Darwin Castillo Huamaní

Condições de Qualificação para programação não Linear

CAMPINAS
2013

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

DARWIN CASTILLO HUAMANÍ

CONDIÇÕES DE QUALIFICAÇÃO PARA PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática aplicada.

Orientador: Roberto Andreani

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO DARWIN CASTILLO HUAMANÍ, E ORIENTADA PELO PROF. DR. ROBERTO ANDREANI.

Assinatura do Orientador

____

CAMPINAS
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

C278c

Castillo Huamaní, Darwin, 1982-
Condições de qualificação para programação não linear / Darwin Castillo Huamaní. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Roberto Andreani.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Condições de qualificação. 2. Bases positivas. I. Andreani, Roberto,1961-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Constraint qualifications for nonlinear programming
Palavras-chave em inglês:
Constraint qualifications
Positive bases
Área de concentração: Matemática Aplicada
Titulação: Mestre em Matemática Aplicada
Banca examinadora:
Roberto Andreani [Orientador]
Maria Aparecida Diniz Ehrhardt
Valeriano Antunes de Oliveira
Data de defesa: 19-09-2013
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 19 de setembro de 2013 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

____

Prof.(a). Dr(a). ROBERTO ANDREANI

____

Prof.(a). Dr(a). MARIA APARECIDA DINIZ EHRHARDT

____

Prof.(a). Dr(a). VALERIANO ANTUNES DE OLIVEIRA

Abstract

In this dissertation, we study the constraint of qualifications for nonlinear programming problems, essentially, The constraint qualification of constant rank component subspace and the constraint qualification of generator positive constant, recently introduced. Furthermore, a study is done about of the theory of positive bases in the space $\mathbb{R}^n$ where one can see the demonstration of partition of a positive basis theorem, which is used in the proof of that the relaxation of constraint qualification of constant positive linear dependence implies the constraint qualification of constant rank component subspace. Note that the properties of the positive bases are not similar to the properties of the linear bases for vector subspaces.

Keywords: Constraint qualifications, Positive bases.

Resumo

Nesta dissertação, estudam-se as condições de qualificação para problemas de programação não linear, essencialmente, a condição de qualificação de posto constante da componente de subespaço e a condição de qualificação de gerador positivo constante que foram recentemente introduzidas. Ademais, faz-se um estudo sobre a teoria das bases positivas no espaço $\mathbb{R}^n$, onde vê-se a demonstração do teorema da partição de uma base positiva, que é usado na demonstração de que a relaxação da condição de qualificação de dependência linear positiva constante implica a condição de qualificação de posto constante da componente de subespaço. Nota-se que as propriedades das bases positivas não são semelhantes às propriedades das bases lineares dos subespaços vetoriais.

Palavras-chave: Condições de qualificação, Bases positivas.

Sumário

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Roberto Andreani, pela paciência, dedicação, profissionalismo e principalmente, por todo o conhecimento e crescimento transmitidos durante o este período de estudos de mestrado.

Aos professores Dra, Maria Aparecida Diniz Ehrhardt e Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira, pelas sugestões e grandes contribuções para o aprimoramento deste trabalho. Suas recomendações foram de grande valor, obrigado.

À minha familia, que sempre estiveram e estão ao meu lado em qualquer situação. Vocês me fortalecem, muito obrigado.

Ao Capes pelo apoio financeiro.

Notação Utilizada

$\mathcal{I} = \{1, \cdots, m\}$ representa o conjunto de m elementos;

$\mathcal{J} = \{m+1, \cdots, m+p\}$ representa o conjunto de p elementos;

$\mathrm{card}(A)$ representa a cardinalidade do conjunto A;

$\mathrm{pos}(A)$ representa um conjunto gerado positivamente por A;

$V(x)$ representa a vizinhança centrada no ponto x;

$\pi : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ representa a projeção linear do espaço vetorial $\mathcal{V}$ sobre o subespaço $\mathcal{U}$;

$\dim \mathcal{V}$ representa a dimensão do espaço vetorial $\mathcal{V}$;

$\mathcal{F}(x)$ representa do cone viável linearizado;

$\mathcal{T}(x)$ representa o cone tangente en torno ao ponto x;

F representa o conjunto viável do problema de programação não linear;

v^T representa um vetor transposto.

Lista de Abreviaturas e Siglas

LICQ - Linear Independence Constraint Qualification.

MFCQ - Mangasarian-Fromovitz Constraint Qualification.

CRCQ - Constant Rank Constraint Qualification.

RCRCQ - Relaxed Constant Rank Constraint Qualification.

CPLD - Constant Positive Linear Dependence.

RCPLD - Relaxed Constant Positive Linear Dependence.

CRSC - Constant Rank of the Subspace Component.

CPG - Constant Positive Generator Condition.

Introdução

Consideremos o seguinte problema de programação não linear

$$\begin{aligned} &\min\ f_0(x) \\ &s.a\ f_i(x) = 0, \ \ i = 1, \cdots, m, \\ &\quad\ \ f_j(x) \leq 0, \ \ j = m+1, \cdots, m+p \end{aligned} \tag{PNL}$$

em que $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $i = 0, \cdots, m+p$, são funções com derivadas primeiras contínuas em $\mathbb{R}^n$. O conjunto viável é formado pelas pontos que satisfazem as restrições de igualdade e desigualdade,

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} f_i(x) = 0, \, i = 1, \cdots, m, \\ f_j(x) \leq 0, j = m+1, \, \cdots, m+p \end{array} \right\}.$$

Os elementos de F são chamados pontos viáveis. Uma restrição de desigualdade que se verifica por igualdade no ponto x é dita ativa em x. No caso que não se verifique a igualdade, dizemos que é inativa em x. Vamos denotar por $\mathcal{A}(x)$ o conjunto de índices das restrições de desigualdades ativas em um ponto viável x, isto é,

$$\mathcal{A}(x) = \{ j \mid f_j(x) = 0, \, j = m+1, \cdots, m+p \}.$$

Além disso, os minimizadores do problema acima podem ser locais, pontos viáveis x que verificam $f_0(x) \leq f_0(y)$ $\forall y \in V(x)$, ou globais, pontos viáveis x que verificam $f_0(x) \leq f_0(y)$ $\forall y \in F$.

Uma condição de otimalidade é uma condição necessária para um minimizador local. É desejável que uma condição de otimalidade seja forte, para que não haja muito pontos que a satisfaçam sem ser de fato minimizadores locais.

Os métodos desenvolvidos [7, 15] para a resolução do problema de PNL utilizam a condição de Karush-Kunh-Tucker (KKT) para encontrar candidatos a minimizador local.

Um ponto $x \in F$ satisfaz a condição KKT quando existem $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\mu_j \geq 0$, para todo $j \in \mathcal{A}(x)$, tais que

$$\nabla f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x) + \sum_{j \in \mathcal{A}(x)} \mu_j \nabla f_j(x) = 0.$$

Infelizmente nem sempre os minimizador locais a verificam KKT. Veja o exemplo:

$$\begin{aligned} &\min \ x \\ &\text{s.a } f_1(x) = x^2 = 0. \end{aligned}$$

A solução do problema é zero, mas $f_0'(0) + \lambda f_1'(0) = 1 + \lambda 0 = 1 \neq 0$.
Portanto, não vale KKT.

Para superar este problema, usamos uma hipótese adicional para que um minimizador local seja KKT, chamada condição de qualificação.

A partir das definições do cone tangente (objeto geométrico) e do cone viável linearizado (objeto analítico), foi encontrada a condição de qualificação mais fraca (Guignard [10]), se um minimizador local é tal que o polar do cone tangente e o polar do cone viável linearizado são iguais, então este ponto verifica KKT. Dado que os métodos trabalham com objetos analíticos (gradientes), este tipo de condição é impossível de ser usada na prova da convergência dos métodos, portanto condições de qualificação mais exigentes do que a de Guignard são necessárias para a prova da convergência dos métodos de PNL.

A primeira condição de qualificação proposta foi da independência linear (LICQ), do conjunto dos gradientes das restrições de igualdade e desigualdade ativas. Em seguida, Mangasarian e Fromovitz (MF) estabeleceram uma condição mais fraca do que LICQ; usam os escalares não negativos associados aos gradientes das restrições de desigualdade ativas, introduzindo o conceito de independência linear positiva (PLI).

Posteriormente, Janin [12] enfraqueceu LICQ com a condição de qualificação de posto constante (CRCQ): a ideia é manter o posto constante para todas as combinações de subconjuntos dos gradientes das restrições de igualdade e desigualdade ativas. Em 2001, Andreani, Martinez e Schuverdt generalizaram CRCQ, com a condição de dependência linear positiva constante (CPLD) [16], e provaram a convergência do Método do Lagrangiano Aumentado com esta condição.

Estudos posteriores de Andreani, Haeser, Martinez, Schuverdt, Silva; Minchenko e Stakhovski em [13, 3], definiram generalizações de CRCQ, CPLD, respectivamente, no entanto não tenham conseguido identificar exatamente o conjunto de índices dos gradientes das restrições de igualdade e desigualdade ativas que devem manter o posto constante.

Finalmente, Andreani, Haeser, Schuverdt e Silva [4] definiram a condição de qualificação de posto constante da componente de subespaço (CRSC); estabeleceram o conjunto de indices dos gradientes das restrições de igualdade e desigualdade ativas que devem de manter o posto constante; também propuseram a condição de qualificação gerador positivo constante (CPG), mostraram as boas condições de convergência do Lagrangiano Aumentado.

Esta dissertação se organiza da seguinte maneira. No capitulo 1, estudamos o cone tangente e o cone viável linearizado que são usados nas demonstrações das condições de qualificação.

No Capítulo 2, fazemos um estudo da teoria das bases positivas, essenciais para entender a teoria envolvida na demonstração de que relaxação da condição de qualificação de dependência linear positiva (RCPLD) implica CRSC.

No capítulo 3, fazemos uma revisão completa das condições de qualificação recentes e, finalmente, explicamos a prova de que RCPLD implica CRSC.

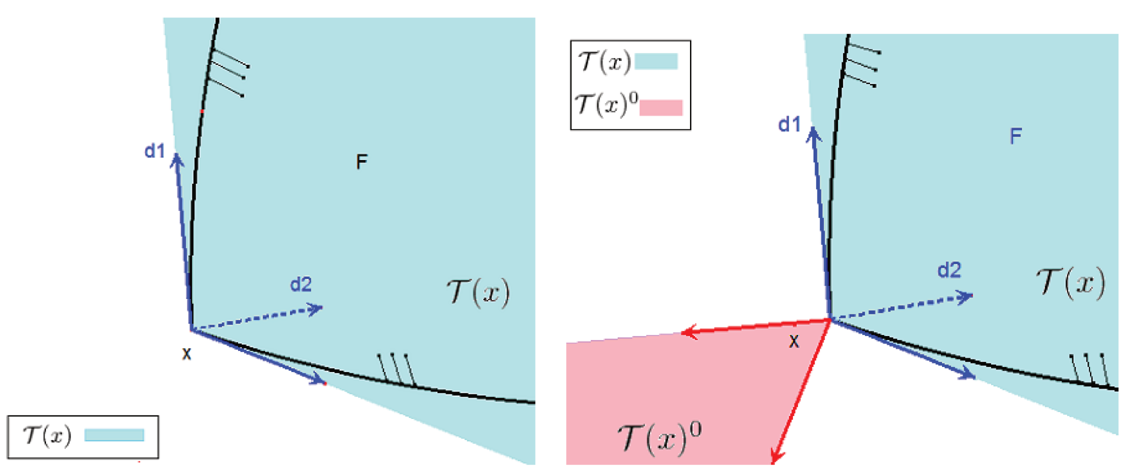
Capítulo 1

Visão Geométrica das Condições de Qualificação

Um objeto geométrico apropriado para descrever propriedades do conjunto viável F de PNL, em torno de $x \in F$, é o cone tangente.

Definição 1.1. *O cone tangente de F, em $x \in F$, é definido como:*

$$\mathcal{T}(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \begin{array}{c} \exists \{x^k\} \subset F, x^k \to x \\ \frac{x^k - x}{\|x^k - x\|} \to \frac{y}{\|y\|} \end{array} \right\} \cup \{0\}.$$



(a) (b)

Figura 1.1: (a) O cone tangente $\mathcal{T}(x)$. (b) O polar do cone tangente $\mathcal{T}(x)^0$.

Definição 1.2. *Dado um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$, definimos o polar de S por*

$$S^0 = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^T z \leq 0, \forall z \in S\}.$$

Assim, o polar do cone tangente é:

$$\mathcal{T}(x)^0 = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^T z \leq 0, \forall z \in \mathcal{T}(x)\}.$$

Nas figuras 1.1(a) e 1.1(b), temos ilustrações do cone tangente e seu polar respectivamente.

O teorema abaixo mostra uma condição de otimalidade usando a diferenciabilidade da função objetivo e o cone tangente de F em torno de x. Na figura 1.2, temos sua ilustração.

Teorema 1.3. *(Condição geométrica de otimalidade) Seja $x \in F$ um minimizador local do problema (PNL), então*

$$\nabla f_0(x)^T y \geq 0, \ \forall y \in \mathcal{T}(x).$$

Demonstração. Dado $0 \neq d \in \mathcal{T}(x)$, então existe uma sequência $\{x_k\}$ em F tal que $x_k \to x$ e $\frac{x_k - x}{\|x_k - x\|} \to \frac{d}{\|d\|}$. Assim, temos que

$$0 \leq f_0(x_k) - f_0(x) = \nabla f_0(x)^T (x_k - x) + o(\|x_k - x\|),$$

para todo k, suficientemente grande. Dividindo por $\|x_k - x\|$ e passando o limite, obtemos $\nabla f_0(x)^T d \geq 0$. □

Observemos que, através do cone polar do cone tangente, podemos reescrever a condição geométrica de otimalidade:

$$\nabla f_0(x)^T y \geq 0, \ \forall y \in \mathcal{T}(x) \quad \Leftrightarrow \quad -\nabla f_0(x) \in \mathcal{T}(x)^0. \tag{1.1}$$

Outra possível aproximação do conjunto viável é o cone viável linearizado. A importância de este conjunto com respeito ao cone tangente é ao fato de seu polar é fácil de computar, e pode ser usado diretamente nos algoritmos de PNL.

Definição 1.4. *Seja $x \in F$, definimos o cone viável linearizado de F em torno de x por*

$$\mathcal{F}(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \quad \begin{array}{c} \nabla f_i(x)^T y = 0, \ i = 1, \cdots, m, \\ \nabla f_j(x)^T y \leq 0, \forall j \in \mathcal{A}(x) \end{array} \right\}.$$

O polar do conjunto $\mathcal{F}(x)$ é o cone normal

$$\mathcal{N}(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \ y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x) + \sum_{j \in \mathcal{A}(x)} \mu_j \nabla f_j(x), \ \mu_j \geq 0 \right\}.$$

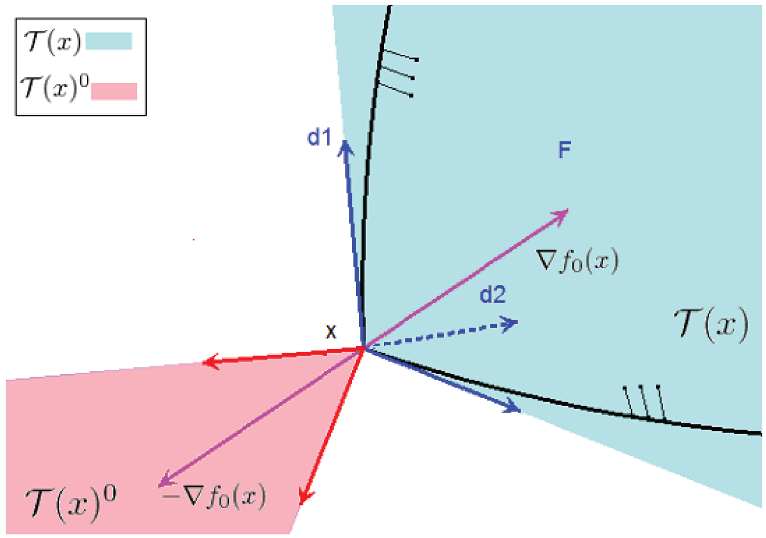


Figura 1.2: condição geométrica de otimalidade

Exemplo 1.5. *Vejamos que* $\mathcal{T}(\bar{x}) \neq \mathcal{F}(\bar{x})$ *e* $\mathcal{T}(\bar{x})^0 = \mathcal{N}(\bar{x})$.

Consideremos o ponto $\bar{x} = (0, 0)$,

$$f_1(x) = x_1 x_2 = 0,\ f_2(x) = -x_1 \leq 0,\ f_3(x) = -x_2 \leq 0,$$

as restrições de igualdade e desigualdade do conjunto F, com o conjunto ativo $\mathcal{A}(\bar{x}) = \{2, 3\}$. Logo, os gradientes das restrições de F no ponto $\bar{x}$ são:

$$\nabla f_1(\bar{x}) = (0, 0)^T,\ \nabla f_2(\bar{x}) = (-1, 0)^T,\ \nabla f_3(\bar{x}) = (0, -1)^T.$$

Na figura 1.4, temos a representação do $\mathcal{T}(\bar{x}) \neq \mathcal{F}(\bar{x})$ e $\mathcal{T}(\bar{x})^0 = \mathcal{N}(\bar{x})$.

Exemplo 1.6. *Vejamos que* $\mathcal{T}(\bar{x}) \neq \mathcal{F}(\bar{x})$ *e* $\mathcal{T}(\bar{x})^0 \neq \mathcal{N}(\bar{x})$.

Consideremos o ponto $\bar{x} = (0, 0)$,

$$f_1(x) = x_1^3 - x_2 \leq 0,\ f_2(x) = x_1^3 + x_2 \leq 0,$$

as restrições de desigualdade do conjunto F, com o conjunto ativo $\mathcal{A}(\bar{x}) = \{1, 2\}$. Logo, os gradientes das restrições no ponto $\bar{x}$ são:

$$\nabla f_1(\bar{x}) = (0, -1)^T,\ \nabla f_2(\bar{x}) = (0, 1)^T.$$

Na figura 1.3 temos a representação de $\mathcal{T}(\bar{x}) \neq \mathcal{F}(\bar{x})$ e $\mathcal{T}(\bar{x})^0 \neq \mathcal{N}(\bar{x})$.

Teorema 1.7. *Seja $x \in F$ um minimizador local do problema (PNL) e $\mathcal{T}(x)^0 = \mathcal{N}(x)$, então x satisfaz a propriedade KKT.*

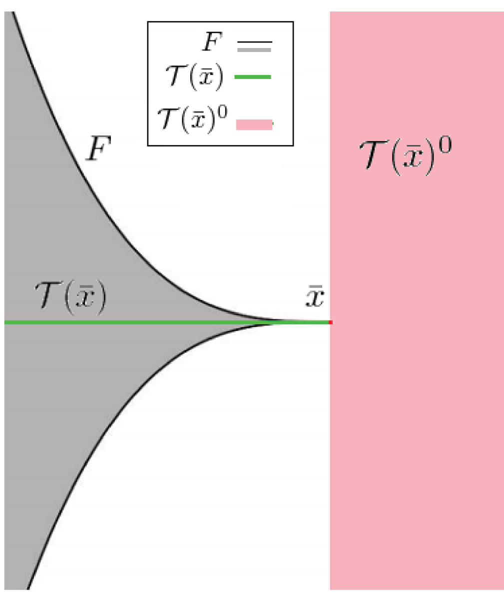
Demonstração. Pelas hipóteses x é minimizador local e $\mathcal{T}(x)^0 = \mathcal{N}(x)$. Considerando (1.1), temos que

$$-\nabla f_0(x) \in \mathcal{N}(x) \qquad \Rightarrow \qquad -\nabla f_0(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x) + \sum_{j \in \mathcal{A}(x)} \mu_j \nabla f_j(x),$$

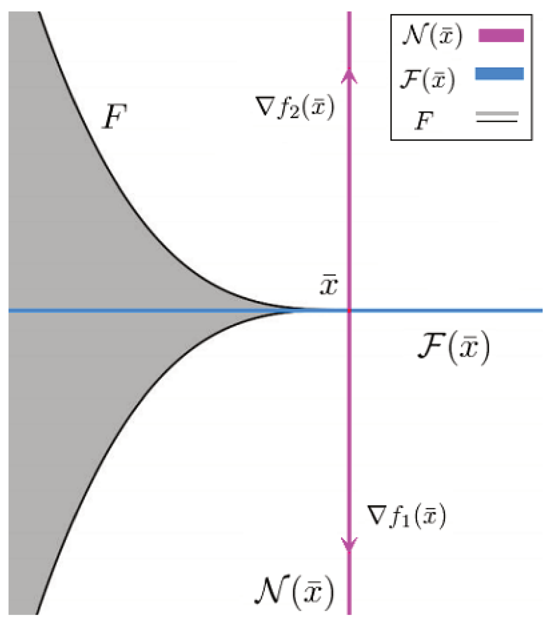
em que os escalares λ_i, μ_j são denominados multiplicadores de Lagrange. $\square$

A condição $\mathcal{T}(x)^0 = \mathcal{N}(x)$ é conhecida como a condição de qualificação de Guignard [10]. É a condição menos exigente de todas as condições de qualificação na literatura.

Outra condição de qualificação mais restritiva que Guignard é a condição de qualificação de Abadie, que estabelece a igualdade do cone tangente com o cone viável linearizado, $\mathcal{T}(x) = \mathcal{F}(x)$, que naturalmente implica a condição de Guignard. Ambas condições igualam objetos geométricos com objetos algébricos, mas são difíceis de computar nos algoritmos; surgiram, portanto, condições de qualificação mais fortes que a de Abadie, que trabalham com objetos algébricos. Este desenvolvimento será feito no Capítulo 3.

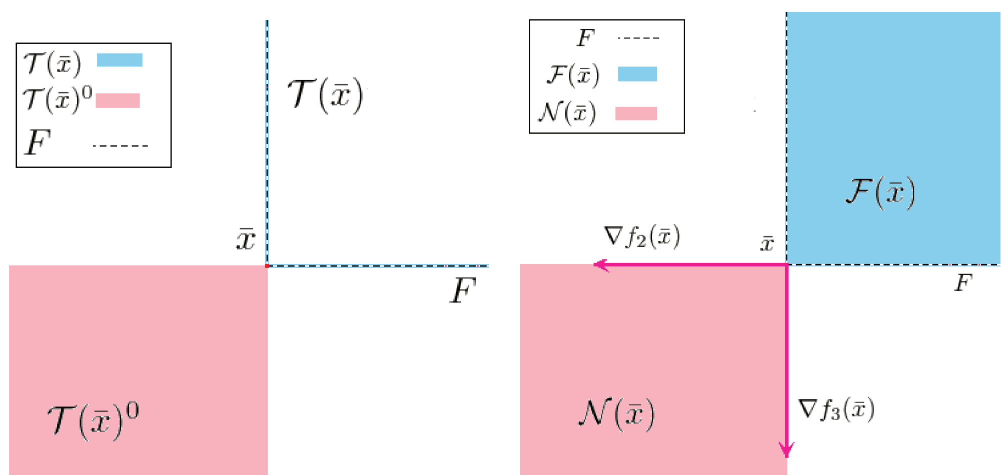


(a)



(b)

Figura 1.3: $\mathcal{T}(\bar{x})^0 \neq \mathcal{N}(\bar{x})$, $\mathcal{F}(\bar{x}) \neq \mathcal{T}(\bar{x})$.



(a) (b)

Figura 1.4: $\mathcal{T}(\bar{x})^0 = \mathcal{N}(\bar{x})$, $\mathcal{F}(\bar{x}) \neq \mathcal{T}(\bar{x})$.

Capítulo 2

Bases Positivas no Espaço Euclidiano

Neste capítulo estudamos algumas propriedades necessárias das bases positivas, baseando-nos essencialmente em [9, 14, 17, 18] para compreender a demonstração de que RCPLD implica CRSC, que foi estabelecida pelos autores Andreani, Haeser, Schuverdt e Silva [4]. A propriedade essencial para essa demonstração é o teorema da partição da base positiva de um espaço vetorial. Primeiramente estabelecemos notações necessárias e damos as definições padrão de uma forma que mostra a semelhança entre as estruturas lineares e positivas.

Definição 2.1. *Seja $\mathcal{V}$ um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que um elemento $x \in \mathcal{V}$ é uma combinação positiva dos elementos $b_1, b_2, \cdots, b_k \in \mathcal{V}$ se existem escalares não negativos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ tais que*

$$x = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_k b_k.$$

No caso $\lambda_i > 0, b_i \neq 0,$ para cada $i = 1, 2, \cdots, k$, dizemos que x é uma combinação estritamente positiva.

Dizemos que os elementos de B tem uma relação positiva se existem escalares não negativos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ tais que

$$0 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_k b_k.$$

No caso que $\lambda_i > 0 \;\; i = 1, \cdots, k$, B tem uma relação estritamente positiva.

Definição 2.2. *Sejam $\mathcal{V}$ um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ um subconjunto de $\mathcal{V}$. O subconjunto P construído a partir dos elementos de B da seguinte forma:*

$$P = \left\{ y \,|\, y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i b_i,\ \alpha_i \geq 0,\ \textit{não todos nulos},\ i = 1, \cdots, k \right\},$$

que vamos denotar por $\operatorname{pos} B$, *é denominado conjunto gerado positivamente pelos elementos de* B. *O subespaço gerado pelos elementos de* B *será denotado por* $\operatorname{span} B$.

Dizemos que um espaço vetorial $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$ é gerado positivamente por um subconjunto finito B de $\mathcal{V}$ se $\operatorname{pos} B = \mathcal{V}$.

Definição 2.3. *Sejam* $\mathcal{V}$ *um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$ *e* $b_1, b_2, \cdots, b_k \in \mathcal{V}$. *Dizemos que um conjunto de vetores* $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$ *é positivamente independente* (PI) *se* $b_i \neq 0$ *e* $b_i \notin \operatorname{pos}(B \setminus \{b_i\})$, $\forall i = 1, 2, \cdots, k$. *Caso contrario, é positivamente dependente* (PD).

Note que a definição de positivamente dependente não é equivalente à afirmação que existe uma relação positiva não trivial sobre B. O conjunto finito que tem o vetor nulo é positivamente dependente.

Na figura 2.1, observe-se que b_5 é uma combinação positiva dos vetores b_4 e b_1, então o conjunto $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ é PD. Finalmente uma formulação equivalente para positivamente independente é dada abaixo.

Teorema 2.4. *Sejam* $\mathcal{V}$ *um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$ *e* $B \subset \mathcal{V} \setminus \{0\}$ *um conjunto finito de vetores.* B *é positivamente independente se, e somente se, nenhum subconjunto próprio de* B *gera positivamente* $\operatorname{pos} B$.

Demonstração. $[\Rightarrow]$ Suponhamos que existe D subconjunto próprio de B tal que $\operatorname{pos} D = \operatorname{pos} B$. Pelo fato que D é um subconjunto proprio de B, então existe $b \in (B \setminus D)$. Então, $b \in \operatorname{pos} B = \operatorname{pos} D$ e como $\operatorname{pos} D = \operatorname{pos}(D \setminus \{b\})$, temos que $b \in \operatorname{pos}(D \setminus \{b\})$. Portanto, B é positivamente dependente.
$[\Leftarrow]$ Suponhamos que B é positivamente dependente, então existe $b \in B$ tal que $b \in \operatorname{pos}(B \setminus \{b\})$. Deste modo, $\operatorname{pos} B = \operatorname{pos}(B \setminus \{b\})$. Assim existe um subconjunto próprio de B que gera positivamente $\operatorname{pos} B$. $\square$

2.1 Propriedades dos conjuntos gerados positivamente

O seguinte teorema nos dá propriedades do conjunto gerado positivamente, e suas demonstrações seguem imediatamente das definições envolvidas.

Teorema 2.5. *Sejam* $\mathcal{V}$ *um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$ *e* B *um subconjunto finito de* $\mathcal{V} \setminus \{0\}$, *então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

i) Se B gera positivamente $\mathcal{V}$, então B gera $\mathcal{V}$.

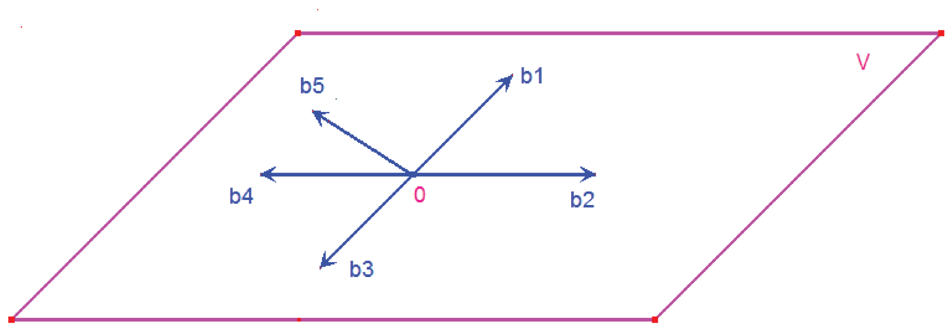


Figura 2.1: conjunto positivamente dependente.

ii) Se $A \subset B$ que gera positivamente $\mathcal{V}$, então B gera positivamente $\mathcal{V}$.

iii) Se B é positivamente independente, então todo subconjunto de B é positivamente independente.

iv) Se B gera $\mathcal{V}$, então $B \cup (-B)$ gera positivamente $\mathcal{V}$.

Demonstração. i) Pela hipótese, $\operatorname{pos} B = \mathcal{V}$. Logo, $\mathcal{V} = \operatorname{pos} B \subset \operatorname{span} B \subset \mathcal{V}$, portanto $\operatorname{span} B = \mathcal{V}$.

ii) Pela hipótese, $\operatorname{pos} A = \mathcal{V}$. Logo, $\mathcal{V} = \operatorname{pos} A \subset \operatorname{pos} B \subset \mathcal{V}$, portanto $\operatorname{pos} B = \mathcal{V}$.

iii) Suponhamos que existe D um subconjunto próprio de B positivamente dependente. Então, existe $b \in D$ tal que $b \in \operatorname{pos}(D \backslash \{b\})$. Logo, $b \in \operatorname{pos}(D \backslash \{b\}) \subset \operatorname{pos}(B \backslash \{b\})$; portanto, B é positivamente dependente.

iv) Seja $x \in \mathcal{V} = \operatorname{span} B$, então

$$\begin{aligned} x &= \sum_{b \in B} \alpha_b b, \;\; \alpha_b \in \mathbb{R}, \;\; \forall b \in B \\ &= \sum_{b \in B\,,\, \alpha_b \geq 0} \alpha_b b + \sum_{b \in B\,,\, \alpha_b < 0} |\alpha_b|(-b). \end{aligned}$$

No caso $x = 0$, temos que $0 = 0.b = (1-1)b$ para algum $b \in B$. Então, $0 = b + (-b)$. Logo, temos que $x \in \operatorname{pos} B + \operatorname{pos}(-B)$.
Portanto, $\operatorname{span} B = \operatorname{pos} B + \operatorname{pos}(-B) = \operatorname{pos}(B \cup (-B))$. □

Apresentamos agora três caracterizações necessárias e suficientes para que um conjunto gere positivamente um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.6. *Sejam $\mathcal{V}$ um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e suponha que $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_k\} \subset \mathcal{V}$ com $b_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, k$ gera linearmente o subespaço $\mathcal{V}$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

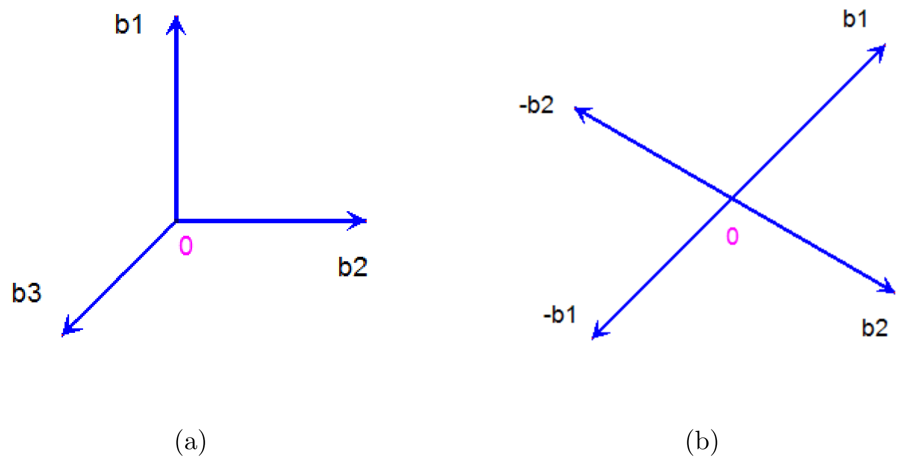


Figura 2.2: (a) O espaço $\mathbb{R}^2$ gerado positivamente por um conjunto finito $\{b_1, b_2, b_3\}$, (b) $B = \{b_1, b_2\}$ gera linearmente $\mathbb{R}^2$ e $B \cup (-B)$ o gera positivamente

i) $\{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$ *gera positivamente o subespaço* $\mathcal{V}$*;*

ii) *para todo* $i = 1, \cdots, k$, $-b_i$ *está no conjunto* $\text{pos}(B \backslash \{b_i\})$*;*

iii) *existe alguma relação estritamente positiva no conjunto* $\{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$*.*

Demonstração. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Dado $b_j \in \mathcal{V}$ subespaço vetorial, então $-b_j \in \mathcal{V}$. Pela hipótese B gera positivamente $\mathcal{V}$, temos que

$$-b_j \in \text{pos}\, B \Leftrightarrow -b_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i b_i \;\; \alpha_i \geq 0, \;\text{não todos nulos}, \; i \in \{1, \cdots, k\}.$$

Se $\alpha_j = 0$, o resultado segue trivialmente.
Se $\alpha_j > 0$, temos que

$$-b_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \alpha_i b_i + \alpha_j b_j \Leftrightarrow -b_j - \alpha_j b_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \alpha_i b_i \Leftrightarrow -(1+\alpha_j) b_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \alpha_i b_i$$

$$\Leftrightarrow -b_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \frac{\alpha_i}{1+\alpha_j} b_i \;\;\; ; \;\;\; 1 + \alpha_j > 0.$$

Portanto, $-b_j \in \text{pos}(B \setminus \{b_j\})$.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Dado $-b_j \in \operatorname{pos}(B \setminus \{b_j\})$, temos que

$$-b_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \alpha_{ji} b_i$$
$$\Leftrightarrow 0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ji} b_i \quad \alpha_{ji} \geq 0, \ \text{ para } i \in \{1, \cdots, k\} \setminus \{j\} \text{ e } \ \alpha_{jj} = 1.$$

Somando k vezes as equações acima, temos que

$$0 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ji} b_i \Leftrightarrow 0 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ji} b_i$$
$$\Leftrightarrow 0 = \sum_{i=1}^{k} (\sum_{j=1}^{k} \alpha_{ji}) b_i, \ \ \alpha_{ji} \geq 0, \ \text{ para } i \in \{1, \cdots, k\} \setminus \{j\} \text{ e } \ \alpha_{jj} = 1.$$

Como $\sum_{j=1}^{k} \alpha_{ji} \geq \alpha_{jj} = 1 > 0$, temos uma relação estritamente positiva no conjunto B.
iii) $\Rightarrow$ *i)* Seja $x \in \mathcal{V}$, pela hipótese $\operatorname{span} B = \mathcal{V}$, temos

$$x = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i b_i, \ \ \gamma_i \in \mathbb{R} \text{ para } i \in \{1, \cdots, k\}.$$

Considerando por hipótese a existência de uma relação estritamente positiva, ou seja, $0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i b_i$, $\alpha_i > 0$ para $i \in \{1, \cdots, k\}$, e somando ao lado direito da igualdade acima um múltiplo de $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i b_i$ suficientemente grande, isto é, $M \sum_{i=1}^{k} \alpha_i b_i$, $M > 0$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i b_i + 0 = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i b_i + M \sum_{i=1}^{k} \alpha_i b_i$$
$$= \sum_{i=1}^{k} (\gamma_i + M\alpha_i) b_i, \ (\gamma_i + M\alpha_i) > 0 \text{ para } i \in \{1, \cdots, k\}.$$

Portanto, $x \in \operatorname{pos} B$. Assim, $\operatorname{span} B = \operatorname{pos} B = \mathcal{V}$. □

Teorema 2.7. *Seja $\mathcal{V}$ um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Se $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$, $b_i \neq 0$ para $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, é um conjunto que gera positivamente um espaço vetorial $\mathcal{V}$, então o conjunto $(B \setminus \{b_i\})$ gera linearmente o subespaço $\mathcal{V}$, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$.*

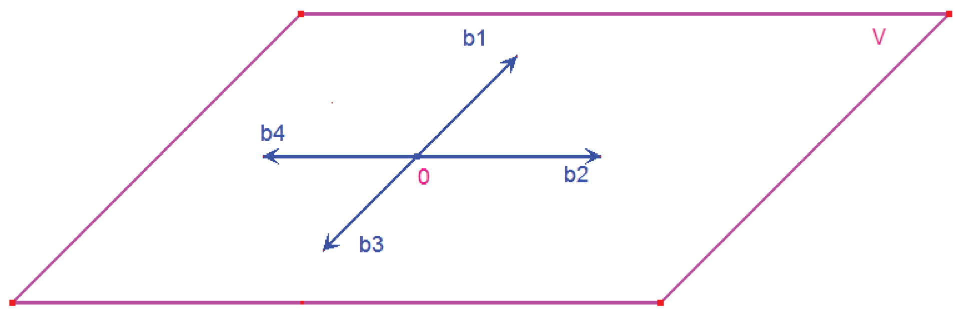


Figura 2.3: base positiva de V

Demonstração. Vamos mostrar que $(B\backslash\{b_i\})$ gera linearmente $\mathcal{V}$, para $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$. Da hipótese, B gera positivamente $\mathcal{V}$. Então, dados $x \in \mathcal{V}$, $j \in \{1, \cdots, k\}$, temos que

$$x = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k} \alpha_i b_i + \alpha_j b_j \;\; \alpha_i \geq 0, \text{ não todos nulos, para } i = 1, 2, \cdots, k. \tag{2.1}$$

Se $\alpha_j = 0$, então $x \in \text{span}(B \setminus \{b_j\})$.
Se $\alpha_j > 0$, e pelo Teorema 2.6 item (ii), temos que

$$-b_j \in \text{pos}(B \setminus \{b_j\}) \Leftrightarrow -b_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k} \gamma_i b_i \Leftrightarrow b_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k} -\gamma_i b_i$$

$$\Leftrightarrow \alpha_j b_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k} -\alpha_j \gamma_i b_i, \;\; \alpha_j > 0. \tag{2.2}$$

Substituindo a equação (2.2) na equação (2.1), obtemos

$$x = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k} \alpha_i b_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k} -\alpha_j \gamma_i b_i \Leftrightarrow x = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k} (\alpha_i - \alpha_j \gamma_i) b_i.$$

Desse modo, $x \in \text{span}(B \setminus \{b_j\})$.
Portanto, $\text{span}(B \setminus \{b_j\}) = \mathcal{V}$ para cada $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$. $\square$

O teorema nos diz que podemos retirar um elemento e gerá-lo, mas não positivamente. Veja na figura 2.4.

2.2 Bases Positivas

Observe que na teoria de álgebra linear, as bases lineares de um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ têm a mesma cardinalidade, mas isso não acontece para suas bases positivas. Outra

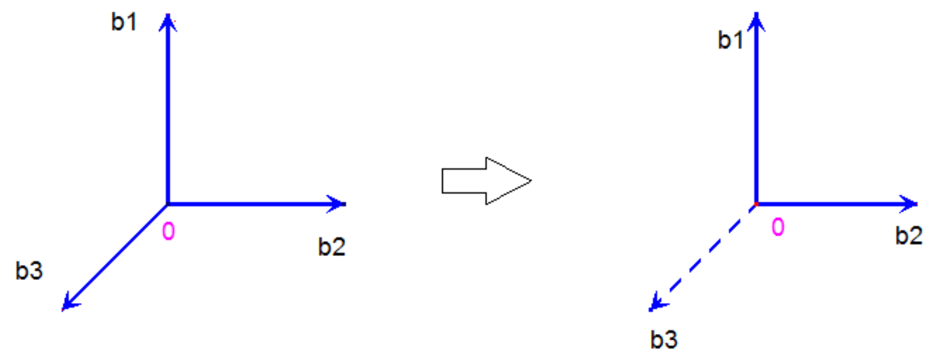


Figura 2.4: O espaço $\mathbb{R}^2$ pode ser gerado linearmente por $\{b_1, b_2\}$, mas não positivamente.

propriedade que é verificada por uma base linear, mas não a base positiva, é que qualquer subconjunto da base linear é uma base linear do menor subespaço que o contém.

Definição 2.8. *Seja $\mathcal{V}$ um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Uma base positiva de $\mathcal{V}$ é um conjunto finito de $\mathcal{V}$ positivamente independente que gera positivamente $\mathcal{V}$.*

Outra definição equivalente da base positiva: seja $B \subset \mathcal{V} \setminus \{0\}$ um conjunto finito que gera positivamente o subespaço $\mathcal{V}$. Dizemos que B é base positiva de $\mathcal{V}$ se nenhum subconjunto próprio de B gera positivamente o subespaço $\mathcal{V}$. Para ilustrar a definição acima, observamos na Figura 2.3 que o conjunto $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ é uma base positiva de V.

Teorema 2.9. *Sejam $\mathcal{V}$ um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e B uma base positiva de $\mathcal{V}$ com* $\dim \mathcal{V} = m$. *Então,* $\operatorname{card} B \geq m+1$. *$B$ é chamada base minimal de $\mathcal{V}$ se* $\operatorname{card} B = m+1$.

Demonstração. Da hipótese, B gera positivamente $\mathcal{V}$ com $\dim \mathcal{V} = m$ e pelo Teorema 2.6 item (iii), temos que B é linearmente dependente, então $\operatorname{card} B > m$. Assim, $\operatorname{card} B \geq m+1$.

□

Observação 2.10. *Gerando uma base minimal do espaço vetorial $\mathcal{V}$.*

- Seja $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ uma base linear do espaço vetorial $\mathcal{V}$, consideremos o vetor

$$a_{m+1} = -\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \cdots - \alpha_m a_m \;;\; \alpha_i > 0 \text{ para } i = 1, 2, \cdots, m. \tag{2.3}$$

Da equação (2.3),temos

$$0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_m a_m + a_{m+1}. \tag{2.4}$$

De (2.4) e pelo Teorema 2.6 item (iii), temos que $\operatorname{pos} B = \mathcal{V}$ em que $B = A \cup \{a_{m+1}\}$, $\operatorname{card} B = m + 1$.

- Vamos mostrar que B é positivamente independente. Suponhamos que B não é positivamente independente, então existe D subconjunto próprio de B tal que $\operatorname{pos} D = \operatorname{pos} B = \mathcal{V}$ e pelo Teorema 2.7, temos que $\operatorname{span}(D \setminus \{b\}) = \mathcal{V}$ para $b \in D$. Logo, $\operatorname{card} D - 1 \geq \dim \mathcal{V} = m$, então $\operatorname{card} D \geq m + 1 = \operatorname{card} B > \operatorname{card} D$ é uma contradição.

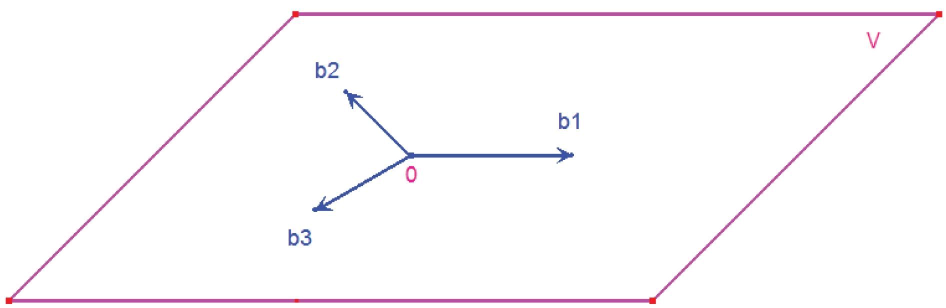


Figura 2.5: base minimal de $\mathcal{V}$

Observe-se que na Figura 2.5, o conjunto $\{b_1, b_2, b_3\}$ é uma base minimal de V.

2.3 Propriedade de uma Base Positiva não Minimal

Uma propriedade de uma base positiva não minimal de um subespaço vetorial $\mathcal{V}$ é que a podemos decompor numa soma de seus subespaços minimais.

Teorema 2.11. *Sejam $\mathcal{V}$ um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$ uma base positiva de $\mathcal{V}$ com $\dim \mathcal{V} = m$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $k > m + 1$.

(ii) *Algum subconjunto próprio de B é linearmente dependente.*

(iii) *Algum subconjunto próprio de B é uma base positiva de um subespaço vetorial próprio de $\mathcal{V}$.*

Demonstração. iii) $\Rightarrow$ ii)

Seja A, subconjunto próprio de B, base positiva de $\mathcal{W}$ subespaço próprio de $\mathcal{V}$. Pelo

Teorema 2.6 item (iii), temos que A é linearmente dependente.

ii)$\Rightarrow$ i)

Seja A, subconjunto próprio de B, linearmente dependente, então existe $b \in (B \setminus A)$ e pelo Teorema 2.7, temos que $\operatorname{span}(B \setminus \{b\}) = \mathcal{V}$. Como A é um subconjunto de $(B \setminus \{b\})$ linearmente dependente, então $(B \setminus \{b\})$ é linearmente dependente. Portanto, $\operatorname{card} B - 1 > m$.

i)$\Rightarrow$ iii)

Pela hipótese, $k = \operatorname{card} B > m + 1$. Seja $j \in \{1, \cdots, k\}$, então $\operatorname{card}(B \setminus \{b_j\}) \geq m + 1$. Temos que $(B \setminus \{b_j\})$ é linearmente dependente, ou seja,

$$0 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \alpha_i b_i, \;\; \alpha_s \neq 0 \;\text{ para algum }\; s \in \{1, \cdots, k\} \setminus \{j\}.$$

$$\Leftrightarrow 0 = M \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \alpha_i b_i, \;\; \alpha_s \neq 0 \;\text{ para algum }\; s \in \{1, \cdots, k\} \setminus \{j\} \text{ e } \forall M < 0. \tag{2.5}$$

Por outro lado, B é uma base positiva e pelo Teorema 2.6 item (iii), temos que

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i b_i, \;\; \gamma_i > 0 \;\text{ para } i \in \{1, \cdots, k\}. \tag{2.6}$$

Somando as equações (2.5), (2.6), considerando

$$R = \left\{ s \,|\, -\frac{\gamma_s}{\alpha_s} = \max\left\{ -\frac{\gamma_i}{\alpha_i} \,|\, \alpha_i > 0,\, i \in \{1, \cdots, k\} \setminus \{j\} \right\} \right\}$$

e $M = -\frac{\gamma_s}{\alpha_s}$ para algum $s \in R$, obtemos que

$$0 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j,\ell \\ \ell \in R}}^{k} (\gamma_i + M\alpha_i) b_i + \gamma_j b_j. \tag{2.7}$$

Pelo Teorema 2.6 item (iii), temos que existe $\mathcal{U}$ subespaço de $\mathcal{V}$ tal que $\operatorname{pos} A = \mathcal{U}$, em que $A = \{b_i \,|\, i \in \{1, \cdots, k\} \setminus R\}$.

Por outro lado, B é positivamente independente, e A é um subconjunto próprio de B e pelo Teorema 2.4, temos que $\mathcal{U}$ é um subespaço próprio de $\mathcal{V}$.

Como A é um subconjunto de B positivamente independente e pelo Teorema 2.5 item (iii), obtemos que A é positivamente independente. Portanto, A é uma base positiva de $\mathcal{U}$. $\square$

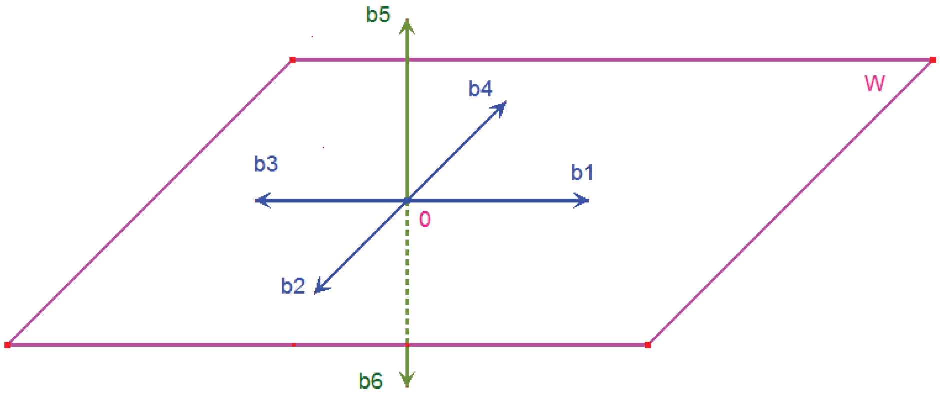


Figura 2.6: Base positiva não minimal

Para ilustrar o teorema acima, observemos o exemplo da Figura 2.6, o conjunto $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$ é base positiva não minimal de $\mathbb{R}^3$, seu subconjunto próprio $\{b_5, b_6\}$ é linearmente dependente, e $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ é base positiva de $\mathcal{W}$ subespaço próprio de $\mathbb{R}^3$.

Observação 2.12. *O subconjunto de (iii) pode ser escolhido para incluir b_j fixo, e a base positiva que contem b_j pode ser obrigada a ser uma base minimal para algum subespaço vetorial próprio de $\mathcal{V}$.*

Na demonstração do item (i)$\Rightarrow$ (iii), obtivemos que para cada $j \in \mathcal{I}$, existe um subconjunto próprio A_j de B que contem b_j tal que A_j é uma base positiva de algum subespaço vetorial próprio de $\mathcal{V}$.

Se A_j é base positiva não minimal, então existe algum subconjunto próprio A'_j de A_j tal que A'_j é uma base positiva de um subespaço vetorial próprio $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$ que contém b_j, assim por diante.

Esse processo deve terminar, pois cada vez a dimensão diminui. Quando o processo termina, obtemos a base minimal que contém b_j.

2.4 Subespaços Gerados e Subespaços Minimais

Usando as notações do Teorema 2.9, dizemos que um subespaço vetorial $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ é um subespaço gerado com respeito a B, se $B \cap \mathcal{W}$ é uma base positiva de $\mathcal{W}$. Além disso, $\mathcal{W}$ é um subespaço minimal com respeito a B, se $B \cap \mathcal{W}$ é uma base minimal de $\mathcal{W}$.
No teorema abaixo, obtemos uma condição necessária e suficiente para um subespaço minimal.

Teorema 2.13. *Seja C uma base positiva de um subespaço vetorial $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$. Seja $\mathcal{W}$ um* **subespaço gerado com respeito a** *C, onde $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$ é a base positiva de $\mathcal{W}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *$\mathcal{W}$ é um subespaço minimal;*

ii) *A relação positiva que envolve os elementos $b_1, b_2, \cdots, b_k$ é única (exceto pela multiplicação de um escalar positivo).*

Demonstração. ii)$\Rightarrow$ i) Suponhamos que $\mathcal{W}$ não é um subespaço minimal, então existe A, subconjunto próprio de B, base positiva de algum subespaço vetorial próprio de $\mathcal{W}$ e, pelo teorema 2.6 item (iii), temos que

$$0 = \sum_{a \in A} \alpha_a a, \quad \alpha_a > 0 \text{ para } a \in A.$$

Assim, existe outra relação positiva com elementos de B.
i)$\Rightarrow$ ii) Suponhamos que existe

$$0 = \sum_{a \in A} \alpha_a a, \quad \alpha_a > 0 \text{ para } a \in A,$$

outra relação positiva de B em que $\operatorname{card} A < \operatorname{card} B$. Então, A é linearmente dependente, e pelo Teorema 2.11 item (ii), temos que $\operatorname{card} B > \dim \mathcal{W}+1$. Portanto, B é base positiva não minimal de $\mathcal{W}$. $\square$

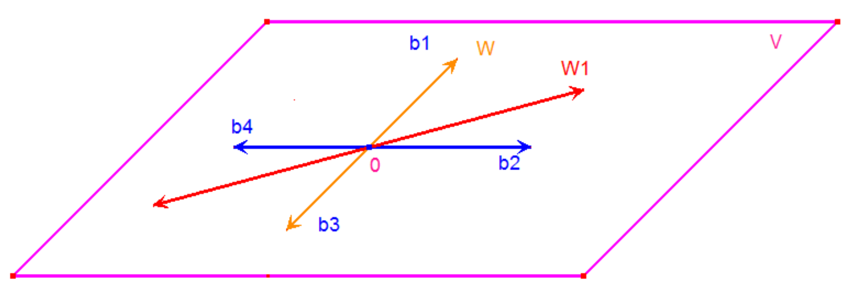


Figura 2.7: $\mathcal{W}$ é um subespaço gerado com respeito a uma base positiva de $\mathcal{V}$.

Para ilustrar a definição de subespaço gerado, observamos que na figura 2.7 a base minimal de $\mathcal{W}$ é representado pelo conjunto $\{b_1, b_3\}$, subconjunto próprio do $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ base positiva de $\mathcal{V}$. Então, $\mathcal{W}$ é um subespaço gerado com respeito $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Ademais $W_1 \cap \{b_1, b_2, b_3, b_4\} = \emptyset$, então $\mathcal{W}_1$ não é um subespaço gerado com respeito a $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

Teorema 2.14. *Seja B uma base positiva de um subespaço vetorial $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$, então qualquer subespaço gerado com respeito a B é a soma linear de subespaços minimais. A recíproca também é verdadeira.*

Demonstração. [$\Rightarrow$]Se o subespaço gerado é um subespaço minimal o resultado é trivial. Caso contrário, seja $\mathcal{W}$ subespaço gerado com respeito a B, considerando $A = B \cap \mathcal{W}$ base positiva não minimal de $\mathcal{W}$. Dado $a \in A$, e pela Observação 2.12, temos que existe um subespaço minimal M_a tal que sua base minimal A_a, subconjunto próprio de A, contém a. Logo, obtemos $\bigcup\limits_{a \in A} A_a = A$. Como $\operatorname{pos} A = \mathcal{W}$, temos que

$$\mathcal{W} = \operatorname{pos} A = \operatorname{pos} \bigcup_{a \in A} A_a = \sum_{a \in A} \operatorname{pos} A_a = \sum_{a \in A} M_a.$$

[$\Leftarrow$] Da Observação 2.12, consideremos D um subconjunto B, $\{M_a\}_{a \in D}$ uma família de subespaços minimais com $\{A_a\}_{a \in D}$ suas bases minimais respectivas, subconjuntos próprios de B que contém a. Então

$$\sum_{a \in D} M_a = \sum_{a \in D} \operatorname{pos} A_a = \operatorname{pos} C = T, \text{ em que } C = \bigcup_{a \in D} A_a.$$

Além disso, $C \subset B$, onde B é positivamente independente e pelo Teorema 2.5 item (iii), então C é positivamente indepedente. Portanto, T é um subespaço gerado com respeito a B. $\square$

Na Figura 2.8, vemos que $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ é uma base positiva de $\mathbb{R}^3$. Além disso, o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ tem uma soma linear não direta de subespaços minimais, isto é, $\mathbb{R}^3 = \operatorname{pos}\{b_1, b_2, b_3\} + \operatorname{pos}\{b_2, b_4, b_5\}$ em que $\{b_1, b_2, b_3\} \cap \{b_2, b_4, b_5\} = \{b_2\} \neq \{0\}$.

2.5 Representação Minimal

A representação de $x \in \mathcal{V}$, $x \neq 0$, subespaço gerado com respeito a uma base positiva não é sempre única. Logo podemos estabelecer quando uma representação é minimal.

Definição 2.15. *Sejam B uma base positiva de um subespaço vetorial $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$ e $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$. Dizemos que*

$$x = \sum_{b \in A} \alpha_b b, \quad A = \{b \in B \mid \alpha_b > 0\},$$

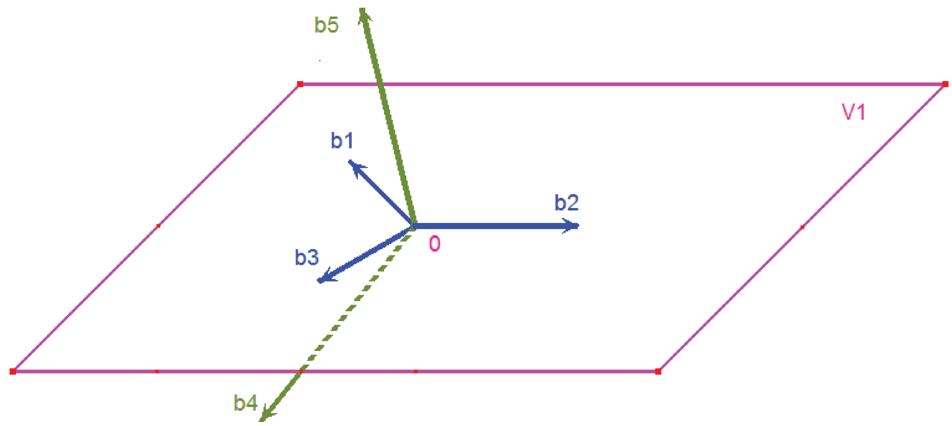


Figura 2.8: O espaço $\mathbb{R}^3$ não pode ser descomposto como a soma direta de subespaço minimais.

é uma representação minimal de x, se para qualquer

$$x = \sum_{b \in C} \alpha_b b, \quad C = \{b \in B \mid \alpha_b > 0\},$$

representação positiva de x com respeito a B, então $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} C$.

Na Figura 2.9, temos que o conjunto $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ é uma base positiva de $\mathbb{R}^3$, e os vetores x, y são combinações estritamente positiva de $\{b_3, b_2\}$ e $\{b_1, b_3, b_4\}$, respectivamente.

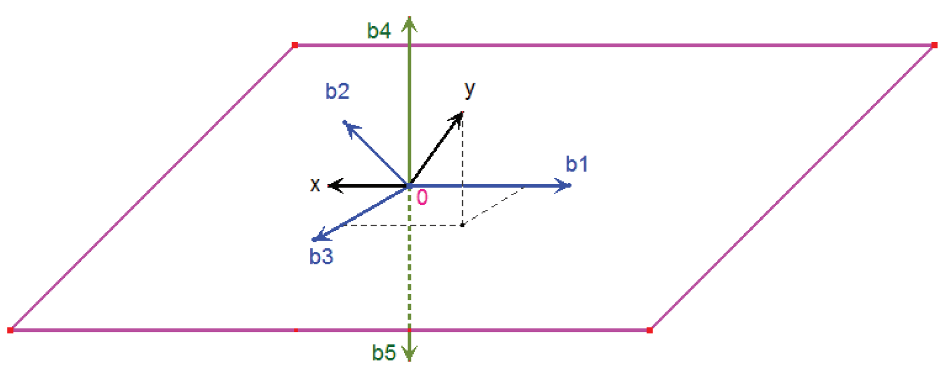


Figura 2.9: representação minimal dos vetores x, y com respeito $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ base positiva de $\mathbb{R}^3$.

Em geral, mesmo que um elemento tenha uma representação minimal ela não necessita ser única, no entanto este tipo de unicidade acontece para certas bases positivas. Assim, estabelecemos alguns resultados úteis que serão usados para provar um teorema, que estabelece esse tipo de unicidade.

Teorema 2.16. *Seja B uma base positiva de um subespaço vetorial $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$. Seja $x = \sum_{b\in A} \alpha_b b$, $x \neq 0$, $A = \{b \in B \,|\, \alpha_b > 0\}$ uma representação minimal de x, então A é linearmente independente.*

Demonstração. Suponhamos que A seja linearmente dependente, então

$$0 = \sum_{b\in A} \gamma_b b, \;\; \gamma_s > 0 \;\text{ para algum } s \in A.$$

Daí, para qualquer $M < 0$, temos que a seguinte equação

$$0 = M \sum_{b\in A} \gamma_b b, \;\; \gamma_s > 0 \;\text{ para algum } s \in A. \tag{2.8}$$

Da hipóteses, $x = \sum_{b\in A} \alpha_b b$ e de (2.8), temos que

$$x = x + 0 = \sum_{b\in A} \alpha_b b + M \sum_{b\in A} \gamma_b b = \sum_{b\in A} (\alpha_b + M\gamma_b) b. \tag{2.9}$$

Agora, consideremos

$$R = \left\{ s \,|\, -\frac{\alpha_s}{\gamma_s} = \max\left\{ -\frac{\alpha_b}{\gamma_b} \,|\, \gamma_b > 0,\, b \in A \right\} \right\},$$

e $M = -\frac{\alpha_s}{\gamma_s}$ para algum $s \in R$ e de (2.9), temos que

$$x = \sum_{b\in (A\setminus R)} (\alpha_b + M\gamma_b) b. \tag{2.10}$$

Daí, temos outra representação positiva para x com menor quantidade de elementos que A. Portanto, $\sum_{b\in A} \alpha_b b$ não é a representação minimal de x. □

Teorema 2.17. *Sejam B uma base positiva de um subespaço vetorial $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$ e $x \in \mathcal{V}\setminus\{0\}$. Sejam $x = \sum_{b\in A} \alpha_b b$ e $x = \sum_{b\in C} \gamma_b b$ onde $A = \{b \in B | \alpha_b > 0\}$ e $C = \{b \in B | \gamma_b > 0\}$ duas representações minimais diferentes de x, então $C \neq A$.*

Demonstração. Suponhamos que $A = C$, então

$$\begin{aligned} 0 = x - x &= \sum_{b\in A} \alpha_b b - \sum_{b\in C} \gamma_b b \\ &= \sum_{b\in A} (\alpha_b - \gamma_b) b. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.16, temos que A é um conjunto linearmente independente, então

$$\alpha_b = \gamma_b, \ \forall b \in A,$$

o que é contradiz as hipóteses de representações minimais diferentes de x. $\square$

O seguinte teorema dá uma condição suficiente para a unicidade da representação minimal.

Teorema 2.18. *Sejam B uma base positiva de um subespaço vetorial $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ dois subespaço minimais com respeito a B tal que $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$. Então a representação minimal para cada $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ é única.*

Demonstração. Suponhamos que $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ tenha duas representações minimais diferentes,

$$x = \sum_{b \in A} \alpha_b b = \sum_{b \in C} \gamma_b b; \text{ em que } A = \{b \in B \,|\, \alpha_b > 0\} \, e \, C = \{b \in B \,|\, \gamma_b > 0\}. \tag{2.11}$$

Seja $D = A \cap C \neq \emptyset$, conjunto de elementos comuns entre A e C. Então, transpomos os termos comuns de (2.11). Assim, obtemos $F = (A \setminus D) \cup \bar{D}$, $G = (C \setminus D) \cup \tilde{D}$, $(\bar{D} \cup \hat{D}) \cup \tilde{D} = D$, $(\bar{D} \cup \hat{D}) \cap \tilde{D} = \emptyset$, conjuntos em que $\bar{D} = \{x \in D \,|\, \alpha_x > \gamma_x\}$, $\hat{D} = \{x \in D \,|\, \alpha_x = \gamma_x\}$ e $\tilde{D} = \{x \in D \,|\, \alpha_x < \gamma_x\}$. Logo, temos que

$$\sum_{b \in (A \setminus D)} \alpha_b b + \sum_{b \in \bar{D}} (\alpha_b - \gamma_b) b = \sum_{b \in (C \setminus D)} \gamma_b b + \sum_{b \in \tilde{D}} (\gamma_b - \alpha_b) b. \tag{2.12}$$

Pelo Teorema 2.17, então $(A \setminus D) \neq \emptyset$, $(C \setminus D) \neq \emptyset$. Pelas definições de F, G, temos que $F \cap G = \emptyset$. Por outro lado, definamos

$$\delta_x = \begin{cases} \alpha_x, & \text{se } x \in (A \setminus D); \\ \alpha_x - \gamma_x, & \text{se } x \in \bar{D}. \end{cases} \quad \lambda_x = \begin{cases} \gamma_x, & \text{se } x \in (C \setminus D); \\ \gamma_x - \alpha_x, & \text{se } x \in \tilde{D}. \end{cases}$$

Assim, reescrevendo a equação (2.12) em função de δ_x, λ_x , temos que

$$\sum_{b \in F} \delta_b b = \sum_{b \in G} \lambda_b b. \tag{2.13}$$

Por outro lado, consideremos $F = F' \cup \tilde{F}$ em que $F' = F \cap B_1$, $\tilde{F} = F \cap B_2$ e B_1, B_2 bases positivas de $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$ respectivamente. Suponhamos que $F' \neq \emptyset$ e como B_1 é base positiva de $\mathcal{U}$, pelo Teorema 2.6

$$\sum_{b \in B_1} \phi_b b = 0, \ \phi_b > 0, \ \text{para } b \in B_1,$$

a relação estritamente positiva de B_1. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{b\in B_1} \phi_b b = \sum_{b\in F'} \phi_b b + \sum_{b\in (B_1\setminus F')} \phi_b b \\ \Leftrightarrow &\sum_{b\in F'} M\phi_b b + \sum_{b\in (B_1\setminus F')} M\phi_b b = 0 \text{ para qualquer } M > 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{b\in F'} M\phi_b b + \sum_{b\in (B_1\setminus F')} M\phi_b b = \sum_{b\in F'} M\phi_b b - \sum_{b\in F'} \delta_b b + \sum_{b\in F'} \delta_b b + \sum_{b\in (B_1\setminus F')} M\phi_b b \\ &= \sum_{b\in F'}^{k} (M\phi_b - \delta_b) b + \sum_{b\in (B_1\setminus F')} M\phi_b b + \sum_{b\in F'} \delta_b b. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Agora, consideremos

$$R = \left\{ s \,|\, \frac{\delta_s}{\phi_s} = \max \left\{ \frac{\delta_b}{\phi_b} \,|\, b \in F' \right\} \right\},$$

e $M = \frac{\delta_s}{\phi_s}$ para algum $s \in R$. De (2.15), temos que

$$0 = \sum_{b\in F'\setminus R} (M\phi_b - \delta_b) b + \sum_{b\in B_1\setminus F'} M\phi_b b + \sum_{b\in F'} \delta_b b. \tag{2.16}$$

Por outro lado, consideremos a seguinte expressão

$$S = \sum_{b\in (F'\setminus R)} (M\phi_b - \delta_b) b + \sum_{b\in (B_1\setminus F')} M\phi_b b. \tag{2.17}$$

Se $S = 0$, pelo Teorema 2.11 item (ii), temos que B_1 é uma base positiva não minimal, o que é uma contradição. Então, $S \neq 0$. Logo, somando S na equação (2.13) e de (2.16), obtemos que

$$\sum_{b\in \tilde{F}} \delta_b b = \sum_{b\in G} \lambda_b b + \sum_{b\in (F'\setminus R)} (M\phi_b - \delta_b) b + \sum_{b\in (B_1\setminus F')} M\phi_b b. \tag{2.18}$$

Considere $G = G' \cup \tilde{G}$ em que $G' = B_1 \cap G$, $\tilde{G} = B_2 \cap G$. Se $G' = \emptyset$, como $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{0\}$ e pela equação (2.18), temos que

$$\sum_{b\in (F'\setminus R)} (M\phi_b - \delta_b) b + \sum_{b\in (B_1\setminus F')} M\phi_b b = 0,$$

então, $S = 0$. O que é uma contradição.
Portanto, $G' \neq \emptyset$ e da equação (2.18), temos que

$$\underbrace{\sum_{b \in \tilde{F}} \delta_b b - \sum_{b \in \tilde{G}} \lambda_b b}_{\in \mathcal{W}} = \underbrace{\sum_{a \in G'} \lambda_a a + \sum_{b \in (F' \setminus R)} (M\phi_b - \delta_b) b + \sum_{b \in (B_1 \setminus F')} M\phi_b b}_{\in \mathcal{U}}$$

e como $\mathcal{W} \cap \mathcal{U} = \{0\}$, então

$$0 = \sum_{a \in G'} \lambda_a a + \sum_{b \in (F' \setminus R)} (M\phi_b - \delta_b) b + \sum_{b \in (B_1 \setminus F')} M\phi_b b$$

e como $F \cap G = \emptyset$, então $R \cap G' = \emptyset$. Assim, $\mathcal{U}$ não é um subespaço minimal; o que é uma contradição. $\square$

Corolário 2.19. *Se B é uma base minimal de um subespaço vetorial $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$, então a representação minimal para cada $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ é única.*

Na Figura 2.10, observamos que $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ é uma base positiva de $\mathbb{R}^3$, e x tem duas representações positivas diferentes, $x = \alpha_1 b_1 + \alpha_3 b_3 = \beta_4 b_4 + \beta_5 b_5$.

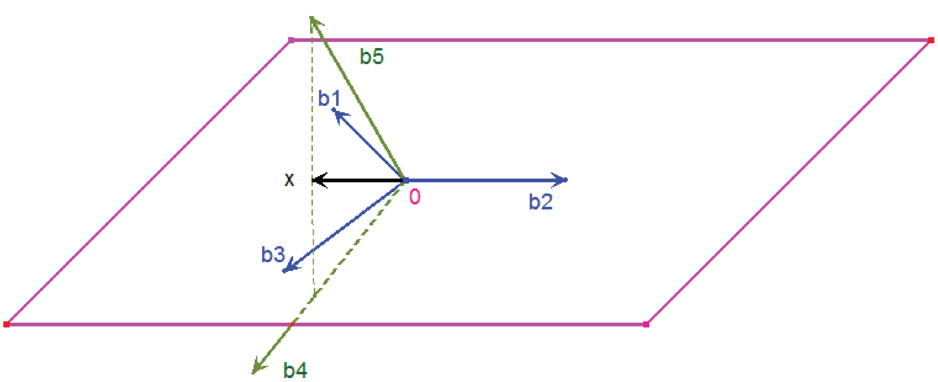


Figura 2.10: não unicidade de uma representação minimal

2.6 Projeção Linear de Elementos de uma Base Positiva

Vamos ver um resultado importante, dado uma base positiva B de $\mathcal{V}$ se temos um subconjunto B_1 de B que é uma base positiva de $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$, tomamos um subespaço T tal que $\mathcal{W} \oplus T = \mathcal{V}$, então a projeção dos vetores de $B_2 = (B \setminus B_1)$ é uma base positiva de T. No seguinte teorema, temos como encontrar a soma de um subespaço $\mathcal{U}$ e $\operatorname{pos} \pi B$ considerando certas condições.

Teorema 2.20. *Sejam $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$ subespaços vetoriais de um subespaço vetorial $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{U}$ e π a projeção linear de $\mathcal{V}$ sobre $\mathcal{W}$ com núcleo da projeção $\mathcal{U}$. Então, para todo subconjunto $B = \{b_1, \cdots, b_k\}$ de $\mathcal{V}$, temos que*

$$\mathcal{U} + \operatorname{pos} \pi B = \mathcal{U} + \operatorname{pos} B.$$

Se $\mathcal{U}$ é gerado positivamente por um conjunto finito A, então

$$\operatorname{pos}(A \cup \pi B) = \operatorname{pos}(A \cup B).$$

Demonstração. Seja $y \in \mathcal{U} + \operatorname{pos} \pi B$, então

$$y = x + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \pi b_i, \;\; x \in \mathcal{U} \;\; , \alpha_i \geq 0, \text{ não todos nulos, } \text{ para cada } i = 1, 2, \cdots, k,$$

e como $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{U}$, e π é a projeção linear de $\mathcal{V}$ sobre $\mathcal{W}$, então

$$b_i = \pi b_i + x_i, \;\; x_i \in \mathcal{U} \text{ para cada } i = 1, 2, \cdots, k. \tag{2.19}$$

Assim,

$$\begin{aligned} y &= x + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \pi b_i \\ &= x + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (b_i - x_i) \\ &= (x - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i b_i. \end{aligned}$$

Portanto, $y \in \mathcal{U} + \operatorname{pos} B$.

Por outro lado, dado $w \in \mathcal{U} + \operatorname{pos} B$, então

$$w = x + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i b_i, \; x \in \mathcal{U} \;\; , \alpha_i \geq 0, \text{ não todos nulos, } \text{ para cada } i = 1, 2, \cdots, k.$$

De (2.19), temos que

$$\begin{aligned} w &= x + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (\pi b_i + x_i) \\ &= (x + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \pi b_i. \end{aligned}$$

Portanto, $w \in \mathcal{U} + \operatorname{pos} \pi B$. Se $\operatorname{pos} A = \mathcal{U}$, temos que

$$\operatorname{pos}(A \cup \pi B) = \operatorname{pos} A + \operatorname{pos} \pi B = \mathcal{U} + \operatorname{pos} \pi B = \mathcal{U} + \operatorname{pos} B = \operatorname{pos} A + \operatorname{pos} B = \operatorname{pos}(A \cup B).$$

□

Teorema 2.21. *Sejam $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$ subespaços de um subespaço vetorial $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$ tais que $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, π a projeção linear de $\mathcal{V}$ sobre $\mathcal{U}$, A e B bases positivas de $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$, respectivamente e C uma base positiva de $\mathcal{V}$ tal que $B \subset C$. Então:*

1. *$A \cup B$ é uma base positiva de $\mathcal{V}$;*
2. *$\pi(C \backslash B)$ é uma base positiva de $\mathcal{U}$;*
3. *$B \cup \pi(C \backslash B)$ é uma base positiva de $\mathcal{V}$;*
4. *$\operatorname{card}(C \backslash B) = \operatorname{card} \pi(C \backslash B)$.*

Demonstração. 1. Por a hipótese A e B geram positivamente $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ respectivamente, então

$$\begin{aligned} \operatorname{pos}(A \cup B) &= \operatorname{pos} A + \operatorname{pos} B \\ &= \mathcal{U} + \mathcal{W} \\ &= \mathcal{V}. \end{aligned}$$

Por outro lado todos os elementos de $A \cup B$ são diferentes do vetor nulo, pois A e B são PI. A prova de $A \cup B$ é positivamente independente é feita por absurdo. Suponhamos que existe um $x \in A \cup B$ tal que

$$x \in \operatorname{pos}((A \cup B) \setminus \{x\}). \tag{2.20}$$

Pela hipóteses, $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, A e B bases positivas de $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$ respectivamente, então $A \cap B = \emptyset$. Se $x \in A$, então

$$(A \cup B) \setminus \{x\} = (A \setminus \{x\}) \cup B. \tag{2.21}$$

Logo, de (2.20) e (2.21) ,temos que

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{pos}((A \cup B) \setminus \{x\})) &= \operatorname{pos}((A \setminus \{x\}) \cup B) = \operatorname{pos}(A \setminus \{x\}) + \operatorname{pos} B \\ &= \operatorname{pos}(A \setminus \{x\}) + \mathcal{W} \end{aligned}$$

então, existe $a \in \operatorname{pos}(A \setminus \{x\})$ e $w \in \mathcal{W}$ tal que

$$x = a + w.$$

Além disso $a \in \operatorname{pos}(A \setminus \{x\}) \subset \operatorname{pos} A = \mathcal{U}$, obtemos

$$x - a = w, \text{ então } w \in \mathcal{U}$$

e como $w \in W$ e pela condição $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{0\}$,temos que

$$x - a = 0$$

então $x = a$. Como $x \in \operatorname{pos}(A \setminus \{x\})$, temos que $a \in \operatorname{pos}(A \setminus \{a\})$, então A não é positivamente independente. O que é uma contradição

Se $x \in B$, a prova segue imediata pela demonstração anterior. Portanto $A \cup B$ é positivamente independente.

2. Vamos mostrar que $\operatorname{pos} \pi(C \setminus B) = \mathcal{U}$.
   Considerando $z \in \mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ e pela hipótese $\operatorname{pos} C = \mathcal{V}$, temos que

$$z = \sum_{y \in C} \alpha_y y, \ \alpha_y \geq 0, \text{ não todos nulos, para } y \in C. \tag{2.22}$$

Como $B \subset C$ e da equação(2.22), temos que

$$\begin{aligned} z &= \sum_{y \in C} \alpha_y y \\ &= \sum_{y \in B} \alpha_y y + \sum_{y \in C \setminus B} \alpha_y y. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Pela hipótese π é a projeção linear de $\mathcal{V}$ sobre $\mathcal{U}$ e da equação (2.23), temos que

$$\begin{aligned} \pi z = \pi(\sum_{y \in B} \alpha_y y + \sum_{y \in C \setminus B} \alpha_y y) &= \sum_{y \in B} \alpha_y \pi y + \sum_{y \in C \setminus B} \alpha_y \pi y \\ = \sum_{y \in C \setminus B} \alpha_y \pi y. \end{aligned}$$

Como $z \in \mathcal{U}$ e $\pi z = z$, temos que

$$z = \sum_{y \in C \setminus B} \alpha_y \pi y, \ \alpha_y \geq 0 \text{ para } y \in C \setminus B.$$

Logo, obtemos que

$$\mathcal{U} \subset \operatorname{pos} \pi(C \setminus B)$$

e como $\operatorname{pos}\pi(C \setminus B) \subset \mathcal{U}$, então $\mathcal{U} = \operatorname{pos}\pi(C \setminus B)$.

Vamos mostrar que $\pi(C \setminus B)$ é positivamente independente.
Suponhamos que $\pi(C \setminus B)$ é positivamente dependente, então existe $a \in \pi(C \setminus B)$ tal que

$$a \in \operatorname{pos}(\pi(C \setminus B) \setminus \{a\}),\ a = \pi d \quad \text{para algum} \quad d \in C \setminus B. \tag{2.24}$$

ou o conjunto $\pi(C \setminus B)$ contém o vetor nulo. Vejamos o primeiro caso. Para isto, da equação (2.24), obtemos que

$$\begin{aligned} a &= \sum_{x \in \pi(C \setminus B) \setminus \{a\}} \alpha_x x, \quad \alpha_x \geq 0,\ \text{não todos nulos,}\ \text{ para }\ x \in \pi(C \setminus B) \setminus \{a\} \\ \Leftrightarrow a &= \sum_{y \in (C \setminus B) \setminus \{d\}} \alpha_x x,\ \ \alpha_x \geq 0,\ x = \pi y\ \text{ para }\ y \in (C \setminus B) \setminus \{d\}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Logo, como $d \in \mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, obtemos que

$$d = \pi d + s = a + s,\ \text{ onde } s \in \mathcal{W}. \tag{2.26}$$

Então, das equações (2.25) e (2.26), temos que

$$d = \sum_{y \in (C \setminus B) \setminus \{d\}} \alpha_x x + s,\ \ \alpha_x \geq 0,\ x = \pi y\ \text{ para }\ y \in (C \setminus B) \setminus \{d\}. \tag{2.27}$$

Dado $y \in (C \setminus B) \setminus \{d\} \subset \mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, temos que existe $w = w(y) \in \mathcal{W}$ tal que

$$\begin{aligned} y &= \pi y + w = x + w \\ &\Leftrightarrow y - w = x. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Logo, de (2.28) e (2.27), temos que

$$\begin{aligned} d &= \sum_{y \in (C \setminus B) \setminus \{d\}} \alpha_x (y - w) + s \\ \Leftrightarrow d &= \sum_{y \in (C \setminus B) \setminus \{d\}} \alpha_x y - \sum_{y \in (C \setminus B) \setminus \{d\}} \alpha_x w + s \\ \Leftrightarrow d &= \sum_{y \in (C \setminus B) \setminus \{d\}} \alpha_x y + (s - \sum_{y \in (C \setminus B) \setminus \{d\}} \alpha_x w), \\ \alpha_x &\geq 0,\ \text{ para }\ y \in (C \setminus B) \setminus \{d\}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Como $r = (s - \sum_{y \in (C \setminus B) \setminus \{d\}} \alpha_x w(y)) \in \mathcal{W} = \operatorname{pos} B$, para cada $y \in (C \setminus B) \setminus \{d\}$, tem-se

$$r = \sum_{y \in B} \gamma_y y, \ \gamma_y \geq 0, \text{ não todos nulos, para } y \in B. \tag{2.30}$$

Das equações (2.29) e (2.30), obtemos

$$d = \sum_{y \in (C \setminus B) \setminus \{d\}} \alpha_x y + \sum_{y \in B} \gamma_y y \Leftrightarrow d \in \operatorname{pos}(C \setminus \{d\}).$$

Portanto, C é positivamente dependente, o que é uma contradição. Para o segundo caso, temos que existe algum $c \in (C \setminus B)$ tal que $\pi c = 0$. Então, $c \in N(\pi) = \mathcal{W}$, $N(\pi)$ núcleo de π, pois π é uma projeção linear. Como B é uma base positiva de $\mathcal{W}$, então $c \in \operatorname{pos} B$. Portanto, conseguimos o subconjunto proprio $(C \setminus \{c\})$ de C tal que $\mathcal{V} = \operatorname{pos} C = \operatorname{pos}(C \setminus \{c\})$. Deste modo, C não é uma base positiva de $\mathcal{V}$, o que é uma contradição.

3. A prova segue imediatamente do resultado 1 e 2.

4. Pelo fato que $(C \setminus B)$ é positivamente independente, então todos seus elementos de $(C \setminus B)$ são diferentes. O mesmo para $\pi(C \setminus B)$, pois $\pi(C \setminus B)$ é PI. Assim, $\operatorname{card}(C \setminus B) = \operatorname{card} \pi(C \setminus B)$.

□

Na Figura 2.11, observamos que o conjunto $C = \{b_1, b_2, b_3, c_4, c_5\}$ é base positiva de $\mathbb{R}^3$, e $\{b_1, b_2, b_3\}$ é base positiva de W; e $\{u_6, u_7\}$ é base positiva de U.

Note que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$, e o conjunto $\{\pi c_4, \pi c_5\}$ é uma base positiva de U; além disso, $\{b_1, b_2, b_3, u_6, u_7\}$ e $\{b_1, b_2, b_3, \pi c_4, \pi c_5\}$ são bases positivas de $\mathbb{R}^3$.

Observação 2.22. *Se B é uma base minimal de $\mathcal{V}$, então $\mathcal{V}$ não pode ser descomposto como a soma linear direta de um subespaço minimal e um subespaço não trivial de $\mathcal{V}$.*

Se B é base positiva não minimal de $\mathcal{V}$, pelo Teorema 2.11*, item (iii), escolhemos $B_1 \subset B$ com a maior cardinalidade tal que B_1 é uma base minimal do subespaço vetorial* $\operatorname{pos} B_1$ *de $\mathcal{V}$. Agora, consideremos um subespaço vetorial $\mathcal{U}_1 \neq \{0\}$ de $\mathcal{V}$ tal que $V = \mathcal{U}_1 \oplus \operatorname{pos} B_1$, e π_1 é a projeção linear de $\mathcal{V} \to \mathcal{U}_1$, e pelo Teorema* 2.21*, item (2), temos que $\pi_1(B \setminus B_1)$ é uma base positiva de $\mathcal{U}_1$.*

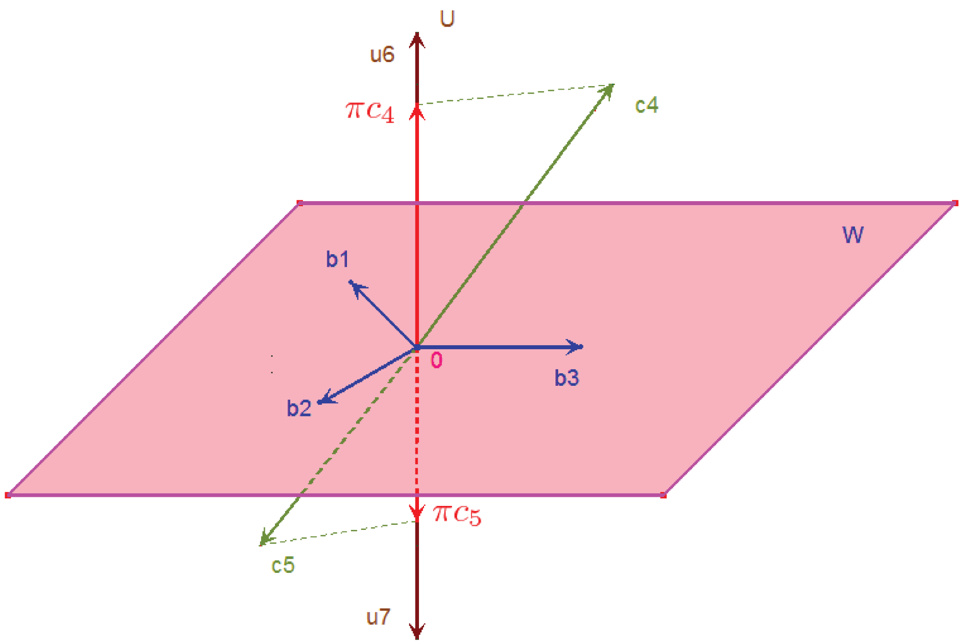


Figura 2.11: projeção linear de uma base positiva.

Se $\pi_1(B \backslash B_1)$ é uma base minimal de $\mathcal{U}_1$, então $\mathcal{V}$ é descomposto como a soma linear direta de um subespaço minimal e um subespaço minimal com respeito $\pi_1(B \backslash B_1)$. Caso contrario $\pi_1(B \setminus B_1)$ é uma base positiva não minimal; escolhemos, portanto, $B_2 \subset (B \setminus B_1)$ com a maior cardinalidade tal que $\pi_1 B_2$ é uma base minimal do subespaço vetorial $\operatorname{pos} \pi_1 B_2$ *de $\mathcal{U}_1$.*

Daí, segue o Teorema 2.23 que usa as notações da acima.

2.7 Teorema da Partição de uma Base Positiva

Observamos que se B é uma base positiva de $\mathcal{V}$, então $\mathcal{V}$ é a soma linear de seus subespaço minimais com respeito a B. Se essa soma linear é direta, então seus subespaços minimais induzem, de forma natural, uma partição da base positiva de B. Infelizmente, dependendo da base positiva não temos a soma linear direta de seus subespaços minimais. No entanto, podemos obter uma soma direta de subespaço minimais usando a projeção linear de elementos de uma base positiva, que foi feita na seção anterior.

Teorema 2.23. *Sejam B uma base positiva de um subespaço vetorial $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$, B_1 e B_2 subconjuntos de B; $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$, os quais satisfazem as seguintes condições:*

a) B_1 *tem a maior cardinalidade em* B *tal que* B_1 *é base minimal de* $\mathcal{V}_1$ *subespaço de* $\mathcal{V}$*;*

b) $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{V}_1$ *e* π_1 *é a projeção linear de* $\mathcal{V}$ *sobre* $\mathcal{U}_1$*;*

c) $B_2 \subset (B \setminus B_1)$ *tem a maior cardinalidade tal que* $\pi_1 B_2$ *é uma base minimal de* $\mathcal{V}_2$ *subespaço de* $\mathcal{U}_1$*.*

Então, $2 \leq \operatorname{card} B_2 \leq \operatorname{card} B_1$ *e* $B_1 \cup B_2$ *gera positivamente um subespaço vetorial de* $\mathcal{V}$ *com dimensão* $\operatorname{card} B_1 + \operatorname{card} B_2 - 2$.

Demonstração. Pela hipótese, $\pi_1 B_2$ é uma base minimal do subespaço vetorial $\operatorname{pos} \pi_1 B_2 = \mathcal{V}_2$ de $\mathcal{U}_1$ e pelo Teorema 2.13 item (ii), temos uma relação estritamente positiva única com os elementos do conjunto $\pi_1 B_2$ (exceto pela multiplicação de um escalar positivo)

$$0 = \sum_{b \in B_2} \alpha_b \pi_1 b, \;\; \alpha_b > 0 \text{ para } \; b \in B_2. \tag{2.31}$$

Para cada $b \in B_2 \subset \mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \operatorname{pos} B_1$, temos que

$$\begin{aligned} & b = \pi_1 b + w \\ & \Leftrightarrow b - w = \pi_1 b \\ & \Leftrightarrow \alpha_b (b - w) = \alpha_b \pi_1 b, \;\; w = w(b) \in \operatorname{pos} B_1, \;\; \alpha_b > 0. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Aplicando somatório $\sum_{b \in B_2}$ à equação (2.32), temos que

$$\begin{aligned} \sum_{b \in B_2} \alpha_b (b - w) &= \sum_{b \in B_2} \alpha_b \pi_1 b \\ \Leftrightarrow \sum_{b \in B_2} \alpha_b b - \sum_{b \in B_2} \alpha_b w &= \sum_{b \in B_2} \alpha_b \pi_1 b. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Das equações (2.31) e (2.33), obtemos que

$$\begin{aligned} & \sum_{b \in B_2} \alpha_b b - \sum_{b \in B_2} \alpha_b w = 0 \\ & \Leftrightarrow \sum_{b \in B_2} \alpha_b b = \sum_{b \in B_2} \alpha_b w, \;\; \alpha_b > 0 \;\; w = w(b) \in \mathcal{V}_1 = \operatorname{pos} B_1 \text{ e para cada } b \in B_2. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Portanto, $y \in \mathcal{V}_1 = \operatorname{pos} B_1$ em que $y = \sum_{b \in B_2} \alpha_b b \;\; \alpha_b > 0 \, \text{para} \, b \in B_2$.

i) Se $y = 0$, pelo Teorema 2.6 item (iii), temos que $\operatorname{pos} B_2$ é um subespaço.

- B_2 é positivamente independente, pois B_2 é um subconjunto de B que é positivamente independente.

  Deste modo, B_2 é uma base positiva de $\operatorname{pos} B_2$.

- B_2 é uma base minimal de $\operatorname{pos} B_2$, pois se B_2 não for base minimal de $\operatorname{pos} B_2$, pelo Teorema 2.13, temos que existe uma relação estritamente positiva com $A \subsetneq B_2$

$$0 = \sum_{b \in A} \gamma_a b, \ \gamma_b > 0 \ \text{ para cada } b \in A. \tag{2.35}$$

  Usando a projeção linear π_1 na equação (2.35), temos que

$$0 = \pi_1(\sum_{b \in A} \gamma_b b) = \sum_{b \in A} \gamma_b \pi_1 b, \ \gamma_b > 0 \ \text{ para cada } b \in A. \tag{2.36}$$

  Obtemos, uma relação estritamente positiva com outros elementos de $\pi_1 B_2$. Assim πB_2 não é uma base minimal. O que é uma contradição.

  Por outro lado, B_1 tem maior cardinalidade em B tal que B_1 é uma base minimal, então $\operatorname{card} B_1 \geq \operatorname{card} B_2$.

ii) Se $y \in \mathcal{V}_1 \setminus \{0\}$, $\mathcal{V}_1$ subespaço vetorial, então $-y \in \mathcal{V}_1 = \operatorname{pos} B_1$. Além disso, B_1 é uma base minimal e pelo Corolário 2.19, obtemos

$$-y = \sum_{b \in B'} \gamma_b b, \ \gamma_b > 0 \ \text{ para } b \in B' \tag{2.37}$$

uma representação minimal única em que B' é um subconjunto próprio de B_1, e pelo Teorema 2.16, temos que B' é linearmente independente. Agora, da equação (2.37) e $y = \sum_{b \in B_2} \alpha_b b$, temos que

$$0 = \sum_{b \in B'} \gamma_b b + \sum_{b \in B_2} \alpha_b b \ \ \alpha_b, \gamma_b > 0, \ \text{ para } b \in B_2 \cup B',$$

e pelo Teorema 2.6, temos que

$$\operatorname{pos}(B_2 \cup B') = \operatorname{span}(B_2 \cup B'), \tag{2.38}$$

em que $B_2 \cup B'$ é positivamente independente, pois $B_2 \cup B'$ subconjunto de B positivamente independente. Agora, da equação (2.37) e pela observação 2.10, obtemos que $D = B' \cup \{y\}$ é uma base minimal de algum subespaço vetorial de $\mathcal{V}_1$, então

$$\operatorname{pos} D = \operatorname{span} D = \operatorname{span} B'.$$

Assim, $\operatorname{pos}(D \cup \pi_1 B_2)$ é a soma direta de subespaços, isto é,

$$\operatorname{pos}(D \cup \pi_1 B_2) = \operatorname{pos} D \oplus \operatorname{pos} \pi_1 B_2.$$

Agora, considerando o Teorema 2.20, temos que

$$\operatorname{pos}(D \cup \pi_1 B_2) = \operatorname{pos}(D \cup B_2). \tag{2.39}$$

Portanto, $\operatorname{pos}(D \cup B_2)$ é um subespaço e do Teorema 2.5 item (i), temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{pos}(D \cup B_2) &= \operatorname{span}(D \cup B_2) = \operatorname{span} D + \operatorname{span} B_2 \\ &= \operatorname{span} B' + \operatorname{span} B_2 = \operatorname{span}(B' \cup B_2), \end{aligned} \tag{2.40}$$

e de (2.38), temos que $\operatorname{pos}(D \cup B_2) = \operatorname{pos}(B_2 \cup B')$. De (2.39), $\operatorname{pos}(D \cup \pi_1 B_2) = \operatorname{pos}(B' \cup B_2)$. Deste modo, a dimensão de $\operatorname{pos}(B_2 \cup B')$ é

$$\begin{aligned} \dim[\operatorname{pos}(B_2 \cup B')] &= \dim[\operatorname{pos}(D \cup \pi B_2)] = \dim[\operatorname{pos} D] + \dim[\operatorname{pos} \pi B_2] \\ &= (\operatorname{card} D - 1) + (\operatorname{card} \pi B_2 - 1) = \operatorname{card} B' + \operatorname{card} \pi_2 B_2 - 1, \end{aligned} \tag{2.41}$$

do Teorema 2.21 item (4) e da equação (2.41), temos que

$$\dim[\operatorname{pos}(B_2 \cup B')] = \operatorname{card} B' + \operatorname{card} B_2 - 1.$$

Portanto, $B_2 \cup B'$ é uma base minimal de $\operatorname{span}(B_2 \cup B')$ subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ e pela hipótese (a), temos que

$$\operatorname{card} B_1 \geq \operatorname{card}(B_2 \cup B') > \operatorname{card} B_2 \Rightarrow \operatorname{card} B_1 > \operatorname{card} B_2.$$

iii) Pela hipótese B_1 é base positiva de $\mathcal{V}_1$ e $\pi_1 B_2$ base positiva de $\mathcal{V}_2$ e considerando o Teorema 2.20, temos que

$$\operatorname{pos}(B_1 \cup \pi_1 B_2) = \operatorname{pos}(B_1 \cup B_2).$$

Assim, $B_1 \cup B_2$ gera positivamente um subespaço em que sua dimensão é

$$\begin{aligned} \dim[\operatorname{pos}(B_1 \cup B_2)] &= \dim[\operatorname{pos}(B_1 \cup \pi_1 B_2)] = \dim[\operatorname{pos} B_1] + \dim[\operatorname{pos} \pi_1 B_2] \\ &= (\operatorname{card} B_1 - 1) + (\operatorname{card} \pi_1 B_2 - 1). \end{aligned}$$

Logo, do Teorema 2.21 item (4) segue que

$$\dim[\operatorname{pos}(B_1 \cup B_2)] = \operatorname{card} B_1 + \operatorname{card} B_2 - 2.$$

Por outro lado, $\pi_1 B_2$ é uma base minimal de $\mathcal{V}_2$ e considerando o Teorema 2.21 item (4) e o Teorema 2.9, então

$$\operatorname{card} B_2 = \operatorname{card} \pi_1 B_2 \geq \dim \mathcal{V}_2 + 1 \geq 2.$$

$\square$

Finalmente, temos o teorema principal deste capitulo o qual é uma generalização do teorema anterior.

Teorema 2.24. *Seja B uma base positiva de um subespaço vetorial $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$. Então B admite uma partição $\mathcal{P} = \{B_1, \cdots, B_k\}$, com $1 \leq k \leq \dim \mathcal{V}$, tal que*

1) $\operatorname{card} B_i \geq \operatorname{card} B_{i+1} \geq 2$, *para cada $i = 1, 2, \cdots, k-1$;*

2) $\operatorname{pos}(B_1 \cup \cdots \cup B_j)$ *é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ com dimensão*

$$\left(\sum_{i=1}^{j} \operatorname{card} B_i \right) - j, \text{ para cada } j = 1, 2, \cdots, k.$$

Demonstração. Suponhamos que os subconjuntos $B_1, \ldots, B_k$ de B, e os subespaços vetoriais $\mathcal{U}_1, \cdots, \mathcal{U}_{k-1}$ de $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_0 = \mathcal{V}$, e as projeções lineares $\pi_1, \cdots, \pi_{k-1}$, π_0 a projeção identidade, foram definidas para $k \geq 2$ tais que satisfazem as seguintes condições:

i) $\mathcal{U}_{i-1} \subset \mathcal{U}_{i-2} \subset \cdots \subset \mathcal{U}_0$ para $i = 1, \cdots, k$.

ii) $\mathcal{U}_{i-1} = \mathcal{U}_i \oplus \mathcal{V}_i$, $\pi_i : \mathcal{U}_{i-1} \to \mathcal{U}_i$ é a projeção linear, e o conjunto $\pi_i \cdots \pi_0 (B \setminus \cup_{j=1}^{i} B_j)$ é uma base positiva de $\mathcal{U}_i$ para $i = 1, \cdots, k-1$.

iii) $B_i \subset (B \setminus \cup_{j=1}^{i-1} B_j)$ tem a maior cardinalidade tal que $\pi_{i-1} \cdots \pi_0 B_i$ é uma base minimal de $\mathcal{V}_i$ subespaço de $\mathcal{U}_{i-1}$; também $\operatorname{card} B_1 \geq \operatorname{card} B_2 \geq \cdots \geq \operatorname{card} B_k \geq 2$, e o conjunto $\cup_{j=1}^{k} B_j$ gera positivamente um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ com dimensão $\sum_{j=1}^{i} \operatorname{card} B_j - i$ para $i = 1, \cdots, k$.

Note que para $k = 2$ e considerando o Teorema 2.23 as condições acima são verdadeiras. Agora, suponhamos que as condições acima são verdadeiras para k e seja $\mathcal{U}_k$ subespaço vetorial de $\mathcal{U}_{k-1}$ tal que

$$\mathcal{U}_{k-1} = \mathcal{U}_k \oplus \mathcal{V}_k.$$

Se $\mathcal{U}_k$ for o espaço vetorial trivial, então

$$\mathcal{U}_{k-1} = \mathcal{V}_k = \mathrm{pos}(\pi_{k-1} \cdots \pi_0 B_k).$$

Portanto, temos a partição desejada para B. Caso contrário, definamos π_k a projeção linear de $\mathcal{U}_{k-1}$ sobre $\mathcal{U}_k$ e como $\pi_{k-1} \cdots \pi_0(B \setminus \cup_{j=1}^{k-1} B_j)$ é uma base positiva de $\mathcal{U}_{k-1}$ e $\pi_{k-1} \cdots \pi_0 B_k$ uma base minimal de $\mathcal{V}_k$, pelo Teorema 2.21 item (ii), temos que $\pi_k \pi_{k-1} \cdots \pi_0(B \setminus \cup_{j=1}^{k} B_j)$ é uma base positiva de $\mathcal{U}_k$. Agora, tomemos B_{k+1} um subconjunto de $(B \setminus \cup_{j=1}^{k} B_j)$ com a maior cardinalidade tal que $\pi_k \cdots \pi_0 B_{k+1}$ é uma base minimal de $\mathcal{V}_{k+1}$ subespaço vetorial de $\mathcal{U}_k$, pelo Teorema 2.23, temos que

$$2 \leq \mathrm{card}(\pi_k \cdots \pi_0 B_{k+1}) \leq \mathrm{card}(\pi_{k-1} \cdots \pi_0 B_k), \tag{2.42}$$

pelo Teorema 2.21 item (4), temos que

$$\mathrm{card}\, B_k \geq \mathrm{card}\, B_{k+1} \geq 2. \tag{2.43}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \mathrm{pos}\, B_1 \oplus \mathcal{U}_1 \\
&= \mathrm{pos}\, B_1 \oplus (\mathrm{pos}\, \pi_1 B_2 \oplus \mathcal{U}_2) \\
&= \mathrm{pos}\, B_1 \oplus (\cdots \oplus (\mathrm{pos}(\pi_k \cdots \pi_0 B_{k+1}) \oplus \mathcal{U}_{k+1})) \cdots) \\
&= (\sum_{i=1}^{k+1} \oplus\, \mathrm{pos}(\pi_{i-1} \cdots \pi_0 B_i)) \oplus \mathcal{U}_{k+1} \\
&= \underbrace{\mathrm{pos}(\cup_{i=1}^{k}(\pi_{i-1} \cdots \pi_0 B_i))}_{(*)} \oplus \mathrm{pos}(\pi_k \cdots \pi_0 B_{k+1}) \oplus \mathcal{U}_{k+1}.
\end{aligned}$$

De $(*)$ e do Teorema 2.20, temos que

$$\mathrm{pos}(\cup_{i=1}^{k}(\pi_{i-1} \cdots \pi_0 B_i)) = \mathrm{pos}(\cup_{i=1}^{k} B_i).$$

Portanto, $\mathcal{V} = \underbrace{\mathrm{pos}(\cup_{i=1}^{k} B_i) \oplus \mathrm{pos}(\pi_k \cdots \pi_0 B_{k+1})}_{(**)} \oplus \mathcal{U}_{k+1}$, em que $\mathcal{U}_{k+1}$ é um subespaço.
De $(**)$ e do Teorema 2.20 , temos que

$$\mathrm{pos}(\cup_{i=1}^{k} B_i) \oplus \mathrm{pos}(\pi_k \cdots \pi_0 B_{k+1}) = \mathrm{pos}(\cup_{i=1}^{k+1} B_i).$$

Assim, $\mathrm{pos}(\cup_{i=1}^{k+1} B_i)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$. Logo, a dimensão de $\mathrm{pos}(\cup_{i=1}^{k+1} B_i)$ é

$$\begin{aligned}
\dim[\mathrm{pos}(\cup_{i=1}^{k+1} B_i)] &= \dim[(\mathrm{pos}(\cup_{i=1}^{k} B_i) \oplus \mathrm{pos}(\pi_k \cdots \pi_0 B_{k+1}))] \\
&= \dim[\mathrm{pos}(\cup_{i=1}^{k} B_i)] + \dim[\mathrm{pos}(\pi_k \cdots \pi_0 B_{k+1})].
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Pela hipótese indutiva, $\dim[\operatorname{pos}(\cup_{i=1}^{k} B_i)] = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{card} B_i - k$ e de (2.44), obtemos que

$$\dim[\operatorname{pos}(\cup_{i=1}^{k+1} B_i)] = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{card} B_i - k + \dim[\operatorname{pos}(\pi_k \cdots \pi_0 B_{k+1})], \tag{2.45}$$

e como $\pi_k \cdots \pi_0 B_{k+1}$ é uma base minimal de $\operatorname{pos}(\pi_k \cdots \pi_0 B_{k+1})$ e de (2.45), então

$$\dim[\operatorname{pos}(\cup_{i=1}^{k+1} B_i)] = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{card} B_i - k + \operatorname{card}(\pi_k \cdots \pi_0 B_{k+1}) - 1. \tag{2.46}$$

Do Teorema 2.21 item (4) e de (2.46), temos que

$$\dim[\operatorname{pos}(\cup_{i=1}^{k+1} B_i)] = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{card} B_i - k + \operatorname{card} B_{k+1} - 1. \tag{2.47}$$

Assim,

$$\dim[\operatorname{pos}(\cup_{i=1}^{k+1} B_i)] = \sum_{i=1}^{k+1} \operatorname{card} B_i - (k+1). \tag{2.48}$$

E das definições $B_{k+1}, \mathcal{U}_k, \pi_k$ as condições (i), (ii), (iii) são satisfeitas.
Deste modo, o processo construtivo pode ser continuado até que

$$B_s = (B \setminus \cup_{i=1}^{s-1} B_i) \text{ para algum } 1 \leq s.$$

Por outro lado, como k é a cardinalidade da partição de B e da hipótese $2 \leq \operatorname{card} B_i$ $i = 1, \cdots, k$. Então, $2k \leq \sum_{i=1}^{k} \operatorname{card} B_i$. Como $\sum_{i=1}^{k} \operatorname{card} B_i - k = \dim \mathcal{V}$, então $k \leq \dim \mathcal{V}$.

$\square$

Concluímos este capítulo com um exemplo do teorema acima. Na figura 2.12, o conjunto $\{b_1, b_2, \cdots, b_5\}$ é base positiva não minimal de $\mathbb{R}^3$. O espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ não é decomposto como a soma linear direita de seus subespaços minimais, mas $\mathbb{R}^3 = U \oplus V_1$ em que $\{\pi b_4, \pi b_5\}$ e $\{b_1, b_2, b_3\}$ são bases minimais de U e V_1 respectivamente.

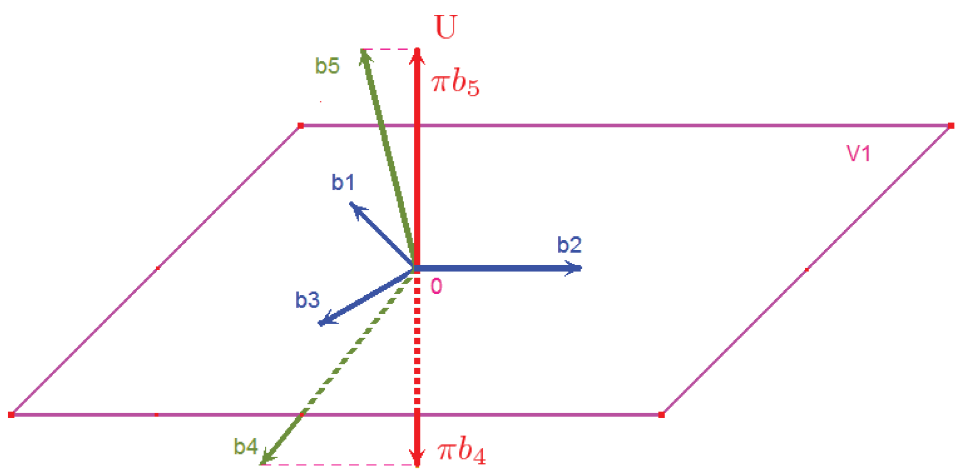


Figura 2.12: Partição de uma base positiva não minimal de $\mathbb{R}^3$

Capítulo 3

Histórico das Condições de Qualificação

Neste capítulo apresentamos algumas definições, propriedades e exemplos das condições de qualificação da literatura; veremos também as propriedades de um conjunto gerado positiva-linearmente por um conjunto de vetores. Além disso, explicamos as demonstrações de que RCPLD implica CRSC, considerando a teoria das bases positivas feita no capítulo anterior, e que CRSC implica CPG.

3.1 Condição de Independência Linear

Esta condição, chamada também regularidade, é a mais simples de se verificar entre as condições de qualificação da literatura.

Definição 3.1. *(LICQ - Linear Independence Constraint Qualification) Dizemos que $x \in F$ satisfaz LICQ, se o conjunto*

$$\{\nabla f_i(x)\}_{i\in\mathcal{I}} \cup \{\nabla f_j(x)\}_{j\in\mathcal{A}(x)} \text{ é linearmente independente.}$$

A condição de regularidade estabelece a existência e unicidade dos multiplicadores de Lagrange na solução do problema de (PNL).

No seguinte teorema, observamos que a condição de independência linear é preservado numa vizinhança.

Teorema 3.2. *$x \in F$ satisfaz LICQ se, e somente se, existe uma vizinhança $V(x)$ de x tal que $\forall I \subset \{1, \cdots, m\}$, $\forall J \subset \mathcal{A}(x)$ temos*

$$\{\nabla f_i(y)\}_{i\in I} \cup \{\nabla f_j(y)\}_{j\in J} \text{ é linearmente independente} \forall y \in V(x).$$

Demonstração. [$\Rightarrow$] Suponhamos que existem $I \subset \{1, \cdots, m\}$, $J \subset \mathcal{A}(x)$ e uma sequência $y^k \to x$ tal que $\{\nabla f_i(y^k)\}_{i\in I} \cup \{\nabla f_j(y^k)\}_{j\in J}$ é linearmente dependente para todo k. Logo, existem vetores $\lambda^k \in \mathbb{R}^{|I|+|J|}$ não nulos de modo que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i^k \nabla f_i(y^k) + \sum_{j\in J} \lambda_i^k \nabla f_j(y^k) = 0. \tag{3.1}$$

Agora, seja $M_k = \max\{|\lambda_\ell^k| \mid \ell \in I \cup J\} \neq 0$ para cada k, então $\left\{ \dfrac{\lambda^k}{M_k} \right\}$ é limitada. Assim, podemos tomar uma subsequência de modo que $\dfrac{\lambda^k}{M_k} \to \lambda$, então dividindo (3.1) por M_k e tomando o limite para as subseqüências, obtemos que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i \nabla f_i(x) + \sum_{j\in J} \lambda_j \nabla f_j(x) = 0,$$

mas como $\|\frac{\lambda^k}{M_k}\|_\infty = 1$ e a norma é contínua, temos que $\|\lambda\|_\infty = 1$. Logo, $\{\nabla f_i(x)\}_{i\in I} \cup \{\nabla f_j(x)\}_{j\in J}$ é linearmente dependente. Deste modo, $\{\nabla f_i(x)\}_{i\in\{1,\cdots,m\}} \cup \{\nabla f_j(x)\}_{j\in\mathcal{A}(x)}$ é linearmente dependente.

[$\Leftarrow$] Considere os conjuntos $I = \{1, \cdots, m\}$, $J = \mathcal{A}(x)$ e o ponto x na hipótese. $\square$

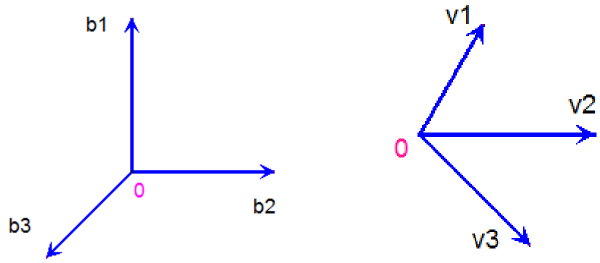
Teorema 3.3. *Se r é o posto de $\{\nabla f_i(x)\}_{i=1}^m$, então existe uma vizinhança $V(x)$ de x tal que o posto de $\{\nabla f_i(y)\}_{i=1}^m$ é maior ou igual que r para todo $y \in V(x)$.*

Demonstração. Da hipótese que r é o posto de $\{\nabla f_i(x)\}_{i=1}^m$; temos que existe $\{\nabla f_\ell(x)\}_{\ell\in\mathcal{I}'}$ um conjunto linearmente independente e $\mathcal{I}' \subset \{1, \ldots, m\}$; e considerando o teorema 3.2, então existe uma vizinhança $V(x)$ tal que $\{\nabla f_\ell(y)\}_{\ell\in\mathcal{I}'}$ é linearmente independente $\forall y \in V(x)$. Assim, $\{\nabla f_i(y)\}_{i=1}^m$ tem posto maior ou igual que r $\forall y \in V(x)$. $\square$

Observe-se que o problema

$$\begin{aligned} &\min\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \\ &s.a\ f_1(x,y) = x + y = 0, \\ &\quad\ \ f_2(x,y) = -x - y = 0, \end{aligned}$$

tem solução $(0,0)$ que não é regular, mas ele satisfaz a condição KKT. Em geral, quando o conjunto viável do problema de PNL é formado por restrições lineares de igualdade e desigualdade, então o minimizador local desse problema PNL verifica a condição KKT, ou seja as restrições lineares é uma condição de qualificação. Deste modo, surgiram, condições de qualificação mais fraca do que LICQ. A seguinte definição será usada para formular algumas das condições de qualificação mais fracas do que independência linear.



(a) (b)

Figura 3.1: (a) conjunto positivo independente, mas não positivo linearmente independente. (b) conjunto positivo dependente, mas não positivo linearmente dependente.

Definição 3.4. *(PLD - Positive Linear Dependence) Sejam $V = \{v_1, \cdots, v_m\}$, $W = \{w_1, \cdots, w_p\}$ subconjuntos de vetores de R^n. Dizemos que o conjunto $V \cup W$ é positivo linearmente dependente (PLD) se existem $\lambda \in R^m$, $\mu_j \geq 0$, $\forall j = 1, \cdots, p$, $\sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| + \sum_{j=1}^{p} \mu_j > 0$, tais que*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j w_j = 0.$$

Caso contrário dizemos que $V \cup W$ é positivo linearmente independente (PLI).

Note que os conjuntos PLD e PLI têm propriedades semelhantes às propriedades dos conjuntos LD e LI respectivamente, isto é, qualquer subconjunto de um conjunto PLI é sempre PLI, e um conjunto que contém um subconjunto PLD é sempre PLD. As definições de PI, que foram apresentadas no capítulo anterior, e PLI não são equivalentes.

Na Figura 3.1 temos que o conjunto $B = \left\{b_1 = (0,1)^T, b_2 = (1,0)^T, b_3 = (-1,-1)^T\right\}$ é PI, pois nenhum subconjunto próprio B gera $\operatorname{pos} B$, mas $b_1 + b_2 + b_3 = 0$, portanto $\{b_1, b_2, b_3\}$ não é PLI.

O conjunto $\{v_1 = (1/2, 1/2)^T, v_2 = (1,0)^T, v_3 = (1/2, -1/2)^T\}$ é PD, pois $v_2 = v_1 + v_3$, mas para $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0$ e $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3 = 0$, então $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$, deste modo $\{v_1, v_2, v_3\}$ não é PLD.

A seguinte condição de qualificação, que foi introduzida por Mangasarian-Fromovitz em 1967, é mais fraca do que a condição de independência linear.

3.2 Condição de Mangasarian-Fromovitz

A unicidade dos multiplicadores de Lagrange não pode ser garantinda, mesmo quando a solução do problema de (PNL) satisfaz a condição de MFCQ. Embora pode se garantir que o conjunto formado por todos os multiplicadores de Lagrange é um conjunto compacto, ver [7].

Definição 3.5. *(MFCQ- Mangasarian-Fromovitz Constraint Qualification) Dizemos que $x \in F$ satisfaz a condição de qualificação de Mangasarian-Fromovitz se o conjunto $\{\nabla f_i(x)\}_{i \in \mathcal{I}}$ é linearmente independente e existe um vetor $d \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\nabla f_i(x)^T d = 0,\ \forall i \in \mathcal{I},$$
$$\nabla f_j(x)^T d < 0,\ \forall j \in \mathcal{A}(x).$$

No seguinte teorema temos uma condição necessária e suficiente para verificar se um ponto viável satisfaz a condição Mangasarian-Fromovitz usando o conceito de PLI.

Teorema 3.6. *Dizemos $x \in F$ satisfaz a condição de qualificação de Mangasarian-Fromovitz se e somente se $\{\nabla f_i(x)\}_{i \in \mathcal{I}} \cup \{\nabla f_j(x)\}_{j \in \mathcal{A}(x)}$ é PLI.*

(Para prova, veja [19]).

Se um conjunto de vetores é LI, em particular é PLI. Assim a condição LICQ, implica MCFQ. Seja $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) \leq 0,\ -f_1(x) \leq 0\}$ o conjunto viável de um problema de PNL, vemos que o problema não é alterado se quebramos a restrição de igualdade em duas restrições de desigualdades, mas nenhum ponto viável satisfaz MCFQ com as duas restrições de desigualdade, pois $\nabla f_1(x) + \nabla(-f_1)(x) = 0$, então $\{\nabla f_1(x), \nabla(-f_1)(x)\}$ é PLD. Deste modo a condição de MFCQ não é satisfeita se expressamos restrição de igualdade por restrição de desigualdade. No entanto Janin [12] supera esse problema com a seguinte condição de qualificação.

3.3 Condição de Posto Constante

Definição 3.7. *(CRCQ - Constant Rank Constraint Qualification) Dizemos que $x \in F$ satisfaz a condição de qualificação de posto constante se existe uma vizinhança $V(x)$ tal que $\forall I \subset \mathcal{I}$ e $\forall J \subset \mathcal{A}(x)$,*

$$\{\nabla f_i(y)\}_{i \in I} \cup \{\nabla f_j(y)\}_{j \in J} \text{ têm posto constante para todo } y \in V(x).$$

No seguinte teorema temos uma condição necessária e suficiente para preservar o posto de cada combinação de subconjuntos dos gradientes das restrições de igualdade e desigualdade ativas em uma vizinhança.

Teorema 3.8. *Dizemos que $x \in F$ satisfaz a condição de qualificação de posto constante se e somente se existe uma vizinhança $V(x)$ de x tal que $\forall I \subset \mathcal{I}$, $\forall J \subset \mathcal{A}(x)$ se*

$$\{\nabla f_i(x)\}_{i\in I} \cup \{\nabla f_j(x)\}_{j\in J} \text{ é linearmente dependente, então}$$
$$\{\nabla f_i(y)\}_{i\in I} \cup \{\nabla f_j(y)\}_{j\in J} \text{ é linearmente dependente } \forall y \in V(x).$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $\{\nabla f_i(x)\}_{i\in I} \cup \{\nabla f_j(x)\}_{j\in J}$, $I \subset \mathcal{I}$ e $J \subset \mathcal{A}(x)$, é linearmente dependente e x satisfaz CRCQ, então existe uma vizinhança $V(x)$ de x tal que o posto dos gradientes é constante nessa vizinhança. Logo, $\{\nabla f_i(y)\}_{i\in I} \cup \{\nabla f_j(y)\}_{j\in J}$ é linearmente dependente para todo $y \in V(x)$.
($\Leftarrow$) Suponha que o conjunto $\{\nabla f_i(x)\}_{i\in I} \cup \{\nabla f_j(x)\}_{j\in J}$, $I \subset \mathcal{I}$ e $J \subset \mathcal{A}(x)$, tem posto r. Pelo Teorema 3.3, temos que $\{\nabla f_i(y)\}_{i\in I} \cup \{\nabla f_j(y)\}_{j\in J}$ tem posto maior ou igual a r para todo $y \in V(x)$.

Vamos mostrar que o posto não é maior que r. Suponhamos que exista uma sequência $y^k \to x$ tal que o posto de $\{\nabla f_i(y^k)\}_{i\in I} \cup \{\nabla f_j(y^k)\}_{j\in J}$ é maior que r. Logo, para cada k existem $I_k \subset I$ e $J_k \subset J$ com $|I_k| + |J_k| > r$ tal que $\{\nabla f_i(y^k)\}_{i\in I_k} \cup \{\nabla f_j(y^k)\}_{j\in J_k}$ é linearmente independente.

Como I e J são finitos pois $I \subset \{1, \ldots, m\}$, $J \subset \mathcal{A}(x)$, $I_k \subset I$ e $J_k \subset J$, então podemos tomar uma subsequência tal que os conjuntos são os mesmo, ou seja, $I_k = I'$, $J_k = J'$ para todo k com $|I'| + |J'| > r$.

Assim, $\{\nabla f_i(x)\}_{i\in I'} \cup \{\nabla f_j(x)\}_{j\in J'}$ é linearmente dependente (já que a quantidade de vetores é maior que o posto) com $\{\nabla f_i(y^k)\}_{i\in I'} \cup \{\nabla f_j(y^k)\}_{j\in J'}$ é linearmente independente, o que contradiz a definição de CRCQ. □

Exemplo 3.9. *Vejamos que MFCQ não implica CRCQ.*

Consideremos um conjunto viável com restrições só de desigualdades:

$$f_1(x, y) = x + y^2 \leq 0,$$
$$f_2(x, y) = x \leq 0.$$

Dado $\bar{x} = (0,0)$, temos que $\nabla f_1(\bar{x}) = (1,0)^T$, $\nabla f_2(\bar{x}) = (1,0)^T$. Assim, $\{\nabla f_1(\bar{x}), \nabla f_2(\bar{x})\}$ é PLI. Entretanto, o conjunto $\left\{\nabla f_1(x,y) = (1,2y)^T, \nabla f_2(x,y) = (1,0)^T\right\}$ tem posto 1 em $\bar{x}$ e posto 2 para os pontos $\{(0,y)\,|y \neq 0\}$. Deste modo, $\bar{x}$ não satisfaz a CRCQ.

3.4 Condição de Dependência Linear Positiva Constante

Esta condição foi introduzida por Qi e Wei [16] para provar a convergência do método de programação quadrática sequencial, e Andreani, Martinez e Schuverdt [2] provaram que a condição de dependência linear positiva constante é uma condição de qualificação; e em [1, 5] os autores usaram a CPLD para provar a convergência dos algoritmos de Lagrangeano Aumentado.

Definição 3.10. *(CPLD - Constant Positive Linear Dependence) Dizemos que $x \in F$ satisfaz a condição de qualificação de dependência linear positiva constante se existe uma vizinhança $V(x)$ tal que para todo $I \subset \{1, \cdots, m\}$ e $J \subset \mathcal{A}(x)$ se*

$$\{\nabla f_i(x)\}_{i\in I} \cup \{\nabla f_j(x)\}_{j\in J} \text{ é positivo linearmente dependente, então}$$
$$\{\nabla f_i(y)\}_{i\in I} \cup \{\nabla f_j(y)\}_{j\in J} \text{é linearmente dependente } \forall y \in V(x).$$

No seguinte teorema vemos que em uma vizinhança o conceito de positivo linearmente dependente é preservado, para cada combinação de subconjunto dos gradientes das restrições de igualdade e desigualdade ativas.

Teorema 3.11. *Dizemos que $x \in F$ satisfaz a condição de dependência linear positiva constante se e somente se existe uma vizinhança $V(x)$ tal que para todo $I \subset \{1, \ldots, m\}$, $J \subset \mathcal{A}(x)$ se*

$$\{\nabla f_i(x)\}_{i\in I} \cup \{\nabla f_j(x)\}_{j\in J} \text{ é positivo linearmente dependente, então}$$
$$\{\nabla f_i(y)\}_{i\in I} \cup \{\nabla f_j(y)\}_{j\in J} \text{ é positivo linearmente dependente } \forall y \in V(x).$$

(Para prova, veja [19]).
Note que um conjunto positivo linearmente dependente é linearmente dependente, assim CRCQ implica CPLD. Por outro lado se um ponto viável satisfaz MFCQ, então o conjunto das restrições de igualdade e desigualdade ativas é PLI, assim qualquer subconjunto dele é PLI. Portanto, MFCQ implica CPLD.

3.5 Condição de Limitante do Erro

Nesta seção, temos uma condição que estima a distância de um ponto dado ao conjunto viável em termos de quantidades computáveis que medem a violação de suas restrições.

Definição 3.12. *(Error Bound)*
Dizemos que $x \in F$ satisfaz a propriedade de limitante do erro se existe uma vizinhança $V(x)$ de x e $\alpha > 0$ tal que $\forall y \in V(x)$,

$$\min_{z \in F} \|z - y\| \leq \alpha \max\left\{|f_i(y)|,\ i \in \mathcal{I}\ ,\ \max\{0, f_j(y)\},\ j \in \mathcal{J}\right\}.$$

Teorema 3.13. *Se $x \in F$ satisfaz a condição da limitante do erro, então x satisfaz a condição de qualificação de Abadie.*

Demonstração. Seja $d \in \mathcal{F}(x)$, temos que

$$\begin{aligned} \nabla f_i(x)^T d = 0,\ i \in \mathcal{I}, \\ \nabla f_j(x)^T d \leq 0,\ j \in \mathcal{A}(x). \end{aligned}$$

Pela hipótese $f_i, f_j \in \mathcal{C}^1$ para cada $i \in \mathcal{I}$, $j \in \mathcal{J}$ e dado $t > 0$ suficientemente pequeno.
Se $i \in \mathcal{I}$, temos que

$$f_i(x + td) = f_i(x) + t\nabla f_i(x)^T d + o(t) = o(t).$$

Se $j \in (\mathcal{J} \setminus \mathcal{A}(x))$, temos que $f_j(x + td) < 0$.
Se $j \in \mathcal{A}(x)$, temos que

$$f_j(x + td) = f_j(x) + t\nabla f_j(x)^T d + o(t) \leq o(t),\ \forall j \in \mathcal{A}(x).$$

Assim, $\max\{|f_i(x + td)|, i \in \mathcal{I}, \max\{0, f_j(x + td)\}, j \in \mathcal{J}\} = o(t)$ e como x satisfaz a condição de limitante do erro, temos que $\min_{z \in F} \|x + td - z\| = o(t)$. Logo, $d \in \mathcal{T}(x)$. □

3.6 Relaxação da Condição de Posto Constante

Minchenko e Stakhovski [13] estabeleceram a relaxação da CRCQ, preservando o posto da combinação do conjunto dos gradientes das restrições de igualdade com todos os subconjuntos dos gradientes das restrições de desigualdade ativas em uma vizinhança.

Definição 3.14. *(RCRCQ - Relaxed Constant Rank Constraint Qualification) Dizemos que o ponto $x \in F$ satisfaz a relaxação da condição qualificação de posto constante se existe uma vizinhança $V(x)$ tal que para qualquer subconjunto de índices $J \subset \mathcal{A}(x)$,*

$$\{\nabla f(y)\}_{i\in\mathcal{I}} \cup \{\nabla f_j(y)\}_{j\in J} \text{ tem posto constante para todo } y \in V(x).$$

No teorema abaixo, temos uma condição necessária e suficiente para RCRCQ. Usando algum subconjuntos dos gradientes das restrições de igualdade e todas as combinações de subconjuntos dos gradientes das restrições de desigualdade ativas em que o conceito de linearmente dependente é preservado em uma vizinhança.

Teorema 3.15. *Seja $I \subset \{1, \cdots, m\}$ tal que $\{\nabla f_i(x)\}_{i\in I}$ é alguma base de span$\{\nabla f_i(x)\}_{i=1}^m$. Dizemos que $x \in F$ satisfaz RCRCQ se, e somente se, existe uma vizinhança $V(x)$ de x tal que*

- $\{\nabla f_i(y)\}_{i=1}^m$ tem posto constante para todo $y \in V(x)$;
- Para todo $J \subset \mathcal{A}(x)$, se $\{\nabla f_i(x)\}_{i\in I} \cup \{\nabla f_j(x)\}_{j\in J}$ é linearmente dependente, então $\{\nabla f_i(y)\}_{i\in\mathcal{I}} \cup \{\nabla f_j(y)\}_{j\in J}$ é linearmente dependente para todo $y \in V(x)$.

(Para prova, veja [3]).

Exemplo 3.16. *Vejamos que RCRCQ não implica CRCQ.*

Sejam $z = (0, 0)$,

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \quad \middle| \quad \begin{array}{r} f_1(x) = x_1 - x_2 = 0,\ f_2(x) = -x_1 + x_2^2 \leq 0, \\ f_3(x) = -x_1 \leq 0 \end{array} \right\}$$

o conjunto viável e $\mathcal{A}(z) = \{2, 3\}$ o conjunto ativo em z. Assim, os gradientes das restrições são:

$$\nabla f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \nabla f_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \nabla f_3(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

O ponto z satisfaz RCRCQ, pois existe alguma vizinhança $V(z)$ tal que os conjuntos $\{\nabla f_1(y)\}$ tem posto 1 e $\{\nabla f_1(y), \nabla f_3(y)\}$, $\{\nabla f_1(y), \nabla f_2(y)\}$, $\{\nabla f_1(y), \nabla f_2(y), \nabla f_3(y)\}$ têm posto 2 para todo $y \in V(z)$. Entretanto, o conjunto $\{\nabla f_2(y), \nabla f_3(y)\}$ tem posto 1 em z e posto 2 no conjunto $\{(0, y_2) | \, y_2 \neq 0\}$. Deste modo, $\bar{x}$ não satisfaz a CRCQ.

Exemplo 3.17. *Vejamos que MFCQ não implica RCRCQ.*

Sejam $z = (0,0)$,

$$F = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f_1(x) = -x_2 \le 0,\ f_2(x) = x_1^2 - x_2 \le 0\}$$

o conjunto viável e $\mathcal{A}(z) = \{1,2\}$ o conjunto ativo em z. Assim, os gradientes das restrições são:

$$\nabla f_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \nabla f_2(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

O ponto z satisfaz MCFQ, devido que o vetor $d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ satisfaz as desigualdades $\nabla f_i(z)^T d < 0$, $i = 1,2$. Entretanto, z não satisfaz RCRCQ, já que $\{\nabla f_1(y), \nabla f_2(y)\}$ tem posto um em z e posto 2 no conjunto $\{(y_1, 0) \,|\, y_1 \neq 0\}$.

Exemplo 3.18. *Vejamos que RCRCQ não implica CPLD.*

Sejam $z = (0,0)$,

$$F = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, f_1(x) = x_2 = 0,\ f_2(x) = x_1 - x_2^2 \le 0,\ f_3(x) = -x_1 - x_2^2 \le 0\}$$

o conjunto viável e $\mathcal{A}(z) = \{2,3\}$ o conjunto ativo em z. Assim, os gradientes das restrições são: $\nabla f_1(x) = (0,1)^T, \nabla f_2(x) = (1, -2x_2)^T, \nabla f_3(x) = (-1, -2x_2)^T$. O ponto z não satisfaz CPLD, pois o conjunto $\{\nabla f_2(y), \nabla f_3(y)\}$ é PLD em z, mas é LI no pontos $\{(0, y_2) \,|\, y_2 \neq 0\}$. Por outro lado z satisfaz RCRCQ, pois existe uma vizinhança de z tal que os conjuntos $\{\nabla f_1(y)\}$ tem posto um e $\{\nabla f_1(y), \nabla f_2(y)\}$, $\{\nabla f_1(y), \nabla f_3(y)\}$ $\{\nabla f_1(y), \nabla f_2(y), \nabla f_3(y)\}$ têm posto 2.

Exemplo 3.19. *CPLD não implica nem MFCQ nem CRCQ.*

Sejam $z = (0,0)$ e as restrições de desigualdades:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_1, \\ f_2(x) &= x_1 + x_2^2, \\ f_3(x) &= x_1 + x_2, \\ f_4(x) &= -x_1 - x_2, \end{aligned}$$

e $\mathcal{A}(z) = \{1,2,3,4\}$ o conjunto ativo em z. Assim, os gradientes das restrições são:

$$\nabla f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \nabla f_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x_2 \end{pmatrix},\ \nabla f_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \nabla f_4(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

O ponto z não satisfaz MFCQ, já que $\{\nabla f_3(z), \nabla f_4(z)\}$ é PLD. Por outro lado, o conjunto $\{\nabla f_1(y), \nabla f_2(y)\}$ é linearmente dependente no ponto z, mas é LI no conjunto $\{(0, y_2) \,|\, y_2 \neq 0\}$. Deste modo o ponto z não satisfaz CRCQ.

Vejamos que z satisfaz a condição CPLD. Sejam $\mu_j \geq 0,\ j = 1, \cdots, 4$, não todos nulos tais que

$$\mu_1 \nabla f_1(z) + \mu_2 \nabla f_2(z) + \mu_3 \nabla f_3(z) + \mu_4 \nabla f_4(z) = 0. \tag{3.2}$$

Se $\mu_2 = 0$, de (3.2) temos que

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_3 - \mu_4 &= 0, \\ \mu_3 - \mu_4 &= 0. \end{aligned}$$

Dai $\mu_1 = 0$ e $\mu_3 = \mu_4$. Deste modo, o conjunto $\{\nabla f_1(z),\ \nabla f_3(z), \nabla f_4(z)\}$ é positivo linearmente dependente. Ademais, o conjunto $\{\nabla f_1(y),\ \nabla f_3(y), \nabla f_4(y)\}$ é LD em qualquer vizinhança de z. Se $\mu_2 > 0$, de (3.2) temos que

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 &= 0; \\ \mu_3 - \mu_4 &= 0. \end{aligned}$$

Dai $\mu_1 + \mu_2 = 0 \Rightarrow \mu_2 = -\mu_1 \leq 0$ o qual é uma contradição. Portanto o conjunto $\{\nabla f_1(y),\ \nabla f_2(y),\ \nabla f_3(y), \nabla f_4(y)\}$ é PLD no ponto z e LD em qualquer vizinhança de z. Deste modo o ponto z satisfaz CPLD.

3.7 Relaxação da Condição de Dependência Linear Positiva Constante

Andreani, Haeser, Schuverdt e Silva [3] propuseram a relaxação da CPLD de maneira semelhante à relaxação da CRCQ, essa relaxação foi motivada pelo Teorema 3.15.

Definição 3.20. *(RCPLD - Relaxed Constant Positive Linear Dependence Constraint Qualification) Seja $x \in F$ e I um subconjunto de índices de alguma base de* $\operatorname{span}\{\nabla f_i(x)\}_{i=1}^m$. *Dizemos que x satisfaz RCPLD se existe $V(x)$ uma vizinhança de x tal que*

- *$\{\nabla f_i(y)\}_{i=1}^m$ tem posto constante para todo $y \in V(x)$;*
- *Para todo $J \subset \mathcal{A}(x)$, se $\{\nabla f_i(x)\}_{i \in I} \cup \{\nabla f_j(x)\}_{j \in J}$ é positiva linearmente dependente, então $\{\nabla f_i(y)\}_{i \in I} \cup \{\nabla f_j(y)\}_{j \in J}$ é linearmente dependente para todo $y \in V(x)$.*

Claramente o Teorema 3.15 mostra que RCRCQ implica RCPLD. É também claro que da definição CPLD implica RCPLD onde o posto constante dos gradientes das restrições de igualdade se segue da definição da CPLD quando $J = \emptyset$ e do Teorema 3.8.

Teorema 3.21. *Seja $I \subset \{1, \ldots, m\}$ tal que $\{\nabla f_i(x)\}_{i \in I}$ é uma base para* $\operatorname{span}\{\nabla f_i(x)\}_{i=1}^m$. *Um ponto $x \in F$ satisfaz RCPLD se, e somente se, existe uma vizinhança $V(x)$ tal que*

- *$\{\nabla f_i(y)\}_{i=1}^m$ tem posto constante para todo $y \in V(x)$;*
- *Para todo $J \subset \mathcal{A}(x)$, se $\{\nabla f_i(x)\}_{i \in I} \cup \{\nabla f_j(x)\}_{j \in J}$ é positivo linearmente dependente, então $\{\nabla f_i(y)\}_{i \in I} \cup \{\nabla f_j(y)\}_{j \in J}$ é positivo linearmente dependente para todo $y \in V(x)$.*

(Para prova, veja [3]).

O seguinte lema será usado na prova da RCPLD implica CRSC.

Lema 3.22. *Se $x = \sum_{i=1}^{m+p} \alpha_i v_i$ com $v_i \in \mathbb{R}^n$ $\forall i$, $\{v_i\}_{i=1}^m$ linearmente independente e $\alpha_i \neq 0$ para todo $i = m+1, \cdots, m+p$, então existe $J \subset \{m+1, \cdots, m+p\}$ e escalares $\bar{\alpha}_i$ para todo $i \in \{1, \cdots, m\} \cup J$ tal que*

- $x = \sum_{i \in \{1, \cdots, m\} \cup J} \bar{\alpha}_i v_i$
- $\alpha_i \bar{\alpha}_i > 0$ para todo $i \in J$,
- $\{v_i\}_{i \in \{1, \cdots, m\} \cup J}$ é linearmente independente.

(Para prova, veja [3])

3.8 Condição de Posto Constante da Componente de Subespaço

A condição de qualificação de posto constante da componente de subespaço que foi introduzida pelos autores [4], estabeleceram o conjunto de índices dos gradientes das restrições de igualdade e desigualdade ativa que devem de preservar o posto em uma vizinhança. Além disso, provaram que esta condição implica a condição do error bound.

Definição 3.23. *(CRSC - Constant Rank of the Subspace component)*
Sejam o ponto $x \in F$ e o conjunto de índices $\mathcal{J}_- = \{j \in A(x) \mid -\nabla f_j(x) \in \mathcal{N}(x)\}$.

Dizemos que x satisfaz a condição de qualificação de posto constante da componente de subespaço, se existe $V(x)$ uma vizinhança de x tal que

$$\{\nabla f_\ell(y) \mid \ell \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}_-\} \text{ tem posto constante para todo } y \in V(x).$$

Teorema 3.24. *Se $x \in F$ satisfaz CRSC e as funções $f_i, i = 1, \cdots, m+p$ definidas em F admitem segunda derivada numa vizinhança de x, então x satisfaz a condição do limitante do erro.*

(Para prova, veja [4])

Exemplo 3.25. *Vejamos que a condição do limitante do error não implica a CRSC.*

Sejam as restrições de desigualdade do conjunto F:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_2 + x_1^3 \leq 0; \\ f_2(x) &= -x_2 + x_1^3 \leq 0; \\ f_3(x) &= x_1 \leq 0. \end{aligned}$$

Em que $\bar{x} = (0, 0) \in F$. Logo, nas regiões inviáveis da Figura 3.2, temos que

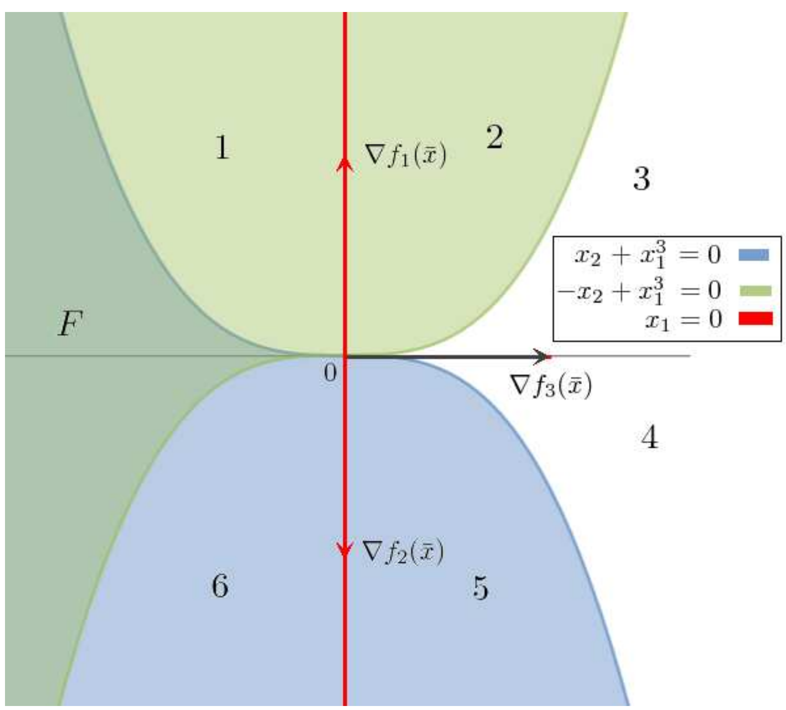


Figura 3.2:

- Para a região 1, obtemos que $f_1(x) = x_2 + x_1^3 > 0, f_2(x) = -x_2 + x_1^3 < 0, f_3(x) = x_1 \leq 0$, $\min_{z\in F} \|x - z\|_2 \leq \|(x_1, x_2) - (x_1, -x_1^3)\|_2 = x_2 + x_1^3$. Por outro lado, $\max\{0, f_1(x), f_2(x), f_3(x)\} = f_1(x)$. Assim, $\min_{z\in F} \|x-z\|_2 \leq \max\{0, f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$.

- Para a região 2, obtemos que $f_1(x) = x_2 + x_1^3 > 0, f_2(x) = -x_2 + x_1^3 \leq 0, f_3(x) = x_1 > 0$, $x_2 \geq 0$, $\min_{z\in F} \|x - z\|_2 = \|x - (0,0)\|_2 \leq \|x - (0,0)\|_1 = x_1 + x_2$. Por outro lado, $\max\{0, f_1(x), f_2(x), f_3(x)\} = \max\{f_1(x), f_3(x)\}$, e como $x_1 + x_2 < x_1 + x_2 + x_1^3 \leq 2\max\{x_2 + x_1^3, x_1\} = 2\max\{f_1(x), f_3(x)\}$. Assim, $\min_{z\in F} \|x - z\|_2 < 2\max\{0, f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$.

- Para a região 3, obtemos que $f_1(x) = x_2 + x_1^3 > 0, f_2(x) = -x_2 + x_1^3 > 0, f_3(x) = x_1 > 0$, $x_2 \geq 0$, $\min_{z\in F} \|x - z\|_2 = \|x - (0,0)\|_2 \leq \|x - (0,0)\|_1 = x_1 + x_2$. Por outro lado, $\max\{0, f_1(x), f_2(x), f_3(x)\} = \max\{f_1(x), f_3(x)\}$, pois $x_2 \geq -x_2 \Rightarrow x_2 + x_1^3 \geq -x_2 + x_1^3$, e como $x_1 + x_2 < x_1 + x_2 + x_1^3 \leq 2\max\{x_2 + x_1^3, x_1\} = 2\max\{f_1(x), f_3(x)\}$. Assim, $\min_{z\in F} \|x - z\|_2 < 2\max\{0, f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$.

- Para a região 4, obtemos que $f_1(x) = x_2 + x_1^3 > 0, f_2(x) = -x_2 + x_1^3 > 0, f_3(x) = x_1 > 0$, $x_2 \leq 0$, $\min_{z\in F} \|x - z\|_2 = \|x - (0,0)\|_2 \leq \|x - (0,0)\|_1 = x_1 - x_2$. Por outro lado, $\max\{0, f_1(x), f_2(x), f_3(x)\} = \max\{f_2(x), f_3(x)\}$, pois $x_2 \leq -x_2 \Rightarrow x_2 + x_1^3 \leq -x_2 + x_1^3$, e como $x_1 - x_2 < x_1 - x_2 + x_1^3 \leq 2\max\{-x_2 + x_1^3, x_1\} = 2\max\{f_2(x), f_3(x)\}$. Assim, $\min_{z\in F} \|x - z\| < 2\max\{0, f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$.

- Para a região 5, obtemos que $f_1(x) = x_2 + x_1^3 \leq 0, f_2(x) = -x_2 + x_1^3 > 0, f_3(x) = x_1 > 0$, $\min_{z\in F} \|x - z\|_2 = \|x - (0,0)\|_2 \leq \|x - (0,0)\|_1 = x_1 - x_2$. Por outro lado, $\max\{0, f_1(x), f_2(x), f_3(x)\} = \max\{f_2(x), f_3(x)\}$, e como $x_1 - x_2 < x_1 - x_2 + x_1^3 \leq 2\max\{-x_2 + x_1^3, x_1\} = 2\max\{f_2(x), f_3(x)\}$. Assim, $\min_{z\in F} \|x - z\| < 2\max\{0, f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$.

- Para a região 6, obtemos que $f_1(x) = x_2 + x_1^3 < 0, f_2(x) = -x_2 + x_1^3 > 0, f_3(x) = x_1 \leq 0$, $\min_{z\in F} \|x - z\|_2 \leq \|(x_1, x_2) - (x_1, x_1^3)\|_2 = -x_2 + x_1^3$. Por outro lado, $\max\{0, f_1(x), f_2(x), f_3(x)\} = f_2(x)$. Assim, $\min_{z\in F} \|x-z\|_2 \leq \max\{0, f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$.

Portanto, $\min_{z\in F} \|x - z\|_2 \leq 2\max\{0, f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}, \forall x \in (\mathbb{R}^2 \backslash F)$.
Verifiquemos que o ponto $\bar{x}$ não satisfaz a CRSC. Para isto, os gradientes das restrições de desigualdade são:

$$\nabla f_1(x) = (3x_1^2, 1)^T,\ \nabla f_2(x) = (3x_1^2, -1)^T,\ \nabla f_3(x) = (1, 0)^T.$$

Além disso, $\mathcal{J}_- = \{1, 2\}$, pois $-\nabla f_2(\bar{x}) = \nabla f_1(\bar{x})$, $-\nabla f_1(\bar{x}) = \nabla f_2(\bar{x})$, ou seja, $-\nabla f_1(x), -\nabla f_2(x) \in \mathcal{N}(\bar{x})$. Por outro lado, o conjunto $\{\nabla f_2(y), \nabla f_1(y)\}$ tem posto 1 em $\bar{x}$ e posto 2 nos ponto que pertence ao conjunto $\{(y_1, 0)\,|y_1 \neq 0\}$. Deste modo o ponto $\bar{x}$ não satisfaz CRSC.

Exemplo 3.26. *Vejamos que CRSC não implica RCPLD.*

Consideremos o ponto $\bar{x} = (0, 0)$ e a restrição de igualdade e as restrições de desigualdade

$$f_1(x) = x_2 = 0,\ f_2(x) = x_2 - x_1^2 \leq 0,\ f_3(x) = -x_1 \leq 0,\ f_4(x) = x_1 \leq 0,$$

com $\mathcal{A}(\bar{x}) = \{1, 2, 3, 4\}$ o conjunto ativo e $\mathcal{I} = \{1\}$. Logo, os gradientes das restrições são:

$$\nabla f_1(x) = (0, 1)^T,\ \nabla f_2(x) = (-2x_1, 1)^T,\ \nabla f_3(x) = (-1, 0)^T,\ \nabla f_4(x) = (1, 0)^T.$$

Além disso, $\mathcal{J}_- = \{2, 3, 4\}$. O ponto $\bar{x}$ satisfaz a CRSC, pois o conjunto $\{\nabla f_1(x),\ \nabla f_2(x),\ \nabla f_3(x),\ \nabla f_4(x)\}$ tem posto 2 para qualquer vizinhança de $\bar{x}$. No entanto, $\bar{x}$ não satisfaz a RCPLD, pois $\{\nabla f_1(\bar{x}),\ \nabla f_2(\bar{x}),\ \nabla f_3(\bar{x})\}$ é PLD, mas $\{\nabla f_1(x),\ \nabla f_2(x),\ \nabla f_3(x)\}$ é PLI para os pontos $\{(x_1, 0)\,|\,x_1 \neq 0\}$.

3.9 Condição de Gerador Positivo Constante

Nesta seção, estabeleceremos definições padrão de uma forma mais geral do que às combinações positivas de um conjunto finito de vetores, focaremos as propriedades de um conjunto gerado positivamente por um conjunto de índices. Essas propriedades são usadas para compreender a condição de qualificação de gerador positivo constante.

Definição 3.27. *Sejam $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{L}, \mathcal{K} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ um par de conjunto de índices. Dizemos que $x \in \mathbb{R}^n$ é uma combinação positiva dos elementos de V associado ao par, ordenado, $(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ se existem escalares $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathcal{L}$, $\mu_j \geq 0$, $j \in \mathcal{K}$ tais que*

$$x = \sum_{i \in \mathcal{L}} \lambda_i v_i + \sum_{j \in \mathcal{K}} \mu_j v_j.$$

Definição 3.28. *Sejam $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{L}, \mathcal{K} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ um par de conjunto de índices. O conjunto Q construído a partir dos elementos de V associados ao* *par de índices $(\mathcal{L},\mathcal{K})$ da seguinte forma:*

$$Q = \left\{ y \,|\, y = \sum_{i\in\mathcal{L}} \lambda_i v_i + \sum_{j\in\mathcal{K}} \mu_j v_j,\ \ \lambda_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \mathcal{L},\ \mu_j \geq 0\ \forall j \in \mathcal{K} \right\},$$

que vamos denotar por $\operatorname{span}_+(\mathcal{L},\mathcal{K};V)$*, ou* $\operatorname{span}_+(\mathcal{L},\mathcal{K})$*, é denominado o conjunto gerado positivamente pelos vetores associados ao par de índices $(\mathcal{L},\mathcal{K})$.*

Chamamos um par $(\mathcal{L},\mathcal{K})$ positivo linearmente dependente se o conjunto de vetores de V associados ao par $(\mathcal{L},\mathcal{K})$ é PLD. Chamamos um par $(\mathcal{L},\mathcal{K})$ positivo linearmente independente se o conjunto de vetores de V associados ao par $(\mathcal{L},\mathcal{K})$ é PLI.
No seguinte teorema, observamos que qualquer conjunto gerado positivamente por um par de índices PLD pode ser gerado positivamente, por um par PLI.

Teorema 3.29. *Sejam $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{L},\mathcal{K} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ um par de conjuntos de índices. Suponhamos que $(\mathcal{L},\mathcal{K})$ é PLD e consideremos as seguintes condições:*

1. *Se $\mathcal{L}$ está associada a vetores linearmente dependentes, definimos $\mathcal{L}'$ como um subconjunto próprio de $\mathcal{L}$ tal que* $\operatorname{span}\{v_i \,|\, i \in \mathcal{L}'\} = \operatorname{span}\{v_i \,|\, i \in \mathcal{L}\}$ *e $\mathcal{K}' = \mathcal{K}$.*

2. *Caso contrário, se $\mathcal{L}$ está associada a vetores linearmente independentes e existe um $j' \in \mathcal{K}$ tal que $-v_{j'} \in \operatorname{span}_+(\mathcal{L},\mathcal{K})$, definimos $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{j'\}$ e $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \setminus \{j'\}$ um subconjunto próprio de $\mathcal{K}$.*

Então, $\operatorname{span}_+(\mathcal{L}',\mathcal{K}') = \operatorname{span}_+(\mathcal{L},\mathcal{K})$.

Demonstração. Se $\mathcal{L}$ satisfaz a condição 1,

$$\operatorname{span}_+(\mathcal{L},\mathcal{K}) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \ \mid\ z = y + \sum_{j\in\mathcal{K}} \mu_j v_j,\ \mu_j \geq 0,\ \forall i \in \mathcal{K},\ \ y = \sum_{i\in\mathcal{L}} \lambda_i v_i \right\} \tag{3.3}$$

e como $\operatorname{span}\{v_i \,|\, i \in \mathcal{L}\} = \operatorname{span}\{v_i \,|\, i \in \mathcal{L}'\}$, temos que

$$y = \sum_{i\in\mathcal{L}'} \overline{\lambda}_i v_i. \tag{3.4}$$

Agora substituindo (3.4) em (3.3), obtemos

$$\operatorname{span}_+(\mathcal{L},\mathcal{K}) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \ \mid\ z = \sum_{i\in\mathcal{L}'} \overline{\lambda}_i v_i + \sum_{j\in\mathcal{K}} \mu_j v_j,\ \ \mu_j \geq 0\ \forall j \in \mathcal{K} \right\} = \operatorname{span}_+(\mathcal{L}',\mathcal{K}).$$

Se $\mathcal{L}$ satisfaz a condição 2 e como $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ é PLD, então existem $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \mathcal{L}$, $\mu_j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{K}$, $\displaystyle\sum_{i\in\mathcal{L}} |\lambda_i| + \sum_{j\in\mathcal{K}} \mu_j > 0$ tal que

$$\sum_{i\in\mathcal{L}} \lambda_i v_i + \sum_{j\in\mathcal{K}} \mu_j v_j = 0. \tag{3.5}$$

Logo, existe $\mu_\ell > 0$, $\ell \in \mathcal{K}$. Caso contrário, $\mu_\ell = 0$ $\forall \ell \in \mathcal{K}$ e de (3.5), temos que $0 = \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{L}} \lambda_i v_i$ em que existe algum $\lambda_s \neq 0$. Então, $\{v_i \mid i \in \mathcal{L}\}$ é LD, o qual é uma contradição.

Agora em (3.5), temos que

$$\sum_{i\in\mathcal{L}} \lambda_i v_i + \sum_{j\in\mathcal{K}\setminus\{\ell\}} \mu_j v_j + \mu_\ell v_\ell = 0,$$

então

$$\sum_{i\in\mathcal{L}} \frac{\lambda_i}{\mu_\ell} v_i + \sum_{j\in\mathcal{K}\setminus\{\ell\}} \frac{\mu_j}{\mu_\ell} v_j = -v_\ell. \tag{3.6}$$

Deste modo, definimos os conjuntos de índices $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{\ell\}$ e $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \setminus \{\ell\}$. Seja $x \in \operatorname{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K})$, temos que

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i\in\mathcal{L}} \lambda_i v_i + \sum_{j\in\mathcal{K}} \mu_j v_j \\ &= \sum_{i\in\mathcal{L}} \lambda_i v_i + \mu_\ell v_\ell + \sum_{j\in\mathcal{K}\setminus\{\ell\}} \mu_j v_j, \text{ então } \ x \in \operatorname{span}_+(\mathcal{L}', \mathcal{K}'). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K}) \subset \operatorname{span}_+(\mathcal{L}', \mathcal{K}'). \tag{3.7}$$

Vamos mostrar que $\operatorname{span}_+(\mathcal{L}', \mathcal{K}') \subset \operatorname{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K})$.
Seja $x \in \operatorname{span}_+(\mathcal{L}', \mathcal{K}')$, então

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i\in\mathcal{L}'} \widetilde{\lambda}_i v_i + \sum_{j\in\mathcal{K}'} \widetilde{\mu}_j v_j \\ &= \sum_{i\in\mathcal{L}} \widetilde{\lambda}_i v_i + \widetilde{\lambda}_\ell v_\ell + \sum_{j\in\mathcal{K}'} \widetilde{\mu}_j v_j. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Se $\widetilde{\lambda}_\ell > 0$, então $x \in \operatorname{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K})$. Caso contrário de (3.6) e de (3.8), obtemos que

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i\in\mathcal{L}} \widetilde{\lambda}_i v_i + \widetilde{\lambda}_\ell \left(-\sum_{i\in\mathcal{L}} \frac{\lambda_i}{\mu_\ell} v_i - \sum_{j\in\mathcal{K}\setminus\{\ell\}} \frac{\mu_j}{\mu_\ell} v_j \right) + \sum_{j\in\mathcal{K}\setminus\{\ell\}} \widetilde{\mu}_j v_j \\ &= \sum_{i\in\mathcal{L}} \left(\widetilde{\lambda}_i - \widetilde{\lambda}_\ell \frac{\lambda_i}{\mu_\ell} \right) v_i + \sum_{j\in\mathcal{K}\setminus\{\ell\}} \left(\widetilde{\mu}_j - \widetilde{\lambda}_\ell \frac{\mu_j}{\mu_\ell} \right) v_j \\ &= \sum_{i\in\mathcal{L}} \left(\widetilde{\lambda}_i + |\widetilde{\lambda}_\ell| \frac{\lambda_i}{\mu_\ell} \right) v_i + \sum_{j\in\mathcal{K}\setminus\{\ell\}} \left(\widetilde{\mu}_j + |\widetilde{\lambda}_\ell| \frac{\mu_j}{\mu_\ell} \right) v_j, \end{aligned}$$

então $x \in \operatorname{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K})$.
Portanto,

$$\operatorname{span}_+(\mathcal{L}', \mathcal{K}') \subset \operatorname{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K}). \tag{3.9}$$

De (3.7) e (3.9), concluímos

$$\operatorname{span}_+(\mathcal{L}', \mathcal{K}') = \operatorname{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K}).$$

□

Corolário 3.30. *Sejam $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{L}$, $\mathcal{K} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ um par de conjunto de índices. Então, existem $\mathcal{L}'$, $\mathcal{K}' \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ tais que $(\mathcal{L}', \mathcal{K}')$ é positiva linearmente independente e $\operatorname{span}_+(\mathcal{L}', \mathcal{K}') = \operatorname{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K})$. Dizemos que o par $(\mathcal{L}', \mathcal{K}')$ é um par gerador positivo linearmente independente (PLI) de $\operatorname{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K})$.*

Demonstração. Seja $(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ PLD. Usando o Teorema 3.29 um número finito de vezes encontramos o par $(\mathcal{L}', \mathcal{K}')$ PLI tal que $\operatorname{span}_+(\mathcal{L}', \mathcal{K}') = \operatorname{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K})$. □

Agora, definimos um conjunto de índices de maneira semelhante ao conjunto $\mathcal{J}_-$ que será usado no lema de abaixo.

Definição 3.31. *Sejam $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{L}, \mathcal{K} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ um par de conjuntos de índices; definimos os conjuntos*

$$\mathcal{K}_- = \left\{ j \in \mathcal{K} \mid -v_j \in \operatorname{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K}; V) \right\} \ \text{e}\ \mathcal{K}_+ = \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_-.$$

Lema 3.32. *Sejam $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{L}, \mathcal{K} \subset \{1, 2, \cdots, k\}$ um par de conjunto de índices. Seja $(\mathcal{L}', \mathcal{K}')$ um par gerador PLI de $\operatorname{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K}; V)$. Então,*

1. *$\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}_+$;*

2. $(\mathcal{L}', \mathcal{K}_+)$ *é também um par gerador PLI de* $\operatorname{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K}; V)$*;*

3. $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{K}_-$ *é o conjunto de índices de uma base do subespaço gerado por* $\{v_\ell \,|\, \ell \in \mathcal{L} \cup \mathcal{K}_-\}$.

Demonstração. 1. Suponhamos que $\mathcal{K}' \not\subset \mathcal{K}_+$, então existe $\ell \in \mathcal{K}'$ e $\ell \notin \mathcal{K}_+$.
Como $\ell \notin \mathcal{K}_+$, temos que $\ell \in \mathcal{K}_-$, ou seja, $-v_\ell \in \operatorname{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K}; V)$. Pela hipótese $(\mathcal{L}', \mathcal{K}')$ ser um par gerador PLI de $\operatorname{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K}; V)$, obtemos que $-v_\ell \in \operatorname{span}_+(\mathcal{L}', \mathcal{K}'; V)$.
Então,

$$\begin{aligned} -v_\ell &= \sum_{i \in \mathcal{L}'} \lambda_i v_i + \sum_{j \in \mathcal{K}'} \mu_j v_j, \;\; \mu_j \geq 0 \;\forall j \in \mathcal{K}' \\ &= \sum_{i \in \mathcal{L}'} \lambda_i v_i + \sum_{j \in \mathcal{K}' \setminus \{\ell\}} \mu_j v_j + \mu_\ell v_\ell, \;\; \mu_j \geq 0 \;\forall j \in \mathcal{K}'. \end{aligned}$$

Assim,

$$0 = \sum_{i \in \mathcal{L}'} \lambda_i v_i + \sum_{j \in \mathcal{K}' \setminus \{\ell\}} \mu_j v_j + (\mu_\ell + 1) v_\ell, \;\; \mu_j \geq 0 \;\forall j \in \mathcal{K}',$$

em que $\mu_\ell + 1 > 0$. Portanto, $(\mathcal{L}', \mathcal{K}')$ é PLD. O qual é uma contradição.

2. Da hipótese, $(\mathcal{L}', \mathcal{K}')$ é um par gerador PLI de $\operatorname{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K}; V)$ e do resultado anterior $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}_+$, temos que

$$\operatorname{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K}; V) = \operatorname{span}_+(\mathcal{L}', \mathcal{K}'; V) \subset \operatorname{span}_+(\mathcal{L}', \mathcal{K}_+; V) \subset \operatorname{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K}; V).$$

Daí temos que $\operatorname{span}_+(\mathcal{L}', \mathcal{K}_+; V) = \operatorname{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K}; V)$.
Vamos mostrar que $(\mathcal{L}', \mathcal{K}_+)$ é PLI. Consideremos o seguinte

$$\sum_{i \in \mathcal{L}'} \lambda_i v_i + \sum_{j \in \mathcal{K}_+} \mu_j v_j = 0, \tag{3.10}$$

onde $\mu_j \geq 0 \;\; \forall j \in \mathcal{K}_+$. Se existe $\mu_\ell > 0$, $\ell \in \mathcal{K}_+$, ou seja, $\ell \notin \mathcal{K}_-$, então

$$\sum_{i \in \mathcal{L}'} \lambda_i v_i + \sum_{j \in \mathcal{K}_+ \setminus \{\ell\}} \mu_j v_j + \mu_\ell v_\ell = 0,$$

então

$$\sum_{i \in \mathcal{L}'} \frac{\lambda_i}{\mu_\ell} v_i + \sum_{j \in \mathcal{K}_+ \setminus \{\ell\}} \frac{\mu_j}{\mu_\ell} v_j = -v_\ell,$$

então

$$-v_\ell \in \operatorname{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K}; V).$$

Portanto, $\ell \in \mathcal{K}_-$, o qual é um contradição.

Assim, $\mu_j = 0 \ \forall j \in \mathcal{K}_+$. Logo, de (3.10), temos que $\sum_{i \in \mathcal{L}'} \lambda_i v_i = 0$, $\lambda_i \in \mathbb{R} \ \forall i \in \mathcal{L}'$.

Então, $\lambda_i = 0 \ \forall i \in \mathcal{L}'$, pois $(\mathcal{L}', \mathcal{K}')$ é PLI em particular $\mathcal{L}'$ é LI. Portanto, $(\mathcal{L}', \mathcal{K}_+)$ é PLI.

3. Seja $j \in \mathcal{L}'$, $-v_j \in \operatorname{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K}; V)$. Então, j deve pertencer ou ao conjunto $\mathcal{L}$ ou a $\mathcal{K}_-$, pela definição de tais conjuntos de índices. Por outro lado, $\operatorname{span}\{v_\ell \,|\, \ell \in \mathcal{L} \cup \mathcal{K}_-\} \subset \operatorname{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K}; V)$ e como $(\mathcal{L}', \mathcal{K}')$ é um par gerador PLI de $\operatorname{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K}; V)$, então

$$\operatorname{span}\{v_\ell \,|\, \ell \in \mathcal{L} \cup \mathcal{K}_-\} \subset \operatorname{span}_+(\mathcal{L}', \mathcal{K}'; V).$$

Dado $v_\ell, -v_\ell \in \operatorname{span}\{v_\ell \,|\, \ell \in \mathcal{L} \cup \mathcal{K}_-\}$ e pelo resultado acima, temos que existem escalares λ_i^+, λ_i^-, $i \in \mathcal{L}'$, e μ_j^+, μ_j^-, $j \in \mathcal{K}'$ não negativos tais que

$$\begin{aligned} v_\ell &= \sum_{i \in \mathcal{L}'} \lambda_i^+ v_i + \sum_{j \in \mathcal{K}'} \mu_j^+ v_j \qquad (3.11) \\ -v_\ell &= \sum_{i \in \mathcal{L}'} \lambda_i^- v_i + \sum_{j \in \mathcal{K}'} \mu_j^- v_j \end{aligned}$$

Somando estas duas equações temos,

$$0 = \sum_{i \in \mathcal{L}'} (\lambda_i^+ + \lambda_i^-) v_i + \sum_{j \in \mathcal{K}'} (\mu_j^+ + \mu_j^-) v_j.$$

Como $(\mathcal{L}', \mathcal{K}')$ é PLI, então todos os coeficientes na soma acima são zero. E considerando $\mu_j^+, \mu_j^- \geq 0 \ \forall j \in \mathcal{K}'$, concluímos que $\mu_j^+ = \mu_j^- = 0$, $\forall j \in \mathcal{K}'$. Segue-se de (3.11) que v_ℓ é gerado por os vetores de $\mathcal{L}'$. Portanto,

$\operatorname{span}\{v_\ell \,|\, \ell \in \mathcal{L} \cup \mathcal{K}_-\} \subset \operatorname{span}\{v_\ell \,|\, \ell \in \mathcal{L}'\} \subset \operatorname{span}\{v_\ell \,|\, \ell \in \mathcal{L} \cup \mathcal{K}_-\}$.

E como $(\mathcal{L}', \mathcal{K}')$ é PLI, então o conjunto de vetores de índices $\mathcal{L}'$ é LI.

Assim, $\mathcal{L}'$ é o conjunto de índices de alguma base de $\operatorname{span}\{v_\ell \,|\, \ell \in \mathcal{L} \cup \mathcal{K}_-\}$.

□

Corolário 3.33. *O par gerador PLI dado pelo Corolário* 3.30 *tem a forma*

$$\mathcal{L}' \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{K}_-, \ \mathcal{K}' = \mathcal{K}_+,$$

em que $\mathcal{L}'$ é composto por índices de uma base do espaço gerado por $\{v_\ell \,|\, \ell \in \mathcal{L} \cup \mathcal{K}_-\}$.

Demonstração. No processo de gerar o par de índices $(\mathcal{L}', \mathcal{K}')$ no Corolário 3.30, vemos que não podemos tirar elementos de $\mathcal{K}'$ e mandar a $\mathcal{L}'$ quando $(\mathcal{L}', \mathcal{K}')$ é PLI, então $\mathcal{K}' = \mathcal{K}_+$ e pelo Lema 3.32 item 3, temos que $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{K}_-$ e $\mathcal{L}'$ é uma base de $\text{span}\{v_\ell \mid \ell \in \mathcal{L} \cup \mathcal{K}_-\}$. □

O teorema abaixo estabelece um par de índices de $(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ que deve gerar positivamente um subespaço contido em $\text{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K}; V)$.

Teorema 3.34. *o conjunto* $\text{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K}_-; V)$ *é um subespaço.*

Demonstração. $s \in \mathcal{K}_-$, então $-v_s \in \text{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K}; V)$;

$$-v_s = \sum_{i \in \mathcal{L}} \lambda_i v_i + \sum_{j \in \mathcal{K}} \mu_j v_j,$$

$$= \sum_{i \in \mathcal{L}} \lambda_i v_i + \sum_{j \in \mathcal{K}_+} \mu_j v_j + \sum_{k \in \mathcal{K}_-} \mu_k v_k. \tag{3.12}$$

Afirmação, $\mu_j = 0 \ \forall j \in \mathcal{K}_+$.
Caso contrário se existe $\ell \in \mathcal{K}_+$ tal que $\mu_\ell \neq 0$ e de (3.12), temos que

$$-v_\ell = \sum_{i \in \mathcal{L}} \frac{\lambda_i}{\mu_\ell} v_i + \sum_{j \in \mathcal{K}_+ \setminus \{\ell\}} \frac{\mu_j}{\mu_\ell} v_j + \sum_{k \in \mathcal{K}_-} \frac{\mu_k}{\mu_\ell} v_k + \frac{1}{\mu_\ell} v_s,$$

então

$$-v_\ell \in \text{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K}; V)$$

Portanto, $\ell \in \mathcal{K}_-$. O qual é um absurdo.
Logo, $\text{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K}_-; V) = \text{span}\{v_k\}_{k \in \mathcal{L} \cup \mathcal{K}_-}$. Assim, $\text{span}_+(\mathcal{L}, \mathcal{K}_-; V)$ é um subespaço. □

Definição 3.35. *(CPG - Constant Positive Generator Condition)*
Usando as restrições do conjunto viável F do problema de PNL, definimos $Jf(y) = \{\nabla f_i(y)\}_{i \in \mathcal{I}} \cup \{\nabla f_j(y)\}_{j \in \mathcal{J}}$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que $x \in F$ satisfaz a condição de gerador positivo constante se existem $V(x)$ uma vizinhança de x e $(\mathcal{I}', \mathcal{J}_+)$ um par gerador PLI de $\text{span}_+(\mathcal{I}, \mathcal{A}(x); Jf(x))$ *tal que*

$$\text{span}_+(\mathcal{I}', \mathcal{J}_+; Jf(y)) \supseteq \text{span}_+(\mathcal{I}, \mathcal{A}(x); Jf(y)) \quad \forall y \in V(x), \tag{3.13}$$

em que $\mathcal{I}'$ é o conjunto de índices de alguma base de $\text{span}\{\nabla f_\ell(x)\}_{\ell \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}_-}$

Exemplo 3.36. *Vejamos que na CPG o caso da igualdade em* (3.13) *não é sempre verdadeira.*

Seja o conjunto

$$F = \left\{ z = (x, y) \Big| \quad f_1(z) = x^3 - y \leq 0,\ f_2(z) = x^3 + y \leq 0, f_3(z) = x \leq 0. \right\}.$$

Deste modo, os gradientes das restrições são:

$$\nabla f_1(z) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ -1 \end{pmatrix}, \nabla f_2(z) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \nabla f_3(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para $w = (0, 0)$, temos que conjunto ativo em w, $\mathcal{A}(w) = \{1, 2, 3\}$, e os gradientes em w são

$$\nabla f_1(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \nabla f_2(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \nabla f_3(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Agora, escolhemos $(I' = \{1\}, \mathcal{J}_+ = \{3\})$ par gerador PLI de $\text{span}_+(\emptyset, \mathcal{A}(w); Jf(w))$. Assim, $\text{span}_+(I', \mathcal{J}_+; Jf(z)) \supsetneq \text{span}_+(\emptyset, \mathcal{A}(z); Jf(z))$ para qualquer $z \neq w$. Veja na Figura 3.3. Portanto, o caso igualdade não é verdadeira.

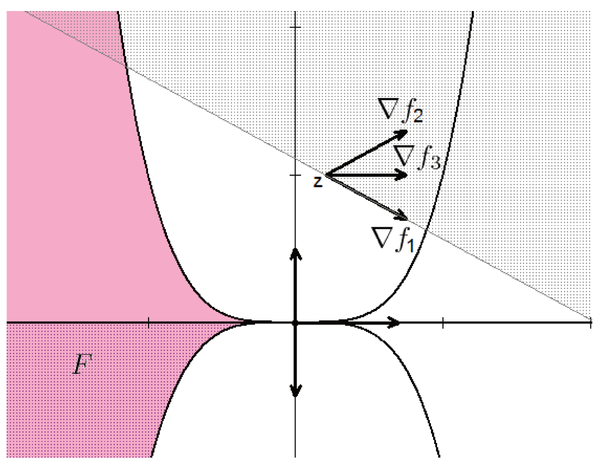


Figura 3.3:

Exemplo 3.37. *Vejamos que na definição da CPG somente são necessários os índices de alguma base de* $\text{span}\{\nabla f_\ell(x)\}_{\ell \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}_-}$.

Seja o conjunto

$$F = \left\{ z = (x, y) \Big| \quad \begin{array}{r} f_1(z) = x^3 - y \leq 0,\ f_2(z) = x^3 + y \leq 0, f_3(z) = x \leq 0, \\ f_4(z) = y^3 \leq 0 \end{array} \right\}.$$

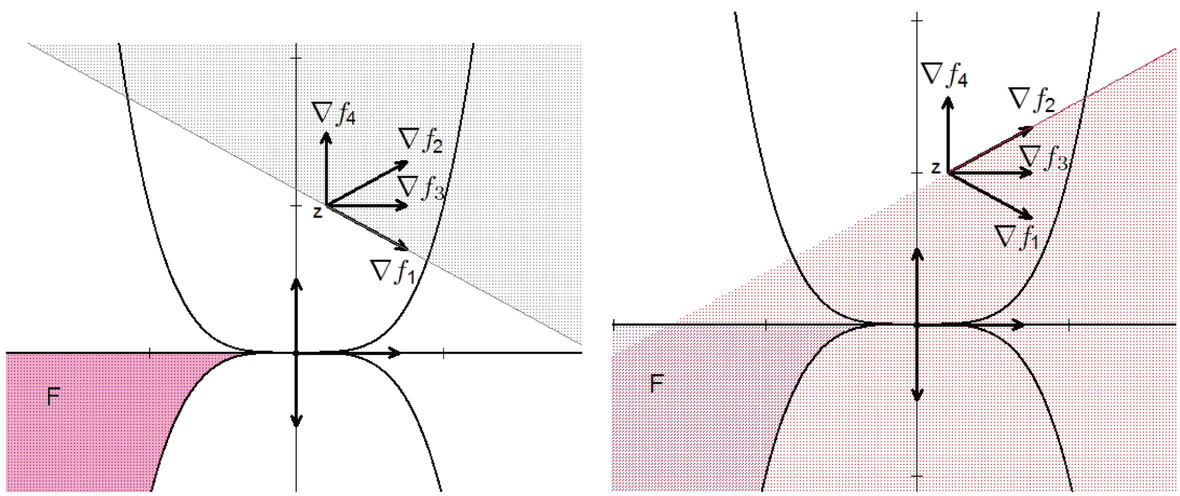
Os gradientes das restrições são:

$$\nabla f_1(z) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ -1 \end{pmatrix}, \nabla f_2(z) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \nabla f_3(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \nabla f_4(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3y^2 \end{pmatrix}.$$

Para $w = (0,0)$, temos que o conjunto ativo em w, $A(w) = \{1,2,3,4\}$, e os gradientes em w são

$$\nabla f_1(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \nabla f_2(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \nabla f_3(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \nabla f_4(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Agora, escolhemos ($I' = \{1\}, \mathcal{J}_+ = \{3\}$) par gerador PLI de $\text{span}_+(\mathcal{I}, \mathcal{A}(w); Jf(w))$. Assim, $\text{span}_+(\{1\},\{3\}; Jf(z)) \supsetneq \text{span}_+(\emptyset, \mathcal{A}(z); Jf(z))$ para qualquer $z \neq w$. Veja-se na Figura 3.4(a). Se escolhemos ($I' = \{2\}, \mathcal{J}_+ = \{3\}$) par gerador PLI de $\text{span}_+(\emptyset, \mathcal{A}(w); Jf(w))$, mas $\nabla f_4(z) \notin \text{span}_+(\{2\},\{3\}; Jf(z))$ para qualquer $z \neq w$. Veja na Figura 3.4(b). Portanto, x satisfaz a CPG, para o caso de $I' = \{1\}$.



(a) (b)

Figura 3.4:

Exemplo 3.38. *Vejamos que um ponto viável satisfaz CPG, mas não satisfaz limitante do erro.*

Seja o conjunto

$$F = \left\{ z = (x,y) \middle| \begin{array}{r} f_1(z) = x^3 - y \leq 0, \;\; f_2(z) = x^3 + y \leq 0, f_3(z) = x \leq 0, \\ f_4(z) = y^3 \leq 0 \end{array} \right\}$$

e ponto $w = (0,0) \in F$. No Exemplo 3.37, vimos que w satisfaz a CPG.
Agora, consideremos a sequência $x_k = \left(-\sqrt[3]{\frac{1}{k}}, \frac{1}{k}\right)$ de pontos inviáveis de F, $f_1(x_k) = -\frac{2}{k} < 0$, $f_2(x_k) = 0$, $f_3(x_k) = -\sqrt[3]{\frac{1}{k}} < 0$ e $f_4(x_k) = \frac{1}{k^3} > 0$.
Assim, dado qualquer $c > 0$, temos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\min_{z \in F} \|x_k - z\| = \frac{1}{k} > c\left(\frac{1}{k^3}\right) = c\left(\max\{0, f_1(x_k), f_2(x_k), f_3(x_k), f_4(x_k)\}\right).$$

Portanto, o ponto $w = (0,0)$ não satisfaz a condição do limitante do erro. Veja na Figura 3.5.

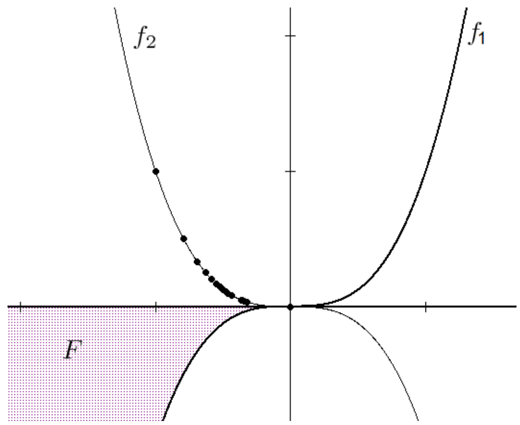


Figura 3.5: Construção das seqüencias $\{x_k\}$ de pontos inviáveis

3.10 Demonstração CRSC implica CPG

Teorema 3.39. *Se $x \in F$ satisfaz CRSC, então x satisfaz a CPG.*

Demonstração. Seja $Jf(y) = \{\nabla f_\ell(y)\}_{\ell \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}}$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$. Pelo Corolário 3.33, temos que existe $(\mathcal{I}', \mathcal{J}_+)$ par gerador PLI do conjunto $\text{span}_+(\mathcal{I}, \mathcal{A}(x), Jf(x))$ onde $\mathcal{I}'$ é o conjunto de índices de alguma base de $\text{span}\{\nabla f_\ell(x)\}_{\ell \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}_-}$. Agora, usando o Teorema 3.2, temos que existe $V_1(x)$ uma vizinhança de x tal que $\{\nabla f_\ell(y)\}_{\ell \in \mathcal{I}'}$ é LI $\forall y \in V_1(x)$. Como x satisfaz CRSC, então o conjunto $\{\nabla f_\ell(y)\}_{\ell \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}_-}$ tem posto constante em $V(x) \subset V_1(x)$. Portanto,

$$\text{span}\{\nabla f_\ell(y)\}_{\ell \in \mathcal{I}'} = \text{span}\{\nabla f_\ell(y)\}_{\ell \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}_-} \;\; \forall y \in V(x).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\operatorname{span}_+(\mathcal{I},\mathcal{A}(x);Jf(y)) &= \left\{ z\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, z=\sum_{i\in\mathcal{I}}\lambda_i\nabla f_i(y)+\sum_{j\in\mathcal{A}(x)}\mu_j\nabla f_j(y),\ \mu_j\geq 0\right\} \\
&= \left\{ z\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, z=\sum_{i\in\mathcal{I}}\lambda_i\nabla f_i(y)+\sum_{j\in\mathcal{J}_-}\mu_j\nabla f_j(y)+\sum_{j\in\mathcal{J}_+}\mu_j\nabla f_j(y),\ \mu_j\geq 0\right\} \\
&= \left\{ z\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, z=\sum_{i\in\mathcal{I}'}\overline{\lambda}_i\nabla f_i(y)+\sum_{j\in\mathcal{J}_+}\mu_j\nabla f_j(y),\ \mu_j\geq 0\right\} \\
&= \operatorname{span}_+(\mathcal{I}',\mathcal{J}_+;Jf(y))\ \ \forall y\in V(x).
\end{aligned}$$

□

3.11 Demostração RCPLD implica CRSC

Teorema 3.40. *Se $x\in F$ satisfaz RCPLD, então x satisfaz a CRSC.*

Demonstração. Seja $Jf(y)=\{\nabla f_\ell(y)\}_{\ell\in\mathcal{I}\cup\mathcal{J}}$ $\forall y\in\mathbb{R}^n$. Se $\mathcal{J}_-=\emptyset$ e como x satisfaz RCPLD, então o conjunto $\{\nabla f_\ell(y)\}_{\ell\in\mathcal{I}=\mathcal{I}\cup\mathcal{J}_-}$ tem posto constante uma vizinhança de x. Se $\mathcal{J}_-\neq\emptyset$, pela hipótese de que x satisfaz RCPLD e do Teorema 3.34, existe $\mathcal{I}'$ um subconjunto de índices de alguma base de $\operatorname{span}\{\nabla f_\ell(x)\}_{\ell\in\mathcal{I}}$ de tal forma que $\operatorname{span}_+(\mathcal{I}',\mathcal{J}_-;Jf(x))$ é um subespaço. Então,

$$\operatorname{span}_+(\mathcal{I},\mathcal{J}_-;Jf(x))=\operatorname{span}_+(\mathcal{I}',\mathcal{J}_-;Jf(x))=\operatorname{span}\{\nabla f_\ell(x)\}_{\ell\in\mathcal{I}'\cup\mathcal{J}_-}.$$

Por outro lado, da definição $\mathcal{J}_-$ seus elementos ℓ verificam

$$-\nabla f_\ell(x)=\sum_{i\in\mathcal{I}'}\lambda_i\nabla f_i(x)+\sum_{j\in\mathcal{J}_-}\mu_j\nabla f_j(x).$$

Agora, aplicando o Lema 3.22 no conjunto $\{\nabla f_k(x)\}_{k\in\mathcal{I}'\cup\mathcal{J}_-}$, temos que existe $\mathcal{K}\subset\mathcal{J}_-$ e escalares $\mu_j^{'}>0$ $\forall j\in\mathcal{K}$ tais que

$$-\nabla f_\ell(x)=\sum_{i\in\mathcal{I}'}\lambda_i'\nabla f_i(x)+\sum_{j\in\mathcal{K}}\mu_j'\nabla f_j(x),$$

em que $\{\nabla f_k(x)\}_{k\in\mathcal{I}'\cup\mathcal{K}}$ é LI. Assim, pelo Teorema 3.2 existe $\widetilde{V}_\ell(x)$ uma vizinhança de x tal que $\{\nabla f_k(y)\}_{k\in\mathcal{I}'\cup\mathcal{K}}$ é LI $\forall y\in\widetilde{V}_\ell(x)$.

Do fato que x satisfaz RCPLD e tomando $V_\ell(x) = \widetilde{V}_\ell(x) \cap V(x)$, $V(x)$ vizinhança da definição da RCPLD, temos que

$$\{\nabla f_i(y)\}_{i\in\mathcal{I}'} \cup \{\nabla f_j(y)\}_{j\in\mathcal{K}\cup\{\ell\}} \text{ é PLD } \forall y \in V_\ell(x).$$

Deste modo, dado $y \in V_\ell(x)$ existe um escalar $\mu_\ell(y) > 0$ tal que

$$0 = \sum_{i\in\mathcal{I}'} \overline{\lambda}_i \nabla f_i(y) + \sum_{j\in\mathcal{K}} \overline{\mu}_j \nabla f_j(y) + \mu_\ell(y)\nabla f_\ell(y).$$

Isso implica que

$$-\nabla f_\ell(y) = \sum_{i\in\mathcal{I}'} \frac{\overline{\lambda}_i}{\mu_\ell(y)} \nabla f_i(y) + \sum_{j\in\mathcal{K}} \frac{\overline{\mu}_j}{\mu_\ell(y)} \nabla f_j(y).$$

Assim, $-\nabla f_\ell(y) \in \operatorname{span}_+(\mathcal{I}', \mathcal{J}_-; Jf(y))$, $\forall y \in V_\ell(x)$. Tomando $\widehat{V}(x) = \bigcap_{\ell\in\mathcal{J}_-} V_\ell(x)$, obtemos que $-\nabla f_\ell(y) \in \operatorname{span}_+(\mathcal{I}', \mathcal{J}_-; Jf(y))$ $\forall \ell \in \mathcal{J}_-$, $\forall y \in \widehat{V}(x)$.
Logo, $\operatorname{span}\{\nabla f_k(y)\}_{k\in\mathcal{I}'\cup\mathcal{J}_-} = \operatorname{span}_+(\mathcal{I}', \mathcal{J}_-; J(y))$ $\forall y \in \widehat{V}(x)$, quer dizer, o conjunto $\operatorname{span}_+(\mathcal{I}', \mathcal{J}_-; Jf(y))$ é um subespaço $\forall y \in \widehat{V}(x)$.

Além disso pelo Teorema 3.3, temos que existe $V'(x)$ uma vizinhança contida $\widehat{V}(x)$ tal que a dimensão de $\operatorname{span}_+(\mathcal{I}', \mathcal{J}_-; Jf(y))$ é maior ou igual que a dimensão de $\operatorname{span}_+(\mathcal{I}', \mathcal{J}_-; Jf(x))$.

Vamos mostrar que existe uma vizinhança de x contida em $V'(x)$ tal que a dimensão de $\operatorname{span}_+(\mathcal{I}', \mathcal{J}_-; Jf(y))$ é menor ou igual que a dimensão de $\operatorname{span}_+(\mathcal{I}', \mathcal{J}_-; Jf(x))$ para todo y que pertence a essa vizinhança.

Para isto, do Teorema 2.5 item (iv) para o conjunto LI $\{\nabla f_k(y)\}_{k\in\mathcal{I}'}$, temos que

$$\operatorname{span}\{\nabla f_k(y)\}_{k\in\mathcal{I}'} = \operatorname{pos}[\{\nabla f_k(y)\}_{k\in\mathcal{I}'} \cup \{-\nabla f_k(y)\}_{k\in\mathcal{I}'}].$$

Desse modo,

$$\operatorname{span}_+(\mathcal{I}', \mathcal{J}_-; Jf(y)) = \operatorname{pos}\left[\{\nabla f_\ell(y)\}_{\ell\in\mathcal{I}'} \cup \{-\nabla f_\ell(y)\}_{\ell\in\mathcal{I}'} \cup \{\nabla f_j(y)\}_{j\in\mathcal{J}_-}\right] \quad \forall y \in \widehat{V}(x).$$

Dados $\mathcal{I}' = \{i_1, \cdots, i_{\widetilde{m}}\}$, $\mathcal{J}_- = \{j_1, \cdots, j_{n_-}\}$ em que $\widetilde{m} = \operatorname{card}\mathcal{I}'$ e $n_- = \operatorname{card}\mathcal{J}_-$, definimos

$$v_\ell(y) = \nabla f_{i_\ell}(y),\ \ell = 1, \ldots, \tilde{m},$$

$$v_{\tilde{m}+\ell}(y) = -\nabla f_{i_\ell}(y),\ \ell = 1, \ldots, \tilde{m},$$

$$v_{2\tilde{m}+\ell}(y) = \nabla f_{j_\ell}(y),\ \ell = 1, \ldots, n_-.$$

$$B = \{1, 2, \ldots, 2\tilde{m} + n_-\}.$$

Assim,

$$\operatorname{span}_+(\mathcal{I}', \mathcal{J}_-; Jf(y)) = \operatorname{pos} B(y),\ \ \forall y \in \widehat{V}(x),$$

em que $B(y) = \{v_\ell(y) \,|\, \ell \in B\}$. Note que,

$$\operatorname{span}_+(\mathcal{I}', \mathcal{J}_-; Jf(y)) = \operatorname{pos} B(y) = \operatorname{span} B(y),\ \ \forall y \in \widehat{V}(x),$$

pois $\operatorname{span}_+(\mathcal{I}', \mathcal{J}_-; Jf(y))$ é um subespaço.

Se $B(x)$ é positiva independente, então $B(x)$ é uma base positiva para $\operatorname{span}_+(\mathcal{I}', \mathcal{J}_-; Jf(x))$. Caso contrário, temos que existe $v_\ell(x) \in B(x)$ tal que $v_\ell(x) \in \operatorname{pos}(B(x) \setminus \{v_\ell(x)\})$ ou $v_\ell(x) = 0$. Logo, para ambos casos temos que

$$\operatorname{pos} B(x) = \operatorname{pos}(B(x) \setminus \{v_\ell(x)\}). \tag{3.14}$$

Portanto, $\operatorname{span}_+(\mathcal{I}', \mathcal{J}_-; Jf(x)) = \operatorname{pos}[B(x) \setminus \{v_\ell(x)\}]$. Por outro lado, como $v_\ell(x) \in B(x)$ $(v_\ell(x) = 0)$, então $-v_\ell(x) \in \operatorname{pos} B(x) = \operatorname{pos}(B(x) \setminus \{v_\ell(x)\})$, pois $\operatorname{pos} B(x)$ é um subespaço. Deste modo existem escalares, não todos nulos, $\alpha_i \geq 0$ $\forall i \in (B \setminus \{\ell\})$ tais que

$$-v_\ell(x) = \sum_{i \in B \setminus \{\ell\}} \alpha_i v_i(x), \tag{3.15}$$

usando o Lema 3.22 em (3.15), obtemos que

$$-v_\ell(x) = \sum_{i \in \widetilde{B}} \alpha_i v_i(x),\ \ \alpha_i > 0,\ \ \forall i \in \widetilde{B} \subset (B \setminus \{\ell\}),$$

onde $\{v_i(x) \,|\, i \in \widetilde{B}\}$ é LI. Do Teorema 3.2 ,temos que existe $\widetilde{N}_\ell(x)$ uma vizinhança de x tal que $\{v_i(y) \,|\, i \in \widetilde{B}\}$ é LI $\forall y \in \widetilde{N}_\ell(x)$. Como x satisfaz RCPLD tomamos $N_\ell(x) = \widetilde{N}_\ell(x) \cap \widehat{V}(x)$, tal que $\{v_i(y) \,|\, i \in \widetilde{B} \cup \{\ell\}\}$ é PLD $\ \forall y \in N_\ell(x)$.

Se $\ell \in \{2\tilde{m}+1, \cdots, 2\tilde{m}+n_-\}$ $(\ell \in \{1, \cdots, 2\tilde{m}\})$, então dado $y \in N_\ell(x)$ existe um escalar $\alpha_\ell(y) > 0$ $(\alpha_\ell(y) \neq 0)$ tal que

$$0 = \sum_{i \in \widetilde{B}} \overline{\alpha}_i v_i(y) + \alpha_\ell(y) v_\ell(y),\ \ \overline{\alpha}_i \in \mathbb{R}\ \forall i,$$

então

$$-v_\ell(y) = \sum_{i \in \widetilde{B}} \frac{\overline{\alpha}_i}{\alpha_\ell(y)} v_i(y).$$

Portanto, $\operatorname{span} B(y) = \operatorname{span}\{B(y) \setminus \{v_\ell(y)\}\}$, $\forall y \in N_\ell(x)$. Assim,

$$\operatorname{span}_+(\mathcal{I}', \mathcal{J}_-; Jf(y)) = \operatorname{span}\{B(y) \setminus \{v_\ell(y)\}\},\ \forall y \in N_\ell(x).$$

Fazendo o mesmo processo para um número finito de passos e tirando os índices dos vetores obtidos neste processo de B, obtemos um conjunto $\widehat{B}$ tal que

1. $\widehat{B}(x) = \{v_\ell(x) \,|\, \ell \in \widehat{B}\}$ é uma base positiva para o subespaço $\operatorname{span}_+(\mathcal{I}', \mathcal{J}_-; Jf(x))$.
2. Para todo $y \in \widehat{N}(x) = \cap_{\ell \in (B \setminus \widehat{B})} N_\ell(x)$ o conjunto $\operatorname{span}_+(\mathcal{I}', \mathcal{J}_-; Jf(y))$ é o subespaço gerado por $\widehat{B}(y) = \{v_\ell(y) \,|\, \ell \in \widehat{B}\}$.

Pelo fato de $\widehat{B}(x)$ ser uma base positiva do subespaço $\operatorname{span}_+(\mathcal{I}', \mathcal{J}_-; Jf(x))$ e usando o Teorema 2.24, temos que existe uma partição $\mathcal{P} = \{\widehat{B}_1, \cdots, \widehat{B}_k\}$ de $\widehat{B}$ tal que $\operatorname{pos}\{v_\ell(x)\}_{\ell \in \widehat{B}_1 \cup \cdots \cup \widehat{B}_j}$ é um subespaço de $\operatorname{span}_+(\mathcal{I}', \mathcal{J}_-; Jf(x))$ com dimensão $\left(\sum_{i=1}^{j} \operatorname{card} \widehat{B}_i\right) - j$ para cada $j = 1, 2, \cdots, k$.
Para $j = 1$, então $\operatorname{pos}\{v_\ell(x)\}_{\ell \in \widehat{B}_1}$ é um subespaço minimal. Se tiramos o vetor $v_{\ell_1}(x)$ de $\{v_\ell(x) \,|\, \ell \in \widehat{B}_1\}$, os outros vetores são LI. Por outro lado usando o Teorema 2.6 item (ii), temos escalares, não todos nulos, $\beta_i \geq 0$ para $i \in \widehat{B}_1 \setminus \{\ell_1\}$ tais que

$$-v_{\ell_1}(x) = \sum_{i \in \widehat{B}_1 \setminus \{\ell_1\}} \beta_i v_i(x), \tag{3.16}$$

em que $\{v_i(x) \,|\, i \in \widehat{B}_1 \setminus \{\ell_1\}\}$ é LI. Além disso, pelo Teorema 3.2, existe $\widetilde{S}_{\ell_1}(x)$ uma vizinhança de x tal que $\{v_i(y) \,|\, i \in \widehat{B}_1 \setminus \{\ell_1\}\}$ é LI $\quad \forall y \in \widetilde{S}_{\ell_1}(x)$. Agora, da hipótese que x satisfaz RCPLD e tomando $S_{\ell_1}(x) = \widetilde{S}_{\ell_1}(x) \cap \widehat{N}(x)$, temos que $\{v_i(y) \,|\, i \in \widehat{B}_1\}$ é PLD $\forall y \in S_{\ell_1}(x)$. Portanto,

$$-v_{\ell_1}(y) \in \operatorname{span}\{\widehat{B}_1(y)\},\ \forall y \in S_{\ell_1}(x).$$

Logo, $\operatorname{span} \widehat{B}_1(y) = \operatorname{span}\{\widehat{B}_1(y) \setminus \{v_{\ell_1}(y)\}\}\ \forall y \in S_{\ell_1}(x)$.
Para $j = 2$, o subespaço $\operatorname{pos}\{v_\ell(x)\}_{\ell \in \widehat{B}_1 \cup \widehat{B}_2}$ tem dimensão $\operatorname{card} \widehat{B}_1 + \operatorname{card} \widehat{B}_2 - 2$. Considerando (3.16), temos que

$$-v_{\ell_1}(x) \in \operatorname{pos} \widehat{B}_1(x) \subset \operatorname{pos}\{v_i(x)\}_{i \in \widehat{B}_1 \cup \widehat{B}_2},$$

então

$$-v_{\ell_1}(x) \in \operatorname{pos}\{v_i(x)\}_{i \in \widehat{B}_1 \cup \widehat{B}_2} = \operatorname{span}\{v_i(x)\}_{i \in \widehat{B}_1 \cup \widehat{B}_2}.$$

Assim, $\{v_i(x) \,|\, i \in \widehat{B}_1 \cup \widehat{B}_2,\, i \notin \ell_1\}$ gera $\mathrm{pos}\{v_i(x)\}_{i\in\widehat{B}_1\cup\widehat{B}_2}$. Além disso, existe $v_{\ell_2}(x) \in \{v_i(x) \,|\, i \in \widehat{B}_2\}$ tal que $\{v_i(x) \,|\, i \in \widehat{B}_1 \cup \widehat{B}_2,\, i \notin \{\ell_1, \ell_2\}\}$ é uma base linear de $\mathrm{pos}\{v_i(x)\}_{i\in\widehat{B}_1\cup\widehat{B}_2}$, pois a dimensão de $\mathrm{pos}\{v_i(x)\}_{i\in\widehat{B}_1\cup\widehat{B}_2}$ é $\mathrm{card}\, \widehat{B}_1 + \mathrm{card}\, \widehat{B}_2 - 2$. Por outro lado pelo Teorema 2.6 item (ii), temos que existem escalares, não todos nulos, $\beta_i \geq 0$ para $i \in \widehat{B}_1 \cup \widehat{B}_2 \setminus \{\ell_2\}$ tais que

$$-v_{\ell_2}(x) = \sum_{i\in(\widehat{B}_1\cup\widehat{B}_2\setminus\{\ell_2\})} \beta_i v_i(x).$$

Pelo Lema 3.22, obtemos que

$$-v_{\ell_2}(x) = \sum_{i\in D} \beta_i v_i(x),\;\; \beta_i > 0,\, \forall i \in D \subset \widehat{B}_1 \cup \widehat{B}_2 \setminus \{\ell_2\},$$

onde $\{v_i(x) \,|\, i \in D\}$ é LI. Do Teorema 3.2, então existe $\widetilde{S}_{\ell_2}(x)$ uma vizinhança de x tal que $\{v_i(y) \,|\, i \in D\}$ é LI $\forall y \in \widetilde{S}_{\ell_2}(x)$. Pelo fato que x satisfaz a RCPLD e tomando $S_{\ell_2}(x) = \widetilde{S}_{\ell_2}(x) \cap S_{\ell_1}(x)$, temos que $\{v_i(y) \,|\, i \in D \cup \{\ell_2\}\}$ é PLD $\;\forall y \in S_{\ell_2}(x)$. Portanto,

$$-v_{\ell_2}(y) = \mathrm{span}\{\widehat{B}_1(y) \cup \widehat{B}_2(y)\} \;\forall y \in S_{\ell_2}(x).$$

Logo, $\mathrm{span}[\widehat{B}_1(y) \cup \widehat{B}_2(y)] = \mathrm{span}\{v_i(y) \,|\, i \in \widehat{B}_1 \cup \widehat{B}_2,\, i \notin \{\ell_1, \ell_2\}\} \;\forall y \in S_{\ell_2}(x)$.
Este processo pode ser levado k vezes e no final concluímos que existe $S(x) = \cap_{i=1}^{k} S_{\ell_i}(x)$ uma vizinhança de x tal que os k vetores não são necessários para gerar o espaço vetorial $\mathrm{span}_+(\mathcal{I}', J_-; Jf(y))$, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathrm{span}_+(\mathcal{I}', J_-; Jf(y)) &= \mathrm{span}[\hat{B}_1(y) \cup \cdots \cup \hat{B}_k(y)] \\ = \mathrm{span}[\hat{B}_1(y) \cup \cdots \cup \hat{B}_k(y) &\setminus \{v_{\ell_1}(y) \cup \cdots \cup v_{\ell_k}(y)\}] \;\forall y \in S(x). \end{aligned}$$

Assim, a dimensão de $\mathrm{span}_+(\mathcal{I}', J_-; Jf(y))$ é menor ou igual a $\mathrm{card}\, \widehat{B}(y) - k = \mathrm{card}\, \widehat{B} - k = \dim[\mathrm{span}_+(\mathcal{I}', J_-; Jf(x))]$ para cada $y \in S(x)$. Portanto, tomando $E(x) = S(x) \cap V'(x)$ uma vizinhança de x, obtemos que os espaços vetoriais $\mathrm{span}_+(\mathcal{I}', J_-; Jf(y))$ e $\mathrm{span}_+(\mathcal{I}', J_-; Jf(x))$ tem a mesma dimensão para cada $y \in E(x)$. Desse modo,

$$\{\nabla f_\ell(y) \,|\, \ell \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}_-\} \text{ tem posto constante para cada } y \in E(x).$$

$\square$

Finalmente, apresentaremos a demonstração da CPG implica a condição de Abadie usando os seguintes lemas.

Lema 3.41. *Seja $x \in F$ que está em conformidade com a condição de qualificação de Mangasariam Fromovitz, isto é, o conjunto $\{\nabla f_i(x)\}_{i \in \mathcal{I}}$ é linearmente independente e existe uma direção $0 \neq d \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\nabla f_i(x)^T d = 0,\, i \in \mathcal{I}, \quad \nabla f_i(x)^T d < 0,\; i \in \mathcal{A}(x).$$

Então, existe um escalar $T > 0$ e um arco continuamente diferenciável $\alpha : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= x, \\ \dot{\alpha}(0) &= d, \\ f_i(\alpha(t)) &= 0,\, \forall t \in [0, T]\, i \in \mathcal{I}, \\ \nabla f_i(\alpha(t))^T \dot{\alpha}(t) &= 0\, \forall t \in [0, T],\, i \in \mathcal{I}, \\ f_j(\alpha(t)) &< 0,\; \forall t \in (0, T]\, j \in \mathcal{J}, \\ \nabla f_j(\alpha(t))^T \dot{\alpha}(t) &< 0\, \forall t \in [0, T],\, j \in \mathcal{J}, \end{aligned}$$

(Para a prova, veja o Teorema 4.3.1 [6]).

Lema 3.42. *Sejam x um ponto viável para (PNL) em que CPG é verdadeira e $(\mathcal{I}', \mathcal{J}_+)$ o par gerador PLI associado. Então, existe $0 \neq d \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\nabla f_i(x)^T d = 0,\, i \in \mathcal{I}', \;\; \nabla f_j(x)^T d < 0,\, j \in \mathcal{J}_+.$$

Além disso, para qualquer tal d, existe um escalar $T > 0$ e um arco continuamente diferenciável $\alpha : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\alpha(0) = x, \tag{3.17}$$
$$\dot{\alpha}(0) = d, \tag{3.18}$$
$$f_i(\alpha(t)) = 0,\; \forall t \in [0, T],\; i \in \mathcal{I}, \tag{3.19}$$
$$f_j(\alpha(t)) \leq 0,\; \forall t \in (0, T],\; j \in \mathcal{J}. \tag{3.20}$$

Demonstração. Da hipótese $(\mathcal{I}', \mathcal{J}_+)$ é PLI, considerando o subconjunto

$$\widehat{F} = \{x \mid f_i(x) = 0,\, i \in \mathcal{I}',\, f_j(x) \leq 0,\, j \in \mathcal{J}_+\}$$

do conjunto viável F e do Teorema 3.6, temos que existe um vetor d que satisfaz a condição de MFCQ em x. Agora, pelo Lema 3.41, existe um escalar $T > 0$ e $\alpha : [0, T] \to$

$\mathbb{R}^n$ um arco continuamente diferenciável. Tomamos $0 < T' \leq T$ de tal maneira que $\alpha(t) \in V(x)$, $\forall t \in [0, T']$ em que $V(x)$ é a vizinhança da definição da CPG no ponto x, então

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= x; \\ \dot{\alpha}(0) &= d; \\ f_i(\alpha(t)) &= 0,\ \forall t \in [0, T'],\ i \in \mathcal{I}'; \\ \nabla f_i(\alpha(t))^T \dot{\alpha}(t) &= 0,\ \forall t \in [0, T'],\ i \in \mathcal{I}'; \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} f_j(\alpha(t)) &< 0,\ \ \forall t \in (0, T'],\ j \in \mathcal{J}_+, \\ \nabla f_j(\alpha(t))^T \dot{\alpha}(t) &< 0,\ \forall t \in [0, T'],\ j \in \mathcal{J}_+. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Vamos mostrar que os índices $\ell \in (\mathcal{I} \cup \mathcal{J}_-) \setminus \mathcal{I}'$ também satisfazem as restrições (3.19) ou (3.20).
Pela definição da CPG em x, temos que qualquer $\nabla f_\ell(y)$, $\ell \in (\mathcal{I} \cup \mathcal{J}_-) \setminus \mathcal{I}'$, pode ser gerado positivamente pelo par de índices $(\mathcal{I}', \mathcal{J}_+), \forall y \in V(x)$. Então, existem escalares $\lambda_i(y)$, $i \in \mathcal{I}'$ e $\mu_j(y) \geq 0, j \in \mathcal{J}_+$ tais que

$$\nabla f_\ell(y) = \sum_{i \in \mathcal{I}'} \lambda_i(y) \nabla f_i(y) + \sum_{j \in \mathcal{J}_+} \mu_j(y) \nabla f_j(y). \tag{3.23}$$

Agora definimos $\varphi_\ell(t) = f_\ell(\alpha(t))$, então

$$\varphi'_\ell(t) = \nabla f_\ell(\alpha(t))' \dot{\alpha}(t).$$

De de (3.23), temos que

$$\varphi'_\ell(t) = \sum_{i \in \mathcal{I}'} \lambda_i(\alpha(t)) \nabla f_i(x)^T \dot{\alpha}(t) + \sum_{j \in \mathcal{J}_+} \mu_j(\alpha(t)) \nabla f_j(\alpha(t))^T \dot{\alpha}(t).$$

De (3.21) e (3.22), temos que

$$\varphi'_\ell(t) \leq 0,\ \text{então}\ f_\ell(\alpha(t)) \leq f_\ell(\alpha(0)) = f_\ell(x) = 0. \tag{3.24}$$

Se $\ell \in \mathcal{J}_-$ e $\ell \notin \mathcal{I}'$ e de 3.24, então (3.20) é satisfeita.
Se $\ell \in \mathcal{I}$ e $\ell \notin \mathcal{I}'$ e pela definição da CPG em x, temos que
$-\nabla f_\ell(y) \in \text{span}_+(\mathcal{I}, \mathcal{A}(x); Jf(y)) \subset \text{span}_+(\mathcal{I}', \mathcal{J}_+; Jf(y)), \forall y \in V(x)$. Podemos, então,

proceder como acima para ver que $-\varphi_\ell'(t) \leq 0$, implica $-f_\ell(\alpha(t)) \leq -f_\ell(\alpha(0)) = -f_\ell(x) = 0$, assim

$$f_\ell(\alpha(t)) \geq 0 \;\; \forall \ell \in (\mathcal{I} \setminus \mathcal{I}') \tag{3.25}$$

De (3.24) e (3.25), concluímos que $f_\ell(\alpha(t)) = 0, \forall \ell \in \mathcal{I}$ e $\ell \notin \mathcal{I}'$. $\square$

Teorema 3.43. *Condição de qualificação CPG em x implica a condição de qualificação de Abadie em x.*

Demonstração. Vamos mostrar que $\mathcal{F}(x) \subset \mathcal{T}(x)$. Dado $d \in \mathcal{F}(x)$ e $\bar{d}$ que satisfaz o Lema 3.42. Então, dado $\varepsilon > 0$, temos que $d + \varepsilon\bar{d}$ satisfaz a condição do Lema 3.42, devido

$$\nabla f_i(x)^T(d + \varepsilon\bar{d}) = \nabla f_i(x)^T d + \varepsilon \nabla f_i(x)^T \bar{d} = 0, \;\; \forall i \in \mathcal{I}';$$
$$\nabla f_j(x)^T(d + \varepsilon\bar{d}) = \nabla f_j(x)^T d + \varepsilon \nabla f_j(x)^T \bar{d} < 0, \;\; \forall j \in \mathcal{J}_+.$$

Portanto, existe $T > 0$ e arco viável continuamente diferenciável $\alpha : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\alpha(0) = x, \;\; \dot{\alpha}(0) = d + \varepsilon\bar{d}.$$

Segue que $d + \varepsilon\bar{d}$ pertence ao cone tangente do conjunto viável em x, além disso, como o cone é fechado, então d também está no cone tangente de x. $\square$

Na Figura 3.6 ilustramos as relações entre as diferentes condições de qualificação que foram mencionadas neste trabalho.

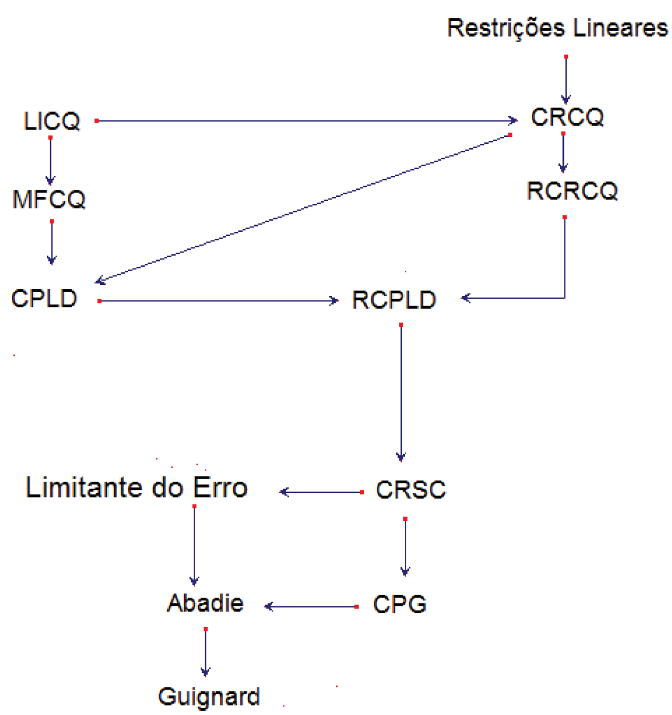


Figura 3.6: Relações entre as diferentes condições de qualificação

Conclusão

Nesta dissertação, apresentamos a teoria das bases positivas de um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ para facilitar a compreensão da prova RCPLD implica CRSC, além disso observamos que as propriedades das bases positivas de um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ não são semelhantes às propriedades das bases lineares como:

- A cardinalidade das bases positivas de um subespaço $\mathcal{V}$ não são iguais;
- Nem todos os subconjuntos de uma base positiva de $\mathcal{V}$ são bases positivas do menor subespaço que os contém;
- A representação minimal de um elemento de $\mathcal{V}$, subespaço gerado por uma base positiva, nem sempre é única;
- Um subespaço $\mathcal{V}$, gerado por uma base positiva não minimal, nem sempre pode ser particionado em uma soma direta de subespaço minimais, mas usando a propriedade da projeção linear de elementos de uma base positiva, conseguimos a partição.

Além disso, fizemos alguns exemplos e contra-exemplos para estabelecer as relações entre as condições de qualificação.

Referências Bibliográficas

[1] R. Andreani, E G. Birgin, J. M. Martinez, and M. L. Schuverdt. Augmented lagrangian methods under the constant positive linear dependence constraint qualiffication. Mathematical Programming, 111(1-2):5-32, 2008.

[2] R. Andreani, J. M. Martínez, e M. L. Schuverdt. On the relation between constant positive linear dependence condition and quasinormality constraint-qualification. Journal of Optimization Theory and Applications, 125(2):473-483, 2005.

[3] R. Andreani, G. Haeser, M. Laura Schuverdt, P. J. Silva. A relaxed constant positive linear dependence constraint qualification and applications. Mathematical programming, 135(1-2):255-273, 2012.

[4] R. Andreani, G. Haeser, M.L. Schuverdt, J.S. Silva. Two new weak constraint qualification and applications. SIAM J. Optim. 22(3): 1109–1135, 2012.

[5] R. Andreani, E.G. Birgin, J.M. Martínez, e M.L. Schuverdt. On augmented lagrangian methods with general lower-level constraints. SIAM Journal on Optimization, 18:1286-1309, 2007.

[6] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, e C. M. Shetty. Nonlinear programming: theory and algorithms. John Wiley and Sons, 2006.

[7] D. P. Bertsekas. Nonlinear programming. Athena Scientific, Belmont Mass. 2nd. edition, 1999.

[8] D. P. Bertsekas. Convex optimization theory. Athena Scientific, 2009.

[9] C. Davis, Theory of positive linear dependence, Amer. J. Math. ,76:733-746, 1954.

[10] M. Guinard. Generalized Kuhn-Tucker conditions for mathematical programming problems in a Banach space. SIAM Journal on Control, 7(2):232-241, 1969.

[11] F. J. Gould and J. W. Tolle. A necessary and sufficient qualification for constrained optimization. SIAM Journal on Applied Mathematics, 20(2):164-172, 1971.

[12] R. Janin. Directional derivative of the marginal function in nonlinear programming, 110-126. Springer Berlin Heidelberg, 1984.

[13] L. Minchenko e S. Stakhovski. On relaxed constant rank regularity condition in mathematical programming. Optimization, 60(4):429-440, 2011.

[14] R. L. McKinney, Positive bases for linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc. ,103(1):131-148, 1962.

[15] J. Nocedal e S. J. Wright. Numerical optimization. Springer, New York, 2nd ed. ,2006.

[16] L. Qi e Z. Wei. On the Constant positive linear dependence condition and its application to SPQ methods. SIAM Journal on Optimization, 10(4):963-981, 2000.

[17] J. R. Reay, Generalizations of a theorem of Caratheodory, Amer. Math. Soc. Memoir, No. 54, pp. 1–50, 1965.

[18] J. R. Reay. Unique Minimal Representations with Positive Bases. The American Mathematical Monthly, 73(3):253-261, 1966.

[19] M. L. Schuverdt. Métodos de lagrangiano aumentado com convergência utilizando a condição de dependência linear positiva constante, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2006.