
Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Dissertação de Mestrado

**MODELAGENS MATEMÁTICAS PARA
SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS DE
IMPACTO AMBIENTAL NO RIO BALSAS**

por

Lourimara Farias Barros Alves

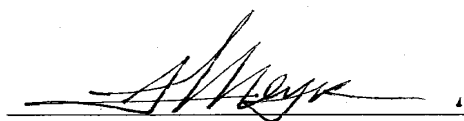
Mestrado Profissional em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. João Frederico da Costa Azevedo Meyer

MODELAGENS MATEMÁTICAS PARA SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS DE IMPACTO AMBIENTAL NO RIO BALSAS

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Lourimara Farias Barros Alves** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 02 de Março de 2009.



Prof. João Frederico da C. A. Meyer
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer - UNICAMP

Prof^a. Dr^a. Rosane Ferreira de Oliveira - UFRRJ

Prof^a. Dr^a. Sandra Augusta Santos - UNICAMP

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Alves, Lourimara Farias Barros

AL87m Modelagens matemáticas para simulações computacionais de
impacto ambiental no Rio Balsas/Lourimara Farias Barros Alves –
Campinas, [S.P. :s.n.], 2009.

Orientador : João Frederico da Costa Azevedo Meyer

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica.

1. Modelagem. 2. Impacto ambiental. 3. Equações diferenciais
ordinárias. 4. Algoritmos de computador. I. Meyer, João Frederico da
Costa Azevedo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Mathematical models for numerical simulations of environmental
impact scenarios in the Balsas River

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Modeling . 2. Environmental impact. 3. Ordinary
differential equations. 4. Computational algorithms.

Área de concentração: Biomatemática

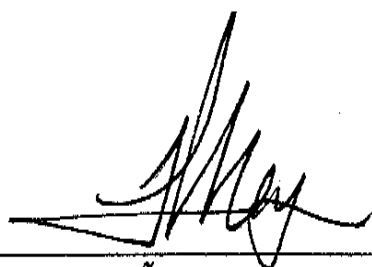
Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer (IMECC-UNICAMP)
Profa. Dra. Rosane Ferreira de Oliveira (UFRRJ)
Profa. Dra. Sandra Augusta Santos (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 02/03/2009

Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 02 de março de 2009 e
Aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



Prof. (a). Dr (a). JOÃO FREDERICO DA COSTA AZEVEDO MEYER



Prof. (a). Dr (a). ROSANE FERREIRA DE OLIVEIRA



Prof. (a). Dr (a). SANDRA AUGUSTA SANTOS

Dedico este trabalho ao meu esposo, Luís Cláudio e aos meus filhos, Daniel e Cláudio Gabriel.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus pelo dom da vida.

Ao prof. Joni, meu orientador, pela oportunidade de trabalharmos juntos, pela amizade, pela paciência e pela grande contribuição na elaboração dos algoritmos (no MATLAB). Sempre será para mim um exemplo.

Aos meus pais, Lourival (in memorian) e Maria (in memorian) pelo amor, pelo carinho que me devotaram e que sempre estiveram muito presentes durante toda a minha vida e muito contribuíram para minha educação.

Luís Cláudio, sem seu apoio constante a realização deste trabalho teria sido muito mais difícil. Obrigado por seu amor, carinho, atenção, disponibilidade, compreensão e por sempre ter acreditado que tudo iria dar certo. Muito obrigado por tudo que representa em minha vida e por me fazer muito feliz.

Daniel e Cláudio Gabriel, que sofreram pela minha ausência, pela falta de tempo em alguns momentos, mas sempre acreditaram em meu sucesso. A mamãe ama muito vocês.

A todos meus amigos e parentes, em especial à minha prima Maria Edina e minha irmã Leuda, pela força e amizade.

À família do Luís que sempre me recebeu com muito carinho e que contribuíram direto ou indiretamente por mais essa vitória. Muito obrigado pela atenção, amizade e disponibilidade.

Aos colegas de trabalho, tanto da UEMA como CEMDDC, pelo apoio. Em especial a Tia Marlene.

A todos os professores e coordenadores do Programa que aceitaram esse desafio. Em especial, às professoras Sueli e Sandra pelo apoio e pelas palavras de incentivo em alguns momentos difíceis.

A Patty pela acolhida na sua casa em Campinas e por todo apoio.

A todos os colegas do mestrado, pelos momentos de alegria que passamos juntos. Ao Olívio e Franzé, pelas várias viagens que fizemos juntos em busca dessa vitória, repleta sempre de bons momentos. Ao Emerson pelos momentos de estudo e ao Lúdio pela força e amizade. Em especial a Vera Camargo (MT) pela companhia, amizade, passeios e apoio nesse momento final.

A todos do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) pela colaboração.

Resumo

ALVES, Lourimara Farias Barros. *Modelagens Matemáticas para Simulações Computacionais de Impacto Ambiental no Rio Balsas*. Campinas - SP: Universidade Estadual de Campinas, 2009. Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Em todo mundo, a preocupação com problemas ambientais vem crescendo de maneira muito rápida, com especial destaque aos recursos hídricos, pois a humanidade parecia acreditar que tais recursos seriam inesgotáveis, e hoje se depara com uma realidade totalmente diferente. Neste contexto, este trabalho buscou por meio de dois sistemas: um de Equações de Diferenças e o outro de Equações Diferenciais obter em primeira aproximação a modelagem matemática do comportamento evolutivo de manchas de materiais poluentes de superfície no Rio Balsas ao sul do estado do Maranhão. Com estudo e análise dessa modelagem, construímos algoritmos computacionais (em ambiente MATLAB) que permitem a criação de instrumental para simulação de acidentes, de estratégias de prevenção, de contenção além de também servir de apoio no combate a práticas que possam levar à presença de materiais tóxicos prejudiciais à biota fluvial.

Palavras-Chave: Modelagem, Impacto ambiental, Equações diferenciais ordinárias, Algoritmos de computador.

Abstract

ALVES, Lourimara Farias Barros. *Mathematical models for numerical simulations of environmental impact scenarios in the Balsas River*. Campinas - SP: Universidade Estadual de Campinas, 2009. Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Worldwide, the growing concern with environmental problems has happened quite rapidly, with special emphasis, in many cases, as regards sweet water resources; humanity has acted as if such resources were endless, and today the situation has changed into a very different reality. In this general picture, this work proposes the modelling of the evolutive behavior of pollutants on the water surface of rivers, focusing upon the Rio Balsas, in southern Maranhão State. A analysis of the chosen modelling process, led to the definition computational algorithms, obtained in a MATLAB environment creating numerical tools for the simulation of accidents and processes, for theoretically testing prevention and protection strategies, as well as serving a general purpose of challenging choices and procedures that may lead to the presence of toxic material at levels which negatively affect local biota.

Key words: Modeling, Environmental impact, Ordinary differential Equations, Computational Algorithms.

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
Introdução	1
1 O RIO BALSAS	4
1.1 BREVE HISTÓRICO	4
1.2 CARACTERÍSTICAS FÍSICAS DO RIO BALSAS	6
2 MODELOS DISCRETOS	9
2.1 EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS	9
2.2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS	12
2.2.1 Poluição superficial no Rio Balsas: aproximação discreta	15
2.2.2 Refinamentos do Modelo Discreto para o caso em estudo	16
2.2.3 O aumento no número de compartimentos: vantagens nas simulações e dificuldades algorítmicas	17
3 MODELOS CONTÍNUOS	20
3.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	20
3.2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	22

3.2.1	O primeiro modelo contínuo	22
3.2.2	Um modelo com 3 subdivisões laterais (e 18 longitudinais)	23
3.2.3	Um modelo com nx subdivisões longitudinais e ny laterais	24
4	OS PARÂMETROS	26
4.1	FLUXO SUPERFICIAL	26
4.2	DEGRADAÇÃO	28
4.3	DETERMINAÇÃO DA CARGA POLUIDORA EM CADA COMPARTIMENTO	29
5	ENSAIOS COMPUTACIONAIS	32
5.1	PRIMEIRO ENSAIO	32
5.2	UMA VARIANTE DO PRIMEIRO ENSAIO	34
5.3	SEGUNDO ENSAIO	35
5.4	TERCEIRO ENSAIO	37
5.5	QUARTO ENSAIO	38
	Considerações Finais	40
	Anexo	42
	Referências Bibliográficas	59

Lista de Figuras

1.1	Foto aérea da cidade de Balsas	5
1.2	Embarcação feita de buriti - balsa	5
1.3	Avenida Beira Rio	5
1.4	Foto satélite mostrando o Rio Balsas em negrito	6
1.5	Substituição das matas ciliares na zona urbana	7
1.6	Descida de bóia pelo Rio Balsas	8
1.7	Lavadeira	8
2.1	Compartimento em estudo	10
2.2	Esquema compartimental com 9 subdivisões longitudinais	15
2.3	Esquema compartimental com 18 subdivisões longitudinais e 3 laterais	16
2.4	Esquema compartimental com 60 subdivisões longitudinais e 5 laterais	17
2.5	Esquema compartimental com nx subdivisões longitudinais e ny laterais	19
3.1	Gráfico da solução de $C(t)$ tendendo ao valor assintótico $\frac{q}{\varphi+\delta}$	21
3.2	Compartimento em estudo usando Equações Diferenciais	21
3.3	Esquema para um modelo com nx subdivisões longitudinais e ny laterais	24
4.1	Equipe que ajudou na coleta de dados no rio	27
4.2	Garrafas PET numeradas descendo o rio	27
5.1	Simulação com 9 subdivisões longitudinais	34
5.2	Simulação com variabilidade periódica das fontes (ct) <i>tabela</i> 5.1	35
5.3	Simulação com 3 subdivisões laterais e 18 subdivisões longitudinais: curvas de nível e em três dimensões	36
5.4	Curvas de nível da simulação com 5 subdivisões laterais e 60 subdivisões longitudinais	38

5.5	Simulação em 3-d com 5 subdivisões laterais e 60 subdivisões longitudinais: no eixo z o nível de impacto em x e y respectivamente as subdivisões longi- tudinais e laterais	38
5.6	Simulação com 3 subdivisões laterais e 18 subdivisões longitudinais: modelo contínuo	39

Lista de Tabelas

4.1	Dados coletados em pesquisa de campo - tempo cronometrado em minutos	28
5.1	Parâmetros utilizados no ensaio com 9 subdivisões longitudinais	33
5.2	Parâmetros utilizados no segundo ensaio, com subdivisões laterais e longitu- dinais	36
5.3	Parâmetros utilizados na simulação de transporte de poluentes superficiais com 60 subdivisões longitudinais e 5 laterais	37

Introdução

Em todo mundo, a preocupação com problemas ambientais vem crescendo de maneira muito rápida, dando destaque aos recursos hídricos, pois a humanidade parecia acreditar que tais recursos seriam inesgotáveis, deparando-se hoje com uma realidade totalmente diferente: campanhas e mais campanhas sobre racionamento e desperdício de água, para tentar garantir a continuidade de sua existência. Isto se deve na sua maioria ao crescimento demográfico mundial. Pode-se observar que tal acréscimo populacional aconteceu justamente após o aparecimento da revolução industrial.

O aparecimento das atividades agroindustriais em determinadas regiões é o principal responsável por alguns impactos ambientais nessas áreas. Entre diversos problemas ambientais podemos citar a poluição industrial, a contaminação do ar, da água e do solo; o desmatamento de várias áreas para plantações e construções de estradas e ferrovias; práticas agrícolas em locais inadequados, contaminação das águas com produtos químicos.

Dando ênfase à primeira atividade agroindustrial brasileira, a monocultura canavieira levou o Brasil ao pódio na produção da cana-de-açúcar na época. Toda formação e crescimento desse setor não se fez de uma forma ambientalmente sustentável, pois buscava-se o aumento da produção a partir da introdução de novas áreas de plantio e não do aumento da produtividade das áreas de lavoura já existentes. Pode-se então observar que não existiu uma política de preocupação em preservar o meio ambiente.

A utilização de tecnologias se caracteriza pelo uso de maquinário altamente sofisticado, monoculturas que ocupam áreas gigantescas, elevado uso de insumos, fortes impactos ambientais como: o assoreamento dos rios causado pela erosão e ocupação de áreas inadequadas para atividades agrícolas; a compactação do solo ocasionada pela intensa mecanização nas

lavouras; ocorrência de fenômenos como *runoff*² em bacias hidrográficas, contaminando assim suas águas etc.

No município de Balsas (MA), existem grandes projetos agropecuários. Estes estão provocando impactos nas nascentes do Rio Balsas com desmatamentos e também, com o uso de agrotóxicos em culturas de soja e abacaxi, tais problemas já podem ser claramente identificados, refletidos em todo seu percurso. Já existem trechos do rio com matas ciliares totalmente devastadas, o nível das águas está cada vez mais baixo com o passar dos anos, a quantidade de peixes também tem diminuído, sem falar nos efeitos para a qualidade da água que é consumida por grande parte da população. As águas do Rio Balsas apresentam concentrações de produtos químicos que indicam que o impacto do pólo graneleiro do Maranhão já se faz sentir em uma parte de sua extensão. As águas ainda apresentam resultados dentro dos padrões, porém podem, em um pequeno espaço de tempo, sofrer progressivas deteriorações, em virtude do rápido crescimento populacional e das decorrentes atividades econômicas, sejam agrícolas, industriais ou de outros serviços.[6]

Hoje já se observa uma maior preocupação da população e dos órgãos públicos responsáveis com a preservação do rio, porém ainda não foram tomadas atitudes suficientemente eficazes para evitar tal degradação. O Rio Balsas é motivo de orgulho para a comunidade balsense, essencial para abastecimento de água e lazer de toda cidade e, por outro lado, é inaceitável que esta mesma, aos poucos, contribua para sua deterioração ambiental.

A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real [1]. Tal transformação acontece quando se faz uso de um modelo matemático adequado para o estudo, a interpretação e a resolução do problema.

Este trabalho visa recorrer a dois sistemas, um de Equações de Diferenças e o outro de Equações Diferenciais, para obter, em primeira aproximação, a modelagem matemática do comportamento evolutivo de manchas de materiais poluentes de superfície no Rio Balsas.

O capítulo 1 contém uma rápida apresentação da história da cidade de Balsas, enfocando a importância do Rio Balsas na vida da população. Traz também uma descrição sucinta do

² "*runoff*" é o nome genericamente adotado para fenômenos de transporte de material impactante pela água que escorre nos vertentes, chegando aos rios.

rio e de suas características (geográfica, forma, fluxo, atividades ribeirinhas), valorizando a principal atividade turística ecológica da cidade.

No capítulo 2 propõe-se um modelo discreto compartimental utilizando as equações de diferenças, sendo explorados os resultados obtidos deste modelo, com um breve comentário sobre o comportamento das soluções, além de comentários de alguns aspectos matemáticos. São considerados compartimentos que ocupam trechos inteiros do rio em seu percurso urbano.

No capítulo 3, recorreremos a um modelo contínuo com uso de Sistemas de Equações Diferenciais, mostrando diferenças nos valores de autovalores e autovetores que determinam o limiar de comportamento dos poluentes a longo prazo.

No capítulo 4, são apresentados os procedimentos adotados na obtenção de valores para os parâmetros utilizados no modelo, assim como as dificuldades encontradas.

No capítulo 5, exibimos os resultados de simulações computacionais com base na modelagem proposta no capítulo 2 e no capítulo 3, seguido de análises e conclusões.

O RIO BALSAS

Um resumo histórico da cidade de Balsas é indissociável do Rio Balsas. É impossível não enfatizar a importância do rio no que se refere a abastecimento, a lazer, a qualidade de vida para a população - e não apenas para a população ribeirinha. Assim, neste capítulo é feito um breve histórico da cidade e, em seguida, há uma breve descrição do Rio Balsas, relativamente às suas características e à sua presença na comunidade.[9]

1.1 BREVE HISTÓRICO

A cidade de Balsas, que fica localizada na região sul do Estado do Maranhão, distante cerca de 800 km da capital, teve seu início provavelmente no ano 1840, mais precisamente no Porto das Caraíbas, às margens do Rio Balsas onde, segundo consta, havia uma venda importante para toda a região.

Em 1879, foi construída uma pequena igreja em homenagem a Santo Antônio (padroeiro da cidade) e, em 1882, o povoado recebeu o nome de "Santo Antônio de Balsas" e, posteriormente, foi elevado à categoria de vila e, após, de cidade, com a mesma denominação. O Distrito foi criado em 1892, pela Lei Nº. 15 e desmembrado do município de Riachão em 22 de março de 1918 pela Lei Nº. 775, data esta em que até hoje se comemora o aniversário da cidade. Pelo Decreto-Lei Nº. 820 de 30 de dezembro de 1943 passou a se chamar BALSAS, devido às embarcações construídas de buritis, denominadas "balsas".



Figura 1.1: Cidade de Balsas

Fonte: Afonso Fotografias

A cidade de Balsas possui hoje uma área de 13.142 Km^2 e população de 78.845 habitantes (estimativa IBGE-2007), destacando-se no cenário agrícola nacional pela alta produtividade na cultura de soja, arroz, milho e, recentemente, algodão. A partir de 1992, a região de Balsas começou a produzir soja para o mercado externo, através do Corredor de Exportação Norte. Conhecida hoje em todo o Maranhão como a capital estadual da soja, está contribuindo fortemente para que o Estado seja o segundo maior produtor de grãos do Nordeste, perdendo apenas para a Bahia. Nesse sentido, também, torna-se necessário criar instrumentos para a simulação de cenários decorrentes desta intensa atividade agrícola na bacia hidrográfica e possíveis consequências para o próprio Rio Balsas.



Figura 1.2: Embarcação feita de buriti

Fonte: Foto Sakura



Figura 1.3: Avenida Beira Rio

Fonte: Foto Sakura

Possuidora de várias belezas naturais, tem como maior preciosidade o Rio Balsas, rio este que divide a cidade ao meio, banhando-a, abastecendo-a e servindo como principal atração turística para os filhos da terra e para aqueles que a visitam.

1.2 CARACTERÍSTICAS FÍSICAS DO RIO BALSAS

A figura 1.4 mostra uma foto de satélite com uma linha em negrito, onde está indicada a localização do Rio Balsas.

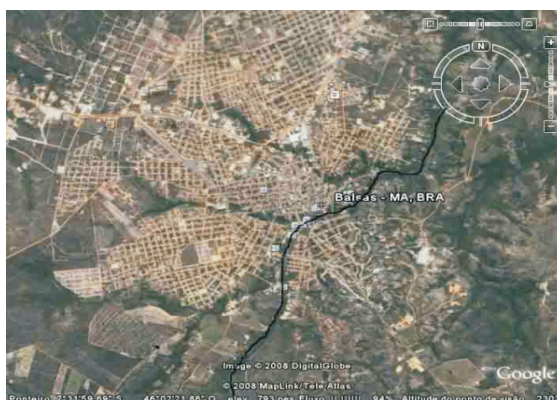


Figura 1.4: Rio Balsas na cidade de Balsas
Fonte: Google Earth [8]

O Rio Balsas fica localizado, como a cidade de Balsas, no sul do Maranhão. Possui sua nascente na Chapada das Mangabeiras à altitude de 600 m e, após percorrer uma extensão de 525 km, deságua no Rio Parnaíba de cuja bacia hidrográfica faz parte. Em Balsas, tem como principais afluentes o rio Balsinhas, pela margem direita e os rios Maravilha e Neves, pela margem esquerda. Suas coordenadas geográficas são 8°28' e 8°41' de latitude sul e 46°36' e 46°54' de longitude oeste.

Dentre todos os rios da região, o Rio Balsas é o que possui maior volume, apresentando assim características diferentes em todo o seu percurso. Em alguns trechos suas águas são calmas, quase paradas. Em outros, a correnteza é tão forte que já ocasionou acidentes fatais. No que se refere a matas ciliares pode-se observar que, em muitos trechos do rio, esta vegetação encontra-se parcialmente devastada e, em boa parte das margens urbanas, substituída por quilômetros de degraus de concreto, quadras esportivas, barezinhos. A rigor,

esta região, tão importante no lazer local, subsiste com esta perda importante, a das matas ciliares.



Figura 1.5: Substituição das matas ciliares na zona urbana

Fonte: Foto Sakura

A temperatura em Balsas apresenta pequena oscilação ao longo do ano, mantendo médias mensais numa faixa entre 24°C e 28°C. A umidade relativa estabelece média anual em torno de 74%. Na cidade o clima apresenta em média 5 meses de período seco. O período mais chuvoso ocorre entre dezembro e março, período que se chama, localmente, de inverno.

O abastecimento de água no município vem apresentando sérios desafios ao SAAE (Serviço Autônomo de Águas e Esgotos), órgão municipal responsável pelo abastecimento e suas crescentes demandas. Parte desse abastecimento vem do Rio Balsas, outra, menor em termos de volumes, de poços artesianos. Isto vem ocorrendo em virtude do rápido crescimento populacional da região metropolitana, resultado do intenso trabalho agrícola em toda a região, o que provocou um processo de imigração bastante significativo.

Em termos de lazer, as águas do Rio Balsas também proporcionam uma fantástica descida de bóias que se inicia na fazenda Canaã e percorre vários quilômetros por entre margens belíssimas (para esta autora), levando cerca de 02h30min, até chegar à Avenida Beira Rio, no centro da cidade. Essa Avenida é o principal ponto de encontro de turistas que vêm a Balsas nas férias de julho quando a cidade é palco do Projeto Verão, que acontece todos os anos com intensas atividades culturais e educacionais com ênfase na educação ambiental.

O Rio Balsas também é utilizado por lavadeiras, pois com esta atividade ajudam a sustentar a família.



Figura 1.6: Descida de bóia
Fonte: Foto Sakura



Figura 1.7: Lavadeira
Fonte: Foto Sakura

Apesar de toda a importância social e econômica do Rio Balsas para a cidade, a população ainda não se conscientizou de que a preservação de suas águas não é uma obrigação somente dos órgãos públicos, mas de todos aqueles que habitam a região, já que praticamente todos dependem do rio para seu abastecimento de água. Além de ser área de lazer e constituir-se na maior fonte de água da cidade, é também fonte de sustento para a população ribeirinha, através da pesca. Apesar dessa dependência, o lançamento de poluentes sem nenhum tratamento está contribuindo para a contaminação de suas águas, somando-se àqueles produtos que vêm de montante, onde se localizam as grandes lavouras.

MODELOS DISCRETOS

No caso de fenômenos que variam de modo discreto, bem como naqueles em que as informações são disponibilizadas desse modo, ou seja, em medidas tomadas a intervalos regulares e não continuamente, pode haver vantagem em se trabalhar com Equações de Diferenças, isto é, com modelos discretos. É o que se faz neste capítulo.

2.1 EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

As equações de diferenças podem responder de modo bastante razoável em adequadas modelagens da situação que aqui se busca estudar, além de permitir (às vezes) mais facilidade na resolução analítica ou na sua aproximação numérica. Esse tipo de fenômeno, a saber, de impacto evolutivo em corpos aquáticos, tem fortes características de continuidade, o que indicaria um ambiente de Equações Diferenciais. No entanto, muitas informações são dadas apenas de modo periódico: semanal, mensal ou, até, anual. Isto justifica que, em primeira aproximação, se usem Equações de Diferenças - aqui lineares e de primeira ordem. O modelo discreto utilizado irá descrever a quantidade de material poluente em cada trecho do rio (e no instante $k + 1 : L^{(k+1)}$) como sendo o que lá havia no instante anterior de estudo ($L^{(k)}$), subtraindo desse total aquilo que, pelo transporte do rio, é levado a jusante ($-\varphi_L L^{(k)}$), acrescentando a esse total aquilo que, de outro trecho(ou outros) do rio a montante ingressa

na parte em estudo ($\varphi_M M^{(k)}$), somando o efeito das fontes poluidoras (q_L) e, subtraindo ainda aquilo que, por degradação ($\delta_L L^{(k)}$), passa a outros locais fora da água do rio.

Esquematicamente:

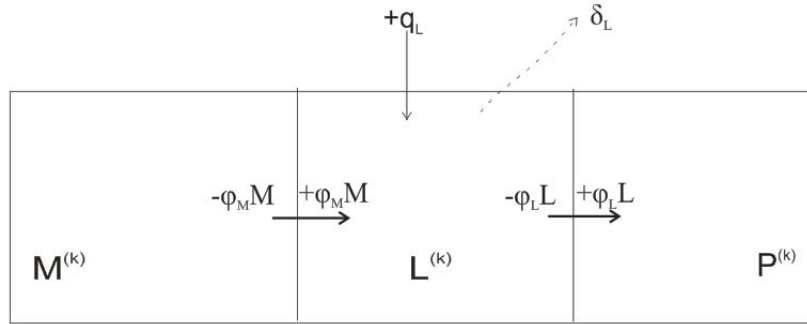


Figura 2.1: Compartimento em estudo

Assim, num contexto de Equações de Diferenças temos genericamente (e considerando o compartimento do rio imediatamente a montante como $M^{(k)}$):

$$L^{(k+1)} = \varphi_M M^{(k)} + L^{(k)} - \varphi_L L^{(k)} - \delta_L L^{(k)} + q_L,^1$$

nomeando $S_L = \varphi_L + \delta_L$, temos:

$$L^{(k+1)} = \varphi_M M^{(k)} + (1 - S_L)L^{(k)} + q_L. \quad (2.1)$$

Nos parâmetros usados, φ_I (para $I = M$ ou $I = L$) representa o efeito do fluxo do rio: em primeira aproximação, se este trecho I do rio é percorrido totalmente em τ unidades de tempo, a cada uma destas unidades de tempo, $1/\tau_I = \varphi_I$ indica a parte do rio (e, conseqüentemente da mancha de poluente superficial) que sai do compartimento em estudo. Ou, analogamente, a parte que, procedente do compartimento a montante, ingressa na parte em estudo.

Além de φ_I , o δ_I (de novo, para $I = M$ ou $I = L$) indica o percentual de poluente por unidade de tempo que, degradando-se, deixa de afetar o trecho de rio em estudo.

¹ Aqui, a fonte é considerada como a quantidade de poluente que ingressa em cada compartimento por unidade de tempo e a variação $L^{(k+1)} - L^{(k)}$ também, ou seja, a variação da quantidade de poluente em unidade de tempo.

Nestas condições, podemos observar que, se tivéssemos $M^{(k)} \equiv 0, \forall k$ (o que descreve a situação de não haver ingresso de poluente em L vindo da parte do rio a montante), então

$$L^{(k+1)} = (1 - S_L)L^{(k)} + q_L,$$

e, portanto, como $0 < (1 - S_L) < 1$, a quantidade $L^{(k)}$ tenderia a um valor assintótico. De fato, se $L^{(k)} = \bar{L}$ a partir de determinado valor de k , teríamos $\bar{L} \cong (1 - S_L)\bar{L} + q_L$ ou $\bar{L} = \frac{q_L}{S_L}$, com $L^{(k)} \rightarrow \bar{L}$ quando $n \rightarrow \infty$

Este valor $\bar{L} = \frac{q_L}{\varphi_L + \delta_L}$ indica claramente que o nível assintótico de poluição neste caso diminui quando q_L for menor (menos aporte) ou quando φ_L ou δ_L forem maiores (respectivamente fluxo mais forte e mais degradação). Isto indicaria queda de poluição no trecho ou compartimento L . O poluente, porém, passa para outros trechos do rio por fluxo ou a outros ambientes, por aquilo que se denomina, aqui, de degradação.

O parâmetro q_I , (como já se disse, para $I = M$ ou $I = L$) representa a carga poluidora que chega ao compartimento I do rio. Em primeira aproximação serão adotados valores constantes. O algoritmo utilizado com valores constantes foi preparado também, para períodos onde esses valores variam sensivelmente, como no período de férias (mês de julho), quando os barezinhos na Beira Rio funcionam diariamente produzindo uma maior quantidade de efluentes despejados no rio, sem falar na época da aplicação de agrotóxicos nas lavouras localizadas a montante do trecho em estudo. Um exemplo analisado foi o de emissão cíclicas de poluentes como no caso:

Sendo o período completo considerado de um dia (1440 minutos), temos

$$\begin{aligned} q_L &= q + \left(\frac{m}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{1440}\right) \\ q_L &= q + \left(\frac{m}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi t}{720}\right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde q é a mediana das quantidades dos valores dos poluentes que chegam ao rio através das fontes poluidoras e m é a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo de poluentes que chegam ao rio. Este tipo de variabilidade pode ser, facilmente, incorporada aos algoritmos usados.

Diante da necessidade de subdivisões compartimentais para o estudo, o uso de compartimentos isolados se inviabiliza. De fato, esta modelagem praticamente exige uma abordagem sistêmica. Neste caso, exige que se trate de todos os compartimentos simultaneamente.

2.2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

Na tentativa de compreensão, análise e ensaios de aspectos relevantes do problema citado acima, faremos uso da equação de diferença citada no tópico anterior, usando um número suficiente de subdivisões ao longo do rio para poder simular o comportamento evolutivo de uma mancha de poluente ao descer um rio.

A partir da equação (2.1) e considerando uma subdivisão desse mesmo rio em um número genérico n de compartimentos, temos:

$$\begin{aligned}
 C_1^{(k+1)} &= C_1^{(k)} - S_1 C_1^{(k)} + q_1 \\
 &= (1 - S_1) C_1^{(k)} + q_1 \\
 C_2^{(k+1)} &= \varphi_1 C_1^{(k)} + C_2^{(k)} - S_2 C_2^{(k)} + q_2 \\
 &= \varphi_1 C_1^{(k)} + (1 - S_2) C_2^{(k)} + q_2 \\
 C_3^{(k+1)} &= \varphi_2 C_2^{(k)} + (1 - S_3) C_3^{(k)} + q_3 \\
 &\vdots \\
 C_{n-1}^{(k+1)} &= \varphi_{n-2} C_{n-2}^{(k)} + (1 - S_{n-1}) C_{n-1}^{(k)} + q_{n-1} \\
 C_n^{(k+1)} &= \varphi_{n-1} C_{n-1}^{(k)} + (1 - S_n) C_n^{(k)} + q_n
 \end{aligned}$$

Supondo conhecidas as quantidades iniciais da mancha de poluente, dadas em cada compartimento por $(C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_n^{(0)})$.

Esse sistema de equações de diferenças pode ser reescrito em linguagem matricial em vez de algébrica. Então temos:

$$\begin{bmatrix} C_1^{(k+1)} \\ C_2^{(k+1)} \\ C_3^{(k+1)} \\ \vdots \\ C_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - S_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varphi_1 & 1 - S_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_2 & 1 - S_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi_{n-1} & 1 - S_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^k \\ C_2^k \\ C_3^k \\ \vdots \\ C_n^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Então, dadas as quantidades iniciais de poluente em cada trecho ($C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}$) em forma vetorial $\mathbb{R}^{(0)} = \begin{bmatrix} C_1^{(0)} \\ C_2^{(0)} \\ C_3^{(0)} \\ \vdots \\ C_n^{(0)} \end{bmatrix}$, calcula-se $\mathbb{R}^{(k+1)} = \mathbb{M} \cdot \mathbb{R}^{(k)} + q$, sendo $\mathbb{R}^{(k)} = \begin{bmatrix} C_1^{(k)} \\ C_2^{(k)} \\ C_3^{(k)} \\ \vdots \\ C_n^{(k)} \end{bmatrix}$,

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} 1 - S_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varphi_1 & 1 - S_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_2 & 1 - S_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi_{n-1} & 1 - S_n \end{bmatrix} \text{ e } q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}.$$

A matriz $\mathbb{M}$, é conhecida como matriz de transição.

Embora as simulações computacionais tenham sido efetuadas com o uso algorítmico da equação matricial (2.3), é possível, neste caso linear, obter a solução analítica.

Para obter a solução geral de (2.3), deve-se:

1. Obter então, a solução geral da parte homogênea da equação (2.3), a saber $\mathbb{H}^{(k)}$, na forma adequada;
2. Obter uma solução particular da parte não-homogênea da equação (2.3), $\mathbb{P}^{(k)}$, convenientemente escolhida e
3. Construir, a partir da situação inicial $\mathbb{R}^{(0)}$ uma combinação linear de $\mathbb{H}^{(k)}$ e $\mathbb{P}^{(k)}$, combinação linear esta que satisfaça (2.3).

Embora não se possa garantir que todos os autovalores sejam reais e distintos, no caso que aqui estamos estudando, podemos afirmar que todos os autovalores são reais e menores do que 1. Mas matrizes de transição que levem em consideração outros comportamentos poderão ter autovalores variando num espectro muito maior podendo assumir, inclusive, valores complexos. Nos ensaios que conduzimos (alguns dos quais figuram no capítulo 5) temos, de fato $\lambda_1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq 0$. Neste caso (e apenas neste!) vale:

$$\mathbb{H}^{(1)} = \mathbb{M} \cdot \mathbb{H}^{(0)}$$

$$\mathbb{H}^{(1)} = \mathbb{M}(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots)$$

$$= c_1 \mathbb{M} v_1 + c_2 \mathbb{M} v_2 + \dots$$

$$= c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \dots$$

$$\mathbb{H}^{(2)} = \mathbb{M} \cdot \mathbb{H}^{(1)}$$

$$= \mathbb{M} c_1 \lambda_1 v_1 + \mathbb{M} c_2 \lambda_2 v_2 + \dots$$

$$= c_1 \lambda_1^2 v_1 + c_2 \lambda_2^2 v_2 + \dots$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{H}^{(k)} = c_1 \lambda_1^k v_1 + c_2 \lambda_2^k v_2 + \dots$$

A existência de autovalores iguais ou mesmo complexos leva a expressões de outro tipo (respectivamente, incluindo termos do tipo $k \lambda_j^k v_j$ ou $\rho_j^k (\cos(k\theta) + i \operatorname{sen}(k\theta))$ mas, ainda assim, vale a solução geral de $\mathbb{H}^{(k+1)} = \mathbb{M} \cdot \mathbb{H}^{(k)}$.

Considerando $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$, $\lambda_1 = \max\{\lambda_i, i = 1, 2, 3, \dots, n\}$, (ou, caso o autovalor seja complexo, o módulo de λ : $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ para $\lambda = a \pm bi$) temos:

- $\lambda_1 > 1$, $(\lambda_1)^k \rightarrow +\infty \Rightarrow \|\mathbb{H}^{(k)}\| \rightarrow +\infty$,
- $\lambda_1 = 1$, $(\lambda_1)^k = \text{constante} \rightarrow \|\mathbb{H}^{(k)}\| = \text{constante}$, e
- $0 < \lambda_1 < 1$, $(\lambda_1)^k \rightarrow 0 \rightarrow \|\mathbb{H}^{(k)}\| \rightarrow 0$.

Logo, $\mathbb{H}^{(k+1)} = \mathbb{M} \cdot \mathbb{H}^{(k)}$, tem aproximadamente como solução geral: $\mathbb{H}^{(k)} \cong c_1 \lambda_1^k v_1$ (pois $|\lambda_1| > |\lambda_i|, i = 2, \dots, n$), com a ressalva acima indicada para autovalores iguais ou complexos.

Pode-se observar que, na parte homogênea da solução de (2.3), todos os autovalores (da forma $1 - S$) serão menores do que 1, indicando que essa parte da solução irá a zero. Isto indica, no problema modelado, que haverá uma convergência para um valor assintótico: uma solução particular de (2.3) (não homogênea) que é obtida, em geral, por tentativa e erro.

Assim uma possibilidade de se realizar o passo 2 é testar se $\exists \bar{\mathbb{P}} : \bar{\mathbb{P}} = \mathbb{M} \cdot \bar{\mathbb{P}} + q$.

Este $\bar{\mathbb{P}}$ seria, portanto, uma possível solução particular de (2.3). Nesse caso devemos ter

$$\bar{\mathbb{P}} = \mathbb{M} \cdot \bar{\mathbb{P}} + q \text{ ou}$$

$$\mathbb{I} \cdot \bar{\mathbb{P}} = \mathbb{M} \cdot \bar{\mathbb{P}} + q. \text{ Em outras palavras,}$$

$$(\mathbb{I} - \mathbb{M}) \cdot \bar{\mathbb{P}} = q, \text{ onde } \mathbb{I} = \text{matriz identidade.}$$

Ora, se $q \neq 0$, $\exists! \bar{\mathbb{P}} \Leftrightarrow \det(\mathbb{I} - \mathbb{M}) \neq 0$, o que pode ser verificado facilmente observando $\mathbb{M}$ já que $\det(\mathbb{I} - \mathbb{M}) = S_A \cdot S_B \cdot \dots \cdot S_Z \neq 0$.

Cumprindo, finalmente, o passo 3, e usando $\mathbb{R}^0$, obtêm-se constantes A e B: $\mathbb{R}^{(k)} = A \cdot \mathbb{H}^{(k)} + B \cdot \mathbb{P}^{(k)}$, com $\mathbb{R}^{(k)} \rightarrow \bar{\mathbb{P}}$.

2.2.1 Poluição superficial no Rio Balsas: aproximação discreta

Fazendo uso de sistemas de Equações de Diferenças e de um Modelo compartimental que se presta a estudos, modelagens e simulações progressivamente melhores, deseja-se obter em primeira aproximação a modelagem matemática do comportamento evolutivo de manchas de materiais poluentes de superfície no Rio Balsas.

Inicialmente, optou-se por um ensaio com nove subdivisões longitudinais. Esta escolha para a modelagem, em primeira aproximação, se deve a algumas semelhanças geofísicas no compartimento do rio ao longo de seu trecho urbano e esta opção permite, por assim dizer, "preparar o terreno" para outras opções de modelagem e aproximação.

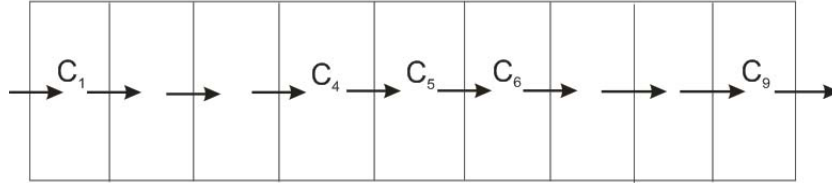


Figura 2.2: Esquema compartimental com 9 subdivisões longitudinais

Esta situação pode ser descrita pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1^{(k+1)} = C_1^{(k)} - \varphi_1 C_1^{(k)} - \delta_1 C_1^{(k)} + q_1 \\ \vdots \\ C_5^{(k+1)} = C_5^{(k)} + \varphi_4 C_4^{(k)} - \varphi_5 C_5^{(k)} - \delta_5 C_5^{(k)} + q_5 \\ \vdots \\ C_9^{(k+1)} = C_9^{(k)} + \varphi_8 C_8^{(k)} - \varphi_9 C_9^{(k)} - \delta_9 C_9^{(k)} + q_9, \end{cases} \quad (2.4)$$

no qual se vê que o poluente que entra em cada compartimento ou provem do trecho imediatamente a montante ou resulta de uma fonte nesse mesmo compartimento.

2.2.2 Refinamentos do Modelo Discreto para o caso em estudo

A seguir, consideramos também a existência de compartimentos laterais no Rio Balsas. Para isto, utilizando 18 subdivisões longitudinais, adotamos 3 compartimentos laterais, perfazendo 54 compartimentos no trecho urbano do rio. Neste caso, levou-se em consideração que, no trecho estudado, o rio apresenta maior correnteza na parte central com movimentos laterais a partir de suas margens. Desse modo, o ingresso de poluição proveniente das margens só ocorre naqueles compartimentos que "tocam" as laterais do rio.

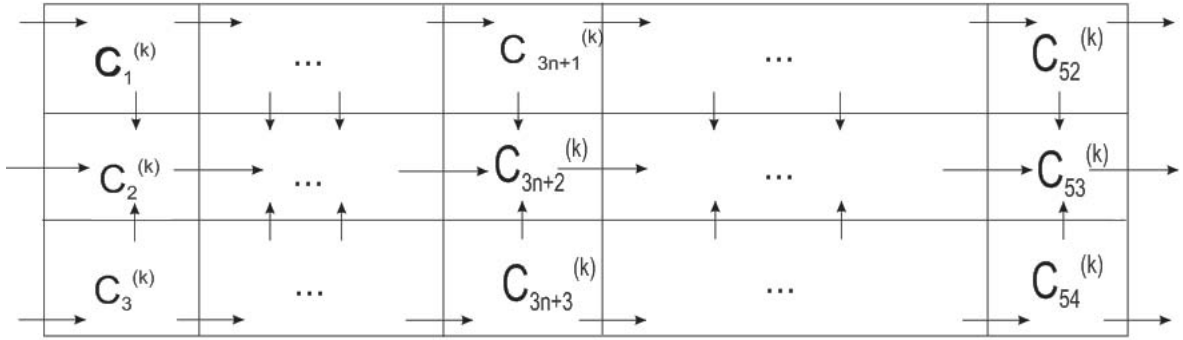


Figura 2.3: Esquema compartimental com 18 subdivisões longitudinais e 3 laterais

Isto pode ser descrito pelo sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1^{(k+1)} = C_1^{(k)} - \varphi_{1,2}C_1^{(k)} - \varphi_{1,4}C_1^{(k)} - \delta_1C_1^{(k)} + q_1 \\ C_2^{(k+1)} = C_2^{(k)} - \varphi_{2,5}C_2^{(k)} + \varphi_{1,2}C_1^{(k)} + \varphi_{3,2}C_3^{(k)} - \delta_2C_2^{(k)} \\ C_3^{(k+1)} = C_3^{(k)} - \varphi_{3,2}C_3^{(k)} - \varphi_{3,6}C_3^{(k)} - \delta_3C_3^{(k)} + q_3 \\ \vdots \\ C_{3n+1}^{(k+1)} = C_{3n+1}^{(k)} - \varphi_{3n+1,3n+2}C_{3n+1}^{(k)} - \varphi_{3n+1,3n+1+3}C_{3n+1}^{(k)} + \varphi_{3n+1-3}C_{3n+1-3}^{(k)} - \delta_{3n+1}C_{3n+1}^{(k)} + q_{3n+1} \\ C_{3n+2}^{(k+1)} = C_{3n+2}^{(k)} - \varphi_{3n+2,3n+2+3}C_{3n+2}^{(k)} + \varphi_{3n+2-3}C_{3n+2-3}^{(k)} + \varphi_{3n+1}C_{3n+1}^{(k)} + \varphi_{3n+3}C_{3n+3}^{(k)} - \delta_{3n+2}C_{3n+2}^{(k)} \\ C_{3n+3}^{(k+1)} = C_{3n+3}^{(k)} - \varphi_{3n+3,3n+2}C_{3n+3}^{(k)} - \varphi_{3n+3,3n+3+3}C_{3n+3}^{(k)} + \varphi_{3n+3-3}C_{3n+3-3}^{(k)} - \delta_{3n+3}C_{3n+3}^{(k)} + q_{3n+3} \\ \vdots \\ C_{52}^{(k+1)} = C_{52}^{(k)} - \varphi_{52,jus}C_{52}^{(k)} - \varphi_{52,53}C_{52}^{(k)} + \varphi_{49,52}C_{49}^{(k)} - \delta_{52}C_{52}^{(k)} + q_{52} \\ C_{53}^{(k+1)} = C_{53}^{(k)} - \varphi_{53,jus}C_{53}^{(k)} + \varphi_{50,53}C_{50}^{(k)} + \varphi_{52,53}C_{52}^{(k)} + \varphi_{54,53}C_{54}^{(k)} - \delta_{53}C_{53}^{(k)} \\ C_{54}^{(k+1)} = C_{54}^{(k)} - \varphi_{54,jus}C_{54}^{(k)} - \varphi_{54,53}C_{54}^{(k)} + \varphi_{51,54}C_{51}^{(k)} - \delta_{54}C_{54}^{(k)} + q_{54} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Deve-se observar que os parâmetros indicados acima ($\varphi_{i,j}$, δ_{C_i} , q_{C_j}) podem variar com o tempo k sem dificuldades adicionais de monta na definição do algoritmo. Se vierem a variar com a própria poluição, o sistema poderá se tornar não-linear, o que foge de escopo do presente trabalho, ainda que se constitua num interessante desafio.

Cabe observar também que estas matrizes para situações de fluxo lateral, deixam de ser triangulares inferiores podendo, em alguns casos de muita regularidade da correnteza (do fluxo do rio), serem matrizes do tipo Hessenberg.

2.2.3 O aumento no número de compartimentos: vantagens nas simulações e dificuldades algorítmicas

Em que pese haver resultados qualitativamente consistentes com a realidade verificada *in loco*, o uso de maior número de subdivisões laterais e longitudinais se justifica em termos de uma melhor visualização evolutiva de resultados numéricos.

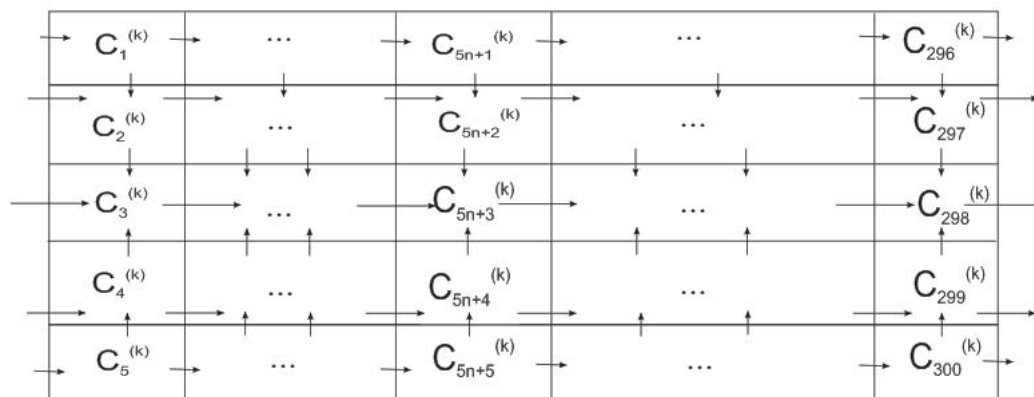


Figura 2.4: Esquema compartimental com 60 subdivisões longitudinais e 5 laterais

Considerando 5 subdivisões laterais e 60 longitudinais o sistema obtido, similar aos anteriores, é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1^{(k+1)} = C_1^{(k)} - \varphi_{1,2}C_1^{(k)} - \varphi_{1,6}C_1^{(k)} - \delta_1C_1^{(k)} + q_1 \\ C_2^{(k+1)} = C_2^{(k)} + \varphi_{1,2}C_1^{(k)} - \varphi_{2,3}C_2^{(k)} - \varphi_{2,7}C_2^{(k)} - \delta_2C_2^{(k)} \\ C_3^{(k+1)} = C_3^{(k)} + \varphi_{2,3}C_2^{(k)} + \varphi_{4,3}C_4^{(k)} - \varphi_{3,8}C_3^{(k)} - \delta_3C_3^{(k)} \\ C_4^{(k+1)} = C_4^{(k)} + \varphi_{5,4}C_5^{(k)} - \varphi_{4,3}C_4^{(k)} - \varphi_{4,9}C_4^{(k)} - \delta_4C_4^{(k)} \\ C_5^{(k+1)} = C_5^{(k)} - \varphi_{5,4}C_5^{(k)} - \varphi_{5,10}C_5^{(k)} - \delta_5C_5^{(k)} + q_5 \\ \vdots \\ C_{5n+1}^{(k+1)} = C_{5n+1}^{(k)} + \varphi_{5n+1-5}C_{5n+1-5}^{(k)} - \varphi_{5n+1,5n+1+5}C_{5n+1}^{(k)} - \varphi_{5n+1,5n+2}C_{5n+1}^{(k)} - \delta_{5n+1}C_{5n+1}^{(k)} + q_{5n+1} \\ C_{5n+2}^{(k+1)} = C_{5n+2}^{(k)} + \varphi_{5n+2-5}C_{5n+2-5}^{(k)} + \varphi_{5n+1}C_{5n+1}^{(k)} - \varphi_{5n+2,5n+3}C_{5n+2}^{(k)} - \varphi_{5n+2,5n+2+5}C_{5n+2}^{(k)} - \delta_{5n+2}C_{5n+2}^{(k)} \\ C_{5n+3}^{(k+1)} = C_{5n+3}^{(k)} + \varphi_{5n+2}C_{5n+2}^{(k)} + \varphi_{5n+4}C_{5n+4}^{(k)} + \varphi_{5n+3-5}C_{5n+3-5}^{(k)} - \varphi_{5n+3,5n+3+5}C_{5n+3}^{(k)} - \delta_{5n+3}C_{5n+3}^{(k)} \\ C_{5n+4}^{(k+1)} = C_{5n+4}^{(k)} + \varphi_{5n+4-5}C_{5n+4-5}^{(k)} + \varphi_{5n+5}C_{5n+5}^{(k)} - \varphi_{5n+4,5n+3}C_{5n+4}^{(k)} - \varphi_{5n+4,5n+4+5}C_{5n+4}^{(k)} - \delta_{5n+4}C_{5n+4}^{(k)} \\ C_{5n+5}^{(k+1)} = C_{5n+5}^{(k)} + \varphi_{5n+5-5}C_{5n+5-5}^{(k)} - \varphi_{5n+5,5n+4}C_{5n+5}^{(k)} - \varphi_{5n+5,5n+5+5}C_{5n+5}^{(k)} - \delta_{5n+5}C_{5n+5}^{(k)} + q_{5n+5} \\ \vdots \\ C_{296}^{(k+1)} = C_{296}^{(k)} + \varphi_{291,296}C_{291}^{(k)} - \varphi_{296,297}C_{296}^{(k)} - \varphi_{296,jus}C_{296}^{(k)} - \delta_{296}C_{296}^{(k)} + q_{296} \\ C_{297}^{(k+1)} = C_{297}^{(k)} + \varphi_{292,297}C_{292}^{(k)} - \varphi_{297,298}C_{297}^{(k)} - \varphi_{297,jus}C_{297}^{(k)} - \delta_{297}C_{297}^{(k)} \\ C_{298}^{(k+1)} = C_{298}^{(k)} + \varphi_{293,298}C_{293}^{(k)} + \varphi_{297,298}C_{297}^{(k)} + \varphi_{299,298}C_{299}^{(k)} - \varphi_{298,jus}C_{298}^{(k)} - \delta_{298}C_{298}^{(k)} \\ C_{299}^{(k+1)} = C_{299}^{(k)} + \varphi_{294,299}C_{294}^{(k)} - \varphi_{299,298}C_{299}^{(k)} - \varphi_{299,jus}C_{299}^{(k)} - \delta_{299}C_{299}^{(k)} \\ C_{300}^{(k+1)} = C_{300}^{(k)} + \varphi_{295,300}C_{295}^{(k)} - \varphi_{300,299}C_{300}^{(k)} - \varphi_{300,jus}C_{300}^{(k)} - \delta_{300}C_{300}^{(k)} + q_{300} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Seja qual for a quantidade de subdivisões compartimentais utilizadas, a equação que descreve o modelo sempre irá considerar a quantidade de material poluente que já havia no compartimento em estudo, acrescido de tudo que esse compartimento recebe de outros compartimentos contíguos (a montante ou lateralmente) além das fontes poluidoras, subtraindo ainda aquilo que é levado pelos fluxos (para jusante ou lateralmente), subtraindo também aquilo que por degradação passa a outros locais (sedimento, biota, margens, ambiente aéreo,...).

Genericamente, com ny subdivisões laterais e nx subdivisões longitudinais, teríamos, para um sistema $nn \times nn$ (com $nn = nx \cdot ny$):

$$C^{(k+1)} = \mathbb{M} \cdot C^{(k)} + q. \quad (2.7)$$

Em $\mathbb{M}$, na i^a linha e nas colunas corretas figuram os valores que simulam: $+$ {ingresso de poluente no compartimento, proveniente de compartimentos contíguos (a montante ou laterais)} $+$ {a quantidade de poluente no compartimento no passo n } $-$ {a saída de poluente para compartimentos contíguos (a jusante ou laterais)} $-$ {a degradação, quando existir} e, na i^a linha do termo independente q temos: {o ingresso de poluentes por fontes (nas margens)}.

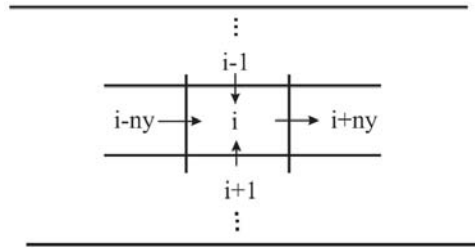


Figura 2.5: Esquema compartimental com nx subdivisões longitudinais e ny laterais

$$C_i^{(k+1)} = \{1 - \varphi_{i,i+ny} - \delta_i\} C_i^{(k)} + \varphi_{i-ny,i} C_{i-ny}^{(k)} + \varphi_{i-1,i} C_{i-1}^{(k)} + \varphi_{i+1,i} C_{i+1}^{(k)} + q_i$$

com as naturais e necessárias correções se $i = k * ny + 1$ (isto é, o compartimento se localiza na margem esquerda), se $i = l * ny$ (isto é, o compartimento se localiza na margem direita) ou se o fluxo ser der em sentido contrário àquele indicado na figura.

Estas três possibilidades, trabalhadas algoritmicamente em ambiente MATLAB são apresentadas e comentadas no capítulo 5.

MODELOS CONTÍNUOS

3.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Ainda que medidas sejam em geral obtidas de modo discreto, os fenômenos envolvidos (fluxo por unidade de tempo, degradação por unidade de tempo, fontes por unidade de tempo) são, de fato, de natureza contínua e, desse ponto de vista poderá ser relevante que o sistema de equações discretas (e, portanto, de equações de diferenças) torne-se um sistema de equações diferenciais ordinárias. De fato, considerando um único compartimento, teríamos:

$$C = C(t), \text{ o poluente no compartimento em estudo no instante de tempo } t,$$

$$\frac{dC}{dt} = -(\varphi + \delta) \cdot C + q \text{ ou, usando } S = \varphi + \delta,$$

$$\frac{dC}{dt} = -S \cdot C + q, \text{ com } C(0) = C_0, \text{ dado,}$$

sendo φ o fluxo que sai desse compartimento e δ a degradação que aí ocorre; $q = q(t)$ é o aporte de poluentes para C .

Esta equação diferencial ordinária linear de primeira ordem tem como solução

$$C(t) = C_0 e^{-(\varphi + \delta)t} + \frac{q}{\varphi + \delta} (1 - e^{-(\varphi + \delta)t}).$$

Como se pode observar, os termos da expressão $C(t)$ em que figura a função exponencial, por terem o expoente negativo $-(\varphi + \delta)$, irão se aproximar de zero e a solução de $C(t)$ irá tender ao valor assintótico $\frac{q}{\varphi + \delta}$:

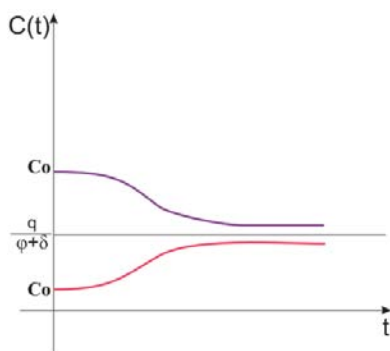


Figura 3.1: Gráfico da solução de $C(t)$ tendendo ao valor assintótico $\frac{q}{\varphi+\delta}$

Caso houvesse, proveniente de um compartimento B (ver figura 3.2), a montante do rio, poluição transportada advectivamente pelo fluxo φ , esta mesma equação diferencial (já considerada com vistas a um sistema de EDO) seria, para $B(t)$ representando a poluição no compartimento a montante e $C(t)$, no compartimento em estudo:

$$B = B(t), C = C(t),$$

$$\frac{dC}{dt} = \varphi_B B - (\varphi_C + \delta_C) \cdot C + q_C, \quad (3.1)$$

com $C(0) = C_0$, dado.

Aqui tem-se, do sistema, apenas a equação relativa ao compartimento C .

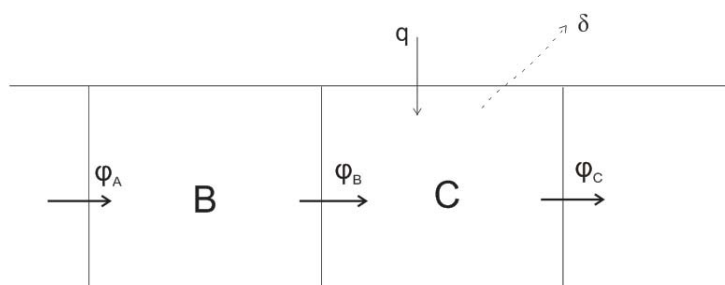


Figura 3.2: Compartimento em estudo usando Equações Diferenciais

Assim como no capítulo anterior, para modelar o transporte de poluente superficial pelo Rio Balsas, precisamos de subdivisões compartmentais, pois o uso de compartimentos isolados é inviável, exigindo assim, uma abordagem sistêmica.

3.2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

3.2.1 O primeiro modelo contínuo

Optando-se primeiramente por um modelo com 9 subdivisões longitudinais, isto é, apenas um compartimento em cada trecho do rio, chegamos ao sistema, com equações descritas a partir da equação (3.1), da forma:

$$\frac{d\mathbb{L}}{dt} = \mathbb{M} \cdot \mathbb{L}(t) + q, \quad (3.2)$$

$$\text{com } \mathbb{L}(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ \vdots \\ C_9(t) \end{bmatrix}, \quad \frac{dL}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dC_1}{dt} \\ \frac{dC_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dC_9}{dt} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{M} = \begin{bmatrix} -S_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \varphi_1 & -S_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -S_9 \end{bmatrix} \text{ e } q(t) = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_9 \end{bmatrix}$$

Para obter a solução geral de (3.2), devemos encontrar a solução geral da parte homogênea e uma solução particular da parte não homogênea.

Para obter a solução geral da parte homogênea, $\frac{d\mathbb{H}}{dt} = \mathbb{M} \cdot \mathbb{H}(t)$, precisamos encontrar os autovalores e autovetores de $\mathbb{M}$ a partir de um sistema algébrico do tipo $(\mathbb{M} - \lambda\mathbb{I})v = 0$ (ou, equivalentemente para λ , $\det(\mathbb{M} - \lambda\mathbb{I}) = 0$). Os autovalores assim obtidos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_9$ são, portanto, as raízes da equação polinomial de grau 9, a equação característica.¹

As soluções correspondentes do sistema são da forma $C_1(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t}$, $C_2(t) = c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$, ..., $C_9(t) = c_9 v_9 e^{\lambda_9 t}$. Logo a solução geral é $\mathbb{H}(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_9 v_9 e^{\lambda_9 t}$.

Pode-se observar que todos os autovalores (da forma $-S$, para $S = \varphi + \delta$) serão menores que 0, indicando que esta parte da solução irá pra zero. Isto indica que haverá uma convergência para um valor assintótico: uma solução particular da parte não homogênea (3.2), $\frac{d\mathbb{P}}{dt} = \mathbb{M} \cdot \mathbb{P}(t) + q$.

¹ Também aqui vale a ressalva de que autovalores iguais levam a termos do tipo $ce^{\lambda t}v$ e, também $cte^{\lambda t}v$, $ct^2e^{\lambda t}v$,...etc, enquanto que autovalores complexos levam a expressões do tipo $e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt))$. As conclusões do texto continuam porém, válidas, ainda que com a parte real de $(\lambda) = \text{parte real de } (a + ib) = a$ no lugar de λ .

De acordo com a teoria clássica de Equações Diferenciais [2], a busca por esta solução particular inicia-se com a tentativa de obter tal solução da família q . Como q é um vetor constante, $\mathbb{P}$ deverá sê-lo, também. Nesse caso, $P'(t) = 0$ e

$$0 = \mathbb{M} \cdot \mathbb{P} + q$$

$$\mathbb{M} \cdot \mathbb{P} = -q.$$

Como $\det(\mathbb{M}) = -S_{C_1} \cdot -S_{C_2} \cdots -S_{C_9} \neq 0 \Rightarrow$ tal solução $\mathbb{P}$ existe e é única.

3.2.2 Um modelo com 3 subdivisões laterais (e 18 longitudinais)

A partir da equação (3.1) e da observação da Figura 2.3 do capítulo 2, o modelo contínuo com 3 subdivisões laterais e 18 subdivisões longitudinais é descrito também por um sistema da forma

$$\frac{d\mathbb{L}}{dt} = \mathbb{M} \cdot \mathbb{L}(t) + q. \quad (3.3)$$

Também aqui, para construir a solução geral de (3.3), precisamos encontrar a solução geral da parte homogênea e uma solução particular da parte não homogênea, reunindo ambas para formar a solução geral.

Para obter então esta solução geral de $\frac{d\mathbb{H}}{dt} = \mathbb{M} \cdot \mathbb{H}(t)$, o procedimento é similar ao do modelo anterior, porém, com uma dificuldade maior na construção da equação característica pelo fato da matriz $\mathbb{M}$ não ser mais uma matriz triangular inferior.

Diferentemente do capítulo 2, que trata do caso discreto (com Equações de Diferenças), no caso contínuo, o limiar deixa de ser, para os autovalores, $\lambda = 1$. Aqui o limiar é $\lambda = 0$. De fato, se $\lambda > 0$ então $e^{\lambda t}$ cresce indefinidamente para $t \rightarrow +\infty$ e, assim, uma solução que inclua $cve^{\lambda t}$ ou formas do tipo $cvte^{\lambda t}$ (que correspondem à forma da solução quando um ou mais autovalores são iguais) "explodem", enquanto que $\lambda < 0$ implica em $e^{\lambda t} \rightarrow 0$ quando t cresce e, na solução, termos do tipo $cve^{\lambda t}$ também se tornam cada vez menores.

De fato, mesmo que autovalores possam ser complexos, o mesmo comportamento irá continuar ocorrendo, visto que, para $\lambda_j = a+ib$, formas do tipo $cve^{at}(\cos(bt)+isen(bt))$ ou, também, do tipo $cvte^{at}(\cos(bt)+isen(bt))$ terão o mesmo comportamento assintótico.

Assim a relação de dominância apenas no caso discreto, dada por $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ deve ser, no caso contínuo, $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, e o termo dominante dessa parte da solução será o termo associado ao maior autovalor (ou, se este for complexo, ao autovalor de maior parte real). Em outras palavras, se $\mathbb{H}(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_{54} v_{54} e^{\lambda_{54} t}$, então, à medida que t cresce, $\mathbb{H}(t) \cong c_1 v_1 e^{\lambda_1 t}$. Resumidamente:

- $\lambda_1 > 0$, $||\mathbb{H}(t)|| \rightarrow +\infty$,
- $\lambda_1 = 0$, $||\mathbb{H}(t)|| = \text{constante}$,
- $\lambda_1 < 0$, $||\mathbb{H}(t)|| \rightarrow 0$ e $\frac{d\mathbb{H}}{dt} = \mathbb{M} \cdot \mathbb{H}(t)$, tem como solução: $\mathbb{H}(t) \cong c_1 v_1 e^{\lambda_1 t}$,

onde a solução geral de $\frac{d\mathbb{L}}{dt} = \mathbb{M} \cdot \mathbb{L}(t) + q$ é uma combinação linear da solução geral da parte homogênea, $\mathbb{H}(t)$, com uma solução particular (não-homogênea), $\mathbb{P}(t)$.

3.2.3 Um modelo com nx subdivisões longitudinais e ny laterais

Genericamente para um modelo com nx subdivisões longitudinais e ny laterais, teríamos também um sistema $nn \times nn$ (com $nn = nx \cdot ny$).

Esquemáticamente:

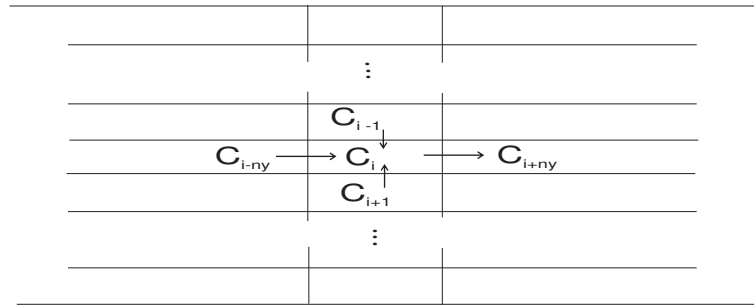


Figura 3.3: Esquema para um modelo com nx subdivisões longitudinais e ny laterais

Para este compartimento na calha central do rio, temos:

$$\frac{dC_i}{dt} = \varphi_{i-ny,i} C_{i-ny} + \varphi_{i-1,i} C_{i-1} - (\varphi_{i,i+ny} + \delta_i) C_i + \varphi_{i+1,i} C_{i+1} + q_i, \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (3.4)$$

Guardadas as características diferenciais nas margens (onde $q_i \neq 0$) e onde nem todos os fluxos acima (em 3.4) existem, esta equação descreve de modo geral o sistema a ser utilizado.

Acrescente-se que a matriz usada no capítulo 2, nos modelos discretos, possui os elementos da diagonal principal da forma $1 - S$. Aqui nos modelos contínuos, tais elementos, possuem a forma $-S$ (com $S = \varphi + \delta$), o que ajuda a compreender, também, o motivo do limiar de mudança de comportamento da solução não mais ser $\lambda = 1$, mas, sim, $\lambda = 0$.

Como nesse capítulo, pode-se ver também que, devido a fluxos laterais, a matriz não é, como no primeiro caso (3.2.1), triangular inferior, embora esteja muito próxima disto, sendo, também, matriz de Hessenberg.

OS PARÂMETROS

Neste capítulo, nosso foco é nos procedimentos adotados para estimar - em primeira aproximação - valores com um mínimo de confiabilidade para a criação de cenários numéricos.

Há muitas dificuldades de diversas ordens na obtenção de valores para os parâmetros e há limitações substantivas nos procedimentos adotados para estimá-los.

4.1 FLUXO SUPERFICIAL

Em termos dos parâmetros dos fluxos, o procedimento utilizado na estimativa de valores para o tempo médio em cada comportamento do rio, sempre em primeira aproximação, ainda que com diversas falhas logísticas, consistiu em dividir a largura do rio em 14 partes laterais e equidistantemente dispostas ortogonalmente às margens e liberar 13 garrafas PET numeradas em cada um dos 13 nós, cronometrando o tempo de percurso de cada uma em todo o compartimento.

Em razão da forte correnteza do rio foi necessário o uso de um barco a motor. Este procedimento se iniciou com uma viagem de aproximadamente 30 minutos por estrada de chão até chegar à Fazenda Canaã (início do trecho em estudo). Neste trabalho de campo, a equipe foi constituída de 5 pessoas com diversa funções. Além da autora, os quatro demais componentes foram seu esposo Luís Cláudio Messias do Santos, Adelir Sandri, Mário de Sousa e Franciso "Cizinho" da Silva, além de Eugênio Sandri e Valdo (motoristas) a quem

autora e orientador agradecem a necessária colaboração. Dos cinco membros da equipe, dividiram-se as tarefas da seguinte maneira, um para pilotar o barco, outra pessoa cronometrando e registrando o tempo, e as três outras soltando, observando e recolhendo as garrafas numeradas. Os locais para se soltar, acompanhar e recolher as garrafas foram determinados previamente em observação de imagens de satélite ou fotogrametria¹. Foram lançadas as garrafas e de barco descíamos o rio mais rápido que a correnteza e com necessário cuidado para evitar ondas que afetassem o movimento das garrafas e esperávamos no local em que estimávamos que as garrafas chegassem. Retiradas as garrafas e anotados os respectivos tempos, eram lançadas novamente e assim sucessivamente por todo o trecho em estudo.

Se o compartimento do rio é percorrido em τ unidades de tempo, a cada uma dessas unidades de tempo, $1/\tau = \varphi$ indica aquela parte do rio que sai do compartimento em estudo.

A média foi considerada como a fração de saída em cada compartimento, por unidade de tempo, no trecho estudado.



Figura 4.1: Equipe que ajudou na coleta dos dados



Figura 4.2: Garrafas PET numeradas descendo o rio

¹ consulta Google Earth [8]

Garrafas	compartimentos								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	10	18	15	29	7	10	10	4	10
2	10	18	15	30	7	10	10	5	10
3	11	19	15	32	8	12	10	5	10
4	12	19	15	33	8	13	11	6	12
5	12	19	16	33	9	14	11	6	12
6	12	20	17	33	9	15	12	6	13
7	13	21	17	35	10	15	13	7	13
8	12	21	17	35	9	14	12	8	13
9	12	21	17	34	8	14	11	7	13
10	11	21	16	33	8	13	11	6	12
11	10	19	15	32	7	12	10	6	12
12	10	19	15	30	7	11	10	5	11
13	10	18	14	30	7	11	10	4	10
MÉDIA	11,15	19,46	15,69	32,23	8	12,61	10,84	5,77	10,69
FLUXO	0,09	0,05	0,06	0,03	0,125	0,08	0,09	0,17	0,09

Tabela 4.1: Dados coletados em pesquisa de campo - tempo cronometrado em minutos

4.2 DEGRADAÇÃO

Os resíduos sólidos de origem urbana são em sua maioria descartados corretamente pela população apesar de incluir materiais inservíveis junto com materiais que poderiam ser considerados (e tratados!) como recicláveis. De acordo com a composição bioquímica desses resíduos descartados, alguns se decompõem mais rapidamente e de forma mais completa que outros. Da mesma forma, os resíduos gerados por atividades domésticas como lavagem de roupas, louças e quintais, higiene pessoal, atividades comerciais diárias etc., também levam um determinado tempo para que ocorra a degradação no meio ambiente. Tanto os resíduos sólidos como os líquidos chegam de alguma forma ao Rio Balsas e à bacia hidrográfica a que este rio pertence, mesmo que em proporções diferentes.

Em geral, incluem-se nesta degradação fenômenos como a biodegradação, a fotodegradação, degradação por ações mecânicas, etc.

Em primeira aproximação a degradação de poluente é proporcional à quantidade de poluente. Em outras palavras, no instante n e no compartimento i , a degradação é modelada de modo linear pelo termo $-\delta_i C_i^{(n)}$.

4.3 DETERMINAÇÃO DA CARGA POLUIDORA EM CADA COMPARTIMENTO 29

Deste modo - e de forma linear - se inclui na modelagem proposta e em conjunto, toda a série de fenômenos de degradação. Deve ser mencionado, também, que, em algumas execuções dos programas desenvolvidos, os valores de degradação usados são nulos com o intuito de permitir uma visualização melhor do comportamento evolutivo da mancha, mesmo que os algoritmos permitam a inclusão de parâmetros adequadamente medidos localmente ou obtidos da literatura. Em outros ensaios computacionais, os valores da degradação por unidade de tempo foram adotados por conveniência numérica, como sendo da ordem de milésimo (correspondendo a décimos de percentual por unidade de tempo).

4.3 DETERMINAÇÃO DA CARGA POLUIDORA EM CADA COMPARTIMENTO

Outro dado para determinar parâmetros necessários ao uso do modelo é a quantidade de carga poluente que chega ao rio. Uma parte que chega ao rio é devido à implantação de grandes projetos agropecuários desde as suas nascentes com um excessivo uso de produtos agroquímicos [6]. Outra fonte de impacto, por força da cidade não possuir uma rede de esgotos, mas apenas fossas nas residências, é a canalização de alguns efluentes diretamente para as ruas de onde, por escoamento (ou galerias pluviais) chegam até o rio ou atingem pequenos riachos que cortam a cidade e que acabam desaguando também no Rio Balsas. Além disso, algumas residências bem próximas das margens e alguns bares na região da Avenida Beira Rio, direcionam a água utilizada na lavagem de roupas, louças e quintais também diretamente para o rio. A pior parte é no período chuvoso quando, além de tudo aqui descrito, a água da chuva transporta por escoamento o lixo das ruas diretamente para a bacia hidrográfica.

Durante todo período, para obtenção dos parâmetros utilizados, as dificuldades não foram poucas. Em conversas com representantes de vários setores públicos, confirmamos que realmente não existem documentos ou trabalhos científicos que registrem a realidade dos problemas enfrentados, problemas estes que estão prejudicando o Rio Balsas. Além destes problemas (conhecidos de modo informal ou qualitativamente) deve-se considerar também

4.3 DETERMINAÇÃO DA CARGA POLUIDORA EM CADA COMPARTIMENTO 30

o risco de um crescimento do impacto ambiental também pelo desmatamento nas margens que vem ocorrendo a montante, na região das grandes plantações.

Em termos da quantificação das fontes poluentes a dificuldade foi maior ainda, pois como descrito acima, originam-se de vários locais diferentes. Após observações, resolvemos fixar valores proporcionais à descarga observada de efluentes.

Há um trecho do rio onde se localiza o maior número de bares da região dita "Beira Rio", onde deságua o córrego que mais transporta material impactante e que inclui um grande número de residências que direcionam seus efluentes pluviais para as ruas e consequentemente para o rio. No compartimento que inclui este trecho, a carga por unidade de tempo foi consirada com o valor $q = 1$. Outros trechos e, consequentemente, outros compartimentos do modelo foram considerados com respectivas cargas como frações desse maior valor (assumido como unitário), frações estas obtidas por observação e estimativa². Ainda, em diversos compartimentos, as cargas foram consideradas nulas.

É de necessidade imediata fazer estas estimativas corretamente em um futuro bem próximo, submetendo um projeto de pesquisa a autoridades locais e regionais. Este levantamento, em conjunto com o instrumental algorítmico aqui proposto pode se constituir num primeiro passo para que a comunidade tome consciência de danos irreversíveis ao Rio Balsas, fonte, por outro lado, de possibilidade de manutenção e melhoria da qualidade de vida da comunidade tanto da região urbana quanto na área rural. Espera-se que, assim, essa comunidade acabe engajando-se em ações, estratégias e políticas públicas de preservação e sustentabilidade.

Nos primeiros trabalhos de campo foi possível verificar que as unidades de tempo inicialmente supostas não poderiam se realizar, dada a velocidade do rio no trecho urbano em estudo. Assim, a unidade de tempo diária (ver, por exemplo, no capítulo 2, o tipo de expressão usada para variações cíclicas de descarga (2.2)) não pode ser aferida, sendo que, *in loco*, a unidade de tempo que mostrou ser mais adequada ao problema de fato deveria ser inferior à inicialmente suposta. Assim, também aqui se optou por uma escolha qualitativa, com uma unidade realtivamente fictícia, de modo a produzir ensaios que, futuramente

² Esta estimativa levou em conta tão somente os tamanhos dos córregos, bem como a extensão dos trechos, fazendo-se corresponder a maiores trechos, maiores possibilidades de impacto.

4.3 DETERMINAÇÃO DA CARGA POLUIDORA EM CADA COMPARTIMENTO 31

poderão ser calibrados a partir de observações locais. Em outras palavras, os algoritmos, ainda que adequados para qualquer escolha de unidade, estão propostos de modo a permitir que se possa, qualitativamente, "ver" a mancha de poluente "descer" o rio, bem como o comportamento assintótico em função das fontes poluidoras e de possíveis fenômenos de *runoff*. Finalmente pode-se observar que, mesmo optando por esta utilização dita "qualitativa" de parâmetros, os ensaios computacionais se prestam a uma compreensão melhor dos fenômenos estudados - um dos objetivos iniciais da dissertação.

ENSAIOS COMPUTACIONAIS

As dificuldades na obtenção de medidas minimamente confiáveis, como na maioria das situações efetivamente trabalhadas no campo, são uma constante no estudo e na compreensão de fenômenos ambientais. Assim, para os cenários simulados, são usados valores estimados no Rio Balsas junto com valores supostos, considerando uma coerência ainda que rigorosa, pragmaticamente relativa. Esta decisão visa enfatizar, a um tempo, a importância dos algoritmos aqui desenvolvidos e descritos como instrumento de trabalho, bem como suas possibilidades de uso a partir de uma ótica qualitativa, com vistas à avaliação de estratégias e políticas de contenção, preservação e correção ambientais. Na realidade, mesmo que órgãos governamentais e agências de monitoramento ambiental necessitem de simulações quantitativas, ensaios qualitativos como os que seguem neste quinto capítulo, são de relevância especialmente significativa como instrumento de educação ambiental e consequentes tomadas de consciência.

Por outro lado, foram fixados valores para as fontes poluidoras baseados em observações como indicado no capítulo anterior.

5.1 PRIMEIRO ENSAIO

Em um primeiro ensaio discreto para simular o transporte de materiais poluentes de superfície no Rio Balsas, adotamos nove subdivisões longitudinais, sugerindo uma condição inicial,

$\mathbb{P}_0 = (0.625 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$, com poluentes somente no primeiro compartimento. Isto visa explorar uma situação que descreve um derramamento de poluente (um possível acidente) apenas nesse compartimento, acompanhando a trajetória dessa mancha ao descer o rio na região urbana.

A variação temporal em todo este capítulo é a de conveniência numérica. Valores da realidade são, como já foi indicado, de difícil obtenção e constituem-se em desafio futuro. Assim, nos algoritmos, "npt" é um valor com o qual a execução "da conta" indica valores assintóticos de impacto.

Embora o algoritmo construído aceite valores efetivos para as sucessivas degradações, nesse primeiro ensaio a simulação foi feita com valores nulos, de modo a permitir uma melhor visualização de comportamentos evolutivos de movimentação da pluma de poluente. A tabela a seguir mostra os parâmetros utilizados.

Trechos	fluxos, fontes poluentes	respectivos valores	
A	φ_A, q_A	0.09	0.25
B	φ_B, q_B	0.05	0
C	φ_C, q_C	0.06	0
D	φ_D, q_D	0.03	0.01
E	φ_E, q_E	0.125	0.25
F	φ_F, q_F	0.08	1
G	φ_G, q_G	0.09	0.4
H	φ_H, q_H	0.17	0.7
J	φ_J, q_J	0.09	0

Tabela 5.1: Parâmetros utilizados no primeiro ensaio

Os parâmetros da tabela acima são aqueles descritos em (2.1) onde se observou teoricamente que $\mathbb{P}_n \rightarrow \bar{\mathbb{P}}$, valor assintótico, pois $\lambda_1 > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \cdots$ e $\lambda_1 < 1$.

Na figura 5.1, do lado direito, temos o resultado final da execução evolutiva de um algoritmo adequado para a descrição do sistema (2.4) do capítulo 2. O algoritmo mostra, em sua execução os valores das barras mudando constantemente, algo que pode ser conferido pelo gráfico à direita, em que cada curva representa os sucessivos valores que assume o poluente em cada compartimento quando se varia o índice temporal k .

Vê-se que, de fato, a presença de material impactante tende a uma coleção de valores assintóticos.

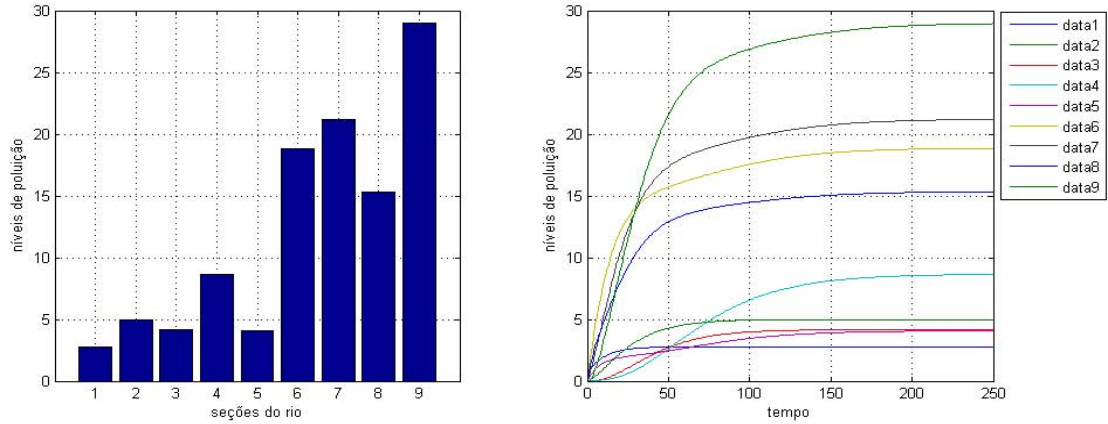


Figura 5.1: Simulação com 9 subdivisões longitudinais

5.2 UMA VARIANTE DO PRIMEIRO ENSAIO

Em (2.2) define-se a possibilidade de um tratamento numérico com fontes variando periodicamente:

$$q_L = q + \left(\frac{m}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi t}{720}\right)$$

Isto foi feito em alguns ensaios computacionais - de modo qualitativo. De fato, o que se usou foi:

$$q = q + \left(\frac{q}{3}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{npt/2}\right) \quad (5.1)$$

O objetivo foi o de introduzir, no processo evolutivo, dois ciclos completos e a variação de fonte foi considerada como pertencente ao intervalo

$$\left[\frac{2}{3}q, \frac{4}{3}q\right], \quad (5.2)$$

uma variabilidade obtida com (5.1).

Os resultados numéricos indicam, numa parte inicial, uma visualização dinâmica com um gráfico de barras que, ao final é substituído por

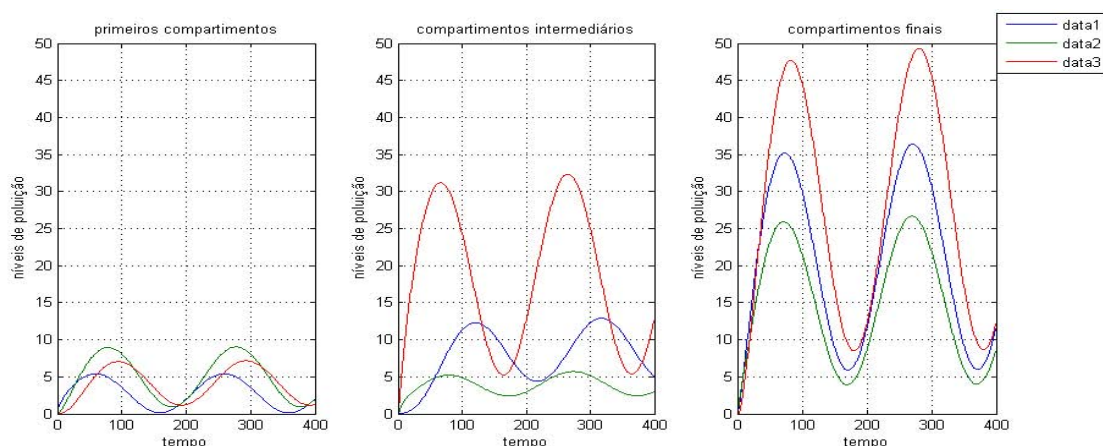


Figura 5.2: Simulação com variabilidade periódica das fontes (cf. tabela 5.1)

Uma constatação imediata é a de um crescimento dos níveis máximo de poluição nos compartimentos finais, podendo indicar um risco enormemente maior de impacto local e de possíveis danos à biota.

5.3 SEGUNDO ENSAIO

Um segundo ensaio discreto com 18 subdivisões longitudinais e 3 subdivisões laterais foi realizado para simular o transporte de poluente superficial pelo Rio Balsas e foram escolhidos os três primeiros compartimentos sugerindo uma descarga de material tóxico advinda das plantações localizadas a montante e, em um quarto compartimento localizado à margem direita, uma pequena descarga inicial de material impactante. Além da carga poluente originada nas lavouras que atinge apenas os três primeiros compartimentos, alguns dos demais compartimentos localizados nas margens recebem efluentes urbanos. Aliado a estas fontes poluidoras aparecem três córregos, todos localizados na margem esquerda do rio, nos compartimentos $3n + 1$ para $n = 8, 10$ e 14 . Os demais parâmetros aparecem na tabela 5.2.

Trechos	fluxos superficiais		respectivos valores		degradação
	entrada	saída	entrada	saída	
margem esquerda	$\varphi_{3n-2,3n+1}$	$\varphi_{3n+1,3n+4}, \varphi_{3n+1,3n+2}$	0.025	0.025, 0.06	0.005
calha central	$\varphi_{3n-1,3n+2}, \varphi_{3n+1,3n+2}, \varphi_{3n+3,3n+2}$	$\varphi_{3n+2,3n+5}$	0.3, 0.06, 0.06	0.3	0.00125
margem direita	$\varphi_{3n,3n+3}$	$\varphi_{3n+3,3n+6}, \varphi_{3n+3,3n+2}$	0.025	0.025, 0.06	0.0025

Tabela 5.2: Parâmetros utilizados no segundo ensaio com subdivisões laterais e longitudinais

Os parâmetros utilizados na simulação descrita em (2.5), geram uma matriz $\mathbf{M}_{54 \times 54}$ com autovalores menores que 1¹. Assim, $\mathbb{P}_n \rightarrow \bar{\mathbb{P}}$ que é a distribuição assintótica de poluente superficial ao longo do rio, em seu trecho urbano.

Os valores adotados nos ensaios computacionais, mesmo que não sendo reais, são relativamente coerentes entre si e visam estabelecer uma base de comparação entre esses ensaios e outras possíveis (ou prováveis) execuções dos programas para Diferenças Finitas ou para Equações Diferenciais.

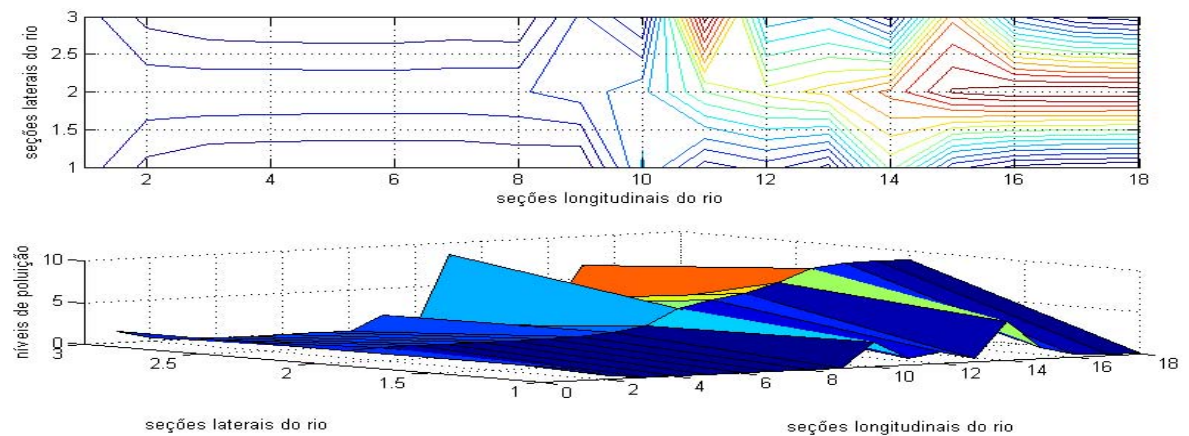


Figura 5.3: Simulação com 3 subdivisões laterais e 18 subdivisões longitudinais: curvas de nível e em três dimensões

De ensaios deste tipo podemos ver que, mesmo com a expectativa de maiores impactos junto aos pontos de deságue dos córregos e próximos a maior atividade comercial ou turística, os níveis assintóticos podem atingir valores bastante significativos onde inexistem fontes, algo visível tanto na parte superior da figura 5.3 (em curvas de nível) quanto na parte inferior (com o gráfico tridimensional).

¹ autovalores calculados através do comando $[vet \ val]=eigs(mtr)$; em ambiente MATLAB

5.4 TERCEIRO ENSAIO

Para simulação do transporte de poluentes superficiais no Rio Balsas, em um terceiro ensaio discreto usaram-se 60 subdivisões longitudinais e 5 subdivisões laterais². Como em 5.3, foi suposta uma descarga nos 5 primeiros compartimentos laterais do rio, em seu trecho inicial, portanto. Além disso considerou-se que não existem fontes poluidoras nos compartimentos que tocam as margens do rio. Isto com vista à simulação de passagem de mancha pelo rio no trecho estudado. Os demais parâmetros estão distribuídos na Tabela 5.3.

Trechos	fluxos superficiais		respectivos valores		degradação
	entrada	saída	entrada	saída	
margem esquerda	$\varphi_{5n-4,5n+1}$	$\varphi_{5n+1,5n+6}, \varphi_{5n+1,5n+2}$	0.09	0.09, 0.03	0.005
lateral esquerda	$\varphi_{5n-3,5n+2}, \varphi_{5n+1,5n+2}$	$\varphi_{5n+2,5n+7}, \varphi_{5n+2,5n+3}$	0.21, 0.03	0.21, 0.06	0.0075
calha central	$\varphi_{5n-2,5n+3}, \varphi_{5n+2,5n+3}, \varphi_{5n+4,5n+3}$	$\varphi_{5n+3,5n+8}$	0.3, 0.06, 0.06	0.3	0.00125
lateral direita	$\varphi_{5n-1,5n+4}, \varphi_{5n+5,5n+4}$	$\varphi_{5n+4,5n+9}, \varphi_{5n+4,5n+3}$	0.21, 0.03	0.21, 0.06	0.0075
margem direita	$\varphi_{5n,5n+5}$	$\varphi_{5n+5,5n+10}, \varphi_{5n+5,5n+4}$	0.09	0.09, 0.03	0.0025

Tabela 5.3: Parâmetros utilizados na simulação de transporte de poluentes superficiais com 60 subdivisões longitudinais e 5 laterais

Os parâmetros utilizados na simulação descritos em (2.6) geram uma matriz 300x300. Embora esta matriz não seja triangular inferior (pois aparecem termos não nulos na parte superior à diagonal principal: são os fluxos laterais da parte à direita do rio), é muito próxima disso. Embora essa matriz seja, como em caso anterior, de Hessenberg, aspectos geofísicos podem modificá-las (principalmente em razão de fluxos locais). No entanto os diversos ensaios numéricos efetuados indicam todos um comportamento assintótico, o que permite suspeitar que também aqui, autovalores sejam em módulo inferiores a 1, sendo o maior deles positivo³.

A Figura 5.4 traz quatro sucessivos momentos (na ordem usual de leitura) do movimento de uma mancha de origem accidental. Como foi suposto um caso de rigoroso controle ambiental com a eliminação das fontes que figuram nos demais casos, todos os valores $q_1, q_2, \dots, q_{300}$ nulos, havendo apenas uma mancha modelada via condição inicial.

Este caso indica que o próprio Rio Balsas pode se encarregar do transporte de material impactante - o que não elimina os riscos para a biota na cidade de Balsas e a jusante.

² Nos ensaios houve uma preocupação de se trabalhar com n_y (número de subdivisões laterais) ímpar, para se poder identificar um fluxo maior na calha central

³ Pelo Método da potências, obtivemos para o presente ensaio $\lambda \cong 0,967$

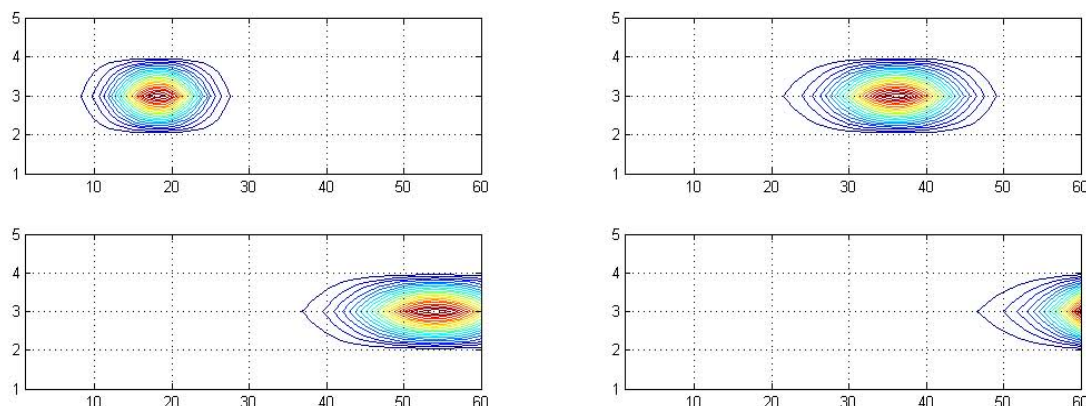


Figura 5.4: Curvas de nível da simulação com 5 subdivisões laterais e 60 subdivisões longitudinais

Abaixo, na Figura 5.5 temos a mesma pluma poluente nos mesmos momentos diferindo no tipo de gráfico, aquele com curvas de nível e este com superfícies tridimensionais que mostram o efeito da degradação.

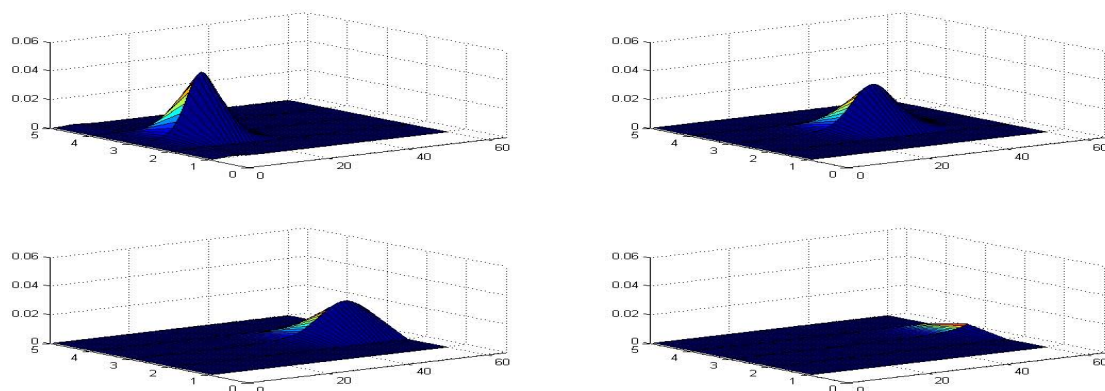


Figura 5.5: Simulação em 3-d com 5 subdivisões laterais e 60 subdivisões longitudinais: no eixo z o nível de impacto em x e y respectivamente as subdivisões longitudinais e laterais

5.5 QUARTO ENSAIO

Ensaio computacionais de Modelos Matemáticos desenvolvidos com Equações Diferenciais Ordinárias são, para o caso linear, bastante simplificados o que facilita o uso de método

numérico. No que segue, podemos observar um comportamento qualitativo e quantitativamente muito próximo ao ensaio realizado com os mesmos parâmetros (usados no segundo ensaio) e Equações de Diferenças. A diferença entre ambas as soluções (do Sistema de Equação de Diferenças e do Sistema de Equações Diferenciais) deu, relativamente, da ordem de 4% no conjunto de 54 compartimentos⁴.

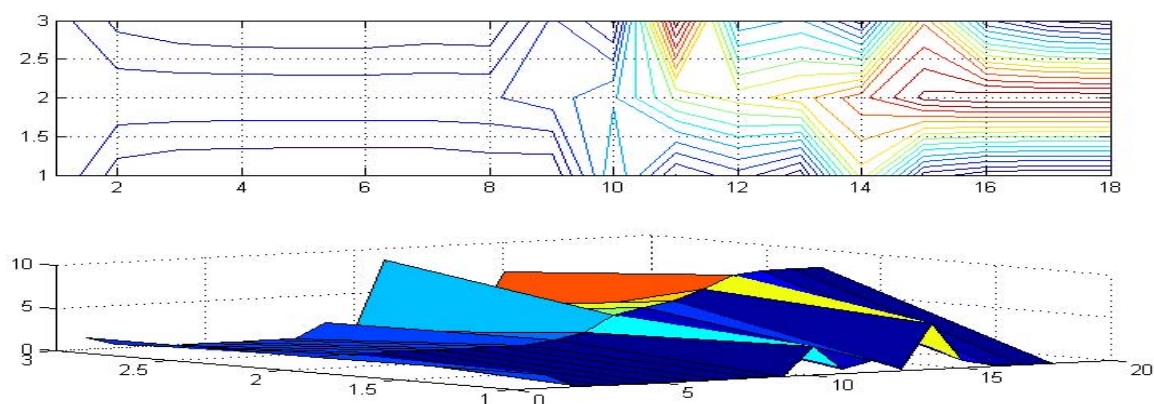


Figura 5.6: Simulação com 3 subdivisões laterais e 18 subdivisões longitudinais: modelo contínuo, curvas de nível e em três dimensões

Em ambiente MATLAB, o recurso numérico utilizado é de tipo Runge-Kutta de quarta ordem, mas esta opção se deve a motivos didáticos, já que, para sistema linear como este, bastaria um Método de tipo Euler o que "fecharia" o horizonte de possibilidades numéricas, bem como o de algoritmos implementados e que poderão (e deverão!) ser usados em futuros trabalhos com discentes da UEMA.

⁴ Esta semelhança foi significativa na decisão de deixar no texto uma maioria de casos discretos

Considerações Finais

De uma maneira geral, procuramos partir de um problema efetivo com possíveis consequências de imediato e, com certeza, a médio e longo prazos para chegar a uma modelagem matemática usual para estudar, analisar, compreender e simular computacionalmente cenários de Impacto Ambiental em rios. Também se estudaram as resoluções de Sistemas de Equações de Diferenças e de Equações Diferenciais utilizados nas modelagens propostas e, por último, foi incluída a implementação desses modelos usando um ambiente MATLAB. Nos ensaios realizados o rio escolhido é justamente o rio que, por sua importância, dá nome à cidade de Balsas: o rio Balsas, em cujas margens vive a comunidade a que pertencem a autora e sua família.

Academicamente, os estudos com Equações de Diferenças bem como com Equações Diferenciais foram feitos de uma maneira construtiva, propiciando uma visão inicial a mais sobre o assunto, podendo caracterizar um instrumento didático-pedagógico que pode ser utilizado como suporte tanto em aulas de Álgebra Linear como de Equações Diferenciais e Métodos Discretos, contemplando uma interdisciplinaridade atual e necessária de um modo geral, além de incorporar de modo particular, o uso de recursos e ambientes computacionais, visto que, nos casos citados, motivações provenientes das realidades comunitárias são, além de necessárias, bem-vindas.

É reconhecido o risco e o resultado decorrente de materiais impactantes que afetam muitas vezes de modo até irreversível rios, lagoas, rias, deltas e corpos aquáticos. No sentido de permitir uma redução nesses impactos ambientais, o presente trabalho apresenta uma ferramenta computacional que permite a criação de um instrumental capaz de simular cenários de acidentes, além de outros cenários em que se possam visualizar estratégias de prevenção, de contenção e de combate a práticas que possam levar à presença de materiais tóxicos prejudiciais à biota fluvial. Acreditamos que, em um futuro bem próximo, possamos subme-

ter um projeto de pesquisa a autoridades locais e regionais, podendo utilizar o estudo aqui realizado, obtendo parâmetros de modo mais fidedigno podendo, assim, efetuar simulações que se constituam em instrumental relevante para auxílio na definição de políticas públicas ambientais locais.

Este trabalho irá necessitar de ajuda acadêmico-profissional: um apoio de um grupo transdisciplinar. Espera-se conseguir este apoio junto a profissionais das áreas de biologia, química, estatística profissionais indispensáveis na obtenção de dados em trabalhos de campo. Um primeiro passo será como aquele aqui realizado em primeira aproximação: o de transformar dados de campo em significativas informações, significativas no sentido de tratamentos matemáticos, informações que permitam de modo quantitativo compreender e avaliar o fenômeno (ou os fenômenos) em estudo, o que já não é fácil. O passo seguinte será o de transformar essas informações matemáticas em conhecimento, o que foi feito gradativamente durante todo o estudo e preparação do presente trabalho. Enfim, e finalmente, o passo mais difícil: transformar estes conhecimentos em sabedoria socialmente relevante, algo que transcende o escopo desta dissertação, já que depende da população e de autoridades locais balsenses e de processos educacionais de divulgação, de aprendizado e de tomada de posição: frutos de uma participação ativa e consciente, em prol de um objetivo comum: o de assumir a preservação do Rio Balsas e toda a sua bacia hidrográfica, e determinar modos sustentáveis de convívio na cidade e na região.

Anexo

Seguem em anexo, os algoritmos (preparados em ambiente MATLAB) utilizados nas simulações no capítulo 5 deste trabalho.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Algoritmo para simulação com 9 compartimentos longitudinais%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% programa de equações de diferenças

clear all

% matriz

m=[0.91 0 0 0 0 0 0 0 0
    0.09 0.95 0 0 0 0 0 0 0
    0 0.05 0.94 0 0 0 0 0 0
    0 0 0.06 0.97 0 0 0 0 0
    0 0 0 0.03 0.875 0 0 0 0
    0 0 0 0 0.125 0.92 0 0 0
    0 0 0 0 0 0.08 0.91 0 0
    0 0 0 0 0 0 0.09 0.83 0
    0 0 0 0 0 0 0 0.17 0.91];

% condicao inicial

pz=[0.625 0 0 0 0 0 0 0 0]';

% termo independente q

q=[0.25 0 0 0.01 0.25 1 0.4 0.7 0]';

nfinal=250;

% autovalores e autovetores

[vet val]=eig(m); rr=max(max(val))

```

```
ver=zeros(nfinal,9);
ver(1,:)=pz;

for i=1:nfinal
    p=m*pz+q;
    %p=m*pz+((-1)^i+1)*q;
    subplot(1,2,1)
    bar(p),grid,axis([0 10 0 30]),xlabel('seções do rio'),ylabel('níveis de poluição')
    pause(0.1)
    pz=p;

    for j=1:9
        ver(i+1,j)=p(j);
    end
end
% gráfico de todos os compartimentos
c1=ver(:,1);
c2=ver(:,2);
c3=ver(:,3);
c4=ver(:,4);
c5=ver(:,5);
c6=ver(:,6);
c7=ver(:,7);
c8=ver(:,8);
c9=ver(:,9);
ch=[0:nfinal];
subplot(1,2,2)
plot(ch,c1,ch,c2,ch,c3,ch,c4,ch,c5,ch,c6,ch,c7,ch,c8,ch,c9),xlabel('tempo'),
ylabel('níveis de poluição'), grid on,
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%Algoritmo para simulação com variabilidade periódica das fontes%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%com nove subdivisões longitudinais%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% programa de equações de diferenças
clear all
% matriz
m=[0.91 0 0 0 0 0 0 0 0
    0.09 0.95 0 0 0 0 0 0 0
    0 0.05 0.94 0 0 0 0 0 0
    0 0 0.06 0.97 0 0 0 0 0
    0 0 0 0.03 0.875 0 0 0 0
    0 0 0 0 0.125 0.92 0 0 0
    0 0 0 0 0 0.08 0.91 0 0
    0 0 0 0 0 0 0.09 0.83 0
    0 0 0 0 0 0 0 0.17 0.91];
% condicao inicial
pz=[0.625 0 0 0 0 0 0 0 0]';
% termo independente r
q=[0.25 0 0 0.01 0.25 1 0.4 0.7 0]';
nfinal=400;
% autovalores e autovetores
[vet val]=eig(m); rr=max(max(val))

% preparacao para visualizar resultados
ver=zeros(nfinal,9);
for i=1:9
    ver(1,i)=pz(i);
end
parg=4*pi/nfinal;

```

```
for i=1:nfinal
    qv=(1+sin(i*parg))*q
    p=m*pz+qv;
    bar(p),grid,axis([0 10 0 60]),xlabel('seções do rio'),ylabel('níveis de poluição',
    pause(0)
    pz=p;

    for j=1:9
        ver(i+1,j)=p(j);
    end
end
pause
% gráfico de todos os compartimentos
c1=ver(:,1);
c2=ver(:,2);
c3=ver(:,3);
c4=ver(:,4);
c5=ver(:,5);
c6=ver(:,6);
c7=ver(:,7);
c8=ver(:,8);
c9=ver(:,9);
ch=[0:nfinal];
subplot(1,3,1)
plot(ch,c1,ch,c2,ch,c3),xlabel('tempo'), axis([0 400 0 50])
ylabel('níveis de poluição'), title('primeiros compartimentos'), grid on,

subplot(1,3,2)
plot(ch,c4,ch,c5,ch,c6),xlabel('tempo'), axis([0 400 0 50])
```

```
ylabel('níveis de poluição'), title('compartimentos intermediários'), grid on,

subplot(1,3,3)
plot(ch,c7,ch,c8,ch,c9),xlabel('tempo'), axis([0 400 0 50])
ylabel('níveis de poluição'), title('compartimentos finais'), grid on,

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%Programa do Rio Balsas com 18 subdivisões longitudinais e 3 lateriais%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% parâmetros do rio e da discretização
%
% npt corresponde ao número de passos no tempo
%
npt=150;
%
nx=18; ny=3;
%
% número total de compartimentos
%
nc=nx*ny;
%
% preparação da matriz de transição de estado e do vetor de carga poluente
%
mtr=sparse(nc,nc); par=sparse(nc,nc);
%
% preparacao do vetor da condição inicial
%
p0=zeros(nc,1);
%
% termo independente primeiro o run-off
```

```
%
q=zeros(nc,1); p0=zeros(nc,1);
%
q(1)=0.125
q(2)=0.25
q(3)=0.125
q(19)=0.01
q(24)=0.01
q(25)=0.09
q(30)=0.25
q(31)=0.225
q(36)=0.1
q(37)=0.2
q(42)=0.4
q(43)=0.125
%
% termo independente - desague dos córregos
%
corr1=25; q(corr1)=q(corr1)+0.07;
corr2=31; q(corr2)=q(corr2)+0.55;
corr3=43; q(corr3)=q(corr3)+0.45;

% condição inicial com poluentes apenas nos 3 primeiros compartimentos
%
for i=1:ny
    p0(i)=0.85;
end
p0(43)=p0(43)+0.025;
%
% mej: margem esquerda jusante
```

```
% mdj: margem direita jusante
% ccj: calha central jusante
%
mej=0.025; mdj=0.025;
ccj=0.3;
%
% edl: movimento lateral a partir da margem esquerda
% ddl: movimento lateral a partir da margem direita
%
edl=0.06; ddl=0.06;
% dme: decaimento no compartimento da margem esquerda
% dc: decaimento no compartimento da calha central
% dmd: decaimento no compartimento da margem direita
%
dme=0.005; dmd=0.0025; dc=0.00125;
%
% elementos auxiliares na montagem da matriz
% na diagonal principal, sucessivamente, margem
% esquerda, mcalha do rio, margem direita
%
dpme=1-mej-edl-dme; dpmd=1-mdj-ddl-dmd;
dpc=1-ccj-dc;
for i=1:nx
    in=(i-1)*ny+1;
    mtr(in,in)=dme;
    in=in+1;
    mtr(in,in)=dpc;
    in=in+1;
    mtr(in,in)=dmd;
end
```

```
for i=1:nx
    in=(i-1)*ny+2;
    mtr(in,in-1)=edl;
    mtr(in,in+1)=ddl;
end
for i=2:nx
    in=(i-1)*ny+1;
    mtr(in,in-ny)=mej;
    in=in+1;
    mtr(in,in-ny)=ccj;
    in=in+1;
    mtr(in,in-ny)=mdj;
end
% repetições de passos no tempo
ver=zeros(ny,nx);
for it=1:npt
    p=mtr*p0+q;
    in=0;
    for i=1:nx;
        for j=1:ny
            in=in+1;
            ver(ny-j+1,i)=p(in);
        end
    end
end
figure(2)
subplot(2,1,2), surf(ver),xlabel('seções longitudinais do rio'),
ylabel('seções laterais do rio'),zlabel('níveis de poluição'),grid on
subplot(2,1,1), contour(ver,15),xlabel('seções longitudinais do rio'),
ylabel('seções laterais do rio'),grid on
pause(0.3)
```

```

    p0=p;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%Programa do Rio Balsas com 5 subdivisões laterais e 60 longitudinais%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% parâmetros do rio e da discretização
npt=240;
nx=60; ny=5; nc=nx*ny;
mtr=sparse(nc,nc); par=sparse(nc,nc);
% termo independente e conicao inicial
q=zeros(nc,1); p0=zeros(nc,1);
for i=1:nx
    in=(i-1)*ny+1;
    q(in)=0.125;
    in=in+ny-1;
    q(in)=0.125;
end
q=0.25*q;q=0*q;
for i=1:ny
    p0(i)=0.25*exp(-abs(i-((ny+1)/2)));
end
% fluxos longitudinais dos compartimentos
% mej e mdj das margens (e)sq & (d)ir
% lej e ldj dos compartimentos laterais (e) e (d)
% ccj fluxo na calha central
mej=0.09; mdj=0.09;
lej=0.21; ldj=0.21;
ccj=0.3;
% fluxos laterais

```

```
% edl e ddl sao so que saem lateralmente das margens
% ecl e dcl sao os laterais intermediarios
edl=0.03; ddl=0.03;
ecl=0.06; dcl=0.06;
% por fim, os decaimentos
% dme e dmd nas margens (maiores)
% dle e dld nos compartimentos laterais
% dc na calha central
dme=0.005; dmd=0.0025;
dle=0.0075; dld=0.0075;
dc=0.00125;
% elementos auxiliares na montagem da matriz
% primeiro, a diagonal principal
dpme=1-mej-edl-dme; dpmd=1-mdj-ddl-dmd;
dple=1-lej-ecl-dle; dpld=1-l dj-dcl-dld;
dpc=1-ccj-dc;
in=0;
% diagonalprincipal
for i=1:nx
    in=in+1;
    mtr(in,in)=dpme;
    in=in+1;
    mtr(in,in)=dple;
    in=in+1;
    mtr(in,in)=dpc;
    in=in+1;
    mtr(in,in)=dpld;
    in=in+1;
    mtr(in,in)=dpmd;
end
```

```
% em seguida, as diagonais secundarias
% diagonal secundaria inf & sup proximas
for i=1:nx
    in=(i-1)*ny+2;
    mtr(in,in-1)=edl;
    in=in+1;
    mtr(in,in-1)=ecl;
    mtr(in,in+1)=dcl;
    in=in+1;
    mtr(in,in+1)=ddl;
end
% e a diagonal secundaria inferior distante
for i=2:nx
    in=(i-1)*ny+1;
    mtr(in,in-ny)=mej;
    in=in+1;
    mtr(in,in-ny)=lej;
    in=in+1;
    mtr(in,in-ny)=ccj;
    in=in+1;
    mtr(in,in-ny)=ldj;
    in=in+1;
    mtr(in,in-ny)=mdj;
end
% para completar, os primeiros 5 compartimentos
% repeticoes de passos no tempo
ver=zeros(ny,nx);
for it=1:npt/4
    p=mtr*p0+q;
    in=0;
```

```
    for i=1:nx;
        for j=1:ny
            in=in+1;
            ver(ny-j+1,i)=p(in);
        end
    end
    %subplot(2,2,1),surf(ver),grid on, axis([0 65 0 5 0 0.05])
    subplot(2,2,1), contour(ver,20),grid on
    pause(0.2)
    p0=p;
end
for it=npt/4+1:npt/2
    p=mtr*p0+q;
    in=0;
    for i=1:nx;
        for j=1:ny
            in=in+1;
            ver(ny-j+1,i)=p(in);
        end
    end
    %subplot(2,2,2), surf(ver),grid on, axis([0 65 0 5 0 0.05])
    subplot(2,2,2), contour(ver,20),grid on
    pause(0.2)
    p0=p;
end
for it=npt/2+1:npt/(4/3)
    p=mtr*p0+q;
    in=0;
    for i=1:nx;
        for j=1:ny
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%Programa do Rio Balsas com Eq. Diferenciais Ordinárias%%%%%%%%%%%%  
%(com ny subdivisões laterais e nx subdivisões longitudinais)%%%%%%%%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
% parâmetros do rio e da discretização  
  
%
```

```
% variação temporal
% npt corresponde ao numero de passos no tempo
t0=0; tf=100; npt=150;
dt=(tf-t0)/npt; dt2=dt/2;
%
nx=18; ny=3;
%
% número total de compartimentos
%
nc=nx*ny;
%
% preparação da matriz de transição de estado e do vetor de carga poluente
%
mtr=sparse(nc,nc); par=sparse(nc,nc);
%
% preparacao do vetor da condicao inicial
%
p0=zeros(nc,1);
%
% termo independente primeiro o runoff
%
q=zeros(nc,1);
%
q(1)=0.125;
q(2)=0.25;
q(3)=0.125;
q(19)=0.01;
q(24)=0.01;
q(25)=0.09;
q(30)=0.25;
```

```
q(31)=0.225;
q(36)=0.1;
q(37)=0.2;
q(42)=0.4;
q(43)=0.125;
%
% termo independente - desague dos córregos
%
corr1=25; q(corr1)=q(corr1)+0.07;
corr2=31; q(corr2)=q(corr2)+0.55;
corr3=43; q(corr3)=q(corr3)+0.45;
%
% condição inicial com poluentes apenas nos 3 primeiros compartimentos
%e em um quarto compartimento p(43)
for i=1:ny
    p0(i)=0.85;
end
p0(43)=p0(43)+0.025;
% mej: margem esquerda jusante
% mdj: margem direita jusante
% ccj: calha central jusante
%
mej=0.025; mdj=0.0125;
ccj=0.3;
%
% edl: movimento lateral a partir da margem esquerda
% ddl: movimento lateral a partir da margem direita
%
edl=0.06; ddl=0.06;
% dme: decaimento no compartimento da margem esquerda
```

```
% dc: decaimento no compartimento da calha central
% dmd: decaimento no compartimento da margem direita
%
dme=0.005; dmd=0.0025; dc=0.00125;
%
% elementos auxiliares na montagem da matriz
% na diagonal principal, sucessivamente, margem
% esquerda, mcalha do rio, margem direita
%
dpme=-mej-edl-dme; dpmd=-mdj-ddl-dmd;
dpc=-ccj-dc;
for i=1:nx
    in=(i-1)*ny+1;
    mtr(in,in)=dpme;
    in=in+1;
    mtr(in,in)=dpc;
    in=in+1;
    mtr(in,in)=dpmd;
end
for i=1:nx
    in=(i-1)*ny+2;
    mtr(in,in-1)=edl;
    mtr(in,in+1)=ddl;
end
for i=2:nx
    in=(i-1)*ny+1;
    mtr(in,in-ny)=mej;
    in=in+1;
    mtr(in,in-ny)=ccj;
    in=in+1;
```

```
mtr(in,in-ny)=mdj;
end
% repetições de passos no tempo
ver=zeros(ny,nx);
%cpp=zeros(npt,1);
for ip=1:npt
    tt=t0+ip*dt;
    k1=mtr*p0+q;
    k2=mtr*(p0+k1*dt2)+q;
    k3=mtr*(p0+k2*dt2)+q;
    k4=mtr*(p0+k3*dt)+q;
    p=p0+dt*(k1+2*(k2+k3)+k4)/6;
    in=0;
    for i=1:nx;
        for j=1:ny
            in=in+1;
            ver(ny-j+1,i)=p(in);
        end
    end
    subplot(2,1,2), surf(ver),grid on
    subplot(2,1,1), contour(ver,15), grid on
    pause(0.2)
    p0=p;
end
```

Referências Bibliográficas

- [1] BASSANEZI, R. C. *Ensino aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2006.
- [2] BASSANEZI, R. C., FERREIRA JÚNIOR, W. C. *Equações Diferenciais com aplicações*. São Paulo: HARBRA Ltda, 1988.
- [3] BOLDRINI, J. L., COSTA, S. I. R., FIGUEIREDO, V. L., WETZLER, H. G. *Álgebra Linear*. São Paulo: 3ª edição, Harper & Row do Brasil, 1980.
- [4] BURDEN, R. L., FAIRES, J. D. *Numerical analysis*. Boston: 1988.
- [5] BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [6] Caracterização das águas do Rio Balsas. Disponível em <<http://www.bvsde.paho.org/bvsaidis/caliagua/v-002.pdf>>. Acesso feito em 12 de janeiro de 2008.
- [7] EDELSTHEIN-KESHET, L. *Mathematical Models in Biology*. Philadelphia: SIAM, 1988.
- [8] Google Earth. Disponível em <<http://earth.google.com/>>. Acesso em 20 de janeiro de 2008.
- [9] História de Balsas. Disponível em <<http://www.achetudoeregiao.com.br/MA/balsas/historia.htm>>. Acesso feito em 20 de março de 2008.
- [10] IBGE - cidades. Disponível em <<http://www.ibge.gov.br/cidadesat/topwindow.htm?1>>. Acesso em 19 de março de 2008.

- [11] MEYER, J. F. C., BERTAGNA, R. H. *O Ensino, a Ciência e o Cotidiano*. Campinas, SP: Editora Alínea, 2006.
- [12] MACHADO, M. B. *Modelagem tridimensional da dispersão de poluentes em rios*. Campinas, SP: Tese (doutorado)- Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação [s.n.], 2006.
- [13] PAGANINI, W. S. *A identidade de um rio de contrastes: o Tietê e seus múltiplos usos*. São Paulo: 2ª edição, ABES, AESABESP, 2008. 256 pp.
- [14] SALVATIERRA, M.M. *Modelagem matemática e simulação computacional da presença de materiais impactantes tóxicos em casos de dinâmica populacional com competição inter e intra-específica*. Campinas, SP: Dissertação (mestrado)- Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação [s.n.], 2005.