Universidade Estadual de Campinas
INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Dualidade de Espaços de Hardy com Valores Vetoriais

por

Fábio José Bertoloto

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui

2009

Este trabalho contou com o apoio financeiro da FAPESP.

Dualidade de Espaços de Hardy com Valores Vetoriais

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Fábio José Bertoloto
e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 28 de Março de 2009

Prof. Dr:. Jorge Túlio Mujica Ascui
Orientador

Banca Examinadora:

1 Prof. Dr. Mario Carvalho de Matos
2 Prof. Dr. Sérgio Antonio Tozoni
3 Profa. Dra. Luiza Amália de Moraes
4 Profa. Dra. Daniela Mariz Silva Vieira

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Bertoloto, Fábio José

B462d Dualidade de Espaços de Hardy com valores vetoriais/Fábio José Bertoloto -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2009.

Orientador : Jorge Tulio Mujica Ascui

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Aplicações holomorfas. 2. Banach, Espaços de. 3. Hardy, Espaços de. I. Ascui, Jorge Tulio Mujica. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Duality of vector valued Hardy Spaces

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Holomorphic mappings. 2. Banach spaces. 3. Hardy spaces.

Área de concentração: Análise funcional

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Mario Carvalho de Matos (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Sérgio Antonio Tozoni (IMECC-UNICAMP)
Profa. Dra. Luiza Amália de Moraes (UFRJ)
Profa. Dra. Daniela Mariz Silva Vieira (IME-USP)

Data da defesa: 10/03/2009

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 10 de março de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). JORGE TULIO MUJICA ASCUI

Prof. (a). Dr (a). MÁRIO CARVALHO DE MATOS

Prof. (a). Dr (a). SÉRGIO ANTONIO TOZONI

Prof. (a). Dr (a). LUIZA AMÁLIA DE MORAES

Prof. (a) Dr. (a) DANIELA MARIZ SILVA VIEIRA

Agradecimentos

A palavra agradeço aqui se repetirá quase de forma infinda. Quando penso nos seis anos que passei pela UNICAMP, vejo que só tenho a agradecer e... agradecer.

Começo agradecendo a Deus, meu Senhor, Pai de Nosso Senhor Jesus Cristo. Por sua graça foi que fiz este trabalho, pois, como diz sua palavra:

"Sem mim, nada podeis fazer." (Jo 15,5).

Poderia ainda ter feito muito mais, se tivesse buscado ainda mais a graça de Deus.

Agradeço meu orientador, Jorge Tulio Mujica Ascui, por todo o apoio e paciência de seis anos de trabalho, por ter sido sempre o mesmo comigo, sempre muito atencioso e preocupado com meus resultados, sempre com boas idéias, de bom humor e humor constante para comigo.

Agradeço meus pais, Arnaldo Bertoloto e Elisabet Doval. Não tenho nem palavras para agradecê-los, pois, na medida do alcance deles, tudo fizeram por mim.

Minha irmã Marta, dedico um parágrafo a ela. Importantíssima neste doutorado, por sua amizade. Se não fosse por ela, provavelmente não teria saído de casa para chegar até este nível.

Meus avós, José Doval e Therezinha Sansana, tenho muito por agradecer.

Meus amigos do GOU: Willian Pegorin, Ivy Lellis, Larissa Consoli... estes estiveram comigo no início. Depois agradeço a tantos outros que estiveram comigo na caminhada: Silmar Franchi, Daniel Volpato, Cinthya Tamie, Menina Hérica Magosso, Cybele Moura, Marta Macufa, Adriana Martin, Marquinhos Vasconcelos...enfim, são tantos nomes...... se alguém chegar a ler e pensar "meu nome não está aqui", pode ter certeza que seu nome está em meu coração. O mesmo digo aos meus amigos do Kerigma, onde cito Dênis Jerônimo, Marquinhos Godoi, Tânia Soares e Samara Fernanda...os outros estão no meu coração. Meus amigos Cássio Fujisawa, Flávia Sordi e David Arias, também do GOU... não poderia esquecê-los, foi muito bom estar com vocês.

Aos meus amigos do IMECC, Vinícius Fávaro, Ariosvaldo Jatobá, Anderson Valença, Mateus Allegri, Cícero (em especial), Lino Grama, Wellington, Clair, Rubão, Rosane Binotto, Cristiane Lázaro e tantos outros.

Meus amigos da pensão, foram cinco anos por lá: Max, Ricardo e Lucas (esses irmãos são grandes pessoas!), Raphael Holtz, Olivaine Queiroz, Tiago Barra, Ilton e muitos outros que talvez não caberia em uma página escrever tantos nomes.

Minhas amigas do inglês, Klicia e Paula, pelos bons momentos. Kamelia, pelo ensino persistente.

Aos membros da banca, com os nomes citados nesta tese, agradeço muito pela forma como apresentaram suas correções e por tê-las apresentado.

Agradeço a FAPESP pelo apoio financeiro indispensável.

Campinas, 30 de março de 2009

Abstract

In this work we study the vector-valued Hardy spaces $H^p(\Delta; F)$ $(1 \leq p \leq \infty)$. We also study the Banach spaces with the properties ARNP and RNP and the UMD spaces. We also study the Banach spaces with the RNP and ARNP properties, and also the UMD spaces. By following the approach of Taylor [36],[37] in the scalar-valued case, we prove that, when F and F' have the ARNP property, when $(H^p(\Delta; F))'$ and $H^q(\Delta; F)$ are canonically topologically isomorphic (for $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) if and only if F is UMD.

Resumo

Neste trabalho, estudamos os já conhecidos espaços de Hardy de funções holomorfas $H^p(\Delta; F)$, $1 \leq p \leq \infty$. Estudamos também os espaços de Banach com as propriedades RNP e ARNP e os espaços UMD. Tendo introduzido estes, a partir de resultados voltados para o caso complexo dos artigos de Taylor [36], [37], que demonstram que $(H^p(\Delta))'$ e $H^q(\Delta)$ são canonicamente topologicamente isomorfos para $1 < p < \infty$, com q conjugado de p, demonstramos que sob as condições de F e F' terem a propridade ARNP, $(H^p(\Delta; F))'$ e $H^q(\Delta; F')$ são canonicamente topologicamente isomorfos (para $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) se, e somente se, F é UMD.

Sumário

Introdução

Temos como principal objetivo neste trabalho, a procura de uma representação do dual do espaço de Hardy $H^p(\Delta; F)$, quando F é um espaço de Banach. Em particular, se considerarmos que F e F' tem a propriedade ARNP, obtivemos condições necessárias e suficientes para que $(H^p(\Delta; F))'$ seja $H^q(\Delta; F')$, onde são p e q índices conjugados.

Para obtermos estas condições, nos delineamos em grande parte pelos artigos de Taylor [36] e [37]. Nestes, Taylor dá uma representação para o dual de $H^p(\Delta; \mathbb{C}) = H^p(\Delta)$, de maneira que este é canonicamente topologicamente isomorfo a $H^q(\Delta)$.

Alguns espaços com propriedades de destaque no trabalho, são os espaços UMD ('Unconditional Martingale Differences'), espaços com a propriedade RNP (Propriedade de Radon-Nikodym) e espaços com a propriedade ARNP (propriedade de Radon-Nikodyn Analítica). Esta última propriedade foi apresentada por A. V. Bukhvalov [5]. Temos aqui, uma extensão ao caso vetorial do trabalho feito por Riesz [31] no caso complexo. Vale lembrar que Ryan [34],[35] obtém o mesmo resultado que Bukhvalov para espaços reflexivos e separáveis, pouco mais de dez anos antes. Um espaço F que tenha a propriedade ARNP, admite um isomorfismo topológico canônico entre os espaços de Hardy $H^p(T; F)$ e $H^p(\Delta; F)$.

Definimos os axiomas $P_1, \ldots, P_7$, sempre relacionados a subespaços vetoriais de $\mathcal{H}(\Delta; F)$ denominados espaços normados do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_k$ para $k = 1, \ldots, 7$. Aplicamos o estudo teórico das propriedades destes espaços aos espaços $H^p(\Delta; F)$, sendo estes espaços do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_7$, caso F tenha a propriedade ARNP.

Construímos os espaços H^b (do inglês 'bounded') e H^c (do inglês 'convergence'). Estes são obtidos a partir de espaços do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_3$ e demonstramos que os mesmos são do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F')_4$. Tais espaços apresentam grande importância quando estudamos a dualidade do espaços de Hardy.

Outro fato importante nesta tese é o destaque que damos aos espaços fracos, sempre utilizando da letra 'w' (do inglês 'weak') e o estudo que procuramos fazer de cada um deles. Por exemplo, no caso dos espaços $L^p(T; F)$, demonstramos que $L^p_w(T; F)$ é um espaço de Banach com uma determinada norma, sobre a hipótese de que F seja reflexivo. Relacionamos ainda, ao final, os espaços de Hardy fracos $H^p_w(\Delta; F)$, $1 < p < \infty$, com a dualidade dos espaços de Hardy tradicionais. Veremos que numa quantidade restrita de espaços ocorre que $H^p_w(\Delta; F) = H^p(\Delta; F)$, diferentemente do caso das funções holomorfas $\mathcal{H}(\Delta; F)$ onde, independentemente do espaço de Banach F em questão, $\mathcal{H}_w(\Delta; F) = \mathcal{H}(\Delta; F)$.

Em resumo, os principais resultados obtidos são o Teorema de Representação 6.1 e os Teoremas 7.9 e 7.15, que relacionam respectivamente, a propriedade UMD com a existência de isomorfismo topológico canônico e com a igualdade $H^p_w(\Delta; F) = H^p(\Delta; F)$, para $1 < p < \infty$.

Capítulo 1

Espaços $L^p(T; F)$

Não só neste capítulo, como em todo este trabalho, F sempre denotará um espaço de Banach complexo.

Temos ainda,

$$T = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\},$$

ou seja, T representa a circunferência complexa unitária e,

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\},$$

isto é, a letra grega Δ representará o disco unitário aberto do plano complexo. No que segue, apresentamos inicialmente algumas definições conhecidas em Análise Funcional. Nestas, sempre temos as funções restritas a T com imagem em F, devido ao nosso interesse de estudo, sendo que tais funções poderiam ser mais gerais, com domínio sendo qualquer espaço de medida. O mesmo ocorre quando nos referirmos a medidas vetoriais, pois a σ-álgebra poderia ser qualquer outra e não necessariamente a de Borel, bem como o espaço mensurável um compacto de Hausdorff qualquer e não simplesmente T.

Para cada valor $1 \leq p \leq \infty$, consideraremos q como **índice conjugado** de p, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. No caso $p = \infty$ temos $q = 1$ e vice-versa.

1.1 Integral de Bochner

Daremos agora a definição de integral de Bochner. Nesta seção, μ sempre denotará uma medida de Borel (complexa) em T. Por isto, em todas as definições e resultados que seguem, devemos levar em conta que estamos considerando o espaço de medida $(T, \mathbf{B}, \mu)$, onde $\mathbf{B}$ é a σ-álgebra de Borel em T. Uma definição mais geral de σ-álgebra pode ser encontrado em Bartle [1], página 6. Omitiremos algumas demonstrações, sendo que estas podem ser encontradas no livro do professor Mujica indicado em [28].

Definição 1.1. Uma função $f : T \longrightarrow F$ é simples, se existem conjuntos disjuntos $A_1, \ldots, A_k \in \mathbf{B}$ e vetores $b_1, \ldots, b_k \in F$ tais que

$$f(\xi) = \sum_{j=1}^{k} \chi_{A_j}(\xi) b_j,$$

para todo $\xi \in T$, onde χ_{A_j} é a função característica correspondente ao conjunto A_j. Então, para cada $A \in \mathbf{B}$ definimos

$$\int_A f d\mu = \sum_{j=1}^{k} \mu(A \cap A_j) b_j.$$

Proposição 1.2. Seja $f : T \longrightarrow F$ uma função simples. Então são válidos para cada $A \in \mathbf{B}$ e $\psi \in F'$:

a) $\psi \left(\int_A f d\mu \right) = \int_A \psi \circ f d\mu;$

b) $\| \int_A f d\mu \| \leq \int_A \|f\| d\mu.$

Definição 1.3. a) Uma função $f : T \longrightarrow F$ é mensurável, se existe uma sequência de funções simples $f_n : T \longrightarrow F$ que converge (pontualmente) para f quase-sempre.

b) Uma função mensurável $f : T \longrightarrow F$ é Bochner integrável, se existe uma sequência de funções simples $f_n : T \longrightarrow F$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \int_T \|f_n - f\| d\mu = 0.$$

Podemos assim, definir a integral de Bochner como:

$$\int_A f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_A f_n d\mu,$$

para cada $A \in \mathbf{B}$.

Observação: O item **(a)**, quando F for separável, é equivalente à definição apresentada em alguns livros, afirmando que uma função $f : T \longrightarrow F$ é mensurável, se dado um aberto $U \subset F$, então $f^{-1}(U) \in \mathbf{B}$. No item **(b)**, podemos afirmar que a integral de Bochner

$$\int_A f d\mu \tag{1.1}$$

está bem definida, pela Proposição 1.2. Isto porque, a proposição garante que a sequência

$$\left(\int_A f_n d\mu \right)$$

é de Cauchy e, também garante que o valor da integral (1.1), vista na última observação, independe da escolha da sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

A próxima proposição apresenta propriedades bastante úteis quando trabalhamos com integrais de Bochner.

Proposição 1.4. Seja $f : T \longrightarrow F$ Bochner integrável. Então:

a) A função $\psi \circ f : T \longrightarrow \mathbb{C}$ é integrável e

$$\psi\left(\int_A f d\mu\right) = \int_A \psi \circ f d\mu,$$

para cada $\psi \in F'$ e $A \in \mathbf{B}$.

b) A função $\|f\| : T \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável e

$$\left\|\int_A f d\mu\right\| \leq \int_A \|f\| d\mu,$$

para cada $A \in \mathbf{B}$.

Daqui para frente trabalharemos apenas com a **medida de Lebesgue** m dada por:

$$m(A) = \frac{1}{2\pi}\int_A \mathbf{1} d\theta,$$

para todo $A \in \mathbf{B}$, onde $\mathbf{1}(e^{i\theta}) = 1$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$.

Na sequência, apresentamos o conceito de mensurabilidade fraca e uma relação desta com a mensurabilidade que apresentamos:

Definição 1.5. Uma função $f : T \longrightarrow F$ é fracamente mensurável, se para todo $\psi \in F'$ valer

$$\psi \circ f : T \longrightarrow \mathbb{C}$$

é uma função mensurável.

Definição 1.6. Uma função $f : T \longrightarrow F$ é denominada de valor separável se o conjunto $\{f(t) : t \in T\}$ é separável. Ela é dita de valor separável quase-sempre, se existe um subconjunto $T_0 \subset T$, com medida nula, tal que $\{f(t) : t \in T \backslash T_0\}$ seja separável.

Teorema 1.7. (Pettis) Uma função $f : T \longrightarrow F$ é mensurável se, e somente se, f é fracamente mensurável e quase-sempre de valor separável.

Demonstração: Ver Diestel e Uhl [13], página 42. ■

1.2 Espaços $L^p(T;F)$

Definição 1.8. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotaremos por $L^p(T;F)$ o espaço de Banach das (classes de) funções $f : T \longrightarrow F$, que são mensuráveis com respeito à medida de Lebesgue em T satisfazendo $\|f\|_p < \infty$ onde:

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f(e^{i\theta})\|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leq p < \infty)$$

$$\text{e } \|f\|_\infty = \underset{0<\theta<2\pi}{\operatorname{ess\,sup}} \|f(e^{i\theta})\|$$

sendo que esta última expressão, denominada supremo essencial, representa o valor

$$\inf\{\sup_{0\leq\theta\leq 2\pi} \|g(e^{i\theta})\| : g \in C_f\},$$

onde C_f é o conjunto das funções g mensuráveis com valores em F, que coincidem com f quase-sempre.

Observação: No caso de $p = \infty$, ainda temos que $\|f\|_\infty = \inf\{c > 0 : \|f(e^{i\theta})\| \leq c\,, \text{quase sempre}\}$.

Nota: Quando $F = \mathbb{C}$, escrevemos $L^p(T;\mathbb{C}) = L^p(T)$.

Para muitos dos espaços que veremos à frente, definiremos o espaço fraco correspondente, sempre utilizando da letra 'w' (do inglês *'weak'*) para diferenciação. Na próxima seção, já temos um primeiro exemplo.

1.3 Espaços $L^p_w(T;F)$

Definição 1.9. Para cada $1 \leq p \leq \infty$, denotamos por

$$L^p_w(T;F) = \{f : T \longrightarrow F\ ; \psi \circ f \in L^p(T) \text{ para toda } \psi \in F'\},$$

o espaço das funções fracamente Lebesgue integráveis.

Observação 1.10. É fácil ver que $L^p(T;F) \subset L^p_w(T;F)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$ e, que a igualdade ocorre quando F tem dimensão finita. Pergunta: será que existem casos onde aconteça a igualdade se F tiver dimensão infinita?

Proposição 1.11. Para cada $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p_w(T;F)$ o seguinte supremo é finito:

$$\sup_{\psi\in F', \|\psi\|\leq 1} \|\psi \circ f\|_p.$$

Demonstração: Demonstraremos o caso $1 \leq p < \infty$. Para o caso $p = \infty$, a demonstração segue de forma análoga. Para cada $f \in L^p_w(T; F)$, seja a transformação linear dada por:

$$\begin{aligned} S_f : F' &\longrightarrow L^p(T) \\ \psi &\longmapsto \psi \circ f \end{aligned}$$

Vejamos que a função S_f é contínua, a partir do Teorema do Gráfico Fechado. Tendo mostrado este fato, obteremos o desejado, pois

$$\|S_f\| = \sup_{\psi \in F', \|\psi\| \leq 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\psi \circ f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^p.$$

Seja $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência que converge a $\psi \in F'$. Suponhamos que $S_f(\psi_n)$ converge a $g \in L^p(T)$, ou seja,

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\psi_n \circ f(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta})\|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Escrevemos $h_n(e^{i\theta}) = \psi_n \circ f(e^{i\theta})$ e obtemos que $h_n \longrightarrow g$ em $L^p(T)$. Por resultados que podem ser encontrados em Bartle [1] páginas 72 e 73, podemos afirmar que existe uma subsequência (h_{n_k}) de maneira que $h_{n_k}(e^{i\theta}) \longrightarrow g(e^{i\theta})$ quase sempre. Portanto,

$$g(e^{i\theta}) = \psi \circ f(e^{i\theta})$$

quase sempre. Ou seja, $g = S_f(\psi) \in L^p(T)$. Mostramos assim, que S_f é contínua. ■

Para a demonstração da próxima proposição, precisaremos da terminologia e resultado seguintes:

Notação: Se E e F são espaços de Banach, então $\mathcal{L}(E; F)$ denota o espaço das transformações lineares contínuas de E em F.

Resultado: O espaço $\mathcal{L}(E; F)$, como a norma usual para transformações lineares, é Banach.

Proposição 1.12. Para cada $f \in L^p_w(T; F)$ e $1 \leq p \leq \infty$, se definirmos

$$\|f\|^w_p = \sup_{\psi \in F', \|\psi\| \leq 1} \|\psi \circ f\|_p,$$

sendo este o mesmo supremo da proposição anterior, então temos que:

a) $(L^p_w(T; F), \|.\|^w_p)$ é um espaço normado.

Se ainda, F for reflexivo, são válidos os seguintes itens:

b) O espaço $(L^p_w(T; F), \|.\|_p)$ é isometricamente isomorfo ao espaço $\mathcal{L}(F'; L^p(T))$.

c) $(L^p_w(T; F), \|.\|^w_p)$ é um espaço de Banach.

Demonstração: O item **(a)** é imediato da Proposição 1.11. Provemos o item **(b)**. Seja a aplicação

$$\begin{array}{rcl} S : L^p_w(T;F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(F';L^p(T)) \\ f & \longmapsto & S_f, \end{array}$$

onde $S_f(\psi)(e^{i\theta}) = \psi(f(e^{i\theta}))$, para cada $\psi \in F'$ e $\theta \in [0, 2\pi]$, conforme apresentamos na proposição anterior.

Pela definição de $L^p_w(T;F'')$, podemos ver que S está bem definida. Além do mais, é um mergulho isométrico pois:

$$\|S_f\| = \sup_{\psi \in F', \|\psi\| \leq 1} \|S_f(\psi)\| = \sup_{\psi \in F', \|\psi\| \leq 1} \|\psi \circ f\|_p = \|f\|^w_p.$$

Mostremos que S é sobrejetora obtendo que a mesma é um isomorfismo isométrico. Seja então $R \in \mathcal{L}(F';L^p(T))$.

Como R é linear e contínua, para cada $e^{i\theta} \in T$, temos que a função

$$\begin{array}{rcl} R_\theta : F' & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \psi & \longmapsto & R(\psi)(e^{i\theta}), \end{array}$$

é um elemento de F''.

Sendo F reflexivo, existe um único $a_\theta \in F$ tal que $R_\theta(\psi) = \psi(a_\theta)$, para todo $\psi \in F'$.

Definamos

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f} : T & \longrightarrow & F \\ e^{i\theta} & \longmapsto & a_\theta. \end{array}$$

Neste caso, para todo $e^{i\theta} \in T$ e todo $\psi \in F'$, temos

$$\psi(f(e^{i\theta})) = \psi(a_\theta) = R_\theta(\psi) = R(\psi)(e^{i\theta})$$

e, ainda $\psi(f) = R(\psi)$, resultando que $f \in L^p_w(T;F)$. Por definição, $S_f = R$, concluindo o desejado. ■

Capítulo 2

Espaços de Hardy com Valores Vetoriais

I have never done anything 'useful'. No discovery of mine has made, or is likely to make, directly or indirectly, for good or ill, the least difference to the amenity of the world.[1]

Apresentaremos aqui, os espaços de Hardy. O nome vem como uma homenagem ao trabalho do matemático inglês Godfrey Harold Hardy (07/02/1877 - 01/12/1947). Filho de professores inclinados para a matemática, demonstrou afinidade com esta ciência exata desde criança, quando aos dois anos de idade, já contava números até chegar aos milhões e, quando levado à igreja, se divertia fatorando os números representantes dos hinos de cada culto.

G. H. Hardy

2.1 Funções Holomorfas

Definição 2.1. Uma função $f : \Delta \longrightarrow F$ é **holomorfa** em Δ se para todo $z \in \Delta$ existir o limite

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

fato que é equivalente a afirmar que f pode ser expressa como a série

[1]Frase citada por Hardy, em seu livro *A Mathematician's Apology*, 1940.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

onde $a_n \in F$. Denotaremos o espaço das funções holomorfas por $\mathcal{H}(\Delta; F)$. Se $F = \mathbb{C}$, escrevemos $\mathcal{H}(\Delta)$ em lugar de $\mathcal{H}(\Delta; \mathbb{C})$.

É um resultado conhecido que todo elemento de $\mathcal{H}(\Delta; F)$ é contínuo.

Escrevemos agora, $a_n = \gamma_n(f)$. A série acima, converge uniformemente e absolutamente em discos abertos $D_r = \{z; |z| < r\}$ para $0 < r < 1$. Notemos ainda que para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, vale:

$$\gamma_n(\alpha f + \beta g) = \alpha\gamma_n(f) + \beta\gamma_n(g),$$

para todas $f, g \in \mathcal{H}(\Delta; F)$.

Definição 2.2. Denotamos por

$$\mathcal{H}_w(\Delta; F) = \{f : \Delta \longrightarrow F; \psi \circ f \in \mathcal{H}(\Delta), \forall \psi \in F'\}.$$

o espaço da funções fracamente holomorfas.

Proposição 2.3. É válida a seguinte igualdade

$$\mathcal{H}_w(\Delta; F) = \mathcal{H}(\Delta; F).$$

Demonstração: Ver Mujica [28], página 65. ■

No que segue, sempre ρ é variável real com $0 \leq \rho < 1$. Utilizaremos f, g e h como símbolos representantes de elementos de $\mathcal{H}(\Delta; F)$.

Definição 2.4. Definimos para cada $v \in F$, com $\|v\| = 1$, os seguintes elementos:

$$u_n^v(z) = z^n.v,$$

para $z \in \Delta$.

Definição 2.5. Se $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$ e se $t \in \mathbb{R}$, escrevemos $g = U_t f$ quando g é o elemento de $\mathcal{H}(\Delta; F)$ definido por $g(z) = f(ze^{it})$, $z \in \Delta$.

Definição 2.6. Se $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$ e se w é um número complexo tal que $|w| \leq 1$, escrevemos $g = T_w f$, quando g é um elemento de $\mathcal{H}(\Delta; F)$ definido por $g(z) = f(zw)$, $z \in \Delta$.

Observamos que $U_t = T_{e^{it}}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. É fácil verificar que, para $w \in \Delta$, e $n \in \mathbb{N}$ $\gamma_n(T_w f) = w^n \gamma_n(f)$ e que U_t e T_w são operadores lineares de $\mathcal{H}(\Delta; F)$ em $\mathcal{H}(\Delta; F)$.

Sabemos da teoria básica de Análise Funcional, que F' (o dual topológico de F) é um espaço de Banach. Com base nisto, apresentamos na sequência uma outra definição:

Definição 2.7. Sejam $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$ e $g \in \mathcal{H}(\Delta; F')$. Temos:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

com $a_n \in F$ e $b_n \in F'$.

Definimos para $z \in \Delta$,

$$B(f, g; z) = \sum_{n=0}^{\infty} < a_n, b_n > z^n,$$

onde $< a_n, b_n >= b_n(a_n)$. Em alguns casos, denotaremos a aplicação de um operador linear sobre algum elemento de seu domínio desta forma. Isto para que algumas expressões sejam mais compreensíveis e elegantes.

Proposição 2.8. Para f e g como na definição anterior, $B(f, g; .) \in \mathcal{H}(\Delta)$.

Demonstração: Para ver isto, tomemos $z_1, z_2 \in \Delta$, com $z = z_1 z_2$. Por exemplo, z_1 e z_2 podem ser as raízes quadradas de z. Disto,

$$< a_n, b_n > z^n =< a_n z_1^n, b_n z_2^n >\Rightarrow | < a_n, b_n > z^n| \leq \|b_n z_2^n\| \|a_n z_1^n\|,$$

sendo a desigualdade obtida pelo fato de cada $b_n \in F'$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Agora, como $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n z_1^n\|$ converge, pois $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$, e $\|b_n z_2^n\| \to 0$ devido ao fato de $g \in \mathcal{H}(\Delta; F')$, podemos dizer que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} < a_n, b_n > z^n$$

converge absolutamente e uniformemente em cada disco aberto $D_r = \{z; |z| < r\}$, para valores $0 < r < 1$, concluindo a demonstração.$\blacksquare$

Caso seja do interesse do leitor, as afirmações que fizemos no parágrafo anterior sobre séries de funções holomorfas, podem ser justificadas por resultados que podem ser encontrados nas páginas 28 e 52 de Mujica [28].

Proposição 2.9. A função $B(f, g; .)$ satisfaz as seguintes propriedades para $z \in \Delta$:

1. $B(f, g; z)$ é linear em f para g e z fixos.

   $B(f, g; z)$ é linear em g para f e z fixos;

2. $B(T_w f, g; z) = B(f, g, wz)$, sempre que $|w| \leq 1$, $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$ e $g \in \mathcal{H}(\Delta; F')$;

3. $B(f, g; z) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} < f(z_1 e^{i\theta}), g(z_2 e^{-i\theta}) > d\theta$, onde $z = z_1 z_2$, $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$ e $g \in \mathcal{H}(\Delta; F')$.

Demonstração: Os itens 1 e 2 não são difíceis de se provar. Para o item 3, fazemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} < f(z_1e^{i\theta}), g(z_2e^{-i\theta}) > d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} < \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z_1 e^{i\theta})^m, \sum_{j=0}^{\infty} b_j (z_2 e^{-i\theta})^j > d\theta \\
&= \sum_{j,m=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (z_1e^{i\theta})^m (z_2e^{-i\theta})^j < a_m, b_j > d\theta \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (z_1 z_2)^m < a_m, b_m > d\theta \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} < a_m, b_m > z^m \\
&= B(f, g; z).
\end{aligned}$$

■

A função B apresentada na Definição 2.7, será fundamental em capítulos posteriores.

2.2 Espaços de Hardy $H^p(\Delta; F)$

Definição 2.10. Para cada $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$, definimos

$$M_p[f; r] = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f(re^{i\theta})\|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}},$$

onde $0 \leq r < 1$ e $1 \leq p < \infty$.

Definição 2.11. Pelo símbolo $H^p(\Delta, F)$, denotamos o espaço de todas as $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$ tais que $\{M_p[f; r]\}_{0 \leq r < 1}$ é um conjunto limitado como função de r. Para cada f, definimos

$$\|f\|_p = \sup_{0 \leq r < 1} M_p[f; r]. \tag{2.1}$$

Seja agora, o seguinte teorema:

Teorema 2.12. (Teorema do Módulo Máximo) Sejam $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$ e $U \subset \Delta$ um subconjunto aberto conexo de Δ. Se existe $a \in U$ tal que $\|f(z)\| \leq \|f(a)\|$ para todo $z \in U$, então $\|f\|$ é constante em U.

Demonstração: Ver Thorp & Whitley [38], página 641. ■

É interessante que a partir deste teorema, podemos enunciar novamente, a definição anterior, reescrevendo a equação 2.1 da forma:

$$\|f\|_p = \lim_{r \to 1} M_p[f; r].$$

Observação: É válida a seguinte desigualdade:

$$M_p[f;r] \leq M_{p_1}[f;r], \tag{2.2}$$

para $1 \leq p < p_1$.

A desigualdade 2.2 implica em $L^{p_1}(T;F) \subset L^p(T;F)$. Demonstremos a validade da mesma. Seja $f \in L^{p_1}(T;F)$ e consideremos as funções

$$\phi = \|f\|^p \in L^{\frac{p_1}{p}}(T) \qquad \text{e} \qquad \psi = \mathbf{1} \in L^{\frac{p_1}{p_1-p}}(T).$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder para o produto $\zeta = \phi.\psi$, resulta o que segue:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f(re^{i\theta})\|^p d\theta\right) &\leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\|f(re^{i\theta})\|^p)^{\frac{p_1}{p}} d\theta\right)^{\frac{p}{p_1}} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{1} d\theta\right)^{\frac{p_1-p}{p_1}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f(re^{i\theta})\|^{p_1} d\theta\right)^{\frac{p}{p_1}}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Salientamos que a desigualdade 2.2 é estrita, a menos que f seja constante no disco $|z| = r$, fato também advindo da Desigualdade de Hölder.

Portanto, valem os fatos de que $\|f\|_p \leq \|f\|_{p_1}$ e $H^{p_1}(\Delta, F) \subset H^p(\Delta, F)$, se $1 \leq p < p_1$. Além disto, a função inclusão $H^{p_1}(\Delta, F) \hookrightarrow H^p(\Delta, F)$ é contínua. Podemos provar que $H^p(\Delta, F)$, com $0 < p < \infty$, é espaço vetorial. Para $1 \leq p < \infty$, o resultado segue diretamente da Desigualdade de Minkowski. Para $0 < p < 1$, o resultado vem de

$$\|f + g\|^p \leq (\|f\| + \|g\|)^p \leq 2^p(\|f\| \vee \|g\|)^p \leq 2^p(\|f\|^p + \|g\|^p),$$

onde $(\|f\| \vee \|g\|)(z) = \max\{\|f(z)\|, \|g(z)\|\}$. Daí, basta aplicar a integral em ambos os lados da desigualdade que o resultado segue. Porém, quando $0 < p < 1$, $\|f\|_p$ não satisfaz a desigualdade triangular. Por este fato, restringiremos nossos estudos apenas para o caso onde $1 \leq p < \infty$.

Definição 2.13. Usamos o símbolo $H^\infty(\Delta, F)$ para denotar o espaço das funções $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$ onde

$$\sup_{z \in \Delta} \|f(z)\| < \infty.$$

A escolha da notação é natural, pois se $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$ temos que

$$\lim_{p \to \infty} M_p[f;r] = \max_{|z|=r} \|f(z)\|, \tag{2.4}$$

e disto definimos

$$M_\infty[f;r] = \max_{|z|=r} \|f(z)\|.$$

Analisemos a validade do limite em (2.4). É claro que para todo $1 \leq p < \infty$ e $0 \leq r < 1$

$$M_p[f;r] = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(re^{i\theta})\|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \leq \max_{|z|=r} \|f(z)\|.$$

Do que vimos na desigualdade 2.2, se escrevermos

$$\psi(p) = M_p[f;r],$$

esta será uma função crescente de p. Portanto, o limite em (2.4) realmente existe. Agora seja $L_r = \max\limits_{|z|=r} \|f(z)\|$. Podemos afirmar que dado $\epsilon > 0$, existe um conjunto $A \subset [0, 2\pi]$ de medida de Lebesgue $m(A) = \varrho > 0$, tal que $\|f(re^{i\theta})\| > L_r - \epsilon$ para todo $\theta \in A$.

Logo,

$$M_p[f;r] \geq \int_A f(re^{i\theta}) d\theta \geq (L_r - \epsilon)(\varrho)^{\frac{1}{p}}$$

e,

$$\lim_{p \longrightarrow \infty} M_p[f;r] \geq L_r - \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é qualquer, então

$$\lim_{p \longrightarrow \infty} M_p[f;r] \geq L_r,$$

terminando a justificativa do limite dado em (2.4). Com base nisto que mostramos, definimos como norma em $H^\infty(\Delta, F)$ a seguinte:

$$\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq r < 1} M_\infty[f;r] \tag{2.5}$$

ou, equivalentemente,

$$\|f\|_\infty = \sup_{|z|<1} \|f(z)\|.$$

É fácil ver que $H^\infty(\Delta, F)$ é um subespaço vetorial de $H^p(\Delta, F)$, sempre que consideramos $1 \leq p < \infty$. Além disso, a inclusão $H^\infty(\Delta; F) \hookrightarrow H^p(\Delta; F)$ é contínua.

Os espaços $H^p(\Delta; F)$, $1 \leq p \leq \infty$, são denominados **espaços de Hardy**. Quando $F = \mathbb{C}$, escrevemos $H^p(\Delta; \mathbb{C}) = H^p(\Delta)$. Indicamos como referência para o estudo de espaços de Hardy, onde as funções assumem valores complexos, os livros de Duren [19], Hoffman [24] e Rudin [33]. Veremos mais adiante, na Proposição 3.7, que os espaços de Hardy são espaços de Banach.

Caso o leitor deseje, poderá se dirigir aos artigos de Blasco [2] e Dowling [17], onde encontrará interessantes caracterizações dos espaços $H^p(\Delta; F)$.

2.3 Espaços Fracamente de Hardy $H_w^p(\Delta; F)$

Definição 2.14. Para $1 \leq p \leq \infty$, denotamos por

$$H_w^p(\Delta; F) = \{f \in \mathcal{H}(\Delta; F); \psi \circ f \in H^p(\Delta), \forall \psi \in F'\}$$

o espaço das funções holomorfas fracamente de Hardy.

Pela Proposição 2.3, poderíamos reescrever o espaço da definição anterior da seguinte maneira:

$$H_w^p(\Delta; F) = \{f : \Delta \longrightarrow F; \psi \circ f \in H^p(\Delta), \forall \psi \in F'\}.$$

Proposição 2.15. Se $1 \leq p \leq \infty$ e $f \in H_w^p(\Delta; F)$, o seguinte supremo é finito:

$$\sup_{\psi \in F', \|\psi\| \leq 1} \|\psi \circ f\|_p.$$

Demonstração: A demonstração é muito semelhante à que podemos ver para a Proposição 1.11. Daremos os detalhes. Fixemos um valor $1 \leq p < \infty$. Seja

$$\begin{array}{rcl} \Xi_f : F' & \longrightarrow & H^p(\Delta) \\ \psi & \longmapsto & \psi \circ f \end{array}.$$

Vejamos que este operador linear é contínuo e, portanto, o resultado segue. Utilizaremos do Teorema do Gráfico Fechado. Seja $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em F' que converge a $\psi \in F'$. Suponhamos que $\Xi_f(\psi_n) \longrightarrow g \in H^p(\Delta)$ quando $n \longrightarrow \infty$, ou seja,

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{0 \leq r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\psi_n \circ f(re^{i\theta}) - g(re^{i\theta})\|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Portanto, para r fixado temos

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\psi_n \circ f(re^{i\theta}) - g(re^{i\theta})\|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Agora, procedendo como na demonstração da Proposição 1.11, obtemos quase sempre que

$$g_r(\theta) = g(re^{i\theta}) = \psi \circ f(re^{i\theta}). \tag{2.6}$$

Pelas continuidades de g_r, f e ψ, podemos afirmar que a equação 2.6 é válida para todo $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Para o caso $p = \infty$, suponhamos que $\psi_n \circ f \longrightarrow g$ em $H^\infty(\Delta)$. Assim, para todo $1 \leq p < \infty$ fixado vale que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|\psi_n \circ f - g\|_p = 0$$

Como $\psi_n \longrightarrow \psi$, do que fizemos anteriormente, demonstramos 2.6 também quando $p = \infty$. ■

Escrevemos para uma dada $f \in H^p_w(\Delta; F)$

$$\|f\|^w_p = \sup_{\psi \in F', \|\psi\| \leq 1} \|\psi \circ f\|_p.$$

Proposição 2.16. Para $1 \leq p \leq \infty$ temos:

a)$(H^p_w(\Delta; F), \|.\|^w_p)$ é um espaço normado.

b) $(H^\infty_w(\Delta; F), \|.\|^w_\infty) = (H^\infty(\Delta; F), \|.\|_\infty)$.

Se ainda, F for reflexivo, são válidos os seguintes itens:

c) $(H^p_w(\Delta; F), \|.\|^w_p)$ é isometricamente isomorfo ao espaço $\mathcal{L}(F'; H^p(\Delta))$.

d) $(H^p_w(\Delta; F), \|.\|^w_p)$ é um espaço de Banach.

Na verdade, independente do espaço de Banach F, o item **(d)** é sempre válido, como veremos na Proposição 3.8.

Demonstração: Pela Proposição 2.15, $\|f\|^p_w < \infty$ para toda $f \in H^p_w(\Delta; F)$. É fácil ver que se $\omega \in \mathbb{C}$, então $\|\omega f\|^w_p = |\omega|.\|f\|^p_w$. Também não é difícil provar que $\|.\|^w_p$ satisfaz a desigualdade triangular, pois, $\|.\|_p$ satisfaz a desigualdade triangular. Ainda, se $f(z) = 0$ quase sempre, então $\|f\|^w_p = 0$. Para finalizar a demonstração do item **(a)**, basta mostrarmos que $\|f\|^w_p = 0$ implica em $f(z) = 0$ quase sempre. Mas, se $\|f\|^w_p = 0$ para algum $1 \leq p \leq \infty$, então, pelo que vimos logo acima da Definição 2.13 vale, utilizando da Proposição (1.2), que

$$\left|\psi\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta\right)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(f(re^{i\theta}))d\theta\right| \leq M_1[\psi \circ f; r] \leq M_p[\psi \circ f; r] = 0$$

para todo $0 < r < 1$ e $\psi \in F'$, implicando em

$$\psi\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta\right) = 0$$

para toda para todo $0 < r < 1$ e $\psi \in F'$. Como consequência do Teorema de Hanh-Banach, temos

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta = 0$$

para todo $0 < r < 1$. Mas isto implica em $f(z) = 0$ quase sempre, obtendo o desejado.

O item **(b)** segue da Proposição 2.15 e do Teorema de Banach-Steinhaus. De fato, se $f \in H^\infty_w(\Delta; F)$, então para cada $\psi \in F'$ temos que o conjunto $\{\psi(f(e^{i\theta}))\}_{0 \leq \theta \leq 2\pi}$ é limitado em $\mathbb{C}$. Logo, pelo teorema citado, $\{f(e^{i\theta})\}_{0 \leq \theta \leq 2\pi}$ também é um conjunto limitado, provando que

$f \in H^\infty(\Delta; F)$. O item **(c)** tem demonstração semelhante àquela que foi dada na Proposição 1.12. O item **(d)** é consequência de **(c)**. ■

Veremos, a partir do Teorema 7.14, que para $1 < p < \infty$, isto nem sempre ocorre:

$$H_w^p(\Delta; F) = H^p(\Delta; F).$$

De fato, temos uma considerável restrição para a quantidade de espaços no qual a igualdade acima ocorre.

Salientamos que para o caso $p = 1$, não obtemos nenhum resultado relacionado com esta igualdade.

2.4 Relação entre $H^p(\Delta, F)$ e $L^p(T; F)$

Lembremos que p e q são sempre índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Proposição 2.17. Seja $g \in L^q(T; F')$ e $1 \leq p < \infty$. Suponha que existe um $A > 0$ tal que

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} < f(e^{i\theta}), g(e^{i\theta}) > d\theta \right| \leq A \|f\|_p,$$

para cada $f \in L^p(T; F)$. Então $\|g\|_q \leq A$.

Demonstração: Seja o operador

$$\begin{array}{rcllll} \Psi : L^q(T; F') & \longrightarrow & (L^p(T; F))' & & \\ g & \longmapsto & S_g : L^p(T; F) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & \qquad f & \longmapsto & \displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} < f(e^{i\theta}), g(e^{i\theta}) > d\theta \end{array}$$

Temos que, para cada $g \in L^q(T; F')$ vale o fato de S_g ser contínua pela Desigualdade de Hölder.

Além do mais, sendo S um mergulho isométrico, independentemente do espaço de Banach F, o que pode ser visto em Diestel e Uhl [13], página 97, temos

$$\sup_{\|f\|_p \leq 1} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} < f(e^{i\theta}), g(e^{i\theta}) > d\theta \right| = \|g\|_q.$$

Pela hipótese, $\|g\|_q \leq A$. ■

Na sequência, definiremos uma propriedade necessária e suficiente que F' deva satisfazer para que o mergulho acima seja sobrejetor. Antes, precisaremos de alguns conceitos.

Definição 2.18. Uma função $\mu : \mathbf{B} \longrightarrow F$ é uma **medida vetorial** se para todos B_1 e B_2 membros disjuntos de $\mathbf{B}$, valer

$$\mu(B_1 + B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2)$$

Definição 2.19. Sejam $\mathbf{B}$ a σ-álgebra de Borel em T e $\mu : \mathbf{B} \longrightarrow F$ uma medida vetorial. Denominamos por variação total de μ em um conjunto $A \subset T$, $A \in \mathbf{B}$, o valor

$$|\mu|(A) = \sup\{\sum_{B \in \Pi} \|\mu(B)\|; \Pi \in \prod(A)\}$$

sendo $\prod(A) = \{\Pi = \{B_1, \ldots, B_n\}$; onde $\{B_j\}_{j=1}^{n}$ é uma partição de A, com cada $B_j \in \mathbf{B}\}$. Além disso, diremos que μ tem variação total limitada se $|\mu|(T) < \infty$.

Definição 2.20. Diremos que uma medida μ é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue m ($\mu \ll m$) se para todo $A \in \mathbf{B}$ tal que $m(A) = 0$, então $\mu(A) = 0$.

Definição 2.21. Um espaço de Banach F tem a propriedade de Radon-Nikodym com respeito ao espaço de medida $(T, \mathbf{B}, m)$, se para toda medida $\mu : \mathbf{B} \longrightarrow F$ de variação limitada com $\mu \ll m$, valer existe $f \in L^1(T; F)$ tal que

$$\mu(A) = \int_A f(\theta) d\theta$$

para todo conjunto mensurável $A \in \mathbf{B}$. Um espaço de Banach F terá a **propriedade de Radon-Nikodym (RNP)**, se F tem a propriedade de Radon-Nikodym com respeito a todo espaço de medida finita.

Teorema 2.22. (Bochner e Taylor [4]) Sejam $1 \leq p < \infty$ e q seu índice conjugado. Então $(L^p(T; F))' = L^q(T; F')$ se, e somente se, F' tem a propriedade de Radon-Nikodym. O isomorfismo S é dado por

$$\begin{array}{rcl} S : L^q(T; F') & \longrightarrow & (L^p(T; F))' \\ g & \longmapsto & S_g : L^p(T; F) \longrightarrow \mathbb{C} \\ & & \qquad f \longmapsto \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} < f(e^{i\theta}), g(e^{i\theta}) > d\theta. \end{array}$$

Demonstração: Ver Diestel e Uhl [13], página 98. ■

Definição 2.23. Um espaço de Banach F tem a **propriedade de Radon-Nikodym analítica (ARNP)** se para todo $1 \leq p \leq \infty$ e toda função $f \in H^p(\Delta; F)$ existirem os limites radiais $\lim\limits_{r \to 1} f(re^{i\theta})$ quase sempre.

Em Dowling [15], é dada uma caracterização da propriedade ARNP de maneira que, podemos mostrar que todo F que satisfaz a propriedade de Radon-Nikodym, também satisfaz ARNP. A inclusão contrária não ocorre sempre, pois temos o exemplo $F = L^1(T)$ (ver [8], página 263).

Ainda em Diestel e Uhl [13], página 76, vemos que todo espaço reflexivo tem a propriedade de Radon-Nikodym e, portanto, tem a propriedade ARNP. Como exemplo de espaço de que não satisfaz ARNP, citamos l_∞ (ver Dowling [17]).

Outros resultados interessantes relacionados à propriedade ARNP, podem ser encontrados em Bukhvalov e Danilevich [6], Dowling [16], [18] e Hensgen [23]. Seguindo o já feito em casos anteriores, definimos o seguinte espaço:

Definição 2.24. Definimos o seguinte subespaço de $L^p(T;F)$:

$$H^p(T;F) = \{f \in L^p(T;F); \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta = 0, n = -1, -2, \ldots\}.$$

Temos que $H^p(T;F)$ é um subespaço fechado de $L^p(T;F)$, pois, por definição é uma intersecção de uma sequência de núcleos de funcionais lineares contínuos. Portanto, $H^p(T;F)$ é um espaço de Banach.

Definição 2.25. Definimos para cada $1 \leq p \leq \infty$

$$H_w^p(T;F) = \{f : T \longrightarrow F; \psi \circ f \in H^p(T), \forall \psi \in F'\}.$$

Se $F = \mathbb{C}$, escrevemos $H^p(T) = H^p(T;\mathbb{C})$.

Definindo para cada $f \in H_w^p(T;F)$

$$\|f\|_p^w = \sup_{\psi \in F', \|\psi\| \leq 1} \|\psi \circ f\|_p$$

e fazendo como antes, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.26. Se F for reflexivo, para $1 \leq p \leq \infty$ valem:

a) $(H_w^p(T;F), \|.\|_p^w)$ é um espaço normado.

b) $(H_w^p(T;F), \|.\|_p^w)$ é isometricamente isomorfo ao espaço $\mathcal{L}(F'; H^p(T))$.

c) $(H_w^p(T;F), \|.\|_p^w)$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Semelhante a que foi feita para a Proposição 2.16. ■

O espaço $H^p(T;F)$ é sempre isometricamente isomorfo a um subespaço de $H^p(\Delta;F)$. De fato, a integral de Cauchy como indicada no próximo teorema, em geral, mergulha $H^p(T;F)$ em um subespaço fechado de $H^p(\Delta;F)$ (ver Dowling [17] e Hensgen [22]). Um estudo mais detalhado sobre integrais de Cauchy, veremos no capítulo 6. Nos artigos de Ryan [34], [35] encontramos a demonstração do seguinte resultado:

Teorema 2.27. (Ryan [34], [35]) Seja F um espaço de Banach reflexivo e separável. Para $1 \leq p \leq \infty$, o espaço $H^p(\Delta; F)$ é isometricamente isomorfo ao espaço $H^p(T; F)$. O isomorfismo existente associa a cada $\tilde{f} \in H^p(T; F)$, a função $f \in H^p(\Delta; F)$ dada pela integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{\tilde{f}(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Além do mais, vale o seguinte limite quase sempre:

$$\tilde{f}(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} f(re^{i\theta}).$$

Posteriormente, Bukhvalov em [5] mostrou o seguinte:

Teorema 2.28. (Bukhvalov [5]) Seja F um espaço de Banach com a propriedade ARNP. Para $1 \leq p \leq \infty$, o espaço $H^p(\Delta; F)$ é isometricamente isomorfo ao espaço $H^p(T; F)$. O isomorfismo existente associa a cada $\tilde{f} \in H^p(T; F)$, a função $f \in H^p(\Delta; F)$ dada pela integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{\tilde{f}(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Além do mais, vale o seguinte limite quase sempre:

$$\tilde{f}(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} f(re^{i\theta}).$$

Observamos que os teoremas de Ryan [34], [35] e Bukhvalov [5] estendem ao caso vetorial um teorema clássico de Riesz [31] no caso escalar.

Bukhvalov, na verdade, mostrou que o fato de F ter a propriedade ARNP é uma condição necessária e suficiente para que o isomorfismo acima exista.

Podemos afirmar que o conjunto formado pelos espaços de Banach com a propriedade ARNP é bastante amplo.

Do último teorema, temos o seguinte corolário:

Corolário 2.29. Sendo $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$ para todo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r < 1$, sob as hipóteses do Teorema 2.28, temos para $1 \leq p \leq \infty$ que se $f \in H^p(\Delta; F)$ então

$$\lim_{r \to 1} \|f_r - \tilde{f}\|_p = 0.$$

Demonstração: Ver Bukhvalov [5]. ■

Denominamos $\tilde{f}$ do Teorema 2.28 como sendo o **valor de fronteira de** f.

Com respeito aos espaços fracamente de Hardy, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2.30. Seja F um espaço de Banach reflexivo. Para $1 \leq p \leq \infty$, o espaço $H^p_w(\Delta; F)$ é isometricamente isomorfo ao espaço $H^p_w(T; F)$. O isomorfismo existente associa a cada $\tilde{f} \in H^p_w(T; F)$, a função $f \in H^p_w(\Delta; F)$ dada pela integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{\tilde{f}(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{f}(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}} d\theta.$$

Além do mais, para cada $\psi \in F'$ vale o seguinte limite quase sempre:

$$\psi \circ \tilde{f}(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} \psi \circ f(re^{i\theta}).$$

Demonstração: Seja $\tilde{f} \in H^p_w(T; F)$. Então, $\psi \circ \tilde{f} \in H^p(T)$ e por Riesz [31] a função f_ψ dada por

$$f_\psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\psi \circ \tilde{f}(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}} d\theta = \psi \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{f}(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}} d\theta \right)$$

é um elemento de $H^p(\Delta)$, sendo a segunda igualdade vinda do item **(a)** da Proposição 1.2. Isto demonstra que se definirmos a função $f : \Delta \longrightarrow F$ por

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{f}(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}} d\theta,$$

então $f \in H^p_w(\Delta; F)$ e a função

$$\begin{array}{rcl} \Psi : H^p_w(T; F) & \longrightarrow & H^p_w(\Delta; F) \\ \tilde{f} & \longmapsto & f \end{array}$$

está bem definida.

Novamente por Riesz [31], temos

$$\|f\|^w_p = \sup_{\psi \in F', \|\psi\| \leq 1} \|\psi \circ f\|_p = \sup_{\psi \in F', \|\psi\| \leq 1} \|f_\psi\|_p = \|\tilde{f}\|^w_p,$$

o que demonstra que Ψ é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem.

Agora vejamos que Ψ é sobrejetora. Seja $f \in H^p_w(\Delta; F)$. Utilizando mais uma vez de Riesz [31], temos que para cada $\psi \in F'$ existe uma única $\tilde{f}_\psi \in H^p(T)$ tal que

$$\psi(f(z)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{f}_\psi(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}} d\theta.$$

para todo $z \in \Delta$. Portanto, podemos definir uma função, para cada $e^{i\theta} \in T$, dada por

$$\begin{array}{rcl} R_\theta : F' & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \psi & \longmapsto & \tilde{f}_\psi(e^{i\theta}), \end{array}$$

é um elemento de F''.

Como F é reflexivo, existe um único $a_\theta \in F$ tal que $R_\theta(\psi) = \psi(a_\theta)$, para todo $\psi \in F'$. Definamos

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f}: T & \longrightarrow & F \\ e^{i\theta} & \longmapsto & a_\theta. \end{array}$$

Neste caso, para todo $e^{i\theta} \in T$ e todo $\psi \in F'$, temos

$$\psi(\tilde{f}(e^{i\theta})) = \psi(a_\theta) = R_\theta(\psi) = \tilde{f}_\psi(e^{i\theta})$$

e, portanto, $\tilde{f} \in H^p_w(T; F)$. Obtemos então que, para todo $\psi \in F'$, vale que

$$\psi(f(z)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\psi(\tilde{f}(e^{i\theta}))}{1 - ze^{-i\theta}} d\theta.$$

Desta maneira, como consequência do Teorema de Hahn-Banach e da da Proposição 1.2, resulta

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\tilde{f}(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}} d\theta.$$

para todo $z \in \Delta$, concluindo o desejado. ■

2.5 Espaços UMD

Um dos primeiros matemáticos a estudar os espaços de Banach UMD (do inglês "Unconditional Martingale Differences") foi Burkholder [7].

Nesta seção, nos preocuparemos apenas em apresentar a definição inicial dos espaços UMD e uma caracterização que será útil no final do trabalho. Como referências para o estudo destes espaços destacamos, dentre outros trabalhos, os de Burkholder [8], [9], [10], além de Bourgain [11], Fernandez e Garcia [21], Rubio de Francia [32] e Veraar [40].

Dando prosseguimento, veremos inicialmente o que é uma martingale. No capítulo 1, apresentamos o espaço de medida $(T, \mathbf{B}, \mu)$, onde T é a circunferência unitária, $\mathbf{B}$ a σ-álgebra de Borel e μ uma medida de Borel. Para nossos estudos, nos restringiremos ao caso onde $\mu = m$, a medida de Lesbegue.

Definição 2.31. Uma sub-σ-álgebra de $\mathbf{B}$ é um subconjunto de $\mathbf{B}$ que contém T e que também é uma σ-álgebra.

Definição 2.32. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $L^1(T; F)$ e $(\mathbf{B_n})_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência crescente ($\mathbf{B_j} \subset \mathbf{B_k}$ se $k \geq j$) de sub-σ-álgebras de $\mathbf{B}$. Diremos que a sequência $((f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mathbf{B_n})_{n\in\mathbb{N}})$ é um **martingale** de $L^1(T; F)$ com valores em F se

- f_n é $\mathbf{B_n}$-mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$.

- $\int_A f_{n+1}(e^{it})dt = \int_A f_n(e^{it})dt$ para todo conjunto A que seja $\mathbf{B_n}$-mensurável.

Definição 2.33. Nas condições da definição anterior, denominaremos **diferença de martingale** a sequência $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfaz $d_n = f_n - f_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, com $f_0 = 0$ e $\mathbf{B_0} = \{\mathbf{T}, \emptyset\}$. Notemos que cada d_n verifica

- d_n é $\mathbf{B_n}$-mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$.
- $\int_A d_{n+1}(e^{it})dt = 0$ para todo A que seja $\mathbf{B_n}$-mensurável.

Caso o leitor se interesse por um estudo mais aprofundado dos martingales, indicamos Doob [14] e Diestel [13].

Definição 2.34. Seja $1 < p < \infty$. Dizemos que uma diferença de martingale $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **incondicional em** $L^p(T; F)$, se existe uma constante $c_p = c_p(F)$ tal que para toda sequência de números $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, valer

$$\|\epsilon_1 d_1 + \ldots + \epsilon_n d_n\|_p \leq c_p \|d_1 + \ldots + d_n\|_p \tag{2.7}$$

Esta definição pode aparentar ser dependente do valor de p. Porém, podemos ver em Maurey [27], página 10, que se existe uma constante c_p tal que a desigualdade (2.7) ocorra para algum $1 < p < \infty$, então existe uma respectiva c_p para cada valor $1 < p < \infty$. Portanto, no lugar de 'incondicional em $L^p(T; F)$', podemos escrever apenas **incondicional**.

Definição 2.35. Um espaço de Banach F é **UMD** se todas as diferenças de martingale são incondicionais.

Vejamos alguns exemplos de espaços UMD. Por Burkholder [8], página 237, se F for UMD, então $l^p(F)$ e $L^p(T; F)$ são espaços UMD para $1 < p < \infty$. Por Holzbecher [25], página 145, temos que subespaços fechados de espaços UMD, também são UMD.

Por Rubio de Francia [32], página 215, temos que se F é UMD, então F é super-reflexivo e, portanto, reflexivo. Para um estudo sobre espaços de Banach super-reflexivos indicamos Fabian e outros [20]. Com isto, concluímos que todo F UMD tem a propriedade ARNP. Ainda, por Rubio de Francia [32], página 205, temos que se F é UMD então F' é UMD. Como todo espaço de Banach F isomorfo a um espaço UMD é também UMD (ver [8], página 237), podemos resumir este parágrafo na seguinte proposição:

Proposição 2.36. Um espaço de Banach F é UMD se, e somente se, seu dual F' é UMD.

No que segue, apresentaremos uma caracterização dos espaços UMD. Antes, algumas definições:

Definição 2.37. Seja $f : T \longrightarrow F$ mensurável com respeito à medida de Lebesgue. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ definimos o respectivo **coeficiente de Fourier** de f por

$$c_{nf} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt.$$

A **série de Fourier** de f é dada por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{nf} e^{int}.$$

Definição 2.38. Nas condições da definição anterior, denominamos como **projeção analítica (ou de Riesz) de** f a função f^a que tem por série de Fourier

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{nf} e^{int}.$$

Teorema 2.39. (Hensgen [22]) Um espaço de Banach F é UMD se, e somente se, o operador

$$\begin{array}{rcl} S : L^p(T; F) & \longrightarrow & H^p(T; F) \\ f & \longmapsto & f^a \end{array}$$

for limitado para todo $1 < p < \infty$.

Em Hensgen [22], podemos ainda encontrar várias outras caracterizações dos espaços UMD a partir desta que apresentada.

Capítulo 3

Espaços Normados do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)$: Axiomas P_1-P_4

Este capítulo e os seguintes têm sua teoria motivada, em grande parte, pelos artigos de Taylor [36], [37]. Porém, nestes artigos todos os resultados são voltados para o caso onde temos funções que assumem apenas valores complexos.

Seja H um espaço normado complexo, onde $H \subset \mathcal{H}(\Delta; F)$. Tal espaço será denominado espaço normado do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)$, se contiver pelo menos dois elementos. Caso H seja Banach, diremos que H é um espaço de Banach do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)$.

Cada um dos espaços $H^p(\Delta; F)$, com $1 \leq p \leq \infty$, estudados no Capítulo 2, é um exemplo de um espaço de Banach do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)$.

Apresentaremos agora, quatro propriedades (ou axiomas) que um espaço normado H do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)$ pode satisfazer. Em todos os casos, teremos $A > 0$.

P_1**:** Existe uma constante A tal que $\|\gamma_n(f)\| \leq A\|f\|$ se $f \in H$ e $n = 0, 1, 2, \ldots$ A menor destas constantes denominamos $A_1(H)$. Portanto, cada $\gamma_n : H \longrightarrow F$ é um operador linear contínuo e $\|\gamma_n\| \leq A_1(H)$.

P_2**:** $u_n^v \in H$ e $\|u_n^v\| \leq A$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ e $v \in F$, com $\|v\| = 1$. A menor de tais constantes será denotada por $A_2(H)$. Assim, $\|u_n^v\| \leq A_2(H)$.

Para os axiomas P_3 e P_4, podemos voltar, se necessário, às definições (2.5) e (2.6).

P_3**:** $U_t f \in H$ se $f \in H$ e $t \in \mathbb{R}$. Ainda, $\|U_t f\| = \|f\|$ e, portanto, U_t é uma isometria.

P_4**:** Se $f \in H$ então $T_r f \in H$ para $0 \leq r < 1$. Além disto, existe uma constante A tal que $\|T_r f\| \leq A\|f\|$, para todo $0 \leq r \leq 1$. A menor constante A que satisfaz as propriedades acima, denominamos $A_4(H)$. Assim, $\|T_r\| \leq A_4(H)$.

Diremos que H é um espaço normado do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_k$ se for um espaço normado do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)$, e satisfaz as propriedades $P_1, \ldots, P_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$.

Denotamos por H' o dual topológico de H. Podemos expressar cada uma das três constantes minimais $A_1(H), A_2(H)$ e $A_4(H)$ da forma:

$$A_1(H) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\gamma_n\| \qquad A_2(H) = \sup_{\substack{v\in F, \|v\|=1 \\ n\in\mathbb{N}}} \|u_n^v\| \qquad A_4(H) = \sup_{0\leq r<1} \|T_r\|.$$

Vejamos agora algumas relações que as constantes $A_k(H)$ podem satisfazer.

Lema 3.1. São válidos os seguintes itens:

a) Se H verifica P_1 e P_2, então

$$A_1(H)A_2(H) \geq 1.$$

b) Se H verifica P_4 e, para algum $n \in \mathbb{N}$ valer que $u_n \in H$ (em particular, se H verifica P_2), então $A_4(H) \geq 1$.

Demonstração: Para o item **(a)** notemos que $\gamma_n(u_n^v) = v$. Portanto se os axiomas P_1 e P_2 se verificam, então:

$$1 = \|\gamma_n(u_n^v)\| \leq \|\gamma_n\|\|u_n^v\| \Rightarrow 1 \leq A_1(H)A_2(H).$$

Para o item **(b)**, comecemos observando que $T_r(u_n^v) = r^n u_n^v$. Assim, se $u_n^v \in H$ para algum valor particular de n, e se P_4 se verifica, temos para $0 \leq r < 1$:

$$r^n\|u_n^v\| = \|T_r(u_n^v)\| \leq \|T_r\|\|u_n^v\| \leq \sup_{0\leq r<1} \|T_r\|\|u_n^v\| = A_4(H)\|u_n^v\|$$

e portanto,

$$A_4(H) \geq 1. \tag{3.1}$$

■

Como exemplos de espaços normados do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_4$, citamos os espaços $H^p(\Delta; F)$, com $1 \leq p \leq \infty$. As duas proposições seguintes justificam esta afirmação. Antes, vejamos um lema:

Lema 3.2. Se $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$, então para cada $n \in \mathbb{N}$ e $0 < r < 1$ vale

$$r^n\gamma_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta.$$

Demonstração: Lembremos do fato que f pode ser expressa como a série

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j(f)z^j,$$

onde $\gamma_j(f) \in F$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Considerando o fato de que a série acima converge uniformemente em discos abertos $D_r = \{z; |z| < r\}$, para $0 < r < 1$, tomando um valor de r no intervalo dado, obtemos para cada $n \in \mathbb{N}$ a igualdade

$$r^n \gamma_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Proposição 3.3. Se $1 \leq p < \infty$, $H^p(\Delta, F)$ é um espaço normado do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_4$. Além disso, $A_k(H^p(\Delta, F)) = 1$, para $k = 1, 2, 4$.

Demonstração: Já vimos que $H^p(\Delta; F)$ é um espaço normado, pela própria Definição 2.21. Provaremos separadamente que $H^p(\Delta, F)$ satisfaz cada uma das propriedades (axiomas) $P_1 - P_4$. Consideremos $f \in H^p(\Delta, F)$.

P_1**:** Se $0 < r < 1$, então

$$r^n \gamma_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Assim, como vimos em (2.2):

$$r^n \|\gamma_n(f)\| \leq M_1[f; r] \leq M_p[f; r] \leq \|f\|_p.$$

Logo, $\|\gamma_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e P_1 é satisfeito, com $A_1(H^p(\Delta, F)) \leq 1$.

P_2**:** Basta ver que

$$M_p[u_n^v; r] = r^n,$$

o que justifica que $u_n^v \in H^p(\Delta, F)$ e $\|u_n^v\|_p = 1$ para todo $v \in F$, com $\|v\| = 1$. Logo $A_2(H^p(\Delta; F)) = 1$.

Ainda, no Lema 3.1 vimos que $1 \leq A_1(H) A_2(H)$, para todo espaço H do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)$. Logo, com $H = H^p(\Delta, F)$, obtemos que

$$1 \leq A_1(H^p(\Delta, F)) A_2(H^p(\Delta, F)) \leq 1,$$

e portanto

$$A_1(H^p(\Delta, F)) = A_2(H^p(\Delta, F)) = 1.$$

P_3**:** Para $t \in \mathbb{R}$, temos:

$$M_p[U_t f; r] = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(re^{i\theta} e^{it})\|^p d\theta \right)^p = M_p[f; r]$$

e assim, segue imediatamente que P_3 é satisfeito.

P_4**:** São válidas as seguintes igualdades para $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$ e $\rho > 0$ tal que $0 \leq r < \rho < 1$:

$$M_p[T_r f; \rho] = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|T_r f(\rho e^{i\theta})\|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f(r\rho e^{i\theta})\|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} = M_p[f; r\rho]. \quad (3.2)$$

E daí segue que se $f \in H^p(\Delta, F)$, então $T_r f \in H^p(\Delta, F)$ e $\|T_r f\|_p \leq \|f\|_p$ para todo $0 \leq r < 1$, e portanto $A_4(H^p(\Delta, F)) \leq 1$. Como, pelo Lema 3.1, $A_4(H) \geq 1$ para todo H do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)$, segue que $A_4(H^p(\Delta; F)) = 1$.

Do que vimos na equação 3.2, podemos afirmar que para cada $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$ vale

$$\|T_r f\|_p = M_p[f; r]. \quad (3.3)$$

Isto obtemos a partir de resultados que podem ser encontrados em Rudin [33], páginas 329 e 330, pois, destes podemos mostrar que a função $r \longmapsto M_p[f; r]$ é crescente. Os resultados que lá encontramos, estão relacionados com funções de valores complexos, mas podem ser estendidos para funções com valores num espaço de Banach F qualquer. ■

Proposição 3.4. $H^\infty(\Delta, F)$ é um espaço normado do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_4$. Além disso, $A_k(H^\infty(\Delta, F)) = 1$, para $k = 1, 2, 4$.

Demonstração: No que segue, verificaremos que $H^\infty(\Delta, F)$ satisfaz os axiomas $P_1 - P_4$. Aqui $f \in H^\infty(\Delta, F)$.

P_1 : Se $0 \leq r < 1$, então

$$r^n \gamma_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Logo resulta

$$r^n \|\gamma_n(f)\| \leq M_1[f; r] \leq M_p[f; r].$$

Fazendo $p \to \infty$ e $r \to 1$ acima, resulta

$$\|\gamma_n(f)\| \leq \|f\|_\infty \Longrightarrow \|\gamma_n\| \leq 1.$$

e portanto, P_1 é satisfeito por $H^\infty(\Delta, F)$ e $A_1(H^\infty(\Delta; F)) \leq 1$.

P_2 : Para todo $v \in F$, com $\|v\| = 1$, vale para $1 \leq p < \infty$:

$$M_p[u_n^v; r] = r^n,$$

e daí temos

$$M_\infty[u_n^v; r] = \lim_{p \to \infty} M_p[u_n^v; r] = r^n.$$

resultando que $\|u_n^v\|_\infty = 1$, obtendo que P_2 é satisfeito e $A_2(H^\infty(\Delta, F)) = 1$.

Como $A_1(H)A_2(H) \geq 1$, segue que $A_1(H^\infty(\Delta; F)) = 1$ e $A_2(H^\infty(\Delta; F)) = 1$.

P_3 : Podemos ver sem grandes dificuldades que para $t \in \mathbb{R}$ e $1 \leq p < \infty$:

$$M_p[U_t f; r] = M_p[f; r]$$

e isto soluciona todo nosso problema. Pois daí, se $f \in H^\infty(\Delta, F)$, então $U_t f \in H^\infty(\Delta, F)$ e $\|U_t f\|_\infty = \|f\|_\infty$.

P_4 : De $\|T_r f\|_\infty = M_\infty[f; r]$, é claro que $T_r f \in H^\infty(\Delta, F)$ se $f \in H^\infty(\Delta, F)$ e $\|T_r f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Assim, $A_4(H^\infty(\Delta, F)) \leq 1$. Como $A_4(H^\infty(\Delta, F)) \geq 1$, segue que $A_4(H^\infty(\Delta, F)) = 1$. ■

Proposição 3.5. Se $1 \leq p \leq \infty$, então $H_w^p(\Delta; F)$ é um espaço normado do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_4$. Além disso, $A_k(H_w^p(\Delta; F)) = 1$, para $k = 1, 2, 4$.

Demonstração: Basta vermos que $H_w^p(\Delta; F)$ satisfaz cada uma das propriedades $P_1 - P_4$. Em toda a demonstração, $f \in H_w^p(\Delta; F)$.

P_1: Temos que f é fracamente holomorfa e, portanto, holomorfa como já comentamos. Assim, para $0 \leq r < 1$, vale que

$$r^n \gamma_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

Sendo $\psi \in F'$, resulta pela Proposição 1.2

$$\psi(r^n \gamma_n(f)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(f(re^{i\theta}) e^{-in\theta}) d\theta$$

Portanto, aplicando a desigualdade 2.2 temos, utilizando do Teorema de Hahn-Banach, que

$$r^n \|\gamma_n(f)\| = \sup_{\psi \in F', \|\psi\| \leq 1} |\psi(r^n \gamma_n(f))| \leq \sup_{\psi \in F', \|\psi\| \leq 1} M_1[\psi \circ f; r] \leq \sup_{\psi \in F', \|\psi\| \leq 1} M_p[\psi \circ f; r] \leq \|f\|_p^w$$

Logo, $\|\gamma_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e P_1 é satisfeito com $A_1(H_w^p(\Delta; F)) \leq 1$.

P_2: Basta notarmos que para cada $\psi \in F'$

$$M_p[\psi \circ u_n^v; r] = r^n \psi(v)$$

o que justifica, tomando o supremo sobre o conjunto $\{\psi \in F'; \|\psi\| \leq 1\}$, que $u_n^v \in H_w^p(\Delta; F)$ e $\|u_n^v\|_p^w = 1$ para todo $v \in F$ com $\|v\| = 1$. Procedendo agora como na demonstração da Proposição 3.3, demonstramos que $A_2(H_w^p(\Delta; F)) = 1$.

P_3: Para $t \in \mathbb{R}$ e $\psi \in F'$, temos:

$$M_p[\psi \circ U_t f; r] = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\psi(f(re^{i\theta}e^{it}))\|^p d\theta \right)^p = M_p[\psi \circ f; r]$$

assim, segue imediatamente que P_3 é satisfeito, bastando tomar o supremo para $0 \leq r < 1$ e depois sobre o conjunto $\{\psi \in F'; \|\psi\| \leq 1\}$.

P_4: Para cada $\psi \in F'$, são válidas as seguintes igualdades:

$$M_p[\psi \circ T_r f; \rho] = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\psi \circ T_r f(\rho e^{i\theta})\|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\psi \circ f(r\rho e^{i\theta})\|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} = M_p[\psi \circ f; r\rho]$$

E daí segue que se $f \in H^p_w(\Delta; F)$, então $T_r f \in H^p_w(\Delta; F)$ e $\|T_r f\|^w_p \leq \|f\|^w_p$ para todo $0 \leq r < 1$. Portanto, $A_4(H^p_w(\Delta; F)) \leq 1$ e como $A_4(H) \geq 1$ para todo H do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)$, segue que $A_4(H^p_w(\Delta; F)) = 1$.

O caso $p = \infty$, segue diretamente do caso $1 \leq p < \infty$, de forma semelhante ao que ocorre para a demonstração da Proposição 3.4. ■

3.1 Espaços Normados do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_1$

Analisaremos nesta seção, algumas consequências do axioma P_1.

Proposição 3.6. Se H é um espaço normado do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_1$, $f \in H$ e $z \in \Delta$, temos:

$$\|f(z)\| \leq \frac{A_1(H)\|f\|}{1 - |z|}.$$

Demonstração: Podemos expressar f da forma seguinte:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(f) z^n.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|f(z)\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\gamma_n(f)\| |z|^n \\ &\leq A_1(H)\|f\| \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n \\ &= \frac{A_1(H)\|f\|}{1 - |z|}. \end{aligned}$$

Desta proposição, notamos que para cada $z \in \Delta$, $W_z(f) = f(z)$ é uma transformação linear contínua $W_z : H \to F$, com norma não excedendo

$$\frac{A_1(H)}{1-|z|}.$$

A partir desta proposição, podemos demonstrar o seguinte importante resultado:

Proposição 3.7. Para $1 \leq p \leq \infty$, $H^p(\Delta; F)$ é um espaço de Banach do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_4$.

Demonstração: Só falta provar que $H^p(\Delta; F)$ é completo. Suponhamos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência de Cauchy no espaço $H^p(\Delta, F)$. Segue da Proposição 3.6, que $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy para cada $z \in \Delta$.

Seja $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$, o que podemos fazer, desde que F é Banach. Além disso, a sequência $\{\|f_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, digamos por $A > 0$. Utilizando da fórmula integral de Cauchy para funções com valores vetoriais, resulta para $|z| \leq r < R < 1$:

$$f_n(z) - f_m(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f_n(Re^{i\theta}) - f_m(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta} - z} d\theta$$

e disto vem

$$\begin{aligned}(R-r)\|f_n(z) - f_m(z)\| \quad &\leq M_1(f_n - f_m; R) \\ &\leq M_p(f_n - f_m; R) \\ &\leq \|f_n - f_m\|_p.\end{aligned}$$

para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Agora, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n \geq n_0$, temos

$$(R-r)\|f_n(z) - f_m(z)\| < \epsilon,$$

para todo $|z| \leq r$, e fazendo $n \to \infty$ resulta:

$$\|f(z) - f_m(z)\| < \epsilon/(R-r),$$

donde concluímos que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente sobre conjuntos compactos. Portanto, $f_n \longrightarrow f$ converge na topologia compacto-aberta τ_c que é a topologia gerada pela família de semi-normas da forma

$$f \longrightarrow \sup_{z\in K} \|f(z)\|,$$

onde K varia entre todos os subconjuntos compactos de Δ.

Em Mujica [28], podemos ver na página 72 que $\mathcal{H}(\Delta; F)$ é um espaço completo com a topologia τ_c. Logo, temos que $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$.

Ainda, pela convergência uniforme logo acima citada,

$$\lim_{n\to\infty} M_p[f_n; r] = M_p[f; r]$$

e como $\|f_n\|_p \leq A$, pelo que supomos acima, então $M_p[f;r] \leq A$, para todo $0 \leq r < 1$ concluindo que $f \in H^p(\Delta, F)$.

Novamente, tomando $\epsilon > 0$, escolhamos $n_1(\epsilon)$ tal que $m, n \geq n_1(\epsilon)$ implique em $\|f_m - f_n\|_p < \epsilon$, para $m, n \geq n_1(\epsilon)$. Então obtemos para estes valores de m e n que

$$M_p[f_n - f_m; r] < \epsilon$$

e fazendo $n \to \infty$ nós temos

$$M_p[f - f_m; r] \leq \epsilon,$$

obtendo que para $m \geq n_1(\epsilon)$, vale

$$\|f - f_m\|_p \leq \epsilon,$$

completando a prova. ■

Proposição 3.8. Para $1 \leq p \leq \infty$, $H^p_w(\Delta; F)$ é um espaço de Banach do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_4$.

Demonstração: Como feito na demonstração da Proposição 3.5, aqui também utilizamos de uma das consequências do Teorema de Hahn-Banach:

$$\|y\| = \sup_{\|\psi\| \leq 1, \psi \in F'} |\psi(y)|,$$

para todo $y \in F$. A partir disto, basta proceder como na demonstração da Proposição 3.7 e utilizar da Proposição 1.4.■

Proposição 3.9. Seja H um espaço normado do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_1$. Suponhamos que $f, f_n \in H$ e $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$. Então $f_n \longrightarrow f$ uniformemente em subconjuntos compactos de Δ.

Demonstração: Consequência imediata da Proposição 3.6. ■

Proposição 3.10. Sejam H_1 e H_2 espaços de Banach do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_1$, tais que $H_1 \subset H_2$. Se $f \in H_1$, então $\|f\|_{H_1}$ e $\|f\|_{H_2}$ denotam as normas de f como elemento de H_1 e H_2 respectivamente. Existe uma constante A dependendo somente de H_1 e H_2, tal que $\|f\|_{H_2} \leq A\|f\|_{H_1}$.

Demonstração: A prova se resume a mostrar que a inclusão $i : H_1 \longrightarrow H_2$ é limitada como um operador de H_1 em H_2.

Como H_1 e H_2 são espaços de Banach, basta provar que esta função i tem o gráfico fechado. Sejam então $f, f_n \in H_1$ e $g \in H_2$, de maneira que

$$\|f_n - f\|_{H_1} \longrightarrow 0 \qquad \text{e} \qquad \|f_n - g\|_{H_2} \longrightarrow 0.$$

Pela Proposição 3.9, $f_n \longrightarrow f$ e $f_n \longrightarrow g$ uniformemente em subconjuntos compactos de Δ. Logo, só podemos ter $f = g$.

Portanto, o gráfico da função i é fechado e, temos provado a continuidade da mesma como desejado. ■

Fixemos agora $z \in \Delta$ e $g \in \mathcal{H}(\Delta; F')$. Tomando $f \in H$, um espaço normado do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_1$, temos:

$$B(f, g; z) = \sum_{n=0}^{\infty} < \gamma_n(f), \gamma_n(g) > z^n.$$

Donde:

$$|B(f, g; z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\gamma_n(f)\|.\|\gamma_n(g)\||z|^n \leq \|f\| A_1(H) \sum_{n=0}^{\infty} \|\gamma_n(g)\||z|^n$$

ou seja, $B(., g; z)$ define um funcional linear contínuo $W_{g,z} : H \longrightarrow \mathbb{C}$, com norma não superando o valor

$$A_1(H) \sum_{n=0}^{\infty} \|\gamma_n(g)\||z|^n.$$

Isto motiva a próxima definição:

Definição 3.11. Quando H é do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_1$, definimos para $g \in \mathcal{H}(\Delta, F')$ e $z \in \Delta$

$$N(g; z) = \sup_{\|f\|=1} |B(f, g; z)|$$

onde f varia em H e, $\|f\|$ denota a norma de f em H. $N(g; z)$ admite as seguintes propriedades:

1. $N(g + h; z) \leq N(g; z) + N(h; z)$;
2. $N(ag; z) = |a| N(g; z)$;
3. $N(T_w g; z) = N(g; wz)$, $|w| \leq 1$.

Os dois primeiros itens são fáceis de se concluir. Vejamos o último:

$$\begin{aligned} N(T_w g; z) &= \sup_{\|f\|=1} |B(f, T_w g; z)| \\ &= \sup_{\|f\|=1} |\sum_{n=0}^{\infty} w^n < \gamma_n(f), \gamma_n(g) > z^n| \\ &= \sup_{\|f\|=1} |\sum_{n=0}^{\infty} < \gamma_n(f), \gamma_n(g) > (wz)^n| \\ &= \sup_{\|f\|=1} |B(f, g; wz)| \\ &= N(g; wz). \end{aligned}$$

3.2 Espaços Normados do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_2$

Proposição 3.12. Seja H um espaço de Banach do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_2$. Se $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$ e $w \in \Delta$, então $T_w f \in H$. Como uma função de w, $T_w f$ é analítica em Δ, com a expansão da série de potências:

$$T_w f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . u_n^{v_n}, \tag{3.4}$$

onde

i) $a_n = \|\gamma_n(f)\| w^n$ e $v_n = \dfrac{\gamma_n(f)}{\|\gamma_n(f)\|}$, caso $\gamma_n(f) \neq 0$;

ii) $a_n = 0 \in \mathbb{C}$ e $v_n = 0 \in F$, caso contrário.

Demonstração: A série em (3.4) é convergente em H, pois a mesma é absolutamente convergente e H é Banach. Esta convergência absoluta vem do seguinte:

$$\begin{aligned} \| \|\gamma_n(f)\| . w^n . u_n^{v_n} \| &\leq \|\gamma_n(f)\| . |w^n| . \|u_n^{v_n}\| \\ &\leq \|\gamma_n(f)\| . |w^n| . A_2(H), \end{aligned}$$

e da série

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(f) w^n$$

ser absolutamente convergente, pois f é analítica.

Para mostrar que $T_w f$ é a série em (3.4), fixamos w e escrevemos:

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} \|\gamma_k(f)\| w^k u_k^{v_k}, \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} \|\gamma_k(f)\| u_k^{v_k}.$$

Então,

$$T_w s_n = \sum_{k=0}^{n} \|\gamma_k(f)\| w^k u_k^{v_k}$$

e assim, $\|T_w s_n - g\| \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$. Observamos que $T_w s_n \in H$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $w \in \Delta$, pois H satisfaz P_2 e é espaço vetorial. Portanto, $g \in H$ porque H é completo.

Seja $T_w s_n = g_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $g_n \longrightarrow g$ uniformemente em subconjuntos compactos, pela Proposição 3.9.

Mas nós vemos que $g_n(z) \longrightarrow f(wz)$. Portanto, $g(z) = f(wz)$, ou seja, $g = T_w f$. Isto prova que $T_w f \in H$ e que pode ser representado como na série 3.4. Logo, $T_w f$ é analítica em w. ■

Proposição 3.13. Seja H um espaço de Banach do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_2$, e seja $f(z)$ analítica em algum disco $|z| < R$, onde $R > 1$. Então $f \in H$, quando restrita a Δ.

Demonstração: Definamos $g(z) = f(Rz)$, com $z \in \Delta$. Então $g \in \mathcal{H}(\Delta; F)$ e $T_w g = f$ se $w = R^{-1}$. Agora apliquemos a Proposição 3.12.■

3.3 Espaços Normados do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_3$

Veremos nesta seção, importantes propriedades da função apresentada na Definição (3.11). Antes, apresentaremos um teorema atribuído ao matemático francês Jacques S. Hadamard (1865-1963). Podemos ver demonstrações do mesmo em [12] página 137, ou em [39] página 172.

Teorema 3.14. (Teorema das Três Circunferências de Hadamard)
Sejam $0 < R_1 < R_2 < \infty$ e suponhamos que uma função f seja analítica no anular $R_1 < |z| < R_2$. Se $R_1 < r < R_2$, definamos

$$\Upsilon(r) = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(re^{i\theta})|$$

Então para $R_1 < r_1 \leq r \leq r_2 < R_2$, vale que

$$\log(\Upsilon(r)) \leq \frac{\log(r_2) - \log(r)}{\log(r_2) - \log(r_1)} \log(\Upsilon(r_1)) + \frac{\log(r) - \log(r_1)}{\log(r_2) - \log(r_1)} \log(\Upsilon(r_2)). \tag{3.5}$$

Observação: Uma outra forma de expressar o Teorema de Hadamard é dizer que $\log(\Upsilon(r))$ é uma função convexa de $\log(r)$. Para este trabalho, sempre $0 \leq r < 1$.

Dando prosseguimento, vamos a um corolário deste teorema. Apesar de conhecida, escrevemos a demonstração abaixo:

Corolário 3.15. Se $\log(\Upsilon(r))$ é uma função convexa de $\log(r)$, então $\log(\Upsilon)$ é função contínua de r e, portanto, Υ é uma função contínua de r.

Demonstração: Se demonstrarmos que $\log(\Upsilon)$ é contínua, compondo com a exponencial, resulta que Υ é contínua. Demonstraremos apenas que

$$\log(\Upsilon(r)) = \lim_{s \to r^+} \log(\Upsilon(s)).$$

Da mesma forma, podemos obter a igualdade para o limite à esquerda, ou seja,

$$\log(\Upsilon(r)) = \lim_{s \to r^-} \log(\Upsilon(s)),$$

e assim, a continuidade de $\log(\Upsilon)$. Na expressão dada em (3.5), consideremos inicialmente r fixo e r_2 variável. Obtemos então, a desigualdade

$$\log(\Upsilon(r)) \leq \lim_{r_2 \to r} \log(\Upsilon(r_2)),$$

ou ainda, podemos dizer que

$$\log(\Upsilon(r)) \leq \lim_{s\to r^+} \log(\Upsilon(s)). \tag{3.6}$$

Agora, vamos assumir em (3.5) que r_1 é fixo e r é variável, obtendo a desigualdade

$$\lim_{r\to r_1} \log(\Upsilon(r)) \leq \log(\Upsilon(r_1)),$$

ou ainda, como antes, podemos dizer que

$$\lim_{s\to r^+} \log(\Upsilon(s)) \leq \log(\Upsilon(r)). \tag{3.7}$$

A partir das desigualdades (3.6) e (3.7) concluímos o desejado. ■

Proposição 3.16. Seja $\mathcal{M}$ um subconjunto não-vazio de $\mathcal{H}(\Delta, F)$, com a propriedade que $U_t f \in \mathcal{M}$, se $t \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{M}$. Suponhamos que para cada $f \in \mathcal{M}$, exista $M(f;z) \in \mathcal{H}(\Delta)$ com as propriedades:

a) $M(U_t f; z) = M(f; ze^{it}), t \in \mathbb{R}, z \in \Delta$;

b) Para $z \in \Delta$ fixado, $M(f;z)$ é limitado quando f varia sobre $\mathcal{M}$.

Seja $M(z)$ definido por

$$M(z) = \sup_{f\in\mathcal{M}} |M(f;z)|.$$

Então:

1) $M(z) = M(|z|)$;

2) $M(r)$ é uma função crescente de r;

3) $M \equiv 0$ ou $M(r) > 0$ para todo $0 \leq r < 1$. No segundo caso, $\log(M(r))$ é uma função convexa de $\log(r)$.

Demonstração: Notemos inicialmente, que para cada $t \in \mathbb{R}$, $\{U_t f\}_{f\in\mathcal{M}} = \{f\}_{f\in\mathcal{M}}$, pois para cada $t \in \mathbb{R}$, $U_t f \in \mathcal{M}$ e se $f \in \mathcal{M}$ então $f = U_t(\underbrace{U_{-t} f}_{\in\mathcal{M}})$.

Portanto, para cada $t \in \mathbb{R}$:

$$M(z) = \sup_{f\in\mathcal{M}} |M(f;z)| = \sup_{f\in\mathcal{M}} |M(U_t f;z)| = \sup_{f\in\mathcal{M}} |M(f;ze^{it})| = M(ze^{it}).$$

Tomando $s \in \mathbb{R}$, onde $z = |z|e^{is}$, decorre que

$$M(z) = M(ze^{-is}) = M(|z|).$$

Agora vejamos o item (2). Sejam $0 < r_1 < r_2 < 1$, $f \in \mathcal{M}$. Em cada circunferência $|z| = r_k$, a função $|M(f;z)|$ assume seu máximo em algum ponto $z = z_k$ $(k = 1, 2)$. Pelo Teorema do Módulo Máximo, temos

$$|M(f;z_1)| \leq |M(f;z_2)|$$

Mas, pela definição e pelo item (1),

$$|M(f;z_2)| \leq M(z_2) = M(|z_2|) = M(r_2)$$

e, portanto,

$$|M(f;z_1)| \leq |M(f;z_2)| \leq M(r_2) \Longrightarrow M(r_1) \leq M(r_2),$$

sendo a implicação obtida utilizando-se novamente do item (1) e da definição de $M(z)$. Isto conclui o item (2).

Para o item (3), vamos utilizar o Teorema de Hadamard 3.14. Se $0 < r_1 < r_3 < r_2 < 1$, sejam $M_k = M(r_k)$, $k = 1, 2, 3$. Escrevemos, para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$

$$n_{ij} = \log(\frac{r_i}{r_j})$$

e assumiremos que a função τ dada por $\tau(z) = |M(f;z)|$ atinge seu máximo na circunferência $|z| = r_k$ no ponto $z = z_k$. Pelo Teorema de Hadamard, obtemos:

$$|M(f;z_3)|^{n_{21}} \leq |M(f;z_1)|^{n_{23}}.|M(f;z_2)|^{n_{31}}$$

e, portanto,

$$|M(f;z_3)|^{n_{21}} \leq M_1^{n_{23}} M_2^{n_{31}}$$

e desde que $|M(f;r_3)| \leq |M(f;z_3)|$, vem

$$M_3^{n_{21}} \leq M_1^{n_{23}} M_2^{n_{31}}. \tag{3.8}$$

Desta última desigualdade e do item (2) da proposição, segue que se $M(r) = 0$ para algum valor de r, então $M \equiv 0$. A convexidade segue como uma consequência da desigualdade 3.8. ■

Proposição 3.17. Seja H um espaço normado do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_3$. Então a função $N(g;z)$, da Definição 3.11, tem as seguintes propriedades:

1. $N(g;z) = N(g;|z|)$, onde $g \in \mathcal{H}(\Delta, F')$ e $z \in \Delta$;

2. Se definirmos $N(g;r) = N(g;z)$ onde $|z| = r$, então $N(g;r)$ é uma função crescente de r;

3. $N(g;r) = 0$ para todo $0 \leq r < 1$ se, e somente se, $g = 0$;

4. Se $g \neq 0$, $\log(N(g;r))$ é uma função convexa de $\log(r)$, se $0 < r < 1$;

5. $N(g;.)$ é uma função contínua de r, para $0 < r < 1$.

Demonstração: Tomemos como $\mathcal{M}$ da Proposição 3.16 a esfera unitária de H e vejamos que faz sentido tomar

$$M(f;z) = B(f,g;z), \tag{3.9}$$

onde $g \in \mathcal{H}(\Delta, F')$ é fixo.

De (3.9),

$$M(z) = \sup_{f \in \mathcal{M}} |M(f;z)| = \sup_{f \in \mathcal{M}} |B(f,g;z)| = N(g;z).$$

Como H é do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_3$, pelo que vimos logo antes da Definição 3.11 vale que $M(f;z)$ é limitado quando f varia sobre $\mathcal{M}$. Finalmente, do item (2) da Proposição 2.9, obtemos diretamente que para $t \in \mathbb{R}$:

$$M(U_t f; z) = M(f; ze^{it}).$$

Agora, a partir da Proposição 3.16, obtemos os itens (1), (2) e, supondo que (3) vale, obtemos também (4). Faltam serem demonstrados os itens (3) e (5).

Comecemos pelo item (3). Pela definição de $N(g;r)$, é fácil ver que se $g = 0$, então para todo $0 < r < 1$ temos $N(g;r) = 0$, pois neste caso, $\gamma_n(g) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica em $B(f,g;r) = 0$ para todo $f \in H$.

Agora para a outra implicação, suponhamos $g \neq 0$. Daí $\gamma_n(g) \neq 0$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Tomemos $f = u_n^v$, com $v \in F, \|v\| = 1$ tal que $< v, \gamma_n(g) > \neq 0$. Resulta então, $B(f,g;r) = r^n < v, \gamma_n(g) > \neq 0$. Ainda, $f \in H$, pois H é do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_3$ e, assim, satisfaz P_2. De $\|f\| \neq 0$, temos

$$\left| \frac{B(f,g;r)}{\|f\|} \right| > 0$$

e logo,

$$N(g;r) = \sup_{\|f\|=1, f \in H} |B(f,g;r)| \neq 0.$$

Portanto, se $N(g;r) = 0$, então $g = 0$.

Analisemos o item (5). Se para algum $0 < r < 1$ valer $N(g;r) = 0$, então pelo que acabamos de demonstrar vale $g = 0$ e concluímos. Portanto, só resta a outra possibilidade de $N(g;r) \neq 0$ para todo $0 < r < 1$. A continuidade, neste caso, é uma consequência do item (4) e do Corolário 3.15. ■

Proposição 3.18. Seja H um espaço normado do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_3$, e seja $f \in H$. Então:

1. $\|T_w f\| = \|T_r f\|$ se $|w| = r < 1$;
2. $\|T_r f\|$ é uma função contínua e crescente de r.

Demonstração: Para o item (1), tomemos $w = re^{it}$. Então $T_w f = U_t T_r f$. Daí, pelo axioma P_3

$$\|T_w f\| = \|U_t T_r f\| = \|T_r f\|,$$

demonstrando a primeira afirmação.

Para o item 2, lembremos da Proposição 3.12. Lá, vemos que $T_w f$ é uma função holomorfa em w e, disto, contínua. Utilizando o Teorema 2.12 e o item (1), notamos que se $\|T_r\|$ não é função crescente de r, então podemos mostrar que a esta mesma função é constante. Portanto, só podemos ter $\|T_r\|$ constante ou, no caso de não ser constante, crescente. Em resumo, afirmamos que $\|T_r\|$ é crescente como função de r. ■

Capítulo 4

Os Axiomas P_5,P_6 e P_7

Introduziremos agora, mais três axiomas que um espaço do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)$ pode satisfazer.

P_5: Se $f \in H$, então $T_r f \in H$ para cada $0 \leq r < 1$ e $\|f\| = \sup_{0 \leq r < 1} \|T_r f\|$.
P_6: Se $f \in H$, então $T_r f \in H$ para cada $0 \leq r < 1$ e $\lim_{r \to 1} \|T_r f - f\| = 0$.
P_7: Se $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$ é tal que $T_r f \in H$ para cada $0 \leq r < 1$ e

$$\sup_{0 \leq r < 1} \|T_r f\| < \infty$$

então $f \in H$ e

$$\|f\| = \sup_{0 \leq r < 1} \|T_r f\|.$$

Proposição 4.1. São válidas as seguintes implicações:
i) P_5 implica em P_4 e $A_4(H) = 1$;
ii) P_4 e P_7 implicam em P_5;
iii) Se H for normado do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_3$, então P_6 implica em P_5.

Demonstração: Os dois primeiros itens são simples de serem provados. Para o terceiro, lembremos que no segundo item da Proposição 3.18 mostramos que $\|T_r f\|$ é uma função crescente de r. De P_6

$$\lim_{r \to 1} |\|T_r f\| - \|f\|| \leq \lim_{r \to 1} \|T_r f - f\| = 0.$$

Logo,

$$\lim_{r \to 1} \|T_r f\| = \|f\|$$

e portanto, pela última proposição citada

$$\|f\| = \sup_{0 \leq r < 1} \|T_r f\|.$$

demonstrando a afirmação **iii)**. ■

Antes de darmos continuidade ao estudo teórico, vejamos alguns exemplos.

Proposição 4.2. $H^{\infty}(\Delta, F)$ satisfaz P_7 e, como já vimos que satisfaz P_4, temos que satisfaz P_5. Mas, não satisfaz o axioma P_6.

Demonstração: Inicialmente, mostremos que

$$\|T_r f\|_{\infty} = M_{\infty}[f; r]. \tag{4.1}$$

Já sabemos que $M_p[T_r f; \rho] = M_p[f; r\rho]$ para $p \geq 1$ e $0 \leq r < \rho < 1$ (ver equação 3.2, página 24). Consequentemente,

$$\lim_{p\to\infty} M_p[T_r f; \rho] = \lim_{p\to\infty} M_p[f; r\rho],$$

Usando a equação 2.4 concluímos daí que

$$M_{\infty}[T_r f; \rho] = \max_{|z|=r\rho} \|f(z)\| \tag{4.2}$$

para todo ρ tal que $0 \leq r < \rho < 1$.

Em particular, a equação 4.2 vale para todo $0 \leq \rho < 1$ e, utilizando o Teorema 2.12, obtemos

$$\|T_r f\|_{\infty} = \sup_{0\leq\rho<1} M_{\infty}[T_r f; \rho] = \max_{|z|=r} \|f(z)\| = M_{\infty}[f; r]$$

e, assim, temos (4.1).

Daí, se tivermos $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$ tal que $T_r f \in H^{\infty}(\Delta, F)$ para cada $0 \leq r < 1$ e

$$\sup_{0\leq r<1} \|T_r f\|_{\infty} < \infty,$$

então obtemos

$$\sup_{0\leq r<1} M_{\infty}[f; r] < \infty,$$

resultando em $f \in H^{\infty}(\Delta, F)$. Mas isto é justamente o axioma P_7.

Vejamos que o axioma P_6 não é satisfeito. Dada $f \in H^{\infty}(\Delta; F)$, suponhamos válido o limite

$$\lim_{r\to 1} \|T_r f - f\|_{\infty} = 0.$$

Tomemos uma sequência $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, 1)$ com $r_n \to 1$. Para um dado $\epsilon > 0$, podemos então encontrar um $n(\epsilon)$ tal que para todo $z \in \Delta$ e $m, n \geq n(\epsilon)$ vale

$$\|f(r_n z) - f(r_m z)\| \leq \|T_{r_n} f - T_{r_m} f\|_{\infty} < \epsilon.$$

Agora sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_{r_n}(z) = f(r_n z)$ é contínua e, $\{f_{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente convergente em $|z| \leq 1$. Portanto, a função limite, que é a própria f quando restrita a Δ, é contínua no disco unitário fechado. Ou seja, afirmar que P_6 é satisfeito por $H^\infty(\Delta, F)$, seria o mesmo que dizer que toda função $f \in H^\infty(\Delta, F)$ é contínua no disco fechado. Mas isto não é verdade, pois, se tomarmos por exemplo a função dada por

$$f(z) = \left(e^{\frac{z+1}{z-1}}\right).v,$$

onde $v \in F$, $\|v\| = 1$, então $f \in H^\infty(\Delta, F)$ mas não é contínua em $\overline{\Delta}$. Para ver que $f \in H^\infty(\Delta, F)$, consideramos $z = x + yi$ e depois de alguns cálculos, obtemos

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{[(x^2-1)+y^2]-(2y)i}{(x-1)^2+y^2},$$

e assim,

$$\|f(z)\| = |e^{\frac{z+1}{z-1}}| = e^{\frac{(x^2-1)+y^2}{(x-1)^2+y^2}} = e.e^{\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+y^2}} < e,$$

sendo a desigualdade válida para $0 \leq x^2 + y^2 < 1$, pois temos a expressão

$$\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+y^2} < 0.$$

■

Estendamos nosso conceito de "espaço do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_k$" para valores $k = 1, 2, \ldots, 7$.

Proposição 4.3. Seja F um espaço de Banach com a propriedade ARNP. Então o espaço $H^p(\Delta, F)$, para $1 \leq p < \infty$, é um espaço de Banach do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_7$.

Demonstração: Basta mostrarmos que satisfaz P_6 e P_7 pois, como satisfaz P_4, pela Proposição 4.1 temos por consequência a validade de P_5.

O fato do axioma P_7 ser válido para $H^p(\Delta, F)$, vem diretamente da equação (3.3), ou seja, $\|T_r f\|_p = M_p[f; r]$.

Por definição, o valor de fronteira associado, pelo isomorfismo do Teorema 2.28, a $T_r f$ é f_r, onde $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$. Do Corolário 2.29, temos com $\tilde{f}$ sendo o valor de fronteira de f que

$$\lim_{r\to 1} \|f_r - \tilde{f}\|_p = 0$$

e, novamente do isomorfismo do Teorema 2.28,

$$\|f_r - \tilde{f}\|_p = \|T_r f - f\|_p$$

pois, o valor de fronteira de $T_r f - f$ é justamente $f_r - \tilde{f}$ para todo $0 \leq r < 1$. Assim, obtemos que P_6 é satisfeito. ■

Proposição 4.4. Para $1 \leq p < \infty$, $H^p_w(\Delta; F)$ satisfaz o axioma P_7. Como satisfaz P_4 (pela Proposição 3.5), também P_5 é satisfeito.

Demonstração: Como feito na demonstração da Proposição 4.3, basta utilizarmos da equação (3.3). ■

Deixamos a pergunta: será que para $1 \leq p < \infty$, os espaços $H^p_w(\Delta; F)$ satisfazem P_6?

Definição 4.5. Denotamos por $A(\Delta; F)$ o espaço das funções contínuas em $\overline{\Delta}$ cujas restrições a Δ são holomorfas com a norma do supremo. No caso $F = \mathbb{C}$, o espaço constitui uma álgebra de Banach, denominada *álgebra do disco* e escrevemos $A(\Delta)$ no lugar de $A(\Delta; \mathbb{C})$.

A partir de um exemplo dado na demonstração da Proposição 4.2, podemos afirmar ainda que $A(\Delta; F)$ é um subespaço próprio de $H^\infty(\Delta, F)$.

Proposição 4.6. $A(\Delta; F)$ é um espaço de Banach do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_6$ (isto é, os axiomas $P_1 - P_6$ são satisfeitos em $A(\Delta; F)$). Temos ainda que $A_k(A(\Delta; F)) = 1$ para $k = 1, 2, 4$.

Demonstração: Comecemos demonstrando que cada um dos axiomas $P_1 - P_6$ são satisfeitos.

P_1: Segue direto de $A(\Delta; F) \subset H^\infty(\Delta; F)$. Disto resulta também que $A_1(A(\Delta; F)) = 1$.

P_2: É imediato que $u_n^v \in A(\Delta; F)$ e $\|u_n^v\|_p = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $v \in F$ com $\|v\| = 1$. Daí, $A_2(A(\Delta; F)) = 1$. Lembrando que $A_1(A(\Delta; F)).A_2(A(\Delta; F)) \geq 1$, resulta

$$A_1(A(\Delta; F)) = A_2(A(\Delta; F)) = 1.$$

P_3: Se $f \in A(\Delta; F)$, é claro que para $t \in \mathbb{R}$ temos $U_t f \in A(\Delta; F)$. Também

$$\|f\|_\infty = \max_{|z|=1} \|f(ze^{it})\| = \|U_t f\|_\infty.$$

P_4: Se $f \in A(\Delta; F)$, é claro que $T_r f$ dada por

$$T_r f(z) = f(rz)$$

também é um elemento de $A(\Delta; F)$. Ainda,

$$\|T_r f\|_\infty = \max_{|z|=1} \|f(rz)\| \leq \max_{|z|=1} \|f(z)\|,$$

sendo, que como em casos anteriores, a desigualdade é válida devido ao Teorema 2.12. Por fim, resulta

$$\|T_r\| \leq 1$$

e disto, $A_4(A(\Delta; F)) \leq 1$. Mas como, pelo Lema 3.1, $A_4(A(\Delta; F)) \geq 1$, só podemos ter $A_4(A(\Delta; F)) = 1$.

P_5 e P_6: Pelo Teorema do Módulo Máximo,

$$\|T_r f - f\|_\infty = \max_{0\leq\theta\leq 2\pi} \|f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})\| = 0,$$

Basta demonstrarmos as igualdades como seguem:

$$\lim_{r\to 1} \|T_r f - f\|_\infty = \lim_{r\to 1} \max_{0\leq\theta\leq 2\pi} \|f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})\| = 0,$$

fato que vem da continuidade uniforme de f em $|z| \leq 1$, obtendo já que $A(\Delta; F)$ satisfaz P_6 e, pela Proposição 4.1 satisfaz P_5, resultando que é do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_6$.

Falta apenas ver que $A(\Delta; F)$ é Banach. Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $A(\Delta; F)$, ou seja, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n \geq n_0$ vale

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \max_{|z|\leq 1} \|f_n(z) - f_m(z)\| < \epsilon$$

e logo, para cada $|z| \leq 1$ temos para $m, n \geq n_0$

$$\|f_n(z) - f_m(z)\| < \epsilon, \tag{4.3}$$

Então, para cada $z \in \Delta$, $(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em F, que é completo.

Definamos agora

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$$

e fazendo $n \longrightarrow \infty$ em (4.3), temos

$$\|f(z) - f_m(z)\| < \epsilon, \tag{4.4}$$

para $m \geq n_0$ e $|z| \leq 1$, concluindo que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente. Portanto, $f \in A(\Delta; F)$, demonstrando então que $A(\Delta; F)$ é um espaço de Banach com a norma do máximo. $\blacksquare$

Afirmamos que $A(\Delta; F)$ não satisfaz P_7. A demonstração deste fato, pode ser encontrada em Taylor [37], página 30. Não a incluiremos aqui, porque exigiria a introdução de outras definições que fogem ao nosso objetivo de estudo.

Definição 4.7. Seja o espaço vetorial dado por

$$A_w(\Delta; F) = \{f : \Delta \longrightarrow F; \psi \circ f \in A(\Delta), \forall \psi \in F'\}.$$

De maneira análoga ao que já fizemos em casos anteriores, para cada $f \in A_w(\Delta; F)$, seja

$$\|f\| = \sup_{\psi\in F'} \|\psi \circ f\|_\infty$$

Com esta norma, podemos demonstrar de forma semelhante à demonstração da Proposição 4.6 que:

Proposição 4.8. $A_w(\Delta; F)$ é um espaço de Banach do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_6$ (isto é, os axiomas $P_1 - P_6$ são satisfeitos em $A_w(\Delta; F)$). Temos ainda que $A_k(A_w(\Delta; F)) = 1$ para $k = 1, 2, 4$.

Capítulo 5

Os Espaços H^b e H^c

Trabalharemos neste capítulo, com espaços normados H do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_3$ e, construiremos outros dois espaços a partir deste, H^b e H^c, que são do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F')_4$. Os resultados que aqui veremos são generalizações, ao caso vetorial, do que foi estudado por Taylor [36],[37] no caso complexo. As nomenclaturas são bem distintas das utilizadas pelo matemático no início dos anos cinquenta. Como anteriormente, sempre consideramos $0 \leq r < 1$.

5.1 Espaços H^b

A partir do que vimos nas proposições 2.9 e 3.17 e na definição (3.11), podemos definir o espaço que segue:

Definição 5.1. Seja H um espaço normado do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_3$. Definimos por H^b, o conjunto dos elementos $g \in \mathcal{H}(\Delta, F')$ tais que, $N(g; r)$ seja limitado como função de r. Se $g \in H^b$, escrevemos

$$N(g) = \sup_{0 \leq r < 1} rN(g; r),$$

Da Proposição 3.17, é equivalente definir

$$N(g) = \lim_{r \to 1} N(g; r)$$

Proposição 5.2. Se H é um espaço normado do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_3$, $g \in \mathcal{H}(\Delta; F')$ e $w \in \Delta$, então $T_w g \in H^b$ e

$$N(T_w g) = N(g; |w|). \tag{5.1}$$

Além disso, $g \in H^b$ se e somente se $N(T_r g)$ é limitado como uma função de r. Neste caso,

$$N(g) = \lim_{r \to 1} N(T_r g). \tag{5.2}$$

Demonstração: Pelo item (1) da Proposição 3.17 e, pelo item (3) da Definição 3.11 resultam as igualdades

$$N(T_w g; r) = N(g; rw) = N(g; r|w|).$$

Quando $r \to 1$, da continuidade de $N(g; .)$ em $(0, 1)$ e do fato de $N(g; r)$ ser função crescente de $0 \leq r < 1$ (ver itens (2) e (5) da Proposição 3.17), resulta a equação 5.1. O restante da proposição segue facilmente. ■

Proposição 5.3. Se H é um espaço normado do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_3$, então H^b é um espaço de Banach com a norma $N(g)$.

Demonstração: Que H^b é um espaço vetorial normado, com a função norma dada por $g \longrightarrow N(g)$, segue das relações (1) e (2) apresentadas na Definição 3.11 e, do terceiro item da Proposição 3.17.

Para provar que H^b é de Banach, tomemos $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em H^b. Então, $\{N(g_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada, digamos $N(g_n) \leq A$, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $A > 0$.

Agora, tomando $v \in F$ com $\|v\| = 1$, temos para todo $0 \leq r < 1$,

$$| < v, \gamma_k(g_n - g_m) > r^k| = \|B(u_k^v, g_n - g_m; r)\| \leq \|u_k^v\| N(g_n - g_m) \leq A_2(H) N(g_n - g_m). \quad (5.3)$$

Fazendo o limite de $r \longrightarrow 1$, obtemos que $\{\gamma_k(g_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em F' para cada k. Sendo F' um espaço de Banach, definimos:

$$a_k = \lim_{n\to\infty} \gamma_k(g_n)$$

Observamos que a convergência aqui é uniforme em k (isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\gamma_k(g_n) - a_k\| < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$ e $k \in \mathbb{N}$).

Também, a sequência $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada. Com efeito,

$$\|\gamma_k(g_n) r^k\| \leq A_2(H) N(g_n) \leq A_2(H) A,$$

para todo $0 \leq r < 1$, sendo a primeira desigualdade obtida da mesma forma que obtemos a última desigualdade em (5.3). Portanto,

$$\|a_k\| \leq A_2(H) A.$$

A partir disto, definimos agora a função

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

que converge absolutamente e uniformemente nos discos abertos $D_r = \{z \in \mathbb{C}; |z| < r\}$, para $0 < r < 1$, bastando observar para isto, que o conjunto dos coeficientes $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitado.

Esta função é um membro de $\mathcal{H}(\Delta, F')$. Vamos mostrar agora que $g \in H^b$ e que $N(g_n - g) \to 0$ quando $n \to \infty$. Primeiramente, para um r fixado e $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$, temos que

$$|B(f, g_n; r) - B(f, g; r)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} < \gamma_k(f), \gamma_k(g_n) - a_k > r^k \right| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|\gamma_k(f)\| r^k \right) \sup_k \|\gamma_k(g_n) - a_k\|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e, da convergência uniforme em k de $\gamma_k(g_n) \longrightarrow a_k$, temos que

$$\lim_{n \to \infty} B(f, g_n; r) = B(f, g; r).$$

Agora se $f \in H$, $f \neq 0$,

$$|B(\frac{f}{\|f\|}, g_n; r)| \leq N(g_n) \Rightarrow |B(f, g_n; r)| \leq N(g_n)\|f\| \leq A\|f\|.$$

Fazendo $n \to \infty$, resulta que

$$|B(f, g; r)| \leq A\|f\|,$$

e assim, $g \in H^b$ pois $N(g; r) \leq A$ para todo $0 \leq r < 1$. Agora suponhamos $\epsilon > 0$, e escolhamos $n_0(\epsilon)$ tal que $m, n > n_0(\epsilon)$, implique em $N(g_n - g_m) < \epsilon$. Assim, se $g \in H$,

$$|B(f, g_n - g_m; r)| \leq N(g_n - g_m)\|f\| < \epsilon\|f\|$$

e, fazendo $m \longrightarrow \infty$ obtemos

$$|B(f, g_n - g; r)| < \epsilon\|f\|,$$

o que nos dá $N(g_n - g) < \epsilon$, para $n > n_0(\epsilon)$, concluindo a demonstração. ■

Notação: A partir de agora denotaremos $N(g)$ por $\|g\|^b$, para toda $g \in H^b$.

Proposição 5.4. Seja H um espaço normado do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_3$. Então o espaço H^b é um espaço de Banach do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F')_4$. As constantes $A_k(H^b)$, $k = 1, 2, 4$, satisfazem as seguintes relações:

a) $A_1(H^b) \leq A_2(H)$;
b) $A_2(H^b) \leq A_1(H)$;
c) $A_4(H^b) = 1$.

Demonstração: Temos para $v \in F$, $\|v\| = 1$ e $g \in F'$ que

$$B(u_n^v, g; r) = \sum_{k=0}^{\infty} < \gamma_k(u_n^v), \gamma_k(g) > r^k = < \gamma_n(u_n^v), \gamma_n(g) > r^n = < v, \gamma_n(g) > r^n.$$

Assim, se $g \in H^b$,

$$\begin{aligned} |< v, \gamma_n(g) > r^n| = |B(u_n^v, g; r)| &\leq \|u_n^v\| \sup_{\|f\|=1, f\in H} |B(f,g;r)| \\ &\leq \|u_n^v\| N(g;r) \\ &\leq \|u_n^v\| \sup_{0\leq r<1} N(g;r) \\ &\leq \|u_n^v\| \|g\|^b \\ &\leq A_2(H)\|g\|^b \end{aligned}$$

e portanto, obtemos que $\|\gamma_n(g)\| \leq A_2(H)\|g\|^b$. Assim, podemos afirmar que $\gamma_n \in (H^b)'$ resultando

$$\|\gamma_n\| = \sup_{g\in H^b, \|g\|^b=1} \|\gamma_n(g)\| \leq A_2(H),$$

e como este fato é válido para todo $n \in \mathbb{N}$, o item **(a)** está provado valendo assim, o axioma P_1.

Vejamos agora o item **(b)**. Para toda $f \in H$, temos para $v \in F'$, $\|v\| = 1$ que

$$B(f, u_n^v; r) =< \gamma_n(f), v > r^n,$$

obtendo que

$$N(u_n^v; r) \leq \|\gamma_n\|\|v\|r^n \Rightarrow \|u_n^v\|^b \leq \sup_n \|\gamma_n\| = A_1(H)$$

e agora, direto da definição, resulta $A_2(H^b) \leq A_1(H)$, ou seja, o item **(b)**.

Para a demonstração do item **(c)**, começamos utilizando do item (3) da Definição 3.11, isto é, para $w \in \Delta$ e $g \in \mathcal{H}(\Delta, F')$ é valido que

$$N(T_w g; z) = N(g; wz). \tag{5.4}$$

Disto segue para $t \in \mathbb{R}$

$$N(U_t g; \rho) = N(g; \rho e^{it}) = N(g; \rho),$$

sendo a última igualdade advinda do item (1) da Proposição 3.17.

Portanto, se $g \in H^b$, então $U_t g \in H^b$, além de $\|U_t\|^b = N(U_t g) = \|g\|^b$. Disto, provamos que o axioma P_3 é satisfeito. Portanto, já temos que H^b é do tipo $H(\Delta; F')_3$.

Novamente da equação 5.4, obtemos a partir do segundo item da Proposição 3.17, que

$$N(T_r g; \rho) = N(g; r\rho) \leq N(g; \rho)$$

para $0 \leq \rho < 1$ e, assim, se $g \in H^b$, então $T_r g \in H^b$, com $\|T_r g\|^b \leq \|g\|^b$. Desta desigualdade, temos direto que $A_4(H^b) \leq 1$. Como é sempre válido que $A_4(H^b) \geq 1$, fato visto na expressão dada em (3.1), neste caso só podemos ter $A_4(H^b) = 1$. ■

Proposição 5.5. Sejam H_1 e H_2 dois espaços normados do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_3$. Denotemos a norma de cada elemento $f \in H_k$, $k = 1, 2$, por $\|f\|_{H_k}$ e de cada elemento $g \in H_k^b$ por $\|g\|_{H_k}^b$. Suponhamos que $H_1 \subset H_2$ e que existe uma constante A tal que

$$\|f\|_{H_2} \leq A\|f\|_{H_1}$$

para $f \in H_1$. Então, se $g \in \mathcal{H}(\Delta, F')$, para $0 \leq r < 1$ temos

$$N_{H_1}(g; r) \leq AN_{H_2}(g; r), \tag{5.5}$$

onde $N_{H_k}(g; r) = \sup\limits_{\|f\|_{H_k}=1, f \in H_k} |B(f, g; r)|$.

Além disso, se $g \in H_2^b$, $\|g\|_{H_1}^b \leq A\|g\|_{H_2}^b$ e assim, $H_2^b \subset H_1^b$.

Demonstração: Se $f \in H_2$ e $g \in \mathcal{H}(\Delta, F')$, temos que

$$|B(f, g; r)| \leq \|f\|_{H_2} N_{H_2}(g; r).$$

Assim, se $f \in H_1$, então

$$|B(f, g; r)| \leq A\|f\|_{H_1} N_{H_2}(g; r).$$

Tomando o supremo como descrito

$$N_{H_1}(g; r) = \sup_{\|f\|_{H_1}=1, f \in H_1} |B(f, g; r)| \leq AN_{H_2}(g; r),$$

ou seja, vale a desigualdade 5.5 para todo $0 \leq r < 1$.

Se ainda $g \in H_2^b$ temos, fazendo $r \to 1$, que

$$\|g\|_{H_1}^b \leq A.\|g\|_{H_2}^b,$$

obtendo que também $g \in H_1^b$, isto é, $H_2^b \subset H_1^b$. ■

5.2 Espaços H^c

Definição 5.6. Seja H um espaço normado do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_3$. Definimos H^c como o espaço de todas $g \in \mathcal{H}(\Delta; F')$, tais que para cada $f \in H$ o seguinte limite exista

$$\lim_{r \to 1} B(f, g; r).$$

Na próxima proposição veremos que H^c é um subespaço vetorial fechado de H^b, quando H for Banach. Num caso mais particular, onde $F = \mathbb{C}$ e H consiste do espaço dos polinômios em z, com qualquer norma, então $H^c = \mathcal{H}(\Delta; \mathbb{C}) = \mathcal{H}(\Delta)$.

Proposição 5.7. Seja H um espaço de Banach do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_3$. Então H^c é um subespaço fechado de H^b. Se adotarmos a função $g \longrightarrow \|g\|^b$, como a norma de elementos de H^c, então H^c é um espaço de Banach do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F')_4$. Além disso,

a) $A_1(H^c) \leq A_1(H^b)$;
b) $A_2(H^c) = A_2(H^b)$;
c) $A_4(H^c) = 1$.

Demonstração: Que H^c é um subespaço vetorial de $\mathcal{H}(\Delta; F')$, vem do item 1 apresentado na Proposição 2.9.

Vejamos agora que $H^c \subset H^b$. Como, em particular, H é do tipo $H(\Delta; F)_1$, para cada $0 \leq r < 1$ e $g \in \mathcal{H}(\Delta; F')$, sabemos que $B(., g; r)$ é um funcional linear contínuo em H, e sua norma assume o valor $N(g; r)$ (ver a observação antes da Definição 3.11 e a Proposição 3.17). Se $g \in H^c$, $\{B(f, g; r)\}_{0 \leq r < 1}$ é limitado para f fixo. Podemos aplicar o Teorema de Banach-Steinhaus, obtendo que o conjunto $\{N(g; r)\}_{0 \leq r < 1}$ é limitado. Logo, mostramos que $H^c \subset H^b$.

Agora mostremos que H^c é fechado em H^b e, portanto, Banach. Para isto, tomemos para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_n \in H^c$ e $g \in \mathcal{H}(\Delta; F')$, valendo que

$$\lim_{n \to \infty} \|g_n - g\|^b = 0,$$

e vamos mostrar que $g \in H^c$. Para isto, basta mostrar que para cada $f \in H$ vale

$$\lim_{r, \rho \to 1} |B(f, g; r) - B(f, g; \rho)| = 0, \tag{5.6}$$

que é equivalente à definição de um elemento estar em H^c.

Analisemos algumas desigualdades,

$$\begin{aligned} |B(f, g; r) - B(f, g; \rho)| &\leq |B(f, g_n - g; r)| + |B(f, g_n; r) - B(f, g_n; \rho)| + |B(f, g_n - g; \rho)| \\ &\leq 2\|g_n - g\|^b . \|f\| + |B(f, g_n; r) - B(f, g_n; \rho)| \end{aligned}$$

e tomando fixos $f \in H$ e $\epsilon > 0$, podemos escolher n_0 grande o suficiente, tal que

$$2.\|g_n - g\|^b . \|f\| < \frac{\epsilon}{2}$$

e ainda, para este valor de n, podemos escolher r e ρ tão próximos de 1, a ponto de podermos declarar verdadeira a desigualdade

$$|B(f, g_n; r) - B(f, g_n; \rho)| < \frac{\epsilon}{2}$$

pois, cada $g_n \in H^c$.

Destas duas últimas desigualdades, temos provado o limite de (5.6) e, portanto, que H^c é um subespaço fechado de H^b e disto, um espaço de Banach.

Para finalizarmos a demonstração, falta apenas ver que H^c é do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F')_4$ e demonstrarmos as relações propostas entre as constantes minimais.

Sendo $H^c \subset H^b$ e H^b do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F')_4$, então H^c satisfaz P_1 e vale o item **(a)**. Como para cada $f \in H$, $0 \leq r < 1$, $n \in \mathbb{N}$, e cada $v \in F'$ com $\|v\| = 1$ temos

$$B(f, u_n^v; r) =< \gamma_n(f), v > r^n,$$

ou seja, $u_n^v \in H^c$. Aliado isto com o fato de $H^c \subset H^b$ como subespaço normado, nos leva a concluir que H^c satisfaz P_2 e ainda, que $A_2(H^c) = A_2(H^b)$.

Para mostrar que H^c satisfaz P_3, tomemos $t \in \mathbb{R}$, $g \in H^c$ e $f \in H$. Depois de alguns poucos cálculos, utilizando da expressão de B dada na Definição 2.7, e da analiticidade das funções f e g, obtemos a identidade:

$$B(f, U_t g; r) = B(U_t f, g; r)$$

e disto, $\|g\|^b = \|U_t g\|^b$, concluindo que H^c satisfaz P_3.

Para provar P_4, novamente tomamos $f \in H$ e $g \in H^c$. Daí, para os valores de sempre atribuídos a r e ρ vale

$$B(f, T_r g; \rho) = B(f, g; r\rho),$$

obtendo pelo fato de ser analítica a função $z \longrightarrow B(f, g; z)$ que

$$\lim_{\rho \to 1} B(f, T_r g; \rho) = \lim_{\rho \to 1} B(f, g; r\rho) = B(f, g; r)$$

e logo, se $g \in H^c$, destas igualdades resulta $T_r g \in H^c$ para cada valor de r.

Sabemos da Proposição 2.9 que $A_4(H^b) = 1$. De $A_4(H^c) \leq A_4(H^b)$, pois $H^c \subset H^b$, e de $A_4(H^c) \geq 1$, fato que vimos na desigualdade 3.1, só podemos ter

$$A_4(H^c) = 1.$$

■

5.3 Propriedades de H^b e H^c para espaços de Banach H do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_4$

Nesta seção, assumiremos que H é um espaço de Banach do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_4$. Mostraremos alguns resultados envolvendo H', H^b e H^c. Na proposição seguinte, utilizaremos a definição de u_n^v não somente para vetores de norma unitária, mas para todo $v \in F$.

Proposição 5.8. Se $\gamma \in H'$, seja g dada por:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \gamma_n, \tag{5.7}$$

para todo $z \in \Delta$, onde $\gamma_n(v) := \gamma(u_n^v)$ para todo $v \in F$. Então $g \in H^b$ e $\|g\|^b \leq A_4(H) \|\gamma\|$.

Demonstração: Primeiro, vejamos que para $v \neq 0$

$$\begin{aligned}|\gamma_n(v)| = |\gamma(u_n^v)| &\leq \|\gamma\|\|u_n^v\| \\ &\leq \|\gamma\|.\|v\|.\|u_n^{\frac{v}{\|v\|}}\| \\ &\leq \|\gamma\|A_2(H)\|v\|.\end{aligned}$$

Portanto, resulta para todo $n \in \mathbb{N}$ que $\|\gamma_n\| \leq \|\gamma\|A_2(H)$, o que prova que $\gamma_n \in F'$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e que $g \in \mathcal{H}(\Delta; F')$.

Lembremos da Proposição 3.12, onde temos para $w \in \Delta$ e $f \in H$ que $T_w f \in H$ e

$$T_w f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.u_n^{v_n},$$

onde

i) $a_n = \|\gamma_n(f)\|w^n$ e $v_n = \dfrac{\gamma_n(f)}{\|\gamma_n(f)\|}$, caso $\gamma_n(f) \neq 0$;

ii) $a_n = 0 \in \mathbb{C}$, caso contrário.

Logo, sendo $\gamma \in H'$, resulta

$$\gamma(T_w f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma(u_n^{v_n}).$$

Seja $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, o subconjunto do elementos não nulos do conjunto $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Escrevemos:

$$\gamma(T_w f) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k}\gamma(u_{n_k}^{v_{n_k}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \|\gamma_{n_k}(f)\|w^{n_k}\gamma(u_{n_k}^{v_{n_k}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma(u_{n_k}^{\gamma_{n_k}(f)})w^{n_k}.$$

Mas a última soma satisfaz, pela definição de γ, a seguinte igualdade

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma(u_{n_k}^{\gamma_{n_k}(f)})w^{n_k} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{n_k}(\gamma_{n_k}(f))w^{n_k},$$

sendo este último somatório justamente $B(f, g; w)$. Ou seja, temos a seguinte igualdade

$$\gamma(T_w f) = B(f, g; w) \tag{5.8}$$

e portanto, se $0 \leq r < 1$, obtemos

$$|B(f, g; r)| \leq \|\gamma\|\|T_r f\| \leq \|\gamma\|A_4(H)\|f\|.$$

Logo $g \in H^b$ e $\|g\|^b \leq \|\gamma\|A_4(H)$, concluindo a demonstração. ■

Definição 5.9. Seja $\Gamma : H' \longrightarrow H^b$ a transformação linear definida por $\Gamma(\gamma) = g$ para cada $\gamma \in H'$, onde g e γ se relacionam como na Proposição 5.8.

Proposição 5.10. A transformação linear Γ é um elemento de $\mathcal{L}(H', H^b)$, com $\|\Gamma\| = A_4(H)$. Além disso, Γ é injetora se e somente se o subespaço gerado por $\{u_n^v\}_{n\in\mathbb{N}, v\in F}$ for denso em H.

Demonstração: Pela proposição anterior, é imediato que Γ é contínua, ou seja, $\Gamma \in \mathcal{L}(H', H^b)$. Também, pelo que vimos na demonstração anterior, com $\Gamma(\gamma) = g$ resulta

$$\|\Gamma\| = \sup_{\|\gamma\|=1} \|\Gamma(\gamma)\| = \sup_{\|\gamma\|=1} \|g\|^b \leq A_4(H).$$

Da equação 5.8, temos para $0 \leq r < 1$

$$|\gamma(T_r f)| \leq \|f\|.\|g\|^b \leq \|f\|.\|\Gamma\|.\|\gamma\|.$$

Agora, pelo Teorema de Hahn-Banach, podemos escolher γ de maneira que $|\gamma(T_r f)| = \|T_r f\|$ e $\|\gamma\| = 1$ obtendo

$$\|T_r f\| \leq \|f\|\|\Gamma\|.$$

Portanto, $\|T_r\| \leq \|\Gamma\|$, para todo $0 \leq r < 1$. Isto implica, $A_4(H) \leq \|\Gamma\|$. Portanto, só podemos ter $\|\Gamma\| = A_4(H)$.

Finalmente, a última afirmação da proposição segue da relação entre γ e g na Proposição 5.8. ■

Relembremos que quando definimos, para cada $g \in \mathcal{H}(\Delta; F')$ e $0 \leq r < 1$, a função $f \in H \longrightarrow B(f, g; r)$, esta constitui um funcional linear contínuo de norma $N(g; r)$. Portanto, se tomarmos $g \in H^c$, e assim $g \in H^b$, então

$$\gamma(f) = \lim_{r \to 1} B(f, g; r) \tag{5.9}$$

define um elemento de H', e podemos escrever a definição como segue

Definição 5.11. Seja $\Lambda : H^c \longrightarrow H'$ a transformação linear dada, para cada $g \in H^c$, por $\Lambda(g) = \gamma$, onde g e γ se relacionam como no limite dado em (5.9).

Proposição 5.12. A transformação $\Lambda \in \mathcal{L}(H^c, H')$. Mais ainda, se $g \in H^c$, então

$$\Gamma\Lambda(g) = g \tag{5.10}$$

e

$$\|\Lambda(g)\| \leq \|g\|^b \leq A_4(H)\|\Lambda(g)\|. \tag{5.11}$$

Assim, Γ define uma transformação injetora, com inversa de um subespaço de H' (imagem de Λ) em H^c contínua.

Demonstração: Para provar (5.10), é suficiente mostrar para todo $n \in \mathbb{N}$ que $\gamma_n(h) = \gamma_n(g)$, onde $h = \Gamma(\gamma)$ e $\gamma = \Lambda(g)$. Para um dado $v \in F$, utilizando da notação da Proposição 5.8, escrevemos para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
< v, \gamma_n(h) > &=< v, \gamma_n > \\
&=< u_n^v, \gamma > \\
&= \lim_{r \to 1} B(u_n^v, g; r) \\
&= \lim_{r \to 1} < v, \gamma_n(g) > r^n \\
&=< v, \gamma_n(g) >
\end{aligned}
$$

e com isto, temos o desejado, ou seja, $\gamma_n(g) = \gamma_n(h)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, resultando que $\Gamma\Lambda(g) = g$.

Agora mostremos as desigualdades. Tomando $g \in H^c$ e $\gamma = \Lambda(g)$, temos que

$$|B(f, g; r)| \leq \|f\| \|g\|^b$$

concluindo que $| < f, \gamma > | \leq \|f\| \|g\|^b$.

Assim, $\|\Lambda(g)\| = \|\gamma\| \leq \|g\|^b$. E a segunda desigualdade em (5.11), obtemos da seguinte forma:

$$\|g\|^b = \|\Gamma\Lambda(g)\| \leq \|\Gamma\|.\|\Lambda(g)\| = A_4(H)\|\Lambda(g)\|,$$

sendo isto obtido a partir da Proposição 5.10, o que completa a demonstração. ■

Proposição 5.13. A transformação Λ é sobrejetora se e somente se temos a convergência fraca

$$T_r f \xrightarrow{w} f$$

quando $r \to 1$ para cada $f \in H$. Quando este é o caso, Γ define uma transformação linear bijetora de H' em H^c com inversa $\Gamma^{-1} = \Lambda$.

Demonstração: Tomemos $\gamma \in \Lambda(H^c)$, ou seja, existe $g \in H^c$ tal que $\gamma = \Lambda(g)$. Vale que

$$\gamma(T_r f) = B(f, g; r) \tag{5.12}$$

pois, utilizando do item (2) da Proposição 2.9, temos

$$\gamma(T_r f) = \lim_{\rho \to 1} B(T_r f, g; \rho) = \lim_{\rho \to 1} B(f, g; \rho r).$$

Assim da equação 5.12 e da definição de Λ, resulta

$$\gamma(f) = \lim_{r \to 1} \gamma(T_r f),$$

para cada $f \in H$ e cada $\gamma \in \Lambda(H^c)$. Portanto, $T_r f$ converge fracamente para f quando $r \to 1$, se $\Lambda(H^c) = H'$, ou seja, Λ é sobrejetiva.

Agora suponhamos que temos a convergência fraca

$$T_r f \xrightarrow{w} f$$

quando $r \to 1$ para cada $f \in H$. Pelo que vimos na demonstração da proposição 5.8, é fato que

$$\lim_{r\to 1} B(f,\Gamma(\gamma);r) = \lim_{r\to 1}\gamma(T_r f) = \gamma(f),$$

para cada $f \in H$ e cada $\gamma \in H'$. Assim, $\Gamma(\gamma) \in H^c$ e $\Lambda(\Gamma(\gamma)) = \gamma$. Isto mostra que $\gamma \in \Lambda(H^c)$ e, portanto que $H' = \Lambda(H^c)$. A última asserção da proposição, segue da equação 5.10 e do que acabamos de provar. ■

Proposição 5.14. Seja H um espaço de Banach do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_4$ satisfazendo P_6. Então H^c e H^b coincidem, e H^b é isometricamente isomorfo a H'.

Demonstração: Primeiro provaremos que $H^b \subset H^c$. Já sabemos que $H^c \subset H^b$, pela Proposição 5.7. Pelo item 2 da Proposição 2.9, podemos mostrar para $g \in \mathcal{H}(\Delta; F')$ que para toda $f \in H$ vale

$$B(T_r f, g; \rho) = B(T_\rho f, g; r). \tag{5.13}$$

Utilizando desta equação, obtemos a igualdade

$$B(f,g;r) - B(f,g;\rho) = B(f - T_\rho f, g; r) + B(T_r f - T_\rho f, g; \rho) + B(T_\rho f - f, g; \rho).$$

Portanto, se $g \in H^b$, temos a desigualdade

$$|B(f,g;r) - B(f,g;\rho)| \leq (2\|f - T_\rho f\| + \|T_r f - T_\rho f\|)\|g\|^b.$$

Como H satisfaz P_6, segue que

$$\lim_{r,\rho\to 1} |B(f,g;r) - B(f,g;\rho)| = 0,$$

onde este limite representa o fato de r e ρ tenderem a zero, mostra que $g \in H^c$, concluindo que $H^c = H^b$.

Para a segunda etapa da proposição, comecemos inicialmente observando que temos $A_4(H) = 1$, devido ao axioma P_6, pois vimos na Proposição 4.1 que P_6 implica em P_5 que,por sua vez, implica em P_4 e $A_4(H) = 1$. Ainda de P_6, obtemos a convergência fraca

$$T_r f \xrightarrow{w} f,$$

quando $r \longrightarrow 1$, pois $T_r f \longrightarrow f$ em norma (convergência forte).

A Proposição 5.12, garante neste caso que $\Lambda : H^b = H^c \longrightarrow H'$ é injetiva, e a Proposição 5.13 que esta mesma função é sobrejetora, sendo portanto bijetora. A inversa de Λ é Γ, o que vem também da Proposição 5.13. O fato de Λ ser isométrico vem de $A_4(H) = 1$, e das desigualdades indicadas em (5.11) constantes no enunciado da Proposição 5.12. ■

De tudo que fizemos, podemos demonstrar o teorema:

Teorema 5.15. Seja H um espaço de Banach do tipo $\mathcal{H}(\Delta; F)_4$ tal que tenhamos, para cada $f \in H$ a convergência fraca

$$T_r f \xrightarrow{w} f,$$

quando $r \to 1$. Então cada funcional linear $\gamma \in H'$, para toda $f \in H$, pode ser representado na forma

$$\gamma(f) = \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} < f(\rho e^{i\theta}), g(\left(\frac{r}{\rho}\right) e^{-i\theta}) > d\theta, \tag{5.14}$$

onde $0 \leq r < \rho < 1$ e $g \in H^c$. O elemento $g \in H^c$ determina e é univocamente determinado por γ. Além do mais,

$$\|\gamma\| \leq \|g\|^b \leq A_4(H)\|\gamma\|. \tag{5.15}$$

Sob hipóteses mais fortes de que

$$\lim_{r \to 1} \|T_r f - f\| = 0,$$

para cada $f \in H$, temos a mesma representação dada em (5.14). Neste caso, g pode ser qualquer elemento de H^b, que coincide com H^c, e $\|\gamma\| = \|g\|^b$.

Demonstração: Pelo item 3 da Proposição 2.9, temos

$$B(f, g; z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} < f(z_1 e^{i\theta}), g(z_2 e^{-i\theta}) > d\theta,$$

onde $z = z_1 z_2$, $z_1, z_2 \in \Delta$, $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$ e $g \in \mathcal{H}(\Delta; F')$. Podemos então escrever $B(f, g; r)$ como no enunciado, isto é,

$$B(f, g; z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} < f(\rho e^{i\theta}), g(\left(\frac{r}{\rho}\right) e^{-i\theta}) > d\theta,$$

onde $0 \leq r < \rho < 1$ e $g \in H^c$. Pela Proposição 5.13, se considerarmos válida a convergência fraca do enunciado, então cada $\gamma \in H'$ é dado, para toda $f \in H$, por

$$\gamma(f) = \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} < f(\rho e^{i\theta}), g(\left(\frac{r}{\rho}\right) e^{-i\theta}) > d\theta,$$

onde $g \in H^c$ determina e é unicamente determinado por γ.

As desigualdades (5.15) vêm da Proposição 5.12. Agora se supormos válida a convergência na norma como indicada, o resultado segue da Proposição 5.14. ■

Capítulo 6

Os Espaços H^b e H^c quando $H = H^p(\Delta, F)$

Com base em todas as generalizações que obtemos, chegamos ao seguinte resultado:

Teorema 6.1. Se F tem a propriedade ARNP e $1 \leq p < \infty$, então $H^p(\Delta; F)'$ é isometricamente isomorfo a $H^p(\Delta; F)^b$ que coincide com $H^p(\Delta; F)^c$.

Demonstração: O teorema segue da Proposição 4.3 e da Proposição 5.14. ■

6.1 A Integral de Cauchy

Nesta seção, apresentaremos resultados relacionando a Integral de Cauchy com os espaços H^b e com H^c.

Definição 6.2. Sejam $\varphi \in L^1(T; F)$ e f definida por

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}} d\theta, \qquad |z| < 1.$$

Dizemos que f é a integral de Cauchy de φ. Não é difícil ver que $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$ e

$$\gamma_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

No caso de $\varphi \in L^p(T; F)$, definimos

$$\|\varphi\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\varphi(e^{i\theta})\|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leq p < \infty),$$

e no caso de $\varphi \in L^\infty(T; F)$, definimos

$$\|\varphi\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{0<\theta<2\pi} \|\varphi(e^{i\theta})\| ,$$

sendo este o supremo essencial como definido anteriormente, na Seção 1.2.

Na Definição 3.11, apresentamos a função $N(g; z)$, onde $g \in \mathcal{H}(\Delta; F')$. Vamos designar esta função por $N_q(g; z)$ quando $H = H^p(\Delta, F)$. Aqui temos a definição

$$N_q(g; r) = \sup_{\|f\|_p = 1} |B(f, g; r)|$$

e também escrevemos, caso $g \in H^p(\Delta, F)^b$:

$$\|g\|_q^b = N_q(g) = \sup_{0 \leq r < 1} N_q(g; r).$$

6.1.1 Espaços H^b e a integral de Cauchy

No que segue, investigaremos um pouco a natureza das funções que são elementos de H^b, quando $H = H^p(\Delta; F)$ e $1 \leq p \leq \infty$.

Proposição 6.3. Suponha que $\varphi \in L^q(T; F')$, se $1 \leq p \leq \infty$. Se g é a integral de Cauchy de φ, então $g \in H^p(\Delta; F)^b$ e $\|g\|_q^b \leq \|\varphi\|_q$, onde, como em casos anteriores, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $1 \leq p, q \leq \infty$.

Demonstração: Se g é a integral de Cauchy de φ, então

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}} d\theta, \qquad |z| < 1$$

e ainda

$$\gamma_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

E tomando $f \in H^p(\Delta, F)$, resulta

$$\begin{aligned} B(f, g; r) &= \sum_{n=0}^{\infty} < \gamma_n(f), \gamma_n(g) > r^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} < \gamma_n(f), \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \right) > r^n \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} < \gamma_n(f), \varphi(e^{i\theta}) e^{-in\theta} r^n > d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} < f(re^{-i\theta}), \varphi(e^{i\theta}) > d\theta, \end{aligned}$$

sendo a terceira igualdade pela convergência uniforme da soma e pela Proposição 1.4. Agora, utilizando da desigualdade de Hölder, obtemos

$$|B(f, g; r)| \leq \|\varphi\|_q M_p[f; r],$$

e como $f \in H^p(\Delta, F)$,

$$|B(f,g;r)| \leq \|\varphi\|_q \|f\|_p.$$

Tomando o supremo, temos as implicações

$$\sup_{\|f\|_p=1} |B(f,g;r)| \leq \|\varphi\|_q \Rightarrow N_q(g;r) \leq \|\varphi\|_q \Rightarrow \|g\|_q^b \leq \|\varphi\|_q,$$

resultando disto tudo que $g \in H^p(\Delta, F)^b$. ■

Proposição 6.4. Seja F um espaço de Banach com a propriedade ARNP, cujo dual F' tenha a propriedade de Radon-Nikodym. Suponha que $g \in H^p(\Delta, F)^b$, onde $1 \leq p < \infty$. Então, existe uma $\varphi \in L^q(T; F')$ tal que g é a integral de Cauchy de φ e $\|g\|_q^b = \|\varphi\|_q$.

Demonstração: Lembremos inicialmente, pelo resultado do Teorema 2.28, que $H^p(\Delta, F)$ é isometricamente isomorfo ao espaço $H^p(T; F)$ por um isomorfismo

$$\begin{array}{rccl} \Psi : H^p(\Delta; F) & \longrightarrow & H^p(T; F) \\ f & \longmapsto & \Psi(f) = \tilde{f} \end{array},$$

onde $\tilde{f}$ é o valor de fronteira de f.

Portanto, todo funcional linear contínuo γ em $H^p(\Delta, F)$ define também um funcional linear contínuo ϕ_γ em $H^p(T; F)$ com a mesma norma. Tomando $g \in H^p(\Delta, F)^b$, vemos pela Proposição 5.14, devido ao fato de P_6 ser válido, que

$$\gamma(f) = \lim_{r \to 1} B(f, g; r) \tag{6.1}$$

define um funcional $\gamma \in (H^p(\Delta, F))'$ com $\|\gamma\| = \|g\|_q^b$.

De $\phi_\gamma \in (H^p(T; F))'$, pelo Teorema de Hahn-Banach e pelas observações feitas existe um funcional linear contínuo λ_γ definido em $L^p(T; F)$ de norma $\|\gamma\|$, tal que $\lambda_\gamma(\tilde{f}) = \gamma(f)$ para todo $f \in H^p(\Delta; F)$. Pelo fato de F' ter a propriedade de Radon-Nikodym, como visto no Teorema 2.22, temos o seguinte isomorfismo isométrico

$$\begin{array}{rcccl} S : L^q(T; F') & \longrightarrow & (L^p(T; F))' & & \\ \beta & \longmapsto & S_\beta : L^p(T; F) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & \alpha & \longmapsto & \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} < \alpha(e^{i\theta}), \beta(e^{i\theta}) > d\theta. \end{array}$$

Disto tudo, segue que existe $\psi_\gamma \in L^q(T; F')$ tal que

$$\lambda_\gamma(\tilde{f}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} < \tilde{f}(e^{i\theta}), \psi_\gamma(e^{i\theta}) > d\theta,$$

onde ainda, $\|\psi_\gamma\|_q = \|\lambda_\gamma\|$. E daí,

$$\gamma(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} < \tilde{f}(e^{i\theta}), \psi_\gamma(e^{i\theta}) > d\theta. \tag{6.2}$$

Agora definimos $\varphi(e^{i\theta}) = \psi_\gamma(e^{-i\theta})$. Então,

$$\|\varphi\|_q = \|\psi_\gamma\|_q = \|\lambda_\gamma\| = \|\gamma\| = \|g\|_q^b.$$

No restante desta demonstração, provaremos que g é a integral de Cauchy de φ. Se h denota a integral de Cauchy de φ, temos pelo que podemos ver na demonstração da proposição anterior e pela igualdade em (6.2)

$$\begin{aligned} B(f,h;r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} < f(re^{-i\theta}), \varphi(e^{i\theta}) > d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} < f(re^{i\theta}), \psi_\gamma(e^{i\theta}) > d\theta \\ &= \gamma(T_r f) \\ &= B(f,g;r), \end{aligned}$$

e tomando $f = u_n^v$ com $v \in F$ e $\|v\| = 1$, temos $\gamma_n(h)(v) = \gamma_n(g)(v)$. Disto, resulta que $\gamma_n(h) = \gamma_n(g)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $h = g$ e concluímos a demonstração. ■

A partir do que vimos após a Definição (2.35), podemos afirmar que exemplos de espaços de Banach F que satisfazem a hipótese desta última proposição são os espaços UMD.

6.1.2 Espaços H^c e a Integral de Cauchy

No que segue, analisamos uma condição, utilizando do conceito de integral de Cauchy, para que uma dada função holomorfa $g : \Delta \longrightarrow F'$ pertença a $(H^\infty(\Delta;F))^c$.

Teorema 6.5. Consideremos F Banach com a propriedade ARNP. Sejam $\varphi \in L^1(T;F')$ e g a integral de Cauchy de φ. Então $g \in (H^\infty(\Delta;F))^c$.

Demonstração: Isto é consequência do que vimos na demonstração da Proposição 6.3, pois para $f \in H^\infty(\Delta;F)$

$$B(f,g;r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} < f(re^{-i\theta}), \varphi(e^{i\theta}) > d\theta.$$

Daí, sendo $\tilde{f}$ o valor de fronteira de f, resulta

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (< f(re^{-i\theta}), \varphi(e^{i\theta}) > - < \tilde{f}(e^{-i\theta}), \varphi(e^{i\theta}) >) d\theta\right| \le \|\tilde{f}_r - \tilde{f}\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\varphi(e^{i\theta})\| d\theta,$$

onde $f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta})$ e $\|f_r - \tilde{f}\|_\infty \to 0$, quando $r \to 1$, pelo Corolário 2.29. Concluímos que

$$\lim_{r\to 1} B(f,g;r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} < \tilde{f}(e^{-i\theta}), \varphi(e^{i\theta}) > d\theta$$

e portanto, $g \in (H^\infty(\Delta;F))^c$ como desejado. ■

6.2 Propriedades Adicionais de $N_p(g;r)$

Como visto na Seção 6.1,

$$N_q(g;r) = \sup_{\|f\|_p=1} |B(f,g;r)|,$$

para $g \in \mathcal{H}(\Delta;F')$ e $f \in H^p(\Delta,F)$. Para cada $g \in \mathcal{H}(\Delta;F')$, analisaremos o comportamento de $N_q(g;r)$ quando q ou r variam. Ainda mostraremos algumas relações entre espaços de nosso interesse.

Proposição 6.6. Sejam $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$ e $1 \leq q_2 < q_1 \leq \infty$, onde q_1 e q_2 são os respectivos índices conjugados de p_1 e p_2. Se $g \in \mathcal{H}(\Delta;F')$, então

$$N_{q_1}(g;r) \leq N_{q_2}(g;r) \tag{6.3}$$

e

$$H^{p_1}(\Delta;F)^b \subset H^{p_2}(\Delta;F)^b. \tag{6.4}$$

Demonstração: Pela desigualdade 2.2 segue que

$$H^{p_2}(\Delta;F) \subset H^{p_1}(\Delta;F) \tag{6.5}$$

e que $\|h\|_{p_1} \leq \|h\|_{p_2}$ se $h \in H^{p_1}(\Delta;F)$.

Pela Proposição 5.5,

$$H^{p_1}(\Delta;F)^b \subset H^{p_2}(\Delta;F)^b \tag{6.6}$$

e também $\|g\|^b_{q_2} \leq \|g\|^b_{q_1}$ se $g \in H^{p_2}(\Delta;F)^b$.

Portanto, a desigualdade 6.3 segue tomando $h = T_r g$ com $g \in \mathcal{H}(\Delta;F')$, pois, neste caso $h \in H^{p_2}(\Delta;F)^b$ pela Proposição 3.12 e, além disto,

$$N_{q_2}(g;r) = \|T_r g\|^b_{q_2} \leq \|T_r g\|^b_{q_1} = N_{q_1}(g;r),$$

o que vem do item 3 da definição 3.11 e do item (2) da Proposição 3.17. ■

Proposição 6.7. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Se $g \in \mathcal{H}(\Delta;F')$, então sendo q o conjugado de p, obtemos

$$N_q(g;r) \leq M_q[g;r] \tag{6.7}$$

Em particular,

$$H^q(\Delta;F') \subset H^p(\Delta;F)^b. \tag{6.8}$$

Demonstração: A partir do item 3 da Proposição 2.9, obtemos a seguinte expressão

$$B(f, g; r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} < f(\rho e^{i\theta}), g\left(\left(\frac{r}{\rho}\right) e^{-i\theta}\right) > d\theta,$$

onde $f \in H^p(\Delta; F)$, $g \in \mathcal{H}(\Delta; F')$ e $0 \leq r < \rho < 1$.

Pela desigualdade de Hölder, segue

$$|B(f, g; r)| \leq M_p[f; \rho] M_q[g; \frac{r}{\rho}] \leq \|f\|_p M_q[g; \frac{r}{\rho}].$$

Fazendo $\rho \to 1$, temos

$$|B(f, g; r)| \leq \|f\|_p M_q[g; r].$$

Portanto, obtemos a desigualdade em (6.7), ou seja,

$$N_q(g; r) \leq M_q[g; r],$$

e a inclusão em (6.8) segue diretamente disto. ■

Capítulo 7

Dualidade de Espaços de Hardy com Valores Vetoriais

Como feito antes, neste capítulo sempre consideramos p e q índices conjugados.

Vimos na Proposição 6.7 que

$$H^q(\Delta; F') \subset H^p(\Delta; F)^b.$$

Mas será que pode ocorrer se

$$H^p(\Delta; F)^b \subset H^q(\Delta; F'). \tag{7.1}$$

ou melhor, $H^p(\Delta; F)^b = H^q(\Delta; F')$? Seria suficiente termos F com a propriedade ARNP para que a igualdade fosse verdadeira? Podemos ver no artigo citado em [5] que estas condições sobre F ainda não são suficientes. Dando continuidade, relacionaremos a última inclusão com alguns resultados. Por questão de maior facilidade de escrita, expressaremos (7.1) numa afirmação como segue:

$\mathbf{A}_1(q; F')$**:** Se $g \in H^p(\Delta; F)^b$, então $g \in H^q(\Delta; F')$.

Proposição 7.1. Seja $1 < q < \infty$. Se $\mathbf{A}_1(q; F')$ é verdadeira, então existe uma constante $C_1(q) > 0$, dependendo somente de q, obedecendo a desigualdade

$$M_q[g; r] \leq C_1(q) N_q(g; r), \tag{7.2}$$

para todo $0 \leq r < 1$ e $g \in \mathcal{H}(\Delta; F')$. Em particular, a inclusão 7.1 é contínua.

Demonstração: Pela Proposição 3.10, para cada $h \in H^p(\Delta; F)^b$, existe uma constante $C_1(q) > 0$ tal que

$$\|h\|_q \leq C_1(q) \|h\|_q^b,$$

com $C_1(q)$ dependendo somente de q.

Se $g \in \mathcal{H}(\Delta; F)$, então $h = T_r g \in H^p(\Delta; F)^b$, pela Proposição 3.12. Pelo item (3) da Definição 3.11, temos que

$$\|h\|_q^b = \|T_r g\|_q^b = N_q(T_r g) = N_q(g; r).$$

Ainda, pelo que vimos na equação 3.3, temos

$$\|h\|_q = \|T_r g\|_q = M_q[g; r].$$

De tudo isto, obtemos a desigualdade 7.2 desejada. ■

Agora, mais uma afirmação:

$\mathbf{A}_2(p; F)$: Se $\varphi \in L^p(T; F)$, e f é sua integral de Cauchy, $f \in H^p(\Delta; F)$.

Proposição 7.2. Se $\mathbf{A}_2(p; F)$ é verdadeira, então existe $C_2(p)$ tal que:

$$\|f\|_p \leq C_2(p)\|\varphi\|_p,$$

onde $\varphi \in L^p(T; F)$ e $f \in H^p(\Delta; F)$ é a sua integral de Cauchy.

Demonstração: Vamos mostrar que a correspondência entre φ e f, define uma transformação linear limitada entre $L^p(T; F)$ e $H^p(\Delta; F)$. Como $L^p(T; F)$ e $H^p(\Delta; F)$ são espaços de Banach, podemos utilizar do Teorema do Gráfico Fechado. Sejam φ_n, $\varphi \in L^p(T; F)$ e $g \in H^p(\Delta; F)$. Sejam f_n e f as correspondentes integrais de Cauchy de φ_n e φ, respectivamente. Suponhamos que $\|\varphi_n - \varphi\|_p \to 0$ e $\|f_n - g\|_p \to 0$. Vamos mostrar que $f = g$. Seja a primeira igualdade

$$f(z) - g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(e^{i\theta})}{1 - ze^{i\theta}} d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi_n(e^{i\theta})}{1 - ze^{-i\theta}} d\theta + f_n(z) - g(z),$$

e assim,

$$\begin{aligned} \|f(z) - g(z)\| \leq & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\|\varphi(e^{i\theta}) - \varphi_n(e^{i\theta})\|}{1 - |z|} d\theta + \|f_n(z) - g(z)\| \\ \leq & \frac{\|\varphi - \varphi_n\|_p}{1 - |z|} + \frac{\|f_n - g\|_p}{1 - |z|}. \end{aligned}$$

Para a última desigualdade utilizamos da Proposição 3.6, lembrando o fato de que $A_1(H^p(\Delta; F)) = 1$. Pela convergência, só nos resta $f = g$. ■

Quando F tem a propriedade ARNP, sabemos pelo Teorema 2.28 que a aplicação que leva $\tilde{f} \in H^p(T; F)$ na sua integral de Cauchy f, estabelece um isomofismo isométrico entre $H^p(\Delta; F)$ e $H^p(T; F)$. A partir disto, enunciamos a seguinte proposição:

Proposição 7.3. Seja F um espaço de Banach com a propriedade ARNP. Então F satisfaz $A_2(p; F)$ se e somente se F é UMD.

Demonstração: Usaremos o Teorema 2.39. Suponhamos $\mathbf{A}_2(p; F)$ verdadeira. Tomemos $\varphi \in L^p(T; F)$. Por hipótese, sua integral de Cauchy f pertence a $H^p(\Delta; F)$. Pelo Teorema 2.3 de Bukhvalov [5], página 1054, φ é o único elemento de $L^p(T; F)$ com a propriedade de que f é a integral de Cauchy de φ. Pelo Teorema 2.28, sabemos que existe uma única $\tilde{f} \in H^p(T; F) \subset L^p(T; F)$ tal que f é a integral de Cauchy de $\tilde{f}$. Isto conclui, pois $\tilde{f}$ é a projeção analítica de φ e o resultado segue da Proposição 7.2.

Agora suponhamos que o operador

$$\begin{array}{rcl} S : L^p(T; F) & \longrightarrow & H^p(T; F) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi^a \end{array},$$

seja limitado para todo $1 < p < \infty$, ou ainda, existe $A > 0$ tal que $\|\varphi^a\|_p \leq \|\varphi\|_p$. Sendo então f a integral de Cauchy de φ, temos para $z \in \Delta$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(e^{i\theta})}{1 - ze^{i\theta}} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi^a(e^{i\theta})}{1 - ze^{i\theta}} d\theta$$

e, pelo Teorema 2.28, temos $\|f\|_p = \|\varphi^a\|_p$. Isto conclui o desejado. ■

Proposição 7.4. A afirmação $\mathbf{A}_1(q; F')$ implica na afirmação $\mathbf{A}_2(q; F')$.

Demonstração: Seja $\varphi \in L^q(T; F')$. Sendo g a integral de Cauchy de φ, pela Proposição 6.3, $g \in H^p(\Delta; F)^b$ e $\|g\|_q^b \leq \|\varphi\|_q$. Ainda pela hipótese e pela Proposição 7.1, temos que $g \in H^q(\Delta; F')$ e

$$\|g\|_q \leq C_1(q) \|g\|_q^b \leq C_1(q) \|\varphi\|_q,$$

obtendo que $g \in H^q(\Delta; F')$ como queríamos demonstrar. ■

Temos mais uma implicação:

Proposição 7.5. A afirmação $\mathbf{A}_2(p; F)$ implica na afirmação $\mathbf{A}_1(q; F')$.

Demonstração: Sejam $g \in H^p(\Delta; F)^b$, $\varphi \in L^p(T; F)$ e f a integral de Cauchy de φ. Desta maneira:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} < \varphi(e^{i\theta}), g(re^{-i\theta}) > d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} < c_n(\varphi), \gamma_n(g) > r^n,$$

onde

$$c_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{7.3}$$

e, pela definição de integral de Cauchy, segue que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\varphi) z^n.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} < \varphi(e^{i\theta}), g(re^{-i\theta}) > d\theta = B(f,g;r),$$

e, assim, utilizando da Proposição 7.2:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} < \varphi(e^{i\theta}), g(re^{-i\theta}) > d\theta\right| \leq \|f\|_p\|g\|_q^b \leq C_2(p)\|\varphi\|_p\|g\|_q^b,$$

resultando pela Proposição 2.17 que:

$$M_q[g;r] \leq C_2(p)\|g\|_q^b$$

e isto conclui a demonstração. ■

Com base nas implicações dadas nas Proposições 7.4 e 7.5, obtemos a seguinte proposição:

Proposição 7.6. Seja F um espaço de Banach com a propriedade ARNP, tal que seu dual F' também tenha a propriedade ARNP. A afirmação $\mathbf{A}_1(q;F')$ é verdadeira se e somente se o espaço de Banach F é UMD.

Demonstração: Se F é UMD, então pela Proposição 7.3, $\mathbf{A}_2(p;F)$ é verdadeira e o resultado segue da Proposição 7.5. Agora, se $\mathbf{A}_1(q;F')$ é verdadeira, então pela Proposição 7.4 resulta que $\mathbf{A}_2(q;F')$ é verdadeira. Reciprocamente, pela Proposição 7.3, F' é UMD e, portanto, pela Proposição 2.36 F é UMD. ■

Pelo que vimos na página 22, exemplos que satisfazem as hipóteses desta última proposição, são os espaços de Banach reflexivos.

Proposição 7.7. Se F tem a propriedade ARNP e a afirmação $\mathbf{A}_1(q;F')$ é verdadeira, os espaços $(H^p(\Delta,F))'$ e $H^q(\Delta;F')$ são topologicamente isomorfos.

Demonstração: Se $g \in H^q(\Delta;F')$, então das desigualdades (7.2) e (6.7), resulta:

$$\|g\|_q^b \leq \|g\|_q \leq C_1(q)\|g\|_q^b.$$

Disto, $H^q(\Delta;F')$ é topologicamente isomorfo ao espaço $H^p(\Delta;F)^b$. Mas, pelo Teorema 6.1, $H^p(\Delta;F)^b$ é topologicamente isomorfo ao espaço $(H^p(\Delta,F))'$. Isto conclui a demonstração. ■

A partir da Proposição 7.7 escrevemos a seguinte definição:

Definição 7.8. Diremos que os espaços $(H^p(\Delta,F))'$ e $H^q(\Delta;F')$ são canonicamente topologicamente isomorfos se $\mathbf{A}_1(q;F')$ é verdadeiro.

Continuando, enunciamos o seguinte teorema:

Teorema 7.9. Seja F Banach com a propriedade ARNP, tal que F' também tenha a propriedade ARNP. Então, os espaços $(H^p(\Delta,F))'$ e $H^q(\Delta;F')$ são canonicamente topologicamente isomorfos se e somente se F é UMD.

Demonstração: O resultado segue das Proposições 7.6 e 7.7. ■

Pelo que vimos no último teorema, se F e F' têm a propriedade ARNP, é condição necessária e suficiente para que F seja UMD o fato de $(H^p(\Delta, F))'$ e $H^q(\Delta; F')$ serem espaços canonicamente topologicamente isomorfos. Notemos que um resultado semelhante a este é essencialmente conhecido. Este resultado pode ser obtido como consequência imediata do Teorema 2.28 e do Teorema 2.22, página 92 da tese de Blasco [3]. Com efeito, Blasco demonstra que para todo Banach F, $(H^p(T; F))'$ e $H^q(T; F')$ são topologicamente isomorfos pelo isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \phi : H^q(T; F') & \longrightarrow & (H^p(T; F))' \\ f & \longmapsto & \begin{array}{rcl} \phi(f) : \; H^p(T; F) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ g & \longmapsto & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} < f(e^{i\theta}), g(e^{i\theta}) > d\theta \end{array} \end{array}$$

se, e somente se, F é UMD. Portanto, pelo Teorema de Bukhvalov 2.28, segue que, se F e F' têm a propriedade ARNP, então $(H^p(\Delta; F))'$ e $H^q(\Delta; F')$ são topologicamente isomorfos, por um isomorfismo específico obtido a partir do resultado do Teorema 2.28 e de ϕ se, e somente se, F é UMD. Aqui, utilizamos ainda do fato de que se dois espaços de Banach são topologicamente isomorfos, também o são seus respectivos duais.

No que segue, apresentamos uma demonstração dada por Taylor em [37], página 41, de que $\mathbf{A}_1(q; \mathbb{C})$ é verdadeira. Podemos afirmar, portanto, que estamos dando uma outra demonstração de que $\mathbb{C}$ é do tipo UMD.

Exemplo: Consideremos $F = \mathbb{C}$. Começamos com o teorema de Marcel Riesz, apresentado inicialmente no artigo indicado em [31]. Uma demonstração deste teorema, pode ser encontrada em [24], página 151. Antes porém, uma definição:

Definição 7.10. Denotamos por $\mathcal{H}_0(\Delta)$ o espaço das funções $f \in \mathcal{H}(\Delta)$ tais que a parte imaginária se anula na origem, ou ainda, $f(0) \in \mathbb{R}$.

Teorema 7.11. (M. Riesz) Seja $1 < p < \infty$. Existe uma constante positiva $\mu(p)$, dependendo somente de p, tal que para qualquer $0 \leq r < 1$ e $f \in \mathcal{H}_0(\Delta)$ vale:

$$M_p[v; r] \leq \mu(p) M_p[u; r],$$

onde u e v são, respectivamente, as partes real e imaginária de f.

Demonstração: Ver Hoffman [24], página 151. ■

Este teorema é equivalente à seguinte afirmação:

$\mathbf{A}_3(p; \mathbb{C})$: Existe uma constante $C_3(p)$, dependendo somente de p, tal que para $0 \leq r < 1$ e qualquer $f \in \mathcal{H}_0(\Delta)$, vale:

$$M_p[f; r] \leq C_3(p) M_p[u; r].$$

Proposição 7.12. A afirmação $\mathbf{A}_3(p;\mathbb{C})$ implica na afirmação $\mathbf{A}_2(p;\mathbb{C})$.

Antes de darmos uma demonstração direta desta proposição, provemos o seguinte lema:

Lema 7.13. Sejam $\varphi \in L^p(T;\mathbb{R})$, f sua integral de Cauchy e u a parte real de f. Então, $M_p[u;r] \leq \|\varphi\|_p$.

Demonstração: Temos $f(re^{i\theta}) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{\varphi(e^{it})}{1-re^{(i\theta-t)}}dt.$

Em Hoffman [24] é definido o núcleo de Cauchy $\{C_r\}_{0\leq r<1}$ dado por

$$C_r(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{-in\theta} = \frac{1}{1-r^{-i\theta}}.$$

Assim,

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(e^{it})}{1-re^{i(\theta-t)}}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})C_r(t-\theta)dt.$$

Ainda em [24], vemos que

$$Re\{C_r(\theta)\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P_r(\theta),$$

onde Re representa a parte real e, $(P_r)_{0\leq r<1}$ é o núcleo de Poisson, também apresentado em [24], sendo que cada função desta família é dada por:

$$P_r(\theta) = \frac{1}{1-2rcos(\theta)+r^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^n e^{in\theta},$$

com cada elemento satisfazendo

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta)d\theta = 1. \tag{7.4}$$

Desta maneira,

$$u(re^{i\theta}) = Re\{f(re^{i\theta})\} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta})dt + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})P_r(\theta-t)dt.$$

Portanto, dando prosseguimento

$$|u(re^{i\theta})| \leq (\frac{1}{2})\|\varphi\|_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})||P_r(t-\theta)|^{\frac{1}{p}}|P_r(t-\theta)|^{\frac{1}{q}}dt\right)$$

e, a segunda parte da soma à direita da desigualdade, podemos majorar como segue, através da desigualdade de Hölder

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(e^{it})||P_r(t-\theta)|^{\frac{1}{p}}|P_r(t-\theta)|^{\frac{1}{q}}dt \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(e^{it})|^p|P_r(t-\theta)|dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P_r(t-\theta)|dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

e pela Igualdade 7.4, lembrando que os elementos do núcleo de Poisson sempre assumem valores reais não-negativos, resulta:

$$|u(re^{i\theta})| \leq (\frac{1}{2})\|\varphi\|_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(e^{it})|^p|P_r(t-\theta)|dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

e agora, utilizando de $\|\varphi\|_1 \leq \|\varphi\|_p$ e da desigualdade de Minkowski resulta

$$M_p[u;r] \leq \frac{1}{2}\|\varphi\|_p + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(e^{it})|^p|P_r(t-\theta)|dt\right)d\theta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

A partir do teorema de Fubini com respeito a inversão da ordem de integração, obtemos novamente da Igualdade 7.4:

$$M_p[u;r] \leq \frac{1}{2}\|\varphi\|_p + \frac{1}{2}\|\varphi\|_p,$$

concluindo com o desejado. ■

Demonstração (da proposição 7.12): Seja $\varphi \in L^p(T)$ e escrevemos $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, onde φ_1 e φ_2 são reais. Sejam f_k a integral de Cauchy de φ_k, para $k = 1, 2$ e, $f = f_1 + if_2$. Então

$$M_p[f;r] \leq M_p[f_1;r] + M_p[f_2;r]$$

e $\|\varphi_k\|_p \leq \|\varphi\|_p$, $k = 1, 2$.

Se $f_k(z) = u_k(z) + iv_k(z)$, onde u_k e v_k são reais, definamos $g_k(z) = f_k(z) - iv_k(0)$. Então $g_k \in \mathcal{H}_0(\Delta)$. E ainda, para $k = 1, 2$, vale

$$M_p[f_k;r] \leq M_p[g_k;r] + |v_k(0)| \tag{7.5}$$

e

$$|v_k(0)| \leq |f_k(0)| = |c_0(\varphi_k)| \leq \|\varphi_k\|_p$$

lembrando que cada $c_n(\varphi)$ é um coeficiente de Fourier de φ_k dado por

$$c_n(\varphi_k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_k(t)e^{-int}dt \qquad (n \in \mathbb{Z}). \tag{7.6}$$

De $A_3(p;\mathbb{C})$ verdadeiro, resulta

$$M_p[g_k;r] \leq C_3(p)M_p[u_k;r]$$

e combinando o lema anterior com o que já obtemos

$$M_p[f_k; r] \leq [C_3(p) + 1]\|\varphi_k\|_p,$$

e ainda

$$M_p[f; r] \leq 2[C_3(p) + 1]\|\varphi\|_p,$$

e com este fato, finalizamos a demonstração. ■

Sabemos da Proposição 2.3 que:

$$\mathcal{H}_w(\Delta; F) = \mathcal{H}(\Delta; F)$$

para todo espaço de Banach F.

Utilizando dos resultados anteriores, obtemos o seguinte teorema:

Teorema 7.14. Seja $1 < p < \infty$ e seja F um espaço de Banach com a propriedade ARNP tal que

$$H_w^p(\Delta; F) = H^p(\Delta; F). \tag{7.7}$$

Então $(H^p(\Delta, F))'$ e $H^q(\Delta; F')$ são canonicamente topologicamente isomorfos.

Demonstração: Vamos mostrar que a hipótese 7.7 implica em $\mathbf{A}_2(p; F)$. O restante da demonstração segue da Proposições 7.5 e 7.7. Seja $\varphi \in L^p(T; F)$ e seja $f \in \mathcal{H}(\Delta; F)$ sua integral de Cauchy. Se $\psi \in F'$, então $\psi \circ \varphi \in L^p(T)$ e, é válido neste caso pelo Teorema de Riesz, como vimos no exemplo anterior onde $F = \mathbb{C}$, que sendo $\psi \circ f$ a integral de Cauchy de $\psi \circ \varphi$, então $\psi \circ f \in H^p(\Delta)$. Pela afirmação do enunciado, $f \in H^p(\Delta; F)$. Isto demonstra $\mathbf{A}_2(p; F)$. ■

É fácil ver, a partir das definições de espaços de Hardy e fracamente de Hardy, que se F tem dimensão finita, então a igualdade 7.7 é satisfeita. Com este teorema, portanto, demonstramos que $(H^p(\Delta, F))'$ e $H^q(\Delta; F')$ são canonicamente topologicamente isomorfos para estes espaços de Banach. Um dos primeiros a demonstrar um fato semelhante, isto é, que $(H^p(\Delta, F))'$ e $H^q(\Delta; F')$ são topologicamente isomorfos para espaços de Banach F de dimensão finita, foi Levi [26], página 59.

Incrementando um pouco mais, temos ainda um outro teorema:

Teorema 7.15. Seja $1 < p < \infty$ e seja F um espaço de Banach com a propriedade ARNP, com F' também satisfazendo ARNP e tal que

$$H_w^p(\Delta; F) = H^p(\Delta; F). \tag{7.8}$$

Então F é UMD.

Demonstração: O resultado segue dos teoremas (7.9) e (7.14). ■

Perguntamos: será que a implicação contrária do teorema acima é verdadeira? De fato, daremos um exemplo que não. Vejamos!

Suponhamos que $H_w^p(\Delta; F) = H^p(\Delta; F)$ para $1 < p < \infty$. Então

$$(H^p(\Delta; F))' \text{ e } H^q(\Delta; F')$$

são canonicamente topologicamente isomorfos, pelo Teorema 7.14, se F tiver a propriedade ARNP. Portanto, supondo ainda que $H^q(\Delta; F') = H^q_w(\Delta; F')$ para $1 < q < \infty$, temos que

$$(H^p_w(\Delta; F))' \text{ e } H^q_w(\Delta; F')$$

são topologicamente isomorfos.

Pela Proposição 2.16, considerando F reflexivo, resulta que existe um isomorfismo topológico entre os espaços

$$(\mathcal{L}(F'; H^p(\Delta))' \text{ e } \mathcal{L}(F; H^q(\Delta)).$$

Logo, os três espaços seguintes são isomorfos:

$$(\mathcal{L}(F'; H^p(\Delta)))'', (\mathcal{L}(F; H^q(\Delta))' \text{ e } \mathcal{L}(F'; H^p(\Delta)).$$

Mas, então $\mathcal{L}(F'; H^p(\Delta))$ é reflexivo. Por Mujica [29], se denotarmos por $\mathcal{L}_k(F'; H^p(\Delta))$ o subespaço de $\mathcal{L}(F'; H^p(\Delta))$ constituído dos operadores compactos, resulta que

$$\mathcal{L}(F'; H^p(\Delta)) = \mathcal{L}_k(F'; H^p(\Delta)).$$

Para $1 < q < \infty$, tomando $F = H^q(\Delta)$, então $F' = H^p(\Delta)$ e logo

$$\mathcal{L}(H^p(\Delta); H^p(\Delta)) = \mathcal{L}_k(H^p(\Delta); H^p(\Delta)).$$

Disto, teríamos que a identidade $I : H^p(\Delta) \longrightarrow H^p(\Delta)$ é compacta, o que não pode ocorrer, pois $H^p(\Delta)$ é um espaço de dimensão infinita. Sabemos que $H^p(\Delta)$ e $H^p(T)$ são topologicamente isomorfos. Por [30], página 8, vale que $H^p(T)$ e $L^p(T)$ são isometricamente isomorfos. Como $L^p(T)$ é UMD, obtemos que $H^p(\Delta)$ é UMD. Assim, temos um exemplo de um espaço F UMD, tal que a igualdade 7.8 não é válida, demonstrando o desejado, ou seja, a não validade da implicação contrária do Teorema 7.15.

É fácil vermos que se $f \in H^p(\Delta; F)$, então $\psi \circ f \in H^p(\Delta)$ para todo $\psi \in F'$, ou seja, $H^p(\Delta; F) \subset H^p_w(\Delta; F)$. Porém, com base no que acabamos de fazer e no Teorema 7.14, mostramos que a inclusão contrária nem sempre pode ser válida, isto é:

$$H^p(\Delta; F) \nsubseteq H^p_w(\Delta; F)$$

por exemplo, mesmo que se tomarmos espaços UMD, como é o caso de $F = H^p(\Delta)$. Ainda deixamos uma pergunta: será que a igualdade 7.8 é equivalente ao fato de F ter dimensão finita? Observamos que no caso do exemplo $F = H^p(\Delta)$ dado logo antes, mostrando a não validade da recíproca do Teorema 7.15, este é um exemplo de espaço de dimensão infinita.

Índice Remissivo

Referências Bibliográficas

[1] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, New York, Wiley Classics Library, 1995.

[2] O. Blasco, *Boundary values of functions in vector-valued Hardy spaces and geometry on Banach spaces*, J. Funct. Anal. 78 (1988), 346-364

[3] O. Blasco, *Espacios de Hardy de Funciones con Valores Vectoriales*, Tesis, Zaragoza, 1985.

[4] S. Bochner e A. E. Taylor, *Linear functionals on certain spaces of abstractly-valued functions*, Ann. of Math. 39 (1938), 913-944.

[5] A. V. Bukhvalov, *Hardy spaces of vector-valued functions*, J. Sov. Math. 16(1981), 1051-1059.

[6] A. V. Bukhvalov e A. A. Danilevich, *Boundary properties of analytic and harmonic functions with values in Banach space*, Mat. Zametki 31 (1982), 203-214 [Russian]; Math. Notes Acad. Sci. USSR 31 (1982), 104-110.

[7] D. L. Burkholder, *A geometrical characterization of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional*, Ann. Probab. 9 (1981), 997-1011.

[8] D. L. Burkholder, *Martingales and singular integrals in Banach spaces*, in: Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. I, 233-269, North-Holland, Amsterdam, 2001.

[9] D. L. Burkholder, *Martingales and Fourier analysis in Banach spaces*, in: Probability and Analysis (Varenna, 1985), Lecture Notes in Math., 1206, Springer, Berlin, 1986, 61-108.

[10] D. L. Burkholder, *Martingale transforms and the geometry of Banach spaces*, in: Probability in Banach Spaces, III (Medford, 1980), Lecture Notes in Math. 860, Springer, Berlin, 1981, 35-50.

[11] J. Bourgain, *Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional*, Ark. Mat. 21 (1983), 163-168.

[12] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, New York, 1978.

[13] J. Diestel e J.J.Uhl, *Vector Measures*, Amer. Math. Soc., 1977.

[14] J. L. Doob, *Stochastic Processes*, Wiley, New York; Chapman and Hall, London, 1953.

[15] P. N. Dowling, *Representable operators and the analytic Radon-Nikodym property in Banach spaces*, Proc. Royal. Irish. Acad. 85A (1985), 143-150.

[16] P. N. Dowling, *Complemented copies of c_0 in vector-valued Hardy spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 107 (1989), 251-254.

[17] P. N. Dowling, *Duality in some vector-valued function spaces*, Rocky Mountain J. Math. 22 (1992), 511-518, 1992.

[18] P. N. Dowling, *The analytic Radon-Nikodym property in Lebesgue-Bochner function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 99 (1987), 119-122.

[19] P. L. Duren, *Theory of H^p Spaces*, Academic Press, New York, 1970.

[20] M. Fabian et al., *Functional Analysis and Infinite-dimensional Geometry*, CMS Books in Mathematics, Springer, New York, 2001.

[21] D. L. Fernandez e J. B. Garcia, *Interpolation of Orlicz-valued function spaces and UMD property*, Studia Math. 99 (1991), 23-40.

[22] W. Hensgen, *On complementation of vector-valued Hardy spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 104 (1988), 1153-1162.

[23] W. Hensgen, *On the dual space of $H^p(X)$, $1 < p < \infty$*, J. Funct. Anal. 92 (1990), 348-371.

[24] K. Hoffman, *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962.

[25] E. O. Holzbecher, *Modeling Density-driven Flow in Porous Media: Principles, Numerics, Software*, Springer, 1998.

[26] S. Levi, *A note on Hardy spaces of vector valued functions*, Boll. Un. Mat. Ital., Ser. IV, 5, 52-63, 1972

[27] B. Maurey, *Système de Haar*, Séminaire Maurey-Schwartz, 1974-1975, Ecole Polytechnique, Paris, 1975.

[28] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*, Math. Studies, **120**, North-Holland, Amsterdam, 1986

[29] J. Mujica, *Reflexive spaces of homogeneous polynomials*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 49 (2001), 211-222.

[30] A. Pelczyknski, *Banach spaces of analytic functions and absolutely summing operators*, CBMS Regional Conf. Series 30, Amer. Math. Soc., 1977.

[31] F. Riesz, *Über die Randwerte einer analytichen Funktion*, Math. Z. 18 (1923), 87-95.

[32] J. L. Rubio de Francia, *Martingale and integral transforms of Banach space valued functions*, Lecture Notes in Math. 1221, 195-222, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1986.

[33] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[34] R. Ryan, *Boundary values of analytic vector valued functions*, Indag. Math. 65 (1962), 558-572.

[35] R. Ryan, *The F. and M. Riesz theorem for vector measures*, Indag. Math. 66 (1963), 408-412.

[36] A. E. Taylor,*Banach spaces of functions analytic in the unit circle I*, Studia Math. 11 (1950), 145-170.

[37] A. E. Taylor, *Banach spaces of functions analytic in the unit circle II*, Studia Math. 12 (1951), 25-50.

[38] E. Thorp e R. Whitley, *The strong maximum modulus theorem for analytic functions into Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 640-646.

[39] E. C. Titchmarsh, *Theory of Functions*, Oxford, 1932.

[40] M. C. Veraar, *Continuous local martingales and stochastic integration in UMD Banach spaces*, Stoch. Int. J. Prob. Stoch. Proc. 79 (2007), 601-618.