Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática

A-Identidades Polinomiais em Álgebras Associativas

por

Dimas José Gonçalves *
Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Plamen Emilov Koshlukov

*Este trabalho contou com apoio financeiro da UNICAMP.

A-Identidades Polinomiais em Álgebras Associativas

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Dimas José Gonçalves** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 17 de março de 2009.

P Koshlukov

Prof. Dr. Plamen Emilov Koshlukov

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Plamen Emilov Koshlukov
Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura
Prof. Dr. Norai Romeu Rocco
Prof. Dr. Alexei Nikolaevich Krassilnikov
Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a 2116

Gonçalves, Dimas José

G586a A-identidades polinomiais em álgebras associativas / Dimas José Gonçalves -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2009.

Orientador : Plamen Emilov Koshlukov

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. PI-álgebra. 2. Identidade polinomial. 3. A-identidade polinomial. 4. Grassmann, Álgebra de. 5. Matrizes triangulares superiores. I. Koshlukov, Plamen Emilov. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: A-Polynomial identities in associative algebras.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. PI-algebra. 2. Polynomial identity. 3. A-polynomial identity. 4. Grassmann algebra. 5. Upper triangular matrices.

Área de concentração: Álgebra

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora:

Prof. Dr. Plamen Emilov Koshlukov (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Norai Romeu Rocco (UnB)
Prof. Dr. Alexei Nikolaevich Krassilnikov (UnB)
Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho (IME-USP)

Data da defesa: 27/02/2009

Programa de pós-graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 27 de fevereiro de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV

Prof. (a). Dr (a). ADRIANO ADREGA DE MOURA

Prof. (a). Dr (a). NORAI ROMEU ROCCO

Prof. (a). Dr (a). ALEXEI NIKOLAEVICH KRASSILNIKOV

Prof. (a) Dr. (a) FLAVIO ULHOA COELHO

Agradecimentos

Quero agradecer aos professores e funcionários do IMECC pelo profissionalismo e pelo bem estar fornecido ao longo do meu doutorado.

No meu primeiro ano de doutorado fiz uma matéria com o Plamen. Gostei tanto, que fui em quase todas as aulas. Com um jeito calmo e até mesmo engraçado de ser, achei que este deveria ser o meu orientador. Fui abençoado, pois trabalhei com um grande homem e não apenas com um grande matemático. Agradeço pela paciência, amizade, conselhos... Obrigado.

Os dias passam e conhecemos várias pessoas em nossas vidas. Conheci muitos que hoje se tornaram meus amigos. Amigos de verdade, que estão ao seu lado não apenas para sorrir mas também para aconselhar, para dar aquela palavra que você estava precisando ouvir. Agradeço a todos os meus amigos e em especial ao Zé Antonim e ao Alonso, afinal de contas, não é fácil escutar alguém contando tantas piadas sem graça. Brincadeira.

Gostaria de citar alguns nomes nesta tese: Mohamed, Cláudia, Soraya, Alexandre, Rosana e sobrinhos. Quero agradecer a Deus por ter colocado cada um desses em minha vida, cada um com seu jeito "especial de ser". Agradeço a vocês pela força, pela compreensão, pelos momentos de alegria e pelos momentos de vibração. Obrigado por tudo.

Pai e mãe, vocês são maravilhosos. É muita luta, é muito choro, é muito amor para educar um filho e torná-lo um homem. Vocês são exemplos e com certeza a maior lição que vocês poderiam ter deixado para **nós** é acreditar em Deus. Escrevo **nós**, pois incluo o Josmar e a Larissa que são os irmãos que eu sempre amarei e que sempre farão parte da minha vida. Obrigado.

Tudo começou com uma grande amizade e hoje estamos casados. Sim, isso ocorreu pois tudo o que eu buscava em uma mulher, encontrava em você Tatiana. Amorosa, sabe com o seu jeitinho transformar as mais diversas situações em alegria. Eu te amo e obrigado por estar sempre ao meu lado.

E por fim agradeço a Deus POR TUDO O QUE EU SOU.

Resumo

Nesta tese estudamos identidades polinomiais em álgebras associativas. Mais precisamente, estudamos as A-identidades satisfeitas por algumas classes importantes de álgebras. O primeiro resultado principal da tese consiste em uma descrição completa das A-identidades satisfeitas pela álgebra de Grassmann sobre um corpo algebricamente fechado e de característica 0. Desta maneira respondemos em afirmativo a uma conjetura devida a Henke e Regev. Em seguida estudamos as A-identidades satisfeitas pela álgebra das matrizes triangulares superiores. Obtemos uma cota inferior para o grau mínimo de uma A-identidade satisfeita por tais álgebras. Como consequência obtemos uma resposta negativa a uma outra conjetura de Henke e Regev. Além disso, descrevemos as A-identidades de grau 5, da álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem 2, e obtemos os graus mínimos de A-identidades satisfeitas por tais álgebras de ordem 3 e 4.

Abstract

In this PhD thesis we study polynomial identities in associative algebras. More precisely we study the A-identities for several important classes of algebras. The first main result of the thesis gives a complete description of the A-identities for the Grassmann algebra over an algebraically closed field of characteristic 0. In this way we give a positive answer to a conjecture due to Henke and Regev. Afterwards we study A-identities for the upper triangular matrix algebras. We give a lower bound for the minimal degree of an A-identity satisfied by such algebras. As a corollary we give a negative answer to another conjecture due to Henke and Regev. Furthermore we describe the A-identities of degree 5 for the upper triangular matrices of order 2 and compute the minimal degree of an A-identity for such algebras of order 3 and 4.

Sumário

0 Introdução **1**

1 Conceitos Preliminares **7**
1.1 Definições e Exemplos de PI-álgebras 7
1.2 Identidades Multilineares 10
1.3 A-identidades 16

2 Álgebra de Grassmann **18**
2.1 Identidades da Álgebra de Grassmann 18
2.2 S_n-Representações 20
2.3 A_n-Representações 24
2.4 A-codimensão e A-cocaracter 26
2.5 A-identidades da Álgebra de Grassmann 28

3 Álgebra $U_n(K)$ **37**
3.1 Identidades de $U_n(K)$ 37
3.2 A-identidades de $U_2(K)$ 42
3.3 A-identidades de $U_n(K)$ 54

Capítulo 0

Introdução

A área da matemática na qual se insere esta tese é álgebra: teoria de anéis, e mais especificamente, na teoria das álgebras que satisfazem identidades polinomiais, chamadas PI-álgebras (do inglês *Polynomial Identity*).

A classe das PI-álgebras é muito ampla, ela engloba as álgebras matriciais, as de dimensão finita, bem como as álgebras comutativas, e muitas outras álgebras de grande importância para a matemática e as suas aplicações. Aqui recordaremos brevemente o conceito de identidade polinomial (as definições formais podem ser encontradas no Capítulo 1). As álgebras consideradas neste trabalho sempre serão associativas e unitárias, sobre um corpo K de característica 0. Um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ nas variáveis não comutativas $x_1, \ldots, x_n$ e com coeficientes em K, é uma identidade para a K-álgebra R se para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in R$ tem-se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ em R. Se existir um polinômio $f \neq 0$ com esta propriedade para a álgebra R então R é chamada PI-álgebra, e f é uma identidade polinomial (PI) para R.

O início do estudo das álgebras com Identidades Polinomiais deu-se por volta de 1930, com os trabalhos de Dëhn [3] e Wagner [23]. Nesses trabalhos pioneiros aparecem, embora implícito, algumas identidades polinomiais para a álgebra das matrizes de ordem 2. O leitor pode encontrar conceitos parecidos ainda em trabalhos de Sylvester, por volta de 1852. A pesquisa das PI-álgebras intensificou-se por volta de 1950, com uma série de trabalhos de Jacobson, Kaplansky e Levitzki. Enquanto esses trabalhos pioneiros estudam a estrutura de uma álgebra sabendo-se que ela satisfaça alguma (qualquer) PI, na mesma época Kaplansky perguntou qual seria o menor grau de identidade polinomial satisfeita pela álgebra matricial de ordem n, sobre um corpo. A resposta desta pergunta veio com o celebre Teorema de

Amitsur e Levitzki, um resultado clássico e de grande importância para o desenvolvimento da teoria das álgebras com identidades polinomiais ou PI teoria. Não é difícil mostrar (e nós mostramos mais adiante) que a álgebra das matrizes $M_n(K)$ sobre qualquer anel comutativo K com unidade, não satisfaz nenhuma identidade polinomial de grau menor que $2n$. O teorema de Amitsur e Levitzki afirma que o menor grau de uma identidade polinomial para $M_n(K)$ é igual a $2n$ e, se $K \neq \mathbb{Z}_2$ e $n \geq 3$, há uma única identidade polinomial de grau $2n$, a menos de múltiplos escalares. Esta identidade é o *polinômio standard* de grau $2n$. Aqui recordamos que o polinômio standard de grau k define-se assim:

$$s_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(k)},$$

onde S_k é o grupo simétrico de grau k, das permutações dos símbolos 1, 2, $\ldots$, k, e $(-1)^\sigma$ denota o sinal da permutação σ.

O teorema de Amitsur e Levitzki continuou atraindo a atenção de vários algebristas reconhecidos por vários anos, como se pode observar pelas referências citadas na sequência. A demonstração original de Amitsur e Levitzki [1] foi baseada num raciocínio combinatório. Alguns anos mais tarde B. Kostant [13] deu uma nova demonstração do teorema, esta baseada em propriedades co-homológicas de álgebras de Lie e de resultados de Frobenius sobre as representações do grupo simétrico e do grupo alternado. Mais tarde, R. Swan [22] usou a teoria de grafos para dar uma nova demonstração do teorema. Essa demonstração, embora muito elaborada, é absolutamente elementar. Alguns anos depois Yu. Razmyslov [18] deu uma nova demonstração do teorema, utilizando-se principalmente de álgebra linear. Parece que o ponto final foi posto por um aluno de doutorado (à época) de Amitsur, S. Rosset [21], em 1976. Ele demonstrou o teorema numa página, utilizando propriedades básicas da álgebra de Grassmann e do traço matricial.

A importância do teorema de Amitsur e Levitzki foi revelada em vários trabalhos; provavelmente o mais importante desses é o teorema de Amitsur [2] de que toda PI-álgebra satisfaz alguma potência de algum polinômio standard, isto é, satisfaz a identidade $s_k(x_1, \ldots, x_k)^m$ para alguns k e m. Por outro lado, a álgebra de Grassmann E de um espaço vetorial de dimensão infinita sobre um corpo de característica 0, não satisfaz nenhuma identidade standard. Entretanto, se a característica do corpo é positiva, Kemer [11] demonstrou que toda PI-álgebra satisfaz alguma identidade s_k. No caso da álgebra E, se $\mathrm{char} K = p > 2$, ela satisfaz a identidade standard s_{p+1}.

A álgebra de Grassmann tem um papel singular na teoria das PI álgebras. Ela possui uma graduação natural com o grupo cíclico de ordem 2, e é uma álgebra *supercomutativa*. Tais propriedades da álgebra de Grassmann foram cruciais na pesquisa desenvolvida por Kemer que resultou, entre outros teoremas de grande importância, na resolução do famoso problema de Specht. Aqui recordamos que o problema de Specht consiste em determinar se toda álgebra associativa sobre um corpo de característica 0, possui uma base finita das suas identidades. Kemer desenvolveu uma teoria sofisticada dos ideais de identidades polinomiais na álgebra associativa livre, da qual conseguiu obter, como uma conseqüência, a resposta afirmativa do problema de Specht. O leitor poderá encontrar mais detalhes sobre o trabalho de Kemer na monografia [12]. Como não precisaremos dessa teoria para o nosso trabalho omitiremos os detalhes.

As identidades polinomiais da álgebra de Grassmann foram descritas por Krakowski e Regev [14], em 1973. Eles mostraram, em particular, que todas as identidades da álgebra de Grassmann são consequências do polinômio $[[x_1, x_2], x_3]$ onde $[a, b] = ab - ba$ é o comutador de a e b. Recordamos que este resultado foi obtido em 1963 por Latyshev em [15]. Krakowski e Regev descreveram completamente a estrutura das identidades da álgebra de Grassmann, e desenvolveram métodos extremamente importantes para a PI teoria naquele trabalho.

É bem conhecido que as identidades satisfeitas por uma álgebra R determinam-se por todas as identidades *multihomogêneas* desde que o corpo K seja infinito. Se, ainda mais, a característica do corpo é 0, as identidades *multilineares* determinam todas as identidades da álgebra. Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto infinito enumerável de variáveis e seja $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa e com unidade livre, livremente gerada sobre K pelo conjunto X. Se R é uma álgebra denotamos por $T(R)$ o conjunto de todas identidades polinomiais de R. É bem conhecido e imediato que $T(R)$ é um ideal em $K\langle X\rangle$ e que ele é invariante por endomorfismos da álgebra $K\langle X\rangle$. Denotamos por P_n o conjunto dos polinômios multilineares de grau n nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ em $K\langle X\rangle$. Assim o K-espaço vetorial P_n tem como base os monômios $x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\ldots x_{\sigma(n)}$, onde $\sigma \in S_n$ e $\dim P_n = n!$. O espaço P_n é um módulo (à esquerda) sobre o grupo simétrico S_n de maneira natural: os elementos de S_n permutam as variáveis. Mais precisamente P_n é canonicamente isomorfo ao módulo regular KS_n. Então $P_n \cap T(R)$ é um submódulo de P_n e podemos estudar este submódulo com a finalidade de descrever as identidades de R. Aqui recordamos que as representações do grupo simétrico foram descritas por Schur, e atualmente a teoria das representações de S_n é bem desenvolvida.

Mas há um *porém* em tal abordagem: Regev demonstrou que $P_n \cap T(R)$ é muito grande quando $n \to \infty$. Portanto é mais fácil estudar o quociente $P_n/(P_n \cap T(R)) = P_n(R)$. De fato, Regev demonstrou em [19] que se a álgebra R satisfaz uma identidade de grau d, então para todo n vale a desigualdade $c_n(R) = \dim P_n(R) \leq (d-1)^{2n}$. Observe que esta última função cresce muito mais "vagarosamente" do que $n!$.

Recordamos que a descrição das identidades satisfeitas por uma álgebra dada é uma tarefa extremamente difícil, embora de grande importância. São muito poucas as álgebras para as quais sabe-se uma tal descrição: a álgebra de Grassmann (Krakowski e Regev), a das matrizes de ordem 2 (Razmyslov [17] e Drensky [4]), as matrizes triangulares superiores (vários autores). Conhece-se o conjunto gerador das identidades do quadrado tensorial da álgebra de Grassmann, e esta é a lista (mais ou menos) completa.

Portanto foram feitas várias pesquisas sobre outros tipos de identidades em álgebras. Aqui mencionamos (sem entrarmos em detalhes) as identidades com traço, com involução, as identidades fracas, e as graduadas. Nos últimos anos iniciou-se uma pesquisa sobre as chamadas A-identidades. Seja

$$f = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)} \in P_n, \quad \alpha_\sigma \in K,$$

um polinômio multilinear de grau n. O polinômio f é chamado um A-polinômio se $\alpha_\sigma = 0$ sempre que $\sigma \notin A_n$, o grupo alternado. O conjunto dos A-polinômios de grau n será denotado por P_n^A. Se R é uma álgebra, então f é uma A-identidade para R se $f \in P_n^A \cap T(R)$.

As representações do grupo alternado A_n são bem conhecidas; elas foram descritas pela primeira vez por Schur. Mais adiante nós recordaremos como se constroem as representações irredutíveis de A_n. Usando-se a teoria das representações de A_n, Henke e Regev começaram o estudo das A-identidades em álgebras, por volta de 2000.

Discutimos mais adiante vários tópicos relacionados com A-identidades, aqui ressaltamos que qualquer PI-álgebra R satisfaz A-identidades. Mais precisamente, se $f(x_1, \ldots, x_n)$ é qualquer identidade multilinear não trivial para R, então o polinômio $f(x_1x_2, x_3x_4, \ldots, x_{2n-3}x_{2n-2}, x_{2n-1})$ é obviamente uma identidade para R; ela é uma A-identidade, um fato de verificação imediata.

Neste trabalho tratamos A-identidades em algumas álgebras importantes. Nosso estudo foi motivado pelas pesquisas de Henke e Regev; entre os mais importantes resultados desta tese são as respostas de duas conjeturas de Henke e Regev, as quais descreveremos abaixo.

Em 2003 esses dois algebristas descreveram de uma maneira adequada à PI teoria as representações do grupo alternado e os seus módulos irredutíveis (ver [10]). Num outro trabalho eles estudaram as A-identidades da álgebra de Grassmann E (ver [8]). É bem conhecido (Krakowski e Regev, 1973) que a n-ésima codimensão $c_n(E)$ satisfaz a igualdade $c_n(E) = 2^{n-1}$. Aqui ressaltamos que são muito poucas as álgebras R para as quais sabemos $c_n(R)$; além da álgebra de Grassmann, da álgebra matricial de ordem 2 e das álgebras das matrizes triangulares superiores, praticamente não há outra álgebra R para a qual $c_n(R)$ é conhecido.

Henke e Regev, em 2003, descreveram em certos termos as A-identidades da álgebra de Grassmann (ver [8]). Ainda mais, eles calcularam as A-codimensões desta álgebra. Eles demonstraram que

$$c_n^A(E) = \dim(P_n^A/(P_n^A \cap T(E))) = 2^{n-1} - 1.$$

Como já foi mencionado, as identidades de E seguem do comutador de comprimento 3, $[x_1, x_2, x_3]$. Então a álgebra E satisfaz a A-identidade $[x_1x_2, x_3x_4, x_5]$ de grau 5. Mas ela satisfaz A-identidades de grau 4. Mais precisamente, o polinômio

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2x_3]x_4 - x_4[x_1, x_3x_2]$$

é uma A-identidade para E. Henke e Regev ainda conjeturaram que o polinômio f gera todas as A-identidades para E no seguinte sentido (observe que ele é bem mais forte que a simples geração).

Sejam $\sigma \in A_n$ e $0 \leq r \leq n-4$. Denote por $p_{r,\sigma}$ e $q_{r,\sigma}$ os monômios

$$p_{r,\sigma} = x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(r)}, \quad q_{r,\sigma} = x_{\sigma(r+5)} \dots x_{\sigma(n)}.$$

Defina $f_{r,\sigma}$ como sendo o A-polinômio

$$f_{r,\sigma} = p_{r,\sigma}([x_{\sigma(r+1)}, x_{\sigma(r+2)}x_{\sigma(r+3)}]x_{\sigma(r+4)} - x_{\sigma(r+4)}[x_{\sigma(r+1)}, x_{\sigma(r+3)}x_{\sigma(r+2)}])q_{r,\sigma}.$$

Então os polinômios $f_{r,\sigma}$ geram o espaço vetorial de **todas** as A-identidades de grau n para E.

No mesmo trabalho Henke e Regev observaram que a álgebra matricial de ordem 2 não satisfaz nenhuma A-identidade de grau 5, e que ela satisfaz várias A-identidades de grau 6. Isso os levou à conjetura que o grau mínimo de uma A-identidade para a álgebra $M_n(K)$ é igual a $2n+2$.

Neste trabalho providenciamos respostas às duas conjeturas acima. A seguir descrevemos como a tese está organizada.

No primeiro capítulo introduzimos vários conceitos fundamentais para o desenvolvimento do trabalho. Decidimos incluir as principais definições e noções da PI teoria, para tornar a tese mais independente de outras fontes. Mas para não exagerar muito no volume da tese, optamos por omitir algumas demonstrações "canônicas" na PI teoria. O leitor pode encontrar essas demonstrações nas monografias [5] e [6]. Assim introduzimos os conceitos de identidade polinomial, identidades multihomogêneas e multilineares, e discutimos a questão das identidades de menor grau para as álgebras matriciais.

No segundo capítulo recordamos os fatos básicos sobre as representações irredutíveis do grupo simétrico e alternado, e como elas podem ser utilizadas no estudo de PI-álgebras. Esses fatos podem ser encontrados em [5, 6], bem como nos artigos de Henke e Regev [8, 9, 10].

Descrevemos, também no segundo capítulo, as identidades ordinárias satisfeitas pela álgebra de Grassmann. Na última seção do Capítulo 2, demonstramos o nosso primeiro resultado, Teorema 2.5.2: a veracidade da conjetura de Henke e Regev sobre as A-identidades da álgebra de Grassmann. Os resultados desta seção foram publicados no artigo [7].

No Capítulo 3, estudamos as A-identidades da álgebra $U_n(K)$ das matrizes triangulares superiores de ordem n sobre corpos K de característica 0. Começamos com uma breve exposição do conhecido teorema de que as identidades de $U_n(K)$ seguem do polinômio $[x_1, x_2] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}]$.

Na segunda seção do capítulo descrevemos as A-identidades para a álgebra $U_2(K)$. Em particular mostramos que o grau mínimo de uma A-identidade para esta álgebra é 5, e descrevemos todas as A-identidades de grau 5, usando a teoria das representações do grupo A_n.

Os principais resultados deste capítulo estão na seção 3. Demonstramos o Teorema 3.3.16: para qualquer número natural k existe um n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, o grau mínimo de uma A-identidade para $U_n(K)$ é maior que $2n+k$. Temos uma resposta *negativa* à conjetura de Henke e Regev sobre o análogo do teorema de Amitsur e Levitzki para A-identidades. Mais precisamente, como $U_n(K)$ é uma subálgebra da álgebra matricial $M_n(K)$, toda identidade (em particular A-identidade) de $M_n(K)$ será uma identidade para $U_n(K)$. Portanto, dado um número k, para n suficientemente grande, não pode existir A-identidade para $M_n(K)$ cujo grau é $2n+k$.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

1.1 Definições e Exemplos de PI-álgebras

Nesta seção recordamos alguns conceitos básicos sobre PI-álgebras e introduziremos as notações que serão usadas ao longo da tese. Enunciamos o famoso Teorema de Amitsur e Levitzki e colocamos algumas identidades satisfeitas por álgebras importantes, dentre elas a álgebra das matrizes triangulares superiores e álgebra de Grassmann, que serão estudadas por nós nos próximos capítulos.

Ao longo do texto, fixamos a notação K para um corpo arbitrário e $\mathbb{N}$ para o conjunto dos números naturais $\{1, 2, \ldots\}$.

Definição 1.1.1. *Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto infinito e enumerável de variáveis. Denotamos por $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre com unidade, isto é, $K\langle X\rangle$ tem uma base formada por 1 e pelas palavras*

$$x_{i_1} \ldots x_{i_n},\ x_{i_j} \in X,\ n \in \mathbb{N},$$

com multiplicação definida por

$$(x_{i_1} \ldots x_{i_n})(x_{j_1} \ldots x_{j_m}) = x_{i_1} \ldots x_{i_n} x_{j_1} \ldots x_{j_m}.$$

Todas as álgebras consideradas ao longo do texto serão associativas e com unidade. Assim, não mencionaremos mais a propriedade **associativa e com unidade**, escreveremos apenas álgebra.

Definição 1.1.2. *Sejam $f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ e R uma álgebra. Dizemos que $f(x_1, \ldots, x_n)$ é uma identidade polinomial para R se*

$$f(r_1, \ldots, r_n) = 0,$$

para todo $r_1, \dots, r_n \in R$. Neste caso, se $f(x_1, \dots, x_n)$ é um elemento não nulo de $K\langle X\rangle$, dizemos que R é uma PI-álgebra.

Exemplo 1.1.3. *A álgebra R é comutativa se, e somente se, satisfaz a identidade polinomial $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$.*

Exemplo 1.1.4. *Seja R uma álgebra de dimensão finita com $\dim R < n$. Então R satisfaz a identidade standard de grau n*

$$s_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)},$$

onde S_n é o grupo das permutações de $\{1, 2, \dots, n\}$ e $(-1)^\sigma$ é o sinal de σ.

De fato, uma vez que o polinômio standard é multilinear, basta verificar que s_n se anula sobre os elementos da base de R. Quando escolhemos n elementos da base, pelo menos um deles se repete. Logo, s_n se anula sobre essa escolha pois é um polinômio anti-simétrico.

Em 1950 no artigo *Minimal identities for algebras*, Amitsur e Levitzki [1] demonstraram o seguinte resultado:

Teorema 1.1.5. *A álgebra $M_n(K)$, das matrizes de ordem n, satisfaz a identidade standard de grau $2n$*

$$s_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(2n)}.$$

Em [5] encontramos duas demonstrações para o teorema: uma feita por Razmyslov (na página 80) e a outra feita por Rosset (na página 82). Outras demonstrações podem ser encontradas em [1], [13] e [22].

Definição 1.1.6. *Dizemos que o polinômio*

$$[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$$

é o comutador de comprimento 2. Por indução, definimos o comutador de comprimento n por

$$[x_1, \dots, x_n] = [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n].$$

Exemplo 1.1.7. *A álgebra $U_n(K)$, das matrizes triangulares superiores de ordem n, satisfaz a identidade*

$$f(x_1, \dots, x_{2n}) = [x_1, x_2] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}].$$

De fato, se $r_1, r_2 \in U_n(K)$, então $[r_1, r_2]$ pertence a $U_n(K)$ e possui diagonal nula. Como o produto de n matrizes em $U_n(K)$, com diagonal nula, é a matriz nula, segue o resultado.

Definição 1.1.8. *Seja K um corpo de característica diferente de 2. A álgebra gerada por uma sequência de elementos $\{1, e_1, e_2, \ldots\}$, satisfazendo as relações*

$$e_i e_j + e_j e_i = 0,$$

é chamada álgebra de Grassmann (ou Exterior) e a denotamos por E.

O conjunto D, formado por 1 e pelos elementos

$$e_{i_1} \ldots e_{i_n} \text{ tal que } i_1 < i_2 < \ldots < i_n, , \quad n \geq 1$$

é uma base para E. O comprimento de um elemento da base $e_{i_1} \ldots e_{i_n} \in D$ é n. Então obtemos os seguintes fatos:

1. Se $a \in D$ tem comprimento par, então a pertence ao centro de E.

2. Se a, $b \in D$ têm comprimentos ímpares, então $ab = -ba$.

Exemplo 1.1.9. *A álgebra de Grassmann E satisfaz a identidade polinomial*

$$f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3].$$

De fato, uma vez que $[x_1, x_2, x_3]$ é multilinear, é suficiente verificar que $[a_1, a_2, a_3] = 0$ para os elementos da base de E. Se a_1 ou a_2 tem comprimento par, então $[a_1, a_2] = 0$. Se a_1 e a_2 têm comprimentos ímpares, então $[a_1, a_2] = 2a_1a_2$ tem comprimento par e segue o resultado.

Definição 1.1.10. *Seja $\{f_i \mid i \in I\}$ um subconjunto de $K\langle X\rangle$. A classe $\mathfrak{V}$, formada pelas álgebras que satisfazem as identidades f_i, para todo $i \in I$, é chamada uma variedade. O conjunto $T(\mathfrak{V})$ formado pelas identidades polinomiais satisfeitas por todas as álgebras da variedade $\mathfrak{V}$ é o T-ideal (ou ideal verbal) de $\mathfrak{V}$. Dizemos que o T-ideal $T(\mathfrak{V})$ é gerado como um T-ideal pelo conjunto $\{f_i \mid i \in I\}$. Usamos a notação $T(\mathfrak{V}) = \langle f_i \mid i \in I\rangle^T$ e dizemos que o conjunto $\{f_i \mid i \in I\}$ é uma base das identidades polinomiais para $\mathfrak{V}$. Os elementos de $T(\mathfrak{V})$ são chamados consequências dos polinômios da base. Se R é uma álgebra qualquer, denotamos por $T(R)$ o T-ideal das identidades polinomiais de R.*

Um caso particular da definição ocorre quando consideramos o T-ideal gerado por um polinômio. Assim, dizemos que um polinômio g é uma consequência de f, se g está no T-ideal gerado por f. Esta é uma situação que ocorre, por exemplo, com as álgebras de Grassmann e das matrizes triangulares superiores. Nos próximos capítulos daremos uma descrição das identidades dessas álgebras, mostrando que

$$T(U_n(K)) = \langle [x_1, x_2] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}] \rangle^T \;\; e \;\; T(E) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T.$$

Proposição 1.1.11. *Se P é um conjunto de polinômios, então o T-ideal gerado por P é formado por combinações lineares de elementos do tipo*

$$uf(g_1, \dots, g_n)v,$$

onde $u, g_j, v \in K\langle X \rangle$ e $f \in P$.

Demonstração. Seja J o ideal bilateral de $K\langle X \rangle$ gerado por

$$\{f(g_1, \dots, g_n) \mid g_j \in K\langle X \rangle \text{ e } f \in P\}.$$

Para provar o resultado, basta mostrar que, se $\mathfrak{V}$ é a variedade determinada por P, então a álgebra $F = K\langle X \rangle / J$ pertence a $\mathfrak{V}$. Para isso, dado um elemento qualquer $g \in K\langle X \rangle$, definimos $\overline{g} = g + J$. Se $g_1, \dots, g_n \in K\langle X \rangle$ e $f \in P$, então

$$f(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}) = \overline{f(g_1, \dots, g_n)} = 0$$

Logo, f é identidade para F. $\diamondsuit$

1.2 Identidades Multilineares

Nesta seção mostraremos que dependendo do corpo, um T-ideal é determinado pelos seus elementos multihomogêneos (corpo infinito) ou multilineares (corpo de característica 0). Além disso, fazemos uma breve análise sobre as identidades de $M_n(K)$ e introduzimos alguns conceitos importantes, como por exemplo *codimensão.*

Definição 1.2.1. *Um polinômio $f(x_1, \dots, x_n)$ é homogêneo de grau b em x_i, se é uma combinação linear de monômios tais que: em cada monômio de f, a variável x_i aparece b vezes. Se $f(x_1, \dots, x_n)$ é homogêneo de grau b_i em x_i, para todo $i = 1, \dots, n$, dizemos que $f(x_1, \dots, x_n)$ é multihomogêneo de grau $(b_1, \dots, b_n)$. Um polinômio multihomogêneo de grau $(1, \dots, 1)$ é chamado multilinear de grau n.*

Denotamos por P_n o espaço vetorial de todos polinômios multilineares de grau n, nas variáveis x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Então P_n tem uma base

$$\{x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}.$$

Quando necessário, usaremos a notação P_0 para denotar o corpo K.

Definição 1.2.2. *Dois conjuntos de polinômios são equivalentes se eles geram o mesmo T-ideal.*

Proposição 1.2.3. *Seja*

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} f_i \in K\langle X\rangle,$$

onde f_i é a componente homogênea de f de grau i em x_1.

(i) *Se o corpo K possui mais que n elementos, então $\{f\}$ e $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ são equivalentes.*

(ii) *Se o corpo K é de característica 0, então $\{f\}$ é equivalente a um conjunto (finito) de polinômios multilineares.*

Demonstração. (i) Seja $V = \langle f\rangle^T$ o T-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por f. Escolha $n+1$ elementos diferentes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de K. Uma vez que V é um T-ideal,

$$f(\alpha_j x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_j^i f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in V.$$

Consideramos estas equações como um sistema linear cujas incógnitas são f_0, f_1, $\ldots$, f_n. Como seu determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \ldots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i)$$

é o determinante de Vandermonde e é diferente de zero, temos que cada f_i pertence a V. Aqui observamos que se um sistema linear com coeficientes num corpo é de solução única, então esta solução consiste de elementos do corpo. Assim temos que as identidades polinomiais f_i são consequências de f.

(ii) Usaremos o *processo de linearização*. Pelo item (i), temos que f é equivalente a um conjunto de polinômios multihomogêneos. Assim, para provar o resultado, basta mostrar que todo polinômio multihomogêneo é equivalente a um multilinear. Suponha f multihomogêneo e seja d o grau de f em x_1. Escreva $f(y_1+y_2,x_2,\ldots,x_m) \in V$ na forma

$$f(y_1+y_2,x_2,\ldots,x_m) = \sum_{i=0}^{d} f_i(y_1,y_2,x_2,\ldots,x_m),$$

onde f_i é a componente homogênea de grau i em y_1. Temos que $f_1 \in V$ e

$$f(x_1,\ldots,x_m) = df_1(x_1,x_1,x_2,\ldots,x_m)$$

Logo, $\{f\}$ e $\{f_1\}$ são equivalentes com

$$\deg_{y_1} f_1 = 1 \quad \text{e} \quad \deg_{y_2} f_1 = d-1.$$

Por indução, podemos exibir um polinômio multilinear equivalente a f. $\diamondsuit$

Chamamos a atenção do leitor para o fato que se f é um polinômio, então existe um polinômio multilinear f' que é uma consequência de f, independente do corpo K considerado. De fato, basta observar a relação entre o grau de f em x_1 e os graus de

$$g = f(y_1+y_2,x_2,\ldots,x_m) - f(y_1,x_2,\ldots,x_m) - f(y_2,x_2,\ldots,x_m)$$

em y_1 e y_2.

A afirmação a seguir é conhecida pelo nome em Inglês *Staircase Lemma*, que nós traduzimos.

Lema 1.2.4 (Lema sobre a Escada)**.** *A álgebra $M_n(K)$, das matrizes de ordem n, não possui identidade polinomial de grau menor que $2n$.*

Demonstração. Se $M_n(K)$ satisfaz uma identidade de grau $m < 2n$, então também satisfaz uma identidade multilinear

$$f(x_1,\ldots,x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(m)},\ \alpha_\sigma \in K,$$

de grau m. Sem perda de generalidade, podemos assumir o coeficiente do monômio $x_1x_2\dots x_m$ ser diferente de 0, isto é, $\alpha_1 \neq 0$. Assim,

$$0 = f(e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{23}, \dots, e_{pq}) = \alpha_1 e_{1q},$$

onde $p = q$ ou $p = q - 1$, dependendo da paridade de m. Portanto $\alpha_1 = 0$, o que é uma contradição. $\diamondsuit$

Assim, pelo Lema 1.2.4 e pelo Teorema 1.1.5, concluímos que $2n$ é o menor grau para uma identidade de $M_n(K)$. O próximo corolário afirma que o polinômio standard s_{2n} é a única, a menos de um múltiplo escalar, identidade de menor grau para $M_n(K)$. Omitiremos a demonstração; o leitor interessado pode encontrá-la em [5, p. 78].

Corolário 1.2.5. *Sejam $n \geq 2$ um número natural e K um corpo tal que$K \neq \mathbb{Z}_2$ quando $n = 2$. Se $f(x_1, \dots, x_{2n})$ é uma identidade polinomial multilinear de grau $2n$ para $M_n(K)$, então*

$$f(x_1, \dots, x_{2n}) = \alpha s_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}),$$

para algum $\alpha \in K$.

Como observamos anteriormente, o corolário acima não é válido somente quando $n = 2$ e K é o corpo com 2 elementos. Neste caso aparecem identidades de grau 4 para $M_2(K)$ que não são múltiplos de s_4.

Proposição 1.2.6. *Denote por $R = L(V)$ a álgebra dos operadores lineares $T : V \to V$, onde V é um espaço vetorial de dimensão infinita sobre K. Então R não é uma PI-álgebra.*

Demonstração. Suponha que f é uma identidade para R de grau n. Como $M_n(K)$ é isomorfa a uma subalgebra de R, temos que f é uma identidade para $M_n(K)$, o que é uma contradição pelo lema anterior. $\diamondsuit$

Pela Proposição 1.2.3, se o corpo K é de característica 0, então todo T-ideal é gerado pelos seus polinômios multilineares. Acontece que, em muitas situações, analisar $P_n \cap T(R)$ torna-se algo muito trabalhoso e portanto, convém analisar o quociente

$$P_n(R) = \frac{P_n}{P_n \cap T(R)}.$$

Definição 1.2.7. *Se R é uma PI-álgebra, dizemos que*

$$c_n(R) = \dim \frac{P_n}{P_n \cap T(R)}\ ,\ n \in \mathbb{N},$$

é a n-ésima codimensão do T-ideal $T(R)$.

Mostraremos no Capítulo 2, que a n-ésima codimensão do T-ideal da álgebra de Grassmann é

$$c_n(E) = 2^{n-1}.$$

Outra ferramenta que é muito utilizada, quando o corpo K possui característica 0, é a ação do grupo S_n sobre P_n.

Definição 1.2.8. *Definimos uma função $\varphi : KS_n \to P_n$ por linearidade e por*

$$\varphi(\sigma) = x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}$$

para todo $\sigma \in S_n$.

Temos que P_n é um S_n-módulo a esquerda. De fato, se $\sigma,\ \tau \in S_n$, então defina o produto

$$\sigma \cdot x_{\tau(1)} \dots x_{\tau(n)} = x_{\sigma\tau(1)} \dots x_{\sigma\tau(n)}.$$

Observe que o grupo S_n age sobre um polinômio $f(x_1, \dots, x_n) \in P_n$ da seguinte maneira:

$$\sigma \cdot f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}),$$

onde $\sigma \in S_n$. Assim, $P_n \cap T(R)$ é um S_n-módulo a esquerda e consequentemente o quociente $P_n/P_n \cap T(R)$ também é. Diante dessa ação de S_n, muitos resultados são obtidos em termos das representações de S_n. Assim, no próximo capítulo, reservaremos uma seção para resumir alguns fatos importantes sobre a teoria de representações de S_n.

Observamos que em geral a dimensão do espaço (e S_n-módulo) $P_n \cap T(R)$ é muito grande, se $T(R) \neq 0$. Em outras palavras, $\dim(P_n \cap T(R))$ é um número próximo a $n!$, quando $n \to \infty$. Por outro lado, Regev demonstrou em [19] que se $T(R) \neq 0$, então $\dim P_n/(P_n \cap T(R)) \leq (d-1)^{2n}$, onde d é o grau de alguma (qualquer) identidade polinomial satisfeita por R. Veja que $(d-1)^{2n} \ll n!$, e portanto é melhor estudar o quociente $P_n/(P_n \cap T(R))$ e não $P_n \cap T(R)$.

Definição 1.2.9. *Um polinômio f é chamado próprio, se ele é uma combinação linear de produtos de comutadores, isto é,*

$$f = \sum \alpha_g g,$$

onde $\alpha_g \in K$ e g é um elemento do tipo

$$[x_{i_{11}}, x_{i_{12}}, \ldots, x_{i_{1j_1}}][x_{i_{21}}, x_{i_{22}}, \ldots, x_{i_{2j_2}}] \ldots [x_{i_{n1}}, x_{i_{n2}}, \ldots, x_{i_{nj_n}}].$$

Nós assumimos que 1 é um polinômio próprio e denotamos por B o conjunto de todos os polinômios próprios de $K\langle X\rangle$. Denotamos por Γ_n o conjunto de todos os polinômios próprios multilineares de grau n, ou seja, $\Gamma_n = B \cap P_n$.

Uma demonstração da próxima proposição pode ser encontrada no livro [5, p. 43].

Proposição 1.2.10. *Seja R uma PI-álgebra com T-ideal $T(R)$. Se o corpo K é infinito, então $T(R)$ é gerado pelos seus elementos próprios. Se o corpo K é de característica 0, então $T(R)$ é gerado pelos seus elementos próprios multilineares.*

A demonstração do próximo teorema pode ser encontrada em [5, p. 47].

Teorema 1.2.11. *Seja R uma PI-álgebra sobre um corpo de característica 0. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ defina*

$$\gamma_n(R) = \dim \frac{\Gamma_n}{\Gamma_n \cap T(R)}.$$

Então a sequência das codimensões de $T(R)$ é dada por

$$c_n(R) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \gamma_k(R).$$

Chamamos a sequência $(\gamma_n(R))$, definida no teorema, de *sequência das codimensões próprias.*

1.3 A-identidades

Nesta seção introduzimos o conceito de A-identidade, objeto central desta tese que será analisado nos Capítulos 2 e 3 nas álgebras E e $U_n(K)$ respectivamente.

Sejam S_n o grupo das permutações de $\{1, \ldots, n\}$ e A_n o grupo das permutações pares de S_n.

Definição 1.3.1. *Seja P_n^A o espaço vetorial com base*

$$\{x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in A_n\}.$$

Os elementos de P_n^A são chamados A-polinômios ou polinômios pares. Se R é uma álgebra com uma identidade $f \in P_n^A$, então dizemos que f é uma A-identidade para R.

Note que se R é uma PI-álgebra, então ela satisfaz alguma A-identidade. De fato, se $f(x_1, \ldots, x_n)$ é um polinômio multilinear, então

$$f(x_1x_2, x_3x_4, \ldots, x_{2n-3}x_{2n-2}, x_{2n-1})$$

é uma A-identidade. Por exemplo, como a álgebra de Grassmann E satisfaz a identidade $[x_1, x_2, x_3]$, temos que E satisfaz a A-identidade

$$[x_1x_2, x_3x_4, x_5].$$

É fácil mostrar que E não possui A-identidades de grau menor ou igual a 3. Porém, o próximo resultado nos fornece uma A-identidade de grau 4 que será alvo do nosso estudo.

Proposição 1.3.2. *O polinômio par*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2x_3]x_4 - x_4[x_1, x_3x_2]$$

é uma A-identidade para a álgebra de Grassmann E.

Demonstração. Daremos duas demonstrações diferentes, sendo que a primeira pode ser encontrada em [8].

(D1) Como o polinômio é multilinear, basta verificar que ele se anula sobre os elementos da base de E. Sejam a_1, a_2, a_3, a_4 elementos da base

$$D = \{1\} \cup \{e_{i_1}e_{i_2} \ldots e_{i_n} \mid i_1 < i_2 < \ldots < i_n\}.$$

i) Se a_1 ou a_2a_3 possui comprimento par, então ele pertence ao centro de E e portanto $f(a_1, a_2, a_3, a_4) = 0$. Observe que se a_2a_3 possui comprimento par, então a_3a_2 também possui comprimento par.

ii) Suponhamos a_1 e a_2a_3 de comprimentos ímpares. Sem perda de generalidade, assuma que a_2 e a_3 possuem comprimentos par e ímpar respectivamente. Então $[a_1, a_2a_3] = [a_1, a_3a_2]$ é central e portanto $f(a_1, a_2, a_3, a_4) = 0$.

(D2) Se substituímos, de maneira adequada, duas variáveis em $[x_1, x_2, x_3]$ pelo produto de duas, obtemos uma A-identidade para E. Por exemplo $[x_1x_2, x_3x_4, x_5]$. Agora, substituindo uma variável pelo produto de duas, temos

$$[x_1, x_2x_3, x_4] = [x_1, x_2x_3]x_4 - x_4[x_1, x_2x_3].$$

Uma vez que $x_2x_3 = x_3x_2 + [x_2, x_3]$ segue que

$$[x_1, x_2x_3, x_4] = f(x_1, x_2, x_3, x_4) - x_4[x_1, [x_2, x_3]]$$

e portanto

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2x_3, x_4] - x_4[x_2, x_3, x_1]$$

concluindo o resultado. $\diamondsuit$

Proposição 1.3.3. *Sejam T_1 e T_2 dois T-ideais de $K\langle X\rangle$, onde K é um corpo de característica 0. Então $T_1 = T_2$ se, e somente se, $T_1 \cap P_n^A = T_2 \cap P_n^A$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, duas álgebras R_1 e R_2 possuem as mesmas identidades se, e somente se, possuem as mesmas A-identidades.*

Demonstração. A implicação $(\Rightarrow)$ é óbvia. Provaremos a recíproca: como o corpo K é de característica 0, temos pela Proposição 1.2.3 que todo T-ideal é gerado pelos seus elementos multilineares. Assim, devemos provar que os elementos multilineares de T_1 e T_2 coincidem, isto é, $T_1 \cap P_n = T_2 \cap P_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $f(x_1, \ldots, x_n) \in T_1 \cap P_n$, então

$$g(x_1, \ldots, x_{2n}) = f(x_1x_2, x_3x_4, \ldots, x_{2n-1}x_{2n})$$

pertence a $T_1 \cap P_{2n}^A$ e portanto a $T_2 \cap P_{2n}^A$. Logo,

$$g(x_1, 1, x_3, 1, \ldots, x_{2n-1}, 1) = f(x_1, x_3, x_5 \ldots, x_{2n-1}) \in T_2$$

e renomeando as variáveis temos que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_2 \cap P_n$. Provamos que $T_1 \cap P_n \subset T_2 \cap P_n$ e para provar que $T_2 \cap P_n \subset T_1 \cap P_n$ usamos o mesmo argumento. $\diamondsuit$

Capítulo 2

Álgebra de Grassmann

2.1 Identidades da Álgebra de Grassmann

Nesta seção descrevemos as identidades polinomiais da álgebra de Grassmann E e a sequência das codimensões do T-ideal $T(E)$. Assumimos que o corpo K é de característica 0.

Lema 2.1.1. *Seja $G = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$ o T-ideal de $K\langle X \rangle$ gerado pelo comutador triplo $[x_1, x_2, x_3]$. Então os polinômios*

$$[x_1, x_2][x_2, x_3] \ e \ [x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]$$

pertencem a G.

Demonstração. Usando a identidade

$$[uv, w] = [u, w]v + u[v, w]$$

obtemos que o polinômio $[x_1, x_2^2, x_3] \in G$ é dado por

$$[x_1, x_2^2, x_3] = [[x_1, x_2]x_2 + x_2[x_1, x_2], x_3] =$$

$$= [x_1, x_2, x_3]x_2 + [x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_2, x_3][x_1, x_2] + x_2[x_1, x_2, x_3].$$

Observando que o primeiro e último termo da soma pertencem a G, segue que

$$[x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_2, x_3][x_1, x_2] \in G.$$

Pela igualdade

$$[x_1, x_2][x_2, x_3] + [x_2, x_3][x_1, x_2] = 2[x_1, x_2][x_2, x_3] + [[x_2, x_3], [x_1, x_2]]$$

e por $[[x_2, x_3], [x_1, x_2]] = [x_2, x_3, [x_1, x_2]]$ pertencer a G temos que

$$[x_1, x_2][x_2, x_3] \in G.$$

A linearização desse polinômio é

$$f(x_1, x_2, x_2', x_3) = [x_1, x_2][x_2', x_3] + [x_1, x_2'][x_2, x_3]$$

e também pertence a G. Logo,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = [x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4] \in G,$$

concluindo o resultado. $\diamondsuit$

A demonstração do próximo teorema pode ser encontrada em [5, p. 50]. Outras demonstrações são dadas em [14] e [15].

Teorema 2.1.2. *Seja K um corpo de característica 0 e seja E a álgebra de Grassmann.*

(i) *O T-ideal $T(E)$ é gerado por $[x_1, x_2, x_3]$.*

(ii) *A n-ésima codimensão de $T(E)$ é $c_n(E) = 2^{n-1}$.*

Demonstração. Lembramos que Γ_n é o conjunto dos polinômios próprios e multilineares de grau n. Como a característica de K é zero, todo T-ideal é gerado pelos seus elementos próprios multilineares (ver Proposição 1.2.10).

(i) Denote por G o T-ideal $\langle [x_1, x_2, x_3] \rangle^T$. Devemos provar que

$$G \cap \Gamma_n = T(E) \cap \Gamma_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Exemplo 1.1.9 temos que $G \subset T(E)$ e portanto $G \cap \Gamma_n \subset T(E) \cap \Gamma_n$. Para provar a outra inclusão, basta mostrar que

$$\dim \Gamma_n / (T(E) \cap \Gamma_n) = \dim \Gamma_n / (G \cap \Gamma_n).$$

Fixado n, seja $w = [x_{i_1}, \dots, x_{i_k}] \dots [x_{j_1}, \dots, x_{j_t}]$ um elemento qualquer em Γ_n, dado pelo produto de comutadores. Denote por $\overline{w}$ e $\overline{\overline{w}}$ os elementos

$$\overline{w} = w + G \cap \Gamma_n \quad e \quad \overline{\overline{w}} = w + T(E) \cap \Gamma_n \ .$$

Se algum dos comutadores que formam w é de comprimento maior ou igual a três, então $\overline{w} = 0$. Em particular, se n é ímpar, então $\dim \Gamma_n/(G \cap \Gamma_n) = 0$. Se n é par, suponha $w = [x_{i_1}, x_{i_2}] \dots [x_{i_{2k-1}}, x_{i_{2k}}]$, $n = 2k$. A lei $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i]$ e o lema anterior mostram que trocando de lugares as variáveis em $\overline{w}$ obtemos um elemento igual a $\overline{w}$ a menos de um sinal negativo. Assim, se $u = [x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{2k-1}, x_{2k}]$, então $\overline{u}$ gera o espaço vetorial $\Gamma_n/(G \cap \Gamma_n)$. Como u não é uma identidade para E, pois

$$[e_1, e_2] \dots [e_{2k-1}, e_{2k}] = 2^k e_1 e_2 \dots e_{2k} \neq 0,$$

temos $\overline{\overline{u}} \neq 0$ e portanto $1 \leq \dim \Gamma_n/(T(E) \cap \Gamma_n) \leq \dim \Gamma_n/(G \cap \Gamma_n) \leq 1$, concluindo o resultado.

Chamamos a atenção do leitor para o fato que, com pequenas modificações, a mesma demonstração serve para corpos infinitos de característica diferente de 2. Nessa situação podemos trabalhar de novo com polinômios próprios, mas temos de considerar os polinômios próprios e *multihomogêneos*. Agora observamos que se f é um tal polinômio cujo grau em x_1 é ≥ 2, então a identidade $[x_2, x_1][x_3, x_1] = 0$ implica que f é consequência de $[x_1, x_2, x_3]$.

(ii) Denote por $\gamma_n(E) = \dim \Gamma_n/(T(E) \cap \Gamma_n)$ a *n-ésima codimensão própria*. Da prova do item (i) obtemos que $\gamma_n(E) = 0$ se n é ímpar e $\gamma_n(E) = 1$ se n é par, isto é, $\gamma_n(E) = (1/2)(1 + (-1)^n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 1.2.11 temos

$$c_n(E) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \gamma_k(E) = 2^{n-1},$$

concluindo o resultado. $\diamondsuit$

2.2 S_n-Representações

Nesta seção daremos alguns conceitos básicos da Teoria de representações de S_n. Os conceitos apresentados aqui podem ser vistos em [6] (na Seção 2.2). O corpo K será de característica 0. De uma maneira geral, a teoria das representações de grupos finitos está bem desenvolvida se o corpo-base é algebricamente fechado e de característica 0. Por outro lado, as representações irredutíveis do grupo S_n sobre o corpo dos racionais são *absolutamente* irredutíveis (isto é, permanecem irredutíveis sob extensões do corpo). Logo, no estudo das representações de S_n podemos assumir o corpo base qualquer corpo de característica 0.

Definição 2.2.1. *Seja $n \geq 1$ um número inteiro. Uma partição λ de n é uma sequência finita de inteiros $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ tal que $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r \geq 1$ e $\lambda_1 + \ldots + \lambda_r = n$. Neste caso escrevemos $\lambda \vdash n$.*

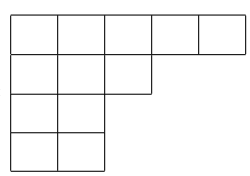
Dada uma permutação $\sigma \in S_n$, escreva-a como um produto de ciclos disjuntos (incluindo 1-ciclos): $\sigma = \pi_1\pi_2 \ldots \pi_r$, onde π_i é um ciclo de comprimento λ_i e $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r \geq 1$. Dizemos que $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ é o *tipo cíclico* de σ. Desta maneira, temos que as classes de conjugação de S_n estão em correspondência biunívoca com as partições de n. De fato, duas permutações determinam a mesma classe de conjugação se, e somente se, possuem o mesmo tipo cíclico.

Sabemos que o número de representações irredutíveis e não equivalentes de S_n é igual ao número de classes de conjugação do grupo. Assim, denote por χ_λ o S_n-caracter irredutível associado a $\lambda \vdash n$ e por d_λ o grau de χ_λ.

Definição 2.2.2. *Se $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \vdash n$, então o diagrama de Young associado a λ é o subconjunto finito de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definido por*

$$D_\lambda = \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid i = 1, \ldots, r \quad e \quad j = 1, \ldots, \lambda_i\}.$$

Representamos graficamente o diagrama de Young da seguinte maneira: substituímos os pontos por quadrados, sendo que a primeira coordenada i (o índice das linhas) cresce de cima para baixo e a segunda coordenada j cresce da esquerda para a direita. Por exemplo, o diagrama $D_{(5,\ 3,\ 2,\ 2)}$ é representado por

$D_{(5,\ 3,\ 2,\ 2)} =$ 

De um modo geral, se consideramos o primeiro quadrado da esquerda de cada linha, temos que um está abaixo do outro e a linha i é formada por λ_i quadrados.

Definição 2.2.3. *Seja $\lambda \vdash n$. Denote por λ'_j o comprimento da j-ésima coluna do diagrama D_λ. Dizemos que a partição $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$ é a partição conjugada de λ.*

Por exemplo, para a partição $\lambda = (5, 3, 2, 2)$, considerada anteriormente, temos que a sua conjugada será $\lambda' = (4, 4, 2, 1, 1)$.

Definição 2.2.4. *Seja $\lambda \vdash n$. Uma λ-tabela T_λ é um preenchimento dos quadrados de D_λ com os inteiros $1, 2, \ldots, n$. Se os inteiros em cada linha e em cada coluna de T_λ crescem da esquerda para a direita e de cima para baixo, respectivamente, então dizemos que a tabela é standard.*

Por exemplo, a tabela

$$T_{(5,\ 2,\ 1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 & 7 & 8 \\ \hline 5 & 2 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-2} 6 & \multicolumn{4}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

não é standard. A tabela

$$T_{(4,\ 4,\ 1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 8 & 9 \\ \hline 7 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

é standard.

Teorema 2.2.5. *Dada uma partição $\lambda \vdash n$, o número de λ-tabelas standard é igual a d_λ, o grau do caracter irredutível χ_λ.*

Definição 2.2.6. *Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \vdash n$ e $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$ a sua conjugada. O (i, j)-gancho de um diagrama D_λ, consiste do j-ésimo quadrado da i-ésima linha de D_λ junto com os $\lambda_i - j$ quadrados a direita dele e os $\lambda'_j - i$ quadrados abaixo dele. O comprimento do gancho é igual a $\lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$.*

Por exemplo, o $(1, 2)$-gancho de $D_{(4,\ 3,\ 1)}$ possui comprimento 4 e está abaixo marcado com X

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & X & X & X \\ \hline & X & & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Proposição 2.2.7 (Fórmula do Gancho)**.** *Seja λ uma partição de n e denote por h_{ij} o comprimento do seu (i, j)-gancho. Então, o grau do caracter irredutível χ_λ é dado por*

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod h_{ij}}$$

onde os índices (i, j) percorrem todos os quadrados de D_λ.

No que segue, descreveremos um conjunto completo de ideais minimais a esquerda de KS_n. Dada qualquer tabela T_λ, denote-a por $T_\lambda = D_\lambda(a_{ij})$, onde a_{ij} é o inteiro dentro do quadrado (i, j). Se $\sigma \in S_n$, defina

$$\sigma T_\lambda = \sigma D_\lambda(a_{ij}) = D_\lambda(\sigma(a_{ij})).$$

Por exemplo, para o 3-ciclo $\sigma = (1\ 2\ 3)$ temos

$$(1\ 2\ 3).\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \quad = \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Construiremos dois subgrupos R_{T_λ} e C_{T_λ} de S_n: os elementos de R_{T_λ} são chamados *permutações linhas* de $T_\lambda = D_\lambda(a_{ij})$; estas são as permutações $\sigma \in S_n$ tal que para todo i, j, ambos $\sigma(a_{ij})$ e a_{ij} estão na mesma linha. Similarmente, construímos o subgrupo C_{T_λ} das *permutações colunas* de T_λ. Note que R_{T_λ} e C_{T_λ} são ambos produtos diretos de grupos simétricos,

$$R_{T_\lambda} \cong S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \ldots \times S_{\lambda_r}, \qquad C_{T_\lambda} \cong S_{\lambda'_1} \times S_{\lambda'_2} \times \ldots \times S_{\lambda'_t},$$

onde $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ e $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_t)$ é a partição conjugada. Aqui, S_{λ_k} é o grupo simétrico que permuta os números $a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{k\lambda_k}$ (olhar para a k-ésima linha de T_λ). Analogamente, temos a descrição para $S_{\lambda'_k}$.

Definição 2.2.8. *Para uma dada tabela T_λ, definimos*

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sum_{\gamma \in C_{T_\lambda}} (-1)^\gamma \sigma\gamma.$$

Lema 2.2.9. *Seja λ uma partição de n com uma correspondente tabela T_λ e seja $\sigma \in S_n$. Então $e_{\sigma T_\lambda} = \sigma e_{T_\lambda} \sigma^{-1}$.*

Teorema 2.2.10. *Sejam $\lambda \vdash n$ e T_λ uma λ-tabela.*

(1) *O elemento e_{T_λ} é semi-idempotente. Mais precisamente, existe um elemento não nulo $\beta \in K$ tal que $e^2_{T_\lambda} = \beta e_{T_\lambda}$.*

(2) *O elemento e_{T_λ} gera um ideal minimal a esquerda de KS_n.*

(3) *Se μ é outra partição de n e T_μ é uma μ-tabela, então os S_n-módulos $KS_n e_{T_\lambda}$ e $KS_n e_{T_\mu}$ são isomorfos se, e somente se, $\lambda = \mu$.*

(4) *Todo S_n-módulo irredutível é isomorfo a $KS_n e_{T_\lambda}$ para algum λ.*

Denotamos por J_λ o S_n-módulo irredutível associado a partição $\lambda \vdash n$.

Proposição 2.2.11. *Se $T_1, \ldots, T_{d_\lambda}$ são todas as λ-tabelas standard, então I_λ, o ideal bilateral minimal de KS_n associado a λ, tem a decomposição*

$$I_\lambda = \bigoplus_{i=1}^{d_\lambda} KS_n e_{T_i}.$$

2.3 A_n-Representações

Os conceitos apresentados nesta seção foram extraídos de [10]. Caso o leitor esteja interessado em uma descrição mais detalhada dos resultados que serão vistos, então citamos [9]. O corpo K considerado ao longo desta seção será algebricamente fechado e de característica 0. O nosso objetivo é fornecer a decomposição de KA_n em ideais minimais a esquerda. Para isso, vamos introduzir uma função η que será de extrema importância.

Considere sobre o conjunto das partições de n a ordem lexicográfica a esquerda. Por exemplo, $(3,2,2) < (4,2,1)$ e também $(3,2,1,1) < (3,2,2)$. Como usual, dada uma partição λ de n, usaremos as notações λ' e χ_λ para denotarem a partição conjugada e o S_n-caracter irredutível associados a λ, respectivamente. Além disso, denote por $\overline{\chi}_\lambda$ a restrição de χ_λ a A_n.

Teorema 2.3.1. *Seja λ uma partição de n.*

(1) *Se $\lambda \neq \lambda'$, então $\overline{\chi}_\lambda$ é A_n-irredutível. Além disso, $\overline{\chi}_\lambda = \overline{\chi}_{\lambda'}$.*

(2) *Se $\lambda = \lambda'$, então $\overline{\chi}_\lambda = \overline{\chi}_{\lambda+} + \overline{\chi}_{\lambda-}$, onde $\overline{\chi}_{\lambda\pm}$ são A_n-irredutíveis com*

$$\deg \overline{\chi}_{\lambda+} = \deg \overline{\chi}_{\lambda-} = \frac{d_\lambda}{2} .$$

Mais ainda, estes são todos os A_n-caracteres irredutíveis.

Se $\lambda' < \lambda$, então no primeiro item do teorema, escolhemos $\overline{\chi}_\lambda$ para representar o A_n-caracter irredutível associado a $\{\lambda, \lambda'\}$. Esse teorema implica no seguinte.

Teorema 2.3.2. *Seja I_λ o ideal definido na Proposição 2.2.11. Para cada partição λ de n, seja $J_\lambda \subseteq I_\lambda$ um ideal minimal a esquerda de KS_n. Considere J_λ como um KA_n-módulo a esquerda.*

(1) *Se* $\lambda \neq \lambda'$, *então* J_λ *é* KA_n*-irredutível. Além disso,* $J_\lambda \cong J_{\lambda'}$ *como* KA_n*-módulos.*

(2) *Se* $\lambda = \lambda'$, *então* $J_\lambda = J_\lambda^+ \oplus J_\lambda^-$, *onde* J_λ^+ *e* J_λ^- *são* KA_n*-irredutíveis com* $\dim J_\lambda^+ = \dim J_\lambda^- = d_\lambda/2$.

Definição 2.3.3. *Seja* $\eta : KS_n \to KA_n$ *a função definida por linearidade e por* $\eta(\sigma) = \sigma + (-1)^\sigma \sigma$ *para todo* $\sigma \in S_n$.

Observe que η é um homomorfismo de KA_n-módulos a esquerda e $a \in KA_n$ se, e somente se, $\eta(a) = 2a$.

Sabemos que a cada caracter irredutível de KA_n está associado um ideal bilateral minimal de KA_n. Escreva

$$KA_n = \left[\bigoplus_{\lambda' < \lambda} \bar{I}_\lambda\right] \bigoplus \left[\bigoplus_{\lambda' = \lambda} (\bar{I}_\lambda^+ \bigoplus \bar{I}_\lambda^-)\right],$$

onde $\bar{I}_\lambda$, $\bar{I}_\lambda^+$ e $\bar{I}_\lambda^-$ estão associados a $\overline{\chi}_\lambda$, $\overline{\chi}_{\lambda+}$ e $\overline{\chi}_{\lambda-}$ respectivamente. Vamos caracterizar esses ideais a partir da decomposição de KS_n. Para isso, seja

$$KS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda,$$

onde I_λ é o ideal bilateral minimal de KS_n asssociado a λ.

Como a função η leva um KA_n-submódulo irredutível de KS_n em um módulo isomorfo ou em zero, segue o teorema.

Teorema 2.3.4. *Seja* λ *uma partição de* n.

(1) *Se* $\lambda' < \lambda$, *então* $\eta(I_\lambda \oplus I_{\lambda'}) = \eta(I_\lambda) = \eta(I_{\lambda'}) = \bar{I}_\lambda$.

(2) *Se* $\lambda = \lambda'$, *então* $\eta(I_\lambda) = \bar{I}_\lambda^+ \oplus \bar{I}_\lambda^-$.

Agora, seja e_λ o elemento identidade da álgebra simples I_λ. Então e_λ é um elemento central em KS_n e também idempotente. Se $\lambda = \lambda'$, mostra-se que $e_\lambda \in KA_n$ e portanto pode ser escrito como uma soma

$$e_\lambda = e_\lambda^+ + e_\lambda^-,$$

onde e_λ^+ e e_λ^- pertencem a $\bar{I}_\lambda^+$ e $\bar{I}_\lambda^-$ respectivamente.

Teorema 2.3.5. *Seja λ uma partição de n, onde $n \geq 2$.*

(1) *Seja $\lambda = \lambda'$. Denote por $T_1, \ldots, T_h$ as λ-tabelas standard que possuem 1 e 2 na primeira linha. Então $\bar{I}_\lambda^+ \oplus \bar{I}_\lambda^- \subset I_\lambda$ e $\bar{I}_\lambda^u$, para $u = \pm$, decompõe-se em uma soma de ideais minimais a esquerda de KA_n como segue:*

$$\bar{I}_\lambda^u = \bigoplus_{i=1}^{h} KA_n e_\lambda^u \eta(e_{T_i}).$$

(2) *Seja $\lambda' < \lambda$. Então $\bar{I}_\lambda \subset I_\lambda \oplus I_{\lambda'}$ e $\bar{I}_\lambda$ decompõe-se em uma soma direta de ideais minimais a esquerda de KA_n como segue:*

$$\bar{I}_\lambda = \bigoplus_{T_\lambda \ standard} KA_n \eta(e_{T_\lambda}).$$

2.4 A-codimensão e A-cocaracter

Nesta seção, discutiremos os fatos mais importantes do artigo [8]. Para isso, seja K um corpo algebricamente fechado e de característica 0.

Seja P_n o conjunto dos polinômios multilineares em $x_1, \ldots, x_n$. Relembramos aqui a Definição 1.2.8, onde a função $\varphi : KS_n \to P_n$ é definida por linearidade e por $\varphi(\sigma) = x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}$ para todo $\sigma \in S_n$. Como φ é um isomorfismo de S_n-módulos, quando não houver confusão, usaremos a mesma notação para um elemento $f \in KS_n$ e sua imagem em P_n. Pela identificação $KS_n \equiv P_n$, temos a seguinte definição:

Definição 2.4.1. *Seja R uma PI-álgebra com T-ideal $T(R)$. O S_n-caracter de*

$$\frac{KS_n}{KS_n \cap T(R)}$$

é chamado o n-ésimo cocaracter de R e é denotado por $\chi_n(R)$.

Observe que, o grau de $\chi_n(R)$ é justamente a n-ésima codimensão de R, denotada por $c_n(R)$.

Lembrando que P_n^A é o conjunto dos A-polinômios de grau n, temos que $\varphi(KA_n) = P_n^A$. Assim, fazendo a identificação $KA_n \equiv P_n^A$ temos a seguinte definição.

Definição 2.4.2. *Seja R uma PI-álgebra com T-ideal $T(R)$. Denote por $\chi_n^A(R)$ o A_n-caracter associado a*

$$\frac{KA_n}{KA_n \cap T(R)} \quad e \quad c_n^A(R) = \dim\left[\frac{KA_n}{KA_n \cap T(R)}\right].$$

Dizemos que $\chi_n^A(R)$ é o n-ésimo A-cocaracter de R. Dizemos também, que $c_n^A(R)$ é a n-ésima A-codimensão de R.

Agora, vamos definir dois conjuntos de partições de n. Para isso, denote

$$(n-j, 1^j) = (n-j, \overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{j}).$$

Pois bem, sejam $H = \{(n-j, 1^j) \mid 0 \leq j \leq n-1\}$ e $H^* = H \setminus \{(n), (1^n)\}$.

Teorema 2.4.3. *O n-ésimo cocaracter da álgebra de Grassmann é*

$$\chi_n(E) = \sum_{\lambda \in H} \chi_\lambda.$$

A demonstração do teorema pode ser encontrada em [5, p. 234]. Enunciamos agora, o principal resultado de [8] e que será usado por nós.

Teorema 2.4.4. *A n-ésima A-codimensão e o A_n-cocaracter da álgebra de Grassmann são determinados abaixo.*

(1) $c_n^A(E) = 2^{n-1} - 1$.

(2) $\chi_n^A(E) = \overline{\chi}_{(n)} + \sum_{\lambda \in H^*} \overline{\chi}_\lambda$.

Omitimos a demonstração do teorema, mas colocamos abaixo, uma das ferramentas que são usadas em sua demonstração e que será útil para determinar as identidades pares de grau 5 para a álgebra das matrizes triangulares superiores $U_2(K)$. Trata-se dos cocaracteres e codimensões locais.

Definição 2.4.5. *Seja I_λ o ideal bilateral de KS_n associado a partição λ e R uma PI-álgebra. Denotamos por L_λ o S_n-caracter associado a*

$$I_\lambda/(I_\lambda \cap T(R)) \quad e \quad c_\lambda = \dim[I_\lambda/(I_\lambda \cap T(R))].$$

Dizemos que L_λ é o S_n-cocaracter local de R associado a λ. Dizemos também que c_λ é a S_n-codimensão local de R associada a λ.

Para a próxima definição, usaremos as notações da seção anterior para os ideais bilaterais minimais de KA_n. Isto é, temos a decomposição

$$KA_n = \left[\bigoplus_{\lambda'<\lambda} \bar{I}_\lambda\right] \bigoplus \left[\bigoplus_{\lambda'=\lambda} (\bar{I}_\lambda^+ \bigoplus \bar{I}_\lambda^-)\right].$$

Definição 2.4.6. *Seja R uma PI-álgebra. Definimos os A_n-cocaracteres locais L_λ^A, $L_\lambda^{A\pm}$ e as A_n-codimensões locais c_λ^A, $c_\lambda^{A\pm}$ de R da seguinte maneira:*

(1) *Se $\lambda' < \lambda$, então L_λ^A é o A_n-caracter associado a*

$$\bar{I}_\lambda/(\bar{I}_\lambda \cap T(R)) \quad e \quad c_\lambda^A = \dim[\bar{I}_\lambda/(\bar{I}_\lambda \cap T(R))].$$

(2) *Se $\lambda' = \lambda$, então $L_\lambda^{A\pm}$ é o A_n-caracter associado a*

$$\bar{I}_\lambda^\pm/(\bar{I}_\lambda^\pm \cap T(R)) \quad e \quad c_\lambda^{A\pm} = \dim[\bar{I}_\lambda^\pm/(\bar{I}_\lambda^\pm \cap T(R))].$$

Proposição 2.4.7. *Seja R uma PI-álgebra.*

(1) *Se $\lambda' < \lambda$, então $c_\lambda^A \leq c_\lambda + c_{\lambda'}$, $c_\lambda \leq c_\lambda^A$ e $c_{\lambda'} \leq c_\lambda^A$.*

(2) *Se $\lambda' = \lambda$, então $c_\lambda^{A+} + c_\lambda^{A-} \leq c_\lambda$.*

2.5 A-identidades da Álgebra de Grassmann

Mostramos na Proposição 1.3.2 que o polinômio

$$[x_1, x_2x_3]x_4 - x_4[x_1, x_3x_2] \tag{2.1}$$

é uma A-identidade para a álgebra de Grassmann E. Além disso, na Conjetura 1.2 de [8], os autores conjeturaram que o polinômio acima gera todas as A-identidades de E no sentido *forte*.

Conjetura 2.5.1. *Sejam $\sigma \in A_n$ e $0 \leq r \leq n-4$. Denote por $p_{r,\sigma}$ e $q_{r,\sigma}$ os monômios*

$$p_{r,\sigma} = x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(r)} \quad e \quad q_{r,\sigma} = x_{\sigma(r+5)} \dots x_{\sigma(n)}.$$

Defina $f_{r,\sigma}$ como sendo o A-polinômio

$$f_{r,\sigma} = p_{r,\sigma}([x_{\sigma(r+1)}, x_{\sigma(r+2)}x_{\sigma(r+3)}]x_{\sigma(r+4)} - x_{\sigma(r+4)}[x_{\sigma(r+1)}, x_{\sigma(r+3)}x_{\sigma(r+2)}])q_{r,\sigma}.$$

*Então os polinômios $f_{r,\sigma}$ geram o espaço vetorial de **todas** as A-identidades de grau n para E.*

Observe que todos os $f_{r,\sigma}$ são A-identidades.

Observe também que o análogo da conjetura acima não é válido considerando-se as identidades ordinárias da álgebra de Grassmann. Pode ser demonstrado que para obter um análogo da afirmação dessa conjetura no caso de identidades ordinárias, temos de considerar os dois polinômios:

$$[x_1, x_2, x_3], \quad [x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_3][x_2, x_4]$$

no lugar de $[x_1, x_2x_3]x_4 - x_4[x_1, x_3x_2]$.

Nesta seção, daremos uma resposta afirmativa para a conjetura acima. Para isso, primeiramente demonstramos o seguinte teorema. Ele é o principal resultado deste capítulo.

Teorema 2.5.2. *Seja $V(n)$ o espaço vetorial gerado por todos os polinômios $f_{r,\sigma}$, onde $0 \leq r \leq n-4$ e $\sigma \in A_n$. Então*

$$\dim \frac{P_n^A}{V(n)} = 2^{n-1} - 1.$$

Observe que o Teorema 2.5.2 implica imediatamente a resposta afirmativa para a Conjetura 2.5.1. De fato, como $V(n) \subseteq P_n^A \cap T(E)$, se para algum n a inclusão fosse própria, então teríamos

$$\dim P_n^A/V(n) > \dim P_n^A/(P_n^A \cap T(E)) = c_n^A(E).$$

Mas pelo Teorema 2.4.4 temos $c_n^A(E) = 2^{n-1} - 1$, o que é uma contradição.

Provaremos o Teorema 2.5.2 por indução sobre n. Primeiro daremos algumas propriedades de $V(n)$. Considerando o módulo quociente $P_n^A/V(n)$, denotamos por $y_{\sigma(1)}y_{\sigma(2)}\dots y_{\sigma(n)}$ a imagem de $x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\dots x_{\sigma(n)}$ no quociente, isto é,

$$y_{\sigma(1)}y_{\sigma(2)}\dots y_{\sigma(n)} = x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\dots x_{\sigma(n)} + V(n).$$

Sejam m_1 e m_2 dois "monômios" e

$$f = \sum_g \alpha_g \cdot g, \ \alpha_g \in K,$$

uma combinação linear de monômios g tais que $m_1 f m_2 \in P_n^A/V(n)$. Por comodidade, em uma igualdade

$$m_1 f m_2 = 0$$

escreveremos apenas
$$*f* = 0,$$
isto é, por estarmos interessados apenas na análise de f, substituímos m_1 e m_2 por um $*$. Usaremos também a notação, e talvez esta será a mais utilizada,
$$\sum_g \alpha_g(*g*) = 0.$$
Assim, da identidade básica (2.1) temos:

Lema 2.5.3. *A igualdade*

$$*y_a y_b y_c y_d * - * y_d y_a y_c y_b * - * y_b y_c y_a y_d * + * y_d y_c y_b y_a * = 0 \tag{2.2}$$

vale em $P_n^A/V(n)$ para todo a, b, c, d.

Note que a igualdade acima significa

$$m_1 y_a y_b y_c y_d m_2 - m_1 y_d y_a y_c y_b m_2 - m_1 y_b y_c y_a y_d m_2 + m_1 y_d y_c y_b y_a m_2 = 0$$

para determinados monômios m_1 e m_2. De agora em diante, em uma igualdade todo asterisco do lado esquerdo representará um mesmo monômio. O mesmo vale para asteriscos do lado direito.

Lema 2.5.4. *O espaço vetorial $P_n^A/V(n)$ é gerado pelos monômios do tipo $y_{\sigma(1)}y_{\sigma(2)}\dots y_{\sigma(n)}$, onde y_n ocupa uma das três últimas posições. Em outras palavras*
$$\sigma(n-2) = n \ \ ou \ \ \sigma(n-1) = n \ \ ou \ \ \sigma(n) = n.$$

Demonstração. Seja $m = y_{\alpha(1)} \dots y_{\alpha(n)}$ um monômio qualquer em $P_n^A/V(n)$, onde y_n ocupa a k-ésima posição. Se $k < n-2$, então identifique m com o primeiro monômio da igualdade (2.2), isto é,

$$a = n, \ b = \alpha(k+1), \ c = \alpha(k+2), \ d = \alpha(k+3).$$

Observe que em (2.2) a variável y_a aparece na primeira posição (após o $*$ esquerdo), apenas no primeiro somando. Portanto, m é uma combinação linear de três monômios, onde a variável y_n aparece em cada um deles na posição $k+1$ ou $k+2$ ou $k+3$. Aplicando indução nos três monômios, temos o desejado. $\diamondsuit$

Definição 2.5.5. *Sejam $1 \leq i, j \leq n$ dois números distintos. Denote por $H(i,j)$ o espaço vetorial gerado pelos monômios $y_{\sigma(1)} \dots y_{\sigma(n)}$ tais que $\sigma(i) = n$ e $\sigma(j) = n-2$, isto é, monômios tais que as variáveis y_n e y_{n-2} ocupam as posições i e j respectivamente.*

Lema 2.5.6. *O espaço vetorial $P_n^A/V(n)$ é a soma de seus subespaços $H(i,j)$ tais que $i \geq n-3$ e $j \geq n-3$.*

Demonstração. Assim como na prova do lema anterior, observe o comportamento das variáveis y_a e y_c na igualdade (2.2). $\diamondsuit$

Seja

$$H = \sum_{j=n-3}^{n-1} H(n,j) + \sum_{i=n-3}^{n-1} H(i,n).$$

Isso significa que H é o espaço vetorial gerado pelos monômios, cuja última posição é ocupada por y_n ou por y_{n-2}.

A afirmação a seguir é um passo importante na demonstração do Teorema 2.5.2.

Proposição 2.5.7. $P_n^A/V(n) = H + H(n-1, n-2) + H(n-2, n-1)$.

Demonstração. Usaremos várias vezes a igualdade (2.2):

$$*y_a y_b y_c y_d * - * y_d y_a y_c y_b * - * y_b y_c y_a y_d * + * y_d y_c y_b y_a * = 0.$$

Pelo Lema 2.5.6, devemos " eliminar " $H(n-2, n-3)$, $H(n-1, n-3)$, $H(n-3, n-2)$ e $H(n-3, n-1)$.

Caso 1. Seja $m = y_{\sigma(1)} \dots y_{\sigma(n-4)} y_{n-2} y_n y_{\sigma(n-1)} y_{\sigma(n)} \in H(n-2, n-3)$. Nós reescrevemos (2.2) da seguinte maneira

$$*y_d y_a y_c y_b * = *y_a y_b y_c y_d * - * y_b y_c y_a y_d * + * y_d y_c y_b y_a * \ .$$

Identificando $d = n-2$, $a = n$, $c = \sigma(n-1)$ e $b = \sigma(n)$ na igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} *y_{n-2} y_n y_{\sigma(n-1)} y_{\sigma(n)} = *y_n y_{\sigma(n)} y_{\sigma(n-1)} y_{n-2} \quad &- \quad *y_{\sigma(n)} y_{\sigma(n-1)} y_n y_{n-2} \\ &+ \quad *y_{n-2} y_{\sigma(n-1)} y_{\sigma(n)} y_n. \end{aligned}$$

Todos os monômios do lado direito da igualdade pertencem a H. Portanto, $m \in H$.

Caso 2. Seja $m = y_{\sigma(1)} \dots y_{\sigma(n-4)} y_n y_{n-2} y_{\sigma(n-1)} y_{\sigma(n)} \in H(n-3, n-2)$. Procedemos como no caso 1, com a única diferença que trocamos de lugares n e $n-2$, isto é, identificamos $d = n$, $a = n-2$, e repetimos o argumento acima.

Caso 3. Seja $m = y_{\sigma(1)} \dots y_{\sigma(n-4)} y_{n-2} y_{\sigma(n-2)} y_n y_{\sigma(n)} \in H(n-1, n-3)$. Aqui nós reescrevemos (2.2) como

$$*y_d y_c y_b y_a* = - * y_a y_b y_c y_d * + * y_d y_a y_c y_b * + * y_b y_c y_a y_d *$$

e identificamos $d = n-2$, $c = \sigma(n-2)$, $b = n$ e $a = \sigma(n)$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} *y_{n-2} y_{\sigma(n-2)} y_n y_{\sigma(n)} = - * y_{\sigma(n)} y_n y_{\sigma(n-2)} y_{n-2} \quad &+ \quad *y_{n-2} y_{\sigma(n)} y_{\sigma(n-2)} y_n \\ &+ \quad *y_n y_{\sigma(n-2)} y_{\sigma(n)} y_{n-2}. \end{aligned}$$

Como no caso 1, todos os monômios da direita da igualdade pertencem a H. Portanto, $m \in H$.

Caso 4. Seja $m = y_{\sigma(1)} \dots y_{\sigma(n-4)} y_n y_{\sigma(n-2)} y_{n-2} y_{\sigma(n)} \in H(n-3, n-1)$. Assim como foi feito antes (ver caso 2), é suficiente trocar de lugares d e b no caso 3, isto é , identificar $d = n$ e $b = n-2$.

Portanto, todas as possibilidades foram consideradas e a demonstração da proposição está completa. $\diamondsuit$

Corolário 2.5.8. $P_n^A / V(n) = H + H(n-2, n-1)$.

Demonstração. Seja $m = y_{\sigma(1)} \dots y_{\sigma(n-4)} y_{\sigma(n-3)} y_{n-2} y_n y_{\sigma(n)} \in H(n-1, n-2)$. Escreva (2.2) como

$$*y_a y_b y_c y_d* = *y_d y_a y_c y_b * + * y_b y_c y_a y_d * - * y_d y_c y_b y_a *,$$

e identifique $a = \sigma(n-3)$, $b = n-2$, $c = n$ e $d = \sigma(n)$. Assim

$$\begin{aligned} *y_{\sigma(n-3)} y_{n-2} y_n y_{\sigma(n)} = *y_{\sigma(n)} y_{\sigma(n-3)} y_n y_{n-2} \quad &+ \quad *y_{n-2} y_n y_{\sigma(n-3)} y_{\sigma(n)} \\ &- \quad *y_{\sigma(n)} y_n y_{n-2} y_{\sigma(n-3)}. \end{aligned}$$

Então $m \in H + H(n-2, n-3) + H(n-2, n-1)$. Mas $H(n-2, n-3) \subseteq H$, como já foi mostrado no Caso 1 da demonstração da última proposição. Portanto, o corolário está provado. $\diamondsuit$

Lema 2.5.9. *As igualdades* $[y_1 y_2, y_3, y_4 y_5] = 0$ *e* $[y_1 y_2, y_3 y_4, y_5] = 0$ *são verificadas em* $P_5^A / V(5)$.

Demonstração. A demonstração é um simples cálculo:

$$[y_1y_2, y_3, y_4y_5] = y_1y_2y_3y_4y_5 - y_3y_1y_2y_4y_5 - y_4y_5y_1y_2y_3 + y_4y_5y_3y_1y_2.$$

Agora, transformamos o segundo termo da soma usando (2.2):

$$\begin{aligned} -y_3y_1y_2y_4y_5 &= -(y_4y_3y_2y_1 + y_1y_2y_3y_4 - y_4y_2y_1y_3)y_5 \\ &= -y_4(y_5y_3y_1y_2 + y_2y_1y_3y_5 - y_5y_1y_2y_3) \\ &\quad -y_1y_2y_3y_4y_5 + y_4y_2y_1y_3y_5 \\ &= -y_4y_5y_3y_1y_2 + y_4y_5y_1y_2y_3 - y_1y_2y_3y_4y_5. \end{aligned}$$

Portanto, $[y_1y_2, y_3, y_4y_5] = 0$ em $P_5^A/V(5)$. Pela Identidade de Jacobi, temos que a segunda igualdade segue da primeira, pois

$$[y_1y_2, y_3y_4, y_5] = [y_1y_2, y_5, y_3y_4] - [y_3y_4, y_5, y_1y_2]$$

e os dois termos do lado direito da igualdade são nulos sobre $P_5^A/V(5)$. ♢

Corolário 2.5.10. *Se $n \geq 3$, então*

$$*[y_1y_2, y_3y_4, \ldots, y_{2n-1}y_{2n}]* = 0.$$

Demonstração. Como

$$[y_1y_2, y_3y_4, y_5y_6] = y_5[y_1y_2, y_3y_4, y_6] + [y_1y_2, y_3y_4, y_5]y_6,$$

temos pelo Lema 2.5.9 que $[y_1y_2, y_3y_4, y_5y_6] = 0$. Segue o resultado. ♢

Proposição 2.5.11. *Sejam $n \geq 4$ e $m = *y_ny_{n-2}m'$ um monômio. Se m' possui comprimento par, então $m \in H$.*

Demonstração. Pelo Corolário 2.5.10, reduzimos m a uma combinação linear de monômios da forma $*y_ny_{n-2}y_ay_b$ e monômios em H. Mas $*y_ny_{n-2}y_ay_b \in H(n-3, n-2) \subseteq H$, onde a última inclusão foi provada na Proposição 2.5.7, Caso 2. ♢

Segue um exemplo para facilitar a compreensão. Seja $m = y_6y_4y_1y_2y_3y_5$. Observe que na notação da última proposição, temos $n = 6$ e $m' = y_1y_2y_3y_5$. O monômio $*$ é de comprimento nulo. De acordo com o Corolário 2.5.10, temos $[y_6y_4, y_1y_2, y_3y_5] = 0$ e portanto

$$y_6y_4 \cdot y_1y_2 \cdot y_3y_5 = y_1y_2 \cdot y_6y_4 \cdot y_3y_5 + y_3y_5 \cdot y_6y_4 \cdot y_1y_2 - y_3y_5 \cdot y_1y_2 \cdot y_6y_4.$$

Os dois primeiros termos da soma, do lado direito da igualdade, pertencem a $H(n-3, n-2) \subseteq H$ e o último termo da soma pertence a H por definição.

Lema 2.5.12. *Seja* $m = *y_ay_by_ny_{n-2}y_c* \in (P_n^A/V(n)) \setminus H$ *um monômio. Então existem* $h_1, h_2 \in H$ *tais que:*

$$m = *y_ny_{n-2}y_ay_by_c * + h_1 \ ; \quad m = *y_by_cy_ny_{n-2}y_a * + h_2.$$

Demonstração. Segue da Proposição 2.5.11 que o asterisco do lado direito em m significa um monômio de comprimento par (caso contrário $m \in H$). De acordo com o Lema 2.5.9, temos $[y_1y_2, y_3y_4, y_5] = 0$. Isso significa que

$$y_1y_2y_3y_4y_5 - y_3y_4y_1y_2y_5 - y_5y_1y_2y_3y_4 + y_5y_3y_4y_1y_2 = 0.$$

Agora coloque a e b nos lugares dos índices 1 e 2, n e $n-2$ nos lugares de 3 e 4, e c no lugar de 5, e multiplique por $*$ sobre a esquerda e direita. Preste atenção para o fato que $*y_cy_ay_by_ny_{n-2}*$ e $*y_cy_ny_{n-2}y_ay_b*$ pertencem a H pela Proposição 2.5.11, uma vez que o $*$ do lado direito é de comprimento par. Isso prova a existência de h_1.

Para h_2 usaremos a igualdade $[y_1y_2, y_3, y_4y_5] = 0$ obtida no Lema 2.5.9. Substituímos os índices 1 e 2 por n e $n-2$, e 3, 4, 5 por a, b, c, respectivamente. Então observe que $*y_ny_{n-2}y_ay_by_c* \equiv *y_ay_by_ny_{n-2}y_c * \pmod H$ de acordo com a primeira igualdade, uma vez que o $*$ do lado direito é um monômio de comprimento par. Assim, o segundo e o quarto somando em

$$\begin{aligned} *[y_ny_{n-2}, y_a, y_by_c]* &= + * y_ny_{n-2}y_ay_by_c * - * y_ay_ny_{n-2}y_by_c * \\ &\quad - * y_by_cy_ny_{n-2}y_a * + * y_by_cy_ay_ny_{n-2}* \end{aligned}$$

pertencem a H, e o primeiro e terceiro nos fornecem exatamente a segunda igualdade. $\diamondsuit$

Lema 2.5.13. *Seja* $m = *y_ay_ny_{n-2}y_by_c* \in (P_n^A/V(n)) \setminus H$ *um monômio. Então* $m = *y_cy_ny_{n-2}y_ay_b * + h_3$ *para algum* $h_3 \in H$*. Em outras palavras, módulo* H*, podemos fazer permutações cíclicas das letras* y_a*,* y_b*,* y_c *em* m*.*

Demonstração. O $*$ do lado direito de m é um monômio de comprimento ímpar, pois caso contrário $m \in H$. Então repetimos o argumento da segunda igualdade no Lema 2.5.12, substituindo em $[y_1y_2, y_3, y_4y_5] = 0$ os índices 1, 2, 3 por a, b, c, e 4 e 5 por n e $n-2$, respectivamente. Assim

$$*(y_ay_by_cy_ny_{n-2} - y_cy_ay_by_ny_{n-2} - y_ny_{n-2}y_ay_by_c + y_ny_{n-2}y_cy_ay_b)* = 0.$$

Os últimos dois somandos pertencem a H, pois o $*$ do lado direito é de comprimento ímpar. Nós transformamos os dois primeiros da seguinte maneira.

O asterisco do lado direito acima é $* = y_d m_1$ para algum monômio m_1. Então nós aplicamos a primeira igualdade do Lema 2.5.12, primeiro a $y_b y_c y_n y_{n-2} y_d$ e depois a $y_a y_b y_n y_{n-2} y_d$:

$$\begin{aligned} *y_a y_b y_c y_n y_{n-2} y_d m_1 - *y_a y_n y_{n-2} y_b y_c y_d m_1 &\in H, \\ *\, y_c y_a y_b y_n y_{n-2} y_d m_1 - *y_c y_n y_{n-2} y_a y_b y_d m_1 &\in H, \end{aligned}$$

Assim, concluímos a demonstração. $\diamondsuit$

Observação 2.5.14. *Chamamos a atenção do leitor para o fato que, em todos os resultados desta seção, usamos apenas permutações pares das variáveis, isto é, quando fazemos uma permutação das variáveis de um monômio par, obtemos um monômio par.*

Lema 2.5.15. *Seja* $m = y_{\sigma(1)} \dots y_{\sigma(n-3)} y_n y_{n-2} y_{\sigma(n)} \in H(n-2, n-1)$ *um monômio. Então*

$$m = y_1 y_2 \dots y_{n-4} y_{n-3} y_n y_{n-2} y_{n-1} + h$$

para algum polinômio $h \in H$.

Demonstração. Vamos analisar os casos abaixo:
Caso $n = 4$). Neste caso, temos que $m = y_1 y_4 y_2 y_3$ ou $m = y_3 y_4 y_2 y_1$. Observe que o segundo monômio não pode ocorrer em $P_4^A / V(4)$, pois corresponde a uma permutação ímpar.

Caso $n = 5$). Seja $m = y_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} y_5 y_3 y_{\sigma(5)}$. Pela segunda igualdade do Lema 2.5.12, se permutamos ciclicamente as variáveis $y_{\sigma(1)}$, $y_{\sigma(2)}$ e $y_{\sigma(5)}$ em m, obtemos um monômio $y_1 y_{\lambda(2)} y_5 y_3 y_{\lambda(5)}$ igual m, a menos de um polinômio em H. Como $\lambda \in A_5$, temos que $\lambda(2) = 2$ e $\lambda(5) = 4$.

Caso $n > 5$). Primeiro mostraremos que $m = m' + h$ para algum $h \in H$, onde a primeira posição do monômio m' é ocupada por y_1. Assim, seja $\sigma(1) \neq 1$ em m. No Lema 2.5.12, a primeira parte será usada para localizar y_1 em m e a segunda, para mover y_1 para a esquerda, isto é, pela primeira parte, podemos mover o bloco $y_n y_{n-2}$ para a esquerda até obtermos uma das igualdades:

$$m = *y_n y_{n-2} y_1 * + h_1 \quad \text{ou} \quad m = *y_1 y_n y_{n-2} * + h_1,$$

para algum $h_1 \in H$. Agora, pela segunda parte do Lema 2.5.12, podemos mover y_1 uma ou duas posições para a esquerda do bloco $y_n y_{n-2}$. Fazemos este processo de localização de y_1 e deslocamento para a esquerda, até que y_1 ocupe a primeira posição no monômio. Pode ocorrer neste processo a situação $m = y_a y_n y_{n-2} y_1 y_b + h_2$ para algum $h_2 \in H$. Observe que não podemos aplicar o Lema 2.5.12 nesta situação, pois a esquerda do bloco $y_n y_{n-2}$ temos um monômio de comprimento 1. Neste caso, usamos o Lema 2.5.13. Assim, existe um monômio m' nas condições acima. Escrevendo $m' = y_1 m''$, podemos usar o argumento acima para variável y_2 e m'', e assim por diante. $\diamondsuit$

Lema 2.5.16. *Temos* $\dim P_4^A/V(4) = 2^{4-1} - 1 = 7$.

Demonstração. Pelo Corolário 2.5.8, temos que $P_4^A/V(4) = H + H(2,3)$. Uma vez que os monômios que geram H são pares e possuem final y_2 ou y_4, segue que $\dim H \leq 6$. Pelo Caso $n = 4$ do Lema 2.5.15, obtemos que $H(2,3)$ é gerado apenas por $y_1 y_4 y_2 y_3$. Como $V(4) \subseteq P_4^A \cap T(E)$, temos

$$\dim P_4^A/(P_4^A \cap T(E)) \leq \dim P_4^A/V(4) \leq 6 + 1$$

e portanto, pelo Teorema 2.4.4 concluímos a demonstração. $\diamondsuit$

Demonstração do Teorema 2.5.2. Provaremos por indução. Suponha que

$$\dim P_{n-1}^A/V(n-1) = 2^{n-2} - 1$$

para algum $n \geq 5$. Pelo Corolário 2.5.8 e Lema 2.5.15 temos

$$P_n^A/V(n) = H(n-2, n-1) + H \quad \text{e} \quad \dim P_n^A/V(n) \leq 1 + \dim H.$$

Mas, por indução, temos que $\dim H \leq (2^{n-2} - 1) + (2^{n-2} - 1)$. Logo,

$$\dim P_n^A/V(n) \leq 1 + \dim H \leq 1 + 2^{n-1} - 2 = 2^{n-1} - 1.$$

Como $V(n) \subseteq T(E) \cap P_n^A$, segue do Teorema 2.4.4 a relação

$$2^{n-1} - 1 = \dim P_n^A/(T(E) \cap P_n^A) \leq \dim P_n^A/V(n) \leq 2^{n-1} - 1,$$

concluindo desta maneira o resultado. Em outras palavras, temos que

$$V(n) = T(E) \cap P_n^A$$

e assim a Conjetura de Henke e Regev é verdadeira. $\diamondsuit$

Capítulo 3

Álgebra $U_n(K)$

3.1 Identidades de $U_n(K)$

O objetivo desta seção é descrever uma base para as identidades polinomiais da álgebra das matrizes triangulares superiores. Essa base foi exibida por Maltsev [16] no caso em que o corpo K é de característica 0. Consideramos nesta seção o corpo K arbitrário mas infinito.

Seja R uma PI-álgebra com T-ideal $T(R)$. Denote por $F(R)$ a álgebra

$$F(R) = \frac{K\langle X\rangle}{K\langle X\rangle \cap T(R)}.$$

Se $p \in K\langle X\rangle$, então representaremos por $\overline{p} = p + K\langle X\rangle \cap T(R)$ a sua imagem em $F(R)$. Assim, definimos $B(R) = \{\overline{p} \mid p \in B\}$, onde B é o conjunto dos polinômios próprios de $K\langle X\rangle$. Observe que $B(R) = B/B \cap T(R)$.

Seja M o subconjunto de $K\langle X\rangle$ formado pelos monômios do tipo

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n},$$

onde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $a_i \geq 0$. Estas notações serão usadas durante toda a seção.

A importância dos polinômios próprios justifica-se pelo seguinte resultado.

Teorema 3.1.1. *[5, p. 46]. Seja $\beta \subset B$ um conjunto de polinômios multihomogêneos tais que $\overline{\beta} = \{\overline{p} \mid p \in \beta\}$ é uma base para o espaço vetorial $B(R)$. Então o conjunto*

$$\{\overline{mp} \mid m \in M \text{ e } p \in \beta\}$$

é uma base para $F(R)$.

Teorema 3.1.2. *Seja $U_k(K)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem k.*

(i) *O T-ideal $T(U_k(K))$ é gerado pelo polinômio*

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \dots [x_{2k-1}, x_{2k}].$$

(ii) *Seja β o conjunto formado pelos polinômios*

$$[x_{i_{11}}, x_{i_{21}}, \dots, x_{i_{p_1 1}}][x_{i_{12}}, x_{i_{22}}, \dots, x_{i_{p_2 2}}] \dots [x_{i_{1r}}, x_{i_{2r}}, \dots, x_{i_{p_r r}}],$$

onde o número r de comutadores é $\leq k-1$ e os índices em cada comutador $[x_{i_{1j}}, x_{i_{2j}}, \dots, x_{i_{p_j j}}]$ satisfazem as desigualdades $i_{1j} > i_{2j} \leq i_{3j} \leq \dots \leq i_{p_j j}$. Então o conjunto

$$\{\overline{mp} \mid m \in M \text{ e } p \in \beta\}$$

é uma base para a álgebra $F(U_k(K))$.

Demonstração. Denote por W o quociente

$$W = \frac{B}{B \cap \langle [x_1, x_2] \dots [x_{2k-1}, x_{2k}] \rangle^T},$$

onde $\langle [x_1, x_2] \dots [x_{2k-1}, x_{2k}] \rangle^T$ é o T-ideal gerado por $[x_1, x_2] \dots [x_{2k-1}, x_{2k}]$. Uma vez que o corpo é infinito, temos que todo T-ideal é gerado por seus elementos próprios (ver Proposição 1.2.10). Logo, devemos mostrar que

$$B \cap T(U_k(K)) = B \cap \langle [x_1, x_2] \dots [x_{2k-1}, x_{2k}] \rangle^T.$$

Pelo Exemplo 1.1.7, temos que a inclusão $\supseteq$ é válida. Assim, para provar a igualdade, analisaremos W. Mostraremos que a imagem dos elementos de β em W geram W como espaço vetorial. Depois mostraremos que a imagem dos elementos de β em $B(U_k(K))$ é um conjunto linearmente independente, concluindo assim o resultado.

Se $f(x_1, \dots, x_n) \in B$, então denote por $f(y_1, \dots, y_n)$ a sua imagem em W, isto é,

$$f(y_1, \dots, y_n) = f(x_1, \dots, x_n) + B \cap \langle [x_1, x_2] \dots [x_{2k-1}, x_{2k}] \rangle^T.$$

Pela simplicidade da exposição, daremos apenas a demonstração dos casos $k = 2$ e $k = 3$. O caso geral é similar.

Caso $k = 2$: Pela igualdade

$$[y_1, y_2][y_3, y_4] = 0,$$

temos que W é gerado por 1 e por todos comutadores $[y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n}]$. Usando a identidade

$$0 = [y_1, y_2][y_3, y_4] - [y_3, y_4][y_1, y_2] = [[y_1, y_2], [y_3, y_4]] =$$

$$= [y_1, y_2, y_3, y_4] - [y_1, y_2, y_4, y_3],$$

vemos que em W

$$[y_1, y_2, y_{\sigma(3)}, \ldots, y_{\sigma(n)}] = [y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n],$$

onde σ é uma permutação de $\{3, 4, \ldots, n\}$. Agora, usamos a lei anticomutativa e a identidade de Jacobi para mudar os lugares das variáveis nas primeiras três posições:

$$[y_1, y_2] = -[y_2, y_1] \ \text{ e } \ [y_3, y_2, y_1] = [y_3, y_1, y_2] - [y_2, y_1, y_3].$$

Assim, podemos assumir que W é gerado por 1 e por todos comutadores

$$[y_{i_1}, y_{i_2}, y_{i_3}, \ldots, y_{i_n}], \ i_1 > i_2 \leq i_3 \leq \ldots \leq i_n.$$

Observe que esses elementos são, de acordo com o item (ii) do teorema, imagem em W dos elementos de β. Mostraremos que a imagem dos elementos de β em $B(U_2(K))$ é um conjunto linearmente independente. Seja

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_i \alpha_i [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}], \ \alpha_i \in K,$$

uma combinação linear não trivial dos elementos de β. Denotamos por $\bar{i}_1$ o maior índice i_1 com a propriedade $\alpha_i \neq 0$ e consideramos o elemento

$$z_j = \begin{cases} e_{12} + a_j e_{22} & \text{se } j = \bar{i}_1 \\ a_j e_{22} & \text{se } j \neq \bar{i}_1 \end{cases}$$

onde $a_j \in K$. Temos que

$$f(z_1, \ldots, z_m) = \left(\sum_{\bar{i}_1} \alpha_i a_{i_2} \ldots a_{i_n} \right) e_{12}$$

é diferente de 0 para alguns escalares $a_1, \ldots, a_m$, pois o corpo K é infinito. Logo, $f(x_1, \ldots, x_m)$ não é identidade para $U_2(K)$ e isso completa a prova. Observe que o item (ii) é uma consequência do Teorema 3.1.1.

Caso $k = 3$: Aplicando a identidade

$$[[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5] = [[x_1, x_2, x_5], [x_3, x_4]] + [[x_1, x_2], [x_3, x_4, x_5]],$$

obtemos que

$$[[x_1, \ldots, x_t], [x_{t+1}, \ldots, x_r], x_{r+1}, \ldots, x_n]$$

é uma combinação linear de produtos de dois comutadores. Por esse fato e pela demonstração do caso $k = 2$, isto é, pela igualdade

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = [x_1, x_2, x_4, x_3] + [[x_1, x_2], [x_3, x_4]],$$

pela lei anticomutativa e pela identidade de Jacobi, concluímos que

$$[x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_n}] = f + g, \tag{3.1}$$

onde f é uma combinação linear de polinômios

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}],\ i_1 > i_2 \leq i_3 \leq \ldots \leq i_n,$$

e g é uma combinação linear de produtos de dois comutadores.

Pela igualdade

$$[y_1, y_2][y_3, y_4][y_5, y_6] = 0,$$

temos que W é gerado por 1, todos comutadores

$$[y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n}] \tag{3.2}$$

e todos produtos de dois comutadores

$$[y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n}][y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_q}]. \tag{3.3}$$

Assim, pela igualdade em (3.1), temos que W é gerado por elementos em (3.2) e (3.3) tais que

$$i_1 > i_2 \leq i_3 \leq \ldots \leq i_n \ \text{ e } \ j_1 > j_2 \leq j_3 \leq \ldots \leq j_q.$$

Observe que esses elementos são imagem dos elementos de β em W. Mostraremos que a imagem de β em $B(U_3(K))$ é um conjunto linearmente independente. Seja

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_m) &= \sum \alpha_{ij}[x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_p}][x_{j_1},x_{j_2},\ldots,x_{j_q}] + \\ & \sum \alpha_l[x_{l_1},x_{l_2},\ldots,x_{l_r}] \end{aligned}$$

uma combinação linear dos elementos de β. Suponha f uma identidade para $U_3(K)$. Se algum α_l, na segunda somatória, é um escalar não nulo, então pelo fato da primeira somatória ser uma identidade para $U_2(K)$ e, em particular, f também ser, temos que

$$\sum \alpha_l[x_{l_1},x_{l_2},\ldots,x_{l_r}]$$

é uma identidade para $U_2(K)$. Absurdo, pelo caso $k=2$. Assim,

$$f(x_1,\ldots,x_m) = \sum \alpha_{ij}[x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_p}][x_{j_1},x_{j_2},\ldots,x_{j_q}].$$

Seja $\bar{i}_1$ o valor máximo para i_1 tal que $\alpha_{ij}\neq 0$. Denote por $\bar{j}_1$ o valor máximo para j_1 tal que $\alpha_{ij}\neq 0$ e $i_1=\bar{i}_1$. Se $\bar{i}_1\neq\bar{j}_1$ defina

$$z_l = \begin{cases} e_{12}+a_le_{22}+b_le_{33} & \text{se} \quad l=\bar{i}_1, \\ e_{23}+a_le_{22}+b_le_{33} & \text{se} \quad l=\bar{j}_1, \\ a_le_{22}+b_le_{33} & \text{se} \quad l\neq\bar{i}_1,\bar{j}_1, \end{cases}$$

onde $a_l,b_l\in K$. Se $l=\bar{i}_1=\bar{j}_1$ defina

$$z_l = e_{12}+e_{23}+a_le_{22}+b_le_{33}.$$

Assim,

$$f(z_1,\ldots,z_m) = \left(\sum_{\bar{i}_1,\bar{j}_1}\alpha_{ij}a_{i_2}\ldots a_{i_p}(b_{j_2}-a_{j_2})\ldots(b_{j_q}-a_{j_q})\right)e_{13}$$

e isso pode ser feito diferente de 0. Logo, a imagem dos elementos de β em $B(U_3(K))$ é um conjunto linearmente independente e isso completa a demonstração.

3.2 A-identidades de $U_2(K)$

Denote por $d(n)$ o grau mínimo de uma A-identidade para a álgebra $U_n(K)$. Nesta seção, vamos determinar $d(n)$ para $n = 1, 2, 3$ e 4 e descrever todas as A-identidades para $U_2(K)$ de grau $d(2) = 5$, usando a teoria das representações do grupo A_n.

Lema 3.2.1. *O grau mínimo de uma A-identidade para a álgebra $U_1(K) = K$ é $d(1) = 3$.*

Demonstração. Observe que x_1x_2 não é uma A-identidade para K, mas

$$[x_1, x_2x_3] = x_1x_2x_3 - x_2x_3x_1$$

é uma A-identidade em toda álgebra comutativa. ♢

Proposição 3.2.2. *Seja R uma PI-álgebra com n-ésima codimensão $c_n(R)$. Se*

$$c_n(R) < \frac{1}{2} \cdot n!,$$

então R possui uma A-identidade de grau n.

Demonstração. Como $\dim P_n^A = n!/2$, temos que os monômios pares formam um conjunto linearmente dependente em $P_n/P_n \cap T(R)$ e portanto temos uma A-identidade. ♢

Lema 3.2.3. *O grau mínimo de uma A-identidade para a álgebra $U_2(K)$ é $d(2) = 5$.*

Demonstração. Foi mostrado no Teorema 3.1.2 que o polinômio $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ gera todas as identidades polinomiais de $U_2(K)$. Assim, se existisse uma A-identidade f de grau 4, então f seria uma combinação linear do tipo

$$\begin{aligned} &\alpha_{12}[x_1, x_2][x_3, x_4] + \alpha_{13}[x_1, x_3][x_2, x_4] + \alpha_{14}[x_1, x_4][x_2, x_3] + \\ &+\alpha_{23}[x_2, x_3][x_1, x_4] + \alpha_{24}[x_2, x_4][x_1, x_3] + \alpha_{34}[x_3, x_4][x_1, x_2]. \end{aligned}$$

Sejam $i < j$ e $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Temos que um dos monômios $x_ix_jx_kx_l$ e $x_ix_jx_lx_k$ é ímpar e ambos aparecem em f multiplicados pelo escalar α_{ij}. Assim, como f é par, devemos ter $\alpha_{ij} = 0$. Em [6, p. 88] encontramos que $c_5(U_2(K)) = 50$ e portanto pela Proposição 3.2.2 temos que $U_2(K)$ possui uma A-identidade de grau 5. ♢

Para determinar as A-identidades de grau 5 para $U_2(K)$, vamos precisar antes de alguns resultados.

Definição 3.2.4. *Para cada $1 \leq i < j \leq 5$ defina a 5-upla $\gamma_{ij} = b_1b_2b_3b_4b_5$ da seguinte maneira:*

$$b_k = \begin{cases} X & se \quad k = i \ \ ou \ \ k = j \\ O & se \quad k \neq i \ \ e \ \ k \neq j \end{cases}$$

Observe que γ_{ij} é uma fila de símbolos, onde as posições i, j na fila são ocupadas por X e o restante das posições são ocupadas por O.

Por exemplo, $\gamma_{12} = XXOOO$ e $\gamma_{25} = OXOOX$.

Definição 3.2.5. *Seja Γ o espaço vetorial com base $\{\gamma_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 5\}$. Dizemos que um elemento $\gamma \in \Gamma$ é triangular se ele satisfaz os 3 itens abaixo:*

(1) *Seja $b_1b_2b_3b_4b_5$ um elemento qualquer da base e denote por α o seu coeficiente em γ. Se α' é o coeficiente de $b_2b_1b_3b_5b_4$, então*

$$\alpha + \alpha' = 0.$$

(2) *Seja $b_1b_2b_3b_4b_5$ um elemento qualquer da base e denote por α o seu coeficiente em γ. Se α' e α'' são os coeficientes de $b_1b_2b_4b_5b_3$ e $b_1b_2b_5b_3b_4$, então*

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = 0.$$

(3) *Seja $b_1b_2b_3b_4b_5$ um elemento qualquer da base e denote por α o seu coeficiente em γ. Se α' e α'' são os coeficientes de $b_2b_3b_1b_4b_5$ e $b_3b_1b_2b_4b_5$, então*

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = 0.$$

Pela definição, se

$$\gamma = \sum_{i<j} \alpha_{ij}\gamma_{ij}, \ \ \alpha_{ij} \in K,$$

é triangular, então os coeficientes α_{ij} se relacionam. Por exemplo, se

$$b_1b_2b_3b_4b_5 = \gamma_{13} = XOXOO,$$

então

$$b_2b_1b_3b_5b_4 = \gamma_{23} = OXXOO$$

e portanto, pelo item (1) da definição, temos

$$\alpha_{13} + \alpha_{23} = 0.$$

De um modo geral, os elementos triangulares são determinados pelas soluções do sistema linear homogêneo associado a matriz

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (3,4) & (3,5) & (4,5) \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccccc}
2 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & & & & & 1 & 1 & \\
 & & & & & & & & & 2 \\
3 & & & & & & & & & \\
 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & & & & & & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & & 1 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & & 1 & & 1 & \\
 & & & & & & & & & 3
\end{array}\right]
\end{array}.$$

As colunas são indexadas pelos pares (i, j), onde $i < j$ e os espaços em branco correspondem a parte da matriz preenchida com o escalar 0. As linhas de 1 a 6 foram obtidas pelo item (1) da Definição 3.2.5, as linhas de 7 a 10 pelo item (2), e as linhas de 11 a 14 pelo item (3). Observe que se γ é triangular, então $\alpha_{12} = \alpha_{45} = 0$. Logo a frente usaremos os elementos triangulares γ e $\bar{\gamma}$ definidos por

$$\gamma = 2\gamma_{13} - \gamma_{14} - \gamma_{15} - 2\gamma_{23} + \gamma_{24} + \gamma_{25},$$
$$\bar{\gamma} = -\gamma_{13} + \gamma_{14} + \gamma_{23} - \gamma_{25} - \gamma_{34} + \gamma_{35}.$$

Definição 3.2.6. *Sejam x_a e x_b duas variáveis distintas fixadas, sendo que $1 \leq a, b \leq 5$. Para cada $1 \leq i < j \leq 5$ defina o polinômio multilinear f_{ij} por*

$$f_{ij} = \sum_{\sigma} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} x_{\sigma(5)},$$

onde a soma é sobre todas as permutações pares $\sigma \in A_5$ que satisfazem $\{\sigma(i), \sigma(j)\} = \{a, b\}$.

Pela definição, temos que f_{ij} é a soma dos monômios pares, cujas posições i e j são ocupadas por x_a e x_b. Por exemplo, se $a = 2$ e $b = 4$, então

$$\begin{aligned} f_{15} \;\; = \;\; & x_2x_1x_3x_5x_4 + x_2x_3x_5x_1x_4 + x_2x_5x_1x_3x_4 + \\ & + x_4x_1x_5x_3x_2 + x_4x_5x_3x_1x_2 + x_4x_3x_1x_5x_2. \end{aligned}$$

Relembrando a Definição 1.3.1, seja P_n^A o espaço vetorial de todos polinômios pares de grau n.

Teorema 3.2.7. *Seja Γ o espaço vetorial com base $\{\gamma_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 5\}$. Defina o operador linear T por*

$$\begin{array}{rccc} T: & \Gamma & \rightarrow & P_5^A \\ & \gamma_{ij} & \rightarrow & f_{ij} \end{array}.$$

Se γ é triangular, então $T(\gamma)$ é A-identidade para $U_2(K)$.

Demonstração. Seja $\{i_1, \ldots, i_5\} = \{1, \ldots, 5\}$. Mostraremos que $T(\gamma)$ se anula sobre as substituições:

(1) $x_{i_1} = \ldots = x_{i_5} = e_{11}$;

(2) $x_{i_1} = x_{i_2} = x_{i_3} = x_{i_4} = e_{11}$ e $x_{i_5} = e_{12}$;

(3) $x_{i_1} = x_{i_2} = x_{i_3} = e_{11}$, $x_{i_4} = e_{12}$ e $x_{i_5} = e_{22}$;

(4) $x_{i_1} = x_{i_2} = e_{11}$, $x_{i_3} = e_{12}$ e $x_{i_4} = x_{i_5} = e_{22}$;

(5) $x_{i_1} = e_{11}$, $x_{i_2} = e_{12}$ e $x_{i_3} = x_{i_4} = x_{i_5} = e_{22}$;

(6) $x_{i_1} = e_{12}$ e $x_{i_2} = x_{i_3} = x_{i_4} = x_{i_5} = e_{22}$;

(7) $x_{i_1} = \ldots = x_{i_5} = e_{22}$.

Para isso, denote por $i_1 i_2 i_3 i_4 i_5$ o coeficiente de $x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5}$ em $T(\gamma)$. Fixe duas variáveis x_a e x_b como na Definição 3.2.6.

Caso (3): Suponha que $x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5}$ é um monômio par. Como $T(\gamma)$ é par, temos que

$$i_1 i_3 i_2 i_4 i_5 = i_2 i_1 i_3 i_4 i_5 = i_3 i_2 i_1 i_4 i_5 = 0$$

e portanto $T(\gamma)$, para as substituições deste caso, é dado por

$$(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 + i_2 i_3 i_1 i_4 i_5 + i_3 i_1 i_2 i_4 i_5) e_{12}.$$

Seja $x_a = x_{i_l}$ e $x_b = x_{i_t}$ em $x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5}$ e assuma, sem perda de generalidade, que $l < t$. Então o coeficiente de γ_{lt} em γ é $i_1 i_2 i_3 i_4 i_5$. Como γ é triangular, temos pelo item (3) da Definição 3.2.5 que

$$i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 + i_2 i_3 i_1 i_4 i_5 + i_3 i_1 i_2 i_4 i_5 = 0$$

e portanto $T(\gamma)$ se anula neste caso. Se $x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5}$ é um monômio ímpar, então usamos o mesmo raciocínio para o monômio par $x_{i_2} x_{i_1} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5}$.

Caso (4): Suponha que $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}$ é um monômio par. Como $T(\gamma)$ é par, temos que

$$i_1i_2i_3i_5i_4 = i_2i_1i_3i_4i_5 = 0$$

e portanto $T(\gamma)$, para as substituições deste caso, é dado por

$$(i_1i_2i_3i_4i_5 + i_2i_1i_3i_5i_4)e_{12}.$$

Seja $x_a = x_{i_l}$ e $x_b = x_{i_t}$ em $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}$ e assuma, sem perda de generalidade, que $l < t$. Então o coeficiente de γ_{lt} em γ é $i_1i_2i_3i_4i_5$. Como γ é triangular, temos pelo item (1) da Definição 3.2.5 que

$$i_1i_2i_3i_4i_5 + i_2i_1i_3i_5i_4 = 0$$

e portanto $T(\gamma)$ se anula neste caso. Se $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}$ é um monômio ímpar, então usamos o mesmo raciocínio para o monômio par $x_{i_2}x_{i_1}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}$.

Caso (5): Suponha que $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}$ é um monômio par. Como $T(\gamma)$ é par, temos que

$$i_1i_2i_3i_5i_4 = i_1i_2i_4i_3i_5 = i_1i_2i_5i_4i_3 = 0$$

e portanto $T(\gamma)$, para as substituições deste caso, é dado por

$$(i_1i_2i_3i_4i_5 + i_1i_2i_4i_5i_3 + i_1i_2i_5i_3i_4)e_{12}.$$

Seja $x_a = x_{i_l}$ e $x_b = x_{i_t}$ em $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}$ e assuma, sem perda de generalidade, que $l < t$. Então o coeficiente de γ_{lt} em γ é $i_1i_2i_3i_4i_5$. Como γ é triangular, temos pelo item (2) da Definição 3.2.5 que

$$i_1i_2i_3i_4i_5 + i_1i_2i_4i_5i_3 + i_1i_2i_5i_3i_4 = 0 \tag{3.4}$$

e portanto $T(\gamma)$ se anula neste caso. Se $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}$ é um monômio ímpar, então usamos o mesmo raciocínio para o monômio par $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_5}x_{i_4}$.

Caso (6): Suponha que $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}$ é um monômio par. Fazendo as substituições, temos que $T(\gamma)$ é dado por

$$\left(\sum_{\sigma} \sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4)\sigma(5)\right) e_{12}, \tag{3.5}$$

onde a somatória é sobre todas as permutações $\sigma \in A_5$ tais que $\sigma(1) = i_1$. Assim, pela igualdade (3.4) temos que o coeficiente de e_{12} em (3.5) é nulo. Se

$x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}$ é um monômio ímpar, então usamos o mesmo raciocínio para o monômio par $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_5}x_{i_4}$.

Caso (7): Suponha que $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}$ é um monômio par. Fazendo as substituições, temos que $T(\gamma)$ é dado por

$$\left(\sum_{\sigma\in A_5}\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4)\sigma(5)\right)e_{22}. \tag{3.6}$$

Assim, pela igualdade (3.4) temos que o coeficiente de e_{22} em (3.6) é nulo. Se $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}$ é um monômio ímpar, então usamos o mesmo raciocínio para o monômio par $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_5}x_{i_4}$.

As demonstrações dos casos (1) e (2) são similares as dos casos (7) e (6) respectivamente. Se substituímos em $T(\gamma)$ as variáveis por outras matrizes unitárias, que não foram consideradas nos 7 casos, então $T(\gamma)$ se anulará, pois o produto

$$e_{i_1j_1}e_{i_2j_2}e_{i_3j_3}e_{i_4j_4}e_{i_5j_5}$$

é não nulo se, e somente se,

$$i_1 \leq j_1 = i_2 \leq j_2 = i_3 \leq j_3 = i_4 \leq j_4 = i_5 \leq j_5.$$

Assim, concluímos que $T(\gamma)$ é uma A-identidade para $U_2(K)$. $\diamondsuit$

Defina as tabelas T_1, T_2, T_3 e T_4 por

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array} \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array} \quad T_3 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array} \quad T_4 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}\ .$$

Denote por R_i e C_i o conjunto das permutações linha e coluna, respectivamente, da tabela T_i. Assim, temos associado à tabela T_i o elemento semi-idempotente

$$e_i = \sum_{\sigma\in R_i}\sum_{\gamma\in C_i}(-1)^{\gamma}\sigma\gamma.$$

Lembramos que esse elemento já foi definido e caracterizado anteriormente na Definição 2.2.8 e Teorema 2.2.10. Lembramos também que a álgebra de grupo KA_n e o conjunto dos A-polinômios P_n^A são A_n-módulos isomorfos naturalmente e portanto fazemos a identificação $KA_n \equiv P_n^A$ da seguinte maneira

$$\sigma \equiv x_{\sigma(1)}\dots x_{\sigma(n)},$$

onde $\sigma \in A_n$. Agora, considere o homomorfismo η da Definição 2.3.3.

Teorema 3.2.8. *O conjunto das A-identidades de grau 5 para $U_2(K)$ é um A_5-módulo gerado pelos polinômios*

$$\eta(e_1 + (4\ 5)e_2) \quad e \quad \eta(e_3 - (4\ 5)e_4 - (2\ 3)e_2).$$

Esses elementos geram A_5-módulos irredutíveis e distintos.

Demonstração. Para mostrar que $\eta(e_1 + (4\ 5)e_2)$ é uma A-identidade para $U_2(K)$, fixaremos $x_a = x_2$ e $x_b = x_4$ na Definição 3.2.6. Temos

$$e_1 = \sum_{\sigma\in R_1}\sum_{\gamma\in C_1}(-1)^{\gamma}\sigma\gamma = \left[\sum_{\sigma\in R_1}\sigma\right][1 - (1\ 2) - (3\ 4) + (1\ 2)(3\ 4)],$$

e portanto, identificando e_1 como um polinômio, vale a igualdade

$$e_1 = \left[\sum_{\sigma\in R_1}\sigma\right][x_1x_2x_3x_4x_5 - x_2x_1x_3x_4x_5 - x_1x_2x_4x_3x_5 + x_2x_1x_4x_3x_5].$$

Olhando para a tabela T_1, obtemos que R_1 é o conjunto das permutações $\sigma \in S_5$ tais que

$$\{\sigma(1), \sigma(3), \sigma(5)\} = \{1, 3, 5\} \ \text{ e } \ \{\sigma(2), \sigma(4)\} = \{2, 4\}.$$

Assim,

$$\eta(e_1) = f_{24} - f_{14} - f_{23} + f_{13}.$$

Como $T_2 = (4\ 5)T_1$, temos pelo Lema 2.2.9 que $e_2 = (4\ 5)e_1(4\ 5)$ e portanto

$$\begin{aligned}(4\,5)e_2 &= e_1(4\,5) = \left[\sum_{\sigma\in R_1}\sigma\right][1 - (1\ 2) - (3\ 4) + (1\ 2)(3\ 4)][(4\ 5)] = \\ &= \left[\sum_{\sigma\in R_1}\sigma\right][x_1x_2x_3x_5x_4 - x_2x_1x_3x_5x_4 - x_1x_2x_4x_5x_3 + x_2x_1x_4x_5x_3].\end{aligned}$$

Assim,

$$\eta((4\ 5)e_2) = f_{25} - f_{15} - f_{23} + f_{13}.$$

Como o elemento

$$\gamma = 2\gamma_{13} - \gamma_{14} - \gamma_{15} - 2\gamma_{23} + \gamma_{24} + \gamma_{25}$$

é triangular, segue do Teorema 3.2.7 que

$$\eta(e_1 + (4\ 5)e_2) = T(\gamma)$$

é uma A-identidade para $U_2(K)$.

Para mostrar que $\eta(e_3 - (4\,5)e_4 - (2\,3)e_2)$ é uma A-identidade para $U_2(K)$, fixaremos $x_a = x_3$ e $x_b = x_5$ na Definição 3.2.6. Temos

$$e_3 = \sum_{\sigma \in R_3} \sum_{\gamma \in C_3} (-1)^{\gamma} \sigma \gamma = \left[\sum_{\sigma \in R_3} \sigma \right] [1 - (1\ 3) - (2\ 5) + (1\ 3)(2\ 5)],$$

e portanto, identificando e_3 como um polinômio, vale a igualdade

$$e_3 = \left[\sum_{\sigma \in R_1} \sigma \right] [x_1x_2x_3x_4x_5 - x_3x_2x_1x_4x_5 - x_1x_5x_3x_4x_2 + x_3x_5x_1x_4x_2].$$

Olhando para a tabela T_3, obtemos que R_3 é o conjunto das permutações $\sigma \in S_5$ tais que

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(4)\} = \{1, 2, 4\} \;\text{ e }\; \{\sigma(3), \sigma(5)\} = \{3, 5\}.$$

Assim,

$$\eta(e_3) = f_{35} - f_{15} - f_{23} + f_{12}.$$

Como $T_4 = (4\ 5)T_3$, temos pelo Lema 2.2.9 que $e_4 = (4\ 5)e_3(4\ 5)$ e portanto

$$\begin{aligned}(4\,5)e_4 &= e_3(4\,5) = \left[\sum_{\sigma \in R_3} \sigma \right] [1 - (1\ 3) - (2\ 5) + (1\ 3)(2\ 5)][(4\ 5)] = \\ &= \left[\sum_{\sigma \in R_3} \sigma \right] [x_1x_2x_3x_5x_4 - x_3x_2x_1x_5x_4 - x_1x_5x_3x_2x_4 + x_3x_5x_1x_2x_4].\end{aligned}$$

Assim,

$$\eta((4\ 5)e_4) = f_{34} - f_{14} - f_{23} + f_{12}.$$

Como $T_2 = (2\ 3)T_3$, temos pelo Lema 2.2.9 que $e_2 = (2\ 3)e_3(2\ 3)$ e portanto

$$\begin{aligned}(2\,3)e_2 &= e_3(2\,3) = \left[\sum_{\sigma \in R_3} \sigma \right] [1 - (1\ 3) - (2\ 5) + (1\ 3)(2\ 5)][(2\ 3)] = \\ &= \left[\sum_{\sigma \in R_3} \sigma \right] [x_1x_3x_2x_4x_5 - x_3x_1x_2x_4x_5 - x_1x_3x_5x_4x_2 + x_3x_1x_5x_4x_2].\end{aligned}$$

Assim,

$$\eta((2\ 3)e_2) = f_{25} - f_{15} - f_{23} + f_{13}.$$

Como o elemento

$$\gamma = -\gamma_{13} + \gamma_{14} + \gamma_{23} - \gamma_{25} - \gamma_{34} + \gamma_{35}$$

é triangular, segue do Teorema 3.2.7 que

$$\eta(e_3 - (4\ 5)e_4 - (2\ 3)e_2) = T(\gamma)$$

é uma A-identidade para $U_2(K)$.

Provaremos agora que as duas A-identidades geram módulos disjuntos. Como $(1\ 3) \in L_2$, temos que $(1\ 3)e_2 = e_2$. Assim, pelo fato de η ser um homomorfismo de A_5-módulos, segue que

$$\eta(e_1 + (4\ 5)e_2) = \eta(e_1) + (4\ 5)(1\ 3)\eta(e_2).$$

Como $(1\ 2) \in L_4$ e $(1\ 4) \in L_2$, temos que

$$\eta(e_3 - (4\ 5)e_4 - (2\ 3)e_2) = \eta(e_3) - (4\ 5)(1\ 2)\eta(e_4) - (2\ 3)(1\ 4)\eta(e_2).$$

Pelo item (2) do Teorema 2.3.5, temos que a soma

$$\sum_{i=1}^{4} KA_5 \cdot \eta(e_i)$$

é direta e portanto segue o resultado.

Pela Proposição 2.2.7 (Fórmula do Gancho), sabemos que a dimensão do S_5-módulo irredutível associado a partição $\lambda = (3, 2)$ é 5. Como λ não é auto-conjugada, isto é, $\lambda \neq \lambda'$, temos que os A_5-módulos irredutíveis associados a $\{\lambda, \lambda'\}$ possuem dimensão 5. Assim, o conjunto das A-identidades de grau 5 para $U_2(K)$ possui dimensão

$$\dim \left[P_5^A \cap T(U_2(K))\right] \geq 10.$$

Pode ser mostrado que a dimensão é exatamente 10, mas isso consiste em resolver um sistema linear formado por 60 colunas e 50 linhas, o que é um pouco trabalhoso. Assim, omitimos a demonstração deste fato. $\diamondsuit$

Lema 3.2.9. *Seja f um polinômio multilinear de grau m. Se*

$$f(e_{i_1j_1},\ldots,e_{i_mj_m})=0$$

para todas matrizes unitárias $e_{i_1j_1},\ldots,e_{i_mj_m}\in U_n(K)$, onde $j_l=n$ para algum $1\leq l\leq m$, então f é uma identidade para $U_n(K)$.

Demonstração. Se $j\in\mathbb{N}$, defina $\bar{j}\in\{1,\ldots,n\}$ por

$$j\equiv\bar{j}\ (\mathrm{mod}\ n).$$

Fixado $t\in\mathbb{N}$ defina a função $\varphi:M_n(K)\to M_n(K)$ por linearidade e por

$$\varphi(e_{ij})=e_{\overline{i+t}\ \overline{j+t}}\ .$$

Temos que φ é um isomorfismo de álgebras.

Agora, se f não é uma identidade para $U_n(K)$, então por uma mudança de variáveis, podemos supor

$$f(e_{i_1j_1},\ldots,e_{i_mj_m})\neq 0,$$

onde $j_k=i_{k+1}$ para todo $k=1,\ldots,m-1$. Assim,

$$i_1\leq j_1\leq i_2\leq j_2\leq\ldots\leq i_m\leq j_m<n.$$

Se $t=n-j_m$, então pelo isomorfimo φ temos

$$\begin{aligned}\varphi(f(e_{i_1j_1},\ldots,e_{i_mj_m})) &= f(\varphi(e_{i_1j_1}),\ldots,\varphi(e_{i_mj_m}))\\ &= f(e_{i_1+tj_1+t},\ldots,e_{i_m+tj_m+t})\neq 0.\end{aligned}$$

Absurdo, pois $j_m+t=n$. ♢

Lema 3.2.10. *Se $1\leq k<n$, então $T(U_n(K))$ é o produto dos T-ideais*

$$T(U_n(K))=T(U_k(K))\cdot T(U_{n-k}(K)).$$

Demonstração. Uma vez que o polinômio $[x_1,x_2][x_3,x_4]\ldots[x_{2n-1},x_{2n}]$ gera $T(U_n(K))$ e é multilinear, temos que toda identidade para $U_n(K)$ é uma combinação linear de elementos do tipo

$$m_1[m_2,m_3][m_4,m_5]\ldots[m_{2n},m_{2n+1}]m_{2n+2},$$

onde m_i é um monômio. Pela igualdade $[x_i,x_jx_k]=x_j[x_i,x_k]+[x_i,x_j]x_k$, temos que $T(U_n(K))$ é gerado como espaço vetorial por elementos do tipo

$$u_1[x_{i_1},x_{j_1}]u_2[x_{i_2},x_{j_2}]u_3[x_{i_3},x_{j_3}]\ldots u_n[x_{i_n},x_{j_n}]u_{n+1}, \tag{3.7}$$

onde u_i é um monômio. Segue o resultado. ♢

Teorema 3.2.11. *Seja $d(n)$ o menor grau de uma A-identidade para $U_n(K)$. Então*

$$d(n) + 3 \geq d(n+1) \geq d(n) + 2.$$

Demonstração. Suponha que $f(x_1, \ldots, x_t)$ seja uma A-identidade de grau $t \leq d(n) + 1$ para $U_{n+1}(K)$. Então

$$g = f(x_1, \ldots, x_t) x_{t+1} x_{t+2} \ldots x_{d(n)+1}$$

é uma A-identidade de grau $d(n) + 1$ para $U_{n+1}(K)$. Se o coeficiente do monômio $x_1 x_2 \ldots x_{d(n)+1}$ em g é nulo, então multiplicamos g por uma permutação par σ, de modo que $x_1 x_2 \ldots x_{d(n)+1}$ apareça com coeficiente não nulo em σg. Assim, assuma que $x_1 x_2 \ldots x_{d(n)+1}$ possui coeficiente não nulo em g. Agora escreva

$$g = \sum g_{ij} x_i x_j,$$

onde g_{ij} é um polinômio multilinear nas variáveis

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{d(n)+1}\} - \{x_i, x_j\}.$$

Escreva $h = g_{(d(n),\ d(n)+1)}$ e sejam $e_{i_1 j_1}, e_{i_2 j_2}, \ldots, e_{(i_{d(n)-1}, j_{d(n)-1})} \in U_n(K)$, onde $j_l = n$ para algum $1 \leq l \leq d(n) - 1$. Então existe $\alpha \in K$ tal que

$$h(e_{i_1 j_1}, e_{i_2 j_2}, \ldots, e_{(i_{d(n)-1}, j_{d(n)-1})}) = \alpha e_{in},$$

para algum $1 \leq i \leq n$. Uma vez que

$$g(e_{i_1 j_1}, e_{i_2 j_2}, \ldots, e_{(i_{d(n)-1}, j_{d(n)-1})}, e_{(n,n+1)}, e_{(n+1,n+1)}) = \alpha e_{(i,n+1)} = 0,$$

temos que $\alpha = 0$ e portanto pelo Lema 3.2.9 segue que h é uma identidade para $U_n(K)$. Como h é par e possui grau $d(n)-1$, temos um absurdo. Agora, seja $f(x_1, \ldots, x_{d(n)})$ uma A-identidade para $U_n(K)$. Pelo Lema 3.2.10 temos

$$T(U_{n+1}(K)) = T(U_n(K)) \cdot T(U_1(K))$$

e portanto

$$f(x_1, \ldots, x_{d(n)})[x_{d(n)+1}, x_{d(n)+2} x_{d(n)+3}]$$

é uma A-identidade de grau $d(n) + 3$ para $U_{n+1}(K)$. $\diamondsuit$

Corolário 3.2.12. *O grau mínimo de uma A-identidade para $U_3(K)$ é 8.*

Demonstração. Como $d(2) = 5$, temos pelo Teorema 3.2.11 que $d(3) \geq 7$. Suponha que f seja uma A-identidade de grau 7 para $U_3(K)$. Vamos denotar o coeficiente do monômio $x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(7)}$ por $\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(7)$. Sem perda de generalidade, seja $1234567 \neq 0$.

(i) Fazendo a substituição em f dada por

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ || & || & || & || & || & || & || \\ e_{11} & e_{11} & e_{12} & e_{22} & e_{22} & e_{23} & e_{33} \end{array}$$

obtemos a seguinte relação entre os coeficientes:

$$1234567 + 2135467 = 0.$$

(ii) Fazendo a substituição em f dada por

$$\begin{array}{ccccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_5 & x_4 & x_6 & x_7 \\ || & || & || & || & || & || & || \\ e_{11} & e_{12} & e_{22} & e_{22} & e_{23} & e_{33} & e_{33} \end{array}$$

obtemos a seguinte relação entre os coeficientes:

$$2135467 + 2153476 = 0.$$

(iii) Fazendo a substituição em f dada por

$$\begin{array}{ccccccc} x_2 & x_1 & x_5 & x_3 & x_4 & x_7 & x_6 \\ || & || & || & || & || & || & || \\ e_{11} & e_{11} & e_{12} & e_{22} & e_{23} & e_{33} & e_{33} \end{array}$$

obtemos a seguinte relação entre os coeficientes:

$$2153476 + 1253467 = 0.$$

Pelos 3 itens segue que

$$1234567 = -1253467.$$

Com raciocínio análogo, mostramos que

$$-1253467 = 1245367 \;\text{ e }\; 1245367 = -1234567.$$

Logo, $1234567 = 0$. Absurdo.

Usando novamente o Teorema 3.2.11, segue que $d(3) = 8$ $\diamondsuit$

Corolário 3.2.13. *O grau mínimo de uma A-identidade para $U_4(K)$ é 10.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.2.11, temos que $d(4) \geq 10$. Agora considere uma A-identidade $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ para $U_2(K)$. Como

$$T(U_4(K)) = T(U_2(K))T(U_2(K)),$$

temos que

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)g(x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})$$

é uma A-identidade para $U_4(K)$. $\diamondsuit$

3.3 A-identidades de $U_n(K)$

O interesse em estudar A-identidades para $U_n(K)$ foi motivado pelo artigo [8], onde Henke e Regev colocaram a seguinte conjetura:

Conjetura 3.3.1 ([8])**.** *O grau mínimo de uma A-identidade para a álgebra matricial $M_n(K)$ é $2n + 2$.*

Analisando a subálgebra $U_n(K)$, damos uma resposta negativa para a conjetura. O nosso objetivo nesta seção é demonstrar o seguinte resultado. Seja $k \geq 0$ um número, então existe um n_0 tal que para qualquer $n \geq n_0$, o grau mínimo de uma A-identidade para $U_n(K)$ é $d(n) > 2n + k$.

Definição 3.3.2. *Seja $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ e escreva $y_j = x_{i_j}$. Se f é um polinômio multilinear dado por*

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma y_{\sigma(1)} \ldots y_{\sigma(n)}, \ \alpha_\sigma \in K,$$

definimos o polinômio f^* por

$$f^*(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \alpha_\sigma y_{\sigma(1)} \ldots y_{\sigma(n)}.$$

Exemplo 3.3.3. *Se $f(x_1, x_4, x_6) = x_1x_4x_6 + 2x_4x_1x_6 - x_4x_6x_1 - x_6x_4x_1$, então*

$$f^*(x_1, x_4, x_6) = x_1x_4x_6 - 2x_4x_1x_6 - x_4x_6x_1 + x_6x_4x_1.$$

Exemplo 3.3.4. *Se f é um polinômio multilinear dado por*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}, \alpha_\sigma \in K,$$

então f^* é dado por

$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}.$$

A transformação linear $^*\colon P_n \to P_n$, $f \mapsto f^*$, foi utilizada por Kemer no estudo da estrutura dos ideais de identidades de (super-)álgebras (veja para mais detalhes [12, p. 17]).

Lema 3.3.5. *Sejam $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ e $g(x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_{k+n}})$ dois polinômios multilineares, onde $\{i_1, \ldots, i_k\} \cap \{i_{k+1}, \ldots, i_{k+n}\} = \emptyset$. Então $(fg)^* = \pm f^* g^*$.*

Demonstração. Usando-se o fato que * é linear, a demonstração reduz-se ao caso de monômios, onde a afirmação é imediata. $\diamondsuit$

Seja D a base da álgebra de Grassmann E definida após a Definição 1.1.8.

Definição 3.3.6. *Dada uma álgebra R, denote por R^* o subespaço vetorial de $R \otimes E$ gerado pelos elementos $r \otimes a$, onde $r \in R$ e $a \in D$, a tem comprimento ímpar. Embora R^* não seja uma álgebra, dizemos que um polinômio multilinear $f(x_1, \ldots, x_n)$ é uma identidade para R^* se*

$$f(b_1, \ldots, b_n) = 0,$$

para todo $b_i \in R^*$.

Aqui podemos observar que a álgebra $R \otimes E$ possui uma graduação natural com o grupo cíclico de ordem 2 (onde o grau homogêneo é determinado pela álgebra E). Então f será uma identidade para R^* se, e somente se, f é uma identidade 2-graduada de $R \otimes E$ onde participam somente variáveis ímpares.

Lema 3.3.7. *Seja $f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio multilinear e seja R uma PI-álgebra. Então f é uma identidade para R se, e somente se, f^* é uma identidade para R^*.*

Demonstração. Sejam $a_1, \ldots, a_n$ elementos de comprimentos ímpares da base D de E e sejam $r_1, \ldots, r_n \in R$. Escrevendo

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}, \ \alpha_\sigma \in K,$$

temos que

$$\begin{aligned} f^*(r_1 \otimes a_1, \ldots, r_n \otimes a_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \alpha_\sigma (r_{\sigma(1)} \otimes a_{\sigma(1)}) \ldots (r_{\sigma(n)} \otimes a_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \alpha_\sigma (r_{\sigma(1)} \ldots r_{\sigma(n)}) \otimes (a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma (r_{\sigma(1)} \ldots r_{\sigma(n)}) \otimes (a_1 \ldots a_n) \\ &= f(r_1, \ldots, r_n) \otimes (a_1 \ldots a_n), \end{aligned}$$

e portanto segue o resultado. ♢

Proposição 3.3.8. *Uma PI-álgebra R possui uma A-identidade de grau n se, e somente se, existe um polinômio multilinear f de grau n que é identidade simultaneamente para R e R^*.*

Demonstração. Se g é uma A-identidade para R, então $g = g^*$ e pelo Lema 3.3.7 temos que g é uma identidade para R^*. Agora, se f é uma identidade para R e R^*, então $f + f^*$ é uma identidade par para R ou é um polinômio nulo. Se $f + f^*$ é nulo, então f é um polinômio ímpar e portanto $(1\ 2)f$ é par. ♢

Definição 3.3.9. *Sejam f um polinômio multilinear de grau n e $k \geq 0$ um número tal que $s = 3k + 2 \leq n$. Fixado um número par $t \geq 0$, escreva*

$$f = \sum (x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_t}) \cdot f_i \cdot (x_{i_{t+s+1}} x_{i_{t+s+2}} \ldots x_{i_n}),$$

onde f_i é um polinômio multilinear de grau s nas variáveis

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} - \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_t}, x_{i_{t+s+1}}, x_{i_{t+s+2}}, \ldots, x_{i_n}\}.$$

Dizemos que f_i é um k-corte em f.

Observamos que variando-se o número t obteremos k-cortes diferentes.

Exemplo 3.3.10. *Seja f o polinômio multilinear de grau 7 dado por*

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_7) &= +x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7 - 2x_1x_2x_5x_3x_4x_7x_6 \\ &\quad -x_1x_2x_4x_5x_3x_6x_7 + 3x_5x_3x_4x_1x_2x_7x_6 \end{aligned}$$

Para $t = 0$ e $k = 1$ na definição anterior, podemos escrever f da seguinte maneira

$$f = (x_1x_2x_3x_4x_5 - x_1x_2x_4x_5x_3)x_6x_7 + (-2x_1x_2x_5x_3x_4 + 3x_5x_3x_4x_1x_2)x_7x_6.$$

Logo, os polinômios

$$(x_1x_2x_3x_4x_5 - x_1x_2x_4x_5x_3) \;\; e \;\; (-2x_1x_2x_5x_3x_4 + 3x_5x_3x_4x_1x_2)$$

são 1-cortes em f. É fácil ver que para $t = 2$ temos os 1-cortes

$$(x_3x_4x_5x_6x_7 - 2x_5x_3x_4x_7x_6 - x_4x_5x_3x_6x_7) \;\; e \;\; (3x_4x_1x_2x_7x_6).$$

Definição 3.3.11. *Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{3k+2}$ as matrizes unitárias*

$$e_{11}, e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{22}, e_{23}, e_{33}, e_{33}, \ldots, e_{kk}, e_{kk}, e_{kk+1}, e_{k+1k+1}, e_{k+1k+1},$$

respectivamente, e f um polinômio multilinear de grau $\geq 3k+2$. Dizemos que f é uma $\triangle(k)$-identidade se todo k-corte g se anula sobre as matrizes acima, isto é,

$$g(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \ldots, a_{\sigma(3k+2)}) = 0,$$

para toda permutação $\sigma \in S_{3k+2}$.

Lema 3.3.12. *Seja f uma identidade multilinear de grau $2n+k$ para $U_n(K)$, onde $k \leq n-1$. Então f é uma $\triangle(k)$-identidade.*

Demonstração. A condição $k \leq n-1$ implica em $s = 3k+2 \leq 2n+k$. Assim podemos falar de k-cortes em f. Fixado um número par $t = 2r$, escreva

$$f = \sum (x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_t}) \cdot f_i \cdot (x_{i_{t+s+1}}x_{i_{t+s+2}}\ldots x_{i_{2n+k}}),$$

onde f_i é um polinômio multilinear de grau s nas variáveis

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{2n+k}\} - \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_t}, x_{i_{t+s+1}}, x_{i_{t+s+2}}, \ldots, x_{i_{2n+k}}\}.$$

Devemos mostrar que o k-corte f_i se anula sobre

$$e_{11}, e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{22}, e_{23}, e_{33}, e_{33}, \ldots, e_{kk}, e_{kk}, e_{kk+1}, e_{k+1k+1}, e_{k+1k+1}.$$

Mas provar isso é equivalente a provar que f_i se anula sobre

$$e_{(r+1,r+1)}, e_{(r+1,r+1)}, e_{(r+1,r+2)}, e_{(r+2,r+2)}, e_{(r+2,r+2)}, \ldots$$

$$\ldots, e_{(r+k,r+k)}, e_{(r+k,r+k)}, e_{(r+k,r+k+1)}, e_{(r+k+1,r+k+1)}, e_{(r+k+1,r+k+1)}.$$

Denote estas matrizes por $b_1, b_2, \ldots, b_s$ respectivamente e seja $\sigma \in S_{3k+2}$. Agora substitua as variáveis de acordo com os ítens:

(1) $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_t}$, respectivamente, por

$$e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{23}, e_{33}, e_{34}, \ldots, e_{rr+1}.$$

(2) $x_{i_{t+1}}, \ldots, x_{i_{t+s}}$, respectivamente, por

$$b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, \ldots, b_{\sigma(s)}.$$

(3) $x_{i_{t+s+1}}, \ldots, x_{i_{2n+k}}$, respectivamente, por

$$e_{(r+k+1,r+k+2)}, e_{(r+k+2,r+k+2)}, e_{(r+k+2,r+k+3)}, e_{(r+k+3,r+k+3)}, \ldots, e_{(n,n)}.$$

Fazendo essa substituição em f, obtemos αe_{1n}, onde $\alpha \in K$ e

$$f_i(b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, \ldots, b_{\sigma(s)}) = \alpha e_{(r+1,r+k+1)}.$$

Como f é uma identidade para $U_n(K)$, temos $\alpha = 0$ e portanto segue o resultado. $\diamondsuit$

Lema 3.3.13. *Considere o polinômio multilinear f de grau $3k+2$ definido conforme um dos itens abaixo:*

(1) *Seja k um número par. O polinômio f é uma combinação linear de elementos do tipo*

$$(x_{j_1} \circ x_{j_2})(x_{j_3} \circ x_{j_4}) \ldots (x_{j_{3k+1}} \circ x_{j_{3k+2}}).$$

(2) *Seja $k \geq 2$ um número par. O polinômio f é uma combinação linear de elementos do tipo*

$$x_{j_1}(x_{j_2} \circ x_{j_3})(x_{j_4} \circ x_{j_5}) \ldots (x_{j_{3k}} \circ x_{j_{3k+1}})x_{j_{3k+2}}.$$

(3) *Seja k um número ímpar. O polinômio f é uma combinação linear de elementos do tipo*

$$(x_{j_1} \circ x_{j_2})(x_{j_3} \circ x_{j_4}) \dots (x_{j_{3k}} \circ x_{j_{3k+1}})x_{j_{3k+2}}.$$

(4) *Seja k um número ímpar. O polinômio f é uma combinação linear de elementos do tipo*

$$x_{j_1}(x_{j_2} \circ x_{j_3})(x_{j_4} \circ x_{j_5}) \dots (x_{j_{3k+1}} \circ x_{j_{3k+2}}).$$

Então f não é uma $\triangle(k)$-identidade.

Demonstração. Provaremos o resultado por indução em k. Se $k = 0$, então

$$f(x_1, x_2) = \alpha(x_1 \circ x_2), \quad \alpha \in K,$$

e portanto $f(e_{11}, e_{11}) = 2\alpha e_{11}$.

Se k é um número ímpar e f está definida no item (3), escreva

$$f = \sum f_{ijt} x_i x_j x_t,$$

onde f_{ijt} é um polinômio multilinear nas variáveis

$$\{x_1, \dots, x_{3k+2}\} - \{x_i, x_j, x_t\}.$$

Assuma, sem perda de generalidade, que $f_{3k,3k+1,3k+2}$ é não nulo e seja $a = 3k, b = 3k + 1$ e $c = 3k + 2$. Observe que o polinômio f_{abc} é definido como no item (1). Por indução, f_{abc} não é uma $\triangle(k-1)$-identidade e portanto não se anula para alguma substituição das variáveis pelas matrizes $e_{11}, e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{22}, \dots, e_{k-1k}, e_{kk}, e_{kk}$. Fixando essa substituição e fazendo ela em $f_{abc}, f_{bac}, f_{acb}, f_{cab}, f_{bca}, f_{cba}$, obtemos respectivamente

$$\alpha_{abc} e_{1k}, \ \alpha_{bac} e_{1k}, \dots, \alpha_{cba} e_{1k}, \quad \alpha_{ijt} \in K.$$

Observe que $\alpha_{abc} \neq 0$. Agora faça essa mesma substituição em f, junto com as três substituições abaixo:

(i) $x_a = e_{kk+1}, \ x_b = e_{k+1k+1}, \ x_c = e_{k+1k+1}$. Neste caso o valor de f perante a substiuição é $(\alpha_{abc} + \alpha_{acb})e_{1k+1}$.

(ii) $x_c = e_{kk+1}, \ x_a = e_{k+1k+1}, \ x_b = e_{k+1k+1}$. Neste caso o valor de f perante a substiuição é $(\alpha_{cab} + \alpha_{cba})e_{1k+1}$.

(iii) $x_b = e_{kk+1},\ x_c = e_{k+1k+1},\ x_a = e_{k+1k+1}$. Neste caso o valor de f perante a substiuição é $(\alpha_{bca} + \alpha_{bac})e_{1k+1}$.

Assim, se f é uma $\triangle(k)$-identidade, então em particular temos

$$\begin{cases} \alpha_{abc} + \alpha_{acb} &= 0 \\ \alpha_{cab} + \alpha_{cba} &= 0 \\ \alpha_{bca} + \alpha_{bac} &= 0. \end{cases}$$

Pela definição de f_{ijt}, temos que $f_{ijt} = f_{jit}$. Logo, $\alpha_{ijt} = \alpha_{jit}$ e portanto temos o sistema

$$\begin{cases} \alpha_{abc} + \alpha_{acb} &= 0 \\ \alpha_{acb} + \alpha_{cba} &= 0 \\ \alpha_{cba} + \alpha_{abc} &= 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos que $\alpha_{abc} = \alpha_{acb} = \alpha_{cba} = 0$, o que é um absurdo, pois $\alpha_{abc} \neq 0$.

Para provar o item (4), escrevemos

$$f = \sum x_i x_j x_t f_{ijt}$$

e observamos que f_{ijt} tem as características de um polinômio definido no item (1). Agora basta usar um argumento parecido com o que foi usado no caso anterior.

Para provar o item (2), escrevemos

$$f = \sum f_{ijt} x_i x_j x_t$$

e observamos que f_{ijt} tem as características de um polinômio definido no item (4). Agora basta usar um argumento parecido com o que foi usado no caso (3).

Para provar o item (1), escrevemos

$$f = \sum f_{ijt} x_i x_j x_t.$$

Seja $a = 3k,\ b = 3k+1,\ c = 3k+2$ e suponha sem perda de generalidade que f_{abc} é um polinômio não nulo. Substituindo as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_{3k-1}$ pelas matrizes $e_{11}, e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{22}, \ldots, e_{k-1k}, e_{kk}, e_{kk}$ (não necessariamente nesta ordem), obtemos que f_{abc} e f_{acb} são dados por

$$\alpha_{abc} e_{1k} \text{ e } \alpha_{acb} e_{1k},$$

respectivamente. Fazendo a mesma substituição acima em f, junto com as substituições $x_a = e_{kk+1},\ x_b = x_c = e_{k+1k+1}$, obtemos como resultado

$$(\alpha_{abc} + \alpha_{acb})e_{1k+1}.$$

Como $f_{abc} = f_{acb}$, temos que se f é uma $\triangle(k)$-identidade, então

$$0 = (\alpha_{abc} + \alpha_{acb}) = 2\alpha_{abc}.$$

Logo, f_{abc} é uma $\triangle(k-1)$-identidade. Absurdo, pois f_{abc} é um elemento definido no item (3). $\diamondsuit$

Adotaremos sobre os monômios de $K\langle X\rangle$ a seguinte ordem: primeiro ordenamos os elementos de X por

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots \quad .$$

Agora, se m_1 e m_2 são dois monômios, então eles se relacionam como segue:

(1) Se grau(m_1)<grau(m_2), então $m_1 < m_2$.

(2) Se grau(m_1)=grau(m_2), escreva

$$m_1 = x_{i_1} \ldots x_{i_n},\ m_2 = x_{j_1} \ldots x_{j_n}$$

e considere o maior k tal que $x_{i_k} \neq x_{j_k}$. Se $x_{i_k} < x_{j_k}$, então $m_1 < m_2$.

Dado um polinômio qualquer $f \in K\langle X\rangle$, denotaremos por $\overline{f}$ o maior monômio que forma f. Usaremos também a seguinte definição: sejam m, m_1 e m_2 três monômios, sendo que $m = m_1 m_2$. Dizemos que m *possui final* m_2.

Lema 3.3.14. *Seja f um polinômio multilinear de grau n dado por*

$$f = \sum_{i=1}^{r} f_i g_i, \tag{3.8}$$

onde f_i e g_i são multilineares e satisfazem:

(1) *f_i possui grau $\geq 3k+2$.*

(2) $\overline{g_1} < \overline{g_2} < \ldots < \overline{g_r}$.

(3) *Se $\overline{g_i} < \overline{g_l}$, então os monômios que formam g_l não possuem final $\overline{g_i}$.*

Se f é uma $\triangle(k)$-identidade, então $f_1, f_2, \ldots, f_r$ são $\triangle(k)$-identidades.

Demonstração. Seja l_i o grau de f_i e $s = 3k + 2$. Fixado um número par t, escreva

$$f_1 = \sum x_{j_1} \dots x_{j_t} w_j x_{j_{t+s+1}} \dots x_{j_{l_1}},$$

onde w_j possui grau s e $j = (j_1, \dots, j_t, j_{t+s+1}, \dots, j_{l_1})$. Escreva

$$f = \sum x_{b_1} \dots x_{b_t} u_b x_{b_{t+s+1}} \dots x_{b_{l_1}} x_{b_{l_1+1}} \dots x_{b_n},$$

onde u_b possui grau s e $b = (b_1, \dots, b_t, b_{t+s+1}, \dots, b_n)$. Pelos itens (2) e (3), temos que se $b = (j_1, \dots, j_t, j_{t+s+1}, \dots, j_{l_1}, b_{l_1+1}, b_{l_1+2}, \dots, b_n)$, onde

$$x_{b_{l_1+1}} \dots x_{b_n} = \overline{g_1},$$

então $u_b = \alpha w_j$, onde α é o coeficiente de $\overline{g_1}$ em g_1. Assim, todo k-corte em f_1 é um k-corte em f, a menos de uma constante multiplicativa. Portanto f_1 é uma $\triangle(k)$-identidade. Embora o polinômio

$$f - f_1 g_1 = \sum_{i=2}^{r} f_i g_i$$

não seja uma $\triangle(k)$-identidade, podemos usar o mesmo argumento acima para provar que f_2 é uma $\triangle(k)$-identidade, pois $l_2 \leq l_1$. E assim, por indução provamos o resultado. $\diamondsuit$

O lema a seguir é uma variação de um resultado utilizado na demonstração do celebrado teorema de Lewin sobre a representabilidade por matrizes. O leitor pode encontrar mais detalhes na monografia [6, p. 21].

Lema 3.3.15. *Seja T um T-ideal. Existe uma base β para T, como $K\langle X\rangle$-módulo a esquerda, com as propriedades:*

(1) *Os elementos de β são multihomogêneos.*

(2) *Se $g_1, g_2 \in \beta$ são distintos, então $\overline{g_1} \neq \overline{g_2}$. Além disso, se $\overline{g_1} < \overline{g_2}$, então os monômios que formam g_2 não possuem final $\overline{g_1}$.*

Demonstração. Seja M o conjunto formado pelos monômios m tais que $m = \overline{f}$ para algum $f \in T$ e

$$m \neq m'\overline{g},$$

para todo monômio $m' \neq 1$ e $g \in T$. Agora, dado $m \in M$, seja f um polinômio em T com $\overline{f} = m$. Como o corpo é de característica 0, f é escolhido multihomogêneo. Seja m_1 o maior monômio diferente de m que forma f. Se existem monômios u e m' tais que $m' \in M$ e $m_1 = um'$, então faça

$$f_1 = f - uf',$$

onde $\overline{f'} = m'$ e $f' \in T$ é multihomogêneo. Temos que f_1 é multihomogêneo, $\overline{f_1} = m$ e o maior monômio diferente de m que forma f_1 é $m_2 < m_1$. Por indução, mostramos que existe um polinômio multihomogêneo g_m tal que $\overline{g_m} = m$ e com a propriedade de que se $u \in M$ e $u < m$, então os monômios que formam g_m não possuem final u. Seja $\beta = \{g_m \mid m \in M\}$.

Dado um polinômio qualquer $g \in T$, ele tem um termo líder do tipo $um = \overline{ug_m}$, onde $m \in M$. Portanto $\overline{g - ug_m} < \overline{g}$ e $g - ug_m \in T$. Logo, β gera T como um $K\langle X\rangle$-módulo a esquerda.

Agora, seja

$$\sum_{i=1}^{t} f_i \cdot g_{m_i} = 0,$$

onde $f_i \in K\langle X\rangle$ e $m_i \in M$. Sem perda de generalidade, suponha $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$. Para $i \neq 1$, temos que os monômios que formam g_{m_i} não possuem final m_1. Logo, $f_1 = 0$. Por indução concluímos que $f_2 = f_3 = \ldots = f_t = 0$ e assim β é uma base para T como um $K\langle X\rangle$-módulo a esquerda. $\diamondsuit$

O teorema a seguir é o principal resultado deste capítulo.

Teorema 3.3.16. *Seja $d(n)$ o grau mínimo de uma A-identidade para $U_n(K)$. Seja $k \geq 0$ um número, então existe algum n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ vale $d(n) > 2n + k$.*

Demonstração. Seja β uma base para o T-ideal

$$T(U_1(K)) = \langle [x_1, x_2] \rangle^T,$$

como um $K\langle X\rangle$-módulo a esquerda, considerada no Lema 3.3.15. Pelo Lema 3.2.10, temos que

$$T(U_n(K)) = \overbrace{T(U_1(K))T(U_1(K)) \ldots T(U_1(K))}^{n}.$$

Assim $T(U_n(K))$ possui uma base, como $K\langle X\rangle$-módulo a esquerda, formada pelos polinômios $g = g_1 g_2 \ldots g_n$, onde $g_i \in \beta$. Seja p uma A-identidade de grau $2n + k$ para $U_n(K)$ e escreva

$$p = \sum w_g g_1 g_2 \ldots g_n,$$

onde $w_g \in K\langle X\rangle$ e $g_i \in \beta$. Como os elementos de β são multi-homogêneos, podemos assumir que todo $w_g g_1 g_2 \dots g_n$ que aparece no somatório é multilinear de grau $2n+k$. Uma vez que os elementos de grau 2 para β são da forma $[x_i, x_j]$, temos que em cada $g = g_1 g_2 \dots g_n$ no máximo k dos g_i são diferentes de $[x_i, x_j]$. Pela Definição 3.3.2, temos que $p = p^*$ e portanto pelo Lema 3.3.5, segue que

$$p = \sum \pm w_g^* g_1^* g_2^* \dots g_n^*. \tag{3.9}$$

Como $[x_i, x_j]^* = \pm(x_i \circ x_j)$, em cada $g_1^* g_2^* \dots g_n^*$ no máximo k dos g_i^* são diferentes de $(x_i \circ x_j)$. Vamos chamar um elemento do tipo $(x_i \circ x_j)$ de *bolinha* . Agora defina os números ξ_l da seguinte maneira:

(1) Em cada $g = g_1^* g_2^* \dots g_n^*$, que aparece no somatório (3.9), seja $i(g)$ o maior índice j tal que g_j^* não é bolinha. Definimos ξ_1 como sendo o maior $i(g)$.

(2) Em cada $g = g_1^* g_2^* \dots g_n^*$, onde $g_{\xi_l}^*, g_{\xi_{(l-1)}}^*, \dots, g_{\xi_1}^*$ não são bolinhas, seja $i(g)$ o maior índice j tal que $j < \xi_l$ e g_j^* não é bolinha. Definimos ξ_{l+1} como sendo o maior $i(g)$.

É claro que não conseguimos definir ξ_l a partir de um certo l, por exemplo, não é possível definir $\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \xi_{k+3}, \dots$. Seja ξ_s o último ξ_l que conseguimos definir. O fato é: como k está fixado, para n suficientemente grande um (ou mais) dos três itens abaixo é satisfeito.

(i) $\xi_s > \left[\frac{3k+2}{2}\right]$.

(ii) Existe L tal que $\xi_L - \xi_{L+1} > \left[\frac{3k+2}{2}\right]$.

(iii) $n - \xi_1 > \left[\frac{3k+2}{2}\right]$.

Aqui $[x]$ é o maior inteiro menor ou igual a x. Cabe observar que o caso (iii) na verdade não ocorre. De fato, uma vez que p é um polinômio par, temos que algum g_n^* não pode ser bolinha. Logo, sempre teremos $\xi_1 = n$.

Vamos supor que o item (ii) ocorre. Observe que se $g = g_1^* g_2^* \dots g_n^*$ aparece no somatório (3.9) e $g_{\xi_L}^*, g_{\xi_{(L-1)}}^*, \dots, g_{\xi_1}^*$ não são bolinhas, então em g devem existir no mínimo $z = [(3k+2)/2]$ bolinhas entre $g_{\xi_{(L+1)}}^*$ e $g_{\xi_L}^*$, isto é,

$$g_{(\xi_L)-z}^*,\ g_{(\xi_L)-(z-1)}^*,\ \dots,\ g_{(\xi_L)-1}^*$$

são bolinhas. Fixado $h_{\xi_L} = g_{\xi_L}^*$, $h_{(\xi_L)+1} = g_{(\xi_L)+1}^*, \dots,$ $h_n = g_n^*$, onde $g_{\xi_L}^*, g_{\xi_{(L-1)}}^*, \dots, g_{\xi_1}^*$ não são bolinhas, seja

$$h \cdot (h_{\xi_L} h_{(\xi_L)+1} \dots h_n),\ h \in K\langle X\rangle,$$

a soma dos elementos $\pm w_g^* g_1^* g_2^* \dots g_n^*$ que aparecem no somatório (3.9) e que

$$h_{\xi_L} = g_{\xi_L}^*,\ h_{(\xi_L)+1} = g_{(\xi_L)+1}^*, \dots,\ h_n = g_n^*.$$

Pelo Lema 3.3.12, temos que p é uma $\triangle(k)$-identidade. Aplicando algumas vezes (exatamente $n-(\xi_L-1)$) o Lema 3.3.14, obtemos que h é uma $\triangle(k)$-identidade. Pelo que já foi argumentado acima, temos que h pode ser escrito como

$$h = \sum v_b b_1 b_2 \dots b_z,$$

onde $b_1, b_2, \dots, b_z$ são bolinhas e $v_b \in K\langle X\rangle$. Assim, existe um k-corte f em h definido em algum dos itens do Lema 3.3.13. Esse k-corte é em particular uma $\triangle(k)$-identidade, o que é um absurdo pelo próprio Lema 3.3.13.

Provamos que para n suficientemente grande, não existem A-identidades de grau $2n+k$ para $U_n(K)$. Fixe um destes n's. Se $d(n) < 2n+k$, então considere uma A-identidade F de grau $d(n)$. Logo,

$$F(x_1, \dots, x_{d(n)})x_{d(n)+1}x_{d(n)+2}\dots x_{2n+k}$$

é uma A-identidade para $U_n(K)$, o que é um absurdo. Portanto, $d(n) > 2n+k$. Com pequenas modificações na demonstração do caso (ii), provamos também o teorema no caso (i). $\diamondsuit$

Voltando para a Conjetura 3.3.1, se para todo n a álgebra $M_n(K)$ satisfaz alguma A-identidade de grau $2n+2$, então em particular a subálgebra $U_n(K)$ também possui A-identidades de grau $2n+2$, o que é uma contradição pelo Teorema 3.3.16.

Nós podemos exibir A-identidades para $U_n(K)$ de grau $[(5n+1)/2]$. Para isso, seja f' uma A-identidade de grau 5 para $U_2(K)$. Se n é par, $n = 2m$, seja f o produto de m cópias de f' escritas em variáveis distintas, isto é,

$$f = f'(x_1, \dots, x_5)f'(x_6, \dots, x_{10})\dots f'(x_{5m-4}, \dots, x_{5m}).$$

Pelo Lema 3.2.10, temos que f é uma A-identidade para $U_n(K)$ de grau $5m = [(5n+1)/2]$. Se $n = 2m+1$ é ímpar, então

$$p = f \cdot [x_{5m+1}, x_{5m+2}x_{5m+3}]$$

é uma A-identidade para $U_n(K)$ de grau $5m+3 = [(5n+1)/2]$.

Tudo isso nos leva a acreditar que o grau mínimo de uma A-identidade para $U_n(K)$ é igual a $[(5n+1)/2] = 2n + [(n+1)/2]$.

Referências Bibliográficas

[1] S.A. Amitsur, J. Levitzki, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 449–463, (1950).

[2] S. A. Amitsur, *A note on PI rings*, Israel J. Math. **10**, 210–211 (1971).

[3] M. Dehn, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme*, (German) Math. Ann. **85**, 184–194, (1922).

[4] V. Drensky, *A minimal basis for the identities of a second order matrix algebra over a field of characteristic 0*, (Russian) Algebra i Logika **20**, 282–290, (1981). Translation: Algebra and Logic **20**, 188–194, (1981).

[5] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras, Graduate Course in Algebra*, Springer, Singapore, (1999).

[6] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, Math. Surveys and Monog. **122**, (2005), AMS.

[7] D. Gonçalves, P. Koshlukov, *A-Identities for the Grassmann algebra: The Conjecture of Henke and Regev*, Proc. Amer. Math. Soc. **136**, 2711–2717, (2008).

[8] A. Henke, A. Regev, *A-codimensions and A-cocharacters*, Israel J. Math. **133**, 339–355,(2003).

[9] A. Henke, A. Regev, *Weyl modules for the Schur algebra of the alternating group*, Journal of Algebra, **257**, 168–196, (2002).

[10] A. Henke, A. Regev, *Explicit decompositions of the group algebras FS_n and FA_n*, in "Polynomial identities and combinatorial methods" (Pantelleria, 2001), Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **235**, Dekker, New York, 2003, 329–357.

[11] A. Kemer, *The standard identity in characteristic p. A conjecture of I. B. Volichenko*, Israel J. Math. **81**, 343–355 (1993).

[12] A. Kemer, *Ideal of identities of associative algebras*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. **87**, 1991.

[13] B. Kostant, *A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur-Levitzki and cohomology theory*, J. Math. Mech. **7**, 237–264, (1958).

[14] D. Krakowski, A. Regev, *The polynomial identities of the Grassmann algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **181** , 429–438,(1973).

[15] V. N. Latyshev, *On the choice of basis in a T-ideal*, Sibirsk. Matem. Zh. **4**, No. 5 (1963), 1122–1126 (Russian).

[16] Yu. N. Maltsev, *A basis for the identities of the algebra of upper triangular matrices*, Algebra and Logic, **10**, 242–247, (1971).

[17] Yu. P. Razmyslov, *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*, (Russian) Algebra i Logika **12**, 83–113, (1973). Translation: Algebra and Logic **12**, 47–63, (1973).

[18] Yu. P. Razmyslov, *Trace identities of full matrix algebras over a field of characteristic zero*, (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **38**, 723–756, (1974). Translation: Math. USSR, Izv. **8**, 727–760, (1974).

[19] A. Regev, *Existence of identities in $A \otimes B$*, Israel J. Math. **11**, 131–152, (1972).

[20] A. Regev, *The representation of S_n and explicit identities for P.I. algebras*, J. Algebra, **51**, 25–40, (1978).

[21] S. Rosset, *A new proof of the Amitsur-Levitzki identity*, Israel J. Math., **23**, 187–188, (1976).

[22] R. G. Swan, *An application of graph theory to algebra*, Proc. Amer. Math. Soc., **14**, 367–373, (1963).

[23] W. Wagner, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme*, (German) Math. Ann. **113**, 528–567, (1936).