uma representação conveniente para $\mathbb{R}_{2,1}$ em $\mathbb{R}(2) \oplus \mathbb{R}(2)$ consideraremos as bases $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e α_4 de $I_{2,1}^1, I_{2,1}^2, I_{2,1}^3$ e $I_{2,1}^4$, respectivamente e denotaremos:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{11} &= g_1, \mathcal{E}_{21} = \mathbf{e}_2 g_1, \\ \mathcal{E}_{12} &= \mathbf{e}_2 g_3, \mathcal{E}_{22} = g_3, \\ \tilde{\mathcal{E}}_{11} &= g_2, \tilde{\mathcal{E}}_{21} = \mathbf{e}_2 g_2, \\ \tilde{\mathcal{E}}_{12} &= \mathbf{e}_2 g_4, \tilde{\mathcal{E}}_{22} = g_4,\end{aligned}\tag{1.159}$$

note que teremos $\mathcal{E}_{ij} \mathcal{E}_{kl} = \delta_{jk} \mathcal{E}_{il}$; $i, j, k, l = 1, 2$ e $\tilde{\mathcal{E}}_{ij} \tilde{\mathcal{E}}_{kl} = \delta_{jk} \tilde{\mathcal{E}}_{il}$; $i, j, k, l = 1, 2$. Seja $x \in \mathbb{R}_{1,2} \simeq (I_{2,1}^1 \oplus I_{2,1}^3) \oplus (I_{2,1}^2 \oplus I_{2,1}^4) \simeq \mathbb{R}(2) \oplus \mathbb{R}(2)$, fazendo como acima, conseguimos

então a seguinte representação matricial para $\mathbb{R}_{2,1}$:

$$\begin{aligned}
\rho : \mathbb{R}_{2,1} &\rightarrow \mathbb{R}(2) \oplus \mathbb{R}(2), \\
\mathbf{1} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{e}_1 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{e}_2 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{e}_3 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.160}$$

1.6.4 Espinores Algébricos em $\mathbb{R}_{3,0}$

Seja $\Xi_u \in S$ um referencial espinorial para $\mathbb{R}^{3,0}$, tal que

$$s(\Xi_u) = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \in \mathcal{B}, \tag{1.161}$$

onde essa base é a que utilizamos na Eq.(1.136) para definirmos o idempotente $e_{3,0}$. Escrevamos

$$I_{\Xi_u} = \mathbb{R}_{3,0}e_{\Xi_u}, e_{\Xi_u} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{e}_3), \tag{1.162}$$

então cada $\Psi_{\Xi_u} \in I_{\Xi_u}$ pode ser escrito como

$$\Psi_{\Xi_u} = \psi_{\Xi_u} e_{\Xi_u}, \psi_{\Xi_u} \in \mathbb{R}_{3,0}, \tag{1.163}$$

seja $\Xi_{u'} \in S$ tal que os ideais I_{Ξ_u} e $I_{\Xi_{u'}}$ sejam geometricamente equivalentes, então da Eq.(1.109) teremos

$$\psi_{\Xi_{u'}} u'^{-1} u e_{\Xi_u} = \psi_{\Xi_u} e_{\Xi_u}, \psi_{\Xi_{u'}}, \psi_{\Xi_u} \in \mathbb{R}_{3,0}, \tag{1.164}$$

uma possível solução para a Eq.(1.164) é

$$\psi_{\Xi_{u'}} u'^{-1} = \psi_{\Xi_u} u^{-1}. \tag{1.165}$$

Se considerarmos \mathfrak{T} como na Eq.(1.110) e com a mesma relação de equivalência \mathcal{E} os espinores algébricos em $\mathbb{R}_{3,0}$ ou espinores algébricos de Pauli serão classes $\Psi_{\Xi_u} = [(\Xi_u, \Psi_{\Xi_u})] \in \mathfrak{T}/\mathcal{E}$ com $\Xi_u \in S, \Psi_{\Xi_u} \in I_{\Xi_u}$ com I_{Ξ_u} dado pela Eq.(1.162) para cada referencial espinorial Ξ_u .

Tome

$$s(\Xi_u) = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \in \mathcal{B}, s(\Xi_{u'}) = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\} \in \mathcal{B}, \tag{1.166}$$

com $s(\Xi_u) = u s(\Xi_0) u^{-1}$ e $s(\Xi_{u'}) = u' s(\Xi_0) u'^{-1}$ duas bases arbitrárias de $\mathbb{R}^{3,0} \hookrightarrow \mathbb{R}_{3,0}$. Com os idempotentes e_{Ξ_u} e $e_{\Xi_{u'}}$ podemos escrever

$$I_{\Xi_u} \ni \Psi_{\Xi_u} = \sum_i \psi_i f_i, \text{ e } I_{\Xi_{u'}} \ni \Psi_{\Xi_{u'}} = \sum_i \psi'_i f'_i, \tag{1.167}$$

onde

$$f_1 = e_{\Xi_u}, f_2 = e_1 e_{\Xi_u}; f'_1 = e_{\Xi_{u'}}, f'_2 = e'_1 e_{\Xi_{u'}}. \quad (1.168)$$

Desde que

$$\Psi_{\Xi_{u'}} = \Psi_{\Xi_u}(u'^{-1}u)^{-1}, \quad (1.169)$$

teremos

$$\Psi_{\Xi_{u'}} = \sum_i \psi_i (u'^{-1}u)^{-1} f'_i = \sum_{i,k} S_{ik}(u^{-1}u') \psi_i f'_k = \sum_k \psi'_k f'_k, \quad (1.170)$$

então

$$\psi'_k = \sum_i S_{ik}(u^{-1}u') \psi_i, \quad (1.171)$$

onde $S_{ik}(u^{-1}u')$ são as componentes matriciais da representação em $\mathbb{C}(2)$ de $(u^{-1}u') \in \text{Spin}_{3,0}^e$, as matrizes $S(u) = u$ correspondem a representação $D^{1/2}$ de $SU(2) \simeq \text{Spin}_{3,0}^e$.

Notemos mais uma vez que o conjunto de todos os ideais $\{I_{\Xi_u}\}$ geometricamente equivalentes a um dado ideal $\{I_{\Xi_0}\}$ tem a mesma imagem $I = \mathbb{C}(2)f$, onde f é a representação em $\mathbb{C}(2)$ de e_{Ξ_0} , dada a representação

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}_{3,0} &\rightarrow \mathbb{C}(2) \simeq \text{End}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(2)f, \\ x &\mapsto \sigma(x) : \mathbb{C}(2)f \rightarrow \mathbb{C}(2)f, \end{aligned} \quad (1.172)$$

temos que

$$\sigma(e_i) = \sigma(e'_i), \sigma(f_i) = \sigma(f'_i), \quad (1.173)$$

para todo $\{e_i\}, \{e'_i\}$ tal que $e'_i = (u'^{-1}u)e_i(u'^{-1}u)^{-1}$.

Observação 81. *Note que toda a informação a respeito dos referenciais espinoriais Ξ_u e $\Xi_{u'}$ desaparecem na representação matricial dos ideais $I_{\Xi_u}, I_{\Xi_{u'}}$ em $\mathbb{C}(2)$ uma vez que todos esses ideais são mapeados no mesmo ideal em $\mathbb{C}(2)$. Note que essa argumentação pode ser feita nas outras álgebras $\mathbb{R}_{p,q}$. Vemos portanto que a definição de espinores como classes de equivalência de elementos de \mathfrak{T} é indispensável para que estes objetos fiquem bem caracterizados, pois para definirmos os idempotentes primitivos acima, e consequentemente os ideais minimais, é necessário fixarmos uma dada base, que foi chamada de fiducial, conforme nomenclatura introduzida em [47].*

CAPÍTULO 2

CAPÍTULO GEOMÉTRICO

2.1 Variedades Diferenciáveis

Aqui introduziremos alguns conceitos e notações a respeito da teoria de variedades diferenciáveis, que serão necessárias para o desenvolvimento que se seguem.

Definição 82. *Um espaço topológico é um par (E, \mathcal{U}) onde E é um conjunto e \mathcal{U} é uma coleção de subconjuntos de E tal que:*

- (i) $\emptyset, E \in \mathcal{U}$.
- (ii) $\cup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha \in \mathcal{U}$ se $U_\alpha \in \mathcal{U}, \forall \alpha \in \Gamma$ um conjunto de índices qualquer.
- (iii) $\cap_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \in \mathcal{U}$ se $U_\alpha \in \mathcal{U}, \forall \alpha \in \Lambda$ um conjunto finito de índices qualquer.

Cada elemento $U \in \mathcal{U}$ é chamado de conjunto aberto.

Definição 83. *Uma família $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}, U_\alpha \in \mathcal{U}$ é dita uma cobertura de E se $\cup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha = E$. Um espaço topológico é dito Hausdorff se para quaisquer $x, \tilde{x} \in E$ existirem conjuntos abertos U, \tilde{U} , tais que $U \cap \tilde{U} = \emptyset, x \in U$ e $\tilde{x} \in \tilde{U}$.*

Definição 84. *Temos:*

- (i) *Um espaço topológico (E, \mathcal{U}) é dito compacto se para toda cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}, U_\alpha \in \mathcal{U}$ de E , existir uma subcobertura finita, ou seja, $\cup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = E$, com $\Lambda \subset \Gamma$ e Λ finito.*
- (ii) *Um espaço (E, \mathcal{U}) é dito paracompacto se existe uma cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ de E tal que todo ponto é coberto por um número finito U_α 's.*

Para intuito deste trabalho faremos a seguinte definição de variedade diferenciável:

Definição 85. *Uma variedade diferenciável M é um conjunto tal que:*

- (i) *M é um espaço topológico Hausdorff paracompacto.*
- (ii) *Existe uma família de pares $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in \Gamma\}$, chamados cartas, onde $\{U_\alpha\}$ é uma família de abertos que cobrem M e $\{V_\alpha \subset \mathbb{R}^n, \alpha \in \Gamma\}$ é uma família de abertos difeomorfos a \mathbb{R}^n tal que as aplicações $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ são homeomorfismos. Com isso dizemos que cada ponto $x \in M$ tem uma vizinhança que é homeomórfica a \mathbb{R}^n . Dizemos também que a dimensão de M é n e escrevemos $\dim M = n$.*
- (iii) *Dadas duas cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e (U_β, φ_β) da família descrita em (ii) tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ a aplicação $\Psi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ é infinitamente diferenciável.*

A família das cartas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in \Gamma\}$ é chamada de um atlas de M . Chamamos a condição (iii) de condição de compatibilidade entre as cartas. Dois atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in \Gamma\}$ e $\{(U_\beta, \varphi_\beta), \beta \in \Omega\}$ são ditos equivalentes se a família $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in \Gamma \cup \Omega\}$ também for um atlas de M . Uma classe de equivalência de atlas é chamada de uma estrutura diferenciável para M .

As *funções coordenadas* de uma carta (U, φ) são definidas como as funções $\mathbf{x}^i = p^i \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ onde $p^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são as habituais funções coordenadas de \mathbb{R}^n , tais que $p^i(a_1, \dots, a_n) = a_i, i = 1, \dots, n$. Escrevemos $\mathbf{x}^i(x) = x^i, x \in U$ e chamamos o conjunto de números (x^1, \dots, x^n) , que denotaremos também por $\{x^i\}$, de coordenadas do ponto $x \in U$ na carta (U, φ) , ou simplesmente, chamamos de coordenadas de x .

Seja $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ uma outra carta de M . Se $x \in U \cap \tilde{U}$ teremos $\mathbf{x}^{i'}(x) = x^{i'}$. Definimos as funções diferenciáveis $\psi^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, n$ como:

$$\psi^j(\mathbf{x}^1(x), \dots, \mathbf{x}^n(x)) = \psi^j(x^1, \dots, x^n) = \mathbf{x}^{j'}(x) = x^{j'}, \quad (2.1)$$

algumas vezes usamos a notação reduzida $x^{j'} = \psi^j(x^i), i, j = 1, \dots, n$, ou também, $\mathbf{x}^{j'} = \psi^j(\mathbf{x}^i), i, j = 1, \dots, n$; por vezes denotaremos também as derivadas parciais $\frac{\partial \psi^j}{\partial x^i}$ por $\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}$.

Definição 86. *Sejam M e N variedades diferenciáveis. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é dita uma aplicação diferenciável em $x \in M$, se existem cartas (U, φ) e (V, ς) de M e N respectivamente, tais que $x \in U, y = f(x) \in V$, e $\varsigma \circ f \circ \varphi^{-1}$ é uma aplicação diferenciável em \mathbb{R}^{n_1} . Da condição (iii) da definição acima vemos que dadas outras cartas quaisquer $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ e $(\tilde{V}, \tilde{\varsigma})$ se $\varsigma \circ f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável então $\tilde{\varsigma} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ também o será.*

Considere um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ e cartas (U, φ) e (V, ς) de M e N respectivamente, tais que $x \in U, y = f(x) \in V$. Fazendo $\mathbf{x}^i(x) = x^i, \mathbf{y}^i(y) = y^i$ e $\tilde{f} = \varsigma \circ f \circ \varphi^{-1}$ escrevemos $\tilde{f}(x^1, \dots, x^n) = (y^1, \dots, y^n)$. Frequentemente denotamos $y^j = \tilde{f}^j(x^i)$ e $\frac{\partial f^j}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$.

¹Consideraremos uma aplicação como diferenciável se for infinitamente diferenciável.

Definição 87. *Seja M uma variedade conexa n -dimensional, ou seja, dados dois pontos $a, b \in \mathbb{R}$ existe um caminho contínuo $f : \mathbb{R} \rightarrow M$ ligando a, b . Dizemos que M é orientável, se existe uma cobertura $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in \Gamma\}$ de M tal que dados U_α e U_β tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ tenhamos que as funções coordenadas $\{\mathbf{x}_\alpha^i\}$ e $\{\mathbf{x}_\beta^i\}$, para U_α e U_β são tais que $\det[\frac{\partial x^i}{\partial x^j}] > 0$. Esse atlas que cobre a variedade M é chamado de um atlas coerente.*

Definição 88. *Um grupo topológico grupo topológico G , é um espaço topológico, munido de uma estrutura de grupo compatível com a estrutura topológica, ou seja, as funções multiplicação*

$$\begin{aligned} m : G \times G &\rightarrow G, \\ (g, h) &\mapsto m(g, h) = gh, \end{aligned} \tag{2.2}$$

e inversão

$$\begin{aligned} i : G &\rightarrow G, \\ g &\mapsto i(g) = g^{-1}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

são contínuas.

Definição 89. *Um grupo de Lie G é um grupo que é ao mesmo tempo uma variedade diferenciável, tal que as operações multiplicação*

$$\begin{aligned} m : G \times G &\rightarrow G, \\ (x, y) &\mapsto m(x, y) = xy, \end{aligned} \tag{2.4}$$

e inversão

$$\begin{aligned} i : G &\rightarrow G, \\ x &\mapsto i(x) = x^{-1}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

são diferenciáveis.

Exemplo 90. *Com algum trabalho vemos que o grupo $\text{Gl}(n, \mathbb{K})$ o grupo das matrizes inversíveis $n \times n$ sobre \mathbb{K} é um grupo de Lie sob a operação de multiplicação de matrizes. E note também que os grupos $\text{SO}_{p,q}$ e $\text{Spin}_{p,q}$, estudados no capítulo anterior, são grupos de Lie.*

2.1.1 Vetores Tangentes

Seja $C(M, x)$ o conjunto de todas as funções (que tomam valores em \mathbb{R}) infinitamente diferenciáveis em alguma vizinhança de $x \in M$. Aqui consideraremos iguais duas funções que coincidem numa vizinhança de x .

Definição 91. Um vetor tangente a M no ponto $x \in M$ é uma aplicação linear $\mathbf{v} : C(M, x) \rightarrow \mathbb{R}$, que obedece a regra de Leibniz, ou seja, para $f, g \in C(M, x); a, b \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \mathbf{v}|_x [af + bg] &= a \mathbf{v}|_x [f] + b \mathbf{v}|_x [g], \\ \text{(ii)} \quad \mathbf{v}|_x [fg] &= \mathbf{v}|_x [f]g + f \mathbf{v}|_x [g]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Vemos facilmente que o conjunto dos vetores tangente a x formam um espaço vetorial sobre o corpo dos reais, isso justifica chamá-los de vetores.

Definição 92. O espaço vetorial de todos os vetores tangentes a M em x será denotado por $T_x M$ e será chamado de espaço tangente em x . O espaço dual de $T_x M$ é denotado por $T_x^* M$ e será chamado de espaço cotangente em x . E da mesma forma denotaremos por $T_{rx}^r M$ o espaço dos r -contravariante e s -covariante tensores em x .

Dada uma curva em $M, \sigma : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow M; t \mapsto \sigma(t)$ nós podemos construir a seguinte aplicação:

$$\sigma_*(t) : C(M, x) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

tal que para qualquer função $f \in C(M, x)$,

$$\sigma_*(t)[f] = \frac{d}{dt}[f \circ \sigma](t). \quad (2.8)$$

Note que $\sigma_*(t)$ é uma derivação, que chamaremos de vetor tangente à curva σ , que é uma generalização de derivada direcional de f na direção da curva σ do cálculo no \mathbb{R}^n .

Definição 93. Sejam $\{\mathbf{x}^i\}$ as funções coordenadas de uma dada carta (U, φ) de M em x . Definiremos os seguintes vetores tangentes em $x \in M$: $\frac{\partial}{\partial x^i}|_x \equiv \partial_i|_x$ tal que para cada $f \in C(M, x)$, teremos

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_x [f] := \frac{\partial}{\partial x^i}[f \circ \varphi^{-1}]|_{\varphi(x)} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i}(\varphi(x)) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i}(x^i), \quad (2.9)$$

com

$$\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}; \tilde{f}(\varphi(x)) = \tilde{f}(x^i). \quad (2.10)$$

Algumas vezes usaremos alguns abusos de notação. Por exemplo $f \circ \varphi^{-1}$ será denotado muitas vezes simplesmente por f e assim $\tilde{f}(x^i)$ é denotado simplesmente por $f(x^i)$. Outro abuso frequentemente cometido para simplificarmos a notação é $\frac{\partial}{\partial x^i}|_x [f] \equiv \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$, ou ainda $\frac{\partial}{\partial x^i}|_x [f] \equiv \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Também escrevemos $\frac{\partial x^i}{\partial x^j}(x)$ ou $\frac{\partial x^i}{\partial x^j}$ para $\frac{\partial}{\partial x^j}|_x (\mathbf{x}^i)$, i.e.

$$\frac{\partial}{\partial x^j}|_x [\mathbf{x}^i] \equiv \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(x) \equiv \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i. \quad (2.11)$$

Proposição 94. ([28] pág. 64) Se $\{\mathbf{x}^i\}$ são as funções coordenadas de uma dada carta (U, φ) de M em x temos que os vetores $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_x, i = 1, \dots, n\}$ formam uma base (que chamaremos de base coordenada) para o espaço tangente a M em $x, T_x M$.

2.2 Fibrados, Fibrados Principais e Fibrados Vetoriais

Aqui recordaremos algumas das principais definições e conceitos da teoria de fibrados principais e seus fibrados vetoriais associados, que serão necessárias para introduzirmos os fibrados de Clifford e os fibrados espinoriais. Para um estudo mais detalhado o leitor deve consultar, e.g., [12, 18, 23]. Aqui seguiremos as definições apresentadas em [12].

Definição 95. *Seja M uma variedade diferenciável. Um fibrado diferenciável sobre M será denotado por (E, M, π, G, F) , com um grupo topológico G dos homeomorfismos de F nele mesmo, onde E é uma variedade chamada de espaço total do fibrado, $\pi : E \rightarrow M$ é uma aplicação diferenciável e sobrejetiva, chamada de projeção canônica e F é a fibra típica. Nesta estrutura valem seguintes condições:*

- (a) $\pi^{-1}(x)$, a fibra em x , é difeomorfa a $F, \forall x \in M$.
- (b) Temos que $\{U_i, i \in \Lambda\}$, onde Λ é um conjunto de índices, é uma cobertura de M , tal que:

- Localmente o fibrado E é trivial, i.e., é localmente difeomórfico a um produto, i.e., $\pi^{-1}(U_i) \simeq U_i \times F$ para todo $i \in \Lambda$.
- Os difeomorfismos $\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$ têm a forma:

$$\Phi_i(p) = (\pi(p), \phi_{i,x}(p)), \quad (2.12)$$

$\phi_i|_{\pi^{-1}(x)} \equiv \phi_{i,x} : \pi^{-1}(x) \rightarrow F$ é um difeomorfismo.

A família $\{(U_i, \Phi_i), i \in \Lambda\}$, é chamada a família das trivializações locais de E .

- O grupo G age na fibra típica. Seja $x \in U_i \cap U_j$, então²:

$$\phi_{i,x} \circ \phi_{j,x}^{-1} : F \rightarrow F, \quad (2.13)$$

coincide com a ação de um elemento de G para todo $x \in U_i \cap U_j$ e $i, j \in \Lambda$.

- Chamamos de funções transição do fibrado as aplicações induzidas:

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G, \text{ onde } g_{ij}(x) = \phi_{i,x} \circ \phi_{j,x}^{-1}. \quad (2.14)$$

Note que as aplicações g_{ij} estão bem definidas, o que podemos ver com uma construção perfeitamente análoga à feita em [4] (pág.44). Teremos também a seguinte condição de cociclo:

$$g_{ij}(x)g_{jk}(x) = g_{ik}(x), \forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k. \quad (2.15)$$

²Sem muito trabalho vemos que esta aplicação está bem definida [4] (pág.44)

Definição 96. *Sejam M uma variedade diferenciável e G um grupo de Lie. Uma estrutura de Fibrado Principal sobre M , denotada por $(P, M, \pi, G, F \equiv G) = (P, M, \pi, G)$ consiste numa estrutura de fibrado diferenciável como acima, onde temos uma variedade diferenciável P e uma ação à direita de G nos elementos $p \in P$, tal que:*

- (a) *A aplicação (que define a ação à direita) $P \times G \ni (p, g) \mapsto pg \in P$ é diferenciável.*
- (b) *Dados $g, \tilde{g} \in G$ e $\forall p \in P, (pg)\tilde{g} = p(g\tilde{g})$.*
- (c) *$\forall x \in M, \pi^{-1}(x)$ é invariante sobre a ação de G .*
- (d) *G age livremente e transitivamente em cada fibra $\pi^{-1}(x)$, ou seja para $a, b \in \pi^{-1}(x), \exists g \in G$, tal que $ag = b$, e se $ag = a \Rightarrow g = 1$. Esta condição é necessária para a identificação $F \equiv G$.*

Definição 97. *Um fibrado $(E, M, \pi, \text{Gl}(n, \mathbb{K}), F = \mathbf{V})$, onde \mathbb{K} é um corpo, $\text{Gl}(n, \mathbb{K})$ é o grupo (pode ser um outro subgrupo também) das matrizes inversíveis $n \times n$ sobre \mathbb{K} e \mathbf{V} é um espaço vetorial n -dimensional sobre \mathbb{K} , é chamado de fibrado vetorial.*

Definição 98. *Um fibrado vetorial $(E, M, \tilde{\pi}, \text{Gl}(n, \mathbb{K}), F = \mathbf{V})$ é dito associado ao fibrado principal (P, M, π, G) pela representação ρ de G em $F = \mathbf{V}$, se suas funções de transição são imagem sob ρ das funções de transição correspondentes de (P, M, π, G) . Ou seja, considere as seguintes trivializações de P e E respectivamente:*

$$\begin{aligned}\Phi_i &: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G, \\ \Phi_i(p) &= (\pi(p), \phi_{i,x}(p)), \\ \Xi_i &: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbf{V}, \\ \Xi_i(q) &= (\tilde{\pi}(q), \chi_{i,x}(q)),\end{aligned}\tag{2.16}$$

onde $\chi_i|_{\tilde{\pi}^{-1}(x)} \equiv \chi_{i,x} : \tilde{\pi}^{-1}(x) \rightarrow \mathbf{V}$. Então, para todo $x \in U_i \cap U_j$, teremos

$$\chi_{j,x} \circ \chi_{i,x}^{-1} = \rho(\phi_{j,x} \circ \phi_{i,x}^{-1}).\tag{2.17}$$

O fibrado $(E, M, \tilde{\pi}, \text{Gl}(n, \mathbb{K}), \mathbf{V})$ é denotado por $E = P \times_{\rho} \mathbf{V}$. As fibras $\pi^{-1}(x)$ são espaços vetoriais isomorfos ao espaço de representação \mathbf{V} .

Definição 99. *Seja $\mathcal{E} = (E, M, \pi, G, F)$ um fibrado e $U \subset M$ um aberto de M . Uma seção local desse fibrado em U é uma aplicação $s : U \rightarrow E$ tal que*

$$\pi \circ s = Id_U.\tag{2.18}$$

Uma seção é dita global se $U = M$.

Notação 100. Tome $U \subset M$ um aberto de M ; diremos que $\rho \in \text{sec } \mathcal{E}(U)$ (ou $\rho \in \text{sec } E(U)$) se existir uma seção s local tal que

$$s : U \rightarrow E, \quad x \mapsto (x, \rho(x)), \quad \text{com } \rho : U \rightarrow F, \quad (2.19)$$

Nestas condições escreveremos $\rho \in \text{sec } U \equiv \text{sec } E|_U \subset \text{sec } E$ ou simplesmente quando não resulte confusão, $\rho \in \text{sec } E$; onde $\text{sec } E$ é o conjunto de todas as seções $\text{sec } E|_U$ com $U \subset M$ aberto de M .

Observação 101. Cada seção local $(s : U \subset M \rightarrow P)$ para um fibrado principal (P, M, π, G) determina uma trivialização local $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ de P

$$\Phi^{-1}(x, g) = s(x)g = pg. \quad (2.20)$$

Reciprocamente, Φ determina s , desde

$$s(x) = \Phi^{-1}(x, e). \quad (2.21)$$

2.2.1 Fibrado dos Referenciais

O fibrado tangente TM de uma variedade diferenciável n -dimensional M é um fibrado associado a um fibrado principal, chamado de fibrado dos referenciais $F(M) = \cup_{x \in M} F_x M$, onde $F_x M$ é o conjunto de todos os referenciais em $x \in M$. O grupo que age em $F(M)$ é $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$, o grupo de estrutura do fibrado. Sejam $\{x^i\}$ as coordenadas de uma carta local (U, φ) de M . Então, $T_x M$ tem como base $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_x\}$ em $U \subset M$.

Definição 102. Um referencial em $T_x M$ é um conjunto $\Sigma_x = \{e_1|_x, \dots, e_n|_x\}$ de vetores linearmente independentes tais que

$$e_i|_x = F_i^j \frac{\partial}{\partial x^i}|_x, \quad (2.22)$$

onde $(F_i^j) \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$.

Notemos que uma trivialização local para $F(M)$ é dada por

$$\begin{aligned} \Phi_i : \pi^{-1}(U_i) &\rightarrow U_i \times \text{Gl}(n, \mathbb{R}), \\ \Phi_i(f) &= (\pi(f), \phi_{i,x}(f)) = (x, \Sigma_x), \quad f \in F(U_i). \end{aligned} \quad (2.23)$$

A ação $h = (h_i^j) \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ em um referencial $f \in F(U)$ é dada por $(f, h) \mapsto fh$, onde o novo referencial é dado por

$$\begin{aligned} \Phi_i(fh) &= (x, \tilde{\Sigma}_x), \quad \pi(f) = x, \\ \tilde{\Sigma}_x &= \{\tilde{e}_1|_x, \dots, \tilde{e}_n|_x\}, \\ \tilde{e}_i|_x &= h_i^j e_j|_x. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Reciprocamente, dados dois referenciais em x , Σ_x e $\tilde{\Sigma}_x$ existe $h = (h_i^j) \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ tal que a Eq.(2.24) é satisfeita. Assim temos que $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ age livremente e transitivamente nas fibras de $F(M)$.

Sejam $\{x^i\}$ e $\{\tilde{x}^i\}$ as coordenadas associadas com as cartas locais (U_i, φ_i) e $(\tilde{U}_i, \tilde{\varphi}_i)$ de M . Se $x \in U_i \cap U_j$ teremos

$$e_i|_x = F_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_x = \tilde{F}_i^j \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \Big|_x, \quad (F_i^j), (\tilde{F}_i^j) \in \text{Gl}(n, \mathbb{R}). \quad (2.25)$$

Como $F_i^j = \tilde{F}_k^j \left(\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \right) \Big|_x$ temos que as funções de transição são dadas por

$$g_i^k(x) = \left(\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \right) \Big|_x \in \text{Gl}(n, \mathbb{R}). \quad (2.26)$$

Observação 103. Diremos no que se segue que a escolha de uma seção de $F(U) \subset F(M)$ é a escolha de um calibre em $F(M)$.

2.2.2 Fibrado dos Referenciais Ortonormais

Se uma variedade M está equipada com uma métrica $\mathbf{g} \in \text{sec } T_2^0 M$ de assinatura (p, q) , $p + q = n$, podemos introduzir referenciais *ortonormais* em cada $T_x M$. Aqui também denotaremos um referencial ortonormal por $\Sigma_x = \{e_1|_x, \dots, e_n|_x\}$, onde

$$e_i|_x = H_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_x, \quad \mathbf{g}(e_i|_x, e_j|_x) \Big|_x = \text{diag}(1, 1, \dots, -1, -1, \dots, -1), \quad (2.27)$$

com $(H_i^j) \in \text{O}_{p,q}$, o grupo ortogonal de dimensão $n = p + q$. Podemos assim construir o fibrado dos referenciais ortonormais, o qual será denotado por $\mathbf{P}_{\text{O}_{p,q}}(M)$, e neste caso dizemos que o fibrado dos referenciais foi reduzido (mais detalhes podem ser encontrados em [?] pág.131) para o fibrado dos referenciais ortonormais. Da mesma forma, se M for orientável, podemos construir $\mathbf{P}_{\text{SO}_{p,q}^e}(M)$.

2.3 Fibrados de Clifford, Fibrados Espinoriais e Estrutura Spin

Vamos primeiramente considerar a definição de um fibrado de Clifford.

Definição 104. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e seja $T_x M$ o espaço tangente a $x \in M$. Suponha que a variedade M está equipada com uma métrica $\mathbf{g} \in \text{sec } T_2^0 M$

de assinatura (p, q) , $p + q = n$, logo $(T_x M, \mathfrak{g}) \simeq \mathbb{R}^{p,q}$. Segue que em cada ponto $x \in M$ podemos definir uma álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(T_x M, \mathfrak{g}) \simeq \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p,q}, \mathfrak{g}) \simeq \mathbb{R}_{p,q}$. A união disjunta destas álgebras de Clifford locais constitui-se no chamado fibrado de Clifford³

$$\mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g}) = \bigcup_{x \in M} \mathcal{C}\ell(T_x M, \mathfrak{g}). \quad (2.28)$$

Como $\mathcal{C}\ell(T_x M, \mathfrak{g})$ é também um espaço vetorial de dimensão 2^n podemos dar uma estrutura de variedade pra o conjunto $\bigcup_{x \in M} \mathcal{C}\ell(T_x M, \mathfrak{g})$ seguindo uma construção análoga a feita em [28] (pág.66).

Chamaremos de um campo de Clifford em M uma seção do fibrado de Clifford.

O fibrado de Clifford é um fibrado vetorial associado ao fibrado principal $\mathbf{P}_{\text{SO}_{p,q}^e}(M)$ [47, 27]

$$\mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g}) = \mathbf{P}_{\text{SO}_{p,q}^e}(M) \times_{\text{Ad}'} \mathbb{R}_{p,q}, \quad (2.29)$$

onde

$$\begin{aligned} \text{Ad}' : \text{SO}_{p,q}^e &\rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}_{p,q}), \\ \text{Ad}'_{\sigma(g)}(a) &= \text{Ad}_g(a) := gag^{-1}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Note que Ad' está bem definida, pois $gag^{-1} = (-g)a(-g)^{-1}$.

2.4 Estrutura Spin

Definição 105. Uma estrutura spin ou espinorial em M consiste em um fibrado principal $\pi_s : \mathbf{P}_{\text{Spin}_{p,q}^e}(M) \rightarrow M$, chamado de Fibrado dos Referenciais Espinoriais, com grupo $\text{Spin}_{p,q}^e$ e uma aplicação

$$\rho : \mathbf{P}_{\text{Spin}_{p,q}^e}(M) \rightarrow \mathbf{P}_{\text{SO}_{p,q}^e}(M), \quad (2.31)$$

satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $\pi(\rho(p)) = \pi_s(p), \forall p \in \mathbf{P}_{\text{Spin}_{p,q}^e}(M)$, onde π é a projeção canônica $\pi : \mathbf{P}_{\text{SO}_{p,q}^e}(M) \rightarrow M$.
- (ii) $\rho(pu) = \rho(p)\text{Ad}_u, \forall p \in \mathbf{P}_{\text{Spin}_{p,q}^e}(M)$ e $\text{Ad} : \text{Spin}_{p,q}^e \rightarrow \text{SO}_{p,q}^e, \text{Ad}_u(a) = uau^{-1}$.

Definição 106. Chamaremos uma seção de $\mathbf{P}_{\text{Spin}_{p,q}^e}(M)$ de campo de referenciais espinorial. Denotaremos $\Xi \in \text{sec } \mathbf{P}_{\text{Spin}_{p,q}^e}(M)$.

2.5 Existência de Estrutura Spin

Estamos interessados em definir campos espinoriais algébricos (e seus representantes matriciais) sobre uma variedade M como seções de um fibrado vetorial apropriado (fibrado

³Podemos construir de maneira completamente análoga $\mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g}) = \bigcup_{x \in M} \mathcal{C}\ell(T_x^* M, \mathfrak{g})$.

espinorial) associado a $\mathbf{P}_{\text{Spin}_{p,q}^e}(M)$. Para tanto a compatibilidade entre $\mathbf{P}_{\text{Spin}_{p,q}^e}(M)$ e $\mathbf{P}_{\text{SO}_{p,q}^e}(M)$, dada pela Definição (105) é essencial.

A pergunta natural agora é quando existe uma estrutura espinorial sobre uma variedade orientável M ? Para respondermos isso, vamos seguir a construção feita em [34].

Note que a existência de uma estrutura espinorial

$$s : \mathbf{P}_{\text{Spin}_{p,q}^e}(M) \rightarrow \mathbf{P}_{\text{SO}_{p,q}^e}(M), \quad (2.32)$$

em M é definida pelas funções de transição $\tilde{t}_{ij}(x) \in \text{Spin}_{p,q}^e$ tal que

$$\text{Ad}(\tilde{t}_{ij}) = t_{ij}, \tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki} = \text{Id}, \tilde{t}_{ii} = \text{Id}. \quad (2.33)$$

O interessante é notarmos que nem toda estrutura (M, \mathbf{g}) admite uma estrutura espinorial. O fato de uma variedade não admitir uma estrutura espinorial é medido pela segunda classe de Stiefel-Whitney que toma valores no grupo de cohomologia de Čech $H^2(M, \mathbb{Z}_2)$. Vamos definir essa estrutura a seguir.

2.5.1 Grupos de Cohomologia de Čech

Seja \mathbb{Z}_2 o grupo multiplicativo $\{-1, +1\}$. Seja $U_\Lambda = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ uma cobertura aberta de M , uma r -cocadeia⁴ de Čech é uma função

$$f : (i_0, i_1, \dots, i_r) \in \mathbb{Z}_2, \quad (2.34)$$

onde $i_0, i_1, \dots, i_r \in \Lambda$ são tais que $U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_r} \neq \emptyset$ e que é simétrica sob uma permutação P ,

$$f(i_{P(0)}, i_{P(1)}, \dots, i_{P(r)}) = f(i_0, i_1, \dots, i_r). \quad (2.35)$$

Seja $C^r(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2)$ o grupo multiplicativo das r -cocadeias de Čech, com a multiicção dada pela composição. Definimos o operador de cobordo $\delta : C^r(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2) \rightarrow C^{r+1}(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2)$ por

$$\delta f(i_0, \dots, i_{r+1}) = \prod_{j=0}^{r+1} f(i_0, \dots, \check{i}_j, \dots, i_{r+1}), \quad (2.36)$$

onde a variável com $\check{}$ é omitida. Note que δ é nilpotente

$$\delta^2 f(i_0, \dots, i_{r+2}) = \prod_{\substack{j,k=0 \\ j \neq k}}^{r+2} f(i_0, \dots, \check{i}_j, \dots, \check{i}_k, \dots, i_{r+2}) = 1, \quad (2.37)$$

pois note que -1 aparece um número par de vezes nessa multiplicação (por exemplo, se $f(i_0, \dots, \check{i}_j, \dots, \check{i}_k, \dots, i_{r+2}) = -1$, teremos $f(i_0, \dots, \check{i}_k, \dots, \check{i}_j, \dots, i_{r+2}) = -1$). Assim, se f é uma r -cocadeia de Čech

$$\delta^2 f = 1. \quad (2.38)$$

⁴Um complexo de co-cadeias (A^*, h^*) é uma sequência de grupos abelianos ou módulos

$$\dots, A^{-2}, A^{-1}, A^0, A^1, A^2, \dots$$

conectada por homomorfismos $h^n : A^n \rightarrow A^{n+1}$ tais que $h^n h^{n+1} = 0$.

O grupo dos r -cociclos $Z^r(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2)$ e o grupo dos r -cobordos $B^r(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2)$ são definidos por

$$\begin{aligned} Z^r(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2) &= \{f \in C^r(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2); \delta f = 1\}, \\ B^r(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2) &= \{f \in C^r(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2); \exists \tilde{f} \in C^{r-1}(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2), f = \delta \tilde{f}\}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Agora definimos o r -ésimo grupo de cohomologia de Čech subordinado à cobertura $U_\Lambda = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ por

$$H^r(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2) = \ker \delta_r / \text{Im } \delta_{r-1} = Z^r(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2) / B^r(U_\Lambda, \mathbb{Z}_2). \quad (2.40)$$

2.5.2 Classes de Stiefel-Whitney

Seja $U_F = \{U_\alpha : \alpha \in F\}$, onde $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in F}$ é uma cobertura por cartas locais de M , tal que a intersecção de qualquer número de cartas ou é vazia ou um aberto contrátil. Chamaremos aqui essa tal cobertura de cobertura acíclica. A classe de *Stiefel-Whitney* w_r é uma classe característica que toma valores em $H^r(U_F, \mathbb{Z}_2) := H^r(M, \mathbb{Z}_2)$ ⁵. Seja $TM \xrightarrow{\pi} M$ o fibrado tangente de M com grupo de estrutura $O_{p,q}$. Considere $t_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow O_{p,q}$ as funções de transição do fibrado, seja $\{e_{i\alpha}\}$ um referencial ortonormal sobre U_i , temos $e_{i\alpha} = t_{ij}e_{j\alpha}$, definimos a 1-cocadeia de Čech $f(i, j)$ por

$$f(i, j) := \det(t_{ij}) = \pm 1. \quad (2.41)$$

Note que realmente temos um elemento de $C(M, \mathbb{Z}_2)$ pois $f(i, j) = f(j, i)$. Da condição de cociclo $t_{ij}t_{jk}t_{ki} = \text{Id}$, temos

$$\delta f(i, j, k) = \det(t_{ij}) \det(t_{jk}) \det(t_{ki}) = \det(t_{ij}t_{jk}t_{ki}) = 1. \quad (2.42)$$

Assim $f \in Z^1(M, \mathbb{Z}_2)$ e portanto define um elemento $[f] \in H^1(M, \mathbb{Z}_2)$. Note que este elemento é independente do referencial local escolhido. Seja $\{\bar{e}_{i\alpha}\}$ outro referencial em U_i tal que $\bar{e}_{i\alpha} = h_i e_{i\alpha}$, tal que $h_i \in O_{p,q}$. De $\bar{e}_{i\alpha} = \bar{t}_{ij} \bar{e}_{j\alpha}$, temos $\bar{t}_{ij} = h_i t_{ij} h_j^{-1}$. Se definirmos a 0-cocadeia f_0 por $f_0(i) := \det h_i$, teremos

$$\begin{aligned} \bar{f}(i, j) &= \det(h_i t_{ij} h_j^{-1}) = \det(h_i) \det(h_j)^{-1} \det(t_{ij}) = \\ &= \det(h_i) \det(h_j) \det(t_{ij}) = \delta f_0(i, j) f(i, j). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Portanto $[f] = [\bar{f}]$. Esse elemento $w_1(M) := [f] \in H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ é chamado a *primeira classe de Stiefel-Whitney*.

Proposição 107. *Seja $TM \xrightarrow{\pi} M$ o fibrado tangente de M . M é orientável se e somente se $w_1(M)$ é trivial.*

⁵Classes características são subconjuntos das classes de cohomologia do espaço base do fibrado, para mais detalhes consulte o Capítulo 11 de [34].

Demonstração. Se M é orientável, o grupo de estrutura pode ser reduzido para $\text{SO}_{p,q}$ e $f(i, j) := \det(t_{ij}) = 1$, e daqui $w_1(M) = 1 \in \mathbb{Z}_2$.

Agora se $w_1(M)$ é trivial, f é um cobordo; $f = \delta f_0$. Como $f_0(i) = \pm 1$, podemos sempre escolher $h_i \in \text{O}_{p,q}$ tal que $\det h_i = f_0(i)$ para cada i . Se tivermos um outro referencial $\bar{e}_{i\alpha} = h_i e_{i\alpha}$, as funções de transição serão tais que para qualquer par (i, j) , numa interseção $U_i \cap U_j$, teremos $\det(\bar{t}_{ij}) = 1$ (pois suponha que $f(i, j) = \det t_{ij} = -1$ para algum par (i, j) , então sem perda de generalidade teríamos $f_0(i) = -1$ e $f_0(j) = 1$, daqui $\det(\bar{t}_{ij}) = -\det t_{ij} = +1$). Portanto M é orientável. ■

Essa proposição nos diz que a primeira classe de Stiefel-Whitney é uma obstução à orientabilidade. Seja agora então M uma variedade orientável e TM seu fibrado tangente. Para as funções de transição $t_{ij} \in \text{SO}_{p,q}$ e sejam $\tilde{t}_{ij} \in \text{Spin}_{p,q}$ tal que

$$\text{Ad}(\tilde{t}_{ij}) = t_{ij}, \tilde{t}_{ji} = \tilde{t}_{ij}^{-1}, \quad (2.44)$$

onde $\text{Ad} : \text{Spin}_{p,q} \rightarrow \text{SO}_{p,q}$ é um homomorfismo $2 : 1$, note que podemos escolher $\text{Ad}(\tilde{t}_{ij}) = t_{ij}$ ou $\text{Ad}(-\tilde{t}_{ij}) = t_{ij}$. Esse levantamente sempre existe localmente. Note que

$$\text{Ad}(\tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki}) = t_{ij}t_{jk}t_{ki} = \text{Id}, \quad (2.45)$$

teremos $\tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki} \in \ker \text{Ad} = \{\pm \text{Id}\}$. Para \tilde{t}_{ij} definir um fibrado $\mathbf{P}_{\text{Spin}_{p,q}}(M)$ [5, 33] sobre M , eles precisam satisfazer a condição de cociclo

$$\tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki} = \text{Id}. \quad (2.46)$$

Defina a 2-cocadeia de Čech $f : U_i \cap U_j \cap U_k \rightarrow \mathbb{Z}_2$ por

$$\tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki} = f(i, j, k)\text{Id}. \quad (2.47)$$

Perceba que f é simétrica e fechada ($\delta f = 1$), assim f define um elemento $w_2(M) = [f] \in H^2(M, \mathbb{Z}_2)$ chamado de segunda classe de Stiefel-Whitney. Com algum trabalho vemos que $[f]$ independe da escolha do referencial local e da escolha de \tilde{t}_{ij} ou $-\tilde{t}_{ij}$. Note também que podemos fazer essa mesma construção para $\text{SO}_{p,q}^e$, considerando o homomorfismo $2 : 1$ $\text{Spin}_{p,q}^e \xrightarrow{\text{Ad}} \text{SO}_{p,q}^e$.

Teorema 108. *Seja TM o fibrado tangente sobre uma variedade orientável M . Existe uma estrutura espinorial sobre M se e somente se $w_2(M)$ é trivial.*

Demonstração. Suponha que exista uma estrutura espinorial sobre M , teremos então que as funções de transição \tilde{t}_{ij} satisfazem $\tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki} = \text{Id}$ na interseção das cartas $U_i \cap U_j \cap U_k$, e segue portanto que $w_2(M)$ é trivial.

Reciprocamente, suponha que $w_2(M)$ é trivial, teremos $H^2(M, \mathbb{Z}_2) \ni [f] = 1 \Rightarrow f \in B^2(M, \mathbb{Z}_2)$, tal que

$$f(i, j, k) = \delta f_1(i, j, k) = f_1(i, j)f_1(j, k)f_1(k, i). \quad (2.48)$$

Se escolhermos como novas funções de transição $\tilde{t}'_{ij} = \tilde{t}_{ij}f_1(i, j)$, teremos

$$\tilde{t}'_{ij}\tilde{t}'_{jk}\tilde{t}'_{ki} = \tilde{t}_{ij}f_1(i, j)\tilde{t}_{jk}f_1(j, k)\tilde{t}_{ki}f_1(k, i) = (f(i, j, k))^2 = \text{Id}, \quad (2.49)$$

de onde vemos que $\{\tilde{t}'_{ij}\}$ define uma estrutura espinorial sobre M^6 . ■

2.6 Campos Espinoriais

Dada uma variedade orientável M , a ideia intuitiva de um campo espinorial sobre M , nada mais é do que “espetarmos” em cada ponto da variedade um espinor algébrico, ou um espinor covariante, contravariante, etc. No que segue formalizaremos esta ideia intuitiva.

Primeiramente precisamos supor que M admita uma estrutura espinorial, ou seja, conforme vimos na seção anterior, precisamos supor que exista um fibrado principal chamado de *fibrado dos referenciais espinoriais* denotado por $\mathbf{P}_{\text{Spin}_{p,q}^e}(M)$ que é o recobrimento duplo de $\mathbf{P}_{\text{SO}_{p,q}^e}(M)$, i.e., existe uma aplicação $2 : 1$ $\rho : \mathbf{P}_{\text{Spin}_{p,q}^e}(M) \rightarrow \mathbf{P}_{\text{SO}_{p,q}^e}(M)$ dado pela Def.(105), os elementos de $\mathbf{P}_{\text{Spin}_{p,q}^e}(M)$ são chamados de referenciais espinoriais.

Em completa analogia com o que fizemos na seção 1.6.1, escolheremos uma seção $b_0 = \{\mathbf{E}_a\} \in \text{sec } \mathbf{P}_{\text{SO}_{p,q}^e}(M)$, fixemos essa escolha e a partir de agora a chamemos de um campo de bases fiducial ou referencial fiducial⁷. Seja \mathcal{B}_M o conjunto de todas as seções de $\mathbf{P}_{\text{SO}_{p,q}^e}(M)$.

Considere

$$u : x \mapsto u(x) \in \text{Spin}_{p,q}^e(M) \subset \mathcal{Cl}(M, \mathfrak{g}), \quad (2.50)$$

e assim como fizemos na seção 1.6.1, seja $b_0 \in \mathcal{B}_M$ o referencial fiducial e escolha um elemento arbitrário $u_0 \in \text{sec } \text{Spin}_{p,q}^e(M)$. Fixe um par (u_0, b_0) , e o chame de campo de referenciais espinoriais fiducial.

O espaço

$$\{(u, b), ubu^{-1} = u_0b_0u_0^{-1}\} \subseteq \text{sec } \text{Spin}_{p,q}^e(M) \times \mathcal{B}_M \quad (2.51)$$

será chamado de espaço de campos de referenciais espinoriais algébricos e será denotado por S_M . Definimos agora a aplicação $1 - 1$

$$\begin{aligned} \Xi : \text{Spin}_{p,q}^e(M) &\rightarrow S_M, \\ u &\mapsto \Xi(u) := \Xi_u = (u, b), \end{aligned} \quad (2.52)$$

onde $ubu^{-1} = u_0b_0u_0^{-1} = b_0$.

Note que existe uma aplicação natural $2 - 1$

$$\mathfrak{s} : S \rightarrow \mathcal{B}, \quad \Xi_{\pm u} \mapsto b = (\pm u)b_0(\pm u^{-1}), \quad (2.53)$$

⁶Em [33] Mostra-se que o número de estruturas espinoriais não equivalentes em M é $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$.

⁷Quando não existir a possibilidade de confusão, abreviaremos como de referenciais para simplesmente um referencial.

Com estes objetos e recordando o material da Seção 1.6.1, estamos equipados para apresentarmos as seguintes definições.

Seja $\{I_{\Xi_u}\}$ o conjunto de todos os ideais geometricamente equivalentes a um dado ideal minimal $\{I_{\Xi_{u_0}}\}$ conforme definido na Eq.(1.109), onde agora $u, u' \in \sec \text{Spin}_{p,q}^e(M)$ (Eq.(2.50)). Tome então

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_M &= \{(x, (\Xi_u, \Psi_{\Xi_u})) \mid x \in M, u(x) \in \text{Spin}_{p,q}^e(M), \Xi_u \in S_M, \\ \Psi_{\Xi_u} : x &\mapsto \Psi_{\Xi_u}(x) \in I_{\Xi_u}, \Psi_{\Xi_{u'}} : x \mapsto \Psi_{\Xi_{u'}}(x) \in I_{\Xi_{u'}}\}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Considere uma relação de equivalência \mathcal{R}_M em \mathfrak{T}_M tal que

$$(x, (\Xi_u, \Psi_{\Xi_u})) \sim (y, (\Xi_{u'}, \Psi_{\Xi_{u'}})), \quad (2.55)$$

se e somente se $x = y$,

$$u(x)\mathbf{s}(\Xi_{u(x)})u(x)^{-1} = u'(x)\mathbf{s}(\Xi_{u'})u'^{-1}(x), \quad (2.56)$$

e

$$\Psi_{\Xi_u} u^{-1} = \Psi_{\Xi_{u'}} u'^{-1}. \quad (2.57)$$

Definição 109. *Um campo espinorial algébrico (CEA) do tipo I_{Ξ_u} para M é uma classe de equivalência $\Psi_{\Xi_u} = [(x, (\Xi_u, \Psi_{\Xi_u}))] \in \mathfrak{T}_M/\mathcal{R}_M$. Dizemos que $\Psi_{\Xi_u} \in I_{\Xi_u}$ é um representante do CEA Ψ_{Ξ_u} no campo de referenciais espinorial Ξ_u .*

Assim vemos que campos espinoriais algébricos são um quociente das seções de $\mathbf{P}_{\text{Spin}_{p,q}^e}(M) \times I_{\Xi_u}$. Da mesma maneira definimos campos espinoriais covariantes como seções de $\mathbf{P}_{\text{Spin}_{p,q}^e}(M) \times \mathbb{C}^n$ para algum n conveniente, campos espinoriais de Dirac-Hestenes como seções de $\mathbf{P}_{\text{Spin}_{p,q}^e}(M) \times \mathbb{R}_{p,q}^0$ [47].

2.7 Mais Algumas Definições

Fibrados Tangente, de Cartan e a Diferencial d

Definiremos $TM = \cup_{x \in M} T_x M$ e $T^*M = \cup_{x \in M} T_x^* M$ respectivamente como os fibrados tangente e cotangente de M . E definiremos também $T_s^r M = \cup_{x \in M} T_{sx}^r M$ como o fibrado dos tensores r -covariante e s -contravariante⁸.

Definição 110. *Seja $U \subset M$ um aberto de M . Uma seção local de TM em U (um campo vetorial) é uma aplicação*

$$s : U \rightarrow TM \text{ tal que } \pi \circ s = Id_U, \quad (2.58)$$

onde $\pi : TM \rightarrow M, \pi(\mathbf{v}|_x) = x$. Uma seção é dita global se $U = M$. Recorde que se $s(x) = (x, v(x))$ escreveremos $v \in \sec TU \subset \sec TM$. Notação analoga será usada para os demais fibrados vetoriais mencionados abaixo.

⁸Devemos dar uma estrutura de variedade para todos esses conjuntos, mas note que aqui também, podemos seguir, sem maiores dificuldades as construções feitas em [28] (pág.66).

Definição 111. O fibrado de Cartan sobre o fibrado tangente de M é o conjunto

$$\bigwedge T^*M = \bigcup_{x \in M} \bigwedge T_x^*M = \bigcup_{x \in M} \bigoplus_{r=0}^n \bigwedge^r T_x^*M, \quad (2.59)$$

onde $\bigwedge T_x^*M$, $x \in M$, é a álgebra exterior do espaço vetorial T_x^*M . $\bigwedge^r T^*M \subset \bigwedge T^*M$ é dado por

$$\bigwedge^r T^*M = \bigcup_{x \in M} \bigwedge^r T_x^*M, \quad (2.60)$$

que é chamado de fibrado das r -formas ($r = 0, \dots, n$).

Definição 112. A diferencial exterior (também dita derivada exterior) é a aplicação

$$d : \sec \bigwedge T^*M \rightarrow \sec \bigwedge T^*M, \quad (2.61)$$

satisfazendo:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & d(A + B) = dA + dB; \\ \text{(ii)} \quad & d(A \wedge B) = dA \wedge B + \bar{A} \wedge dB; \\ \text{(iii)} \quad & df(v) = v(f); \\ \text{(iv)} \quad & d^2 = 0, \end{aligned} \quad (2.62)$$

para todo $A, B \in \sec \bigwedge T^*M$, $f \in \sec \bigwedge^0 T^*M = C(M)$ e $v \in \sec TM$.

Observação 113. Da Definição (87) temos que uma variedade conexa n -dimensional M é orientável se e somente existe uma seção global que nunca se anula de $\bigwedge^n T^*M$. E $\tau, \tau' \in \sec \bigwedge^n T^*M$ definem a mesma orientação (respectivamente orientação oposta) se existe uma função global $\lambda \in \sec \bigwedge^0 T^*M$ tal que $\lambda > 0$ (respectivamente $\lambda < 0$) tal que $\tau' = \lambda\tau$.

2.7.1 Aplicação Diferencial e o Pull-back

Sejam M e N duas variedades diferenciáveis, $\dim M = m$, $\dim N = n$ e $\phi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que ϕ é um difeomorfismo, se ϕ é uma bijeção e se ϕ e ϕ^{-1} são diferenciáveis.

Definição 114. O pull-back de uma função $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ é a função $\phi^*g : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\phi^*g = g \circ \phi. \quad (2.63)$$

Definição 115. Considere $\phi : M \rightarrow N$ uma aplicação bijetora e $\mathbf{v} \in \sec TM$. A imagem de \mathbf{v} sob ϕ é o campo vetorial $\phi_*\mathbf{v} \in \sec TN$ tal que para qualquer $g : N \rightarrow \mathbb{R}$

$$\phi_*\mathbf{v}[g] = \mathbf{v}[g \circ \phi] \circ \phi^{-1} \quad (2.64)$$

Nesse caso chamamos

$$\phi_* : \sec TM \rightarrow \sec TN, \quad (2.65)$$

de a aplicação diferencial de ϕ .

Definição 116. Considere a aplicação $\phi : M \rightarrow N$, o pull-back associado a ϕ é a aplicação

$$\begin{aligned}\phi^* &: \sec T^*N \rightarrow \sec T^*M, \\ \phi^*\omega(\mathbf{v}) &= \omega(\phi_*\mathbf{v}) \circ \phi,\end{aligned}\tag{2.66}$$

para todo campo vetorial $\mathbf{v} \in \sec TM$. $\phi^*\omega \in \sec T^*N$ é também chamado de pull-back de ω .

2.7.2 Subvariedades

Vamos seguir as definições e construções feitas em [12] (pág.239)

Definição 117. Um subconjunto Z de uma variedade n -dimensional M , é uma subvariedade⁹ de M se todo ponto $x \in Z$ está no domínio de uma carta (U, φ) de M tal que

$$\begin{aligned}\varphi &: U \cap Z \rightarrow \mathbb{R}^p \times \{a\} \text{ onde,} \\ \varphi(x) &= (x^1, \dots, x^p, a^1, \dots, a^{n-p}),\end{aligned}\tag{2.67}$$

onde a é um elemento fixo de \mathbb{R}^{n-p} . Teremos que as cartas $(\bar{U}, \bar{\varphi})$, onde $\bar{U} = U \cap Z$ e $\bar{\varphi} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^p$ com $\bar{\varphi}(x) = (x^1, \dots, x^p)$, formam um atlas em Z .

Considere o par (Y, f) onde Y é uma variedade diferenciável e $f : Y \rightarrow M$ é um mapa diferenciável. Se a aplicação $f_*|_y : T_y Y \rightarrow T_{f(y)} M$ for injetiva para todo $y \in Y$, dizemos que f é uma *imersão*. Uma imersão, não é necessariamente injetiva; portanto $f(Y)$ não é necessariamente uma variedade.

Uma imersão injetiva, é chamada de um *mergulho*. O conjunto $f(Y)$ com a estrutura diferenciável induzida pelo mergulho f é uma variedade diferenciável. A estrutura diferenciável em $f(Y)$ induzida por f é o conjunto de cartas $\{(F(V_\alpha), \psi_\alpha \circ F^{-1}), \alpha \in \Lambda\}$ onde $\{(V_\alpha, \psi_\alpha), \alpha \in \Lambda\}$ é um atlas em Y e $F : Y \rightarrow f(Y)$ tal que $F(y) = f(y)$; a aplicação F difere de f no fato de ser sobrejetiva.

Entretanto, a estrutura de variedade induzida por f em $f(Y)$ pode não ser equivalente a estrutura de subvariedade em $f(Y) \subset M$. Se $f(Y)$ tem a sua estrutura de subvariedade equivalente a sua estrutura de variedade induzida por f , então o mergulho é dito regular. Assim se f é um mergulho regular, então $f(Y)$ é uma subvariedade de M .

Métrica Induzida

Seja N uma variedade n -dimensional e M uma variedade m -dimensional. Tome $f : N \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável e suponha que M seja munida de um tensor métrico \mathbf{g} . O pull-back $f^*\mathbf{g}$ de \mathbf{g} é um 2-cotensor simétrico em N definido por

$$(f^*\mathbf{g})_x(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{g}_{f(x)}(f_*\mathbf{v}, f_*\mathbf{w})\tag{2.68}$$

⁹O leitor atento, pode notar uma variação dessa definição para vários autores. Por exemplo, o que aqui é chamado de uma subvariedade é algumas vezes chamado de uma subvariedade própria ou regular; de forma que uma subvariedade seria um objeto menos comportado.

para todos $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_x N$.

Proposição 118. *Se a aplicação $f : N \rightarrow M$ é uma imersão tal que $\mathbf{g}(f_*\mathbf{v}, f_*\mathbf{v}) \neq 0 \forall \mathbf{v} \in TN$, então o tensor $f^*\mathbf{g}$ define uma métrica em N .*

Demonstração. $f^*\mathbf{g}$ é claramente simétrica. $f^*\mathbf{g}$ é não degenerada pois as seguintes afirmações são equivalentes devido as condições do teorema

- a) $(f^*\mathbf{g})_x(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ para todo \mathbf{v} ,
- b) $\mathbf{g}_{f(x)}(f_*\mathbf{v}, f_*\mathbf{w}) = 0$ para todo \mathbf{v} ,
- c) $f_*\mathbf{w} = 0$,
- d) $\mathbf{w} = 0$, desde que f_* é injetiva.

E o resultado segue. ■

2.8 Geometria Diferencial no Fibrado de Hodge

2.8.1 Estruturas Riemannianas e Lorentzianas em M

Tome em M um campo diferenciável de tensores métricos $\mathbf{g} \in \text{sec } T_0^2 M$ e considere a definição:

Definição 119. *Um par (M, \mathbf{g}) , $\dim M = n$, é uma estrutura Riemanniana n -dimensional (ou uma variedade de Riemann) se $\mathbf{g} \in \text{sec } T_0^2 M$ é um tensor métrico diferenciável de assinatura $(n, 0)$. Se \mathbf{g} tem assinatura (p, q) com $p + q = n$, $p \neq n$ ou $q \neq n$, então o par (M, \mathbf{g}) é chamado de uma variedade pseudo-Riemanniana. Quando $\dim M = 4$ e \mathbf{g} tem assinatura $(1, 3)$ o par (M, \mathbf{g}) é chamado de uma variedade Lorentziana.*

Como vimos acima, dizemos que uma variedade Riemanniana (ou pseudo-Riemanniana ou Lorentziana) é orientável se e somente se admite um campo contínuo de elementos de volume $\tau_{\mathbf{g}} \in \text{sec } \bigwedge^n T^* M$ dado em coordenadas locais $\{x^i\}$ para $U \subset M$ por

$$\tau_{\mathbf{g}} = \sqrt{|\det \mathbf{g}|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad (2.69)$$

onde

$$\det \mathbf{g} = \det \left[\mathbf{g} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right]. \quad (2.70)$$

Considere agora $\mathcal{M} = (M, \mathbf{g}, \tau_{\mathbf{g}})$, $\dim M = n$, onde \mathbf{g} é um campo tensorial métrico de assinatura (p, q) e $\tau_{\mathbf{g}} \in \text{sec } \bigwedge^n T^* M$. Denotamos por $\mathbf{g} \in \text{sec } T_0^2 M$ o tensor métrico do fibrado cotangente tal que se $\mathbf{g} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = g_{ij}$ então $\mathbf{g}(dx^i, dx^j) = g^{ij}$ e $g^{ik} g_{kj} = \delta_k^i$.

O produto escalar em $\bigwedge T^*M$ induzido pelo tensor métrico $\mathbf{g} \in \text{sec } T_0^2M$ será denotado por¹⁰ $\cdot_{\mathbf{g}} : \text{sec } \bigwedge T^*M \times \text{sec } \bigwedge T^*M \rightarrow \text{sec } \bigwedge^0 T^*M$. Se $A, B \in \text{sec } \bigwedge^p T^*M$ teremos

$$(A \cdot_{\mathbf{g}} B)\tau_{\mathbf{g}} = A \wedge \star_{\mathbf{g}} B, \quad (2.71)$$

notando que $\bigwedge T^*M \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$, podemos escrever usando as Eq.(1.36)

$$\star A_r = \tilde{A}_r \lrcorner \tau_{\tilde{\mathbf{g}}} = \tilde{A}_r \tau_{\tilde{\mathbf{g}}} \quad (2.72)$$

2.8.2 Fibrado de Hodge

Definição 120. *O fibrado de Hodge da estrutura \mathcal{M} , é a tripla*

$$\bigwedge(\mathcal{M}) = (\bigwedge T^*M, \cdot_{\mathbf{g}}, \tau_{\mathbf{g}}). \quad (2.73)$$

Definição 121. *O operador codiferencial de Hodge no fibrado de Hodge $\bigwedge(\mathcal{M})$ é a aplicação $\delta_{\mathbf{g}} : \text{sec } \bigwedge T^*M \rightarrow \text{sec } \bigwedge T^*M$, dado para multiformas homogêneas por:*

$$\delta_{\mathbf{g}} = (-1)^r \star_{\mathbf{g}}^{-1} d \star_{\mathbf{g}}, \quad (2.74)$$

onde $\star_{\mathbf{g}}$ é o operador estrela de Hodge associado ao produto escalar $\cdot_{\mathbf{g}}$ ¹¹.

Definição 122. *O operador laplaciano de Hodge é a aplicação*

$$\diamond_{\mathbf{g}} : \text{sec } \bigwedge T^*M \rightarrow \text{sec } \bigwedge T^*M \quad (2.75)$$

dado por:

$$\diamond_{\mathbf{g}} = -(d\delta_{\mathbf{g}} + \delta_{\mathbf{g}}d). \quad (2.76)$$

Pode-se mostrar sem dificuldades que a diferencial exterior, o codiferencial de Hodge e o laplaciano de *Hodge* satisfazem as seguintes relações [47](pg.113):

$$\begin{aligned} dd &= \delta\delta = 0; & \diamond_{\mathbf{g}} &= (d - \delta_{\mathbf{g}})^2 \\ d\diamond_{\mathbf{g}} &= \diamond_{\mathbf{g}}d; & \delta_{\mathbf{g}}\diamond_{\mathbf{g}} &= \diamond_{\mathbf{g}}\delta_{\mathbf{g}} \\ \delta_{\mathbf{g}}\star_{\mathbf{g}} &= (-1)^{r+1}\star_{\mathbf{g}}d; & \star_{\mathbf{g}}\delta_{\mathbf{g}} &= (-1)^r d\star_{\mathbf{g}} \\ d\delta_{\mathbf{g}}\star_{\mathbf{g}} &= \star_{\mathbf{g}}\delta_{\mathbf{g}}d; & \star_{\mathbf{g}}d\delta_{\mathbf{g}} &= \delta_{\mathbf{g}}d\star_{\mathbf{g}}; & \star_{\mathbf{g}}\diamond_{\mathbf{g}} &= \diamond_{\mathbf{g}}\star_{\mathbf{g}}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Observação 123. *Quando for claro pelo contexto qual tensor métrico está envolvido, usaremos os símbolos \star , δ e \diamond no lugar dos símbolos $\star_{\mathbf{g}}$, $\delta_{\mathbf{g}}$ e $\diamond_{\mathbf{g}}$ para simplificarmos a escritura das equações.*

¹⁰Quando não houver risco de confusão denotaremos \cdot por $\cdot_{\mathbf{g}}$.

¹¹Onde $\star_{\mathbf{g}}^{-1}$ é dado pela Eq.(1.21).

2.9 Geometria Riemanniana e Semi-Riemanniana no Fibrado de Clifford $\mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$

2.9.1 O Operador de Dirac

Primeiramente vamos introduzir o conceito de conexão afim no sentido de Koszul [48]:

Definição 124. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade M é uma aplicação diferenciável:*

$$\begin{aligned} \sec TM \times \sec TM &\rightarrow \sec TM, \\ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &\mapsto \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}, \end{aligned} \tag{2.78}$$

tal que $\forall X_i, Y_i \in \sec TM, i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2} \mathbf{Y} &= \nabla_{\mathbf{X}_1} \mathbf{Y} + \nabla_{\mathbf{X}_2} \mathbf{Y}, \\ \nabla_{\mathbf{X}} (\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2) &= \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}_1 + \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}_2, \\ \nabla_{f\mathbf{X}} \mathbf{Y} &= f \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}, \\ \nabla_{\mathbf{X}} (f\mathbf{Y}) &= f \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} + \mathbf{X}(f)\mathbf{Y}, \end{aligned} \tag{2.79}$$

$\forall f \in C^\infty(M)$, onde $C^\infty(M)$ é espaço de todas as funções, definidas em M , infinitamente diferenciáveis (tomando valores em \mathbb{R}).

Definição 125. *Um campo de vetores $\mathbf{X} \in \sec TM$ é dito paralelo (com respeito à ∇) ao longo de uma curva diferenciável $\gamma : t \mapsto \gamma(t) \in M$, se,*

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \mathbf{X} = 0, \tag{2.80}$$

para todo ponto da curva γ . Dizemos que \mathbf{X} é transportado paralelamente à curva γ .

Considere $\mathcal{T}M = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} T_s^r M$ o fibrado dos tensores sobre M e $\mathbf{P} \in \sec \mathcal{T}M$ um campo tensorial qualquer. Vamos introduzir o conceito de derivada covariante também em $\mathcal{T}M$.

Definição 126. *Tome $\mathcal{T}M = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} T_s^r M$, onde M é uma variedade Hausdorff e paracompacta munida de uma conexão afim ∇ (no sentido de Koszul), existe um único ([48] pág.345) operador*

$$\begin{aligned} \nabla : \sec TM \times \sec \mathcal{T}M &\rightarrow \sec \mathcal{T}M, \\ (X, \mathbf{P}) &\mapsto \nabla_X \mathbf{P}, \end{aligned} \tag{2.81}$$

que satisfaz, $\forall \mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \sec \mathcal{T}M, \forall f \in C(M)$:

$$\begin{aligned} \nabla_{f\mathbf{X} + g\mathbf{Y}} \mathbf{P} &= f \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{P} + g \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{P}, \\ \nabla_{\mathbf{X}} (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) &= \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{P} + \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Q}, \\ \nabla_{\mathbf{X}} (f\mathbf{P}) &= f \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{P} + \mathbf{X}(f)\mathbf{P}, \\ \nabla_{\mathbf{X}} (\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}) &= \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{P} \otimes \mathbf{Q} + \mathbf{P} \otimes \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Q}, \end{aligned} \tag{2.82}$$

Pediremos também que ∇ comute com a contração de tensores.

Em termo das componentes, a contração C mapeia um tensor $\mathbf{K} \in T_s^r(\mathbf{V})$ com componentes $\mathbf{K}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ em um tensor $C(\mathbf{K}) \in T_{s-1}^{r-1}(\mathbf{V})$ cujas componentes são dadas por

$$C(\mathbf{K})_{j_1 \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{r-1}} = \sum_k \mathbf{K}_{j_1 \dots k \dots j_s}^{i_1 \dots k \dots i_r}, \quad (2.83)$$

onde o sobrescrito k aparece na i -ésima posição e o subescrito k aparece na j -ésima posição.

Observação 127. Alguns autores incluem na definição anterior a ressalva de que quando se escreve $(\mathbf{P} + \mathbf{Q})$ deve-se supor que $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in T_s^r M$. Tal condição é naturalmente desnecessária pois a soma de seções de $T_s^r M$ e $T_{s'}^{r'} M$ ($s \neq s', r \neq r'$) está bem definida como um elemento de $\mathcal{T}M = \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} T_s^r M$.

Definição 128. A diferencial absoluta de $\mathbf{P} \in \sec T_s^r M$ é dada pela aplicação

$$\begin{aligned} \nabla : \sec T_s^r M &\rightarrow \sec T_{s+1}^r M, \\ \nabla \mathbf{P}(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s, \alpha_1, \dots, \alpha_r) \\ &= \nabla_X \mathbf{P}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s, \alpha_1, \dots, \alpha_r), \\ \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s &\in \sec TM, \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \sec T^* M. \end{aligned} \quad (2.84)$$

2.9.2 Equações de Estrutura

Vamos munir a variedade métrica (M, \mathbf{g}) , com uma conexão afim arbitrária ∇ obtendo assim a estrutura (M, \mathbf{g}, ∇) .

Definição 129. Os operadores de torção e curvatura e os tensores de torção e curvatura de uma conexão ∇ , são respectivamente¹² as aplicações:

$$\begin{aligned} \tau : \sec TM \times \sec TM &\rightarrow \sec TM, \\ \tau(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{u} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}], \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \rho : \sec TM \times \sec TM &\rightarrow \text{End} TM, \\ \rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \nabla_{\mathbf{u}} \nabla_{\mathbf{v}} - \nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{u}} - \nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} \end{aligned} \quad (2.86)$$

e

$$\Theta \in \sec T_{\frac{1}{2}}^1 M, \quad \Theta(\alpha, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha(\tau(\mathbf{u}, \mathbf{v})), \quad (2.87)$$

$$\mathbf{R} \in \sec T_{\frac{1}{3}}^1 M, \quad \mathbf{R}(\alpha, \mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha(\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w}), \quad (2.88)$$

para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \sec TM$ e $\alpha \in \sec T^* M$.

¹² $\text{End} TM$ significa o conjunto dos endomorfismos $TM \rightarrow TM$.

A notação $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ significa o comutador de um campo de vetores, dado por

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}, \mathbf{v}] &\in \sec TM, \\ [\mathbf{u}, \mathbf{v}](f) &= \mathbf{u}(\mathbf{v}(f)) - \mathbf{v}(\mathbf{u}(f)), \forall f \in C(M). \end{aligned} \quad (2.89)$$

Note que para funções diferenciáveis $f, g, h \in C(M)$ teremos

$$\begin{aligned} \tau(g\mathbf{u}, h\mathbf{v}) &= gh\tau(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \\ \rho(g\mathbf{u}, h\mathbf{v})f\mathbf{w} &= ghf\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (2.90)$$

propriedades essas que seguem da Eq.(2.87), Eq.(2.86) e Eq.(2.79).

Considere, a partir de agora, um referencial $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ em $TU \subset TM$, e tome $\{\theta^\rho\}$ como sendo o referencial dual de $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ (i.e., $\theta^\rho(\mathbf{e}_\alpha) = \delta_\alpha^\rho$). Denote:

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta] &= c_{\alpha\beta}^{\rho\cdot\cdot} \mathbf{e}_\rho, \\ \nabla_{\mathbf{e}_\alpha} \mathbf{e}_\beta &= L_{\alpha\beta}^{\rho\cdot\cdot} \mathbf{e}_\rho, \end{aligned} \quad (2.91)$$

onde chamamos¹³ $c_{\alpha\beta}^{\rho\cdot\cdot}$ de *coeficientes de estrutura* do referencial $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ e chamamos $L_{\alpha\beta}^{\rho\cdot\cdot}$ de os *coeficientes de conexão* neste referencial. Repare que aqui usamos a notação de Einstein para somas, por exemplo expressamos

$$[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta] = c_{\alpha\beta}^{\rho\cdot\cdot} \mathbf{e}_\rho = \sum_{\rho=1}^n c_{\alpha\beta}^{\rho\cdot\cdot} \mathbf{e}_\rho, \quad n = \dim T_x M, \quad x \in M, \quad (2.92)$$

onde subentendemos que índices repetidos, um sobrescrito e outro subscrito, são somados. Essa notação será sempre usada quando não houver riscos de confusão.

Podemos escrever os tensores Θ e \mathbf{R} nas bases $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ e $\{\theta^\rho\}$, obtendo

$$\Theta = T_{\alpha\beta}^{\rho\cdot\cdot} \mathbf{e}_\rho \otimes \theta^\alpha \otimes \theta^\beta, \quad \mathbf{R} = R_{\mu\alpha\beta}^{\rho\cdot\cdot} \mathbf{e}_\rho \otimes \theta^\mu \otimes \theta^\alpha \otimes \theta^\beta, \quad (2.93)$$

assim as expressões para os coeficientes dos tensores de curvatura e torção, são dadas por:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}^{\rho\cdot\cdot} &:= \Theta(\theta^\rho, \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = L_{\alpha\beta}^{\rho\cdot\cdot} - L_{\beta\alpha}^{\rho\cdot\cdot} - c_{\alpha\beta}^{\rho\cdot\cdot} \\ R_{\mu\alpha\beta}^{\rho\cdot\cdot} &:= \mathbf{R}(\theta^\rho, \mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) \\ &= \mathbf{e}_\alpha(L_{\beta\mu}^{\rho\cdot\cdot}) - \mathbf{e}_\beta(L_{\alpha\mu}^{\rho\cdot\cdot}) + L_{\alpha\sigma}^{\rho\cdot\cdot} L_{\beta\mu}^{\sigma\cdot\cdot} - L_{\beta\sigma}^{\rho\cdot\cdot} L_{\alpha\mu}^{\sigma\cdot\cdot} - c_{\alpha\beta}^{\sigma\cdot\cdot} L_{\sigma\mu}^{\rho\cdot\cdot}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Para continuarmos tome o aberto $U \subset M$ e considere uma carta de um atlas de M cobrindo U , com funções coordenadas dadas por $\{\mathbf{x}^\mu\}$. Temos $\mathbf{g} \in \sec T_2^0 M$ a métrica dada em TM e $\mathbf{g} \in \sec T_0^2 M$ a métrica correspondente para T^*M , conforme definimos acima. Tome $\{\partial_\mu\}$ a base coordenada com respeito a $\{\mathbf{x}^\mu\}$ de TU , $U \subset M$ e $\{\bar{\theta}^\mu = dx^\mu\}$ a base dual de $\{\partial_\mu\}$. A base recíproca de $\{\bar{\theta}^\mu\}$ será denotada por $\{\bar{\theta}_\mu\}$, e assim $\mathbf{g}(\bar{\theta}^\mu, \bar{\theta}_\nu) = \delta_\nu^\mu$. Podemos então introduzir um conjunto de funções diferenciáveis $h_\mu^\alpha, l_\beta^\nu : U \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha, \beta, \mu, \nu = 1, \dots, n$ tais que:

¹³Onde os pontos nos índices ajudam a manter a ordem quando subirmos e descermos os índices.

$$h_{\alpha}^{\mu} l_{\mu}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}, \quad h_{\alpha}^{\mu} l_{\nu}^{\alpha} = \delta_{\nu}^{\mu}. \quad (2.95)$$

De forma que

$$\mathbf{e}_{\beta} = h_{\beta}^{\nu} \partial_{\nu} \text{ e } \theta^{\alpha} = l_{\nu}^{\alpha} \bar{\theta}^{\nu} = l_{\nu}^{\alpha} dx^{\nu}, \quad (2.96)$$

ou seja, expandimos $\{\mathbf{e}_{\alpha}\}$ e $\{\theta^{\rho}\}$ em termos da base coordenada, de onde com alguma álgebra e usando as propriedades da diferencial exterior (Eq.(2.62)) e que ∇ comuta com a contração, obtemos que:

$$\begin{aligned} d\theta^{\rho} &= -\frac{1}{2} c_{\alpha\beta}^{\rho\cdot\cdot} \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\beta} \\ \nabla_{e_{\alpha}} \theta^{\rho} &= -L_{\alpha\beta}^{\rho\cdot\cdot} \theta^{\beta} \end{aligned} \quad (2.97)$$

Definição 130. *As 1-formas de conexão $\omega_{\cdot\beta}^{\rho\cdot}$ $\in \text{sec } \bigwedge^1 T^*M$, as 2-formas de torção $\Theta^{\rho} \in \text{sec } \bigwedge^2 T^*M$ e as 2-formas de curvatura $\mathcal{R}_{\cdot\mu}^{\rho\cdot}$ $\in \text{sec } \bigwedge^2 T^*M$, são dadas respectivamente por:*

$$\begin{aligned} \omega_{\cdot\beta}^{\rho\cdot} &:= L_{\alpha\beta}^{\rho\cdot\cdot} \theta^{\alpha}, \\ \Theta^{\rho} &:= \frac{1}{2} T_{\alpha\beta}^{\rho\cdot\cdot} \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\beta} \\ \mathcal{R}_{\cdot\mu}^{\rho\cdot} &:= \frac{1}{2} R_{\cdot\mu\alpha\beta}^{\rho\cdot\cdot\cdot} \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\beta}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Agora, multiplicando as Eqs.(2.94) por $\frac{1}{2}\theta^{\alpha} \wedge \theta^{\beta}$ e usando as Eqs.(2.97) e (2.98), e também notando que $\frac{1}{2}\theta^{\alpha} \wedge \theta^{\beta} = -\frac{1}{2}\theta^{\beta} \wedge \theta^{\alpha}$, obteremos as importantes *equações de estrutura de Cartan*:

$$\begin{aligned} d\theta^{\rho} + \omega_{\cdot\beta}^{\rho\cdot} \wedge \theta^{\beta} &= \Theta^{\rho}, \\ d\omega_{\cdot\mu}^{\rho\cdot} + \omega_{\cdot\beta}^{\rho\cdot} \wedge \omega_{\cdot\mu}^{\beta\cdot} &= \mathcal{R}_{\cdot\mu}^{\rho\cdot}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Definição 131. *Uma tripla (M, \mathbf{g}, ∇) :*

(a) *será chamada de um espaço de Riemann se e somente se*

$$\nabla \mathbf{g} = 0 \quad \text{e} \quad \Theta[\nabla] = 0, \quad (2.100)$$

e nesse caso, o par (∇, \mathbf{g}) , é chamado de estrutura Riemanniana de M .

(b) *será chamada de um espaço de Riemann-Cartan se e somente se*

$$\nabla \mathbf{g} = 0 \quad \text{e} \quad \Theta[\nabla] \neq 0, \quad (2.101)$$

(c) *será chamada de teleparalela, se e somente se*

$$\nabla \mathbf{g} = 0, \quad \Theta[\nabla] \neq 0 \text{ e } \mathbf{R}[\nabla] = 0. \quad (2.102)$$

Para uma dada métrica existe apenas uma conexão satisfazendo as condições da Eq.(2.100) [12] (pág.308), que será chamada de *conexão de Levi-Civita* da métrica considerada, e será denotada por D .

Dado o tensor métrico \mathbf{g} de assinatura (p, q) (com $p+q = n$), e $M \simeq \mathbb{R}^n$, denotaremos a estrutura $(\mathbb{R}^n, \mathbf{g}, D)$ por $\mathbf{R}^{p,q}$, neste caso a conexão de Levi-Civita é conhecida. Quando $q = 0$ (ou $p = 0$), $\mathbf{R}^{p,q}$ é dito *espaço Euclidiano*; quando $p = 1, q = n - 1$ ou $q = 1, p = n - 1$, $\mathbf{R}^{p,q}$ é dito *espaço de Minkowski (ou de Lorentz)*. Para p, q arbitrários tais que $p + q = n$, $\mathbf{R}^{p,q}$ é dito *espaço pseudo-Euclidiano*.

2.9.3 Representação dos Campos de Clifford como somas de Formas Diferenciais

Definição 132. *Seções de $\mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$ são chamadas de campos de Clifford.*

Aqui recordaremos algumas notações e convenções. Por $F(U)$ denotaremos o fibrado dos referenciais de $U \subset M$. Uma seção de $F(U)$ será denotada por $\{\mathbf{e}_\alpha\} \in \sec F(U)$. O referencial dual de $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ será denotado por $\{\theta^\alpha\}$, onde $\theta^\alpha \in \sec T^*U$. Quando $\{\mathbf{e}_\alpha\} \in \sec F(U)$ é o referencial coordenado associado as funções coordenadas $\{\mathbf{x}^\mu\}$ de uma carta local cobrindo U usaremos ao invés da notação \mathbf{e}_α a notação $\mathbf{e}_\alpha = \partial_\alpha$ e nesse caso $\theta^\alpha = dx^\alpha$. Quando $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ se refere a um referencial ortonormal, usaremos ao invés de \mathbf{e}_α a notação \mathbf{e}_a e ao invés de θ^α a notação θ^a .

Relembre que, como espaço vetorial sobre \mathbb{R} , $\mathcal{C}\ell(T_x^*M, \mathbf{g}_x)$ é isomorfa a álgebra exterior $\bigwedge T_x^*M$ do espaço cotangente

$$\bigwedge T_x^*M = \bigoplus_{k=0}^n \bigwedge^k T_x^*M, \quad (2.103)$$

onde $\bigwedge^k T_x^*M$ é o espaço $\binom{n}{k}$ -dimensional das k -formas, e lembre ainda que existe um mergulho natural $\bigwedge T^*M \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$ de forma que as seções de $\mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$, os campos de Clifford, podem ser representados como soma de formas diferenciais não homogêneas. Seja $\{\mathbf{e}_a\}$ uma base ortonormal para $TU \subset TM$, e sua base dual $\{\theta^a\} \in \sec \bigwedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$. Denotaremos por $\{\theta_i\}$ a *base recíproca* de $\{\theta^i\}$, i.e., $\theta_i \cdot \theta^j = \delta_i^j$.

2.9.4 Operador padrão de Dirac

Considere a tripla $(M, \mathring{\mathbf{g}}, \mathring{D})$, onde \mathring{D} é a conexão Levi-Civita de $\mathring{\mathbf{g}}$. Dados $\mathbf{u} \in \sec TM$ e $A \in \sec \mathcal{T}M$, tome a aplicação tensorial $A \mapsto \mathring{D}_\mathbf{u}A \in \sec \mathcal{T}M$. Desde que $D_\mathbf{u}J_{\mathring{\mathbf{g}}} \subseteq J_{\mathring{\mathbf{g}}}$, onde $J_{\mathring{\mathbf{g}}}$ é o ideal usado na definição de $\mathcal{C}\ell(M, \mathring{\mathbf{g}})$, vemos imediatamente que a noção de derivada covariante (relacionada a uma conexão de Levi-Civita ¹⁴) passa para o fibrado quociente $\mathcal{C}\ell(M, \mathring{\mathbf{g}})$, i.e., podemos definir $\mathring{D}_\mathbf{u}[A] = [\mathring{D}_\mathbf{u}(A)]$. Note ainda que dados $A, B \in$

¹⁴E mais geralmente, para qualquer conexão compatível com a métrica.

sec $\mathcal{T}M$, e percebendo que $\mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathring{\mathfrak{g}} = \mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathring{\mathfrak{g}} = 0$, teremos:

$$\begin{aligned}\mathring{D}_{\mathbf{u}}([A][B]) &= \mathring{D}_{\mathbf{u}}([A \otimes B]) = [\mathring{D}_{\mathbf{u}}\frac{1}{2}(A \otimes B - B \otimes A) + \mathring{\mathfrak{g}}(A, B)] \\ &= [\mathring{D}_{\mathbf{u}}\frac{1}{2}(A \otimes B - B \otimes A) + (\mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathring{\mathfrak{g}})(A, B) + \mathring{\mathfrak{g}}(\mathring{D}_{\mathbf{u}}A, B) + \mathring{\mathfrak{g}}(A, \mathring{D}_{\mathbf{u}}B)] \\ &= (\mathring{D}_{\mathbf{u}}[A])[B] + [A](\mathring{D}_{\mathbf{u}}[B]).\end{aligned}\tag{2.104}$$

Para simplificarmos (quando não houver risco de confusão), escreveremos $\mathring{D}_{\mathbf{u}}A$ em lugar de $\mathring{D}_{\mathbf{u}}[A]$. Observe que o mesmo vale para qualquer seção de $\bigwedge T^*M \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(M, \mathring{\mathfrak{g}})$. Antes de continuarmos convencionaremos que o produto escalar e a contração induzidos por $\mathring{\mathfrak{g}}$ serão denotados simplesmente por \cdot e \lrcorner ao invés de $\cdot_{\mathring{\mathfrak{g}}}$ e $\lrcorner_{\mathring{\mathfrak{g}}}$.

Definição 133. *O operador de Dirac padrão agindo em seções de $\mathcal{C}\ell(M, \mathring{\mathfrak{g}})$ é o operador diferencial dado por*

$$\mathring{\partial} = \theta^\alpha \mathring{D}_{\mathbf{e}_\alpha}.\tag{2.105}$$

Atente que essa definição independe da escolha da base. Pela propriedade do produto de Clifford, para $A \in \text{sec } \mathcal{C}\ell(M, \mathring{\mathfrak{g}})$,

$$\mathring{\partial}A = \theta^\alpha (\mathring{D}_{\mathbf{e}_\alpha}A) = \theta^\alpha \lrcorner (\mathring{D}_{\mathbf{e}_\alpha}A) + \theta^\alpha \wedge \mathring{D}_{\mathbf{e}_\alpha}A,\tag{2.106}$$

assim definimos:

$$\begin{aligned}\mathring{\partial} \lrcorner A &= \theta^\alpha \lrcorner (\mathring{D}_{\mathbf{e}_\alpha}A), \\ \mathring{\partial} \wedge A &= \theta^\alpha \wedge (\mathring{D}_{\mathbf{e}_\alpha}A),\end{aligned}\tag{2.107}$$

de forma que teremos:

$$\mathring{\partial} = \mathring{\partial} \lrcorner + \mathring{\partial} \wedge.\tag{2.108}$$

Observação 134. *Note entretanto que para o caso $A \in \text{sec } \bigwedge^1 T^*M \hookrightarrow \text{sec } \mathcal{C}\ell(M, \mathring{\mathfrak{g}})$ podemos também escrever*

$$\mathring{\partial} \lrcorner A = \mathring{\partial} \cdot A.\tag{2.109}$$

Proposição 135. *Verificamos sem dificuldades que os operadores $\mathring{\partial} \lrcorner$ e $\mathring{\partial} \wedge$ satisfazem as seguintes identidades ([47] pág.125),*

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad & \mathring{\partial} \wedge (A \wedge B) = (\mathring{\partial} \wedge A) \wedge B + \hat{A} \wedge (\mathring{\partial} \wedge B), \\ \text{(b)} \quad & \mathring{\partial} \lrcorner (A_r \lrcorner B_s) = (\mathring{\partial} \wedge A_r) \lrcorner B_s + \hat{A}_r \lrcorner (\mathring{\partial} \lrcorner B_s); \quad r+1 \leq s, \\ \text{(c)} \quad & \mathring{\partial} \lrcorner \star = (-1)^r \star \mathring{\partial} \wedge; \quad \star \mathring{\partial} \lrcorner = (-1)^{r+1} \mathring{\partial} \wedge.\end{aligned}\tag{2.110}$$

Proposição 136. *O operador de Dirac $\mathring{\partial}$ está relacionado com a diferencial exterior d e o codiferencial de Hodge δ por:*

$$\mathring{\partial} = d - \delta,\tag{2.111}$$

e temos $\mathring{\partial} \wedge = d$ e $\mathring{\partial} \lrcorner = -\delta$.

Demonstração. Se f é uma função, $\mathring{\partial} \wedge f = \theta^\alpha \wedge \mathring{D}_{\mathbf{e}_\alpha} f = \mathbf{e}_\alpha(f) \theta^\alpha = df$ e $\mathring{\partial} \lrcorner f = \theta^\alpha \lrcorner \mathring{D}_{\mathbf{e}_\alpha} f = \theta^\alpha \cdot \mathring{D}_{\mathbf{e}_\alpha} f = 0$. Para o campo de 1-formas θ^ρ de um referencial em T^*M , teremos $\mathring{\partial} \wedge \theta^\rho = \theta^\alpha \wedge \mathring{D}_{\mathbf{e}_\alpha} \theta^\rho = -\mathring{L}_{\alpha\beta}^{\rho\cdot} \theta^\alpha \wedge \theta^\beta = -\hat{\omega}_\beta^\rho \wedge \theta^\beta = d\theta^\rho$.

Agora, para um campo de r -formas $\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \theta^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\alpha_r}$, obteremos, usando a Eq.(2.110a),

$$\begin{aligned} \mathring{\partial} \wedge \omega &= \frac{1}{r!} (d\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \wedge \theta^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\alpha_r} + \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_r} d\theta^{\alpha_1} \wedge \theta^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge \theta^{\alpha_r} \\ &\quad + \dots + (-1)^{r+1} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \theta^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \theta^{\alpha_{r-1}} \wedge d\theta^{\alpha_r}) \\ &= d\omega. \end{aligned} \tag{2.112}$$

Finalmente, usando a Eq. (2.77c) e Eq.(2.110c), teremos $\mathring{\partial} \lrcorner \omega = -\delta\omega$. ■

2.9.5 O Quadrado do Operador de Dirac

Como vimos na seção anterior, dada uma estrutura $(M, \mathring{D}, \mathring{\mathfrak{g}})$ podemos construir a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(M, \mathring{\mathfrak{g}})$ e o operador padrão de Dirac, $\mathring{\partial}$, dado pela (Eq.2.111)

$$\mathring{\partial} = d - \delta. \tag{2.113}$$

Vamos investigar agora o quadrado do operador padrão de Dirac.

Definição 137. *O quadrado do operador padrão de Dirac $\mathring{\partial}$ é definido como $\mathring{\partial}^2 = \mathring{\partial} \mathring{\partial} : \sec \wedge^p T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathring{\mathfrak{g}}) \rightarrow \sec \wedge^p T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathring{\mathfrak{g}})$, dado por:*

$$\mathring{\partial}^2 = (d - \delta)(d - \delta) = -(d\delta + \delta d). \tag{2.114}$$

Notamos que $\mathring{\partial}^2 \equiv \diamond$ é o *Laplaciano de Hodge* da estrutura $(M, \mathring{\mathfrak{g}})$, introduzido pela equação (Eq. 2.76).

Por outro lado vamos lembrar que Eq.(2.105)

$$\mathring{\partial} = \theta^\alpha \mathring{D}_{\mathbf{e}_\alpha}, \tag{2.115}$$

onde $\{\theta^\alpha\}$ é um referencial dual na variedade e \mathring{D} é a conexão de Levi-Civita da métrica $\mathring{\mathfrak{g}}$. Com essas equações escrevemos:

$$\begin{aligned} \mathring{\partial}^2 &= (\theta^\alpha \mathring{D}_{\mathbf{e}_\alpha})(\theta^\beta \mathring{D}_{\mathbf{e}_\beta}) = \theta^\alpha (\theta^\beta \mathring{D}_{\mathbf{e}_\alpha} \mathring{D}_{\mathbf{e}_\beta} + (\mathring{D}_{\mathbf{e}_\alpha} \theta^\beta) \mathring{D}_{\mathbf{e}_\beta}) \\ &= \mathring{g}^{\alpha\beta} (\mathring{D}_{\mathbf{e}_\alpha} \mathring{D}_{\mathbf{e}_\beta} - \mathring{L}_{\alpha\beta}^{\rho\cdot} \mathring{D}_{\mathbf{e}_\rho}) + \theta^\alpha \wedge \theta^\beta (\mathring{D}_{\mathbf{e}_\alpha} \mathring{D}_{\mathbf{e}_\beta} - \mathring{L}_{\alpha\beta}^{\rho\cdot} \mathring{D}_{\mathbf{e}_\rho}). \end{aligned} \tag{2.116}$$

E então definimos os operadores:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \mathring{\partial} \cdot \mathring{\partial} &= \mathring{g}^{\alpha\beta} (\mathring{D}_{\mathbf{e}_\alpha} \mathring{D}_{\mathbf{e}_\beta} - \mathring{L}_{\alpha\beta}^{\rho\cdot} \mathring{D}_{\mathbf{e}_\rho}), \\ \text{(b)} \quad \mathring{\partial} \wedge \mathring{\partial} &= \theta^\alpha \wedge \theta^\beta (\mathring{D}_{\mathbf{e}_\alpha} \mathring{D}_{\mathbf{e}_\beta} - \mathring{L}_{\alpha\beta}^{\rho\cdot} \mathring{D}_{\mathbf{e}_\rho}), \end{aligned} \tag{2.117}$$

com os quais podemos escrever:

$$\diamond = \mathring{\partial}^2 = \mathring{\partial} \cdot \mathring{\partial} + \mathring{\partial} \wedge \mathring{\partial}, \tag{2.118}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\mathring{\partial}^2 &= (\mathring{\partial}_\lrcorner + \mathring{\partial} \wedge)(\mathring{\partial}_\lrcorner + \mathring{\partial} \wedge), \\ &= \mathring{\partial}_\lrcorner \mathring{\partial} \wedge + \mathring{\partial} \wedge \mathring{\partial}_\lrcorner.\end{aligned}\quad (2.119)$$

Com base no que vimos acima, definimos:

Definição 138. *O operador $\square = \mathring{\partial} \cdot \mathring{\partial}$ é chamado de D'Alembertiano covariante.*

Note que podemos escrever o operador $\mathring{\partial} \cdot \mathring{\partial}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathring{\partial} \cdot \mathring{\partial} &= \frac{1}{2} \mathring{g}^{\alpha\beta} \left[\mathring{D}_{\mathbf{e}_\alpha} \mathring{D}_{\mathbf{e}_\beta} + \mathring{D}_{\mathbf{e}_\beta} \mathring{D}_{\mathbf{e}_\alpha} - b_{\alpha\beta}^{\rho\cdot\cdot} \mathring{D}_{\mathbf{e}_\rho} \right], \\ b_{\alpha\beta}^{\rho\cdot\cdot} &\equiv (\mathring{L}_{\alpha\beta}^{\rho\cdot\cdot} + \mathring{L}_{\beta\alpha}^{\rho\cdot\cdot}).\end{aligned}\quad (2.120)$$

Também podemos escrever o operador $\mathring{\partial} \wedge \mathring{\partial}$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathring{\partial} \wedge \mathring{\partial} &= \frac{1}{2} \theta^\alpha \wedge \theta^\beta \left[\mathring{D}_{\mathbf{e}_\alpha} \mathring{D}_{\mathbf{e}_\beta} - \mathring{D}_{\mathbf{e}_\beta} \mathring{D}_{\mathbf{e}_\alpha} - c_{\alpha\beta}^{\rho\cdot\cdot} \mathring{D}_{\mathbf{e}_\rho} \right], \\ c_{\alpha\beta}^{\rho\cdot\cdot} &\equiv \mathring{L}_{\alpha\beta}^{\rho\cdot\cdot} - \mathring{L}_{\beta\alpha}^{\rho\cdot\cdot}.\end{aligned}\quad (2.121)$$

Aplicando esse operador nas 1-formas do referencial $\{\theta^\mu\}$, obtemos:

$$(\mathring{\partial} \wedge \mathring{\partial})\theta^\mu = -\frac{1}{2} \mathring{R}_{\rho\alpha\beta}^{\mu\cdot\cdot\cdot} (\theta^\alpha \wedge \theta^\beta)\theta^\rho = -\mathring{\mathcal{R}}_{\cdot\rho}^\mu \theta^\rho, \quad (2.122)$$

onde $\mathring{R}_{\rho\alpha\beta}^{\mu\cdot\cdot\cdot}$ são as componentes do tensor de curvatura da conexão \mathring{D} . Pela propriedade do produto de Clifford, vem que:

$$\mathring{\mathcal{R}}_{\cdot\rho}^\mu \theta^\rho = \mathring{\mathcal{R}}_{\cdot\rho}^\mu \lrcorner \theta^\rho + \mathring{\mathcal{R}}_{\cdot\rho}^\mu \wedge \theta^\rho. \quad (2.123)$$

O segundo termo do lado direito da equação acima é identicamente nulo pois estamos considerando o caso em que $\Theta^\mu = 0$. Para vermos isto basta derivarmos a Eq.(2.99). Usando a Eq.(1.24) e a Eq.(1.25) podemos reescrever o primeiro termo do lado direito da equação anterior como:

$$\begin{aligned}\mathring{\mathcal{R}}_{\cdot\rho}^\mu \lrcorner \theta^\rho &= \frac{1}{2} \mathring{R}_{\rho\alpha\beta}^{\mu\cdot\cdot\cdot} (\theta^\alpha \wedge \theta^\beta) \lrcorner \theta^\rho \\ &= -\frac{1}{2} \mathring{R}_{\rho\alpha\beta}^{\mu\cdot\cdot\cdot} (\mathring{g}^{\rho\alpha} \theta^\beta - \mathring{g}^{\rho\beta} \theta^\alpha) \\ &= -\mathring{g}^{\rho\alpha} \mathring{R}_{\rho\alpha\beta}^{\mu\cdot\cdot\cdot} \theta^\beta = \mathring{R}_{\cdot\beta}^\mu \theta^\beta,\end{aligned}\quad (2.124)$$

onde $\mathring{R}_{\cdot\beta}^\mu$ são as componentes do chamado tensor de Ricci da conexão de Levi-Civita \mathring{D} de $\mathring{\mathbf{g}}$, dado por

$$\begin{aligned}\text{Ricci} &= R_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \\ R_{\mu\nu} &:= R_{\cdot\mu\rho\nu}^{\rho\cdot\cdot\cdot}\end{aligned}\quad (2.125)$$

Assim teremos:

$$(\mathring{\partial} \wedge \mathring{\partial})\theta^\mu = \mathring{\mathcal{R}}^\mu, \quad (2.126)$$

onde $\mathring{\mathcal{R}}^\mu = \mathring{R}^\mu_{\beta} \theta^\beta$ são as chamadas 1-formas de Ricci da variedade. Devido a isso, definiremos

Definição 139. O operador $\mathring{\partial} \wedge \mathring{\partial}$ é chamado de o operador de Ricci da variedade, associado a conexão de Levi-Civita \mathring{D} de \mathring{g} .

Note que para $A = A_\alpha \theta^\alpha \in \sec \wedge^1 T^*M \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(M, \mathring{g})$ temos

$$(\mathring{\partial} \wedge \mathring{\partial})(A) = A_\alpha (\mathring{\partial} \wedge \mathring{\partial})\theta^\alpha = A_\alpha \mathring{\mathcal{R}}^\alpha. \quad (2.127)$$

Portanto podemos escrever

$$((\mathring{\partial} \wedge \mathring{\partial})\theta^\mu) \cdot \theta_\mu = \mathring{R}^\mu_{\beta} \theta^\beta \cdot \theta_\mu = \mathring{R}^\mu_{\beta} \delta^\beta_\mu = \mathring{R}^\mu_{\mu} = \mathring{R}, \quad (2.128)$$

que é a curvatura escalar de M .

2.9.6 Algumas Relações Importantes em $\mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$

Considere $\mathbf{u} \in \sec TM$ e $u \in \sec \wedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$ a 1-forma associada a \mathbf{u} , i.e., $u = \mathbf{g}(\mathbf{u})$. Tome aqui novamente $\{\mathbf{e}_a\}$ uma base ortonormal para $TU \subset TM$ e $\{\theta^a\}$, $\theta^a \in \sec \wedge^1 T^*M \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$ a base dual correspondente e considere também uma estrutura de Riemann-Cartan (M, \mathbf{g}, ∇) .

Definição 140. Definimos em M o seguinte operador

$$\begin{aligned} \mathring{\partial} &: \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g}) \rightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g}), \\ \mathring{\partial} \mathcal{C} &:= \theta^a \mathring{\partial}_{\mathbf{e}_a} \mathcal{C} \end{aligned} \quad (2.129)$$

onde $\mathring{\partial}_{\mathbf{e}_a}$ é a derivada de Pfaff em campos de formas

$$\mathring{\partial}_{\mathbf{e}_a} \mathcal{C} = \sum_{r=0}^m \mathring{\partial}_{\mathbf{e}_a} \langle \mathcal{C} \rangle_r \quad (2.130)$$

tal que se $\langle \mathcal{C} \rangle_r$ é expandido na base gerada por $\{\theta^{\mathbf{a}}\}$, i.e., $\langle \mathcal{C} \rangle_r = \mathcal{C}_r = \frac{1}{r!} \mathcal{C}_{i_1 \dots i_r} \theta^{i_1 \dots i_r} \in \sec \wedge^r T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$ teremos

$$\mathring{\partial}_{\mathbf{e}_a} \langle \mathcal{C} \rangle_r := \frac{1}{r!} \mathbf{e}_a (\mathcal{C}_{i_1 \dots i_r} \theta^{i_1 \dots i_r}) = \frac{1}{r!} \mathbf{e}_a (\mathcal{C}_{i_1 \dots i_r}) \theta^{i_1 \dots i_r}. \quad (2.131)$$

Dados dois pares de bases diferentes $\{\mathbf{e}_a, \theta^a\}$ e $\{\mathbf{e}'_a, \theta'^a\}$ teremos que

$$\theta^a \mathring{\partial}_{\mathbf{e}_a} \mathcal{C} = \theta'^a \mathring{\partial}'_{\mathbf{e}'_a} \mathcal{C}, \quad (2.132)$$

desde que para todo \mathcal{C}_r

$$\mathring{\partial}' \mathcal{C}_r = \theta'^a \mathring{\partial}'_{\mathbf{e}'_a} \mathcal{C}_r = \theta'^a \mathbf{e}'_a \left(\frac{1}{r!} \mathcal{C}'_{i_1 \dots i_r} \theta'^{i_1 \dots i_r} \right) = \theta'^a \mathbf{e}_a \left(\frac{1}{r!} \mathcal{C}_{i_1 \dots i_r} \theta^{i_1 \dots i_r} \right). \quad (2.133)$$

Observação 141. Relembramos também que para qualquer $B \in \sec \bigwedge^2 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}l(M, \mathfrak{g})$ e qualquer $A_r \in \bigwedge^r T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}l(M, \mathfrak{g})$ com $r \geq 2$ temos que

$$BA_r = B \lrcorner A_r + B \times A_r + B \wedge A_r. \quad (2.134)$$

onde para $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \sec \mathcal{C}l(M, \mathfrak{g})$ definimos

$$\mathcal{C} \times \mathcal{D} = \frac{1}{2}(\mathcal{C}\mathcal{D} - \mathcal{D}\mathcal{C}) \quad (2.135)$$

Observe também que para $v \in \bigwedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}l(M, \mathfrak{g})$ vale

$$B \times v = B \lrcorner v = -v \lrcorner B. \quad (2.136)$$

Expresse por $\overset{\nabla}{\partial} := \theta^a \nabla_{\mathbf{e}_a}$ o operador de Dirac associado à ∇ , uma conexão de Riemann-Cartan. Em [47] é introduzido o comutador de Dirac de dois campos de 1-formas $u, v \in \sec \bigwedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}l(M, \mathfrak{g})$ associado com ∇ por

$$\begin{aligned} \llbracket \cdot, \cdot \rrbracket &: \sec \bigwedge^1 T^*M \times \sec \bigwedge^1 T^*M \rightarrow \sec \bigwedge^1 T^*M \\ \llbracket u, v \rrbracket &= (u \cdot \overset{\nabla}{\partial})v - (v \cdot \overset{\nabla}{\partial})u - \llbracket u, v \rrbracket, \end{aligned} \quad (2.137)$$

onde

$$\llbracket u, v \rrbracket = (u \cdot \boldsymbol{\partial})v - (v \cdot \boldsymbol{\partial})u, \quad (2.138)$$

é o colchete de Lie de campos de 1-formas¹⁵ e $\boldsymbol{\partial}$ é o operador padrão de Dirac associado à D , a conexão de Levi-Civita de \mathfrak{g} .

Definição 142. Para uma conexão compatível com a métrica ∇ , lembrando a definição do operador de torção Eq.(2.85) nós convenientemente escrevemos [47]

$$\tau(u, v) = \llbracket u, v \rrbracket, \quad (2.139)$$

a qual chamaremos de operador de torção (de formas).

Definição 143. Relembraremos a ação do operador¹⁶ $\partial_u (u \in \sec \bigwedge^1 T^*M \rightarrow \sec \mathcal{C}l(M, \mathfrak{g}))$ num campo extensorial $F : \sec \bigwedge^1 T^*M \rightarrow \sec \bigwedge^r T^*M$, $u \mapsto F(u)$. Se $u = u^i \theta_i$, temos que $\partial_u := \theta^{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial u^{\mathbf{k}}}$ agindo em $F(u)$ é dado por

$$\partial_u F(u) := \theta^{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial u^{\mathbf{k}}} F(u^i \theta_i) := \theta^{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial u^{\mathbf{k}}} u^i F(\theta_i) = \theta^{\mathbf{k}} F(\theta_{\mathbf{k}}) = \theta^{\mathbf{k}} \lrcorner F(\theta_{\mathbf{k}}) + \theta^{\mathbf{k}} \wedge F(\theta_{\mathbf{k}}). \quad (2.140)$$

Também a ação do operador $\partial_u \wedge \partial_v (u = u^i \theta_i, v = v^j \theta_j)$ agindo num campo extensorial $G : \sec \bigwedge^1 T^*M \times \sec \bigwedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \bigwedge^r T^*M$, $(u, v) \mapsto G(u, v)$ é dada por

$$\begin{aligned} \partial_u \wedge \partial_v G(u, v) &= \theta^{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial u^{\mathbf{k}}} \wedge \theta^{\mathbf{l}} \frac{\partial}{\partial v^{\mathbf{l}}} u^{\mathbf{m}} v^{\mathbf{n}} G(\theta^{\mathbf{m}}, \theta^{\mathbf{n}}) \\ &= \theta^{\mathbf{k}} \wedge \theta^{\mathbf{l}} G(\theta_{\mathbf{k}}, \theta_{\mathbf{l}}). \end{aligned} \quad (2.141)$$

¹⁵Teremos, e.g., que se $[\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b] = c_{ab}^d \mathbf{e}_d$, então $\llbracket \theta_a, \theta_b \rrbracket = c_{ab}^d \theta_d$.

¹⁶Mais detalhes do conceito do operador derivação $\partial_A (A \in \sec \mathcal{C}l(M, \mathfrak{g}))$ agindo num campo geral de multiformas $E : \sec \mathcal{C}l(M, \mathfrak{g}) \rightarrow \sec \mathcal{C}l(M, \mathfrak{g})$ podem ser encontrados, e.g., em [47] onde vários exemplos explícitos são dados.

Definição 144. *A aplicação*

$$\begin{aligned} \mathfrak{t} &: \sec \bigwedge^2 T^*M \rightarrow \sec \bigwedge^1 T^*M, \\ \mathfrak{t}(B) &= \frac{1}{2}B \cdot (\partial_u \wedge \partial_v)\tau(u, v). \end{aligned} \quad (2.142)$$

é chamada de campo (2-1)-extensorial de torção e

$$\mathfrak{t}(u \wedge v) = \tau(u, v). \quad (2.143)$$

Realmente, da Eq.(2.142) tomando $B = a \wedge b$ teremos

$$\mathfrak{t}(a \wedge b) = \frac{1}{2}(a \wedge b) \cdot (\partial_u \wedge \partial_v)\tau(u, v). \quad (2.144)$$

Agora,

$$(\partial_u \wedge \partial_v)\tau(u, v) = (\theta^k \wedge \theta^l)\tau(\theta_k, \theta_l). \quad (2.145)$$

Então,

$$\mathfrak{t}(a \wedge b) = \frac{1}{2}(a \wedge b) \cdot (\theta^k \wedge \theta^l)\tau(\theta_k, \theta_l) = \tau(a, b). \quad (2.146)$$

Definição 145. *A aplicação extensorial*

$$\begin{aligned} \Theta &: \sec \bigwedge^1 T^*M \rightarrow \sec \bigwedge^2 T^*M, \\ \Theta(c) &= \frac{1}{2}(\partial_u \wedge \partial_v)\tau(u, v) \cdot c, \end{aligned} \quad (2.147)$$

é chamada de campo de torção de Cartan.

Teremos que

$$\mathfrak{t}(u \wedge v) = \partial_c(u \wedge v) \cdot \Theta(c) \quad (2.148)$$

e se $\nabla_{\mathbf{e}_a}\theta^b := -L_{ac}^{b\cdot}\theta^c$ então

$$\begin{aligned} z \cdot \mathfrak{t}(u \wedge v) &= z_a u^a v^b T_{ab}^{d\cdot}, \\ T_{ab}^{c\cdot} &= L_{ab}^{c\cdot} - L_{ba}^{c\cdot} - c_{ab}^{c\cdot}. \end{aligned} \quad (2.149)$$

Definição 146. *O campo (1-2)-extensorial de conexão ω num dado calibre é dado por ($v = \mathbf{g}(\mathbf{v}, \cdot)$)*

$$\begin{aligned} \omega &: \sec \bigwedge^1 T^*M \rightarrow \sec \bigwedge^2 T^*M, \\ v \mapsto \omega(v) &= \frac{1}{2}v^c L_{c\cdot}^{a\cdot b}\theta_a \wedge \theta_b. \end{aligned} \quad (2.150)$$

Também introduzimos o seguinte operador

$$\begin{aligned}\omega &: \sec \bigwedge^1 TM \rightarrow \sec \bigwedge^2 T^*M, \\ \mathbf{v} &\mapsto \omega(\mathbf{v}) = \omega_{\mathbf{v}} := \frac{1}{2}v^c L_{\cdot c}^{a \cdot b} \theta_a \wedge \theta_b,\end{aligned}\tag{2.151}$$

e fica claro que

$$\omega(v) = \omega_{\mathbf{v}}.\tag{2.152}$$

Note que o fato de considerarmos a base ortonormal $\theta^a \in \sec T^*M \leftrightarrow \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$ é de fundamental importância, pois assim teremos $L_{\cdot c}^{a \cdot b} = -L_{\cdot c}^{b \cdot a}$. A seguir obteremos uma fórmula muito interessante e compacta relacionando a derivada covariante (compatível com a métrica \mathbf{g}) de um campo de Clifford $\mathcal{C} \in \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$ e o (1, 2)-extensor de conexão ω .

Proposição 147. *Seja $\mathcal{C} \in \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$, para uma conexão compatível com \mathbf{g} , teremos*

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathcal{C} = \tilde{\partial}_{\mathbf{v}} \mathcal{C} + \frac{1}{2}[\omega_{\mathbf{v}}, \mathcal{C}] = \tilde{\partial}_{\mathbf{v}} \mathcal{C} + \omega_{\mathbf{v}} \times \mathcal{C},\tag{2.153}$$

onde usamos as notações $[\omega_{\mathbf{v}}, \mathcal{C}] \equiv \omega_{\mathbf{v}} \mathcal{C} - \mathcal{C} \omega_{\mathbf{v}}$ e $\omega_{\mathbf{v}} \times \mathcal{C} = \frac{1}{2}[\omega_{\mathbf{v}}, \mathcal{C}]$.

Demonstração. Primeiramente vamos considerar o caso em que

$$\mathcal{C} = \alpha = \alpha_i \theta^i \in \sec \bigwedge^1 T^*M \leftrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g}).\tag{2.154}$$

Temos por definição

$$\nabla_{\mathbf{e}_a} \alpha_i \theta^i = \mathbf{e}_a(\alpha_i) \theta^i - \alpha_i L_{\cdot a}^{i \cdot \cdot} \theta^b.\tag{2.155}$$

Considerando então

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[\omega(\mathbf{e}_a), \alpha_i \theta^i] &= \omega(\mathbf{e}_a) \lrcorner (\alpha_i \theta^i) = -(\alpha_i \theta^i) \lrcorner \omega(\mathbf{e}_a) \\ &= -\frac{1}{2} \alpha_i L_{\cdot a}^{b \cdot c} \theta^i \lrcorner (\theta_b \wedge \theta_c) = -\frac{1}{2} (\alpha_i L_{\cdot a}^{i \cdot c} \theta_c + \alpha_i L_{\cdot a}^{b \cdot i} \theta_b) \\ &= -\frac{1}{2} (\alpha_i L_{\cdot a}^{i \cdot c} \theta_c + \alpha_i L_{\cdot a}^{i \cdot b} \theta_b) = -\alpha_i L_{\cdot a}^{i \cdot \cdot} \theta^b.\end{aligned}\tag{2.156}$$

Portanto se $\alpha \in \sec \bigwedge^1 T^*M$, por linearidade temos

$$\nabla_{\mathbf{v}} \alpha = \tilde{\partial}_{\mathbf{v}} \alpha + \frac{1}{2}[\omega_{\mathbf{v}}, \alpha] = \tilde{\partial}_{\mathbf{v}} \alpha + \omega_{\mathbf{v}} \times \alpha.\tag{2.157}$$

Vamos fazer uma prova por indução, suponha que a Eq.(2.153) seja válida para r -formas $A^r \in \sec \bigwedge^r T^*M \leftrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$ com $0 \leq r \leq k$. Considere

$$A = A_{i_1 \dots i_{r+1}} \theta^{i_1} \dots \theta^{i_{r+1}} \in \sec \bigwedge^{r+1} T^*M \leftrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g}),\tag{2.158}$$

teremos

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{v}}A &= \nabla_{\mathbf{v}}(A_{i_1 \dots i_{r+1}} \theta^{i_1} \dots \theta^{i_{r+1}}) = \nabla_{\mathbf{v}}((\theta^{i_1})(A_{i_1 \dots i_{r+1}} \theta^{i_2} \dots \theta^{i_{r+1}})) \\
&= (\nabla_{\mathbf{v}}(\theta^{i_1}))(A_{i_1 \dots i_{r+1}} \theta^{i_2} \dots \theta^{i_{r+1}}) + (\theta^{i_1})\nabla_{\mathbf{v}}(A_{i_1 \dots i_{r+1}} \theta^{i_2} \dots \theta^{i_{r+1}}) \\
&= (\tilde{\partial}_{\mathbf{v}}\theta^{i_1} + \frac{1}{2}[\omega_{\mathbf{v}}, \theta^{i_1}])(A_{i_1 \dots i_{r+1}} \theta^{i_2} \dots \theta^{i_{r+1}}) \\
&\quad + \theta^{i_1}(\tilde{\partial}_{\mathbf{v}}(A_{i_1 \dots i_{r+1}} \theta^{i_2} \dots \theta^{i_{r+1}}) + \frac{1}{2}[\omega_{\mathbf{v}}, A_{i_1 \dots i_{r+1}} \theta^{i_2} \dots \theta^{i_{r+1}}]) \\
&= \tilde{\partial}_{\mathbf{v}}(A_{i_1 \dots i_{r+1}} \theta^{i_1} \theta^{i_2} \dots \theta^{i_{r+1}}) + \frac{1}{2}(\theta^{i_1}[\omega_{\mathbf{v}}, A_{i_1 \dots i_{r+1}} \theta^{i_2} \dots \theta^{i_{r+1}}] \\
&\quad + [\omega_{\mathbf{v}}, \theta^{i_1}])(A_{i_1 \dots i_{r+1}} \theta^{i_2} \dots \theta^{i_{r+1}}) \\
&= \tilde{\partial}_{\mathbf{v}}(A_{i_1 \dots i_{r+1}} \theta^{i_1} \theta^{i_2} \dots \theta^{i_{r+1}}) + \frac{1}{2}[\omega_{\mathbf{v}}, (A_{i_1 \dots i_{r+1}} \theta^{i_1} \theta^{i_2} \dots \theta^{i_{r+1}})]. \tag{2.159}
\end{aligned}$$

Assim, por linearidade teremos para qualquer $\mathcal{C} \in \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$,

$$\nabla_{\mathbf{v}}\mathcal{C} = \tilde{\partial}_{\mathbf{v}}\mathcal{C} + \frac{1}{2}[\omega_{\mathbf{v}}, \mathcal{C}] = \tilde{\partial}_{\mathbf{v}}\mathcal{C} + \omega_{\mathbf{v}} \times \mathcal{C} \tag{2.160}$$

e a proposição fica demonstrada. ■

Observação 148. Note que se $v = \mathfrak{g}(\mathbf{v}, \cdot)$ então

$$v \times \mathcal{C} := v \lrcorner \mathcal{C}. \tag{2.161}$$

E também percebe que

$$\nabla_{\mathbf{v}}\mathcal{C} = \mathbf{v} \cdot \overset{\nabla}{\partial}\mathcal{C}. \tag{2.162}$$

Definição 149. O operador de curvatura de formas é a aplicação¹⁷

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho} : \sec(\bigwedge^1 T^*M \times \bigwedge^1 T^*M) &\rightarrow \text{End} \bigwedge^1 T^*M, \\
\tilde{\rho}(u, v) &= [u \cdot \partial, v \cdot \partial] - \llbracket u, v \rrbracket \cdot \partial \\
&= [\nabla_{\mathbf{u}}, \nabla_{\mathbf{v}}] - \nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} \tag{2.163}
\end{aligned}$$

com $u = \mathfrak{g}(\mathbf{u}, \cdot)$, $v = \mathfrak{g}(\mathbf{v}, \cdot)$, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \in \sec TU \subset TM$

Definição 150. O extensor de curvatura de formas é a aplicação

$$\begin{aligned}
\rho : \sec(\bigwedge^1 T^*M \times \bigwedge^1 T^*M \times \bigwedge^1 T^*M) &\rightarrow \sec \bigwedge^1 T^*M, \\
\rho(a, b, c) &= [a \cdot \partial, b \cdot \partial]c - \llbracket a, b \rrbracket \cdot \partial c \\
&= [\nabla_{\mathbf{a}}, \nabla_{\mathbf{b}}]c - \nabla_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}c \tag{2.164}
\end{aligned}$$

¹⁷Compare com a Eq.(2.86).

com $a = \mathbf{g}(\mathbf{a}, \cdot)$, $b = \mathbf{g}(\mathbf{b}, \cdot)$, $c = \mathbf{g}(\mathbf{c}, \cdot)$, $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \in \sec TU \subset \sec TM$.

É trivial vermos que para uma conexão de Riemann-Cartan teremos

$$\rho(a, b, c) = -\rho(b, a, c). \quad (2.165)$$

Para a conexão de Levi-Civita teremos

$$\rho(a, b, c) + \rho(b, c, a) + \rho(c, a, b) = 0. \quad (2.166)$$

Note entretanto que a Eq.(2.166) não é verdadeira para uma conexão em geral.

Definição 151. *A aplicação*

$$\begin{aligned} \mathbf{R} : \sec \left(\bigwedge^1 T^*M \right)^4 &\rightarrow \sec \bigwedge^0 T^*M, \\ \mathbf{R}(a, b, c, w) &= -\rho(a, b, c) \cdot w, \end{aligned} \quad (2.167)$$

com $a = \mathbf{g}(\mathbf{a}, \cdot)$, $b = \mathbf{g}(\mathbf{b}, \cdot)$, $c = \mathbf{g}(\mathbf{c}, \cdot)$, $w = \mathbf{g}(\mathbf{w}, \cdot)$ e $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{w}\} \in \sec TU \subset TM$ é chamada de tensor de curvatura (de formas).

Desta definição vemos que para a conexão ∇ teremos

$$\mathbf{R}(a, b, c, w) = -\mathbf{R}(b, a, c, w), \quad (2.168)$$

$$\mathbf{R}(a, b, c, w) = -\mathbf{R}(a, b, w, c), \quad (2.169)$$

e para a conexão de Levi-Civita

$$\mathbf{R}(a, b, c, w) = \mathbf{R}(c, w, a, b), \quad (2.170)$$

$$\mathbf{R}(a, b, c, w) + \mathbf{R}(b, c, a, w) + \mathbf{R}(c, a, b, w) = 0, \quad (2.171)$$

A Eq.(2.171) é conhecida como a primeira identidade de Bianchi.

Proposição 152. *Existe um campo diferenciável de (2-2)-extensores*

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} : \sec \bigwedge^2 T^*M &\rightarrow \bigwedge^2 T^*M, \\ B &\mapsto \mathfrak{R}(B) \end{aligned} \quad (2.172)$$

chamado de biforma de curvatura, de forma que para $a, b, c, d \in \sec \bigwedge^1 T^*M$ teremos

$$\mathbf{R}(a, b, c, d) = \mathfrak{R}(a \wedge b) \cdot (c \wedge d) = -(c \wedge d) \lrcorner \mathfrak{R}(a \wedge b) \quad (2.173)$$

Teremos que, $B \mapsto \mathfrak{R}(B)$ será dado por

$$\mathfrak{R}(B) = -\frac{1}{4} B \cdot (\partial_a \wedge \partial_b) \partial_c \wedge \partial_d \rho(a, b, c) \cdot d, \quad (2.174)$$

e também veremos que

$$\mathfrak{R}(a \wedge b) = -\frac{1}{2} \partial_c \wedge \partial_d \rho(a, b, c) \cdot d. \quad (2.175)$$

Demonstração. Primeiro, verificaremos que a Eq.(2.174) e a Eq.(2.175) são realmente equivalentes. Realmente, a Eq.(2.174) implica a Eq.(2.175) desde que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}(a \wedge b) &= -\frac{1}{4}(a \wedge b) \cdot (\partial_p \wedge \partial_q) \partial_c \wedge \partial_d \rho(p, q, c) \cdot d \\
&= -\frac{1}{4} \det \begin{bmatrix} a \cdot \partial_p & a \cdot \partial_q \\ b \cdot \partial_p & b \cdot \partial_q \end{bmatrix} \partial_c \wedge \partial_d \rho(p, q, c) \cdot d \\
&= -\frac{1}{4} (a \cdot \partial_p b \cdot \partial_q - a \cdot \partial_q b \cdot \partial_p) \partial_c \wedge \partial_d \rho(p, q, c) \cdot d \\
&= -\frac{1}{2} (a \cdot \partial_p b \cdot \partial_q) \partial_c \wedge \partial_d \rho(p, q, c) \cdot d \\
&= -\frac{1}{2} \partial_c \wedge \partial_d \rho(a, b, c) \cdot d.
\end{aligned} \tag{2.176}$$

Também, a Eq.(2.175) implica na Eq.(2.174) desde que usando a seguinte expressão

$$B = \frac{1}{2} B \cdot (\partial_a \wedge \partial_b) a \wedge b \tag{2.177}$$

teremos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}(B) &= \mathfrak{R}\left(\frac{1}{2} B \cdot (\partial_a \wedge \partial_b) a \wedge b\right) \\
&= \frac{1}{2} B \cdot (\partial_a \wedge \partial_b) \mathfrak{R}(a \wedge b) \\
&= -\frac{1}{4} B \cdot (\partial_a \wedge \partial_b) \partial_c \wedge \partial_d \rho(a, b, c) \cdot d.
\end{aligned} \tag{2.178}$$

Agora, mostraremos a validade da Eq.(2.173). Teremos usando a Eq.(2.175)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}(a \wedge b) \lrcorner (c \wedge d) &= -\frac{1}{2} (c \wedge d) \cdot (\partial_p \wedge \partial_q) \rho(a, b, p) \cdot q \\
&= -\frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} c \cdot \partial_p & c \cdot \partial_q \\ d \cdot \partial_p & d \cdot \partial_q \end{bmatrix} \rho(a, b, p) \cdot q \\
&= -\frac{1}{2} (c \cdot \partial_p d \cdot \partial_q - c \cdot \partial_q d \cdot \partial_p) \rho(a, b, p) \cdot q \\
&= -c \cdot \partial_p d \cdot \partial_q \rho(a, b, p) \cdot q \\
&= -\rho(a, b, c) \cdot d = \mathbf{R}(a, b, c, d),
\end{aligned} \tag{2.179}$$

e a proposição está provada. ■

Proposição 153. *A biforma de curvatura $\mathfrak{R}(u \wedge v)$ é dada por*¹⁸

$$\mathfrak{R}(u \wedge v) = u \cdot \check{\partial} \omega(v) - v \cdot \check{\partial} \omega(u) + \omega(u) \times \omega(v). \tag{2.180}$$

¹⁸Note que na Eq.(2.181) $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ é o colchete de Lie de campo de vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} e $[u, v] := u \cdot \partial v - v \cdot \partial u$ é o comutador de campos de 1-formas u e v . Mais detalhes, se necessários, podem ser encontrados em [47].

Demonstração. A prova será dada em três passos **(a)**, **(b)** e **(c)**.

(a) Primeiramente mostraremos que a Eq.(2.180) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(u \wedge v) &= u \cdot \overset{\nabla}{\partial} \omega_{\mathbf{v}} - v \cdot \overset{\nabla}{\partial} \omega_{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} [\omega_{\mathbf{u}}, \omega_{\mathbf{v}}] - \omega_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} \\ &= \nabla_{\mathbf{u}} \omega_{\mathbf{v}} - \nabla_{\mathbf{v}} \omega_{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} [\omega_{\mathbf{u}}, \omega_{\mathbf{v}}] - \omega_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]},\end{aligned}\quad (2.181)$$

com, $u = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \cdot)$, $v = \mathbf{g}(\mathbf{v}, \cdot)$. Realmente, teremos

$$u \cdot \overset{\nabla}{\partial}(\omega(v)) = u \cdot \check{\partial}(\omega(v)) + \frac{1}{2} [\omega(u), \omega(v)]. \quad (2.182)$$

e relembrando a definição da derivada de um campo extensorial, que é:

$$(u \cdot \check{\partial} \omega)(v) \equiv u \cdot \check{\partial} \omega(v) := u \cdot \check{\partial}(\omega(v)) - \omega(u \cdot \check{\partial} v). \quad (2.183)$$

chegamos em,

$$\begin{aligned}u \cdot \check{\partial}(\omega(v)) - v \cdot \check{\partial}(\omega(u)) &= u \cdot \check{\partial} \omega(v) - v \cdot \check{\partial} \omega(u) + \omega(u \cdot \check{\partial} v) - \omega(v \cdot \check{\partial} u) \\ &= u \cdot \check{\partial} \omega(v) - v \cdot \check{\partial} \omega(u) + \omega(\llbracket u, v \rrbracket) \\ &= u \cdot \check{\partial} \omega_{\mathbf{v}} - v \cdot \check{\partial} \omega_{\mathbf{u}} + \omega_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]},\end{aligned}\quad (2.184)$$

e usando as equações acima na Eq.(2.180) chegamos na Eq.(2.181).

(b) A seguir mostraremos que para qualquer $\mathcal{C} \in \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$ teremos

$$([\nabla_{\mathbf{u}}, \nabla_{\mathbf{v}}] - \nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]})\mathcal{C} = \frac{1}{2} [\mathfrak{R}(u \wedge v), \mathcal{C}], \quad (2.185)$$

com $\mathfrak{R}(u \wedge v)$ dado pela Eq.(2.181). Como $\mathcal{C} \in \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$ é a soma de formas não-homogêneas, i.e. $\mathcal{C} = \sum_{p=0}^n \mathcal{C}_p$ with $\mathcal{C}_p \in \sec \wedge^p T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$, e notando que $\mathcal{C}_p = \frac{1}{p!} \mathcal{C}_{i_1 p} \theta^{i_1} \cdots \theta^{i_p}$, é suficiente verificarmos o resultado para p -formas. Verificaremos, primeiramente a validade da fórmula para 1-formas $\theta^i \in \sec \wedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$. Teremos, usando a Eq.(2.181) e identidade de Jacobi

$$\llbracket \omega_{\mathbf{v}}, \llbracket \omega_{\mathbf{u}}, \theta^i \rrbracket \rrbracket + \llbracket \omega_{\mathbf{u}}, \llbracket \theta^i, \omega_{\mathbf{v}} \rrbracket \rrbracket + \llbracket \theta^i, \llbracket \omega_{\mathbf{v}}, \omega_{\mathbf{u}} \rrbracket \rrbracket = 0, \quad (2.186)$$

que

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2} [\mathfrak{R}(u \wedge v), \theta^i] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (\nabla_{\mathbf{u}} \omega_{\mathbf{v}} \theta^i - \theta^i \nabla_{\mathbf{u}} \omega_{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} [\llbracket \omega_{\mathbf{v}}, \omega_{\mathbf{u}} \rrbracket, \theta^i] - (\nabla_{\mathbf{v}} \omega_{\mathbf{u}} \theta^i + \theta^i \nabla_{\mathbf{v}} \omega_{\mathbf{u}} - \llbracket \omega_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}, \theta^i \rrbracket) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ [\nabla_{\mathbf{u}} \omega_{\mathbf{v}}, \theta^i] + \frac{1}{2} [\omega_{\mathbf{v}}, \llbracket \omega_{\mathbf{u}}, \theta^i \rrbracket] - [\nabla_{\mathbf{v}} \omega_{\mathbf{u}}, \theta^i] - \frac{1}{2} [\omega_{\mathbf{u}}, \llbracket \omega_{\mathbf{v}}, \theta^i \rrbracket] - \llbracket \omega_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}, \theta^i \rrbracket \right\} \\ &= \nabla_{\mathbf{u}} \nabla_{\mathbf{v}} \theta^i - \nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{u}} \theta^i - \nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} \theta^i.\end{aligned}\quad (2.187)$$

Suponha que a fórmula seja válida para p -formas, calculemos então o primeiro membro da Eq.(2.185) para as $(p+1)$ -formas $\theta^{i_1 \dots i_{p+1}} = \theta^i \dots \theta^{i_{p+1}}$

$$\begin{aligned}
& \nabla_{\mathbf{u}} \nabla_{\mathbf{v}} (\theta^i) - \nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{u}} (\theta^{i_1 \dots i_{p+1}}) - \nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} (\theta^{i_1 \dots i_{p+1}}) \\
&= \nabla_{\mathbf{u}} ((\nabla_{\mathbf{v}} \theta^i) \theta^{i_2 \dots i_{p+1}} + \theta^{i_1} \nabla_{\mathbf{v}} \theta^{i_2 \dots i_{p+1}}) - \nabla_{\mathbf{v}} ((\nabla_{\mathbf{u}} \theta^i) \theta^{i_2 \dots i_{p+1}} + \theta^{i_1} \nabla_{\mathbf{u}} \theta^{i_2 \dots i_{p+1}}) \\
&\quad - (\nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} \theta^i) \theta^{i_2 \dots i_{p+1}} - \theta^{i_1} \nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} \theta^{i_2 \dots i_{p+1}} \\
&= (\nabla_{\mathbf{u}} \nabla_{\mathbf{v}} \theta^i) \theta^{i_2 \dots i_{p+1}} + \nabla_{\mathbf{v}} \theta^{i_1} \nabla_{\mathbf{u}} \theta^{i_2 \dots i_{p+1}} + \nabla_{\mathbf{u}} \theta^{i_1} \nabla_{\mathbf{v}} \theta^{i_2 \dots i_{p+1}} + \theta^{i_1} \nabla_{\mathbf{u}} \nabla_{\mathbf{v}} \theta^{i_2 \dots i_{p+1}} \\
&\quad - (\nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{u}} \theta^i) \theta^{i_2 \dots i_{p+1}} - \nabla_{\mathbf{u}} \theta^{i_1} \nabla_{\mathbf{v}} \theta^{i_2 \dots i_{p+1}} - \nabla_{\mathbf{v}} \theta^{i_1} \nabla_{\mathbf{u}} \theta^{i_2 \dots i_{p+1}} - \theta^{i_1} \nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{u}} \theta^{i_2 \dots i_{p+1}} \\
&\quad - (\nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} \theta^i) \theta^{i_2 \dots i_{p+1}} - \theta^{i_1} \nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} \theta^{i_2 \dots i_{p+1}} \\
&= \theta^{i_1} (\nabla_{\mathbf{u}} \nabla_{\mathbf{v}} \theta^{i_2 \dots i_{p+1}} - \nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{u}} \theta^{i_2 \dots i_{p+1}} - \nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} \theta^{i_2 \dots i_{p+1}}) \\
&\quad + (\nabla_{\mathbf{u}} \nabla_{\mathbf{v}} \theta^{i_1} - \nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{u}} \theta^{i_1} - \nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} \theta^{i_1}) \theta^{i_2 \dots i_{p+1}} \\
&= \theta^{i_1} \left(\frac{1}{2} [\mathfrak{R}(u \wedge v), \theta^{i_2 \dots i_{p+1}}] \right) + \left(\frac{1}{2} [\mathfrak{R}(u \wedge v), \theta^{i_1}] \right) \theta^{i_2 \dots i_{p+1}} \\
&= \frac{1}{2} [\mathfrak{R}(u \wedge v), \theta^{i_1 \dots i_{p+1}}], \tag{2.188}
\end{aligned}$$

onde a última linha da Eq.(2.188) é o segundo membro da Eq.(2.185) avaliado para $\theta^{i_1} \theta^{i_2} \dots \theta^{i_{p+1}}$.

(c) Agora, nos resta verificar que

$$\mathbf{R}(u, v, t, z) = (t \wedge z) \cdot \mathfrak{R}(u \wedge v), \tag{2.189}$$

com $\mathfrak{R}(u \wedge v)$ dado pela Eq.(2.181). Realmente, teremos que para quaisquer $t, z \in \sec \wedge^1 T^*M$, e $\mathfrak{R}(u \wedge v) \in \sec \wedge^2 T^*M$

$$\begin{aligned}
(z \wedge t) \cdot \mathfrak{R}(u \wedge v) &= -z \lrcorner (t \lrcorner \mathfrak{R}(u \wedge v)) \\
&= z \cdot (\mathfrak{R}(u \wedge v) \lrcorner t) \\
&= \frac{1}{2} z \cdot [\mathfrak{R}(u, v), t] \\
&\stackrel{\text{Eq.(2.185)}}{=} z \cdot (\nabla_{\mathbf{u}} \nabla_{\mathbf{v}} t - \nabla_{\mathbf{v}} \nabla_{\mathbf{u}} t - \nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} t) \tag{2.190}
\end{aligned}$$

e a proposição está provada. ■

Em particular teremos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(u, v, z, t) &= z_{\mathbf{c}} t^{\mathbf{d}} u^{\mathbf{a}} v^{\mathbf{b}} R_{\mathbf{dab}}^{\mathbf{c} \dots}, \\
R_{\mathbf{cab}}^{\mathbf{d} \dots} &= \mathbf{e}_{\mathbf{a}}(L_{\mathbf{bc}}^{\mathbf{d} \dots}) - \mathbf{e}_{\mathbf{b}}(L_{\mathbf{ac}}^{\mathbf{d} \dots}) + L_{\mathbf{ak}}^{\mathbf{d} \dots} L_{\mathbf{bc}}^{\mathbf{k} \dots} - L_{\mathbf{bk}}^{\mathbf{d} \dots} L_{\mathbf{ac}}^{\mathbf{k} \dots} - c_{\mathbf{ab}}^{\mathbf{k} \dots} L_{\mathbf{kc}}^{\mathbf{d} \dots}. \tag{2.191}
\end{aligned}$$

e

$$\mathbf{R}(\theta^{\mathbf{a}}, \theta^{\mathbf{b}}, \theta_{\mathbf{a}}, \theta_{\mathbf{b}}) = (\theta^{\mathbf{a}} \wedge \theta^{\mathbf{b}}) \cdot \mathfrak{R}(\theta_{\mathbf{a}} \wedge \theta_{\mathbf{b}}) = R, \tag{2.192}$$

onde R é a curvatura escalar.

Proposição 154. Para $v \in \sec \wedge^1 T^*M \leftrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$ teremos

$$[\nabla_{\mathbf{e}_a}, \nabla_{\mathbf{e}_b}]v = \mathfrak{R}(\theta_a \wedge \theta_b) \lrcorner v - (T_{ab}^c - L_{ab}^{c \dots} + L_{ba}^{c \dots}) \nabla_{\mathbf{e}_c} v. \tag{2.193}$$

Demonstração. Da Eq.(2.187) podemos escrever

$$\begin{aligned}
[\nabla_{\mathbf{e}_a}, \nabla_{\mathbf{e}_b}]v &= \frac{1}{2}[\mathfrak{R}(\theta_a \wedge \theta_b), v] + \nabla_{[\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b]}v \\
&= \mathfrak{R}(\theta_a \wedge \theta_b)\lrcorner v + \nabla_{[\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b] - \nabla_{\mathbf{e}_a}\mathbf{e}_b + \nabla_{\mathbf{e}_b}\mathbf{e}_a}v + \nabla_{\nabla_{\mathbf{e}_a}\mathbf{e}_b}v - \nabla_{\nabla_{\mathbf{e}_b}\mathbf{e}_a}v \\
&= \mathfrak{R}(\theta_a \wedge \theta_b)\lrcorner v + \nabla_{-T_{ab}^{c\cdot\cdot}}\mathbf{e}_c v + \nabla_{L_{ab}^{c\cdot\cdot}}\mathbf{e}_c v - \nabla_{L_{ba}^{c\cdot\cdot}}\mathbf{e}_c v \\
&= \mathfrak{R}(\theta_a \wedge \theta_b)\lrcorner v - (T_{ab}^{c\cdot\cdot} - L_{ab}^{c\cdot\cdot} + L_{ba}^{c\cdot\cdot})\nabla_{\mathbf{e}_c}v
\end{aligned} \tag{2.194}$$

que prova a proposição. ■

Proposição 155.

$$\mathfrak{R}(\theta^a \wedge \theta_b) = \mathcal{R}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}} = d\omega_{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}} + \omega_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a}} \wedge \omega_{\mathbf{b}}^{\mathbf{c}} \tag{2.195}$$

Demonstração. Relembre que usando

$$\begin{aligned}
([\nabla_{\mathbf{e}_k}, \nabla_{\mathbf{e}_l}] - \nabla_{[\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l]})\theta^j &= \tilde{\rho}(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)\theta^j = -R_{ikl}^{j\cdot\cdot}\theta^i, \\
([\nabla_{\mathbf{e}_k}, \nabla_{\mathbf{e}_l}] - \nabla_{[\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l]})\theta_j &= \tilde{\rho}(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l)\theta_j = R_{jkl}^{i\cdot\cdot}\theta_i,
\end{aligned} \tag{2.196}$$

teremos

$$\mathfrak{R}(\theta_a \wedge \theta_b)\lrcorner v = v^m \tilde{\rho}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b)\theta_m = v^m R_{mab}^{i\cdot\cdot}\theta_i. \tag{2.197}$$

De outro modo, para uma conexão em geral, podemos escrever

$$\mathcal{R}_{ab} := \frac{1}{2}R_{klab}\theta^k \wedge \theta^l \tag{2.198}$$

e então

$$\mathcal{R}_{ab}\lrcorner v = \frac{1}{2}v^m R_{klab}(\theta^k \wedge \theta^l)\lrcorner \theta_m = -v^m R_{mlab}\theta^l = v^m R_{lmab}\theta^l = v^m R_{mab}^{l\cdot\cdot}\theta_l \tag{2.199}$$

e a proposição está provada. ■

Proposição 156. As 1-formas de Ricci¹⁹ $\mathcal{R}^d := \mathbf{R}_b^d\theta^b$ e a biforma de curvatura $\mathfrak{R}(\theta_a \wedge \theta_b)$ para a conexão de Levi-Civita D de \mathbf{g} estão relacionadas por,

$$\mathcal{R}^d = \frac{1}{2}(\theta^a \wedge \theta^b)(\mathfrak{R}(\theta_a \wedge \theta_b)\lrcorner \theta^d) \tag{2.200}$$

Demonstração. Relembrando que o operador de Ricci é dado por

$$\boldsymbol{\partial} \wedge \boldsymbol{\partial}\theta^d = \frac{1}{2}(\theta^a \wedge \theta^b) ([D_{\mathbf{e}_a}, D_{\mathbf{e}_b}]\theta^d - c_{ab}^{c\cdot\cdot}D_{\mathbf{e}_c}\theta^d) \tag{2.201}$$

lembre-se que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\theta^a \wedge \theta^b) ([D_{\mathbf{e}_a}, D_{\mathbf{e}_b}]\theta^d - c_{ab}^{c\cdot\cdot}D_{\mathbf{e}_c}\theta^d) &= -\frac{1}{2}(\theta^a \wedge \theta^b)R_{cab}^{d\cdot\cdot}\theta^c = -\mathcal{R}_{\cdot d}^c\theta_c \\
&= -\mathcal{R}_{\cdot d}^c\lrcorner \theta_c - \mathcal{R}_{\cdot d}^c \wedge \theta_c = \theta_c \lrcorner \mathcal{R}_{\cdot d}^c \\
&= \frac{1}{2}\theta_c \lrcorner (\theta^a \wedge \theta^b)R_{cab}^{d\cdot\cdot} \\
&= R_{\cdot dc}^{c\cdot\cdot}\theta^b = \mathcal{R}^d.
\end{aligned} \tag{2.202}$$

¹⁹As $R_b^a := g^{ca}R_{cbb}^{k\cdot\cdot}$ são as componentes do tensor de Ricci.

O que prova a proposição. ■

A Proposição 156 sugere a seguinte

Definição 157. *O extensor de Ricci extensor é a aplicação*

$$\begin{aligned}\mathcal{R} : \sec \bigwedge^1 T^*M &\rightarrow \sec \bigwedge^1 T^*M, \\ \mathcal{R}(v) &= \partial_u \mathcal{R}(u \wedge v).\end{aligned}\tag{2.203}$$

Observação 158. *Note que $\mathcal{R}(\theta^d) = \mathcal{R}^d$. Assim*

$$\begin{aligned}\partial_u \mathfrak{R}(u \wedge v) &= \theta^b \frac{\partial}{\partial u^b} \mathfrak{R}(u_k \theta^k \wedge v) = \theta^b \frac{\partial}{\partial u^b} u^k \mathfrak{R}(\theta_k \wedge v) \\ &= \theta^b \mathfrak{R}(\delta_b^k \theta_k \wedge v) = \theta^b \mathfrak{R}(\theta_b \wedge v) \\ &= \theta^b \lrcorner \mathfrak{R}(\theta_b \wedge v) + \theta^b \wedge \mathfrak{R}(\theta_b \wedge v) \\ &= \theta^b \lrcorner \mathfrak{R}(\theta_b \wedge v).\end{aligned}\tag{2.204}$$

Então,

$$\partial_u \mathfrak{R}(u \wedge v) = \partial_u \lrcorner \mathfrak{R}(u \wedge v) \text{ e } \partial_u \wedge \mathfrak{R}(u \wedge v) = 0.\tag{2.205}$$

2.10 Propriedades de uma Subvariedade M de $\overset{\circ}{M}$ Herdadas de $\overset{\circ}{M}$

Considere a estrutura $(\overset{\circ}{M}, \overset{\circ}{\mathbf{g}}, \overset{\circ}{D})$, onde $\overset{\circ}{M}$ é uma variedade n -dimensional, $\overset{\circ}{\mathbf{g}}$ uma métrica de assinatura (p, q) em $\overset{\circ}{M}$ e $\overset{\circ}{D}$ é a conexão de Levi-Civita de $\overset{\circ}{\mathbf{g}}$. Seja M uma subvariedade m -dimensional de $\overset{\circ}{M}$.

Definição 159. *A métrica induzida \mathbf{g} em M (dita primeira forma fundamental) é o pull-back de $\overset{\circ}{\mathbf{g}}$ pela aplicação inclusão*

$$\begin{aligned}i : M &\rightarrow \overset{\circ}{M}, \\ i(x) &= x,\end{aligned}\tag{2.206}$$

ou seja $\mathbf{g} = i^* \overset{\circ}{\mathbf{g}}$ Eq.(2.68).

No que se segue estamos interessados somente nos casos em que \mathbf{g} é não degenerada.

Pela definição de subvariedade vemos que o espaço tangente $T_x M$ é um subespaço vetorial m -dimensional de $T_x \overset{\circ}{M}$, para cada $x \in M \subset \overset{\circ}{M}$. Denotaremos por $(T_x M)^\perp \subset T_x \overset{\circ}{M}$ o complemento ortogonal de $T_x M$ com respeito a $\overset{\circ}{\mathbf{g}}$. Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_x M \subset T_x \overset{\circ}{M}$, podemos escrever

$$(\overset{\circ}{D}_{\mathbf{u}} \mathbf{v})_x = (\overset{\circ}{D}_{\mathbf{u}} \mathbf{v})_x^\parallel + (\overset{\circ}{D}_{\mathbf{u}} \mathbf{v})_x^\perp,\tag{2.207}$$

onde expressaremos por $(\overset{\circ}{D}_{\mathbf{u}} \mathbf{v})_x^\parallel \in T_x M$ a componente de $(\overset{\circ}{D}_{\mathbf{u}} \mathbf{v})_x \in T_x \overset{\circ}{M}$ ao longo de $T_x M$ e por $(\overset{\circ}{D}_{\mathbf{u}} \mathbf{v})_x^\perp \in (T_x M)^\perp$ a componente de $(\overset{\circ}{D}_{\mathbf{u}} \mathbf{v})_x$ normal a $T_x M$.

Proposição 160. *Temos que*

1. *A conexão de Levi-Civita de \mathbf{g} em M , denotada por D , será dada por*

$$(D_{\mathbf{u}}\mathbf{v})_x = (\mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{v})_x^{\parallel}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_x M. \quad (2.208)$$

2. *$(\mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{v})_x^{\perp} = (\mathring{D}_{\mathbf{v}}\mathbf{u})_x^{\perp}$, e $(\mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{v})_x^{\perp}$ depende somente dos vetores \mathbf{u}_x e \mathbf{v}_x .*

Definição 161. *A aplicação simétrica*

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_x : T_x M \times T_x M &\rightarrow (T_x M)^{\perp}, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\mapsto \mathbf{k}_x(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv (\mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{v})_x^{\perp}, \end{aligned} \quad (2.209)$$

é chamada de segunda forma fundamental da subvariedade M de \mathring{M} .

Demonstração. 1. **(a)** Teremos que $(\mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{v})^{\parallel}$ depende linearmente de \mathbf{u} e \mathbf{v} ; $(\mathring{D}_{\mathbf{u}}(f\mathbf{v}))^{\parallel} = (\mathring{D}_{\mathbf{u}}f)\mathbf{v} + f(\mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{v})^{\parallel}$ e $(\mathring{D}_{f\mathbf{u}}\mathbf{v})^{\parallel} = f(\mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{v})^{\parallel}$. Propriedades estas que seguem imediatamente das propriedades de \mathring{D} e da linearidade da projeção em $T_x M$. Portanto o operador $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto (\mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{v})^{\parallel} \equiv D_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ define uma conexão em M .

(b) Essa conexão D não tem torção, desde que \mathring{D} não tem torção. De fato $\mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \mathring{D}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$, e como $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]^{\parallel} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ teremos

$$D_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - D_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = (\mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{v})^{\parallel} - (\mathring{D}_{\mathbf{v}}\mathbf{u})^{\parallel} = (\mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \mathring{D}_{\mathbf{v}}\mathbf{u})^{\parallel} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]^{\parallel} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]. \quad (2.210)$$

(c) A conexão D é compatível com a métrica \mathbf{g} . De fato, teremos $D\mathbf{g} = 0$ se

$$D_{\mathbf{u}}(\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w})) = \mathbf{g}(D_{\mathbf{u}}\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathbf{g}(\mathbf{v}, D_{\mathbf{u}}\mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \sec TM. \quad (2.211)$$

Mas note que

$$D_{\mathbf{u}}(\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w})) = \mathbf{u}(\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w})) \equiv (D_{\mathbf{u}}\mathbf{g})(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathbf{g}(D_{\mathbf{u}}\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathbf{g}(\mathbf{v}, D_{\mathbf{u}}\mathbf{w}), \quad (2.212)$$

que se reduzirá a fórmula acima, para todo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \sec TM$, se e somente se $D_{\mathbf{u}}\mathbf{g} = 0$. Pela definição de \mathbf{g}

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathring{\mathbf{g}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad (2.213)$$

assim $\mathbf{u}(\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w})) = \mathbf{u}(\mathring{\mathbf{g}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}))$ enquanto

$$\mathbf{g}(D_{\mathbf{u}}\mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv \mathring{\mathbf{g}}(\mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - (\mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{v})^{\perp}, \mathbf{w}) = \mathring{\mathbf{g}}(\mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}, \mathbf{w}). \quad (2.214)$$

Agora, desde que $\mathring{D}\mathring{\mathbf{g}} = 0$ teremos

$$\mathbf{u}(\mathring{\mathbf{g}}(\mathbf{v}, \mathbf{w})) = \mathring{\mathbf{g}}(\mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathring{\mathbf{g}}(\mathbf{v}, \mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{w}). \quad (2.215)$$

Finalmente, comparando essas várias equações temos que

$$(D_{\mathbf{u}}\mathbf{g})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \sec TM, \quad (2.216)$$

portanto $D\mathbf{g} = 0$. Portanto, D satisfaz as condições que a identificam como a (única) conexão de Levi-Civita de \mathbf{g} .

2. Note que a propriedade de simetria $(\mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{v})^\perp = (\mathring{D}_{\mathbf{v}}\mathbf{u})^\perp$ é uma consequência de b) acima que nos dá

$$D_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - D_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \mathring{D}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}. \quad (2.217)$$

Mostraremos que $(\mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{v})^\perp_x$ depende somente dos vetores \mathbf{u}_x e \mathbf{v}_x . Seja f uma função diferenciável em M ; teremos

$$\mathring{D}_{f\mathbf{u}}\mathbf{v} = f\mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = f(D_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + (\mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{v})^\perp) = D_{f\mathbf{u}}\mathbf{v} + f(\mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathbf{v})^\perp, \quad (2.218)$$

com o que deduzimos, usando a simetria de \mathbf{k}

$$\mathbf{k}(f\mathbf{u}, h\mathbf{v}) = fh\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (2.219)$$

se h for outra função diferenciável em M . Usando coordenadas locais (x^i) podemos ver facilmente que $\mathbf{k}_x(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ depende apenas de \mathbf{u}_x e \mathbf{v}_x . Se

$$\mathbf{u} = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \mathbf{v} = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (2.220)$$

onde u^i e v^i são diferenciáveis numa vizinhança de $x \in M$, temos que

$$\mathbf{k}_x(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u^i(x)v^j(x)\mathbf{k}_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \quad (2.221)$$

depende somente dos valores de u^i e v^i em x . E a proposição está provada.

■

Curvatura Extrínseca de M

Temos que \mathbf{k}_x é uma forma quadrática em T_xM que toma valores em $(T_xM)^\perp$. No caso em que $n = p + 1$, i.e., quando M for uma hipersuperfície de \mathring{M} , $(T_xM)^\perp$ tem dimensão 1, ou seja, é gerado por um único vetor normal \mathbf{n} à M . Neste caso definiremos

$$\mathbf{k}_x(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{K}_x(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{n}. \quad (2.222)$$

e \mathbf{K}_x é um 2-cotensor simétrico. Esse cotensor é chamado de *curvatura extrínseca* de M como subvariedade de \mathring{M} .

2.10.1 Caso Particular, $\mathring{M} \simeq \mathbb{R}^n$

Tome agora $\mathring{M} \simeq \mathbb{R}^n$ e considere novamente a estrutura $(\mathring{M}, \mathring{\mathbf{g}}, \mathring{D})$, onde $\mathring{\mathbf{g}}$ é uma métrica de assinatura (p, q) em \mathring{M} e \mathring{D} é a conexão de Levi-Civita de $\mathring{\mathbf{g}}$. Denotaremos a estrutura $(\mathring{M} \simeq \mathbb{R}^n, \mathring{\mathbf{g}}, \mathring{D})$ simplesmente por $\mathbf{R}^{p,q}$.

Pontos de \mathring{M} serão denotado por x . As funções coordenadas naturais de \mathring{M} são $\mathbf{x}^i(x) = (x^1, \dots, x^n)$. Teremos $\{\mathring{\mathbf{e}}_i|_x = \frac{\partial}{\partial x^i}|_x\}$ uma base para $T_x\mathring{M}$ e $\{\gamma^i|_x = dx^i|_x\}$ uma base para $T_x^*\mathring{M}$ tal que $\gamma^i|_x(\mathring{\mathbf{e}}_j|_x) = \delta_j^i$. Nesse caso, teremos

$$\mathring{D}\mathbf{g} = 0, \quad \Theta[\mathring{D}] = 0, \quad \mathbf{R}[\mathring{D}] = 0. \quad (2.223)$$

Então, em coordenadas naturais,

$$\mathring{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = L^{k\cdot\cdot}_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} = 0 \Rightarrow L^{k\cdot\cdot}_{ij} = 0. \quad (2.224)$$

Claro que se escolhermos um outro sistema de coordenadas, digamos $\bar{\mathbf{x}}^i(x) = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ para um aberto $\mathring{U} \subset \mathring{M}$, teremos

$$\mathring{D}_{\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} = \bar{L}^{k\cdot\cdot}_{ij} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^k}, \quad (2.225)$$

e em geral $\bar{L}^{k\cdot\cdot}_{ij} \neq 0$.

A estrutura $(\mathring{M}, \mathring{\mathbf{g}}, \mathring{D})$ permite a introdução de um paralelismo global em \mathring{M} . Seja $x(t)$ uma curva qualquer passando por $x_0 = x(0)$ e

$$\mathbf{v}_{x(0)} = v^i_{x(0)} \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{x(0)} \in T_{x(0)}\mathring{M} \text{ e } \mathbf{v}_{x(t)} = v^i_{x(t)} \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{x(t)} \in T_{x(t)}\mathring{M}. \quad (2.226)$$

A condição de transporte paralelo nos dá que

$$\begin{aligned} \mathring{D}_{\dot{x}(t)} \mathbf{v}_{x(t)} &= 0, \\ \mathring{D}_{\dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i}} v^j \frac{\partial}{\partial x^j} &= \dot{x}^i \left(\frac{\partial v^j}{\partial x^i} + v^j L^{k\cdot\cdot}_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \dot{x}^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i} = 0, \end{aligned} \quad (2.227)$$

e assim teremos $v^i_{x(t)} = v^i_{x(0)}$. Podemos portanto comparar vetores tangentes com pontos bases diferentes. Temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_x = \mathbf{w}_y &\Leftrightarrow v^i = w^i, \\ \text{onde } \mathbf{v}_x &= v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x, \mathbf{w}_y = w^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_y. \end{aligned} \quad (2.228)$$

A estrutura $(\mathring{M}, \mathring{\mathbf{g}}, \mathring{D})$ pode ser identificada com $(\mathcal{A}^n, \mathring{\mathbf{g}})$, onde \mathcal{A}^n é um espaço afim baseado sobre o \mathbb{R}^n ²⁰.

Recordando a definição de subvariedade (Definição 117), seja (φ, \mathring{U}) uma carta local em torno de $x \in M \subset \mathring{M}$ de forma que $(n = m + l)$

$$\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x ; i = 1, \dots, m, m+1, \dots, m+l \right\}, \quad (2.229)$$

é uma base para $T_x\mathring{M}$, tal que

$$\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x ; i = 1, \dots, m \right\}, \quad (2.230)$$

é uma base para $T_x M$. Por Gram-Schmidt podemos obter uma base $\{\mathring{\mathbf{e}}_{1x}, \dots, \mathring{\mathbf{e}}_{nx}\}$ ortogonal para $T_x\mathring{M}$, fica claro que

$$\{\mathbf{e}_{1x} \equiv \mathring{\mathbf{e}}_{1x}, \dots, \mathbf{e}_{mx} \equiv \mathring{\mathbf{e}}_{mx}\}, \quad (2.231)$$

²⁰Confira o Apêndice B para a definição de um espaço afim.

é uma base ortonormal para $T_x M$ para cada $x \in M$. Construimos assim localmente as seções

$$\begin{aligned} \mathring{\mathbf{e}}_1, \dots, \mathring{\mathbf{e}}_n &\in \sec T\mathring{U}, \\ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m &\in \sec TU, \text{ onde } U = \mathring{U} \cap M. \end{aligned} \quad (2.232)$$

O conjunto $\{\mathring{\mathbf{e}}_1, \dots, \mathring{\mathbf{e}}_n\}$ será chamado de um referencial adaptado a $U = \mathring{U} \cap M$. Defina

$$\mathring{\theta}^i(\mathring{\mathbf{e}}_j) = \delta_j^i, \quad (2.233)$$

e coloque

$$\theta^1 \equiv \mathring{\theta}^1, \dots, \theta^p \equiv \mathring{\theta}^p, \quad (2.234)$$

onde $\theta^1, \dots, \theta^p \in \sec T^*U$. Note que teremos $\mathring{\theta}^{m+1}|_{TM} = 0, \dots, \mathring{\theta}^{m+l}|_{TM} = 0$, i.e., para cada campo de vetores $\mathbf{v} \in \sec TU$ e $d = 1, \dots, l$ teremos

$$\mathring{\theta}^{m+d}|_{TM}(\mathbf{v}) = 0. \quad (2.235)$$

2.10.2 As Curvaturas Média e Gaussiana de M

Definição 162. Tome $x \in M$. Para cada vetor $\mathbf{v} \in T_x M$ tangente a M e para cada campo de vetores unitários $\mathbf{n} \in \sec TM$ tal que $\mathbf{n}_x \in T_x M^\perp \forall x \in M$ normal à superfície, definimos o operador de formato²¹ de Weingarten [25], como

$$\mathbf{L}_x(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = \mathring{D}_v \mathbf{n}. \quad (2.236)$$

Note que se \mathbf{n} for trocado por $-\mathbf{n}$, então \mathbf{L}_x muda para $-\mathbf{L}_x$.

Definição 163. Considere $\mathbf{v} \in T_x M$ um vetor tangente a M e um campo de vetores unitários tal que $\mathbf{n}_x \in T_x M^\perp$ normal à superfície. A função $k(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = \mathring{\mathbf{g}}(\mathbf{L}(\mathbf{v}, \mathbf{n}), \mathbf{n})$ é chamada de curvatura normal de M , com respeito à \mathbf{n} , na direção de \mathbf{v} .

A seguir considere fixado um vetor normal à superfície \mathbf{n} unitário, denotaremos $k(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = k(\mathbf{v})$ e $\mathbf{L}(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = \mathbf{L}(\mathbf{v})$.

Definição 164. Seja $x \in M$. Os valores máximos e mínimos para a curvatura normal $k(\mathbf{v})$ de M em x serão chamadas de curvaturas principais de M em x , e serão denotadas respectivamente por k_1 e k_2 . As direções nas quais esses valores extremos ocorrem serão chamadas de direções principais de M em x . Vetores unitários nessas direções serão chamados de vetores principais de M em x . Note que essa definição depende da escolha e fixação de \mathbf{n} .

²¹Do inglês *shape operator*. Não traduzimos shape por forma para não confundirmos com forma diferencial.

Superfícies em $\mathbf{R}^{p,q}$, $p + q = 3$

No caso de uma subvariedade 2-dimensional (chamada uma superfície) $M \subset \overset{\circ}{M} \simeq \mathbf{R}^{p,q}$ ²², com $p + q = 3$ temos o seguinte resultado:

Lema 165. *Para cada ponto $x \in M \subset \mathbf{R}^{p,q}$ ($p + q = 3$), o operador de formato de Weingarten, com respeito à \mathbf{n} , é um operador linear²³*

$$\mathbf{L} : \sec TM \rightarrow \sec TM. \quad (2.237)$$

Demonstração. Como tomamos \mathbf{n} normalizado sobre a superfície temos $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$, portanto

$$0 = \mathbf{v}[\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}] = 2\overset{\circ}{\mathbf{g}}(\overset{\circ}{D}_{\mathbf{v}}\mathbf{n}, \mathbf{n}(x)) = \overset{\circ}{\mathbf{g}}(\mathbf{L}_x(\mathbf{v}), \mathbf{n}(x)), \quad (2.238)$$

onde v é tangente a M em x . Desde que \mathbf{n} é também normal à superfície, como estamos em \mathbb{R}^3 , segue que $\mathbf{L}_x(\mathbf{v})$ é tangente a M em x . Assim \mathbf{L}_x é uma aplicação de $T_x M$ em $T_x M$.

A linearidade de \mathbf{L}_x segue da linearidade da derivada covariante. ■

Para esse caso, $M \subset \mathbf{R}^{p,q}$ ($p + q = 3$), temos a seguinte

Definição 166. *A curvatura Gaussiana de $M \subset \mathbf{R}^{p,q}$ ($p + q = 3$) é função real $K = \det \mathbf{L}$ em M .*

Definição 167. *A curvatura média de M é a função $H = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{L}$, onde denotamos $\text{tr} \mathbf{L}$ como traço do operador \mathbf{L} .*

Considere um referencial de vetores ortonormais $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ adaptado a M , teremos

$$\overset{\circ}{D}_{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{e}}_j = \dot{\omega}_{\cdot j}^i(\mathbf{v})\hat{\mathbf{e}}_i, \mathbf{v} \in T_x M. \quad (2.239)$$

De forma que poderemos escrever

$$\mathbf{L}(\mathbf{v}) = \overset{\circ}{D}_{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{e}}_3 = \dot{\omega}_{\cdot 3}^1(\mathbf{v})\hat{\mathbf{e}}_1 + \dot{\omega}_{\cdot 3}^2(\mathbf{v})\hat{\mathbf{e}}_2, \quad (2.240)$$

pois note que $\dot{\omega}_{\cdot j}^i(\mathbf{v}) = \overset{\circ}{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{e}}_i, \overset{\circ}{D}_{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{e}}_j)$ e que

$$0 = \mathbf{v}[\overset{\circ}{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j)] = \overset{\circ}{\mathbf{g}}(\overset{\circ}{D}_{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j) + \overset{\circ}{\mathbf{g}}(\overset{\circ}{D}_{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{e}}_j, \hat{\mathbf{e}}_i), \quad (2.241)$$

o que implica em $\dot{\omega}_{\cdot j}^i(\mathbf{v}) = -\dot{\omega}_{\cdot i}^j(\mathbf{v}) \forall \mathbf{v} \in TU$. Portanto $\dot{\omega}_{\cdot j}^i = -\dot{\omega}_{\cdot i}^j \Rightarrow \dot{\omega}_{\cdot i}^i = 0$.

Com esses argumentos temos o seguinte

²²Escreveremos simplesmente $M \subset \mathbf{R}^{p,q}$, para denotarmos que M é uma subvariedade de $\overset{\circ}{M}$ com as estruturas $(\overset{\circ}{M}, \overset{\circ}{\mathbf{g}}, \overset{\circ}{D})$ e (M, \mathbf{g}, D) como construídas acima.

²³Essa mesma construção, do operador de formato de Weingarten $L_x : T_x M \rightarrow T_x M$, e a discussão abaixo, vale para uma subvariedade $(n - 1)$ -dimensional (chamada de hipersuperfície) de $\mathbf{R}^{p,q}$, $p + q = n$ [36, 25].

Lema 168. *Valem as seguintes relações:*

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{\cdot 3}^{1\cdot} \wedge \dot{\omega}_{\cdot 3}^{2\cdot} &= K\dot{\theta}^1 \wedge \dot{\theta}^2, \\ \dot{\omega}_{\cdot 3}^{1\cdot} \wedge \dot{\theta}^2 + \dot{\theta}^1 \wedge \dot{\omega}_{\cdot 3}^{2\cdot} &= 2H\dot{\theta}^1 \wedge \dot{\theta}^2.\end{aligned}\tag{2.242}$$

Demonstração. Para aplicarmos as definições $K = \det \mathbf{L}$ e $2H = \text{tr} \mathbf{L}$ encontraremos a matriz de \mathbf{L} com respeito a $\mathring{\mathbf{e}}_1$ e $\mathring{\mathbf{e}}_2$. Temos

$$\begin{aligned}\mathbf{L}(\mathring{\mathbf{e}}_1) &= D_{\mathring{\mathbf{e}}_1} \mathring{\mathbf{e}}_3 = \dot{\omega}_{\cdot 3}^{1\cdot}(\mathring{\mathbf{e}}_1)\mathring{\mathbf{e}}_1 + \dot{\omega}_{\cdot 3}^{2\cdot}(\mathring{\mathbf{e}}_1)\mathring{\mathbf{e}}_2, \\ \mathbf{L}(\mathring{\mathbf{e}}_2) &= D_{\mathring{\mathbf{e}}_2} \mathring{\mathbf{e}}_3 = \dot{\omega}_{\cdot 3}^{1\cdot}(\mathring{\mathbf{e}}_2)\mathring{\mathbf{e}}_1 + \dot{\omega}_{\cdot 3}^{2\cdot}(\mathring{\mathbf{e}}_2)\mathring{\mathbf{e}}_2.\end{aligned}\tag{2.243}$$

Assim a matriz de S é

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_{\cdot 3}^{1\cdot}(\mathring{\mathbf{e}}_1) & \dot{\omega}_{\cdot 3}^{1\cdot}(\mathring{\mathbf{e}}_2) \\ \dot{\omega}_{\cdot 3}^{2\cdot}(\mathring{\mathbf{e}}_1) & \dot{\omega}_{\cdot 3}^{2\cdot}(\mathring{\mathbf{e}}_2) \end{pmatrix}.\tag{2.244}$$

Agora usamos a definição de $\dot{\omega}_{\cdot j}^i$ (Eq.(2.98)) temos o resultado desejado. ■

As equações de estrutura Eq.(2.99) para $\mathbf{R}^{p,q}$ fronecem:

$$\begin{aligned}d\dot{\theta}^\rho + \dot{\omega}_{\cdot \beta}^{\rho\cdot} \wedge \dot{\theta}^\beta &= \dot{\Theta}^\rho = 0, \\ d\dot{\omega}_{\cdot \mu}^{\rho\cdot} + \dot{\omega}_{\cdot \beta}^{\rho\cdot} \wedge \dot{\omega}_{\cdot \mu}^{\beta\cdot} &= \dot{\mathcal{R}}_{\cdot \mu}^{\rho\cdot} = 0.\end{aligned}\tag{2.245}$$

Assim,

$$0 = \dot{\mathcal{R}}_{\cdot 2}^{1\cdot} = d\dot{\omega}_{\cdot 2}^{1\cdot} + \dot{\omega}_{\cdot 3}^{1\cdot} \wedge \dot{\omega}_{\cdot 2}^{3\cdot}.\tag{2.246}$$

Expressamos as 1-formas de conexão induzidas em M por

$$\omega_{\cdot 2}^{1\cdot} = \dot{\omega}_{\cdot 2}^{1\cdot}|_{TM} = \mathring{L}_{\cdot 12}^{1\cdot} \dot{\theta}^1 + \mathring{L}_{\cdot 22}^{1\cdot} \dot{\theta}^2,\tag{2.247}$$

pois $\dot{\theta}^3|_{TM} = 0$. Em vista das considerações que fizemos acima (Eq.(2.234)), escrevemos

$$\omega_{\cdot 2}^{1\cdot} = L_{\cdot 12}^{1\cdot} \theta^1 + L_{\cdot 22}^{1\cdot} \theta^2,\tag{2.248}$$

que por fim resulta diretamente no seguinte corolário do Lema acima:

Corolário 169. $d\omega_{\cdot 2}^{1\cdot} = K\theta^1 \wedge \theta^2$.

Assim fazendo uma ponte com a teoria construída para variedades abstratas, podemos escrever a partir das equações de estruturas Eq.(2.99) para (M, \mathbf{g}, D) :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\cdot 2}^{1\cdot} &= d\omega_{\cdot 2}^{1\cdot}; \mathcal{R}_{\cdot 1}^{2\cdot} = d\omega_{\cdot 1}^{2\cdot}, \\ \mathcal{R}_{\cdot 2}^{1\cdot} &= K\theta^1 \wedge \theta^2, \\ \mathcal{R}_{\cdot 1}^{2\cdot} &= -K\theta^1 \wedge \theta^2,\end{aligned}\tag{2.249}$$

onde $\mathcal{R}_{\cdot 2}^{1\cdot} = R_{\cdot 212}^{1\cdot\cdot\cdot} \theta^1 \wedge \theta^2$ e $\mathcal{R}_{\cdot 1}^{2\cdot} = R_{\cdot 112}^{2\cdot\cdot\cdot} \theta^1 \wedge \theta^2$ (Eq.(2.98)). Portanto $R_{\cdot 212}^{1\cdot\cdot\cdot} = -R_{\cdot 112}^{2\cdot\cdot\cdot} = K$.

Considerando o caso Euclidiano, temos que a curvatura escalar (Eq.(2.128)) será dada por

$$\begin{aligned} R &= R^\mu{}_\mu = R^1{}_{\cdot 1} + R^2{}_{\cdot 2} = R^{2\cdots} + R^{1\cdots} = \\ &= -R^{2\cdots} + R^{1\cdots} = 2K, \end{aligned} \quad (2.250)$$

ou seja, ela é o dobro da curvatura gaussiana. Assim, como esperado, a curvatura escalar é uma generalização, para superfícies abstratas, do conceito da curvatura gaussiana para superfícies.

2.10.3 Operador projeção \mathbf{P} , Operador de Formato \mathbf{S} e a Biforma de Formato \mathcal{S}

Suporemos no que segue que M é uma subvariedade orientável de \mathring{M} , i.e., existe em M um elemento de volume global $\tau_{\mathbf{g}} = I_m \in \sec \bigwedge^m T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$ cuja expressão em $U \subset M$ é dada por (conforme a notação usada na Sec.(2.10.1))

$$I_m = \theta^1 \theta^2 \cdots \theta^m. \quad (2.251)$$

Definição 170. Considere $\mathcal{C} = \sum_{r=0}^n \mathcal{C}_r$, com $\mathcal{C}_r \in \sec \bigwedge^r T^* \mathring{M} \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(\mathring{M}^*, \mathring{\mathbf{g}})$. O operador de projeção em M é um campo de extensores, dado por [21]

$$\begin{aligned} \mathbf{P}: \sec \mathcal{C}\ell(\mathring{M}^*, \mathring{\mathbf{g}}) &\rightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g}), \\ \mathbf{P}(\mathcal{C}) &= (\mathcal{C} \lrcorner I_m) I_m^{-1}. \end{aligned} \quad (2.252)$$

Observação 171. Note que $\mathbf{P}^2(\mathcal{C}) = \mathbf{P}(\mathcal{C})$. Note ainda que $\forall \mathcal{C}_r \in \sec \bigwedge^r T^* \mathring{M} \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(\mathring{M}^*, \mathring{\mathbf{g}})$, com $r > m$ teremos $\mathbf{P}(\mathcal{C}_r) = 0$, mas pode ocorrer também que $\mathbf{P}(A_r) = 0$ mesmo se $A_r \in \sec \bigwedge^r T^* \mathring{M} \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(\mathring{M}^*, \mathring{\mathbf{g}})$ com $r \leq m$.

Podemos agora definir o operador complemento de \mathbf{P} por

$$\mathbf{P}_\perp(\mathcal{C}) = \mathcal{C} - \mathbf{P}(\mathcal{C}), \quad (2.253)$$

e fica claro que $\mathbf{P}_\perp(\mathcal{C})$ tem apenas componentes fora de $\mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$. Usando a Eq.(2.235), vemos que se $\mathcal{C} \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(\mathring{M}^*, \mathring{\mathbf{g}})$ possui apenas componentes que não pertencem a $\sec \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$ teremos $\mathcal{C} \lrcorner I_m = 0$.

Considere o operador padrão de Dirac $\mathring{\mathfrak{D}}$ de \mathring{M} e defina sua restrição a M como $\mathring{\mathfrak{d}} = \mathring{\mathfrak{D}} \Big|_M$, onde essa notação significa que

$$\mathring{\mathfrak{d}} = \sum_{i=1}^n \theta^i \mathring{D}_{\mathbf{e}_i}, \mathring{\mathfrak{d}} \equiv \mathring{\mathfrak{D}} \Big|_M \equiv \sum_{i=1}^m \theta^i \mathring{D}_{\mathbf{e}_i}. \quad (2.254)$$

Usaremos no que se segue a notação com os índices em negrito quando a soma for até m , e com índices normais quando a soma for até n .

Definição 172. Dado $\mathcal{C} \in \sec \mathcal{C}\ell(\overset{\circ}{M}^*, \overset{\circ}{\mathfrak{g}})$ definiremos o operador de formato como²⁴

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &: \sec \mathcal{C}\ell(\overset{\circ}{M}^*, \overset{\circ}{\mathfrak{g}}) \rightarrow \sec \mathcal{C}\ell(\overset{\circ}{M}^*, \overset{\circ}{\mathfrak{g}}), \\ \mathbf{S}(\mathcal{C}) &= \overset{\circ}{\mathbf{D}}\mathbf{P}(\mathcal{C}) = \overset{\circ}{\mathbf{d}}(\mathbf{P}(\mathcal{C})) - \mathbf{P}(\overset{\circ}{\mathbf{d}}\mathcal{C}). \end{aligned} \quad (2.255)$$

Lembre-se que para $\mathcal{C} \in \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$ e $\mathbf{v} \in \sec TM$ escrevemos

$$\overset{\circ}{D}_{\mathbf{v}}\mathcal{C} = (\overset{\circ}{D}_{\mathbf{v}}\mathcal{C})_{\parallel} + (\overset{\circ}{D}_{\mathbf{v}}\mathcal{C})_{\perp}, \quad (2.256)$$

onde $(\overset{\circ}{D}_{\mathbf{v}}\mathcal{C})_{\parallel} \in \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$ e $(\overset{\circ}{D}_{\mathbf{v}}\mathcal{C})_{\perp} \in \sec[\mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})]_{\perp}$.

Sabemos que para $\mathcal{C} \in \sec \mathcal{C}\ell(M, \overset{\circ}{\mathfrak{g}})$ a conexão de Levi-Civita D de $\mathfrak{g} = i^*\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ é dada por

$$D_{\mathbf{v}}\mathcal{C} := (\overset{\circ}{D}_{\mathbf{v}}\mathcal{C})_{\parallel}, \quad (2.257)$$

assim denotando $v = \mathfrak{g}(\mathbf{v}, \cdot)$ podemos escrever

$$D_{\mathbf{v}}\mathcal{C} \equiv (v \cdot \overset{\circ}{\mathbf{d}}\mathcal{C})_{\parallel}, \quad (2.258)$$

Também, escrevendo

$$(\overset{\circ}{D}_{\mathbf{v}}\mathcal{C})_{\perp} \equiv \mathbf{P}_{\perp}(v \cdot \overset{\circ}{\mathbf{d}}\mathcal{C}), \quad (2.259)$$

temos que

$$v \cdot \overset{\circ}{\mathbf{d}} \equiv \mathbf{P}(v \cdot \overset{\circ}{\mathbf{d}}) \equiv (v \cdot \overset{\circ}{\mathbf{d}})_{\parallel} = (v \cdot \overset{\circ}{\mathbf{d}})_{\parallel} = v \cdot \overset{\circ}{\mathbf{d}} - \mathbf{P}_{\perp}(v \cdot \overset{\circ}{\mathbf{d}}) = v \cdot \overset{\circ}{\mathbf{d}} - \mathbf{P}_{\perp}(v \cdot \overset{\circ}{\mathbf{d}}), \quad (2.260)$$

onde denotamos

$$\mathbf{P}(v \cdot \overset{\circ}{\mathbf{d}})\mathcal{C} \equiv \mathbf{P}(v \cdot \overset{\circ}{\mathbf{d}}\mathcal{C}). \quad (2.261)$$

Com isso obtemos a seguinte fórmula que nos será importante logo a frente

$$\begin{aligned} ((v \cdot \overset{\circ}{\mathbf{d}})I_m)I_m^{-1} &= (\sum_{j=1}^m \theta^1 \cdots (D_{\mathbf{v}}\theta^j + \mathbf{P}_{\perp}(v \cdot \overset{\circ}{\mathbf{d}}\theta^j)) \cdots \theta^m)I_m^{-1} \\ &= (D_{\mathbf{v}}I_m)I_m^{-1} + \mathbf{P}_{\perp}(v \cdot \overset{\circ}{\mathbf{d}}\theta_j) \wedge \theta^j. \end{aligned} \quad (2.262)$$

Agora note que, $D_{\mathbf{v}}I_m \in \sec \wedge^m T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$ é um múltiplo de I_m , e desde que $I_m^2 = \pm 1$ dependendo apenas da assinatura da métrica \mathfrak{g} teremos que $D_{\mathbf{v}}I_m = 0$.

Realmente,

$$0 = D_{\mathbf{v}}I_m^2 = 2(D_{\mathbf{v}}I_m)I_m \quad (2.263)$$

assim

$$0 = (D_{\mathbf{v}}I_m)I_m I_m^{-1} = D_{\mathbf{v}}I_m. \quad (2.264)$$

Definição 173. A biforma de formato (um campo (1, 2)-extensorial) é a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &: \sec \wedge^1 T^*M \rightarrow \wedge^2 T^*M, \\ v &\mapsto \mathcal{S}(v), \end{aligned} \quad (2.265)$$

tal que

$$v \cdot \overset{\circ}{\mathbf{d}}I_m = -\mathcal{S}(v)I_m. \quad (2.266)$$

²⁴Na Sec.(2.13) faremos uma comparação desse operador com aquele definido na Eq.(2.236).

Da Eq.(2.134) segue que

$$\mathcal{S}(v) \lrcorner I_m = 0 \text{ e } \mathcal{S}(v) \wedge I_m = 0. \quad (2.267)$$

Desde que $\mathcal{S}(v) \lrcorner I_m = 0$ temos que

$$\mathbf{P}(\mathcal{S}(v)) = 0. \quad (2.268)$$

Agora usamos o fato de que $D_{\mathbf{v}}I_m = 0$, junto com a Eq.(2.266) e a Eq.(2.262) segue que

$$v \cdot \mathring{\mathfrak{d}}I_m = (\mathbf{P}_{\perp}(v \cdot \mathring{\mathfrak{d}}\theta_j) \wedge \theta^j)I_m = -\mathcal{S}(v)I_m, \quad (2.269)$$

i.e.,

$$\mathcal{S}(v) = -\mathbf{P}_{\perp}(v \cdot \mathring{\mathfrak{d}}\theta_j) \wedge \theta^j. \quad (2.270)$$

Com todas essas considerações, podemos escrever a seguinte importante

Proposição 174. *Para qualquer $\mathcal{C} \in \text{sec } \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$ temos*

$$D_{\mathbf{v}}\mathcal{C} = v \cdot \mathring{\mathfrak{d}}\mathcal{C} + \mathcal{S}(v) \times \mathcal{C} = \mathring{D}_{\mathbf{v}}\mathcal{C} + \mathcal{S}(v) \times \mathcal{C}. \quad (2.271)$$

Demonstração. Tomando como referência a Eq.(2.270) teremos para $v, w \in \text{sec } \bigwedge^1 T^*M \hookrightarrow \text{sec } \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$

$$\begin{aligned} v \lrcorner \mathcal{S}(w) &= -v \lrcorner (\mathbf{P}_{\perp}(w \cdot \mathring{\mathfrak{d}}\theta_j) \wedge \theta^j) \\ &= -(v \lrcorner (\mathbf{P}_{\perp}(w \cdot \mathring{\mathfrak{d}}\theta_j))\theta^j + v^j \mathbf{P}_{\perp}(w \cdot \mathring{\mathfrak{d}}\theta_j) \\ &= v^j \mathbf{P}_{\perp}(w \cdot \mathring{\mathfrak{d}}\theta_j) = P_{\perp}(w \cdot \mathring{\mathfrak{d}}v) - \mathbf{P}_{\perp}[(w \cdot \mathring{\mathfrak{d}}v^j)\theta_j] \\ &= \mathbf{P}_{\perp}(w \cdot \mathring{\mathfrak{d}}v). \end{aligned} \quad (2.272)$$

Então,

$$\begin{aligned} v \cdot \mathring{\mathfrak{d}}w &= \mathbf{P}(v \cdot \mathring{\mathfrak{d}}w) + \mathbf{P}_{\perp}(v \cdot \mathring{\mathfrak{d}}w) \\ &= D_{\mathbf{v}}w + v \lrcorner \mathcal{S}(w) \\ &= D_{\mathbf{v}}w - \mathcal{S}(w) \lrcorner v. \end{aligned} \quad (2.273)$$

Agora, para, $v, w \in \text{sec } \bigwedge^1 T^*M \hookrightarrow \text{sec } \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$ teremos

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}(wu) &= (D_{\mathbf{v}}w)u + wD_{\mathbf{v}}u = (\mathring{D}_{\mathbf{v}}w)u + (\mathcal{S}(v) \times w)u + w\mathring{D}_{\mathbf{v}}u + w(\mathcal{S}(v) \times u) \\ &= (\mathring{D}_{\mathbf{v}}wu) + (\mathcal{S}(v) \times w)u - w(u \times \mathcal{S}(v)) \\ &= (\mathring{D}_{\mathbf{v}}wu) + (\mathcal{S}(v) \times wu), \end{aligned} \quad (2.274)$$

de forma que a proposição segue sem muito trabalho por indução finita. ■

Assim, escrevemos

$$D_{\mathbf{e}_i}\mathcal{C} = \mathring{D}_{\mathbf{e}_i}\mathcal{C} + \mathcal{S}(\mathbf{e}_i) \times \mathcal{C} \quad (2.275)$$

Agora, relembando a Eq.(2.153) temos nesse dado calibre

$$\mathring{D}_{\mathbf{e}_i} \mathcal{C} = \mathring{\partial}_{\mathbf{e}_i} \mathcal{C} + \mathring{\omega}_{e_i} \times \mathcal{C} \quad (2.276)$$

onde definimos para $\mathbf{i}, \mathbf{j} = 1, \dots, m$, $\mathring{D}_{\mathbf{e}_i} \theta^{\mathbf{j}} = \mathring{D}_{\mathbf{e}_i} \mathring{\theta}^{\mathbf{j}} = -\sum_{k=1}^n \mathring{L}_{\cdot \mathbf{i} k}^{\mathbf{j} \cdot} \mathring{\theta}^k$, e

$$\mathring{\omega}_{\mathbf{v}} = \frac{1}{2} v^c \mathring{\omega}_{\mathbf{c}}^{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} \theta_{\mathbf{a}} \wedge \theta_{\mathbf{b}} \quad (2.277)$$

Então, conseguimos

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}} \mathcal{C} &= v \cdot \mathring{\partial} \mathcal{C} + \mathcal{S}(v) \times \mathcal{C} \\ &= \mathring{\partial}_{\mathbf{v}} \mathcal{C} + (\mathring{\omega}_{\mathbf{v}} + \mathcal{S}(v)) \times \mathcal{C} \end{aligned} \quad (2.278)$$

e em particular

$$D_{\mathbf{e}_i} \mathcal{C} = \mathring{\partial}_{\mathbf{e}_i} \mathcal{C} + (\mathring{\omega}_{e_i} + \mathcal{S}(\mathbf{e}_i)) \times \mathcal{C}. \quad (2.279)$$

Comparando a Eq.(2.279) com Eq.(2.153) (válida para qualquer conexão compatível com a métrica) obtemos a importante fórmula

$$\omega_{\mathbf{v}} = (\mathring{\omega}_{\mathbf{v}} + \mathcal{S}(v)). \quad (2.280)$$

Encontramos assim sem nenhuma dificuldade que

$$\omega_{\mathbf{v}} = \mathbf{P}(\mathring{\omega}_{\mathbf{v}}) \quad (2.281)$$

pois da Eq.(2.268) temos $\mathbf{P}(\mathcal{S}(v)) = 0$.

Tome $(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^m, \dots, \mathbf{x}^n)$ as coordenadas naturais ortogonais de $\mathring{M} \simeq \mathbb{R}^n$.

Proposição 175. Para $\mathcal{C} \in \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$

$$D_{\mathbf{v}} \mathcal{C} = v^{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{i}}} \mathcal{C} + \mathcal{S}(v) \times \mathcal{C}. \quad (2.282)$$

Demonstração. Notando que $D \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{i}}} d\mathbf{x}^{\mathbf{j}} = 0$ teremos $\mathring{\omega}_{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{i}}}} = \frac{1}{2} (\mathring{\Gamma}_{\mathbf{kil}}^{\cdot}) d\mathbf{x}^{\mathbf{k}} \wedge d\mathbf{x}^{\mathbf{l}} = 0$. Usando esse resultado em $D_{\mathbf{v}} \mathcal{C} = \mathring{D}_{\mathbf{v}} \mathcal{C} + \mathcal{S}(v) \times \mathcal{C}$ com $\mathbf{e}_i \mapsto \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{i}}}$ teremos o resultado desejado. ■

Observação 176. Isso nos mostra que $\mathcal{S}(v)$ não pode ser sempre identificado com $\omega(v)$ que é um operador dependente do calibre.

2.10.4 $\mathbf{S}(\mathring{v}) = \mathbf{S}(v) = \mathring{\partial}_u \wedge \mathbf{P}_u (\mathring{v})$ e $\mathbf{S}(\mathring{v}_{\perp}) = \mathring{\partial}_u \lrcorner \mathbf{P}_u (\mathring{v})$

Para $\mathcal{C} \in \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$, de forma que $\mathcal{C} = \mathbf{P}(\mathcal{C})$ teremos (com $u \in \sec \wedge^1 T^* \mathring{M} \leftrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(\mathring{M}, \mathring{\mathfrak{g}})$)

$$\begin{aligned} \mathring{\partial}(\mathbf{P}(\mathcal{C})) &= \mathring{\partial} \mathbf{P}(\mathcal{C}) - \mathbf{P}(\mathring{\partial} \mathcal{C}) \\ &= \mathring{\partial}_u \mathbf{P}_u (\mathcal{C}) - \mathbf{P}(\mathring{\partial} \mathcal{C}) \\ &= \mathring{\partial}_u \wedge \mathbf{P}_u (\mathcal{C}) + \mathring{\partial}_u \lrcorner \mathbf{P}_u (\mathcal{C}) - \mathbf{P}(\mathring{\partial} \mathcal{C}) \end{aligned} \quad (2.283)$$

onde

$$\mathbf{P}_u(\mathcal{C}) := u \cdot \mathring{\mathbf{d}}\mathbf{P}(\mathcal{C}) = u \cdot \mathring{\mathbf{d}}(\mathbf{P}(\mathcal{C})) - (\mathbf{P}(u \cdot \mathring{\mathbf{d}}\mathcal{C})). \quad (2.284)$$

Relembre que para $\mathring{v} \in \sec \bigwedge^1 T^* \dot{M} \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(\dot{M}, \mathring{\mathfrak{g}})$ podemos escrever

$$\mathbf{S}(\mathring{v}) = \mathring{\mathbf{d}}\mathbf{P}(\mathring{v}) = \mathring{\partial}_u \wedge \mathbf{P}_u(\mathring{v}) + \mathring{\partial}_{u\lrcorner} \mathbf{P}_u(\mathring{v}) \quad (2.285)$$

onde usamos que para qualquer $\mathring{C} \in \sec \mathcal{C}\ell(\dot{M}, \mathring{\mathfrak{g}})$ vale

$$\mathring{\partial}_u \mathbf{P}_u(\mathring{C}) := \sum_{i=1}^m \theta^i \frac{\partial}{\partial u^i} u \cdot \mathring{\mathbf{d}}\mathbf{P}(\mathring{C}) = \sum_{i=1}^m \theta^i \mathring{D}_{\mathring{e}_i} \mathbf{P}(\mathring{C}) = \mathring{\mathbf{d}}\mathbf{P}(\mathring{C}) \quad (2.286)$$

Colocando $\mathring{v} = \mathring{v}_{\parallel} + \mathring{v}_{\perp} = v + \mathring{v}_{\perp}$ teremos a

Proposição 177.

$$\mathbf{S}(\mathring{v}) = \mathbf{S}(v) = \mathring{\partial}_u \wedge \mathbf{P}_u(\mathring{v}), \quad \mathbf{S}(\mathring{v}_{\perp}) = \mathring{\partial}_{u\lrcorner} \mathbf{P}_u(\mathring{v}). \quad (2.287)$$

Demonstração. Realmente,

$$\mathbf{S}(\mathring{v}) = \mathbf{S}(\mathring{v}_{\parallel}) + \mathbf{S}(\mathring{v}_{\perp}) = \mathring{\partial}_u \wedge \mathbf{P}_u(\mathring{v}) + \mathring{\partial}_{u\lrcorner} \mathbf{P}_u(\mathring{v}) \quad (2.288)$$

então, é suficiente mostrarmos que

$$\mathring{\partial}_{u\lrcorner} \mathbf{P}_u(\mathring{v}_{\parallel}) = 0 \quad \text{e} \quad \mathring{\partial}_u \wedge \mathbf{P}_u(\mathring{v}_{\perp}) = 0, \quad (2.289)$$

De $\mathbf{P}^2(\mathring{v}) = \mathbf{P}(\mathring{v})$ temos

$$\mathbf{P}_u \mathbf{P}(\mathring{v}_{\parallel}) + \mathbf{P} \mathbf{P}_u(\mathring{v}_{\parallel}) = \mathbf{P}_u(\mathring{v}_{\parallel}), \quad (2.290)$$

Então, para \mathring{v}_{\parallel} e \mathring{v}_{\perp} vale

$$\mathbf{P} \mathbf{P}_u(\mathring{v}_{\parallel}) = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{P} \mathbf{P}_u(\mathring{v}_{\perp}) = \mathbf{P}_u(\mathring{v}_{\perp}). \quad (2.291)$$

Desde que $\mathbf{P} \mathbf{P}_u(\mathring{v}_{\parallel}) = 0$ teremos que

$$\mathring{\partial}_{u\lrcorner} \mathbf{P} \mathbf{P}_u(\mathring{v}_{\parallel}) = \mathbf{P}(\mathring{\partial}_u \lrcorner \mathbf{P}_u(\mathring{v}_{\parallel})) = \mathring{\partial}_{u\lrcorner} \mathbf{P}_u(\mathring{v}_{\parallel}) = 0. \quad (2.292)$$

De $\mathbf{P} \mathbf{P}_u(\mathring{v}_{\perp}) = \mathbf{P}_u(\mathring{v}_{\perp})$ podemos escrever

$$\mathring{\partial}_u \wedge \mathbf{P}_u(\mathring{v}_{\perp}) = \mathring{\partial}_u \wedge \mathbf{P} \mathbf{P}_u(\mathring{v}_{\perp}) = \mathbf{P}(\mathring{\partial}_u) \wedge \mathbf{P} \mathbf{P}_u(\mathring{v}_{\perp}) = \mathbf{P}(\mathring{\partial}_u \wedge \mathbf{P}_u(\mathring{v}_{\perp})). \quad (2.293)$$

Agora tome $t, y \in \sec \bigwedge^1 T^* M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$. Teremos

$$\begin{aligned} (t \wedge y) \cdot (\mathring{\partial}_u \wedge \mathbf{P} \mathbf{P}_u(\mathring{v}_{\perp})) &= (t \wedge y) \cdot (\mathring{\partial}_u \wedge \mathbf{P}_u(\mathring{v}_{\perp})) \\ &= t \lrcorner ((y \cdot \mathring{\partial}_u \wedge \mathbf{P}_u(\mathring{v}_{\perp})) - \mathring{\partial}_u \wedge ((y \lrcorner \mathbf{P}_u(\mathring{v}_{\perp}))) \\ &= t \lrcorner (y \cdot \mathring{\mathbf{d}}(\mathbf{P}(\mathring{v}_{\perp})) - \mathbf{P}(y \cdot \mathring{\mathbf{d}}\mathring{v}_{\perp}) - \theta^i \wedge (y \lrcorner (\theta_i \cdot \mathring{\mathbf{d}}(\mathbf{P}(\mathring{v}_{\perp})) - \mathbf{P}(\theta_i \cdot \mathring{\mathbf{d}}\mathring{v}_{\perp}))) \\ &= t \lrcorner (\mathbf{P}(y \cdot \mathring{\mathbf{d}}\mathring{v}_{\perp}) - \theta^i \wedge (y \lrcorner (\theta_i \cdot \mathring{\mathbf{d}}\mathring{v}_{\perp}))) \\ &= t \lrcorner (D_y \mathring{v}_{\perp}) - \theta^i \wedge (y \lrcorner (D_{\mathring{e}_i} \mathring{v}_{\perp})) = 0 \end{aligned} \quad (2.294)$$

de onde segue que

$$\mathring{\partial}_u \wedge \mathbf{P}_u(\mathring{v}_{\perp}) = 0 \quad (2.295)$$

e a proposição está provada. ■

Proposição 178. *Seja $\mathcal{C} = v \in \sec \wedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$ teremos*

$$\mathbf{S}(v) = \mathcal{S}(v). \quad (2.296)$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(v) &= \mathring{\mathfrak{d}}(\mathbf{P}(v)) - \mathbf{P}(\mathring{\mathfrak{d}}v) \\ &= \mathring{\mathfrak{d}}v - \mathbf{P}(\mathring{\mathfrak{d}}v). \end{aligned} \quad (2.297)$$

Agora, $\mathring{\mathfrak{d}}v = \mathring{\mathfrak{d}} \wedge v + \mathring{\mathfrak{d}} \lrcorner v$ e desde que $\mathbf{P}(\mathring{\mathfrak{d}} \lrcorner v) = \mathring{\mathfrak{d}} \lrcorner v$ segue que

$$\mathbf{S}(v) = \mathring{\mathfrak{d}} \wedge v - \mathbf{P}(\mathring{\mathfrak{d}} \wedge v) \quad (2.298)$$

Da linearidade de \mathbf{S} é suficiente mostrarmos a Eq.(2.296) para $v = \theta_{\mathbf{d}}, \mathbf{d} = 1, \dots, m$. Calculemos então

$$\begin{aligned} \mathring{\mathfrak{d}} \wedge \theta_{\mathbf{d}} &= \sum_{\mathbf{k}=1}^m \theta^{\mathbf{k}} \mathring{D}_{\mathbf{e}_{\mathbf{k}}} \theta_{\mathbf{d}} = \sum_{\mathbf{k}=1}^m \sum_{t=1, t \neq \mathbf{k}}^n \mathring{L}_{t\mathbf{k}\mathbf{d}} \theta^{\mathbf{k}} \wedge \mathring{\theta}^t \\ &= \sum_{\mathbf{k}=1}^m \sum_{t=1, t \neq \mathbf{k}}^m \mathring{L}_{t\mathbf{k}\mathbf{d}} \theta^{\mathbf{k}} \wedge \theta^t + \sum_{\mathbf{k}=1}^m \sum_{t=m+1}^{m+l} \mathring{L}_{t\mathbf{k}\mathbf{d}} \theta^{\mathbf{k}} \wedge \mathring{\theta}^t, \end{aligned} \quad (2.299)$$

de onde segue que

$$\mathbf{S}(\theta_{\mathbf{d}}) = \sum_{\mathbf{k}=1}^m \sum_{t=m+1}^{m+l} \mathring{L}_{t\mathbf{k}\mathbf{d}} \theta^{\mathbf{k}} \wedge \mathring{\theta}^t = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}=1}^m \sum_{t=m+1}^{m+l} (\mathring{L}_{t\mathbf{k}\mathbf{d}} - \mathring{L}_{\mathbf{k}t\mathbf{d}}) \theta^{\mathbf{k}} \wedge \mathring{\theta}^t \quad (2.300)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \theta_{\mathbf{d}} \cdot \mathring{\mathfrak{d}}I_m &= g^{11} \cdots g^{mm} \mathring{D}_{\mathbf{e}_{\mathbf{d}}}(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_m) \\ &= \alpha \mathring{D}_{\mathbf{e}_{\mathbf{d}}}(\theta_1 \cdots \theta_m) \\ &= \alpha \sum_{\mathbf{k}=1}^m \sum_{t=1}^n \mathring{L}_{t\mathbf{d}\mathbf{k}} \theta_1 \cdots \underbrace{\mathring{\theta}^t}_{k\text{-position}} \cdots \theta_m \\ &= \alpha \sum_{\mathbf{k}=1}^m \sum_{t=1}^m \mathring{L}_{t\mathbf{d}\mathbf{k}} \theta_1 \cdots \underbrace{\theta^t}_{k\text{-position}} \cdots \theta_m \\ &\quad + \alpha \sum_{\mathbf{k}=1}^m \sum_{t=m+1}^{m+l} \mathring{L}_{t\mathbf{d}\mathbf{k}} \theta_1 \cdots \underbrace{\mathring{\theta}^t}_{k\text{-position}} \cdots \theta_m \end{aligned} \quad (2.301)$$

assim podemos ver que

$$\mathbf{S}(\theta_{\mathbf{d}}) \times I_m = \theta_{\mathbf{d}} \cdot \mathring{\mathfrak{d}}I_m \quad (2.302)$$

e daqui segue que $\mathbf{S}(\theta_{\mathbf{d}}) = \mathcal{S}(\theta_{\mathbf{d}})$. ■

Consiguiremos também a

Proposição 179. *Seja $v, w \in \sec \wedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$. Então*

$$v \cdot \mathcal{S}(w) = w \cdot \mathcal{S}(v) \quad (2.303)$$

Demonstração. Relembrando a Eq.(2.300) podemos escrever

$$\begin{aligned} v \cdot \mathcal{S}(w) &= \sum_{\mathbf{i}, \mathbf{d}=1}^m v^{\mathbf{i}} w^{\mathbf{d}} \theta_{\mathbf{i} \lrcorner} \sum_{\mathbf{k}=1}^m \sum_{t=m+1}^{m+l} \mathring{L}_{t\mathbf{k}\mathbf{d}} \theta^{\mathbf{k}} \wedge \mathring{\theta}^t \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{i}, \mathbf{d}=1}^m v^{\mathbf{i}} w^{\mathbf{d}} (\mathring{L}_{t\mathbf{i}\mathbf{d}} - \mathring{L}_{\mathbf{i}t\mathbf{d}}) \mathring{\theta}^t = w \cdot \mathcal{S}(v) \end{aligned} \quad (2.304)$$

e a Eq.(2.303) está provada. ■

2.10.5 $\overset{\circ}{\mathfrak{d}} \wedge v = \mathfrak{d} \wedge v + \mathcal{S}(v)$ e $\overset{\circ}{\mathfrak{d}} \lrcorner v = \mathfrak{d} \lrcorner v$

Escolha coordenadas ortogonais (x^1, x^2, \dots, x^m) para $U \subset M$. Então $\{\mathbf{x}_i = \partial/\partial x^i\}$ e $\{\vartheta^i = dx^i\}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) são bases ortogonais para TU e T^*U . Relembrando a Eq.(2.270), i. e., $\mathcal{S}(v) = -\mathbf{P}_\perp(v \cdot \overset{\circ}{\mathfrak{d}}\theta_j) \wedge \theta^j$ teremos

$$\mathcal{S}(\vartheta_i) = -\mathbf{P}_\perp(\vartheta_i \cdot \overset{\circ}{\mathfrak{d}}\vartheta_j) \wedge \vartheta^j = \vartheta^j \wedge \mathbf{P}_\perp(\overset{\circ}{D}_{\mathbf{x}_j}\vartheta_i) = \vartheta^j \wedge \mathbf{P}_\perp(\overset{\circ}{D}_{\mathbf{x}_j}\vartheta_i). \quad (2.305)$$

Então,

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathfrak{d}} \wedge \vartheta_i &= \vartheta^j \wedge \mathbf{P}(\overset{\circ}{D}_{\mathbf{x}_j}\vartheta_i) + \vartheta^j \wedge \mathbf{P}_\perp(\overset{\circ}{D}_{\mathbf{x}_j}\vartheta_i) \\ &= \vartheta^j \wedge D_{\mathbf{x}_j}\vartheta_i + \mathcal{S}(\vartheta_i) \\ &= \mathfrak{d} \wedge \vartheta_i + \mathcal{S}(\vartheta_i) \end{aligned} \quad (2.306)$$

e claro que, para $v \in \sec T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$ teremos

$$\overset{\circ}{\mathfrak{d}} \wedge v = \mathfrak{d} \wedge v + \mathcal{S}(v). \quad (2.307)$$

Também, da (Eq.(2.289)) sabemos que $\mathfrak{d}_{u \lrcorner} \mathbf{P}_u(\overset{\circ}{v}_\parallel) = 0$. Então,

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathfrak{d}}v &= \overset{\circ}{\mathfrak{d}}(\mathbf{P}(v)) = \overset{\circ}{\mathfrak{d}}\mathbf{P}(v) + \mathbf{P}(\overset{\circ}{\mathfrak{d}}v) \\ &= \partial_u \wedge \mathbf{P}_u(v) + \partial_{u \lrcorner} \mathbf{P}_u(v) + \partial v \\ &= \partial_u \wedge \mathbf{P}_u(v) + \partial \wedge v + \partial \lrcorner v \\ &= \mathcal{S}(v) + \partial \wedge v + \partial \lrcorner v. \end{aligned} \quad (2.308)$$

e assim vemos que

$$\overset{\circ}{\mathfrak{d}} \lrcorner v = \partial \lrcorner v. \quad (2.309)$$

Então podemos escrever

$$\overset{\circ}{\mathfrak{d}}v = \partial v + \mathcal{S}(v). \quad (2.310)$$

$$\overset{\circ}{\mathfrak{d}}\mathcal{C} = \partial\mathcal{C} + \mathbf{S}(\mathcal{C})$$

Podemos ainda generalizar a Eq.(2.307), i.e., teremos a

Proposição 180. *Para qualquer $\mathcal{C} \in \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$ vale*

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathfrak{d}}\mathcal{C} &= \partial\mathcal{C} + \mathbf{S}(\mathcal{C}), \\ \overset{\circ}{\mathfrak{d}} \wedge \mathcal{C} &= \partial \wedge \mathcal{C} + \mathbf{S}(\mathcal{C}), \quad \overset{\circ}{\mathfrak{d}} \lrcorner \mathcal{C} = \partial \lrcorner \mathcal{C}. \end{aligned} \quad (2.311)$$

Demonstração. (i) Do fato de que para qualquer $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \sec \mathcal{C}\ell(\overset{\circ}{M}, \overset{\circ}{\mathfrak{g}})$ vale $\mathbf{P}(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) = \mathbf{P}(\mathcal{A}) \wedge \mathbf{P}(\mathcal{B})$, teremos diferenciando com respeito a $u \in \sec \bigwedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$ o seguinte

$$\mathbf{P}_u(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) = \mathbf{P}_u(\mathcal{A}) \wedge \mathcal{B} + \mathcal{A} \wedge \mathbf{P}_u(\mathcal{B}), \quad (2.312)$$

e fica claro que claro

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_u(\mathcal{A}_\perp \wedge \mathcal{B}_\parallel) &= \mathbf{P}_u(\mathcal{A}_\perp) \wedge \mathcal{B}_\parallel, & \mathbf{P}_u(\mathcal{A}_\perp \wedge \mathcal{B}_\perp) &= 0, \\ \mathbf{P}_u(\mathcal{A}_\parallel \wedge \mathcal{B}_\parallel) &= \mathbf{P}_u(\mathcal{A}_\parallel) \wedge \mathcal{B}_\parallel + \mathcal{A}_\parallel \wedge \mathbf{P}_u(\mathcal{B}_\parallel).\end{aligned}\tag{2.313}$$

(ii) Para $\mathcal{C} \in \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$ temos $\mathcal{C} = \mathbf{P}(\mathcal{C})$ e usando a Eq.(2.255) segue que

$$\begin{aligned}\mathring{\partial}\mathcal{C} &= \mathring{\partial}\mathbf{P}(\mathcal{C}) - \mathbf{P}(\mathring{\partial}\mathcal{C}) \\ &= \mathring{\partial}\wedge\mathbf{P}(\mathcal{C}) + \mathring{\partial}_\perp\mathbf{P}(\mathcal{C}) + \partial\mathcal{C}.\end{aligned}\tag{2.314}$$

(iii) Agora, usando que $\mathbf{S}(\mathcal{C}) = \mathbf{S}(\mathcal{C}_\parallel + \mathcal{C}_\perp) = \mathbf{S}(\mathcal{C}_\parallel) + \mathbf{S}(\mathcal{C}_\perp)$ e seguindo os mesmos passos que usamos na demonstração da Prop.177 conseguimos mostrar que

$$\mathbf{S}(\mathcal{C}_\parallel) = \mathbf{S}(\mathbf{P}(\mathcal{C}_\parallel)) = \mathring{\partial}\wedge\mathbf{P}(\mathcal{C}_\parallel) \quad \mathbf{S}(\mathcal{C}_\perp) = \mathbf{P}(\mathbf{S}(\mathcal{C}_\perp)) = \mathring{\partial}_\perp\mathbf{P}(\mathcal{C}_\parallel).\tag{2.315}$$

(iv) Usando a Eq.(2.315) na Eq.(2.313) teremos

$$\mathring{\partial}\wedge\mathcal{C} + \mathring{\partial}_\perp\mathcal{C} = \mathring{\partial}\wedge\mathbf{P}(\mathcal{C}) + \mathring{\partial}_\perp\mathbf{P}(\mathcal{C}) + \partial\wedge\mathcal{C} + \partial_\perp\mathcal{C}\tag{2.316}$$

ou

$$\begin{aligned}\mathring{\partial}\wedge\mathcal{C} + \mathring{\partial}_\perp\mathcal{C} &= \mathbf{S}(\mathcal{C}) + \mathbf{S}(\mathcal{C}_\perp) + \partial\wedge\mathcal{C} + \partial_\perp\mathcal{C} \\ &= \mathbf{S}(\mathcal{C}) + \partial\wedge\mathcal{C} + \partial_\perp\mathcal{C},\end{aligned}\tag{2.317}$$

o que prova a proposição. ■

Proposição 181. *Para qualquer $\mathcal{C} \in \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$ teremos:*

$$\partial\mathcal{C} = \mathbf{P}(\mathring{\partial}\mathcal{C}).\tag{2.318}$$

Demonstração. Da Eq.(2.255) quando $\mathcal{C} \in \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$ vem que

$$\mathbf{P}(\mathbf{S}(\mathcal{C})) = 0.\tag{2.319}$$

Então,

$$\mathbf{P}(\mathring{\partial}\mathcal{C}) = \mathbf{P}(\partial\mathcal{C}) + \mathbf{P}^2(\mathbf{S}(\mathcal{C})) = \mathbf{P}(\partial\mathcal{C}) = \partial\mathcal{C}\tag{2.320}$$

e a proposição está provada. ■

2.11 Biforma da Curvatura $\mathfrak{R}(u \wedge v)$ Expressa em Termos do Operador de Formato

2.11.1 Expressões Equivalentes para $\mathfrak{R}(u \wedge v)$

Nessa seção suporemos novamente que a estrutura (M, \mathfrak{g}, D) é tal que M é uma subvariedade de $\mathring{M} \simeq \mathbb{R}^n$ e D é a conexão de Levi-Civita $\mathfrak{g} = i^*\mathring{\mathfrak{g}}$. Obtemos na seção anterior

a equação (Eq.(2.180)) para a biforma de curvatura $\mathfrak{R}(u \wedge v)$ para uma conexão geral de Riemann-Cartan. Levando em conta o fato de que \mathfrak{R} é um objeto intrínseco, i.e., o valor de $\mathfrak{R}(u \wedge v)$ não depende da escolha da carta coordenada e da base para os campo de vetores e formas usados no cálculo de \mathfrak{R} , no que se segue tomaremos vantagem disso e escolheremos a base $\{x_i, \vartheta^i\}$ para TU e T^*U como introduzida acima, para a qual $\dot{\omega}(u) = 0$. Assim, teremos, considerando a Eq.(2.180) e a Eq.(2.181) que

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(u \wedge v) &= D_u \omega(v) - D_v \omega(u) + \omega(u) \times \omega(v) - \omega_{[u,v]} \\ &= \mathring{D}_u \omega(v) - \mathring{D}_v \omega(u) + \omega(u) \times \omega(v) \\ &\quad - \omega(v) \times \omega(u) - \omega(u) \times \omega(v) - \omega_{[u,v]} \\ &= \mathring{D}_u \omega(v) - \mathring{D}_v \omega(u) + \omega(u) \times \omega(v) - \omega_{[u,v]}.\end{aligned}\tag{2.321}$$

Por outro lado, no calibre em que $\dot{\omega}(u) = 0$ teremos que $\omega(u) = \mathcal{S}(u)$ e assim podemos também escrever

$$\mathfrak{R}(u \wedge v) = \mathring{D}_u \omega(v) - \mathring{D}_v \omega(u) + \mathcal{S}(u) \times \mathcal{S}(v) - \mathcal{S}_{[u,v]}.\tag{2.322}$$

Agora,

$$\begin{aligned}&\mathring{D}_u \omega(v) - \mathring{D}_v \omega(u) \\ &= -u^i v^j \{ \mathring{D}_{x_i} \mathcal{S}(\vartheta_j) - \mathring{D}_{x_j} \mathcal{S}(\vartheta_i) \} \\ &= -u^i v^j \{ \mathring{D}_{x_i} (\mathring{D}_{x_j} I_m I_m^{-1}) - \mathring{D}_{x_j} (\mathring{D}_{x_i} I_m I_m^{-1}) \} \\ &= -u^i v^j \{ \mathring{D}_{x_i} \mathring{D}_{x_j} I_m I_m^{-1} + (\mathring{D}_{x_j} I_m) (\mathring{D}_{x_i} I_m^{-1}) \\ &\quad - (\mathring{D}_{x_j} \mathring{D}_{x_i} I_m) I_m^{-1} - (\mathring{D}_{x_i} I_m) (\mathring{D}_{x_j} I_m^{-1}) \} \\ &= -u^i v^j \{ (\mathring{D}_{[x_i, x_j]} I_m I_m^{-1}) - (\mathring{D}_{x_j} I_m) (\mathring{D}_{x_i} I_m^{-1}) - (\mathring{D}_{x_i} I_m) (\mathring{D}_{x_j} I_m^{-1}) \} \\ &= -u^i v^j \{ -(\mathring{D}_{x_j} I_m) (\mathring{D}_{x_i} I_m^{-1}) - (\mathring{D}_{x_i} I_m) (\mathring{D}_{x_j} I_m^{-1}) \} \\ &= -u^i v^j \{ ((\mathring{D}_{x_i} I_m) I_m^{-1}) ((\mathring{D}_{x_j} I_m^{-1}) I_m) - ((\mathring{D}_{x_i} I_m) I_m^{-1}) ((\mathring{D}_{x_j} I_m^{-1}) I_m) \} \\ &= -u^i v^j \{ ((\mathring{D}_{x_i} I_m) I_m^{-1}) ((\mathring{D}_{x_j} I_m) I_m^{-1}) - ((\mathring{D}_{x_j} I_m) I_m^{-1}) ((\mathring{D}_{x_i} I_m) I_m^{-1}) \} \\ &= -u^i v^j \mathcal{S}(\vartheta_i) \mathcal{S}(\vartheta_j) + u^i v^j \mathcal{S}(\vartheta_j) \mathcal{S}(\vartheta_i) \\ &= -\mathcal{S}(u) \mathcal{S}(v) + \mathcal{S}(v) \mathcal{S}(u) = -2\mathcal{S}(u) \times \mathcal{S}(v).\end{aligned}\tag{2.323}$$

Assim, conseguimos

$$\mathfrak{R}(u \wedge v) = -\mathcal{S}(u) \times \mathcal{S}(v) - \mathcal{S}([u, v]).\tag{2.324}$$

Agora, como $\mathfrak{R}(u \wedge v) \in \sec \wedge^2 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$ devemos ter que

$$-\mathcal{S}(u) \times \mathcal{S}(v) - \mathcal{S}([u, v]) = \mathbf{P}(-\mathcal{S}(u) \times \mathcal{S}(v) - \mathcal{S}([u, v])).\tag{2.325}$$

Observando a Eq.(2.268), que nos diz que $\mathbf{P}(\mathcal{S}([u, v])) = 0$, conseguimos a

Proposição 182.

$$\mathfrak{R}(u \wedge v) = -\mathbf{P}(\mathcal{S}(u) \times \mathcal{S}(v)). \quad (2.326)$$

A Eq.(2.326) expressa a biforma de curvatura em termos da biforma de formato.

2.11.2 $\mathbf{S}^2(v) = -\partial \wedge \partial (v)$

Nessa subseção desejamos provar a

Proposição 183. *Seja $v \in \sec \wedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$. Então,*

$$\mathbf{S}^2(v) = -\partial \wedge \partial (v) \quad (2.327)$$

Agora, para provarmos a Proposição 183 precisaremos dos lemas a seguir

Lema 184. *Seja $\mathcal{C} \in \sec \mathcal{C}\ell(\mathring{M}, \mathfrak{g})$ e $v \in \sec \wedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$. Então*

$$\mathbf{P}_v(\mathcal{C}) = \mathbf{P}(\mathcal{C}) \times \mathcal{S}(v) - \mathbf{P}(\mathcal{C} \times \mathcal{S}(v)). \quad (2.328)$$

Demonstração. Realmente,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_v(\mathcal{C}) &= \mathring{D}_v(\mathbf{P}(\mathcal{C})) - \mathbf{P}(\mathring{D}_v\mathcal{C}) \\ &= D_v(\mathbf{P}(\mathcal{C})) - \mathcal{S}(v) \times \mathbf{P}(\mathcal{C}) - \mathbf{P}(D_v\mathcal{C} - \mathcal{S}(v) \times \mathcal{C}) \\ &= D_v\mathcal{C} - \mathcal{S}(v) \times \mathbf{P}(\mathcal{C}) - D_v\mathcal{C} + \mathbf{P}(\mathcal{S}(v) \times \mathcal{C}) \\ &= \mathbf{P}(\mathcal{C}) \times \mathcal{S}(v) - \mathbf{P}(\mathcal{C} \times \mathcal{S}(v)). \end{aligned} \quad (2.329)$$

o que prova o lema. ■

Lema 185. *Seja $\mathcal{C} \in \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$ e $v \in \sec \wedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$. Então*

$$D_v\mathcal{C} = \mathring{D}_v\mathcal{C} - \mathbf{P}_v(\mathcal{C}). \quad (2.330)$$

Demonstração. Segue da primeira linha da Eq.(2.329). ■

Lema 186. *Seja $\mathcal{C} \in \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$ e $u, v \in \sec \wedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$. Então*

$$D_u D_v \mathcal{C} = \mathbf{P}(\mathring{D}_u \mathring{D}_v \mathcal{C}) + \mathbf{P}_u \mathbf{P}_v(\mathcal{C}). \quad (2.331)$$

Demonstração. Usando a Eq.(2.330) teremos

$$\begin{aligned} D_u(D_v\mathcal{C}) &= D_u(\mathring{D}_v\mathcal{C} - \mathbf{P}_v(\mathcal{C})) \\ &= \mathring{D}_u \mathring{D}_v \mathcal{C} - \mathbf{P}_u(\mathring{D}_v\mathcal{C}) - \mathring{D}_u(\mathbf{P}_v(\mathcal{C})) + \mathbf{P}_u \mathbf{P}_v(\mathcal{C}). \end{aligned} \quad (2.332)$$

Por outro lado teremos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathring{D}_u \mathring{D}_v \mathcal{C}) &= -\mathbf{P}_u(\mathring{D}_v\mathcal{C}) + \mathring{D}_u(\mathbf{P}(\mathring{D}_v\mathcal{C})) \\ &= -\mathbf{P}_u(\mathring{D}_v\mathcal{C}) + \mathring{D}_u(D_v\mathcal{C}) \\ &= -\mathbf{P}_u(\mathring{D}_v\mathcal{C}) + \mathring{D}_u(\mathring{D}_v\mathcal{C} - \mathbf{P}_v(\mathcal{C})) \\ &= \mathring{D}_u \mathring{D}_v \mathcal{C} - \mathbf{P}_u(\mathring{D}_v\mathcal{C}) - \mathring{D}_u(\mathbf{P}_v(\mathcal{C})). \end{aligned} \quad (2.333)$$

Usando a Eq.(2.333) na Eq.(2.331) obtemos o resultado desejado. ■

Lema 187. *Seja $\mathcal{C} \in \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$ e $u, v \in \sec \bigwedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$. Então*

$$\mathfrak{R}(u \wedge v) \times \mathcal{C} = [\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v]\mathcal{C}. \quad (2.334)$$

Demonstração. Usando a Eq.(2.331) temos

$$\begin{aligned} [D_{\mathbf{u}}, D_{\mathbf{v}}]\mathcal{C} &= \mathbf{P}([\mathring{D}_{\mathbf{u}}, \mathring{D}_{\mathbf{v}}]\mathcal{C}) + [\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v]\mathcal{C} \\ &= \mathbf{P}(\mathring{D}_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}\mathcal{C}) + [\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v]\mathcal{C} \\ &= D_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]} \mathcal{C} + [\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v]\mathcal{C}. \end{aligned} \quad (2.335)$$

De forma que chegamos em

$$([D_{\mathbf{u}}, D_{\mathbf{v}}] - D_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]})\mathcal{C} = [\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v]\mathcal{C}. \quad (2.336)$$

Usando a Eq.(2.185) segue que

$$\mathfrak{R}(u \wedge v) \times \mathcal{C} = [\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v]\mathcal{C}, \quad (2.337)$$

e o lema está provado. ■

Lema 188. *Seja $\mathcal{C} \in \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$ e $u, v \in \sec \bigwedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$. Então,*

$$\mathfrak{R}(u \wedge v) \times \mathcal{C} = -\mathbf{P}(\mathcal{S}(u) \times \mathcal{S}(v)) \times \mathcal{C}. \quad (2.338)$$

Demonstração. A prova segue diretamente da Eq.(2.326). ■

Vamos agora calcular diretamente o primeiro membro da Eq.(2.339) para conseguirmos a Eq.(2.342) a qual quando comparada com a Eq.(2.326) irá fornecer as identidades dadas pela Eq.(2.343).

$$([D_{\mathbf{u}}, D_{\mathbf{v}}] - D_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]})\mathcal{C} = \mathfrak{R}(u \wedge v) \times \mathcal{C}. \quad (2.339)$$

Dada a linearidade de $\mathfrak{R}(u \wedge v)$ calcularemos o primeiro membro da Eq.(2.339) para o caso $\mathbf{u} = \mathbf{x}_i$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}_j$. Notando que $D_{\mathbf{u}}\mathcal{C} = \mathring{D}_{\mathbf{u}}\mathcal{C} + \mathcal{S}(u) \times \mathcal{C}$ chegaremos com cálculos similares aos da Eq.(2.323) que

$$[D_{\mathbf{x}_i}, D_{\mathbf{x}_j}]\mathcal{C} = -\mathcal{S}(\vartheta_i) \times \mathcal{S}(\vartheta_j) \times \mathcal{C}, \quad (2.340)$$

usando o fato de que $[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j] = 0$ podemos escrever a última equação como

$$([D_{\mathbf{x}_i}, D_{\mathbf{x}_j}] - D_{[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j]})\mathcal{C} = \mathfrak{R}(\vartheta_i \wedge \vartheta_j) \times \mathcal{C} = -\mathcal{S}(\vartheta_i) \times \mathcal{S}(\vartheta_j) \times \mathcal{C}, \quad (2.341)$$

de onde segue que

$$\mathfrak{R}(u \wedge v) \times \mathcal{C} = -\mathcal{S}(u) \times \mathcal{S}(v) \times \mathcal{C}. \quad (2.342)$$

Note que $\mathbf{P}(\mathcal{S}(u) \times \mathcal{S}(v) \times \mathcal{C}) \in \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$. Desde que $\mathcal{S}(u) \times \mathcal{S}(v) = \mathbf{P}(\mathcal{S}(u) \times \mathcal{S}(v)) + \mathbf{P}_{\perp}(\mathcal{S}(u) \times \mathcal{S}(v))$ e como já sabemos que $\mathfrak{R}(u \wedge v) = -\mathbf{P}(\mathcal{S}(u) \times \mathcal{S}(v))$ segue que $\mathbf{P}_{\perp}(\mathcal{S}(u) \times \mathcal{S}(v)) = 0$ e por fim chegamos que

$$\mathbf{P}(\mathcal{S}(u) \times \mathcal{S}(v) \times \mathcal{C}) = \mathbf{P}(\mathcal{S}(u) \times \mathcal{S}(v)) \times \mathcal{C} = \mathbf{P}(\mathcal{S}(u) \times \mathcal{S}(v)) \times \mathbf{P}(\mathcal{C}). \quad (2.343)$$

Lema 189. *Seja $\mathcal{C} \in \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$ e $u, v \in \sec \wedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$, então*

$$\mathfrak{R}(u \wedge v) = \mathbf{P}_v(\mathcal{S}(u)). \quad (2.344)$$

Demonstração. Tomando $\mathcal{C} = \mathcal{S}(u)$ na Eq.(2.329) e lembrando da Eq.(2.268) $\mathbf{P}(\mathcal{S}(u)) = 0$. Conseguimos que

$$\mathbf{P}_v(\mathcal{S}(u)) = -\mathbf{P}(\mathcal{S}(u) \times \mathcal{S}(v)). \quad (2.345)$$

o que prova o lema. ■

Observação 190. *Da Eq.(2.345) conseguimos imediatamente*

$$\mathbf{P}_u(\mathcal{S}(v)) = -\mathbf{P}(\mathcal{S}(v) \times \mathcal{S}(u)) = \mathbf{P}(\mathcal{S}(u) \times \mathcal{S}(v)) = -\mathbf{P}_v(\mathcal{S}(u)) = -\mathbf{P}_v(\mathbf{S}(u)) \quad (2.346)$$

onde o último termo segue do fato de que $\mathbf{S}(u) = \mathcal{S}(u)$.

Demonstração. (da Proposição 183) Sabemos que $\mathcal{R}(v) = \partial_u \mathfrak{R}(u \wedge v)$. Agora então usando a Eq.(2.346) e também a Eq.(2.255) podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(v) &= \partial_u \mathbf{P}_v(\mathcal{S}(u)) = -\partial_u \mathbf{P}_u(\mathbf{S}(v)) \\ &= -\mathring{\partial} \mathbf{P}(\mathbf{S}(v)) = -\mathbf{S}(\mathbf{S}(v)) = -\mathbf{S}^2(v). \end{aligned} \quad (2.347)$$

Desde que já mostramos que $\mathcal{R}(v) = \mathfrak{d} \wedge \mathfrak{d}(v)$ finalmente concluímos que

$$\mathfrak{d} \wedge \mathfrak{d}(v) = -\mathbf{S}^2(v). \quad (2.348)$$

e essa importante proposição está provada. ■

Observação 191. *Note que enquanto $\mathbf{S}(v)$ é uma seção de $\mathcal{C}\ell(\mathring{M}, \mathring{\mathfrak{g}})$, $\mathbf{S}^2(v) \in \sec \wedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$.*

2.12 Algumas identidades envolvendo \mathbf{P} e \mathbf{P}_u

O operador projeção \mathbf{P} foi definido pela Eq.(2.252) e sua derivada covariante $\mathbf{P}_u := u \cdot \mathring{\partial} \mathbf{P}$ foi definida pela Eq.(2.284). Seja $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \sec \mathcal{C}\ell(\mathring{M}, \mathring{\mathfrak{g}})$. Teremos que

$$\mathbf{P}(\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) = \mathbf{P}(\mathcal{C}) \wedge \mathbf{P}(\mathcal{D}) \quad (2.349)$$

então para $u \in \sec \wedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$ vale

$$\mathbf{P}_u(\mathcal{C} \wedge \mathcal{D}) = \mathbf{P}_u(\mathcal{C}) \wedge \mathbf{P}(\mathcal{D}) + \mathbf{P}(\mathcal{C}) \wedge \mathbf{P}_u(\mathcal{D}). \quad (2.350)$$

De $\mathbf{P}^2(\mathcal{C}) = \mathbf{P}(\mathcal{C})$ segue que

$$\mathbf{P}_u \mathbf{P}(\mathcal{C}) + \mathbf{P} \mathbf{P}_u(\mathcal{C}) = \mathbf{P}_u(\mathcal{C}) \quad (2.351)$$

Facilmente verificamos que

$$\mathbf{P}_u(w) = \mathbf{P}_\perp(u \cdot \mathring{\partial}w), \quad \mathbf{P}_w(u) = \mathbf{P}_\perp(w \cdot \mathring{\partial}u) \quad (2.352)$$

Agora, calculando $\mathbf{P}_\perp(u \cdot \mathring{\partial}w)$ e $\mathbf{P}_\perp(w \cdot \mathring{\partial}u)$ com u and v expandidos numa base coordenada e lembrando que nessa base os símbolos de Chrisoffel são simétricos, conseguimos

$$\mathbf{P}_u(w) = \mathbf{P}_w(u). \quad (2.353)$$

Dessa última equação segue imediatamente que

$$\mathbf{P}_u\mathbf{P}(w) = \mathbf{P}_w\mathbf{P}(u). \quad (2.354)$$

Agora dado que cada $\mathcal{X} \in \sec \mathcal{C}\ell(\mathring{M}, \mathring{\mathfrak{g}})$ pode ser escrito como $\mathcal{X} = \mathcal{X}_\parallel + \mathcal{X}_\perp$, com $\mathcal{X}_\parallel = \mathbf{P}(\mathcal{X})$ conseguimos da Eq.(2.351) que

$$\mathbf{P}\mathbf{P}_u(\mathcal{X}_\parallel) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}\mathbf{P}_u(\mathcal{X}_\perp) = \mathbf{P}_u(\mathcal{X}_\perp) \quad (2.355)$$

Também, da Eq.(2.350) teremos imediatamente da Eq.(2.355) que para $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \sec \mathcal{C}\ell(\mathring{M}, \mathring{\mathfrak{g}})$ vale

$$\mathbf{P}_u(\mathcal{C}_\parallel \wedge \mathcal{D}_\perp) = \mathcal{C}_\parallel \wedge \mathbf{P}_u(\mathcal{D}_\perp). \quad (2.356)$$

Proposição 192. *Sejam $u, v, w \in \sec \bigwedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$. Então,*

$$\mathfrak{R}(u \wedge v) = \frac{1}{2} \partial_w \wedge [\mathbf{P}_v, \mathbf{P}_u](w). \quad (2.357)$$

Demonstração. Da Eq.(2.334) com $\mathcal{C} = w \in \sec \bigwedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$ teremos

$$\mathfrak{R}(u \wedge v) \times w = [\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v](w). \quad (2.358)$$

Agora, o primeiro membro da Eq.(2.358) é

$$\mathfrak{R}(u \wedge v) \times w = -w \lrcorner \mathfrak{R}(u \wedge v)$$

Agora, podemos escrever

$$\begin{aligned} \partial_w \wedge (\mathfrak{R}(u \wedge v) \times w) &= -\partial_w \wedge (w \lrcorner \mathfrak{R}(u \wedge v)) = -\theta^c \frac{\partial}{\partial w^c} \wedge (w^d \theta_d \lrcorner \mathfrak{R}(u \wedge v)) \\ &= -u^i v^j \theta^d \wedge (\theta_d \lrcorner R_{ijkl} \theta^k \wedge \theta^l) = -2\mathfrak{R}(u \wedge v). \end{aligned} \quad (2.359)$$

Levando em conta a Eq.(2.358) e a Eq.(2.359) a demonstração segue.

Podemos também provar a proposição como segue: diretamente da Eq.(2.336) podemos escrever

$$[\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v](w) = u^k v^l ([D_{\mathbf{e}_k}, D_{\mathbf{e}_l}] - D_{[\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l]})w = u^k v^l w^j R_{jkl}^i \theta_i. \quad (2.360)$$

Assim

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\partial_w \wedge [\mathbf{P}_u, \mathbf{P}_v](w) &= \frac{1}{2}\theta^m \wedge R_{\mathbf{mkl}}^{i\dots}\theta_i \\
&= \frac{1}{2}u^k v^l R_{\mathbf{imkl}}^{\dots}\theta^m \wedge \theta^i \\
&= -u^k v^l \mathcal{R}_{\mathbf{kl}} = -\mathfrak{R}(u \wedge v)
\end{aligned} \tag{2.361}$$

e a demonstração está completa. ■

Proposição 193. *Seja $u, v, w \in \sec \wedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$. Então,*

$$\mathfrak{R}(u \wedge v) = \partial_w \wedge \mathbf{P}_v \mathbf{P}_u(w). \tag{2.362}$$

Demonstração. Lembre-se que provamos a (Eq.(2.344)) que $\mathfrak{R}(u \wedge v) = \mathbf{P}_v(\mathcal{S}(u))$. Também a Eq.(2.287) nos diz que $\mathbf{S}(u) = \mathcal{S}(u) = \partial_w \wedge \mathbf{P}_w(u)$ para qualquer $u, w \in \sec \wedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$.

Agora da Eq.(2.353) teremos

$$\mathbf{P}_w(u) = \mathbf{P}_u(w) = u \cdot \mathring{\partial} \mathbf{P}(w) = \mathring{D}_{\mathbf{u}} \mathbf{P}(w) = \mathring{D}_{\mathbf{u}}(\mathbf{P}(w)) - \mathbf{P}(\mathring{D}_{\mathbf{u}} w) = (\mathring{D}_{\mathbf{u}} w)_{\perp} \tag{2.363}$$

que significa que

$$\mathbf{P}_w(u) = (\mathbf{P}_w(u))_{\perp}. \tag{2.364}$$

Então, teremos

$$\mathfrak{R}(u \wedge v) = \mathbf{P}_v(\mathcal{S}(u)) = \mathbf{P}_v(\partial_w \wedge \mathbf{P}_w(u)) \tag{2.365}$$

$$= \mathbf{P}_v(\partial_w \wedge \mathbf{P}_u(w)) = \mathbf{P}_v((\partial_w)_{\parallel} \wedge (\mathbf{P}_u(w))_{\perp}) \tag{2.366}$$

$$\stackrel{\text{Eq.(2.356)}}{=} \partial_w \wedge \mathbf{P}_v \mathbf{P}_u(w))_{\perp} \tag{2.367}$$

e a prova está completa. ■

Observação 194. *De $\mathfrak{R}(u \wedge v) = -\mathfrak{R}(v \wedge u)$, a Eq.(2.362) implica que para $u, v, w \in \sec \wedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$*

$$\partial_w \wedge \mathbf{P}_v \mathbf{P}_u(w) = -\partial_w \wedge \mathbf{P}_u \mathbf{P}_v(w), \tag{2.368}$$

segundo da Eq.(2.362) com a Eq.(2.357).

Para finalizar observamos que embora alguns (mas não todos) resultados nesse trabalho apareçam em [21, 22, 41], nossa metodologia e muitas provas diferem consideravelmente. Nós usamos o fibrado de Clifford de formas diferenciais $\mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$ e demos provas detalhadas e (esperamos) inteligíveis de todas as fórmulas, esclarecendo algumas questões importantes, apresentando, e.g., a relação precisa entre a biforma de formato S avaliada em v (um campo de 1-formas) e o extensor de conexão ω avaliado em v (Eq.(2.280)).

2.13 Algumas Identidades Notáveis

Com todo esse maquinário desenvolvido, podemos escrever algumas relações simples e bem interessantes relacionando a biforma de formato com o operador de Weingarten quando M é uma subvariedade m -dimensional de uma variedade $(m + 1)$ -dimensional $\overset{\circ}{M} \simeq \mathbb{R}^n$. Consideraremos novamente as estruturas (M, \mathbf{g}, D) e $(\overset{\circ}{M}, \overset{\circ}{\mathbf{g}}, \overset{\circ}{D})$. Teremos para $a \in \sec \bigwedge^1 T^*M \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$

$$\mathcal{S}(a) = (a \cdot \overset{\circ}{\mathfrak{d}} I_m) I_m^{-1}; \quad (2.369)$$

onde $I_m = \theta^1 \dots \theta^m$. Definindo $I = I_n = \theta^1 \dots \theta^m \overset{\circ}{\theta}^{m+1}$ podemos escrever

$$I_m = I \overset{\circ}{\theta}^{m+1} = (-1)^m \overset{\circ}{\theta}^{m+1} I \text{ e } I_m^{-1} = (-1)^m I^{-1} \overset{\circ}{\theta}_{m+1}, \quad (2.370)$$

de forma que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(a) &= (a \cdot \overset{\circ}{\mathfrak{d}}(\overset{\circ}{\theta}^{m+1} I)) I^{-1} \overset{\circ}{\theta}_{m+1} \\ &= \{(a \cdot \overset{\circ}{\mathfrak{d}} \overset{\circ}{\theta}^{m+1}) I + \overset{\circ}{\theta}^{m+1} \underbrace{(a \cdot \overset{\circ}{\mathfrak{d}} I)}_{=0}\} I^{-1} \overset{\circ}{\theta}_{m+1} \\ &= (a \cdot \overset{\circ}{\mathfrak{d}} \overset{\circ}{\theta}^{m+1}) \overset{\circ}{\theta}_{m+1} = (a \cdot \overset{\circ}{\mathfrak{d}} \overset{\circ}{\theta}_{m+1}) \overset{\circ}{\theta}^{m+1}. \end{aligned} \quad (2.371)$$

Portanto obtemos a interessante relação entre a biforma de formato e o operador de Weingarten para $\mathbf{a} \in \bigwedge^1 TM$ e $a = \mathbf{g}(\mathbf{a}, \cdot) \in \bigwedge^1 T^*M$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(a) &= L(a) \overset{\circ}{\theta}^{m+1} = L(a) \wedge \overset{\circ}{\theta}^{m+1}, \\ L(a) &= (\mathcal{S}(a) \lrcorner \overset{\circ}{\theta}_{m+1}), \end{aligned} \quad (2.372)$$

onde definimos o operador de Weingarten para formas como

$$\begin{aligned} L &: \sec \bigwedge^1 T^*M \rightarrow \sec \bigwedge^1 T^*M, \\ a &\mapsto L(a) = \overset{\circ}{D}_{\mathbf{a}} \overset{\circ}{\theta}_{m+1}. \\ L(a) &= \overset{\circ}{D}_{\mathbf{a}} \overset{\circ}{\theta}_{m+1} = a^i \overset{\circ}{D}_{\mathbf{e}_i} \overset{\circ}{\theta}_{m+1} = a^i \overset{\circ}{L}_{\cdot i(m+1)}^{\rho \cdot} \overset{\circ}{\theta}_{\rho}, \\ \mathbf{L}(\mathbf{a}) &= \overset{\circ}{D}_{\mathbf{a}} \overset{\circ}{\mathbf{e}}_{m+1} = a^i \overset{\circ}{D}_{\mathbf{e}_i} \overset{\circ}{\mathbf{e}}_{m+1} = a^i \overset{\circ}{L}_{\cdot i(m+1)}^{\rho \cdot} \overset{\circ}{\mathbf{e}}_{\rho}. \end{aligned} \quad (2.373)$$

Consideremos agora a aplicação extensorial

$$\begin{aligned} \underline{n} &: \bigwedge T^*M \rightarrow \bigwedge T^*M, \\ \underline{n}(a) &= a \cdot \overset{\circ}{\mathfrak{d}} \overset{\circ}{\theta}_{m+1} = \overset{\circ}{D}_{\mathbf{a}} \overset{\circ}{\theta}_{m+1}, \\ \underline{n}(a_1 \wedge \dots \wedge a_k) &= \underline{n}(a_1) \wedge \dots \wedge \underline{n}(a_k) \end{aligned} \quad (2.374)$$

onde $a, a_1, \dots, a_k \in \bigwedge^1 T^*M \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$. Obtemos assim rapidamente a expressão

$$\begin{aligned} H &\equiv \frac{1}{m} \partial_u \underline{n}(u) = \frac{1}{m} \sum_{\mathbf{a}=1}^m \overset{\circ}{\theta}^{\mathbf{a}} \frac{\partial}{\partial u^{\mathbf{a}}} u \cdot \overset{\circ}{\mathfrak{d}} \overset{\circ}{\theta}_{m+1} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{\mathbf{a}=1}^m \overset{\circ}{\theta}^{\mathbf{a}} \cdot \overset{\circ}{D}_{\mathbf{e}_{\mathbf{a}}} \overset{\circ}{\theta}_{m+1} = \frac{1}{m} \sum_{\mathbf{a}=1}^m \overset{\circ}{L}_{\cdot \mathbf{a}(m+1)}^{\mathbf{a} \cdot} \equiv \frac{1}{m} \text{tr } \underline{n}. \end{aligned} \quad (2.375)$$

Esta expressão empata com a definição que demos de curvatura média para uma subvariedade 2-dimensional. Da Eq.(2.344) podemos escrever

$$\mathfrak{R}(a \wedge b) = -\mathbf{P}(\mathcal{S}(a) \times \mathcal{S}(b)) = -\mathbf{P}(\underline{n}(a) \wedge \dot{\theta}^{m+1} \times \underline{n}(a) \wedge \dot{\theta}^{m+1}) \quad (2.376)$$

Mas

$$\underline{n}(a) \in \bigwedge T^*M. \quad (2.377)$$

De fato, lembrando que $\dot{L}_{\cdot i}^{m+1 \cdot m+1} = 0$ temos que

$$\begin{aligned} \underline{n}(a) &= a \cdot \dot{\delta}\dot{\theta}_{m+1} = a^i \dot{D}_{\mathbf{e}_i} \dot{\theta}_{m+1} = \sum_{j=1}^n a^i \dot{L}_{\cdot i m+1}^{\cdot j} \dot{\theta}_j \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} a^i \dot{L}_{\cdot i m+1}^{\cdot j} \dot{\theta}_j. \end{aligned} \quad (2.378)$$

Assim,

$$\underline{n}(a) \wedge \dot{\theta}^{m+1} = (a^i \dot{L}_{\cdot i(m+1)}^{\cdot \rho} \dot{\theta}_\rho) \wedge \dot{\theta}^{m+1} = a^i \dot{L}_{\cdot i(m+1)}^{\cdot \rho} \dot{\theta}_\rho \dot{\theta}^{m+1}. \quad (2.379)$$

Portanto se $\dot{\theta}^{m+1} \cdot \dot{\theta}^{m+1} = \mathbf{g}^{(m+1)(m+1)}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(a \wedge b) &= -\mathbf{P}(\underline{n}(a) \wedge \dot{\theta}^{m+1} \times \underline{n}(b) \wedge \dot{\theta}^{m+1}) = \underline{n}(a) \dot{\theta}^{m+1} \times \underline{n}(b) \dot{\theta}^{m+1} \\ \dot{\theta}^{m+1} \wedge \underline{n}(a) \times \dot{\theta}^{m+1} \wedge \underline{n}(b) &= \frac{1}{2} \left\langle (\dot{\theta}^{m+1} \underline{n}(a)) (\dot{\theta}^{m+1} \underline{n}(b)) - (\dot{\theta}^{m+1} \underline{n}(b)) (\dot{\theta}^{m+1} \underline{n}(a)) \right\rangle_2 \\ &= \frac{1}{2} \left\langle (\underline{n}(b) \dot{\theta}^{m+1}) (\dot{\theta}^{m+1} \underline{n}(a)) - (\underline{n}(a) \dot{\theta}^{m+1}) (\dot{\theta}^{m+1} \underline{n}(b)) \right\rangle_2 \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{g}^{(m+1)(m+1)} \langle \underline{n}(b) \underline{n}(a) - \underline{n}(a) \underline{n}(b) \rangle_2 \\ &= \mathbf{g}^{(m+1)(m+1)} \underline{n}(b) \wedge \underline{n}(a). \end{aligned} \quad (2.380)$$

Então

$$\mathfrak{R}(a \wedge b) = -\mathbf{P}(\mathcal{S}(a) \times \mathcal{S}(b)) = \mathbf{g}^{(m+1)(m+1)} \underline{n}(b) \wedge \underline{n}(a). \quad (2.381)$$

CAPÍTULO 3

SOBRE ESPINORES E SUPERFÍCIES MÍNIMAS E MÁXIMAS

3.1 Superfícies Paramétricas

Apresentaremos no que se segue o estudo de algumas superfícies mínimas [2, 13, 37, 43] e máximas [14] como 2-subvariedades numa estrutura $(\mathring{M} \simeq \mathbb{R}^3, \mathring{\mathfrak{g}}, \mathring{D})$. Para este espaço uma vez introduzidas coordenadas cartesianas $\{x^i\}$ usaremos as denominações *espaço Euclidiano* para $\mathbf{R}^{3,0}$ (ou $\mathbf{R}^{0,3}$), *espaço de Majorana* para o caso $\mathbf{R}^{2,1}$ e *espaço de Lorentz* para o caso $\mathbf{R}^{1,2}$.

Introduzindo as coordenadas naturais (x^1, \dots, x^n) de \mathbb{R}^n e denotando a estrutura $(\mathring{M} \simeq \mathbb{R}^n, \mathring{\mathfrak{g}}, \mathring{D})$ por $\mathbf{R}^{p,q}$, escreveremos $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{p,q}$ para denotar $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$. Considere uma carta local $(\varphi_\alpha, V_\alpha)$ da subvariedade (Eq.(2.67)) $M \subset \mathring{M}$, $\dim M = 2$. Chamaremos $\mathbf{x}_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}$ de uma parametrização local de M , normalmente suprimiremos o índice α . Tome $\mathcal{U} = \varphi(V) \subset \mathbb{R}^2$ que intitularemos de u -plano. Escreveremos sem maiores comentários $u = (u^1, u^2) \in \mathcal{U}$.

Assim

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \mathcal{U} &\rightarrow M \subset \mathbf{R}^{p,q}, \\ (u^1, u^2) &\mapsto \mathbf{x}(u^1, u^2) = \mathbf{x} \end{aligned} \tag{3.1}$$

é uma aplicação diferenciável de um conjunto aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ em $\mathbf{R}^{p,q}$. Lembre-se que isso significa que se escrevemos

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = (x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), \dots, x^n(u^1, u^2)), \tag{3.2}$$

as funções reais $x^i(u^1, u^2)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) são diferenciáveis.

Em muitos textos de geometria diferencial denota-se muitas vezes os vetores de uma base coordenada para $T_{\mathbf{x}(u)}M$ como

$$\mathbf{x}_i = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} \right|_{\mathbf{x}(u)}, i = 1, 2, \quad (3.3)$$

que definem derivações da seguinte maneira: seja $f \in C(M)$, temos

$$\left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} \right|_{\mathbf{x}(u)} (f) = \left. \frac{\partial (f \circ \mathbf{x})}{\partial u^i} \right|_u = \left. \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} \right|_u. \quad (3.4)$$

Usaremos essa notação no que segue.

3.1.1 Uma Interpretação Geométrica dos Espinores de Pauli

Seja $0 \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{3,0} \hookrightarrow \mathbb{R}_{3,0}$ e considere a aplicação linear

$$\mathbf{L}_\psi : \mathbb{R}^{3,0} \rightarrow \mathbb{R}^{3,0}, \mathbf{v} \mapsto \mathbf{z} = \psi \mathbf{v} \tilde{\psi}, \mathbf{z}^2 = \rho \mathbf{v}^2, \quad (3.5)$$

com $\psi \in \mathbb{R}_{3,0}$ e $\rho \in \mathbb{R}^+$. Note agora que se $\mathbf{R} \in \text{Spin}_{3,0}^e$ então $\mathbf{w} = \mathbf{R} \mathbf{v} \tilde{\mathbf{R}}$ é tal que $\mathbf{w}^2 = \mathbf{v}^2$; segue que uma solução para a Eq.(3.5) é

$$\psi = \rho^{\frac{1}{2}} \mathbf{R}, \quad (3.6)$$

caso $\psi \tilde{\psi} \neq 0$. Agora, considere ψ_{Ξ_u} um representante de um espinor de Pauli num dado referencial de Ξ_u . Desde que $\psi_{\Xi_u} \in \mathbb{R}_{3,0}^0$ vemos que este espinor tal que $\psi_{\Xi_u} \tilde{\psi}_{\Xi_u} \neq 0$ induz uma aplicação linear dada pela Eq.(3.5), a qual *roda* um dado vetor e o *dilata*.

Seja $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{p,q}$ tal que $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ seja um base ortonormal para TU , $U \subset M$ obtido pa partir de \mathbf{x}_i pelo processo de Gram-Schmidt e tal que $\mathbf{e}_3 = -I(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)$. Considere o vetor posição \mathbf{x} que define nossa superfície M . Temos:

$$\mathbf{x} = \rho^{\frac{1}{2}} [\text{sen } \theta (\cos \phi \mathbf{e}_1 + \text{sen } \phi \mathbf{e}_2) + \cos \theta \mathbf{e}_3], \quad (3.7)$$

onde θ é o ângulo que \mathbf{x} faz com o eixo \mathbf{e}_3 , e ϕ é o ângulo que a projeção de \mathbf{x} no plano $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ faz com o eixo \mathbf{e}_1 . Note que a Eq.(3.7) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \psi \mathbf{e}_3 \tilde{\psi}, \\ \psi &= \rho^{\frac{1}{2}} \mathbf{R}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde definimos o rotor \mathbf{R} (um elemento de $\text{Spin}_{3,0}$) por

$$\mathbf{R} = \exp\left(-\frac{\phi I \mathbf{e}_3}{2}\right) \exp\left(-\frac{\theta I \mathbf{e}_2}{2}\right), \quad (3.9)$$

com

$$\exp\left(-\frac{\phi I \mathbf{e}_3}{2}\right) = \left(\cos \frac{\phi}{2} - I \mathbf{e}_3 \text{sen } \frac{\phi}{2}\right), \quad \exp\left(-\frac{\theta I \mathbf{e}_2}{2}\right) = \left(\cos \frac{\theta}{2} - I \mathbf{e}_2 \text{sen } \frac{\theta}{2}\right) \quad (3.10)$$

Portanto

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \left(\cos \frac{\phi}{2} - I\mathbf{e}_3 \sin \frac{\phi}{2}\right)\left(\cos \frac{\theta}{2} - I\mathbf{e}_2 \sin \frac{\theta}{2}\right) \\ &= \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 - \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3.\end{aligned}\quad (3.11)$$

Agora podemos representar ψ como um elemento de $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$ através da representação dada pela Eq.(1.144):

$$\psi = \begin{pmatrix} a^0 + ia^3 & 0 \\ -a^2 + ia^1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \psi = a^0 + a^k I\mathbf{e}_k.\quad (3.12)$$

Portanto no nosso caso em que $\mathbf{x} = \psi \mathbf{e}_3 \tilde{\psi}$ da Eq.(3.11) obtemos

$$\psi = \begin{pmatrix} \rho^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2}\right) - i\rho^{\frac{1}{2}} \left(\sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2}\right) & 0 \\ \rho^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2}\right) + i\rho^{\frac{1}{2}} \left(\sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2}\right) & 0 \end{pmatrix}.\quad (3.13)$$

3.1.2 Superfícies na Forma Explícita

Vamos agora considerar uma escolha especial de parâmetros que se mostrará muito útil. Tome i e j dois inteiros distintos no intervalo 1 até n , e seja o domínio \mathcal{U} no plano (x^i, x^j) . A aplicação

$$\begin{aligned}\mathbf{x} : \mathcal{U} &\rightarrow \mathbf{R}^{p,q}, \\ \mathbf{x}(x^i, x^j) &= (f^1(x^i, x^j), f^2(x^i, x^j), \dots, x^i, \dots, x^j, \dots, f^n(x^i, x^j))\end{aligned}\quad (3.14)$$

define uma superfície $M \subset \mathbf{R}^{p,q}$. Uma superfície definida dessa maneira será dita na *forma não-paramétrica* ou na *forma explícita*. Usaremos quando de tal pratica não resultar confusão a notação simplificada

$$x^k(x^i, x^j) = f^k(x^i, x^j), \quad k = 1, \dots, n; \quad (x^i, x^j) \in \mathcal{U},\quad (3.15)$$

Em outras palavras podemos reescrever Eq.(3.15) na forma:

$$x^i = u^1, x^j = u^2, x^k = f^k(u^1, u^2), k \neq i, j.\quad (3.16)$$

Como exemplo tomemos o caso $n = 3$. Neste caso temos uma *única* função f^k que denotaremos por f . Por exemplo, em $\mathbf{R}^{3,0}$ a função $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ representa uma superfície que é uma calota de uma esfera.

Muitas vezes nos livros de geometria diferencial na definição de superfície¹ se pede que dada a parametrização \mathbf{x} tenhamos

$$\left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} \right|_{\mathbf{x}(u)}, \quad i = 1, 2,\quad (3.17)$$

¹Que muitas vezes é chamada de superfície regular.

linearmente independentes em $T_{\mathbf{x}(u)}\dot{M}$, mas note que como estamos definindo M como subvariedade de \dot{M} , $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}|_{\mathbf{x}(u)}$ e $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2}|_{\mathbf{x}(u)}$ são l.i. automaticamente.

O que notamos é que para que uma superfície possa ser expressa na forma não paramétrica, é necessário que a projeção

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^i, x^j), \quad (3.18)$$

quando restrita à $V \subset M$, seja 1-1. Isso não é verdade em geral para a superfície M como um todo, mas temos o seguinte lema que nos será útil:

Lema 195. *Seja M uma superfície parametrizada por \mathbf{x} , ou seja uma 2-subvariedade de \dot{M} . Tome $\mathbf{x}(u) \in M$, então existe uma vizinhança \mathcal{U} de u , tal que a superfície Σ obtida da quando restringimos \mathbf{x} à \mathcal{U} têm a reparametrização $\tilde{\Sigma}$ na forma não-paramétrica.*

Prova: Temos que \mathbf{x}_* é um isomorfismo. O teorema da função inversa, nos leva a inferir que existe uma vizinhança \mathcal{U} de u na qual a reparametrização $(u^1, u^2) \rightarrow (x^i, x^j)$ é um *difeomorfismo*. Assim, se $\mathbf{x}(u)$ é diferenciável, a transformação inversa $(x^i, x^j) \mapsto (u^1, u^2)$ também é diferenciável, o que também é verdade para a seguinte composição:

$$(x^i, x^j) \mapsto (u^1, u^2) \mapsto (x^1(u^1, u^2), \dots, x^n(u^1, u^2)), \quad (3.19)$$

que define $\tilde{\Sigma}$. ■

Assim, quando estudamos o comportamento *local* de uma superfície, podemos, conforme for conveniente, supor que a superfície está dada em forma não-paramétrica. Ou seja, que é localmente o gráfico de uma função.

Para conhecermos com maiores detalhes o comportamento da estrutura (M, \mathbf{g}, D) em uma vizinhança U de um dado ponto $x \in M$, consideremos todas as curvas passando através do ponto e que pertencem à superfície.

Recordamos que por uma curva $\mathcal{C} \subset \mathbf{R}^{p,q}$ entende-se o lugar geométrico em $\mathbf{R}^{p,q}$ definido por uma aplicação continuamente diferenciável

$$\begin{aligned} \sigma &: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^{p,q}, \\ \sigma(t) &= (\sigma^1(t), \dots, \sigma^n(t)) \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde $[\alpha, \beta]$ é algum intervalo da reta real.² onde as funções $\sigma^i(t), i = 1, 2, \dots, n$ são de classe C^1 .

Denotaremos o *vetor tangente* à curva \mathcal{C} no ponto $\mathbf{x}(t_0)$ por

$$\dot{\sigma}(t_0) = (\dot{\sigma}^1(t_0), \dots, \dot{\sigma}^n(t_0)). \quad (3.21)$$

A curva é *regular* em $\mathbf{x}(t_0)$ se $\dot{\sigma}(t_0) \neq 0$.

²No que se segue usaremos *eventualmente* a notação simplificada $\mathbf{x}(t) = \sigma(t)$ para denotar a aplicação que define uma dada curva \mathcal{C} sempre que de tal uso não resultar confusão.

Consideremos agora o conjunto $\{\mathcal{C}\}$ de todas as curvas pertencentes à M e que passam pelo ponto $\mathbf{b} = \mathbf{x}(a)$. Vamos supor que existe um valor fixo t_0 , $\alpha \leq t_0 \leq \beta$, tal que para qualquer curva $\mathcal{C} \in \{\mathcal{C}\}$ parametrizada por uma aplicação σ se tenha $\sigma(t_0) = \mathbf{b}$. Para cada curva $\mathcal{C} \in \{\mathcal{C}\}$ corresponde uma curva $u(t)$ em D tal que $u(t_0) = a = (a^1, a^2)$. Também, para cada curva $u(t)$ em U com $u(t_0) = a$ corresponde obviamente uma curva $\mathcal{C} \in \{\mathcal{C}\}$ representada por $\sigma(t) = (\mathbf{x} \circ u)(t)$ em M , com $\sigma(t_0) = \mathbf{b}$. Para um vetor tangente à curva \mathcal{C} temos a fórmula

$$\dot{\sigma}(t_0) = \dot{u}^i(t_0) \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} \right|_{(a^1, a^2)} \quad (3.22)$$

Para curvas que moram em $\mathbb{R}^{n,0}$ ou ainda para curvas *tipo espaço*³ em $\mathbb{R}^{n-1,1}$, ou *tipo tempo*⁴ em $\mathbb{R}^{1,n-1}$ definimos a norma do vetor tangente $\dot{\sigma}(t_0) \in T_{\mathbf{b}}M$ por:

$$\|\dot{\sigma}(t_0)\| = \sqrt{\dot{\sigma}(t_0) \cdot \dot{\sigma}(t_0)} = \sqrt{g_{ij} \dot{u}^i(t_0) \dot{u}^j(t_0)}. \quad (3.23)$$

Para curvas que moram em $\mathbb{R}^{0,n}$ ou ainda para curvas *tipo tempo*⁵ em $\mathbb{R}^{1,n-1}$, ou *tipo espaço*⁶ em $\mathbb{R}^{n-1,1}$ definimos a norma do vetor tangente $\dot{\sigma}(t_0) \in T_{\mathbf{b}}M$ por:

$$\|\dot{\sigma}(t_0)\| = \sqrt{-\dot{\sigma}(t_0) \cdot \dot{\sigma}(t_0)} = \sqrt{-g_{ij} \dot{u}^i(t_0) \dot{u}^j(t_0)}. \quad (3.24)$$

Fixado $\epsilon \in [\alpha, \beta]$ podemos associar a cada curva arbitrária $\mathcal{C} \subset M$ (Eq.(3.20)) a seguinte quantidade

$$s(t) = \int_{\epsilon}^t \|\dot{\sigma}(t)\| dt. \quad (3.25)$$

que é dita a função comprimento de arco da curva $\mathcal{C} \subset M$ entre os pontos $\sigma(\epsilon)$ e $\sigma(t)$.

Temos $\dot{s}(t) = |\sigma(t)| \geq 0$ ou $\dot{s}(t) = |\sigma(t)| \leq 0$ para $\alpha \leq t_0 \leq \beta$, e portanto temos uma função monótona $s : [\alpha, \beta] \mapsto [0, L]$. E como estamos trabalhando com uma curva σ regular, a função $s(t)$ tem uma inversa diferenciável $t(s)$.

A seguinte composição

$$\tilde{\sigma}(s) : [0, L] \xrightarrow{t(s)} [\alpha, \beta] \xrightarrow{\sigma(t)} \mathbf{R}^{p,q}, \quad (3.26)$$

é dita uma parametrização de \mathcal{C} com respeito ao comprimento de arco. L é o comprimento total da curva. Em cada ponto $\mathbf{x} \in M$ para qualquer curva $\mathcal{C} \subset M \subset \mathbb{R}^{n,0}$ (ou para qualquer curva tipo espaço $\mathcal{C} \subset M \subset \mathbb{R}^{n-1,1}$) temos o seguinte campo vetorial tangente unitário sobre \mathcal{C}

$$\mathbf{t} = \frac{d\dot{\sigma}}{ds} = \frac{\dot{\sigma}(t)}{\dot{s}(t)}; \left\| \frac{d\dot{\sigma}}{ds} \right\| = \frac{\|\dot{\sigma}(t)\|}{\dot{s}(t)} = 1. \quad (3.27)$$

³Uma curva tipo espaço em $\mathbb{R}^{n-1,1}$ é tal que o vetor tangente em cada um de seus pontos é tipo espaço, ou seja se $\dot{\sigma}(t) \cdot \dot{\sigma}(t) > 0$, $\forall \alpha \leq t \leq \beta$.

⁴Uma curva tipo tempo em $\mathbb{R}^{1,n-1}$ é tal que o vetor tangente em cada um de seus pontos é tipo tempo, ou seja se $\dot{\sigma}(t) \cdot \dot{\sigma}(t) > 0$, $\forall \alpha \leq t \leq \beta$.

⁵Uma curva tipo tempo em $\mathbb{R}^{n-1,1}$ é tal que o vetor tangente em cada um de seus pontos é tipo tempo, ou seja se $\dot{\sigma}(t) \cdot \dot{\sigma}(t) < 0$, $\forall \alpha \leq t \leq \beta$.

⁶Uma curva tipo em $\mathbb{R}^{1,n-1}$ espaço é tal que o vetor tangente em cada um de seus pontos é tipo espaço, ou seja se $\dot{\sigma}(t) \cdot \dot{\sigma}(t) < 0$, $\forall \alpha \leq t \leq \beta$.

Assim dada a parametrização de uma curva $\mathcal{C} \subset M$ com respeito ao comprimento de arco (Eq.(3.26)) definimos o campo vetorial sobre \mathcal{C} , dito *campo vetorial de curvatura* por

$$\frac{d^2\sigma}{ds^2} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \in \sec TM \text{ tal que } \left. \frac{d^2\sigma}{ds^2} \right|_{s=d} \in T_{\sigma(d)}M^\perp, \forall d \in [0, L], \quad (3.28)$$

i.e, como a derivada do campo vetorial tangente unitário com respeito ao comprimento de arco.

Lembre-se que sendo $T_{\mathbf{x}}M$ o plano tangente a M em \mathbf{x} , denotamos por $T_{\mathbf{x}}M^\perp$ seu complemento ortogonal, um espaço $(n - 2)$ -dimensional chamado de espaço normal a M no ponto \mathbf{x} . Se tivermos um campo vetorial $\mathbf{n} \in T_{\mathbf{x}}M^\perp$, normal à superfície M , \mathbf{n} em particular é também ortogonal à $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2}$ em todos os pontos de M , teremos

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{du^i}{ds} \frac{\partial \sigma}{\partial u^i}, \quad (3.29)$$

e

$$\frac{d^2\sigma}{ds^2} = \frac{d^2u^i}{ds^2} \frac{\partial \sigma}{\partial u^i} + \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^i \partial u^j}, \quad (3.30)$$

$$\frac{d^2\sigma}{ds^2} \cdot \mathbf{n} = b_{ij}(\mathbf{n}) \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}, \quad (3.31)$$

onde introduzimos as funções

$$\begin{aligned} b_{ij} &: \sec TM \rightarrow \mathbb{R}, \\ b_{ij}(\mathbf{n}) &:= \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Para um particular ponto $\mathbf{b} = \mathbf{x}(a)$ o campo vetorial $\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_i \partial u_j}$ é obviamente calculado no ponto $u = a$ e assim obtém-se o valor da função $b_{ij}(\mathbf{n})$ em $\mathbf{b} = \mathbf{x}(a)$. Observando-se que

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \|\dot{\sigma}(t)\|^2 = g_{i,j} \dot{u}^i(t) \dot{u}^j(t), \quad (3.33)$$

e que $\frac{du^i}{ds} = \left(\frac{du^i}{dt} \right) \left(\frac{ds}{dt} \right)$, podemos reescrever Eq.(3.30) na forma

$$\frac{d^2\sigma}{ds^2} \cdot \mathbf{n} = \frac{b_{ij}(\mathbf{n}) \dot{u}^i(t) \dot{u}^j(t)}{g_{i,j} \dot{u}^i(t) \dot{u}^j(t)}. \quad (3.34)$$

ou ainda

$$\frac{d^2\sigma}{ds^2} \cdot \mathbf{n} = k(\mathbf{n}, \mathbf{t}), \quad (3.35)$$

onde $k(\mathbf{n}, \mathbf{t})$ em cada ponto de $\mathbf{x} \in M$ uma função *real* bem definida do campo vetorial normal \mathbf{n} em \mathbf{x} e do campo vetorial tangente unitário \mathbf{t} em \mathbf{x} .

Observação 196. *Note que a função $k(\mathbf{n}, \mathbf{t})$ é justamente a curvatura normal de M em \mathbf{x} na direção de \mathbf{t} com respeito à normal \mathbf{n} .*

Fixado \mathbf{n} e variando \mathbf{t} , obtemos as quantidades

$$k_1(\mathbf{n}) = \max_T k(\mathbf{n}, \mathbf{t}), \quad k_2(\mathbf{n}) = \min_T k(\mathbf{n}, \mathbf{t}), \quad (3.36)$$

chamadas de *curvaturas principais* de M no ponto \mathbf{x} , com respeito à normal \mathbf{n} .

Como vimos, a *curvatura média* de M no ponto \mathbf{x} , com respeito à a um campo vetorial normal a M , $\mathbf{n} \in \sec T\overset{\circ}{M}$ é a aplicação

$$\begin{aligned} H &: \sec T\overset{\circ}{M} \rightarrow \mathbb{R} \\ H(\mathbf{n}) &= \frac{k_1(\mathbf{n}) + k_2(\mathbf{n})}{2} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Obtemos as seguir uma formula muito elegante $H(\mathbf{n})$. Notamos que o lado direito de Eq.(3.34) é o quociente de formas quadráticas. Assim, seus pontos de máximo e mínimo, que denotamos por $k_1(\mathbf{n})$, $k_2(\mathbf{n})$ são as raízes da equação⁷

$$\det(b_{ij}(\mathbf{n}) - \lambda g_{ij}) = 0, \quad (3.38)$$

que resulta na equação:

$$\det(g_{ij})\lambda^2 - (g_{22}b_{11}(\mathbf{n}) + g_{11}b_{22}(\mathbf{n}) - 2g_{12}b_{12}(\mathbf{n}))\lambda + \det(b_{ij}(\mathbf{n})) = 0. \quad (3.39)$$

Assim, da definição de $H(\mathbf{n})$ temos imediatamente que

$$H(\mathbf{n}) = \frac{g_{22}b_{11}(\mathbf{n}) + g_{11}b_{22}(\mathbf{n}) - 2g_{12}b_{12}(\mathbf{n})}{2 \det(g_{ij})}, \quad (3.40)$$

note que $H(\mathbf{n})$ é linear em $\mathbf{n} \in T_{\mathbf{x}}M^\perp$.

Note que a *curvatura Gaussiana* da superfície M é dada por ([35] pág.216)

$$\begin{aligned} K &: \sec T\overset{\circ}{M} \rightarrow \mathbb{R}, \\ K(\mathbf{n}) &:= k_1(\mathbf{n}) \cdot k_2(\mathbf{n}) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Levando-se em conta a Eq.(3.39) temos imediatamente que:

$$K(\mathbf{n}) = \det(b_{ij}) = b_{11}(\mathbf{n})b_{22}(\mathbf{n}) - b_{12}(\mathbf{n})^2. \quad (3.42)$$

Se $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-2}\}$ é uma base ortonormal para $T_{\mathbf{x}}M^\perp$, o *vetor de curvatura média* é

$$\mathbf{H}(\mathbf{n}) = \sum_{k=1}^{n-2} [H(\mathbf{e}_k)]\mathbf{e}_k. \quad (3.43)$$

Definição 197. Uma superfície $M \subset \mathbb{R}^{n,o}$ é uma superfície minimal se seu vetor de curvatura média $\mathbf{H}(\mathbf{n})$ for nulo em todos os pontos de M .

Definição 198. Uma superfície M em $\mathbb{R}^{n-1,1}$ (ou em $\mathbb{R}^{1,n-1}$) é dita uma superfície maximal se seu vetor de curvatura média $\mathbf{H}(\mathbf{n})$ for nulo em todos os pontos de M .

⁷Veja detalhes no Apêndice A.

3.1.3 Mais Alguns Detalhes Sobre Superfícies Não-Paramétricas

Nesta seção vamos considerar superfícies $M \subset \mathbf{R}^{p,q}$ na forma não-paramétrica (Eq.(3.16)) e de classe C^2 . Assim:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} = \left(1, 0, \frac{\partial f^3}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial f^n}{\partial u^1} \right), \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} = \left(0, 1, \frac{\partial f^3}{\partial u^2}, \dots, \frac{\partial f^n}{\partial u^2} \right). \quad (3.44)$$

Da Eq.(3.44) segue que

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^j} = \left(0, 0, \frac{\partial^2 f^3}{\partial u^i \partial u^j}, \dots, \frac{\partial^2 f^n}{\partial u^i \partial u^j} \right). \quad (3.45)$$

Portanto para um dado campo vetorial arbitrário $\mathbf{n} = (n^1, \dots, n^n)$, temos

$$g_{11} = \dot{g}_{11} + \sum_{k=3}^n \dot{g}_{kk} \left(\frac{\partial f_k}{\partial u_1} \right)^2; \quad g_{12} = \sum_{k=3}^n \dot{g}_{kk} \frac{\partial f^k}{\partial u^1} \frac{\partial f^k}{\partial u^2}; \quad g_{22} = \dot{g}_{22} + \sum_{k=3}^n \dot{g}_{kk} \left(\frac{\partial f^k}{\partial u^2} \right)^2. \quad (3.46)$$

$$b_{ij}(\mathbf{n}) = \dot{g}_{kl} \frac{\partial^2 f^k}{\partial u^i \partial u^j} n^l. \quad (3.47)$$

Se igualarmos a Eq.(3.40) a zero teremos uma superfície minimal (ou maximal, dependendo da assinatura da métrica do espaço onde a superfície em questão é uma subvariedade) e esta condição tomará a forma:

$$\sum_{k=3}^n \left[\left(\dot{g}_{22} + \dot{g}_{mp} \frac{\partial f^m}{\partial u^2} \frac{\partial f^p}{\partial u^2} \right) \frac{\partial^2 f^k}{(\partial u^1)^2} - 2 \left(\dot{g}_{mp} \frac{\partial f^m}{\partial u^1} \frac{\partial f^p}{\partial u^2} \right) \frac{\partial^2 f^k}{\partial u^1 \partial u^2} + \left(g_{11} + \dot{g}_{mp} \frac{\partial f^m}{\partial u^1} \frac{\partial f^p}{\partial u^1} \right) \frac{\partial^2 f^k}{(\partial u^2)^2} \right] \dot{g}_{kl} n^l = 0. \quad (3.48)$$

Se introduzirmos a notação vetorial $\mathbf{f}(x^1, x^2) = (f^3(x^1, x^2), \dots, f^n(x^1, x^2))$, a Eq.(3.48) pode ser escrita como:

$$\left(\dot{g}_{22} + \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^2} \right\|^2 \right) \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{(\partial x^1)^2} - 2 \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^1 \partial x^2} + \left(\dot{g}_{11} + \left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^1} \right|^2 \right) \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{(\partial x^2)^2} = 0. \quad (3.49)$$

Esta é a equação para superfícies minimais (ou maximais) em forma não-paramétrica.

3.1.4 Parâmetros Isotérmicos

As propriedades intrínsecas de uma superfície minimal $M \subset R^{n,0}$ ou de uma superfície maximal $M \subset \mathbf{R}^{n-1,1}$ em $U \subset M$ são *independentes* da escolha dos parâmetros $(u^1, u^2) \in D \subset \mathbb{R}^2$ que usamos para parametrizar $U \subset M$. Em muitas aplicações é conveniente escolhermos parâmetros tais, que as propriedades geométricas da superfície M , sejam refletidas no plano dos parâmetros. Por exemplo, se a aplicação \mathbf{x} do plano paramétrico sobre a $U \subset M$ for conforme, então os ângulos entre curvas na superfície são iguais aos

ângulos entre as curvas correspondentes no plano paramétrico quando o plano paramétrico está equipado com uma métrica Euclidiana. Analiticamente, esta condição é expressa através da *primeira forma fundamental* por

$$g_{11} = g_{22}, \quad g_{12} = 0, \quad (3.50)$$

com

$$g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}; \quad \lambda = \lambda(u) > 0. \quad (3.51)$$

Definição 199. *Parâmetros* $(u^1, u^2) \in D \subset \mathbb{R}^2$ *que satisfaçam as condições* Eq.(3.50) *e* Eq.(3.51) *são ditos* parâmetros isotérmicos.

Muitas das quantidades básicas consideradas na teoria das superfícies simplificam-se consideravelmente quando encontram-se referidas a parâmetros isotérmicos. Por exemplo, da Eq.(3.51) temos

$$\det g_{ij} = \lambda^4, \quad (3.52)$$

e a Eq.(3.40) para curvatura média se torna

$$H(\mathbf{n}) = \frac{b_{11}(\mathbf{n}) + b_{22}(\mathbf{n})}{2\lambda^2}. \quad (3.53)$$

Temos o seguinte resultado para o Laplaciano usual do vetor coordenada para uma superfície arbitrária.

Lema 200. *Seja uma superfície regular* $M \subset \mathring{M}$ *definida por* $\mathbf{x}(u)$ *diferenciável, onde* u^1 *e* u^2 *são parâmetros isotérmicos. Então*

$$\nabla^2 \mathbf{x} = 2\lambda^2 \mathbf{H} \quad (3.54)$$

onde \mathbf{H} é um campo vetorial de curvatura média da superfície M , definido por $H(\mathbf{n}) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}$ para todo campo vetorial \mathbf{n} ortogonal a M

Prova: A Eq.(3.50) para parâmetros isotérmicos pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2}; \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} = 0. \quad (3.55)$$

Derivando a primeira destas equações com respeito a u^1 , e a segunda com respeito a u^2 obtemos

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{(\partial u^1)^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^1 \partial u^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{(\partial u^2)^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} \quad (3.56)$$

e portanto

$$\nabla^2 \mathbf{x} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{(\partial u^1)^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{(\partial u^2)^2} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} = 0. \quad (3.57)$$

Também, diferenciando-se a primeira equação com respeito a u^2 e a segunda com respeito a u^1 obtemos

$$\nabla^2 \mathbf{x} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} = 0, \quad (3.58)$$

Se ademais \mathbf{n} é um campo vetorial normal arbitrário a M , temos

$$\nabla^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{(\partial u^1)^2} \cdot \mathbf{n} + \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{(\partial u^2)^2} \cdot \mathbf{n} = b_{11}(\mathbf{n}) + b_{22}(\mathbf{n}) = 2\lambda^2 H(\mathbf{n}), \quad (3.59)$$

o que nos leva a inferir que $\nabla^2 \mathbf{x}$ é um campo vetorial ortogonal à M (Eq.(3.53)) e ademais, $\frac{\nabla^2 \mathbf{x}}{2\lambda^2}$ é um campo vetorial normal à M que satisfaz a definição do campo vetorial de curvatura média e isto prova a Eq(3.54). ■

Corolário 201. Tome $\mathbf{x}(u)$ diferenciável definindo uma superfície regular M e tal que u^1, u^2 sejam parâmetros isotérmicos. As funções coordenadas $x^k(u^1, u^2)$ são harmônicas se e somente se $M \subset \mathbf{R}^{n,0}$ é uma superfície minimal ou $M \subset \mathbf{R}^{n-1,1}$ é maximal .

Dada uma superfície $M \subset \mathbf{R}^{n,0}$ (ou $M \subset \mathbf{R}^{n-1,1}$ de tipo espaço) parametrizada por $\mathbf{x}(u)$, consideremos as funções complexas

$$\varphi^k(z) := \frac{\partial x^k(u^1, u^2)}{\partial u^1} - i \frac{\partial x^k(u^1, u^2)}{\partial u^2}; \quad z = u^1 + iu^2; \quad i = \sqrt{-1}. \quad (3.60)$$

Defina o campo vetorial complexo $\bar{\varphi} : M \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{p,q}$ (com $p = n, q = 0$ ou $p = n - 1, q = 1$, conforme o caso) e seja $\varphi(u^1, u^2) = \bar{\varphi} \circ \mathbf{x}(u)$.

Defina também

$$\varphi(z) = (\varphi^1(z), \varphi^2(z), \dots, \varphi^n(z)), \quad (3.61)$$

tal que

$$\varphi(u^1, u^2) = \varphi(z). \quad (3.62)$$

Defina a norma de $\varphi(z)$ por

$$\|\varphi(z)\|^2 = \dot{g}_{kl} \varphi^k(z) \varphi^l(z). \quad (3.63)$$

Então

$$\begin{aligned} \|\varphi(z)\|^2 &= \dot{g}_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial u^1} \frac{\partial x^l}{\partial u^1} - \dot{g}_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial u^2} \frac{\partial x^l}{\partial u^2} - 2i \dot{g}_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial u^1} \frac{\partial x^l}{\partial u^2} \\ &= \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \right\|^2 - \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} \right\|^2 - 2i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} \\ &= g_{11} - g_{22} - 2ig_{12}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Denote ainda por $|\varphi^k(z)|_{\dot{g}}$ o \dot{g} -modulo⁸ de $\varphi^k(z)$, tal que:

$$|\varphi^k(z)|_{\dot{g}}^2 := \dot{g}_{kk} \left(\frac{\partial x^k}{\partial u^1} \right)^2 + \dot{g}_{kk} \left(\frac{\partial x^k}{\partial u^2} \right)^2 \quad (3.65)$$

⁸Note que no caso em que \dot{g} é uma métrica euclidiana a \dot{g} -norma se reduz ao modulo da função complexa $\varphi^k(z)$

onde na Eq.(3.65) não se soma na variável k . Temos então

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n |\varphi^k(z)|_{\dot{g}}^2 &= \sum_{k=1}^n \dot{g}_{kk} \left(\frac{\partial x^k}{\partial u^1} \right)^2 + \sum_{k=1}^n \dot{g}_{kk} \left(\frac{\partial x^k}{\partial u^2} \right)^2 \\ &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} \\ &= g_{11} + g_{22}\end{aligned}\tag{3.66}$$

Da Eq.(3.64) e da Eq. (3.65) obtemos as seguintes propriedades das funções $\varphi^k(z)$.

a) $\varphi^k(z)$ é analítica em $z \iff x^k$ é harmônica em u^1, u^2 ;

A prova de **a)** segue imediatamente da teoria das funções analíticas.

b) Se u^1 e u^2 são parâmetros isotérmicos $\Leftrightarrow \|\varphi(z)\| = 0$.

A prova de **b)** segue imediatamente da Eq.(3.50).

c) Sejam u_1, u_2 são parâmetros isotérmicos. Então M é regular se e somente se

$$\sum_{k=1}^n |\varphi^k(z)|_{\dot{g}}^2 \neq 0.\tag{3.67}$$

A prova de **c)** é imediata tendo-se em conta a Eq.(3.50).

Lema 202. Tome $\mathbf{x}(u)$ definindo uma superfície minimal (ou maximal) com u^1 e u^2 parâmetros isotérmicos. Então as funções $\varphi^k(z)$ definidas por Eq.(3.60) são analíticas, e satisfazem a Eq.(3.64) e a Eq.(3.65). Reciprocamente, tome $\varphi^1(z), \varphi^2(z), \dots, \varphi^n(z)$ como sendo funções analíticas de z e que satisfazem as Eq.(3.64) e a Eq.(3.65) num domínio D simplesmente conexo no plano complexo \mathbb{C} identificado com o plano paramétrico (u^1, u^2) . Então existe uma superfície minimal (ou maximal) regular $\mathbf{x}(u)$ definida em D , tal que as Eq.(3.60) são válidas.

Prova: A primeira afirmação segue imediatamente das propriedades **a)**, **b)** e **c)**, levando-se em conta o corolário anterior. Para a recíproca da proposição, se definirmos as funções $x^k : (u^1, u^2) \mapsto \mathbb{C}$ por

$$x^k(u^1, u^2) = \operatorname{Re} \int_0^{u^1 + iu^2} \varphi^k(z) dz,\tag{3.68}$$

então as x^k são funções harmônicas que satisfazem a Eq.(3.60), e novamente aplicando **a)**, **b)** e **c)** na forma converso, o resultado segue do corolário anterior.■

Observamos que o mesmo resultado acima enunciado continua válido se definirmos

$$x^k(u^1, u^2) = \operatorname{Im} \int_0^{u^1 + iu^2} \varphi^k(z) dz.\tag{3.69}$$

3.1.5 Campos Espinoriais e Superfícies Minimais e Maximais

Quando $\mathbf{P}_{\text{Spin}_{p,q}^e}(\mathring{M})$ é trivial, os fibrados $\mathbf{P}_{\text{Spin}_{p,q}^e}(\mathring{M}) \times \mathbb{C}^n$, $\mathbf{P}_{\text{Spin}_{p,q}^e}(\mathring{M}) \times I_{\Xi_u}$ e $\mathbf{P}_{\text{Spin}_{p,q}^e}(\mathring{M}) \times \mathbb{R}_{p,q}^0$ são triviais. Em particular se $\mathring{M} = \mathbb{R}^n$, então $\mathbf{P}_{\text{Spin}_{p,q}^e}(\mathring{M})$ é trivial, pois \mathbb{R}^n é contrátil ([42], pág. 53). Nesse caso, fixada a base espinorial Ξ_u o representante

$$\Psi \in \text{sec } \mathbf{P}_{\text{Spin}_{p,q}^e}(\mathring{M}) \times \mathbb{C}^n, \quad (3.70)$$

pode ser visto como uma aplicação (Eq.(2.19))

$$\Psi : \mathring{M} = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^n. \quad (3.71)$$

Esse é o caso importante para o estudo que faremos de algumas superfícies mínimas em \mathbf{R}^3 e $\mathbf{R}^{1,2}$.

Observação 203. *Note que nem toda superfície mínima ou máxima admite uma estrutura espinorial. Basta considerarmos uma superfície mínima não orientável [29], de forma que não admita uma estrutura spin. Construiremos um campo espinorial na variedade contrátil \mathring{M} e restringiremos nossa atenção nesse campo restrito aos pontos de uma subvariedade $M \subset \mathring{M}$. Mas tenha em mente que este campo espinorial não é intrínseco a M .*

Campos Vetoriais Isotrópicos Associados à Campos Espinoriais Euclidianos

Fixada a base espinorial Ξ_u , consideremos o representante de um campo espinorial de Pauli

$$\bar{\varphi} \in \text{sec } \mathbf{P}_{\text{Spin}_{3,0}^e} \mathbf{R}^{3,0} \times \mathbb{C}^2. \quad (3.72)$$

Seguindo a notação introduzida na Eq.(2.19), teremos $\bar{\varphi} : \mathbb{R}^{3,0} \rightarrow \mathbb{C}^2$. Tome a parametrização de $U \subset M$ dada por $\mathbf{x} : D \ni (u^1, u^2) \mapsto \mathbf{x}(u^1, u^2) = \mathbf{x}$ e seja

$$\varphi = \bar{\varphi} \circ \mathbf{x} : D \rightarrow \mathbb{C}^2. \quad (3.73)$$

O campo espinorial $\bar{\varphi}$ determina um campo isotrópico isotrópico) $\bar{\phi} : M \rightarrow \mathbb{C}^3$ tal que seu representante na parametrização escolhida é $\phi = \bar{\phi} \circ \mathbf{x}$ e tem componentes

$$\phi(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} \phi^1(u^1, u^2) \\ \phi^2(u^1, u^2) \\ \phi^3(u^1, u^2) \end{pmatrix}, \quad (3.74)$$

onde os ϕ^i estão relacionadas com componentes de φ por uma fórmula análoga à Eq.(1.90) (ou ainda por outras eventualmente mais convenientes, como por exemplo a chamada *representação de Weirstrass* onde tomamos o representante φ do campo espinorial $\bar{\varphi} : M \rightarrow \mathbb{C}^2$ na parametrização escolhida como sendo

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

onde sendo α, β funções complexas (e $\alpha \neq 0$) temos:

$$\varphi_0 = \alpha^2, \quad \varphi_1 = \frac{\beta}{\alpha} \quad (3.76)$$

O campo isotrópico de direções $\bar{\phi}$ associado a este campo espinorial tem representante $\phi = \bar{\phi} \circ \mathbf{x}$, com

$$\phi^1 = \varphi_0(1 - (\varphi_1)^2), \quad \phi^2 = \pm i\varphi_0(1 + (\varphi_1)^2), \quad \phi^3 = \mp 2\varphi_0\varphi_1. \quad (3.77)$$

Conclusão 204. *Uma vez que dispomos de um campo vetorial isotrópico $\bar{\phi}$ construído como acima descrito, podemos agora associar por equações análogas as Eq.(3.68) e Eq.(3.69), um campo vetorial posição $\mathbf{x}(u_1, u_2)$. Portanto se considerarmos uma superfície $M \subset \mathbf{R}^{3,0}$ parametrizada por coordenadas isotérmicas, e construirmos um campo vetorial complexo $\bar{\phi}$ (sobre M) de norma nula, com os ϕ^k funções analíticas de⁹ $z = u^1 + iu^2$ temos que $\mathbf{x}(u_1, u_2)$ representará uma superfície minimal $M \subset \mathbf{R}^{3,0}$.*

Campos Vetoriais Isotrópicos Associados à Campos Espinoriais Lorentzianos e de Majorana

Considere agora o espaço (vetorial) real $\mathbb{R}^{1,2}$. Este espaço apresenta naturalmente vetores isotrópicos $\kappa = (\kappa^1, \kappa^2, \kappa^3) \in \mathbb{R}^{2,1}$ com os $\kappa^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$. representando uma “tripla Pitagórica” de números reais, i.e.,

$$\kappa \cdot \kappa = \hat{g}_{ij}\kappa^i\kappa^j = (\kappa^1)^2 + (\kappa^2)^2 - (\kappa^3)^2 = 0. \quad (3.78)$$

Podemos portanto expressar, $\kappa^1, \kappa^2, \kappa^3$ em termos de somente dois números complexos independentes φ_0 e φ_1 como segue:

$$\kappa^1 = \varphi_0^2 - \varphi_1^2; \quad \kappa^2 = 2\varphi_0\varphi_1; \quad \kappa^3 = (\varphi_0^2 + \varphi_1^2). \quad (3.79)$$

Os números complexos φ_0, φ_1 são ditos as componentes de um spinor de Majorana bidimensional $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$ (que denominaremos também como sendo puro [6]). Da Eq.(3.79) vemos imediatamente que os spinores $\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -\varphi_0 \\ -\varphi_1 \end{pmatrix}$ determinam o mesmo vetor complexo $\phi \in \mathbb{R}^{2,1}$. O conjunto $\mathbb{C}^2 = \{\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}, \varphi_0, \varphi_1 \in \mathbb{C}\}$ é chamado de espaço espinorial de Majorana. Estes objetos formam base da representação do grupo $SU(1, 1)$ que é o recobrimento do grupo (especial) $SO(2, 1)$ de pseudo-rotações em $\mathbb{R}^{2,1}$ [31, 47].

Fixada a base espinorial Ξ_u , consideremos o representante de um campo espinorial de Lorentz

$$\bar{\kappa} \in \sec \mathbf{P}_{\text{Spin}_{1,2}^e} \mathbf{R}^{1,2} \times \mathbb{C}^2. \quad (3.80)$$

Seguindo a notação introduzida na Eq.(2.19), teremos $\bar{\kappa} : \mathbb{R}^{3,0} \rightarrow \mathbb{C}^2$. Considere a parametrização de $U \subset M$ dada por $\mathbf{x} : D \ni (u^1, u^2) \mapsto \mathbf{x}(u^1, u^2) = \mathbf{x}$ e seja

$$\kappa = \bar{\kappa} \circ \mathbf{x} : D \rightarrow \mathbb{C}^2. \quad (3.81)$$

⁹Recorde-se da Eq.(3.61).

O campo espinorial $\bar{\kappa}$ determina um campo isotrópico $\bar{\iota} : M \rightarrow \mathbb{C}^3$ tal que seu *representante* na parametrização escolhida ($\iota = \bar{\iota} \circ \mathbf{x}$) tem componentes

$$\iota(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} \iota^1(u^1, u^2) \\ \iota^2(u^1, u^2) \\ \iota^3(u^1, u^2) \end{pmatrix}, \quad (3.82)$$

onde os ι^i estão relacionadas com componentes de φ por uma fórmula análoga à Eq.(1.90) (ou ainda por outras eventualmente mais convenientes, como por exemplo uma análoga a *representação de Weirstrass* que discutimos acima.

3.1.6 Superfícies Mínimas e Máximas Associadas a Campos Vetoriais Isotrópicos

Nesta seção utilizaremos a notação $\mathbb{C} \ni z = u + iv$, onde $u, v \in \mathbb{R}$.

Hiperbólicos Euclidianos

Levando em consideração a discussão de como gerar algumas superfícies mínimas em $\mathbf{R}^{3,0}$ ou máximas em $\mathbf{R}^{2,1}$ ou $\mathbf{R}^{1,2}$, considere agora o seguinte campo espinorial Euclidiano $\bar{\varphi}$ tal que seu representante na parametrização dada por (u, v) possui componentes analíticas dadas por

$$\varphi(z) = (A + iB) \begin{pmatrix} \varphi_0(z) \\ \varphi_1(z) \end{pmatrix}, \quad A, B \in \mathbb{R}, \quad A + iB \neq 0, \quad (3.83)$$

com

$$\varphi_0^2(z) - \varphi_1^2(z) = -\cosh z, \quad i(\varphi_0^2(z) + \varphi_1^2(z)) = i \sinh z. \quad (3.84)$$

Tal campo espinorial Euclidiano pode ser usado como já sabemos para gerar um campo vetorial complexo *isotrópico*, e.g., $\phi(z) = (\phi^1(z), \phi^2(z), \phi^3(z))$ com

$$\frac{\phi^1}{A + iB} = \varphi_0^2 - \varphi_1^2 = -\sinh z; \quad \frac{\phi^2}{A + iB} = i(\varphi_0^2 + \varphi_1^2) = i \cosh z; \quad \frac{\phi^3}{A + iB} = 1 \quad (3.85)$$

Então temos que

$$\int_0^{u+iv} \phi^k(\zeta) d\zeta = (-(A + iB) \cosh z, i(A + iB) \sinh z, (A + iB)z) + const, \quad (3.86)$$

de onde obtemos usando-se a Eq.(3.68) e a Eq.(3.69) dois campos vetoriais que descrevem superfícies mínimas $M, M' \subset \mathbf{R}^{3,0}$, (que, com escolha conveniente da constante de integração) são respectivamente ($\chi = B/A$):

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{HE}(u, v) &= \operatorname{Re} \int_0^{u+iv} \phi_{HE}^k(\zeta) d\zeta \\
&= -A(\cos v \cosh u - \chi \sin v \sinh u, \sin v \cosh u + \chi \cos v \sinh u, \chi v - u),
\end{aligned} \tag{3.87a}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'_{HE}(u, v) &= \operatorname{Im} \int_0^{u+iv} \phi_{HE}^k(\zeta) d\zeta \\
&= A(\sin v \sinh u - \chi \cos v \cosh u, \cos v \sinh u - \chi \sin v \cosh u, v + \chi u).
\end{aligned} \tag{3.87b}$$

Hiperbólicos de Lorentz

Agora vamos analisar o caso de uma superfície maximal $M \subset \mathbf{R}^{1,2}$ (métrica de *Lorentz*) gerado por intermédio de um campo espinorial conveniente (veja o caso anterior) com o qual se constrói um campo vetorial (complexo) isotrópico ϕ_{hL} tal que

$$\int_0^{u+iv} \phi_{HL}^k(\zeta) d\zeta = (A + iB, -i(A + iB) \sinh(z), -(A + iB) \cosh(z)) + \text{const}, \tag{3.88}$$

que fornecem pelas Eq(3.68) e Eq.(3.69) dois campos vetoriais posição que representam duas superfícies maximais $M, M' \subset \mathbf{R}^{1,2}$, que denotaremos (com escolha conveniente da constante de integração) respectivamente

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{HL}(u, v) &= \operatorname{Re} \int_0^{u+iv} \phi_{HL}^k(\zeta) d\zeta \\
&= (A \sinh u \sin v + B \cosh u \cos v, -A \sinh u \cos v + B \cosh u \sin v, Au - Bv), \\
\mathbf{x}'_{HL}(u, v) &= \operatorname{Im} \int_0^{u+iv} \phi_{HL}^k(\zeta) d\zeta \\
&= (-A \cosh u \cos v + B \sinh u \sin v, -B \sinh u \cos v - A \cosh u \sin v, Av + Bu).
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Hiperbólicos de Majorana

Agora vamos analisar o caso de uma superfície maximal $M \subset \mathbf{R}^{2,1}$ (métrica de *Majorana*) gerado por intermédio de um campo espinorial conveniente (veja o caso anterior) com o qual se constrói um campo vetorial (complexo) isotrópico ϕ_{HM} tal que

$$\int_0^{u+iv} \phi_{HM}^k(\zeta) d\zeta = (-(A + iB) \sinh z, i(A + iB) \cosh z, i(A + iB)) + \text{const}, \tag{3.90}$$

que fornecem pelas Eq(3.68) e Eq.(3.69) dois campos vetoriais posição que representam duas superfícies maximais $M, M' \subset \mathbf{R}^{2,1}$, que denotaremos (com escolha conveniente da constante de integração) respectivamente

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{HM}(u, v) &= \operatorname{Re} \int_0^{u+iv} \phi_{HM}^k(\zeta) d\zeta \\
&= (-A \cosh u \cos v + B \sinh u \sin v, -B \sinh u \cos v - A \cosh u \sin v, -Av - Bu), \\
\mathbf{x}'_{HM}(u, v) &= \operatorname{Im} \int_0^{u+iv} \phi_{HM}^k(\zeta) d\zeta \\
&= (-B \cosh u \cos v - A \sinh u \sin v, A \sinh u \cos v - B \cosh u \sin v, Au - Bv).
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Elípticos Euclidianos

Vamos agora, definir um campo vetorial complexo isotrópico Euclidiano ϕ_{EE} (gerado por um campo espinorial Euclidiano apropriado) tal que

$$\int_0^{u+iv} \phi_{EE}^k(\zeta) d\zeta = ((A + iB) \sin z, (A + iB) \cos z, i(A + iB)) + const, \quad (3.92)$$

do qual pelas Eq.(3.68) e Eq.(3.69) obtemos dois campos vetoriais posição que representam duas superfícies *minimais* $M, M' \subset \mathbf{R}^{3,0}$. Com escolha conveniente da constante de integração temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{EE}(u, v) &= \operatorname{Re} \int_0^{u+iv} \phi_{EE}^k(\zeta) d\zeta \\ &= (-A \cos u \cosh v - B \sin u \sinh v, A \sin u \cosh v - B \cos u \sinh v, -Av - Bu), \\ \mathbf{x}'_{EE}(u, v) &= \operatorname{Im} \int_0^{u+iv} \phi_{EE}^k(\zeta) d\zeta \\ &= (-B \cos u \cosh v + A \sin u \sinh v, B \sin u \cosh v + A \cos u \sinh v, Au - Bv). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Elípticos de Lorentz

Analisemos agora caso de uma superfície maximal $M \subset \mathbf{R}^{1,2}$ (métrica de *Lorentz*) gerado por intermédio de um campo espinorial conveniente (veja o caso anterior) com o qual se constrói um campo vetorial (complexo) isotrópico ϕ_{EL} tal que

$$\int_0^{u+iv} \phi_{EL}^k(\zeta) d\zeta = (A + iB, (A + iB) \sin z, (A + iB) \cos z) + const, \quad (3.94)$$

que nos fornece dois campos vetoriais vetores posição (Eq.(3.68) e Eq.(3.69): representando superfícies maximais $M, M' \in \mathbf{R}^{1,2}$ tais que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{EL}(u, v) &= \operatorname{Re} \int_0^{u+iv} \phi_{EL}^k(\zeta) d\zeta \\ &= (Au - Bv, -A \cos u \cosh v - B \sin u \sinh v, A \sin u \cosh v - B \cos u \sinh v), \\ \mathbf{x}'_{EL}(u, v) &= \operatorname{Im} \int_0^{u+iv} \phi_{EL}^k(\zeta) d\zeta \\ &= (Av + Bu, -B \cos u \cosh v + A \sin u \sinh v, B \sin u \cosh v + A \cos u \sinh v). \end{aligned} \quad (3.95)$$

Elípticos de Majorana

Analisemos agora caso de uma superfície maximal $M \subset \mathbf{R}^{2,1}$ (métrica de *Majorana*) gerado, como nos exemplos acima por intermédio de um campo espinorial conveniente com o qual se constrói um campo vetorial (complexo) isotrópico ϕ_{EM} tal que

$$\int_0^{u+iv} \phi_{EM}^k(\zeta) d\zeta = (-(A + iB) \sin z, -(A + iB) \cos z, A + iB) + const, \quad (3.96)$$

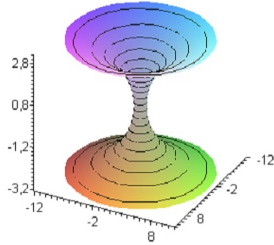
que nos fornece (Eq.(3.68) e Eq.(3.69)) dois campos vetoriais posição representando superfícies maximais $M, M' \in \mathbf{R}^{2,1}$ tais que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{EM}(u, v) &= \operatorname{Re} \int_0^{u+iv} \phi_{EM}^k(\zeta) d\zeta \\
 &= (A \cos u \cosh v + B \sin u \sinh v, -A \sin u \cosh v + B \cos u \sinh v, Au - Bv), \\
 \mathbf{x}'_{EM}(u, v) &= \operatorname{Im} \int_0^{u+iv} \phi_{EM}^k(\zeta) d\zeta \\
 &= (B \cos u \cosh v - A \sin u \sinh v, -A \cos u \sinh v - B \sin u \cosh v, Av + Bu).
 \end{aligned} \tag{3.97}$$

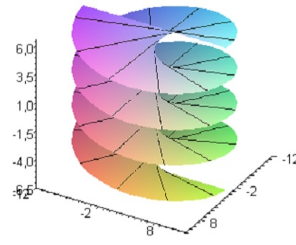
3.2 Imagens das Superfícies Mínimas e Máximas Geradas pelo Maple

Nesta seção vamos plotar as superfícies acima definidas (geradas pelo Maple) para alguns valores das constantes A e B , Para identificarmos se alguma tem uma forma geométrica que possa ser associada à um **FS**.

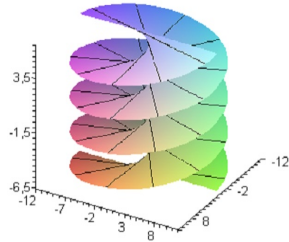
Euclidiano
R Real, fatores $A = 1, B = 0$



Euclidiano
R Real, fatores $A = 0, B = 1$



Euclidiano
R Imag, fatores $A = 1, B = 0$



Euclidiano
R Imag, fatores $A = 0, B = 1$

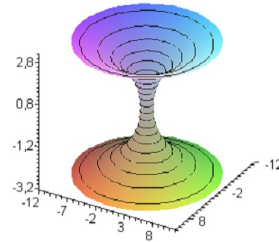
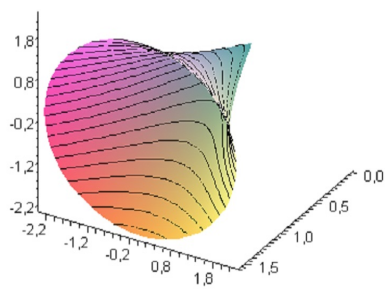
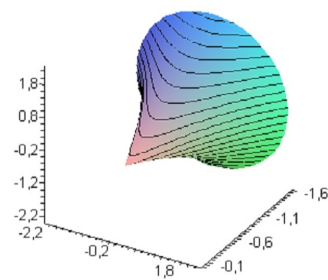


Figura 3.1: Superfícies geradas através de campos vetoriais posição produzidos a partir de campos vetoriais isotrópicos hiperbólicos no caso Euclidiano.

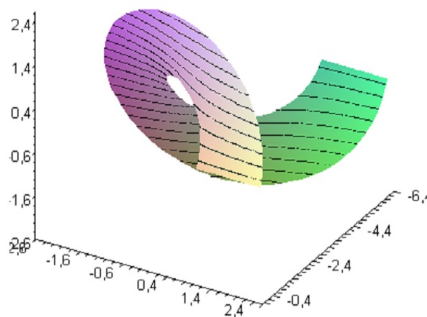
Catenóide de Lorentz
R Real, fatores $A=1, B=0$



Catenóide de Lorentz
R Real, fatores $A=-1, B=0$



Hélice de Lorentz
R real, "Canhota" $A=0, B=1$



Hélice de Lorentz
R Real, "Destra" $A=0, B=-1$

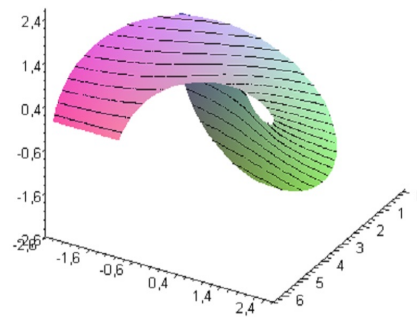
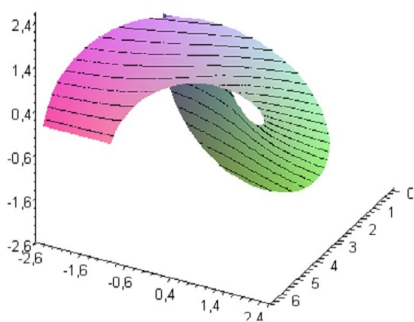
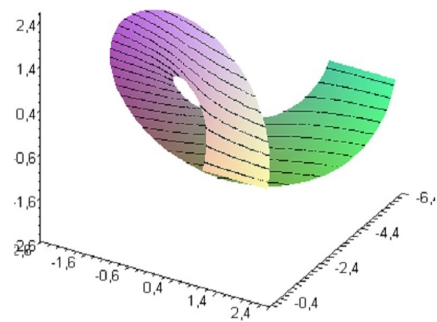


Figura 3.2: Superfícies geradas através de campos vetoriais posição produzidos a partir da parte real de campos vetoriais isotrópicos hiperbólicos no caso da métrica de Lorentz.

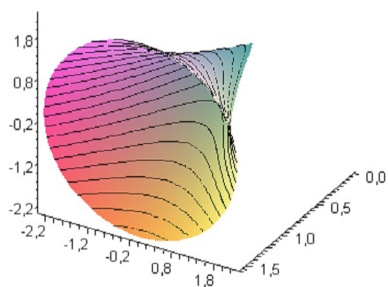
Hélice de Lorentz
R Imag, "Destra" A=1, B=0



Hélice de Lorentz
R Imag, "Canhota" A=-1, B=0



Catenóide de Lorentz
R Imag, fatores A=0, B=1



Catenóide de Lorentz
R Imag, fatores A=0, B=-1

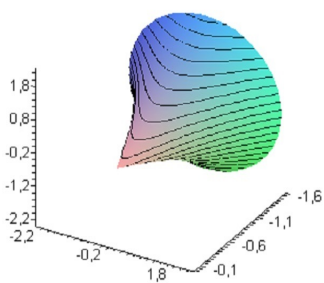
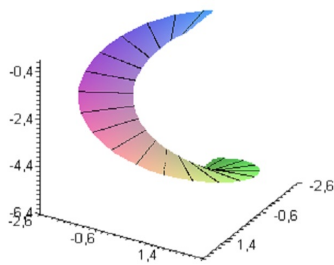
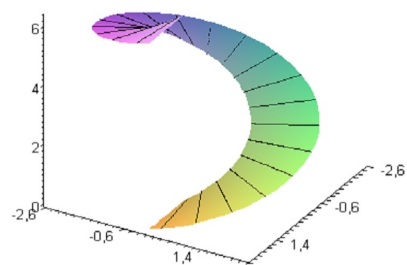


Figura 3.3: Superfícies geradas através de campos vetoriais de posição produzidos a partir da parte imaginária de campos vetoriais isotrópicos hiperbólicos no caso da métrica de Lorentz.

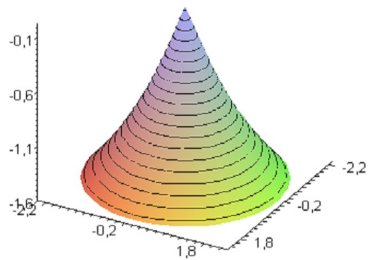
Helice de Majorana
R Real, "Canhota" A=1, B=0



Helice de Majorana
R Real, "Destra" A=-1, B=0



Catenóide de Majorana
R Real, fatores A=0, B=1



Catenóide de Majorana
R Real, fatores A=0, B=-1

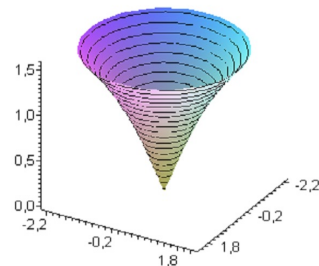
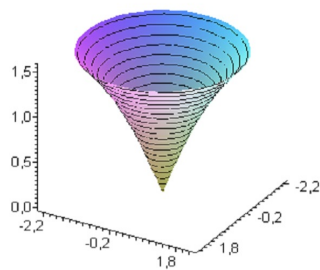
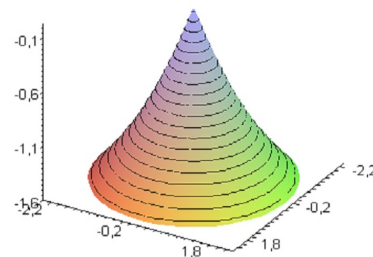


Figura 3.4: Superfícies geradas através de campos vetoriais posição produzidos a partir da parte real de campos vetoriais isotrópicos hiperbólicos no caso da métrica de Majorana.

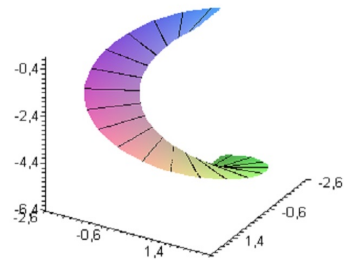
Catenóide de Majorana
R Imag, fatores A =1, B =0



Catenóide de Majorana
R Imag, fatores A -1, B =0



Helice de Majorana
R Imag, "Canhota" A =0, B =1



Helice de Majorana
R Imag, "Canhota" A =0, B =-1

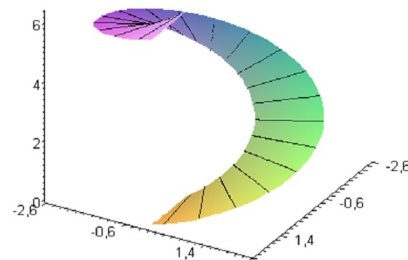
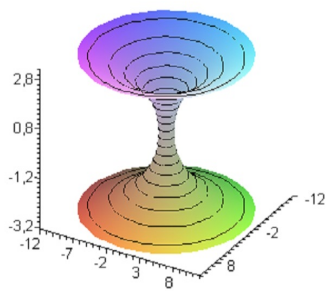
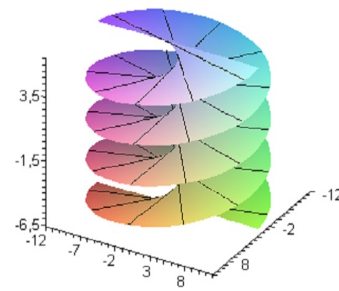


Figura 3.5: Superfícies geradas através de campos vetoriais posição produzidos a partir da parte imaginária de campos vetoriais isotrópicos hiperbólicos no caso da métrica de Majorana.

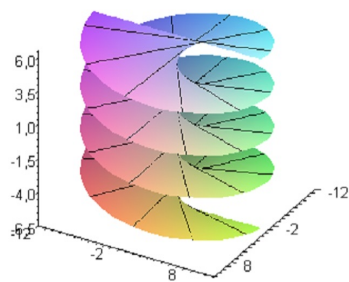
Euclidiano
R Real, fatores A = 1, B = 0



Euclidiano
R Real, fatores A = 0, B = 1



Euclidiano
R Imag, fatores A = 1, B = 0



Euclidiano
R Imag, fatores A = 0, B = 1

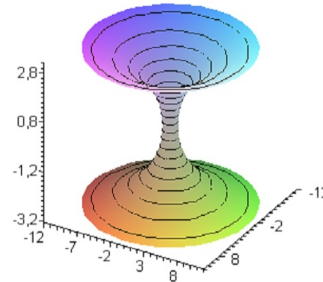
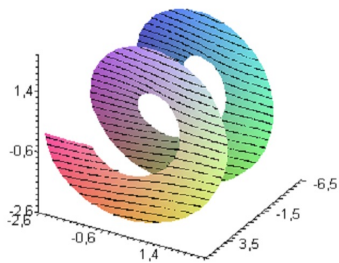
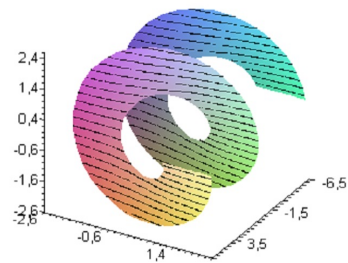


Figura 3.6: Superfícies geradas através de campos vetoriais posição produzidos a partir de campos vetoriais isotrópicos elípticos no caso Euclidiano.

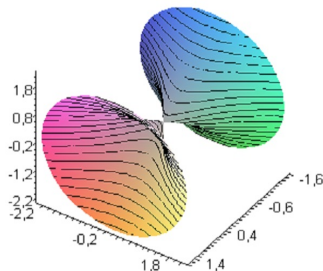
Helice de Lorentz
R Real, "Canhota" A =1, B =0



Helice de Lorentz
R Real, "Destra" A =-1, B =0



Catenóide de Lorentz
R Real, fatores A =0, B =1



Catenóide de Lorentz
R Real, fatores A =0, B =-1

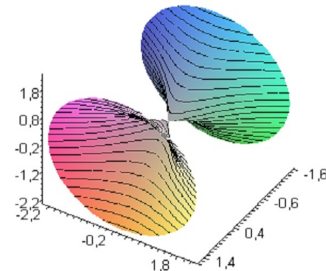
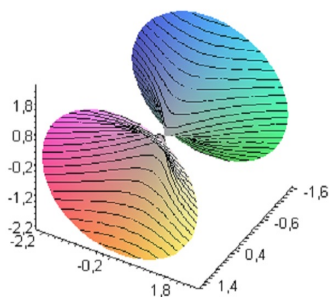
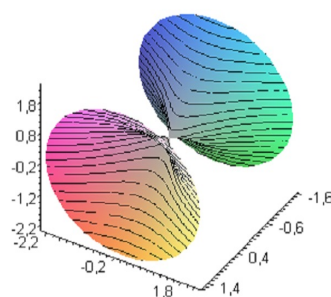


Figura 3.7: Superfícies geradas através de campos vetoriais posição produzidos a partir da parte real de campos vetoriais isotrópicos elípticos no caso da métrica de Lorentz.

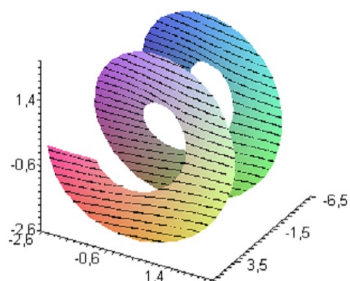
Catenóide de Lorentz
R Imag, fatores A =1, B =0



Catenóide de Lorentz
R Imag, fatores A =-1, B =0



Helice de Lorentz
R Imag, "Canhota" A =0, B =1



Helice de Lorentz
R Imag, "Destra" A =0, B =-1

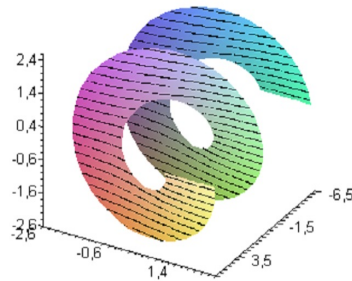
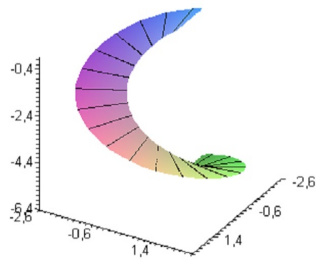
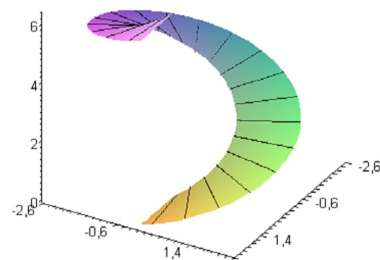


Figura 3.8: Superfícies geradas através de campos vetoriais de posição produzidos a partir da parte imaginária de campos vetoriais isotrópicos hiperbólicos no caso da métrica de Lorentz.

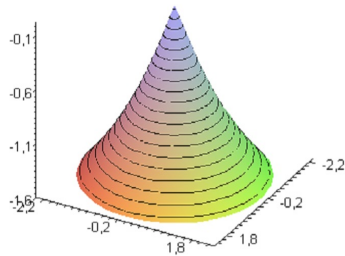
Helice de Majorana
R Real, "Canhota" $A=1, B=0$



Helice de Majorana
R Real, "Destra" $A=-1, B=0$



Catenóide de Majorana
R Real, fatores $A=0, B=1$



Catenóide de Majorana
R Real, fatores $A=0, B=-1$

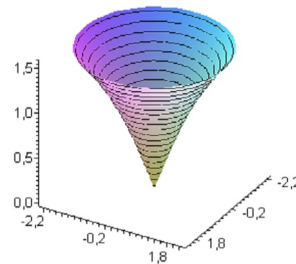
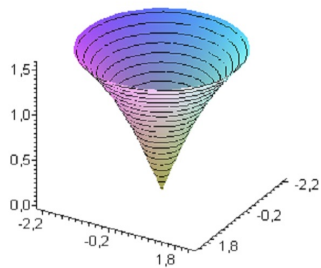
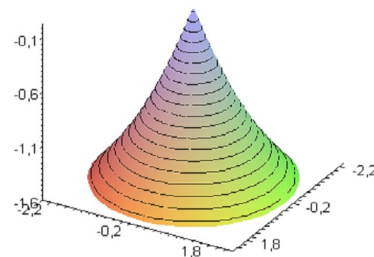


Figura 3.9: Superfícies geradas através de campos vetoriais posição produzidos a partir da parte real de campos vetoriais isotrópicos elípticos no caso da métrica de Majorana.

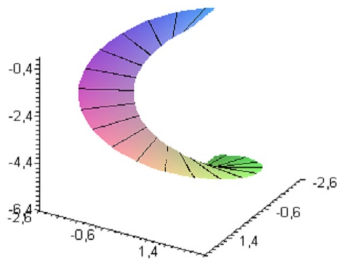
Catenóide de Majorana
R Imag, fatores A =1, B =0



Catenóide de Majorana
R Imag, fatores A -1, B =0



Helice de Majorana
R Imag, "Canhota" A =0, B =1



Helice de Majorana
R Imag, "Canhota" A =0, B =-1

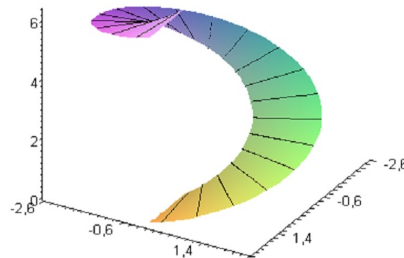
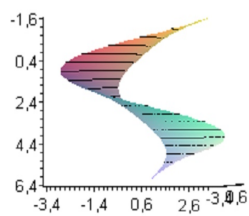


Figura 3.10: Superfícies geradas através de campos vetoriais posição produzidos a partir da parte imaginária de campos vetoriais isotrópicos elípticos no caso da métrica de Majorana.

Helicóide
R Imag, "Canhoto" A =1, B =1



Helicóide
R Imag, "Destro" A =-1, B =-1

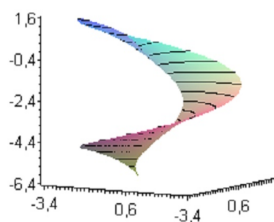


Figura 3.11: Helicóides são encontrados em todas as métricas analisadas, basta usarmos os parâmetros $A = \pm B$.

O que podemos notar é que as superfícies maximais $M \subset \mathbb{R}^{1,2}$ (métrica de Lorentz) geradas por campos vetoriais (complexos) isotrópicos hiperbólicos têm curvatura de Gauss positiva, enquanto que as superfícies minimais $M \subset \mathbb{R}^{3,0}$ (métrica Euclidiana) e as superfícies $M \subset \mathbb{R}^{2,1}$ (métrica de Majorana) têm curvatura de Gauss negativa. As hélices de Lorentz e Majorana apresentam um “buraco” no centro, enquanto as hélices Euclidianas não têm um “buraco”.

Notamos que apenas os catenoides de Lorentz ou Majorana admitem singularidades isoladas ou cônicas. Os catenoides Euclidianos apresentam uma “garganta aberta” que comunica as duas folhas da superfície; diferentemente dos casos com métrica de Lorentz ou Majorana onde as folhas cônicas só se comunicam se estiverem acopladas a uma “corda” (sendo este, o modelo do **FS** sugerido por Kiehn em [26]).

APÊNDICE A

FALACO SOLITONS

Como dito na introdução a motivação para os estudos matemáticos da presente dissertação foram os “Solitons de Falaco” (**FS**, do inglês “Falaco Solitons”), descobertos pelo Professor R. M. Kiehn¹ [26], e apresentados na Figura A.1 (retirada de [26]), que mostra três pares de **FS**, alguns minutos após terem sido criados. Cada **FS** consiste em um par de saliências (cavinhas) rotacionais globalmente estabilizadas na descontinuidade de densidade ar-água na superfície da piscina. A primeira vista, a forma geométrica desses defeitos (as saliências) é como se tivessem sido criadas por uma caneta com ponta em forma de cone que forçasse uma cama elástica, causando uma deformação em forma de cone. Entretanto as covinhas de um **FS** não são estruturas estáticas, elas possuem uma rotação dinâmica. Não é visto na fotografia², mas cada par de covinhas contra-rotantes *parece a primeira vista* possuir um *vértice* (um ponto singular) que se encontra conectado por uma singularidade unidimensional (uma “corda”) ao vértice da outra covinha do par. A conexão, muito fina (a “corda”), pode ser vista colocando-se gotas de tinta no fluido próximo à depressão (de preferência antes deste se estabilizar). Estes objetos, ao que tudo indica, são estados dinâmicos da matéria longe de seu equilíbrio termodinâmico, e visto que permanecem (em movimento) por vários minutos na água, mantendo sua coerência topológica, é lícito incluí-los na classe de objetos topológicos chamados solitons.

¹O Professor R. M. Kiehn, B. SC. 1950, Ph.D. 1953, Física, Curso VIII, MIT, começou sua carreira trabalhando (durante os verões) no MIT, e no projeto de submarino nuclear da marinha americana. Dr. Kiehn se tornou professor de Física na Universidade de Houston em 1963. Hoje ele é aposentado como professor emérito de física e vive em uma pequena vila no sudeste da França. Segundo as próprias palavras do professor: “Os “Solitons de Falaco” vieram à minha atenção em 1986, quando em visita à um velho colega de classe do MIT, José Haroldo Falcão, em sua piscina sob os brilhantes raios solares brasileiros no Rio de Janeiro. No MIT, Haroldo foi sempre conhecido como Falaco, após ter marcado 2 gols em uma partida de futebol no MIT, e os jornais locais terem escrito errado seu nome. Assim eu coloquei os nomes dos defeitos topológicos de “Solitons de Falaco”. Haroldo irá tomar seu lugar na História.

²Um “link” à um video demonstrando o processo de formação dos **FS** pode ser encontrado em [51].

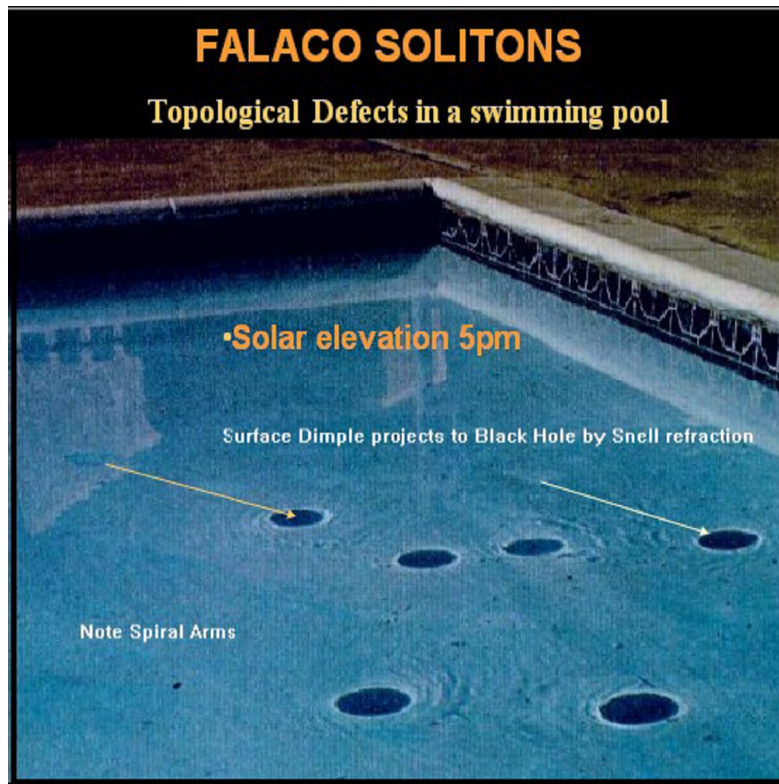


Figura A.1: *Solitons de Falaco*, defeitos topológicos em uma piscina.

A principal propriedade dos **FS**, como apresentada em [26], é o fato deles poderem ser modelados do ponto de vista matemático, como duas covinhas representadas por superfícies de *curvatura média nula* conectados por uma ‘corda’ ou mais realisticamente por uma garganta aberta. A razão que levou Kiehn a conjecturar o uso de superfícies de curvatura média nula é o fato de que quando um **FS**, se encontra iluminado, observa-se a formação de sombras circulares negras no piso da piscina. Em contraste com a cor escura da sombra temos a formação de um anel brilhante ou halo de luz focada contornando-a. Nota-se que as manchas negras no fundo da piscina são circulares e *não* elipses distorcidas, não *importando* a elevação solar, i.e., a projeção de cada uma das seções circulares das covinhas (paralelas ao no fundo da piscina) no fundo da piscina é “conforme”.

APÊNDICE B

PONTOS EXTREMOS DO QUOCIENTE DE FORMAS QUADRÁTICAS

Considere as formas quadráticas $b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} b(\mathbf{x}) &= b(x^1, x^2) = \sum_{ij} b_{ij}(\mathbf{x}) x^i x^j = b_{ij}(\mathbf{x}) x^i x^j, \quad b_{ij} = b_{ji}, \quad i, j = 1, 2 \\ g(\mathbf{x}) &= g(x^1, x^2) = \sum_{kl} g_{kl}(\mathbf{x}) x^k x^l = b_{kl}(\mathbf{x}) x^k x^l, \quad g_{ij} = g_{ji}, \quad k, l = 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Agora, suponha que $g(\mathbf{x}) \neq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ e considere a função

$$k(\mathbf{x}) = \frac{b(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \quad (\text{B.2})$$

Queremos determinar o máximo e/ou mínimo de k . Devemos ter que as coordenadas (x^1, x^2) , que darão o máximo e/ou mínimo de k , obedecem a:

$$\frac{\partial k}{\partial x^m} = 0, \quad m = 1, 2. \quad (\text{B.3})$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k}{\partial x^m} &= \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{b_{ij}(\mathbf{x})x^i x^j}{g_{kl}(\mathbf{x})x^k x^l} \right) \\
&= \frac{(g_{kl}(\mathbf{x})x^k x^l)(b_{ij}(\mathbf{x})x^i \delta_m^j + b_{ij}(\mathbf{x})x^j \delta_m^i)}{(g_{kl}(\mathbf{x})x^k x^l)^2} \\
&\quad - \frac{(g_{kl}(\mathbf{x})x^k \delta_m^l + g_{kl}(\mathbf{x})x^l \delta_m^k)(b_{ij}(\mathbf{x})x^i x^j)}{(g_{kl}(\mathbf{x})x^k x^l)^2} \\
&= 2x^i \frac{b_{im}(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} - \frac{k(\mathbf{x})g_{ml}(\mathbf{x})x^l}{g(\mathbf{x})} \\
&= \frac{2}{g(\mathbf{x})} [(b_{im}(\mathbf{x}) - k(\mathbf{x})g_{mi}(\mathbf{x}))]x^i = 0. \tag{B.4}
\end{aligned}$$

Agora, o sistema linear $(b_{im}(\mathbf{x}) - k(\mathbf{x})g_{mi}(\mathbf{x}))x^i = 0$ tem solução não trivial se e somente se

$$\det[b_{im}(\mathbf{x}) - \mathbf{k}(\mathbf{x})g_{mi}(\mathbf{x})] = 0, \tag{B.5}$$

a qual fornece os valores máximos e mínimos de $k(\mathbf{x})$.

APÊNDICE C

ESPAÇOS AFINS \mathcal{A}^N

Começemos por recordar que um espaço afim¹ \mathcal{A}^n é uma tripla $\langle \mathcal{S}, \mathbf{V}, \ominus \rangle$ onde \mathcal{S} é um conjunto cujos elementos são ditos pontos do espaço afim, \mathbf{V} é um espaço vetorial real n -dimensional e $\ominus : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{V}$ é a operação dita diferença de pontos, tal que dados três pontos distintos $x, y, o \in \mathcal{S}$ temos

$$(x \ominus o) + (y \ominus x) = y \ominus o. \quad (\text{C.1})$$

Também $\forall x \in \mathcal{S}$ temos $x \ominus x = \mathbf{0} \in \mathbf{V}$. Fixado um ponto $o \in \mathcal{S}$ temos ademais que

$$\{(x \ominus o) \mid x \in \mathcal{S}\} = \mathbf{V}. \quad (\text{C.2})$$

Nestas condições da uma base *arbitrária* $\{\mathbf{e}_i\}$ de \mathbf{V} , tomemos-se n pontos distintos $b_i \in \mathcal{S}$ tais que

$$\mathbf{e}_i := b_i \ominus o. \quad (\text{C.3})$$

Nestas condições podemos associar a cada $x \in \mathcal{S}$ o vetor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ dado por

$$\mathbf{x} := x - o = x^i \mathbf{e}_i. \quad (\text{C.4})$$

Os x^i , $i = 1, 2, \dots, n$ são ditos as *coordenadas cartesianas* de $x \in \mathcal{S}$ na *base afim* $(o, \{\mathbf{e}_i\})$. A construção apresentada mostra que fixada uma base afim $(o, \{\mathbf{e}_i\})$ podemos identificar \mathcal{A}^n com o \mathbb{R}^n . Denotando os elementos de \mathbb{R}^n por letras em negrito, podemos identificar a operação \ominus agindo em $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ com a operação

$$\begin{aligned} - : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \mathbf{y} - \mathbf{x} &= (y^1 - x^1, y^2 - x^2, \dots, y^n - x^n). \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

¹Maiores detalhes podem ser encontrados, e.g., em [44].

Definição 205. *Seja \mathcal{A}^n um espaço afim. Dado $x \in \mathcal{S}$ o conjunto $T_x\mathcal{S} = \{(y \ominus x) \mid y \in \mathcal{S}\} = \mathbf{V}$ é dito o espaço tangente à \mathcal{S} em x (ou algumas vezes o espaço tangente à \mathcal{A}^n em x). Os elementos de $T_p\mathcal{S}$ são ditos vetores tangentes à \mathcal{S} em p .*

Definição 206. *O conjunto $\bigcup_{x \in \mathcal{S}} T_x\mathcal{S}$ é dito o fibrado tangente de \mathcal{S} (ou ainda o fibrado tangente de \mathcal{A}^n).*

Definição 207. *Dados dois pontos distintos $x, x' \in \mathcal{S}$ diremos que os vetores tangentes $\mathbf{v}_x = v^i \mathbf{e}_i \in T_x\mathcal{S}$ e $\mathbf{w}_{x'} = w^i \mathbf{e}_i \in T_{x'}\mathcal{S}$ são paralelos se $v^i = w^i$.*

Definição 208. *Dado um espaço afim \mathcal{A}^n um tensor métrico de assinatura (p, q) em $x \in \mathcal{S}$ é uma aplicação $\mathring{g}_x : T_x\mathcal{S} \times T_x\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as propriedades da definição acima.*

Dada uma base afim para \mathcal{A}^n tais que as coordenadas de um ponto genérico $x \in \mathcal{S}$ sejam $\{x^i\}$ denotaremos por $\{dx^i|_x\}$ a base de $T_x^*\mathcal{S}$ (o espaço cotangente à \mathcal{S} em x) dual à base $\{\mathbf{e}_i|_x\} = \{\frac{\partial}{\partial x^i}|_x\}$. Dada a definição de paralelismo acima podemos identificar todos os espaços tangentes e também todos os espaços cotangentes e assim escreveremos doravante $\{\mathbf{e}_i|_x\} = \{\mathbf{e}_i\}$ e $\{dx^i|_x\} = \{dx^i\}$ sempre que de tal convenção não resulte confusão.

Definição 209. *Um campo tensorial contínuo \mathring{g} diferenciável de assinatura (p, q) para \mathcal{A}^n é uma seção do fibrado $T_0^2\mathcal{S}$, i.e., o objeto que se escreve dadas as coordenadas cartesianas de \mathcal{A}^n , onde as $\mathring{g}_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são aplicações diferenciáveis.*

$$\mathring{g} = \mathring{g}_{ij}(\mathbf{x}) dx^i \otimes dx^j \quad (\text{C.6})$$

Definição 210. *Um par $(\mathcal{A}^n, \mathring{g})$ será dito um espaço afim métrico.*

BIBLIOGRAFIA

- [1] Aharonov, Y. and Susskind, L., Observability of the Sign of Spinors under a 2π Rotation, *Phys. Rev.* **158**, 1237-1238 (1967).
- [2] Amciaux, H, *Minimal Submanifolds in Pseudo-Riemannian Geometry*, World Scientific, 2010.
- [3] Barut, A., O., *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, Dover, 1980.
- [4] Bishop, R. L., Crittenden, R. J., *Geometry of Manifolds*, Academic Press, NY, 1964.
- [5] Borel, A., Hirzebruch, F., Characteristic Classes and Homogeneous Spaces I, *Am. Jour. Math.* **80**, 97-136 (1958).
- [6] Budinich, P., Pure Spinor Geometry: Its Possible Role in Quantum Physics, *Adv. Applied Clifford Algebras* **18**, 489-506 (2008).
- [7] Cartan, E., *Theory of Spinors*, Dover, New York, 1966 (tradução da referencia [10])
- [8] Carvalho, A. L. T., *Fundamentos Matemáticos das Teorias de Calibre*, Tese de Mestrado em Matemática, IMECC-UNICAMP, 1992.
- [9] Cartan, É, Les Groupes Projectifs qui ne Laissent Invariante Aucune Multiplicité Plane, *Bull. Soc. Math.* **41**, 53-96 (1913).
- [10] Cartan, É, *Leçons sur la Theorie des Spinours*, Hermann, Paris, 1937.
- [11] Chevalley, C., *The Algebraic Theory of Spinors*, Columbia University Press, New York, 1954.
- [12] Choquet-Bruhat, Y., DeWitt-Morette, C. and Dillard-Bleick, M., *Analysis, Manifolds and Physics* (revisited edition), North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1982.
- [13] Duggal, K, Jin, D., *Null curves and Hypersurfaces of Semi-Riemannian Manifolds*, World Scientific, 2007.

- [14] Fernández, I., López, F. J., and Soman, R., The Space of Complete Embedded Maximal Surfaces With Isolates Singularities in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski Space L^3 . [arXiv:math/0311330v2]
- [15] Fernández, V. V., Moya, A. M. e Rodrigues, W. A. Jr., Euclidean Clifford Algebra, *Adv. Appl. Clifford Algebras.* **11**, 1-21 (2001).
- [16] Figueiredo, V. L. X., *Estrutura Spinorial em Variedades Lorentzianas*, Tese de Doutorado em Matemática, IMECC-UNICAMP, 1987.
- [17] Figueiredo, V. L., Oliveira, E. C., Rodrigues, W. A. Jr., Covariant, Algebraic, and Operator Spinors, *Int. J. Theor. Phys.* **29**, 371-395 (1990).
- [18] Frankel, T., *The Geometry of Physics, An Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [19] Graf, W., Differential Forms as Spinors, *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, **XXIX**, 85 (1978).
- [20] Hatcher, A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [21] Hestenes, D., e Sobezyk, G., *Clifford Algebra to Geometrical Calculus*, D. Reidel, Dordrecht, 1984.
- [22] Hestenes, D., Curvature Calculations with Spacetime Algebra, *Int. J. Theor. Phys.* **25**, 581-588 (1986).
- [23] Kobayashi, S., and Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry*, vol. 1, Interscience Publishers, New York, 1963.
- [24] A. Kostrikin, Yu. Manin, *Linear algebra and geometry*, Gordon and Breach Science Publisher, 1989.
- [25] Hicks, N., J., *Notes on Differential Geometry*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1965.
- [26] Kiehn, R. M., *Cosmology, Falaco Solitons and the Arrow of Time, from a Perspective of Continuous Topological Evolution, Non Equilibrium Systems and Irreversible Processes, Adventures in Applied Topology*, Vol 2, Lulu Enterprises, Inc., Morrisville, 2007.
- [27] Lawson, H., Blaine, Jr. e Michelson, M. L., *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1989.
- [28] Lee, J. M., *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. **218**, Springer, Verlag Nova York, 2002.
- [29] López, F. J., Martín F., e S. Morales S., Complete Nonorientable Minimal Surfaces in a Ball of \mathbb{R}^3 , *Trans. Amer. Math. Soc.*, **358** (2006), pp. 3807–3820.
- [30] Lounesto, P., Scalar Product of Spinors and an Extension of the Brauer-Wall Groups, *Found. Phys.* **11**, 721-740 (1981).

- [31] Lounesto, P., *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [32] Lounesto, P., Clifford Algebras, Relativity and Quantum Mechanics, in P. Letelier and W. A. Rodrigues Jr. (eds.) *Gravitation: The Spacetime Structure*, 50–81, World Sci. Publ. Co., Singapore, 1994.
- [33] Milnor, J., Spin Structures on Manifolds, *L'Enseignement Math.* **9**, 198-203 (1963).
- [34] Nakahara, M., *Geometry, Topology and Physics*, Institute of Physics Publ., Bristol and Philadelphia, 1990.
- [35] O'Neill, B., *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, NY, 1966.
- [36] O'Neill, B., *Semi-Riemannian Geometry, with Applications to Relativity*, Academic Press, NY, 1983.
- [37] Osserman, R., *A Survey of Minimal Surfaces*, Dover Pub., Inc., NY, 1986.
- [38] Penrose, R., e Rindler, W., *Spinors and Space-Time*, Vol. 1 Two-spinor Calculus and Relativistic Fields, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [39] Porteous, I. R., *Topological Geometry*, second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
- [40] Riesz, M., *Clifford Numbers and Spinors*, Lecture Notes No. 3, Institute for Fluid Mechanics and Applied Mathematics, University of Maryland., 1958.
- [41] Sobczyk, G., Conformal Mappings in Geometric Algebra, *Not. Am. Math. Soc* **59**,264-273 (2012).
- [42] Steenrod, N., *The Topology of Fiber Bundles*, Princeton University Press, 1951.
- [43] Struik, D., *Lectures on Classical Differential Geometry*, Addison Wesley, Reading, Mass, Cambridge, 1961.
- [44] Rodrigues, F.G., *Formulações Equivalentes da Lei de Faraday*, Tese de Mestrado em Matemática, IMECC-UNICAMP, 2010.
- [45] Visser, M., *Lorentzian Wormholes, From Einstein to Hawking*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [46] Rodrigues, W. A. Jr., Algebraic and Dirac-Hestenes Spinors and Spinor Fields, *J. Math. Phys.***45** , 2908-2944 (2004).
- [47] Rodrigues, W. A. Jr., Oliveira, E. C., *The Many Faces of Maxwell, Dirac and Einstein Equations. A Clifford Bundle Approach*. Lecture Notes in Physics. **722**, Springer, Heilderberg, 2007.
- [48] Westenholz, C. V., *Differential Forms in Mathematical Physics*. Studies in Mathematics and Its Applications. Vol. **3**, North-Holand Publishing Company, Amsterdam, 1978.
- [49] Vaz, J. Jr., e Rocha, R. Jr., *Álgebra de Clifford e Espinores*, Livraria da Física, São Paulo, 2012.

- [50] Weyl, H., Elektron und Gravitation, *Zeitschrift für Physik*. **56**, 330-352 (1929).
- [51] Cartan's Corner. Adventures in Applied Topology, Cartan's Methods of Exterior Differential Forms are Applied to a Variety of Physical Problems. <http://www22.pair.com/csdc/download/spotsmovie.wmv> (acessado em 11/09/2013).