

EXPLORAÇÃO DE RECURSOS RENOVÁVEIS:

A PESCA: COMPARAÇÃO DE  
DOIS MODELOS

Este Trabalho corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Sr<sup>a</sup> MARIA BERNADETE C. THEODÓRO e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 10 de dezembro de 1986

---

Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi  
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Abril /1986

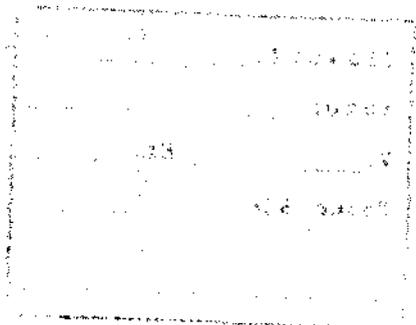
UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

EXPLORAÇÃO DE RECURSOS RENOVÁVEIS:-

A PESCA: COMPARAÇÃO DE

DOIS MODELOS

MARIA BERNADETE C. THEODORO



Aos meus pais

ao Osni meu esposo e  
à           minha filha  
Ana Carolina

DEDICO.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi, pela contribuição fundamental na realização deste, através de sua orientação segura, e pela ajuda valiosa prestada nos diferentes aspectos deste trabalho.

A D<sup>a</sup> Alcina, pela datilografia dos manuscritos.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente colaboraram na realização deste trabalho.

## ÍNDICE.

### I. INTRODUÇÃO

### II. ASPECTOS TEÓRICOS

#### 2.1. Noções de Análise Funcional

#### 2.2. O Problema varacional mais simples de calculo de variações: Equação de Euler e Variação segunda.

#### 2.3. Sistemas autônomos: Definição de Pontos críticos e análise dos mesmos, sistemas quaselineares

### III. MODELOS CLÁSSICOS DE DINÂMICA POPULACIONAL.

#### 3.1. Modelo de Crescimento logístico

#### 3.2. Modelo Logístico com colheita

#### 3.3. Aplicação à Pesca

#### 3.4. Modelos Logísticos Generalizados

#### 3.5. Curvas de Esforço-Produção

### IV. MODELOS DE GORDON E GOULD.

#### 4.1. Modelo de Gordon

#### 4.2. Modelo de Gould

#### 4.3. Função Produção

### V. APLICAÇÕES PRÁTICAS.

#### 5.1. Pesca das Anchovas no Perú

### VI. Bibliografia

## (I) INTRODUÇÃO

Temos visto, atualmente, a exploração de recursos renováveis sendo muito usada, devido à escassez de alimentos e ao elevado custo dos produtos como a carne, ovos e outros recursos. A exploração, embora tenha um controle governamental, tem levado algumas populações à extinção ou à quase extinção.

Procuramos fazer um estudo matemático de uma destas explorações: a pesca. A pesca é uma exploração de livre acesso, ou seja, não existe, teóricamente, impedimento para explorá-la.

Assim, para explorá-la comercialmente, a indústria precisa usar certos recursos como: barcos, redes, pessoal (pescadores), uma certa tecnologia hoje existente, e todos os demais equipamentos utilizados; e além disso, temos a contagem dos dias em que se pesca. Todos estes fatores colocados acima influenciam na produção (a colheita dos recursos); e estes fatores no trabalho, são reunidos em uma variável chamada esforço (E). O esforço indica tudo o que a indústria usou para a pesca onde os dias também foram incluídos nesta variável.

A população de peixes, como as demais populações, obedecem à equação diferencial ordinária.

$$\frac{dx}{dt} \equiv F(x) - h(x,t).$$

onde  $x$  é a população,  $F(x)$  é a função de crescimento natural e  $h(x,t)$  representa a razão com que se processa a colheita.

A função  $h(x,t)$  nos dá uma colheita (retirada) sustentável que é o nível de população que pode ser colhido

de forma que a população existente permaneça constante. Temos também a Produção Máxima Sustentável (P.M.S.) que é o nível máximo de população que se pode colher sem que afete a população.

Estas equações estão também sujeitas a estudos levando-se em consideração os fatores biológicos e econômicos da exploração.

Para que possamos predizer os efeitos destes fatores, modelos matemáticos têm sido usados, ainda que pese sobre ele várias críticas, sendo a principal delas a sua supersimplificação.

No presente trabalho, procuramos fazer uma comparação de dois modelos que visam estudar a pesca: o modelo de Gordon e o modelo de Gould.

Gordon, em seu modelo, analisando os efeitos econômicos de custo e preço da exploração e do recurso, afirma que não ocorrerá a extinção da população devido ao fator econômico. Já Gould, afirma que a população irá a extinção pois a exploração desenfreada que ocorre acaba atingindo a população a tal nível que esta não terá mais condição de se recuperar.

Depois de expostos os dois modelos, fizemos uma análise, baseado em dados concretos, numa comparação dos dois modelos, procuramos mostrar qual deles corresponde mais à realidade.

## (II) ASPECTOS TEÓRICOS:

## 2.1. Noções de Análise Funcional

Definição: Um funcional é uma função com valores reais, cujo domínio é um espaço vetorial.

Definição:- Uma norma num espaço vetorial  $V$  é uma aplicação  $|| \cdot || : V \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfazendo as condições:-

$$a) ||x|| \geq 0 \quad \text{e} \quad ||x|| = 0 \text{ se e sómente se } x=0$$

$$b) ||a \cdot x|| = |a| \cdot ||x||$$

$$c) ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$

para  $\forall x, y \in V$  e  $a \in \mathbb{R}$ .

Exemplo: O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  é um espaço vetorial normado com a norma:

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad ; \quad \text{onde } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Temos também o espaço das funções reais contínuas  $C[a,b]$ , definidas no intervalo  $[a,b]$ , que é um espaço vetorial normado com a norma.

$$||f||_0 = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \quad \text{onde } f \in C[a,b]$$

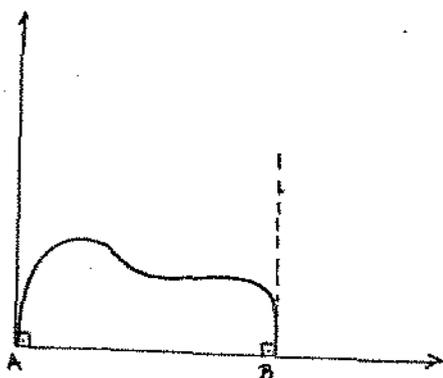
Em um espaço vetorial normado  $V$ , podemos definir a noção de distância entre dois pontos  $x$  e  $y$ , definida por:  $d(x,y) = ||x-y||$ .

Assim podemos introduzir também todas as noções topológicas dos espaços métricos.

Definição: Seja  $V$  um espaço vetorial normado, o espaço de funções e  $J: D \subset V \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional. Dizemos que  $\bar{y}$  é um ponto de mínimo (máximo) local de  $J$  se  $\exists \epsilon > 0$  tal que  $J(\bar{y}) \leq J(y)$  ( $J(\bar{y}) \geq J(y)$ ) para todo  $y \in D$  satisfazendo  $||y - \bar{y}|| < \epsilon$ .

Se o domínio  $D$  é o  $\mathbb{R}^n$ , então os extremos deste funcional existem pelo teorema de Weierstrass, para conjuntos com-

pactos. Mas para um domínio  $D$  qualquer, a existência destes extremos está relacionada com se considerar ou não o domínio  $D$  compacto. Pois cada problema deve ser analisado separadamente, podendo não haver solução para o mesmo. Como por exemplo: Determinar a curva de menor comprimento ligando os pontos  $A$  e  $B$ , do plano, normal ao segmento  $AB$  em suas extremidades.



Qualquer curva normal do segmento em seus extremos tem comprimento maior que  $\overline{AB}$ . Existem curvas, arbitrariamente próximas a  $AB$  deste tipo. Como  $\overline{AB}$  não é perpendicular a si mesmo, então, não

existe solução. Em outras palavras, a solução para este problema tenderia para  $\overline{AB}$ , como ele não é perpendicular a ele mesmo nas extremidades  $A$  e  $B$ , então não pode ser solução. Logo, concluímos que não existe solução para o problema.

Continuidade de um funcional.

Definição: Considerando o funcional

$$J: V \longrightarrow R$$

$$y \longrightarrow J(y).$$

dizemos que  $J$  é contínuo em  $y_0 \in V$  se para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\|y - y_0\| < \delta \Rightarrow |J(y) - J(y_0)| < \varepsilon$ .

Existem casos em que podemos ter descontinuidades de funcionais, mas estes não serão aqui mencionados.

Funcional Linear

Definição: - Um funcional  $J: V \longrightarrow R$  será dito linear se:

$$(1) J(\alpha y) = \alpha J(y) \quad \forall \alpha \in R \quad \text{e} \quad \forall y \in V$$

$$(2) J(x+y) = J(x) + J(y) \quad \forall x, y \in V$$

Definição: Para um funcional  $J:V \rightarrow \mathbb{R}$  e para um dado  $y \in V$ , consideremos a diferença.

$$(\Delta J)_y(h) = J(y+h) - J(y) \quad \text{onde } h \in V$$

Suponhamos que  $(\Delta J)_y(h)$  pode ser escrito como a soma de dois funcionais, um linear e um infinitésimo com relação a  $h$  da forma  $\epsilon \cdot \|h\|$ , isto é, com  $\|h\| \rightarrow 0 \Rightarrow \epsilon \rightarrow 0$ . Em outras palavras,  $(\Delta J)_y(h) = \text{linear de } h \text{ somado com } \epsilon \|h\|$ . Assim,  $J$  é dito diferenciável em  $y$  e a parte linear na decomposição é denominada diferencial ou variação primeira de  $J$  em  $y$  cuja notação é:

$$(\delta J)_y, \text{ logo}$$

$$(\Delta J)_y(h) = (\delta J)_y(h) + \epsilon \|h\|.$$

Diz-se que  $J$  tem um extremo em  $y_0$  se  $J(y) - J(y_0)$  não muda de sinal para  $y$  numa vizinhança de  $y_0$ .

Teorema: Seja  $J$  um funcional diferenciável. A condição necessária para que  $J$  tenha um extremo em  $y_0$  é que  $(\delta J)_{y_0}(h) = 0$ , para  $\forall h \in V$  admissível.

Ou seja, precisamos mostrar que: se  $J$  tem mínimo em  $y_0 \in V$  então

$$(\delta J)_{y_0}(h) = 0 \text{ para } \forall h \text{ admissível.}$$

Demonstração:

Seja  $y_0$  um ponto de mínimo para  $J$ ,  $(\delta J)_{y_0}(h) = (\Delta J)_{y_0}(h) - \epsilon \|h\|$ , com  $\epsilon \rightarrow 0$  quando  $\|h\| \rightarrow 0$  então, para valores pequenos de  $h$

$(\delta J)_{y_0}$  e  $(\Delta J)_{y_0}$  têm o mesmo sinal, seja  $\bar{h} \in V$  tal que

$(\delta J)_{y_0}(\bar{h}) \neq 0$  então, para qualquer  $\alpha > 0$

$(\delta J)_{y_0}(-\alpha \bar{h}) = -(\delta J)_{y_0}(\alpha \bar{h})$  por linearidade de  $(\delta J)_{y_0}$ , assim como o sinal de  $(\delta J)_{y_0}$  pode ser mudado modificando-se ligeiramente  $h$ , e assim  $(\Delta J)_{y_0}$  também muda de sinal, o que contradiz a hipótese de  $y_0$  ser o mínimo, logo

$$(\delta J)_{y_0}(h) = 0.$$

## 2.2. O problema Variacional mais simples de cálculo de variações.

Trata-se de achar o mínimo do funcional  $J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$  na classe  $D_1 [a, b]$ , com a  $y(a) = A$  e  $y(b) = B$ ,  $A$  e  $B$  sendo dados e  $F(x, y, y')$  contínua com derivadas parciais de 1ª e 2ª ordens contínuas em  $x, y, y'$ . E onde  $D_1 [a, b] = C^1 [a, b]$ : espaço das funções contínuas com derivadas primeiras contínuas em  $[a, b]$  e com a norma

$$\|y\|_1 = \max_{x \in [a, b]} \{ |y(x)| \} + \max_{x \in [a, b]} \{ |y'(x)| \}$$

Uma variação admissível de  $y(x)$  é  $y(x) + h(x)$  com  $h \in D_1 [a, b]$  e  $h[a] = h[b] = 0$  então

$$\begin{aligned} (\Delta J)_y(h) &= J(y+h) - J(y) = \int_a^b F(x, y+h, y'+h') dx \\ &- \int_a^b F(x, y, y') dx = \\ &= \int_a^b \{ F(x, y, h, y'+h') - F(x, y, y') \} dx \end{aligned}$$

usando a expansão em série de Taylor em torno de  $(x, y, y')$ , obtém-se:

$$(\Delta J)_y(h) = \int_a^b \{ F_y(x, y, y') \cdot h + F_{y'}(x, y, y') \cdot h' + \dots \} dx$$

usando a definição de diferencial de  $J$ , têm-se:-

$$(\delta J)_y(h) = \int_a^b \{ F_x(x, y, y') \cdot h + F_{y'}(x, y, y') \cdot h' \} dx$$

se  $J$  tiver um mínimo em  $y$ , assim,

$$(\delta J)_y(h) = 0 \text{ para } \forall h \text{ admissível, isto é,}$$

$$\int_a^b \{ F_y(x, y, y') \cdot h + F_{y'}(x, y, y') \cdot h' \} dx = 0$$

Integrando por partes, têm-se:

$$\begin{aligned} \int_a^x F_y(x, y, y') \cdot h dx \Big|_a^b - \int_a^b \left( \int_a^x F_y(x, y, y') dx \right) \cdot h' dx + \\ + \int_a^b F_{y'}(x, y, y') \cdot h' dx = 0 \end{aligned}$$

Assim ficamos com:-

$$\int_a^b \left\{ - \int_a^x [F_Y(x, y, y') dx + F_{Y'}(x, y, y')] \cdot h'(x) \right\} dx$$

Lema (Dubois - Reymond) : Se  $\int_a^b f(x) \cdot h'(x) dx = 0$

para  $\forall h(x) \in D_1 [a, b]$  com  $h(a) = h(b) = 0$  e  $f(x)$  é contínua, então  $f(x) = c$  constante em  $[a, b]$ .

Dem:-  $\int_a^b h'(x) dx = h(x) \Big|_a^b = 0$

assim  $\int_a^b h'(x) [f(x) - c] dx = \int_a^b h'(x) f(x) dx -$

$$\int_a^b c h'(x) dx =$$

$$\int_a^b f(x) \cdot h'(x) dx - c \int_a^b h'(x) dx = 0 + 0 \cdot c = 0$$

para  $\forall c \in \mathbb{R}$ . Escolhendo  $c = \frac{\int_a^b f(t) dt}{b-a}$  têm-se

também que  $\int_a^b (f(x) - c) dx = \int_a^b f(x) - c(b-a) = 0$

Definindo  $H(x) = \int_a^x (f(t) - c) dt$  como  $f(t)$  é

contínua, temos  $H \in D_1 [a, b]$  e  $H(a) = H(b) = 0$

e também  $H'(x) = f(x) - c$  e isto implica

1º)  $\int_a^b (f(x) - c) \cdot H'(x) dx = 0$  pela hipótese do lema.

2º)  $\int_a^b (f(x) - c) \cdot (f(x) - c) dx = 0 = \int_a^b (f(x) - c)^2 dx = 0$

como  $f$  é contínua, também o será  $f(x) - c$ .

Assim  $f(x) - c = 0$  em  $[a, b]$ .

Logo  $f(x) = c$  em  $[a, b]$

C.Q.D.

Voltando ao cálculo variacional que temos:

$$\int_a^b \left\{ - \int_a^x F_Y(x, y, y') + F_{Y'}(x, y, y') \right\} h'(x) dx = 0$$

para  $\forall h$  admissível, isto é, para

$\forall h \in D_1 [a, b]$  com  $h(a) = h(b) = 0$

Logo  $-\int_a^x F_y(x,y,y') dt + F_{y'}(x,y,y') = c$ , constante de acordo com o lema anterior.

Derivando-se esta relação obtemos:-

$$F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x,y,y') = 0$$

Esta é chamada Equação de Euler, uma condição necessária para que  $y$  dê um mínimo (ou máximo) ao funcional. Desenvolvendo-se as derivadas têm-se:

$$F_y - F_{xy'} + F_{yy'} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'' = 0 \text{ ou}$$

$$\text{se } F_{y'y'} \neq 0$$

$$y'' = \phi(x,y,y')$$

Seria natural perguntar em que condições esta equação diferencial de 2ª ordem tem solução. Note que este problema é diferente do problema de Cauchy que é resolver  $J'' = \phi(x,y,y')$  tal que  $y(a) = b_0$  e  $y'(a) = b_1$  buscando uma solução local. Aqui procuramos uma solução global.

O problema da existência e da unidade da solução da equação de Euler será discutido mais adiante.

Quanto à regularidade da solução, um ponto fundamental de se notar é saber se a solução é boa, isto é, se tem derivadas. Um resultado típico é:

**Teorema:-** Seja  $y \in D_1[a,b]$  uma solução de Euler. Se  $F(x,y,y')$  tem derivadas de 1ª e 2ª ordens contínuas com relação a  $x,y,y'$ , então  $y$  tem derivada segunda contínua sempre que  $F_{yy'}(x,y,y') \neq 0$ .

**Demonstração:-**

$$\frac{d}{dx} F_{y'}(x,y,y') = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_{y'}(x+\Delta x, y(x+\Delta x), y'(x+\Delta x)) - F_{y'}(x,y,y')}{\Delta x}$$

$$= \frac{F_{yx} \Delta x + F_{yy'} \Delta y + F_{y'y'} \Delta y'}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x F_{yx} + \Delta y F_{yy'} + \Delta y' F_{y'y'}}{\Delta x}$$

onde  $Fy'x$ ,  $Fy'y$ ,  $Fy'y'$ , indicam as derivadas assinaladas de  $F$  calculadas em valores intermediários convenientes.

Segue-se então:

$$\frac{d}{dx} Fy' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \bar{F}y'x + \frac{\Delta y}{\Delta x} \bar{F}y'y + \frac{\Delta y'}{\Delta x} \bar{F}y'y' \right\}$$

$$= Fy'x + y'Fy'y + Fy'y' \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x}$$

Como  $Fy'y' \neq 0$  e as demais parcelas são contínuas implica que  $Y'' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x}$  existe e é contínua

C.Q.D.

### Variação Segunda

Vamos discutir o problema mais simples envolvendo agora a variação segunda. Assim, o problema torna-se: achar o mínimo do funcional:-

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx \text{ na classe } D_1 [a, b]$$

com  $A = (a, y(a))$  e  $B = (b, y(b))$ . Assumindo que  $F$  tem derivadas parciais contínuas de 3ª ordem, e considerando  $J(y+h)$  com  $h \in D_1 [a, b]$  e  $h(a) = h(b) = 0$ , têm-se a fórmula de Taylor.

$$F(x, y+h, y'+h') = F(x, y, y') + h Fy(x, y, y') + h' Fy'(x, y, y') +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ h^2 Fyy(x, y, y') + 2 h \cdot h' Fyy'(x, y, y') + h'^2 Fy'y'(x, y, y') \right] +$$

$$+ \text{termos com } h^3, h^2 h', h' h'^2, \dots$$

$$\text{assim } (\Delta J) y(h) = (\delta J) y(h) + (\delta^2 J) y(h) + \varepsilon \cdot ||h||^2$$

com  $\varepsilon \rightarrow 0$  com  $||h|| \rightarrow 0$ .

e por definição põe-se:-

$$(\delta^2 J) y(h) = \int_a^b \left\{ \frac{1}{2} Fyy(x, y, y') \cdot h + h \cdot h' Fyy'(x, y, y') + \right.$$

$$\left. + \frac{h'^2}{2} Fy'y'(x, y, y') \right\} dx.$$

$(\delta^2 J) y(h)$  é a variação segunda de  $J$  em  $y$  com relação a  $h$ .

Observações:- Num espaço vetorial normado, pode-se dizer que o funcional  $J$  é duas vezes diferenciável se

$\Delta J =$  parte linear + parte quadrática + infinitésimo de ordem superior.

ou  $(\Delta J) y(h) = (\delta J) y(h) + (\delta^2 J) y(h) + \epsilon \cdot ||h||^2$  com

$\epsilon \rightarrow 0$  quando  $||h|| \rightarrow 0$ .

e  $(\delta^2 J) y(h)$  denomina-se diferencial de segunda ordem de  $J$  em  $y$

Teorema: se o funcional  $J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$

tem um mínimo de  $y_0$ , então

$(\delta^2 J) y_0(h) \geq 0$  para todo  $h$  admissível

Demonstração:

$J$  tem um mínimo em  $y_0$ , então  $(\delta J) y_0(h) = 0$  para  $\forall h \in D_1 [a, b]$  com  $h(a)=h(b)=0$

Assim  $(\Delta J) y_0(h) = 0 + (\delta^2 J) y_0(h) + \epsilon \cdot ||h||^2$ .

e suponhamos que  $(\delta^2 J) y_0(h) < 0$  para

$\epsilon$  pequeno, ter-se-ia:

$(\Delta J) y_0(h) < 0 \quad \forall h \in$  classe conveniente, o que é absurdo.

Logo  $(\delta^2 J) y_0(h) > 0, \forall h \in D_1 [a, b]$  com

$h(a)=h(b)=0$  esta é uma condição necessária para ocorrer um mínimo. Uma condição suficiente é:

Teorema: Se a variação primeira do funcional  $J$  se anula em  $y_0(x)$ , isto é,  $(\delta J) y_0 = 0$  e se  $\exists k > 0$ , tal que  $(\delta^2 J) y(h) \geq k \cdot ||h||^2, \forall h$  admissível, então  $J$  tem um mínimo em  $y_0$ .

Demonstração:-

sabemos  $(\Delta J) y_0(h) = (\delta J) y_0(h) + (\delta^2 J) y_0(h) + \epsilon \cdot ||h||^2$

e como por hipótese

$(\delta J) y_0(h) = 0$

e  $(\delta^2 J) y_0(h) \geq k \cdot ||h||^2$

assim ficamos com

$(\Delta J) y_0(h) \geq (K + \epsilon) \cdot \|h\|^2$  para  $h$ 's convenientes, isto é, tais que  $0 < (\epsilon + K)$ .

Continuando o estudo sobre  $(\delta^2 J) y(h)$  e fazendo

$$P = \frac{1}{2} F_{y'y'}(x, y, y')$$

$$e Q = \frac{1}{2} (F_{yy}(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{yy'}(x, y, y'))$$

assim podemos escrever:

$$(\delta^2 J) y(h) = \int_a^b (P \cdot h'^2 + Q \cdot h^2) dx$$

$$\text{pois } \int_a^b Q h^2 dx = \frac{1}{2} \int_a^b F_{yy}(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{yy'}(x, y, y') \cdot h^2 dx$$

$$+ \int_a^b \frac{h^2}{2} F_{yy}(x, y, y') dx - \frac{1}{2} \int_a^b h^2 \frac{d}{dx} F_{yy'}(x, y, y') dx$$

$$e \int_a^b \left[ F_{yy}(x, y, y') \frac{h^2}{2} + F_{yy'}(x, y, y') h'h + \frac{h'^2}{2} F_{y'y'}(x, y, y') \right] dx.$$

$$= \int_a^b F_{yy}(x, y, y') \frac{h^2}{2} dx + \int_a^b F_{y'y'}(x, y, y') h'h dx + \int_a^b \frac{h'^2}{2} F_{y'y'}(x, y, y')$$

$$(x, y, y') dx = \text{Fazendo-se na integral } \int_a^b F_{y'y'}(x, y, y') \cdot h'h dx$$

uma integração por partes onde

$$u = F_{y'y'}(x, y, y') \quad e \quad dv = h'h dx$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} F_{y'y'}(x, y, y') \quad e \quad v = \frac{h^2}{2}$$

$$\text{teremos } \int_a^b F_{yy}(x, y, y') \frac{h^2}{2} dx + \int_a^b \frac{h'^2}{2} F_{y'y'}(x, y, y') dx +$$

$$+ F_{y'y'}(x, y, y') \frac{h^2}{2} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{h^2}{2} \frac{d}{dx} F_{y'y'}(x, y, y') dx =$$

$$= \int_a^b (P \cdot h'^2 + Q \cdot h^2) dx.$$

Lema: se  $\int_a^b (P \cdot h'^2 + Q \cdot h^2) dx \geq 0$  para  $\forall h \in D_1[a, b]$

com  $h(a) = h(b) = 0$ , então,  $P(x) \geq 0$  para  $\forall y$ .

Demonstração:-

seja  $P(x_0) < 0$  para algum  $x_0$ .

Então em  $I = \left[ x_0 - \frac{\eta}{n}, x_0 + \frac{\eta}{n} \right]$  têm-se

$P(x) \leq -\alpha$ ,  $\alpha > 0$  e  $n$  suficientemente grande.

Seja  $h(x) = \begin{cases} \text{sen}^2 n(x-x_0) & \text{em } I \\ 0 & \text{fora de } I \end{cases}$

com  $h \in D_1 [a, b]$ ,  $h(a) = h(b) = 0$

logo  $\int_a^b (Ph'^2 + Qh^2) dx \leq \int_a^b P(x) \cdot |h'(x)|^2 dx + \max |Q(x)| \cdot$

$\cdot l(x_0 + \frac{\eta}{n}, x_0 - \frac{\eta}{n})$

$\leq -\alpha n K + \frac{2\eta}{n} \cdot \max |Q(x)|$  onde  $K = 8\eta'$  e

para  $n$  suficientemente grande

$\int_a^b (P \cdot h'^2 + Q \cdot h^2) dx < 0$  o que contradiz a hipótese do lema

assim  $P(x) \geq 0$

Decorre daí o seguinte:

Teorema (cond. de Legendre): se o funcional  $J(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$  admite um mínimo para  $y = y(x)$  então, em qual-

quer ponto desta curva têm-se:

$$F_{y'y'}(x, y, y') \geq 0$$

Esta é uma condição necessária mas não suficiente para se obter esta condição, há necessidade de hipóteses adicionais.

### 2.3. Sistemas Autônomos

Um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem.

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) ; i = 1, 2, \dots, n \quad (2.3.1)$$

ou em notação vetorial

$$\frac{dx}{dt} = F(x)$$

é dito autônomo quando as funções  $F_i$  não dependem explicitamente da variável tempo  $t$ .

Denominamos pontos críticos de um sistema de equações diferenciais aos pontos que satisfazem a condição.

$$\frac{dx}{dt} = 0 \text{ ou seja } F(x) = 0$$

Estes pontos são de particular importância no estudo das equações diferenciais pois existem casos em que é quase impossível se encontrar uma solução numa forma explícita e razoavelmente conveniente; e também no estudo da estabilidade de uma solução.

Consideremos o sistema mais simples de duas equações diferenciais simultâneas da forma:-

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x,y) \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Suponhamos que as funções  $F$  e  $G$  são contínuas / com derivadas parciais contínuas em algum domínio  $D$  no plano  $xy$ .

**Teorema:-** Sejam as funções  $F$  e  $G$  e suas derivadas parciais contínuas numa região  $R$  do espaço  $t,x,y$  contendo o ponto  $(t_0, x_0, y_0)$  então existe um intervalo  $|t-t_0| < h$  no qual existe uma única solução  $x = \phi(t)$  e  $y = \psi(t)$  do sistema de equações diferenciais que satisfaz também a condição  $x(t_0) = x_0$  e  $y(t_0) = y_0$ .

Assim se  $(x_0, y_0)$  for um ponto do domínio, existirá uma única solução  $x = \phi(t)$  e  $y = \psi(t)$  do sistema (2.3.2), que satisfaça a condição  $x(t_0) = x_0$  e  $y(t_0) = y_0$  para  $\alpha < t < \beta$  que contém  $t_0$ .

As equações  $x = \phi(t)$  e  $y = \psi(t)$  são uma representação paramétrica desta curva, e é denominada trajetória, órbita ou caminho no plano de fase  $xy$ .

Frequentemente é conveniente eliminar o parâmetro  $t$  da solução  $x = \phi(t)$  e  $y = \psi(t)$  obtendo a relação entre  $x$  e  $y$  para estudos. Assim numa região onde  $F(x,y) \neq 0$  temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)} \quad (2.3.3)$$

que é uma equação diferencial de 1ª ordem para  $y = F(x)$ , de grande importância para a determinação da inclinação num ponto da trajetória. Não podemos resolver no ponto  $(x_0, y_0)$  quando se anula ou  $F(x,y)$  ou  $G(x,y)$  para  $\frac{dy}{dx}$  ou  $\frac{dx}{dy}$

Assim se  $(x_0, y_0)$  for ponto crítico do sistema (2.3.2) então  $x = x_0$  e  $y = y_0$  é uma solução para o sistema. E pelo teorema da existência e unicidade temos que a única solução do sistema (2.3.2) que passa pelo ponto  $(x_0, y_0)$  é a própria solução constante. A trajetória desta solução é o próprio ponto  $(x_0, y_0)$ . E a solução  $x = \phi(t)$   $y = \psi(t)$   $t \geq \alpha$  se aproxima do ponto crítico  $(x_0, y_0)$  quando  $t \rightarrow \infty$  se  $\phi(t) \rightarrow x_0$  e  $\psi(t) \rightarrow y_0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

A importância dos pontos críticos na análise dos sistemas autônomos é devida ao fato de que eles são soluções constantes do sistema e que o comportamento qualitativo de todas as trajetórias no plano de fase é determinado em grande parte, pela localização dos pontos críticos e pelo comportamento das trajetórias próximas a eles.

#### Teorema

Por qualquer ponto  $(x_0, y_0)$  no plano de fase passa no máximo uma trajetória do sistema (2.3.2)

Ou seja:-

$$\text{Dado o sistema } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x,y) \end{cases}$$

há no máximo uma trajetória que passa por um ponto dado  $(x_0, y_0)$ .

Dem:- Seja  $C_0$  a trajetória gerada pela solução  $x = \phi_0(t)$  e  $y = \psi_0(t)$  com  $\phi_0(t_0) = x_0$  e  $\psi_0(t_0) = y_0$ .

e seja  $C_1$  a trajetória gerada pela solução  $x = \phi_1(t)$  e  $y = \psi_1(t)$  com  $\phi_1(t_1) = x_0$  e  $\psi_1(t_1) = y_0$ .

como o sistema é autônomo, eliminamos  $t$  e obtemos:-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)}$$

em  $t = t_0$  temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(\phi_0(t_0), \psi_0(t_0))}{F(\phi_0(t_0), \psi_0(t_0))} = \frac{G(x_0, y_0)}{F(x_0, y_0)}$$

em  $t = t_1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(\phi_1(t_1), \psi_1(t_1))}{F(\phi_1(t_1), \psi_1(t_1))} = \frac{G(x_0, y_0)}{F(x_0, y_0)}$$

$$\frac{G_1(\phi_0(t_0), \psi_0(t_0))}{F_1(\phi_0(t_0), \psi_0(t_0))} = \frac{G_1(\phi_1(t_1), \psi_1(t_1))}{F_1(\phi_1(t_1), \psi_1(t_1))} \Rightarrow \begin{matrix} \phi_0(t_0) = \phi_1(t_1) \\ \psi_0(t_0) = \psi_1(t_1) \end{matrix}$$

Pelo teorema da unicidade temos que existe uma única solução

$$\phi_0 = \phi_1$$

$$\psi_0 = \psi_1$$

$C_0 = C_1$ , ou seja, temos uma única trajetória.

C.Q.D.

Se uma solução começa em um ponto que não é um ponto crítico então se move na mesma trajetória independente do tempo em que começou, ela não pode nunca voltar ao seu ponto inicial a menos que a solução seja periódica, ela nunca pode cruzar outra

trajetória e ela só pode alcançar um ponto crítico no limite quando  $t \rightarrow \infty$ , ou ainda tende ela para infinito.

É de muita importância o estudo dos pontos críticos e soluções periódicas dos sistemas autônomos. Assim faremos um estudo destas trajetórias próximas ao ponto crítico  $(x_0, y_0)$  e o significado deste comportamento.

É conveniente escolhermos a origem do plano de fase como ponto crítico:  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$  (não acarreta perda de generalidade pois a  $x_0 \neq 0$  e  $y_0 \neq 0$  é sempre possível fazermos a substituição  $x = x_0 + u$ ;  $y = y_0 + v$  nas equações (2.3.2) de modo que  $u$  e  $v$  satisfaçam um sistema de equações autônomas com um ponto crítico na origem).

Consideremos que  $(0,0)$  seja um ponto crítico isolado, isto é, que exista um círculo em torno dele dentro do qual não existam outros pontos críticos. E consideremos que, na vizinhança de  $(0,0)$  as funções  $F$  e  $G$  tenham a forma:-

$$\begin{aligned} F(x,y) &= ax + by + F_1(x,y) \\ G(x,y) &= cx + dy + G_1(x,y) \end{aligned} \quad (2,3,4)$$

onde  $ad - bc \neq 0$ .

É necessário que  $F_1$  e  $G_1$  sejam contínuas e tenham derivadas parciais contínuas e sejam pequenas, ou seja,

$$\frac{F_1(x,y)}{r} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{G_1(x,y)}{r} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad r \rightarrow 0. \quad (2,3,5)$$

onde  $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$

Tal sistema é denominado sistema quase-linear nas vizinhanças do ponto crítico  $(0,0)$

Essencialmente, as equações (2,3,4) e (2,3,5) dizem que, para  $(x,y)$  próximo a  $(0,0)$ , as funções  $F$  e  $G$  são satisfatoriamente aproximadas pelas funções lineares  $ax + by$  e  $cx + dy$  / respectivamente.

Uma consequência da hipótese de  $F_1(x,y)$  e  $G_1(x,y)$  serem pequenas comparadas com os termos lineares  $ax+by$  e  $cx+dy$  próximos a  $(0,0)$  é que, em muitos casos (mas não em todos), as

trajetórias do sistema linear autônomo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \quad (2,3,6)$$

são boas aproximações àquelas do sistema quase linear nas vizinhanças do ponto crítico.

$(0,0)$ .

Assim estudaremos o sistema linear (2,3,6) e relacionaremos nossas conclusões aos sistemas quase lineares.

Procuramos soluções das equações (2,3,6) do tipo /

$$x = A \exp(rt) \quad y = B \exp(rt)$$

substituindo  $x$  e  $y$  nas equações (2.3.6) obtemos.

$$\begin{aligned} Ar e^{rt} &= aA e^{rt} + bB e^{rt} \\ Bre^{rt} &= cA e^{rt} + dB e^{rt} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(r-a) + bB = 0 \\ B(r-d) + cA = 0 \end{cases} \quad (2.3.7)$$

para que as equações (2.3.7) tenham solução não trivial é necessário que o determinante dos coeficientes se anule. Assim  $r$  deve ser uma raiz da equação característica

$$r^2 - (a+d)r + (ad-bc) = 0 \quad (2.3.8)$$

$r$  não pode ser nulo, pois, se fosse, necessariamente  $ad-bc=0$ , isto implica que o sistema de equações  $ax-by=0$  e  $cx+dy=0$  teria soluções não-triviais posto que o determinante dos coeficientes seria nulo. Assim, estas soluções não triviais seriam determinadas a menos de uma constante multiplicativa e estariam numa reta que passa pela origem. Deste modo, outros pontos críticos se localizariam próximos à origem, violando a hipótese de que a origem é um ponto crítico isolado.

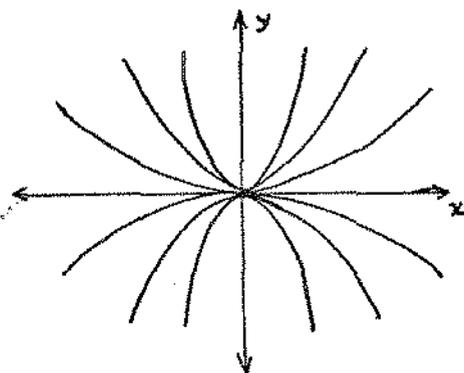
As raízes podem ser:

1º caso) Raízes reais desiguais de mesmo sinal

A solução geral da equação (2.3.6) será (2.3.9)

$$x = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}, \quad y = B_1 e^{r_1 t} + B_2 e^{r_2 t}$$

onde apenas uma de cada uma das constantes  $A_1$ ,  $B_1$  e  $A_2$ ,  $B_2$  respectivamente são independentes. Suponha inicialmente que  $r_1$  e  $r_2$  sejam negativos: então ambos  $x$  e  $y$  tendem a zero e o ponto  $(x,y)$  tende ao ponto crítico  $(0,0)$  quando  $t \rightarrow \infty$  independente da escolha de  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  e  $B_2$ . Toda a solução do sistema (2.3.6.) se aproxima da solução  $x=0$ ,  $y=0$  exponencialmente quando  $t \rightarrow \infty$



Nódulo Impróprio

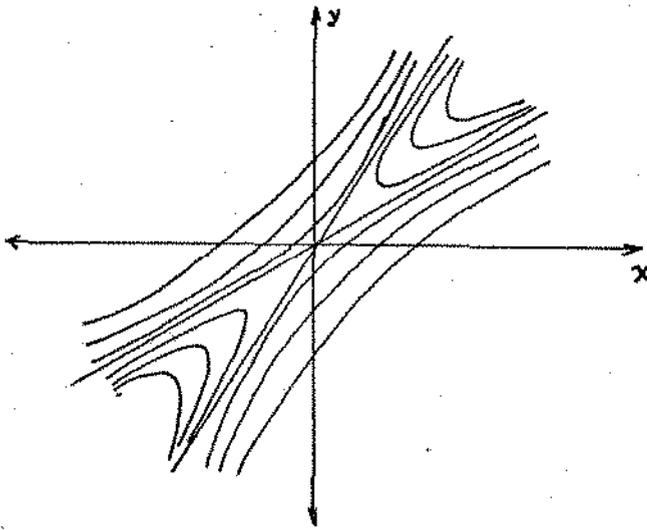
$$r_1 \neq r_2.$$

Fig. 2.3.10

se as raízes são reais desiguais e positivas, a situação será similar exceto que a direção do movimento das trajetórias se afastará do ponto crítico  $(0,0)$ .

2º caso) Raízes reais de sinais opostos

A solução geral das equações de (2.3.6) ainda será a mesma equação (2.3.9) com  $r_1 > 0$  e  $r_2 < 0$ . Agora a direção do movimento se aproxima do ponto crítico para algumas trajetórias e se afasta para outras trajetórias.



Ponto de sela

$$r_1 \cdot r_2 < 0$$

Fig 2.3.11.

3º caso:) Raízes iguais

A solução geral de (2.3.6) é da forma:-

$$x = (A_1 + A_2 t)e^{rt} \quad y = (B_1 + B_2 \cdot t) \cdot e^{rt}$$

onde apenas duas das quatro constantes

$A_1, A_2, B_1$  e  $B_2$  são independentes. Independente dos valores de

$A_1, B_1, A_2, B_2$  se:-

$r < 0$  a direção do movimento da trajetória se aproxima de  $(0,0)$  se  $r > 0$  ela se afastará de  $(0,0)$ .

Consideremos o caso  $r < 0$ .

Dependendo do fator  $t e^{rt}$ , se ele não estiver presente  $\Rightarrow A_2$  e  $B_2 = 0$  teremos um módulo próprio.

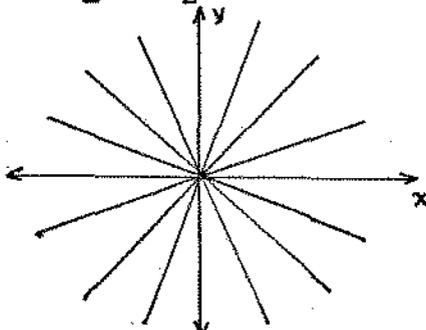
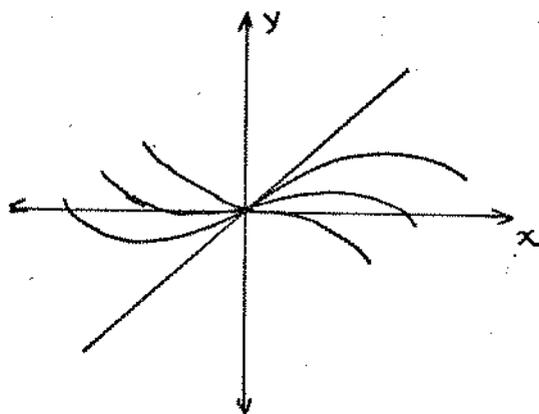


Fig.2.3.12

nóculo próprio,  $r_1 = r_2$

Se  $t e^{rt}$  está presente teremos o nóculo impróprio.



nóculo impróprio,  
 $r_1 = r_2$

Fig.2.3.13

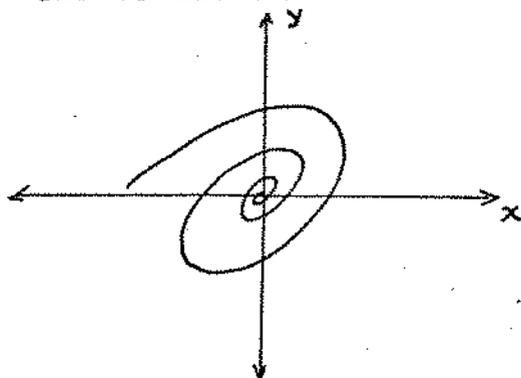
4º caso: Raízes complexas

Neste caso a solução das Equações (2.3.6) é

$$x = e^{\lambda t} (A_1 \cos ut + A_2 \sin ut)$$

$$y = e^{\lambda t} (B_1 \cos ut + B_2 \sin ut)$$

onde as raízes da equação (2.3.8) são  $r = \lambda \pm iu$  e somente /  
duas das constantes  $A_1, A_2, B_1,$  e  $B_2$  são independentes:  
se  $\lambda < 0$  a direção da trajetória se aproxima da origem  
se  $\lambda > 0$  ela se afasta



ponto espiral

$$r_1 = \lambda + iu$$

$$r_2 = \lambda - iu$$

Fig.2.3.14

5º caso:- Raízes imaginárias puras.

$\lambda = 0$  Neste caso as trajetórias são curvas fechadas. A direção do movimento em torno de curvas fechadas pode ser horário -  
rio ou anti-horário dependendo das equações

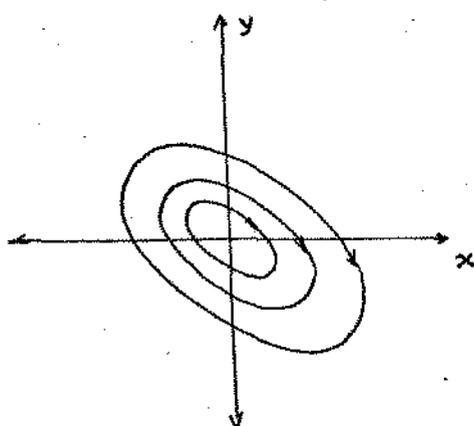
Centro  $r_1 = iu$  $r_2 = -iu$ 

Fig.2.3.15

$\frac{dx}{dt} = ax + by$ $\frac{dy}{dt} = cx + dy$		$r^2 + (a+d)r + (ad - bc) = 0$ $ad - bc \neq 0$
RAIZES DA EQUAÇÃO	TIPO DE PONTO CRÍTICO	ESTABILIDADE
$r_1 > r_2 > 0$	nóculo impróprio	Instável
$r_1 < r_2 < 0$	nóculo impróprio	Assintoticamente estável
$r_2 < 0 < r_1$	ponto de sela	Instável
$r_1 = r_2 > 0$	nóculo próprio ou impróprio	Instável
$r_1 = r_2 < 0$	nóculo próprio ou impróprio	Estável
$r_1, r_2 = \lambda \pm iu$ $\lambda > 0$	ponto espiral	Instável
$\lambda < 0$	" "	Assintoticamente estável
$r_1 = iu, r_2 = -iu$	Centro	Estável

Quadro 2.3.16

Assim as raízes da equação característica determinam o tipo de ponto crítico e suas características de estabilidade as raízes dependem dos valores  $a, b, c, d$  que em casos práticos são medidas que estão sujeitas a pequenas incertezas de modo que é importante estudarmos se estas pequenas perturbações.

Pequenas perturbações nos fatores  $a, b, c$  e  $d$  em alguns ou em todos refletem em pequenas perturbações nas raízes  $r_1$  e  $r_2$ . A situação mais sensível é para  $r_1 = iu$  /  $r_2 = -iu$ , isto é, quando o ponto crítico é um centro, e as trajetórias são curvas fechadas. Se fizermos uma ligeira mudança nos coeficientes, então as raízes  $r_1$  e  $r_2$  tomarão novos valores  $r_1' = \lambda' + iu'$  e  $r_2' = \lambda' - u'i$  onde  $\lambda'$  é pequeno em módulo, e  $u' \cong u$ . Se  $\lambda' \neq 0$ , o que quase sempre acontece, então as trajetórias do sistema deixarão de ser curvas fechadas e serão espirais. O sistema será assintótica e estável se  $\lambda' < 0$  e instável se  $\lambda' > 0$ .

Outro caso um pouco menos sensível é o caso das raízes reais e iguais  $r_1 = r_2$ ; neste caso o ponto crítico é um nó. Pequenas perturbações nos coeficientes normalmente causarão a separação de duas raízes iguais. Se as raízes separadas forem reais, então o ponto crítico do sistema perturbado ainda será um nó. Mas, se as raízes forem conjugadas complexas, então o ponto crítico tornar-se-á um ponto espiral.

Neste caso a estabilidade ou instabilidade do sistema não será alterado mas a trajetória sim.

#### Sistemas quase lineares.

Daremos agora um significado matemático preciso dos conceitos de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade de uma solução do sistema autônomo.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases}$$

e discutiremos também um teorema importante que trata da esta

bilidade de um sistema quase linear.

Definição:- Diz-se que um ponto crítico  $x=x_0$ ,  $y=y_0$  (uma solução de equilíbrio  $x=x_0$ ,  $y=y_0$ ) do sistema autônomo acima é um ponto crítico estável se, dado  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta$  tal que toda solução  $x = \phi(t)$   $y = \psi(t)$  do sistema acima, que em  $t = 0$  satisfaz

$$\left\{ \left[ \phi(0) - x_0 \right]^2 + \left[ \psi(0) - y_0 \right]^2 \right\}^{1/2} < \delta$$

exista e satisfaça

$$\left\{ \left[ \phi(t) - x_0 \right]^2 + \left[ \psi(t) - y_0 \right]^2 \right\}^{1/2} < \epsilon \quad \text{para } \forall t \geq 0.$$

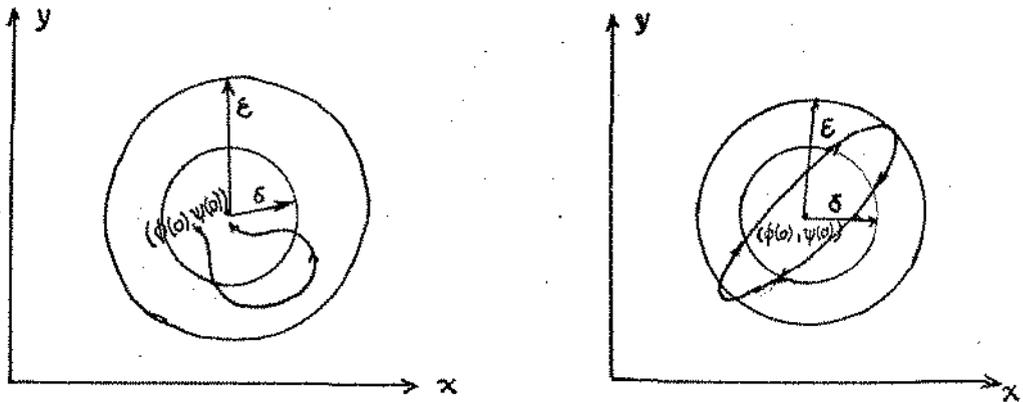


Fig. 2.3.17 . a) estabilidade assintótica  
b) estabilidade

Definição:- Diz-se que um ponto crítico é assintoticamente estável se ele for estável e se  $\exists \delta_0$ ,  $0 < \delta_0 < \delta$  tal que se uma solução  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  satisfizer

$$\left\{ \left[ \phi(0) - x_0 \right]^2 + \left[ \psi(0) - y_0 \right]^2 \right\}^{1/2} < \delta_0$$

então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = x_0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = y_0$$

Definição:- Um ponto crítico que não é estável é dito instável

Teorema 2.3.18. O ponto crítico  $(0,0)$  do sistema linear(2.3.6) será:-

i) Assintoticamente estável se as raízes  $r_1$  e  $r_2$  da equação característica (2.3.8) forem reais e negativas ou tiverem partes reais negativas.

ii) estável, mas não assintoticamente estável, se  $r_1$  e  $r_2$  forem imaginários puros.

iii) instáveis, se  $r_1$  e  $r_2$  forem reais e qualquer uma delas positivas, ou se tiverem partes reais positivas.

Queremos agora relacionar estes resultados do sistema linear (2.3.6) ao sistema não linear

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + F_1(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + G_1(x,y) \end{cases}$$

que é a equação (2.3.4)

Consideremos que  $(0,0)$  seja um ponto crítico do sistema (2.3.4) e que  $ad - bc \neq 0$ .

Consideremos também que  $F_1$  e  $G_1$  têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas e são pequenas próximo à origem no sentido de que

$$\frac{F_1(x,y)}{r} \rightarrow 0 \quad \frac{G_1(x,y)}{r} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad r \rightarrow 0 \quad \text{onde}$$

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Tal sistema é dito quase linear nas vizinhanças da origem.

O tipo e a estabilidade de um ponto crítico do sistema (2.3.4) estão intimamente relacionados, na maioria dos casos, ao tipo e à estabilidade do ponto crítico do sistema linear (2.3.6) correspondente.

**Teorema 2.3.19.** Sejam  $r_1$  e  $r_2$  as raízes da equação característica (2.3.8) do sistema linear (2.3.6) correspondentes ao sistema quase linear (2.3.4). Então o tipo e a estabilidade do ponto crítico  $(0,0)$  do sistema linear (2.3.6) e do sistema quase linear (2.3.4) são como mostrado no quadro

abaixo.

Essencialmente o teorema nos diz que para  $x$  e  $y$  próximos da origem, os termos não-lineares  $F_1(x,y)$  e  $G_1(x,y)$  são pequenos e não afetam a estabilidade e o tipo de ponto crítico determinados pelos termos lineares exceto nos dois casos mais sensíveis:  $r_1$  e  $r_2$  são imaginários puros e  $r_1$  e  $r_2$  reais e iguais como foi comentado atrás.

$r_1, r_2$	SISTEMA LINEAR		SISTEMA QUASE LINEAR	
	Tipo	estabilidade	Tipo	estabilidade
$r_1 > r_2 > 0$	N.I.	Instável	N.I.	Instável
$r_1 < r_2 < 0$	N.I.	Assintoticamente estável	N.I.	Assintoticamente estável
$r_2 < 0 < r_1$	P.S.	instável	P.S.	instável
$r_1 = r_2 > 0$	N.P. ou N.I.	instável	N.Rou N.I. ou P.E.	instável
$r_1 = r_2 < 0$	N.P. ou N.I.	assintoticamente estável	N.P. ou N.I. ou P.E.	assintoticamente estável
$r_1 = r_2 = \lambda^+$				
$i\omega, \lambda > 0$	P.E.	instável	P.E.	instável
$\lambda < 0$	P.E.	assintoticamente estável	P.E.	assintoticamente estável
$r_1 = i\omega, r_2 = -i\omega$	C	estável	C. ou P.E.	indeterminado

NI = nóculo impróprio; NP = nóculo próprio, P.S. = ponto de sela,  
PE = ponto espiral, C = Centro.

Quadro 2.3.20

### III - MODELOS CLÁSSICOS DE DINÂMICA POPULACIONAL COM COLHEITA.

Neste capítulo faremos um estudo de alguns modelos matemáticos simples de exploração de recursos renováveis. Tais modelos são baseados na equação diferencial ordinária:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - h(x, t)$$

onde  $x = x(t)$  é o tamanho da população no tempo  $t$ ;  $F(x)$  é a função que representa a razão de crescimento natural da população  $x$ ; e  $h(x, t)$  representa a razão com que se processa a colheita.

Se  $h(x, t)$  excede a razão de crescimento natural  $F(x)$  então a razão de crescimento da população decresce ( $\frac{dx}{dt} < 0$ ) e vice-versa.

No caso em que  $h(x, t) \cong F(x)$ , a população permanece a um nível constante ( $\frac{dx}{dt} = 0$ ), ou seja,  $h(x, t) \cong F(x)$  é que a produção sustentável que pode ser colhida de forma que o nível de população permaneça constante. Conclusões interessantes podem ser tiradas para o caso em que  $h(x, t) \neq F(x)$ .

Neste trabalho estamos interessados nas influências dos fatores biológicos e econômicos na dinâmica populacional. Em muitos casos (mas não todos), as soluções de equilíbrio convergem para a teoria dinâmica e processos de otimização.

Os modelos são às vezes criticados pelo fato de não levarem em consideração alguns fatores tanto biológicos como econômicos.

Neste capítulo veremos apenas alguns fatores biológicos não levando em consideração os econômicos.

Um particular perigo associado ao uso de qualquer / modelo matemático em exploração de recursos renováveis é o problema da extrapolação de dados avaliados, pois às vezes os

resultados dos modelos logísticos são testados com dados experimentais. Assim, o modelo logístico pode ser aceitável quando as razões de exploração são pequenas, mas podem produzir erros quando extendido para razões grandes, com os modelos de depensação, como veremos a seguir.

O modelo logístico assim idealizado reflete alguns aspectos importantes da dinâmica de exploração de recursos renováveis, como vimos anteriormente, mas também são criticados. O modelo pode ser melhorado e modificado de modo a torná-lo um modelo mais adequado às condições reais, como veremos nos próximos capítulos.

Alguns aspectos importantes de modelos realísticos de população que podem ser considerados mas que neste trabalho não serão incluídos são:-

- a) efeitos periódicos e instantâneos
- b) estrutura de idades e efeitos relativos
- c) Multi - espécies, efeitos do ecossistema
- d) efeitos espaciais e difusão

### 3.1.) MODELO DE CRESCIMENTO LOGÍSTICO

Se considerarmos que a variação da população em relação ao tempo é uma função da população teremos a equação geral:-

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad (\text{modelo generalizado})$$

Suponhamos que em certa população a razão de nascimento  $n$  e a razão de mortalidade  $m$  são proporcionais à população  $x$ , e seja  $r = n - m$  a razão de crescimento líquido da população.

Assim obtemos a equação diferencial:  $\frac{dx}{dt} = r \cdot x$  (3.1.1) como modelo de crescimento de população com tempo contínuo (Modelo de Malthus).

Neste modelo estamos apenas considerando a natalidade e a mortalidade, sem considerar outros fatores também naturais como: colheitas, epidemias, predadorismo, e outros.

A solução desta equação diferencial é:  $x(t) = x(0)e^{rt}$  se  $r > 0$  então  $x$  cresce exponencialmente; mas se  $r < 0$ , então  $x$  decresce exponencialmente.

Claramente, este não expressa um modelo realístico quando  $t$  for muito grande, pois, à partir de uma população que cresce indefinidamente, haverá um dado momento em que fatores / mais fortes a limitará, como por exemplo: alimentação, habitação, espaço e outros.

Assim, levando em consideração alguns destes fatores, a equação (3.1.1) poderá ser modificada para a forma:-

$$\frac{dx}{dt} = r(x) \cdot x \quad (3.1.2)$$

onde  $r(x)$  é uma função que decresce com o aumento de  $x$ , ou seja,

$$r(x) = \frac{F(x)}{x} \quad (3.1.3)$$

que depende do nível de população  $x$ .

Este modelo é dito descrever um processo de sustentação ou compensação que controla o crescimento da população com seu nível desrescente.

O exemplo mais simples e mais usado é obtido quando:

$$r(x) = \lambda \left( 1 - \frac{x}{K} \right) \quad ; \quad \lambda \text{ constante}$$

que torna a equação diferencial:-

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \left( 1 - \frac{x}{K} \right) \cdot x = F(x) \quad (3.1.4)$$

que é a Equação Logística de Verhulst (1836),  $\lambda > 0$  é chamada razão de crescimento intrínseco, visto que a razão de crescimento proporcional para pequenas populações  $x$  é aproximadamente igual à  $\lambda$ ;

e  $K$  é o nível de saturação, ou seja, a população máxima permitida. Observamos que a equação (3.1.4) possui dois pontos de equilíbrio.

$$\lambda \cdot x \cdot \left( 1 - \frac{x}{K} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$x = 0 \quad \text{e} \quad x = K$$

que nos permite concluir que: para  $0 < x < K$ , nós temos  $\frac{dx}{dt} > 0$ ; e para  $x > K$  nós temos  $\frac{dx}{dt} < 0$ , o que nos permite concluir que  $K$  é um ponto de equilíbrio estável, ou, mais precisamente,  $K$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para  $x > 0$ , no sentido que:-

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = K \quad \text{para} \quad x(0) > 0$$

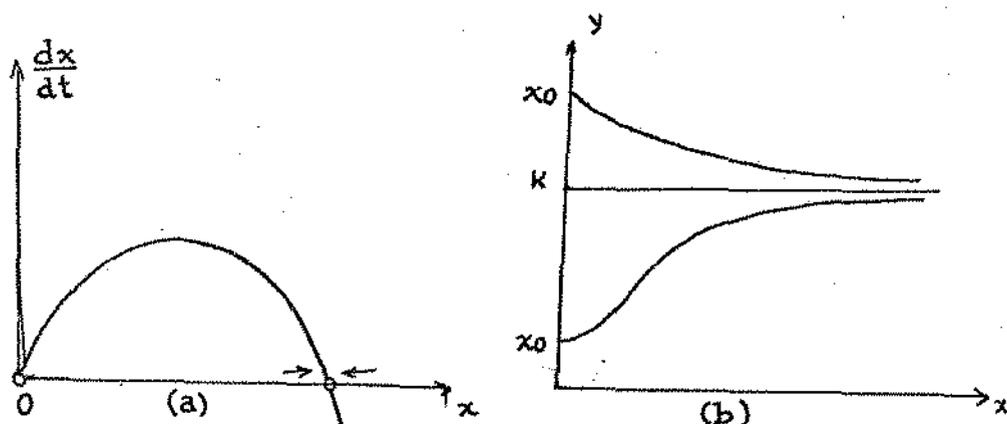


Fig. (3.1.5) a) Razão de crescimento da população;  
b) Gráfico da população

A figura (3.1.5) foi concluída através do desenvolvimento abaixo:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda \cdot x \left( 1 - \frac{x}{K} \right)$$

fazendo por separação de variáveis

$$\frac{dx}{x(K-x)} = \frac{\lambda}{K} dt$$

desenvolvendo por frações parciais obtemos:-

$$\frac{dx}{x(K-x)} = \frac{1}{K} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{K-x} \right) dx = \frac{\lambda}{K} dt$$

eliminando K de ambos os lados e resolvendo-a obtemos:-

$$\ln x - \ln (K - x) = \lambda t + C$$

$$\ln \frac{x}{K-x} = \lambda t + C$$

para  $t = 0$  temos  $x(0) = x_0$

$$\ln \frac{x_0}{K-x_0} = C$$

$$\ln \frac{x}{K-x} = \lambda t + \ln \frac{x_0}{K-x_0}$$

$$\ln \frac{\frac{x}{K-x}}{\frac{x_0}{K-x_0}} = \lambda t$$

$$\frac{x(K-x_0)}{x_0(K-x)} = e^{\lambda t}$$

$$x = \frac{K}{1 - C \cdot e^{-\lambda t}} \quad \text{onde } C = \frac{K - x_0}{x_0}$$

Assim, analisando a solução obtemos, quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $x(t)$  tende para  $K$ , exponencialmente. Se  $0 < x_0 < K$ , então  $C > 0$  e assim  $x(t)$  tende para  $K$  por valores menores que  $K$ . Se  $x_0 > K$ , então  $C < 0$ ,  $x(t)$  tende para  $K$  por valores maiores que  $K$ , decrescendo.

### 3.2. MODELO LOGÍSTICO COM COLHEITA

Consideremos agora o modelo logístico com uma colheita, ou seja, houve uma remoção ou afastamento de população, com uma razão  $h(x,t)$ .

Assim ficamos com a equação:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - h(x,t) \quad (3.2.1)$$

$$\text{onde } F(x) = \lambda x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Um caso importante surge quando  $h(x,t) = h$ ;  $h$  constante.

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - h \quad (3.2.2)$$

Na equação inicial de Verhulst

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - \frac{\lambda x^2}{K}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda - 2 \cdot \frac{\lambda \cdot x}{K} = 0$$

$$\frac{2 \cdot \lambda x}{K} = \lambda \Rightarrow x = \frac{K}{2} \text{ é ponto máximo para}$$

a população.

$$\text{O valor de } F(x) = \lambda x - \frac{\lambda x^2}{K} \text{ quando } x = \frac{K}{2} \text{ é}$$

$$F(x) = \frac{\lambda K}{4} \text{ . Valor máximo de } F(x).$$

Assim, no caso em que  $h < \max F(x)$  - que é igual a  $\frac{\lambda K}{4}$  temos para a equação (3.2.2) dois pontos de equilíbrio /  $x_1$  e  $x_2$ ;

Quando  $x_1 < x < x_2$  temos  $\frac{dx}{dt} > 0$  e em caso /

contrário temos  $\frac{dx}{dt} < 0$ , então concluímos que  $x_1$  é um ponto de equilíbrio instável e  $x_2$  um ponto de equilíbrio estável.

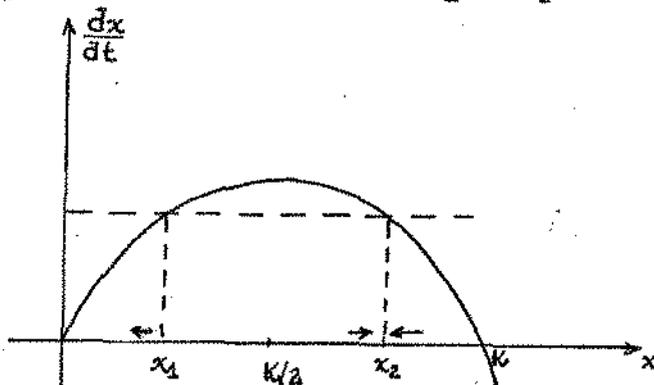


Figura (3.2.3). Equilíbrios no caso de  $h = \text{constante } \frac{1}{4} \lambda K$ .

Se  $x = K$  temos que  $x(t)$  converge assintoticamente para  $x_2$  por valores inferiores.

Para  $x < x_1$  temos que  $x(t)$  tende para zero mas não assintoticamente pois zero não é ponto de equilíbrio, é com certeza um ponto de equilíbrio biológico.

Se  $h > \max F(x) = \frac{1}{4} \lambda K$ , temos que  $x(t)$  tende para zero para qualquer valor inicial de  $x_0$  pois estamos escolhendo mais que a razão de crescimento da população.

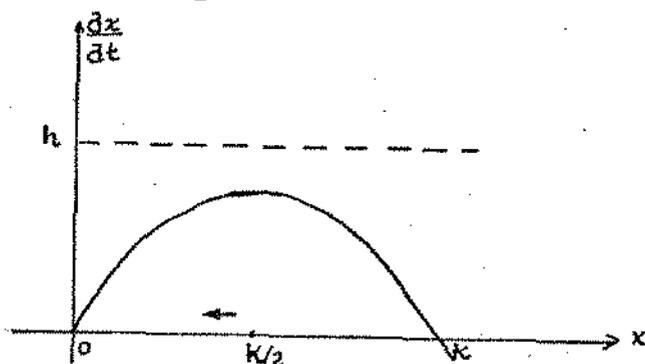


Figura (3.2.4): Equilíbrios no modelo com colheita  $h = \text{constante}$

$$h > \frac{1}{4} \lambda K$$

No caso  $h = \frac{1}{4} \lambda K = \max F(x)$ , teremos um ponto de equilíbrio  $x_1 = \frac{K}{2}$  que é semi-estável pois:- se  $x(0) > x_1$  então  $x(t)$  tende para  $x_1$ ; se  $x(0) < x_1$  então  $x(t)$  tende para zero.

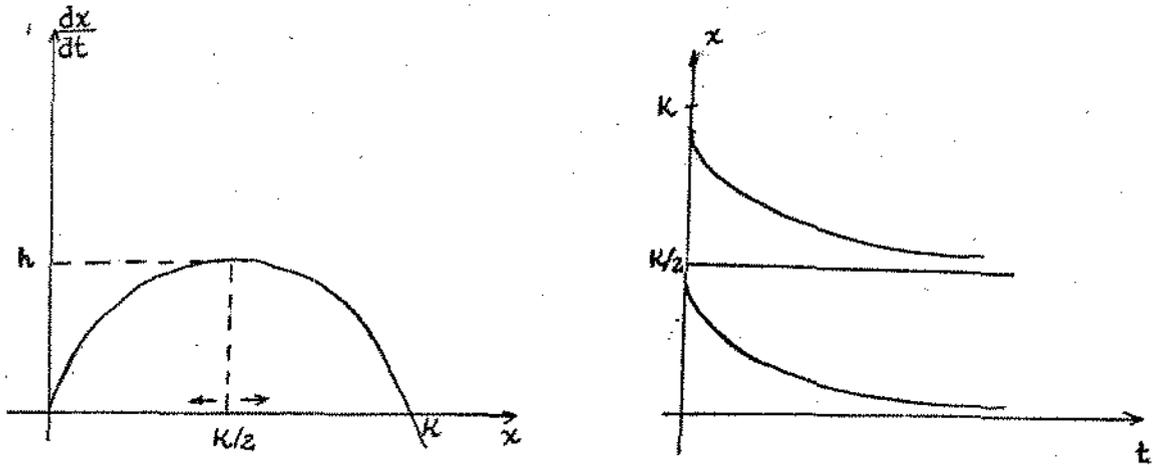


Figura (3.2.5): Equilíbrio no modelo com colheita  $h = \text{constante} = \frac{1}{4} \lambda K = \max F(x)$

O modelo dado pela equação (3.2.2) nos dá uma série de previsões importantes referentes à colheita de recursos renováveis:

- (1) Indica que existe uma produção máxima sustentável  $h_{\text{PMS}} = \max F(x)$ , que significa que qualquer colheita maior que este nível leva à extinção da população.
- (2) O nível da população que maximiza  $h$ , o valor de  $x = x_{\text{PMS}}$  não é o nível máximo da população, mas a metade deste nível, que é onde há maior taxa de crescimento. De fato, não há produção sustentável para o nível de população  $x = k$ .

### 3.3. APLICAÇÃO À PESCA

Consideremos agora que a equação (3.2.2) representa um modelo de população de peixes e que o coeficiente de colheita  $h$  é a pesca que é feita.

Consideremos  $h = Q.E.X$ , onde: -

$E$  = esforço usado na pescaria

$Q$  = constante = coeficiente de captura

Podemos normalizar as unidades tomando  $Q = 1$ . Então

obtemos: 
$$\frac{dx}{dt} = F(x) - E.x = \lambda x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right) - E.x \quad (3.3.1)$$

que é o nosso modelo de colheita básico.

Supondo  $E$  constante e fazendo  $\frac{dx}{dt} = 0$ , obtemos:

$$\lambda x \cdot \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - E \cdot x = 0$$

que fornece os seguintes pontos de equilíbrio:-

$$x = 0 \text{ e}$$

$$x = K \cdot \left( 1 - \frac{E}{\lambda} \right)$$

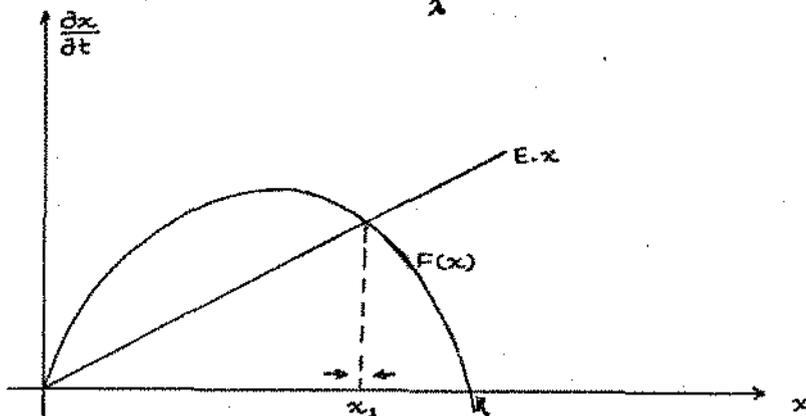


Figura (3.3.2): Curva de crescimento Logístico com esforço  $E$  constante.

A equação de colheita ou colheita sustentável /  $Y = h$  correspondente a  $E$  é dado por:  $Y = E \cdot x_1 = E \cdot K \left( 1 - \frac{E}{\lambda} \right)$  com  $E < \lambda$ .

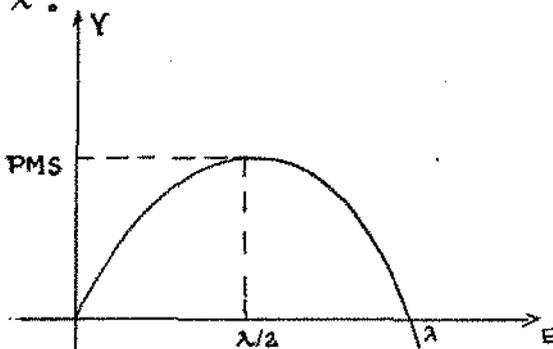


Figura (3.3.3) Curva Esforço - Produção (Modelo de Shaefer)

Quando  $E$  cresce, então  $Y$  tende para o nível de produção máximo (suavemente, com  $E = \frac{\lambda}{2}$ ;  $x_1 = \frac{K}{2}$ ) e para zero (suavemente, para  $E = \lambda$  e  $x_1 = 0$ ).

#### 3.4. MODELOS LOGÍSTICOS GENERALIZADOS

A equação  $\frac{dx}{dt} = F(x)$  (3.4.1), define o modelo

de crescimento logístico generalizado, onde as curvas de crescimento tem as formas do tipo:-

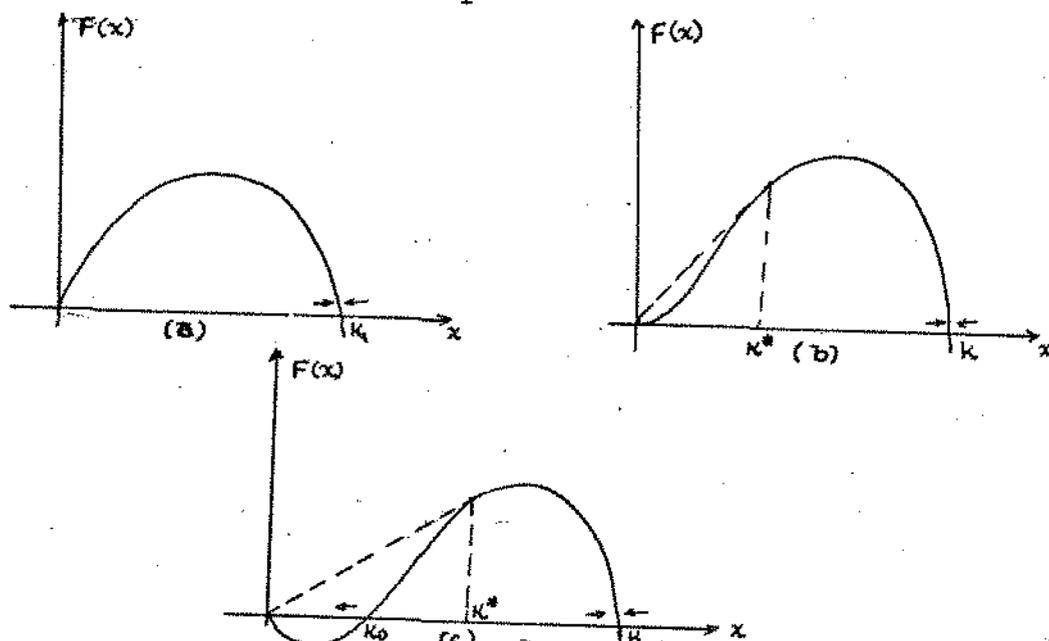


Figura (3.4.2):- Tipos de curva de crescimento

- (a) compensação pura
- (b) depensation
- (c) depensation crítica

Em cada caso  $x = K$  é um ponto de equilíbrio estável. O modelo logístico onde  $F(x) = r(x)$  decresce com  $x$  é chamado do modelo de compensação pura.

Se  $r(x)$  é crescente com  $x$  para certos valores de  $x$ , o processo de depensation existe, é a curva (b) acima.

Se  $F(x) < 0$  para alguns valores de  $x$  próximos a zero como a curva (c), temos que existe um equilíbrio instável em  $K_0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  quando  $x(0) < K_0$ .

O valor  $x = K_0$  é chamado nível de população mínimo viável.

### 3.5. CURVAS DE ESFORÇO - PRODUÇÃO.

Suponhamos que a população é colhida por meio de um esforço constante  $E$ , tal que a equação (3.4.1) torna-se:-

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - E \cdot x \quad (3.5.1)$$

Queremos agora construir a curva de Produção, ou seja, a curva  $Y = Y(E)$ .

No caso de  $F(x)$  ser uma função crescente em  $x$ , ou seja, no caso de compensação pura, para cada  $E$  temos um único / ponto de equilíbrio estável  $x_E$  e um correspondente  $Y(E) = F(x_E)$ .

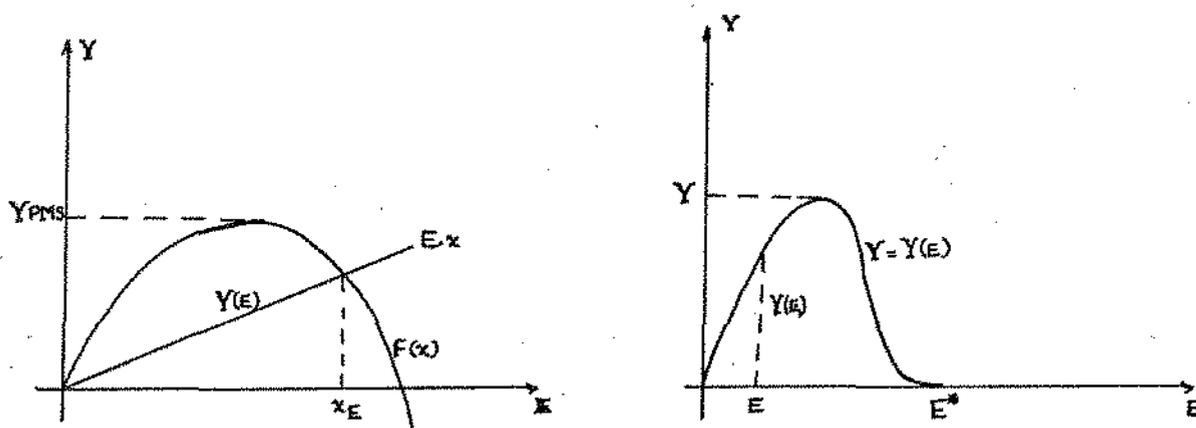


Figura (3.5.2) Compensação pura - curva de crescimento e curva / de produção.

A curva esforço - produção cresce rapidamente para o máximo (Y<sub>PMS</sub>) e depois decresce suavemente enquanto o esforço é lentamente crescente, ou seja, a produção aumenta com o esforço até alcançar a P.M.S., depois, continua aumentando o esforço, haverá uma diminuição na produção, pois, já se estará colhendo além do máximo permitido, não dando chance da população se reproduzir e voltar ao nível de população ideal.

A produção será nula à partir do esforço  $E \geq E^*$  onde

$$E^* = F'(0) = \max r(x) = \lambda$$

isto é,  $E^* = \lambda$  é a razão de crescimento proporcional máxima ou razão de crescimento intrínseco da população.

#### Depensation não crítica

No caso em que  $F(x)$  exhibe uma curva de depensation teremos, para cada nível  $E < E^* = \max r(x)$ , existe uma população de equilíbrio estável  $x_{1E}$  com uma correspondente  $Y_{1E}$ .

Para  $E > E^* = F'(0)$ , também existe um equilí -

brío instável  $x_{2E}$  tal que:- se  $x(0) > x_{2E}$  temos que  $x$  tende a  $x_{1E}$ , se  $x(0) < x_{2E}$  temos que  $x$  tende a zero, como vemos nas figuras abaixo:

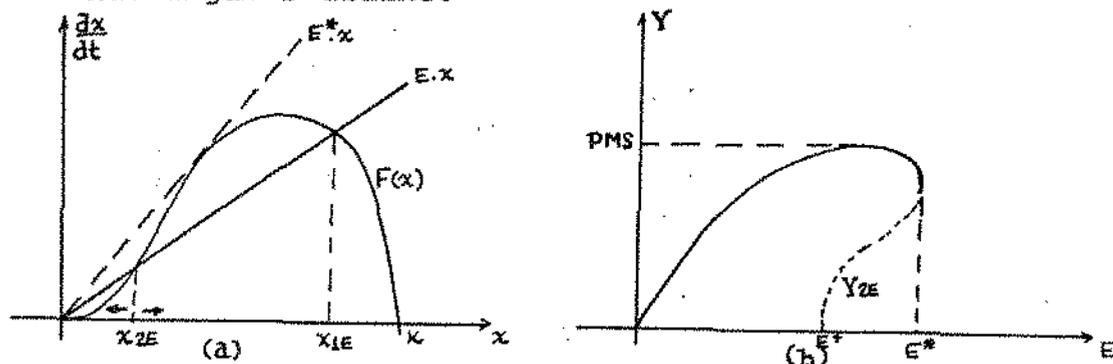


Figura (3.5.3): Depensation não crítica:

- a) curva de crescimento
- b) curva de produção

No caso de compensação pura, o resultado crítico  $E^*$  existe tal que, quando  $E > E^*$  temos  $Y(E)=0$ , que, como vimos anteriormente:  $E^* = \max r(x)$ .

Agora no caso de "depensation" temos uma descontinuidade em  $E^*$  com a população saltando para zero quando  $E > E^*$ .

Vendo o problema na visão puramente matemática, esta equação (3.5.1) teria uma bifurcação em  $E = E^*$ , tendo aí soluções que mudam descontinuadamente quando  $E$  passa por  $E^*$ .

A figura (3.5.3) (a) nos mostra que para pequeno crescimento no esforço  $E$  acima de  $E^*$ , haveria um colapso na população; a figura (b), exhibe um certo efeito de histerese.

Suponhamos que  $E > E^*$ , assim  $x(t)$  tende a zero, assim, como  $x$  é estritamente positivo, o esforço  $E$  teria que ser reduzido para algum nível  $E$  inferior a  $E^*$ , mas  $Y$  não voltaria necessariamente para  $Y_{1E}$ , e assim, reduzido  $E$  de forma a tornar  $x_{2E} < x$ , a população continuaria a decrescer.

Assim, retornar para o nível  $Y_{1E}$  seria retornar a um esforço  $E < E^*$ , que seria a atitude para se evitar o colapso.

O modelo de depensation prediz a extinção da popu

lação caso o esforço permaneça acima do nível crítico, pois : (1) o esforço seria reduzido quando a população começasse a declinar; (2) inevitavelmente algumas espécies seriam capturadas por uma razão ou outra, assim, sabendo-se o nível de esforço crítico, pode-se planejar melhor a colheita para sempre se obter uma boa produção.

### DEPENSATION CRÍTICA

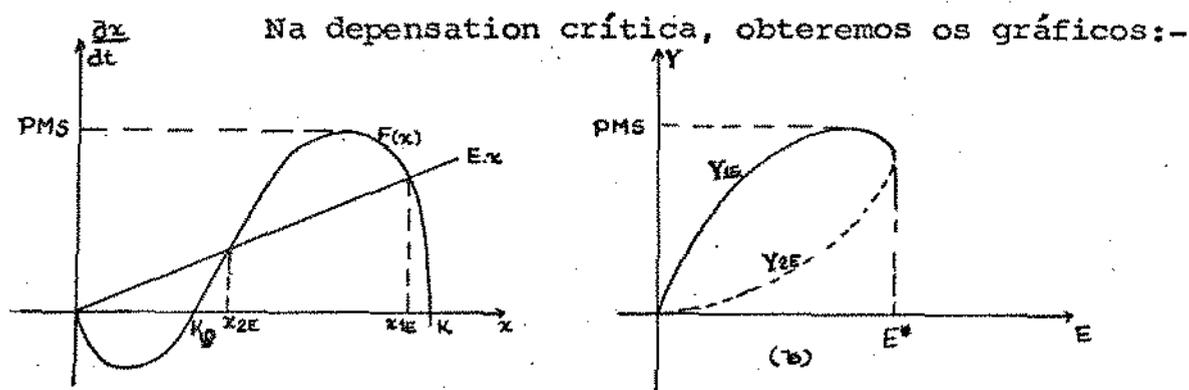


Figura (3.5.4) Depensation crítica: (a) curva de crescimento, (b) curva de produção.

Para todo esforço  $E \geq 0$  temos dois pontos de equilíbrio  $x_{1E}$  e  $x_{2E}$ ; e temos também  $x = 0$  que é um ponto de equilíbrio localmente estável.

Se o esforço tende a um nível super-crítico, a população pode ser reduzida a um nível inferior ao nível mínimo viável  $K_0$ .

Esta depensation crítica exhibe um processo de irreversibilidade, onde o nível de população  $x$  inferior a  $K_0$  leva a um processo de extinção irreversível.

Por volta dos anos 1960, as baleias azuis começaram a desaparecer devido à pesca desenfreada, levando a um nível quase irreversível, quase impossível de recuperação. Mas o I.W.C. (International Whaling Commission), desde 1965 tem controlado a pesca, havendo aparentemente aumentado a população das

baleias em aproximadamente 4% ao ano, elevando-a ao nível de 8.000 baleias (estimado) em 1975.

IV - MODELOS DE GORDON E GOULD

Neste capítulo, veremos dois modelos de exploração de recursos renováveis - a pesca; um modelo é o de Gordon [6] 1954, no qual se argumenta que não haverá extinção da espécie mesmo que tenhamos uma pesca desordenada; e o modelo de Gould [7] no qual se faz uma análise da curva de produção / sustentável afirmando que haverá extinção da espécie se tivermos uma pesca desenfreada.

Estes modelos estão baseados na curva de dissipação de renda econômica. E será mais adiante comparada com a política de colheita do lucro - máximo.

Outro aspecto importante também analisado é o efeito do "time discounted"; que como consequência tem que o proprietário único também dissipa uma certa fração de renda econômica sustentável potencial para encontrar um nível ótimo de renda sustentável que é menor que o máximo.

O estudo, neste capítulo, leva em consideração algumas suposições às vezes irrealistas, mas que nos dão um primeiro estudo neste campo de pesquisa.

Teorias mais sofisticadas devem ser usadas para um estudo mais aprofundado como:- variações de parâmetros econômicos sobre o tempo; questões de demanda e de oferta; custos fixos e irreversibilidade de investimentos; dados incertos e insuficientes; restrições políticas e institucionais.

#### 4.1. MODELO DE GORDON.

Gordon, estudando modelos de dinâmica populacional em 1954, desenvolveu um trabalho sobre pesca de livre-acesso ou propriedade - comum.

A pesca de livre-acesso é por definição uma pesca completamente incontrolada: qualquer um pode colher estes recursos (peixes).

Ocorrem abusos nestes tipos de empresas, que são controladas por órgãos governamentais e particulares. A pesca está sujeita a uma regulamentação internacional, que tenta evitar estes abusos.

O modelo de Gordon é baseado na curva parabólica de esforço - produção (curva 3.3.3.). Uma produção  $Y(E)$ , medida por biomassa, por exemplo, é a resultante do nível de esforço  $E$  aplicado.

Se assumimos que cada unidade de biomassa pescada custa o mesmo preço constante  $p$ , então a Renda Total Sustentável (RT) resultante deste esforço  $E$  será:

$$RT = p \cdot Y(E) \quad (4.1.1)$$

que nos fornece a curva abaixo.

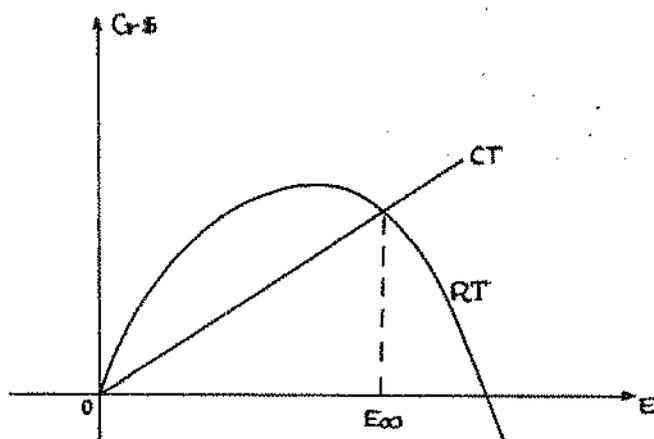


Figura (4.1.2): Relação Esforço x Lucro.

Agora, toda operação requer um gasto, ou seja, o Custo da pesca (CT), que no nosso caso está sendo considerado proporcional apenas ao esforço E aplicado, de onde tiramos a equação:  $CT = c.E$  (4.1.3)

onde c é constante.

A diferença entre a renda total e o custo total é chamado Lucro Econômico Sustentável.

$$LES = RT - CT = p.Y(E) - c.E \quad (4.1.4)$$

Então, no modelo de Gordon, o esforço de pesca no sistema de livre acesso tende a um ponto de equilíbrio  $F_{\infty}$  (equilíbrio bionômico), onde a renda total é igual ao custo total, ou seja, onde o lucro econômico é nulo.

Esta conclusão se dá devido a dois fatores:-

1) se  $E > E_{\infty}$  pode ser mantido por um tempo indeterminado, então o custo é maior do que a renda, e portanto, pescadores iriam desistir deste ramo e com isso o esforço diminuiria. 2) se  $E < E_{\infty}$  pode ser mantido sempre, então, haverá sempre renda, e assim aumentará o número de pescadores pelo fato de ser de livre - acesso e assim aumentaria o esforço de pesca E.

A pesca é capaz de produzir lucro positivo, mas se produzir lucro nulo devido a um excessivo nível de esforço E, então, nem os pescadores, nem a sociedade estariam usufruindo deste recurso, devido a não estarem fazendo uso adequado do mesmo. Esta situação é chamada Super - Pesca Econômica. Agora quando sempre se tem renda, aumenta-se o esforço chegando a um nível  $E_{\infty}$  maior que a produção máxima sustentável (PMS), este caso levaria a uma produtividade biológica a um nível zero, esta é a chamada Super - Pesca Biológica.

A super - pesca biológica, a nível do modelo esforço - produção logístico proposto torna-se:-

$$\frac{dx}{dt} = rx \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right) - E \cdot x = 0 \quad (4.1.5)$$

$$LT = RT - CT = p \cdot E \cdot x - c \cdot E = 0 \quad (4.1.6)$$

aqui  $Y(E) = E \cdot x$

$r = n - m =$  razão de crescimento

$K =$  índice de população máximo

resolvendo-se a equação diferencial (4.1.5) obtemos:-

$$\frac{dx}{dt} = \frac{r}{K} \cdot x \left( K \cdot \left(1 - \frac{E}{r}\right) - x \right)$$

usando o método de variáveis separadas obtemos:-

$$\frac{dx}{x \left( K \cdot \left(1 - \frac{E}{r}\right) - x \right)} = \frac{K}{r} dt$$

e integrando obtemos:-

$$\frac{1}{K \cdot \left(1 - \frac{E}{r}\right)} \left\{ \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{K \cdot \left(1 - \frac{E}{r}\right) - x} dx \right\} = \int \frac{K}{r} dt$$

de onde tiramos a solução geral:-

$$x(t) = \frac{-\frac{r}{E} \cdot K \left(1 - \frac{E}{r}\right) \cdot e^{(r-E)t}}{1 - \frac{r}{E} \cdot e^{(r-E)t}}$$

Se  $E < r$  então quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $x(t)$  tende para  $K(1-E/r)$ .

se  $E > r$ , então, quando  $t \rightarrow \infty$ ;  $x(t)$  tende para zero.

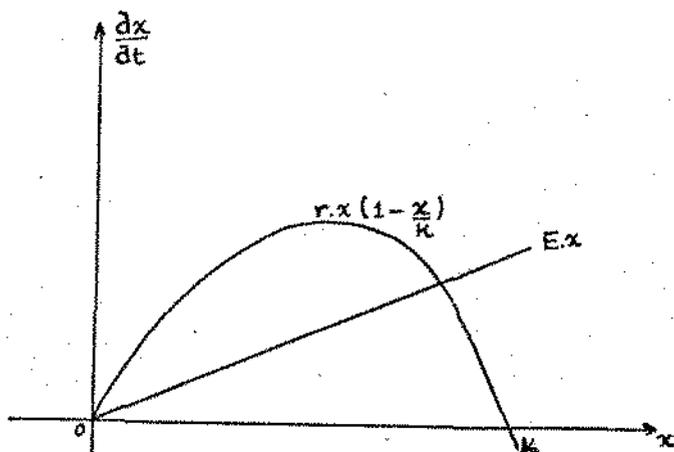


Fig. 4.1.7 curva de crescimento com colheita  $y = E \cdot x$ .

O estudo desta equação sem a retirada ( $E.x$ ) nos forneceu o gráfico (4.1.4) de onde concluímos

$x = 0$  é um ponto de equilíbrio instável

e  $x = K$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Conforme a figura 4.1.4, vemos que se não houve retirada, a população tende a um equilíbrio estável em  $x = k$ .

As equações (4.1.5) e (4.1.6) nos dão os seguintes pontos de equilíbrio:-

$$E_{\infty} = r \left( 1 - \frac{c}{pK} \right)$$

com o correspondente nível de estoque  $x = x_{\infty} = \frac{c}{p}$ .

Se assumimos  $r$  e  $K$  como sendo conhecidos, então  $E_{\infty}$  depende apenas da razão custo - preço.

Se o custo da pesca é suficientemente grande em relação ao preço do peixe, ou seja, se  $\frac{c}{K} > p$ , então não teria sentido a exploração da pesca.

Para o caso de termos preços altos (ou custos baixos) então, haverá lucro com a pesca, assim teremos um ponto de equilíbrio  $E_{\infty}^2$  como na figura (4.1.8). E como  $E_{\infty}^2 < E_{PMS}$  então, não ocorrerá uma pesca biológica porque ainda podemos aumentar o esforço.

Se a razão  $\frac{c}{p}$  é pequena, então, a curva  $CT_3$  a qual mostra um novo equilíbrio  $E_{\infty}^3$  que é maior que  $E_{PMS}$ , neste caso, ocorrerá uma super-pesca biológica.

Em ambos os equilíbrios  $E_{\infty}^2$  e  $E_{\infty}^3$  nós podemos obter lucro, o mesmo lucro, só que no caso  $E_{\infty}^2$  nós vemos que poderemos colher mais e aumentar o esforço e no caso  $E_{\infty}^3$  nós não poderemos explorar este recurso por muito tempo pois temos uma super-pesca biológica, e com isso, depois de certo

tempo, ou extinguiríamos a população de peixes ou não teríamos mais lucro.

Este modelo, de Gordon, não leva a população à extinção pois, o custo da pesca é positivo.

Agora, consideremos o caso em que a renda econômica é nula, ou seja, em que o nível de esforço  $E_{\infty} > 0$ , produz um lucro econômico nulo. Se o esforço  $E$  pode ser reduzido, então teríamos lucro econômico positivo. Por exemplo, no caso em que  $E_{\infty}$  excede  $E_{PMS}$ , então, se diminuirmos o esforço, teremos como consequências: o aumento da renda e o decréscimo do custo da pesca.

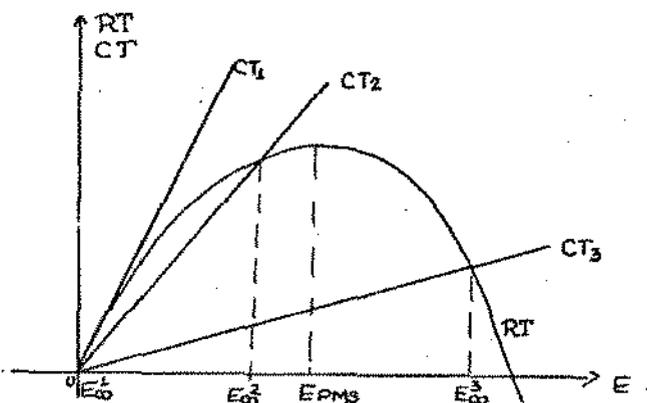


Figura 4.1.8. Custo e Renda x Esforço

Assim, sempre que temos um gasto excessivo de esforço de pesca de livre - acesso, temos uma insuficiência econômica; que é o caso de super - pesca econômica. E a super - pesca econômica não implica em super - pesca biológica (ver fig. 4.1.8.  $CT_2$ )

O modelo sugere então, que ocorreriam as duas: super-pesca econômica e biológica. A primeira dar-se-ia por exemplo, com as inovações tecnológicas que reduziriam o custo da pesca; e a segunda, quando aumenta o preço do peixe. Assim surgem as perguntas: Qual é o nível de esforço ótimo, já que o equilíbrio bionômico  $E_{\infty}$  é ineficiente?

Qual é a produção sustentável ótima?

Gordon sugere que o esforço ótimo dar-se-ia quando o lucro econômico ( $RT - CT$ ) fosse máximo. Mas a sugestão vai contra a dinâmica dos processos econômicos e biológicos.

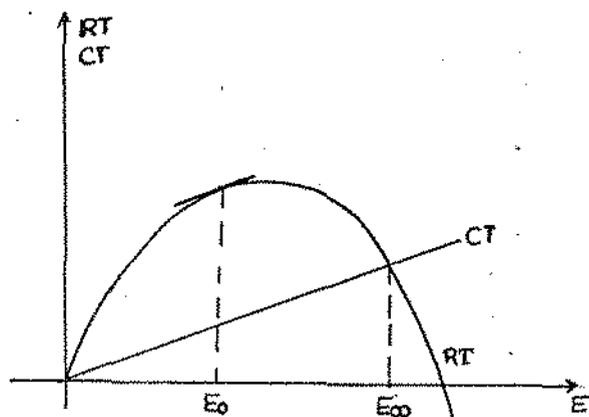


Fig. 4.1.9 - Maximização do lucro econômico sustentável ocorre em  $E = E_0$

Esta conclusão é uma das preocupações deste trabalho. Suponhamos, por exemplo, que haja uma pesca de livre acesso com equilíbrio bionômico  $E = E_{\infty}$  (Fig.4.1.9) Agora queremos aumentar a produção sustentável. Então, primeiramente, deveríamos diminuir o esforço de pesca, pois este, apesar de produzir de imediato um decréscimo na produção futura, levaria a um aumento da produção.

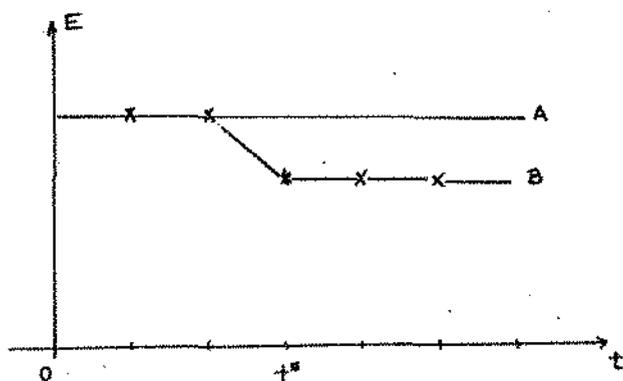
Equacionando o problema ficaríamos com:

$$\text{Produção } Y = E \cdot x$$

e sabemos  $\frac{dx}{dt} = F(x) - E \cdot x$

Agora quando  $E_{\infty}$  tende para algum nível  $E < E_{\infty}$ .

então  $\frac{dx}{dt}$  aumentaria de forma contínua (ver fig.4.1.10)



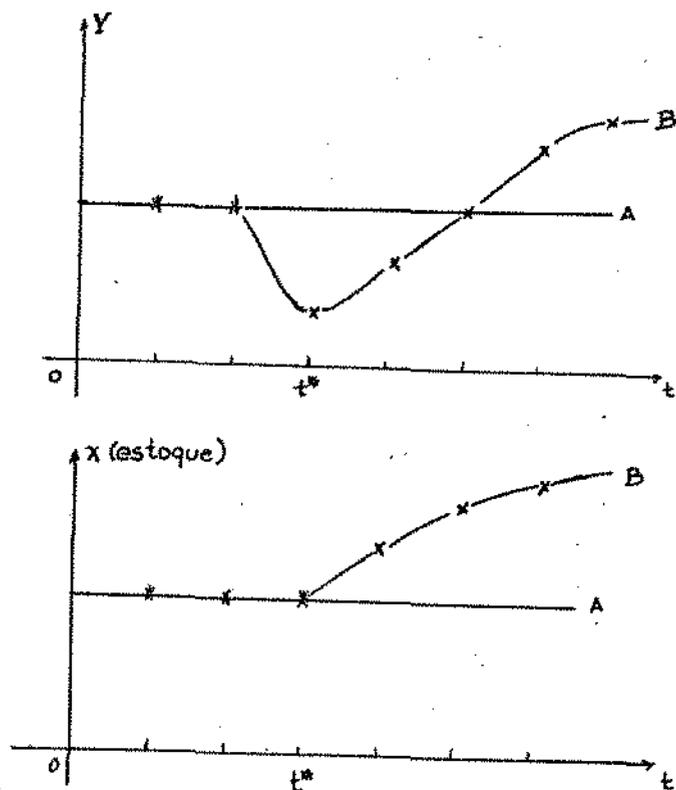


Fig. 4.1.10. O efeito do esforço  $E$  diminuído no tempo  $t=t^*$ .  
A curva B mostra os resultados da redução, a curva A corresponde à não redução do esforço.

Assim, se queremos produções futuras melhores, temos que reduzir os níveis de esforço. O problema fundamental torna-se determinar o negócio oposto ótimo. Este problema nos leva a uma grande dificuldade do ponto de vista filosófico, político e biológico pois envolve a conservação de recursos. Não é um problema de ordem matemática. Tem sido muito discutido.

4.2. MODELO DE GOULD

Faremos agora uma discussão da curva de produção sustentável, baseado no teorema de Smith (1969) [ 5 ], que podemos postular: a razão de crescimento da população inexplorada é proporcional ao seu tamanho, ou seja,  $\frac{dx}{dt} = F(x)$ , cujo gráfico é do tipo:-

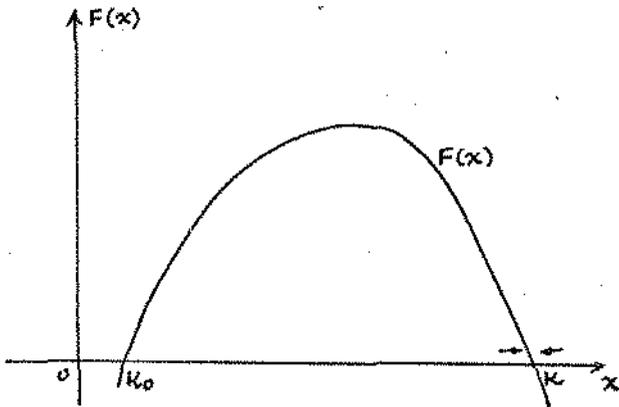


Figura 4.2.1.- Curva de crescimento natural (vista anteriormente)

onde  $K$  é um ponto de equilíbrio estável e  $K_0$  é a população mínima viável. Segundo Gould, para níveis menores que  $K_0$  a população cresceria mas vulnerável a doenças e a predadores naturais.

A produção  $Y$  de uma indústria pesqueira depende da soma dos esforços  $E$ , e do tamanho da população de peixes  $x$ :

$$Y = g(E, x) \quad (4.2.2)$$

e assumimos que a produção marginal do esforço  $\frac{dg}{dE}$  é positiva, e que a produção marginal da população  $\frac{dg}{dx}$  é positiva. E para os produtos médios e marginal de ambos estão sujeitos a lucros diminuídos.

Se assumimos que não há relação entre o esforço de pesca e a razão de crescimento natural, a população de peixes está em equilíbrio quando a indústria pesqueira está colhendo os peixes a uma razão igual à sua razão de crescimento natural, ou seja, quando  $\frac{dx}{dt} = Y$ .

Podemos tirar  $Y$  como função do esforço das seguintes equações:-

$$i) \frac{dx}{dt} = F(x)$$

$$ii) Y = g(E, x)$$

$$iii) Y = \frac{dx}{dt}$$

De onde obteremos o gráfico:-

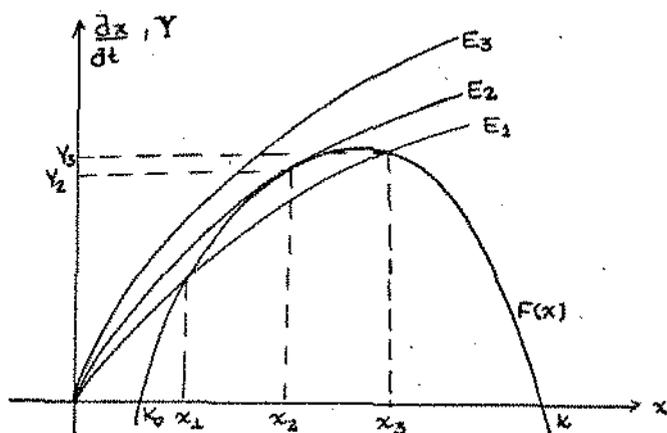


Figura 4.2.3. - curva do crescimento da população e da Produção.

As curvas  $E_1, E_2, E_3, \dots$  significam a função produção  $Y = g(E, x)$ , ou seja, para um esforço fixado  $E_1$ , a linha  $E_1$  mostra a curva  $Y = g(E_1, x)$ .

Consideremos o esforço  $E_1$ , então se temos uma população de peixes maior que  $x_3$ , então a produção excede o crescimento natural então a população diminui.

Para o caso  $x_1 < x < x_3$ , temos que a população aumenta.

Para  $x < x_1$ , a população tende a zero.

Esta análise é semelhante à feita da figura (4.1.8).

Assim, para um dado esforço  $E_1$ , teremos um equilíbrio estável em  $x = x_3$  e uma produção sustentável de  $Y_3$ . Em geral, a produção sustentável para um dado esforço  $E$  qualquer é indicado onde a curva  $E$  corta a curva de crescimento natural,

e é abaixo da curva  $E_1$ .

Pois, se temos, por exemplo, as curvas  $E_2$  e  $E_3$  sabemos que  $E_3 > E_2$  então  $\frac{dx}{dt} < Y$  para todo  $x$ , pois estaremos colhendo numa razão maior que a razão de crescimento natural. Se  $E_3$  é mantido sempre, então, a população tende à extinção e a produção sustentável tende a zero.

Esta figura (4.2.3.) pode ser transformada em uma figura do tipo da figura (4.2.1), com  $Y$  estando de acordo com a curva de crescimento natural. Sendo que, para valores crescentes até  $E_2$ , a produção sustentável é positiva, em  $E_2$  há uma "descontinuidade" na curva, e para valores  $E > E_2$  a produção sustentável é nula.

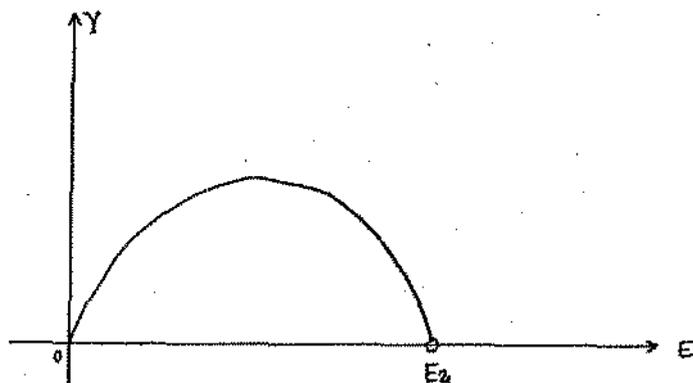


Figura 4.2.4. Produção sustentável x Esforço.

Da figura (4.2.3) podemos indicar que a população mínima viável  $K_0$  é positiva e a produção marginal da população é positiva, então, a curva de produção sustentável é "descontínua". Se uma destas duas hipóteses não são satisfeitas (isto é possível, mas não é necessário), então a curva de produção sustentável varia continuamente.

Para o teorema de Smith ser satisfeito é necessário que a curva de produção sustentável seja contínua. E o caso de descontinuidade seria estudado como um caso especial. Por exemplo, se na curva  $CT_3$  da figura (4.1.8) temos uma descontinuidade, intuitivamente podemos sugerir (corretamente)

que, na correspondente (positiva) relação preço por esforço, a população seria dissipada.

Assim, comparando resumidamente os modelos:

O modelo de Gordon está resumido nas equações

$$(i) \frac{dx}{dt} = F(x)$$

$$(iii) \frac{dx}{dt} = Y$$

e com a condição de equilíbrio lucro zero  $P.Y. = c.E.$  (iv)

Gráficamente consiste em resolver (i) e (iv) na figura (4.2.3) com Y em função de E, e combinada com a equação (iii) na figura (4.2.1) para encontrar os valores em Y e em E.

O modelo de Gould, o qual mostra mais claramente a extinção será:- eliminar E pelas equações ii)  $Y = g(E, x)$

dando Y como função de x, e aí combinar com as equações e iv)  $P.Y = c.E.$

(i) e (iii) para encontrar o equilíbrio em  $\frac{dx}{dt}$  e x.

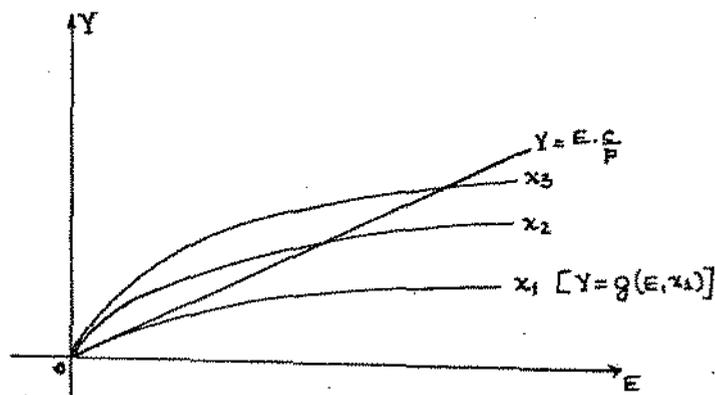


Figura 4.2.5. Produção x Esforço.

Para a população  $\tilde{x}_2$  e esforço  $E_1$  a produção sustentável é  $Y_1$ . E para a mesma população considerando E variável teremos a função  $Y^*$ . E desta figura (4.2.5) derivamos a figura (4.2.6)

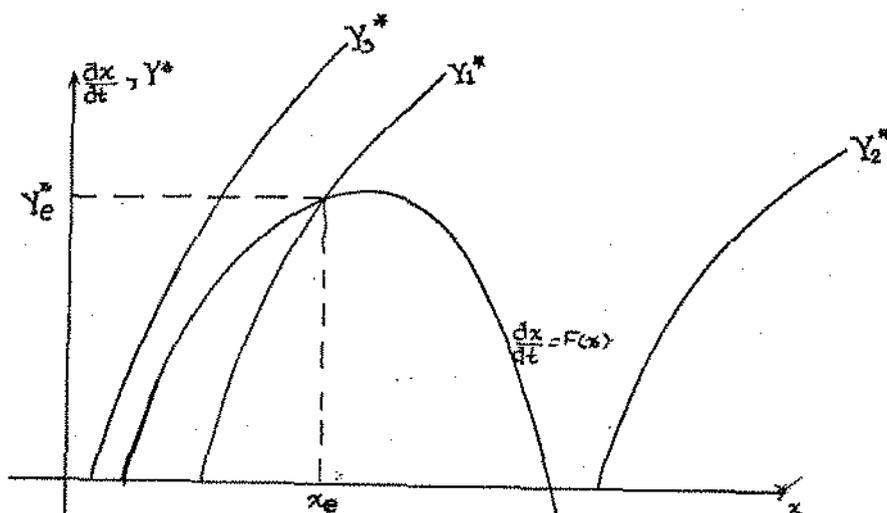


Figura 4.2.6. Razão de crescimento e Produção quando  $E$  é variável.

que mostra as produções de equilíbrio para diferentes níveis de população.

Suponha que  $Y^*$  na figura (4.2.6) é a curva de crescimento natural. A razão de crescimento da população na rede é igual à razão de crescimento natural menos o que já foi pego. Então, teremos um ponto de equilíbrio em  $Y_1^*$  quando  $Y_1^* = \frac{dx}{dt} = x_e$ , assim  $(x_e, Y_e^*)$  é a posição de equilíbrio biológico estado-estável. E é estável pois se  $x > x_e$  temos  $Y_1^* > \frac{dx}{dt}$ , então mais peixes estão sendo pegos do que a natureza produz, assim a população decresce.

Se  $x < x_e$  temos  $Y_1^* < \frac{dx}{dt}$  então  $x$  cresce.

Na figura (4.2.6), as curvas  $Y^*$  dependem dos parâmetros da função produção e dos valores de  $c$  e de  $p$ .

Por exemplo para  $p$  pequeno e  $c$  grande a curva  $Y^*$  tenderia para  $Y_2^*$ .

A curva  $Y_3^*$  ilustra o caso de extinção da população de peixes, pois a indústria pesqueira colhe excedendo a razão de crescimento natural, então a população decresce. Com

uma pesca deste tipo, desgovernada, teríamos que a população de peixes diminui continuamente. E no nível de população  $x_1$ , a indústria acaba, e neste nível, a população  $x$  tende a zero pois foi tão explorada que não haverá formas de reprodução.

4.3. FUNÇÃO PRODUÇÃO

Consideremos agora, a equação de crescimento da população com remoção ( com a colheita efetuada), ou seja ,

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - h(x,t) \quad t \geq 0$$

onde  $F(x)$  é a função de crescimento natural da população é a função  $h(x,t)$  é determinada por:-

- (1) tamanho da população de peixes  $x$
- (2) razão de esforço de colheita  $E = E(t)$

como Gould considerou em seu modelo assim  $h = Y = g(E,x)$

onde  $Y = g(E,x)$  é chamada função Produção para dado recurso industrial.

Esta função Produção  $g(E,x)$  assume, por Econometria a forma

$$g(E,x) = a.E^\alpha x^\beta$$

com  $a$ ,  $\alpha$ , e  $\beta$  constantes positivas

Consideremos aqui  $\alpha = 1$  e denominamos  $g(x) = ax^\beta$

Assim  $g(E,x) = G(x) \cdot E$ , ou seja, uma função linear em  $E$ , e esta escolha, feita por motivo de simplicidade primariamente matemática, nos levará a um modelo linear de otimização cujo uso é mais fácil que o não - linear.

O modelo não complicaria se a função  $G(x)$  considerada não fosse da forma  $ax^\beta$ , talvez o modelo seria mais realista se  $G$  fosse uma função arbitrária.

Assim, na rede, o lucro econômico por cada vez que jogássemos a rede com esforço  $E, \Delta t$ , seria dado por:-

$$\begin{aligned} L \cdot \Delta t &= L(x,E) \cdot \Delta t = [p \cdot h - c \cdot E] \Delta t \\ &= [p \cdot h \cdot \Delta t + c \cdot E \cdot \Delta t] \\ &= p \cdot G(x) \cdot E \cdot \Delta t - c \cdot E \cdot \Delta t \\ &= [p \cdot G(x) - c] \cdot E \cdot \Delta t \\ &= [p \cdot h - c(x)] \cdot h \cdot \Delta t. \end{aligned}$$

onde  $c(x) = \frac{c}{G(x)}$

assim, em uma colheita unitária onde o nível de população é  $x$ , teríamos um custo de

$$c \cdot E \cdot \Delta t = c \cdot \frac{h}{G(x)} \cdot \Delta t = \frac{c}{G(x)} \cdot h \cdot \Delta t = c(x) \cdot h \cdot \Delta t =$$

A função  $c(x)$  é uma função não decrescente pois  $G(x)$  é uma função não crescente em  $x$ .

Assim, o proprietário único tem por objetivo maximizar os lucros na rede, mas temos que levar em consideração os descontos derivados da exploração (como por exemplo, custo do incremento que se coloca no esforço). Seja  $\delta > 0$  esta razão de descontos que é constante. Equacionando o problema ficaríamos com:

$$VP = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot L(x, E) dt \quad (4.3.1)$$

$$VP = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot \{ p - c(x(t)) \} \cdot h(x, t) dt$$

onde VP é o valor presente, que depende da população  $x$ , cuja taxa de variação é  $\frac{dx}{dt} = F(x) - h(x, t)$  e da colheita  $h(x, t)$  / que leva a valores grandes de VP:

As variáveis  $x(t)$  e  $h(x, t)$  devem satisfazer:

$$\begin{aligned} x(t) &\geq 0 \\ h(x, t) &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

e aí temos um problema de maximização, em Teoria de Controle Ótimo.

### POLÍTICA DE COLHEITA ÓTIMA

Existem vários métodos matemáticos para determinar  $h = h(x, t)$  que maximize a função dada por (4.3.1), mas aqui nós usamos uma aproximação formal, substituindo  $h(x, t) = F(x) - \frac{dx}{dt}$ , ou seja,  $h(x, t) = F(x) - \dot{x}$  em (4.3.1) e obtemos:

$$VP = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot [p - c(x)] \cdot [F(x) - \dot{x}] dt$$

que é um funcional da forma  $\int \phi(t, x, \dot{x}) dt$ , onde podemos aplicar a clássica condição de Euler  $\frac{d\phi}{dx} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}}$

que é usada para obter uma solução rápida, mas parcial, do problema. No nosso caso:-

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dx} &= \frac{\partial}{\partial x} (e^{-\delta t} \cdot [p - c(x)] \cdot [F(x) - \dot{x}]) \\ &= e^{-\delta t} \cdot \{ [F(x) - \dot{x}] \cdot c'(x) + [p - c(x)] \cdot F'(x) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e \frac{d}{dt} \frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [e^{-\delta t} \cdot [p - c(x)] \cdot [F(x) - \dot{x}]] \right\} \\ &= \frac{d}{dt} \{ -e^{-\delta t} \cdot [p - c(x)] \} \\ &= e^{-\delta t} \{ \delta \cdot [p - c(x)] - c'(x) \cdot \dot{x} \} \end{aligned}$$

igualando as duas obteremos:-

$$e^{-\delta t} \cdot \{ [F(x) - \dot{x}] \cdot c'(x) + [p - c(x)] \cdot F'(x) \} = e^{-\delta t} \cdot \{ [p - c(x)] - c'(x) \cdot \dot{x} \}$$

$$- c'(x) \cdot F(x) + [p - c(x)] \cdot F'(x) = \delta [p - c(x)]$$

$$F'(x) - \frac{c'(x) \cdot F(x)}{[p - c(x)]} = \delta \quad (4.3.3)$$

Assumimos que (4.3.3) tem uma única solução /  $x = x^*$  que chamamos nível de população ótimo.

Surgem então as questões:

- Em quais circunstâncias  $x^*$  é uma solução ótima para o nosso problema original?
- Qual é o método ótimo de aproximação de  $x^*$  para algum nível de população inicial  $x(0) \neq x^*$ ?
- Como  $x^*$  depende dos parâmetros do problema?

(d) Qual é o significado econômico da equação (4.3.3)?

Em resposta a essas perguntas podemos argumentar matematicamente: quando  $x^*$  estiver entre as soluções factíveis e satisfizer as condições do problema original, ele será solução do problema original, ou seja, quando  $x^* \geq 0$  e  $h^*$  correspondente for também maior ou igual a zero, e ambas maximizarem a equação (4.3.1)

O que responde à questão (a).

Quanto ao método ótimo de aproximação de  $x^*$  dependerá das condições do problema e de sua expressão numérica de VP.

A questão (c) pode ser respondida no seguinte item:-

#### EQUILÍBRIO ÓTIMO E APROXIMAÇÃO

O nível ótimo  $x^*$  é assumido como uma solução única para o problema (4.3.3).

Dada uma população inicial  $x(0)$ , a política de colheita ótima pode ser descrita como: usa-se uma razão de colheita  $h^*(x,t)$  que leva o nível  $x(t)$  a  $x^*$  tão rapidamente quanto possível. Assim, se  $h_{\max}$  denota a colheita máxima factível, então temos:-

$$h^*(x,t) = \begin{cases} h_{\max} & \text{se } x > x^* \\ F(x^*) & \text{se } x = x^* \\ 0 & \text{se } x < x^* \end{cases} \quad (4.3.4)$$

o que nos diz que, se o nível de população  $x < x^*$  então, nada devemos colher até que  $x$  chegue ao nível ótimo  $x^*$ .

Se  $x = x^*$ , então devemos colher a razão igual à razão de crescimento da população  $x^*$ .

Se  $x > x^*$ , aí devemos colher o máximo que pudermos dentro dos controles factíveis.

Assim obtivemos uma colheita ótima, que nos dá o gráfico

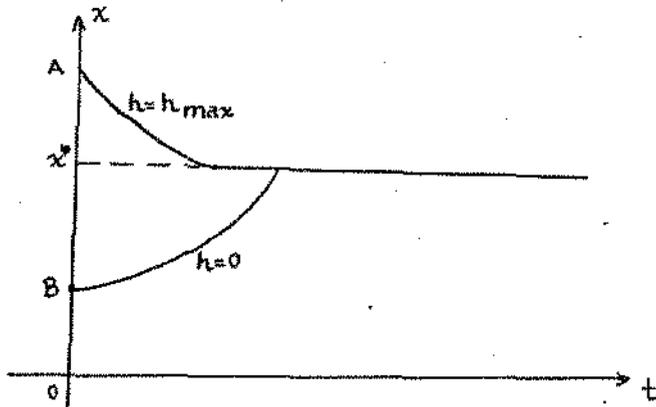


Figura (4.3.5) - População ótima e colheita ótima.

Se  $x(0) = A$ , a razão de colheita máxima reduz a população do nível  $x$  ao nível  $x^*$ .

Se  $x(0) = B$ , a pesca é fechada ( $h=0$ ) então  $x$  cresce a  $x^*$ .

Esta pode ser uma política às vezes irrealista, pois, parece uma atitude extrema fechar a pesca, principalmente se for por tempo demorado. Veremos mais adiante que este fato é devido ao modelo ser linear, o qual implica que nenhum benefício está associado com a razão de colheita, mas apenas a quantidade de pesca é importante.

É importante observar que a política de colheita ótima proposta mesmo neste modelo é a de "colheita por pulso", em que o estoque é colhido pesadamente e depois lhe é permitido estabelecer-se novamente. É esta também uma consequência da linearidade.

#### O EFEITO DO DESCONTO

Veremos nesta seção como o desconto influencia na produção ótima  $Y^* = F(x^*)$

Reescrevendo a equação (4.3.3), ficaremos com

$$F'(x) [p - c(x)] - c'(x) \cdot F(x) = \delta [p - c(x)]$$

$$\text{ou } \frac{d}{dx} \left\{ F(x) \cdot [p - c(x)] \right\} = \delta \cdot [p - c(x)] \quad (4.3.6)$$

Para a produção sustentável

$h(x, t) = F(x)$  a expressão  $\rho(x) = [p - c(x)] \cdot F(x)$  representa o lucro sustentável ao nível de população  $x$ .

Assim a equação (4.3.6) fica

$$\frac{d\rho}{dx} = \delta \cdot [p - c(x)]$$

Se considerarmos  $x$  como uma variável decisiva então  $\frac{d\rho}{dx}$  decresce em  $x$ , isto é,  $\Delta x = 1$ , aumentamos a variação da população em uma unidade, isto produz um lucro na rede de  $[p - c(x)] \cdot \Delta x = p - c(x)$ . Mas causa um decréscimo no lucro sustentável de  $\Delta \rho = \rho'(x) \cdot \Delta x = \rho'(x)$ , ou seja, se pescarmos um peixe a mais teremos um lucro imediato de  $p - c(x)$  mas diminuiremos o lucro futuro sustentável, e esse lucro seria da do por:-

$$VP = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot \rho'(x) = \frac{1}{\delta} \frac{d\rho}{dx}$$

A equação  $\frac{d\rho}{dx} = \delta [p - c(x)]$  depende de  $x$  e se  $x$  é ótimo,  $\frac{d\rho}{dx}$  imediato pode igualar o VP ao menor lucro  $\frac{d\rho}{dx}$  futuro.

Dois casos são interessantes para o nosso estudo:-

(I) se  $\delta = 0$ , ou seja, se não temos nada a descontar como, por exemplo, não fizemos nenhuma implementação na pesca e com isso nada temos a pagar extra, então  $\frac{d\rho}{dx} = \delta [p - c(x)]$  implica na maximização do lucro econômico sustentável  $\rho(x)$ , isto se dá devido ao fato da integral  $\int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot [p - c(x)] dx$  divergir quando  $\delta = 0$ .

A maximização do lucro econômico sustentável é uma política ótima e bastante desejável, mas ela está baseada

no fato de que, para obter este lucro máximo, a sociedade estaria fazendo sacrifícios deixando de usar certos implementos, em benefício da sociedade futura pois os benefícios econômicos estariam aumentando.

(II) Se  $\delta \rightarrow \infty$ , podemos assumir  $\frac{dP}{dx}$  limitado tal que pela equação.  $\frac{dP}{dx} = \delta [p - c(x)]$  temos que  $\delta \rightarrow \infty$  implica que  $x \rightarrow x_{\infty}$  onde  $p = c(x_{\infty})$ . Segue-se que  $P(x_{\infty}) = F(x_{\infty}) \cdot [p - c(x_{\infty})] = 0$ , ou seja, o lucro econômico sustentável tenderia a zero.

Assim, estaríamos colocando tantos incrementos que teríamos que ser descontados levando assim o lucro econômico futuro a anular-se. Ou seja, o proprietário único procedendo desta forma, exploraria até um nível  $x = x_{\infty}$ , menor que o nível alcançado pela exploração de livre acesso e estaria na mesma situação que esta segunda, pois estaria dissipando o lucro.

Vimos então que os dois casos extremos: o primeiro "mais conservador" (maximização do lucro econômico sustentável) e o segundo "menos conservador" (dissipação do lucro econômico sustentável) não nos levam à solução ótima, então, esta estaria em uma razão de descontos positiva e finita entre estes dois extremos.

III) O CASO  $0 < \delta < \infty$ .

Como o nível de população ótimo  $x^*$  determinado pela equação  $\frac{dP}{dx} = \delta [p - c(x)]$  depende da razão de desconto  $\delta$ ?

Vejamos agora que:-

$P(x) = F(x) [p - c(x)]$  é uma função crescente pois  $F(x)$  é positiva para  $x$  positivo assim  $\frac{dP}{dx} > 0$ .

$$\frac{dP}{dx} = F'(x) [p - c(x)] - F(x) \cdot c'(x) > 0$$

assim  $\frac{d^2 \rho}{dx^2} = F''(x) [p - c(x)] - 2F'(x)c'(x) - F(x)c''(x) < 0$

portanto  $\rho(x)$  é côncava para baixo, por isso  $\frac{d\rho}{dx}$  é decrescente em  $x$ , e isto implica que a equação tem uma única solução  $x = x^*$  válida também para o modelo de Schaefer (mas não válida em geral, como para o caso de  $F(x)$  depensatória).

Assim concluímos que  $x^*$  está entre  $x_{\infty}$  e  $x_0$ , onde  $\rho'(x_0) = 0$  e que  $x^*$  decresce monotonicamente de  $x_0$  para  $x_{\infty}$  quando  $\delta$  cresce de 0 para  $\infty$ .

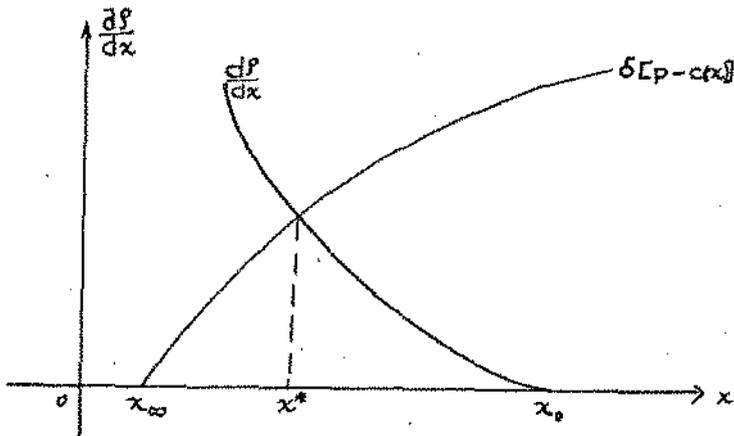


Figura (4.3.7). Determinação gráfica do nível de população ótimo  $x^*$ .

Os resultados podem ser resumidos em:-

(a) Existe um nível de população ótima  $x = x^*$  que é determinado pela equação  $F'(x) - \frac{c'(x)F(x)}{p - c(x)} = \delta$  ou pela equação:

$$\frac{d\rho}{dx} = \delta [p - c(x)].$$

(b) O nível de população ótimo  $x^*$  é uma função da razão de desconto e de outros parâmetros biológicos do problema.

(c) O valor de  $x^*$  está entre o nível de renda máxima  $x_0$  (quando  $\delta = 0$ ) e o nível de dissipação de renda  $x_{\infty}$  (quando  $\delta = \infty$ ). Que reflete o compromisso entre lucros correntes versus lucros futuros.

(d) Quando o nível de população  $x(0) \neq x^*$  a política ótima é uma política de aproximação que leva o nível  $x$  para o nível  $x^*$  o mais rapidamente possível.

EXEMPLOS BASEADOS NO MODELO DE SCHAEFER.

No modelo de Schaefer nós temos:-

$$F(x) = r \cdot x \left(1 - \frac{x}{K}\right) \text{ e } c(x) = \frac{c}{x} \quad (4.3.8)$$

como  $\rho(x) = [p - c(x)] \cdot F(x)$  ficamos com:-

$$\rho(x) = \left[ p - c(x) \right] \cdot \left[ r \cdot x \left(1 - \frac{x}{K}\right) \right]$$

assim  $\frac{d\rho}{dx} = \delta \cdot [p - c(x)]$ , fica:-

$$\frac{d}{dx} \left\{ \left[ p - c(x) \right] \cdot \left[ r \cdot x \left(1 - \frac{x}{K}\right) \right] \right\} = \delta \cdot [p - c(x)]$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \left[ r \cdot p \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right) - r \cdot x \cdot c(x) \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{d}{dx} \left[ r \cdot x \cdot p - \frac{rpx^2}{K} - r \cdot c + \frac{c \cdot r \cdot x}{K} \right] = \delta \cdot [p - c(x)]$$

$$r \cdot p - 2 \frac{rpx}{K} + \frac{cr}{K} = \delta \cdot \left( p - \frac{c}{x} \right)$$

$$1 - 2 \frac{x}{K} + \frac{c}{Kp} = \frac{\delta}{r} - \frac{\delta c}{rpx}$$

$$x - \frac{2x^2}{K} + \frac{c \cdot x}{K \cdot p} - \frac{\delta x}{r} + \frac{\delta c}{r \cdot p} = 0$$

$$- \frac{2x^2}{K} + \left[ 1 + \frac{c}{Kp} - \frac{\delta}{r} \right] \cdot x + \frac{\delta c}{rp} = 0$$

$$x = \frac{- \left[ 1 + \frac{c}{kp} - \frac{\delta}{r} \right] \pm \sqrt{\left( 1 + \frac{c}{kp} - \frac{\delta}{r} \right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{k} \cdot \frac{\delta c}{rp}}}{\frac{4}{K}}$$

$$x^* = \frac{K}{4} \left[ -1 - \frac{c}{kp} + \frac{\delta}{r} \right] + \sqrt{\left( -1 - \frac{c}{kp} + \frac{\delta}{r} \right)^2 - \frac{8\delta c}{rpk}} \quad (4.3.9)$$

Como podemos ver, existe  $x^*$  que depende dos parâmetros: desconto ( $\delta$ ), nível máximo da população ( $K$ ), razão de crescimento ( $r$ ), do custo ( $c$ ) e do preço ( $p$ ). Então, a política ótima é aquela que aproxima o nível de população  $x$  o mais rapidamente possível de  $x^*$ .

Para ilustrarmos, apresentamos um exemplo:-

Nos anos 50, as indústrias de baleias, da Antártica concentrou-se em explorar as baleias azuis pois seu preço era maior no mercado por sua carcassa e sua carne, que qualquer outra baleia; e em 1965 a pesca às baleias azuis foram proibidas pois estas começaram a desaparecer, e aí a exploração estendeu-se para outras baleias como as baleias fin, que são menores e também para baleias menores ainda.

Para termos uma idéia, em 1965 provavelmente / restavam 5.000 baleias azuis de uma população original de aproximadamente 150.000 baleias.

Foi aplicado o modelo de Schaefer para estimar a política de exploração ótima para a população de baleias fin da Antártica. A dinâmica desta população tem sido estudada por Allen (1973) [8]. Parece que a curva de crescimento da baleia fin (extendido para que o modelo simples possa ser aplicado) é não simétrica.

Assim para ilustrarmos, consideremos a curva /  $F(x)$  como sendo uma curva simétrica e assumimos também os seguintes parâmetros:  $r = 0,08$  e  $K = 40.000$ . Em 1976, o nível de população de baleias fin estimada era de 70.000 baleias com uma produção sustentável  $F(70.000) = 4.620$ . Em atenção às reformas dos estoques de baleias fin, a Comissão Internacional de Pesca à Baleia, tem adotado quotas anuais progressivamente menores.

A tabela (4.3.10) nos dá os resultados não reais para o tratamento de baleias fin por tratar esta pesca independentemente de outras pescas que tem sido e continuam a ser exploradas concorrentemente.

RAZÃO DE DES- DESCONTO (%)	NÍVEL DE POPULAÇÃO ÓTIMA X*	PRODUÇÃO ÓTIMA ANUAL Q*
0	220.000	7.920
1	200.000	8.000
3	163.000	7.726
5	133.000	7.094
10	86.000	5.406
15	67.000	4.485
20	59.000	4.024
+ ∞	40.000	2.880

Tabela (4.3.10) Baleias fin da Antártica:  
produção sustentável e nível de população ótima.

A tabela (4.3.10) mostra como a razão de crescimento intrínseco da população afeta a sensibilidade da solução ótima para a razão de desconto.

Antes de concluir esta seção é interessante repetir que o modelo e sua aplicação são super-simplificados. Muitos argumentos sugerem que a política de exploração ótima pode ser consideravelmente mais conservativa que este modelo propõe. Para mencionar um exemplo; o efeito do aumento do nível de exploração é por vezes aumentos incertos. Por exemplo, o modelo de Schaefer não considera a possibilidade de depensation, o qual pode resultar em um colapso inesperado da população explorada.

#### POSSIBILIDADE DE EXTINÇÃO

Consideramos anteriormente que  $Q = K.E.x$  e o custo proporcional ao esforço  $E$  que implica que com a dissi-

pação da renda, o equilíbrio  $x_{\infty}$  é positivo, e assim ocorreria extinção no caso de depensation, ou seja, o custo que deliberadamente leva a pesca à extinção é infinito (que pode ser considerado realístico para a população de peixes marinhos).

No caso modelo de otimização este fato é mostrado quando assumimos  $c(0) < \infty$ .

onde  $c(0)$  é o custo da unidade colhida quando o nível de população é zero (um conceito um pouco difícil de se entender) mas o que se pretende ser entendido é que o custo da colheita do último membro sobrevivente da população é finito.

Suponhamos agora que:-

$p > c(0)$ , isto é, que o preço unitário do recurso excede o custo da colheita da última unidade. Então, a colheita de livre acesso pode ir à extinção, desde que temos  $x_{\infty} = 0$ .

Nós vimos anteriormente que o nível ótimo  $x^*$  se aproxima de  $x_{\infty}$  quando a razão de desconto  $\delta$  tende a  $\infty$ . Assim vemos que  $x^* = 0$  para valores de  $\delta$  suficientemente grandes mas finitos.

Exemplo: suponha que o custo de colheita unitário não depende de  $x$ , ou seja,  $c(x) = c = \text{constante}$ , então a equação

$$F'(x) - \frac{c'(x) F(x)}{p - c(x)} = \delta \text{ torna-se}$$

$$F'(x^*) = \delta$$

Assim, para valores grandes de  $\delta$  a equação pode não ter solução. Neste caso, segue-se que a extinção é uma política de exploração ótima desde que  $p > c$ .

No caso do modelo logístico:-

$$F(x) = r \cdot x \left( 1 - \frac{x}{k} \right) \text{ a equação acima}$$

$$F'(x^*) = \delta \text{ fica: } -r \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{1}{K} \cdot r \cdot x = \delta$$

$$- \frac{2 \cdot r \cdot x^*}{K} + r = \delta$$

$$x^* = - \frac{(\delta - r) \cdot K}{2 \cdot r}$$

$$x^* = \frac{(r - \delta) \cdot K}{2 \cdot r}$$

que é solução quando  $\delta > r$ , pois  $\delta > r \Rightarrow r - \delta < 0$ .

Mas geralmente pode ser facilmente estabilizada.

Teorema:- Se  $F(x)$  é uma função de crescimento puramente compensatória, isto é,  $F'(x) < 0$  e nós assumimos que  $c''(x) > 0$ . Então

(1)  $x^* > 0$  (extinção é não - ótima) se ou

$$p < c(0) \text{ ou } \delta < F'(0)$$

(2)  $x^* = 0$  (extinção é ótima) se  $p > c(0)$  e

$$\delta > 2 \cdot F'(0).$$

Demonstração:-

$$\text{Seja } H(x) = \frac{-c'(x) \cdot F(x)}{p - c(x)}$$

então a equação (4.3.3) pode ser escrita como:-

$$F'(x) + H c(x) = \delta$$

$$H(x) = \delta - F'(x) \quad (4.3.11)$$

Assumimos que o preço da unidade é maior que o custo da pesca da última unidade ( $p \geq c(0)$ ) e  $\delta > 2 \cdot F'(0)$  isto implica que a equação (4.3.11) não tem solução  $x \geq 0$ , logo, a extinção é uma política ótima, ou seja, desde que  $H(x)$  é uma função não decrescente de  $p$ , é suficiente considerar o caso limite  $p = c(0)$ . Então pelo teorema do valor médio generalizado, nós temos:-

$$H(x) = - \frac{c'(x) \cdot F(x)}{c(0) - c(x)}$$

$$H(x) = c'(x) \cdot \frac{F'(\xi)}{c(\xi)} \text{ para algum } \xi ;$$

$$0 < \xi < x.$$

$$H(x) < F'(\xi) < F'(0)$$

Assim  $\delta - F'(x) > 2 \cdot F'(0) - F'(x) > F'(0) > H(x)$  ✗

que é uma contradição.

Logo a equação (4.3.11) não tem solução.

A condição (2) é uma política de colheita ótima porque leva a um valor presente de lucros econômicos grandes. A extinção da população é uma atitude desejável economicamente, mas não está de acordo com o ponto de vista social, biológico e estético.

Por exemplo, se a companhia de pesca à baleia espera um lucro de 10% em seus investimentos e o crescimento da população de baleias azuis é de 5%, os baleeiros descobriram um plano racional (do ponto de vista econômico) o de liquidar com o estoque das baleias azuis!

## 5. APLICAÇÕES PRÁTICAS.

Temos então já vistos os dois modelos, o de Gordon e o do Gould, onde o primeiro diz que a população não irá à extinção devido ao fator econômico; e o segundo afirma que irá à extinção independente deste fator.

Assim, procuramos dados concretos que nos permitissem comparar os dois modelos, para verificarmos qual deles mais se aproxima da realidade.

Partimos assim dos dados obtidos no Perú, da pesca de anchovas, de onde temos: o esforço que nos é dado pelo número de barcos que pescavam e o número de dias do ano que saíam a pescar; a estimativa da população de anchovas lá existentes; e a colheita, que era a quantidade em biomassa de peixes pescados. Analisando estes dados pelo método de aproximações de funções pelos quadrados mínimos pudemos fazer uma comparação dos dois modelos.

### 5.1. PESCA DAS ANCHOVAS NO PERÚ

Para analisarmos os dados da pesca no Perú nós partimos do modelo discreto fazendo assim a análise discreta que corresponderia ao modelo contínuo; e depois fizemos a análise contínua.

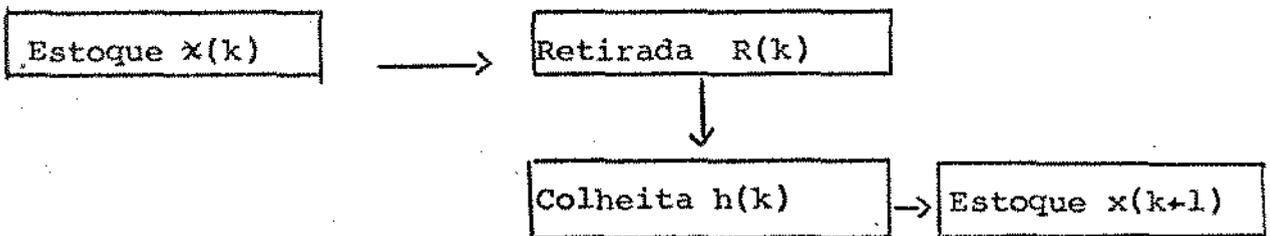
Partimos da seguinte tabela de dados reais da pesca das anchovas no Perú.

ANO	POPULAÇÃO	COLHEITA	ESFORÇO
1960	$2,93 \times 10^6$	$2,63 \times 10^6$	186.093
1961	$4,58 \times 10^6$	$3,38 \times 10^6$	225.288
1963	$7,20 \times 10^6$	$2,88 \times 10^6$	426.886
1966	$8,53 \times 10^6$	$4,54 \times 10^6$	313.500
1967	$9,82 \times 10^6$	$6,14 \times 10^6$	266.730
1968	$10,26 \times 10^6$	$6,87 \times 10^6$	248.830
1970	$10,62 \times 10^6$	$6,96 \times 10^6$	269.820
1971	$10,28 \times 10^6$	$13,07 \times 10^6$	131.097

Tabela 5.1.1. Dados concretos da Pesca das Anchovas no Perú.

ANÁLISE DISCRETA

Para a análise discreta do problema temos o seguinte modelo que é análogo ao contínuo.



onde a retirada  $R(k)$  é proporcional a  $F(x(k))$ , ou seja,  $R(k) = F(x(k))$

Assim  $x(k+1) = \text{Retirada } R(k) - \text{colheita } h(k)$

$$x(k+1) = F(x(k)) - h(k).$$

Se a população é inexplorada, nós temos que  $x(k+1) = F(x(k))$

(5.1.2)

Assim, dada uma população inicial  $x_1$  nós podemos encontrar

$x_2, x_3, \dots$  recursivamente. A equação é uma analogia em tempo discreto à equação diferencial  $\frac{dx}{dt} = F(x)$ , porque podemos escrevê-la da forma:-

$$\frac{\Delta x(k)}{\Delta k} = x(k+1) - x(k) = F(x(k)) - x(k)$$

onde  $F(x(k)) - x(k)$  corresponde à razão de crescimento  $F(x)$  do mo

delo tempo contínuo.

O comportamento dinâmico da equação (5.1.2) pode ser consideravelmente mais complexo que o comportamento do modelo análogo de tempo contínuo  $\frac{dx}{dt} = F(x)$

Para a equação precedente, o ponto de equilíbrio  $x = k$  se dá quando  $F(k) = 0$ , e tal equilíbrio é estável se  $F'(k) < 0$  e instável se  $F'(k) > 0$ . Assim, alguma solução  $x = x(t)$  para a equação converge monotonicamente para o ponto de equilíbrio estável, não podendo ocorrer oscilações.

No caso discreto, várias possibilidades podem ocorrer, veja a figura (5.1.3) abaixo. O ponto de equilíbrio,  $x = k$  é agora caracterizado pela equação  $F(k) = k$ .

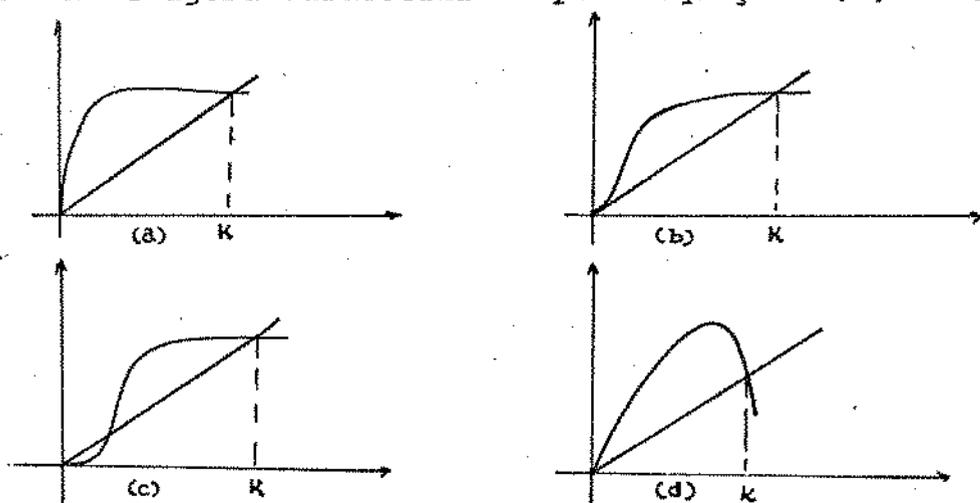


Figura 5.1.3. Tipos de curvas:- (a) compensação simples; (b) depensação; (c) depensação crítica; (d) Supercompensação.

Baseados nestas considerações, obtivemos a seguinte tabela para  $F(x(k))$ , partindo da tabela 5.1.1.

$F(x(k))$	$x(k)$
$2,63 \times 10^6$	$4,54 \times 10^6$
$3,38 \times 10^6$	$6,31 \times 10^6$
$2,85 \times 10^6$	$9,38 \times 10^6$
$4,54 \times 10^6$	$11,77 \times 10^6$
$6,14 \times 10^6$	$14,67 \times 10^6$
$6,87 \times 10^6$	$16,69 \times 10^6$
$6,96 \times 10^6$	$16,57 \times 10^6$
$13,07 \times 10^6$	$25,34 \times 10^6$

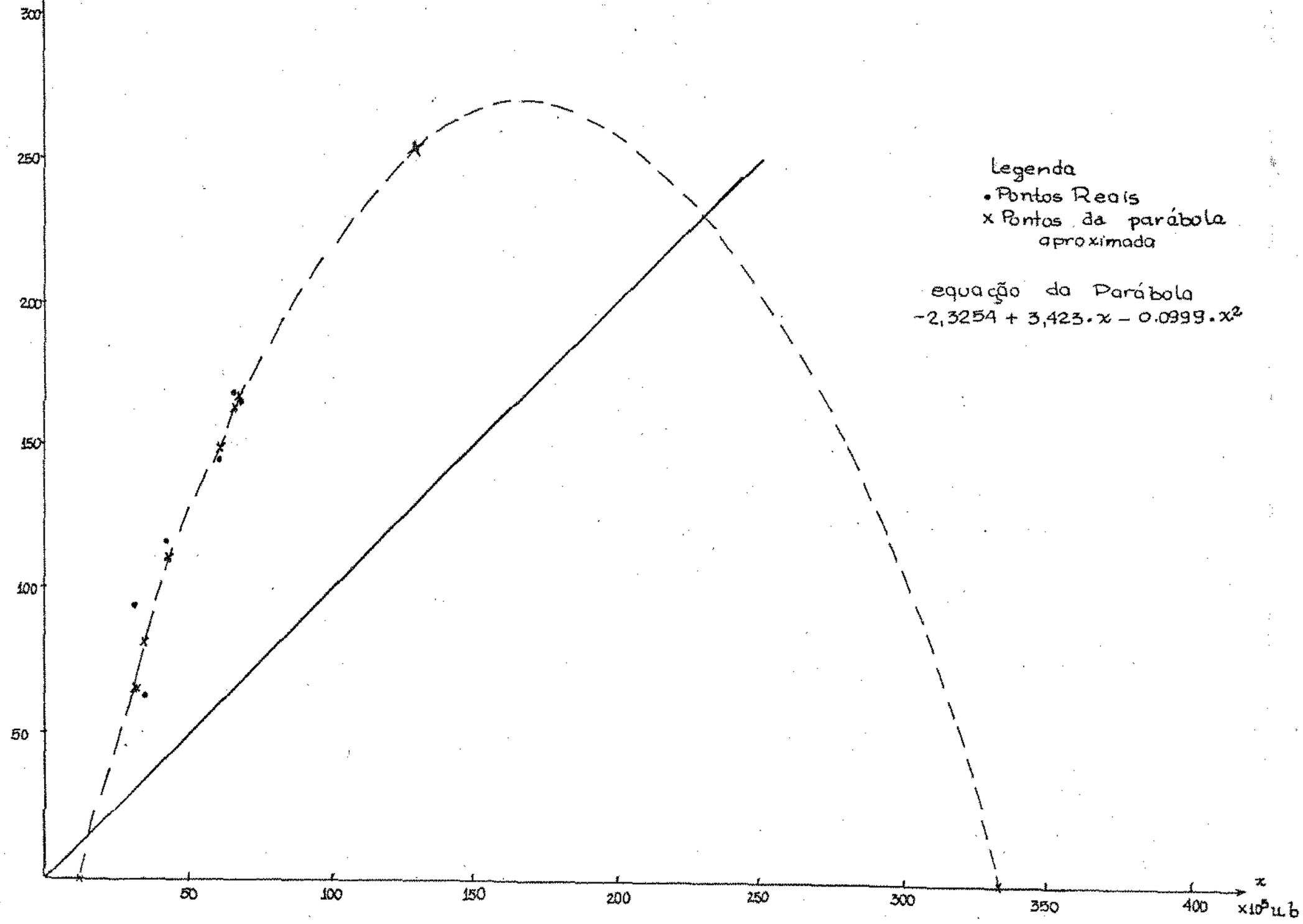
Tabela (5.1.4): Dados de crescimento da população no modelo discreto.

Colocados os pontos no gráfico, obtivemos a figura (5.1.5), que aproximada pelo método dos Quadrados mínimos lineares nos dá a parábola:-

$$- 2,3254 + 3,423 \cdot x - 0,0999 \cdot x^2$$

Comparando então com a figura (5.1.3), vemos que é um caso de super-compensação, ou seja, uma população com exploração desenfreada que tende à extinção.

Figura 5.1.5 - Curva Discreta de Crescimento da População



CASO CONTÍNUO

Para o caso contínuo, partindo da tabela (5.1.1) e aproximando a curva  $F(x)$  obtivemos a figura (5.1.6), obtivemos também nesta figura a curva da colheita  $Y$ .

Fazendo a aproximação por funções obtivemos as parábolas:-  $- 2,32 + 2,42. x - 0,09996. x^2$  para  $F(x)$  e  $- 1,922 + 2,788. x - 0,142. x^2$  para  $y$ .

Podemos notar pelo gráfico (5.1.6) que a colheita estava superior ao crescimento natural da população até /  $x = 6,96 \times 10^6$  u.b. Se no ano seguinte o esforço de pesca não houvesse diminuído (diminuindo esforço leva a uma diminuição da colheita) nós teríamos a colheita sempre superior ao crescimento da população o que levaria a população à extinção, que é o caso de uma super - pesca.

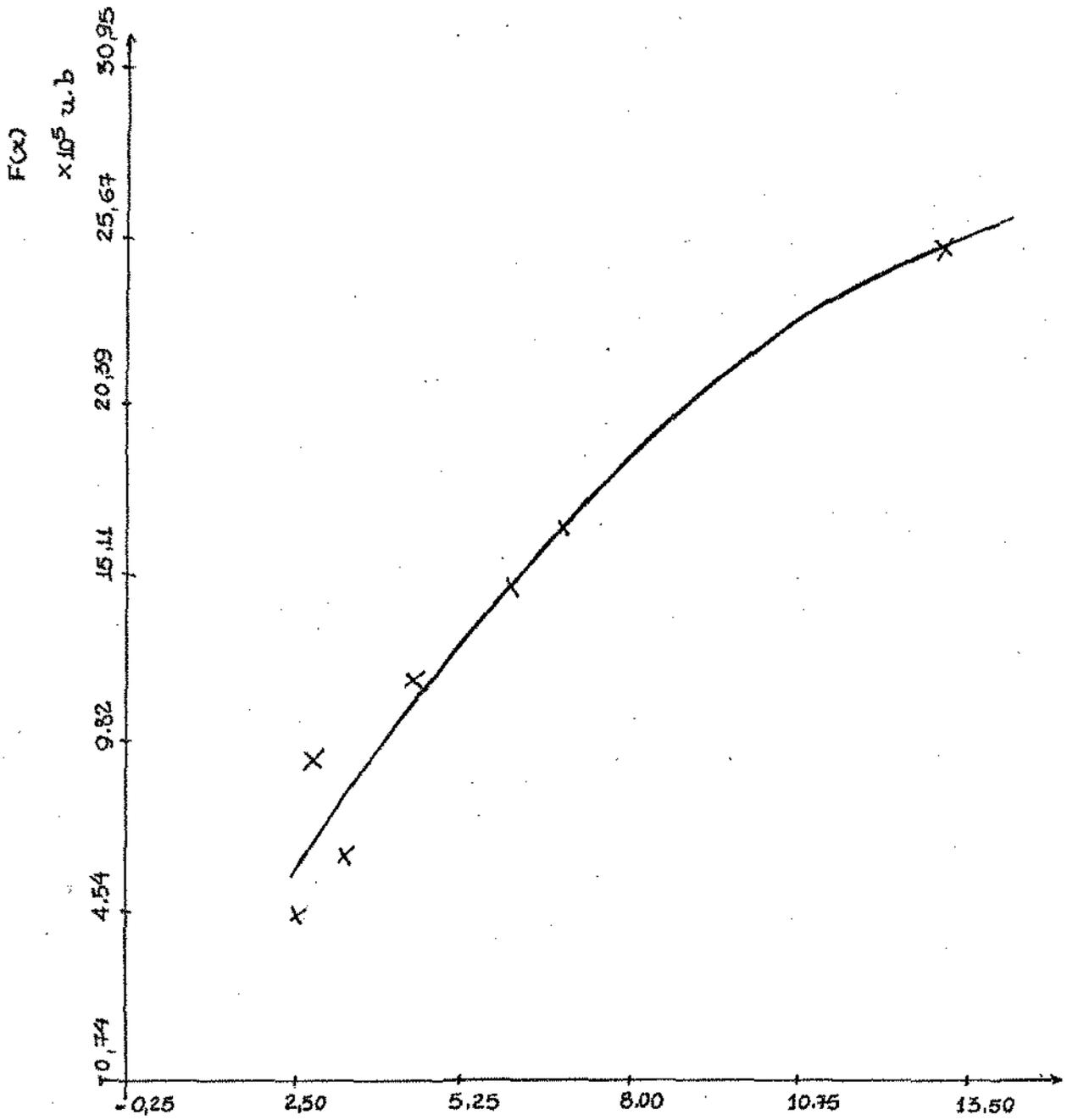
Mas em  $x = 6,96 \times 10^6$  u.b., o esforço de pesca foi reduzido à metade, assim diminui a colheita levando a um aumento da população. Neste ano, a população já estava tão explorada que não conseguiu se recuperar rapidamente, ocorrendo o seguinte: em 1972 a colheita foi para  $4,45 \times 10^6$  u.b, com o mesmo esforço do ano anterior, praticamente a metade da colheita anterior, e a população neste ano foi para  $5,96 \times 10^6$  u.b. A esta situação, o governo já estava intervindo, controlando a pesca. Assim, em 1973 o esforço foi de 124.511 para 33.912 e a população foi para  $8,75 \times 10^6$  u.b e a colheita / foi de  $1,78 \times 10^6$  u.b.

Teóricamente nós sabemos que para se obter uma colheita ótima, teríamos que colher o máximo desde que a população continuasse crescendo, ou seja, em  $x = 12,15 \times 10^6$  u.b.

Esta seria a colheita máxima, neste ponto da curva.

Em uma pesca de livre acesso como o caso que estudamos, não havendo controle oficial, a tendência natural da população seria a extinção da espécie. Neste caso, o modelo de Gould parece mais coerente, se adaptando melhor aos dados concretos.

O modelo de Gordon, ao contrário, argumenta que o controle da pesca é um processo que deve ocorrer naturalmente por meio de um fator econômico que regularia o preço / de custo e de venda do peixe.



PARAMETROS

MSQ RESIDUOS 0,17E+01

$$K(1) = -2,337160$$

$$K(2) = 3,427047$$

$$K(3) = -0,1001735$$

Figura 5.1.7 : Curva de Crescimento

- Pontos Reais do Crescimento da População (x)
- Pontos Reais da Colheita Y
- X Pontos das Parábolas aproximadas
- Curva de Crescimento F(x)
- Curva de Colheita Y

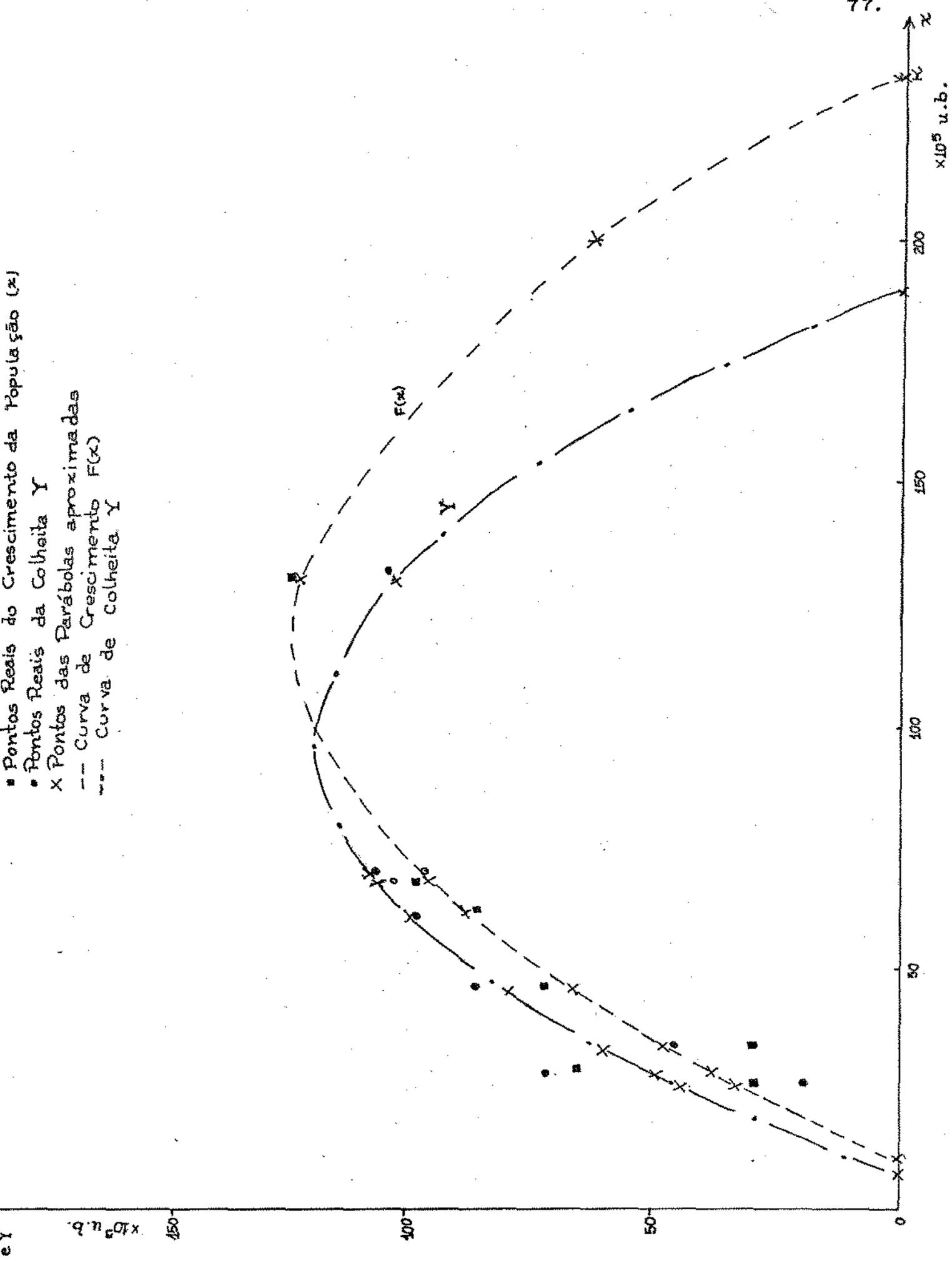


Figura (5.1.6): Curvas de Colheita e Curva de Crescimento da População

onde  $F(x) = -2,32 + 2,42 \cdot x - 0,0996 \cdot x^2$   
 $Y = -1,922 + 2,778 \cdot x - 0,142 \cdot x^2$

## (VI) BIBLIOGRAFIA

## LIVROS

- | 1| Boyce W. E. e Dijkstra R.C. - "Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno".
- | 2| Clarck C. W. - "Mathematical Bioeconomics". The Optimal Management of Renewable Resources".
- | 3| Elsgolt - "Cálculo de Variações".
- | 9| Santos E.P. - "Dinâmica de Populações Aplicada à Pesca e Piscicultura".

## ARTIGOS

- | 4| Shaefer M.B. - "Some Considerations of Population Dynamics and Economics in Relation to Management of Marine Fisheries". Journal Fishery Res. Board of Canada. 15(5) - 1957
- | 5| Smith V.L. - "On Models of Commercial Fishing". Journal of Political Economy. 77 - March/april 1969
- | 6| Gordon H.S. - "The Economic Theory of a Common Property Resource - The Fishery". The Journal of Political Economy. 62 - April 1954:
- | 7| Gould J.R. - "Extinction of a Fishery by Commercial Exploration: a note". Journal of Political Economy. 80 - 1972.
- | 8| Allen K.R. - "Analysis of the Stock - Recruitment Relation in Antarctic Fin Whales, Fish Stocks and Recruitment". Rapports et Procès- Verbaux des Reunions. Volume 164 - July 1973.