

ERRATA nos 2 exemplares da tese do aluno Yen Chi Lun :

Em folha de rosto (página iii):

Onde se lê:	Leia-se:
Doutor na área de Matemática Aplicada	Doutor em Matemática Aplicada


Prof. Dr. Aurelio R. Leite de Oliveira
283939 - Coordenador
CPG/IMECC - UNICAMP



YEN CHI LUN

O TEOREMA DE COMPARAÇÃO DE STURM E APLICAÇÕES

CAMPINAS
2013



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

YEN CHI LUN

O TEOREMA DE COMPARAÇÃO DE STURM E APLICAÇÕES

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica da Universidade Estadual de
Campinas como parte dos requisitos exigidos para a
obtenção do título de Doutor na área de Matemática
Aplicada.

Orientador: Dimitar Kolev Dimitrov

Coorientador: Roberto Andreani

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA PELO ALUNO
YEN CHI LUN, E ORIENTADA PELO
PROF. DR. DIMITAR KOLEV DIMITROV.

Assinatura do Orientador



Assinatura do Coorientador



CAMPINAS
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Y39t Yen, Chi Lun, 1983-
O teorema de comparação de Sturm e aplicações / Yen Chi Lun. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Dimitar Kolev Dimitrov.

Coorientador: Roberto Andreani.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Polinômios ortogonais. 2. Sturm, Teorema de. 3. Gautschi, Conjecturas de. 4. Jacobi, Polinômios de. I. Dimitrov, Dimitar Kolev, 1962-. II. Andreani, Roberto, 1961-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Sturm comparison theorem and applications

Palavras-chave em inglês:

Orthogonal polynomials

Sturm's theorem

Gautschi conjectures

Jacobi polynomials

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Dimitar Kolev Dimitrov [Orientador]

Sérgio Antonio Tozoni

Márcia Cristina Anderson Braz Federson

Kenier Castillo Rodríguez

Valdir Antonio Menegatto

Data de defesa: 05-09-2013

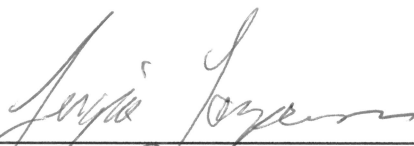
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 05 de setembro de 2013 e aprovada

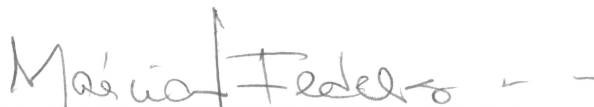
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). DIMITAR KOLEV DIMITROV



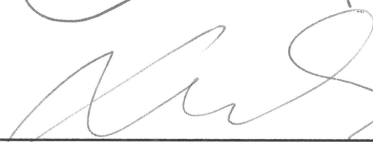
Prof(a). Dr(a). SÉRGIO ANTONIO TOZONI



Prof(a). Dr(a). MÁRCIA CRISTINA ANDERSON BRAZ FEDERSON



Prof(a). Dr(a). KENIR CASTILLO RODRÍGUEZ



Prof(a). Dr(a). VALDIR ANTONIO MENEGATTO

Abstract

In this thesis we state a new formulation of the Sturm comparison Theorem and its applications to the zeros of orthogonal polynomials. Specifically, these applications deal with the monotonicity of zeros of X_1 -Jacobi orthogonal polynomials, Gautschi's conjectures about inequalities of zeros of Jacobi polynomials and the asymptotic of zeros of ultraspherical polynomials.

Keywords: asymptotic of zeros, exceptional orthogonal polynomials X_1 -Jacobi, Gautschi's conjectures, orthogonal polynomials, Sturm's Theorem comparison, zeros.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar uma nova formulação do Teorema de comparação de Sturm e suas aplicações na teoria dos zeros de polinômios ortogonais, que são: monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais X_1 -Jacobi, desigualdades de Gautschi sobre os zeros dos polinômios ortogonais de Jacobi e o comportamento assintótico dos zeros dos polinômios ultrasféricos.

Palavras-chave: assintótica de zeros, conjecturas de Gautschi, polinômios ortogonais, polinômios ortogonais X_1 -Jacobi, Teorema de comparação de Sturm.

Sumário

Agradecimentos	xiii
Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xvii
Símbolos	xix
Glossário	xxi
1 Introdução	1
2 Preliminares	5
2.1 Teorema de Budan-Fourier	5
2.2 Transformada da Equação Diferencial	9
2.3 Interpretação Eletrostática e a Equação de Lamé	11
3 Polinômios Ortogonais	19
3.1 Propriedades dos Polinômios Ortogonais	20
3.2 Zeros dos Polinômios Ortogonais	27
3.3 Polinômios Ortogonais Clássicos	28
3.3.1 Polinômios Ortogonais de Jacobi	28
3.3.2 Polinômios Ortogonais de Hermite	29
3.3.3 Polinômios Ortogonais de Laguerre	30
4 Teorema de Comparação de Sturm e Refinamentos	31
4.1 Teoremas Clássicos de Sturm	33
4.2 Refinamentos do Teorema de Comparação de Sturm	35
5 Polinômios Ortogonais X_1-Jacobi	45
5.1 Propriedades Fundamentais	46
5.2 Monotonicidade dos Zeros	53
5.3 Interpretação Eletrostática dos Zeros	57

6	Conjecturas de Gautschi	65
6.1	Lema Técnico	68
6.2	Teoremas e Provas	71
7	Assintótica dos Zeros dos Polinômios de Gegenbauer	77
7.1	Lemas Técnicos	82
7.2	Resultado Principal	84
	Referências Bibliográficas	89

*Àqueles que perseguem as estrelas
no aquário de peixes-vermelhos e
àqueles que correm como Aquiles
atrás da tartaruga,
dedico.*

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço aos meus pais pela criação e pela minha formação pessoal. Eles mostraram-me os valores e princípios de um ser humano. E ainda estão me conduzindo.

À minha formação acadêmica, as orientações do professor Dimitar Klev Dimitrov foram essenciais. Ainda lembro da minha primeira bronca, e última até agora, do professor Dimitar. Apesar de sentir-me chateado e envergonhado no momento, senti também um laço familiar, algo de pai para filho. Sem mencionar os inúmeros estímulos de sua paixão pela pesquisa matemática e de apreço pelos laços entre os matemáticos, do presente e do passado.

Não posso esquecer a grande companheira de longa data, Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz. Trilhamos esse caminho de matemática desde a época de graduação até o doutorado.

O apoio do grupo de pesquisa em Polinômios Ortogonais e Similares foi indispensável na minha formação acadêmica. Agradeço aos professores Alagacone Sri Ranga, Cleonice Fátima Bracciali, Eliana Xavier Linhares de Andrade e Fernando Rodrigo Rafaeli pelas orientações e apoio durante todo esse período. O grupo é minha outra família.

Aos meus amigos, Daniella Porto, Diego Jacinto Fiorotto, Eliel José Camargo dos Santos, Gis-laine Mara Melega, Hector Flores Callisaya, Heron Martins Félix, Michelli Maldonado Carretero, Mirela Vanina de Mello e Willian Diego Oliveira, adorei a companhia de vocês durante esse percurso acadêmico. Nossas conversas e risadas foram uma outra terapia. Vocês acrescentaram mais alegria a todo esse tempo.

Agradeço ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP. Em especial ao meu co-orientador professor Roberto Andreani e ao professor Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira por auxiliar na parte burocrática e pelo apoio.

Finalmente, meu agradecimento à CAPES pelo apoio financeiro.

Lista de Figuras

2.1	Ilustração de sistema de cargas. Linhas vermelhas simbolizam as cargas fixas e as azuis simbolizam as cargas livres. Neste caso, $m = 4$ e $n = 6$	11
5.1	Monotonicidade dos zeros em relação a α no caso $n = \beta = 5$	57
5.2	Monotonicidade dos zeros em relação a β no caso $n = 5$ e $\alpha = 1$	57
5.3	Sistema de 3 cargas fixas e 5 cargas livres.	58
5.4	Sistema de 3 cargas fixas e 5 cargas livres.	60
5.5	Função $\exp(-L(x))$ para $n = 2$, $\alpha = 2$ e $\beta = 9$. Os zeros são $\hat{x}_1 = 0.5573$ e $\hat{x}_2 = 1.7943$	62
5.6	Função $\exp(-L(x))$ para $n = 2$, $\alpha = 2$ e $\beta = 9$. Os zeros são $\hat{x}_1 = 0.5573$ e $\hat{x}_2 = 1.7943$	63
6.1	A suposta região onde vale a desigualdade (6.0.4) fica ao lado esquerdo da união da curva $\mathcal{B}_n$, parte da reta vertical $\alpha = -1$, parte da reta $\beta = -\alpha - 1$ e a curva $\mathcal{C}_n$. . .	66
6.2	A suposta região onde vale a desigualdade (6.0.4) quando n é suficientemente grande, denotemos por faixa $\mathcal{S}$	67
6.3	Ω é formado pelas regiões coloridas, tirando os pontos $(-1/2, -1/2)$, $(-1/2, 1/2)$, $(1/2, -1/2)$ e $(1/2, 1/2)$	67
6.4	A região Ω_1 para o polinômio de Jacobi de grau $n = 5, 50$	72
6.5	A faixa $\mathcal{S}_1$	74
7.1	Exemplo do maior zero do polinômio ortogonal de Gegenbauer de grau 5.	81

Lista de Tabelas

2.1	Ilustra os sinais da sequência de Fourier de $P(x)$ nos respectivos pontos, caso c seja zero de P	7
2.2	Mostra os sinais da sequência de Fourier de $P(x)$ nos respectivos pontos, caso c não seja zero de P	8

Símbolos

$\mathbb{R}$ Conjunto de números reais.

$\mathbb{S}^d$ Esfera unitária de dimensão d .

C^k Classe de funções que têm derivadas contínuas até ordem k .

$N_P I$ Número de zeros reais do polinômio P no intervalo I .

$sign(*)$ Sinal da expressão.

$span\{*\}$ Subespaço gerado pelo conjunto de vetores.

Π_n O espaço vetorial dos polinômios algébricos de grau no máximo n .

Π O espaço vetorial de todos os polinômios algébricos.

$\delta_{n,m}$ Delta de Kronecker.

$P_n^{(\alpha,\beta)}$ Polinômio de Jacobi.

$C_n^{(\lambda)}$ Polinômio de Gegenbauer.

H_n Polinômio de Hermite.

$L_n^{(\alpha)}$ Polinômio de Laguerre.

J_α Função de Bessel de primeira espécie.

$\widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}$ Polinômio X_1 -Jacobi.

$x_{n,k}^{(\alpha,\beta)}$ Zero do n -ésimo polinômio de Jacobi.

$x_{n,k}(\lambda)$ Zero do n -ésimo polinômio de Gegenbauer.

$h_{n,k}$ Zero do n -ésimo polinômio de Hermite.

$j_k^{(\alpha)}$ Zero da função de Bessel de primeira espécie.

$\widehat{x}_{n,k}(\alpha, \beta)$ Zero do n -ésimo polinômio X_1 -Jacobi.

Glossário

Polinômio algébrico Polinômio com todos os seus coeficientes reais.

Propriedade assintótica Ou comportamento assintótico. É o comportamento a ser observado em uma função quando seu argumento tende ao infinito.

Eletrostática É o ramo da eletricidade que estuda as propriedades e o comportamento de cargas elétricas em repouso, ou que estuda os fenômenos de equilíbrio de cargas elétricas.

Capítulo 1

Introdução

“A mente que se abre a uma nova idéia
jamais voltará ao seu tamanho original.”

Albert Einstein

Sejam

$$y''(x) + f(x)y(x) = 0 \quad (1.0.1)$$

e

$$Y''(x) + F(x)Y(x) = 0 \quad (1.0.2)$$

duas equações diferenciais de segunda ordem na forma de Sturm-Liouville com $f(x) < F(x)$ no intervalo de comparação (a, b) . A partir desta informação, o que podemos afirmar sobre o comportamento dos zeros das soluções y e Y ? O Teorema de comparação de Sturm nos garante que Y troca de sinal pelo menos uma vez entre zeros consecutivos de y em (a, b) . Em outras palavras, o gráfico de Y oscila mais do que o de y no intervalo de comparação. Por exemplo, sejam

$$y''(x) + y(x) = 0 \quad (1.0.3)$$

e

$$Y''(x) + 16Y(x) = 0 \quad (1.0.4)$$

equações diferenciais. Sabemos que $y(x) = \sin(x)$ e $Y(x) = \sin(4x)$ são, respectivamente, soluções das Equações (1.0.3) e (1.0.4). É evidente que o gráfico da solução Y oscila mais que o de y em qualquer intervalo da reta real. Este é um exemplo clássico que ilustra bem o Teorema de comparação de Sturm. Uma consequência desse teorema é o resultado sobre os zeros da solução de uma equação diferencial parametrizada que enunciaremos a seguir. Seja a equação diferencial

$$y''(x; \tau) + f(x; \tau)y(x; \tau) = 0$$

com $x \in (a, b)$, $\tau \in (c, d)$, $f \in C((a, b) \times (c, d))$ e $y(x; \tau)$ uma função contínua de $\tau \in (c, d)$ possuindo n zeros distintos em (a, b) . Observe que os zeros de $y(x; \tau)$ são funções contínuas de τ . Se $\partial f(x; \tau)/\partial \tau > 0$ e $y(x; \tau)$ satisfaz certas condições de contorno, então por um corolário do

Teorema de comparação de Sturm, que apresentaremos mais adiante neste trabalho, os zeros de $y(x; \tau)$ são funções decrescentes ou crescentes de τ , dependendo do tipo da condição de contorno.

Apesar da afirmação do Teorema de comparação de Sturm ser simples e, à primeira vista, muito natural, ele possui várias aplicações na análise do comportamento dos zeros de diversas funções especiais. Ilustraremos com um simples exemplo. Na Subseção 3.3.1, sabemos que a função

$$u_n(x; \alpha, \beta) = (1-x)^{(1+\alpha)/2}(1+x)^{(1+\beta)/2}P_n^{(\alpha, \beta)}(x),$$

com $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ o n -ésimo polinômio de Jacobi, é a solução da equação diferencial

$$u_n''(x; \alpha, \beta) + f_n(x; \alpha, \beta)u_n(x; \alpha, \beta) = 0,$$

onde a derivada refere-se a x e

$$f_n(x; \alpha, \beta) = \frac{1-\alpha^2}{4(1-x)^2} + \frac{1-\beta^2}{4(1+x)^2} + \frac{n(n+\alpha+\beta+1) + (1+\alpha)(1+\beta)/2}{1-x^2}.$$

Observe que, dados $\alpha, \beta > -1$ fixos e $x \in (-1, 1)$, por simples cálculos, temos $f_n(x; \alpha, \beta) < f_{n+1}(x; \alpha, \beta)$. Sejam $x_{n,k}^{(\alpha, \beta)}$, $k = 1, \dots, n$ são os zeros de ordem crescente de $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Em outras palavras,

$$x_{n,1}^{(\alpha, \beta)} < x_{n,2}^{(\alpha, \beta)} < \dots < x_{n,n-1}^{(\alpha, \beta)} < x_{n,n}^{(\alpha, \beta)}.$$

Então pelo Teorema de comparação de Sturm, $P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x)$ muda de sinal pelo menos uma vez em $(-1, x_{n,1}^{(\alpha, \beta)})$, $(x_{n,1}^{(\alpha, \beta)}, x_{n,2}^{(\alpha, \beta)})$, $\dots$, $(x_{n,n-1}^{(\alpha, \beta)}, x_{n,n}^{(\alpha, \beta)})$, $(x_{n,n}^{(\alpha, \beta)}, 1)$, ou seja,

$$-1 < x_{n+1,1}^{(\alpha, \beta)} < x_{n,1}^{(\alpha, \beta)} < x_{n+1,2}^{(\alpha, \beta)} < x_{n,2}^{(\alpha, \beta)} < \dots < x_{n,n}^{(\alpha, \beta)} < x_{n+1,n+1}^{(\alpha, \beta)} < 1.$$

E assim provamos o entrelaçamento dos zeros dos polinômios ortogonais de Jacobi.

Observe que a principal hipótese do Teorema de comparação de Sturm é $f < F$ que, no exemplo anterior, corresponde a $f_n(x; \alpha, \beta) < f_{n+1}(x; \alpha, \beta)$. Em outras palavras, $f - F$ tem sinal constante no intervalo de comparação (a, b) . Se, agora, existe $\eta \in (a, b)$ tal que $f - F < 0$ em (a, η) e $f - F > 0$ em (η, b) , que relação podemos afirmar sobre os zeros das soluções y e Y das Equações diferenciais (1.0.1) e (1.0.2)? Nesse trabalho, formularemos uma nova versão do teorema com esta nova hipótese.

Conforme o título desta tese deste trabalho, propomo-nos a fazer uma breve apresentação, porém com mais detalhes e rigor, sobre o Teorema de comparação de Sturm, seus refinamentos e aplicações. Em síntese,

- O Capítulo 2 contém resultados auxiliares que utilizaremos no decorrer deste trabalho, tais como o Teorema de Budan-Fourier e a Regra de sinais de Descartes, vide [28]. Neste mesmo capítulo, introduziremos noções sobre interpretação eletrostática, vide [26, 34].
- O Capítulo 3 contém os resultados elementares da teoria de polinômios ortogonais, são resultados conhecidos cujas principais referências bibliográficas são [3, 34].

- No Capítulo 4, apresentaremos os resultados relacionados ao Teorema de comparação de Sturm, seus refinamentos e suas respectivas demonstrações. A principal referência bibliográfica é [29].
- No Capítulo 5, introduziremos a nova classe de polinômios ortogonais denominada classe dos polinômios ortogonais X_1 -Jacobi ou polinômios excepcionais de Jacobi. Apresentaremos as propriedades elementares sobre essa nova classe de polinômios e faremos a primeira aplicação do refinamento do Teorema de comparação de Sturm: estabelecer a monotonicidade dos zeros desses polinômios.
- No Capítulo 6, faremos a segunda aplicação do teorema, fornecendo uma solução parcial das desigualdades de Gautschi que também são conhecidas como conjecturas de Gautschi.
- No Capítulo 7, faremos a nossa última aplicação, estabelecendo o comportamento assintótico dos zeros positivos dos polinômios ortogonais de Gegenbauer.

Capítulo 2

Preliminares

“A fé e as demonstrações matemáticas são duas coisas inconciliáveis.”

Fiodor Dostoievski

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados técnicos que serão de grande utilidade no decorrer deste trabalho.

2.1 Teorema de Budan-Fourier

Definição 2.1.1. Seja $a_0, a_1, \dots, a_n$ uma lista de números reais. Definamos $V(a_0, \dots, a_n)$ como o número de variações de sinais da sequência reduzida que se obtém ignorando-se os termos nulos. Por definição, $V(a_0) = 0$ e

$$V(a_0, \dots, a_n) = \begin{cases} V(a_1, \dots, a_n) + 1 & \text{se } a_0 a_1 < 0, \\ V(a_1, \dots, a_n) & \text{se } a_0 a_1 > 0. \end{cases}$$

De acordo com a Definição 2.1.1, temos que

$$V(5, 6, 0, 2) = V(5, 6, 2) = 0 \quad \text{e} \quad V(-1, 0, 5, -6, 0, 2) = V(-1, 5, -6, 2) = 3.$$

Definição 2.1.2. Sejam P um polinômio algébrico de grau n e I um intervalo finito ou infinito, aberto, semi-aberto ou fechado. $N_P I$ denota o número de zeros de P em I , contando suas multiplicidades, e

$$V_P(x) := V(P(x), P'(x), \dots, P^{(n)}(x)). \quad (2.1.1)$$

A sequência $P(x), P'(x), \dots, P^{(n)}(x)$ é conhecida como sequência de Fourier da função P .

Nesta seção, apresentaremos o Teorema de Budan-Fourier, a ferramenta que estabelece a cota superior do número de zeros de um polinômio algébrico em determinado intervalo da reta real. Para este propósito, vamos precisar do seguinte lema cuja afirmação diz que antes de qualquer raiz c da equação $f(x) = 0$, a função f e sua derivada têm sinais opostos antes da raiz e mesmo sinal depois da raiz.

Lema 2.1.3. Seja f uma função com derivadas contínuas até ordem k em uma vizinhança $\mathcal{U}$ do ponto c . Suponhamos que

$$f(c) = f'(c) = \dots = f^{(k-1)}(c) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(k)}(c) \neq 0.$$

Então, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$f(c + \varepsilon)f'(c + \varepsilon) > 0 \quad \text{e} \quad f(c - \varepsilon)f'(c - \varepsilon) < 0.$$

Demonstração. A demonstração é baseada na fórmula de Taylor. Para todo h suficientemente pequeno tal que $c - h, c + h \in \mathcal{U}$, temos

$$f(c + h) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}h + \frac{f''(c)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(k-1)}(c)}{(k-1)!}h^{k-1} + \frac{f^{(k)}(c + \theta h)}{k!}h^k,$$

onde $\theta \in (0, 1)$.

Analogamente,

$$f'(c + h) = f'(c) + \frac{f''(c)}{1!}h + \dots + \frac{f^{(k-1)}(c)}{(k-2)!}h^{k-2} + \frac{f^{(k)}(c + \theta_1 h)}{(k-1)!}h^{k-1},$$

onde $\theta_1 \in (0, 1)$. Como $f^{(j)}(c) = 0$ para $j = 0, \dots, k-1$, então

$$\frac{f(c + h)}{f'(c + h)} = \frac{f^{(k)}(c + \theta h)}{f^{(k)}(c + \theta_1 h)} \frac{h}{k}.$$

Mas, $f^{(k)}(c) \neq 0$. Como $f^{(k)}(x)$ é uma função contínua, existe uma vizinhança $\mathcal{U}_1$ de c tal que $f^{(k)}(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathcal{U}_1$. Além disso, $\text{sign}(f^{(k)}(x)) = \text{sign}(f^{(k)}(c))$ para todo $x \in \mathcal{U}_1$, onde a função $\text{sign}(x)$ é definida como segue:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Em particular, para h suficientemente pequeno, temos

$$\text{sign}(f^{(k)}(c + \theta h)) = \text{sign}(f^{(k)}(c + \theta_1 h)).$$

Consequentemente,

$$\text{sign}\left(\frac{f(c + h)}{f'(c + h)}\right) = \text{sign}(h).$$

Assim, tomando $h = \varepsilon$ e $h = -\varepsilon$, obtemos a afirmação do lema. □

Teorema 2.1.4 (Budan-Fourier). Seja P um polinômio algébrico de grau n . Dado intervalo com extremos a e b com $a < b$, suponhamos que $P(a) \neq 0$ e $P(b) \neq 0$. Então

$$N_P(a, b) = V_P(a) - V_P(b) - 2\nu, \quad \text{para algum } \nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (2.1.2)$$

Demonstração. Vamos acompanhar o que acontece com o número de mudanças de sinal na sequência $V_P(x)$ quando x se move de a até b . É claro que uma mudança em $V_P(x)$ pode ocorrer somente quando x passa por uma raiz de uma das funções $P(x), P'(x), \dots, P^{(n-1)}(x)$, uma vez que $P^{(n)}(x)$ é uma constante.

Seja c uma raiz com multiplicidade k de $P(x)$ em (a, b) , ou seja,

$$P(c) = P'(c) = \dots = P^{(k-1)}(c) = 0 \text{ e } P^{(k)}(c) \neq 0.$$

Sem perda de generalidade, suponhamos $P^{(k)}(c) > 0$. Como $P^{(k)}(x)$ é uma função contínua, $P^{(k)}(x) > 0$ para todo x em uma vizinhança $\mathcal{U}$ de c . Pelo Lema 2.1.3 e para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos então a Tabela 2.1.

x	$c - \varepsilon$	c	$c + \varepsilon$
$P^{(k)}$	+	+	+
$P^{(k-1)}$	−	0	+
$P^{(k-2)}$	+	0	+
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
P''	+	0	+
P'	−	0	+
P	+	0	+

Tabela 2.1: Ilustra os sinais da sequência de Fourier de $P(x)$ nos respectivos pontos, caso c seja zero de P .

Dessa forma,

$$V(P(c - \varepsilon), P'(c - \varepsilon), \dots, P^{(k)}(c - \varepsilon)) = k$$

e

$$V(P(c), P'(c), \dots, P^{(k)}(c)) = V(P(c + \varepsilon), P'(c + \varepsilon), \dots, P^{(k)}(c + \varepsilon)) = 0.$$

Então, se x passar por um zero de P , a função

$$V(P(x), P'(x), \dots, P^{(k-1)}(x), P^{(k)}(x))$$

diminuirá exatamente a multiplicidade deste zero.

Suponhamos, agora, que c é um zero de multiplicidade k da derivada de alguma ordem. Sejam

$$P^{(i-1)}(c) \neq 0, P^{(i)}(c) = P^{(i+1)}(c) = \dots = P^{(i+k-1)}(c) = 0 \text{ e } P^{(i+k)}(c) \neq 0$$

para algum $1 \leq i \leq n - k$. Sem perda de generalidade, suponhamos $P^{(i+k)}(c) > 0$. Então, escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, pelo Lema 2.1.3, obtemos a Tabela 2.2.

Definamos

$$\begin{aligned} R_1 &:= V(P^{(i-1)}(c - \varepsilon), P^{(i)}(c - \varepsilon), \dots, P^{(i+k)}(c - \varepsilon)) \\ &= k + V(P^{(i-1)}(c - \varepsilon), P^{(i)}(c - \varepsilon)) \end{aligned}$$

x	$c - \varepsilon$	c	$c + \varepsilon$
$P^{(i+k)}$	+	+	+
$P^{(i+k-1)}$	−	0	+
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$P^{(i+1)}$	+	0	+
$P^{(i)}$	−	0	+
$P^{(i-1)}$	$\text{sign}(P^{(i-1)}(c))$	$\text{sign}(P^{(i-1)}(c))$	$\text{sign}(P^{(i-1)}(c))$

Tabela 2.2: Mostra os sinais da sequência de Fourier de $P(x)$ nos respectivos pontos, caso c não seja zero de P .

e

$$\begin{aligned} R_2 &:= V(P^{(i-1)}(c + \varepsilon), P^{(i)}(c + \varepsilon), \dots, P^{(i+k)}(c + \varepsilon)) \\ &= V(P^{(i-1)}(c + \varepsilon), P^{(i)}(c + \varepsilon)). \end{aligned}$$

Como $P^{(i-1)}$ e $P^{(i)}$ são funções contínuas, $P^{(i-1)}(x)$ e $P^{(i)}(x)$ não se anulam em uma vizinhança $\mathcal{U}$ de c . Logo,

$$V(P^{(i-1)}(x), P^{(i)}(x)) = \delta_{const}$$

para todo x de $\mathcal{U}$, sendo $\delta_{const} = 1$ ou $\delta_{const} = 0$, o que depende do fato de haver ou não mudança de sinal. Investigaremos quatro casos dependendo do valor de δ_{const} e da paridade de k .

- Se $\delta_{const} = 1$ e k par. Então, $R_1 - R_2 = k + 1 - 1 = k$;
- Se $\delta_{const} = 1$ e k ímpar. Então, $R_1 - R_2 = R_1 - R_2 = k - 1$;
- Se $\delta_{const} = 0$ e k par. Então, $R_1 - R_2 = R_1 - R_2 = k$;
- Se $\delta_{const} = 0$ e k ímpar. Então, $R_1 - R_2 = R_1 - R_2 = k + 1$.

Portanto, quando x passa por um zero de $P^{(i)}$, $V(P^{(i-1)}(x), P^{(i)}(x), \dots, P^{(i+k)}(x))$ sempre diminui de um número par. Lembremos que, pela hipótese, $P(a) \neq 0$ e $P(b) \neq 0$.

Por outro lado, pelo mesmo argumento, observemos que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$V_P(a) = V_P(a + \varepsilon) \text{ e } V_P(b) = V_P(b - \varepsilon) - 2\nu_1, \quad \nu_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

caso b seja zero de $P^{(i)}$ para i um número inteiro, $1 \leq i \leq n$.

Portanto, quando x move-se de a até b , a função $V_P(x)$ além de diminuir a multiplicidade do zero de P quando x passa por algum zero de P , ela diminuirá um número par caso x passe por um zero de $P^{(i)}(x)$, para algum i , $1 \leq i \leq n$. Em outras palavras, $V_P(a) - V_P(b)$ é um número par maior do que o número exato dos zeros de P no intervalo (a, b) . $\square$

Uma consequência imediata do Teorema de Budan-Fourier é a regra de sinais de Descartes. Segundo a regra, se os termos de um polinômio com coeficientes reais são colocados em ordem

decrecente de grau, então o número de raízes positivas do polinômio é igual ao número de mudança de sinais ou menor que isso por uma quantidade par. Mais precisamente, seja

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

um polinômio de coeficientes reais. Então, temos

$$V_P(0) = V(a_0, a_1, 2! a_2, \dots, (n-1)! a_{n-1}, n! a_n) = V(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$$

e

$$V_P(\infty) = V(a_n, n a_n, n(n-1) a_n, \dots, n! a_n) = V(a_n, a_n, a_n, \dots, a_n) = 0.$$

Corolário 2.1.5 (Regra de sinais de Descartes). Seja P um polinômio algébrico de grau n . Então, o número de zeros reais positivos de P é dado por:

$$N_P(0, \infty) = V(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) - 2\kappa \text{ para algum } \kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Para se obter a cota superior para o número de zeros negativos de um polinômio algébrico $P(x)$, basta aplicar a regra de sinais de Descartes para $P(-x)$.

2.2 Transformada da Equação Diferencial

Neste trabalho, usaremos um tipo especial de transformada que reduz uma equação diferencial homogênea de segunda ordem a uma equação da forma de Sturm-Liouville. Lembremos que uma equação diferencial de Sturm-Liouville é da forma

$$u'' + \lambda(x)u' = 0. \quad (2.2.1)$$

Sejam $K(x)$, $M(x)$ e $N(x)$ funções definidas em um intervalo (a, b) , onde K e M possuem derivadas contínuas e $K(x) \neq 0$ nesse intervalo. Se fizermos $y(x) = s(x)u(x)$ na equação diferencial linear homogênea de segunda ordem

$$K(x)y'' + M(x)y' + N(x)y = 0, \quad (2.2.2)$$

onde $u(x)$ é uma função desconhecida, $s(x)$ pode ser determinada tal que $u(x)$ satisfaça uma equação da forma (2.2.1). Com efeito, substituindo $y(x) = s(x)u(x)$ em (2.2.2), obtemos

$$u'' + \lambda u + \frac{2Ks' + Ms}{Ks}u' = 0,$$

onde

$$\lambda = \frac{Ks'' + Ms' + Ns}{Ks}.$$

Mas, (2.2.1) implica em $2Ks' + Ms = 0$. Calculando diretamente, segue que

$$s(x) = \exp\left(-\int \frac{M}{2K} dx\right)$$

e

$$\lambda(x) = -\frac{d}{dx} \left(\frac{M}{2K} \right) - \left(\frac{M}{2K} \right)^2 + \frac{N}{K}.$$

Se introduzirmos em (2.2.2) uma nova variável independente definida por $x = \sigma(\theta)$, obtemos

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dx} \sigma'(\theta)$$

equivalente a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \frac{1}{\sigma'(\theta)}$$

e

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = \frac{dy}{dx} \frac{\sigma''(\theta)}{\sigma'(\theta)} + \frac{d^2y}{dx^2} [\sigma'(\theta)]^2$$

equivalente a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{[\sigma'(\theta)]^2} \left(\frac{d^2y}{d\theta^2} - \frac{\sigma''(\theta)}{\sigma'(\theta)} \frac{dy}{d\theta} \right).$$

Substituindo na equação (2.2.2), segue que

$$K \frac{1}{[\sigma'(\theta)]^2} \left(\frac{d^2y}{d\theta^2} - \frac{\sigma''(\theta)}{\sigma'(\theta)} \frac{dy}{d\theta} \right) + M \frac{1}{\sigma'(\theta)} \frac{dy}{d\theta} + Ny = 0$$

e, simplificando, chegamos a

$$K\sigma'(\theta) \frac{d^2y}{d\theta^2} + [M[\sigma'(\theta)]^2 - K\sigma''(\theta)] \frac{dy}{d\theta} + N[\sigma'(\theta)]^3 y = 0. \quad (2.2.3)$$

Aplicando o raciocínio anterior, escrevemos $y = s^*u$, onde s^* pode ser determinada de tal forma que u satisfaça

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \lambda^* u = 0. \quad (2.2.4)$$

Logo

$$\frac{dy}{d\theta} = s^* \frac{du}{d\theta} + \frac{ds^*}{d\theta} u \quad \text{e} \quad \frac{d^2y}{d\theta^2} = s^* \frac{d^2u}{d\theta^2} + 2 \frac{ds^*}{d\theta} \frac{du}{d\theta} + u \frac{d^2s^*}{d\theta^2}.$$

Então, (2.2.3) se reduz a

$$K\sigma'(\theta) \left[s^* \frac{d^2u}{d\theta^2} + 2 \frac{ds^*}{d\theta} \frac{du}{d\theta} + u \frac{d^2s^*}{d\theta^2} \right] + \left[s^* \frac{du}{d\theta} + \frac{ds^*}{d\theta} u \right] [M[\sigma'(\theta)]^2 - K\sigma''(\theta)] + N[\sigma'(\theta)]^3 y = 0,$$

ou seja,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \lambda^* u + \frac{1}{K\sigma'(\theta)s^*} \left\{ 2K\sigma'(\theta) \frac{ds^*}{d\theta} + [M[\sigma'(\theta)]^2 - K\sigma''(\theta)] s^* \right\} \frac{du}{d\theta} = 0, \quad (2.2.5)$$

onde

$$\lambda^* = \frac{1}{s^*} \frac{d^2s^*}{d\theta^2} + \frac{[M[\sigma'(\theta)]^2 - K\sigma''(\theta)]}{K\sigma'(\theta)s^*} \frac{ds^*}{d\theta} + \frac{N[\sigma'(\theta)]^2}{K}. \quad (2.2.6)$$

De (2.2.4), segue que

$$2K\sigma'(\theta)\frac{ds^*}{d\theta} + [M[\sigma'(\theta)]^2 - K\sigma''(\theta)]s^* = 0$$

ou, equivalentemente,

$$-\frac{[M[\sigma'(\theta)]^2 - K\sigma''(\theta)]}{2K\sigma'(\theta)}d\theta = \frac{1}{s^*}ds^*.$$

Um cálculo direto nos leva a $s^* = s(\sigma')^{1/2}$. Por outro lado, como

$$\begin{aligned}\frac{ds^*}{d\theta} &= -\frac{[M[\sigma'(\theta)]^2 - K\sigma''(\theta)]}{2K\sigma'(\theta)}s^*, \\ \frac{d^2s^*}{d\theta^2} &= \left[\frac{M[\sigma'(\theta)]^2 - K\sigma''(\theta)}{2K\sigma'(\theta)}\right]^2 s^* - \frac{d}{d\theta}\left[\frac{M[\sigma'(\theta)]^2 - K\sigma''(\theta)}{2K\sigma'(\theta)}\right]s^*,\end{aligned}$$

então (2.2.6) pode ser escrito como

$$\lambda^* = -\frac{d}{d\theta}\left[\frac{M[\sigma'(\theta)]^2 - K\sigma''(\theta)}{2K\sigma'(\theta)}\right] - \left[\frac{M[\sigma'(\theta)]^2 - K\sigma''(\theta)}{2K\sigma'(\theta)}\right]^2 + \frac{N}{K}[\sigma'(\theta)]^2. \quad (2.2.7)$$

2.3 Interpretação Eletrostática e a Equação de Lamé

Consideremos o seguinte campo eletrostático. Suponhamos que cargas r_j positivas fixas sejam distribuídas uniformemente ao longo de retas perpendiculares ao eixo real pelos pontos a_j , $j = 0, 1, \dots, m$, em ordem decrescente. Além disso, sejam n cargas unitárias positivas móveis distribuídas uniformemente ao longo de retas perpendiculares ao eixo real pelos pontos $x_1, x_2, \dots, x_n$ pertencentes ao intervalo (a_0, a_m) . Do ponto de vista da eletrostática, isto significa que as cargas estão distribuídas ao longo de fios infinitos perpendiculares à reta real, como ilustra a figura a seguir.

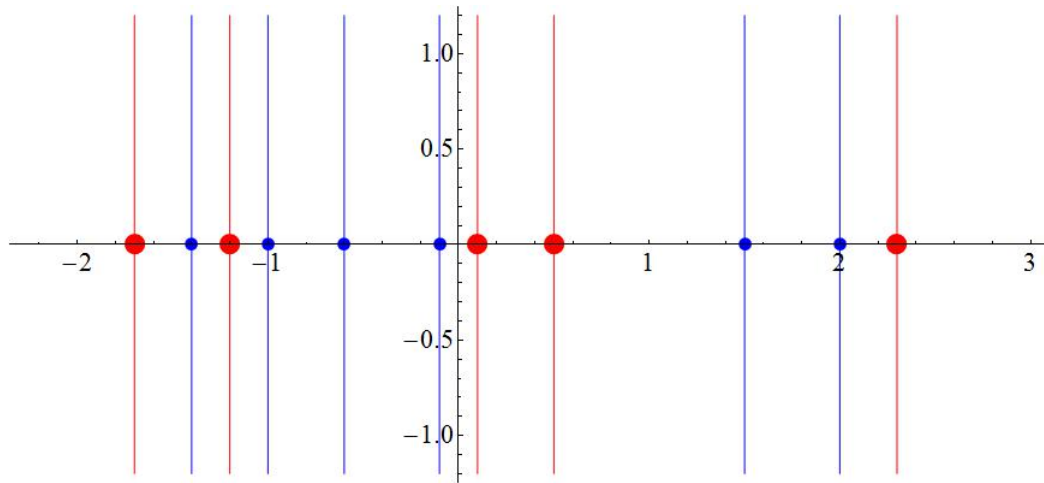


Figura 2.1: Ilustração de sistema de cargas. Linhas vermelhas simbolizam as cargas fixas e as azuis simbolizam as cargas livres. Neste caso, $m = 4$ e $n = 6$.

Queremos que as cargas livres se movam apenas entre cargas fixas positivas consecutivas. Portanto, se as cargas livres estão localizadas em $x_1, x_2, \dots, x_n$, a energia potencial logarítmica do campo é, pela definição, dada por

$$L(X) = \sum_{j=0}^m r_j \sum_{k=1}^n \log \frac{1}{|x_k - a_j|} + \sum_{1 \leq k < j \leq n} \log \frac{1}{|x_k - x_j|}. \quad (2.3.1)$$

Queremos encontrar ponto(s) $X = (x_1, \dots, x_n)$ cujas coordenadas são posições de equilíbrio de n cargas livres unitárias, ou, em outras palavras, onde a energia do campo atinge seu mínimo local. Uma exigência natural para a localização das cargas livres é que elas pertençam a algum simplex

$$\Xi := \bigcap_{k=1}^s \{a_{j_k} < x_{\mu_k} < \dots < x_{\mu_{k+1}-1} < a_{j_{k+1}} : r_{j_k}, r_{j_{k+1}} > 0\}, \quad (2.3.2)$$

onde $1 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_s \leq \mu_{s+1} - 1 = n$ e s é o número de intervalos $[a_{j_k}, a_{j_{k+1}}]$. Podemos interpretar o simplex (2.3.2) como sendo uma restrição do número, obviamente, tal número está entre 0 e n , de cargas livres em cada intervalo formado pelas cargas fixas.

Definamos

$$T(X) := e^{-L(X)} = \prod_{j=0}^m \prod_{k=1}^n |x_k - a_j|^{r_j} \prod_{1 \leq k < j \leq n} |x_k - x_j|. \quad (2.3.3)$$

Então, X é ponto de mínimo local(ou global) de $L(X)$ se, e somente se, é ponto de máximo local(ou global) de $T(X)$. Observemos que esse ponto localiza-se no interior do simplex Ξ e $\partial T(X)/\partial x_k = 0$ para $k = 1, \dots, n$. Mas,

$$\begin{aligned} T(X) &= \prod_{j=0}^m \left\{ |x_1 - a_j|^{r_j} |x_2 - a_j|^{r_j} |x_2 - x_1| |x_3 - a_j|^{r_j} |x_3 - x_1| |x_3 - x_2| \dots \right. \\ &\quad \left. \times |x_n - a_j|^{r_j} |x_n - x_1| |x_n - x_2| \dots |x_n - x_{n-1}| \right\} \\ &= \prod_{j=0}^m \left\{ |x_1 - a_j|^{r_j} |x_2 - a_j|^{r_j} |x_2 - x_1| \dots |x_{k-1} - a_j|^{r_j} |x_{k-1} - x_1| \dots \right. \\ &\quad \times |x_{k-1} - x_{k-2}| |x_{k+1} - a_j|^{r_j} |x_{k+1} - x_1| \dots |x_{k+1} - x_{k-1}| \dots |x_n - a_j|^{r_j} |x_n - x_1| \dots \\ &\quad \left. \times |x_n - x_{k-1}| |x_n - x_{k+1}| \dots |x_n - x_{n-1}| |x_k - a_j|^{r_j} \right\} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n |x_k - x_i|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$T(X) = \tau(\bar{x} \setminus x_k) |y_k(x_k)| \prod_{j=0}^m |x_k - a_j|^{r_j}, \quad (2.3.4)$$

onde $\tau(\bar{x} \setminus x_k)$ é uma função que não depende de x_k , $y(x) := \prod_{i=1}^n (x - x_i)$ e

$$y_k(x) := (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n).$$

Como $[y(x)]^{(l+1)} = [(x - x_k)y_k(x)]^{(l+1)}$, aplicando a regra de Leibnitz, obtemos

$$[y(x)]^{(l+1)} = (x - x_k)y_k^{(l+1)}(x) + (l+1)y_k^{(l)}(x).$$

Logo, para $x = x_k$, $(l+1)y_k^{(l)}(x_k) = y_k^{(l+1)}(x_k)$, para $l \geq 0$. Observe que o $\text{sign}(y_k(x_k)) = (-1)^{n-k}$. Logo, podemos escrever $|y_k(x_k)| = (-1)^{n-k}y_k(x_k)$. Portanto, (2.3.4) pode ser escrito como

$$T(X) = (-1)^{n-k}\tau(\bar{x} \setminus x_k)y_k(x_k) \prod_{j=0}^m |x_k - a_j|^{r_j}. \quad (2.3.5)$$

Derivando a equação acima com relação a x_k , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(X)}{\partial x_k} &= (-1)^{n-k}\tau(\bar{x} \setminus x_k) \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \omega_k(x_k) \prod_{j=0}^m |x_k - a_j|^{r_j} \right\} \\ &= (-1)^{n-k}\tau(\bar{x} \setminus x_k) \prod_{j=0}^m |x_k - a_j|^{r_j} \left\{ \frac{r_0 \omega_k(x_k)}{|x_k - a_0|} + \dots + \frac{r_m \omega_k(x_k)}{|x_k - a_m|} + \omega'_k(x_k) \right\} \\ &= (-1)^{n-k}\tau(\bar{x} \setminus x_k) \prod_{j=0}^m |x_k - a_j|^{r_j} \left\{ \left[\sum_{j=0}^m \frac{r_j}{|x_k - a_j|} \right] \omega_k(x_k) + \omega'_k(x_k) \right\} \\ &= (-1)^{n-k}\tau(\bar{x} \setminus x_k) \prod_{j=0}^m |x_k - a_j|^{r_j} \left\{ \frac{B(x_k)}{A(x_k)} \omega_k(x_k) + \omega'_k(x_k) \right\} \\ &= (-1)^{n-k}\tau(\bar{x} \setminus x_k) \prod_{j=0}^m |x_k - a_j|^{r_j} \left\{ \frac{B(x_k)}{A(x_k)} + \frac{\omega'_k(x_k)}{\omega_k(x_k)} \right\} \omega_k(x_k), \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

para $k = 1, 2, \dots, n$, onde $A(x) = (x - a_0) \dots (x - a_m)$, $B(x)$ polinômio de grau m e

$$\frac{B(x)}{A(x)} = \sum_{j=0}^m \frac{r_j}{x - a_j}. \quad (2.3.7)$$

De (2.3.6), concluímos que

$$\frac{\partial T(X)}{\partial x_k} = (-1)^{n-k}\tau(\bar{x} \setminus x_k)y_k(x_k) \prod_{j=0}^m |x_k - a_j|^{r_j} \left\{ \frac{B(x_k)}{A(x_k)} + \frac{1}{2} \frac{y''(x_k)}{y'(x_k)} \right\}. \quad (2.3.8)$$

O máximo de $T(X)$ é atingido quando $\partial T(x)/\partial x_k = 0$, ou seja, onde

$$A(x_k)y''(x_k) + 2B(x_k)y'(x_k) = 0,$$

por (2.3.8). Como $A(x)$ é de grau $m+1$, $B(x)$ é de grau m e $y(x)$ é de grau n , a expressão $A(x)y''(x) + 2B(x)y'(x)$ é um polinômio de grau $m+n-1$. No ponto de máximo de $T(x)$ este

último polinômio anula-se nos zeros de $y(x)$. Então, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, existe um polinômio $C(x)$ de grau $m - 1$ tal que

$$A(x)y''(x) + 2B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0. \quad (2.3.9)$$

A equação (2.3.9) é chamada equação diferencial de Lamé na forma algébrica, $C(x)$ é o polinômio de Van Vleck e $y(x)$ é o polinômio de Stieltjes. Mostramos, então, o seguinte resultado.

Lema 2.3.1. Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida em (2.3.3). Então, $\partial T(X)/\partial x_k = 0$, $k = 1, \dots, n$, se, e somente se, as coordenadas do vetor X são os zeros do polinômio de grau n , $y(x)$, que é solução da equação de Lamé (2.3.9).

Teorema 2.3.2 (Stieltjes, [31]). Sejam $A(x)$ e $B(x)$ polinômios de graus $m + 1$ e m , respectivamente. Se $A(x)$ e $B(x)$ satisfazem (2.3.7), então existem

$$\sigma_n := \binom{n + m - 1}{n}$$

polinômios $C(x)$ de grau $m - 1$ tais que a equação diferencial (2.3.9) possui solução polinomial de grau n .

Teorema 2.3.3 (Szegő, [34]). Se a energia do campo eletrostático em questão tem um único ponto de mínimo em (2.3.2), então existe um único par $(C(x), y(x))$, com $C(x)$ um polinômio de Van Vleck e $y(x)$ um polinômio de Stieltjes, para a equação de Lamé (2.3.9). Reciprocamente, se existe um único par $(C(x), y(x))$ de polinômios de Van Vleck e Stieltjes para (2.3.9), tal que os zeros do polinômio de Stieltjes pertençam a (2.3.2), então a energia do campo descrito tem um único ponto de mínimo.

Do ponto de vista da eletrostática, o Teorema de Stieltjes 2.3.2 e o Teorema de Szegő 2.3.3 garantem a existência de σ_n restrições (ou escolhas de simplex) de posições de n cargas livres para as quais a energia potencial logarítmica do sistema de cargas atinge mínima. Além disso, a cada restrição, existe um único vetor X cujas coordenadas são posições de n cargas livres.

O problema de interpretação eletrostática que envolve, ao mesmo tempo, cargas fixas negativas e positivas é interessante de se investigar. Em particular, estabelecer a unicidade do polinômio de Van Vleck.

D. K. Dimitrov e W. V. Assche foram os pioneiros a demonstrar a unicidade dos polinômios de Van Vleck no caso que envolve, ao mesmo tempo, coeficientes r_j negativos e positivos, o que implica a existência e unicidade da solução $y(x)$ da equação diferencial (2.3.9), o polinômio de Stieltjes. Lembremos que r_j é o valor da carga fixa no ponto a_j . Este resultado equivale à existência e unicidade do ponto de mínimo da energia na presença de cargas fixas negativas e positivas simultaneamente.

Teorema 2.3.4 (W. V. Assche e D. K. Dimitrov, [9]). Sejam $A(x) = \prod_{j=0}^3 (x - a_j)$, $a_0 < a_1 < a_2 < a_3$, e $B(x)$ um polinômio cúbico para o qual os coeficientes r_{j-1} e r_j , na decomposição em frações parciais (2.3.7), são positivos e os dois coeficientes restantes são negativos. Se

- a sequência r_0, r_1, r_2, r_3 admite duas mudanças de sinal, com $n > 1 - (r_0 + r_1 + r_2 + r_3)$

ou

- a sequência r_0, r_1, r_2, r_3 admite somente uma mudança de sinal, isto é, se $j = 1$ ou $j = 3$,

então existe um único par $(C(x), y(x))$, com $C(x)$ um polinômio de grau dois e $y(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ uma solução de (2.3.9) tal que $a_{j-1} < x_1 < \dots < x_n < a_j$.

O Lema a seguir está num trabalho conjunto com seu orientador. Estabelecemos a unicidade do par $(C(x), y(x))$ de uma nova restrição(distribuição) dos zeros de $y(x)$ entre as cargas fixas ou os zeros de $A(x)$, permitindo a uma carga livre situar-se fora do intervalo (a_0, a_m) .

Lema 2.3.5 (D. K. Dimitrov e Yen Chi Lun). Sejam $A(x) = (x - a_0)(x - a_1)(x - a_2)$, $a_0 < a_1 < a_2$, um polinômio de grau três e $B(x)$ um polinômio de grau dois para os quais os coeficientes r_{j-1} e r_j na decomposição em funções parciais

$$\frac{B(x)}{A(x)} = \sum_{j=0}^2 \frac{r_j}{x - a_j}$$

são positivos e o restante negativo. Então, existe um único par $(C(x), y(x))$, com $C(x)$ um polinômio de grau um e $y(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$ uma solução de

$$A(x)y'' + 2B(x)y' + C(x)y = 0 \quad (2.3.10)$$

tal que $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in (a_0, a_1)$ (ou (a_1, a_2)) e $x_n \in (a_2, \infty)$ (ou $(-\infty, a_0)$).

Demonstração. A demonstração deste teorema é semelhante à do teorema em §6.83 de [34].

Sabemos da existência do polinômio $C(x)$ no decorrer desta Seção. A mesma conclusão, da existência do polinômio $C(x)$, é válida com r_j negativo para algum j . Estabeleceremos, agora, a unicidade. Sem perda de generalidade, consideremos o caso $a_{j-1} = a_0$ e $a_j = a_1$. Suponhamos $D(x)$ um polinômio de grau um e $D(x) \neq C(x)$ tal que a equação diferencial (2.3.10) admita uma outra solução $z(x)$ com zeros $\xi_1, \dots, \xi_{n-1} \in (a_0, a_1)$ e $\xi_n \in (a_2, \infty)$ distintos. Pelo argumento de Szegő em §6.83 de [34], temos

$$\frac{d}{dx} \left\{ H(x) [y'(x)z(x) - y(x)z'(x)] \right\} = H(x) \frac{D(x) - C(x)}{A(x)} y(x)z(x), \quad (2.3.11)$$

onde

$$H(x) = \prod_{j=0}^2 |x - a_j|^{2r_j}.$$

Para verificar (2.3.11), basta desenvolver a derivada do lado esquerdo da identidade e utilizar o fato de que $y(x)$ e $z(x)$ satisfazem equações diferenciais de Lamé com correspondentes polinômios de Van Vleck $C(x)$ e $D(x)$. Seguindo o mesmo argumento usado em §6.83 de [34], temos:

- se $[D(x) - C(x)]/A(x) > 0$ em (x_{j-1}, x_j) , então $z(x)$ muda de sinal em (x_{j-1}, x_j) , $j = 2, \dots, n-1$;
- se $[D(x) - C(x)]/A(x) < 0$ em (ξ_{j-1}, ξ_j) , então $y(x)$ muda de sinal em (ξ_{j-1}, ξ_j) , $j = 2, \dots, n-1$.

Demonstraremos apenas o primeiro caso, pois a prova do segundo é semelhante.

É evidente que $y(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ não muda de sinal em (x_i, x_{i+1}) . Suponhamos que $z(x)$ não mude de sinal em (x_i, x_{i+1}) e, então, de (2.3.11),

$$\frac{d}{dx} \left\{ H(x)[y'(x)z(x) - y(x)z'(x)] \right\}$$

também não mude de sinal em (x_i, x_{i+1}) .

Consideremos os pontos $\tilde{x} = x_i + \epsilon$ e $\hat{x} = x_{i+1} - \epsilon$, $\epsilon > 0$.

1) Se $y(x)z(x) > 0$, então $H(x)[y'(x)z(x) - y(x)z'(x)]$ é crescente. Assim,

- se $y(x) > 0 \Rightarrow z(x) > 0 \Rightarrow y'(\tilde{x})z(\tilde{x}) > 0$ e $y'(\hat{x})z(\hat{x}) < 0$;
- se $y(x) < 0 \Rightarrow z(x) < 0 \Rightarrow y'(\tilde{x})z(\tilde{x}) > 0$ e $y'(\hat{x})z(\hat{x}) < 0$.

2) Se $y(x)z(x) < 0$, então $H(x)[y'(x)z(x) - y(x)z'(x)]$ é decrescente. Logo,

- se $y(x) > 0 \Rightarrow z(x) < 0 \Rightarrow y'(\tilde{x})z(\tilde{x}) < 0$ e $y'(\hat{x})z(\hat{x}) > 0$;
- se $y(x) < 0 \Rightarrow z(x) > 0 \Rightarrow y'(\tilde{x})z(\tilde{x}) < 0$ e $y'(\hat{x})z(\hat{x}) > 0$.

Portanto, $\text{sign}(yz) = \text{sign}(y'z)$ em $\tilde{x}$ e $\text{sign}(yz) = -\text{sign}(y'z)$ em $\hat{x}$.

Observemos que $\text{sign}(H(y'z - yz')) = \text{sign}(y'z)$ em $\tilde{x}$ e em $\hat{x}$, isto é,

- se $y(x)z(x) > 0$, então $\text{sign}(H(y'z - yz')) > 0$ em $\tilde{x}$ e $\text{sign}(H(y'z - yz')) < 0$ em $\hat{x}$;
- se $y(x)z(x) < 0$, então $\text{sign}(H(y'z - yz')) < 0$ em $\tilde{x}$ e $\text{sign}(H(y'z - yz')) > 0$ em $\hat{x}$.

Logo, das duas observações acima, $H(x)[y'(x)z(x) - y(x)z'(x)]$ muda de sinal em (x_i, x_{i+1}) da seguinte forma:

- se $y(x)z(x) > 0$, $H(\tilde{x})[y'(\tilde{x})z(\tilde{x}) - y(\tilde{x})z'(\tilde{x})] > 0$ e $H(\hat{x})[y'(\hat{x})z(\hat{x}) - y(\hat{x})z'(\hat{x})] < 0$.
Então, $H(x)[y'(x)z(x) - y(x)z'(x)]$ não pode ser crescente, o que é uma contradição por 1);
- se $y(x)z(x) < 0$, $H(\tilde{x})[y'(\tilde{x})z(\tilde{x}) - y(\tilde{x})z'(\tilde{x})] < 0$ e $H(\hat{x})[y'(\hat{x})z(\hat{x}) - y(\hat{x})z'(\hat{x})] > 0$.
Logo, $H(x)[y'(x)z(x) - y(x)z'(x)]$ não pode ser decrescente. Por 2), chegamos novamente a uma contradição.

Portanto, $y(x)z(x)$ deve mudar de sinal pelo menos uma vez em (x_i, x_{i+1}) . Concluimos, então, que $z(x)$ tem pelo menos uma raiz em (x_i, x_{i+1}) .

Consideremos o caso em que $[D(x) - C(x)]/A(x) > 0$ em (a_0, a_1) . Sejam x_1 e x_{n-1} o primeiro e penúltimo zeros de $y(x)$ em (a_0, a_1) , respectivamente. Mostremos, agora, que $z(x)$ deve mudar de sinal também em (a_0, x_1) e (x_{n-1}, a_1) . Suponhamos que $z(x)$ não mude de sinal nesses dois

intervalos. Então, $z(x)$ e $y(x)$ devem ter sinais constantes neles. Como os polinômios, ambos têm coeficientes dominantes positivos e possuem um único zero maior que a_2 , então eles têm mesmo sinal nesses dois intervalos. Por outro lado, observemos que

$$\lim_{x \rightarrow a_0^+} H(x)[y'(x)z(x) - y(x)z'(x)] = 0 = \lim_{x \rightarrow a_1^-} H(x)[y'(x)z(x) - y(x)z'(x)].$$

Então, $H(x)[y'(x)z(x) - y(x)z'(x)]$ é positivo em (a_0, x_1) e negativo em (x_{n-1}, a_1) . Mas, observemos que existe $\epsilon > 0$ tal que, para $\hat{x} := x_1 - \epsilon$ e $\tilde{x} := x_{n-1} + \epsilon$,

$$\text{sign}\left(H(\hat{x})[y'(\hat{x})z(\hat{x}) - y(\hat{x})z'(\hat{x})]\right) = \text{sign}(H(\hat{x})y'(\hat{x})z(\hat{x})) = \text{sign}(y'(\hat{x})y(\hat{x})) < 0$$

e

$$\text{sign}\left(H(\tilde{x})[y'(\tilde{x})z(\tilde{x}) - y(\tilde{x})z'(\tilde{x})]\right) = \text{sign}(H(\tilde{x})y'(\tilde{x})z(\tilde{x})) = \text{sign}(y'(\tilde{x})y(\tilde{x})) > 0,$$

o que é uma contradição.

Logo, $z(x)$ muda de sinal em (a_0, x_1) e (x_{n-1}, a_1) , ou seja, $z(x)$ possui n zeros no intervalo (a_0, a_1) . Além disso, $z(x)$ possui um zero maior que a_2 , então $z(x)$ possui $n+1$ zeros, contradizendo a suposição inicial.

Usando o mesmo raciocínio e supondo $[D(x) - C(x)]/A(x) < 0$, chegaremos à mesma contradição de que $y(x)$ é de grau $n+1$. Logo $C(x) - D(x)$ deve mudar de sinal em (a_0, a_1) . Mas, observemos que os coeficientes dominantes de $D(x)$ e $C(x)$ são iguais. De fato, tomemos $y(x)$ e $z(x)$ polinômios mônicos. Comparando os coeficientes de $C(x)$ e $D(x)$ através da equação diferencial de Lamé, segue-se a afirmação. Então, $D(x) - C(x) = cte$. Portanto, juntando esses dois argumentos, concluímos que $C(x) \equiv D(x)$.

□

Capítulo 3

Polinômios Ortogonais

“Deixei de gostar da matemática depois
que $\times$ deixou de ser sinal de
multiplicação.”

William Shakespeare

Um polinômio algébrico de grau n é uma função da forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

com $a_0, a_1, \dots, a_n$ números reais. Por Π_n denotaremos o espaço vetorial dos polinômios algébricos de grau no máximo n , isto é,

$$\Pi_n := \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Dizemos que um polinômio p é de grau exatamente n se $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ e $a_n \neq 0$. Denotaremos o espaço vetorial de todos os polinômios algébricos por Π , ou seja,

$$\Pi := \bigcup_{k=0}^{\infty} \Pi_k.$$

Seja ϕ uma função não-decrescente, não-constante e limitada em um intervalo (a, b) , finito ou não, que define uma distribuição $d\phi$ em (a, b) . Definamos o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\phi : \Pi \times \Pi \mapsto \mathbb{R}$ por

$$\langle p, q \rangle_\phi = \int_a^b p(x) q(x) d\phi(x), \quad p, q \in \Pi \quad (3.0.1)$$

e a correspondente norma $\|\cdot\|_\phi : \Pi \mapsto [0, \infty)$ por

$$\|p\|_\phi = \sqrt{\int_a^b |p(x)|^2 d\phi(x)}, \quad p \in \Pi. \quad (3.0.2)$$

Se a função ϕ for diferenciável, então temos um caso particular de distribuição tal que $d\phi(x) = w(x)dx$ e $w(x) \geq 0$ em (a, b) não identicamente nula. A função $w(x)$ é chamada função peso.

Consideraremos, daqui por diante, apenas o caso em que $d\phi(x) = w(x)dx$.

Definição 3.0.6. Dado um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em Π , uma sequência de polinômios ortogonais é uma sequência de polinômios $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\dots$ com cada polinômio $P_n(x)$ de grau exatamente n , que satisfaz

$$\langle P_n, P_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \rho_n > 0, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Inicialmente, podemos obter uma sequência de polinômios ortogonais através do conhecido método de ortogonalização de Gram–Schmidt.

3.1 Propriedades dos Polinômios Ortogonais

Teorema 3.1.1. Toda subsequência $P_{i_1}(x), P_{i_2}(x) \dots$ de uma sequência de polinômios ortogonais $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ forma um conjunto de funções linearmente independentes.

Demonstração. Suponhamos o contrário. Então, existe uma subsequência $P_{i_1}(x), P_{i_2}(x), \dots, P_{i_m}(x)$ e coeficientes $a_1, a_2, \dots, a_m$, com pelo menos um deles diferente de zero, tais que o polinômio

$$p(x) = a_1 P_{i_1}(x) + a_2 P_{i_2}(x) + \dots + a_m P_{i_m}(x)$$

é identicamente nulo. Logo,

$$\langle p(x), P_j(x) \rangle = 0 \quad \text{para todo } j. \quad (3.1.1)$$

Por outro lado, seja k , $1 \leq k \leq m$, tal que a_k é diferente de zero. Então,

$$\langle p(x), P_{i_k}(x) \rangle = \sum_{j=1}^m a_j \langle P_{i_j}(x), P_{i_k}(x) \rangle = a_k \langle P_{i_k}(x), P_{i_k}(x) \rangle. \quad (3.1.2)$$

Como $\langle P_{i_k}(x), P_{i_k}(x) \rangle \neq 0$, temos uma contradição com (3.1.1) e (3.1.2). Portanto, a afirmação está provada. $\square$

Corolário 3.1.2. Se o polinômio $p(x)$ é de grau menor que m ou igual a m , então p pode ser unicamente representado por

$$p(x) = a_0 P_0(x) + \dots + a_m P_m(x)$$

com coeficientes reais $a_0, \dots, a_m$ dados por

$$a_k = \frac{\langle p(x), P_k(x) \rangle}{\langle P_k(x), P_k(x) \rangle}, \quad k = 0, \dots, m.$$

Demonstração. Isto é uma consequência simples do Teorema 3.1.1. Como Π_m é um espaço linear de dimensão $m+1$ e $\{P_0, \dots, P_m\}$ é um conjunto de $m+1$ elementos linearmente independentes de Π_m , eles formam uma base de Π_m . Então, cada elemento de Π_m pode ser unicamente representado como combinação linear deles.

É fácil obter as expressões explícitas para a_k , $k = 0, \dots, m$. De fato, temos

$$\begin{aligned}\langle p(x), P_k(x) \rangle &= a_0 \langle P_0(x), P_k(x) \rangle + \dots + a_k \langle P_k(x), P_k(x) \rangle + \dots + a_m \langle P_m(x), P_k(x) \rangle \\ &= a_k \langle P_k(x), P_k(x) \rangle.\end{aligned}$$

Portanto, pela definição de polinômios ortogonais,

$$a_k = \frac{\langle p(x), P_k(x) \rangle}{\langle P_k(x), P_k(x) \rangle}.$$

□

Teorema 3.1.3. Seja um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em Π . São equivalentes as seguintes afirmações:

- (a) $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios ortogonais com respeito a $\langle \cdot, \cdot \rangle$;
- (b) $\langle p(x), P_m(x) \rangle = 0$ para todo polinômio $p(x)$ de grau menor que m e $\langle p(x), P_m(x) \rangle \neq 0$ para todo polinômio $p(x)$ de grau exatamente m ;
- (c) $\langle x^m, P_l(x) \rangle = 0$ para $m < l$ e $\langle x^l, P_l(x) \rangle \neq 0$.

Demonstração. Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais com respeito a $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se $p(x)$ é um polinômio de grau l , então existem constantes $c_{l,k}$ tais que

$$p(x) = \sum_{k=0}^l c_{l,k} P_k(x), \quad c_{l,l} \neq 0.$$

Pela linearidade do produto interno,

$$\langle p(x), P_m(x) \rangle = \sum_{k=0}^l c_{l,k} \langle P_k(x), P_m(x) \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } l < m, \\ c_{m,m} \langle P_m(x), P_m(x) \rangle \neq 0, & \text{se } m = l. \end{cases}$$

Deste modo $(a) \Rightarrow (b)$. Claramente $(b) \Rightarrow (c)$ e também é fácil observar que $(c) \Rightarrow (a)$. □

Teorema 3.1.4. A condição necessária e suficiente para a existência de uma sequência de polinômios ortogonais associada ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, x \rangle & \langle 1, x^2 \rangle & \dots & \langle 1, x^n \rangle \\ \langle x, 1 \rangle & \langle x, x \rangle & \langle x, x^2 \rangle & \dots & \langle x, x^n \rangle \\ \langle x^2, 1 \rangle & \langle x^2, x \rangle & \langle x^2, x^2 \rangle & \dots & \langle x^2, x^n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x^n, 1 \rangle & \langle x^n, x \rangle & \langle x^n, x^2 \rangle & \dots & \langle x^n, x^n \rangle \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3.1.3)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$. Além disso, cada sequência de polinômios ortogonais é unicamente determinada pela escolha dos valores $K_n = \langle x^n, P_n(x) \rangle \neq 0$. Ainda, se duas sequências de polinômios, $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ e $\{Q_n(x)\}_{n=0}^\infty$, são ortogonais com relação ao mesmo produto interno, então, para cada $n \geq 0$, existe uma constante c_n tal que $Q_n(x) = c_n P_n(x)$.

Demonstração. Para n número inteiro positivo escrevemos

$$P_n(x) = a_{n,0} + a_{n,1}x + \dots + a_{n,n-1}x^{n-1} + a_{n,n}x^n.$$

Supondo $\Delta_n \neq 0$, vamos determinar os valores $a_{k,n}$ de modo que $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ seja uma sequência de polinômios ortogonais. Temos

$$\langle x^m, P_n(x) \rangle = \sum_{k=0}^n a_{n,k} \langle x^m, x^k \rangle. \quad (3.1.4)$$

Fazendo $m = 0, 1, \dots, n$ na igualdade acima e usando a condição (c) do Teorema 3.1.3 temos $n+1$ condições para a existência da sequência de polinômios ortogonais, que escrevemos da forma matricial

$$\begin{pmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, x \rangle & \langle 1, x^2 \rangle & \dots & \langle 1, x^n \rangle \\ \langle x, 1 \rangle & \langle x, x \rangle & \langle x, x^2 \rangle & \dots & \langle x, x^n \rangle \\ \langle x^2, 1 \rangle & \langle x^2, x \rangle & \langle x^2, x^2 \rangle & \dots & \langle x^2, x^n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x^n, 1 \rangle & \langle x^n, x \rangle & \langle x^n, x^2 \rangle & \dots & \langle x^n, x^n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{0,n} \\ a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \langle x^n, P_n(x) \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.1.5)$$

Como $\Delta_n \neq 0$, para cada escolha do valor $\langle x^n, P_n(x) \rangle \neq 0$ ficam determinados os coeficientes $a_{k,n}$ de tal forma que o sistema acima é satisfeito. Olhando para (3.1.4), esses coeficientes implicam que

$$\langle x^m, P_n(x) \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n, \\ \text{valor escolhido}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Portanto, $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios ortogonais.

Agora, seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais com $\langle x^n, P_n(x) \rangle = K_n$. Pela ortogonalidade de $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ e (3.1.4), $(a_{n,0}, \dots, a_{n,n})^T$ é solução de (3.1.5). Seja $(b_{n,0}, \dots, b_{n,n})^T$ outra solução para (3.1.5). Escrevendo

$$Q_n(x) = b_{n,0} + b_{n,1}x + \dots + b_{n,n-1}x^{n-1} + b_{n,n}x^n,$$

obtemos

$$\langle x^m, Q_n(x) \rangle = \sum_{k=0}^n b_{n,k} \langle x^m, x^k \rangle.$$

Como $(b_{n,0}, b_{n,1}, \dots, b_{n,n})^T$ é solução para o sistema (3.1.5), então

$$\langle x^m, Q_n(x) \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n, \\ \langle x^n, P_n(x) \rangle = K_n, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Logo, $\{Q_n(x)\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ com $\langle x^n, Q_n(x) \rangle = K_n$.

Podemos escrever

$$Q_n(x) = c_{n,0}P_0(x) + c_{n,1}P_1(x) + \dots + c_{n,n-1}P_{n-1}(x) + c_{n,n}P_n(x)$$

e, pela ortogonalidade de $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ e $\{Q_n(x)\}_{n=0}^\infty$, obtemos

$$0 = \langle P_m(x), Q_n(x) \rangle = c_{n,m} \langle P_m(x), P_m(x) \rangle, m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Portanto, $c_{n,m} = 0$ para $m = 0, 1, \dots, n-1$. Assim, $Q_n(x) = c_{n,n}P_n(x)$. Mas

$$\langle x^n, Q_n(x) \rangle = c_{n,n} \langle x^n, P_n(x) \rangle.$$

Logo, $c_{n,n} = 1$, pois $\langle x^n, Q_n(x) \rangle = \langle x^n, P_n(x) \rangle = K_n$. Concluimos, então, que $Q_n \equiv P_n$ para todo n . Deste modo a solução do sistema (3.1.5) é única e, portanto, $\Delta_n \neq 0$.

Por fim, sejam $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ e $\{Q_n(x)\}_{n=0}^\infty$ sequências de polinômios ortogonais com relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ com $\langle x^n, Q_n(x) \rangle \neq \langle x^n, P_n(x) \rangle$. Escrevemos $Q_n(x)$ como $Q_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{n,k}P_k(x)$. Para $m < n$ e pela ortogonalidade de ambas as sequências, temos

$$0 = \langle Q_m(x), Q_n(x) \rangle = c_{n,m} \langle Q_m(x), P_m(x) \rangle.$$

Logo, $c_{n,m} = 0$ para $m < n$, pois $\langle Q_m(x), P_m(x) \rangle \neq 0$. Portanto, $Q_n(x) = c_{n,n}P_n(x)$. O valor de $c_{n,n}$ é dado por

$$\langle Q_n(x), Q_n(x) \rangle = c_{n,n} \langle Q_n(x), P_n(x) \rangle \Leftrightarrow c_{n,n} = \frac{\langle Q_n(x), Q_n(x) \rangle}{\langle Q_n(x), P_n(x) \rangle}.$$

□

Definição 3.1.5. A sequência de polinômios $\{P_n^*(x)\}_{n=0}^\infty$ é chamada sequência de polinômios ortonormais se

$$\langle P_l^*(x), P_m^*(x) \rangle = \delta_{l,m}, \quad l, m = 0, 1, \dots$$

sendo $\delta_{l,m}$ o delta de Kronecker que é definido por

$$\delta_{l,m} = \begin{cases} 0 & \text{se } l \neq m, \\ 1 & \text{se } l = m. \end{cases}$$

Observemos que, dada uma sequência de polinômios ortogonais $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ relativamente a uma medida $\phi(x)$, podemos construir uma sequência de polinômios ortonormais $\{P_n^*(x)\}_{n=0}^\infty$ definindo $P_n^*(x) := P_n(x)/\|P_n(x)\|_\phi$ para todo $n \in \mathbb{N}$. É evidente que $P_n^*(x)$ e $P_n(x)$ possuem os mesmos zeros.

Uma importante característica dos polinômios ortogonais é que quaisquer três polinômios consecutivos estão conectados através de uma simples relação que recebe o nome de relação de recorrência de três termos.

Teorema 3.1.6. Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais em (a, b) relativamente à função peso $\omega(x)$. Então

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (3.1.6)$$

com condições iniciais $P_{-1}(x) := 0$, $P_0(x) = 1$, $\alpha_{n+1}, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, e

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}. \quad (3.1.7)$$

Demonstração. Seja $P_n(x) = a_{n,n}x^n + \dots + a_{n,1}x + a_{n,0}$. Como $xP_n(x)$ é um polinômio de grau $n+1$, então podemos escrever

$$xP_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i P_i(x).$$

Igualando os coeficientes dos termos de maior grau em ambos os membros da igualdade acima, temos $a_{n,n} = b_{n+1}a_{n+1,n+1}$. Então,

$$b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}.$$

Porém, das relações de ortogonalidade,

$$\langle xP_n, P_j \rangle = \int_a^b P_n(x)xP_j(x)\omega(x)dx = 0, \quad j \leq n-2.$$

Assim,

$$\langle xP_n, P_j \rangle = \sum_{i=0}^{n+1} b_i \langle P_i, P_j \rangle = b_j \langle P_j, P_j \rangle = 0, \quad j \leq n-2.$$

Logo, $b_j = 0$ se $j \leq n-2$ e temos a expressão

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{b_{n+1}}xP_n(x) - \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}P_{n-1}(x) - \frac{b_n}{b_{n+1}}P_n(x),$$

com

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}}, \quad \beta_{n+1} = \frac{b_n}{b_{n+1}}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}.$$

Calculemos agora os valores de γ_{n+1} , β_{n+1} e α_{n+1} . Como $b_{n+1} = a_{n,n}/a_{n+1,n+1}$, temos $\gamma_{n+1} = a_{n+1,n+1}/a_{n,n}$. De

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x),$$

obtemos

$$0 = \langle P_{n+1}, P_n \rangle = \gamma_{n+1} \langle xP_n, P_n \rangle - \beta_{n+1} \langle P_n, P_n \rangle - \alpha_{n+1} \langle P_{n-1}, P_n \rangle.$$

Então,

$$\beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}.$$

Analogamente,

$$0 = \langle P_{n+1}, P_{n-1} \rangle = \gamma_{n+1} \langle xP_n, P_{n-1} \rangle - \beta_{n+1} \langle P_n, P_{n-1} \rangle - \alpha_{n+1} \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle.$$

Logo,

$$\alpha_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}.$$

Mas, como

$$P_n(x) = (\gamma_n x - \beta_n) P_{n-1}(x) - \alpha_n P_{n-2}(x),$$

obtemos

$$xP_{n-1}(x) = \frac{1}{\gamma_n} P_n(x) + \frac{\beta_n}{\gamma_n} P_{n-1}(x) + \frac{\alpha_n}{\gamma_n} P_{n-2}(x).$$

Por outro lado, temos

$$\langle xP_n, P_{n-1} \rangle = \int_a^b xP_n(x)P_{n-1}(x)\omega(x)dx = \langle P_n, xP_{n-1} \rangle.$$

Então,

$$\langle P_n, xP_{n-1} \rangle = \frac{1}{\gamma_n} \langle P_n, P_n \rangle + \frac{\beta_n}{\gamma_n} \langle P_n, P_{n-1} \rangle + \frac{\alpha_n}{\gamma_n} \langle P_n, P_{n-2} \rangle = \frac{1}{\gamma_n} \langle P_n, P_n \rangle.$$

Portanto,

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}.$$

□

Teorema 3.1.7. Seja $\{P_n^*(x)\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortonormais. Então, eles satisfazem à seguinte identidade

$$\sum_{k=0}^n P_k^*(x)P_k^*(y) = \frac{1}{\gamma_{n+1}^*} \frac{P_{n+1}^*(x)P_n^*(y) - P_n^*(x)P_{n+1}^*(y)}{x - y}. \quad (3.1.8)$$

A equação (3.1.8) é conhecida como Identidade de Christoffel-Darboux.

Demonstração. Da relação de recorrência de três termos, temos

$$\begin{aligned} P_{n+1}^*(x)P_n^*(y) - P_n^*(x)P_{n+1}^*(y) &= \left[(\gamma_{n+1}^*x - \beta_{n+1}^*)P_n^*(x) - \alpha_{n+1}^*P_{n-1}^*(x) \right] P_n^*(y) \\ &\quad - P_n^*(x) \left[(\gamma_{n+1}^*y - \beta_{n+1}^*)P_n^*(y) - \alpha_{n+1}^*P_{n-1}^*(y) \right] \\ &= (x - y)\gamma_{n+1}^*P_n^*(x)P_n^*(y) + \alpha_{n+1}^* \left[P_n^*(x)P_{n-1}^*(y) - P_{n-1}^*(x)P_n^*(y) \right]. \end{aligned}$$

Mas,

$$\alpha_{n+1}^* = \frac{\gamma_{n+1}^*}{\gamma_n^*} \frac{\langle P_n^*, P_n^* \rangle}{\langle P_{n-1}^*, P_{n-1}^* \rangle} = \frac{\gamma_{n+1}^*}{\gamma_n^*}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \frac{P_{n+1}^*(x)P_n^*(y) - P_n^*(x)P_{n+1}^*(y)}{x-y} &= \gamma_{n+1}^* P_n^*(x)P_n^*(y) \\ &+ \frac{\gamma_{n+1}^*}{\gamma_n^*} \frac{P_n^*(x)P_{n-1}^*(y) - P_{n-1}^*(x)P_n^*(y)}{x-y}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \frac{P_n^*(x)P_{n-1}^*(y) - P_{n-1}^*(x)P_n^*(y)}{x-y} &= \gamma_n^* P_{n-1}^*(x)P_{n-1}^*(y) \\ &+ \frac{\gamma_n^*}{\gamma_{n-1}^*} \frac{P_{n-1}^*(x)P_{n-2}^*(y) - P_{n-2}^*(x)P_{n-1}^*(y)}{x-y}. \end{aligned}$$

Substituindo a última equação na penúltima equação, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{P_{n+1}^*(x)P_n^*(y) - P_n^*(x)P_{n+1}^*(y)}{x-y} &= \frac{\gamma_{n+1}^*}{\gamma_{n-1}^*} \frac{P_{n-1}^*(x)P_{n-2}^*(y) - P_{n-2}^*(x)P_{n-1}^*(y)}{x-y} \\ &+ \gamma_{n+1}^* \left[P_n^*(x)P_n^*(y) + P_{n-1}^*(x)P_{n-1}^*(y) \right]. \end{aligned}$$

Repetindo esse processo n vezes, obtemos

$$\frac{P_{n+1}^*(x)P_n^*(y) - P_n^*(x)P_{n+1}^*(y)}{x-y} = \frac{\gamma_{n+1}^*}{\gamma_1^*} \frac{P_1^*(x)P_0^*(y) - P_0^*(x)P_1^*(y)}{x-y} + \gamma_{n+1}^* \sum_{k=1}^n P_k^*(x)P_k^*(y).$$

Observe que

$$P_1^*(x)P_0^*(y) - P_0^*(x)P_1^*(y) = a_{0,0}^* a_{1,1}^* (x-y) = \frac{a_{1,1}^*}{a_{0,0}^*} \left[a_{0,0}^* \right]^2 (x-y) = \gamma_1^* P_0^*(x)P_0^*(y)(x-y).$$

Portanto, temos

$$\frac{P_{n+1}^*(x)P_n^*(y) - P_n^*(x)P_{n+1}^*(y)}{x-y} = \gamma_{n+1}^* \sum_{k=0}^n P_k^*(x)P_k^*(y).$$

□

Se somarmos $P_{n+1}^*(x)P_n^*(x)$ ao numerador da Identidade de Christoffel-Darboux (3.1.8) e, em seguida, subtrairmos $P_{n+1}^*(x)P_n^*(x)$ dele, obtemos

$$\sum_{k=0}^n P_k^*(x)P_k^*(y) = \frac{1}{\gamma_{n+1}^*} \frac{P_n^*(x) \left[P_{n+1}^*(x) - P_{n+1}^*(y) \right] - P_{n+1}^*(x) \left[P_n^*(x) - P_n^*(y) \right]}{x-y}.$$

Fazendo $y \rightarrow x$ em ambos os membros da igualdade acima, chegamos à seguinte identidade

$$\sum_{k=0}^n \left[P_k^*(x) \right]^2 = \frac{1}{\gamma_{n+1}^*} \left[P_n^*(x) \left(P_{n+1}^*(x) \right)' - P_{n+1}^*(x) \left(P_n^*(x) \right)' \right] > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.1.9)$$

3.2 Zeros dos Polinômios Ortogonais

Chamamos x_0 de zero de um polinômio $p(x)$ se $p(x_0) = 0$. Zeros de polinômios, em geral, não podem ser obtidos explicitamente. Os zeros dos polinômios ortogonais possuem características próprias, como veremos a seguir.

Teorema 3.2.1. Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais com relação à medida $d\phi(x)$ no intervalo (a, b) . Os zeros de cada polinômio ortogonal são reais, distintos e estão no intervalo (a, b) .

Demonstração. Suponhamos que existam j zeros $z_1, \dots, z_j$ de $P_n(x)$ fora de (a, b) , inclusive os zeros complexos. Então, $P_n(x)/(x - z_1) \cdots (x - z_j)$ é um polinômio de grau $n - j$ com todos os zeros em (a, b) . Se $j > 0$, então, pela ortogonalidade,

$$\int_a^b P_n(x) \frac{P_n(x)}{(x - z_1) \cdots (x - z_j)} d\phi(x) = 0.$$

Por outro lado, $P_n^2(x)/(x - z_1) \cdots (x - z_j)$ não muda de sinal em (a, b) e, portanto, essa integral não pode se anular. Logo, $j = 0$ e, assim, todos os zeros de $P_n(x)$ estão em (a, b) , ou seja, são reais. Se z_0 é um zero de $P_n(x)$ de multiplicidade maior do que 1, então $P_n(x)/(x - z_0)^2$ é um polinômio de grau $n - 2$ e, pela ortogonalidade,

$$\int_a^b P_n(x) \frac{P_n(x)}{(x - z_0)^2} d\phi(x) = 0.$$

Mas $P_n^2(x)/(x - z_0)^2$ é positivo em (a, b) e, portanto, essa integral não pode se anular. Logo, todos os zeros de (a, b) são simples. $\square$

Teorema 3.2.2. Seja $\{P_n^*(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortonormais. Os zeros de $P_n^*(x)$ se entrelaçam com os zeros de $P_{n+1}^*(x)$, $n \geq 1$. Em outras palavras, se

$$x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,n}$$

são os zeros de $P_n^*(x)$ e

$$x_{n+1,1} < x_{n+1,2} < \cdots < x_{n+1,n+1}$$

são os zeros de $P_{n+1}^*(x)$, arranjados em ordem decrescente, então

$$x_{n+1,1} < x_{n,1} < x_{n+1,2} < x_{n,2} \dots < x_{n+1,n} < x_{n,n} < x_{n+1,n+1}.$$

Demonstração. Aplicando a fórmula (3.1.9) aos zeros de $P_{n+1}^*(x)$ obtemos

$$\frac{1}{\gamma_n^*} P_{n+1}^{*'}(x_{n+1,j}) P_n^*(x_{n+1,j}) > 0, \quad j = 1, \dots, n+1. \quad (3.2.1)$$

Como os zeros de $P_{n+1}^*(x)$ são reais e distintos, então, pelo Teorema de Rolle, a derivada de $P_{n+1}^*(x)$ tem um zero em cada intervalo $(x_{n+1,j-1}, x_{n+1,j})$, $j = 2, \dots, n+1$. Assim, $P_{n+1}^{*'}(x_{n+1,j})$ e $P_{n+1}^{*'}(x_{n+1,j-1})$ têm sinais opostos.

Por (3.2.1), $P_n^*(x_{n+1,j})$ e $P_n^*(x_{n+1,j-1})$ também devem ter sinais opostos pois têm os mesmos sinais de $P_{n+1}^{*'}$ nesses pontos. Então, pelo Teorema do Valor Intermediário, $P_n^*(x)$ tem um zero em cada intervalo $(x_{n+1,j-1}, x_{n+1,j})$, $j = 2, \dots, n+1$. $\square$

3.3 Polinômios Ortogonais Clássicos

Os conteúdos desta subseção encontram-se nos capítulos IV e V do livro [34].

3.3.1 Polinômios Ortogonais de Jacobi

Dados $\alpha, \beta > -1$, os polinômios de Jacobi, denotados por $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, podem ser definidos através da fórmula de Rodrigues dada por

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}]$$

ou em representação em somas

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} (x-1)^k (x+1)^{n-k}. \quad (3.3.1)$$

Apresentemos algumas de suas propriedades.

- A relação de ortogonalidade para os polinômios de Jacobi é dada por

$$\begin{aligned} \langle P_n^{(\alpha, \beta)}, P_m^{(\alpha, \beta)} \rangle &= \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1) n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}, & \text{se } m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

- Valor no ponto $x = 1$:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}.$$

- Relação de simetria:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(x). \quad (3.3.2)$$

- Relação de recorrência de três termos:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (\gamma_n x - \beta_n) P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x) - \alpha_n P_{n-2}^{(\alpha, \beta)}(x), \quad n \geq 1,$$

com

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)}{2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)}, \\ \beta_n &= \frac{(2n+\alpha+\beta-1)(\beta^2-\alpha^2)}{2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)}, \\ \gamma_n &= \frac{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)}{2n(n+\alpha+\beta)}, \end{aligned}$$

$$P_{-1}^{(\alpha, \beta)}(x) := 0 \text{ e } P_0^{(\alpha, \beta)}(x) = 1.$$

- Fórmula para a derivada:

$$\frac{d}{dx}[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)] = \frac{1}{2}(n + \alpha + \beta + 1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x).$$

- $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ é solução da equação diferencial:

$$(1 - x^2)y_n'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]y_n' + n(n + \alpha + \beta + 1)y_n = 0. \quad (3.3.3)$$

Aplicando a transformada da Seção 2.2 do Capítulo 2, obtemos

$$u_n'' + \left[\frac{1 - \alpha^2}{4(1 - x)^2} + \frac{1 - \beta^2}{4(1 + x)^2} + \frac{n(n + \alpha + \beta + 1) + (1 + \alpha)(1 + \beta)/2}{1 - x^2} \right] u_n = 0, \quad (3.3.4)$$

onde $u_n(x; \alpha, \beta) = (1 - x)^{(1+\alpha)/2}(1 + x)^{(1+\beta)/2}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

- Os polinômios ortogonais de Gegenbauer, ou polinômios ultrasféricos, são um caso especial dos polinômios de Jacobi, com $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$. A notação usual para os polinômios de Gegenbauer é $C_n^{(\lambda)}(x)$ e são dados por

$$C_n^{(\lambda)}(x) = \binom{2\alpha}{\alpha}^{-1} \binom{n + 2\alpha}{\alpha} P_n^{(\alpha,\alpha)}(x),$$

onde $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ são os polinômios de Jacobi com $\beta = \alpha$.

Pela simetria (3.3.2) dos polinômios de Jacobi, os zeros dos polinômios de Gegenbauer são simétricos.

3.3.2 Polinômios Ortogonais de Hermite

Os polinômios de Hermite, denotados por $H_n(x)$, podem ser definidos pela fórmula de Rodrigues dada por

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}].$$

Apresentemos algumas de suas propriedades.

- A relação de ortogonalidade para os polinômios de Hermite é dada por

$$\langle H_n, H_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

- Relação de recorrência de três termos:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $H_0(x) = 1$ e $H_1(x) = 2x$.

- $H_n(x)$ é solução da equação diferencial

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0. \quad (3.3.5)$$

3.3.3 Polinômios Ortogonais de Laguerre

Os polinômios de Laguerre, denotados por $L_n^{(\alpha)}(x)$, podem ser definidos pela fórmula de Rodrigues dada por

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} [x^{\alpha+n} e^{-x}]$$

ou em representação por séries

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) \dots (\alpha + j + 1) (-x)^j.$$

Apresentemos algumas de suas propriedades.

- A relação de ortogonalidade para os polinômios de Laguerre é dada por

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle = \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ n! \Gamma(n + \alpha + 1), & \text{se } m = n. \end{cases}$$

- Relação de recorrência de três termos:

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (x - (2n + \alpha + 1)) L_n^{(\alpha)}(x) - n(n + \alpha) L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 1,$$

com $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$ e $L_1^{(\alpha)}(x) = x - \alpha - 1$.

- $L_n^{(\alpha)}(x)$ é solução da equação diferencial:

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + (n - \alpha)y = 0. \tag{3.3.6}$$

Capítulo 4

Teorema de Comparação de Sturm e Refinamentos

“Assim perguntamos, sem parar, até um punhado de terra cobrir a nossa boca. Mas isto será uma resposta?”

Heinrich Heine

No estudo das equações diferenciais parciais mais elementares, um dos mais antigos métodos sistemáticos para a solução de tais equações, o qual permanece como um método de grande importância atualmente, sendo uma das técnicas clássicas em muitos ramos da física matemática, é o método da separação de variáveis. Nesse sentido, os problemas de Sturm-Liouville aparecem naturalmente quando se aplica esse método ao estudo de certas equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem, Chaim S. Hönl [19]. Problemas desse tipo são apresentados por Ahmed I. Zayed [35], onde o núcleo de muitas transformações integrais é solução de equações diferenciais de Sturm-Liouville. Desde então, a teoria espectral de problemas de Sturm-Liouville é muito bem desenvolvida, o que torna natural usá-los para o estudo de muitas transformações de funções de um modo unificado. Dessa forma, obtêm-se a transformada e a sua fórmula de inversão, que são chamadas de par de Sturm-Liouville. Por exemplo, no sistema

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = 0, \end{cases}$$

suponhamos que u possa ser escrita como $u(x, t) = X(x)T(t)$. Por simples cálculos, chegamos às equações

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, T'' + \lambda T = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \\ T'(0) = 0. \end{cases}$$

As soluções não triviais do sistema de equações ordinárias acima são compatíveis com uma pequena classe de condições iniciais f . Temos, na verdade, para cada $n \in \mathbb{N}$, um $\lambda_n = n^2$ e a solução é um múltiplo de $u_n = \text{sen}(nx)\cos(nt)$. O que a teoria de séries de Fourier nos garante é que se $f \in C^2[0, \pi]$ satisfaz às condições de contorno $f(0) = f(\pi) = 0$, então o sistema tem solução dada por

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \text{sen}(nx) \cos(nt),$$

onde

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \text{sen}(nx) dx$$

e a série converge uniformemente. Em outras palavras, $\{\text{sen}(nx)\}_{n=0}^\infty$ é uma base ortogonal de um espaço funcional conveniente, de forma que algumas equações são facilmente resolvidas nesta base. Além disso, as condições iniciais mais gerais são representadas de forma simples nessa mesma base.

Uma aplicação desse método, por exemplo, é obter um modelo um pouco mais geral para o problema da corda vibrante. Sabemos, pela segunda lei de Newton, que a resultante das forças é dado por

$$F = \rho(x) \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

onde ρ é a densidade linear da corda. Supondo que a corda faça um pequeno movimento vertical e, como a tensão na corda é tangente à mesma, a resultante deve ser aproximadamente vertical e dada por

$$F = T \sin(\theta_2) - T \sin(\theta_1).$$

Como o movimento é para pequenas vibrações, temos que $\theta \ll 1$ e $\sin(\theta) \approx \tan(\theta) = \partial y(x) / \partial x$. Assim, temos

$$F = T \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]_x^{x+\Delta x} \approx T \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \text{ quando } \Delta x \rightarrow 0.$$

Portanto, nesse modelo, a equação satisfeita pela corda é dada por

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho(x)}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Ao tentarmos aplicar o método da separação de variáveis na equação acima, obtemos um problema um pouco mais geral, dado por $X'' + \lambda \rho(x) X = 0$. Chamamos de equação de Sturm-Liouville uma equação da forma

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du}{dx} \right] + q(x)u = \lambda \omega(x)u, \quad (4.0.1)$$

onde λ é um parâmetro real e as funções p e ω são positivas. No caso em que a equação é definida em um intervalo finito $[a, b]$ e p , ρ e q são suaves, dizemos que esta é uma equação de Sturm-Liouville regular em $[a, b]$.

Um problema de Sturm-Liouville regular em $[a, b]$ consiste de uma equação de Sturm-Liouville regular em $[a, b]$ com condições de contorno convenientes.

Os valores de λ para os quais o problema admite solução não trivial são os autovalores do problema. As soluções não triviais correspondentes a um autovalor λ são as autofunções do problema associadas a λ .

Problemas dessa natureza incentivaram o desenvolvimento da Teoria de Sturm-Liouville que resultou em vários teoremas e suas consequências. Aplicações importantes sobre esses tipos de resultados são evidentes na área de zeros de polinômios ortogonais e funções especiais. Sabemos que um dos grandes desafios na área de análise é determinar uma região pequena que limita zeros de polinômios, já que sua localização exata é uma tarefa quase impossível. Na literatura, existe um amplo leque de artigos que trata desse assunto. Neste trabalho, especificamente nos capítulos 4, 5 e 6, apresentaremos aplicações da teoria de Sturm-Liouville.

No presente capítulo, vamos fazer uma breve apresentação sobre o teorema clássico de comparação de Sturm e seus refinamentos.

4.1 Teoremas Clássicos de Sturm

Estudamos, aqui, as propriedades de algumas equações de segunda ordem. O primeiro teorema trata da localização relativa entre zeros de duas soluções de uma mesma equação de segunda ordem. O segundo compara equações distintas. As proposições que seguem estabelecem cotas que relacionam o número de zeros de uma solução em um intervalo com seu comprimento. Os resultados dessa subseção encontram-se no capítulo IV de [29].

Teorema 4.1.1 (Teorema de separação de Sturm). Sejam u e v soluções reais e linearmente independentes de

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0,$$

onde $a(x)$ e $b(x)$ são contínuas. Então, os zeros de u e v se entrelaçam.

Demonstração. Basta mostrar que, se $x_1 < x_2$ são zeros de u , existe $\xi \in (x_1, x_2)$ zero de v . Aplicando o mesmo raciocínio para v , temos que os zeros de u e v se entrelaçam. Sejam, então, tais x_1 e x_2 e consideremos

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} v & u \\ v' & u' \end{bmatrix}.$$

Como u e v são soluções linearmente independentes, temos que $W(x) \neq 0$ para qualquer $x \in [x_1, x_2]$. Isso significa que W não muda de sinal em $[x_1, x_2]$ e, portanto, $W(x_1)W(x_2) > 0$. Podemos também supor, sem perda de generalidade, que x_1 e x_2 são zeros consecutivos de u . Logo u não muda de sinal em (x_1, x_2) e sua derivada tem que ter sinais opostos nesses pontos, ou seja, $u'(x_1)u'(x_2) < 0$. Mas, $W(x_1)W(x_2) = v(x_1)v(x_2)u'(x_1)u'(x_2)$, uma vez que x_1 e x_2 são zeros de u . Assim, $v(x_1)v(x_2) < 0$. Para que v mude de sinal entre x_1 e x_2 , v tem que se anular em algum ponto dentro desse intervalo. $\square$

Teorema 4.1.2 (Teorema de comparação de Sturm-Picone). Sejam u e v soluções reais e não triviais de

$$\begin{cases} (p(x)u')' + q_1(x)u = 0 \\ (p(x)v')' + q_2(x)v = 0 \end{cases}$$

em (a, b) , onde p, p', q_1 e q_2 são contínuas, $p(x) > 0$ e $q_1(x) \leq q_2(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Se $x_1 < x_2$ e $u(x_1) = u(x_2) = 0$, então v se anula pelo menos uma vez em (x_1, x_2) , a menos que nesse intervalo tenhamos $q_1 \equiv q_2$ e $v \equiv ku$, $k \in \mathbb{R}$. A afirmação acima é válida para intervalos da seguinte forma:

- (a, x_1) , se

$$u(a+0) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a+} \{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)\} = 0; \quad (4.1.1)$$

- (x_2, b) , se

$$u(b-0) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow b-} \{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)\} = 0. \quad (4.1.2)$$

Demonstração. Multiplicando por v e u , respectivamente, as equações satisfeitas por u e v e subtraindo a segunda da primeira, temos

$$(p(x)u')'v - (p(x)v')'u - (q_2 - q_1)uv = 0.$$

Mas, $(pu')'v - (pv')'u = [pu'v - pv'u]'$ e integrando de x_1 a x_2 , temos

$$\int_{x_1}^{x_2} (q_2 - q_1)uv dx = [pu'v - pv'u]_{x_1}^{x_2} = [pu'v]_{x_1}^{x_2}.$$

Vamos supor que v não se anule em (x_1, x_2) . Sem perda de generalidade, podemos supor que x_1 e x_2 são zeros consecutivos de u e que, multiplicando por -1 se necessário, $u(x) > 0$ e $v(x) > 0$ em (x_1, x_2) . Nesse caso, teremos $u'(x_2) < 0 < u'(x_1)$. Como $q_2 \geq q_1$ e $p \geq 0$, então

$$0 \leq \int_{x_1}^{x_2} (q_2 - q_1)uv dx = [pu'v]_{x_1}^{x_2} \leq 0.$$

Para o caso (4.1.1), suponhamos que v não se anule em (a, x_1) . Então,

$$0 \leq \int_a^{x_1} (q_2 - q_1)uv dx = [pu'v]_a^{x_1} \leq 0$$

ou

$$0 \leq \int_a^{x_1} (q_2 - q_1)uv dx = p(x_1)u'(x_1)v(x_1) \leq 0.$$

A mesma análise pode ser feita para o caso (4.1.2).

Portanto, $q_1 \equiv q_2$ e, com isso, u e v satisfazem à mesma equação de segunda ordem. Pelo Teorema de separação de Sturm 4.1.1, u e v são linearmente dependentes. Caso contrário, $q_1(x) \neq q_2(x)$, chegaremos a uma contradição. Portanto, v se anula pelo menos uma vez em (a, x_1) e (x_1, x_2) . $\square$

Proposição 4.1.3. Consideremos a equação

$$(p(x)u')' + q(x)u = 0$$

definida em $[a, b]$ com p, p' e q contínuas e $p > 0$. Se $q(x) \leq 0$ em $[a, b]$, então as soluções da equação têm no máximo um zero nesse intervalo.

Demonstração. Tomemos $v(x) = \int_a^x \frac{dt}{p(t)}$ solução de $(p(x)v')' = 0$. Como v se anula apenas em $x = a$, pelo Teorema de comparação de Sturm, u não pode ter dois zeros em $[a, b]$. $\square$

Proposição 4.1.4 (Cotas para intervalos entre zeros). Sejam $c, K > 0$ tais que $c^2 \leq q(x) \leq K^2$ e seja $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução não trivial de

$$u'' + q(x)u = 0.$$

Se $x_1 \in [a, b]$ é raiz de u e $A = [x_1 + \frac{\pi}{K}, x_1 + \frac{\pi}{c}]$ está contido em $[a, b]$, então u tem raízes maiores que x_1 . Além disso, se $x_1 < x_2$ são raízes consecutivas de u , então $x_2 \in A$.

Demonstração. Consideremos $z(x) = \sin(c(x - x_1))$ solução de $z'' + c^2z = 0$. Temos que x_1 e $x_1 + \pi/c$ são zeros consecutivos de z . Pelo Teorema de comparação de Sturm 1, existe $x_2 \in (x_1, x_1 + \pi/c]$ raiz de u . Tomando x_2 como a menor raiz de u maior que x_1 , obtemos $x_2 \geq \pi/K$ se considerarmos $v(x) = \sin(K(x - x_1))$ e aplicarmos o mesmo teorema. $\square$

Corolário 4.1.5 (Cotas para zeros em intervalos). Nas condições acima, se $u(a) = 0$ e u tem n raízes em $(a, b]$, então

$$\frac{c(b-a)}{\pi} \leq n \leq \frac{K(b-a)}{\pi}.$$

Demonstração. Sejam $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, onde $x_1, \dots, x_n$ são as n raízes de u em $(a, b]$. Temos que $b < x_n + \pi/c$, pois, caso contrário, pela Proposição 4.1.4, u teria outra raiz $x_{n+1} \in (x_n, b]$. Também pela Proposição 4.1.4, temos $\pi/K \leq x_i - x_{i-1} \leq \pi/c$ para $i = 1, \dots, n$. Somando em i , obtemos $n\pi/K \leq x_n - a \leq n\pi/c$. Como $b - \pi/c < x_n \leq b$, temos que $n \leq K(b-a)/\pi$ e $n+1 > c(b-a)/\pi$. Logo, $n \geq c(b-a)/\pi$, concluindo a prova. $\square$

4.2 Refinamentos do Teorema de Comparação de Sturm

Nesta seção, faremos um refinamento do Teorema de comparação de Sturm. Esse refinamento é no sentido de diminuir a principal restrição da hipótese do Teorema, comparação entre funções coeficientes das equações diferenciais.

Primeiramente, formularemos a versão do Teorema de comparação de Sturm para um caso especial da equação de Sturm-Liouville, $p(x) = 1$ no Teorema 4.1.2. Esta é uma versão de ampla utilidade para se analisar o comportamento de zeros de polinômios ortogonais e funções especiais como a função de Bessel, pois eles satisfazem equações diferenciais de segunda ordem e que através de uma transformação (vide Subseção 2.2), tornam-se equações de Sturm-Liouville.

Teorema 4.2.1 (Teorema de comparação de Sturm). Sejam $y(x)$ e $Y(x)$ as respectivas soluções das equações diferenciais

$$y''(x) + f(x)y(x) = 0 \quad (4.2.1)$$

e

$$Y''(x) + F(x)Y(x) = 0, \quad (4.2.2)$$

onde $f, F \in C(a, b)$. Sejam $\{x_j\}_{j=1}^n$ e $\{X_j\}_{j=1}^n$ zeros distintos de $y(x)$ e $Y(x)$ em (a, b) , respectivamente. Se

- $f(x) < F(x)$ e

$$y(a+0) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a+} \{y'(x)Y(x) - y(x)Y'(x)\} = 0 \quad (4.2.3)$$

ou

- $F(x) < f(x)$ e

$$Y(b-0) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow b-} \{y'(x)Y(x) - y(x)Y'(x)\} = 0, \quad (4.2.4)$$

então $x_j > X_j$ para $j = 1, \dots, n$.

Demonstração. Suponhamos que $f(x) < F(x)$ e que (4.2.3) seja verdadeiro. Multiplicando (4.2.1) por $Y(x)$ e (4.2.2) por $y(x)$ e subtraindo as duas equações resultantes, obtemos

$$\frac{d}{dx} [y'(x)Y(x) - Y'(x)y(x)] = [F(x) - f(x)]y(x)Y(x).$$

Seja x_1 o primeiro zero de $y(x)$ em (a, b) e suponhamos, sem perda de generalidade, que $Y(x)$ não mude de sinal no intervalo (a, x_1) e que $y(x)$, $Y(x)$ sejam positivos nesse intervalo. Então, temos

$$\frac{d}{dx} [y'(x)Y(x) - Y'(x)y(x)] = (F(x) - f(x))y(x)Y(x) > 0$$

em (a, x_1) , ou seja, $y'(x)Y(x) - Y'(x)y(x)$ é estritamente crescente nesse intervalo.

Observemos que

$$\lim_{x \rightarrow x_1-} \{y'(x)Y(x) - y(x)Y'(x)\} = y'(x_1)Y(x_1) \leq 0.$$

Então, tanto a condição $y(a+0) = 0$ quanto

$$\lim_{x \rightarrow a+} \{y'(x)Y(x) - y(x)Y'(x)\} = 0,$$

nos levam a uma contradição. Logo $Y(x)$ muda de sinal pelo menos uma vez no intervalo (a, x_1) . A conclusão do Teorema segue por esse fato e o Teorema 4.1.2.

Para o outro caso, o raciocínio da demonstração é análogo. □

Corolário 4.2.2. Sejam $y(x)$ e $Y(x)$ as respectivas soluções das equações diferenciais (4.2.1) e (4.2.2) onde $f, F \in C(a, b)$. Sejam $\{x_j\}_{j=1}^n$ e $\{X_j\}_{j=1}^n$ zeros distintos de $y(x)$ e $Y(x)$ em (a, b) , respectivamente. Se

$$\bullet f(x) > F(x) \text{ e } Y(a+0) = 0 \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a_+} \{y'(x)Y(x) - y(x)Y'(x)\} = 0 \quad (4.2.5)$$

ou

$$\bullet F(x) > f(x) \text{ e } y(b-0) = 0 \text{ ou } \lim_{x \rightarrow b_-} \{y'(x)Y(x) - y(x)Y'(x)\} = 0, \quad (4.2.6)$$

então $x_j < X_j$ para $j = 1, \dots, n$.

O Teorema 4.2.1 e seu Corolário 4.2.2 é uma transcrição dos resultados do artigo [1].

Observemos que uma das condições para garantir a desigualdade entre os respectivos zeros das soluções, x_k e X_k , é o sinal constante da função $F(x) - f(x)$ em (a, b) . No ano de 2010, Dimitar K. Dimitrov apresentou uma nova versão desse Teorema na qual essa hipótese é atenuada.

Teorema 4.2.3 (Dimitar K. Dimitrov, [4]). Sejam $y(x)$ e $Y(x)$ as respectivas soluções das equações diferenciais (4.2.1) e (4.2.2) onde $f, F \in C(a, b)$. Sejam $\{x_j\}_{j=1}^n$ e $\{X_j\}_{j=1}^n$ os zeros distintos de $y(x)$ e $Y(x)$ em (a, b) , respectivamente. Suponhamos que existe $\eta \in (a, b)$ tal que $f(\eta) = F(\eta)$.

- Se $y(x)$ e $Y(x)$ satisfazem às condições (4.2.3) e (4.2.4), $F(x) - f(x) > 0$ para $x \in (a, \eta)$ e $F(x) - f(x) < 0$ para $x \in (\eta, b)$, então $x_k > X_k$, $k = 1, \dots, n$.
- Se $y(x)$ e $Y(x)$ satisfazem às condições (4.2.5) e (4.2.6), $F(x) - f(x) < 0$ para $x \in (a, \eta)$ e $F(x) - f(x) > 0$ para $x \in (\eta, b)$, então $x_k < X_k$, $k = 1, \dots, n$.

Esse teorema pode ser aplicado para se estabelecer a monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais de Jacobi. Por (3.3.4) da Seção 3.3.1, sabemos que

$$u_n(x; \alpha, \beta) = (1-x)^{(\alpha+1)/2} (1+x)^{(\beta+1)/2} P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$$

é a solução da equação diferencial

$$u_n''(x; \alpha, \beta) + f_n(x; \alpha, \beta) u_n(x; \alpha, \beta) = 0,$$

onde

$$f_n(x; \alpha, \beta) = \frac{1-\alpha^2}{4(1-x)^2} + \frac{1-\beta^2}{4(1+x)^2} + \frac{n(n+\alpha+\beta+1) + (\alpha+1)(\beta+1)/2}{1-x^2}.$$

Dado ε suficientemente pequeno, fixemos $\beta > 0$ e apliquemos o Teorema 4.2.3 nas equações diferenciais

$$u_n''(x; \alpha, \beta) + f_n(x; \alpha, \beta) u_n(x; \alpha, \beta) = 0$$

e

$$u_n''(x; \alpha + \varepsilon, \beta) + f_n(x; \alpha + \varepsilon, \beta) u_n(x; \alpha + \varepsilon, \beta) = 0,$$

adaptando as expressões $y = u_n(x; \alpha, \beta)$, $Y = u_n(x; \alpha + \varepsilon, \beta)$, $f = f_n(x; \alpha, \beta)$ e $F = f_n(x; \alpha + \varepsilon, \beta)$ para as condições do teorema. Evidentemente, as soluções $u_n(x; \alpha, \beta)$ e $u_n(x; \alpha + \varepsilon, \beta)$ satisfazem (4.2.3) e (4.2.4) para $\alpha, \beta > -1$. Por outro lado,

$$f_n(x; \alpha + \varepsilon, \beta) - f_n(x; \alpha, \beta) = \frac{\varepsilon[2n + 1 - \alpha + \beta - \varepsilon - (2n + 1 + \alpha + \beta + \varepsilon)x]}{(1 - x)^2(1 + x)}.$$

Logo, para $\varepsilon > 0$, temos $f_n(\eta; \alpha + \varepsilon, \beta) = f_n(\eta; \alpha, \beta)$, onde

$$\eta = \frac{2n + 1 - \alpha + \beta - \varepsilon}{2n + 1 + \alpha + \beta + \varepsilon} \in (-1, 1),$$

e

$$\begin{aligned} f_n(x; \alpha + \varepsilon, \beta) - f_n(x; \alpha, \beta) &> 0 \quad \text{para } x \in (-1, \eta), \\ f_n(x; \alpha + \varepsilon, \beta) - f_n(x; \alpha, \beta) &< 0 \quad \text{para } x \in (\eta, 1). \end{aligned}$$

Portanto, os zeros $x_{n,k}(\alpha, \beta)$ do n -ésimo polinômio de Jacobi são funções decrescentes de α para $\alpha > -1$. A análise para concluir que os zeros $x_{n,k}(\alpha, \beta)$ são funções crescentes de β , para $\beta > -1$, é análoga.

Recentemente, Yen Chi Lun e Fernando R. Rafaeli provaram uma nova versão do Teorema 4.2.3, tirando a limitação de mesmo número de zeros das soluções $y(x)$ e $Y(x)$ no intervalo (a, b) , o que, apesar de ser uma ligeira modificação, abrange o Teorema 4.2.3 como um caso particular.

Corolário 4.2.4 (Yen Chi Lun e Fernando R. Rafaeli). Sejam $y(x)$ e $Y(x)$ as respectivas soluções das equações diferenciais (4.2.1) e (4.2.2) onde $f, F \in C(a, b)$. Sejam $\{x_j\}_{j=1}^n$ e $\{X_j\}_{j=1}^m$ os zeros distintos de $y(x)$ e $Y(x)$ em (a, b) , respectivamente. Suponhamos que existe $\eta \in (a, b)$ tal que $f(\eta) = F(\eta)$.

- Se $y(x)$ e $Y(x)$ satisfazem às condições (4.2.3) e (4.2.4), $m \geq n$, $F(x) - f(x) > 0$ para $x \in (a, \eta)$ e $F(x) - f(x) < 0$ para $x \in (\eta, b)$, então $x_k > X_k$, $k = 1, \dots, n$.
- Se $y(x)$ e $Y(x)$ satisfazem às condições (4.2.5) e (4.2.6), $m \leq n$, $F(x) - f(x) < 0$ para $x \in (a, \eta)$ e $F(x) - f(x) > 0$ para $x \in (\eta, b)$, então $x_k < X_k$, $k = 1, \dots, n$.

Demonstração. Demonstramos apenas o primeiro caso, pois a prova do segundo é análoga. Sem perda de generalidade, suponhamos que $y(x)$ possui k zeros em (a, η) com $k \neq 0$ e $k \neq n$. Sejam $\{x_j\}_{j=1}^n$ e $\{X_j\}_{j=1}^m$ zeros de $y(x)$ e $Y(x)$, respectivamente, tais que

$$a < x_1 < \dots < x_k < \eta \leq x_{k+1} < \dots < x_n < b$$

e

$$a < X_1 < \dots < X_m < b.$$

Assim, $x_j < X_j$ para $j = 1, \dots, \min\{k, m\}$. De fato, suponhamos que existe j_0 , $1 \leq j_0 \leq \min\{k, m\}$, tal que $X_{j_0} < x_{j_0}$. Então, pelo Teorema 4.2.1 e o fato de $F(x) < f(x)$ em (a, η) , temos

que $y(x)$ muda de sinal pelo menos uma vez em $(a, X_1), (X_1, X_2), \dots, (X_{j_0-1}, X_{j_0})$, o que implica que $x_{j_0} < X_{j_0}$, contradizendo a hipótese. Portanto, $x_j < X_j$ para $j = 1, \dots, \min\{k, m\}$.

Observemos que se $\min\{k, m\} = m$, a demonstração está concluída. Suponhamos que $\min\{k, m\} = k < m$. Logo, $x_j < X_j$ para $j = k+1, \dots, m$. De fato, pelo Teorema 4.2.1 e o fato de $f(x) < F(x)$ em (η, b) , temos que $Y(x)$ muda de sinal pelo menos uma vez em $(x_n, b), (x_{n-1}, x_n), \dots, (x_{k+1}, x_{k+2})$, ou seja, $Y(x)$ troca de sinal pelo menos $n-k$, $n-k \geq m-k$, vezes em (x_{k+1}, b) . Portanto, existem

$$\begin{aligned} X_m \in (x_n, b) &\Rightarrow X_m > x_n > x_m, \\ X_{m-1} \in (x_{n-1}, b) &\Rightarrow X_{m-1} > x_{n-1} > x_{m-1}, \\ &\vdots \\ X_{k+1} \in (x_{k+1}, b) &\Rightarrow X_{k+1} > x_{k+1}. \end{aligned}$$

Observemos que, nos casos de $k = 0$ e $k = n$, a demonstração segue imediata de um dos dois argumentos anteriores. $\square$

A demonstração do Corolário 4.2.4 segue o raciocínio da demonstração do Teorema 4.2.3.

Por conveniência, chamamos os Teorema 4.2.1, Corolário 4.2.2, Teorema 4.2.3 e Teorema 4.2.4 de Teorema de comparação de Sturm caso discreto. Caso discreto porque as equações diferenciais da forma Sturm-Liouville (4.2.1) e (4.2.2) não dependem de parâmetro. A seguir, enunciaremos o refinamento do Teorema de comparação de Sturm caso contínuo para o caso de uma equação diferencial parametrizado. Essa formulação é uma consequência imediata do caso discreto.

Corolário 4.2.5 (Yen Chi Lun e F. R. Rafaeli). Seja $y(x; \tau)$ a solução da equação diferencial

$$y''(x; \tau) + f(x; \tau)y(x; \tau) = 0 \quad (4.2.7)$$

onde a derivada é em relação à variável x e $f \in C[(a, b) \times (c, d)]$ que depende continuamente do parâmetro τ e possui zeros distintos $x_k(\tau) \in (a, b)$. Dados τ_1, τ_2 arbitrários em (c, d) , suponhamos que existe $\eta \in (a, b)$ tal que $f(\eta; \tau_1) = f(\eta; \tau_2)$. Consideremos dois casos. Sejam $\{x_j(\tau_1)\}_{j=1}^n$ e $\{x_j(\tau_2)\}_{j=1}^m$ zeros distintos de $y(x; \tau_1)$ e $y(x; \tau_2)$ em (a, b) , respectivamente.

- Se as soluções $y(x; \tau_1)$ e $y(x; \tau_2)$ satisfazem às condições

$$y(a+0, \tau_2) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a+} \{y'(x; \tau_1) \cdot y(x; \tau_2) - y'(x; \tau_2) \cdot y(x; \tau_1)\} = 0 \quad (4.2.8)$$

e

$$y(b+0, \tau_1) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow b-} \{y'(x; \tau_1) \cdot y(x; \tau_2) - y'(x; \tau_2) \cdot y(x; \tau_1)\} = 0, \quad (4.2.9)$$

$m \leq n$, $f(x; \tau_2) - f(x; \tau_1) < 0$ para $x \in (a, \eta)$ e $f(x; \tau_2) - f(x; \tau_1) > 0$ para $x \in (\eta, b)$, então $x_k(\tau_1) < x_k(\tau_2)$ para $k = 1, \dots, m$.

- Se as soluções $y(x; \tau_1)$ e $y(x; \tau_2)$ satisfazem às condições

$$y(a+0, \tau_1) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a+} \{y'(x; \tau_1) \cdot y(x; \tau_2) - y'(x; \tau_2) \cdot y(x; \tau_1)\} = 0, \quad (4.2.10)$$

e

$$y(b+0, \tau_2) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow b-} \{y'(x; \tau_1) \cdot y(x; \tau_2) - y'(x; \tau_2) \cdot y(x; \tau_1)\} = 0 \quad (4.2.11)$$

$m \geq n$, $f(x; \tau_2) - f(x; \tau_1) > 0$ para $x \in (a, \eta)$ e $f(x; \tau_2) - f(x; \tau_1) < 0$ para $x \in (\eta, b)$, então $x_k(\tau_1) > x_k(\tau_2)$ para $k = 1, \dots, n$.

Observação 4.2.6. Se $\partial f(x; \tau)/\partial \tau$ trocar de sinal uma única vez em (a, b) para qualquer $\tau \in (c, d)$ e suponhamos que esta mudança de sinal é de positivo para negativo, então dados $\tau_1, \tau_2 \in (c, d)$, $\tau_1 < \tau_2$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$ tal que

$$\frac{\partial f(x; \tau)}{\partial \tau} = \frac{f(x; \tau_2) - f(x; \tau_1)}{\tau_2 - \tau_1}.$$

Portanto, para verificar se existe $\eta \in (a, b)$ tal que $f(x; \tau_2) - f(x; \tau_1) > 0$ para $x \in (a, \eta)$ e $f(x; \tau_2) - f(x; \tau_1) < 0$ para $x \in (\eta, b)$, basta analisar se $\partial f(x; \tau)/\partial \tau$ troca de sinal uma única vez em (a, b) para qualquer $\tau \in (c, d)$.

Nos resultados estabelecidos até agora, o intervalo de comparação (a, b) é o mesmo para as duas equações diferenciais. Para o caso contínuo, isso significa que os extremos do intervalo não dependem do parâmetro. A seguir, estabeleceremos uma versão do Teorema de Sturm na qual os intervalos de comparação são diferentes. A ideia para esta modificação, ou adaptação se preferir, é simples.

Sejam as equações diferenciais (4.2.1) e (4.2.2) para $x \in (a_1, b_1)$ e $x \in (a_2, b_2)$, respectivamente. Faremos uma transformação linear de tal forma que os dois intervalos coincidam e depois aplicaremos o Teorema de comparação de Sturm para obter informações sobre os zeros das soluções y e Y . Para esta finalidade, basta resolver o sistema linear a seguir

$$\begin{cases} \gamma_1 a_2 + \gamma_2 = a_1 \\ \gamma_1 b_2 + \gamma_2 = b_1. \end{cases}$$

Observemos que os refinamentos do Teorema clássico de Sturm iniciavam-se com o caso discreto e depois estendiam-se para o caso contínuo, o exemplo do Teorema 4.2.4 e Corolário 4.2.5. Nesse caso, de intervalos de comparação distintos, faremos diretamente a nossa adaptação para o caso contínuo. Daremos a explicação depois de enunciar a proposição.

Proposição 4.2.7 (D. K. Dimitrov, Yen Chi Lun e F. R. Rafaeli). Seja $y(x; \tau)$ a solução da equação diferencial (4.2.7) onde a derivada é em relação à variável x e $f(x; \tau) \in C((a(\tau), b(\tau)) \times (c, d))$ que depende continuamente do parâmetro τ e possui zeros distintos $x_k(\tau) \in (a(\tau), b(\tau))$. Dados $\tau_1, \tau_2 \in (c, d)$, suponhamos

$$\lim_{x \rightarrow a(\tau_1)} \left\{ y'(x; \tau_1) y\left(\frac{x - \gamma_2}{\gamma_1}; \tau_2\right) - \left[y\left(\frac{x - \gamma_2}{\gamma_1}; \tau_2\right) \right]' y(x; \tau_1) \right\} = 0, \quad (4.2.12)$$

onde a derivada refere-se a x e

$$\begin{aligned}\gamma_1 &:= \frac{b(\tau_1) - a(\tau_1)}{b(\tau_2) - a(\tau_2)}, \\ \gamma_2 &:= b(\tau_1) - \frac{b(\tau_1) - a(\tau_1)}{b(\tau_2) - a(\tau_2)} b(\tau_2) \\ &= a(\tau_1) - \frac{b(\tau_1) - a(\tau_1)}{b(\tau_2) - a(\tau_2)} a(\tau_2).\end{aligned}$$

- Se $\frac{\partial f(x; \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial f(x; \tau)}{\partial x} < 0$ para $x \in (a(\tau), b(\tau))$ e $b'(\tau) - a'(\tau) < 0$ para $\tau \in (c, d)$, então $b(\tau) - x_k(\tau)$ é decrescente de μ , para $k = 1, \dots, m$.
- Se $\frac{\partial f(x; \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial f(x; \tau)}{\partial x} > 0$ para $x \in (a(\tau), b(\tau))$ e $b'(\tau) - a'(\tau) > 0$ para $\tau \in (c, d)$, então $b(\tau) - x_k(\tau)$ é crescente de τ , para $k = 1, \dots, m$.

Observemos que as hipóteses da Proposição 4.2.7,

$$\frac{\partial f(x; \mu)}{\partial \mu} + \frac{\partial f(x; \mu)}{\partial x} \gtrless 0,$$

estão razoavelmente sucintas, o que não acontece no caso discreto. Este é o motivo pelo qual formulamos diretamente para o caso contínuo quando os intervalos de comparação são diferentes.

Demonstração. Dados $\mu_1, \mu_2 \in (c, d)$, sejam as equações diferenciais

$$\begin{aligned}y''(z; \tau_1) + f(z; \tau_1)y(z; \tau_1) &= 0, \\ y''(x; \tau_2) + f(x; \tau_2)y(x; \tau_2) &= 0,\end{aligned}\tag{4.2.13}$$

onde $z \in (a(\tau_1), b(\tau_1))$, $x \in (a(\tau_2), b(\tau_2))$ e

$$a(\tau_1) < x_1(\tau_1) < \dots < x_m(\tau_1) < b(\tau_1) \text{ e } a(\tau_2) < x_1(\tau_2) < \dots < x_m(\tau_2) < b(\tau_2)$$

são os zeros das soluções $y(z; \tau_1)$ e $y(x; \tau_2)$, respectivamente. Aplicando a transformação linear $z = \gamma_1 x + \gamma_2$ na segunda equação em (4.2.13), obtemos

$$\begin{aligned}y''(z; \tau_1) + f(z; \tau_1)y(z; \tau_1) &= 0 \\ Y''(z; \tau_2) + \frac{1}{\gamma_1^2} f\left(\frac{z - \gamma_2}{\gamma_1}; \mu_2\right) Y(z; \tau_2) &= 0,\end{aligned}\tag{4.2.14}$$

onde

$$Y(z; \tau_2) := y\left(\frac{z - \gamma_2}{\gamma_1}; \tau_2\right)$$

cujos zeros $\zeta_k(\tau_2)$, $k = 1, \dots, m$ satisfazem

$$a(\tau_1) < \zeta_1(\tau_2) < \dots < \zeta_m(\tau_2) < b(\tau_1).$$

Suponhamos que $\frac{\partial f(x; \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial f(x; \tau)}{\partial x} > 0$ para $x \in (a(\tau), b(\tau))$ e $b'(\tau) - a'(\tau) > 0$. Escrevendo $\tau_2 = \tau_1 + \epsilon$, temos

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{f\left(\frac{z-\gamma_2}{\gamma_1}; \tau_1 + \epsilon\right) - f(z; \tau_1)}{\epsilon} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{f\left(\frac{z-\gamma_2}{\gamma_1}; \tau_1 + \epsilon\right) - f\left(\frac{z-\gamma_2}{\gamma_1}; \tau_1\right)}{\epsilon} + \frac{f\left(\frac{z-\gamma_2}{\gamma_1}; \tau_1\right) - f(z; \tau_1)}{\epsilon} \right\} \\ &= \frac{\partial f(z; \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\tau_1} + \frac{\partial f(x; \tau_1)}{\partial x} \Big|_{x=z} > 0. \end{aligned}$$

Logo existe $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$f\left(\frac{z-\gamma_2}{\gamma_1}; \tau_1 + \epsilon_0\right) - f(z; \tau_1) > 0$$

e

$$\frac{1}{\gamma_1^2} f\left(\frac{z-\gamma_2}{\gamma_1}; \tau_1 + \epsilon_0\right) - f(z; \tau_1) > 0.$$

Lembremos que $1/\gamma_1^2 \searrow 1$ e $\gamma_2 \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Portanto, pelo Teorema 4.2.1, temos

$$\begin{aligned} \zeta_k(\tau_1 + \epsilon_0) &< x_k(\tau_1) \Leftrightarrow \\ \gamma_1 x_k(\tau_1 + \epsilon_0) + \gamma_2 &< x_k(\tau_1) \Leftrightarrow \\ \gamma_1 x_k(\tau_1 + \epsilon_0) - \gamma_1 b(\tau_1 + \epsilon_0) &< x_k(\tau_1) - b(\tau_1) \Leftrightarrow \\ \gamma_1 [b(\tau_1 + \epsilon_0) - x_k(\tau_1 + \epsilon_0)] &> b(\tau_1) - x_k(\tau_1). \end{aligned}$$

Por hipótese, $b'(\tau) - a'(\tau) > 0$, o que implica que $\gamma_1 < 1$. Portanto,

$$[b(\tau_1 + \epsilon_0) - x(\tau_1 + \epsilon_0)] > b(\tau_1) - x(\tau_1).$$

O outro caso segue o mesmo raciocínio. □

Observação 4.2.8. A condição do limite da Proposição 4.2.7,

$$\lim_{x \rightarrow a(\tau_1)} \left\{ y'(x; \tau_1) y\left(\frac{x-\gamma_2}{\gamma_1}; \tau_2\right) - \left[y\left(\frac{x-\gamma_2}{\gamma_1}; \tau_2\right) \right]' y(x; \tau_1) \right\} = 0,$$

é equivalente ao limite

$$\lim \left\{ y'(x; \tau_1) y(z; \tau_2) - \frac{y'(z; \tau_2)}{\gamma_1} y(x; \tau_1) \right\} = 0$$

para $x \rightarrow a(\tau_1)$ e $z \rightarrow a(\tau_2)$.

Corolário 4.2.9 (D. K. Dimitrov, Yen Chi Lun e F. R. Rafaeli). Seja

$$y''(x; \tau) + f(x; \mu)y(x; \tau) = 0$$

uma família de equações diferenciais que satisfazem às condições da Proposição 4.2.7.

- Se $\frac{\partial f(x; \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial f(x; \tau)}{\partial x} < 0$ para $x \in (a(\tau), b(\tau))$, $b'(\tau) - a'(\tau) < 0$ e $b'(\tau) > 0$ para $\tau \in (c, d)$, então $x_k(\tau)$ é crescente de τ , para $k = 1, \dots, m$.
- Se $\frac{\partial f(x; \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial f(x; \tau)}{\partial x} > 0$ para $x \in (a(\tau), b(\tau))$, $b'(\tau) - a'(\tau) > 0$ e $b'(\tau) < 0$ para $\tau \in (c, d)$, então $x_k(\tau)$ é decrescente de τ , para $k = 1, \dots, m$.

Capítulo 5

Polinômios Ortogonais X_1 -Jacobi

“O maior inimigo do conhecimento não é a ignorância, mas sim a ilusão da verdade”

Stephen William Hawking

A descoberta de novas classes de polinômios ortogonais, os polinômios ortogonais X_m -Jacobi e X_m -Laguerre ou, de modo geral, os polinômios excepcionais, têm sido o desenvolvimento mais interessante na área de mecânica quântica nos últimos anos. Na literatura, temos os trabalhos pioneiros [17] e [18] dos cientistas D. Gómez-Ullate, N. Kamran e R. Milson para $m = 1$. Essas duas classes de polinômios ortogonais surgiram como autofunções do problema de Sturm-Liouville regular.

Na teoria das equações diferenciais ordinárias, uma equação diferencial real de segunda ordem é da forma

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y = \lambda\omega(x)y. \quad (5.0.1)$$

As funções $p(x)$ e $\omega(x)$ são positivas e, no caso regular, são contínuas no intervalo fechado limitado $[a, b]$. O problema é normalmente complementado com condições de contorno específicas. A função $\omega(x)$ é costumeiramente chamada de função “peso” ou função “densidade”. O valor de λ pode não ser especificado na equação. Encontrar os valores de λ para os quais existe uma solução não trivial de (5.0.1) satisfazendo às condições de contorno constitui o problema de Sturm-Liouville. Tais λ são chamados de valores próprios ou autovalores e $y(x)$ as autofunções.

Consideremos agora a equação (5.0.1) definida num intervalo finito e fechado I e sejam λ_1, λ_2 valores distintos do parâmetro λ para os quais (5.0.1) admite em I soluções não triviais y_1 e y_2 , respectivamente. Suponhamos que existam condições que implicam

$$\int_I y_1(x)y_2(x)\omega(x)dx = 0.$$

Tais condições de contorno são ditas auto-adjuntas. Um problema de Sturm-Liouville regular I consiste em uma equação do tipo (5.0.1) em I junto com condições de contorno auto-adjuntas.

Os polinômios ortogonais clássicos são autofunções de problemas de Sturm-Liouville regular nos respectivos intervalos de ortogonalidade. Por exemplo, os polinômios ortogonais de Legendre, um caso particular dos polinômios de Jacobi quando $\alpha = \beta = 0$, satisfazem o problema de Sturm-Liouville regular em $(-1, 1)$

$$-\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] = n(n+1)y,$$

com $y = L_n(x)$, $\lambda_n = n(n+1)$ e $\omega(x) = 1$.

Ao contrário dos sistemas de polinômios ortogonais clássicos, as duas novas classes de polinômios ortogonais iniciam-se com um polinômio de grau um e as denominamos polinômios ortogonais X_1 -Jacobi e X_1 -Laguerre.

Neste capítulo, apresentaremos certas propriedades sobre os polinômios ortogonais X_1 -Jacobi e sobre seus zeros, tais como a monotonicidade e a interpretação eletrostática.

Primeiramente, definamos os polinômios ortogonais X_1 -Jacobi.

Dados $\alpha, \beta > -1$, com $\alpha \neq \beta$ e $\text{sign}(\alpha) = \text{sign}(\beta)$, sejam

$$a = \frac{1}{2}(\beta - \alpha), \quad b = \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha} \quad \text{e} \quad c = b + \frac{1}{a}.$$

Definamos a sequência de polinômios ortogonais X_1 -Jacobi, $\left\{ \widehat{P}_k^{(\alpha, \beta)}(x) \right\}_{k=1}^n$, através do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt sobre a base

$$(x - c), (x - b)^2, (x - b)^3, \dots, (x - b)^n$$

relativo ao produto interno

$$\langle P, Q \rangle_{\alpha, \beta} := \int_{-1}^1 P(x)Q(x)\omega(x)dx, \quad \text{com} \quad \omega(x) = \frac{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}{(x-b)^2} \quad (5.0.2)$$

onde $\omega(x)$ é a função peso, e a condição de normalização

$$\widehat{P}_k^{(\alpha, \beta)}(1) = \frac{n + \alpha}{\beta - \alpha} \binom{n + \alpha - 2}{n - 1}. \quad (5.0.3)$$

5.1 Propriedades Fundamentais

Primeiramente, introduziremos alguns resultados técnicos que nos auxiliarão no decorrer deste assunto.

Lembremos que por Π_n denotamos o espaço dos polinômios algébricos de grau menor ou igual a n . Sejam

$$\widetilde{\Pi}_n := \text{span}\{(x - c), (x - b)^2, (x - b)^3, \dots, (x - b)^n\}.$$

Como

$$\widehat{P}_k^{(\alpha, \beta)}(x) = \gamma_k(x - b)^k + \dots + \gamma_2(x - b)^2 + \gamma_1(x - c),$$

com $\gamma_k \neq 0$, obtemos imediatamente a igualdade

$$-a\widehat{P}_k^{(\alpha,\beta)}(b) = \frac{d}{dx}\widehat{P}_k^{(\alpha,\beta)}(b). \quad (5.1.1)$$

É interessante observar que esta última igualdade caracteriza o espaço $\widetilde{\Pi}_n$.

Afirmção 5.1.1. Seja $\widehat{\Pi}_n := \{P(x) \in \Pi_n : -aP(b) = P'(b)\}$, então $\widehat{\Pi}_n = \widetilde{\Pi}_n$.

Demonstração. De fato, se

$$P(x) = d_0 + d_1(x - b) + \dots + d_n(x - b)^n \in \widehat{\Pi}_n,$$

temos

$$-ad_0 = -aP(b) = P'(b) = d_1.$$

Logo,

$$P(x) = d_1\left(x - \frac{1}{a} - b\right) + \dots + d_n(x - b)^n \in \widetilde{\Pi}_n.$$

Agora, suponhamos que

$$P(x) = d_1(x - c) + \dots + d_n(x - b)^n \in \widetilde{\Pi}_n.$$

Então

$$P(b) = d_1(b - c) = a^{-1}d_1 = a^{-1}P'(b)$$

o que implica $P(x) \in \widehat{\Pi}_n$. Portanto, $\widetilde{\Pi}_n = \widehat{\Pi}_n$. □

Afirmção 5.1.2. O polinômio Q_n é um múltiplo de $\widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}$ se, e somente se,

$$\langle Q_n, q \rangle_{\alpha,\beta} = 0 \quad \text{para todo } q \in \widehat{\Pi}_{n-1}.$$

Demonstração. De fato, se $\widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}$ é o n -ésimo polinômio da sequência, então

$$\langle \widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}, \widehat{P}_m^{(\alpha,\beta)} \rangle_{\alpha,\beta} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n-1.$$

Seja $q \in \widetilde{\Pi}_{n-1}$, então

$$q(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \widehat{P}_j^{(\alpha,\beta)}(x),$$

pois $\{\widehat{P}_j^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{j=1}^{n-1}$ são $n-1$ polinômios linearmente independentes em $\widetilde{\Pi}_{n-1}$, logo formam uma base em $\widetilde{\Pi}_{n-1}$. Portanto,

$$\langle \widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}, q \rangle_{\alpha,\beta} = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \langle \widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}, \widehat{P}_j^{(\alpha,\beta)} \rangle_{\alpha,\beta} = 0.$$

Reciprocamente, se $\langle \widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}, q \rangle_{\alpha,\beta} = 0$ para qualquer $q \in \widehat{\Pi}_{n-1}$, então, em particular, para $q(x) = \widehat{P}_j^{(\alpha,\beta)}(x)$, $j = 1, \dots, n-1$. Logo, temos que $\widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}$ é o n -ésimo polinômio ortogonal da sequência. □

Sabemos que os polinômios ortogonais clássicos, tais como Jacobi, Hermite e Laguerre, satisfazem a equações diferenciais de segunda ordem. Os polinômios ortogonais X_1 -Jacobi também possuem esta propriedade.

Proposição 5.1.3 (D. Gómez-Ullate, N. Kamran e R. Milson, [18]). Os polinômios ortogonais X_1 -Jacobi satisfazem à equação diferencial de segunda ordem

$$(1 - x^2)y'' + 2a\frac{(1 - bx)}{(x - b)}[(x - c)y' - y] = -(n - 1)(n + 2ab)y, \quad (5.1.2)$$

que é equivalente a

$$\frac{d}{dx} \{ \omega(x)(1 - x^2)y' \} + \omega(x) \left\{ 2a\frac{(1 - bx)}{(b - x)} + (n - 1)(n + 2ab) \right\} y = 0, \quad (5.1.3)$$

onde $\omega(x)$ é a função peso definida anteriormente em (5.0.2), então toda solução polinomial é da forma $C\hat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, onde C é um constante qualquer.

Demonstração. Pelo artigo [18] página 992, sabemos que os polinômios ortogonais X_1 -Jacobi satisfazem à equação (5.1.2). É fácil verificar a equivalência de (5.1.2) e (5.1.3). Agora, seja $z(x)$ uma outra solução polinomial de (5.1.2). Então, como as equações (5.1.2) e (5.1.3) são equivalentes, por (5.1.3) temos

$$\frac{d}{dx} \{ \omega(x)(1 - x^2) \cdot y' \} + \omega(x) \left\{ 2a\frac{1 - bx}{b - x} + (n - 1)(n + 2ab) \right\} \cdot y = 0 \quad (5.1.4)$$

e

$$\frac{d}{dx} \{ \omega(x)(1 - x^2) \cdot z' \} + \omega(x) \left\{ 2a\frac{1 - bx}{b - x} + (n - 1)(n + 2ab) \right\} \cdot z = 0. \quad (5.1.5)$$

Multiplicando (5.1.4) e (5.1.5) por $z(x)$ e $y(x)$, respectivamente, e subtraindo as equações resultantes, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} \left\{ \frac{(1 - x)^{\alpha+1}(1 + x)^{\beta+1}}{(b - x)^2} \cdot y' \right\} z - \frac{d}{dx} \left\{ \frac{(1 - x)^{\alpha+1}(1 + x)^{\beta+1}}{(b - x)^2} \cdot z' \right\} y \\ &= \frac{d}{dx} \left\{ \frac{(1 - x)^{\alpha+1}(1 + x)^{\beta+1}}{(b - x)^2} \right\} \{ y'(x)z(x) - y(x)z'(x) \} \\ &\quad + \frac{(1 - x)^{\alpha+1}(1 + x)^{\beta+1}}{(b - x)^2} \{ y''(x)z(x) - y(x)z''(x) \} \\ &= \frac{d}{dx} \left\{ \frac{(1 - x)^{\alpha+1}(1 + x)^{\beta+1}}{(b - x)^2} \cdot [y'(x)z(x) - y(x)z'(x)] \right\}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{(1 - x)^{\alpha+1}(1 + x)^{\beta+1}}{(b - x)^2} \cdot \{ y'(x)z(x) - y(x)z'(x) \} = cte.$$

Fazendo $x \rightarrow \pm 1$, temos que $cte = 0$. Logo

$$\frac{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}}{(b-x)^2} \cdot \{y'(x)z(x) - y(x)z'(x)\} = 0$$

e, então,

$$\{y'(x)z(x) - y(x)z'(x)\} = 0.$$

Como $y(x)$ e $z(x)$ são ambos polinômios, $y(x)$ e $z(x)$ são linearmente dependentes. $\square$

Observação 5.1.4. Derivando a equação diferencial (5.1.2), obtemos

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)y''' &+ \left[2x + 2a \frac{(1-bx)(x-c)}{(b-x)} \right] y'' \\ &+ \left[2a \frac{(1-b^2)(x-c)}{(b-x)^2} - (n-1)(n+2ab) \right] y' - 2a \frac{(1-b^2)}{(b-x)^2} y = 0 \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Daqui por diante, vamos supor que $0 \leq \alpha < \beta$. Então, por definição, $0 < a$, $1 \leq b < c$.

No artigo [17], temos que os polinômios ortogonais X_1 -Jacobi estão relacionados aos polinômios ortogonais de Jacobi pela equação

$$\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x) = -\frac{1}{2}(x-b)P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x) + \frac{bP_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x) - P_{n-2}^{(\alpha, \beta)}(x)}{2n+2ab-2}. \quad (5.1.7)$$

Pela fórmula (5.1.7) e a condição $0 \leq \alpha < \beta$, temos que coeficientes dominantes dos polinômios ortogonais X_1 -Jacobi são negativos.

Traçando uma analogia em comparação aos polinômios ortogonais clássicos, especificamente os polinômios ortogonais de Jacobi, as perguntas que surgem são:

- Os polinômios desta nova classe, polinômios ortogonais excepcionais, têm todos os seus zeros no intervalo de ortogonalidade $(-1, 1)$? Em caso positivo, eles são simples?
- Os zeros de polinômios de graus consecutivos possuem propriedade de entrelaçamento?
- Os zeros, que são funções contínuas de seus parâmetros α e β , são monótonas em relação aos seus parâmetros?
- Os zeros dos polinômios ortogonais de Jacobi possuem uma interpretação eletrostática. Para polinômios ortogonais X_1 -Jacobi, seus zeros também possuem esta propriedade?

No presente capítulo, ofereceremos respostas parciais sobre esta lista de perguntas.

A Proposição 5.1 do artigo [17] estabelece, para n -ésimo polinômio ortogonal X_1 -Jacobi, a existência de $n-1$ zeros simples no intervalo de ortogonalidade e o zero restante chamado zero excepcional maior que b , quando $0 \leq \alpha < \beta$. Forneceremos uma outra abordagem para demonstrar a Proposição 5.1 referida anteriormente e, além disso, o limite superior para este zero excepcional.

Proposição 5.1.5 (D. K. Dimitrov e Yen Chi Lun). Nas condições acima, $0 \leq \alpha < \beta$, $\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ tem exatamente $(n-1)$ zeros simples no intervalo $(-1, 1)$ e um zero no intervalo $(b, c]$.

Demonstração. Pela equação (5.1.1), temos que $-a\widehat{P}_k^{(\alpha, \beta)}(b) = \widehat{P}_k'^{(\alpha, \beta)}(b)$, ou seja, $\widehat{P}_k^{(\alpha, \beta)}(b)$ e $\widehat{P}_k'^{(\alpha, \beta)}(b)$ têm sinais opostos. Se $\widehat{P}_k^{(\alpha, \beta)}(b) > 0$, então ele é decrescente no ponto b . Logo, $\widehat{P}_k^{(\alpha, \beta)}(x)$ tem pelo menos um zero maior que b . O mesmo acontece se $\widehat{P}_k^{(\alpha, \beta)}(b) < 0$. Logo, concluímos que $\widehat{P}_k^{(\alpha, \beta)}(x)$ tem pelo menos um zero com parte real maior que b , $1 < b$. Então, o intervalo $(-1, 1)$ não contém todos os zeros de $\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x)$.

Suponhamos que $(-1, 1)$ contém no máximo $(n-2)$ zeros de $\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ com multiplicidades ímpares. Então,

$$\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (x - x_{n,1})^{m_1} \cdot \dots \cdot (x - x_{n,j})^{m_j} Q(x),$$

onde $j \leq (n-2)$, $\{x_{n,i}\}_{i=1}^j$ são pontos distintos do intervalo $(-1, 1)$, $m_1, \dots, m_j$ são números naturais ímpares e $Q(x)$ não muda de sinal em $(-1, 1)$.

Seja

$$R(x) := (x - x_{n,1}) \cdot \dots \cdot (x - x_{n,j}) \cdot (x - \zeta),$$

$R \in \Pi_{j+1}$. Suponhamos que $R'(b) = -aR(b)$ e, então,

$$-a = \frac{-aR(b)}{R(b)} = \frac{R'(b)}{R(b)} = \frac{1}{b - \zeta} + \sum_{i=1}^j \frac{1}{b - x_{n,i}}.$$

Assim,

$$\zeta = b + \frac{1}{a + \sum_{i=1}^j (b - x_{n,i})^{-1}} > b > 1,$$

pois $b > x_{n,i}$, $i = 1, \dots, j$, e $a > 0$.

Logo, é possível escolher ζ de tal forma que $R \in \widehat{\Pi}_{j+1}$ e $1 < \zeta$. Portanto,

$$R(x) \cdot \widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (x - \zeta) \cdot Q(x) \cdot (x - x_{n,1})^{m_1+1} \cdot \dots \cdot (x - x_{n,j})^{m_j+1}$$

não muda de sinal no intervalo $(-1, 1)$ e, então

$$\int_{-1}^1 R(x) \widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x) \omega(x) dx \neq 0. \quad (5.1.8)$$

Por outro lado, $R \in \widehat{\Pi}_{j+1} = \widetilde{\Pi}_{j+1} = \text{span} \left\{ \widehat{P}_i^{(\alpha, \beta)}(x) \right\}_{i=1}^{j+1}$. Como a dimensão de $\widetilde{\Pi}_{j+1}$ é $(j+1)$ e $\{\widehat{P}_i^{(\alpha, \beta)}(x)\}_{i=1}^{j+1}$ é um conjunto de $(j+1)$ polinômios linearmente independentes, então $\{\widehat{P}_i^{(\alpha, \beta)}(x)\}_{i=1}^{j+1}$ é uma base de $\widehat{\Pi}_{j+1}$ e podemos escrever

$$R(x) = \sum_{i=1}^{j+1} b_i \widehat{P}_i^{(\alpha, \beta)}(x), \quad b_{j+1} \neq 0.$$

Então,

$$\int_{-1}^1 R(x) \widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x) \omega(x) dx = \sum_{i=1}^{j+1} b_i \int_{-1}^1 \widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x) \widehat{P}_i^{(\alpha, \beta)}(x) \omega(x) dx = 0, \quad (5.1.9)$$

pois $(j+1) \leq (n-1)$.

De (5.1.8) e (5.1.9), chegamos a uma contradição. Logo, $j \geq n-1$. Mas, com a observação dada no início da demonstração, sabemos que $\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ tem pelo menos um zero fora do intervalo $(-1, 1)$. Logo, concluímos que $j = n-1$ e os zeros $\{x_{n,i}\}_{i=1}^j$ são simples.

Agora mostremos que $\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ possui um zero em $(b, c]$.

Lembremos que $\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ é a solução da equação diferencial

$$(x^2 - 1)y'' + 2a \frac{(1 - bx)}{b - x} [(x - c)y' - y] = (n - 1)(n + 2ab)y$$

e assume valor positivo no ponto $x = 1$. Como ele possui um único zero real maior que b , temos que $\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(b) > 0$ e, por consequência de (5.1.1), $\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)'}(b) < 0$. Fazendo $x = c$ na equação acima, com $y = \widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}$, obtemos

$$(c^2 - 1)\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(c) = \left\{ 2a \frac{1 - bc}{b - c} + (n - 1)(n + 2ab) \right\} \widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(c).$$

Observemos que $\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)''}(c)$ e $\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(c)$ têm o mesmo sinal, pois as duas constantes que os multiplicam são positivas.

Suponhamos que $\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(c) > 0$, então $\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)''}(c) > 0$. Como $\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ tem coeficiente dominante negativo, temos que $\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)''}(x)$ possui um zero η maior que c . Logo, pelo Teorema de Rolle, podemos concluir que ξ , o maior zero de $\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)'}(x)$, é maior que c . Em resumo, temos

$$\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)'}(b) < 0, \quad \widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)'}(\xi_-) > 0 \quad e \quad \widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)'}(\xi_+) < 0,$$

o que implica que $\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)'}(x)$ tem dois zeros maiores que b e, consequentemente, $\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)'}(b)$ possui n zeros, o que é uma contradição. Logo $\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(c) \leq 0$. $\square$

Para o próximo passo, seria natural investigar o entrelaçamento dos zeros consecutivos dos polinômios desta sequência.

Sabemos que os polinômios ortogonais X_1 -Jacobi satisfazem à equação diferencial de segunda ordem (5.1.2). Usando a transformada da Seção 2.2, podemos transformá-la em uma equação diferencial do tipo Sturm-Liouville

$$y''(x) - \frac{\sum_{j=0}^4 \kappa_j(\alpha, \beta) \cdot x^j}{(b - x)^2 (1 - x^2)^2} \cdot y(x) = 0, \quad (5.1.10)$$

onde

$$\begin{aligned}
\kappa_{n,0}(\alpha, \beta) &= 2 + ab^3(1 - 2n) + b^2(-1 + a^2 + n - n^2), \\
\kappa_{n,1}(\alpha, \beta) &= -2b \left[a^2(1 + b^2) - n(n - 1) + ab(1 - 2n) \right], \\
\kappa_{n,2}(\alpha, \beta) &= -3 + a^2(1 + 4b^2 + b^4) + n(1 - b^2) + n^2(b^2 - 1) + ab(b^2 - 1)(2n - 1), \\
\kappa_{n,3}(\alpha, \beta) &= -2b \left[-1 + a^2(1 + b^2) - n + n^2 + ab(-1 + 2n) \right], \\
\kappa_{n,4}(\alpha, \beta) &= a^2b^2 + (-1 + n)n + ab(-1 + 2n)
\end{aligned}$$

e a solução de (5.1.10) é dada por

$$y_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(1 - x)^{(\alpha+1)/2}(1 + x)^{(\beta+1)/2}}{2a(b - x)} \cdot \widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x).$$

Definamos

$$\lambda_n(x; \alpha, \beta) := -\frac{\sum_{j=0}^4 \kappa_j(\alpha, \beta) \cdot x^j}{(b - x)^2(1 - x^2)^2}.$$

O teorema a seguir estabelece essa propriedade para os zeros pertencentes ao intervalo $(-1, 1)$.

Teorema 5.1.6 (D. K. Dimitrov e Yen Chi Lun). Seja $\{\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ a sequência de polinômios ortogonais X_1 -Jacobi. Então, os zeros de polinômios consecutivos da sequência se entrelaçam em $(-1, 1)$.

Demonstração. Temos que as soluções $y_n^{(\alpha, \beta)}$ e $y_{n+1}^{(\alpha, \beta)}$ satisfazem às condições do Teorema de comparação de Sturm (4.1.1) e (4.1.2) para $(a, b) = (-1, 1)$. Além disso

$$\lambda_{n+1}(x; \alpha, \beta) - \lambda_n(x; \alpha, \beta) = \frac{n + ab}{(1 - x^2)} > 0.$$

Portanto, o entrelaçamento dos zeros de y_n e y_{n+1} em $(-1, 1)$ é garantido pelo Teorema 4.1.2. $\square$

Agora, suponhamos $0 \leq \beta < \alpha$, então, pela definição, $a < 0$ e $c < b \leq -1$ o que implica $0 < -a$ e $1 \leq -b < -c$. Pela identidade $P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(-x)$ e a fórmula (5.1.7), temos que

$$\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (-1)^n \widehat{P}_n^{(\beta, \alpha)}(-x).$$

Logo, pela análise que fizemos até o momento, podemos afirmar que os zeros de $\left\{ \widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right\}_{k=1}^{\infty}$ satisfazem a todas as propriedades anteriores também quando $0 \leq \beta < \alpha$.

5.2 Monotonicidade dos Zeros

Sabemos que os zeros dos polinômios ortogonais de Jacobi são funções estritamente crescentes do parâmetro β e decrescentes do parâmetros α . Em outras palavras, sejam $x_{n,k}(\alpha, \beta)$, $k = 1, \dots, n$, os zeros do n -ésimo polinômio de Jacobi. Então,

$$\frac{\partial x_{n,k}(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} < 0 \quad e \quad \frac{\partial x_{n,k}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} > 0.$$

A demonstração deste fato na literatura faz uso do Teorema de Markoff, [27]. No artigo [4] de D. K. Dimitrov, uma outra abordagem foi utilizada para demonstrar o mesmo fato.

Nesta seção, estabeleceremos a monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais X_1 -Jacobi utilizando o Teorema de comparação de Sturm em sua versão refinada. Mais precisamente, estabeleceremos o seguinte teorema:

Teorema 5.2.1 (D. K. Dimitrov e Yen Chi Lun). Sejam $0 \leq \alpha < \beta$ e $\hat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ n -ésimo polinômio ortogonal X_1 -Jacobi. Denotemos por $\hat{x}_{n,k}(\alpha, \beta)$, $k = 1, \dots, n$, seus zeros.

- Para $2 \leq \beta$ fixo, $\hat{x}_{n,k}(\alpha, \beta)$, $k = 1, \dots, n-1$, são funções decrescentes de α para

$$\max \left\{ \frac{-(2n-1) + \sqrt{(2n-1)^2 + 16}}{4}, \frac{\beta}{2n} \right\} \leq \alpha \leq \frac{(2n-1)\beta}{2n}.$$

- Para

$$\frac{-3(2n-1) + \sqrt{9(2n-1)^2 + 48}}{4} < \alpha$$

fixo, $\hat{x}_{n,k}(\alpha, \beta)$, $k = 1, \dots, n-1$, são funções crescentes de β para

$$\max \left\{ 2\alpha \cdot \frac{2(2n-1) + 2\alpha}{3(2n-1) + 2\alpha - 6/\alpha}, 2\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{2n-1} \right) \right\} < \beta.$$

Demonstração. Sob a condição $0 \leq \alpha < \beta$, temos que $y_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 0$ para $x = \pm 1$. Logo, a solução da equação diferencial (5.1.10) satisfaz às condições (4.2.8), (4.2.9), (4.2.11) e (4.2.10).

Analisaremos o número de zeros de $\partial \lambda_n(x; \alpha, \beta) / \partial \alpha$ no intervalo $(-1, 1)$. Fazendo a derivada parcial em relação a α , temos

$$\frac{\partial \lambda_n(x; \alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \frac{p_{n,4}(x)}{4a(b-x)(1-x)^2(1+x)},$$

onde $p_{n,4}(x)$ é um polinômio de grau 4. Para aplicarmos o Teorema de Budan-Fourier em análise de número de zeros do $p_{n,4}(x)$ no intervalo $(-1, 1)$, analisaremos os sinais de $p_{n,4}^{(k)}(x)$ para $k = 0, \dots, 4$ e $x = \pm 1$.

Para $x = -1$ e $\beta = \alpha + \epsilon$, com $\epsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned}
p_{n,4}(-1) &= 16\beta^2[2 + (-1 + 2n)\beta + \beta^2] > 0, \\
p'_{n,4}(-1) &= (\alpha + \epsilon)\left\{[-6\alpha + \alpha^2(1 - 2n) - 2\alpha^3] + [5(1 - 2n) - 8\alpha]\alpha\epsilon\right. \\
&\quad \left.+ [4(1 - 2n) - 10\alpha]\epsilon^2 - 4\epsilon^3\right\} < 0, \\
p''_{n,4}(-1) &= 4(\alpha + \epsilon)\left\{4\alpha + 3[-2 + (2n - 1)\alpha + 2\alpha^2]\epsilon + [-6 + 12n + 12\alpha]\epsilon^2 + 6\epsilon^3\right\}, \\
p'''_{n,4}(-1) &= 2(\beta - \alpha) \\
&\quad \times \left\{\alpha^2[1 - 2n + 2\beta] + \alpha\beta[-5 + 10n + 2\beta] + 4\beta[1 + \beta(1 - 2n) - \beta^2]\right\}, \\
p^{(4)}_{n,4}(-1) &= (\beta - \alpha)^3(-1 + 2n + \alpha + \beta) > 0.
\end{aligned}$$

Observemos que

$$p''_{n,4}(-1) > 0 \quad \text{se} \quad -2 + (2n - 1)\alpha + 2\alpha^2 > 0,$$

ou seja,

$$\alpha \geq \frac{-(2n - 1) + \sqrt{(2n - 1)^2 + 16}}{4}.$$

Para $x = 1$, temos

$$\begin{aligned}
p_{n,4}(1) &= -16\alpha^4 < 0, \\
p'_{n,4}(1) &= 8\alpha[-4\alpha^3 + 2\beta + \alpha^2(1 - 2n + 2\beta)], \\
p''_{n,4}(1) &= 4\left\{4\alpha^2 + \alpha[10 + 3\alpha(2n - 1) + 6\alpha^2]\epsilon + 6\epsilon^2\right\} > 0, \\
p'''_{n,4}(1) &= 2(\beta - \alpha)\left\{4\alpha^3 + [3(2n - 1) - 2\beta]\alpha^2 - \beta[3(2n - 1) + 2\beta]\alpha + 4\beta\right\}, \\
p^{(4)}_{n,4}(1) &= (\beta - \alpha)^3(-1 + 2n + \alpha + \beta) > 0.
\end{aligned}$$

Observemos que

$$p'''_{n,4}(1) - p'''_{n,4}(-1) = 8(\beta - \alpha)^3(-1 + 2n + \alpha + \beta) > 0,$$

ou seja, $p'''_{n,4}(1) > p'''_{n,4}(-1)$. Analizaremos o sinal de $p'''_{n,4}(1)$. Consideremos

$$f(\alpha) = 4\alpha^3 + [3(2n - 1) - 2\beta]\alpha^2 - \beta[3(2n - 1) + 2\beta]\alpha + 4\beta = 0$$

um polinômio em α . Pela Regra de sinais de Descartes, podemos afirmar que o polinômio tem 0 ou 2 zeros positivos. Observemos, primeiramente, que $f(0) = f(\beta) = 4\beta$.

Definamos, agora,

$$\begin{aligned}
g_1(\beta) &:= f\left(\frac{\beta}{2n}\right) = \frac{16n^3 + 3(-n + 4n^2 - 4n^3)\beta + 2(1 - n - 2n^2)\beta^2}{4n^3}, \\
g_2(\beta) &:= f\left(\frac{2n - 1}{2n}\beta\right) = \frac{16n^3 + 3(-n + 4n^2 - 4n^3)\beta + 2(-1 + 5n - 6n^2)\beta^2}{4n^3}.
\end{aligned}$$

Pela regra de sinais de Descartes, temos que os numeradores de g_1 e g_2 , como funções polinomiais em β e ambos com coeficientes dominantes negativos, possuem apenas um zero positivo. Como, para $n > 1$, temos

$$\begin{aligned} g_1(0) &= 16n^3 > 0, \\ g_1(2) &= 8 - 14n + 8n^2 - 8n^3 < 0, \\ g_2(0) &= 16n^3 > 0, \\ g_2(2) &= -8 + 34n - 24n^2 - 8n^3 < 0, \end{aligned}$$

ou seja, os zeros positivos de g_1 e g_2 são menores do que 2 e, portanto, g_1 e g_2 são negativos para $\beta \geq 2$. Logo $f(\alpha) < 0$ para

$$\beta/2n \leq \alpha \leq (2n-1)\beta/2n \text{ e } \beta \geq 2.$$

Portanto, $p_{n,4}'''(1)$ é negativo para α neste intervalo. Como $p_4'''(1) > p_{n,4}'''(-1)$, concluímos que $p_{n,4}'''(-1)$ também é negativo neste intervalo.

Diante da condição $2 \leq \beta$ fixo e

$$\max \left\{ \frac{-(2n-1) + \sqrt{(2n-1)^2 + 16}}{4}, \frac{\beta}{2n} \right\} \leq \alpha \leq \frac{(2n-1)\beta}{2n} \quad (5.2.1)$$

temos que os sinais dos termos da sequência $p_{n,4}(x), p'_{n,4}(x), p''_{n,4}(x), p'''_{n,4}(x), p_{n,4}^{(4)}(x)$ em $x = \pm 1$ satisfazem

$$\text{sign}(p_{n,4}(-1), p'_{n,4}(-1), p''_{n,4}(-1), p'''_{n,4}(-1), p_{n,4}^{(4)}(-1)) = \text{sign}(1, -1, 1, -1, 1)$$

e

$$\text{sign}(p_{n,4}(1), p'_{n,4}(1), p''_{n,4}(1), p'''_{n,4}(1), p_{n,4}^{(4)}(1)) = \text{sign}(-1, p'_4(1), 1, -1, 1).$$

Pelo Teorema de Budan-Fourier, temos que $\partial \lambda_n(x; \alpha, \beta) / \partial \alpha$, sob a condição (5.2.1), possui apenas um zero no intervalo $(-1, 1)$. Portanto, pelo Corolário 4.2.5 e sua observação, temos que os zeros dos polinômios ortogonais X_1 -Jacobi em $(-1, 1)$ são decrescentes de α , com α satisfazendo (5.2.1).

De modo análogo, analisaremos o comportamento dos zeros em relação a β . Seja

$$\frac{\partial \lambda(x; \alpha, \beta)}{\partial \beta} = \frac{q_{n,4}(x)}{4a(b-x)(x+1)^2(x-1)},$$

onde $q_{n,4}(x)$ é um polinômio de grau 4. Para $x = -1$, temos

$$\begin{aligned} q_{n,4}(-1) &= 16\beta^4 > 0, \\ q'_{n,4}(-1) &= 8\beta[-(2n-1)\beta^2 - 4\beta^3 + 2\alpha + 2\alpha\beta^2] < 0, \\ q''_{n,4}(-1) &= -4[6\alpha^2 - 2\alpha\beta + 3\alpha(2n-1)\beta^2 + 3(1-2n+2\alpha)\beta^3 - 6\beta^4], \\ q'''_{n,4}(-1) &= 2(\beta - \alpha)[3\beta(2n-1)(\alpha - \beta) - 4\beta^3 + 2\alpha\beta^2 + 2\alpha^2\beta - 4\alpha] < 0, \\ q_{n,4}^{(4)}(-1) &= (\beta - \alpha)^3(-1 + 2n + \alpha + \beta) > 0. \end{aligned}$$

Para $x = 1$, temos

$$\begin{aligned} q_{n,4}(1) &= -16\alpha^2[\alpha^2 + (2n-1)\alpha + 2] < 0, \\ q'_{n,4}(1) &= -8\alpha[4\alpha^2(\alpha + 2n-1) - (2\alpha^2 + 3(2n-1)\alpha - 6)\beta], \\ q''_{n,4}(1) &= -4\alpha\left\{3(\alpha - \beta)\left[2(2n-1)\alpha + 2\alpha^2 - (2n-1)\beta\right] + 2(5\beta - 3\alpha)\right\}, \\ q'''_{n,4}(1) &= 2(\beta - \alpha)\left[(2n-1)(\beta - 4\alpha)(\beta - \alpha) + 2\alpha^2(2\alpha - \beta) - 2\alpha(2 + \beta^2)\right], \\ q^{(4)}_{n,4}(1) &= (\beta - \alpha)^3(-1 + 2n + \alpha + \beta) > 0. \end{aligned}$$

Observemos que $V_{q_{n,4}}(-1)$ é igual 2 ou 4, dependendo do sinal de $q''_4(-1)$. É evidente que $q'_{n,4}(1) > 0$ se

$$2\alpha \cdot \frac{2(2n-1) + 2\alpha}{3(2n-1) + 2\alpha - 6/\alpha} = \frac{4\alpha^2(2n-1 + \alpha)}{\alpha[2\alpha + 3(2n-1)] - 6} < \beta$$

e

$$\frac{-3(2n-1) + \sqrt{9(2n-1)^2 + 24}}{24} < \alpha. \quad (5.2.2)$$

Por outro lado, $q''_{n,4}(1) < 0$ se

$$2(2n-1)\alpha + 2\alpha^2 - (2n-1)\beta < 0$$

que é equivalente a

$$2\alpha\left(1 + \frac{\alpha}{2n-1}\right) < \beta.$$

Portanto,

$$V(q_{n,4}(1), q'_{n,4}(1), q''_{n,4}(1), q'''_{n,4}(1), q^{(4)}_{n,4}(1)) = V(-1, 1, -1, q'''_{n,4}(1), 1) = 3 \quad (5.2.3)$$

se forem satisfeitas (5.2.2) e

$$\max\left\{2\alpha \cdot \frac{2(2n-1)\alpha + 2\alpha^2}{3(2n-1)\alpha + 2\alpha^2 - 6/\alpha}, 2\alpha\left(1 + \frac{\alpha}{2n-1}\right)\right\} < \beta. \quad (5.2.4)$$

Portanto, pelo Teorema de Budan-Fourier, temos que

$$V(q_{n,4}(-1), q'_{n,4}(-1), q''_{n,4}(-1), q'''_{n,4}(-1), q^{(4)}_{n,4}(-1)) = 4 \quad (5.2.5)$$

e $\partial\lambda_n(x; \alpha, \beta)/\partial\beta$ possui apenas um zero em $(-1, 1)$. Logo, pelo Corolário 4.2.5 e sua observação, temos que os zeros dos polinômios ortogonais X_1 -Jacobi em $(-1, 1)$ são crescentes de β , com α, β satisfazendo (5.2.2), (5.2.4), respectivamente.

□

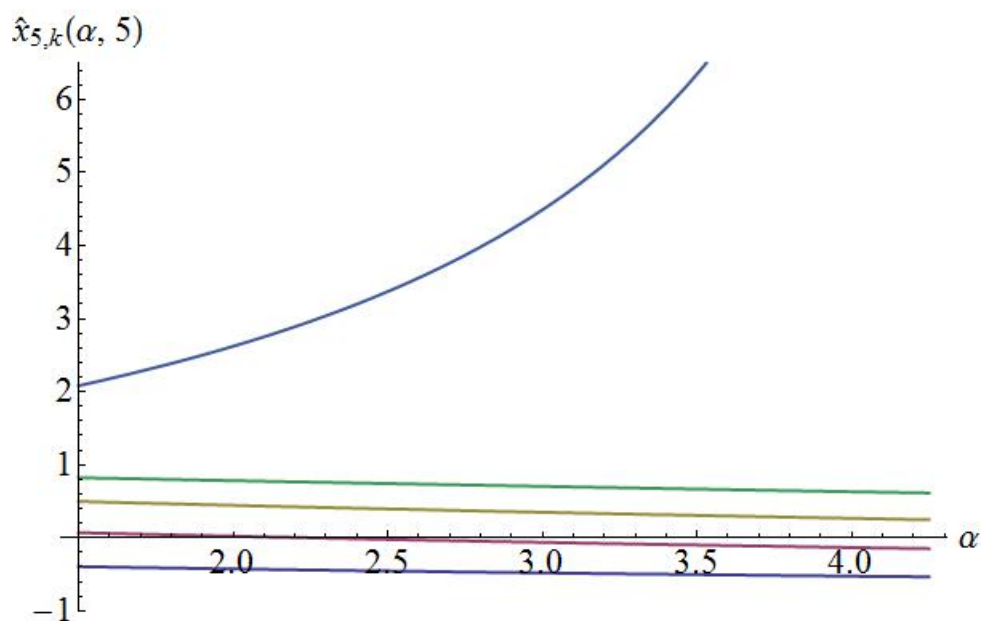


Figura 5.1: Monotonicidade dos zeros em relação a α no caso $n = \beta = 5$.

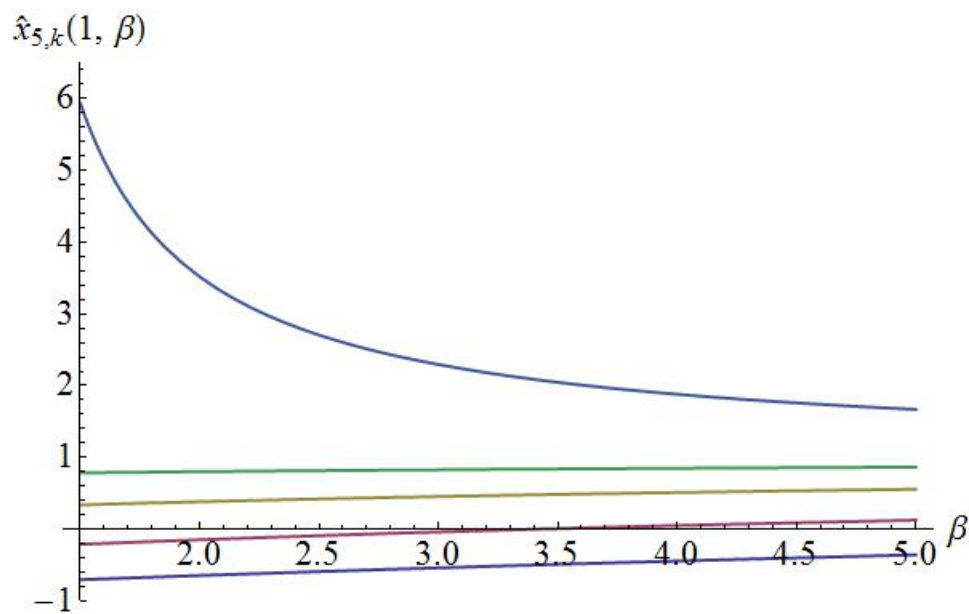


Figura 5.2: Monotonicidade dos zeros em relação a β no caso $n = 5$ e $\alpha = 1$.

5.3 Interpretação Eletrostática dos Zeros

Na Seção 6.7 do livro [34], Szegő apresentou a interpretação eletrostática dos zeros dos polinômios ortogonais de Jacobi considerando o campo eletrostático descrito na Seção 2.3 com $m = 1$ e

as cargas

$$r_0 := P = \frac{\beta + 1}{2} \text{ e } r_1 := Q = \alpha + 12$$

positivas fixas e distribuídas uniformemente ao longo de retas perpendiculares ao eixo real pelos pontos 1 e -1, respectivamente. Sabemos que a energia do sistema de n cargas livres atinge seu mínimo local se $X = (x_{n,1}^{(\alpha,\beta)}, \dots, x_{n,n}^{(\alpha,\beta)})$ onde $x_{n,k}^{(\alpha,\beta)}$, $k = 1, \dots, n$, são os zeros do n -ésimo polinômio de Jacobi. Nesta seção, apresentaremos a interpretação eletrostática dos zeros dos polinômios ortogonais X_1 -Jacobi.

Primeiramente, retomemos a hipótese $0 \leq \alpha < \beta$. Consideremos o campo eletrostático descrito anteriormente e acrescentemos, nesta configuração, mais uma carga unitária fixa, porém negativa, $R = -1$, distribuída uniformemente ao longo de reta perpendicular ao eixo real pelo ponto b . Tomemos n cargas positivas unitárias livres e distribuídas uniformemente em retas perpendiculares ao eixo real e passando pelos pontos $x_1, x_2, \dots, x_n$.

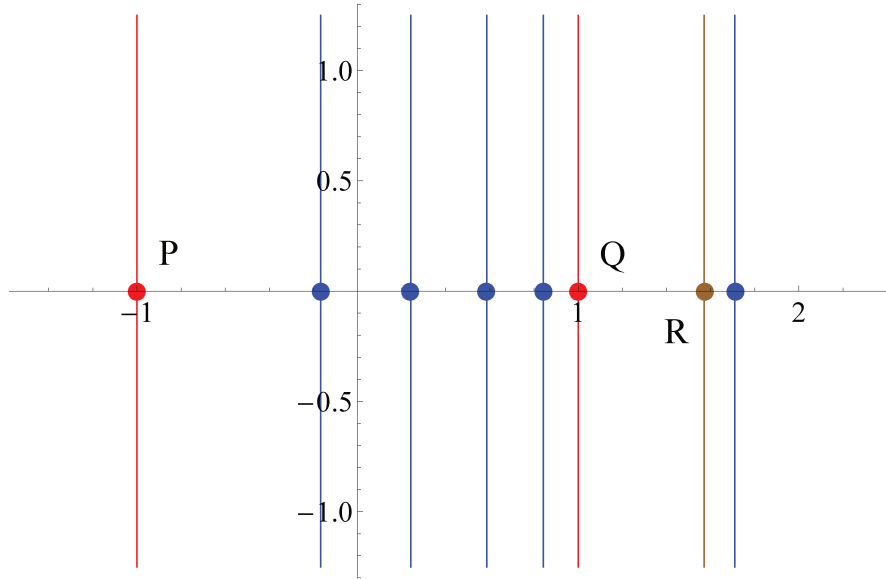


Figura 5.3: Sistema de 3 cargas fixas e 5 cargas livres.

Como já sabemos, a energia do campo é dada por

$$\begin{aligned} L(X) = & \frac{\beta + 1}{2} \sum_{j=1}^n \log \frac{1}{|1 + x_j|} + \frac{\alpha + 1}{2} \sum_{j=1}^n \log \frac{1}{|1 - x_j|} \\ & - \sum_{j=1}^n \log \frac{1}{|b - x_j|} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log \frac{1}{|x_i - x_j|}. \end{aligned}$$

Teorema 5.3.1 (D. K. Dimitrov e Yen Chi Lun). Existe um único vetor $X = (x_{n,1}, \dots, x_{n,n})$, com $-1 < x_{n,1} < \dots < x_{n,n-1} < 1$ e $b < x_{n,n}$ tais que $\partial L(X)/\partial x_{n,k} = 0$, $k = 1, \dots, n$, e coincide com $\hat{X} = (\hat{x}_{n,1}, \dots, \hat{x}_{n,n})$ cujas coordenadas são os zeros de $\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Além disso, $\hat{X}$ é o ponto de sela

da energia. Mais precisamente,

$$\begin{aligned} \partial L(X)/\partial x_{n,j}|_{X=\hat{X}} &= 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ \partial^2 L(X)/\partial x_{n,j}^2|_{X=\hat{X}} &> 0, \quad j = 1, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

$$\partial^2 L(X)/\partial x_{n,n}^2|_{X=\hat{X}} < 0. \quad (5.3.2)$$

Demonstração. Definamos a função

$$T(X) = e^{-L(X)} = \prod_{j=1}^n |1 - x_j|^Q \cdot |1 + x_j|^P |b - x_j|^R \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|. \quad (5.3.3)$$

Temos que o sistema de três cargas fixas, P, Q e R, e n cargas móveis mencionadas anteriormente se estabiliza quando não há variação de energia, ou seja, $\partial T(x)/\partial x_j = 0$, $j = 1, \dots, n$.

Observemos que este problema é um caso particular do problema tratado no Teorema 2.3.4. Logo, temos

$$\frac{1}{2} \frac{y''(x_j)}{y'(x_j)} + \frac{P}{x_j + 1} + \frac{Q}{x_j - 1} + \frac{R}{x_j - b} = 0, \quad y(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j),$$

que é equivalente a

$$(x_j^2 - 1)(x_j - b)y''(x_j) + 2B(x_j)y'(x_j) = 0,$$

onde

$$B(x) = (P + Q + R)x^2 + [(1 - b)Q - (1 + b)P]x + Pb - Qb - R.$$

Como

$$(x^2 - 1)(x - b)y''(x) + 2B(x)y'(x)$$

é um polinômio de grau $n + 1$ e se anula nos zeros de $y(x)$, pelo Teorema Fundamental de Álgebra, existe $C(x) = (c_1x + c_2)$ tal que

$$(x^2 - 1)(x - b)y''(x) + 2B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0. \quad (5.3.4)$$

Comparando os coeficientes de x^{n+1} e x^n em ambos os membros de (5.3.4), obtemos

$$\begin{aligned} c_1 &= -n(n-1) - 2n(P + Q + R) \\ c_2 &= -2n\{(1-b)Q - (1+b)P\} + n(n-1)b + 2(n-1 + P + Q + R) \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n}, \end{aligned}$$

onde $y(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$.

Observemos que as equações (5.1.2) e (5.3.4) serão iguais se

$$P = \frac{1 + \beta}{2}, \quad Q = \frac{1 + \alpha}{2}, \quad R = -1 \quad \text{e} \quad \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n}} = \frac{a[(n-1)(b^2 - 1) - nbc]}{ab + (n-1)}, \quad (5.3.5)$$

onde

$$\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x) = a_{n,n}x^n + \dots + a_{n,1}x + a_{n,0}.$$

Lembremos que podemos usar (5.1.2) para encontrar $a_{n,n-1}/a_{n,n}$.

Logo, escolhemos os valores dados em (5.3.5) para P , Q , R e a_{n-1}/a_n , a Proposição 5.1.3 garante que a única solução polinomial da equação diferencial (5.3.4) é $cte \cdot \widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Portanto, uma das coordenadas do ponto em que o gradiente de $T(x)$ é nulo são os zeros de $\widehat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. A unicidade de $(C(x), y(x))$ é garantida pelo Lema 2.3.5. Consequentemente, os pontos $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n}$ são únicos.

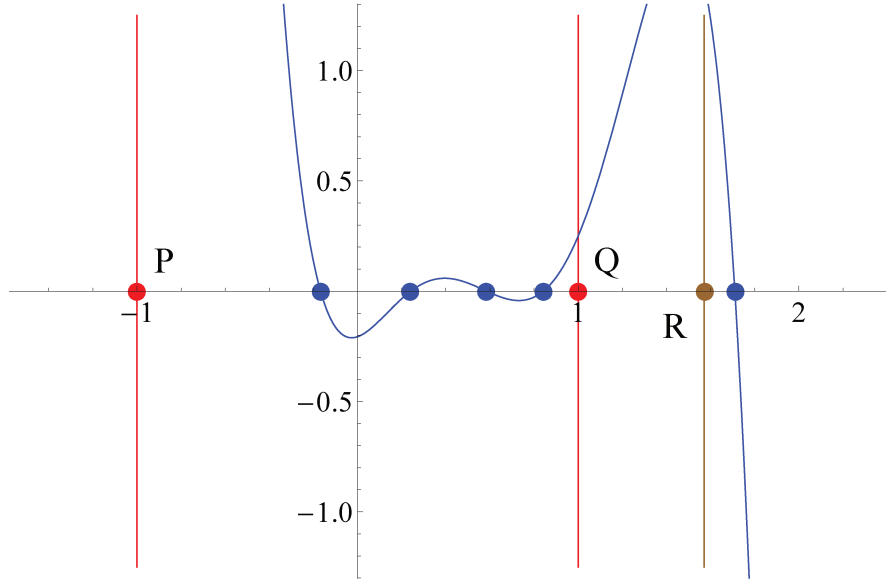


Figura 5.4: Sistema de 3 cargas fixas e 5 cargas livres.

É necessário ainda demonstrar as desigualdades (5.3.1) e (5.3.2), ou seja, o ponto de equilíbrio é ponto de sela da energia.

Lembremos a nossa hipótese, $0 \leq \alpha < \beta$. Por conveniência de análise, calculemos a segunda derivada parcial de $T^2(x_1, \dots, x_n) = T^2(X)$.

$$\begin{aligned} T^2(X) &= \tau(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \cdot \frac{|1 - x_k|^{\alpha+1} |1 + x_k|^{\beta+1}}{(x_k - b)^2} \cdot \prod_{j=1, j \neq k}^n (x_k - x_j)^2 \\ &= \tau_k \cdot \frac{|1 - x_k|^{\alpha+1} |1 + x_k|^{\beta+1}}{(x_k - b)^2} \cdot y_k^2(x), \end{aligned}$$

onde $\tau_k := \tau(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ não depende de x_k e

$$y(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j), \quad y_k(x) = \frac{y(x)}{x - x_k} \text{ com } y^{(l+1)}(x_k) = (l+1)y'_k(x_k).$$

Para facilitar os cálculos adiante, façamos as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} [(1 - x_k^2)\omega(x_k)y_k^2(x_k)] = y'(x_k)\omega(x_k) \left[(1 - x_k^2)y''(x_k) + 2a \frac{(1 - bx_k)(x_k - c)}{x_k - b} y'(x_k) \right]$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left[(1 - x_k^2) \omega(x_k) y_k^2(x_k) \right] &= \left[\omega(x_k) y'(x_k) \right]' \cdot \left[(1 - x_k^2) y''(x_k) + 2a \frac{(1 - bx_k)(x_k - c)}{(x_k - b)} y'(x_k) \right] \\ &\quad + \omega(x_k) y'(x_k) \cdot \left\{ - (x_k^2 - 1) y'''(x_k) - 2 \left[x_k + a \frac{(1 - bx_k)(x_k - c)}{(b - x_k)} \right] y''(x_k) \right. \\ &\quad \left. - 2a \frac{bx^2 - 2b^2x + b^2c + b - c}{(b - x_k)^2} y'(x_k) \right\}, \end{aligned}$$

onde a derivada é em relação à variável x_k e $y(x)$ é a solução da equação diferencial (5.1.2) e (5.1.3).

Fazendo as substituições de y''' e y'' , que provêm das equações diferenciais de terceira e segunda ordem (5.1.2) e (5.1.6), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} T^2(X) &= \tau_k^2 \operatorname{sign} \left((1 - x_k)^{\alpha+1} (1 + x_k)^{\beta+1} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left[(1 - x_k^2) \omega(x_k) y_k^2(x_k) \right] \\ &= -\tau_k^2 \operatorname{sign} \left((1 - x_k)^{\alpha+1} (1 + x_k)^{\beta+1} \right) [y'(x_k)]^2 \omega(x_k) \\ &\quad \times \left\{ 2a \frac{1 - bx_k}{b - x_k} + (n - 1)(n + \alpha + \beta) \right\} \\ &= -\tau_k^2 \frac{[y'(x_k)]^2}{1 - x_k^2} \frac{|1 - x_k|^{\alpha+1} |1 + x_k|^{\beta+1}}{(x_k - b)^2} \times \left\{ 2a \frac{1 - bx_k}{b - x_k} + (n - 1)(n + \alpha + \beta) \right\}. \end{aligned}$$

Logo, para $-1 < x_k < 1$, $\partial^2 T^2(X) / \partial x_k^2|_{X=\hat{X}} < 0$ se, e somente se,

$$x_k < \frac{(n - 1)(n + 2ab)b + 2a}{(n - 1)(n + 2ab) + 2ab}$$

e, para $x_k > b$, $\partial^2 T^2(X) / \partial x_k^2|_{X=\hat{X}} > 0$ se, e somente se,

$$x_k > \frac{(n - 1)(n + 2ab)b + 2a}{(n - 1)(n + 2ab) + 2ab}.$$

Por simples cálculos, verificamos que

$$1 < \frac{(n - 1)(n + 2ab)b + 2a}{(n - 1)(n + 2ab) + 2ab} \leq b.$$

Por outro lado, temos

$$\frac{\partial^2 T^2(X)}{\partial x_k^2} = 2e^{-2L(X)} \left(-\frac{\partial^2 L(X)}{\partial x_k^2} + 2 \left[\frac{\partial L(X)}{\partial x_k} \right]^2 \right)$$

e, então,

$$\frac{\partial^2 T^2(X)}{\partial x_k^2} \Big|_{X=\hat{X}} = -2e^{-2L(\hat{X})} \frac{\partial^2 L(X)}{\partial x_k^2} \Big|_{X=\hat{X}},$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 T^2(X)}{\partial x_k^2} \Big|_{X=\hat{X}} \text{ e } \frac{\partial^2 L^2(X)}{\partial x_k^2} \Big|_{X=\hat{X}}$$

têm sinais opostos.

Portanto, a segunda derivada parcial de T^2 em relação a x_k é positiva(negativa) se, e somente se, a quantidade $1 - x_k^2$ nas expressões é negativa(positiva). Como $-1 < x_1, < \dots < x_{n-1} < 1 < b < x_n$, podemos concluir que

$$\frac{\partial^2 L(X)}{\partial x_k^2} \Big|_{X=\hat{X}} > 0, \text{ para } k = 1, \dots, n-1,$$

e

$$\frac{\partial^2 L(X)}{\partial x_n^2} \Big|_{X=\hat{X}} < 0.$$

□

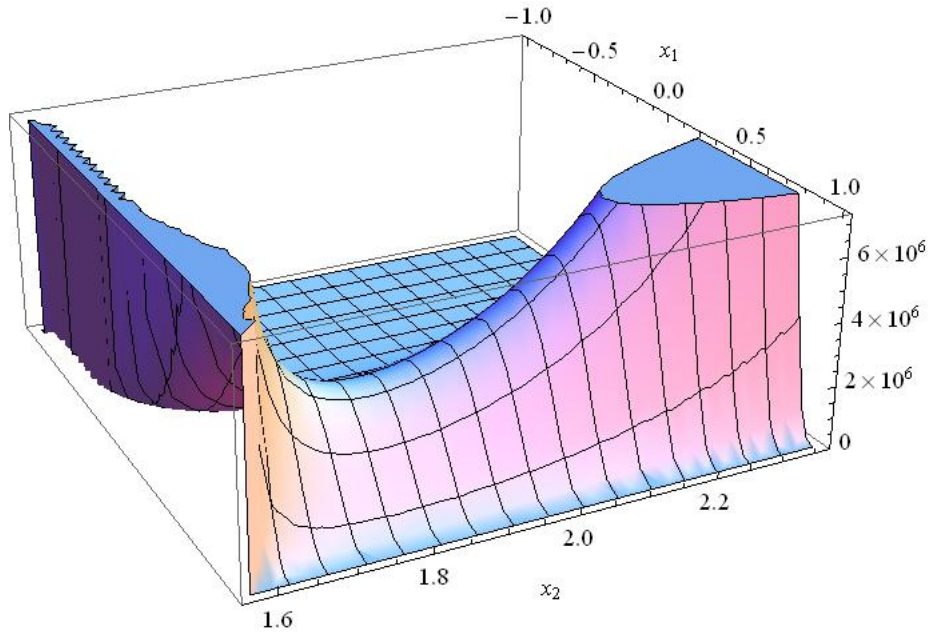


Figura 5.5: Função $\exp(-L(x))$ para $n = 2$, $\alpha = 2$ e $\beta = 9$. Os zeros são $\hat{x}_1 = 0.5573$ e $\hat{x}_2 = 1.7943$.

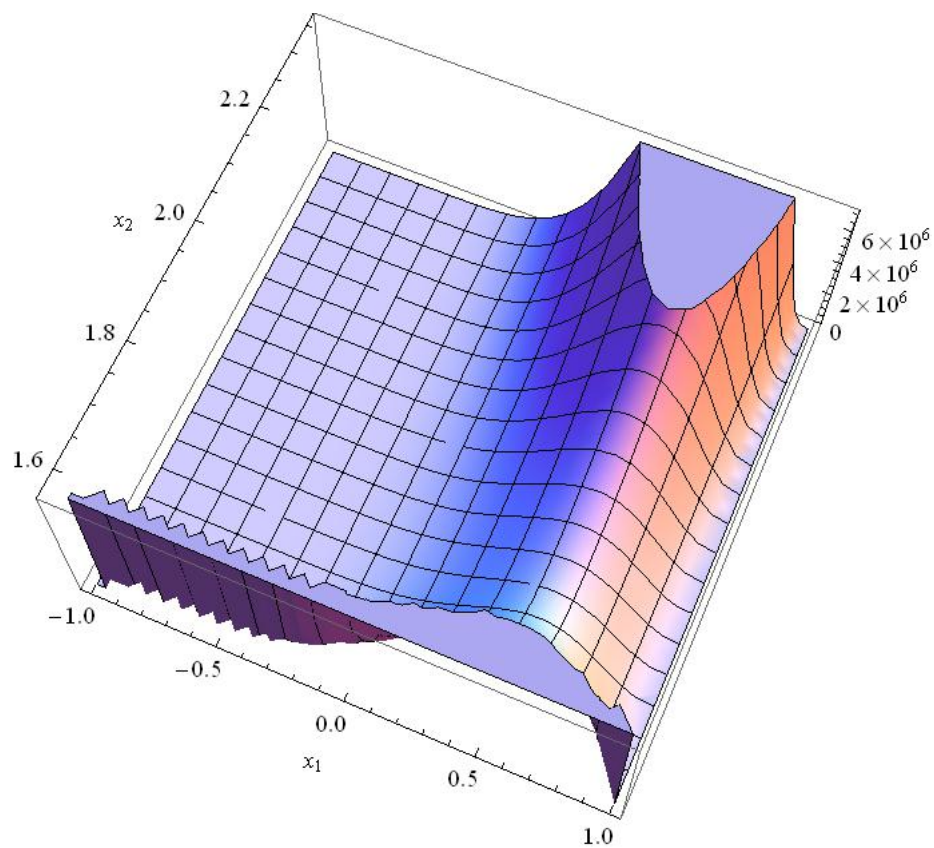


Figura 5.6: Função $\exp(-L(x))$ para $n = 2$, $\alpha = 2$ e $\beta = 9$. Os zeros são $\hat{x}_1 = 0.5573$ e $\hat{x}_2 = 1.7943$.

Capítulo 6

Conjecturas de Gautschi

“Nenhuma grande descoberta foi feita
jamais sem um palpite ousado.”

Isaac Newton

As desigualdades de Gautschi, ou as conjecturas de Gautschi, originaram-se do artigo [25] de P. C. Leopardi que trata da fórmula de quadratura na esfera unitária $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$, $2 \leq d$. No decorrer de tal trabalho, foi-lhe necessário provar a seguinte desigualdade:

$$\tilde{P}_n^{(\alpha, \alpha-1)} \left(\cos \frac{\theta}{n} \right) < \tilde{P}_{n+1}^{(\alpha, \alpha-1)} \left(\cos \frac{\theta}{n+1} \right), \quad (6.0.1)$$

para n um inteiro positivo, $1/2 \leq \alpha$ e $0 < \theta < \theta_{n,1}^{(\alpha, \alpha-1)}$, onde $\tilde{P}_n^{(\alpha, \beta)}(x) := P_n^{(\alpha, \beta)}(x)/P_n^{(\alpha, \beta)}(1)$ e $x_{n,k}^{(\alpha, \alpha-1)} = \cos(\theta_{n,k}^{(\alpha, \alpha-1)})$, $k = 1, \dots, n$, são os zeros do n -ésimo polinômio ortogonal de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ em ordem decrescente, ou seja,

$$\theta_{n,1}^{(\alpha, \alpha-1)} < \theta_{n,2}^{(\alpha, \alpha-1)} < \dots < \theta_{n,n-1}^{(\alpha, \alpha-1)} < \theta_{n,n}^{(\alpha, \alpha-1)}.$$

A tentativa mais natural de provar a desigualdade (6.0.1) é demonstrar que

$$n\theta_{n,1}^{(\alpha, \alpha-1)} < (n+1)\theta_{n+1,1}^{(\alpha, \alpha-1)}, \quad (6.0.2)$$

para $1/2 \leq \alpha$, $1 \leq n$ e $0 < \theta < \theta_{n,1}^{(\alpha, \alpha-1)}$, o que torna (6.0.1) uma consequência imediata deste fato. Mas, será que a desigualdade vale para quaisquer α e β ? Foi exatamente isso que W. Gautschi e P. C. Leopardi observaram e formularam no artigo [16], o protótipo das conjecturas.

Conjectura 6.0.2. Dado $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n$, sejam $x_{n,k}^{(\alpha, \beta)} = \cos(\theta_{n,k}^{(\alpha, \beta)})$, $k = 1, \dots, n$, os zeros do n -ésimo polinômio de Jacobi em ordem decrescente. Então, vale a desigualdade

$$n\theta_{n,1}^{(\alpha, \beta)} > (n+1)\theta_{n+1,1}^{(\alpha, \beta)}, \quad (6.0.3)$$

para $-1 < \alpha, \beta$.

Observemos que a desigualdade (6.0.3) envolve apenas o maior zero, $x_{n,1}^{(\alpha,\beta)} = \cos(\theta_{n,1}^{(\alpha,\beta)})$, do n -ésimo polinômio de Jacobi. As perguntas naturais a fazer são: será que uma desigualdade desta natureza vale para os demais zeros? Será que as desigualdades valem para todo plano- (α, β) com $-1 < \alpha, \beta$? Foi isso que W. Gautschi formulou no artigo [14].

Problema 6.0.3. Dado $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n$, sejam $x_{n,k}^{(\alpha,\beta)} = \cos(\theta_{n,k}^{(\alpha,\beta)})$, $k = 1, \dots, n$, os zeros do n -ésimo polinômio de Jacobi em ordem decrescente. Determine região no plano- (α, β) onde vale a desigualdade

$$n\theta_{n,k}^{(\alpha,\beta)} < (n+1)\theta_{n+1,k}^{(\alpha,\beta)}. \quad (6.0.4)$$

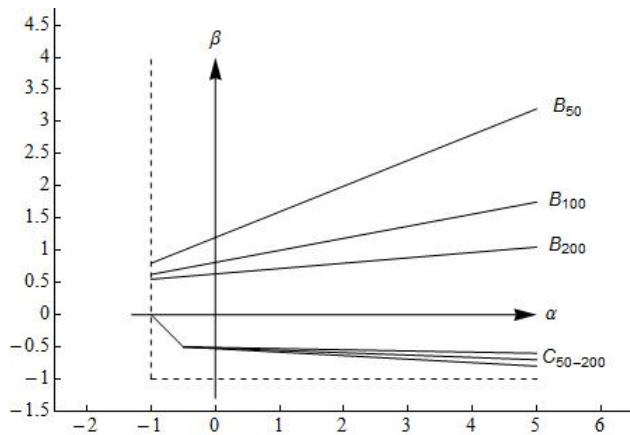


Figura 6.1: A suposta região onde vale a desigualdade (6.0.4) fica ao lado esquerdo da união da curva $\mathcal{B}_n$, parte da reta vertical $\alpha = -1$, parte da reta $\beta = -\alpha - 1$ e a curva $\mathcal{C}_n$.

No mesmo trabalho, W. Gautschi criou um algoritmo para descobrir regiões no plano- (α, β) onde vale a desigualdade (6.0.4). A estratégia consiste em, primeiramente, constatar que a desigualdade (6.0.4) é válida no segmento diagonal $\mathcal{K} := \{(\alpha, \beta) : -1 < \alpha \leq -1/2, \beta = -\alpha - 1\}$ e na reta horizontal $\mathcal{H} := \{(\alpha, \beta) : -1/2 < \alpha, \beta = -1/2\}$. Definamos o passo em α , $\Delta\alpha = 0.02$, e $\mathcal{L}_\alpha$ a linha vertical com abscissa igual $-1 + m \cdot \Delta\alpha$, onde m é um inteiro positivo não nulo. Denotamos por $\mathcal{L}_\alpha^+$ ($\mathcal{L}_\alpha^-$) o segmento de reta vertical de $\mathcal{L}_\alpha$ que fica sobre(sob) a união do segmento diagonal $\mathcal{K}$ com a reta horizontal $\mathcal{H}$. Para cada $\mathcal{L}_\alpha$, $\mathcal{L}_\alpha^+$ tem início num ponto em $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{H}$ e move-se para cima com passo $\Delta\beta = 0.1$ até atingir um ponto (α, β^*) onde a desigualdade (6.0.4) não é válida. O próximo passo é aplicar o método da biseção no intervalo $[\beta^* - \Delta\beta, \beta^*]$ para determinar com mais precisão o ponto extremo superior β_0 do segmento $\mathcal{L}_\alpha^+$. A união dos pontos β_0 formam uma curva ligeiramente côncava que denotamos por $\mathcal{B}_n$, onde n é o grau do polinômio de Jacobi. Usando o mesmo raciocínio, encontramos pontos inferiores do segmento $\mathcal{L}_\alpha^-$. Estes pontos formam uma curva que denotamos por $\mathcal{C}_n$. A Figura 6.1 ilustra a suposta região onde vale a desigualdade (6.0.4). Por exemplo, para $n = 50$, a desigualdade (6.0.4) é válida na região inferior da curva $\mathcal{B}_{50}$, região ao lado da reta vertical $\alpha = -1$, região superior da reta $-\alpha - 1 = 0$ e região superior da curva $\mathcal{C}_{50}$. Ainda, Gautschi observou que as curvas $\mathcal{B}_n$ e $\mathcal{C}_n$ são decrescentes e crescentes, respectivamente, em relação a n e convergem, pontualmente, as semi-retas horizontais $\beta = 1/2$ e $\beta = -1/2$, respectivamente, para $-1/2 < \alpha$.

No mesmo ano da publicação do Problema 6.0.3, R. Askey escreveu uma mensagem a W. Gautschi sugerindo uma investigação da desigualdade (6.0.4), porém com a substituição do fator n

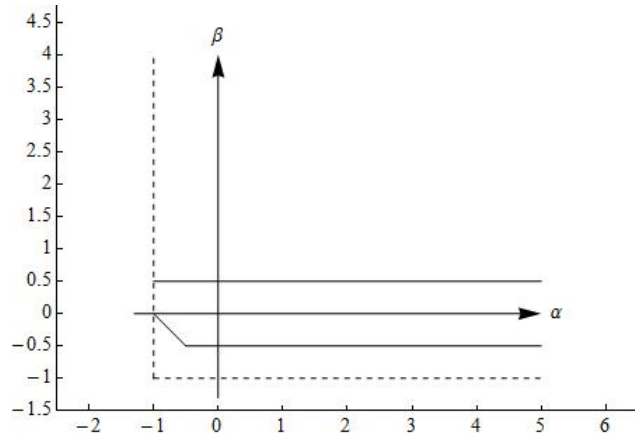


Figura 6.2: A suposta região onde vale a desigualdade (6.0.4) quando n é suficientemente grande, denotemos por faixa $\mathcal{S}$.

por $n + (\alpha + \beta + 1)/2$ que, segundo a opinião de Askey, seria mais conveniente e natural para o caso de polinômios ortogonais de Jacobi. No artigo [13], W. Gautschi formulou a seguinte conjectura:

Conjectura 6.0.4. Dado $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n$, sejam $x_{n,k}^{(\alpha,\beta)} = \cos(\theta_{n,k}^{(\alpha,\beta)})$, $k = 1, \dots, n$, os zeros do n -ésimo polinômio de Jacobi em ordem decrescente. Então a desigualdade

$$\left(n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}\right) \theta_{n,k}^{(\alpha,\beta)} > \left(n + \frac{\alpha + \beta + 3}{2}\right) \theta_{n+1,k}^{(\alpha,\beta)} \quad (6.0.5)$$

vale em

$$\Omega := \left\{ (\alpha, \beta) : -1 < \alpha, \beta, \alpha \notin \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ e } \beta \notin \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\} \setminus \left\{ \left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right) \right\}. \quad (6.0.6)$$

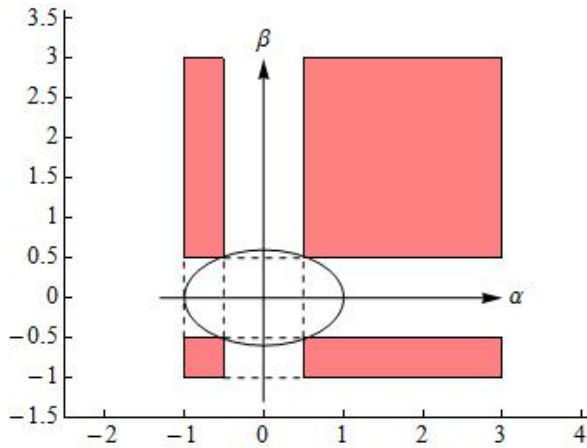


Figura 6.3: Ω é formado pelas regiões coloridas, tirando os pontos $(-1/2, -1/2)$, $(-1/2, 1/2)$, $(1/2, -1/2)$ e $(1/2, 1/2)$.

No artigo [1], S. Ahmed, A. Laforgia e M. E. Muldoon provaram (6.0.5), porém com o sinal de desigualdade invertida, no quadrado $\{(\alpha, \beta) : -1/2 \leq \alpha, \beta \leq 1/2\}$.

Observemos que as desigualdades (6.0.4) e (6.0.5) fornecem uma boa estimativa

$$\frac{n}{n+1} < \frac{\theta_{n+1,k}^{(\alpha,\beta)}}{\theta_{n,k}^{(\alpha,\beta)}} < \frac{n + (\alpha + \beta + 1)/2}{n + (\alpha + \beta + 3)/2},$$

para α, β pertencentes às devidas regiões no plano- (α, β) .

Neste capítulo, estabeleceremos respostas parciais para o Problema 6.0.3 e a Conjectura 6.0.4. As ferramentas essenciais para as demonstrações são o Teorema de Comparação de Sturm 4.1.2, 4.2.1 e sua versão refinada, Teorema 4.2.4.

6.1 Lema Técnico

Lema 6.1.1. Seja a função

$$\tilde{f}_n(\theta; h, \alpha, \beta) := \frac{1/4 - \alpha^2}{4h^2 \sin^2(\theta/2h)} + \frac{1/4 - \beta^2}{4h^2 \cos^2(\theta/2h)} + \left(\frac{n}{h} + \frac{\alpha + \beta + 1}{2h} \right)^2. \quad (6.1.1)$$

- (i) Se $\alpha \geq 1/2$ e $\beta > 1/2$, então $\tilde{f}_{n+1}(\theta; n+1, \alpha, \beta) - \tilde{f}_n(\theta; n, \alpha, \beta)$ muda de sinal uma única vez em $(0, n\pi)$ e esta mudança é de negativo para positivo,
- (ii) Se $\alpha \geq 1/2$ e $-1/2 < \beta \leq 1/2$, então $\tilde{f}_{n+1}(\theta; n+1, \alpha, \beta) - \tilde{f}_n(\theta; n, \alpha, \beta) < 0$ em $(0, n\pi)$,
- (iii) Se $(\alpha, \beta) \in \Omega$, com Ω definida em (6.0.6), então $\tilde{f}_{n+1}(\theta; \gamma_{n+1}, \alpha, \beta) - \tilde{f}_n(\theta; \gamma_n, \alpha, \beta) > 0$ em $(0, \gamma_n\pi)$, onde $\gamma_n = n + (\alpha + \beta + 1)/2$.

Demonstração. Definamos

$$\begin{aligned} R(\theta) &:= \tilde{f}_{n+1}(\theta; n+1, \alpha, \beta) - \tilde{f}_n(\theta; n, \alpha, \beta) \\ &= R_\alpha(n, \theta) + R_\beta(n, \theta) - \frac{(\alpha + \beta + 1)(4n^2 + 2n(\alpha + \beta + 3) + \alpha + \beta + 1)}{4n^2(n+1)^2}, \end{aligned}$$

onde

$$R_\alpha(n, \theta) := \frac{4\alpha^2 - 1}{16} \left\{ \frac{1}{n^2} \left[\sin \left(\frac{\theta}{2n} \right) \right]^{-2} - \frac{1}{(n+1)^2} \left[\sin \left(\frac{\theta}{2n+2} \right) \right]^{-2} \right\} \quad (6.1.2)$$

$$R_\beta(n, \theta) := \frac{4\beta^2 - 1}{16} \left\{ \frac{1}{n^2} \left[\cos \left(\frac{\theta}{2n} \right) \right]^{-2} - \frac{1}{(n+1)^2} \left[\cos \left(\frac{\theta}{2n+2} \right) \right]^{-2} \right\}. \quad (6.1.3)$$

Para primeiro caso, $\alpha \geq 1/2$ e $\beta > 1/2$, temos

$$\lim_{\theta \rightarrow 0_+} R(\theta) = -\frac{9\alpha + 12n^2 + 15}{4n^2(n+1)^2} \left(\beta + \frac{(\alpha + 1)[\alpha + 4(n^2 + 1)]}{3\alpha + 4n^2 + 5} \right) < 0$$

e

$$\lim_{\theta \rightarrow n\pi_-} R(\theta) = +\infty.$$

Provaremos que $R(\theta)$ é estritamente crescente em $(0, n\pi)$.

Sejam $s(u)$ e $r(u)$ definidas da seguinte forma:

$$s(u) = \frac{u^3 \cos u}{\sin^3 u} \quad \text{e} \quad r(u) = \frac{u^3 \sin u}{\cos^3 u}. \quad (6.1.4)$$

Calculando a derivada da função $R(\theta)$ em relação a θ , obtemos

$$\frac{dR(\theta)}{d\theta} = \frac{4\alpha^2 - 1}{2\theta^3} [s(u_2) - s(u_1)] + \frac{4\beta^2 - 1}{2\theta^3} [r(u_1) - r(u_2)], \quad (6.1.5)$$

onde $u_2 = \theta/2n$ e $u_1 = \theta/2(n+1)$. Observemos que a positividade de (6.1.5) é consequência imediata das desigualdades

$$s(u_1) < s(u_2)$$

e

$$r(u_2) < r(u_1).$$

Provaremos que $s(u)$ é crescente e $r(u)$ decrescente quando u cresce em $(0, \pi/2)$. Mais precisamente, verificaremos que suas derivadas são negativas e positivas, respectivamente.

$$\frac{ds(u)}{du} = \frac{u^2 [3 \sin u \cos u - u \sin^2 u - 3u \cos^2 u]}{\sin^4 u} \quad (6.1.6)$$

e

$$\frac{dr(u)}{du} = \frac{u^2 [3 \sin u \cos u - 2u \cos^2 u + 3u]}{\cos^4 u}. \quad (6.1.7)$$

Da expansão de Taylor de $\cos u$ e $\sin u$ em $u = 0$, $0 < u < \pi/2$, obtemos as seguintes desigualdades:

$$\cos u < 1, \quad 1 - \frac{u^2}{2} < \cos u \quad \text{e} \quad \cos u < 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24},$$

e

$$u - \frac{u^3}{6} < \sin u \quad \text{e} \quad \sin u < u - \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{120}.$$

Logo, para $0 < u < \pi/2$, temos seguintes desigualdades sobre expressões nos numeradores de (6.1.6) e (6.1.7):

- $3 \sin u \cos u - u \sin^2 u - 3u \cos^2 u <$

$$3 \left(u - \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{120} \right) \left(1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} \right) - u \left(u - \frac{u^3}{6} \right)^2 - 3u \left(1 - \frac{u^2}{2} \right)^2 = \frac{u^5 p(u^2)}{2880} < 0,$$

onde $p(u) = -48 - 176u + 3u^2$ e possui um único zero positivo $u_+ = 4(22 + \sqrt{493})/3 \approx 58.9381 > \pi^2/4$,

-

$$3 \sin u \cos u - 2u \cos^2 u + 3u > 3 \left(u - \frac{u^3}{6} \right) \left(1 - \frac{u^2}{2} \right) - 2u + 3u = \frac{u(u^2 - 4)^2}{4} > 0.$$

Então, concluímos que $ds(u)/du < 0$ e $dr(u)/du > 0$ para $u \in (0, \pi/2)$. Consequentemente, as desigualdades $s(u_1) < s(u_2)$ e $r(u_1) > r(u_2)$ são válidas. Portanto, (6.1.5) é positiva para $\alpha \geq 1/2$ e $\beta > 1/2$.

Para o segundo caso, $\alpha \geq 1/2$ e $-1/2 < \beta \leq 1/2$, provaremos que $R(\theta) < 0$ em $(0, n\pi)$.

De fato, $R_\beta(0) = (4\beta^2 - 1)(2n + 1)/n^2(n + 1)^2 \leq 0$ e sua derivada

$$\frac{dR_\beta(\theta)}{d\theta} = \frac{4\beta^2 - 1}{2\theta^3} [r(u_1) - r(u_2)] \leq 0$$

em $(0, n\pi)$, onde $r(u)$ é definida em (6.1.4), $u_1 = \theta/2(n + 1)$ e $u_2 = \theta/2n$. Portanto, $R_\beta(\theta) \leq 0$ em $(0, n\pi)$, para $\alpha \geq 1/2$ e $-1/2 < \beta \leq 1/2$.

Por outro lado,

$$\frac{d}{d\theta} \left[R_\alpha(\theta) - \frac{(\alpha + \beta + 1)(4n^2 + 2n(\alpha + \beta + 3) + \alpha + \beta + 1)}{4n^2(n + 1)^2} \right] = \frac{4\alpha^2 - 1}{2\theta^3} [s(u_2) - s(u_1)] > 0$$

em $(0, n\pi)$, onde $s(u)$ é definida em (6.1.4), e

$$R_\alpha(n\pi) - \frac{(\alpha + \beta + 1)(4n^2 + 2n(\alpha + \beta + 3) + \alpha + \beta + 1)}{4n^2(n + 1)^2} = a_2(n, \alpha) \left(\beta + \frac{1}{2} \right)^2 + a_1(n, \alpha) \left(\beta + \frac{1}{2} \right) + a_0(n, \alpha), \quad (6.1.8)$$

onde

$$\begin{aligned} a_2(n, \alpha) &= -\frac{3n + 1}{2n(n + 1)^2} < 0 \\ a_1(n, \alpha) &= -\frac{2\alpha + 6n\alpha + 5n + 3}{2n(n + 1)^2} < 0 \\ a_0(n, \alpha) &= b_2(n) \left(\alpha - \frac{1}{2} \right)^2 + b_1(n) \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) + b_0(n), \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} b_2(n) &= -\frac{5n^2 - 1 + n^2 \left(\csc^2 \left(\frac{\pi n}{2n+2} \right) \right)}{4n^2(n + 1)^2} < 0 \\ b_1(n) &= -\frac{15n^2 + n^2 \left(\csc^2 \left(\frac{\pi n}{2n+2} \right) \right) + 6n - 1}{4n^2(n + 1)^2} < 0 \\ b_0(n) &= -\frac{5n + 3}{2n(n + 1)^2} < 0. \end{aligned}$$

Pela regra de sinais de Descartes, $a_0(n, \alpha)$, como um polinômio de α , não possui zero real maior que $1/2$ e, portanto, $a_0(n, \alpha) < 0$, para $\alpha \geq 1/2$. Usando o mesmo argumento, concluímos que o polinômio de β (6.1.8) não possui zero real maior que $-1/2$ e, portanto, ele assume valor negativo para $\beta > -1/2$. Portanto, a expressão

$$R_\alpha(\theta) - \frac{(\alpha + \beta + 1)(4n^2 + 2n(\alpha + \beta + 3) + \alpha + \beta + 1)}{4n^2(n + 1)^2}$$

é negativa em $(0, n\pi)$, para $\alpha \geq 1/2$ e $-1/2 < \beta \leq 1/2$.

Para provar o terceiro caso, quando $(\alpha, \beta) \in \Omega$, observemos

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{n+1}(\theta; \gamma_{n+1}, \alpha, \beta) - \tilde{f}_n(\theta; \gamma_n, \alpha, \beta) &= \frac{1/4 - \alpha^2}{4} \left\{ \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} \left[\sin \frac{\theta}{2\gamma_{n+1}} \right]^{-2} - \frac{1}{\gamma_n^2} \left[\sin \frac{\theta}{2\gamma_n} \right]^{-2} \right\} + \\ &\quad \frac{1/4 - \beta^2}{4} \left\{ \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} \left[\cos \frac{\theta}{2\gamma_{n+1}} \right]^{-2} - \frac{1}{\gamma_n^2} \left[\cos \frac{\theta}{2\gamma_n} \right]^{-2} \right\}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{f}_n(\theta; \gamma_n, \alpha, \beta)$ é definida em (6.1.1). Logo, a desigualdade $\tilde{f}_{n+1}(\theta; \gamma_{n+1}, \alpha, \beta) > \tilde{f}_n(\theta; \gamma_n, \alpha, \beta)$ é válida em $(0, \gamma_n\pi)$ para $\alpha, \beta \in \Omega$ se, e somente se,

$$\frac{1}{\gamma_{n+1}^2} \left[\sin \frac{\theta}{2\gamma_{n+1}} \right]^{-2} - \frac{1}{\gamma_n^2} \left[\sin \frac{\theta}{2\gamma_n} \right]^{-2} < 0 \quad (6.1.9)$$

e

$$\frac{1}{\gamma_{n+1}^2} \left[\cos \frac{\theta}{2\gamma_{n+1}} \right]^{-2} - \frac{1}{\gamma_n^2} \left[\cos \frac{\theta}{2\gamma_n} \right]^{-2} < 0. \quad (6.1.10)$$

Como $\theta/2\gamma_n, \theta/2\gamma_{n+1} \in (0, \pi/2)$ e $\cos u$ e $\sin u$ são positivos em $(0, \pi/2)$, as desigualdades (6.1.9) e (6.1.10) equivalem às seguintes desigualdades

$$\gamma_n \sin \frac{\theta}{2\gamma_n} < \gamma_{n+1} \sin \frac{\theta}{2\gamma_{n+1}} \quad (6.1.11)$$

e

$$\gamma_n \cos \frac{\theta}{2\gamma_n} < \gamma_{n+1} \cos \frac{\theta}{2\gamma_{n+1}}. \quad (6.1.12)$$

Como $0 < \gamma_n < \gamma_{n+1}$ e $\cos u$ é positiva e decrescente em $(0, \pi/2)$, a desigualdade (6.1.12) é válida. Para provar a desigualdade (6.1.11), definamos

$$g(\theta) := \gamma_{n+1} \sin \frac{\theta}{2\gamma_{n+1}} - \gamma_n \sin \frac{\theta}{2\gamma_n}.$$

Observemos que $g(0) = 0$ e

$$g'(\theta) = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\theta}{2\gamma_{n+1}} - \cos \frac{\theta}{2\gamma_n} \right] > 0$$

em $(0, \gamma_n\pi)$. Portanto, $0 = g(0) < g(\theta)$ o que implica a desigualdade (6.1.11). □

6.2 Teoremas e Provas

Teorema 6.2.1 (Yen Chi Lun e F. R. Rafaeli). Dado $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n$, sejam $x_{n,k}^{(\alpha,\beta)} = \cos(\theta_{n,k}^{(\alpha,\beta)})$, $k = 1, \dots, n$, os zeros do n -ésimo polinômio de Jacobi em ordem decrescente. Então, a desigualdade

$$n\theta_{n,k}^{(\alpha,\beta)} < (n+1)\theta_{n+1,k}^{(\alpha,\beta)} \quad (6.2.1)$$

vale em

$$\Omega_1 := \{(\alpha, \beta) : -1/2 \leq \alpha, \beta \leq 1/2\} \cup \{(\alpha, \beta) : \beta > -1/2, \alpha \geq \max\{1/2, \gamma_n(\beta)\}\}, \quad (6.2.2)$$

com

$$\gamma_n(\beta) = \frac{2(\beta+1)(\beta+3) - \left[2n(n+\beta+3) + (\beta+2)(\beta+3)\right] \left[1 + \cos(n\pi/(n+1))\right]}{(2n+\beta+3) \left[1 + \cos(n\pi/(n+1))\right]}.$$

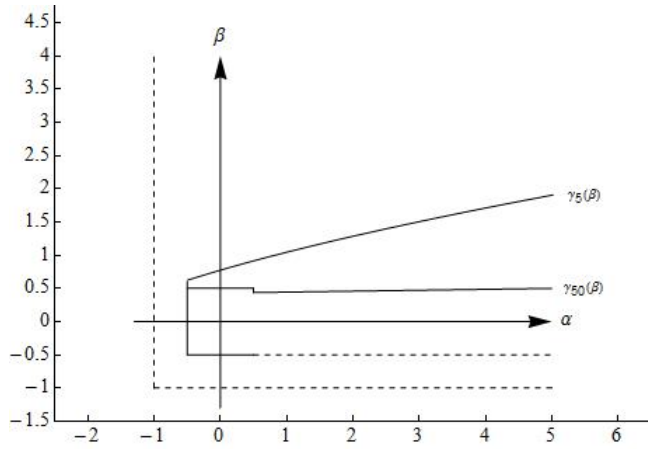


Figura 6.4: A região Ω_1 para o polinômio de Jacobi de grau $n = 5, 50$.

Demonstração. Primeiramente, obteremos, de forma construtiva, uma função cujos zeros são $h\theta_{n,k}^{(\alpha,\beta)}$, com h um parâmetro. Sabemos pela (3.3.4) que a função

$$y_n(\theta; \alpha, \beta) = \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2} P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos \theta), \quad (6.2.3)$$

com $\alpha, \beta > -1$, é a solução da equação diferencial da forma Sturm-Liouville

$$y_n''(\theta; \alpha, \beta) + f_n(\theta; \alpha, \beta) y_n(\theta; \alpha, \beta) = 0,$$

onde

$$f_n(\theta; \alpha, \beta) = \frac{1/4 - \alpha^2}{4 \sin^2(\theta/2)} + \frac{1/4 - \beta^2}{4 \cos^2(\theta/2)} + \left(n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}\right)^2.$$

Fazendo uma simples mudança de variáveis em (6.2.3), resulta em

$$z_n(\theta; h, \alpha, \beta) := y_n(\theta/h; \alpha, \beta) = \left(\sin \frac{\theta}{2h}\right)^{\alpha+1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2h}\right)^{\beta+1/2} P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\cos \frac{\theta}{h}\right),$$

cujos zeros, $h\theta_{n,1}^{(\alpha,\beta)} < h\theta_{n,2}^{(\alpha,\beta)} < \dots < h\theta_{n,n}^{(\alpha,\beta)}$, pertencem a $(0, h\pi)$, a solução da equação diferencial

$$z_n''(\theta; h, \alpha, \beta) + \tilde{f}_n(\theta; h, \alpha, \beta) z_n(\theta; h, \alpha, \beta) = 0,$$

onde

$$\tilde{f}_n(\theta; h, \alpha, \beta) = \frac{f_n(\theta/h; \alpha, \beta)}{h^2} = \frac{1/4 - \alpha^2}{4h^2 \sin^2(\theta/2h)} + \frac{1/4 - \beta^2}{4h^2 \cos^2(\theta/2h)} + \left(\frac{n}{h} + \frac{\alpha + \beta + 1}{2h} \right)^2.$$

Para provarmos a desigualdade (6.2.1), usaremos o Teorema 4.2.4 com $y = z_n(\theta; n, \alpha, \beta)$ e $Y = z_{n+1}(\theta; n+1, \alpha, \beta)$ no intervalo $(a, b) = (0, n\pi)$. Evidentemente, y e Y satisfazem às condições (4.2.5) e (4.2.6) para quaisquer $\alpha > 1/2$ e $\beta > -1/2$ fixos.

No artigo [10], K. Driver e K. Jordaan provaram que

$$\cos \left(\theta_{n+1, n+1}^{(\alpha, \beta)} \right) = x_{n+1, n+1}^{(\alpha, \beta)} < -1 + \frac{2(\beta + 1)(\beta + 3)}{2n(2n + \alpha + \beta + 3) + (\beta + 3)(\alpha + \beta + 2)}.$$

Então, para $\alpha \geq \gamma_n(\beta)$, temos

$$x_{n+1, n+1}^{(\alpha, \beta)} < -1 + \frac{2(\beta + 1)(\beta + 3)}{2n(2n + \alpha + \beta + 3) + (\beta + 3)(\alpha + \beta + 2)} < \cos \left(\frac{n\pi}{n+1} \right),$$

que é equivalente a $n\pi < (n+1)\theta_{n+1, n+1}^{(\alpha, \beta)}$. Em outras palavras, $Y = z_{n+1}(\theta; n+1, \alpha, \beta)$ possui no máximo n zeros no intervalo $(0, n\pi)$.

Dividimos a demonstração nos seguintes casos para α e β .

Caso $\alpha \geq 1/2$ e $-1/2 < \beta \leq 1/2$, pelo segundo item do Lema 6.1.1, $F(\theta) < f(\theta)$ em $(0, n\pi)$. Portanto, pelo Teorema 4.1.2, existe pelo menos um zero de $y = z_n(\theta; n, \alpha, \beta)$ entre zeros consecutivos de $Y = z_{n+1}(\theta; n+1, \alpha, \beta)$ e nos intervalos $(0, \xi_1)$ e $(\xi_k, n\pi)$, onde ξ_1 e ξ_k denotam menor e maior zero, respectivamente, de Y no intervalo $(0, n\pi)$. Observemos que $k \leq n-1$, senão implicaria que y possui mais que n zeros no intervalo $(0, n\pi)$ o que é uma contradição. Obviamente, os demais zeros de Y pertencem ao intervalo $(n\pi, (n+1)\pi)$ e, portanto, a desigualdade (6.2.1) é válida.

Caso $\alpha \geq 1/2$ e $\beta > 1/2$, pelo primeiro item do Lema 6.1.1, $F(\theta) - f(\theta)$ muda de sinal uma única vez em $(0, n\pi)$ e esta mudança é de negativo para positivo. Logo, pelo Teorema 4.2.4, a desigualdade (6.2.1) é válida.

Caso $-1/2 \leq \alpha, \beta \leq 1/2$, usaremos a parte (ii) do Teorema 3.1 de S. Ahmed, A. Laforgia e M. E. Muldoon [1], que diz o seguinte: Se $0 \leq \alpha^2 \leq 1/4$ e $0 \leq \beta^2 \leq 1/4$, então

$$\left(n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2} \right) \theta_{n, k}^{(\alpha, \beta)} < \left(n + \frac{\alpha + \beta + 3}{2} \right) \theta_{n+1, k}^{(\alpha, \beta)},$$

para qualquer $n \geq 1$ e $k = 1, \dots, n$. A conclusão do Teorema para este caso segue-se pelas desigualdades

$$\frac{\theta_{n, k}^{(\alpha, \beta)}}{\theta_{n+1, k}^{(\alpha, \beta)}} < \frac{n + (\alpha + \beta + 3)/2}{n + (\alpha + \beta + 1)/2} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

Assim, completamos a demonstração do teorema. □

Observação 6.2.2. A região Ω_1 aproxima a faixa

$$\mathcal{S}_1 := \{(\alpha, \beta) : -1/2 \leq \alpha, \beta \leq 1/2\} \cup \{(\alpha, \beta) : \alpha \geq 1/2, -1/2 < \beta \leq l\},$$

quando n é suficientemente grande.

Denotemos $l := -2 + \sqrt{\frac{1}{2}(2 + \pi^2)}$ um número real positivo. A demonstração da observação consiste em provar as duas afirmações a seguirem.

- (i) A função $\gamma_n(\beta) - l$ é sempre positiva para $\beta > l$ e converge pontualmente para a semi-reta $\beta = 0$ em $1/2 < \alpha$,
- (ii) $\gamma_n(-1/2) < 0$ para qualquer n inteiro positivo.

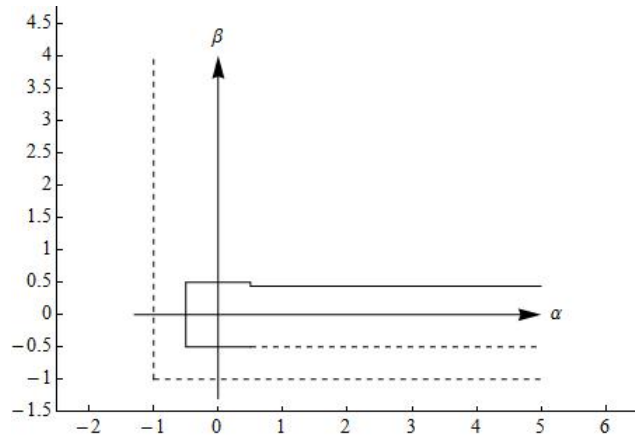


Figura 6.5: A faixa $\mathcal{S}_1$.

De fato, o numerador da função $\gamma_n(\beta)$ é um polinômio em β de grau 2 com coeficiente dominante positivo. Usando a Regra de sinais de Descartes, tal polinômio possui zeros reais com sinais opostos. O denominador de $\gamma_n(\beta)$ é uma expressão sempre positiva.

Como $\cot(x) < 1/x$ para $x \in (0, \pi/4)$, temos

$$\begin{aligned} \gamma_n(l) &= -\frac{2n(2n+2) + (2n+1)\sqrt{2(2+\pi^2)} + 2 - \pi^2 \cot^2\left(\frac{\pi}{2n+2}\right)}{4n + \sqrt{2(2+\pi^2)} + 2} \\ &< -\frac{(2n+1)\left(-2 + \sqrt{2(2+\pi^2)}\right)}{4n + 2 + \sqrt{2(2+\pi^2)}}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$-\frac{(2n+1)\left(-2 + \sqrt{2(2+\pi^2)}\right)}{4n + 2 + \sqrt{2(2+\pi^2)}} \Big|_{n=1} \approx -0.792553 < \frac{-1}{2},$$

e

$$\frac{d}{dx} \left[-\frac{(2x+1)\left(-2 + \sqrt{2(2+\pi^2)}\right)}{4x + 2 + \sqrt{2(2+\pi^2)}} \right] = -\frac{4\left(2 + \pi^2 - \sqrt{2(2+\pi^2)}\right)}{\left(4x + \sqrt{2(2+\pi^2)} + 2\right)^2} < 0.$$

Em outras palavras, a expressão acima assume valor negativo menor que $-1/2$ no ponto $n = 1$ e é estritamente decrescente de n . Logo, $\gamma_n(l) < -1/2$, ou seja, o zero positivo de $\gamma_n(\beta)$ é sempre maior que l para qualquer n inteiro positivo. Agora, provaremos que tal zero positivo converge para l quando n é suficientemente grande.

Denotemos por

$$\beta_+(n) := \frac{8 - (2n + 5)\kappa(n) - \sqrt{4 + (4n^2 + 4n - 1)\kappa(n)[6 - \kappa(n)]}}{2(-2 + \kappa(n))},$$

onde $\kappa(n) := 1 + \cos(n\pi/(n+1))$, o zero positivo de $\gamma_n(\beta)$. Verifique-se que $\beta_+(n)$ converge para $l := -2 + \sqrt{\frac{1}{2}(2 + \pi^2)}$ quando $n \rightarrow \infty$. Para calcular o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_+(n)$, usamos os fatos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[1 + \cos \left(\frac{n\pi}{n+1} \right) \right] = 0^+$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[1 + \cos \left(\frac{n\pi}{n+1} \right) \right] = \frac{\pi^2}{2}.$$

Em resumo, $\gamma_n(\beta)$ para $\beta > l$ é um ramo da parábola cujo ponto de intersecção com eixo β é sempre maior que l e converge para l quando n é suficientemente grande e $\gamma_n(l) < -1/2$. Logo, para $\beta > l$, a função $\gamma_n(\beta)$ converge pontualmente para a semi-reta $\beta = l$ em $1/2 < \alpha$.

Para completar a demonstração, a desigualdade $\gamma_n(-1/2) < 0$ para qualquer n inteiro positivo. Isto é uma consequência da desigualdade

$$\gamma_n(-1) = -\frac{2n(n+2)+2}{2n+2} < 0$$

e o numerador de $\gamma_n(\beta)$ ser um polinômio de grau 2 com coeficiente dominante positivo e possui os dois zeros reais com sinais opostos.

Corolário 6.2.3 (Yen Chi Lun e F. R. Rafaeli). Dado $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n$, sejam $x_{n,k}^{(\alpha,\beta)} = \cos(\theta_{n,k}^{(\alpha,\beta)})$, $k = 1, \dots, n$, os zeros do n -ésimo polinômio de Jacobi em ordem decrescente. Então, a desigualdade

$$\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)} \left(\cos \frac{\theta}{n} \right) < \tilde{P}_{n+1}^{(\alpha,\beta)} \left(\cos \frac{\theta}{n+1} \right)$$

vale para $0 < \theta < \theta_{n,1}^{(\alpha,\beta)}$ e $(\alpha, \beta) \in \Omega_1$, com Ω_1 definida em (6.2.2).

Teorema 6.2.4 (Yen Chi Lun e F. R. Rafaeli). Dado $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n$, sejam $x_{n,k}^{(\alpha,\beta)} = \cos(\theta_{n,k}^{(\alpha,\beta)})$, $k = 1, \dots, n$, os zeros do n -ésimo polinômio de Jacobi em ordem decrescente. Então, a desigualdade

$$\left(n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2} \right) \theta_{n,k}^{(\alpha,\beta)} > \left(n + \frac{\alpha + \beta + 3}{2} \right) \theta_{n+1,k}^{(\alpha,\beta)} \quad (6.2.4)$$

vale em Ω .

Demonstração. Para provar a desigualdade (6.2.4), usaremos a mesma técnica na demonstração do Teorema 6.2.1 definindo $y = z_n(\theta; \gamma_n, \alpha, \beta)$ e $Y = z_{n+1}(\theta; \gamma_{n+1}, \alpha, \beta)$, onde $\gamma_n = n + (\alpha + \beta + 1)/2$. Evidentemente, $y = z_n(\theta; \gamma_n, \alpha, \beta)$ e $Y = z_{n+1}(\theta; \gamma_{n+1}, \alpha, \beta)$ satisfazem à condição (4.2.3) no ponto $a = 0$ quando $\alpha > 1/2$. Para caso $-1 < \alpha < -1/2$, precisaremos verificar a condição

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} [z_n(\theta; \gamma_n, \alpha, \beta) z'_{n+1}(\theta; \gamma_{n+1}, \alpha, \beta) - z'_n(\theta; \gamma_n, \alpha, \beta) z_{n+1}(\theta; \gamma_{n+1}, \alpha, \beta)] = 0.$$

Para facilitar o cálculo do limite anterior, observemos que

$$(\sin(\theta/2\gamma_n))^{\alpha+1/2} \sim (\theta/2\gamma_n)^{\alpha+1/2} \quad \text{e} \quad (\cos(\theta/2\gamma_n))^{\beta+1/2} \sim 1,$$

para θ suficientemente pequena e positiva.

Logo, pelo terceiro item do Lema 6.1.1 e, em seguida, o primeiro item do Teorema 4.2.1, concluímos a demonstração. $\square$

Uma outra consequência dos Teoremas 6.2.1 e 6.2.4 e o fato (vide página 193 do [34])

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n\theta_{n,k}^{(\alpha,\beta)} = j_k^{(\alpha)}, \quad (6.2.5)$$

onde $j_k^{(\alpha)}$ é o k -ésimo positivo zero da função de Bessel $J_\alpha(z)$, é o seguinte corolário:

Corolário 6.2.5 (Yen Chi Lun e F. R. Rafaeli). Dado $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n$, sejam $x_{n,k}^{(\alpha,\beta)} = \cos(\theta_{n,k}^{(\alpha,\beta)})$, $k = 1, \dots, n$, os zeros do n -ésimo polinômio de Jacobi em ordem decrescente. Então, a desigualdade

$$\frac{j_k^{(\alpha)}}{n + (\alpha + \beta + 1)/2} < \theta_{n,k}^{(\alpha,\beta)} < \frac{j_k^{(\alpha)}}{n}$$

é válida para $\alpha, \beta \in \Omega \cap \Omega_1$.

Demonstração. Pelos Teoremas 6.2.1, 6.2.4 e (6.2.5), sabemos que $\{n\theta_{n,k}^{(\alpha,\beta)}\}_{n=1}^\infty$ é uma sequência crescente e $\{(n + (n + \alpha + \beta)/2)\theta_{n,k}^{(\alpha,\beta)}\}_n^\infty$ decrescente, e convergem para $j_k^{(\alpha)}$, para $\alpha, \beta \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ e $1 \leq k \leq n$. O que segue, imediatamente, o resultado. $\square$

Observemos que as desigualdades do Corolário 6.2.5 são válidas, uma vez que a intersecção das regiões Ω e Ω_1 é não vazio.

Capítulo 7

Assintótica dos Zeros dos Polinômios de Gegenbauer

“A imaginação é mais importante que a ciência, porque a ciência é limitada, ao passo que a imaginação abrange o mundo inteiro.”

Albert Einstein

Mencionamos nos capítulos anteriores que os zeros de polinômios ortogonais parametrizados são funções contínuas de seus parâmetros, tais como os polinômios ortogonais de Jacobi. Mas, será que eles possuem comportamentos monótonos ou são convergentes quando seus parâmetros tendem ao infinito? Os primeiros resultados sobre esta questão foram dados para os zeros dos polinômios de Gegenbauer $C_n^{(\lambda)}(x)$. A solução veio depois de uma série de artigos publicados ao longo de 25 anos, nos quais verificam-se várias conjecturas e contribuições.

Historicamente, o primeiro a colocar tal questão para os zeros positivos de $C_n^{(\lambda)}(x)$ foi A. Laforgia. Ele conjecturou que $\lambda x_{n,k}(\lambda)$ cresce para $\lambda > 0$. O próprio A. Laforgia estabeleceu este resultado para $\lambda \in (0, 1)$, onde $x_{n,k}(\lambda)$ são os zeros de $C_n^{(\lambda)}(x)$ em ordem decrescente.

Conjectura 7.0.6 (A. Laforgia, [23]). Dados $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $k = 1, \dots, [n/2]$, sejam $x_{n,k}(\lambda)$ os zeros do n -ésimo polinômio de Gegenbauer em ordem decrescente. Então, $\lambda x_{n,k}(\lambda)$ são funções crescentes de λ para $\lambda > 0$.

Teorema 7.0.7 (A. Laforgia, [23]). Dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $k = 1, \dots, [n/2]$, sejam $x_{n,k}(\lambda)$ os zeros do n -ésimo polinômio de Gegenbauer em ordem decrescente. Então, $\lambda x_{n,k}(\lambda)$ são funções crescentes de λ para $\lambda \in (0, 1)$.

S. Ahmed, M. E. Muldoon e R. Spigler, em 1986, refinaram um resultado de Spigler de 1984 [30], demonstrando o seguinte teorema.

Teorema 7.0.8 (S. Ahmed, M. E. Muldoon e R. Spigler, [2]). Dados $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $k = 1, \dots, [n/2]$, sejam $x_{n,k}(\lambda)$ os zeros do n -ésimo polinômio de Gegenbauer em ordem decrescente. Então,

$$\sqrt{\lambda + \frac{2n^2 + 1}{4n + 2}} x_{n,k}(\lambda) \quad (7.0.1)$$

são estritamente crescentes para $\lambda \in (-1/2, 3/2]$.

Mais tarde, M. E. H. Ismail e J. Letessier refinaram a conjectura com a função que possui o comportamento assintótico preciso, $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$.

Conjectura 7.0.9 (M. E. H. Ismail e J. Letessier, [21]). Dados $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $k = 1, \dots, [n/2]$, sejam $x_{n,k}(\lambda)$ os zeros do n -ésimo polinômio de Gegenbauer em ordem decrescente. Então, $\sqrt{\lambda} x_{n,k}(\lambda)$ são funções crescentes de λ para $\lambda > 0$.

Finalmente, R. A. Askey sugeriu que a função extrema e universal, isto é, que não depende de n , seja $f(\lambda) = \sqrt{\lambda + 1}$. A sugestão de R. A. Askey foi reformulada como conjectura por M. E. H. Ismail em 1989.

Conjectura 7.0.10 (M. E. H. Ismail, [22]). Dados $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $k = 1, \dots, [n/2]$, sejam $x_{n,k}(\lambda)$ os zeros do n -ésimo polinômio de Gegenbauer em ordem decrescente. Então, $\sqrt{\lambda + 1} x_{n,k}(\lambda)$ são funções crescentes de λ para $\lambda > -1/2$.

No mesmo ano da publicação da Conjectura 7.0.10, E. K. Ifantis e P. D. Siafarikas a provaram para o maior zero positivo $x_{n,1}(\lambda)$, usando uma técnica de função analítica.

Teorema 7.0.11 (E. K. Ifantis e P. D. Siafarikas, [20]). Dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, seja $x_{n,1}(\lambda)$ o maior zero do n -ésimo polinômio de Gegenbauer. Então, $\sqrt{\lambda + 1} x_{n,1}(\lambda)$ são funções crescentes de λ para $\lambda > -1/2$.

Em 1996, D. K. Dimitrov provou a Conjectura 7.0.10 para n suficientemente grande. Além disso, ele provou essa conjectura para o maior zero $x_{n,1}$ como o Teorema 7.0.11, mas usando um método diferente.

Teorema 7.0.12 (D. K. Dimitrov, [5]). Dados $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $k = 1, \dots, [n/2]$, seja ν um inteiro não-negativo. Então, para todo $n > 1 + \sqrt{\nu^2 + 3\nu + 3/2}$, a expressão $\sqrt{\lambda + 1} x_{n,k}(\lambda)$ é função crescente de λ para $\lambda \in (-1/2, 3/2 + \nu]$.

Corolário 7.0.13 (D. K. Dimitrov, [5]). Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, e $k = 1, \dots, [n/2]$. Então, $\sqrt{\lambda + 1} x_{n,k}(\lambda)$ é função crescente de λ para $\lambda \in (-1/2, 9/2]$.

Teorema 7.0.14 (D. K. Dimitrov, [5]). Seja $\lambda > -1/2$. Então,

- para todo n par, $\sqrt{\lambda + 1} x_{n,k}(\lambda)$ é função crescente de λ ;

- para todo $n \geq 3$ ímpar, $\sqrt{\lambda + 2}x_{n,k}(\lambda)$ é função crescente de λ .

Em 1999, A. Elbert e P. D. Siafarikas provaram o seguinte resultado:

Teorema 7.0.15 (A. Elbert e P. D. Siafarikas, [12]). Dados $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $k = 1, \dots, [n/2]$, sejam $x_{n,k}(\lambda)$ os zeros do n -ésimo polinômio de Gegenbauer em ordem decrescente. Então,

$$\sqrt{\lambda + \frac{2n^2 + 1}{4n + 2}}x_{n,k}(\lambda) \quad (7.0.2)$$

são funções estritamente crescentes para $\lambda > -1/2$.

O Teorema 7.0.15 estendeu o resultado de S. Ahmed, M. E. Muldoon e R. Spigler, que é o Teorema 7.0.8. Assim, provaram a conjectura de M. E. H. Ismail, J. Letessier e R. A. Askey [22, 21]. Finalmente, em 2002, D. K. Dimitrov e R. O. Rodrigues provaram que a função

$$f_n(\lambda) = \sqrt{\lambda + \frac{2n^2 + 1}{4n + 2}} \quad (7.0.3)$$

é assintoticamente extrema no sentido de que não existe nenhuma outra função que cresce mais lentamente do que essa e obriga os produtos $f_n(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$ a crescerem com λ .

Teorema 7.0.16 (D. K. Dimitrov e R. O. Rodrigues, [8]). Dados $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $k = 1, \dots, [n/2]$, sejam $x_{n,k}(\lambda)$ os zeros do n -ésimo polinômio de Gegenbauer em ordem decrescente. Se $h_n(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$ são funções crescentes de λ para $\lambda > -1/2$, então

$$\frac{h'_{2n}(\lambda)}{h_{2n}(\lambda)} > \frac{1}{2(n + \lambda)}$$

e

$$\frac{h'_{2n+1}(\lambda)}{h_{2n+1}(\lambda)} > \frac{1}{2(n + \lambda + 1)}.$$

Além disso, se $h_n(\lambda) = \sqrt{\lambda + c_n}$, então

$$c_{2n} < \frac{4n^2 + n + 1}{4n + 2}$$

e

$$c_{2n+1} < \frac{4n^2 + 7n + 1}{4n + 6}.$$

Assim, encerrou-se a discussão sobre a escolha da função $\sqrt{\lambda + c_n}$ tal que $\sqrt{\lambda + c_n}x_{n,k}(\lambda)$ seja uma função estritamente crescente e a faz crescer mais rápido do que qualquer outra escolha de c_n .

O correspondente problema de encontrar uma função $f_n(\alpha, \beta)$ tal que a expressão $f_n(\alpha, \beta)x_{n,k}(\alpha, \beta)$ tenha o comportamento monótono onde $x_{n,k}(\alpha, \beta)$ são zeros dos polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$

permaneceu em aberto até recentemente, apesar do interesse dos especialistas em Funções Especiais. Uma das possíveis razões para a falta de resultados nesta direção é que os zeros $x_{n,k}(\alpha, \beta)$ mudam de sinal. Isso indica que, ao invés de considerarmos os zeros de $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, seria mais razoável investigar as quantidades $1 - x_{n,k}(\alpha, \beta)$ ou $1 + x_{n,k}(\alpha, \beta)$ que não mudam de sinal.

Levando em consideração que os zeros dos polinômios de Jacobi satisfazem à relação

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \beta [1 - x_{n,k}(\alpha, \beta)] = 2l_{n,n-k+1}(\alpha),$$

com $l_{n,j}(\alpha)$ sendo os zeros do n -ésimo polinômio de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$, e reformulando o problema com a correta abordagem para o problema dos zeros de Jacobi, D. K. Dimitrov e F. R. Rafaei provaram os seguintes resultados:

Teorema 7.0.17 (D. K. Dimitrov e F. R. Rafaei, [7]). Dados $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $k = 1, \dots, n$, sejam $x_{n,k}(\alpha, \beta)$ os zeros do n -ésimo polinômio de Jacobi. Então, as expressões

$$f_n(\alpha, \beta)(1 - x_{n,k}(\alpha, \beta))$$

com

$$f_n(\alpha, \beta) = 2n^2 + 2n(\alpha + \beta + 1) + (\alpha + 1)(\beta + 1),$$

são funções estritamente crescentes de β para $-1 < \beta$.

Voltemos ao caso dos zeros de polinômios de Gegenbauer. Em 1992, A. Elbert e A. Laforgia estabeleceram uma fórmula assintótica para os zeros de polinômios ortogonais de Gegenbauer.

Teorema 7.0.18 (A. Elbert e A. Laforgia, [11]). Dados $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $k = 1, \dots, [n/2]$, sejam $x_{n,k}(\lambda)$ os zeros do n -ésimo polinômio de Gegenbauer em ordem decrescente. Então,

$$\begin{aligned} x_{n,k}(\lambda) &= h_{n,k}\lambda^{-1/2} - \frac{h_{n,k}}{8}(2n-1+2h_{n,k}^2)\lambda^{-3/2} \\ &+ h_{n,k}\left(\frac{12n^2-12n+1}{128} + \frac{5n-2}{24}h_{n,k}^2 + \frac{5}{96}h_{n,k}^4\right)\lambda^{-5/2} \\ &+ \mathcal{O}(\lambda^{-7/2}), \quad \lambda \rightarrow \infty, \end{aligned} \tag{7.0.4}$$

onde $h_{n,k}$ são os zeros do n -ésimo polinômio de Hermite.

Pela fórmula assintótica (7.0.4), podemos concluir imediatamente que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt{\lambda + c_n x_{n,k}(\lambda)} = h_{n,k}$$

para qualquer constante c_n . Portanto, as expressões $f_n(\lambda)x_{n,k}$, com $f_n(\lambda)$ definida em (7.0.3) além de serem estritamente crescentes, convergem para os correspondentes zeros do n -ésimo polinômio de Hermite. Além disso, pelo Teorema 7.0.16, $f_n(\lambda)$ é a função assintoticamente extrema.

O nosso propósito é continuar esta discussão. Mas, de que forma? Se multiplicarmos por $\sqrt{\lambda}$ a fórmula assintótica (7.0.4) e passarmos o segundo termo do lado direito para o lado esquerdo, obtemos imediatamente

$$\sqrt{\lambda}x_{n,k}(\lambda) + \frac{\frac{h_{n,k}}{8}(2n-1+2h_{n,k}^2)}{\lambda} = h_{n,k} + \mathcal{O}(\lambda^{-2}), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Portanto, pela fórmula assintótica acima, para quaisquer constantes c_n , d_n e e_n ,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\lambda + c_n x_{n,k}(\lambda)} + \frac{d_n}{\lambda + e_n} \right] = h_{n,k}.$$

Podemos, então, formular o seguinte problema:

Problema 7.0.19. Dados $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $k = 1, \dots, [n/2]$, sejam $x_{n,k}(\lambda)$ os zeros do n -ésimo polinômio de Gegenbauer em ordem decrescente. Para quais escolhas das sequências de constantes $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ e $\{e_n\}$ a expressão

$$\sqrt{\lambda + c_n x_{n,k}(\lambda)} + \frac{d_n}{\lambda + e_n} \quad (7.0.5)$$

torna-se estritamente decrescente e a faça decrescer mais rápido que qualquer outras escolhas de sequências de constantes?

Neste capítulo, forneceremos uma expressão $q_n(\lambda) = d_n/(\lambda + e_n)$ tal que a convergência das expressões (7.0.5) são estritamente decrescentes de λ em $(-1/2, 3/2]$. Desta maneira, estabeleceremos limites superiores e inferiores para os zeros do polinômio de Hermite em termos dos zeros do polinômio de Gegenbauer.

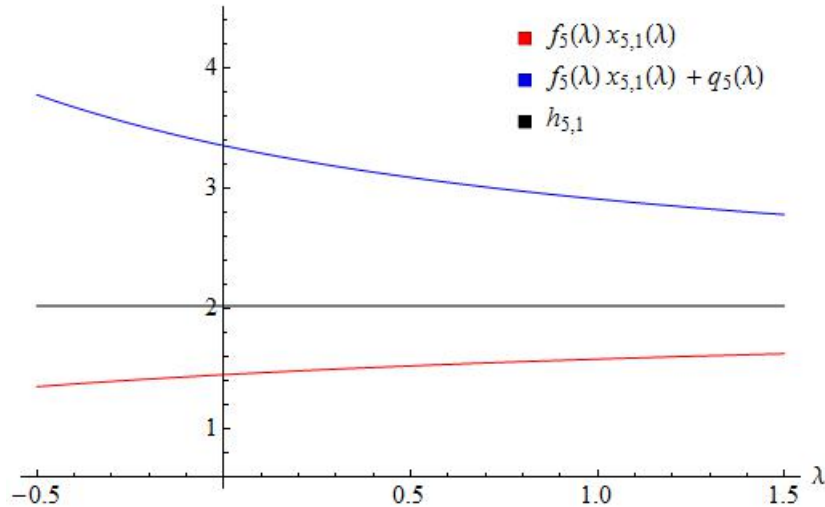


Figura 7.1: Exemplo do maior zero do polinômio ortogonal de Gegenbauer de grau 5.

7.1 Lemas Técnicos

Primeiramente, estabeleceremos alguns resultados técnicos que facilitarão a demonstração do resultado principal.

Lema 7.1.1 (D. K. Dimitrov, F. R. Rafaeli e Yen Chi Lun). Seja $n \in \mathbb{N}$. Então, a função

$$\sqrt{\lambda + \frac{1+2n^2}{2+4n}} + \frac{\frac{3+2n}{2+4n} \cdot \left(\frac{n^2+3n+2}{1+2n}\right)^{3/2}}{\lambda + \frac{1+2n^2}{2+4n}} \quad (7.1.1)$$

possui um único ponto crítico maior ou igual do que $-1/2$ e pertence ao intervalo $(3/2, 9/2)$. Além disso, ela é estritamente decrescente no intervalo $(-1/2, 3/2]$.

Demonstração. Definamos

$$q_n(\lambda) = \frac{\frac{3+2n}{2+4n} \cdot \left(\frac{n^2+3n+2}{1+2n}\right)^{3/2}}{\lambda + \frac{1+2n^2}{2+4n}}. \quad (7.1.2)$$

Temos que

$$\frac{\partial[f_n(\lambda) + q_n(\lambda)]}{\partial\lambda} = 0 \quad (7.1.3)$$

se, e somente se,

$$\eta_0(n) + \eta_1(n)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \eta_2(n)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 + \eta_3(n)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^3 = 0, \quad (7.1.4)$$

onde

$$\begin{aligned} \eta_0(n) &= \frac{(-n+n^2)^3}{(1+2n)^3} - \frac{(3+2n)^2(2+3n+n^2)^3}{(1+2n)^5} < 0, \\ \eta_1(n) &= \frac{3(-n+n^2)^2}{(1+2n)^2} > 0, \\ \eta_2(n) &= \frac{3(-n+n^2)}{(1+2n)} > 0, \\ \eta_3(n) &= 1 > 0, \end{aligned}$$

pois o polinômio (7.1.4) é o numerador da derivada parcial (7.1.3). É evidente que $\eta_1(n) > 0$ e $\eta_2(n) > 0$. Mostremos que $\eta_0(n) < 0$. De fato, $\eta_0(n) < 0$ é equivalente à desigualdade

$$(-n+n^2)^3 < \frac{(3+2n)^2}{(1+2n)^2}(2+3n+n^2)^3$$

e a última desigualdade é sempre válida. Logo, pela regra de sinais de Descartes 2.1.5, temos que (7.1.4) possui apenas um zero real maior que $-1/2$.

Por outro lado, temos que

$$\frac{\partial[f_n(\lambda) + q_n(\lambda)]}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=3/2} = \frac{-1}{(1+2n)\sqrt{\frac{2+3n+n^2}{1+2n}}} < 0$$

e

$$\frac{\partial[f_n(\lambda) + q_n(\lambda)]}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=9/2} > 0$$

se, e somente se,

$$\left(\frac{n^2 + 9n + 5}{n^2 + 3n + 2}\right)^3 > \left(\frac{2n + 3}{2n + 1}\right)^2$$

e se, e somente se,

$$\frac{8}{2}n + n + \frac{5}{2} > \frac{7}{2}n + 3$$

que é sempre válida.

Portanto, $f_n(\lambda) + q_n(\lambda)$ possui apenas um ponto crítico em $(3/2, 9/2)$ e é decrescente em $(-1/2, 3/2]$. $\square$

Lema 7.1.2 (D. K. Dimitrov, F. R. Rafaeli e Yen Chi Lun). Dado $n \geq 2$, a função definida por

$$\rho(\lambda) := \frac{-3 + 8n^3 + 24n^2\lambda + 12\lambda^2 + n(-2 + 24\lambda^2)}{(1+2n)(-1 + 4n^2 + 8n\lambda + 4\lambda^2)} \quad (7.1.5)$$

é uma função crescente para $\lambda > -1/2$.

Demonstração. Para verificar isto, derivamos a função $\rho(\lambda)$ para obter

$$\rho'(\lambda) = \frac{8n(1+n)[3 + 4n^2 - 4\lambda + 12\lambda^2 + 4n(-1 + 4\lambda)]}{(1+2n)(-1 + 4n^2 + 8n\lambda + 4\lambda^2)^2}.$$

Os zeros de $\rho'(\lambda)$ são $(-4n + 1 \pm 2\sqrt{n^2 + n - 2})/6$, onde

- $(-4n + 1 + 2\sqrt{n^2 + n - 2})/6 = -1/2$ quando $n = 2$,
- $(-4n + 1 + 2\sqrt{n^2 + n - 2})/6$ é uma função decrescente de n .

De fato,

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{-4n + 1 + 2\sqrt{n^2 + n - 2}}{6} \right) = \frac{1}{6} \left(-4 + \frac{2n + 1}{\sqrt{n^2 + n - 2}} \right) < 0,$$

para $n \geq 2$.

Portanto, temos que $\rho'(\lambda) > 0$ para $\lambda > -1/2$ e $n \geq 2$. $\square$

Lema 7.1.3 (D. K. Dimitrov, F. R. Rafaeli e Yen Chi Lun). Dados $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $\lambda \in (-1/2, 3/2]$, a função definida por

$$\Lambda_n(x; \lambda) := \frac{(n + \lambda)^2}{1 - x^2} + \frac{-\lambda^2 + \lambda + 1/2 + x^2/4}{(1 - x^2)^2} \quad (7.1.6)$$

é crescente para $x \in (0, 1)$. Em outras palavras,

$$\frac{\partial \Lambda_n(x; \lambda)}{\partial x} \geq 0,$$

para $x \in (0, 1)$.

Demonstração. Para verificar a afirmação acima, basta analisar a derivada em relação a x da expressão (7.1.6). Temos que

$$\frac{\partial \Lambda_n(x; \lambda)}{\partial x} = x \frac{[4(n + \lambda)^2 - 1]x^2 - 5 - 4n^2 - 8\lambda - 8n\lambda + 4\lambda^2}{2(-1 + x^2)^3}$$

e

$$\frac{\partial \Lambda_n(x; \lambda)}{\partial x} \geq 0 \Leftrightarrow [4(n + \lambda)^2 - 1]x^2 - 5 - 4n^2 - 8\lambda - 8n\lambda + 4\lambda^2 \leq 0,$$

para $x \in (0, 1)$. Observemos que:

- $4(n + \lambda)^2 - 1 > 0$ para $\lambda \in (-1/2, 3/2]$ e $n \geq 2$,
- o polinômio $[4(n + \lambda)^2 - 1]x^2 - 5 - 4n^2 - 8\lambda - 8n\lambda + 4\lambda^2 = 0$, em relação a x , possui zeros

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{5 + 4n^2 + 8\lambda + 8n\lambda - 4\lambda^2}{4(n + \lambda)^2 - 1}}$$

e

$$\frac{5 + 4n^2 + 8\lambda + 8n\lambda - 4\lambda^2}{4(n + \lambda)^2 - 1} \geq 1 \Leftrightarrow \lambda \in [-1/2, 3/2].$$

Portanto, o numerador de $\partial \Lambda_n(x; \lambda)/\partial x$ é um polinômio de grau 2, de concavidade para cima e dois zeros com valores absolutos maiores que 1. Assim, concluímos a demonstração. $\square$

7.2 Resultado Principal

Teorema 7.2.1 (D. K. Dimitrov, F. R. Rafaeli e Yen Chi Lun). Dados $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $k = 1, \dots, [n/2]$, sejam $x_{n,k}(\lambda)$ os zeros positivos do n -ésimo polinômio de Gegenbauer. Então,

$$\sqrt{\lambda + \frac{1 + 2n^2}{2 + 4n}} x_{n,k}(\lambda) + \frac{\frac{3+2n}{2+4n} \cdot \left(\frac{n^2+3n+2}{1+2n}\right)^{3/2}}{\lambda + \frac{1+2n^2}{2+4n}}, \quad (7.2.1)$$

são funções decrescentes de λ para $\lambda \in (-1/2, 3/2]$.

Demonstração. Os polinômios ortogonais de Gegenbauer satisfazem à seguinte equação diferencial da forma Sturm - Liouville :

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \Lambda_n(x; \lambda) u(x) = 0, \quad (7.2.2)$$

onde $\Lambda_n(x; \lambda)$ é definida pela equação (7.1.6) do Lema 7.1.3 e possui a solução

$$u_n(x; \lambda) = (1 - x^2)^{\lambda/2+1/4} \cdot C_n^{(\lambda)}(x). \quad (7.2.3)$$

Vamos investigar apenas os zeros positivos de u_n , pois os zeros de polinômio de Gegenbauer são simétricos, ou seja, para $x \in (-1, 1)$.

Fazendo a transformação $x = (z - q_n(\lambda))/f_n(\lambda)$, onde $q_n(\lambda)$ e $f_n(\lambda)$ são as funções definidas anteriormente em (7.0.3) e (7.1.2), temos

$$\frac{d^2 U(z; \lambda)}{dz^2} + \tilde{\Lambda}_n(z; \lambda) \cdot U(z; \lambda) = 0, \quad (7.2.4)$$

com

$$\tilde{\Lambda}_n(z; \lambda) := \frac{(n + \lambda)^2}{f_n^2 - (z - q_n)^2} + \frac{(-\lambda^2 + \lambda + 1/2)f_n^2 + (z - q_n)^2/4}{(f_n^2 - (z - q_n)^2)^2} \quad (7.2.5)$$

$$= f_n^2(\lambda) \cdot \Lambda_n\left(\frac{z - q_n(\lambda)}{f_n(\lambda)}; \lambda\right) \quad (7.2.6)$$

e sua solução

$$U_n(z; \lambda) = \left[1 - \left(\frac{z - q_n(\lambda)}{f_n(\lambda)}\right)^2\right]^{\lambda/2+1/4} \cdot C_n^{(\lambda)}\left(\frac{z - q_n(\lambda)}{f_n(\lambda)}\right), \quad (7.2.7)$$

$$U'_n(z; \lambda) = \left[1 - \left(\frac{z - q_n(\lambda)}{f_n(\lambda)}\right)^2\right]^{\lambda/2-3/4} \cdot \left[\frac{d}{dz} C_n^{(\lambda)}\left(\frac{z - q_n}{f_n}\right) - 2\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{4}\right) \frac{z - q_n}{f_n^2} C_n^{(\lambda)}\left(\frac{z - q_n}{f_n}\right)\right]. \quad (7.2.8)$$

Agora, depois da transformada, investigaremos a solução U_n no intervalo $(q_n(\lambda), q_n(\lambda) + f_n(\lambda))$.

Evidentemente, a solução (7.2.7) satisfaz à condição (4.2.12) da Proposição 4.2.7. De fato, dados λ_k, λ_j quaisquer,

$$\lim U(z_j; \lambda_j) U'(z_k; \lambda_k) = C_n^{(\lambda_j)}(0) \frac{d}{dz_k} \left[C_n^{(\lambda_k)}(z_k) \right] \Big|_{z_k=0} = 0$$

para $z_k \rightarrow q_n(\lambda_k)$ e $z_j \rightarrow q_n(\lambda_j)$. Logo, a afirmação segue-se pela Observação 4.2.8.

Fazendo a derivada parcial em relação a λ na função $\tilde{\Lambda}_n(z; \lambda)$, temos

$$\frac{\partial \tilde{\Lambda}_n(z; \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{(z - q_n) \left[A_n \cdot (z - q_n)^3 + B_n \cdot (z - q_n)^2 + C_n \cdot (z - q_n) + D_n \right]}{\left[f_n^2 - (z - q_n)^2 \right]^3}, \quad (7.2.9)$$

onde

$$\begin{aligned} A_n &= A_n(\lambda) = 2(n + \lambda), \\ B_n &= B_n(\lambda) = -\frac{\partial q_n(\lambda)}{\partial \lambda} \left[\frac{1}{2} - (n + \lambda)^2 \right], \\ C_n &= C_n(\lambda) = \frac{-3 - 8n - 4n^3 - 6\lambda - 12n\lambda - 12n^2\lambda}{2(1 + 2n)}, \\ D_n &= D_n(\lambda) = -\frac{\partial q_n(\lambda)}{\partial \lambda} (-16n)(\lambda + f_n(0)^2)(\lambda - \delta_-)(\lambda - \delta_+), \end{aligned}$$

com

$$\delta_{\pm} = \frac{1}{2}(2 + 2n \pm \sqrt{9 + 8n + 8n^2}).$$

Observemos que

- $A_n(\lambda)$, $-B_n(\lambda)$ e $-C_n(\lambda)$ são positivos para $2 \leq n$ e $-1/2 < \lambda$. De fato, o numerador de $C_n(\lambda)$ é uma função decrescente de λ e n . Então, escolhendo $\lambda = -1/2$, temos que o numerador é igual a $(-2n + 6n^2 - 4n^3)$ que tem $n = 1/2$, $n = 0$ e $n = 1$ como zeros, ou seja, $(-2n + 6n^2 - 4n^3)$ é não positivo no intervalo $[1, \infty)$. Logo, podemos concluir que $C_n(\lambda)$ é não positivo para $1 \leq n$ e $-1/2 < \lambda$. A análise dos sinais de $A_n(\lambda)$ e $B_n(\lambda)$ é simples.
- $\delta_- \leq -1/2$. De fato,

$$\sqrt{9 + 8n + 8n^2} = \sqrt{(2n + 3)^2 + 4n(n - 1)} \geq 2n + 3$$

o que implica que

$$-\sqrt{9 + 8n + 8n^2} \leq -2n - 3 \Leftrightarrow \frac{2 + 2n - \sqrt{9 + 8n + 8n^2}}{2} \leq \frac{-1}{2}.$$

Então, obtemos as seguintes desigualdades para os zeros de $D_n(\lambda)$:

$$-f_n(0)^2, \delta_- \leq \frac{-1}{2} < \frac{9}{2} \leq \delta_+.$$

Logo, podemos concluir que $D_n(\lambda)$ é positivo para

$$\lambda \in (-1/2, \delta_+). \quad (7.2.10)$$

Definamos

$$P_n(z; \lambda) := A_n(\lambda)(z - q_n)^3 + B_n(\lambda)(z - q_n)^2 + C_n(\lambda)(z - q_n) + D_n(\lambda). \quad (7.2.11)$$

Então, temos

$$P'_n(z; \lambda) := 3A_n(\lambda)(z - q_n)^2 + 2B_n(\lambda)(z - q_n) + C_n(\lambda). \quad (7.2.12)$$

Portanto,

$$P_n(q_n(\lambda); \lambda) = D_n(\lambda) > 0,$$

para λ satisfazendo a (7.2.10).

Sob a condição (7.2.10) e a regra de sinais de Descartes 2.1.5, o polinômio (7.2.11) possui dois ou nenhum zeros reais no intervalo $(q_n(\lambda), \infty)$ e sua derivada (7.2.12) possui um zero maior que $q_n(\lambda)$. Por outro lado, temos

$$P_n(q_n(\lambda) + f_n(\lambda); \lambda) > 0 \quad (7.2.13)$$

e

$$P'_n(q_n(\lambda) + f_n(\lambda); \lambda) \leq 0 \quad (7.2.14)$$

De fato, seja $q_n(\lambda) = d_n/f_n^2(\lambda)$, onde

$$d_n = \rho(3/2) \frac{1}{2} \left(\frac{1+2n^2}{2+4n} + \frac{3}{2} \right)^{3/2} = \frac{3+2n}{1+2n} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{n^2+3n+2}{1+2n} \right)^{3/2} \quad (7.2.15)$$

com $\rho(\lambda)$ definida no Lema 7.1.5. Assim,

$$\begin{aligned} 0 < P_n(q_n(\lambda) + f_n(\lambda); \lambda) &= 2(n+\lambda) \left(\frac{1+2n^2}{2+4n} + \lambda \right)^{3/2} \\ &\quad + \frac{\sqrt{\frac{1+2n^2}{2+4n} + \lambda} (-3 - 8n - 4n^3 - 6\lambda - 12n\lambda - 12n^2\lambda)}{2+4n} \\ &\quad - q'_n(\lambda)(-4) \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \left(\lambda - \frac{3}{2} \right) \left(\lambda + \frac{1+2n^2}{2+4n} \right) \end{aligned}$$

para $\lambda \in (-1/2, 3/2)$. Mas, isso é equivalente a

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1+2n^2}{2+4n} + \lambda \right)^{3/2} < d_n. \quad (7.2.16)$$

Para $\lambda = 3/2$, temos que $P_n(\lambda; q_n(\lambda) + f_n(\lambda)) = 0$. Para desigualdade (7.2.14), temos

$$\begin{aligned} 0 \geq P'_n(q_n(\lambda) + f_n(\lambda); \lambda) &= 6(n+\lambda) \left(\frac{1+2n^2}{2+4n} + \lambda \right) \\ &\quad + \frac{-3 - 8n - 4n^3 - 6\lambda - 12n\lambda - 12n^2\lambda}{2+4n} \\ &\quad + 2 \sqrt{\frac{1+2n^2}{2+4n} + \lambda} \left(\frac{1}{2} - 2(n+\lambda)^2 \right) (-q'_n(\lambda)), \end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\rho(\lambda) \frac{1}{2} \left(\frac{1+2n^2}{2+4n} + \lambda \right)^{3/2} \leq d_n. \quad (7.2.17)$$

Como $\rho(\lambda)$ é uma função crescente e

$$\rho(3/2) > \rho(1) = \frac{8n^3 + 24n^2 + 22n + 9}{8n^3 + 20n^2 + 12n + 3} > 1,$$

as desigualdades em (7.2.13) são satisfeitas.

Em resumo,

$$\begin{aligned} P_n(q_n(\lambda); \lambda) &= D_n(\lambda) > 0, \\ P_n(q_n(\lambda) + f_n(\lambda); \lambda) &\geq 0, \\ P'_n(q_n(\lambda) + f_n(\lambda); \lambda) &\leq 0. \end{aligned}$$

Logo, o polinômio (7.2.11) não possui zeros no intervalo $(q_n(\lambda), q_n(\lambda) + f_n(\lambda))$, ou seja,

$$\frac{\partial \tilde{\Lambda}_n(z, \lambda)}{\partial \lambda} > 0$$

neste intervalo. Por outro lado, pela definição da função $\tilde{\Lambda}_n(z; \lambda)$ em (7.2.5) e Lema 7.1.3, temos

$$\frac{\partial \tilde{\Lambda}_n(z, \lambda)}{\partial z} = \frac{1}{f_n^3(\lambda)} \frac{\partial \Lambda_n(x, \lambda)}{\partial x} \geq 0,$$

para $z \in (q_n(\lambda), q_n(\lambda) + f_n(\lambda))$. Logo, pelo Lema 7.1.1 e Corolário 4.2.9, os zeros $z = x f_n(\lambda) + q_n(\lambda)$ são decrescentes. Lembremos que, para este caso, a condição do limite (4.2.12) é satisfeita. $\square$

Corolário 7.2.2 (D. K. Dimitrov, F. R. Rafaeli e Yen Chi Lun). Dados $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $k = 1, \dots, [n/2]$, sejam $x_{n,k}(\lambda)$ e $h_{n,k}$ os zeros, em ordem decrescente, do n -ésimo polinômio de Gegenbauer e de Hermite, respectivamente. Então,

$$\sqrt{\lambda + \frac{1+2n^2}{2+4n}} x_{n,k}(\lambda) + \frac{\frac{3+2n}{2+4n} \cdot \left(\frac{n^2+3n+2}{1+2n} \right)^{3/2}}{\lambda + \frac{1+2n^2}{2+4n}} > h_{n,k}, \quad (7.2.18)$$

para $\lambda \in (-1/2, 3/2]$.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Ahmed, A. Laforgia, and M. E. Muldoon. On the spacing of the zeros of some classical orthogonal polynomials. *J. London Math. Soc. (2)*, 25(2):246–252, 1982.
- [2] S. Ahmed, Martin E. Muldoon, and Renato Spigler. Inequalities and numerical bounds for zeros of ultraspherical polynomials. *SIAM J. Math. Anal.*, 17(4):1000–1007, 1986.
- [3] T. S. Chihara. *An introduction to orthogonal polynomials*. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1978. Mathematics and its Applications, Vol. 13.
- [4] Dimitar K. Dimitrov. A late report on interlacing of zeros of polynomials. *Constructive Theory of Functions, Sozopol 2010: In memory of Borislav Bojanov (G. Nikolov and R. Uluchev, Eds)*, Marin Drinov Acad. Publ. House, Sofia.
- [5] Dimitar K. Dimitrov. On a conjecture concerning monotonicity of zeros of ultraspherical polynomials. *J. Approx. Theory*, 85(1):88–97, 1996.
- [6] Dimitar K. Dimitrov. Electrostatic interpretation and bounds for the extreme zeros of classical orthogonal polynomials. *Bull. Greek Math. Soc.*, 40:43–48, 1998.
- [7] Dimitar K. Dimitrov and Fernando R. Rafaeli. Monotonicity of zeros of Jacobi polynomials. *J. Approx. Theory*, 149(1):15–29, 2007.
- [8] Dimitar K. Dimitrov and Romildo O. Rodrigues. On the behaviour of zeros of Jacobi polynomials. *J. Approx. Theory*, 116(2):224–239, 2002.
- [9] Dimitar K. Dimitrov and Walter Van Assche. Lamé differential equations and electrostatics. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128(12):3621–3628, 2000.
- [10] K. Driver and K. Jordaan. Bounds for extreme zeros of some classical orthogonal polynomials. *J. Approx. Theory*, 164(9):1200–1204, 2012.
- [11] Árpád Elbert and Andrea Laforgia. Asymptotic formulas for ultraspherical polynomials $P_n^\lambda(x)$ and their zeros for large values of λ . *Proc. Amer. Math. Soc.*, 114(2):371–377, 1992.
- [12] Árpád Elbert and Panayiotis D. Siafarikas. Monotonicity properties of the zeros of ultraspherical polynomials. *J. Approx. Theory*, 97(1):31–39, 1999.

- [13] Walter Gautschi. New conjectured inequalities for zeros of Jacobi polynomials. *Numer. Algorithms*, 50(3):293–296, 2009.
- [14] Walter Gautschi. On conjectured inequalities for zeros of Jacobi polynomials. *Numer. Algorithms*, 50(1):93–96, 2009.
- [15] Walter Gautschi. Remark on “New conjectured inequalities for zeros of Jacobi polynomials” by Walter Gautschi, *Numer. Algorithms* 50:293–296 (2009) [mr2487240]. *Numer. Algorithms*, 57(4):511, 2011.
- [16] Walter Gautschi and Paul Leopardi. Conjectured inequalities for Jacobi polynomials and their largest zeros. *Numer. Algorithms*, 45(1-4):217–230, 2007.
- [17] David Gómez-Ullate, Niky Kamran, and Robert Milson. An extended class of orthogonal polynomials defined by a Sturm-Liouville problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 359(1):352–367, 2009.
- [18] David Gómez-Ullate, Niky Kamran, and Robert Milson. An extension of Bochner’s problem: exceptional invariant subspaces. *J. Approx. Theory*, 162(5):987–1006, 2010.
- [19] C. S. Hönl. *Análise funcional e o problema de Sturm-Liouville*. Monografias de matemática. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Conselho Nacional de Pesquisas, 1971.
- [20] E. K. Ifantis and P. D. Siafarikas. Differential inequalities on the greatest zero of Laguerre and ultraspherical polynomials. *Actas del VI Simposium sobre Polinomios Ortogonales y Aplicaciones, Gijón*, 97:187–197, 1989.
- [21] M. E. H. Ismail and J. Letessier. Monotonicity of zeros of ultraspherical polynomials. *Orthogonal Polynomials and Their Applications, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin*, 1329:329–330, 1988.
- [22] Mourad E. H. Ismail. Monotonicity of zeros of orthogonal polynomials. In *q-series and partitions (Minneapolis, MN, 1988)*, volume 18 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 177–190. Springer, New York, 1989.
- [23] A. Laforgia. Monotonicity properties for the zeros of orthogonal polynomials and Bessel functions. In *Orthogonal polynomials and applications (Bar-le-Duc, 1984)*, volume 1171 of *Lecture Notes in Math.*, pages 267–277. Springer, Berlin, 1985.
- [24] Andrea Laforgia. A monotonic property for the zeros of ultraspherical polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 83(4):757–758, 1981.
- [25] Paul C. Leopardi. Positive weight quadrature on the sphere and monotonicities of Jacobi polynomials. *Numer. Algorithms*, 45(1-4):75–87, 2007.
- [26] M. Marden. *Geometry of Polynomials*. Number N^o 3 in Geometry of Polynomials. American Mathematical Society, 1966.

- [27] André Markoff. Sur les racines de certaines équations. *Math. Ann.*, 27(2):177–182, 1886.
- [28] N. Obreshkov. *Zeros of Polynomials*. Bulgarian Academic Monographs. Marin Drinov Academic Publishing House, 2003.
- [29] Jorge Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Projecto Euclides. Inst. de matemática pura e aplicada, 1979.
- [30] Renato Spigler. On the monotonic variation of the zeros of ultraspherical polynomials with the parameter. *Canad. Math. Bull.*, 27(4):472–477, 1984.
- [31] T. J. Stieltjes. Sur les polynomes de Jacobi. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 100:620–622, 1885.
- [32] T. J. Stieltjes. Sur les quelques théorèmes d’algèbre. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 100:439–440, 1885.
- [33] T. J. Stieltjes. Sur les racines de l’équation $X^n = 0$. *Acta Math.*, 9(1):385–400, 1887.
- [34] Gábor Szegő. *Orthogonal polynomials*. American Mathematical Society, Providence, R.I., fourth edition, 1975. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII.
- [35] Ahmed I Zayed and Gilbert G Walter. On the inversion of integral transforms associated with sturm-liouville problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 164(1):285 – 306, 1992.