

TEORIA DAS CATÁSTROFES

E

ALGUNS EXEMPLOS

Sergio Roberto Teixeira

Dissertação apresentada do Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador : Prof. Ass. Dr. Marco Antonio Teixeira

CAMPINAS

1978

A G R A D E C I M E N T O S

Inicialmente quero expressar os meus mais sinceros agradecimentos ao Prof. Ass. Dr. Marco Antonio Teixeira pela orientação da Tese de Mestrado;

A todos os meus professores;

A meus pais;

À minha esposa Dálcia.

Í N D I C E

Introdução	i
Capítulo 1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS NA TEORIA DAS CATÁSTROFES	
1.1 Introdução	01
1.2 Exemplo Fundamental I	02
1.3 Pontos Críticos não Degenerados	03
1.4 Exemplo Fundamental II	03
1.5 Superfície de Equilíbrio	05
1.6 Conjunto de Bifurcação	06
1.7 Classificação e Geometria	06
Capítulo 2 - EXEMPLOS E APLICAÇÕES NA TEORIA DAS CATÁSTROFES	
2.1 A Máquina de Catástrofe de Zeeman ..	17
2.2 Concha Esférica Rasa	26
2.3 O Arco Simples de Euler	33
Capítulo 3 - ALGUNS RESULTADOS NA TEORIA DAS CATÁSTROFES	
3.1 A k -Determinação	
3.2 O Desdobramento Universal de uma Singula ridade	55
3.3 As Sete Catástrofes Elementares	62
Apêndice 4 - A Topologia de Whitney	68
Bibliografia	71

I N T R O D U Ç Ã O

O estudo das singularidades de uma aplicação diferenciável, constituiu-se principalmente de uma análise de classe invariante sob certo aspecto por difeomorfismos no domínio e contradomínio (as mudanças de coordenadas). Podemos encontrar a origem deste estudo nos trabalhos de M. Morse, ver [15]. Dando continuidade ao trabalho de Morse, três fases se distinguem no desenvolvimento da Teoria das Singularidades das Aplicações Diferenciáveis, as quais estão associadas as contribuições principalmente de H. Whitney, R. Thom e J. Mather

Um dos objetivos deste trabalho é apresentar alguns exemplos na Teoria da Elasticidade os quais serão discutidos sob a linguagem da Teoria das Catástrofes. Para isto é apresentado inicialmente, a nível elementar uma introdução geral à Teoria das Catástrofes Elementares. Uma visão panorâmica da teoria aí empregada é também apresentada, concentrando-se porém, a nível de detalhes, em alguns poucos assuntos. Com o propósito de ilustrar e enfatizar os métodos característicos usados nestes exemplos teóricos, fazemos uma apresentação de alguns de seus resultados mais significativos como A k-Determinação, O Desdobramento Universal de uma Singularidade e admitindo o Teorema de Mather (3.2.8) finalmente apresentamos o Teorema fundamental da Teoria das Catástrofes, de Thom.

O trabalho assim se divide:

Capítulo 1 - Destina-se a apresentar uma visão do conjunto de conceitos e resultados na Teoria das Catástrofes. Isto será feito de modo informal, visando apresentar uma idéia global geral da mesma;

Capítulo 2 - Contém os exemplos na Teoria das Catástrofes : A Máquina de Catástrofe de Zeeman com a respectiva equivalência canônica, A Concha Esférica Rasa descrita por Sewell e o Arco Simples de Euler;

Capítulo 3 - Contém a demonstração do Teorema da k-Determinação, O Desdobramento Universal de uma Singularidade e o Teorema Fundamental da Teoria das Catástrofes de Thom;

Apêndice 4 - Contém uma apresentação da Topologia de Whitney;

Finalmente é apresentado a Relação Bibliográfica.

TEORIA DAS CATÁSTROFES

E

ALGUNS EXEMPLOS

CAPÍTULO 1

CONSIDERAÇÕES GERAIS NA TEORIA DAS CATÁSTROFES

1.1 Introdução

Catástrofe é um fenômeno que aparece em famílias de funções diferenciáveis de valor real. A grosso modo, catástrofe é uma mudança no número de mínimos de uma função em uma família. Tal família varia continuamente com os parâmetros que a define. Como estes parâmetros determinam a natureza, o fluxo, o número, e a localização dos mínimos, são ditos parâmetros de controle.

A Teoria das Catástrofes dá entre outras coisas uma descrição qualitativa de como efeitos súbitos podem surgir de causas uniformes. O efeito súbito, ou mudança de comportamento processa-se sobre um "tempo de escala" rápido e é chamado de catástrofe. A causa uniforme é uma sequência de contínuos ajustes sobre um "tempo de escala" lento de certos parâmetros de controle. O modelo apresentado na Teoria das Catástrofes descreve como pode ocorrer uma catástrofe durante uma sequência semelhante de ajustes contínuos, ou sugere geometricamente como tais sequências podem evitar uma catástrofe.

No contexto de uma aplicação singular, a terminologia nem sempre é muito conveniente. Uma catástrofe nem sempre é desastrosa no sentido comum. O termo tem por significado mudanças súbitas que ocorrem por exemplo na flambagem de uma concha esférica rasa pressionada axialmente, no arrebentar de uma onda na praia, no rolar de uma pedra, na mudança súbita no comportamento de um animal no que se refere por exemplo, ao ataque e fuga de um predador.

A Teoria das Catástrofes idealizada pelo matemático francês René Thom, é sem dúvida, o exemplo mais recente e notável de trabalhos recém-publicados que alcançaram a comunidade científica em geral, isto no que se refere a sua multiplicidade de aplicações nos diversos campos como cardiologia, embriologia, neurologia, sociologia e economia.

1.2 Exemplo Fundamental I

Consideramos a função $f(x) = x^3$ que é introduzida na função $F(x,u) = x^3 - ux$, pois $F(x,0) = f(x)$. A função F é dita um desdobramento de f , para o qual

$$F_1(x,u) = 3x^2 - u$$

tem um mínimo se $u > 0$, e não tem mínimo se $u < 0$. Ver fig. 1

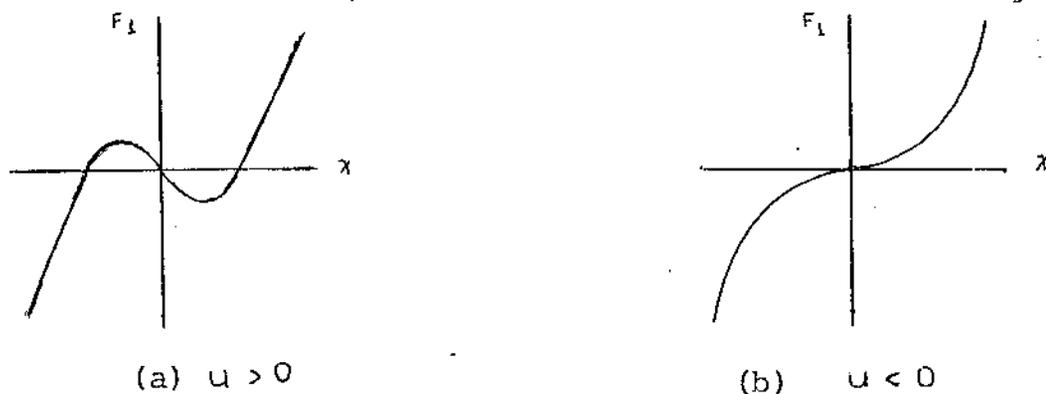


fig. 1

1.3 Pontos Críticos não Degenerados

Consideremos agora uma função f que tenha somente pontos críticos não degenerados. O resultado fundamental do Teorema de Morse garante que todo ponto crítico de qualquer função próxima de f não será degenerada, isto é, será precisamente de mesmo índice e isto conclui que toda função perto de f tem o mesmo número de mínimo que f . Em outras palavras: uma função não degenerada, não pode sofrer catástrofe. Portanto passemos a considerar funções que tenham pontos críticos degenerados. Ver [15]. Seja f uma função em um ponto crítico degenerado e $F = F(x,u)$ seu desdobramento com $F(x,0) = f(x)$ assumindo que o controle $u = (u_1, \dots, u_r)$ está na vizinhança da origem, pois a singularidade de uma função pode ser estudada transladada para a origem como será feito. A ideia é que o ponto crítico degenerado de f contém um potencial que floresce ou desdobra em vários outros pontos críticos não degenerados que aparecem nas funções $F_u(x) = F(x,u)$ que desdobra f , próximas de f . Mais geralmente u é dito variável externa ou parâmetro de controle e $x \in \mathbb{R}^n$ variável interna ou variável de comportamento.

1.4 Exemplo Fundamental II

Seja a função $f(x) = x^4$, que pode ser desdobrada pela função $F(x,u,v) = x^4 - ux^2 + vx$.

O conjunto dos pontos para os quais

$$F_1(x,u,v) = 4x^3 - 2ux + v = 0$$

é comumente chamado de superfície de equilíbrio.

O conjunto dos pontos da superfície de equilíbrio, para os quais

$$F_{11}(x, u, v) = 12x^2 - 2u = 0$$

é dito limite de estabilidade. A projeção destes no espaço de controle $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, dada pela curva curva cuspide

$$27v^2 = 8u^3$$

é chamado de conjunto de bifurcação, que é obtido de

$$F_1 = F_{11} = 0$$

eliminando a variável interna x .

A configuração geométrica destes conjuntos é apresentada na fig. 2, onde a superfície de equilíbrio é uma superfície dobrada, os pontos do limite de estabilidade são os pontos da curva na superfície de equilíbrio para os quais o plano tangente é perpendicular ao espaço de parâmetros \mathbb{R}^2 . A projeção desta curva em \mathbb{R}^2 determina a curva cuspide, o conjunto de bifurcação.

A fig. 3 dá o correspondente gráfico da função

$$F_{(u,v)}(x) = F(x, u, v)$$

para pontos do plano de controle.

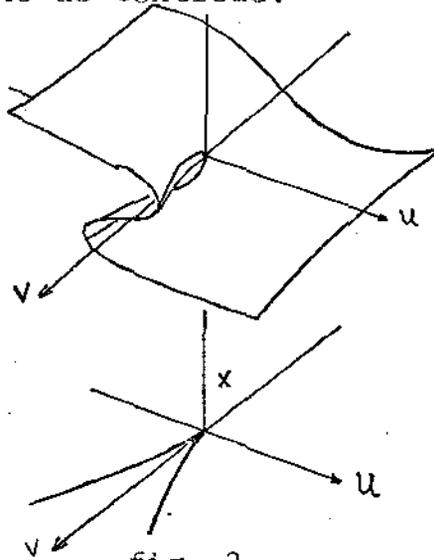


fig. 2

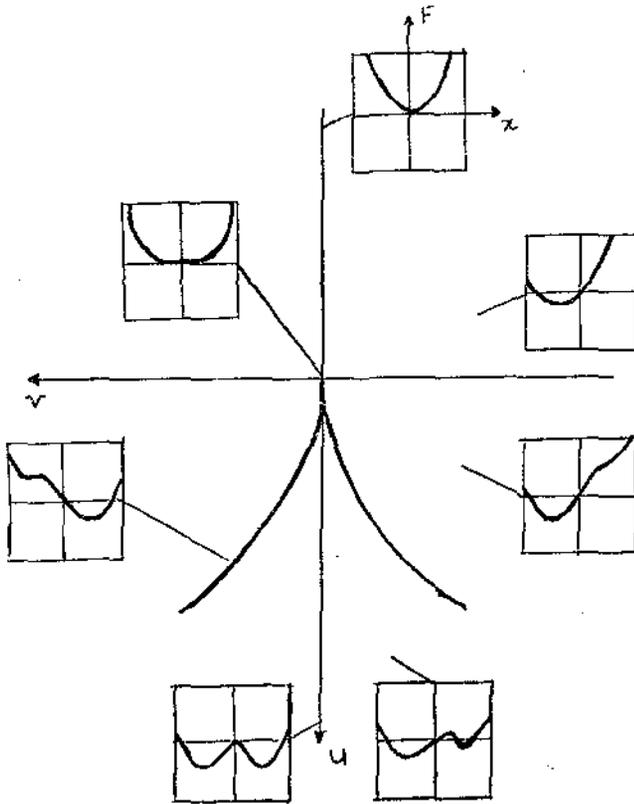


fig. 3

1.5 Superfície de Equilíbrio

No contexto de um sistema contendo uma função $F(x,u)$

$$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R} \quad (1)$$

com n variáveis de comportamento e r variáveis de controle, o conjunto

$$S_f = \{(x, u) \in R^n \times R^r : \partial F / \partial x_i = 0, i = 1, \dots, n\} \quad (2)$$

de modo geral define uma superfície de dimensão r , no espaço de dimensão $n+r$, nas variáveis x_i, u_j .

Nas estruturas mecânicas de engenharia esta superfície tem sido chamada de superfície de equilíbrio por Sewell [5], pois o anulamento do gradiente, representa força nula no contexto.

Pontos da superfície de equilíbrio os quais tem a propriedade adicional (3) são ditos estabilidade limitada ou

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (3)$$

são chamados de limite de estabilidade, pois aí o sistema possui propriedades dinâmicas particulares, isto é, seu equilíbrio torna-se instável em "quase todo ponto".

1.6 Conjunto de Bifurcação

As equações (2) e (3) e, (1.5) são $n+1$ equações relacionando $n+r$ variáveis. Se os x_i são eliminados nas $n+1$ equações teremos obtido uma hipersuperfície chamada muitas vezes de conjunto de bifurcação.

Tais pontos u do espaço de controle fazem com que F_u tenha um germe degenerado que pode sofrer catástrofe.

1.7 Classificação e Geometria

Temos agora duas questões básicas na Teoria das Catástrofes que iremos considerar:

a) Classificação: Quais catástrofes podem ocorrer? A aspiração é uma lista de germes degenerados também chamados de singularidades, e seus respectivos desdobramentos os quais são completos em algum sentido.

b) Geometria: Como é a configuração geométrica das diferentes catástrofes? Quais outras catástrofes podem ocorrer no conjunto de catástrofe K ? Qual a configuração geométrica de k ?

Estas questões não são simples e trazem à tona sérios problemas. Nós iremos considerar somente classes especiais de germes de catástrofe, os quais Arnold chamou de "germessimples". Neste caso existe uma classificação completa, com razoável descrição geométrica. O caso mais geral tem sido estudado, o qual não será comentado. Ver [8,9,10,11]

1.7.1 Classificação

Uma catástrofe pode ser considerada como um par:

a) um germe de uma função f , em um ponto crítico degenerado; (ver definição 3.1.5)

b) um desdobramento F de f , onde o número de mínimos exibido pelas funções F_u no desdobramento deve variar.

Desta forma caracteriza-se uma catástrofe de um germe f , para um desdobramento F como o par (f,F) .

Três diferentes noções de equivalência são introduzidas associadas a uma particular classe de objetos, os germes e seus desdobramentos, as quais estruturam a classificação:

a) Duas funções ou germes de funções, $f, g: M \rightarrow N$, entre duas variáveis diferenciáveis arbitrárias são equivalentes se existem difeomorfismos h e k , com

$$h: M \rightarrow M$$

$$k: N \rightarrow N$$

tal que

$$g = kfh$$

Esta equivalência é dita equivalência à direita-esquerda, e é uma noção básica, da qual as duas seguintes equivalências são derivadas.

b) Duas funções de valor real $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são equivalentes se estas são equivalentes à direita-esquerda como em (a) e k preserva a orientação.

Esta condição adicional é necessária para que f e $-f$ sejam não equivalentes; estas funções de modo geral tem número de mínimos diferentes, e portanto devem ser consideradas diferentes na Teoria das Catástrofes.

c) Dois germes de valor real $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são ditos equivalentes se existe um difeomorfismo

$$h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

para o qual

$$g = fh$$

igualdade a menos de uma constante. Esta equivalência é chamada equivalência à direita.

Portanto duas catástrofes (f, F) e (g, G) são ditas equivalentes se os germes são equivalentes à direita, e seus desdobramentos F e G são equivalentes no sentido de (b).

Neste passo são eliminados os germes, os quais são ditos não simples. Um germe é simples se as funções em todo desdobramento representa somente um número finito de tipos não equivalentes. Isto vem simplificar consideravelmente o conjunto de catástrofe K . Os germes não simples são completamente comuns. De fato, nenhum germe degenerado em três ou mais variáveis é simples. Para tanto ver [8].

Seja s o posto da matriz Hessiana de um germe f , e $t = n - s$ o co-posto. Por definição f é degenerado se $t \geq 1$

Sabe-se que se $t \geq 3$ em um Teorema apresentado por Arnold em [7] que o germe não é simples. (i.e.: o problema recai na equivalência de formas cúbicas com mudanças de coordenadas lineares, onde o espaço das formas cúbicas tem dimensão 10, e o grupo linear $GL(R^3, R)$ tem somente 9).

Quando as catástrofes não simples são eliminadas, podemos estudar germes com duas variáveis e não perdemos a generalização. Por hipótese consideramos os germes simples que sofrem catástrofe, isto é germes de co-posto ≤ 2 , e uma mudança de coordenada pode fazer f equivalente a um germe da forma

$$g(x_1, x_2) \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_n^2$$

este resultado pode ser visto como uma generalização do Lema de

Morse, ver [15]. Portanto todo desdobramento F de f é equivalente a

$$F(x_1, \dots, x_n) = G(x_1, x_2) \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_n^2$$

onde os pontos críticos de F são da forma

$$(a_1, a_2, 0, \dots, 0)$$

onde (a_1, a_2) é um ponto crítico degenerado ou não. Desta forma toda mudança experimentada por funções próximas de f no sentido da Topologia de Whitney (4.1), pode ser encontrada no desdobramento $G(x_1, x_2)$.

Passamos a considerar os possíveis desdobramentos de um germe simples degenerado. A dificuldade é portanto que um particular desdobramento pode ser incompleto e portanto falho para incluir todos os possíveis tipos equivalentes.

Por exemplo, o desdobramento $H_b = x^4 - bx^2$ de $y = x^4$ não inclui funções equivalente a

$$G_a = x^4 - ax - (3/2)a^{2/3} x^2$$

onde o coeficiente $(3/2)a^{2/3}$ de x^2 foi escolhido para que G tenha ponto de inflexão, do mesmo modo que G é incompleto. Ver fig. 4 Estas faltas são remediadas por

$$F(x, u, v) = x^4 - vx - ux^2$$

que incorpora H e G , e inclui todas as funções equivalentes a x^4 .

Um desdobramento que contém todos os possíveis casos de equivalência é chamado versal, e o desdobramento com essa propriedade, com menor número de parâmetros possíveis é chamado univ_{ersal}.

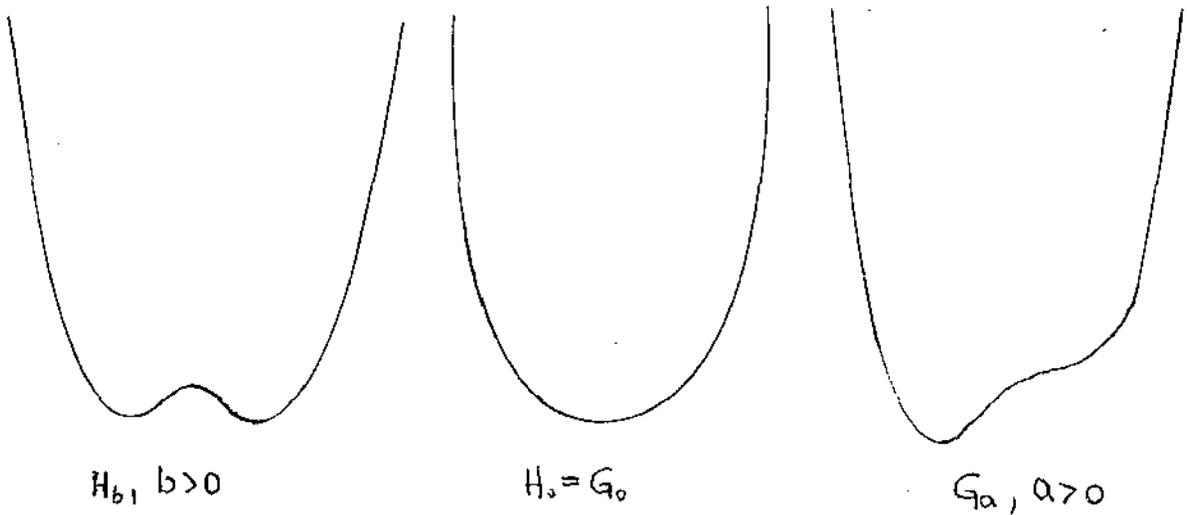


fig. 4

Considerando um desdobramento de um germe f como um germe diferenciável

$$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0: (x, u) \rightarrow F(x, u)$$

com

$$F(x, 0) = f(x)$$

onde u é o parâmetro de controle no espaço de controle \mathbb{R}^r , cuja dimensão é r . Um resultado fundamental introduzido por Mather (3.2.8) para a construção de um desdobramento.

Seja E o anel dos germes $f: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ e \mathfrak{m} o ideal maximal de todos os germes que se anulam na origem. Ver (3.1.6). Nós mostramos que \mathfrak{m} é finitamente gerado por n -funções coordenadas

$$x_i: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$$

e portanto E e \mathfrak{m} são espaços vetoriais de dimensão finita .

Ver (3.1.7)

Seja f um germe desdobrável. O jacobiano ideal Δ_f de f é gerado pelos germes $\partial f / \partial x_i$ em E , que se anulam na origem pois f tem um ponto crítico degenerado. Assim $\Delta_f \subset \mathfrak{m}$ e portanto podemos considerar o quociente $\mathfrak{m} / \Delta(f)$. Este é um espaço vetorial de dimensão finita para todo germe simples pelo Teorema (3.2.8). Sua dimensão real k , é chamada codimensão de f . Finalmente se os germes

$$h_1, \dots, h_r : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$$

formam uma base para $\mathfrak{m} / \Delta(f)$, como espaço vetorial real, então

$$F(x, u_1, \dots, u_n) = f(x) + u_1 h_1(x) + \dots + u_r h_r(x)$$

é um desdobramento universal do germe simples f .

Obviamente um desdobramento universal não é único, portanto qualquer outro assim definido deve ter pelo menos a "dimensão minimal". Isto é, um desdobramento não pode ser universal se a sua dimensão é menor que a codimensão de f .

Exemplo: Seja $f = x^4 + y^2$. Então como $\mathfrak{m}(2) = (x, y)$ e $\Delta(f) = (x^3, y)$. Uma forma básica para

$$\mathfrak{m} / \Delta(f) \text{ é } \{x, x^2\}$$

e portanto seu desdobramento universal será, pelo Teorema de Mather (3.2.8)

$$F(x, y; u, v) = x^4 + y^2 + ux^2 + vx$$

1.7.2 Geometria - algumas considerações:

A Teoria das Catástrofes é de natureza local. Uma particular catástrofe (f, F) determina um germe $f \in m^2$ o qual é desdobrado em um germe $F \in m(n+r)$.

Algumas definições se seguem.

- a) Definição: Um regime local para $u \in R^r$ é qualquer um dos mínimos locais de $f|_{R^n \times \{u\}}$.
- b) Definição: Um processo para um germe f é uma seção s do feixe tal que $(s(u), u)$ é um regime local ou infinito.
- c) Definição: Uma convenção determina um processo para um desdobramento de f .
- d) Definição: Um ponto regular de um processo é um ponto de R^r onde a seção é localmente contínua neste ponto.

Isto equivale a dizer que na vizinhança do ponto existe um homeomorfismo do feixe entre uma seção s e a seção constante

- e) Definição: Um ponto de catástrofe é um ponto não regular em R^r .

Uma convenção comumente usada é chamada Convenção de Maxwell. Esta estabelece que $s(u)$ é um ponto onde

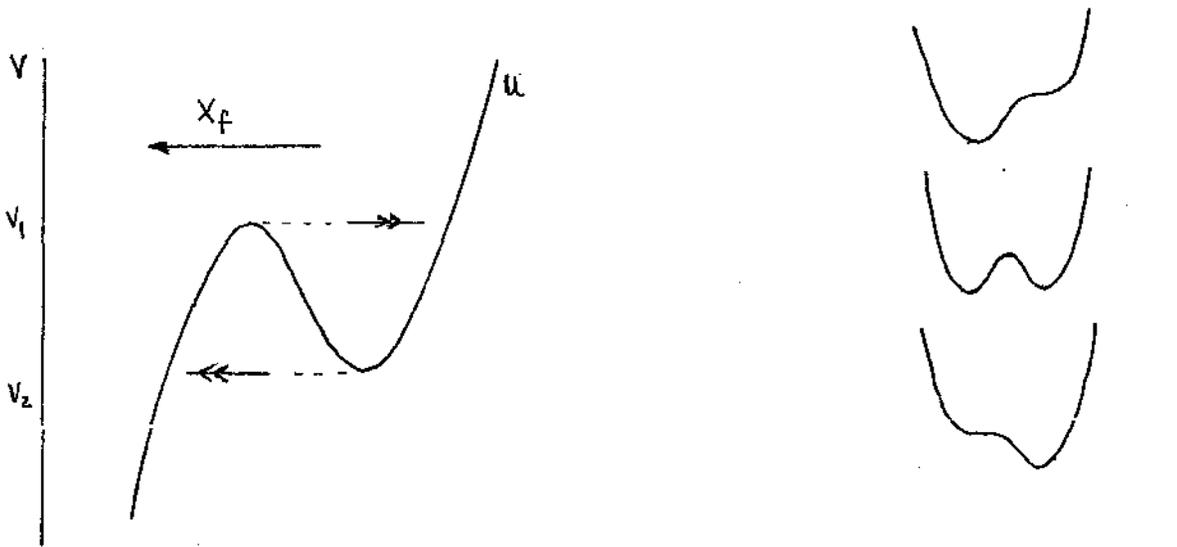
$$f|_{R^n \times \{u\}} \quad (1)$$

tem um mínimo absoluto. Como este pode ser $-\infty$, esta convenção é mais usada quando f apresenta mínimos finitos. Também vemos que os pontos de catástrofe ocorrem quando em (1) temos dois mínimos iguais.

Considerando a projeção

$$X_f = \Pi_{S_f} : S_f \rightarrow R^r$$

ver fig. 5, os pontos regulares do processo são aqueles para os quais X_f é localmente trivial. Uma variação de v nas vizinhanças deste ponto produz uma mudança contínua de estado, e assim X_f é um difeomorfismo local entre S_f e uma vizinhança em R^r . O conjunto de catástrofe fica determinado pelos valores críticos de X_f , isto é, pelos u , tais que, $X_f^{-1}(u)$ contém algum ponto singular de X_f .



cúspide catastrophe

funções potenciais

(u, v_1) e (u, v_2) são pontos de catástrofe.

fig. 5

As singularidades da aplicação X_f onde DX_f tem posto $\leq r$ isto é, onde o determinante do jacobiano de X_f é nulo, ou ainda, geometricamente, onde o plano tangente a S_f é horizontal, são os pontos que determinam as catástrofe do processo.

Para reconhecer quando duas catástrofes exibem o mesmo padrão qualitativo, ou forma, é usado o conceito de equivalência de singularidades, o qual bem se adapta ao caso das aplicações X_f . Diz-se que X_f em $P(x,u) \in S_f$ é diferenciavelmente equivalente a X_{f^*} em $Q(x^*,u^*) \in S_{f^*}$ se existem difeomorfismos locais h e k tal que

$$X_{f^*} = k \cdot X_f \cdot h^{-1}$$

Esta equivalência preserva os pontos singulares de X_f , conservando o seu caráter topológico-diferencial através dos difeomorfismos.

Ao descrever um objeto em estudo usando determinada estrutura matemática, devemos incluir entre as propriedades do mesmo a de possuir a mesma ou quase a mesma estrutura de todos os objetos do mesmo tipo, obtidas a partir deste por pequenas perturbações. O objeto com tais características é dito estruturalmente estável.

Na Teoria das Catástrofes formula-se como hipótese fundamental que a família de funções potenciais, que governa o processo considerado, seja localmente Estruturalmente Estável.

Para definir com mais precisão a Estabilidade Estrutural, é considerado o espaço das funções $F = F^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R})$, o conjunto das funções reais de classe C^∞ , definidas em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$, munidas de uma noção de proximidade apropriada, a chamada Topologia de Whitney. Esta estabelece que duas funções f e g estão próximas, se elas com um número suficientemente grande de derivadas, nas variáveis x_i, y_j , também estão próximas. Ver[4.1]. Assim diz-se que f em $P(x,u) \in S_f$ é estruturalmente estável se, para

...
...
...

toda f^* suficientemente próxima de f no sentido da topologia de Whitney existe $P^*(x^*, u^*) \in S_f^*$, próximo de P , tal que f em P é localmente equivalente a f^* em P^* .

CAPÍTULO 2

EXEMPLOS E APLICAÇÕES NA TEORIA DAS CATÁSTROFES

2.1 A MÁQUINA DE CATÁSTROFE DE ZEEMAN

2.1.1 Introdução:

Nós apresentamos um modelo físico tirado da máquina de elasticidade, a Máquina de Catástrofe de E. C. Zeeman, que ilustra a Teoria das Catástrofes de R. Thom. O sistema é descrito por um gradiente em \mathbb{R}^2 . O caminho de separação no espaço de controle, que dá a descontinuidade deste sistema, descreve localmente uma morfologia de cuspide, a qual é descrita pelo clássico Teorema de Thom na Teoria das Catástrofes Elementares. Será mostrado que existe um difeomorfismo que troca topologicamente a morfologia de cuspide local do exemplo de catástrofe da Máquina de Zeeman para o sistema canônico equivalente.

2.1.2 Descrição:

Para ilustrar suas conferências sobre a Teoria das Catástrofes, o Prof. E. C. Zeeman inventou um sistema físico, um modelo na Teoria da Elasticidade que é conhecido como "Máquina de Catástrofe".

O modelo empregado na construção, e no funcionamento desta máquina é uma haste móvel fixada em uma de suas extremidades por um pivô em uma superfície plana, num ponto A e na outra extremidade B, são presos dois elásticos de com-

primento α e β , onde a extremidade de α é fixada em um ponto C, e a outra, móvel no plano. O estado do sistema determinado pelo ângulo θ de rotação da haste, entre CA e AB, é controlado pela parte móvel do elástico, pela disposição da haste no plano de controle (y, z) . Temos posições simétricas para θ .

Dado uma região no plano, um controle fixado, implica em um sistema com um equilíbrio estável ou dois. As fronteiras destes domínios são delimitadas pelo asteróide, como na fig. 1, com um equilíbrio estável no exterior do asteróide, e dois no interior. Um caminho transversal ao eixo z, ao passar da região de dentro para fora, ou vice-versa, muda bruscamente o estado do sistema. Este contorno aparente dado no plano de controle, corresponde a estas descontinuidades ou catástrofes fornecida pela morfologia canônica de cúspide.

2.1.3 O modelo físico-matemático:

O estudo da dinâmica da Máquina de Catástrofe nos introduz à Teoria das Catástrofes. Esta dinâmica é descrita em um espaço de controle C, por um par de parâmetros (y, z) em R^2 , e de um outro espaço, o círculo S^1 , o parâmetro local $\theta \in R$. Para um dado controle fixo, o sistema assume um estado de equilíbrio que minimiza a energia potencial V dos elásticos tensos.

Consideremos o caso particular onde $AB = 1$, $AC = 3$ e os elásticos tenham comprimento 1. Pela Lei de Hooke a energia potencial do sistema é dada por

$$V = \frac{k}{2} [(\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2]$$

onde α e β são os comprimentos dos elásticos e k o módulo da elasticidade. Os comprimentos α e β dependem dos parâmetros y , z e θ .

Assim V é função de um produto de espaço de controle e outro espaço real X ,

$$V: C \times X \rightarrow R$$

De fato não temos uma função potencial, mas sim uma família de funções potenciais, isto é, a cada ponto do controle $(y, z) = c \in C$, corresponde uma função potencial

$$V_c: X \rightarrow R$$

Para cada ponto fixo c , os estados de equilíbrio possíveis do sistema para $\theta \in X$ que correspondem a um equilíbrio estável é assumido nos pontos onde V_c possui um mínimo local.

A convenção adotada na dinâmica da Máquina de Catástrofe é evidentemente uma noção de estabilidade primária. Um sistema está em equilíbrio estável se após uma pequena perturbação, ele tende a retornar a posição inicial de equilíbrio.

2.1.4 O modelo canônico de equivalência:

Restringimos o estudo à análise local de uma família de funções potenciais, cujo domínio de controle está na vizinhança do ponto de cúspide $(0, z_0)$ tal que θ é suficientemente pequeno para o desenvolvimento em Série de Taylor da função potencial na origem.

Relembramos que para $y = 0$, são encontrados dois pontos de cuspide, e pela simetria do sistema, um estudo semelhante pode ser feito para o outro ponto.

Exprimimos doravante α e β como função de y, z e θ

$$B = (AB \text{ sen } \theta, -AB \text{ cos } \theta) \quad (2)$$

$$C = (0, -AC) \quad (3)$$

$$\alpha = [(AB)^2 \text{ sen}^2 \theta + (AB \text{ cos } \theta - AC)^2]^{1/2} \quad (4)$$

$$= (10 - 6 \text{ cos } \theta)^{1/2} \quad (4')$$

$$\beta = [(y - AB \text{ sen } \theta)^2 + (z + AB \text{ cos } \theta)^2]^{1/2} \quad (5)$$

$$= (1 + y^2 + z^2 - 2y \text{ sen } \theta + 2z \text{ cos } \theta)^{1/2} \quad (5')$$

isto, para o caso particular de $AB = 1$ e $AC = 3$.

Substituindo em (1), obtemos uma expressão para o potencial $V = V_{(y;z)}(\theta)$. Para um desenvolvimento em Série de Taylor, de V em $\theta = 0$, nós temos

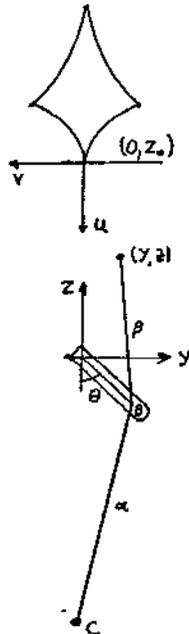


fig. 1

$$V_{(y,z)}(\theta) = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + \dots + a_n\theta^n + \dots \quad (6)$$

onde:

$$V = \frac{k}{2} \{ (10 - 6 \cos \theta)^{1/2} - 1 \}^2 + [(1 + y^2 + z^2 - 2y \sin \theta + 2z \cos \theta)^{1/2} - 1 \}^2 \}$$

$$\begin{aligned} V_{(y,z)}(0) &= \frac{k}{2} [1 + \{ (z+1)^2 + y^2 \}^{1/2} - 1 \}^2] \\ &= \frac{k}{2} (2 - 2a^{1/2} + a) \end{aligned}$$

portanto

$$a_0 = \frac{k}{2} (2 - 2a^{1/2} + a) \quad \text{para} \quad a = (z+1)^2 + y^2$$

Seja denotado $\frac{\partial}{\partial \theta} V_{(y,z)}(\theta)$ por $V'_{(y,z)}(\theta)$, assim

$$\begin{aligned} V'_{(y,z)}(\theta) &= \frac{k}{2} [(1 - (10 - 6 \cos \theta)^{-1/2}) 6 \cos \theta + \\ &+ (1 - (1 + y^2 + z^2 - 2y \sin \theta + 2z \cos \theta)^{-1/2}) \cdot \\ &\cdot (-2y \cos \theta - 2z \sin \theta)] \end{aligned}$$

$$V'_{(y,z)}(0) = k \{ (1 + y^2 + z^2 + 2z)^{-1/2} - 1 \} \cdot y$$

portanto

$$a_1 = k (a^{-1/2} - 1) y$$

$$\begin{aligned} V''_{(y,z)}(\theta) &= \frac{k}{2} [18(10 - 6 \cos \theta)^{-3/2} \sin^2 \theta + \\ &+ (1 - (10 - 6 \cos \theta)^{-1/2}) \cdot 6 \cos \theta + \\ &+ \frac{1}{2} (1 + y^2 + z^2 - 2y \sin \theta - 2z \cos \theta)^{-3/2} \cdot \\ &\cdot (-2y \cos \theta - 2z \sin \theta) + \\ &+ (1 - (1 + y^2 + z^2 - 2y \sin \theta + 2z \cos \theta)^{-1/2}) \cdot \\ &\cdot (2y \sin \theta - 2z \cos \theta)] \end{aligned}$$

portanto

$$v''(y, z)(0) = \frac{k}{2}(3 + 2a^{-3/2}y^2 + 2(a^{-1/2} - 1)z)$$

assim, como $a_2 = \frac{1}{2}v''(0)$ temos

$$a_2 = \frac{k}{2}[3/2 + a^{-3/2}y^2 + (a^{-1/2} - 1)z]$$

Com mais alguns cálculos, obtemos

$$a_3 = \frac{k}{2}[(1 - a^{-1/2})y/3 + a^{-5/2}y^3 + a^{-3/2}yz]$$

$$a_4 = \frac{k}{2}[5/32 - a^{-3/2}y^2/3 + (5/4)a^{-7/2}y^4 + \\ + (3/2)a^{-5/2}y^2z + (1 - a^{-1/2})z/12 + \\ a^{-3/2}z^2/4]$$

Notemos que para $(y, z) \neq (0, -1)$ temos $a \neq 0$. Portanto o ponto $(0, -1)$ não faz parte do domínio no espaço de controle considerado.

Considerando este fato, $(0, -1)$ não é fisicamente um ponto de controle, como todos os pontos do disco de raio unitário e centro em $(0, -AB)$.

Determinaremos os valores dos coeficientes a_i para o ponto de cuspide $(0, z_0)$.

Por hipótese este ponto de controle é um ponto de possível catástrofe se este for um ponto crítico degenerado e portanto satisfaz a condição

$$v''(0, z_0)(0) = 0$$

o que nos dá

$$2z_0^2 - 3z_0 - 3 = 0 \quad (7)$$

A componente z_0 do ponto de cúspide é positiva por construção, e portanto

$$z_0 = (3 + \sqrt{33})/4 \quad (8)$$

obtida de (7).

Assim como $a = y^2 + (1 + z)^2$, para $c = (0, z_0)$ temos

$$a = (1 + z_0)^2 \quad e$$

$$a_0 = \frac{k}{2}(1 + z_0^2) \neq 0 \quad a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{k}{6}(3 + 3z_0 - 2z_0^2)/(1 + z_0) = 0 \quad a_3 = 0$$

$$a_4 = \frac{k}{2}(5/32 + (4 + 2z_0 + z_0^2)/12(1 + z_0)^3) \neq 0$$

onde $a_i = a_i(0, z_0)$.

A expressão $V(y, z, \theta)$ é uma forma canônica simples. Para uma transformação linear sobre θ , é possível eliminar os termos de terceira ordem, e reduzir o coeficiente do termo de quarta ordem a $1/4$, substituindo em (6).

$$\text{Seja } \theta = (1/4a_4)^{1/4}x - a_3/4a_4$$

temos

$$V^1(y, z; x) = V(y, z, \theta)$$

assim

$$V^1(y, z; x) = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 + a_4\theta^4 + R$$

onde

$$a_1\theta = a_1(1/4a_4)^{1/4}x - a_1a_3/4a_4$$

$$a_2\theta^2 = a_2[(1/4a_4)^{1/4}x - a_3/4a_4]^2$$

$$= (1/4a_4)^{1/2} a_2 x^2 - 2a_2 a_3 / (4a_4)^{5/4} \cdot x + a_2 a_3 / 16a_4^2$$

$$a_3 \theta^3 = a_3 [(1/4a_4)^{1/4} x - a_3 / 4a_4]^3$$

$$= (1/4a_4)^{3/4} a_3 x^3 - 3(1/4a_4)^{7/2} a_3^2 x^2 + \\ + 3(1/4a_4)^{9/4} a_3^3 x - a_3^4 / (4a_4)^3$$

$$a_4 \theta^4 = a_4 [(1/4a_4)^{1/4} x - a_3 / 4a_4]^4$$

$$= x^4 / 4 - (1/4a_4)^{3/4} a_3 x^3 + (3/2) (1/4a_4)^{3/2} a_3^2 x^2 - \\ - (1/4a_4)^{9/4} a_3^3 x + (1/256) (a_3^4 / a_4^3)$$

ou ainda

$$V^1(y, z; x) = x^4 / 4 + u/2 \cdot x^2 + v x + V_{(y, z)}(-a_3 / 4a_4) + R$$

onde

$$u = (1/a_4)^{1/2} (a_2 - 3a_3^2 / 8a_4) \quad (9)$$

$$v = (1/4a_4)^{1/4} (a_1 - a_2 a_3 / 2a_4 + a_3^3 / 8a_4^2) \quad (10)$$

Eliminando o termo independente de x por uma translação sobre valores da função potencial, temos

$$V^2_{(y, z)}(x) = V^1_{(y, z)}(x) - V_{(y, z)}(-a_3 / 4a_4) \\ = x^4 / 4 + u/2 \cdot x^2 + vx + R$$

$$h(y, z) = (h_1(y, z), h_2(y, z)) = (u, v)$$

determinada por (9) e (10) é localmente um difeomorfismo, pois é de classe C^∞ e sua matriz jacobiana $J(h)$ em $(0, z_0)$ tem posto máximo.

$$J(h)(0, z_0) = \begin{pmatrix} (\partial h_1 / \partial y)(0, z_0) & (\partial h_1 / \partial z)(0, z_0) \\ (\partial h_2 / \partial y)(0, z_0) & (\partial h_2 / \partial z)(0, z_0) \end{pmatrix}$$

onde

$$\det(J(h)(0, z_0)) = - \frac{k^2 z_0^2 (2 + z_0)}{(1 + z_0)^3 [4a_4(0, z_0)]^{3/4}} \neq 0$$

Assim existem vizinhanças adequadas de $(0, z_0)$ e $(0, 0)$ onde y e z podem ser escritos como função C^∞ de u e v . Com esta conversão temos

$$V^2_{(y, z)}(x) = V^3_{(u, v)}(x),$$

ou

$$V^3_{(u, v)}(x) = x^4 + u/2 \cdot x^2 + vx + R'$$

Nós obtemos finalmente uma forma canônica para a chamada função potencial, truncando a série a ordem 4 em x .

$$V^4_{(u, v)}(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{u}{2} x^2 + vx$$

2.2 CONCHA ESFÉRICA RASA

2.2.1 Descrição e Modelo Matemático:

O modelo matemático baseia-se na estrutura montada por duas hastes que permanecem retas, com constante elástica longitudinal k . Ver fig. 1. Elas giram suavemente sobre dois eixos fixos, a uma distância $2c$ e suas extremidades são presas por um terceiro eixo de forma a se articularem verticalmente. Uma força vertical atua sobre o terceiro eixo de tal forma a balancear o sistema pela tensão e compressão nas hastes.

A configuração é descrita para um desvio angular q

$$-\pi/2 < q < \pi/2$$

A simetria indica que temos um equilíbrio instável e dois estáveis

$$q = 0, \pm\alpha \quad e \quad p = 0$$

O ângulo α determina a profundidade da concha.

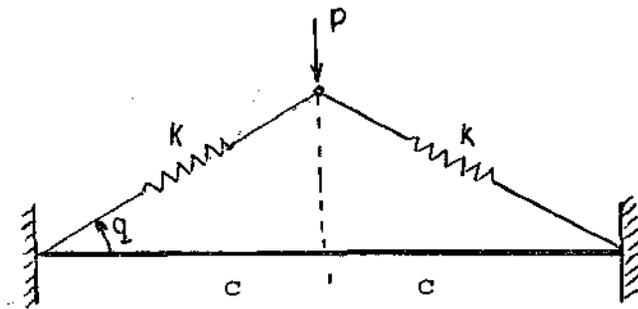


fig. 1

Seja $a = 1 - \cos q$ com $0 < a < 1$. A energia total do sistema em uma posição geral θ , para uma dada força é

$$2 \cdot \frac{1}{2} k \left(\frac{c}{\cos \alpha} - \frac{c}{\cos \theta} \right)^2 - Pc(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \theta)$$

Removendo $Pc \cdot \operatorname{tg} \alpha$ que independe de θ , e dividindo pela constante $2kc^2$ fixa, e escrevendo $b = P/2kc$, temos a energia potencial normalizada

$$V(\theta, a, b) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-a} - \frac{1}{\cos \theta} \right]^2 + b \operatorname{tg} \theta \quad (1)$$

que depende de uma variável de comportamento θ e duas variáveis de controle a, b .

O modelo matemático da fig. 1 é uma análise global e pode ser feito sem restrições para a pequenos (concha rasa) ou uma pequena deflexão para q pequeno. Eventualmente, para um modelo físico tais restrições serão necessárias para atribuir significado real a análise como por exemplo

$$a \ll 1 \quad a \cong \frac{1}{2} \alpha^2$$

Derivando a equação (1) em relação a variável de comportamento θ temos (entenda-se por $V'(\theta, a, b) = (\partial V / \partial \theta)(\theta, a, b)$)

$$V'(\theta, a, b) = (1/\cos^2 \theta) [b - \operatorname{sen} \theta (1/\cos \alpha - 1/\cos \theta)] \quad (2)$$

$$V''(\theta, a, b) = 2 \operatorname{tg} \theta \cdot V' + (1/\cos^4 \theta) [1 - \cos^3 \theta / \cos \alpha] \quad (3)$$

$$V'''(\theta, a, b) = 2 \sec^2 \theta \cdot V' + 2 \operatorname{tg} \theta \cdot V'' + (\operatorname{sen} \theta / \cos^2 \theta) (4/\operatorname{sen}^3 \theta - 1/\cos \alpha) \quad (4)$$

$$V^{(4)}(\theta, a, b) = 4 \sec^2 \theta (\operatorname{tg} \theta \cdot V' + V'') + 2 V''' \operatorname{tg} \theta + (1/\cos^3 \theta) [4(\cos^2 \theta + 5 \operatorname{sen}^2 \theta) / \cos^3 \theta - (1/\cos \alpha) \cdot (\cos^2 \theta + 2 \operatorname{sen}^2 \theta)]$$

2.2.2 Superfície de Equilíbrio:

Se $\cos \theta > 0$, a superfície de equilíbrio $V'(\theta, a, b) = 0$ nas variáveis θ, a, b é pela equação (2)

$$b = \operatorname{sen} \theta (1/(1-a) - 1/\cos \theta) \quad (6)$$

2.2.3 Limite de Estabilidade:

Os pontos na superfície de equilíbrio, dado pela equação (6) para os quais $V''(\theta, a, b) = 0$, são chamados de estabilidade limitada. Pela equação (3) temos

$$\cos \alpha = 1 - a = \cos^3 \theta$$

que em (6) nos dá

$$b = \operatorname{tg}^3 \theta$$

Assim, o limite de estabilidade é dado pela curva diferenciável

$$b = \operatorname{tg}^3 \theta \text{ e } 1-a = \cos^3 \theta \quad (7)$$

2.2.4 Conjunto de Bifurcação:

Nas equações (7), eliminando o parâmetro θ , obtemos o conjunto de bifurcação dado por

$$b = [1 - (1 - a)^{2/3}]^{3/2} / (1 - a) \quad (8)$$

se $\cos \theta = \sqrt[3]{1 - a} < 0$.

O conjunto de bifurcação dado pela equação (8) é dado na fig. 2.

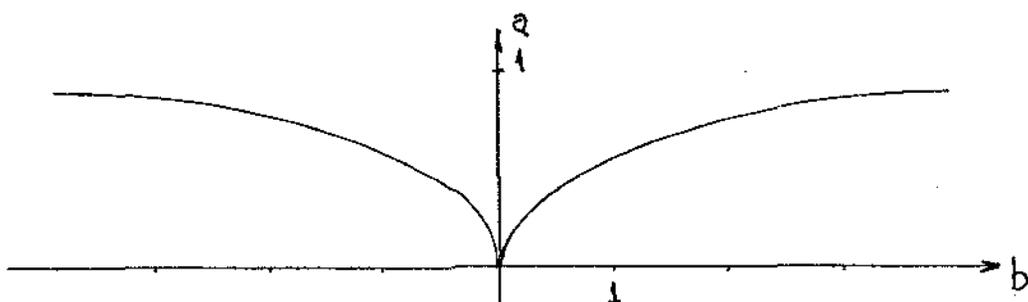


fig. 2

A superfície de equilíbrio é uma superfície plana do brada no mais significante domínio para $(\theta, a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ dada pela equação (6). Ver fig. 3.

O limite de estabilidade é a linha curva sobre a superfície, cuja projeção no plano de controle $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ é o conjunto de bifurcação mostrado também na fig. 3., como também uma secção da superfície S pelo plano $\theta = 0$. Escalas diferentes tem sido usadas nos três eixos ortogonais da fig. 3 mas escalas iguais são usadas nos planos dos diagramas nas fig. 2, 4, 5. A estabilidade limitada consiste de pontos de equilíbrio "quase sempre" instável, exceto na origem, pois sobre a linha dobrada V'' temos

$$3 \operatorname{sen} \theta / \cos^5 \theta \neq 0 \quad \text{se} \quad \theta \neq 0$$

Como $V'' > 0$ para pontos exteriores em S ao limite de estabilidade, temos aí pontos de equilíbrio estável, $V'' < 0$, para pontos interiores em S ao limite de estabilidade, onde temos pontos instáveis.

2.2.5 Caminhos de Equilíbrio para uma dada concha:

Uma região típica é mostrada na fig. 4, onde a linha cheia representa os pontos de equilíbrio estável, e a linha tracejada, pontos cujo equilíbrio é instável.

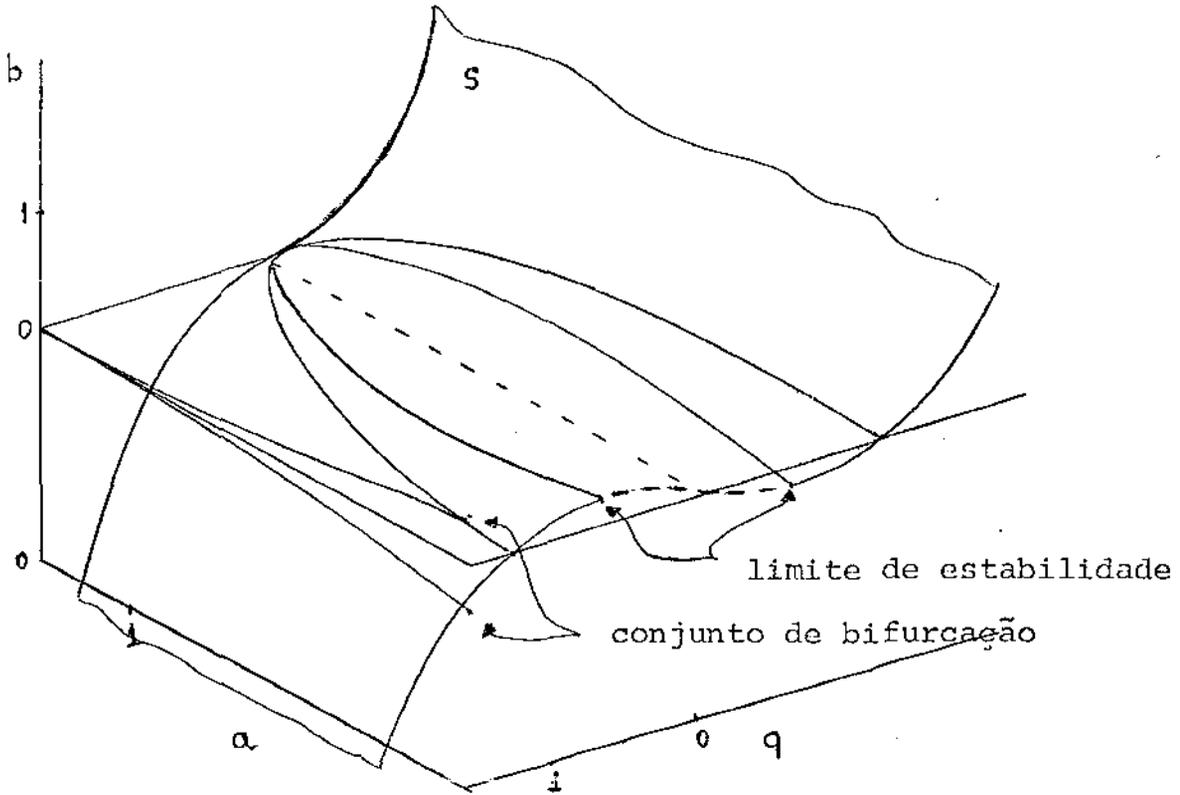


fig. 3

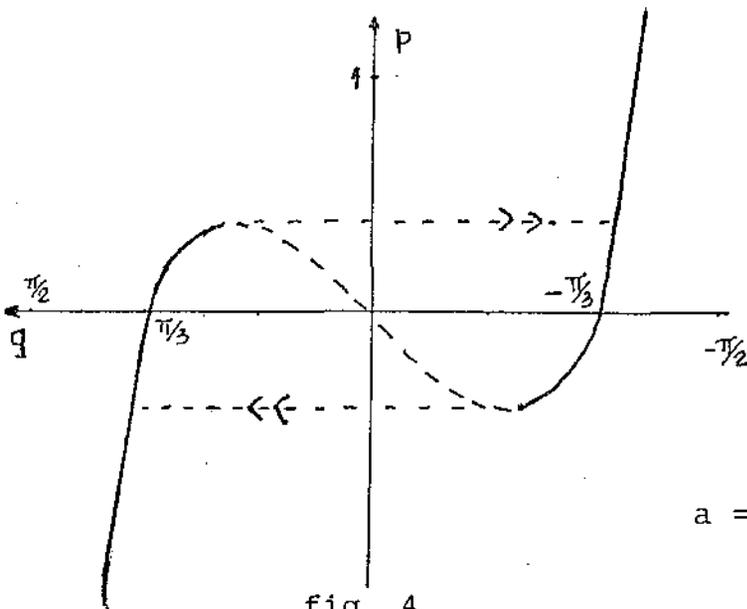


fig. 4

Uma força quase estática, para um estado natural qualquer, na direção de uma única flecha, levará o sistema ao limite de estabilidade, onde a força de equilíbrio assume um máximo ou um mínimo. Desde o ponto do limite de estabilidade, o sistema é dinamicamente instável, tomando lugar a energia de flambagem, como energia básica de atração, associando ao sistema um outro equilíbrio estável, distante, finito, como indicam as duas flechas duplas na fig. 4. O mecanismo passa então por um ciclo de histerese. Tal energia de flambagem pode por conseguinte ser representada na fig. 3 através de um certo θ , para um dado $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, na linha dobrada. Assim retas perpendiculares ao plano de controle interceptam a superfície de equilíbrio em um ponto se exteriores à cuspide e, 3 pontos, se interiores à cuspide. Pontos exteriores ao limite de estabilidade também delimitam o domínio de controle de parâmetros para o qual uma única solução de equilíbrio é assegurada.

2.2.6 A Secção de Cruzamento:

A secção da superfície de equilíbrio com o plano $\theta = 0$, dita secção de cruzamento, é mostrada na fig. 5

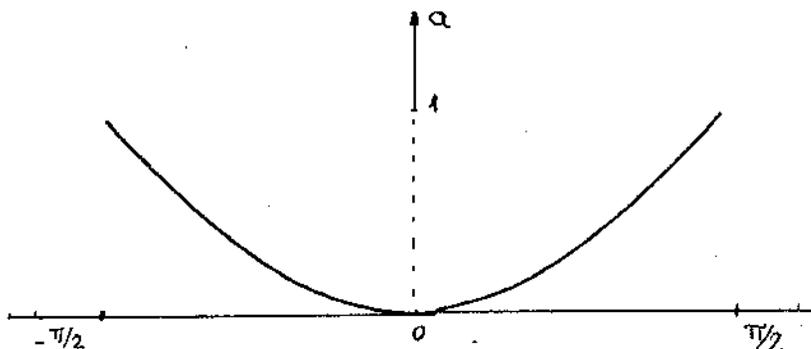


fig. 5

2.2.7 O Modelo Canônico:

Para o caso de conchas rasas podemos aproximar o equilíbrio global, analisando pequenos valores de $a \geq 0$.

O conjunto de bifurcação (8), pode ser aproximado por

$$b = (2a/3)^{3/2} (1 + 5a/4 + o(a^2))$$

que localmente é dado por

$$27b^2 = 8a^3$$

Temos também para (7), quando b e θ são pequenos, que a forma local da linha de dobra é

$$b = \theta^3, \quad a = 3\theta^2/2$$

cuja estabilidade limitada emerge do potencial quadrático

$$F(\theta, a, b) = \frac{1}{4} \theta^2 - a \theta^2 + 2b \theta$$

a qual é uma aproximação local canônica para (1). Ver Sewell

[6].

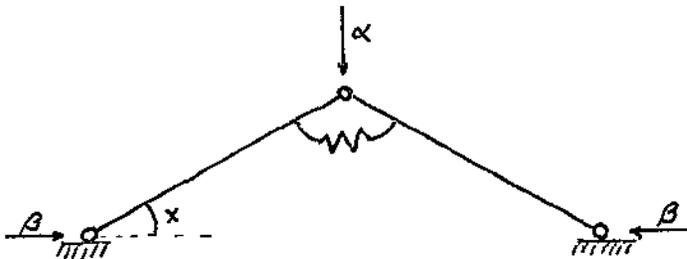
2.3 O ARCO SIMPLES DE EULER

2.3.1 Descrição e Modelo Matemático:

O modelo é constituído por duas hastes rígidas, presas entre si, em suas extremidades por um pivô, que permite movimento angular, como mostra fig. 1. Nas outras extremidades duas pequenas esferas deslizam sobre um plano com atrito desprezível. Uma mola tende a levá-las a 180° .

Se agora as hastes são comprimidas com uma força horizontal graduada crescente β , quando estas ficam na horizontal β assume um valor crítico e dará uma dobra para cima (ou para baixo), dando lugar a uma catástrofe no sistema.

Seja agora β fixado, e uma força vertical graduada, crescente α , aplicada no pivô. O arco estará sujeito a força α até que alcance o valor crítico, e então sofrerá uma mudança súbita, uma flambagem, como na fig. 1.



O Arco Simples de Euler

fig. 1

Suponhamos agora que o comprimento das hastes seja l e μ o módulo da elasticidade da mola. Inicialmente é assumido que $\alpha = 0$.

Passamos agora a descrever o que acontece na vizinhança do ponto de dobra, onde o sistema flamba.

Sejam $\beta = 2\mu + b$, e x o ângulo entre as hastes e a horizontal. Assumimos que α , β e x são pequenos. Em três dimensões α e β são considerados nos eixos horizontais e determinam o plano de controle e x no eixo vertical. Seja S o gráfico de x como função de α , β , a superfície de equilíbrio dada pela equação $\partial V/\partial x = V' = 0$, onde V é a energia potencial do sistema. Vamos mostrar que S é uma cúspide catástrofe, como mostra fig. 2.

2.3.2 Teorema: O arco flamba quando $\beta = 2\alpha$.

Demonstração: Considerando a variação angular igual ao deslocamento da mola, pela Lei de Hooke, a energia na mola é dada por

$$\frac{1}{2}\mu (2x)^2 \quad (1)$$

A energia cedida ao sistema pela força é

$$\alpha \text{sen } x \quad (2)$$

A energia perdida pelo sistema é

$$-2\beta (1 - \text{cos}\alpha) \quad (3)$$

Assim a energia total no sistema é dado por

$$V = 2\mu x^2 + \alpha \text{sen } x - 2\beta (1 - \text{cos } x) \quad (4)$$

A superfície de equilíbrio S é dada por

$$V' = 4\mu x + \alpha \text{cos } x - 2\beta \text{sen } x = 0 \quad (5)$$

A estabilidade limitada é dada por

$$V'' = 4\mu - \alpha \text{sen } x - 2\beta \text{cos } x = 0 \quad (6)$$

e o ponto de cúspide deve satisfazer a equação

$$V''' = -\alpha \text{cos } x + 2\beta \text{sen } x = 0 \quad (7)$$

as equações (5) e (7) nos dá

$$4\mu x = 0$$

Como $\mu \neq 0$ temos $x = 0$. Substituindo em (5)

$$\alpha \cos x = 0 \quad \alpha = 0$$

substituindo em (6), temos

$$4\mu - 2\beta = 0, \text{ ou } \beta = 2\mu.$$

o que completa a demonstração.

2.3.3 Teorema: S é uma cuspide catástrofe.

Demonstração: Desenvolvendo V em série de Taylor no ponto $x=0$ temos

$$V(0) = 0$$

$$V'(0) = \alpha$$

$$V''(0) = 4\mu - 2\beta$$

$$V'''(0) = -\alpha$$

$$V^{(4)}(0) = 2\beta$$

assim

$$V(x) = \alpha x + \frac{(4\mu - 2\beta)}{2!} x^2 + \frac{(-\alpha)}{3!} x^3 + \frac{2\beta}{4!} x^4 + R$$

onde R é o resto do desenvolvimento. Substituindo β por $2\mu + b$ temos

$$V(x) = \alpha x - bx^2 - \frac{\alpha}{6}x^3 + \frac{2\mu + b}{12} x^4 + R$$

Quando $\alpha = b = 0$, temos

$$V = \frac{\mu}{6} x^4 + R$$

assim $\mu \neq 0$, positivo e x obedece a cuspide catástrofe.

Podemos eliminar o termo de ordem 3, pela translação de coordenadas

$$x = x_1 + \frac{\alpha}{2(2\mu + b)}$$

Por mudança de coordenadas não lineares, através de equivalência de desdobramento pelo Teorema de Mather(3.2.8) temos V equivalente a

$$V \sim \frac{\mu}{6} x^4 + \alpha x - b x^2$$

a cuspide catástrofe.

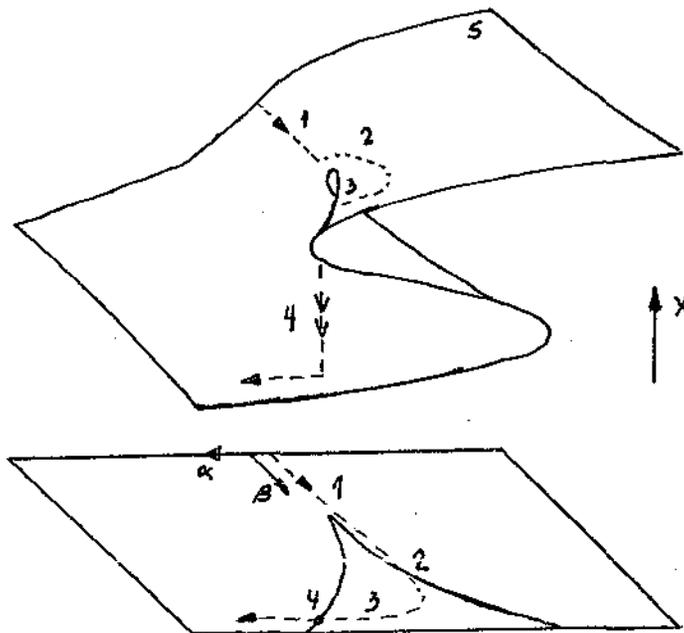


fig. 2: O caminho em S para um dado arco (1) compressão (2) dobra para cima, (3) aplicando a força, e (4) flambagem.

CAPÍTULO 3

ALGUNS RESULTADOS NA TEORIA DAS CATÁSTROFES

3.1 A K-DETERMINAÇÃO

Iniciamos introduzindo alguns conceitos de natureza algébrica que aparecerão posteriormente.

Consideramos anel como sendo anel comutativo com unidade.

3.1.1 Definição: Um anel local é um anel com um único ideal maximal.

3.1.2 Definição: Seja A um anel. Um A-módulo M é um grupo comutativo M com respeito à adição, onde A atua linearmente. Mais precisamente é um par (M, ϕ) , onde M é um grupo abeliano e ϕ uma função definida como

$$\phi: AxM \rightarrow M: (a, x) \rightarrow ax$$

onde os seguintes axiomas são válidos:

$$a(x + y) = ax + ay$$

$$(a + b)x = ax + bx$$

$$(ab)x = a(bx)$$

$$1x = x \quad \text{com } a, b \in A; x, y \in M$$

Como de costume, 1 representa o elemento unidade do anel.

3.1.3 Definição: Um submódulo N de um A-módulo M é um subgrupo de M fechado em relação a composição de elementos de A. (i.e.: $A.N \subset N$)

Diremos que um A-módulo M é finitamente gerado se

$$M = \left\{ x = \sum a_i x_i : x_i \in M, a_i \in A, \text{ soma finita} \right\}$$

O submódulo N , gerado por x_1, \dots, x_r será denotado por

$$N = (x_1, \dots, x_r)_A \quad \text{ou} \quad (x_i)_A$$

Ao contrário do que ocorre na teoria dos espaços vectoriais, i.e., dos módulos sobre um corpo, a expressão de um elemento x , em termos de geradores x_1, \dots, x_r não é em geral única, mesmo que o conjunto dos geradores seja minimal.

Um ideal I , em um anel A é um submódulo de A , de modo natural. (i.e.: I é um grupo aditivo que satisfaz $A.I \subset A$)

3.1.4 Definição: Um ideal I em um anel A é chamado ideal maximal se todo ideal $J \neq I$ com $I \subset J \subset A$, tivermos $J = A$. É também conhecido que o ideal I é maximal, se e somente se o anel quociente A/I , é um corpo.

Vamos agora definir uma classe de equivalência sobre o conjunto das funções $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, o anel dos germes das funções diferenciáveis de valor real.

3.1.5 Definição: Seja $C^\infty(M, N)$ o espaço das funções diferenciáveis entre as variedades diferenciáveis M e N . Se $x \in M$ e $f, g \in C^\infty(M, N)$ definimos a seguinte relação de equivalência:

$f \sim g$ se e somente se $f|_{V_x} = g|_{V_x}$, para alguma vizinhança de x , V_x .

Esta classe de equivalência representada por \tilde{f} é chamada de germe de f no ponto x .

Seja E_n o conjunto dos germes no ponto 0, das funções $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. As operações definidas em E_n , são induzidas naturalmente pela operação da reta, em outras palavras,

$$\tilde{f} + \tilde{g} = (f + g) \sim$$

$$k \cdot \tilde{f} = (kf) \sim$$

$$\tilde{f} \cdot \tilde{g} = (f \cdot g) \sim \quad \text{com } \tilde{f}, \tilde{g} \in E_n, k \in R$$

Desta forma, E_n é um espaço vetorial sobre R , de dimensão finita, E_n é um anel comutativo com unidade. A unidade é a função $f(x) = 1$.

Seja m_n o conjunto dos germes de E_n que se anulam na origem.

3.1.6 Lema: m_n é um anel local com ideal maximal E_n .

Demonstração: Seja $f \in E_n - m_n$. Mostremos que

$$(m_n, f)_{E_n} = E_n$$

isto é, $1 \in (m_n, f)_{E_n}$. Seja f um representante de sua classe. Doravante quando não houver ambiguidade de sentido, indicaremos os germes pelos seus representantes. Seja V uma vizinhança do 0, logo $f|_V$ não é nula. Então existe $1/f$ em V , e portanto

$$\tilde{f} \cdot (1/f) \sim = (f \cdot 1/f) \sim = 1 \sim = 1$$

Assim m_n é maximal, e único, pois qualquer outro ideal $I \neq E_n$ está contido em m_n , o que conclui a demonstração.

Seja G_n , o conjunto dos germes difeomorfos em 0 de $C^\infty(R^n, R^n)$, tal que $f(0) = 0$. G_n é um grupo com respeito a multiplicação induzida pela composição, com elemento neutro a função identidade, e cujo inverso de $\tilde{f} \in G_n$, $(\tilde{f})^{-1} = (f^{-1}) \sim$

Daqui para frente, usaremos ao invés de E_n, m_n, G_n , simplesmente E, m, G , desde que claro.

As coordenadas x_1, \dots, x_n de \mathbb{R}^n serão usadas ambigualmente como:

- (a) $x = (x_1, \dots, x_n)$, como coordenadas;
- (b) $x_i: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ a função projeção $x_i(x) = x_i$;
- (c) $x_i \in m \subset E$, como germe e
- (d) $j^k x_i = \tilde{x}_i = x_i$, o k -jato deste germe.

3.1.7 Lema: $m = (x_1, \dots, x_n)_E$, i.e. m é o ideal de E gerado pelos germes x_i .

Demonstração: Seja $f \in m$, pelo Teorema da Média

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 f'(x+th) \cdot h \, dt$$

Para o ponto 0, segundo acréscimo em x o desenvolvimento será

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 f'(tx) \cdot x \, dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i(x) \, dt \\ &= \sum x_i(x) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) \, dt \\ &= \sum e_i \cdot x_i(x) \end{aligned}$$

onde $e_i = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) \, dt$ com $e_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $e_i \in C^\infty$ e portanto $e_i \in m$, assim temos $m \subset (x_1, \dots, x_n)_E$.

Como $x_i \in m$, temos $(x_i)_E \subset m$, logo $m = (x_i)_E$, o que conclui a demonstração.

3.1.8 Corolário: m^k é o ideal gerado pelos n monômios x_i de grau k , isto é, gerado pelos germes dos monômios $x^s = x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n}$ onde $\sum s_i = k$.

Demonstração: Por indução sobre k.

(i) Se $k = 1$, recaímos no Lema anterior (3.1.7);

(ii) Se $k > 1$, o resultado segue, pois

$$m^k = \{f_1 \cdot \dots \cdot f_k : f_i \in m, i = 1, \dots, k\}$$

com $f_i = \sum e_{ij} \cdot x_j$, uma equação linear em n-variáveis x_i , logo o produto de k elementos de m é um polinômio homogêneo em x_i de grau k, o que conclui a demonstração.

3.1.9 Corolário: m^k é finitamente gerado E-módulo.

Demonstração: Pelo Corolário anterior, $m^k = (x^S)$, cujo número é dado por combinação dos n-elementos x_i , tomados k a k, logo finitamente gerado. m^k é um ideal de E, e como todo ideal é E-módulo.

Seja J^k o quociente E/m^{k+1} , e J o quociente m/m^{k+1} , J^k a projeção canônica de E em J^k .

3.1.10 Lema: J^k é um anel local com ideal J^k .

Demonstração: J^k é um anel quociente de E, e portanto um anel comutativo com unidade. Como existe uma correspondência 1 a 1 entre os ideais

$$\begin{array}{ccc}
E & & E/m^{k+1} = J \\
\cup & & \cup \\
I & \leftrightarrow & I/m^{k+1} = J \\
\cup & & \\
m^{k+1} & &
\end{array}$$

segue que J^k é um anel local com ideal J.

3.1.11 Lema: J^k é um espaço vetorial sobre E de dimensão finita.

Demonstração: Se $f \in E$, sua expansão de Taylor em 0 é

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_k + \theta_{k+1}$$

onde os f_i são polinômios homogêneos em x_i de grau i , cujos coeficientes são as derivadas parciais em 0 , e $\theta_{k+1} \in m^{k+1}$. Logo $J = E/m^{k+1}$ é um espaço vetorial sobre E , de dimensão finita, gerado pelos monômios x_i de grau $\leq k$.

3.1.12 Definição: O k -jato de f , que se escreve $j^k f$ é definido por

$$j^k f = f_0 + f_1 + \dots + f_k$$

a série de Taylor de grau k .

3.1.13 Definição: Dois elementos $f, g \in E$, são ditos equivalentes à direita (\sim_d) se eles pertencem a mesma órbita G , isto é

$$f \sim_d g \iff \text{existe } h \in G \text{ tal que } f = gh$$

onde a órbita em G escrita Ω_f , é o conjunto

$$\Omega_f = \{g \in E / \text{existe } h \in G, f = gh\}$$

Usaremos \sim para equivalência à direita, quando claro no contexto.

3.1.14 Definição: Dois elementos $f, g \in E$, são ditos k -equivalentes se tem os mesmos k -jatos, isto é,

$$f \sim_k g \iff j^k f = j^k g$$

onde \sim_k será usado para representar a k -equivalência.

3.1.15 Definição: $f \in E$ é dito k -determinado se para todo

$$g \in E, f \sim_k g \Rightarrow f \sim_d g$$

3.1.16 Definição: A determinação de $f \in E$, é o menor inteiro

k , tal que f é k -determinado, escrito como $\det(f) = k$.

Observe que se f é k -determinado, então é s -determinado para todo $s \geq k$.

3.1.17 Lema: Se f é k -determinado, então todo elemento de sua órbita é também.

Demonstração: Se $f \sim_k g \Rightarrow f \sim_d g$, mostremos que g é k -determinado.

$f \sim_d g$ i.e. $f = gd_1$ com $d_1 \in G$. Seja $g \sim_k h$ i.e. $j^k g = j^k h$, ou $j^k (fd_1^{-1}) = j^k h$, portanto

$$\begin{aligned} j^k f &= j^k (fd_1^{-1} d_1) \\ &= j^k (fd_1^{-1}) \cdot j^k (d_1) \\ &= j^k g \cdot j^k d_1 \\ &= j^k h \cdot j^k d_1 \\ &= j^k h d_1 \end{aligned}$$

logo $f \sim_k h d_1$, e portanto $f \sim_d h d_1$, isto é, existe $d_2 \in G$, tal que

$$\begin{aligned} f &= h d_1 d_2 \\ g d_1 &= h d_1 d_2 \\ g &= h d_1 d_2 d_1^{-1} \end{aligned}$$

e portanto, finalmente $g \sim_d h$, como queríamos.

3.1.18 Definição: Seja $f \in E$, nas coordenadas x_i de \mathbb{R}^n ,

$$\Delta = \Delta(f) = (\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n) \in E$$

é dito o ideal jacobiano de f .

3.1.19 Proposição: Δ independe do sistema de coordenadas.

Demonstração: Sejam $\Delta_x = (\partial f / \partial x_i)$ e $\Delta_y = (\partial f / \partial y_i)$, assim temos

$$\partial f / \partial x_i = (\partial f / \partial y_j) \cdot (\partial y_j / \partial x_i) \in \Delta_y$$

$$\partial f / \partial y_i = (\partial f / \partial x_j) \cdot (\partial x_j / \partial y_i) \in \Delta_x$$

portanto $\Delta_x = \Delta_y$

3.1.20 Lema: Se $f \in E - m$ e $f^* = f - f(0) \in m$, então f e f^* são invariantes pelo jacobiano ideal e pela de -
terminação.

Demonstração: i) $\partial f / \partial x_i = \partial f^* / \partial x_i \Rightarrow \Delta_f = \Delta_{f^*}$

$$\text{ii) } f \sim_k g \Leftrightarrow f(0) = g(0) \text{ e } f^* \sim_k g^*$$

isto é:

$$j^k f = j^k g \Leftrightarrow j^k f^* = j^k g^* \text{ com } f(0) = g(0)$$

$$f = gd \Leftrightarrow f^* = g^*d \text{ com } f(0) = g(0) \text{ e } d \in G,$$

$$f \sim_d g \Leftrightarrow f^* \sim_d g^* \text{ e } f(0) = g(0)$$

A determinação em E , m é equivalente. Doravante consideramos o estudo dos k -jatos somente em m . Antes de enunciarmos o teorema que estabelece condição suficiente para a k -determinação iremos demonstrar o Lema de Nakayama.

3.1.21 Lema (Nakayama): Se A é um anel local, I um ideal maximal, M e N , A -módulos (contido em algum outro A -módulo) com M finitamente gerado em A , então

$$M \subset N + IM \Rightarrow M \subset N$$

Demonstração: i) Primeiro mostramos para $N = 0$, isto é

$$M \subset IM \Rightarrow M \subset 0 \Leftrightarrow M = 0$$

Seja $M = (v_1, \dots, v_r)_A$, finitamente gerado, e como $M \subset IM$, temos $v_i \in IM$. Assim

$$v_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} v_j \quad \text{com } a_{ij} \in I$$

ou

$$\sum (\delta_{ij} - a_{ij}) v_j = 0$$

isto é

$$(id - A)v = 0 \tag{1}$$

onde id é a matriz identidade de ordem r , $A = (a_{ij})_r$, e $v = (v_1, \dots, v_r)$. Como o determinante de $id - A$ é $1 + a$, $a \in I$ e como $1 + a \notin I$, pois caso contrário, como $-a \in I$, teríamos $(1+a)+(-a) = 1 \in I$. Como $I \neq A$ é um ideal maximal, $1 + a$ é uma unidade. Logo existe $(1 + a)^{-1}$ e portanto $id - A$ é não singular. Assim o sistema (1) tem somente solução trivial, e $v = (v_1, \dots, v_r) = 0$. Temos finalmente $M = (v_i)_A = 0$

ii) para o caso geral consideramos o seguinte quociente por N

$$(M + N)/N \subset N/N + (IM + N)/N$$

e como

$$\begin{aligned} I(M + N)/N &= \{a(b + N) : a \in I, b \in M\} \\ &= \{ab + N : a \in I, b \in M\} \\ &= (IM + N)/N \end{aligned}$$

Pela primeira parte (i), temos $(M + N)/N = 0$, e portanto $M \subset N$, o que estabelece este resultado.

3.1.22 Teorema: Se $f \in m$, e $\Delta = \Delta(f)$, então

$$m^{k+1} \subset m^2_{\Delta} \Rightarrow f \text{ é } k\text{-determinado}$$

Demonstração: Nós assumimos que $f \in m$, e $m^{k+1} \subset m^2_{\Delta}$ e iremos mostrar que

$$\text{se } g \in m, \text{ com } f \sim_k g \Rightarrow f \sim_d g$$

Seja $F_t \in m$ definida por

$$F^t(x) = (1-t)f(x) + tg(x)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}.$$

Como $F^0 = f$ e $F^1 = g$, é suficiente mostrar que $F^0 \sim_d F^1$.

Se for possível mostrar que para todo $t \in [0, 1]$ existe uma vizinhança V_t tal que se $t^* \in V_t$ então $F^{t^*} \sim_d F^t$, como $[0, 1]$ é compacto e conexo, é possível cobrir com um número finito de vizinhanças, e construir $f = gh$, $h \in G$ por uma composição finita.

Lema 1: Seja $t_0 \in [0, 1]$, então existe $D^{t_0} \in G$ com V_{t_0} uma vizinhança de t_0 , tal que

1) $D^{t_0} = \text{identidade}$

2) $F^t_{D^{t_0}} = F^{t_0}$, para $t \in V_{t_0}$.

Observação 1: Como $D^{t_0} \in G$, satisfaz a condição (2), temos como anteriormente, pela composição finita $f \sim_d g$.

Portanto Lema 1 $\Rightarrow f \sim_d g$.

Lema 2: Existe um germe D em (p, t_0) , $D \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ com $t_0 \in [0, 1]$, tal que

$$(i) D(x, t_0) = x$$

$$(ii) D(0, t) = 0$$

$$(iii) F(D(x, t), t) = F(x, t_0), \text{ para } (x, t) \in V_{(0, t_0)}$$

Observação 2: Para uma vizinhança da origem em \mathbb{R}^n , define-se $D(x, t) = D^t(x)$, e por (ii) como $D(0, t) = 0$,

$$D^t: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$$

é um germe diferenciável. Como $D(x, t_0) = \text{id}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, um difeomorfismo, e como os difeomorfismos são abertos no espaço das funções diferenciáveis, existe V_{t_0} tal que D^t é um germe difeomorfo para $t \in V_{t_0}$.

Desta forma o Lema 2 \Rightarrow Lema 1.

Lema 3: No Lema 2, substituímos (iii) pela equivalente (iv), onde

$$(iv) \sum \frac{\partial F}{\partial x_i}(D(x, t), t) \frac{\partial D}{\partial t} i(x, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(D(x, t), t) = 0$$

Demonstração: (iii) \Rightarrow (iv). Derivando (iii), obtemos diretamente (iv). Reciprocamente, integrando (iv), temos

$$0 = \int_{t_0}^t (iv) dt = F(D(x, t), t) - F(D(x, t), t_0)$$

que por (i) no Lema 2, nos dá $F(D(x, t), t) = F(x, t)$.

Observação 3: Assim Lema 3 \Rightarrow Lema 1

Lema 4: Existe um germe H em $(0, t_0)$ de uma função diferenciável, $H \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, tal que

$$(v) H(0, t) = 0$$

$$(vi) \sum \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, t) H_i(x, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = 0$$

Observação 4: Como $D(x,t) = (D_1(x,t), \dots, D_n(x,t))$, pelo Teorema da Existência e Unicidade das Equações Diferenciais Ordinárias, a solução para o problema de equação diferencial

$$\frac{\partial D}{\partial t} = H(D(x,t), t) \quad (1)$$

$$D(x, t_0) = x \quad (2)$$

onde (2) é condição inicial para (i) no Lema 2. Como

$$H(x,t) = (H_1(x,t), \dots, H_n(x,t))$$

e

$$\frac{\partial D}{\partial t}(x,t) = \left(\frac{\partial D_1}{\partial t}(x,t), \dots, \frac{\partial D_n}{\partial t}(x,t) \right)$$

temos (1) se e somente se $(\partial D_i / \partial t)(x,t) = H_i(x,t)$. Fazendo $D(x,t) = x$, para $(x,t) \in V_{(0,t_0)}$ em (vi) temos (iv) no Lema 3. Como por (v) $H(0,t) = 0$ temos que $D(0,t) = 0$ é uma particular solução de $(\partial D / \partial t)(0,t) = H(0,t)$ para $t \in V_{t_0}$, o que nos dá (ii) no Lema 2.

Assim Lema 4 \Rightarrow Lema 1

Denotemos o anel dos germes $R^n \times R, (0, t_0) \rightarrow R$, por E_{n+1} . Como $E_n \subset E_{n+1}$, o anel dos germes não depende de t , e ainda

$$\Omega = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right)_{E_{n+1}}$$

Lema 5: $m^{k+1} \subset m^2_{\Delta} \Rightarrow m^{k+1} \subset m^2_{\Omega}$

Observação 5: Como $F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$,

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = g(x) - f(x) \in m^{k+1}$$

pois $f \sim_d g$

Por hipótese $g-f \in m^{k+1} \subset m^2$, portanto

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_j a_j b_j, \quad a_j \in m^2, \quad b_j \in \Omega, \quad \text{uma soma finita.}$$

Como $b_j \in \Omega$, temos que

$$b_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad \text{com } c_{ij} \in E_{(n+1)}$$

Logo

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{i,j} a_j c_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_i} = - \sum_{i=1}^n H_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

onde $H_i = - \sum_j a_j c_{ij} \in E_{(n+1)}$, que nos dá (vi) no Lema 4.

Portanto, Lema 5 \Rightarrow Lema 1.

Nestas condições a demonstração do Lema 5, que segue, completa a condição de suficiência para a k -determinação.

Demonstração - Lema 5: Como $f(x,t) = t(g(x) - f(x)) + f(x)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + t \frac{\partial}{\partial x_i} (g(x) - f(x)) \\ &\in \frac{\partial f}{\partial x_i} + E_{n+1} m^k \end{aligned}$$

pois $t \in E_{(n+1)}$ e $f - g \in m^{k+1}$, portanto $(\partial/\partial x_i)(g-f) \in m^k$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \in \frac{\partial f}{\partial x_i} + E_{n+1} m^k \subset \Omega + E_{n+1} m^k$$

portanto

$$\Delta \subset \Omega + E_{n+1} m^k$$

Como anteriormente, denotamos o ideal maximal de E_{n+1} por m_{k+1} , o que se entende por: os germes que se anulam em

$(0, t_0)$, e portanto $m_n \subset m_{n+1}$. Agora

$$\begin{aligned} E_{(n+1)} m^{k+1} &\subset E_{(n+1)} m^2 \quad (\text{hip\u00f3tese}) \\ &\subset E_{(n+1)} m^2 (\Omega + E_{(n+1)} m^k) \\ &\subset m^2 \Omega + E_{(n+1)} m^{k+2} \\ &\subset m^2 \Omega + m_{(n+1)} E_{(n+1)} m^{k+1} \end{aligned}$$

onde n\u00f3s aplicamos o Lema de Nakayama (3.1.21) para $A = E_{n+1}$
 $M = E_{n+1} m^{k+1} \subset m^{k+1}$, finitamente gerado e $N = m^2 \Omega$

$$M \subset N + IM \Rightarrow M \subset N$$

o que d\u00e1 $A m^{k+1} \subset m^2 \Omega$ em particular $m^{k+1} \subset m^2 \Omega$ o que conclui a demonstra\u00e7\u00e3o da condi\u00e7\u00e3o suficiente para a k -determina\u00e7\u00e3o.

3.1.23 Defini\u00e7\u00e3o: Um grupo de Lie \u00e9 uma variedade P , de classe C^∞ , dotada de uma estrutura de grupo, onde as aplica\u00e7\u00f5es

$$\begin{aligned} m: P \times P &\rightarrow P: (x, y) \rightarrow xy \\ r: P &\rightarrow P: x \rightarrow x^{-1} \end{aligned}$$

s\u00e3o de classe C^∞ .

3.1.24 Proposi\u00e7\u00e3o: G_n \u00e9 um grupo de Lie.

Demonstra\u00e7\u00e3o: Com a opera\u00e7\u00e3o de composi\u00e7\u00e3o G_n \u00e9 um grupo. As aplica\u00e7\u00f5es

$$\begin{aligned} m: G \times G &\rightarrow G: (f, g) \rightarrow fg \\ r: G &\rightarrow G: f \rightarrow f^{-1} \end{aligned}$$

s\u00e3o diferenci\u00e1veis pois, m \u00e9 composi\u00e7\u00e3o de fun\u00e7\u00f5es diferenci\u00e1veis

véis, r é a inversa de um difeomorfismo diferenciável, e portanto diferenciável, ambas de classe C^∞ .

3.1.25 Definição: Uma ação de um grupo de Lie P em uma variedade M é uma aplicação diferenciável de classe C^∞

$$n: M \times P \rightarrow M: (x, a) \rightarrow xa$$

satisfazendo a condição

$$(xa)b = x(ab), \text{ com } x \in M \text{ e } a, b \in P$$

Esta ação em particular é chamada ação à direita de P em M .

3.1.26 Definição: Sejam $P_f = \{g \in m: f \sim_k g\}$

$$Q_f = fG = \{g \in m: f \sim_d g\}$$

O conjunto Q_f é chamado órbita de f pela ação de G em m .

Temos ainda, por exemplo a ação à direita de G em E dada por

$$E \times G \rightarrow E: (f, g) \rightarrow fg$$

pois

$$(fg)h = f(gh)$$

pela composição, onde $f \in E, g, h \in G$. Temos também

$$G_1 \times m_n \rightarrow m_n: (g, f) \rightarrow gf$$

é uma ação à esquerda de G_1 em m_n , pois

$$(hg)f = h(gf)$$

pela composição, com $g, h \in G_1$ e $f \in m$.

Assim dizemos que $f \sim_d g$ é outra maneira de dizer que $g \in Q_f$.

Assim, a k -determinação é na realidade, uma condição na órbita Ω_f de f .

Para concluir o estudo da k -determinação apresentamos uma condição necessária e suficiente para um germe ser k -determinado. Para alcançarmos tal objetivo, é necessário determinar o espaço tangente à órbita $j^k f \cdot G^k$ de um k -jato $j^k f$ sob a ação de G^k em J^k , onde G^k é o conjunto dos k -jatos dos germes em G , o qual é um grupo de Lie de dimensão finita. Este é o objetivo do teorema que segue, onde J^k é a projeção canônica que a cada germe associa o seu k -jato $j^k f$, na origem.

Decorre da definição de k -determinação, e da definição de P_f e Ω_f , que se f é k -determinado então $P_f \subset \Omega_f$. Seja Π a projeção natural de m em J^{k+1} , isto é $\Pi(f) = j^{k+1} f$, temos que $\Pi(P_f) \subset \Pi(\Omega_f)$. Como P_f pode ser escrito como

$$P_f = f + m^{k+1}$$

temos

$$\begin{aligned} \Pi(P_f) &= \Pi(f + m^{k+1}) \\ &= \Pi f + \Pi m^{k+1} \\ &= j^{k+1} f + \Pi m^{k+1} \end{aligned}$$

O plano tangente à $\Pi(P_f)$ em $j^{k+1} f = z$ é dado por

$$T_z(\Pi P_f) = \Pi m^{k+1}$$

Como $j^{k+1}(fg) = j^{k+1} f \cdot j^{k+1} g$, com $g \in G$, Π é equivalente com respeito a G , G^{k+1} . Também

$$\Pi \Omega_f = \Pi(fG) = j^{k+1} f \cdot G^{k+1} = zG^{k+1}$$

uma órbita abaixo no grupo de Lie, e portanto uma variedade.

Em particular $T_z(\Pi \Omega)$ existe.

3.1.27 Teorema: Se f é k -determinado, então $m^{k+1} \subset m\Lambda_f$

Para demonstrarmos o Teorema (3.1.27) precisamos provar que o plano tangente a ΠQ em z é dado por $\Pi(m\Lambda)$.

Lema 1: $T_z(\Pi Q) = \Pi(m\Lambda)$

Demonstração: Seja $d^t = id + th$, com id a identidade em R^n , e $h \in G$. Como R^n é aditivo, dado $d \in G$, podemos escrever $d = id + h$ para algum $h \in G$. Assim d^t é um caminho contínuo de germes entre a identidade e h , para $0 \leq t \leq 1$, difeomorfos, para $t = 0, 1$. Como os difeomorfismos são abertos no espaço das funções, existe $t_0 > 0$, tal que $d^t \in G$, se $t \in [0, t_0]$. Assim d^t é um caminho em G , que desloca a identidade, fd^t um caminho em Q que desloca f , Πfd^t um caminho em ΠQ que desloca z . Como m além de um anel maximal de E é também um espaço vetorial, portanto podemos definir diferenciação. Assim o vetor velocidade do caminho d^t em t_0 , é dado por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Pi fd^t) &= \Pi\left(\frac{d}{dt}f(id+th)\right) \quad \text{em } t = 0 \\ &= \Pi\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(id+th)h_i\right) \\ &= \Pi(m\Lambda) \end{aligned}$$

pois $h_i \in m$, e $\partial f / \partial x_i \in \Lambda$.

Esta tangente está em $T_z(\Pi Q)$, e assim fazendo h percorrer G para todos os caminhos, temos

$$T_z(\Pi Q_f) \subset \Pi(m\Lambda_f)$$

Demonstração-Teorema (3.1.27): Como $\Pi P \subset \Pi Q$, temos

$$T_Z(\Pi P) \subset T_Z(\Pi Q)$$

Como $T_Z(\Pi P) = \Pi m^{k+1}$, temos $\Pi m^{k+1} \subset \Pi(m\Delta)$, isto é

$$m^{k+1} \subset m\Delta + m^{k+2}$$

assim podemos, usando o Lema de Nakayama (3.1.21) com $A = \hat{E}$, $I = m$, $M = m^{k+1}$ e $N = m\Delta$, como \hat{E} é um anel local com ideal maximal m , e m^{k+1} é finitamente gerado, concluimos que

$$m^{k+1} \subset m\Delta$$

o que conclui a demonstração.

3.1.28 Corolário: $f \in \hat{E}$ é finitamente determinado se e somente se $m^k \subset \Delta_f$, para algum k .

Demonstração: (i) Assumimos que f é k -determinado, pelo Teorema (3.1.27) temos

$$m^{k+1} \subset m\Delta \subset \Delta$$

(ii) reciprocamente,

$$m^k \subset \Delta \Rightarrow m^{k+2} \subset m^2\Delta$$

e pelo Teorema (3.1.22), f é $k+1$ determinado.

3.1.29 Corolário: Se $f \in m - m^2$, então f é 1-determinado.

Demonstração: $f(0) \neq 0$, logo $\partial f / \partial x_i \notin m$, e

$$m^2_\Delta = m^2$$

logo pelo Teorema (3.1.22) f é 1-determinado.

Assim podemos restringir o nosso estudo a germes em m^2 .

3.2 O DESDOBRAMENTO UNIVERSAL DE UMA SINGULARIDADE

Ao estudarmos um germe $f \in \mathfrak{m}^2$, na origem, ou simplesmente a singularidade

$$f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0), \text{ com } Df(0) = 0$$

esse é introduzido em uma família de germes a r -parâmetros. Consideremos $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+r}$ como subespaço de \mathbb{R}^{n+r} , onde as últimas coordenadas desaparecem, e um ponto $P(x,u) \in \mathbb{R}^{n+r}$ por

$$(x,u) = (x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r)$$

com $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$.

3.2.1 Definição: Um desdobramento de uma singularidade f , $f \in \mathfrak{m}(n)$ a r -parâmetros é um germe $F \in \mathfrak{m}(n+r)$ onde $F|_{\mathbb{R}^n} = f$. Este desdobramento será denotado por (r, F) ou F_r .

Seja (x_0, u_0) um ponto nas vizinhanças da origem e

$$F|_{\mathbb{R}^n_{x\{u_0\}}} = f^*$$

um germe próximo de $f = F|_{\mathbb{R}^n}$, no sentido da topologia de Whitney, ao longo de um caminho ligando a origem ao ponto (x_0, u_0) f é transformado no germe f^* .

Sendo possível definir funções entre certos desdobramentos, podemos construir classes de desdobramentos, o que pode ser motivado pela observação que \mathbb{R}^{n+r} é fibrado pela projeção

$$\Pi: \mathbb{R}^{n+r} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

3.2.2 Definição: Sejam (r, F) e (s, G) dois desdobramentos de f . F_r e G_s são ditos localmente equivalentes se existem funções

$$(\phi, \alpha): F_r \rightarrow G_r$$

onde

$$(I) \phi \in E(n+r, n+s), \phi|_{\mathbb{R}^n \times 0} = \text{id}$$

$$(II) \phi \in E(r, s), \Pi_s \phi = \phi \Pi_r$$

$$(III) \alpha \in \mathfrak{m}(r) \text{ e } F = G\phi + \alpha \Pi_r$$

As condições (I) e (II) estabelecem que $\phi: \mathbb{R}^{n+r} \rightarrow \mathbb{R}^{n+s}$ é representada por

$$\phi(x, u) = (\phi_1(x, u), \phi(u))$$

pois por (II) o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^{n+r} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^{n+s} \\
 \Pi_r \downarrow & & \downarrow \Pi_s \\
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^s
 \end{array}$$

Dado um representante, nós consideramos uma translação a_u , $u \in \mathbb{R}^r$ em uma vizinhança adequada da origem. A translação é dada por

$$a_u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: t \rightarrow t + (u)$$

A condição (III) na definição estabelece que o germe F_r e G_s assim se relacionam

$$F(x, u) = a_u G(x, u)$$

3.2.3 Definição: A soma de dois desdobramentos (r, F) e (s, G) de $f \in \mathfrak{m}$, é definida como

$$F + G = (F + G - f)_{r+s}$$

onde $(F+G-f)_{r+s}$ é dado por

$$(F+G-f)(x,u,v) = F(x,u) + G(x,v) - f(x)$$

3.2.4 Definição: O desdobramento constante f_r é definido por

$$f(x,u) = f(x)$$

onde temos $F_r + f_s = F_{r+s}$.

Na definição (3.2.2), (III) estabelece que o desdobramento F_r é determinado por (ϕ, α) e o desdobramento F_s .

3.2.5 Definição: Seja F_s um desdobramento de f e suponhamos

que os germes $\phi \in (n+r, n+s)$ e $\alpha \in (r, s)$ satisfazem (I) e (II) na definição (3.2.2). Assim se $\alpha \in (r)$, o desdobramento F_r dado pela equação (III) é chamado um desdobramento de f induzido de F_s por (ϕ, α) .

3.2.5.1 Definição: Um desdobramento F_r de f é dito versal se

todo desdobramento de f é induzido de F_r por convenientes (ϕ, α) .

3.2.5.2 Exemplo: Seja $f \in (n)$ uma singularidade e h_1, \dots, h_r

$\in m(n)$, então

$$F(x,u) = f(x) + u_1 h_1(x) + \dots + u_r h_r(x)$$

é um desdobramento de f , o qual é a soma dos desdobramentos parâmetros

$$F(x, u_i) = f(x) + u_i h_i(x)$$

3.2.6 Definição: Para uma singularidade f , define-se a codimensão de f por

$$\text{codim}(f) = \dim_{\mathbb{R}} m(n)/\Delta(f)$$

onde $\Delta(f) = (\partial f / \partial x_i) \in \mathcal{E}$.

3.2.6.1 Exemplos: a) Seja $f = x^3 + y^3$, então $\Delta(f) = (x^2, y^2)$ e uma base para $m(2)/\Delta(f)$ será $\{x, y, xy\}$, $\text{codim}(f) = 3$.

b) Seja $f = x^3 - xy^2$, então $\Delta(f) = (3x^2 - 2xy, xy)$, e uma base para $m(2)/\Delta(f)$ será $\{x, y, x^2 + y^2\}$, $\text{codim}(f) = 4$

c) Seja $f = x^2y + y^4$, então $\Delta(f) = (xy, x^2 + 4y^3)$; e uma base para $m(2)/\Delta(f)$ será $\{x, y, x^2, y^2\}$, $\text{codim}(f) = 4$

3.2.7 Definição: Um desdobramento versal (r, F) com r mínimo, é chamado desdobramento universal.

O significado e correlação entre o desdobramento universal e a codimensão torna-se claro no seguinte teorema sobre desdobramento conhecido como o Teorema de Mather

3.2.8 Teorema (Mather):

(I) Uma singularidade $f \in m$ possui um desdobramento versal se e somente se a codimensão de f é finita;

(II) Dois desdobramentos versais a r -parâmetros são isomorfos;

(III) Todo desdobramento versal é isomorfo a $F_r + \text{constante}$,

onde F_r é um desdobramento universal;

(IV) Se $\{h_1, \dots, h_r\} \in m(n)$ é uma base para m/Δ , então o desdobramento de f definido por

$$F(x, u) = f(x) + u_1 h_1(x) + \dots + u_r h_r(x)$$

A demonstraçãõ do Teorema de Mather depende fundamen-
talmente da Estabilidade Estrutural de Funções Diferenciáveis
a qual não será dada. Para tanto ver [13, 14]

3.2.9 Exemplos: (a) Se $n = 1$ e $f(x) = x^p$, então $\Delta(f) = (x^{p-1})$
e $m/\Delta(f)$ tem por base $\{x, \dots, x^{p-2}\}$, pois $x^{p-1} + \Delta = \Delta$, por-
tanto

$$F(x,u) = f(x) + u_{p-2}x^{p-2} + \dots + u_1x$$

é um desdobramento universal de x^p .

(b) De modo geral, se $f(x) = x_1^p \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_n^2$, en-
tãõ $\Delta(f) = (x_1^{p-1}, x_2, \dots, x_n)$ e portanto seu desdobramento
universal é

$$F(x,u) = f(x) + u_{p-2}x_1^{p-2} + \dots + u_1x_1$$

3.2.10 Observaçãõ: Seja $f(x_1, \dots, x_r)$ um germe com desdobra-
mento $f + F(x_1, \dots, x_r; u)$ e se
 $Q(x_{r+1}, \dots, x_n)$ é uma forma quadrática não degenerada nas va-
riáveis x_{r+1}, \dots, x_n , então o desdobramento universal de
 $f + Q$ é dado por

$$f + Q + F(x_1, \dots, x_r; u)$$

isto porque Q pode ser colocado na forma

$$\pm x_{r+1}^2 \pm \dots \pm x_n^2$$

através de uma conveniente transformação linear, e portanto

$$\Delta(f+Q) = (\Delta(f), x_{r+1}, \dots, x_n)$$

e portanto $m/\Delta(f+Q)$ tem a mesma base que $m/\Delta(f)$, e a mesma
dimensãõ.

Desta forma ao encontrarmos um desdobramento de uma
singularidade, é convenientê primeiro transformar a singula-

ridade de tal modo que o maior número possível de variáveis sejam separadas em uma forma quadrática não degenerada.

3.2.11 Definição: O co-posto de uma singularidade $f \in m$ é definido como o co-posto da matriz Hessiana $(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)(0)$, isto é da forma quadrática dada pelo seu 2-jato.

3.2.12 Lema: Se $f \in m^2$ é uma singularidade de co-posto $n-r$, então f é equivalente a um germe da forma

$$Q(x_1, \dots, x_r) + H(x_{r+1}, \dots, x_n)$$

onde $j^2 H(0) = 0$ e Q é uma forma quadrática não degenerada.

Demonstração: Para toda singularidade f de co-posto $n-r$, através de uma transformação linear conveniente o 2-jato de f pode ser escrito na forma

$$j^2 f(x) = Q(x_1, \dots, x_r) = \pm x_1^2 \pm \dots \pm x_r^2$$

Seja f^* a restrição de f a \mathbb{R}^r , isto é $f^* = f|_{\mathbb{R}^r}$, que contém o 2-jato Q . Pelo Teorema (3.1.22) temos que f^* é 2-determinado. (i.e.: $m^3 \subset m^2_{\Delta} = m^3$), e portanto equivalente à direita a Q pelo Teorema (3.2.8). Como o desdobramento de f contém Q cujo desdobramento universal é $(0, Q)$, logo f é um desdobramento versal de Q . Pelo Teorema (3.2.8) desdobramentos versais de dimensão fixa são isomorfos, portanto $(n-r, Q)$ é isomorfo a $(n-r, f)$, isto é, existe $H \in m(n-r)$ e um germe inversível $\phi \in \mathcal{G}(n, n)$ tal que

$$f\phi(x_1, \dots, x_n) = Q(x_1, \dots, x_r) + H(x_{r+1}, \dots, x_n)$$

o que conclui a demonstração do lema conhecido como "Lema da Partição".

3.2.13 Teorema: Se o co-posto de f é r , i.e.: co-posto $f = r$

$$\text{então } \text{codim}(f) \geq \binom{r+1}{2}$$

Em particular, se

$$\text{co-posto } f \geq 3 \quad \Rightarrow \quad \text{codim}(f) \geq 6$$

Demonstração: Se a $\text{codim}(f) = r$, então usando o Lema da Partição (3.2.12) existe um sistema de coordenadas para o qual,

$$F(x) = H(x_1, \dots, x_r) + Q(x_{r+1}, \dots, x_n)$$

com $j^2 H(0) = 0$

Seja $j^2_m(r)/j^2(\partial H/\partial x_i)$ o espaço dos 2-jatos restritos às r -primeiras coordenadas, então

$$\text{codim}(f) \geq \dim j^2_m(r)/j^2(\partial H/\partial x_i)$$

Como $j^2_m(r) = r + \binom{r+1}{2}$ e $\dim j^2(\partial H/\partial x_i) \leq r$ pois os $\partial H/\partial x_i$ geram o espaço vetorial $j^2(\partial H/\partial x_i)$. Portanto

$$\text{codim}(f) \geq \dim j^2_m(r)/j^2(\partial H/\partial x_i) \geq \binom{r+1}{2}$$

3.3 - AS SETE CATÁSTROFES ELEMENTARES

Consideraremos singularidades de codimensão ≤ 4 . Seja f uma singularidade de $\text{codim}(f) \leq 4$, ou equivalentemente por (3.2.6) $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{m}(n)/\mathfrak{m}(n)^2 \leq 4$, e portanto

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}(n)^5 &\subset \Delta(f) \\ \mathfrak{m}(n)^7 &\subset \mathfrak{m}(n)^2 \Delta(f) \end{aligned}$$

e por (3.1.22) temos que f é 6-determinado. Desta forma f é um polinômio de grau ≤ 6 em duas variáveis, a menos de uma forma quadrática não degenerada em outras variáveis, como em (3.2.13). Portanto, passamos agora a considerar transformações de polinômios de uma forma normal geral usando algumas mudanças de coordenadas.

3.3.1 Teorema-(Thom): A menos da adição de uma forma quadrática não degenerada em outras variáveis e da multiplicação por ± 1 , uma singularidade f de codimensão ≤ 4 e ≥ 1 , é equivalente à direita a uma das seguintes singularidades com seus respectivos desdobramentos universais.

codim	f	desdobramento universal	nome
1	x^3	$x^3 + ux$	dobra
2	x^4	$x^4 - ux^2 + vx$	cúspide
3	x^5	$x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$	andorinha

codim	f	desdobramento universal	nome
3	x^3+y^3	$x^3+y^3 + wxy -ux -vy$	umbílico hiperbólico
3	x^3-xy^2	$x^3-xy^2 +w(x^2+y^2) -ux -vy$	umbílico elíptico
4	x^6	$x^6 + tx^4+ux^3+vx^2+wx$	borboleta
4	x^2y+y^4	$x^2y+y^4 +wx^2+ty^2-ux-vy$	umbílico parabólico

Demonstração: Pelo Teorema (3.2.13) temos duas possibilidades para o co-posto de uma singularidade de codimensão ≤ 4 .

(1) co-posto $f = 1$

portanto f é equivalente à direita a x^n , a menos de uma forma quadrática não degenerada. Como $\text{codim}(x^p) = p-2$, os germes possíveis são, a menos de sinal

$$x^3, x^4, x^5 \text{ e } x^6$$

(2) co-posto $f = 2$

portanto por (3.2.13) $\text{codim} \geq 3$, assim a codimensão de f será

$$\text{codim } f = 3 \text{ ou } 4$$

Seja $P(x,y) = j^3(f)$, que é um polinômio de grau 3 e portanto pode ser decomposto nos complexos em três fatores lineares

$$P(x,y) = (a_1x+b_1y)(a_2x+b_2y)(a_3x+b_3y)$$

As três possibilidades seguintes serão discutidas separadamente

(a) os três vetores $(a_i, b_i) \in C^2$ são linearmente independentes dois a dois sobre C ;

(b) dois deles são linearmente independentes, como por exemplo

$$P(x,y) = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)^2$$

onde os dois primeiros vetores são linearmente independentes. Como P é real e a fatoração é única a menos de constante, consideramos a fatoração conjugada com os (a_i, b_i) reais.

(c) Todos os (a_i, b_i) são dependentes, mas não nulos. Desta forma temos

$$P(x,y) = (ax + by)^3 \text{ com } (a,b) \in R^2$$

$$(d) P(x,y) = 0$$

Caso (a):

(i) Consideremos (a_i, b_i) reais e

$$u = a_1x + b_1y$$

$$v = a_2x + b_2y$$

as novas coordenadas. O símbolo \sim representará equivalência à direita. Nós temos

$$P(x,y) \sim xy(ax + by) \text{ com } a \text{ e } b \text{ não nulos}$$

(ax, by) por (x, y) temos

$$\sim (ab)^{-1} xy(x + y).$$

$(ab)^{1/3}(x, y)$ por (x, y) temos

$$\sim xy(x + y)$$

$2^{-2/3}(x+y, x-y)$ por (x, y) temos

$$\sim x(x^2 - y^2)$$

$$\sim x^3 - xy^2$$

Este polinômio é 3-determinado. Uma base para $m/\Delta(f)$ é $x, y, x^2 + y^2$ chamado de elíptico umbílico.

(ii) Sejam os (a_i, b_i) complexos conjugados, então

$$P(x, y) = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)(\bar{a}_2x + \bar{b}_2y)$$

O produto dos dois últimos fatores é uma forma quadrática positiva definida, que através de uma mudança linear de coordenadas adequada pode ser escrita como

$$P(x, y) \sim (ax + by)(x^2 + y^2)$$

Por rotação de coordenadas, $ax + by$ pode ser transformado em cx , e $x^2 + y^2$ como sendo o quadrado da distância permanece constante

$$\sim cx(x^2 + y^2)$$

$$\sim x(x^2 + y^2)$$

$$\cong x^3 + xy^2$$

$$\sim x^3 + y^3$$

onde a última equivalência é obtida a partir de

$$(x + y)^3 + (x - y)^3 = 2x^3 + 6xy^2 \sim x^3 + y^3$$

Desta forma $x^3 + y^3$ é 3-determinado, uma base para $m/\Delta(f)$ é x, y, xy , e assim temos obtido o desdobramento do germe umbílico hiperbólico.

Caso (b):

$$P(x, y) = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)^2 \sim x^2y$$

Tal germe não é finitamente determinado, pois

$$\Delta(x^2y) = (x^2, xy)$$

não contém qualquer potência de y . Como f é finitamente determinado, deve ter um jato não equivalente a x^2y . Seja k o maior inteiro para o qual

$$j^k f \sim x^2y$$

podemos então admitir, sem perda de generalidade que

$$j^k f = x^2y$$

e portanto

$$j^{k+1} f = x^2y + h(x,y)$$

onde h é um polinômio homogêneo de grau $k+1$, $k \geq 3$.

Consideremos a transformação

$$\phi(x,y) = (x + \alpha, y + \beta)$$

um difeomorfismo onde α, β são homogêneos de grau $k-1 \geq 2$

O jacobiano de ϕ na origem é a identidade, portanto

$$j^{k+1} f = x^2y + x^2\beta + 2xy\alpha + h(x,y)$$

Por mudança adequada de α, β podemos eliminar todos os termos em h que são divisíveis por xy ou x^2 , o que nos dá

$$j^{k+1} f = x^2y + ay^{k+1}$$

que é claramente $k+1$ determinado.

$$\begin{aligned} f &\sim x^2y + ay^{k+1} \\ &\sim x^2y + y^{k+1} \end{aligned}$$

Se $k = 4$ a codimensão de f é ≥ 5 , portanto, $k = 3$ e

$$\sim x^2y + y^4$$

multiplicando por -1 e trocando y por $-y$ temos

$$\sim x^2y - y^4$$

chamado umbílico hiperbólico.

Caso (c):

$$P(x,y) = (ax + by)^3 - x^3$$

assim sem perda de generalidade temos

$$j^3 f = x^3$$

$$j^4 f = x^3 + h$$

onde h é de grau 4. Consideramos que

$$\dim j^3 m(2) = 9$$

e que

$$\dim j^3_{\Delta}(f) = \dim j^3(x^2 + h_1, h_2) \leq 4,$$

pois h_1, h_2 possui grau ≥ 3 . Desta forma

$$\dim j^3 m(2)/\Delta(f) \geq 5 > 4$$

o que não satisfaz a nossa hipótese $\text{codim}(f) \leq 4$.

Caso (d):

$$P(x,y) = 0 = j^3(f)$$

portanto $f \in m(2)^4$, assim $\Delta(f) \subset m(2)^3$ e

$$\dim m/\Delta(f) \geq \dim (m(2)/m(2)^3) = 5 > 4.$$

Este caso também não satisfaz a nossa hipótese.

Assim conclui-se a prova do Teorema das Sete Catástrofes de Thom.

A P Ê N D I C E

4.1 A Topologia de Whitney

4.1.1 Definição: Sejam M e N variedades diferenciáveis.

(i) Denotemos por $C^\infty(M,N)$ o conjunto das funções diferenciáveis de M em N .

(ii) Fixado um inteiro não negativo k , seja U o subconjunto aberto de $J^k(M,N)$. Denotemos por $M(U)$ o conjunto

$$M_k(U) = \{f \in C^\infty(M,N) : j^k f(x) \subset U\}$$

Observamos que $M(U \cap V) = M(U) \cap M(V)$

(iii) A família dos conjuntos $M(U)$, onde U é um aberto de $J^k(M,N)$ formam um aberto básico na topologia de $C^\infty(M,N)$. Esta topologia é chamada Topologia C^k de Whitney. Denotemos por W_k a família de subconjuntos abertos de $C^\infty(M,N)$ na topologia C^k de Whitney. A topologia C^∞ de Whitney em $C^\infty(M,N)$ é a topologia cuja base é

$$W = \bigcup_{k=0}^{\infty} W_k$$

Esta é uma boa definição de base, pois

$$W_k \subset W_t \quad \text{se} \quad k \leq t$$

o que pode ser visto através da função canônica

$$\Pi_k^t: J^t(M,N) \rightarrow J^k(M,N) : j^t(f) \rightarrow j^k(f)$$

Assim

$$M(U) = M[\Pi_k^t(U)]$$

para todo aberto U em $J^k(M,N)$.

Vamos agora descrever uma vizinhança básica na Topologia C^∞ de Whitney para $f \in C^\infty(M, N)$.

Seja d_k uma métrica em $J^k(M, N)$ compatível com esta topologia, que é possível pois toda variedade é metrizável, de modo a torná-lo um espaço métrico completo.

Definimos

$$B_{k\delta}(f) = \{g \in C^\infty(M, N) : \forall x \in M, d_k(j^k f(x), j^k g(x)) < \delta(x)\}$$

onde

$$\delta : M \rightarrow \mathbb{R}^+$$

é uma função contínua. Assim $B_{k\delta}(f)$ é um conjunto aberto para todo δ .

Consideremos a função contínua

$$\begin{aligned} \Delta : J^k(M, N) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \sigma &\rightarrow \delta(\alpha(\sigma)) - d_k(j^k f(\alpha(\sigma)), \sigma) \end{aligned}$$

com $\alpha(j^k_x f) = x_0$

e seja $U = \Delta^{-1}(0, \infty)$. Então U é aberto em $J^k(M, N)$ e $B_{k\delta}(f) = M_k(U)$

Agora seja W uma vizinhança aberta de f em $C(M, N)$, e seja V um conjunto aberto em $J^k(M, N)$ com

$$f \in M(V) \subset W$$

e seja

$$m(x) = \inf\{d_k(\sigma, j^k f(x)) : \sigma \in \alpha^{-1}(x) \cap (J^k(M, N) - V), x \in M\}$$

Observemos que $m(x) = \infty$ se $\alpha^{-1}(x) \subset V$. Seja δ uma função contínua qualquer, com $\delta(x) < m(x)$, $x \in M$. É possível mostrar que δ e m são limitadas sobre qualquer subconjunto compacto em M , por uma constante positiva. Então usando Partição da Unidade podemos construir um δ global. Com este δ , $B_{k\delta}(f) \subset W$. Finalmente, seja γ e δ duas funções contínuas de M em \mathbb{R}^+ . Definindo

$$\eta(x) = \min(\gamma(x), \delta(x))$$

onde

$$\eta: M \rightarrow \mathbb{R}^+$$

é contínua e

$$B_\eta(f) = B_\delta(f) \cap B_\gamma(f)$$

Esta coleção $B_\delta(f)$ forma uma vizinhança básica de f na topologia C^∞ de Whitney em $C^\infty(M, N)$.

B I B L I O G R A F I A

- [1] Zeeman E. C. Applications of Catastrophe Theory, in Intl. Conference on Manifolds, Tohyo Univ. 1973
- [2] Zeeman E. C. Catastrophe Theory. *Scient. Am.* 234, 65-83 , 1976.
- [3] Trotman D. J. A. and Zeeman E. C. The Classification of Elementary Catastrophes of codimension 5 in Symposium on Catastrophe Theory Notes (Seattle 1975) Springer Lecture Notes in Mathematics 525.
- [4] Thom R. Structural Stability and Morphogenesis, W. A. Benjamin Inc., Reading, Mass, 1975.
- [5] Sewell M. J. On the Connexion between stability and the shape of the equilibrium surface, *J. Mech. Phys. Solids* 14, 203-230, 1966.
- [6] Sewell M. J. Some Mechanical Examples of Catastrophe Theory, *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications* 12, 163-172, 1976.
- [7] Arnold V. I. Normal Forms for functions near degenerate critical points, the weyl groups of A_k , D_k e E_k , and Lagrangian singularities, *Funkcional Anal. i Priložen.* 6, 3-25, 1972
- [8] Arnold V. I. Remarks on the stationary phase method and Coxeter numbers. *Russian Math. Surveys* 28, 19-48, 1973.

- [9] Arnold V. I. Critical points of smooth functions, Proc. Internat. Congr. Math. Vancouver 1974, pp 19-39.
- [10] Siersma D. The singularities of C -functions of right-co dimension smaller than or equal to eight Indag. Math. 35, 31-37, 1973.
- [11] Stewart I. N. The geometry of binary quadratic forms (part I) Warwick University preprint, 1976.
- [12] Callahan J. Singularities and plane maps, this Monthly 81, 211-240, 1974.
- [13] Broucker T. H. Differentiable germs and Catastrophe, Cambridge University Press 16, 1975.
- [14] Sotomayor J. Singularidades de Aplicações Diferenciáveis Ist. Mat. Pura e Aplicada 1976.
- [15] Milnor J. Morse Theory, Ann. Math. Studies, Princeton, 51, 1963.