CLASSIFICAÇÃO DE FIBRADOS VETORIAIS

Marcos Vieira Teixeira

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPINAS - SÃO PAULO
BRASIL

CLASSIFICAÇÃO DE FIBRADOS VETORIAIS

Marcos Vieira Teixeira

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Dr. José Carlos de Souza Kiihl.

Durante a realização deste trabalho, o autor teve apoio financeiro da FAPESP e do CAPES.

A G R A D E C I M E N T O S

Apresentamos os nossos agradecimentos a todas as pessoas que contribuiram, de forma direta ou indireta, para a realização deste trabalho, com destaque:

Ao Prof. e amigo Dr. José Carlos de Souza Kiihl, que contribuiu de maneira fundamental, com sua segura orientação.

Ao colega e amigo Tadeu Fernandes de Carvalho, pelas oportunas sugestões.

À Marlene, Atsuko e Isabel pelo excelente trabalho de datilografia.

Marcos Vieira Teixeira

Ilha Solteira, 1981

ÍNDICE

Para Silvana, Rosaura e Helvécio.

INTRODUÇÃO

O objetivo desse trabalho é demonstrar o Teorema de Classificação de Fibrados Vetoriais que diz: "Existe uma correspondência 1-1 entre as classes de equivalência dos fibrados de K-planos sobre um complexo celular localmente finito K e as classes de homotopia das aplicações $K \to BO_K$".

No capitulo I é dado a definição de espaço fibrado, é apresentado alguns exemplos que motivam a demonstração de um teorema de existência e um de unicidade de fibrados. Também é introduzido o conceito de equivalência de fibrados de mesma base.

No capítulo II é definido fibrado principal, é demonstrado o teorema de equivalência para G-fibrados principais. - Neste capítulo definimos também G-espaço principal e demonstramos que todo G-espaço principal é um G-fibrado principal e reciprocamente.

No capítulo III é definido fibrado induzido, aplicação induzida e aplicação fibrada.

Finalmente no capítulo IV definimos fibrado vetorial e demonstramos o "Teorema de Classificação".

Não tentamos fazer um trabalho auto-suficiente, motivo pelo qual usamos alguns resultados da teoria de homotopia - sem demonstrá-los.

CAPÍTULO I. ESPAÇOS FIBRADOS

1. FIBRADOS: DEFINIÇÃO E EXEMPLOS

DEFINIÇÃO 1.0. Um G-fibrado é uma aplicação contínua $\pi: E \longrightarrow B$, entre espaços de Hausdorff, juntamente com um espaço F satisfazendo as seguintes condições:

(i) para cada $b \in B$ existe uma vizinhança U_α de b e um homeomorfismo.

$$\phi_\alpha: U_\alpha \times F \longrightarrow \pi^{-1} U_\alpha \quad \text{tal que}$$

$$\pi\, \phi_\alpha(u,v) = u$$

(ii) existem aplicações contínuas $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$. Onde G é um grupo com uma topologia que o faz agir como um grupo de homeomorfismos de F, com $g_{\alpha\beta}(p) = \pi_2 \phi_\beta^{-1} \phi_\alpha i_p$: $F \longrightarrow F$, onde $i_p: F \longrightarrow p \times F$ é a inclusão e π_2: $U_\beta \times F \longrightarrow F$ é a projeção. De modo que:

1.1a $g_{\alpha\alpha}(p) = 1$

1.1b $g_{\alpha\beta}(p) = g_{\beta\alpha}^{-1}(p)$

1.1c $g_{\alpha\gamma}(p) = g_{\beta\gamma}(p)\, g_{\alpha\beta}(p)$

1.1d $g^*_{\alpha\beta}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$

$$g^*_{\alpha\beta}\,(p,\omega) = (p,\ g_{\alpha\beta}(p)\,\omega)$$

é contínua.

Usaremos a seguinte terminologia:

E será chamado "espaço total" de π

B será chamado "espaço base" de π

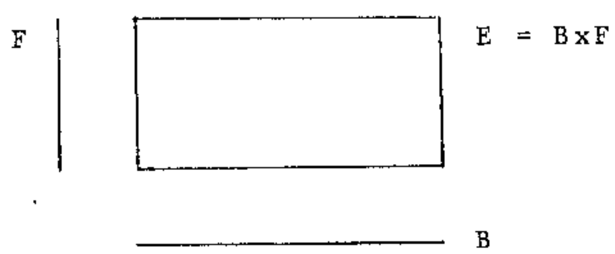
π será chamada "projeção"

F será chamado "fibra"

$\pi^{-1}(b)$ será chamado "fibra sobre b"

As aplicações $g_{\alpha\beta}$ serão chamadas funções de transição.

<u>Exemplo 1.1</u>. Fibrado Produto: $E = B \times F$, $\pi = \pi_1$ a projeção no primeiro fator. Tomamos $U = B$, ϕ a identidade em f, e $g: U \longrightarrow G = \{\text{identidade}: F \longrightarrow F\}$



Exemplo 1.2. Seja $\pi: E \longrightarrow B$ um G-fibrado e $B' \subset B$ um subconjunto de B. Então se $\pi' = \pi/\pi^{-1}B'$

$$\pi': \pi^{-1}B' \longrightarrow B'$$

é um G-fibrado. Denotaremos este fibrado por π/B' e ele é chamado de restrição de π a B'. Cada fibra $\pi'^{-1}(b)$, $b \in B'$ é igual a correspondente fibra $\pi^{-1}(b)$.

Exemplo 1.3. Fibrado tangente a uma variedade diferenciável.

Seja M uma variedade diferenciável de classe C^r $(r \geq 1)$ e dimensão n e $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ atlas de M. Consideremos $X = \bigcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{R}^n)$ e definimos a seguinte relação de equivalência em X

$$(x,v)_\alpha = (x, J_{\alpha\beta}(h_\alpha(x))v)_\beta$$

onde $J_{\alpha\beta}(x)$ é a matriz jacobiana de mudança de coordenadas.

Seja T_xM o quociente de X por essa relação de equivalência. T_xM é chamado espaço tangente a M no ponto x e os elementos de T_xM são classes $(x,v)_\alpha$ onde $x \in U_\alpha$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Consideremos

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM \qquad \text{e}$$

$\pi: TM \longrightarrow M$ a projeção tal que

$$\pi(x,v)_\alpha = x$$

$$\text{Seja } \psi_\alpha : V_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi^{-1} U_\alpha \qquad (h_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha)$$

$$\psi_\alpha(y,v) = [h_\alpha^{-1}(y), v]_\alpha$$

ψ_α é bijeção e assim podemos transportar a topologia de $V_\alpha \times \mathbb{R}^n$ para $\pi^{-1} U_\alpha$ tornando ψ_α um homeomorfismo. Consideremos a topologia em TM como sendo a induzida pelas topologias de $\pi^{-1} U_\alpha$

$$\text{Seja } f_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow V_\alpha \times \mathbb{R}^n \qquad \text{tal que}$$

$$f_\alpha (x,v) = (h_\alpha(x), v)$$

Assim f_α é um homeomorfismo

$$\text{Seja } \phi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi^{-1} U_\alpha$$

$$\phi_\alpha = \psi_\alpha \circ f_\alpha$$

Assim ϕ_α é um homeomorfismo.

Tomando-se

$$g_{\alpha\beta} = J_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GLn(\mathbb{R})$$

temos que TM é um $GLn(\mathbb{R})$ - fibrado, chamado fibrado tangente à variedade M.

Se M for orientável teremos que $\det J_{\alpha\beta}(x) > 0$ e assim

$$J_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow SLn(\mathbb{R}) \subset Gln(\mathbb{R})$$

e portanto TM será um $SLn(\mathbb{R})$-fibrado.

Exemplo 1.4. Fibrado dos referenciais sobre M. Seja M uma variedade diferenciável e $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ atlas de M. Dado $b \in M$ um n-referencial sobre M em b é um sistema ortogonal de n vetores tangentes a M em b. Seja F^n o conjunto dos n-referenciais sobre M. Seja

$$X = \bigcup_\alpha (U_\alpha \times F^n)$$

A matriz $J_{\alpha\beta}(x)$ age em F^n transformando cada vetor do referencial.

$$J_{\alpha\beta}(x)\ (v^1 \ \ldots\ldots \ v^n) = (J_{\alpha\beta}(x)\ v^1 \ \ldots\ldots \ J_{\alpha\beta}(x) v^n)$$

Olhando um referencial como uma matriz inversível cujas colunas são os elementos da base, $J_{\alpha\beta}(x)$ age em F^n como um produto de matrizes.

Definimos a seguinte relação de equivalência em X.

$$(x,f)_\alpha = (y,\ J_{\alpha\beta}(h_\alpha(x))f)_\beta$$

Seja FM o espaço quociente de X por essa relação de equivalência. Consideremos a projeção.

$$\pi\colon FM \longrightarrow M$$

$$\pi([x,f]_\alpha) = x$$

$\pi\colon FM \longrightarrow M$ é o fibrado dos referenciais sobre M, onde

$$\phi_\alpha((x,f)_\alpha) = [x,f]_\alpha$$

$$\pi\, \phi_\alpha\, (x,f)_\alpha = \pi\, [x,f]_\alpha = x$$

e

$$g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GLn(\mathbb{R}) \quad \text{é tal que}$$

$$g_{\alpha\beta}(x) = J_{\alpha\beta}(h_\alpha(x))$$

Assim $\pi\colon FM \longrightarrow M$ é um $GLn(\mathbb{R})$ - fibrado

<u>Exemplo 1.5</u>. Fibrado das densidades escalares sobre M. Seja M uma variedade diferenciável e $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ atlas de M. (classe C^r, $r \geq 1$). Seja

$$X = \bigcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{R})$$

Definimos a seguinte relação de equivalência em X

$$(x,t)_\alpha = (x, \det J_{\alpha\beta}(h_\alpha(x))t)_\beta$$

Seja DM o espaço quociente de X por essa relação de e quivalência e

$$\pi: DM \longrightarrow M \qquad \text{tal que}$$

$$\pi((x,t)_\alpha) = x$$

Como det $J_{\alpha\beta} \neq 0$ e é contínua ela determina um homeomor fismo

$$\det J_{\alpha\beta}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R} \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}$$

$$(x,t) \longmapsto (x, \det J_{\alpha\beta}(h_\alpha(x)t)$$

e assim

$$\phi_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{R} \longrightarrow \pi^{-1} U_\alpha \qquad \text{tal que}$$

$$\phi_\alpha(x,t)_\alpha = (x,t)_\alpha$$

é um homeomorfismo. Além disso

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL_1(\mathbb{R}) \qquad \text{tal que}$$

$$g_{\alpha\beta}(x) = \det J_{\alpha\beta}(h_\alpha(x))$$

é contínua.

Portanto π: DM $\longrightarrow$ M é um $GL_1(\mathbb{R})$-fibrado chamado fibrado das densidades escalares sobre M.

Exemplo 1.6. Dupla cobertura orientada de M. Seja M uma variedade diferenciável e $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ atlas de M. Seja

$$X = \bigcup_\alpha (U_\alpha \times \{\pm 1\})$$

Definimos a seguinte relação de equivalência em X.

$$(x,t)_\alpha = (x, \text{sgn det } J_{\alpha\beta}(h_\alpha(x))t)_\beta$$

A dupla cobertura orientada de M é $\tilde{M}$ o espaço quociente de X por essa relação de equivalência.

$$\pi: \tilde{M} \longrightarrow M \qquad \text{tal que}$$

$$\pi(x,t)_\alpha = x$$

é a projeção, e

$$\phi_\alpha: U_\alpha \times \{\pm 1\} \longrightarrow \pi^{-1}U_\alpha$$

$$\phi_\alpha\,(x,t)_\alpha = (x,t)_\alpha$$

é um homeomorfismo.

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\} \quad \text{tal que}$$

$$g_{\alpha\beta}(x) = \text{sgn det } J_{\alpha\beta}(h_\alpha(x))$$

é contínua.

Assim $\tilde{M}$ é um $\mathbb{Z}_2$-fibrado.

2. FIBRADOS E EQUIVALÊNCIAS

Teorema 2.1. (existência). Dado um espaço B (Hausdorff), uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de B, e funções $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_B \longrightarrow G$ satisfazendo 1.1a-d existe um fibrado E sobre B, com fibra F e funções de transição $g_{\alpha\beta}$.

Dem: Seja $X = \bigcup_\alpha (U_\alpha \times F)$

A união disjunta. As funções $g^*_{\alpha\beta}$ definem a seguinte relação de equivalência em X.

$$g^*_{\alpha\beta}(p,\omega) = (p, g_{\alpha\beta}(p)\omega)$$

Seja E o espaço quociente de X por essa relação de equivalência e $q: X \longrightarrow E$ a aplicação quociente. Seja $\pi_1: X \longrightarrow B$ a projeção no primeiro fator e $\pi: E \longrightarrow B$ tal que $\pi \circ q = \pi_1$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "\pi_1"] & \\ E \arrow[r, "\pi"] & B \end{tikzcd}$$

Como π_1 é continua temos que π é contínua. Desde que cada $g^*_{\alpha\beta}$ é um homeomorfismo de um aberto de $U_\alpha \times F$ em um aberto de $U_\beta \times F$ temos que

$$q/_{U_\alpha \times F}: U_\alpha \times F \longrightarrow \pi^{-1} U_\alpha$$

é um homeomorfismo. Assim basta tomarmos $\phi_\alpha = q/_{U_\alpha \times F}$

<u>Definição 2.2.</u> Dado um fibrado, se trocarmos a fibra F por uma nova fibra F' na qual o grupo G também age como um grupo de homeomorfismos, e se existem funções $g'_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$ satisfazendo 1.1a-d então pelo teorema 2.1 podemos construir um novo fibrado. O fibrado assim obtido é dito ser <u>associado</u> com o fibrado dado.

<u>Exemplo 2.3.</u> O fibrado dos referenciais $FM \longrightarrow M$ (1.4) é um GLn ($\mathbb{R}$) - fibrado associado com o fibrado tangente $TM \longrightarrow M$ (1.3), onde a fibra $\mathbb{R}^n$ é trocada pela fibra F^n e $g_{\alpha\beta} = J_{\alpha\beta}$ age em F^n como um produto de matrizes, sendo essa ação continua.

<u>Exemplo 2.4.</u> O fibrado cotangente $T^*M \longrightarrow M$ é o fibra

do associado com $TM \longrightarrow M$ (1.3) cuja fibra é $\mathbb{R}^n$ e tal que $g'_{\alpha\beta} = (J^{-1}_{\alpha\beta})^t$ que é um homeomorfismo contínuo pois é a transposição composta com a inversão de matrizes.

<u>Exemplo 2.5.</u> A dupla cobertura orientada $\tilde{M} \longrightarrow M$ (1.6) é obtida de $TM \longrightarrow M$ pelo homeomorfismo contínuo.

$$\text{sgn det: } GLn\,(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$$

<u>Definição 2.6.</u> Dizemos que dois fibrados $\pi: E \longrightarrow B$ e $\pi': E' \longrightarrow B$ ambos com fibra F são equivalentes se existe um homeomorfismo $h: E \longrightarrow E'$ que preserva as fibras, isto é, $\pi' \circ h = \pi$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Um fibrado $\pi: E \longrightarrow B$ é dito ser <u>trivial</u> se for equivalente ao fibrado produto $\pi_1: B \times F \longrightarrow B$

O teorema a seguir nos dá a unicidade da construção feita em 2.1. a menos de equivalência.

<u>Teorema 2.7.</u> (Unicidade). Sejam $\pi: E \longrightarrow B$ e $\pi': E' \longrightarrow B$ fibrados com fibra F, vizinhanças coordenadas $\{U_\alpha\}$

e funções de transição $g_{\alpha\beta}$. Então eles são equivalentes.

Dem: Sejam

$$\phi_\alpha : U_\alpha \times F \longrightarrow \pi^{-1} U_\alpha$$

e

$$\phi'_\alpha : U_\alpha \times F \longrightarrow \pi'^{-1} U_\alpha$$

Definimos $h: E \longrightarrow E'$ por

$$h = \phi'_\alpha \ \phi_\alpha^{-1} \quad \text{em} \quad \pi^{-1} U_\alpha$$

Assim h está bem definida pois se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ temos que

$$\phi_\beta^{-1} \phi_\alpha = g^*_{\alpha\beta} = \phi'^{-1}_\beta \phi'_\alpha$$

o que implica

$$\phi'_\alpha \ \phi_\alpha^{-1} = \phi'_\beta \ \phi_\beta^{-1}$$

em $\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$. Além disso como ϕ_α e ϕ'_α são homeomorfismos temos que h é um homeomorfismo que preserva as fibras. A aplicação definida por $\phi_\beta \ \phi'^{-1}_\alpha$ em $\pi'^{-1} U_\alpha$ é uma inversa para h.

Lema 2.8. Dois G-fibrados $\pi: E \longrightarrow B$ e $\pi': E' \longrightarrow B$, com mesma fibra F, vizinhanças coordenadas $\{U_\alpha\}$ e $\{U'_\beta\}$ respectivamente, são G-equivalentes (equivalentes) se e só se podemos encontrar aplicações

$$\bar{g}_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U'_\beta \longrightarrow G$$

satisfazendo

$$2.8a \quad \bar{g}_{\alpha\gamma}(p) = \bar{g}_{\beta\gamma}(p)\; g_{\alpha\beta}(p)$$

$$2.8b \quad \bar{g}_{\alpha\gamma}(p) = g'_{\beta\gamma}(p)\; \bar{g}_{\alpha\beta}(p)$$

Dem: Inicialmente suponhamos que exista um homeomorfismo $h\colon E \longrightarrow E'$ que preserva as fibras e seja

$$\phi_\alpha\colon U_\alpha \times F \longrightarrow \pi^{-1}U_\alpha$$

$$\phi'_\beta\colon U'_\beta \times F \longrightarrow \pi'^{-1}U'_\beta$$

Definimos $\bar{g}_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U'_\beta \longrightarrow G$ por

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(p) = \pi_2(\phi'_\beta)^{-1} h\, \phi_\alpha\, i_p$$

onde $i_p\colon F \longrightarrow p \times F$ e $\pi_2\colon U'_\beta \times F \longrightarrow F$ são respectivamente a inclusão e a projeção no segundo fator e teremos que

$$\bar{g}_{\alpha\gamma}(p) = \pi_2(\phi'_\gamma)^{-1} h\, \phi_\alpha\, i_p =$$

$$= (\pi_2 (\phi'_\gamma)^{-1} h\ \phi_\beta\ i_p)\ (\pi_2\ \phi_\beta^{-1}\ \phi_\alpha\ i_p) =$$

$$= \bar{g}_{\beta\gamma}(p)\ .\ g_{\alpha\beta}(p) \qquad (2.8a)$$

$$\bar{g}_{\alpha\gamma}(p) = \pi_2 (\phi'_\gamma)^{-1} h\ \phi_\alpha\ i_p =$$

$$= \pi_2 (\phi'_\gamma)^{-1} \phi'_\beta\ \ ip\ \pi_2 (\phi'_\beta)^{-1} h\ \phi_\alpha\ i_p =$$

$$= g'_{\beta\gamma}(p) .\ \bar{g}_{\alpha\beta}(p) \qquad (2.8b)$$

Assim $\bar{g}_{\alpha\beta}(p)$ satisfaz as condições 2.8a e 2.8b.

Suponhamos agora que existam $\bar{g}_{\alpha\beta}(p)$ satisfazendo 2.8a e 2.8b. Definimos

$$h: E \longrightarrow E' \qquad \text{por}$$

$$h\phi_\alpha(p,\omega) = \phi'_\rho(p,\bar{g}_{\alpha\rho}(p)\omega) \qquad \text{para} \quad \rho \in U_\alpha \cap U'_\rho$$

h está bem definida, pois se $p \in U_\beta \cap U'_\sigma$ temos que

$$\phi_\alpha(p,\omega) = \phi_\beta\ (p,\ g_{\alpha\beta}\ (p)\omega) \qquad e$$

$$h\phi_\beta(p,\ g_{\alpha\beta}(p)\omega) = \phi'_\sigma\ (p,\ \bar{g}_{\beta\sigma}(p)\ g_{\alpha\beta}(p)\omega)$$

como

$$\phi'_\rho\ (p,\ \bar{g}_{\alpha\rho}(p)\omega) = \phi'_\sigma\ (p,\ g'_{\rho\sigma}(p)\ \bar{g}_{\alpha\rho}(p)\omega)$$

mas de 2.8 a e b temos que

$$\bar{g}_{\beta\sigma}(p)\ g_{\alpha\beta}(p) = g'_{\rho\sigma}(p)\ \bar{g}_{\alpha\rho}(p)$$

Assim h está bem definida e podemos de maneira análoga construir uma inversa para h.

CAPÍTULO II - O FIBRADO PRINCIPAL

3. FIBRADO PRINCIPAL

DEFINIÇÃO 3.1: Um G-fibrado principal é um fibrado cuja fibra é G.

Dado um G-fibrado $\pi: E \longrightarrow B$, podemos definir um homomorfismo contínuo $L: G \longrightarrow H(G)$, $L(g) = Lg$ tal que $Lg(h) = gh$, onde $H(G)$ é o grupo de homeomorfismos de G. Esta aplicação é injetiva e podemos assim construir um fibrado principal pelo teorema 2.1. O fibrado construído dessa forma é chamado fibrado principal associado a $\pi: E \longrightarrow B$.

EXEMPLO 3.2. A dupla cobertura orientada de M (1.6) é um $\mathbb{Z}_2$- fibrado principal.

TEOREMA DA EQUIVALÊNCIA 3.3. Dois G-fibrados com a mesma base e fibra são G-equivalentes se e só se seus fibrados principais associados o são.

Dem: Sejam $\pi: E \longrightarrow B$ e $\pi': E' \longrightarrow B$ G-equivalentes, então existem aplicações $\bar{g}_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U'_\beta \longrightarrow G$ satisfazendo 2.8a e 2.8b. Definimos o homomorfismo contínuo $L: G \longrightarrow H(G)$ tal que $L(g) = Lg$. Então as

$$\bar{g}'_{\alpha\beta} = L \circ \bar{g}_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U'_\beta \longrightarrow H(G)$$

satisfazem 2.8a e 2.8b, pois

$$\bar{g}'_{\alpha\gamma}(p) = L(\bar{g}_{\alpha\beta}(p)) = L(\bar{g}_{\beta\gamma}(p) g_{\alpha\beta}(p)) = \bar{g}'_{\beta\gamma}(p) g_{\alpha\beta}(p)$$

$$\bar{g}'_{\alpha\gamma}(p) = L(\bar{g}_{\alpha\gamma}(p)) = L(g'_{\beta\gamma}(p) \cdot \bar{g}_{\alpha\beta}(p)) =$$

$$= g'_{\beta\gamma}(p)\ \bar{g}'_{\alpha\beta}(p)$$

Assim os fibrados principais associados a $\pi: E \longrightarrow B$ e $\pi': E' \longrightarrow B$ são G-equivalentes pelo lema 2.8.

Se os fibrados principais associados são equivalentes, definimos

$$\bar{g}_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U'_\beta \longrightarrow G$$

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(p) = L^{-1}(\bar{g}'_{\alpha\beta}(p))$$

onde $L^{-1}(h) = L(h^{-1})$. Logo temos que as $\bar{g}_{\alpha\beta}$ satisfazem 2.8a e b e portanto os fibrados $\pi: E \longrightarrow B$ e $\pi': E' \longrightarrow B$ são equivalentes.

<u>COROLÁRIO 3.3.1</u>. Um fibrado é trivial se e só se seu

fibrado principal associado é trivial.

4. G-ESPAÇOS PRINCIPAIS

Seja $\{U_\alpha\}$ cobertura aberta de B e $\pi: E \longrightarrow E/G$ tal que $\pi(x) = xG$, onde G age à direita de E.

DEFINIÇÃO 4.1. Um G-espaço principal sobre B é um par (E,G), onde G é um grupo topológico que age a direita de E, como um grupo de homeomorfismos, cuja ação é livre e tal que:

4.1a $\quad E/G = B$

4.1b $\quad (E,G)$ tem secções locais, isto é, aplicações

$$S_\alpha: U_\alpha \longrightarrow E \text{ com } \pi \circ S_\alpha = 1$$

4.1c $\quad$ Se $\sigma: E\times G \longrightarrow E\times E$

$$\sigma(x,g) = (x,xg) \qquad \text{então}$$

$$\tau: \operatorname{Im}\sigma \longrightarrow G \quad \text{com} \quad \tau = \pi_2\sigma^{-1} \text{ é contínua.}$$

EXEMPLO 4.2. $(B\times G, G)$ é um G-espaço principal sobre B, onde a ação de G sobre $B\times G$ é dada por

$$((b,g),g') \longmapsto (b,g)g' = (b,gg')$$

Assim todos os elementos da forma (b,g), com $b \in B$ fixo e $g \in G$, são equivalentes e portanto temos que

$$BxG/G = B$$

Além disso podemos definir secções locais $S_\alpha: U_\alpha \longrightarrow BxG$ pondo $S_\alpha(b) = (b,1)$.

Como G é um grupo dados $g,g' \in G$ existe um único $h \in G$ tal que $g' = gh$. Logo

$$\sigma: \ (BxG) \times G \longrightarrow (BxG) \times (BxG)$$

$$((b,g),g') \longmapsto ((b,g),(b,gg'))$$

é injetora e sobrejetora. Portanto

$$\tau: \ \mathrm{Im}\sigma \longrightarrow G$$

$$\begin{aligned} \tau((b,g),(b,g')) &= \pi_2\sigma^{-1}(b,g),(b,g')) \\ &= \pi_2((b,g), \ g^{-1}g') \\ &= g^{-1}g' \end{aligned}$$

está bem definida e é contínua.

<u>EXEMPLO 4.3.</u> (O_n, O_{n-1}), onde $O_n \subset GL_n(\mathbb{R})$ é o grupo ortogonal, é um O_{n-1} espaço principal sobre S^{n-1}. O_n age sobre S^{n-1} da seguinte forma:

$$S^n \times O_n \longrightarrow S^{n-1}$$

$$(v,A) \longmapsto A.v$$

Esta ação é transitiva pois dado $u_1 \in S^{n-1}$ escolhemos $u_2,\ldots,u_n \in S^{n-1}$ tais que $\{u_1,\ldots,u_n\}$ seja uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Seja

$$u_i = (u_{1i},\ldots,u_{ni}) = \sum_{j=1}^{n} u_{ji}\, e_j$$

onde $u_{ji} \in \mathbb{R}$. Então a matriz

$$A = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots\cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \cdots\cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

é tal que A é ortogonal e $\det A = \pm 1$ e portanto $A \in O_n$ e $Ae_i = u_i\ \forall_i = 1,2,\ldots,n$.

Assim dados $u,v \in S^{n-1}$ tomamos A e $B \in O_n$ tais que $Ae_1 = u$ e $Be_1 = v$, temos então que $AB^{-1} \in O_n$ e $AB^{-1}v = u$.

Seja $A = (a_{ij}) \in O_n$ tal que $Ae_n = e_n$ onde $e_n = (0, 0,\ldots, 1) \in S^{n-1}$. Temos que

$$Ae_n = \sum_{i=1}^{n} a_{in} e_i = (0,0,\ldots,1)$$

Donde segue que $a_{in} = 0$ para $i = 1,2,\ldots,n-1$ e $a_{nn} = 1$. Além disso como $A\,A^t = 1$ temos que $A\,A^t e_n = en$, isto é

$$A\,A^t e_n = \sum_{i=1}^{n} a^2_{ni}\, e_i = (0,\ldots,0,1)$$

Donde segue que $a_{ni} = 0$ para $i = 1,2,\ldots,n-1$ portanto

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

Onde $\tilde{A} \in O_{n-1}$. Podemos então identificar A com $\tilde{A}$ e dessa forma o subgrupo de O_n que fixa e_n é O_{n-1}. Como O_{n-1} é um subgrupo fechado de O_n o espaço O_n/O_{n-1} é compacto e a aplicação

$$\begin{array}{ccc} O_n/O_{n-1} & \longrightarrow & S^{n-1} \\ AO_{n-1} & \longrightarrow & Ae_1 \end{array}$$

é um homeomorfismo. Logo

$$O_n/O_{n-1} = S^{n-1}$$

Podemos construir secções locais pelo processo de Gram-Schimidt. Assim se $f_1 \in U_1$ uma vizinhança de e_1, aplicamos o processo para $(f_1, e_2, \ldots, e_n)$ para obter um novo referencial ortogonal $(f_1, \ldots, f_n)$ que podemos considerar como elemento de O_n.

Podemos definir $\tau(A.B) = C$ onde $C \in O_{n-1}$ é o único elemento tal que $B = AC$ ou seja $C = A^{-1}B$. Disso segue que τ é contínua.

<u>EXEMPLO 4.4</u> (O_n, O_{n-k}) é um O_{n-k} espaço principal sobre $S_{n,k}$. Seja $S_{n,k}$ a variedade de Stiefel dos k-referenciais no $\mathbb{R}^n$.

$$S_{n,k} = \{u = (u_1, \ldots, u_k) / k \leq n \text{ e } u_1, \ldots, u_k \text{ são ortogonais}\}$$

O_n age em $S_{n,k}$ da seguinte forma

$$O_n \times S_{n,k} \longrightarrow S_{n,k}$$

$$(A,u) \longrightarrow Au = (Au_1, \ldots, Au_k)$$

e essa ação é transitiva.

Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$ e $e = (e_1, \ldots, e_k)$. Assim $e \in S_{n,k}$. O subgrupo de O_n que deixa fixo e é

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in O_n \right\}$$

Onde I é a identidade kxk e $B \in On-k$. Podemos então identificar H com O_{n-k}. Portanto a aplicação

$$\gamma: On/On-k \longrightarrow S_{n,k}$$

$$A\,On-k \longmapsto Ae$$

está bem definida é injetora e sobrejetora. Colocando-se a topologia quociente em Sn,k, tornamos γ um homeomorfismo e teremos que

$$On/On-k = Sn,k$$

Aqui também usamos o processo de Gram-Schimidt para obter secções locais.

Definimos também $\tau(A,B) = A^{-1}B$, sendo portanto τ contínua.

Observemos que

$$Sn,1 = On/On-1 = S^{n-1}$$

EXEMPLO 4.5. Seja agora $G_{n,k}$ a variedade de Grassmann dos k-planos através da origem no $\mathbb{R}^n$ $(k \leq n)$.

Como transformações lineares não singulares levam K-subespaços em k-subespaços temos a ação

$$On \times G_{n,k} \longrightarrow G_{n,k}$$

$$(A,P) \longrightarrow AP = \{Ax/x \in P\}$$

Que está bem definida e é transitiva. Se Po é um K-plano gerado por $\{e_1,\ldots,e_k\}$ onde $e_i = (0,\ldots,0,1,0\ldots,0)$ então o subgrupo de On que deixa fixo Po é

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in On;\ A \in Ok \text{ e } B \in On\text{-}k \right\}$$

Assim H é subgrupo fechado, de On que pode ser identificado com Ok x On-k. Assim podemos definir a aplicação

$$On/O_k \times On\text{-}k \longrightarrow G_{n,k}$$

$$M(O_k \times On\text{-}k) \longrightarrow MPo$$

que é injetora e sobrejetora. Colocando a topologia quociente em Gn,k temos que

$$On/Ok \times On\text{-}k = G_{n,k}$$

assim

$$Sn,k/O_k = G_{n,k}$$

Usando o processo de Gram-Schimidt podemos construir secções locais.

Para definir no τ procedemos como no exemplo 4.3, isto é, dados $u \in S_{n,k}$ e $A \in O_k$ existe uma única matriz $B \in O_k$ tal que $Bu = A$. Definimos então $\tau(u,A) = B$

<u>TEOREMA 4.6.</u> (E,G) é um G-espaço principal sobre B se e somente se $\pi: E \longrightarrow B$ é um G-fibrado principal.

<u>Dem:</u> Seja $\{U_\alpha\}$ cobertura aberta de B e $S_\alpha: U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}U_\alpha$ secções locais. Definimos

$$\phi_\alpha: U_\alpha \times G \longrightarrow \pi^{-1}U_\alpha \qquad \text{por}$$

$$\phi_\alpha(b,g) = S_\alpha(b)g$$

assim ϕ_α é continua e

$$\pi\phi_\alpha(b,g) = \pi \; S_\alpha(b)g = b.$$

uma inversa continua para ϕ_α é

$$\psi_\alpha: \pi^{-1}U_\alpha \longrightarrow U_\alpha \times G$$

$$\psi_\alpha(z) = (\pi z, \; \tau(S_\alpha \pi z, \; z))$$

Se $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ temos que existe $g \in G$ tal que $S_\alpha(x)g = S_\beta(x)$, definimos então $g_{\alpha\beta}(x) = g$.

Por outro lado, se $\pi: E \longrightarrow B$ e um G-fibrado principal, definimos uma ação $E \times G \longrightarrow E$, tal que se $z = \phi_\alpha(b,g)$

$$zh = \phi_\alpha(b,gh)$$

se $\phi_\alpha(b,g) = \phi_\beta(b,g')$ então temos que $g' = g_{\alpha\beta}(b)g$ e portanto

$$\phi_\alpha(b,gh) = \phi_\beta(b,g_{\alpha\beta}(b)gh)$$

$$= \phi_\beta(b,g'h)$$

logo a ação está bem definida, é livre e contínua. Definimos então τ por

$$\tau(\phi_\alpha(b,g),\ \phi_\alpha(b,g')) = g^{-1}g' \quad \text{em} \quad U_\alpha$$

assim τ é contínua. Definimos $S_\alpha: U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}U_\alpha$ por $S_\alpha(b) = \phi_\alpha(b,1)$. Logo S_α é contínua e $\pi S_\alpha(b) = b$.

<u>DEFINIÇÃO 4.7.</u> Dois G-espaços principais sobre B, (E,G) e (E',G) são equivalentes se existe um homeomorfismo $\psi: E \longrightarrow E'$ que comuta com a ação de G, e induz a aplicação identidade em B.

<u>TEOREMA 4.8.</u> (unicidade). Dois G-espaços principais - são equivalentes se e só se eles são G-equivalentes como G-fibrados principais.

<u>Dem</u>: Suponhamos que (E,G) e (E',G) sejam G-espaços prin

cipais, equivalentes, sobre B. Então existe γ: $E \longrightarrow E'$ tal que $\gamma o \pi' = \pi$. Logo $\pi: E \longrightarrow B$ e $\pi': E' \longrightarrow B$ são G-equivalentes.

Agora se $\pi: E \longrightarrow B$ e $\pi': E' \longrightarrow B$ são G-equivalentes temos que dadas vizinhanças coordenadas $\{U_\alpha\}$ e $\{U'_\alpha\}$ e

$$\phi_\alpha : U_\alpha \times G \longrightarrow \pi^{-1} U_\alpha$$

$$\phi'_\alpha : U'_\alpha \times G \longrightarrow \pi'^{-1} U_\alpha$$

tal que $\gamma o \phi_\alpha = \phi'_\alpha$ temos que se $z = \phi_\alpha(b,g)$ e $h \in G$ então

$$\gamma(zh) = \gamma\, \phi_\alpha(b,gh) = \phi'_\alpha(b,gh)$$

$$= \phi'_\alpha(b,g)h = \gamma(z)h$$

portanto γ comuta com a ação de G. Logo eles são G - equivalentes como G-espaços principais

CAPÍTULO III - FIBRADO INDUZIDO

5. FIBRADO INDUZIDO

Seja $\pi: E \longrightarrow B$ um G-fibrado com fibra F, vizinhanças coordenadas $\{U_\alpha\}$ e funções de transição $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$. Seja $f: B' \longrightarrow B$ uma aplicação contínua.

Consideremos $U'_\alpha = f^{-1}U_\alpha$ e $g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} o f$. Então temos que

$$g'_{\alpha\beta}: U'_\alpha \cap U'_\beta \longrightarrow G \qquad \text{e}$$

$$g'_{\alpha\alpha}(p) = g_{\alpha\alpha}f(p) = 1 \qquad 1.1a$$

$$g'_{\alpha\beta}(p) = g_{\alpha\beta}f(p) = g^{-1}_{\beta\alpha}f(p) = (g'_{\beta\alpha})^{-1}(p) \qquad 1.1b$$

$$g'_{\alpha\gamma}(p) = g_{\alpha\gamma}f(p) = g_{\beta\gamma}f(p).\ g_{\alpha\beta}f(p)$$

$$= g'_{\beta\gamma}(p)\ g'_{\alpha\beta}(p) \qquad 1.1c$$

Se definimos $g'^{*}_{\alpha\beta}(p,\omega) = (p, g'_{\alpha\beta}(p)\omega)$ temos que

$$g'^{*}_{\alpha\beta} : (U'_\alpha \cap U'_\beta) \times F \longrightarrow (U'_\alpha \cap U'_\beta) \times F$$

é contínua.

Assim pelo teorema 2.1 existe um fibrado f^*E sobre B'

com fibra F e funções de transição $g'_{\alpha\beta}$. O fibrado assim obtido é chamado Fibrado Induzido de π por f.

Se $\phi'_\alpha : U'_\alpha \times F \longrightarrow \pi'^{-1} U'_\alpha$ é dada pelo teorema 2.1 podemos definir

$$f^* : f^*E \longrightarrow E$$

$$f^* \phi'_\alpha(b', \omega) = \phi_\alpha(f\, b', \omega)$$

assim f^* está bem definida e leva cada fibra em f^*E homeomorficamente em uma fibra de E, pois se $b' \in U'_\alpha \cap U'_\beta$ temos que $fb' \in U_\alpha \quad U_\beta$ e assim $\phi_\alpha(f\, b', \omega) = \phi_\beta(f\, b', \omega)$. A aplicação f^* é chamada aplicação induzida.

A seguir daremos uma definição equivalente de fibrado induzido e aplicação induzida.

DEFINIÇÃO 5.1. Seja $\pi : E \longrightarrow B$ um G-fibrado. Dada $f: B \longrightarrow B'$ uma aplicação contínua. Podemos construir um novo fibrado $\pi' : f^*E \longrightarrow B$ da seguinte forma: Consideremos

$$f^*E = \{(b', x) \in B' \times E \;/\; f(b') = \pi(x)\}$$

e $\pi' = \pi_1$. Se $\{U_\alpha\}$ é cobertura de B então tomamos $U'_\alpha = f^{-1}\, U_\alpha$ e

$$\phi'_\alpha : U'_\alpha \times F \longrightarrow G$$

$$\phi'_\alpha(b',\omega) = (b, \phi_\alpha(f(b'),\omega))$$

Tomamos as funções de transição como sendo $g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} o f$. Assim $\pi': f^*E \longrightarrow B'$ é um G-fibrado induzido de π por f.

A aplicação induzida $f^*: f^*E \longrightarrow E$ e definida como sendo π_1, a projeção no primeiro fator.

Desta forma temos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{f^*} & E \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

é comutativo e f^* leva cada fibra de f^*E homeomorficamente em uma fibra de E.

Podemos ver então que as duas formas de construção, dadas anteriormente, de fibrado induzido, dadas acima, são equivalentes.

<u>LEMA 5.2.</u> Seja $g: B'' \longrightarrow B'$ e $f: B' \longrightarrow B$ contínuas. Então $(fg)^*E$ é equivalente a g^*f^*E.

<u>Dem:</u> Temos que

$$g^*f^*E = \{(b',b,x) \in B' \times f^*E \;/\; g(b') = b\} \qquad \text{e}$$

$$(fg)^*E = \{(b',x) \in B'' \times E \;/\; (fg)(b') = \pi(x)\}$$

Definimos então $h: g^* f^* E \longrightarrow (fg)^* E$ por

$$h(b',b,x) = (b',x)$$

$$\begin{tikzcd}
g^* f^* E \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & (fg)^* E \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& B'' &
\end{tikzcd}$$

temos assim que

$$\pi_1 h(b',b,x) = \pi_1(b',x) = b' = \pi_1(b',x)$$

e assim $\pi_1 o h = \pi_1$. Além disso é homeomorfismo.

6. APLICAÇÕES FIBRADAS

DEFINIÇÃO 6.1. Sejam E e E' G-fibrados. Uma aplicação que preserva as fibras $\psi: E \longrightarrow E'$ é uma aplicação contínua tal que ψ leva cada fibra de B homeomorficamente em uma fibra de B', isto é, ψ induz uma aplicação contínua $\bar{\psi}: B \longrightarrow B'$ entre os espaços base, tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\
B \arrow[r, "\bar{\psi}"'] & B'
\end{tikzcd} \qquad \pi' o \psi = \bar{\psi} o \pi$$

<u>DEFINIÇÃO 6.2.</u> Sejam E e E' G-Fibrados. Uma aplicação fibrada (G-Fibrada) é uma aplicação que preserva as fibras ψ: E $\longrightarrow$ E' tal que para cada b $\in$ B, a restrição $\psi/\pi^{-1}b$ pode ser identificada com um elemento de G.

Em termos de coordenadas locais temos: se $b \in U_\alpha \cap \bar{\psi}^{-1} U'_\beta$ então

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(b) = \pi_2(\phi'_\beta)^{-1} \psi \, \phi_\psi \, ib$$

é um elemento de G.

<u>EXEMPLO 6.3.</u> Quando $\bar{\psi}$ é a aplicação identidade em B, ψ é um G-Fibrado isomorfismo e os fibrados são equivalentes (Def. 2.6).

<u>TEOREMA 6.4.</u> Seja ψ: E $\longrightarrow$ E' uma aplicação G-Fibrada então E é equivalente a $\bar{\psi} * E'$.

<u>Dem</u>. Sejam $\{U_\alpha\}$ e $\{U'_\beta\}$ vizinhanças coordenadas de B e B' respectivamente. Então $\{\bar{\psi}^{-1} U'_\beta\}$ são vizinhanças coordenadas de $\bar{\psi} * E'$. Da definição 6.2 temos que $\bar{g}_{\alpha\beta}(b) = \pi_2(\phi'_\beta)^{-1} \psi_\alpha \, ib \in G$. Além disso a aplicação

$$\bar{g}_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap \bar{\psi}^{-1} U'_\beta \longrightarrow G$$

Satisfaz 2.8a e b. Portanto pelo lema 2.8 e é equivalente a $\psi^* E'$. A equivalência h é dada por $h(e) = (\pi e, \psi e)$, e $h(e) \in \overline{\psi} * E$ pois $\pi \circ \overline{\psi} = \pi \circ \psi$.

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi'"'] & E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi"] & \overline{\psi} * E' \arrow[dl, "\pi_1"] \\
B' \arrow[r, "\overline{\psi}"] & B &
\end{tikzcd}$$

Reciprocamente se E é equivalente a $f * E'$, se $h: E \longrightarrow f * E'$ é essa equivalência e $f^*: f * E \longrightarrow E'$ é a aplicação induzida, definimos

$$\begin{tikzcd}
 & & f * E' \arrow[dll, "f^*"'] \arrow[ddl, "\pi_1"] \\
E' \arrow[d, "\pi'"'] & E \arrow[l, "\psi"] \arrow[ur, "h"] \arrow[d, "\pi"] & \\
B' & B \arrow[l, "\overline{\psi}"] &
\end{tikzcd}$$

$\psi: E \longrightarrow E'$ por $\psi = f * h$ e temos que ψ é uma aplicação fibrada com $\overline{\psi} = f$.

<u>TEOREMA 6.5</u>. Toda aplicação fibrada $\psi: E \longrightarrow E'$ induz uma aplicação fibrada $\psi_p: P \longrightarrow P'$ entre os fibrados principais associados, que cobre $\overline{\psi}$. Reciprocamente, uma aplicação fibrada

ψ_p induz uma aplicação fibrada ψ cobrindo $\bar{\psi}_p$.

Dem: As aplicações ψ e ψ_p são determinadas por $\bar{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap \psi^{-1} U_{\beta'} \longrightarrow G$, como na demonstração do teorema da equivalência 3.3

CAPÍTULO IV. CLASSIFICAÇÃO DE FIBRADOS VETORIAIS

7. FIBRADOS VETORIAIS

DEFINIÇÃO 7.1. Um fibrado de k-planos ou fibrado vetorial é um $GL_k(\mathbb{R})$ fibrado com fibra $\mathbb{R}^k$ sobre um espaço base paracompacto.

Os exemplos 1.3, 1.4 e 1.5 são exemplos de fibrados vetoriais.

OBSERVAÇÃO 7.2. Observemos que se $I^n = I \times I \times .. \times I$ é o cubo n-dimensional, e I_o^{n-1} uma face, então é fácil de ver que qualquer aplicação fibrada $I_o^{n-1} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow I_o^{n-1} \times \mathbb{R}^k$ pode ser estendida a uma aplicação fibrada $I^n \times \mathbb{R}^k \longrightarrow I^n \times \mathbb{R}^k$. Usando este resultado indutivamente, sobre os cubos numa partição bem refinada de $\sigma = I^n$ vemos que qualquer fibrado de k-planos sobre uma célula σ é trivial.

DEFINIÇÃO 7.3. Dizemos que um espaço paracompacto B tem dimensão não maior que n, se qualquer cobertura aberta de B tem um refinamento aberto tal que nenhum ponto de B está em mais do que n+1 membros desse refinamento.

Denotaremos por $E_{q,k}$ o $\mathbb{R}^k$ - fibrado associado com o O_k-fibrado principal $S_{q,k} \longrightarrow G_{q,k}$.

<u>TEOREMA 7.4.</u> Sejam K_o, K complexos celulares localmente finitos, com K_o um subcomplexo de K. Seja: $\pi : E \longrightarrow K$ um k-plano fibrado, e seja

$$\begin{array}{ccc}
\pi^{-1} K_o & \xrightarrow{\tilde{\gamma}_o} & E_{q,k} \\
\downarrow & & \downarrow \\
K_o & \xrightarrow{\gamma_o} & G_{q,k}
\end{array}$$

uma aplicação fibrada. Então nós podemos estender $\tilde{\gamma}_o$ a uma aplicação fibrada $\tilde{\gamma}: \pi^{-1}K \longrightarrow E_{q,k}$ desde que toda célula de K-Ko tenha dimensão menor ou igual a q-k.

<u>Dem</u>: Seja σ uma célula de $K-K_o$. Estenderemos $\tilde{\gamma}_o$ indutivamente sobre $\{\pi^{-1}\sigma\}$. Suponhamos que $\tilde{\gamma}$ esteja bem definida em $\pi^{-1}\partial\sigma$. Então pelo teorema 6.5, $\tilde{\gamma}/\pi^{-1}\partial\sigma$ pode ser estendida sobre $\pi^{-1}\sigma$ se e só se a correspondente aplicação entre fibrados principais associados $\tilde{\gamma}_p/\pi_p^{-1}\,\partial\sigma : \pi_p^{-1}\,\partial\sigma \longrightarrow S_{q,k}$ pode ser estendida sobre $\pi^{-1}\sigma$. Da observação 7.2 temos que todo fibrado de K-planos sobre σ é trivial e assim o problema é estender a aplicação fibrada $\partial\sigma \times O_k \longrightarrow S_{q,k}$ sobre $\sigma \times O_k$. Como um O_k-fibrado principal pode ser visto como um O_k-espaço principal, uma aplicação fibrada $\psi : \sigma \times O_k \longrightarrow S_{q,k}$ pode ser escrita como $\psi(x,g) = \psi'(x)g$ onde $\psi': \sigma \longrightarrow S_{q,k}$. Assim o problema que temos é estender uma aplicação $\partial\sigma \longrightarrow S_{q,k}$ sobre σ o que sempre pode ser feito pois os grupos de homotopia de $S_{q,k}$ são triviais desde que $\dim\sigma \leq q-k$ (ver [3]).

<u>DEFINIÇÃO 7.5.</u> A inclusão $\mathbb{R}^q \subset \mathbb{R}^{q+1}$ induz as inclusões $G_{q,k} \subset G_{q+1,k}$ e $E_{q,k} \subset E_{q+1,k}$. Assim, seja $BO_k = \lim_q G_{q,k}$ e $E_k = \lim_q E_{q,k}$ com a topologia fraca. Temos então que $\eta_k : E_k \longrightarrow BO_k$ é um fibrado de k-plano sobre BO_k, consistindo dos vetores em k-planos em E^∞. η_k é chamado fibrado universal de k-planos, e BO_k é chamado espaço classificante para o fibrado de k-planos.

No teorema a seguir removeremos a restrição de dimensão do teorema 7.4.

<u>TEOREMA 7.6.</u> Seja $\pi : E \longrightarrow K$ um k-plano fibrado sobre um complexo celular localmente finito, e seja $\tilde{\gamma}_o : \pi^{-1} K_o \longrightarrow E_k$ uma aplicação fibrada. Então podemos estender $\tilde{\gamma}_o$ a uma aplicação fibrada $\tilde{\gamma} : E \longrightarrow E_k$

<u>Dem</u>: Seja σ uma célula de $K - K_o$, como $\pi' \tilde{\gamma}_o \pi^{-1} \sigma$ é compacto então está em algum $G_{q,k}$ com $\dim \sigma \leq q-k$. Logo aplicando-se o teorema 7.4 temos que a aplicação $\tilde{\gamma}_o / \pi^{-1} \partial\sigma$ pode ser estendida a $\tilde{\gamma}_o / \pi^{-1} \sigma$ em $E_{q,k} \subset E_k$. Procedendo-se por indução sobre as células de $K - K_o$ concluimos a demonstração.

<u>LEMA 7.7.</u> Seja $\pi : E \longrightarrow B$ um k-plano fibrado sobre $B = B_1 \cup B_2$ com $B_1 = A \times [a,c]$ e $B_2 = A \times [c,b]$ e $a<c<b$. Se π / B_1 e π / B_2 são triviais então $\pi : E \longrightarrow B$ é trivial.

<u>Dem</u>: Sejam as equivalências $h_1 : B_1 \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}B_1$ e $h_2 : B_2 \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}B_2$. Seja $g_1 = h_1/(B_1 \cap B_2) \times \mathbb{R}^k$ e $g_2 = h_2/(B_1 \cap B_1) \times \mathbb{R}^k$.

$$\begin{tikzcd}
(B_1 \cap B_2) \times \mathbb{R}^k \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g_1"'] & & (B_1 \cap B_2) \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "g_2"] \\
& \pi^{-1}(B_1 \cap B_2) &
\end{tikzcd}$$

Então $f = g_2^{-1}\, g_1$ é uma equivalência entre fibrados triviais e f tem a forma $f(x,y) = (x, u(x)y)$ onde $(x,y) \in (B_1 \times B_2)$ e $u : A \longrightarrow GL_k(\mathbb{R})$ é uma aplicação contínua. Nós prolongamos f a uma equivalência $w : B_2 \times \mathbb{R}^k \longrightarrow B_2 \times \mathbb{R}^k$ por $w(x,t,y) = (x,t,u(x)y)$ para cada $x \in A$, $y \in \mathbb{R}^k$ e $t \in [c, b]$. Assim as equivalências $h_1 : B_1 \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}B_1$ e $h_2 w : B_2 \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}B_2$ coincidem em $(B_1 \cap B_2) \times \mathbb{R}^k$, que é fechado. Portanto existe uma equivalência $h : B \times \mathbb{R}^k \longrightarrow E$ tal que $h/B_1 \times \mathbb{R}^k = h_1$ $h/B_2 \times \mathbb{R}^k = h_2 w$

<u>LEMA 7.8.</u> Seja $\pi : E \longrightarrow B \times I$ um fibrado de k-planos, com B paracompacto. Então existe uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ localmente finita, de B tal que $\pi/U_\alpha \times I$ é trivial.

<u>Dem</u>: Se $b \in B$ e $t \in I$ existe vizinhança aberta U_t de b em B e V_t de t em I tal que $\pi/U_t \times V_t$ é trivial. Como $[0,1]$ é compacto existe uma sequência finita $0 = t_o < t_1 < \dots < t_n = 1$ vizinhanças U_i de b, $i = 1,2, \dots, n$ em B tal que $\pi/U_i \times (t_i - 1 - t_i]$ é trivial se $1 \le i \le n$. Seja $U_b \cap = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Logo aplicando-se o lema anterior n-1 vezes temos que $\pi/U_b \times [0,1]$ é trivial. Como B é pa

racompacto, dada a cobertura $\{U_b\}b \in B$ construida da maneira acima, existe um refinamento $\{U_\alpha\}$ localmente finito.

TEOREMA 7.9. (Milnor) Seja $r: B \times I \longrightarrow B \times \{1\}$ definida por $r(b,t) = (b,1)$. Seja $\pi: E \longrightarrow B \times I$ um k-plano fibrado, com B paracompacto. Então existe uma aplicação G-fibrada $\tilde{r}: E \longrightarrow E$ que cobre r.

Dem: Do lema anterior temos que existe cobertura aberta, localmente finita $\{U_\alpha\}$ de B tal que E é trivial sobre $U_\alpha \times I$. Seja $\{\psi'_\alpha\}$ uma partição da unidade subordinada a essa cobertura. Seja $u = \max_\alpha \psi'_\alpha$ e $\psi_\alpha^{-1}(0,1] \subset U_\alpha$ e $\max_\alpha \psi_\alpha = 1$.

Se $\phi_\alpha: U_\alpha \times I \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha \times I)$ é uma trivialização local, definimos

$$r_\alpha: B \times I \longrightarrow B \times I$$
$$r_\alpha(b,t) = (b, \max(\psi_\alpha(d), t))$$

e

$$\tilde{r}_\alpha: E \longrightarrow E$$
$$\tilde{r}_\alpha(\phi_\alpha(b,t,w)) = \phi_\alpha(b, \max(\psi_\alpha(b),t),w) \text{ em } U_\alpha \times I \times F$$
$$\tilde{r}_\alpha = 1 \quad \text{fora de } \pi^{-1}(U_\alpha \times I)$$

Como $\{U_\alpha\}$ é localmente finita, para cada $b \in B$ existe vizinhança aberta U_b de b em B tal que U_b tem intersecção não vazia, apenas com $U_{\alpha(1)}, U_{\alpha(2)}, \dots U_{\alpha(3)}$; sendo $\alpha_{(1)} < \alpha_{(2)} < \dots < \alpha_{(n)}$. Definimos

$$r = r_{\alpha(n)}\, r_{\alpha(n-1)} \cdots r_{\alpha(1)}$$
$$\tilde{r} = \tilde{r}_{\alpha(1)}\, \tilde{r}_{\alpha(2)} \cdots \tilde{r}_{\alpha(n)}$$

Assim se $\alpha \quad \{\alpha_{(1)}, \dots, \alpha_{(n)}\}$ $r_\alpha = 1$ em $U_b \times I$ e $\tilde{r}_\alpha = 1$

em $\pi^{-1}(U_b \times I)$. Portanto temos que a aplicação $\tilde{r}$ está bem definida, é contínua e cobre r.

O Teorema 7.9 é também válido no caso de π ser um G-fibrado e a demonstração é análoga à anterior.

COROLÁRIO 7.10. E e r^*E são G-equivalentes sobre $B \times I$.

8. O TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO

DEFINIÇÃO 8.1. Duas aplicações f_o, $f_1 : X \longrightarrow Y$ são homótopicas se existe uma aplicação contínua $f : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $f(x,0) = f_o$ e $f(x,1) = f_1$

LEMA 8.2. Seja $\pi : E \longrightarrow B$ um G-fibrado e $f_o, f_1 : K \longrightarrow B$ aplicações homotópicas, com K paracompacto. Então $f_o^* E$ e $f_1^* E$ são G-equivalentes.

Dem: Seja $f : K \times I \longrightarrow B$ uma homopotia com $f(x,0) = f_o$ e $f(x,1) = f_1$. Então $r^*f^*E/\pi^{-1}(K \times 0)$ é G-equivalente a $f^*E/\pi^{-1}(K \times 0)$, onde r está definida como no teorema de Milnor (7.9). Definimos então $h_i : K \longrightarrow K \times I$ por $h_i(x) = (x,i)$ e temos que $f_i = fh_i$ para $i = 1,2$. Assim $rh_o = h_1$ e $f_i^* E$ é G-equivalente a $h_i^* f^* E$ e consequentemente $f_1^* E$ é G-equivalente a $h_1^* f^* E$ que por sua vez é G-equivalente a $h_o^* r^* f^* E$ que é G-equivelente a

$h_o^* f^* E$, que é G-equivalente a $f_o^* E$.

<u>TEOREMA 8.3.</u> (Classificação de fibrados vetoriais). Existe uma correspondência 1-1 entre as classes de equivalência dos fibrados de k-planos sobre um complexo celular localmente finito K e as classes de homotopia das aplicações $K \longrightarrow BO_k$. Essa correspondência associa a cada aplicação $K \longrightarrow BO_k$ o fibrado induzido do fibrado universal, $n_k : E_k \longrightarrow BO_k$, por essa aplicação.

<u>Dem</u>: Como um complexo celular localmente finito é paracompacto temos que dado um fibrado de k-planos $\pi : E \longrightarrow K$ existe uma aplicação classificante $\gamma : K \longrightarrow BO_k$ com $\gamma^*(E_k)$ equivalente a E (Lema 7.6). Se γ_o e $\gamma_1 : K \longrightarrow BO_k$ são homotópicas então $\gamma_o^* (E_k)$ e $\gamma_1^* (E_k)$ são equivalentes (Lema 8.2).

Finalmente mostremos que fibrados equivalentes tem aplicações classificantes homotópicas. Suponhamos então que $h : \gamma_o^* (E_k) \longrightarrow \gamma_1^* (E_k)$ é uma equivalência de fibrados. Seja $p : K \times I \longrightarrow K$ a projeção no primeiro fator. Seja $E_I = p^*\gamma_o^* (E_k)$. Definimos o fibrado de k-planos $\pi_I : E_I \longrightarrow K \times I$ como o fibrado induzido

$$\begin{tikzcd} E_k \arrow[d, "n_k"'] & & E_I \arrow[d, "\pi_I"] \\ BO_k & K \arrow[l, "\gamma o"'] & K \times I \arrow[l, "p"'] \end{tikzcd}$$

De n_k por $\gamma_o p$. Assim $(\gamma_o)* : \gamma_o^* (E_n) \longrightarrow E_k$ e $(\gamma_1)* h : \gamma_o^*(E_k) \longrightarrow E_k$ definem uma aplicação fibrada $\pi_I^{-1} (K \times \{0,1\}) \longrightarrow E_k$ e pelo teo rema 7.6 temos que ela pode ser extendida a uma aplicação fibrada $f : E_I \longrightarrow E_k$.

Então a aplicação fibrado $\tilde{f} : K \times I \longrightarrow BO_k$ induzida

$$\begin{array}{ccc} E_I & \xrightarrow{f} & E_k \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_I} & & \downarrow{\scriptstyle n_k} \\ K \times I & \xrightarrow{\tilde{f}} & BO_k \end{array}$$

por f é uma homotopia entre γ_o e γ_1

BIBLIOGRAFIA

(1) J. Milnor, Differential Topology, Princeton University. - Lecture Notes (Mimeo).

(2) R. Thom, Quelques Propriëtes Globales des Variëtes Diffe rentiables, Comment. Math. Helv. vol. 28. (1954) pp. 17-86.

(3) J.A.Lees, Notes on Bundles Theory, Aarhus University, - Lecture Notes.

(4) R. Stong, Notes on Cobordism Theory, Princeton Universi ty Press.

(5) D. Husemoller, Fibre Bundles, McGraw-Hill, New York, - 1966.

(6) Steenrod, N., Topology of Fibre Bundles, Princeton Univer sity Press, Princeton, N.J. 1951.