



EDUARDO DE AMORIM NEVES

DIFUSÕES DEPENDENDO DIFERENCIAVELMENTE
DE MÉTRICAS E CONEXÕES

CAMPINAS

2013



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

EDUARDO DE AMORIM NEVES

DIFUSÕES DEPENDENDO DIFERENCIAVELMENTE
DE MÉTRICAS E CONEXÕES

Tese apresentada ao Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica da Universidade
Estadual de Campinas como parte dos requisitos
exigidos para a obtenção do título de Doutor em
matemática.

Orientador: Prof. Dr. Pedro José Catuogno

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE
DEFENDIDA PELO ALUNO EDUARDO DE AMORIM NEVES
E ORIENTADA PELO PROF. DR. PEDRO JOSÉ CATUOGNO.

Assinatura do Orientador

CAMPINAS

2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

N414d Neves, Eduardo de Amorim, 1982-
Difusões dependendo diferenciavelmente de métricas e conexões / Eduardo de Amorim Neves. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Pedro José Catuogno.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Difusão. 2. Movimentos brownianos. 3. Variedades riemannianas. 4. Fibrados (Matemática). 5. Funções harmônicas. I. Catuogno, Pedro José, 1959-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Diffusions depending smoothly of metrics and connections

Palavras-chave em inglês:

Diffusion

Brownian movements

Riemannian manifolds

Fiber bundles (Mathematics)

Harmonics functions

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora:

Pedro José Catuogno [Orientador]

Paulo Regis Caron Ruffino

Diego Sebastian Ledesma

Ryuichi Fukuoka


Edson Alberto Coayla Teran

Data de defesa: 19-09-2013

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 19 de setembro de 2013 e aprovada

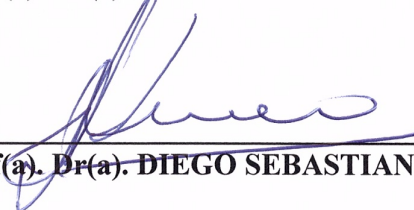
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO



Prof(a). Dr(a). PAULO REGIS CARON RUFFINO



Prof(a). Dr(a). DIEGO SEBASTIAN LEDESMA



Prof(a). Dr(a). RYUICHI FUKUOKA



Prof(a). Dr(a). EDSON ALBERTO COAYLA TERAN

Abstract

This thesis is divided into two parts. In the first part, we will make a probabilistic approach to the theory of L -harmonic applications on manifolds, we generalize to this context Theorems of Liouville, Picard, Elworthy and Dirichlet. In the second part of the work, the goal is to generalize and characterize the concept of diffusion, martingale and Brownian motion on manifolds that are provided by a family of metrics and connections which depends smoothly on time.

Resumo

Esta tese está dividida em duas partes. Na primeira parte, faremos uma abordagem probabilística para a teoria de aplicações L -harmônicas em variedades diferenciáveis, passaremos para esse contexto os Teoremas de Liouville, Picard, Elworthy e Dirichlet. Na segunda parte do trabalho, o objetivo é generalizar e caracterizar o conceito de difusão, martingale e movimento Browniano em variedades que estejam munidas por uma família de métricas e conexões que variam diferenciavelmente com o tempo.

Agradecimentos	ix
Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Geometria Riemanniana	5
1.2 Cálculo Estocástico	10
2 Uma Abordagem Probabilística para a Teoria das Aplicações L-Harmônica	18
2.1 Aplicações L -Harmônicas	18
2.2 Teorema de Liouville, Picard, Elworthy e Dirichlet para Aplicações L -Harmônicas	23
3 Martingales Dependendo Diferenciavelmente de uma Família de Conexões	30
3.1 Λ -Martingales	30
3.2 Λ -Martingales em Fibrados	33
4 Movimento Browniano Dependendo Diferenciavelmente de uma Família de Métricas Riemannianas	37
4.1 g -Movimento Browniano	37

4.2	Construção do $g(t)$ -movimento Browniano via mergulho isométrico . .	42
4.3	$g(t)$ -Movimento Browniano em uma Superfície de Revolução	49
4.4	$L(t)$ -Difusão	55
A	Apêndice	58
1.1	Resultados Técnicos	58
	Bibliografia	60

AGRADECIMENTOS

- Agradeço a Deus pela dádiva da vida.
- À banca examinadora pelos comentários e sugestões que contribuíram para melhorar a versão final da tese.
- Aos professores do Departamento de Matemática da UEM e do IMECC, pela contribuição na minha formação acadêmica.
- Ao meu orientador de mestrado Ryuichi Fukuoka.
- Ao meu orientador de doutorado Pedro José Catuogno pela ajuda com a tese.
- À CAPES e ao CNPq, pelo apoio financeiro.
- A todos companheiros de doutorado pela agradável convivência e pela grande ajuda e apoio que vocês me deram durante toda essa jornada. Em especial agradeço ao: Thiago Castilho, Luiz Alberto, Ivan Gonzales, Luis Roberto, Grasielle Jorge, Fernanda Andrade, Alisson Rafael, Thiago Ferraiol, Rafael Castrequini, Jamil Abreu, Paulo Henrique, Simão Stelmastchuk.
- Aos companheiros de república Luis Felipe, César Ferreira, Tiago Henrique, Alexandre Camargo, William Monte Verde, Fabio Amorim.
- Finalmente, um agradecimento especial a minha família, pois sem ela nada disso teria acontecido.

INTRODUÇÃO

São bem conhecidas as relações entre métricas Riemannianas, operador Laplace-Beltrami, solução da equação do calor, aplicações harmônicas e o movimento Browniano (que é um processo de difusão com gerador infinitesimal $\frac{1}{2}\Delta_M$). Sabe-se por exemplo, que é possível caracterizar uma aplicação harmônica através de martingales e movimento Browniano.

Teorema(P.A, Meyer [43]). Sejam M uma variedade Riemanniana, N uma variedade diferenciável munida de uma conexão Γ^N e $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Então F é harmônica se, e somente, se para todo movimento Browniano B_t em M , $F(B_t)$ é um Γ^N -martingale em N .

Com base nesta caracterização de aplicações harmônicas em termos de objetos probabilísticos, W.S. Kendall e R.W. Darling, na década de 80, demonstraram com ferramentas do Cálculo Estocástico, vários resultados interessantes, tais como:

Teorema(de Liouville). Seja M uma variedade Riemanniana tal que exista aplicações harmônicas limitada não constante. Seja $\mathcal{B}_r(p)$ uma bola geodésica regular em uma variedade Riemanniana N . Se $F : M \rightarrow \mathcal{B}_r(p) \subset N$ é uma aplicação harmônica, então F é constante.

Teorema(Uma versão probabilística do Teorema de Picard). Seja M uma variedade Riemanniana com curvatura de Ricci não negativa e seja N uma variedade Riemanniana com curvatura sectional limitada superiormente por uma constante negativa $-h^2$. Se $F : M \rightarrow N$ é harmônica e com dilatação limitada, então F é constante.

Teorema(Unicidade do Problema de Dirichlet). Seja M uma variedade Riemanniana compacta com fronteira ∂M e $\mathcal{B} \subset N$ uma bola geodésica regular. Se F e G são aplicações harmônicas de M em N tal que $F = G$ na fronteira ∂M . Então $F = G$ em M .

Uma pergunta natural que surge é: Será que podemos obter relações semelhantes a essas, mas para processos estocásticos mais gerais que o movimento Browniano? Isto é, para difusões mais gerais que as geradas por $\frac{1}{2}\Delta_M$?

A primeira parte desta tese é dedicada em responder essa pergunta. Para isso, fizemos um estudo detalhado dos artigos de R.W. Darling, W.S. Kendall e P.A. Meyer, [9], [10], [11], [32], [33], [34], [35], [36], [43] e [44], que abordam as relações entre aplicações harmônicas, Γ -martingales e movimento Browniano. Assim podemos compreender as técnicas utilizadas em suas demonstrações e desta maneira fazer as modificações necessárias para generalizar os teoremas lá obtidos para o nosso contexto de aplicações L -harmônicas e L -difusões.

O conceito de aplicação L -harmônica em variedades diferenciáveis, foi introduzido e estudado por J. Picard em [40], [41] e [42], a direção do seu estudo foi de responder questões sobre construções de aplicações L -harmônica com valores fixos na fronteira da variedade. Este problema por sua vez está relacionado com a construção de martingales em variedades com valor terminal fixo (isto é, um problema de Dirichlet não linear). Além de J. Picard, R. Bass em [1] também estudou de maneira probabilística difusões e aplicações L -harmônica, mas no âmbito de equações diferenciais parciais no espaço euclidiano.

Na segunda parte da tese, vamos estudar processos estocásticos que dependem de uma família de métrica e/ou conexões que variam diferenciavelmente com o tempo.

Nosso trabalho segue primeiramente na direção de estudar martingales que dependem diferenciavelmente de uma família de conexões. Esse estudo foi feito de modo independente e sob um ponto de vista diferente ao realizado por Guo, H; Philipowski, R e A. Thalmaier em [20]. Sob nosso ponto de vista, obtivemos uma caracterização dos Λ -martingales e algumas fórmulas de integração para esse tipo de processo, tais como, uma fórmula de conversão Stratonovich-Itô e uma fórmula geométrica de Itô. Além disso, passaremos para o nosso contexto os resultados de P. Catuogno e S. Stelmastchuk [50], que caracteriza martingales em fibrados de bases e fibrados principais.

Em seguida vamos estudar o \mathbf{g} -movimento Browniano, processo este, que é obtido quando restringimos os Λ -martingales para o caso em que a família de conexões Λ , é uma família de conexões de Levi-Civita, associada a uma família de métricas Riemannianas $\mathbf{g} = \{g(t); t \in [0, T]\}$ de classe $C^{1,2}([0, T] \times M)$. O \mathbf{g} -movimento Browniano foi introduzido e estudado em 2008 por A. Coulibaly em [29], este processo, tem relação direta com fluxos de curvatura de Ricci e fluxos de curvatura média, como A. Coulibaly e A. Thalmaier mostram em [30] e [31].

Nossa contribuição para essa teoria, foi primeiramente de apresentar uma definição alternativa ao de A. Coulibaly, para o \mathbf{g} -movimento Browniano, e com isso, obtivemos algumas fórmulas de integração para esse tipo de processo estocástico. Uma outra contribuição foi apresentar uma maneira de construir o \mathbf{g} -movimento Browniano em uma superfícies de revolução cuja família de métricas Riemannianas evolua de modo “comportado”.

Finalizaremos nosso trabalho, estendendo o conceito de \mathbf{g} -movimento Browniano. Para isso vamos considerar uma família $\{L(t)\}_{t \in [0, T]}$ de operadores elípticos não degenerados de 2ª ordem sem termos constantes, variando diferenciavelmente com o tempo. E assim, definiremos um processo de difusão gerado por essa família, no qual intitulamos de $L(t)$ -difusão. Construiremos também o conceito de transporte paralelo estocástico ao longo de uma $L(t)$ -difusão, de modo a mantermos a propriedade de isometria do transporte paralelo.

Este trabalho está dividido da seguinte maneira:

No primeiro capítulo, fixaremos notações e apresentaremos apenas as definições e os resultados necessários de Geometria Riemanniana e Cálculo Estocástico que serão utilizadas no restante do trabalho.

No Segundo capítulo, introduziremos o conceito de aplicação L -harmônica e faremos um estudo análogo ao que W.S. Kendall e R.W. Darling fizeram para os casos de martingales, movimento Browniano e aplicações harmônicas em variedades Riemannianas. No entanto, aqui o estudo será feito no âmbito de aplicações L -harmônicas e L -difusões.

No capítulo 3, vamos estudar martingales que dependem diferenciavelmente de uma família Λ de conexões afins, no qual intitulamos Λ -martingales. Daremos uma caracterização dos Λ -martingales e algumas fórmulas de integração para esse tipo de processo, tais como uma fórmula de conversão Stratonovich-Itô e uma fórmula geométrica de Itô. Além disso, apresentaremos uma caracterização dos Λ -martingales em fibrados principais e fibrados de bases.

O capítulo 4 é dedicado ao estudo do \mathfrak{g} -movimento Browniano. Primeiramente vamos apresentar uma definição alternativa ao de A. Coulibaly, para o \mathfrak{g} -movimento Browniano e obter algumas fórmulas de integração para \mathfrak{g} -movimento Browniano. Em seguida, apresentaremos uma nova construção deste processo, via mergulho isométrico. Utilizando essa nova construção faremos uma caracterização do \mathfrak{g} -movimento Browniano e mostraremos uma maneira de construir \mathfrak{g} -movimento Browniano em superfícies de revolução. Por fim, introduziremos o conceito de $L(t)$ -difusão e de transporte paralelo estocástico ao longo desse processo.

O último capítulo é um apêndice que contém alguns lemas técnicos que utilizamos nas demonstrações de nossos resultados.

Neste capítulo, vamos apresentar os conceitos essenciais da Geometria Diferencial e do Cálculo Estocástico que serão utilizados no restante do trabalho. As referências utilizadas neste capítulo foram M. do Carmo [12], S. Kobayashi e K. Nomizu [48], E. Hsu [24], B. Oksendal [38], O. Kallenberg [28] e M. Emery [18].

1.1 Geometria Riemanniana

Ao longo desse trabalho o termo diferenciável significará de classe C^∞ . Além disso, vamos supor que as variedades diferenciáveis satisfaçam o axioma de Hausdorff e o axioma da base enumerável.

A tripla (M, g, ∇) denotará uma variedade Riemanniana de dimensão n , munida de sua métrica Riemanniana g e sua conexão de Levi-Civita ∇ . Também usaremos a notação Γ para a conexão de Levi-Civita.

Denotaremos também $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis definidos em M e por TM o fibrado tangente de M .

O gradiente de uma função $f \in C^\infty(M)$, é o campo vetorial, denotado por ∇f e definido pela relação $g(\nabla f, X) = X(f)$, para cada $X \in \mathcal{X}(M)$, onde $X(f)$ representa $df(X)$.

Dados $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, o *colchete de Lie* de X por Y , é o campo vetorial $[X, Y]$ dado por

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)), \text{ para cada } f \in C^\infty(M).$$

Uma variedade Riemanniana M é dita *completa*, se para todo $p \in M$, as geodésicas $\alpha(t)$ que partem de p , estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

Intuitivamente, isto significa que as variedades Riemannianas completas não possuem "furos" ou fronteiras.

Dados $p, q \in M$, a distância entre p e q é definida por $d(p, q) = \text{ínfimo dos comprimentos de todas as curvas diferenciáveis por partes em } M \text{ unindo } p \text{ a } q$.

A curvatura R de uma variedade Riemanniana (M, g, ∇) é uma correspondência que associa cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M).$$

Definiremos agora outros tipos de curvaturas que são importantes no estudo das variedades Riemannianas.

Dados $p \in M$, $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bi-dimensional de $T_p M$ e $\{u, v\}$ é uma base qualquer de σ . Definimos a *curvatura seccional* $K(p, \sigma)$ de σ em $p \in M$ pela expressão:

$$K(p, \sigma) = K(u, v) = \frac{g(R(u, v)v, u)}{|u \wedge v|^2}.$$

Agora fixe um vetor unitário $v \in T_p M$ e complete-o de modo a obter uma base ortonormal $\{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = v\}$ de $T_p M$. Assim definimos:

Curvatura de Ricci na direção de v :

$$Ric_p(v) = \sum_{i=1}^n g(R(v_i, v)v, v_i), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Curvatura Escalar em p :

$$K(p) = \sum_{j=1}^n Ric_p(v_j) = \sum_{i, j=1}^n g(R(v_i, v_j)v_j, v_i), \quad j = 1, \dots, n.$$

Um *tensor de tipo* (m, s) sobre $T_p M$ é uma forma $(m + s)$ -linear

$$T : \underbrace{T_p M^* \times \dots \times T_p M^*}_{m\text{-fatores}} \times \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_{s\text{-fatores}} \rightarrow \mathbb{R}$$

O espaço vetorial dos tensores de tipo (m, s) sobre $T_p M$ será denotado por $T_p^{m, s} M$.

Um *campo de tensores* T de tipo (m, s) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um tensor $T(p) \in T_p^{m,s}M$. Um campo de formas lineares é chamado de 1-forma. O conjunto dos campos de tensores de tipo (m, s) definidos em M será denotado por $\Gamma(T^{m,s}M)$.

Seja $\mathcal{B}_r(p) = \{q \in M | d(p, q) < r\}$ uma bola de raio r e centro em p em uma variedade Riemanniana completa M . Dizemos que \mathcal{B} é uma *bola geodésica regular* se:

- 1) Cada $q \in \mathcal{B}_r(p)$ está conectada com $p \in M$ por uma única geodésica minimal.
- 2) As curvaturas seccional em $\mathcal{B}_r(p)$ são limitadas por uma constante positiva k e $\sqrt{k} < \frac{\pi}{2r}$.

Sejam (M^n, g) e $(\widetilde{M}^{n+k}, \tilde{g})$ variedades Riemannianas de dimensões n e $n + k$, respectivamente. Uma imersão $f : M^n \rightarrow \widetilde{M}^{n+k}$ é dita *isométrica* se

$$g(u, v)_p = \tilde{g}(df_p(u), df_p(v))_{f(p)}, \quad (1.1)$$

para todo p de M e todo $u, v \in T_pM$. Dizemos que f é um mergulho isométrico se f é um mergulho que satisfaz (1.1) para todo $p \in M$ e todo $u, v \in T_pM$.

Teorema 1.1 (*Teorema do Mergulho isométrico de Nash*). *Qualquer variedade Riemanniana n -dimensional, pode ser mergulhada isometricamente em algum espaço euclidiano \mathbb{R}^N com a métrica canônica.*

Demonstração: Para uma prova ver [22]. □

Dada uma variedade Riemanniana M^n , consideremos $X \in \mathcal{X}(M)$, $p \in M$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM . Então definimos o *divergente* de X em $p \in M$ por

$$\operatorname{div}X(p) = \sum_{k=1}^n g(\nabla_{e_k}X, e_k)_p.$$

Dada $f \in C^\infty(M)$, definimos o *Laplaciano* de f em $p \in M$ como

$$\Delta f(p) = \operatorname{div}(\nabla f)(p) = \sum_{k=1}^n E_k(E_k(f))(p),$$

onde $\{E_1, \dots, E_n\}$ é um *referencial geodésico* em $p \in M$.

Em coordenadas locais

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right), \quad (1.2)$$

onde g^{ij} são os elementos da matriz inversa de (g_{ij}) .

Denotaremos por $P(M, G)$ o *fibrado principal* sobre a variedade M , com grupo de Lie G e projeção $\pi : P \rightarrow M$.

Indicaremos *ação à direita* de G em P por $R_g(p) := pg$ onde $p \in P$ e $g \in G$, e por \mathfrak{g} a *álgebra de Lie* de G . Relembre que a ação R_g induz um homomorfismo de álgebras de Lie $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{X}(P)$. O campo $B^* = \sigma(B)$ é chamado *campo de vetores fundamental*, para cada $B \in \mathfrak{g}$.

Um *levantamento horizontal* H em $P(M, G)$ é uma família de aplicações diferenciáveis $H_p : T_{\pi(p)}M \rightarrow T_pP$ tal que $\pi_* \circ H_p = Id_{T_{\pi(p)}M}$ e $(R_g)_*H_p = H_{pg}$ para quaisquer $p \in P$ e $g \in G$.

O levantamento horizontal H é determinado e determina uma única decomposição de cada espaço tangente T_pP como a soma direta do *subespaço vertical* $V_pP = Ker(\pi_*(p))$ e do *espaço horizontal* $H_pP = Im(H_p)$ em $p \in P$. Essa decomposição define naturalmente o *levantamento horizontal* de $X \in T_{\pi(p)}M$ como o único vetor tangente $X^h = H_p(X) \in H_pP$ tal que $\pi_*(X^h) = X$. Para cada $p \in P$, $\sigma_p(\mathfrak{g}) = V_pP$ assim B^* é um vetor vertical em T_pP . Assim dado $U_p \in T_pP$, vamos denotar a parte horizontal e vertical de U_p por $\mathbf{h}U_p$ e $\mathbf{v}U_p$ respectivamente.

Dado $P(M, G)$ um fibrado principal sobre M com grupo G , munido de um levantamento horizontal H . A *forma conexão* $\omega : TP \rightarrow \mathfrak{g}$ é definida por:

$$\omega(U_p) = B,$$

onde, $\mathbf{v}U_p = B_p^*$.

Observe que a forma de conexão ω é uma 1-forma que verifica as seguintes condições:

1. $\omega(B^*) = B$ for $B \in \mathfrak{g}$,
2. $R_g^*\omega = ad_{g^{-1}}\omega$ for $g \in G$,

onde $ad_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é definido por $ad_g(B) = (I_g)_*B$, I_g (aqui I_g é o automorfismo interno de G , definido por $I_g(x) = gxg^{-1}$).

Reciprocamente, para cada 1-forma ω de P , que verifica as condições anteriores, existe um único levantamento horizontal H em P tal que sua forma de conexão é ω . Para $p \in P$ e $X \in T_{\pi(p)}M$, temos que $H_p(X) \in T_pP$ é a única solução de $\pi_*(H_p(X)) = X$ e $\omega_p(H_p(X)) = 0$.

As conexões que consideraremos aqui serão, conexões sem torsão no fibrado tangente.

Seja ∇^P uma conexão em $P(M, G)$. Dizemos que ∇^P é G -invariante se as translações a direita R_g são aplicações afins para todo $g \in G$.

Seja ω uma forma conexão de $P(M, G)$. Uma conexão G -invariante ∇^P em $P(M, G)$ é projetável se $\mathbf{h}\nabla_{X^h}^P Y^h$ é projetável para quaisquer campos X e Y em M .

Proposição 1.2 *Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal e ∇^P uma conexão G -invariante em $P(M, G)$. Então ∇^P é projetável se e somente se existe uma única conexão ∇^M em M tal que*

$$\mathbf{h}\nabla_{X^h}^P Y^h = (\nabla_X^M Y)^h$$

para todos os campos X e Y em M .

Demonstração: Seja ∇^P conexão projetável. Definimos $\nabla_X^M Y = \pi_* \nabla_{X^h}^P Y^h$, claramente $\mathbf{h}\nabla_{X^h}^P Y^h = (\nabla_X^M Y)^h$. Falta provar que ∇^M é uma conexão. Isto segue dos seguintes cálculos: $(fX)^h = (f \circ \pi)X^h$, para cada $f \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} \nabla_{gX}^M (fY) &= \pi_* (\nabla_{(g \circ \pi)X^h}^P (f \circ \pi)Y^h) \\ &= \pi_* ((g \circ \pi)X^h (f \circ \pi)Y^h + (g \circ \pi)(f \circ \pi)\nabla_{X^h}^P Y^h) \\ &= gX(f)Y + gf\nabla_X^M Y. \end{aligned}$$

A unicidade segue das definições. □

Seja ∇^P uma conexão em $P(M, G)$ e ω uma forma conexão de $P(M, G)$. Seguindo B. O' Neill [39], descrevemos as magnitudes geométricas de nosso interesse em termos dos tensores fundamentais T e A . Eles estão definidos por

$$T_U V = \mathbf{h}\nabla_{\mathbf{v}U}^P \mathbf{v}V + \mathbf{v}\nabla_{\mathbf{v}U}^P \mathbf{h}V \tag{1.3}$$

e

$$A_U V = \mathbf{v}\nabla_{\mathbf{h}U}^P \mathbf{h}V + \mathbf{h}\nabla_{\mathbf{h}U}^P \mathbf{v}V, \tag{1.4}$$

para U e V campos em P .

Observamos que a anulação de T significa que as fibras de $P(M, G)$ são totalmente geodésicas.

Dentre os fibrados principais, o de fibrado de bases se destaca, por ser utilizado na literatura clássica de cálculo estocástico em variedades para fazer uma construção

intrínseca do movimento Browniano em variedades Riemannianas. Posteriormente, utilizaremos estes objetos para construir intrinsecamente as $L(t)$ -difusões. Para mais detalhes veja as referências Kobayashi e K. Nomizu [48] e E. Hsu [24].

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e $x \in M$. Definimos a *fibra* no ponto x como sendo

$$\mathcal{F}(M)_x = \{u : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M \mid \text{isomorfismo linear}\}$$

e o *fibrado de base* de M por $\mathcal{F}(M) = \bigcup_{x \in M} \mathcal{F}(M)_x$.

Não é difícil verificar que o fibrado de base é um fibrado principal com grupo estrutural $GL(\mathbb{R}^n)$.

Fixado uma métrica Riemanniana, o subconjunto do fibrado de bases formado pelas isometrias, é denominado *fibrado ortonormal* de M e denotado por $\mathcal{O}(M)$.

1.2 Cálculo Estocástico

Neste seção, apresentaremos uma rápida introdução à teoria do Cálculo Estocástico. Começaremos a estudar os processos no espaço euclidiano, colocando as definições básicas até chegar na fórmula de Itô e na teoria de equações diferenciais estocásticas. Com estes conceitos definidos, faremos uma introdução aos processos e as equações diferenciais estocásticas em variedades. As referências utilizadas nesta seção foram B. Oksendal [38], O. Kallenberg [28], E. Hsu [24] e M. Emery [18].

Um *processo estocástico* $X : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, é uma família de variáveis aleatórias $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ definida sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Para cada $\omega \in \Omega$, a aplicação $X(\omega) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, é chamada de *trajetória*.

Se para quase todo $\omega \in \Omega$ a trajetória $X(\omega)$ é contínua, dizemos que o processo estocástico é contínuo. Se a esperança $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$ para todo $t \in [0, T]$, o processo estocástico é dito *integrável*.

Uma *filtração* é uma família $\{\mathcal{F}_t\} \subset \mathcal{F}$ de σ -álgebra tal que se $s \leq t$, então $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$. Um processo X é dito *adaptado* à filtração $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ se X_t é \mathcal{F}_t -mensurável para todo $t \in [0, T]$.

Um *tempo de parada* relativo à filtração $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ é uma variável aleatória τ tal que para todo $t \in [0, T]$ o conjunto $\{\omega \in \Omega; \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Um processo estocástico $X : \Omega \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ é chamado um *martingale* com respeito a filtração \mathcal{F} , ou um \mathcal{F} -martingale se:

- (1) X é integrável.
- (2) X é adaptado a \mathcal{F} .
- (3) $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ q.c. para todo $s \leq t$, $s, t \in [0, T)$.

Se a igualdade em (3) é substituída por \leq ou \geq temos o que é chamado de *supermartingale* e *submartingale*, respectivamente.

Um processo $X = (X^1, \dots, X^n)$ em \mathbb{R}^n é martingale se X^1, \dots, X^n são martingales unidimensionais.

Um processo X é um *martingale local*, se ele é adaptado e se existe uma sequência de tempos de parada $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

- i)* $\tau_n \uparrow \infty$ q.c.
- ii)* para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_{\tau_n \wedge t}$ é um martingale.

Note que para todo martingale X , é possível construir uma sequência de tempos de parada que satisfaz as condições *i)* e *ii)*, portanto, todo martingale é um martingale local.

Um processo $X : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um *semimartingale* contínuo se ele pode ser escrito como a soma $X = M + A$ onde M é um martingale local contínuo e A é um processo adaptado, contínuo de variação limitada em intervalos finitos.

Teorema 1.3 *Para quaisquer martingales contínuos X e Y , existe q.c. um único processo contínuo $\langle X, Y \rangle_t$ de variação limitada em intervalos finitos tal que*

- 1) $\langle X, Y \rangle_0 = 0$
- 2) $XY - \langle X, Y \rangle$ é um martingale.

Tal processo é chamado de variação cruzada de X e Y . Além disso, o processo $\langle X, Y \rangle$ é q.c. simétrico e bilinear. No caso em que $X = Y$ chamamos $\langle X, X \rangle$ de variação quadrática de X .

É possível mostrar que a variação cruzada entre X e Y é dada explicitamente por

$$\langle X, Y \rangle_t = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n (X_{t_{i+1} \wedge t} - X_{t_i \wedge t})(Y_{t_{i+1} \wedge t} - Y_{t_i \wedge t}).$$

onde, $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ é uma partição de $[0, t] \subset [0, T]$ com $|\pi| = \sup |t_{i+1} - t_i|$, $i = 0, \dots, n-1$ a norma da partição π . O limite acima é em probabilidade.

Utilizaremos a caracterização de Lévy para definirmos o movimento Browniano. Um martingale contínuo $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^n)$ com $B_0 = 0$ e $\langle B_t^i, B_t^j \rangle = \delta_{i,j}t$, é chamado *movimento Browniano n -dimensional*.

Seja Y um semimartingale. Para cada processo $X : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuo e adaptado, definimos *integral de Itô* por

$$\int_0^t X dY := \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n (X_{t_i})(Y_{t_{i+1} \wedge t} - Y_{t_i \wedge t}).$$

Dados X e Y semimartingales contínuos, definimos a *integral de Stratonovich* de X com relação a Y por:

$$\int_0^t X \circ dY = \int_0^t X dY + \frac{1}{2} \langle X, Y \rangle_t, \quad t \geq 0.$$

A maior vantagem da integral de Stratonovich para a integral de Itô é que a integral de Stratonovich segue as regras usuais do Cálculo. No entanto, os processos estocásticos definidos por integrais de Stratonovich em relação a um martingale não define em geral um martingale como no caso da integral de Itô.

Apresentaremos agora a principal fórmula do Cálculo Estocástico devido ao matemático Kiyoshi Itô. Esta fórmula tem muitas aplicações no estudo de equações diferenciais estocásticas como veremos mais adiante.

Teorema 1.4 (Fórmula de Itô). *Seja $X = (X^1, \dots, X^n)$ um semimartingale contínuo em \mathbb{R}^n e $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Então:*

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s.$$

Proposição 1.5 (Fórmula de Itô para integral de Stratonovich). *Para qualquer semimartingale contínuo $X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ e para qualquer função $f \in C^3(\mathbb{R}^n)$, temos*

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) \circ dX_s^i.$$

Sejam $\{V_k\}_{k=1}^m$, campos de vetores diferenciáveis no \mathbb{R}^n , $Z : \Omega \times [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$ um semimartingale contínuo em \mathbb{R}^m e X_0 uma variável aleatória em \mathbb{R}^n , onde τ é um tempo de parada. Podemos definir dois tipos de equação diferencial estocástica:

$$dX_t = \sum_{k=1}^m V_k(X_t) dZ_t^k. \quad (1.5)$$

e a equação diferencial estocástica de Stratonovich

$$dX_t = \sum_{k=1}^m V_k(X_t) \circ dZ_t^k. \quad (1.6)$$

Uma solução para a equação (1.5) é um processo estocástico que satisfaça a equação integral de Itô

$$X_t = X_0 + \sum_{k=1}^m \int_0^t V_k(X_s) dZ_s^k. \quad (1.7)$$

Uma solução para a equação (1.6) é um processo estocástico que satisfaça a equação integral de Stratonovich

$$X_t = X_0 + \sum_{k=1}^m \int_0^t V_k(X_s) \circ dZ_s^k. \quad (1.8)$$

Teorema 1.6 *Suponha que os campos V_1, \dots, V_m da equação diferencial estocástica Itô(Stratonovich) sejam globalmente Lipschitz. Então existe uma única solução para cada condição inicial X_0 quadrado integrável.*

A conversão da integral de Stratonovich na integral de Itô é dada pela equação

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \sum_{k=1}^m V_k f(X_s) dZ_s^k + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{k,l=1}^m \nabla_{V_l} V_k f(X_s) d\langle Z^k, Z^l \rangle_s \quad (1.9)$$

Utilizando a fórmula de Itô, pode-se demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 1.7 *Seja X a solução da equação (1.6) e $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \sum_{k=1}^m V_k f(X_s) \circ dZ_s^k, \quad 0 \leq s < e(X). \quad (1.10)$$

onde $e(X)$ é o tempo de explosão de X .

Passaremos agora para os processos e equações diferenciais estocásticas em variedades. Para detalhes sobre cálculo estocástico em variedades ver E. Hsu [24] e M. Emery [18].

Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão n , $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade, τ um \mathcal{F} -tempo de parada. Um processo contínuo $X : \Omega \times [0, \tau) \rightarrow M$ é um *semimartingale* contínuo se $f(X)$ for um semimartingale contínuo em \mathbb{R} , para cada $f \in C^\infty(M)$.

Uma equação diferencial estocástica numa variedade M é definida por m -campos de vetores V_1, \dots, V_m em M , um semimartingale Z em \mathbb{R}^m e um elemento aleatório X_0 com valores em M funcionando como condição inicial da solução. Então definimos a equação diferencial estocástica numa variedade M por:

$$X_t = X_0 + \int_0^t V_k(X_s) \circ dZ_s^k \quad (1.11)$$

e referimos a esta equação por $SDE(V_1, \dots, V_m; Z, X_0)$.

Um semimartingale $X : \Omega \times [0, \tau) \rightarrow M$ é solução de (1.11) até o tempo de parada τ se para todo $f \in C^\infty(M)$ temos

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t V_k f(X_s) \circ dZ_s^k, \quad 0 \leq t < \tau, \quad k = 1, \dots, m. \quad (1.12)$$

A vantagem da formulação de Stratonovich para as equações diferenciais estocásticas em variedades é que esta formulação é invariante por difeomorfismo no seguinte sentido:

Teorema 1.8 *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $\Phi : M \rightarrow N$ um difeomorfismo. Se X é solução da $SDE(V_1, \dots, V_m; Z, X_0)$ em M , então $\Phi(X)$ é solução da $SDE(\Phi_* V_1, \dots, \Phi_* V_m; Z, \Phi(X_0))$ em N , onde $\Phi : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(N)$ é dada por*

$$(\Phi_* V)f(y) = V(f \circ \Phi)(x), \quad V \in \mathcal{X}(M), \quad y = \Phi(x).$$

Demonstração: Ver E. Hsu [24]. □

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e \mathcal{F} uma filtração completa e contínua à direita de \mathcal{F} . Um processo estocástico \mathcal{F} -adaptado X_t em M é chamado de *processo de difusão* gerado por L ou uma L -difusão se X_t é um semimartingale contínuo em M até o tempo de explosão $e(X)$ e

$$M^f(X)_t = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s) ds, \quad 0 \leq t < e(X), \quad (1.13)$$

é um \mathcal{F} -martingale local para cada $f \in C^\infty(M)$.

Seja M uma variedade Riemanniana. O processo de difusão gerado por $\frac{1}{2}\Delta$ é chamado *movimento Browniano* em M .

Passemos agora às definições de levantamento horizontal estocástico e desenvolvimento estocástico.

Considere a equação diferencial estocástica no fibrado de base $\mathcal{F}(M)$ munido de uma conexão.

$$dU_t = \sum_{i=1}^n H_i(U_t) \circ dZ_t^i, \quad (1.14)$$

onde Z é um semimartingale em \mathbb{R}^n e $\{H_i\}$ são os campos horizontais fundamentais.

Um semimartingale U_t em $\mathcal{F}(M)$ é dito *horizontal*, se existe um semimartingale Z_t em \mathbb{R}^n que satisfaça a equação (1.14). Neste caso Z_t é chamado *anti-desenvolvimento estocástico* de U_t .

A solução U_t da equação (1.14), é chamada *desenvolvimento estocástico* de Z_t em $\mathcal{F}(M)$ e sua projeção $X_t = \pi U_t$ é dita, *desenvolvimento estocástico* de Z_t em M .

Seja X_t um semimartingale em M . Um semimartingale horizontal U_t em $\mathcal{F}(M)$ tal que $\pi U_t = X_t$ é chamado de *levantamento horizontal estocástico* de X_t .

Teorema 1.9 *Seja X_t um semimartingale em M e U_0 uma variável aleatória em $\mathcal{F}(M)$ tal que $\pi U_0 = X_0$. Então existe um único levantamento horizontal estocástico U_t de X_t começando em U_0 .*

Demonstração: Ver E. Hsu [24]. □

Seja θ uma 1-forma sobre M e X um semimartingale com valores em M . Se U é o levantamento horizontal estocástico de X e W é o anti-desenvolvimento. Então a *integral de linha estocástica* de θ ao longo do semimartingale X é definido por

$$\int_{X[0,t]} \theta = \int_0^t \theta(U_s e_i) \circ dW_s^i$$

Vamos agora definir a variação quadrática de um semimartingale com respeito a um tensor de tipo $(0, 2)$. Seja $b \in \Gamma(T^{0,2}M)$, assim para cada $x \in M$ temos que $b(x) \in T_x^*M \otimes T_x^*M = \text{Hom}(T_xM \otimes T_xM, \mathbb{R})$.

Sua escalarização $\tilde{b}(x) : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}^{n*} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{n*}$ é definida por

$$\tilde{b}(u)(e, f) = b(x)(ue, uf), \quad u \in \mathcal{F}(M), \quad e, f \in \mathbb{R}^n, \quad x = \pi(u).$$

Seja $b \in \Gamma(T^{0,2}M)$ e X um semimartingale com valores em M . Seja U o levantamento horizontal estocástico de X e W o seu anti-desenvolvimento. Então a *b-variação quadrática* de X é dada por

$$\int_0^t b(dX_s, dX_s) = \int_0^t \tilde{b}(dW_s, dW_s),$$

mais precisamente

$$\int_0^t b(dX_s, dX_s) = \sum_{i,j=1}^n \int_0^t b(U_s e_i, U_s e_j) d\langle W^i, W^j \rangle_s.$$

Proposição 1.10 *Seja $b \in \Gamma(T^{0,2}M)$ e X a solução da equação diferencial estocástica*

$$dX_t = \sum_{i=1}^n V_i(X_t) \circ dZ_t^i$$

Então

$$\int_0^t b(dX_s, dX_s) = \int_0^t b(V_i, V_j)(X_s) d\langle Z^i, Z^j \rangle_s.$$

Demonstração: Ver E. Hsu [24]. □

Em um sistema de coordenada global (x^i) em $x \in M$, um tensor $b \in \Gamma(T^{0,2}M)$ pode ser escrito como $b(x) = b_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j$, $b_{ij} = b(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$. Assim dado $X = (X^i)$ um semimartingale em M , temos

$$\int_0^t b(dX_s, dX_s) = \int_0^t b_{ij}(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s$$

Seja M uma variedade diferenciável munida de uma conexão ∇ . Um semimartingale X_t com valores em M é chamado de ∇ -*martingale* se seu anti-desenvolvimento W_t é um martingale local no espaço euclidiano.

Uma definição alternativa para um ∇ -martingale, sem referirmos ao anti-desenvolvimento, pode ser dada pela seguinte proposição.

Proposição 1.11 *Um semimartingale X_t com valores em uma variedade diferenciável (M, ∇) é um ∇ -martingale se, e somente se,*

$$M^f(X)_t := f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \nabla^2 f(dX_s, dX_s),$$

é um martingale local para cada $f \in C^\infty(M)$.

Se $\mathbf{x} = (x^i)$ é uma carta local em M e $X_t = (X_t^i)$ é um semimartingale em M nessa carta. Então X_t é um ∇ -martingale se, e somente se,

$$X_t^i - X_0^i + \frac{1}{2} \int_0^t \Gamma_{ij}^k(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s.$$

é uma martingale local.

Demonstração: Ver E. Hsu [24].

□

CAPÍTULO 2

UMA ABORDAGEM PROBABILÍSTICA PARA A TEORIA DAS APLICAÇÕES L -HARMÔNICA

Abordagem que realizamos aqui, foi motivada pelos trabalhos [10], [11], [17], [34] e [36] de R. Darling, W. Kendall e K. Elworthy que relaciona os conceitos de aplicações harmônicas, movimento Browniano e martingales. Essa abordagem não havia ainda sido explorada no contexto de L -difusões e aplicações L -harmônica.

2.1 Aplicações L -Harmônicas

Nesta seção vamos definir e caracterizar de modo probabilístico uma aplicação L -harmônica em uma variedade Riemanianna, onde L é um operador elíptico não-degenerado de segunda ordem sem termos constantes.

Vamos começar fixando algumas definições básicas referentes a Geometria de Schwartz, para detalhes sobre essa teoria veja M. Emery [18].

Definição 2.1 *O espaço tangente de segunda ordem em M no ponto $x \in M$, denotado por $\tau_x M$, é o espaço vetorial de todos os operadores diferenciáveis de ordem no máximo dois sem termo constante em M no ponto x . Os elementos de $\tau_x M$ são chamados de vetores de segunda ordem.*

Observação 2.2 *Dados $U \subset M$ um aberto e (x_i) um sistema de coordenadas locais*

de M em $x \in U$, resulta que qualquer $L \in \tau_x M$ escreve-se de maneira única como

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

onde, a^{ij} e b^i são funções diferenciáveis definidas em M com $a^{ij} = a^{ji}$.

Seja (M, ∇) uma variedade diferenciável munida de uma conexão sem torção. No contexto da geometria de Schwartz ∇ é interpretada como uma regra que permite encontrar a parte de primeira ordem dos operadores diferenciáveis de segunda ordem. Formalmente, denote por Γ^M a seção do fibrado vetorial $Hom(\tau M, TM)$ sobre M definida por $\Gamma^M(X) = X$ e $\Gamma^M(XY) = \nabla_X Y$, onde $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Também chamaremos Γ^M de conexão em M .

Observe que a conexão Γ^M em coordenadas locais, é dada por

$$\Gamma^M\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \Gamma^M\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Portanto,

$$\Gamma^M L = \sum_{k=1}^n (b^k + \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^k a^{ij}) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Definição 2.3 *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Definimos a diferencial de 2º ordem de F no ponto $x \in M$ como sendo a aplicação $F_*(x) : \tau_x M \rightarrow \tau_{F(x)} N$ dada por:*

$$F_*(x)L(g) = L(g \circ F)(x), \text{ para toda } g \in C^\infty(N).$$

Definição 2.4 *Sejam (M, ∇^M) e (N, ∇^N) variedades diferenciáveis munidas com suas respectivas conexões e L um operador elíptico não-degenerado de segunda ordem em M sem termos constantes. Uma aplicação diferenciável $F : M \rightarrow N$ é dita L -harmônica se,*

$$\Gamma^N(F_*L) = 0.$$

Mostraremos mais adiante que o conceito de aplicações L -harmônicas generaliza o conceito de aplicações harmônicas, e com isso, faremos um estudo análogo ao que foi feito entre movimento Browniano e aplicações harmônicas, mas agora para o contexto de aplicações L -harmônicas e L -difusões.

Observe que uma aplicação diferenciável $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ é L -harmônica se, $LF = 0$.

Lema 2.5 *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Então para todo L -processo de difusão X_t , $F(X_t)$ é um F_*L -processo de difusão em N .*

Demonstração: Seja $Y_t = F(X_t)$, então para cada $g \in C^\infty(N)$, temos

$$\begin{aligned} M^g(Y_t) &= g(Y_t) - g(Y_0) - \int_0^t (F_*L)g(Y_s)ds, \\ &= g(F(X_t)) - g(F(X_0)) - \int_0^t (F_*L)g(F(X_s))ds, \\ &= (g \circ F)(X_t) - (g \circ F)(X_0) - \int_0^t L(g \circ F)(X_s)ds. \end{aligned}$$

Agora como por hipótese X_t é uma L -difusão, segue que $M^f(X)_t$ é um martingale local para toda $f \in C^\infty(M)$, em particular para $f = g \circ F$.

Assim, $M^{g \circ F}(X)_t = M^g(F(X))_t$ é um Γ^M -martingale local para qualquer que seja $g \in C^\infty(N)$.

Portanto $F(X)_t$ é uma F_*L -difusão. □

Teorema 2.6 *Seja (M, ∇^M) uma variedade diferenciável munida de uma conexão e X_t uma L -difusão em M . Então X_t é um martingale em M se, e somente se,*

$$\Gamma^M(L) = 0.$$

Demonstração: Suponha que a L -difusão X_t seja um martingale, onde

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Considere as funções $\mathbf{x}^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{x}^i(x^1, \dots, x^n) = x^i$ e a função $\mathbf{x}^i \mathbf{x}^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{x}^i \mathbf{x}^j(x^1, \dots, x^n) = x^i x^j$.

Assim se $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma carta local em M , temos que as funções $f_i := \mathbf{x}^i \circ \varphi$ e $f_{ij} := \mathbf{x}^i \mathbf{x}^j \circ \varphi$ são diferenciáveis em $U \subset M$.

Observe ainda que

$$L(f_i) = b^i \quad e \quad L(f_{ij}) = \frac{1}{2} a^{ij}.$$

Como X_t é uma L -difusão temos para cada $f \in C^\infty(M)$ que

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)ds,$$

é um martingale local. Em particular para f_i , temos

$$X_t^i - X_0^i - \int_0^t b^i(X_s) ds, \quad (2.1)$$

é um martingale local. E para f_{ij} , temos:

$$X_t^i X_t^j - X_0^i X_0^j - \frac{1}{2} \int_0^t a^{ij}(X_s) ds,$$

é um martingale local. Usando o Teorema 1.3 tem-se

$$d\langle X^i, X^j \rangle_t = a^{ij}(X_t) dt. \quad (2.2)$$

Mas pela Proposição 1.11 temos que

$$X_t^i - X_0^i + \frac{1}{2} \int_0^t \Gamma_{ij}^k(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s, \quad (2.3)$$

é um martingale local. Substituindo (2.2) em (2.3) e comparando com a equação (2.1), obtemos

$$\frac{1}{2} \Gamma_{ij}^k a^{ij} = -b^k$$

Como

$$\Gamma^M L = \sum_{k=1}^n (b^k + \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^k a^{ij}) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Segue que $\Gamma^M(L) = 0$.

Reciprocamente, se $\Gamma^M(L) = 0$ então $\frac{1}{2} \Gamma_{ij}^k a^{ij} = -b^k$, assim dado uma L -difusão X_t , temos que

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s) ds,$$

é um martingale local. Em particular para f_i , temos

$$X_t^i - X_0^i - \int_0^t b^i(X_s) ds, \quad (2.4)$$

é um martingale local.

$$X_t^i - X_0^i + \frac{1}{2} \int_0^t \Gamma_{ij}^k a^{ij}(X_s) ds, \quad (2.5)$$

é um martingale local. Usando o Teorema 1.3 tem-se

$$d\langle X^i, X^j \rangle_t = a^{ij}(X_t) dt. \quad (2.6)$$

Logo,

$$X_t^i - X_0^i + \frac{1}{2} \int_0^t \Gamma_{ij}^k(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s, \quad (2.7)$$

é um martingale local. Portanto X_t é um martingale em M . \square

Agora estamos em condições de demonstrar o teorema que caracteriza as aplicações L -harmônicas em termos de objetos probabilísticos.

Teorema 2.7 *Sejam M uma variedade Riemanniana, N uma variedade com uma conexão ∇^N , $F : M \rightarrow N$ diferenciável e L um operador elíptico não-degenerado de segunda ordem sem termos constantes. Então F é L -harmônica se, e somente se, para todo L -processo de difusão X_t , $F(X_t)$ é um ∇^N -martingale.*

Demonstração: Seja F uma aplicação L -harmônica, então por definição

$$\Gamma^N(F_*L) = 0,$$

e pelo Teorema 2.6, toda F_*L -difusão é um martingale. Agora pelo Lema 2.5, $F(X_t)$ é um F_*L -difusão em N . Logo $F(X_t)$ é um ∇^N -martingale.

Reciprocamente, dado uma L -difusão X_t , temos por hipótese que $F(X_t)$ é um ∇^N -martingale, mas usando novamente o Lema 2.5, $F(X_t)$ é um F_*L difusão em N , logo pelo Teorema anterior $\Gamma^N(F_*L) = 0$, isto é, F é L -harmônica. \square

Como consequência imediata, temos que esta definição de aplicações L -harmônicas estende o conceito de aplicações harmônicas.

Corolário 2.8 *$F : M \rightarrow N$ é harmônica se, e somente se, F é $\frac{1}{2}\Delta$ -harmônica.*

Demonstração: Se F é harmônica então para todo movimento Browniano B_t em M , tem-se que $F(B_t)$ é um ∇^N -martingale em N , isto é, para toda difusão gerada por $\frac{1}{2}\Delta_M$, $F(B_t)$ é um ∇^N -martingale em N . Logo pelo Teorema 2.7 F é $\frac{1}{2}\Delta$ -harmônica.

Por outro lado, se F é $\frac{1}{2}\Delta_M$ -harmônica, então novamente pelo Teorema 2.7 toda difusão gerada por $\frac{1}{2}\Delta_M$, $F(B_t)$ é um ∇^N -martingale em N , isto é, todo movimento Browniano B_t em M , $F(B_t)$ é um ∇^N -martingale em N . Portanto segue que F é harmônica. \square

2.2 Teorema de Liouville, Picard, Elworthy e Dirichlet para Aplicações L -Harmônicas

Nesta seção, vamos estender para o contexto de aplicações L -harmônicas os Teoremas de Liouville, Picard, Elworthy e Dirichlet contidas nas referências [10], [11], [17], [34] e [36].

Definição 2.9 *Uma variedade Riemanniana completa M tem a propriedade de coupling para uma L -difusão se, para qualquer dois pontos $x, y \in M$, podemos construir sobre o mesmo espaço de probabilidade e para a mesma filtração, duas L -difusões X e Y começando respectivamente em x e y tal que:*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \text{ para algum } t \geq 0) = 1.$$

Teorema 2.10 *Seja M uma variedade Riemanniana completa, tal que todas as curvaturas de Ricci sejam não negativas. Então M possui a propriedade de coupling para L -difusão, onde $L = \frac{1}{2}\Delta_M + Z$, sendo Z um campo de vetores em M tal que $|Z(x)| \leq m$ para alguma constante positiva m , $x \in M$.*

Demonstração: Ver M. Cranston [6]. □

Exemplo 2.11 *O resultado acima não é válido, para qualquer operador elíptico. Por exemplo se considerarmos uma difusão X_t no plano começando em $x = (x_1, x_2)$, cujo gerador infinitesimal seja dado por $L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$, temos que, para pontos da forma, $y = (y_1, y_2)$ com $x_2 \neq y_2$, não existe uma outra L -difusão Y_t iniciando em y tal que*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \text{ para algum } t \geq 0) = 1.$$

Para o que se segue $L = \frac{1}{2}\Delta_M + Z$.

Teorema 2.12 *(Teorema de Liouville para aplicações L -harmônicas).*

Seja M uma variedade Riemanniana que possua a propriedade de coupling para difusão e $\mathcal{B}_r(p)$ uma bola geodésica regular em uma variedade Riemanniana completa N . Se $F : M \rightarrow \mathcal{B}$ é uma aplicação L -harmônica, então F é constante.

Demonstração: Dado um ponto arbitrário $x_0 \in M$, considere X uma L -difusão começando em x_0 , assim $Y = F(X)$ é um Γ -martingale em N , contido na bola geodésica regular $\mathcal{B}_r(p)$.

Agora pela Proposição A.1 temos que Y converge e por W. Kendall [36] esse limite Y_∞ é não aleatório, isto é, não depende do $\omega \in \Omega$. Assim pelo Teorema de Liouville para Γ -martingale Proposição A.2, Y é constante e não aleatório. Logo $Y_t = F(X_t) = F(x_0) = p$ para cada t . Assim provamos que para qualquer ponto em M sobre a difusão X tem sempre a mesma imagem.

Considere um ponto arbitrário $\tilde{x}_0 \neq x_0 \in M$ e tal que a difusão X não passe por \tilde{x}_0 . Seja \tilde{X} uma L -difusão começando em \tilde{x}_0 , que seja um coupling de X . Assim existe $T \in [0, \infty)$ tal que $\tilde{X}_T \equiv X_T$.

Agora utilizando os mesmos argumentos acima, temos que $\tilde{Y} = F(\tilde{X})$ é um Γ -martingale constante e não aleatório. Logo $F(\tilde{X}) = q$, para cada $t \geq 0$. Assim

$$F(\tilde{x}_0) = q = F(\tilde{X}_T) = F(X_T) = p = F(x_0).$$

Portanto, F é constante. □

Teorema 2.13 (*Teorema de Picard para aplicações L -harmônicas*).

Seja M uma variedade Riemanniana com curvatura de Ricci não negativa e seja N uma variedade Riemanniana com curvatura sectional limitada superiormente por uma constante negativa $-h^2 < 0$. Se $F : M \rightarrow N$ é L -harmônica e com dilatação limitada, então F é constante.

Demonstração:

Tome dois pontos arbitrários $x_0 \neq y_0 \in M$. Agora como M tem curvatura de Ricci não negativa, temos pelo Teorema 2.10, que M possui a propriedade de coupling para difusão, assim dada uma L -difusão X começando em x_0 , podemos construir uma L -difusão Y começando em y_0 , tal que $X_t = Y_t$ para algum $t \in [0, \infty)$. Usando o fato de que F é L -harmônica e o Teorema A.9 (veja o apêndice), temos que $F(X)$ e $F(Y)$ são Γ -martingales de dilatação limitada em N com

$$\mathbb{P}\{F(X_t) = F(Y_t), \text{ para algum } t\} = 1,$$

pois $X_t = Y_t$ para algum $t \in [0, \infty)$.

Agora se $F(X_0) \neq F(Y_0)$ teremos uma contradição com o Teorema A.10.

Portanto $F(x_0) = F(X_0) = F(Y_0) = F(y_0)$, pela arbitrariedade de $x_0, y_0 \in M$ segue que F é constante. \square

O próximo resultado é um tipo de fatoração de Elworthy [17], mas agora para o caso de aplicações L -harmônicas e L -difusões.

Teorema 2.14 (*Fatoração de Elworthy para aplicações L -harmônicas*)

Sejam N uma variedade Riemanniana completa simplesmente conexa com curvatura limitada superiormente por uma constante negativa $-h^2$. Se M_1 é uma variedade Riemanniana que possua curvatura de Ricci não negativa, e M_2 é uma variedade Riemanniana qualquer. Se a aplicação $F : M_1 \times M_2 \rightarrow N$ é L -harmônica, de dilatação limitada e tem uma fatoração própria como indicada no diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times M_2 & \xrightarrow{F} & N \\ \pi_2 \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \\ M_2 & & \end{array}$$

Então a aplicação induzida $\tilde{F} : M_2 \rightarrow N$ é L -harmônica, onde $\pi_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$ é a projeção.

Demonstração:

Como M_1 , tem curvatura de Ricci não negativa, temos pelo Teorema 2.10, que M_1 possui a propriedade de coupling para difusão, assim construímos difusões X e \tilde{X} começando em x_0 e \tilde{x}_0 tal que X esteja em coupling com \tilde{X} .

Agora tome uma difusão Y em M_2 começando em $y_0 \in M_2$. Assim os processos (X, Y) e (\tilde{X}, Y) são difusões em $M_1 \times M_2$ começando respectivamente em (x_0, y_0) e (\tilde{x}_0, y_0) tal que (X, Y) está em coupling com (\tilde{X}, Y) .

Usando a hipótese de que $F : M_1 \times M_2 \rightarrow N$ é L -harmônica, de dilatação limitada, segue-se que $F(X, Y)$ e $F(\tilde{X}, Y)$ são Γ -martingales de dilatação limitada e pelo Teorema de Picard acima tem-se $F(x_0, y_0) = F(\tilde{x}_0, y_0)$.

Isto mostra que \tilde{F} está bem definida, onde $F = \tilde{F} \circ \pi_2$. Além disso, para qualquer L -difusão Y em M_2 temos que o Γ -martingale

$$\tilde{F}(Y) = (\tilde{F} \circ \pi_2)(X, Y) = F(X, Y) = \Gamma\text{-martingale.}$$

Portanto pelo Teorema 2.7, \tilde{F} e L -harmônica. \square

Agora vamos estender o Teorema de unicidade de Dirichlet para o contexto de aplicações L -harmônicas.

Teorema 2.15 (*Unicidade do Problema de Dirichlet para aplicações L -harmônicas*).

Sejam M uma variedade Riemanniana compacta com fronteira ∂M , N uma variedade Riemanniana simplesmente conexa com curvatura de sectional não positiva e $F, G : M \rightarrow N$, L -harmônicas tais que $F = G$ na fronteira ∂M . Então $F = G$ em todo M .

Demonstração:

Primeiramente vamos provar o resultado para uma bola geodésica regular $\mathcal{B} \subset N$.

Seja $x \in M$ um ponto arbitrário de M , vamos mostrar que $F(x) = G(x)$. Dada um L -difusão X_t em M começando em x , temos pela hipótese de F ser L -harmônica que $F(X_t)$ e $G(X_t)$ são dois Γ -martingale em \mathcal{B} .

Além disso, no tempo T tal que $X_T \in \partial M$, tem-se que $F(X_T) = G(X_T)$, logo pelo Teorema A.3, tem-se que, $F(x) = G(x)$.

Agora basta observar que dado uma L -difusão X_t em M começando em x , $F(X_t)$ e $G(X_t)$ são Γ -martingales na região compacta $F(M) \cup G(M) \subset N$.

Portanto, usando a compacidade segue o resultado. \square

Teorema 2.16 *Seja $F : M \rightarrow \mathcal{B} \subset N$ uma aplicação mensurável definida em uma variedade Riemanniana com bordo a valores em uma bola geodésica de uma variedade Riemanniana N . Suponha que F seja L -harmônica. Então F é contínua no interior de M*

Demonstração:

Seja uma L -difusão X_1 começando em m_1 . Dado um ponto arbitrário $m_2 \in M$, considere a L -difusão X_2 começando em m_2 que seja coupling de X_1 e adaptado a filtração dada pela σ -álgebra gerada por X_1 , assim existe um tempo $T < \infty$ onde X_1 e X_2 se encontram.

Tome uma aplicação Ψ como no Lema A.7 (veja o apêndice), assim utilizando o fato de que F é L -hamônica tem-se que $F(X_1)$ e $F(X_2)$ são Γ -martingales, e

utilizando a convexidade de Ψ obtemos que o processo $Z = \Psi(F(X_1), F(X_2))$, é um submartingale limitado e não negativo, e pelo Lema A.5 o processo $(F(X_1), F(X_2))$ é um Γ -martingale em $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$.

Se $F(m_1) \neq F(m_2)$, então $Z(0) = \Psi(F(m_1), F(m_2)) > 0$ e pela propriedade de submartingale

$$Z(0) \leq \mathbb{E}[Z(T \wedge 1)] = \mathbb{E}[Z(1); T > 1].$$

Agora $Z(1)$ é limitada pelo $\sup \Psi$ assim

$$\Psi(F(m_1), F(m_2)) = Z(0) \leq (\sup \Psi) \mathbb{P}[T > 1].$$

O resultado segue se mostramos que $\mathbb{P}[T > 1] \rightarrow 0$ quando $m_2 \rightarrow m_1$ em M , pois neste caso, isto implica que, $\Psi(F(m_1), F(m_2)) \rightarrow 0$ e então pelo Lema A.7 podemos concluir que $F(m_1) \rightarrow F(m_2)$.

Essa convergência desejada segue da construção do coupling X_2 da difusão X_1 feita em M. Cranston [6]. \square

Podemos caracterizar probabilisticamente uma solução da equação “generalizada do calor”.

Teorema 2.17 *Seja M uma variedade Riemanniana e $F : M \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável. Então F é uma solução da equação generalizada do calor $\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = LF(x, t)$ se, e somente se, para toda L -difusão X_t , $F(X_t, T - t)$ é um martingale.*

Demonstração:

Seja $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma carta local, denotaremos por

$\mathbf{x}^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $\mathbf{x}^i(x^1, \dots, x^n) = x^i$

$\mathbf{x}^i \mathbf{x}^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $\mathbf{x}^i \mathbf{x}^j(x^1, \dots, x^n) = x^i x^j$.

Assim se $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma carta local em M , temos que as funções $f_i := \mathbf{x}^i \circ \varphi$ e $f_{ij} := \mathbf{x}^i \mathbf{x}^j \circ \varphi$ são diferenciáveis em $U \subset M$.

Considere $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$ uma L -difusão escrita nessa carta local de modo que

$$X_0 = (0, \dots, 0) \quad e \quad L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Observe que

$$L(f_i) = b^i \quad e \quad L(f_{ij}) = \frac{1}{2}a^{ij}.$$

além disso, como X_t é uma L -difusão temos para cada $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)ds = \text{martingale local}.$$

Em particular para f_i , temos

$$X_t^i - X_0^i - \int_0^t L(\mathbf{x}^i(X_s))ds = \text{martingale local},$$

Logo,

$$dX_t^i = L\mathbf{x}^i(X_t)dt + d\langle \text{martingale local} \rangle \quad (2.8)$$

Repetindo o procedimento acima, mas agora com f_{ij} temos,

$$X_t^i X_t^j - X_0^i X_0^j - \int_0^t Lf_{ij}(X_s)ds = \text{martingale local},$$

Portanto, pelo Teorema 1.3 tem-se $\int_0^t Lf_{ij}(X_s)ds = \langle X^i, X^j \rangle_t$, isto é,

$$d\langle X^i, X^j \rangle_t = Lf_{ij}(X_t)dt \quad (2.9)$$

Pela fórmula de Itô temos que:

$$\begin{aligned} F(X_t, T-t) &= F(X_0, T) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s, T-s)dX_s^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s, T-s)d\langle X^i, X^j \rangle_s + \int_0^t -\frac{\partial F}{\partial t}(X_s, T-s)ds \end{aligned}$$

Usando as equações (2.8) e (2.9) obtemos

$$\begin{aligned} F(X_t, T-t) - F(X_0, T) &= \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s, T-s)[Lf_i(X_s)ds + d\langle \text{martingale local} \rangle] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s, T-s)Lf_{ij}(X_s)ds + \int_0^t -\frac{\partial F}{\partial t}(X_s, T-s)ds \\ &= \text{martingale} + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s, T-s)b^i(X_s)ds \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s, T-s)a^{ij}(X_s)ds + \int_0^t -\frac{\partial F}{\partial t}(X_s, T-s)ds \end{aligned}$$

$$= \text{martingale} + \int_0^{T-t} LF(X_s, s)ds + \int_0^{T-t} -\frac{\partial F}{\partial s}(X_s, s)ds$$

Mas por hipótese $\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = LF(x, t)$. Portanto $F(X_t, T - t)$ é um martingale.

Para a recíproca, suponha agora que $F(X_t, T - t)$ é um martingale para toda L -difusão X_t , então:

Pela fórmula de Itô, a parte de variação limitada tem que ser zero, isto é,

$$\int_0^t LF(X_s, T - s)ds + \int_0^t -\frac{\partial F}{\partial t}(X_s, T - s)ds = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Portanto, $\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = LF(x, t)$. □

CAPÍTULO 3

MARTINGALES DEPENDENDO DIFERENCIAVELMENTE DE UMA FAMÍLIA DE CONEXÕES

Aqui inicia-se a segunda parte da tese, cujo objetivo é estudar processos estocástico que dependem diferenciavelmente de uma família de “objetos” que variam diferenciavelmente com o tempo. Neste capítulo vamos estudar martingales que dependem diferenciavelmente de uma família Λ de conexões afins, no qual intitulamos Λ -martingales. Daremos uma caracterização dos Λ -martingales e algumas fórmulas de integração para esse tipo de processo, tais como uma fórmula de conversão Stratonovich-Itô e uma fórmula geométrica de Itô. Além disso, apresentaremos uma caracterização dos Λ -martingales em fibrados principais e fibrados de bases.

3.1 Λ -Martingales

No caso em que a conexão é fixa, M. Emery [18] e P. A. Meyer [43] mostrou as seguintes fórmulas de conversão de Stratonovich-Itô,

$$\int_0^t \alpha \circ dX_s = \int_0^t \alpha_i(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(X_s) d \langle X^i, X^j \rangle_s,$$

$$\int_0^t \alpha d^\nabla X_s = \int_0^t \alpha_i(X_s) (dX_s^i + \frac{1}{4} (\Gamma_{jk}^i + \Gamma_{kj}^i)(X_s) d \langle X^j, X^k \rangle_s)$$

onde Γ_{jk}^i são os símbolos de Christoffel, X_t é um semimartingale em M e α é um 1-forma em M .

Além disso, as seguintes fórmulas de transformação para as integrais de Stratonovich e a integral quadrática são bem conhecidas do cálculo estocástico, ver por exemplo M. Emery [18] e E. Hsu [24].

Sejam M e N variedades diferenciáveis, α uma seção de TN^* , b uma seção de $T^{(2,0)}N$ e $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável.

$$\int_0^t \alpha \circ dF(X) = \int_0^t F^* \alpha \circ dX \quad (3.1)$$

e

$$\int_0^t b(dF(X), dF(X)) = \int_0^t F^* b(dX, dX). \quad (3.2)$$

onde $F^* \alpha \in TM^*$ e $F^* b \in T^{(0,2)}M$ representam o pull-back de α e b respectivamente. No caso de M e N estejam munidas com conexões ∇ e ∇' respectivamente, temos a seguinte fórmula geométrica de Itô, ver P. Catuogno [5]:

$$\int \alpha d^{\nabla'} F(X) = \int F^* \alpha d^{\nabla} X + \frac{1}{2} \int \beta_F^* \alpha(dX, dX) \quad (3.3)$$

onde β_F é a segunda forma fundamental de F . Para as integrais Itô temos a seguinte fórmula de transformação.

Agora mostraremos estas fórmulas de conversão de Stratonovich-Itô e a fórmula geométrica de Itô, para o contexto em que a variedade diferenciável M está munida de uma família de conexões $\Lambda = \{\nabla(t); t \in [0, T]\}$ de classe $C^{1,1}([0, T] \times M)$.

Definição 3.1 *Seja $(\Omega, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade filtrado e M uma variedade diferenciável munida de uma família de conexões $\Lambda = \{\nabla(t); t \in [0, T]\}$ de classe $C^{1,1}([0, T] \times M)$. Um semimartingale X em M é dito um Λ -martingale ou $\nabla(t)$ -martingale, se para qualquer $\alpha \in \Gamma(TM^*)$ a integral de Itô $\int \alpha d^\Lambda X$ é um martingale local.*

Proposição 3.2 *Seja M uma variedade diferenciável munida de uma família de conexões $\Lambda = \{\nabla(t); t \in [0, T]\}$ de classe $C^{1,1}([0, T] \times M)$ e α uma seção de TM^* . Então vale a seguinte fórmula de conversão Stratonovich-Itô:*

$$\int_0^t \alpha \circ d^\Lambda X_s = \int_0^t \alpha d^\Lambda X_s + \frac{1}{2} \int_0^t \nabla(s) \alpha(dX_s, dX_s). \quad (3.4)$$

Demonstração: Seja (U, x^i) um sistema de coordenadas local de M . Observamos que se $\alpha_x = \alpha_i(x) dx^i$ então

$$\nabla(s) \alpha = \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} - \frac{1}{2} (\Gamma_{jk}^i(s) + \Gamma_{kj}^i(s)) \right) dx^j \odot dx^k.$$

Aplicando as definições, temos que

$$\begin{aligned}
\alpha \circ dX_s &= \alpha_i(X_s)dX_s^i + \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(X_s) d \langle X^i, X^j \rangle_s \\
&= \alpha_i(X_s)(dX_s^i + \frac{1}{4}(\Gamma_{jk}^i(s) + \Gamma_{kj}^i(s))(X_s)d \langle X^j, X^k \rangle_s) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(X_s) - \frac{1}{2}(\Gamma_{jk}^i(s) + \Gamma_{kj}^i(s))(X_s))d \langle X^j, X^k \rangle_s \\
&= \alpha d^\Lambda X_s + \frac{1}{2} \nabla(s) \alpha(dX_s, dX_s).
\end{aligned}$$

□

Dada uma variedade diferenciável M munida de uma família de conexões afins $\Lambda = \{\nabla(t); t \in [0, T]\}$ de classe $C^{1,1}([0, T] \times M)$ e $f \in C^\infty(M)$, podemos definir o Λ -Hessiano de f ou $Hess(s)f$ como sendo uma seção de $T^{(2,0)}M$ definida por

$$Hess(s)f = \nabla(s)df.$$

Proposição 3.3 *Sejam M e N variedades diferenciáveis providas respectivamente de uma família de conexões $\Lambda = \{\nabla(t); t \in [0, T]\}$ e $\Lambda' = \{\nabla'(t); t \in [0, T]\}$ ambas de classe $C^{1,1}([0, T] \times M)$ e $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Então para qualquer seção α de TN^* temos a seguinte fórmula geométrica de Itô:*

$$\int_0^t \alpha d^{\Lambda'} F(X_s) = \int_0^t F^* \alpha d^\Lambda X_s + \frac{1}{2} \int_0^t \beta_{\Lambda, \Lambda'} F(s)^* \alpha (dX_s, dX_s), \quad (3.5)$$

onde $\beta_{\Lambda, \Lambda'} F(s)$ é a segunda forma fundamental de F em relação a $\nabla(s)$ e $\nabla'(s)$.

Demonstração: Aplicando a fórmula de conversão Stratonovich-Itô e as fórmulas de transformação para as integrais de Stratonovich e quadrática, temos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \alpha d^{\Lambda'} F(X_s) &= \int_0^t \alpha \circ d^{\Lambda'} F(X_s) - \frac{1}{2} \int_0^t \nabla'(s) \alpha (dF(X_s), dF(X_s)) \\
&= \int_0^t F^* \alpha \circ d^\Lambda X_s - \frac{1}{2} \int_0^t F^* \nabla'(s) \alpha (dX_s, dX_s) \\
&= \int_0^t F^* \alpha d^\Lambda X_s + \frac{1}{2} \int_0^t (\nabla(s) F^* \alpha - F^* \nabla'(s) \alpha) (dX_s, dX_s) \\
&= \int_0^t F^* \alpha d^\Lambda X_s + \frac{1}{2} \int_0^t \beta_{\Lambda, \Lambda'} F(s)^* \alpha (dX_s, dX_s).
\end{aligned}$$

□

A proposição a seguir caracteriza os Λ -martingale e mostra a equivalência entre nossa definição de Λ -martingale e a definição de $\nabla(t)$ -martingale de A. Thalmaier [20].

Proposição 3.4 *Seja M uma variedade diferenciável munida de uma família de conexões $\Lambda = \{\nabla(t); t \in [0, T]\}$ de classe $C^{1,1}([0, T] \times M)$ e X um semimartingale contínuo com valores em M . Então X é um Λ -martingale se, e somente se, para qualquer $f \in C^\infty(M)$,*

$$f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \text{Hess}(s)f (dX_s, dX_s)$$

é um martingale local.

Demonstração:

Se X é um Λ -martingale, aplicando a fórmula de conversão temos que

$$f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \text{Hess}(s)f (dX_s, dX_s) = \int_0^t df d^\Lambda X_s.$$

Que por hipótese é um martingale local.

Reciprocamente, consideramos α uma 1-forma em M . Seja (U, x^i) um sistema de coordenadas local em M . Em relação a este sistema de coordenadas temos que a 1-forma α pode ser escrita como $\alpha_x = \alpha_i(x)dx^i$. Observamos que por hipótese

$$X_t^i - X_0^i - \frac{1}{2} \int_0^t \text{Hess}(r)x^i (dX_r, dX_r)$$

é um martingale local. Logo

$$\int_0^t \alpha d^\Lambda X_s = \int_0^t \alpha_i(X_s) d^\Lambda (X_s^i - X_0^i - \frac{1}{2} \int_0^s \text{Hess}(r)x^i (dX_r, dX_r))$$

é um martingale local. □

3.2 Λ -Martingales em Fibrados

Nesta seção passaremos para o contexto de Λ -martingales os resultados de P. Cattogno e S. Stelmastchuk [50], que traz caracterizações de ∇^c e ∇^h -martingales em fibrados de bases. Além disso, apresentaremos uma caracterização dos Λ -martingales em fibrados principais.

Existem várias maneiras de estender uma conexão ∇ de M para $\mathcal{O}(M)$. Estamos particularmente interessados no levantamento canônico ∇^c e no levantamento horizontal ∇^h . O levantamento canônico e horizontal de uma conexão linear de M para $\mathcal{F}(M)$ foi introduzida e estudada por Cordero e De Leon em [37]. Seja $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e $A, B \in gl(n)$. Considerando, A^* o vetor vertical em $\mathcal{O}(M)$ dado por

$$A^*(u) = \frac{d}{dt}(u \exp(tA))|_{t=0}.$$

com $u \exp(tA)$ a curva em $\mathcal{O}(M)$ que em $t = 0$ passa por u . E considerando X^H o levantamento horizontal do campo $A \in \mathcal{X}(M)$, tem-se que o levantamento canônico ∇^c e o levantamento horizontal ∇^h são completamente definidos pelas relações:

$$\begin{cases} \nabla_{A^*}^c B_p^* = (AB)_p^* \\ \nabla_{A^*}^c X_p^H = (p \circ T(\cdot, X) \circ p^{-1} \circ A)_p^* \\ \nabla_{X^H}^c B_p^* = 0 \\ \nabla_{X^H}^c Y_p^H = (\nabla_X Y)_p^H + \gamma(R(\cdot, X)Y - (\nabla_X T)(Y, \cdot))_p \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} \nabla_{A^*}^h B_p^* = (AB)_p^* \\ \nabla_{A^*}^h X_p^H = (p \circ T(\cdot, X) \circ p^{-1} \circ A)_p^* \\ \nabla_{X^H}^h B_p^* = 0 \\ \nabla_{X^H}^h Y_p^H = (\nabla_X Y)_p^H \end{cases} \quad (3.7)$$

Teorema 3.5 *Seja M uma variedade diferenciável munida de uma família de conexões simétricas $\{\nabla(t)\}_{t \in [0, T]}$ e U_t um semimartingale em $\mathcal{F}(M)$. Se $\pi \circ U_t$ é um $\nabla(t)$ -martingale em M , então U_t é um $\nabla^h(t)$ -martingale em $\mathcal{F}(M)$.*

Demonstração:

Seja $\eta \in \Gamma(T\mathcal{F}(M)^*)$. Uma vez que o C^∞ -módulo $\Gamma(T\mathcal{F}(M)^*)$ é gerado por ω e pelas formas diferenciáveis $\pi^* \alpha \in \Gamma(TM^*)$, temos que η é uma combinação linear das formas diferenciáveis $f\pi^* \alpha$ e $h\omega$ com $f, h \in C^\infty(\mathcal{F}(M))$. Como para cada $t \in [0, T]$,

$$\int h\omega d^{\nabla^h(t)}U = \int h(U)d\left(\int \omega d^{\nabla^h(t)}U\right)$$

é um martingale local que satisfaz

$$\int f\pi^* \alpha d^{\nabla^h(t)}U = \int f(U)d\left(\int \pi^* \alpha d^{\nabla^h(t)}U\right)$$

Para mostrar que $\int \eta d^{\nabla^h(t)}U$, é um martingale local é suficiente mostrar que

$$\int \pi^* \alpha d^{\nabla^h(t)}U, \text{ é um martingale local.}$$

Analisando, a fórmula geométrica de Itô, junto com o fato de que $\beta_\pi = 0$ temos

$$\int \pi^* \alpha d^{\nabla^h(t)} U = \int \alpha d^{\nabla(t)} (\pi \circ U)$$

mas $\pi \circ U = X$, é por hipótese um $\nabla(t)$ -martingale, logo

$$\int \alpha d^{\nabla} (\pi \circ U) \text{ é um martingale local.}$$

Portanto o $\nabla(t)$ -levantamento horizontal estocástico U_t é um $\nabla^h(t)$ -martingale em $\mathcal{F}(M)$. \square

O objetivo agora é obter uma caracterização dos Λ^P -martingales em fibrados principais. Seja $P(M, G)$ um fibrado principal sobre M com grupo G e projeção $\pi : P \rightarrow M$. Para o que se segue utilizaremos as notações expostas no primeiro capítulo seção 1.1 e para detalhes consulte S. Kobayashi and N. Nomizu [48].

Lema 3.6 *Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal, ω uma forma de conexão de $P(M, G)$ e ∇^P uma conexão projetável em $P(M, G)$. Se X e Y são campos em M e $B, C \in \mathfrak{g}$, então valem as seguintes equações:*

$$\begin{cases} T_{B^*} C^* &= T_{C^*} B^* \\ T_{B^*} X^h &= \omega(\nabla_{X^h}^P B^*)^* \\ A_{X^h} Y^h &= -2\Omega(X^h, Y^h)^* + A_{Y^h} X^h \\ A_{X^h} B^* &= \nabla_{X^h}^P B^* - \omega(\nabla_{X^h}^P B^*)^* + [X^h, B^*] \end{cases} \quad (3.8)$$

e

$$\begin{cases} \nabla_{B^*}^P C^* &= \widehat{\nabla}_{B^*} C^* + T_{B^*} C^* \\ \nabla_{B^*}^P X^h &= \mathbf{h} \nabla_{B^*}^P X^h + T_{B^*} X^h \\ \nabla_{X^h}^P B^* &= \mathbf{v} \nabla_{X^h}^P B^* + A_{X^h} B^* \\ \nabla_{X^h}^P Y^h &= \mathbf{h} \nabla_{X^h}^P Y^h + A_{X^h} Y^h, \end{cases} \quad (3.9)$$

onde $\widehat{\nabla}$ é a conexão induzida por ∇^P nas fibras.

A partir de (3.8) temos que a distribuição horizontal $\{H_p P : p \in P\}$ é integrável se e somente se $A_{X^h} Y^h = A_{Y^h} X^h$ para quaisquer X e Y campos em M .

Teorema 3.7 *Seja $P(M, G)$ um fibrado principal, ω uma forma conexão em P e $\Lambda^P = \{\nabla^P(t); t \in [0, T]\}$ uma família de conexões em P projetáveis para cada $t \in [0, T]$, com projeção $\nabla^M(t)$. Seja Y um semimartingale contínuo com valores em P . Então Y é um Λ^P -martingale se, e somente se,*

$$\int \omega \circ dY - \frac{1}{2} \int (\nabla^P(t)\omega)(dY, dY) \quad (3.10)$$

é um martingale local e

$$\int \alpha d^{\Lambda^P}(\pi \circ Y) + \frac{1}{2} \int \alpha \circ \pi_* \circ (2A^S + T^S)(dY, dY) \quad (3.11)$$

é um martingale local para cada $\alpha \in \Gamma(T^*M)$.

Demonstração: Seja Y um Λ^P -martingale. Utilizando a fórmula de conversão Itô-Stratonovich (3.4), temos

$$\int \omega \circ dY = \int \omega d^{\Lambda^P} Y + \frac{1}{2} \int (\nabla^P(t)\omega)(dY, dY).$$

Como $\int \omega d^{\Lambda^P} Y$ é um martingale local, temos que

$$\int \omega \circ dY - \frac{1}{2} \int (\nabla^P(t)\omega)(dY, dY)$$

é um martingale local. Agora para provar (3.11), tome $\alpha \in \Gamma(T^*M)$. E verifique que

$$\beta_\pi^* \alpha = \alpha \circ \beta = -\alpha \circ \pi_* \circ (2A^S + T^S). \quad (3.12)$$

Combinando a identidade acima com a fórmula geométrica de Itô (3.5) podemos concluir que

$$\int \alpha d^{\Lambda^P}(\pi \circ Y) + \frac{1}{2} \int \alpha \circ \pi_* \circ (2A^S + T^S)(dY, dY) = \int \pi^* \alpha d^{\Lambda^P} Y$$

é martingale local.

Reciprocamente, tome $\eta \in \Gamma(T^*P)$. Novamente usando o argumento de que o C^∞ -módulo $\Gamma(T^*P)$ é gerado por ω e pelas formas diferenciáveis $\pi^* \alpha \in \Gamma(T^*M)$, temos que η é uma combinação linear das formas diferenciáveis $f\pi^* \alpha$ e $h\omega$ com $f, h \in C^\infty(P)$. Como para cada $t \in [0, T]$,

$$\int h\omega d^{\Lambda^P} Y = \int h(Y) d\left(\int \omega d^{\Lambda^P} Y\right)$$

é um martingale local que satisfaz

$$\int f\pi^* \alpha d^{\Lambda^P} Y = \int f(Y) d\left(\int \pi^* \alpha d^{\Lambda^P} Y\right)$$

Para mostrar que $\int \eta d^{\Lambda^P} Y$, é um martingale local é suficiente mostrar que $\int \pi^* \alpha d^{\Lambda^P} Y$, é um martingale local. Aplicando a fórmula geométrica de Itô temos

$$\begin{aligned} \int \pi^* \alpha d^{\Lambda^P} Y &= \int \alpha d^{\Lambda^P}(\pi \circ Y) - \frac{1}{2} \int \beta_\pi^* \alpha(dY, dY) \\ &= \int \alpha d^{\Lambda^P}(\pi \circ Y) + \frac{1}{2} \int \alpha \circ \pi_* \circ (2A^S + T^S)(dY, dY) \end{aligned}$$

E isto completa a demonstração. \square

CAPÍTULO 4

MOVIMENTO BROWNIANO DEPENDENDO DIFERENCIAVELMENTE DE UMA FAMÍLIA DE MÉTRICAS RIEMANNIANAS

Neste capítulo vamos estudar o \mathbf{g} -movimento Browniano, vamos apresentar uma definição alternativa ao de A. Coulibaly, para o \mathbf{g} -movimento Browniano e com isso ganharemos algumas fórmulas de integração para esse tipo de processo estocástico. Uma outra contribuição foi de apresentar uma caracterização do \mathbf{g} -movimento Browniano utilizando a construção via mergulho isométrico, onde esta construção foi feita originalmente por C. Justo e D. Ledesma em [27]. Finalizaremos o capítulo introduzindo o conceito de $L(t)$ -difusão e de transporte paralelo estocástico ao longo desse processo.

4.1 \mathbf{g} -Movimento Browniano

Passemos para o caso em que $\Lambda_{\mathbf{g}} = \{\nabla^{\mathbf{g}}(t); t \in [0, T]\}$ é uma família das conexões de Levi-Civita associadas a uma família de métricas Riemannianas $\mathbf{g} = \{g(t); t \in [0, T]\}$ de classe $C^{1,2}([0, T] \times M)$.

Definição 4.1 *Seja M uma variedade diferenciável munida de uma família de métricas Riemannianas $\mathbf{g} = \{g(t); t \in [0, T]\}$ de classe $C^{1,2}([0, T] \times M)$. Denotamos por $\Lambda_{\mathbf{g}} = \{\nabla^{\mathbf{g}}(t); t \in [0, T]\}$ a família das conexões de Levi-Civita associadas com a família de métricas \mathbf{g} . Seja B um semimartingale contínuo com valores em M . Dizemos que B é um \mathbf{g} -Movimento Browniano ou $g(t)$ -movimento Browniano, se B*

é um $\Lambda_{\mathbf{g}}$ -martingale e para qualquer seção b de $T^{(2,0)}M$ temos que

$$\int_0^t b(dB_s, dB_s) = \int_0^t \text{tr}(s)b(B_s)ds, \quad (4.1)$$

onde $\text{tr}(s)b$ é o traço de b em respeito a métrica Riemanniana $g(s)$.

Para cada $f \in C^\infty(M)$ definimos o Laplaciano de f em relação a família de métricas Riemannianas $\mathbf{g} = \{g(t); t \in [0, T]\}$, denotado por $\Delta^{\mathbf{g}}(s)f$ como sendo o traço de $\text{Hess}(s)f$ com respeito a $g(s)$.

Esta definição é uma espécie de “caracterização de Lévy”, para \mathbf{g} -Movimento Browniano. Além disso, é fácil ver que no caso em que a família de métricas Riemannianas é constante, o \mathbf{g} -movimento Browniano em M é um movimento Browniano na variedade. Como o \mathbf{g} -movimento Browniano depende da maneira em que a métrica Riemanniana evolui com o tempo, geometricamente isso significa que o \mathbf{g} -movimento Browniano depende de como a variedade está sendo deformada ao longo do tempo.

A proposição a seguir mostra que a nossa definição de \mathbf{g} -Movimento Browniano é equivalente a definição de $g(t)$ -Movimento Browniano de Coulibaly [30].

Proposição 4.2 *Seja M uma variedade diferenciável munida de uma família de métricas Riemannianas $\mathbf{g} = \{g(t); t \in [0, T]\}$ de classe $C^{1,2}([0, T] \times M)$ e B um semimartingale contínuo. Então B é um \mathbf{g} -Movimento Browniano se, e somente se, para qualquer $f \in C^\infty(M)$,*

$$f(B_t) - f(B_0) - \int_0^t \frac{1}{2} \Delta^{\mathbf{g}}(s)f(B_s) ds$$

é um martingale local.

Demonstração: Assumimos que B é um \mathbf{g} -Movimento Browniano e $f \in C^\infty(M)$. Como B é um $\Lambda_{\mathbf{g}}$ -martingale, temos que

$$f(B_t) - f(B_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \text{Hess}(s)f(dB_s, dB_s)$$

é um martingale local. Por hipótese temos que

$$\int_0^t \text{Hess}(s)f(dB_s, dB_s) = \int_0^t \text{tr}(s)\text{Hess}(s)f(B_s) ds.$$

Concluimos que

$$f(B_t) - f(B_0) - \int_0^t \frac{1}{2} \Delta^{\mathbf{g}}(s) f(B_s) ds$$

é um martingale local.

Para a recíproca é claro que B é um $\Lambda_{\mathbf{g}}$ -martingale. Como

$$\Delta^{\mathbf{g}}(s) f^2 = 2f \Delta^{\mathbf{g}}(s) f + 2tr(s) df \otimes df,$$

resulta que

$$f^2(B_t) - f^2(B_0) - \int_0^t f(B_s) \Delta^{\mathbf{g}}(s) f(B_s) ds - \int_0^t tr(s) (df \otimes df)(B_s) ds \quad (4.2)$$

é um martingale local.

Por outro lado aplicando diretamente a fórmula de Itô, temos que

$$f^2(B_t) - f^2(B_0) = 2 \int_0^t f(B_s) df(B_s) + \langle f(B), f(B) \rangle_t$$

Aplicando a hipótese obtemos que

$$f^2(B_t) - f^2(B_0) - \int_0^t f(B_s) \Delta^{\mathbf{g}}(s) f(B_s) ds - \langle f(B), f(B) \rangle_t \quad (4.3)$$

é um martingale local. Comparando (4.2) e (4.3) via a decomposição de Doob-Meyer, obtemos que

$$\langle f(B), f(B) \rangle_t = \int_0^t tr(s) (df \otimes df)(B_s) ds.$$

Para finalizar a prova, é suficiente observar que podemos estender a identidade a todas as seções de $T^{(2,0)}M$ por polarização. \square

Combinando (3.1) com (4.1), obtemos a seguinte generalização da fórmula de Manabe:

Corolário 4.3 *Seja M uma variedade diferenciável munida de uma família de métricas Riemannianas $\mathbf{g} = \{g(t); t \in [0, T]\}$ de classe $C^{1,2}([0, T] \times M)$ e B um \mathbf{g} -Movimento Browniano. Então para cada α seção de TM^* , temos que*

$$\int_0^t \alpha \circ dB = \int_0^t \alpha d\Lambda^{\mathbf{g}} B + \frac{1}{2} \int_0^t d_{\mathbf{g}}^*(s) \alpha(B_s) ds, \quad (4.4)$$

onde $d_{\mathbf{g}}^*(s)$ é o adjunto da diferencial exterior em relação a $g(s)$.

Definição 4.4 *Sejam M uma variedade diferenciável munida de uma família de métricas Riemannianas $\mathbf{g} = \{g(t); t \in [0, T]\}$ de classe $C^{1,2}([0, T] \times M)$, N uma variedade diferenciável munida de uma família de conexões $\Lambda_{\mathbf{g}} = \{\nabla(t); t \in [0, T]\}$ de classe $C^{1,1}([0, T] \times M)$ e $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. A tensão de F em relação a \mathbf{g} e Λ , $\tau_{\mathbf{g}, \Lambda} F$, é definida por*

$$\tau_{\mathbf{g}, \Lambda} F(s, x) = \text{tr}(s) \beta_{\Lambda_{\mathbf{g}}, \Lambda} F(s)(x). \quad (4.5)$$

Aplicando as fórmulas (3.5) e (4.1) resulta que se B é um \mathbf{g} -Movimento Browniano e α uma 1-forma de N ,

$$\int_0^t \alpha d^\Lambda F(B) = \int_0^t F^* \alpha d^{\Lambda_{\mathbf{g}}} B + \frac{1}{2} \int_0^t \tau_{\mathbf{g}, \Lambda} F(s)^* \alpha(B_s) ds. \quad (4.6)$$

Definição 4.5 *Dizemos que uma aplicação $F : M \rightarrow N$ é um aplicação (\mathbf{g}, Λ) -harmônica se $\tau_{\mathbf{g}, \Lambda} F = 0$.*

Observe que pela fórmula (4.6) temos que $F : M \rightarrow N$ é (\mathbf{g}, Λ) -harmônica se, e somente se, F transforma \mathbf{g} -Movimentos Brownianos em Λ -martingales.

Proposição 4.6 *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $F : M \times [0, T] \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Assumimos que M está munida de uma família de métricas Riemannianas $\mathbf{g} = \{g(t); t \in [0, T]\}$ de classe $C^{1,2}([0, T] \times M)$ e que N é munida de uma família de conexões $\Lambda_{\mathbf{g}} = \{\nabla(t); t \in [0, T]\}$ de classe $C^{1,1}([0, T] \times M)$. Então para todo \mathbf{g} -Movimento Browniano B e toda seção α de TN^* ,*

$$\int_0^t \alpha d^\Lambda F(B_s, T-s) = \int_0^t F_{T-s}^* \alpha d^{\Lambda_{\mathbf{g}}} B_s + \int_0^t \left(\frac{1}{2} \tau_{\mathbf{g}, \Lambda} F_{T-s} - \frac{dF_{T-s}}{dt} \right)^* \alpha(B_s) ds.$$

Demonstração: Aplicando a fórmula de conversão Stratonovich-Itô e a fórmula de transformação para a integral de Stratonovich,

$$\begin{aligned} \int_0^t \alpha d^\Lambda F(B_s, T-s) &= \int_0^t \alpha \circ dF(B_s, T-s) - \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^t \nabla(s) \alpha d(F(B_s, T-s), F(B_s, T-s)) \\ &= \int_0^t F^* \alpha \circ d(B_s, T-s) - \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^t F^* \nabla(s) \alpha d((B_s, T-s), (B_s, T-s)). \end{aligned}$$

Das definições, propriedades elementares da integral de Stratonovich e \mathbf{g} -Movimento Browniano junto com a fórmula de conversão Stratonovich-Itô,

$$\begin{aligned}
\int_0^t F^* \alpha \circ d(B_s, T-s) &= \int_0^t F_{T-s}^* \alpha \circ dB_s - \int_0^t F_{B_s}^* \alpha(T-s) ds \\
&= \int_0^t F_{T-s}^* \alpha d^{\Lambda_{\mathbf{g}}} B_s + \frac{1}{2} \int_0^t \nabla^{\mathbf{g}}(s) F_{T-s}^* \alpha(dB_s, dB_s) - \\
&\quad \int_0^t F_{B_s}^* \alpha(T-s) ds \\
&= \int_0^t F_{T-s}^* \alpha d^{\Lambda_{\mathbf{g}}} B_s + \frac{1}{2} \int_0^t \text{tr}(s) \nabla^{\mathbf{g}}(s) F_{T-s}^* \alpha ds - \\
&\quad \int_0^t F_{B_s}^* \alpha(T-s) ds.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_0^t F^* \nabla(s) \alpha d((B_s, T-s), (B_s, T-s)) &= \int_0^t F_{T-s}^* \nabla(s) \alpha d(B_s, B_s) \\
&= \int_0^t \text{tr}(s) F_{T-s}^* \nabla(s) \alpha ds.
\end{aligned}$$

Combinando as identidades anteriores, resulta que

$$\begin{aligned}
\int_0^t \alpha d^{\Lambda} F(B_s, T-s) &= \int_0^t F_{T-s}^* \alpha d^{\Lambda_{\mathbf{g}}} B_s + \\
&\quad \frac{1}{2} \int_0^t \text{tr}(s) (\nabla^{\mathbf{g}}(s) F_{T-s}^* - F_{T-s}^* \nabla(s)) \alpha ds - \\
&\quad \int_0^t F_{B_s}^* \alpha(T-s) ds.
\end{aligned}$$

□

Corolário 4.7 *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $F : M \times [0, T] \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Assuma que M está munida de uma família de métricas Riemannianas $\mathbf{g} = \{g(t); t \in [0, T]\}$ de classe $C^{1,2}([0, T] \times M)$ e que N está munida de uma família de conexões $\Lambda_{\mathbf{g}} = \{\nabla(t); t \in [0, T]\}$. Então F é uma solução da equação do calor*

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} \tau_{\mathbf{g}, \Lambda} F$$

se, e somente se, para todo \mathbf{g} -Movimento Browniano B , $\{F(B_t, T-t); t \in [0, T]\}$ é um $\Lambda_{\mathbf{g}}$ -martingale.

Sejam M_0 uma variedade diferenciável e N uma variedade Riemanniana com métrica g . Assumimos que $\dim M_0 + 1 = \dim N$. Uma aplicação diferenciável $F : M_0 \times [0, T] \rightarrow N$ é uma solução da equação do fluxo de curvatura média, se para cada $t \in [0, T]$, $F_t = F(t, \cdot) : M_0 \rightarrow N$ é um mergulho e

$$\begin{aligned}\partial_t F(x, t) &= H_\nu(F(x, t)) \\ F(0, x) &= F_0(x)\end{aligned}$$

onde $H_\nu(F(x, t))$ é o vetor de curvatura média da subvariedade $F(t, M_0)$ no ponto $F(t, x)$. O seguinte resultado de A. Coulibaly, segue imediatamente da Proposição anterior.

Corolário 4.8 *Sejam M_0 uma variedade diferenciável, N uma variedade Riemanniana com métrica g e $F : M \times [0, T] \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. F é uma solução da equação do fluxo de curvatura média se, e somente se, para todo \mathbf{g} -Movimento Browniano B temos que $\{F(T-t, B_t); t \in [0, T]\}$ é um ∇^g -martingale, onde \mathbf{g} é a família de métricas $\{F_t^* g; t \in [0, T]\}$ em M_0 .*

Demonstração: Observar que $H_\nu(F(x, t)) = \frac{1}{2} \tau_{\mathbf{g}, \nabla^g} F(x, t)$ e aplicar a Proposição anterior. \square

4.2 Construção do $g(t)$ -movimento Browniano via mergulho isométrico

Nesta seção apresentaremos uma construção extrínica do $g(t)$ -movimento Browniano em uma variedade Riemanniana, através de um mergulho isométrico, onde essa construção foi realizada originalmente na dissertação de mestrado de C. Justo [27]. Nossa contribuição será de mostrar uma maneira prática de encontrar os campos P_α^t que irão reger o $g(t)$ -movimento Browniano e de apresentar uma caracterização deste processo em termos do desenvolvimento e anti-desenvolvimento estocástico.

Para o que se segue, M é uma variedade Riemanniana conexa, de dimensão $n - 1$. Além disso, consideraremos em M , uma família $\{g(t)\}_{t \in [0, T]}$ de métricas Riemanniana de classe $C^{1,2}([0, T] \times M)$, uma família $\{\nabla(t)\}_{t \in [0, T]}$ de conexões de Levi-Civita com respeito a $\{g(t)\}_{t \in [0, T]}$ e $\{\Delta(t)\}_{t \in [0, T]}$ uma família de operadores de Laplace-Beltrami com respeito a $\{g(t)\}_{t \in [0, T]}$.

Considerando a variedade produto $M \times [0, T]$ com a métrica produto dada por:

$$g_* : T_{(x,t)}(M \times [0, T]) \times T_{(x,t)}(M \times [0, T]) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$((u, a), (v, b)) \mapsto g_t(u, v) + ab.$$

onde $u, v \in T_x M$ e a, b constantes positivas. Não é difícil verificar que g_* define uma métrica em $M \times [0, T]$. Considere

$$\varphi : (M \times [0, T], g_*) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

o mergulho isométrico, existente pelo Teorema de Nash.

Denotando $N = \varphi(M \times [0, T])$, $M_t = \varphi(M, t)$ e $p = \varphi(x, t)$ temos que N com a métrica induzida pelo \mathbb{R}^m é uma variedade Riemanniana e nessa variedade podemos considerar a projeção ortogonal $\tilde{P}_\xi(p)$ de um vetor $\xi \in \mathbb{R}^m$ em $T_p N$, e assim podemos considerar também a projeção ortogonal $P_\xi^t(p)$ de um vetor $\xi \in \mathbb{R}^m$ em $T_p M_t$ definido como sendo a projeção ortogonal de $\tilde{P}_\xi(p)$ em $T_p M_t$.

Portanto, dado a base canônica $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ do \mathbb{R}^m , temos para cada $t \in [0, T]$, m -campos $P_{e_\alpha}^t$ em M_t e considerando a equação diferencial estocástica em N

$$\begin{cases} dX_t = \sum_{\alpha=1}^m P_{e_\alpha}^t(X_t) \circ dB_t^\alpha \\ X_0 \in M_0. \end{cases} \quad (4.7)$$

onde, B_t é um movimento Browniano euclidiano m -dimensional, podemos observar que a solução X_t está em M_t para cada t .

Para fazer a construção do $g(t)$ -movimento Browniano precisaremos do seguinte resultado, que relaciona a Laplaciano da variedade produto N e a variedade $(M \times [0, T], g_*)$.

Teorema 4.9 *A seguinte identidade*

$$\sum_{\alpha=1}^m (P_\alpha^t)^2 (f \circ \varphi_t^{-1}) = (\Delta_{g(t)} f) \circ \varphi_t^{-1}$$

vale para cada $f \in C^\infty(M)$ e $\varphi_t = \varphi(\cdot, t)$ como definido acima.

Demonstração:

Seja $f \in C^\infty(M)$ e $\{e_1, \dots, e_m\}$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^m . Denote $f_t := f \circ \varphi_t^{-1}$, assim f_t está definida sobre a subvariedade Riemanniana $M_t \subset \mathbb{R}^m$ que é isométrica

via φ a $(M, g(t))$. Denotando por $grad_t f_t$ o gradiente de f_t no espaço tangente de M_t , temos usando álgebra linear e o fato de que

$$e_\alpha = P_\alpha^t \oplus (P_\alpha^t)^\perp \text{ e } grad_t f_t \perp (P_\alpha^t)^\perp$$

o gradiente de f_t no espaço tangente de M_t é expresso por

$$\begin{aligned} grad_t f_t &= \sum_{\alpha=1}^m \langle grad_t f_t, e_\alpha \rangle e_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \langle grad_t f_t, P_\alpha^t \rangle P_\alpha^t \end{aligned}$$

Agora aplicando a divergência em ambos os lados, temos

$$\begin{aligned} \Delta_t f_t &= div_t(grad_t f_t) \\ &= div_t \left\{ \sum_{\alpha=1}^m \langle grad_t f_t, P_\alpha^t \rangle P_\alpha^t \right\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^m P_\alpha^t \langle grad_t f_t, P_\alpha^t \rangle + \sum_{\alpha=1}^m \langle grad_t f_t, P_\alpha^t \rangle div_t P_\alpha^t \\ &= \sum_{\alpha=1}^m P_\alpha^t P_\alpha^t f_t + \sum_{\alpha=1}^m P_\alpha^t (f_t) div_t P_\alpha^t. \end{aligned}$$

O teorema segue, se mostrarmos que $\sum_{\alpha=1}^m P_\alpha^t (f_t) div_t P_\alpha^t = 0$

Para isso, considere para cada $p \in M_t$, considere uma carta local (x^i) , tal que $\{X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, X_n = \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ constitui uma base ortonormal com torção livre de $T_p M_t$.

Assim a conexão Riemanniana $\nabla_{X_i}^t X_j$ em M_t , dada pela projeção ortogonal da conexão $\tilde{\nabla}$ de \mathbb{R}^m , se anula p , isto significa que $\tilde{\nabla}_{X_i} X_j$ é perpendicular a M_t .

Agora usando a compatibilidade da métrica, tem-se que

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^m (div_t P_\alpha^t) P_\alpha^t &= \sum_{\alpha=1}^m \left\{ \sum_{\beta=1}^n \langle \nabla_{X_\beta}^t P_\alpha^t, X_\beta \rangle \right\} P_\alpha^t \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \left\{ \sum_{\beta=1}^n X_\beta \langle P_\alpha^t, X_\beta \rangle - \langle P_\alpha^t, \nabla_{X_\beta}^t X_\beta \rangle \right\} P_\alpha^t \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \left\{ \sum_{\beta=1}^n X_\beta \langle P_\alpha^t, X_\beta \rangle \right\} P_\alpha^t \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \left\{ \sum_{\beta=1}^n X_\beta \langle e_\alpha, X_\beta \rangle \right\} P_\alpha^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha=1}^m \left\{ \sum_{\beta=1}^n \langle \tilde{\nabla}_{X_i} e_\alpha, X_i \rangle + \langle e_\alpha, \tilde{\nabla}_{X_i} X_i \rangle \right\} P_\alpha^t \\
&= \sum_{\alpha=1}^m \left\{ \sum_{\beta=1}^n \langle e_\alpha, \tilde{\nabla}_{X_i} X_i \rangle \right\} P_\alpha^t \\
&= \text{a projeção de } \sum_{\alpha=1}^m \left\{ \sum_{\beta=1}^n \langle e_\alpha, \tilde{\nabla}_{X_i} X_i \rangle \right\} e_\alpha \text{ em } T_p M_t \\
&= \text{a projeção de } \{ \tilde{\nabla}_{X_i} X_i \} \text{ em } T_p M_t \\
&= 0
\end{aligned}$$

Portanto, $\Delta_t f_t = \sum_{\alpha=1}^m (P_\alpha^t)^2 f_t$ como queríamos demonstrar. \square

Seja $\phi : N \rightarrow M$ definida por $\phi(p) = \pi_M \circ \varphi^{-1}(p)$ onde $\pi_M : M \times [0, T] \rightarrow M$ é projeção canônica,

$$\begin{array}{ccc}
(M \times [0, T]) & \xrightarrow{\varphi} & N \\
\pi_M \downarrow & \swarrow \phi & \\
M & &
\end{array}$$

como $\varphi_t : (M, g(t)) \rightarrow M_t$ temos que para cada $p = \varphi_t(x) \in M_t$ e $f \in C^\infty(M)$

$$f \circ \varphi_t^{-1}(p) = f(x) = f \circ \phi(p). \quad (4.8)$$

Vamos utilizar o teorema acima para provar que o processo $Y_t = \phi(X_t)$ é um $g(t)$ -movimento Browniano sobre $(M, g(t))$, onde X_t é o processo estocástico em $N \subset \mathbb{R}^m$ que resolve a equação diferencial estocástica (4.7).

Por conveniência usaremos a seguinte notação: A igualdade $X \stackrel{dM}{=} Y$ quer dizer que X é igual a Y a menos de um martingale local.

De fato, utilizando a equação (4.7), (4.8) e a fórmula de transformação da integral de Stratonovich para integral de Itô, obtemos para cada $f \in C^\infty(M)$.

$$\begin{aligned}
d(f \circ \phi(X_t)) &= \sum_{\alpha=1}^m (P_\alpha^t)(f \circ \phi)(X_t) \circ dB_t^\alpha \\
&\stackrel{dM}{=} \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m (P_\alpha^t)^2 (f \circ \phi)(X_t) dt \\
&\stackrel{dM}{=} \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m (P_\alpha^t)^2 (f \circ \varphi_t^{-1})(X_t) dt \\
&\stackrel{dM}{=} \frac{1}{2} (\Delta_{g_t} f) \circ \varphi_t^{-1}(X_t) dt \\
&\stackrel{dM}{=} \frac{1}{2} (\Delta_{g_t} f) \circ \phi(X_t) dt
\end{aligned}$$

Portanto,

$$df(Y_t) \stackrel{dM}{=} \frac{1}{2} \Delta_{g_t} f(Y_t).$$

Isto é, Y_t é um $g(t)$ -movimento Browniano em $(M, g(t))$.

Podemos ainda obter uma equação diferencial estocástica para o $g(t)$ -movimento Browniano em $(M, g(t))$. Para isso basta utilizar o Lema 1.8

Como mostramos que $Y_t = \phi(X_t)$ é um $g(t)$ -movimento Browniano temos pelo Lema 1.8 que a solução da equação diferencial estocástica

$$dY_t = \sum_{\alpha=1}^m (\phi_*^{-1} P_\alpha^t)(Y_t) \circ dB_t^\alpha$$

é um $g(t)$ -movimento Browniano.

Agora vamos mostrar uma maneira prática de como encontrar esses campos P_α^t , ela se dará através do gradiente da função altura.

Seja $v = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m - \{0\}$. Então o conjunto de vetores $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ tal que $a_1 x_1 + \dots + a_m x_m = 0$ é um subespaço de \mathbb{R}^m chamado *hiperplano normal a v* . Definimos a função altura relativa a um hiperplano normal a v passando pela origem, como sendo

$$\begin{aligned}
h^v : M &\rightarrow \mathbb{R} \\
p &\rightarrow \langle p, v \rangle
\end{aligned}$$

Teorema 4.10 *Seja M uma variedade Riemanniana mergulhada isometricamente em um espaço euclidiano \mathbb{R}^m . Então $\text{grad}(h^{e_i}) = P_{e_i}$ para cada $i = 1, \dots, m$, onde os campos $P_{e_i}^t$ definidos como antes e h^{e_i} é a função altura relativa a um hiperplano normal a e_i passando pela origem.*

Demonstração:

Primeiramente relembremos que o gradiente de uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é um campo de vetores $grad(f)$ em M tal que para cada $p \in M$

$$\langle grad(f)(p), w \rangle_p = df_p(w), \text{ para todo } w \in T_pM.$$

Agora vamos calcular a diferencial da função altura relativa a um hiperplano normal a v passando pela origem. Para isso, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$. Como $h^v(\alpha(t)) = \langle \alpha(t), v \rangle$, obtemos

$$dh_p^v(w) = \left. \frac{d}{dt} h^v(\alpha(t)) \right|_{t=0} = \langle \alpha'(0), v \rangle = \langle w, v \rangle \quad (4.9)$$

Considere uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ em $p \in M$ de modo que

$$\varphi^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Assim nesta parametrização (U, φ) os campos $\{X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, X_n = \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\}$ formam uma base ortonormal de T_pM . Desta maneira considerando $\{e_1, \dots, e_m\}$ base canônica de \mathbb{R}^m temos que a projeção ortogonal de e_i em T_pM pode ser escrito como

$$P_{e_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\langle e_i, X_j \rangle}{\langle X_j, X_j \rangle} X_j, \text{ para cada, } i = 1, \dots, m$$

Logo, para qualquer $w \in T_pM$ temos que $w = \sum_{k=1}^m a_k X_k$, assim

$$\langle P_{e_i}, w \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^m \frac{\langle e_i, X_j \rangle}{\langle X_j, X_j \rangle} X_j, \sum_{k=1}^m a_k X_k \right\rangle = \sum_{k=1}^m a_k \langle e_i, X_k \rangle.$$

Por outro lado, pela equação (4.9) temos para cada $w \in T_pM$

$$dh_p^{e_i}(w) = \langle w, e_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^m a_k X_k, e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^m a_k \langle e_i, X_k \rangle = \langle P_{e_i}, w \rangle$$

Portanto, $grad(h^{e_i}) = P_{e_i}$, para cada $i = 1, \dots, m$. □

Agora que temos a construção via mergulho isométrico do $g(t)$ -movimento Browniano, vamos fazer a seguinte caracterização deste processo em termos do desenvolvimento e anti-desenvolvimento estocástico.

Teorema 4.11 *Considere a seguinte equação diferencial estocástica de Stratonovich em $\mathcal{F}(M)$.*

$$\begin{cases} dU_t = \sum_{i=1}^n P_i^t(U_t) \circ dZ_t^i \\ U_0 \in (\mathcal{O}(M), g(0)). \end{cases} \quad (4.10)$$

onde Z_t é um semimartingale em \mathbb{R}^n . Se $X_t := \pi \circ U_t$ então X_t é um $g(t)$ -movimento Browniano se, e somente se, Z_t é um movimento Browniano em \mathbb{R}^n .

Demonstração:

Dado qualquer $f \in C^\infty(M)$, tome $\tilde{f} = f \circ \pi$ seu levantamento em $\mathcal{O}(M)$. Aplicando a fórmula de Itô para $\tilde{f}(U_t)$ temos

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t P_i^s(\tilde{f}(U_s)) dZ_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t P_i^s P_j^s(\tilde{f}(U_s)) d\langle Z^i, Z^j \rangle_s$$

Como Z_t é um movimento Browniano em \mathbb{R}^n temos que $\langle Z^i, Z^j \rangle = \delta_{ij}t$.

E pelo Teorema 4.9, tem-se que

$$\sum_{i=1}^n (P_i^t)^2(\tilde{f}(u)) = \Delta_{\mathcal{O}(M)}(t)\tilde{f}(u) = \Delta_M(t)f(x), \quad x = \pi(u).$$

Assim tem-se

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t P_i^s(\tilde{f}(U_s)) dZ_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta_M(t)\tilde{f}(s, U_s) dt \quad (4.11)$$

Como $\int_0^t P_i^s(\tilde{f}(U_s)) dZ_s^i$ é um martingale local tem-se que X_t é um $g(t)$ -movimento Browniano.

Para demonstrar a recíproca, vamos considerar M como uma subvariedade de \mathbb{R}^N , e utilizar a construção do $g(t)$ -movimento Browniano via mergulho isométrico. Considerando $f^\alpha(x) = x^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, N$ e $\tilde{f}^\alpha = f^\alpha \circ \pi$, seus levantamentos em $\mathcal{O}(M)$.

$$X_t^\alpha = X_0^\alpha + M_t^\alpha + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta_M(t) f^\alpha(X_s) ds \quad (4.12)$$

onde M^α é um martingale local.

Por outro lado pela fórmula de Itô e o fato de que $P_i^t P_j^t(\tilde{f}(u)) = \nabla^2(t)f(ue_i, ue_j)$, temos

$$X_t^\alpha = X_0^\alpha + \int_0^t P_i^s(\tilde{f}^\alpha(U_s)) dZ_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t \nabla^2(t) f^\alpha(dX_s, dX_s). \quad (4.13)$$

Como por hipótese X_t é um regido pela equação $dX_t = P_\alpha^t(X_t) \circ dZ_t^\alpha$ temos pela Proposição 1.10 que

$$\begin{aligned} \int_0^t \nabla^2(t) f^\alpha(dX_s, dX_s) &= \int_0^t \nabla^2(t) f^\alpha(P_\alpha, P_\beta) d\langle Z^\alpha, Z^\beta \rangle_s \\ &= \int_0^t \nabla^2(t) f^\alpha(P_\alpha, P_\beta) ds \\ &= \int_0^t \Delta_M(t) f(X_s) ds \end{aligned}$$

Agora comparando (4.11) com (4.12) temos que

$$M_t^\alpha = \int_0^t P_i^s(\tilde{f}(U_s)) dZ_s^i$$

Ainda falta mostrar que Z é um movimento Browniano, para isso, vamos utilizar a caracterização de Levi para $g(t)$ -movimento Browniano. Como $P_i^t \tilde{f}^\alpha(u) = \langle \xi^\alpha, ue_i \rangle$, onde $\{\xi^\alpha\}$ é a base canônica para o espaço ambiente \mathbb{R}^N . Assim podemos escrever a identidade acima como

$$dM_t^\alpha = \langle \xi^\alpha, ue_i \rangle dZ_s^i.$$

Multiplicando ambos os lados por $\langle \xi^\alpha, ue_j \rangle$ e usando o fato de que

$$\sum_{\alpha=1}^l \langle \xi^\alpha, ue_i \rangle \langle \xi^\alpha, ue_j \rangle = \langle ue_i, ue_j \rangle = \delta_{ij},$$

temos que

$$dZ_t^i = \langle \xi^\alpha, U_t e_i \rangle dM_t^\alpha$$

Agora como, $d\langle M^\alpha, M^\beta \rangle_t = \langle P_\alpha, P_\beta \rangle dt$. Assim, Z é um martingale local cuja variação quadrática é dada por

$$\sum_{\alpha=1}^l \langle \xi^\alpha, U_t e_i \rangle \langle \xi^\alpha, U_t e_j \rangle \langle P_\alpha, P_\beta \rangle = \langle U_t e_i, U_t e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Portanto, o anti-desenvolvimento Z é um movimento Browniano no espaço euclidiano. \square

4.3 $g(t)$ -Movimento Browniano em uma Superfície de Revolução

Nesta seção utilizaremos a construção via mergulho isométrico para fazer a construção do $g(t)$ -movimento Browniano em uma superfície de revolução do \mathbb{R}^3 .

Exemplo 4.12 ($g(t)$ -movimento Browniano em uma superfície de revolução).

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ o conjunto obtido ao girarmos uma curva regular plana C em torno de um eixo no plano que não encontra a curva; vamos considerar o plano xz como plano da curva e o eixo Oz como o eixo de rotação. Seja

$$x = f(v), \quad z = h(v), \quad 0 < v < T, \quad f(v) > 0, \quad f'(v)^2 + h'(v)^2 = 1$$

uma parametrização para C e denote por θ o ângulo de rotação em torno do eixo Oz . Assim, obtemos a aplicação

$$\mathbf{X}(\theta, v) = (f(v) \cos \theta, f(v) \sin \theta, h(v))$$

do conjunto aberto $U = \{(\theta, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < \theta < 2\pi, 0 < v < T\}$ em S .

Seja $\{g_t\}_{t \in [0, T]}$ uma família de métricas Riemannianas tal que (S, g_t) seja ainda uma superfície de revolução para cada $t \in [0, T]$. Assim, o estudo das deformações em S causadas pela família de métricas g_t é equivalente a estudar a família de superfície de revolução S_t , com a métrica induzida do \mathbb{R}^3 .

$$\mathbf{X}_t(\theta, v) = (f_t(v) \cos \theta, f_t(v) \sin \theta, h_t(v))$$

$$0 < v < T, \quad f_t(v) > 0, \quad f_t'(v)^2 + h_t'(v)^2 = 1, \quad \forall t \in [0, T].$$

Assim, podemos definir a projeção ortogonal de um vetor $\xi \in \mathbb{R}^3$ em cada plano tangente $T_p S_t$ por

$$P_\xi^t(p) = \sum_{i=1}^2 \frac{g_{can}(\xi, w_i^t)}{g_{can}(w_i^t, w_i^t)} w_i^t$$

onde $\{w_i^t\}_{i=1}^2$ é uma base ortogonal de $T_p S_t$, a saber $w_1 = \mathbf{X}_\theta$ e $w_2 = \mathbf{X}_v$, Assim os vetores da base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ do \mathbb{R}^3 projetados em $T_p S_t$ são dados por:

$$P_{e_1}^t = (f_t(v) \sin^2 \theta + f_t'(v)^2 \cos^2 \theta, \sin \theta \cos \theta (f_t'(v)^2 - f_t(v)), f_t'(v) h_t'(v) \cos \theta)$$

$$P_{e_2}^t = (\sin \theta \cos \theta (f_t'(v)^2 - f_t(v)), f_t(v) \cos^2 \theta + f_t'(v)^2 \sin^2 \theta, f_t'(v) h_t'(v) \sin \theta)$$

$$P_{e_3}^t = (f_t'(v) h_t'(v) \cos \theta, f_t'(v) h_t'(v) \sin \theta, h_t'(v)^2)$$

Segue que a matriz de $P^t(p)$, com $q = (\theta, v)$ tal que $\mathbf{X}_t(\theta, v) = p$ é dada por:

$$[P^t(q)] = \begin{bmatrix} f_t(v) \sin^2 \theta + f_t'(v)^2 \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta (f_t'(v)^2 - f_t(v)) & f_t'(v) h_t'(v) \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta (f_t'(v)^2 - f_t(v)) & f_t(v) \cos^2 \theta + f_t'(v)^2 \sin^2 \theta & f_t'(v) h_t'(v) \sin \theta \\ f_t'(v) h_t'(v) \cos \theta & f_t'(v) h_t'(v) \sin \theta & h_t'(v)^2 \end{bmatrix}$$

Portanto, o $g(t)$ -movimento Browniano sobre S_t é dado pela solução da equação diferencial estocástica de Stratonovich

$$X_t^\alpha = X_0^\alpha + \sum_{\beta=1}^3 \int_0^t (P^s(X_t))_{\alpha\beta} \circ dB_s^\beta, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Como caso particular vamos apresentar dois exemplos, um na esfera S^n e outro no cilindro.

Exemplo 4.13 ($g(t)$ -movimento Browniano na esfera S^2).

Seja $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; |x|^2 = 1\}$ a esfera n -dimensional, munida da seguinte família de métricas Riemannianas $\{g_t = \lambda(t)^2 g_{can}\}_{t \in [0, T]}$, onde g_{can} é a métrica no espaço euclidiano e $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, é uma função diferenciável não constante, tal que λ^2 nunca se anula. Vamos construir o $g(t)$ -movimento Browniano sobre (S^2, g_t) usando o mergulho isométrico. Para isto, considere sobre $S^2 \times [0, T]$ a métrica produto

$$g_* = g_t + \dot{\lambda}(t)^2 ab,$$

para algumas constantes a e b em \mathbb{R} , e a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : S^2 \times [0, T] &\hookrightarrow \mathbb{R}^N \\ (x, t) &\mapsto \lambda(t)x \end{aligned}$$

Assim $(S^2 \times [0, T], g_*)$ é isométrica a $(\varphi(S^2 \times [0, T]), g_{ind})$, onde g_{ind} representa a métrica induzida do espaço euclidiano.

De fato, dados $p = (x, t) \in S^2 \times [0, T]$ e $u, v \in T_{(x, t)}(S^2 \times [0, T])$, considere as curvas $(X(s), \alpha(s))$ e $(Y(s), \beta(s))$ em $S^2 \times [0, T]$ tais que:

$$u = (\dot{X}(0), \dot{\alpha}(0))$$

$$v = (\dot{Y}(0), \dot{\beta}(0))$$

com $X(0) = Y(0) = x$, $\alpha(0) = \beta(0) = t$. Assim,

$$\begin{aligned} d\varphi_p(u) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \varphi(X(s), \alpha(s)) \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \lambda(\alpha(s))X(s) \\ &= \lambda(\alpha(0))\dot{X}(0) + \dot{\lambda}(\alpha(0))\dot{\alpha}(0)x. \end{aligned}$$

De modo análogo temos que

$$d\varphi_p(v) = \lambda(\beta(0))\dot{Y}(0) + \dot{\lambda}(\beta(0))\dot{\beta}(0)x.$$

Logo,

$$\begin{aligned} g_{can}(d\varphi_p(u), d\varphi_p(v)) &= \\ &= g_{can}(\lambda(\alpha(0))\dot{X}(0) + \dot{\lambda}(\alpha(0))\dot{\alpha}(0)x, \lambda(\beta(0))\dot{Y}(0) + \dot{\lambda}(\beta(0))\dot{\beta}(0)x) \\ &= \dot{\lambda}(\alpha(0))\dot{\alpha}(0)\dot{\lambda}(\beta(0))\dot{\beta}(0)g_{can}(x, x) + \lambda(\alpha(0))\lambda(\beta(0))g_{can}(\dot{X}(0), \dot{Y}(0)) \\ &= \dot{\lambda}(t)^2\dot{\alpha}(0)\dot{\beta}(0) + \lambda(t)^2g_{can}(\dot{X}(0), \dot{Y}(0)) \\ &= g_*((\dot{X}(0), \dot{\alpha}(0)), (\dot{Y}(0), \dot{\beta}(0))) \\ &= g_*(u, v) \end{aligned}$$

Portanto, $S^2 \times [0, T]$ está mergulhado isometricamente em \mathbb{R}^N , via isometria φ , isto é, $(S^2 \times [0, T], g_*)$ é isométrica a $(\varphi(S^2 \times [0, T]), g_{ind})$. Além disso, (S^2, g_t) é isométrica a $S_t^2 := (\varphi_t(S^2), g_{ind})$ para todo $t \in [0, T]$.

Observe que para cada $t \in [0, T]$, S_t^2 é uma esfera de raio $\lambda(t)$, assim a projeção ortogonal de um vetor $\xi \in \mathbb{R}^N$ no plano tangente $T_p S_t^2$ pode ser expressa por:

$$P_\xi^t(p) = \xi - \frac{g_{can}(\xi, p)}{g_{can}(p, p)}p = \xi - \frac{g_{can}(\xi, p)}{\lambda(t)^2}p.$$

Fixada $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ uma base canônica de \mathbb{R}^N tem-se

$$P_{e_\alpha}^t(p) = e_\alpha - \frac{g_{can}(e_\alpha, p)}{g_{can}(p, p)}p$$

E como $p = \varphi(x, t) = \lambda(t)x$, segue que a matriz de $P^t(p)$ é dada por:

$$g_{can}(P_{e_\alpha}^t(p), e_\beta) = \delta_{\alpha\beta} - x^\alpha x^\beta.$$

Portanto, o $g(t)$ -movimento Browniano sobre (S^n, g_t) é dado pela solução da equação

$$X_t^\alpha = X_0^\alpha + \sum_{\beta=1}^N \int_0^t (\delta_{\alpha\beta} - X_s^\alpha X_s^\beta) \circ dB_s^\beta.$$

Exemplo 4.14 ($g(t)$ -movimento Browniano em um cilindro).

Seja $C = \{x \in \mathbb{R}^3; \sum_{i=1}^2 x_i^2 = 1\}$, o cilindro 2-dimensional e denotaremos um ponto $p \in C$ por $p = (x_1, x_2, x_3) = (\vec{x}, x_3)$. Então, dados $u, v \in T_p C$ defina a seguinte família de métricas Riemanniana, para cada $t \in [0, T]$.

$$g_t(u, v)_p = (1 + t)^2 g_{can}(\vec{u}, \vec{v}) + u_3 \cdot v_3$$

Vamos construir o $g(t)$ -movimento Browniano sobre (C, g_t) usando o mergulho isométrico. Para isto, considere sobre $C \times [0, T]$ a métrica produto

$$\begin{aligned} g_*((u, a), (v, b))_{(p,t)} &= g_t(u, v)_p + a \cdot b \\ &= (1+t)^2 g_{can}(\vec{u}, \vec{v}) + u_3 \cdot v_3 + a \cdot b. \end{aligned}$$

onde $(u, a), (v, b) \in T_{(p,t)}(C \times [0, T])$, e a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : C \times [0, T] &\hookrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (p, t) &\mapsto ((1+t) \vec{x}, x_3) \end{aligned}$$

Assim $(C \times [0, T], g_*)$ é isométrica a $(\varphi(C \times [0, T]), g_{ind})$.

De fato, dados $p = (x, t) \in C \times [0, T]$ e $u, v \in T_{(x,t)}(C \times [0, T])$, considere as curvas $(\vec{X}(s), X_3, \alpha(s))$ e $(\vec{Y}(s), Y_3, \beta(s))$ em $C \times [0, T]$ tais que:

$$\begin{aligned} u &= (\dot{\vec{X}}(0), \dot{X}_3, \dot{\alpha}(0)) \\ v &= (\dot{\vec{Y}}(0), \dot{Y}_3, \dot{\beta}(0)) \end{aligned}$$

com $(\vec{X}(0), X_3) = (\vec{Y}(0), Y_3) = (\vec{x}, x_3) = x$, $\alpha(0) = \beta(0) = t$.

Assim,

$$\begin{aligned} d\varphi_p(u) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi(\vec{X}(s), X_3, \alpha(s)) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} ((1+\alpha(s)) \cdot \vec{X}(s), X_3) \\ &= ((\dot{\alpha}(0)) \cdot \vec{X}(0) + (1+\alpha(0)) \cdot \dot{\vec{X}}(0), \dot{X}_3(0)). \end{aligned}$$

De modo análogo temos,

$$d\varphi_p(v) = ((\dot{\beta}(0)) \cdot \vec{Y}(0) + (1+\beta(0)) \cdot \dot{\vec{Y}}(0), \dot{Y}_3(0)).$$

Logo,

$$\begin{aligned} &g_{can}(d\varphi_p(u), d\varphi_p(v)) = \\ &= g_{can}(((\dot{\alpha}(0)) \cdot \vec{X}(0) + (1+\alpha(0)) \cdot \dot{\vec{X}}(0), \dot{X}_3(0)), ((\dot{\beta}(0)) \cdot \vec{Y}(0) + (1+\beta(0)) \cdot \dot{\vec{Y}}(0), \dot{Y}_3(0))) \\ &= \dot{\alpha}(0) \cdot \dot{\beta}(0) \cdot g_{can}(\vec{X}(0), \vec{Y}(0)) + (1+\alpha(0)) \cdot (1+\beta(0)) g_{can}(\dot{\vec{X}}(0), \dot{\vec{Y}}(0)) \\ &= \dot{\alpha}(0) \cdot \dot{\beta}(0) \cdot g_{can}(\vec{x}, \vec{x}) + (1+t)^2 g_{can}(\dot{\vec{X}}(0), \dot{\vec{Y}}(0)) + \dot{X}_3(0) \cdot \dot{Y}_3(0) \\ &= (1+t)^2 g_{can}(\dot{\vec{X}}(0), \dot{\vec{Y}}(0)) + \dot{X}_3(0) \cdot \dot{Y}_3(0) + \dot{\alpha}(0) \cdot \dot{\beta}(0) \\ &= g_*((\dot{\vec{X}}(0), \dot{X}_3(0), \dot{\alpha}(0)), (\dot{\vec{Y}}(0), \dot{Y}_3(0), \dot{\beta}(0))) \\ &= g_*(u, v). \end{aligned}$$

Portanto, $C \times [0, T]$ está mergulhado isometricamente em \mathbb{R}^3 , via isometria φ , isto é, $(C \times [0, T], g_*)$ é isométrica a $(\varphi(C \times [0, T]), g_{ind})$. Além disso, (C, g_t) é isométrica a $C_t := (\varphi_t(C), g_{ind})$ para todo $t \in [0, T]$.

Estudar as deformações em C causadas pela família de métricas g_t é equivalente a estudar a família de cilindros C_t , com a métrica induzida do \mathbb{R}^3 .

$$\mathbf{X}_t(\theta, v) = ((1+t) \cos \theta, (1+t) \sin \theta, v)$$

$$0 < v < T, \text{ para cada } t \in [0, T].$$

Assim, podemos definir a projeção ortogonal de um vetor $\xi \in \mathbb{R}^3$ em cada plano tangente $T_p C_t$ por

$$P_\xi^t(p) = \sum_{i=1}^2 \frac{g_{can}(\xi, w_i^t)}{g_{can}(w_i^t, w_i^t)} w_i^t$$

onde $\{w_i^t\}_{i=1}^2$ é uma base ortogonal de $T_p C_t$ definido como sendo $w_1 = \mathbf{X}_\theta$ e $w_2 = \mathbf{X}_v$. Assim os vetores da base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ do \mathbb{R}^3 projetados em $T_p S_t$ são dados por:

$$P_{e_1}^t = ((1+t) \sin^2 \theta, -(1+t) \sin \theta \cos \theta, 0)$$

$$P_{e_2}^t = (-(1+t) \sin \theta \cos \theta, (1+t) \cos^2 \theta, 0)$$

$$P_{e_3}^t = (0, 0, 1)$$

Portanto, o $g(t)$ -movimento Browniano sobre (C, g_t) é dado pela solução da equação

$$X_t^\alpha = X_0^\alpha + \sum_{\beta=1}^3 \int_0^t (P^s(X_t))_{\alpha\beta} \circ dB_s^\beta \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

onde os $(P^s(p))_{\alpha\beta}$ são as entradas da matriz com $q = (\theta, v)$ tal que $\mathbf{X}_t(\theta, v) = p$

$$[P^t(q)] = \begin{bmatrix} (1+t) \sin^2 \theta & -(1+t) \sin \theta \cos \theta & 0 \\ -(1+t) \sin \theta \cos \theta & (1+t) \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.4 $L(t)$ -Difusão

Nesta seção vamos definir um processos estocásticos gerados por uma família $\{L(t)\}_{t \in [0, T]}$ de operadores elípticos não degenerados de 2º ordem sem termos constantes, variando diferenciavelmente com o tempo. E apresentaremos uma construção que faça sentido introduzir o conceito de transporte paralelo estocástico ao longo desse novo tipo de processo estocástico.

Para o que se segue, M é uma variedade Riemanniana n -dimensional e consideraremos em M , uma família $\{g(t)\}_{t \in [0, T]}$ de métricas Riemannianas de classe $C^{1,2}([0, T] \times M)$, uma família $\{\nabla(t)\}_{t \in [0, T]}$ de conexões de Levi-Civita com respeito a $\{g(t)\}_{t \in [0, T]}$.

Seja $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base ortonormal do \mathbb{R}^n . Para cada $u \in \mathcal{F}(M)$ e $t \in [0, T]$ denote $L_i(t, u) = (ue_i)_t^h$ o $\nabla(t)$ -levantamento horizontal de $ue_i \in T_{\pi(u)}M$.

Não é difícil ver que para cada $u \in \mathcal{F}(M)$ os n -campos $L_i(t, u) = (ue_i)_t^h$ é uma base para o espaço $H_u\mathcal{F}(M)$.

Para construir uma base para o espaço $V_u\mathcal{F}(M)$, considere $\{M_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ base canônica do espaço de matrizes $M(n, \mathbb{R})$ e a ação

$$\phi : \mathcal{F}(M) \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(M)$$

definida por $\phi(u, g) = u \circ g$.

Assim a família $\{V_{ij}(u)\}_{i,j=1}^n$ definida como sendo $V_{ij}(u) := (\phi_u)_*(E_{ij})$ forma uma base para o espaço $V_u\mathcal{F}(M)$, onde E_{ij} base canônica de $GL(n, \mathbb{R})$.

Por fim, denote para cada $t \in [0, T]$, o $g(t)$ -fibrado de bases ortonormais por $(\mathcal{O}(M), g(t))$.

Definição 4.15 *Sejam $(\Omega, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade completo, filtrado com filtração contínua à direita, M uma variedade diferenciável e $\{L_t\}_{t \in [0, T]}$ uma família de operadores elípticos não degenerados de 2º ordem sem termos constantes, variando diferenciavelmente com o tempo. Um processo $X : \Omega \times [0, T] \rightarrow M$ é chamado de uma $L(t)$ -difusão começando em $p \in M$, se para todo $f \in C^\infty(M)$ o processo*

$$M^f(X)_t = f(X_t(p)) - f(p) - \frac{1}{2} \int_0^t L(s) f(X_s(p)) ds$$

é um martingale local.

Assim se o processo X_t satisfaz a equação diferencial estocástica de Stratonovich em M dada por:

$$dX_t = \sum_{k=1}^m A_k(t, X_t) \circ dB_t^k + A_0(t, X_t)dt. \quad (4.14)$$

onde $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^m)$ um movimento Browniano m -dimensional do espaço euclidiano.

Então, a família de operadores que geram a $L(t)$ -difusão X_t será dada por

$$L(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m A_k^2(t, \cdot) + A_0(t, \cdot)$$

onde, $A_k^2(t)f = A_k(t)(A_k(t)f)$ e $A_0(t), \dots, A_m(t)$ campos de vetores continuamente diferenciável em $t \in [0, T]$, isto é, em uma carta local (x_1, \dots, x_d) estes campos de vetores são expressados como

$$A_k(t) = \sum_{i=1}^d A_{ik}(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

onde os campos, $A_{ik}(t, x), i = 1, \dots, d; k = 1, \dots, m$ são de classe C^1 em t e C^∞ em x .

I. Shigekawa [25] provou que o levantamento horizontal estocástico \tilde{X}_t de X_t é regido pela equação diferencial estocástica de Stratonovich em $\mathcal{F}(M)$

$$d\tilde{X}_t = \sum_{k=1}^m \tilde{A}_k(t, \tilde{X}_t) \circ dB_t^k + \tilde{A}_0(t, \tilde{X}_t)dt. \quad (4.15)$$

onde, $\tilde{A}_0(t), \dots, \tilde{A}_m(t)$, são os levantamentos horizontais de $A_0(t), \dots, A_m(t)$ respectivamente.

Nosso estudo segue na direção de descrever um tipo de transporte paralelo ao longo de uma $L(t)$ -difusão, com $L(t) = \frac{1}{2}\Delta_{g(t)} + Z(t)$ de modo que esse transporte paralelo seja uma isometria para cada $t \in [0, T]$. O problema aqui é que nesse caso, a métrica $g(t)$ evolui ao longo do tempo, assim temos que se:

$$\tilde{X}_0 \in (\mathcal{O}(M), g(0)) \not\Rightarrow \tilde{X}_t \in (\mathcal{O}(M), g(t)).$$

Para conseguir tal propriedade é necessário modificar a equação (4.15) que rege \tilde{X}_t . Isto é, estamos querendo que dado $u \in \mathcal{F}(M)$, $g_t(ue_i, ue_j)$ seja constante para cada $t \in [0, T]$. Assim se definirmos $F : \mathcal{F}(M) \times [0, T] \rightarrow \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ como sendo $F(u, t) = (g_t(ue_i, ue_j))_{ij}$, queremos que $dF(\tilde{X}_t, t) = 0$, pois assim manteremos a

$g(t)$ -isometria. Então aplicando a fórmula de Itô para $F_{ij}(u, t) = g_t(ue_i, ue_j)$ em \tilde{X}_t temos

$$dF(\tilde{X}_t, t) = \frac{\partial F}{\partial t}(\tilde{X}_t, t)dt + \sum_{k=1}^m E_k F(\tilde{X}_t, t) \circ dB_t^k + \sum_{k,l=1}^m A_{kl}(\tilde{X}_t, t)F(\tilde{X}_t, t)dt$$

Pela definição da F segue que

$$\frac{\partial F}{\partial t}(\tilde{X}_t, t) = \dot{g}_t(\tilde{X}_t e_i, \tilde{X}_t e_j)$$

Agora considerando uma vizinhança $U \subset M$ de p e n -campos de vetores $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{X}(U)$ ortonormais em cada ponto de U tais que $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$, ou seja um referencial geodésico, temos que

$$E_k F(\tilde{X}_t, t) = \frac{d}{ds} F(\tilde{X}_t, s+t) = 0$$

Isto sugere que para mantermos a $g(t)$ -isometria devemos impor que

$$A_{kl}(\tilde{X}_t, t) = -\dot{g}_t(\tilde{X}_t e_i, \tilde{X}_t e_j)$$

Com isso fica demonstrado o seguinte resultado que é uma extensão do A. Coulibaly em [29] :

Teorema 4.16 *Seja X_t uma difusão em M , regida pela equação diferencial estocástica de Stratonovich*

$$dX_t = \sum_{k=1}^m A_k(t, X_t) \circ dB_t^k + A_0(t, X_t)dt.$$

E defina o transporte paralelo ao longo da $L(t)$ -difusão X_t como sendo

$$//_{0,t}^T = \tilde{X}_t \circ \tilde{X}_0^{-1} : T_{X_0}M \rightarrow T_{X_t}M$$

onde \tilde{X}_t é solução da equação abaixo (4.16). Tome $p \in M$ e considere a seguinte equação diferencial estocástica de Stratonovich em $\mathcal{F}(M)$.

$$\begin{cases} d\tilde{X}_t = \sum_{k=1}^n \tilde{A}_k(\tilde{X}_t, t) \circ dB_t^k - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \dot{g}_t(\tilde{X}_t e_i, \tilde{X}_t e_j) V_{ij}(\tilde{X}_t) dt \\ \tilde{X}_0 \in (\mathcal{O}(M), g(0)); \pi(\tilde{X}_0) = p \end{cases} \quad (4.16)$$

onde B_t é um movimento Browniano em \mathbb{R}^n . Então

- a) O transporte paralelo estocástico $//_{0,t}^T$ ao longo de X_t é uma $g(t)$ -isometria
- b) $\pi(\tilde{X}_t) = X_t(p)$.

1.1 Resultados Técnicos

Teorema A.1 *Seja X um Γ -martingale em uma bola geodésica regular \mathcal{B} . Então $\mathbb{P}[X \text{ convergir em } \mathcal{B}] = 1$*

Demonstração: Ver W. Kendall [35]. □

Teorema A.2 *(Teorema de Liouville para Γ -martingale). Seja $\mathcal{B}_p(r)$ uma bola geodésica regular na variedade Riemanniana N . Se X é uma Γ -martingale em $\mathcal{B}_p(r)$ com limite X_∞ não aleatório. Então $X_t = X_\infty = X_0$ para cada t .*

Teorema A.3 *Sejam N uma variedade Riemanniana simplesmente conexa com curvatura sectional não positiva, e X, Y martingales contidos em uma bola geodésica em N . Se $X_\infty = Y_\infty$ então $X = Y$, para cada $t \geq 0$.*

Demonstração: Ver M. Emery [19]. □

Proposição A.4 *Seja M uma variedade diferenciável munida de uma conexão Γ e X um Γ -martingale em M . Então*

(A) *(Darling): $X_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} X_t$ existe quase certamente na compactificação por um ponto $M \cup \{\infty\}$ de M .*

(B) (Zheng): Sobre o conjunto onde X_∞ existe e está em M , temos que $\langle X, X \rangle_\infty < \infty$ quase certamente.

Demonstração: Ver Teorema A e B de R. Darling [9]. □

Lema A.5 *Sejam M_1, M_2 variedades Riemannianas completas (possivelmente com fronteira). Se X_1, X_2 são Γ -martingales definidos sobre a mesma filtração em M_1, M_2 respectivamente, então o processo (X_1, X_2) é um Γ -martingale na variedade Riemanniana produto $M_1 \times M_2$.*

Demonstração: Ver W. Kendall [36]. □

Definição A.6 *Seja X um processo estocástico contínuo com valores na bola geodésica regular \mathcal{B} . Dizemos que X é um Γ -martingale se para todo aberto limitado $U \subset \mathcal{B}$ e para toda função diferenciável, convexa e limitada $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ o processo $\varphi(X)$ é um submartingale para todo sub-intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ no qual $X_t \in U$, para cada $t \in [a, b]$.*

Lema A.7 *Suponha que \mathcal{B} é uma bola regular geodésica. Seja $\Psi : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty)$ uma função contínua, não negativa e limitada por uma função convexa. E defina $\Delta_u = \{(x, y) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : \Psi(x, y) \leq u\}$. Então,*

$$\limsup_{u \rightarrow 0} \sup\{dist(x, y) \mid (x, y) \in \Delta_u\} = 0$$

Demonstração: Ver W. Kendall [36]. □

Lema A.8 *Dado qualquer $x \in \mathcal{B}_r(p)$ existe uma função convexa, contínua, limitada e não negativa ψ_x tal que $\psi_x(y) = 0$ se, e somente se, $y = x$.*

Demonstração: Ver W. Kendall [34]. □

Teorema A.9 *Se $F : M \rightarrow N$ é uma aplicação harmônica de dilatação limitada e X um movimento Browniano em M , então $F(X)$ é um Γ -martingale e tem dilatação limitada.*

Demonstração: Ver W. Kendall [32]. □

Teorema A.10 *Sejam N uma variedade Riemanniana simplesmente conexa com curvatura limitada superiormente por uma constante negativa $-h^2$. Suponha que X e Y são Γ -martingales em N de dilatação limitada. Se $X_0 \neq Y_0$ então existe uma chance de que X e Y nunca se encontrem. Isto é,*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \text{ para algum } t \geq 0) < 1$$

Demonstração: Ver W. Kendall [32]. □

Lema A.11 *Seja ∇ uma conexão simétrica em M e ω a forma conexão associada. Então*

a) *A aplicação projeção $\pi : \mathcal{F}(M) \rightarrow M$ é (∇^c, ∇) -afim e (∇^h, ∇) -afim.*

b) *A parte simétrica de $\nabla^h\omega$ é $-\omega \odot \omega$.*

c) *A parte simétrica de $\nabla^h\omega$ é $-\omega \odot \omega + a^c$, onde*

$$a_u^c(U, V) = \frac{1}{2}u^{-1}(R(\cdot \circ u, \pi_*U)\pi_*V + R(\cdot \circ u, \pi_*V)\pi_*U)$$

para cada $U, V \in T_p\mathcal{F}(M)$.

Demonstração: Ver P. Catuogno e S. Stelmastchuk [50]. □

BIBLIOGRAFIA

- [1] Bass, Richard F., Diffusions and Elliptic Operators, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [2] Bishop, R. ; Crittenden, R., Geometry of Manifolds, Academic-Press, New York, 1964.
- [3] Catuogno, Pedro., On stochastic parallel transport and prolongation of connections, Rev. Unión Matemática Argentina, Vol.41(3), 107-118, 1999.
- [4] Catuogno, Pedro., Second order connections and stochastic horizontal lifts, Journal of Geometry and Physics, Vol.56, 1637-1653, 2006.
- [5] Catuogno, Pedro., A Geometric Itô Formula, Sociedade Brasileira de Matemática, Vol.33, 85-99, 2007.
- [6] Cranston, M., Gradient estimates on manifolds using coupling. J. Funct. Analysis. 99, n°1, 110-124, 1991.
- [7] Chavel, Isaac., Riemannian Geometry: A Modern Introduction, Cambridge University Press, New York, 1993.
- [8] Coquereaux, R. ; Jadczyk, A. Riemannian Geometry, Fiber Bundles, Kaluza-Klein Theories, and All That, World Scientific, Singapore, 1988.
- [9] Darling, Richard W. R., Convergence of martingales on a Riemannian manifold. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 19, n° 2, 753-763, 1983.

- [10] Darling, Richard W. R. Convergence of martingales on a manifold of negative curvature. *Ann. Inst. H. Poincaré* 21, 157-175, 1985.
- [11] Darling, Richard W. R., Martingales in Manifolds - Definition, Example, and Behaviour under maps. *Lecture Notes in Mathematics*, n° 921, 217-236, Springer, Berlin, 1982.
- [12] do Carmo, Manfredo P., *Geometria Riemanniana, Projeto Euclides*, IMPA, Rio de Janeiro, 3° edição, 2005.
- [13] do Carmo, Manfredo P., *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, Textos Universitários*, IMPA, Rio de Janeiro, 3° edição, 2008.
- [14] Dohrn, D. and Guerra, F., Nelson's stochastic mechanics on Riemannian manifolds, *Lett. Nuovo Cimento* (2) 22 , n°4, 121-127, 1978.
- [15] Eells, James. and Lemaire, Luc., *Selected Topics in Harmonic Maps, Regional Conference Series in Mathematics*, n°50, Rhode Island, 1983.
- [16] Eells, James. and J.H. Sampson., *Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds*, *Amer. J. Math.* 86, 109-160, 1964.
- [17] Elworthy, K.D., Kendall, W.S., *Factorisation of Brownian motion and harmonic maps*, *Pitman Research notes in mathematics* 150, 75-83, 1986.
- [18] Emery, Michel., *Stochastic Calculus in Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [19] Emery, Michel., *Convergence des martingales dans les variétés. (French) [Convergence of martingales in manifolds]* *Colloquium in honor of Laurent Schwartz*, Vol. 2 (Palaiseau, 1983). *Astérisque* No. 132, 47-63, (1985).
- [20] Guo, H. ; Philipowski, R. ; Thalmaier, A. *Martingales on manifolds with time-dependent connection*. arxiv:1305.0454, 2013.
- [21] H, Kunita., *Stochastic Differential Equations and Stochastic Flows of Diffeomorphisms*, *Lecture Notes in Mathematics*, n°1097, Springer, Berlin, 1984.
- [22] Han, Qing. ; Hong, Jia-Xing., *Isometric Embedding of Riemannian Manifolds in Euclidean Spaces*, American Mathematical Society, Providence, 2006.

- [23] Hildebrandt, Stefan., Harmonic mappings of Riemannian manifolds. Harmonic mappings and minimal immersions (Montecatini, 1984), 1-117, Lecture Notes in Mathematic., 1161, Springer, Berlin, 1985.
- [24] Hsu, Elton P., Stochastic Analysis on Manifolds, American Mathematical Society, Vol.38, Rhode Island, 2001.
- [25] Ichiro, Shigekawa., On stochastic horizontal lifts. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete 59, 211-221, 1982.
- [26] Ikeda, N., Watanabe, S., Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. North-Holland, 1989.
- [27] Justo, Claudia., Ledesma, Diego (orientador)., Movimento Browniano com respeito a métricas Riemannianas dependendo do tempo e aplicações ao fluxo de curvatura média, Dissertação de Mestrado, Unicamp, Campinas, 2011.
- [28] Kallenberg, Olav., Probability and its Applications, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [29] K.A, Coulibaly. and Thalmaier, Anton., Brownian motion with respect to a metric depending on time: definition, existence and applications to Ricci flow, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 346, n°13-14, 773-778, 2008.
- [30] K.A, Coulibaly., Brownian motion with respect to time-changing riemannian metrics applications to Ricci flow, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. 47, 515-538, n°2, 2011.
- [31] K.A, Coulibaly., Some stochastic process without birth, linked to the mean curvature flow, Ann Probab 39. n°4, 1305-1331, 2011.
- [32] Kendall, Wilfrid S., Stochastic differential geometry, a coupling property, and harmonic maps. J. London Math. Soc. (2) 33, 554-566, n°3, 1986.
- [33] Kendall, Wilfrid S., Nonnegative Ricci curvature and the Brownian coupling property. Stochastics 19, n°1-2, 111-129, 1986.
- [34] Kendall, Wilfrid S., Martingales on manifolds and harmonic maps. Geometry of random motion (Ithaca, N.Y., 1987), 121-157, Contemp. Math., 73, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

- [35] Kendall, Wilfrid S., Correction note to: "Martingales on manifolds and harmonic maps" [in Geometry of random motion (Ithaca, NY, 1987), 121-157, Contemp. Math., 73, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988; by Kendall. Stochastics Stochastics Rep. 37, 253-257, n°4, 1991.
- [36] Kendall, Wilfrid S., Probability, convexity, and harmonic maps with small image. I. Uniqueness and fine existence. Proc. London Math. Soc. (3) 61, 371-406, n°2, 1990.
- [37] L.A. Cordero, C. Dodson, M. De León., Differential Geometry of Frame Bundles, Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [38] Oksendal, B. K., Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications Springer, 2006.
- [39] O'Neill, B. The Fundamental Equations of a Submersion, Michigan Math. J. 13, 459-469, 1966.
- [40] Picard, Jean., Smoothness of harmonic maps for hypoelliptic diffusions. The Annals of Probability, 28, 643-666, n°2, 2000.
- [41] Picard, Jean., Martingales on Riemannian manifolds with prescribed limit. Journal of Functional Analysis, 99, 223-261, n°2, 1990.
- [42] Picard, Jean., The manifold-valued Dirichlet problem for symmetric diffusions. Potential Analysis, 14, 53-72, n°1, 2001.
- [43] P.A. Meyer., Geometric Stochastiques sans larmes. sem. Prob. XV, Lecture Notes in Mathematics, n°850, 44-102, Springer, Berlin, 1981.
- [44] P.A. Meyer., A Differential Geometric Formalism for the Ito Calculus. Lecture Notes in Mathematics, n°851, 256-270, Springer, Berlin, 1981.
- [45] R. Hamilton., Three-Manifolds with positive Ricci curvature, J. Differential Geom. 255-306, 1982.
- [46] Revuz, Daniel. and Yor, Marc., Continuous Martingales and Brownian Motion, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [47] Ruffino, Paulo R.C., Uma Iniciação aos Sistemas Dinâmicos Estocásticos. Publicações Matemáticas, IMPA, 2009.

- [48] S, Kobayashi. and K, Nomizu., Foundations of Differential Geometry. Interscience Vol.1, 1963.
- [49] S, Kobayashi., Transformation Groups in Differential Geometry. Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [50] Stelmastchuk, Simão. and Catuogno, Pedro. Martingale on Frame Bundle, Potential Analysis, 61-69, 2008.