O Comportamento Evolutivo de Uma Mancha de Óleo na Baía de Ilha Grande, RJ: Modelagem, Análise Numérica e Simulações

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Rosane Ferreira de Oliveira e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 02 de junho de 2003.

Prof. Dr. João Frederico C. A. Meyer
Orientador

Banca Examinadora
João Frederico da Costa Azevedo Meyer
Sandra Mara Cardoso Malta
Carlos Antônio de Moura
Marcelo Martins dos Santos
Laécio Carvalho de Barros

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Matemática Aplicada.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Oliveira, Rosane Ferreira de

OL4c O comportamento evolutivo de uma mancha de óleo na Baía de Ilha Grande, RJ : modelagem, análise numérica e simulações./Rosane Ferreira de Oliveira -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2003.

Orientador : João Frederico C. A. Meyer

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Modelagem. 2.Equações diferenciais parciais. 3.Equações de evolução não-linear. 4.Métodos de elementos finitos. 5. Galerkin, Métodos de. I. Meyer, João Frederico C. A. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida em 02 de junho de 2003 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). JOÃO FREDERICO DA COSTA AZEVEDO MEYER

Prof (a). Dr (a). CARLOS ANTONIO DE MOURA

Prof (a). Dr (a). SANDRA MARA CARDOSO MALTA

Prof (a). Dr (a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS

Prof (a). Dr (a). LAÉCIO CARVALHO DE BARROS

Aos meus pais e amigos.

Agradecimentos

Agradeço ao professor, orientador e amigo João Frederico Joni Meyer por tantas orientações, conversas e sugestões e tantas atenções não mensuráveis. Aos amigos do grupo de ecotoxologia e dispersão populacional da Biomatemática por tantas ajudas, forças e palpites.

Aos membros da Banca Examinadora, professores: Sandra Malta, Carlos Moura, Marcelo Santos e Laécio de Barros, pela valiosa contribuição para o aprimoramento deste trabalho.

À minha família pelo carinho, amor e compreensão de sempre.

Ao meu anjo da guarda... eu acredito!

Aos meus amigos tantos, daqui e de acolá, que nestes anos todos ficaram por aí abandonados dos meus tontos carinhos, tintos colos e claras atenções.

Ao meu amor, que soube entender e compartilhar os sins e os nãos de tantos dias de trabalho e dedicação.

À Fátima e à Cidinha por tanta eficiência e carinho ao lidar com os nossos sufocos do dia a dia.

Aos colegas do Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro que, direta ou indiretamente, assumiram encargos didáticos e assim contribuiram para a concretização deste trabalho. Em particular, aos colegas-amigos do coração, sem eles fica mais difícil a "barra clara do dia".

Agradeço ao Decanato de Pós-graduação da UFRRJ, que viabilizou o meu afastamento para esta capacitação, e à CAPES, que financiou o trabalho através do programa PICDT.

Resumo

Neste estudo, são formulados problemas de dispersão de manchas de óleo em região costeira e de circulação oceânica. É realizada modelagem matemática via equação diferencial parcial de difusão-advecção-reação e de Stokes, com as justificativas dessas modelagens. São apresentadas a formulação variacional e a discretização espacial (elementos finitos de primeira ordem com SUPG) e temporal (Crank-Nicolson). São verificadas a existência e unicidade de solução no sentido mais geral, ou fraco. São obtidas estimativas de erro *a priori* para Galerkin contínuo e Galerkin com Crank Nicolson, sob determinadas condições de regularidade. Finalmente, são apresentadas simulações de situações viáveis para obter cenários realistas de incidentes e acidentes de derrame de óleo no mar, para futura aplicação em plano de contingência.

Abstract

In this study, the formulation for dispersion of oil slicks in coastal region and local circulation problems are developed. The mathematical modelling based on partial differencial equations of diffusion-advection-reaction and on Stokes equations is described, with the underlying reasoning. The variational formulation and the spatial discretization (first order finite elements, with SUPG formulation) and temporal (Crank-Nicolson) are presented. Existence and uniqueness results for the solution are verified in the general, or weak sense. *A priori* error estimates for the continuous time Galerkin and Galerkin with Crank Nicolson are derived under suitable regularity hypotheses. Finally, some viable simulations to derive realistic scenarios for oil spill incidents and accidents in marine environments are presented, for future applications on contingency plans.

Sumário

Notações:

V	$\longrightarrow$	espaço de funções teste definido na página 23
V'	$\longrightarrow$	espaço dual de V
$(.,.)$	$\longrightarrow$	produto interno
$< f, v >$	$\longrightarrow$	$f(v)$ sendo $f \in V'$ e $v \in V$
∇u	$\longrightarrow$	grad$u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$
div$W$	$\longrightarrow$	divergente de W
$\frac{\partial u}{\partial \eta}$	$\longrightarrow$	derivada normal exterior
W_η	$\longrightarrow$	$W \bullet \eta$, produto interno
$\Omega \subset \mathbb{R}^2$	$\longrightarrow$	aberto
$\partial\Omega = \Gamma$	$\longrightarrow$	fronteira de Ω
$\Omega_T \subset \mathbb{R}^2$	$\longrightarrow$	$(0,T) \times \Omega$
$q.t.p.$	$\longrightarrow$	para quase todo ponto
$L^p(\Omega)$	$\longrightarrow$	espaço das funções u mensuráveis em Ω e com $\int_\Omega \lvert u\rvert^p d\Omega < \infty$, para $1 \leq p < \infty$
$L^\infty(\Omega)$	$\longrightarrow$	espaço das funções u mensuráveis em Ω e tais que existe constante $\mathcal{C}$ com $\lvert u(x)\rvert < \mathcal{C}, \mathrm{x} \in \Omega\ q.t.p.$
$H^1(\Omega),\ H_0^1(\Omega)$	$\longrightarrow$	espaços de Sobolev
$\lVert . \rVert_V$	$\longrightarrow$	norma do espaço V
$u(t, \mathbf{x})$	$\longrightarrow$	concentração de óleo no instante t e no ponto $\mathbf{x}$
α	$\longrightarrow$	difusividade
ρ	$\longrightarrow$	decaimento
$W = (W_1, W_2)$	$\longrightarrow$	campo de velocidades
W_p	$\longrightarrow$	circulação padrão
W_v	$\longrightarrow$	vetor de vento a dez metros de altura
f	$\longrightarrow$	fonte poluente
p	$\longrightarrow$	fator de passagem da mancha que atinge a fronteira de mar aberto

Introdução

A Baía de Ilha Grande está localizada no município de Angra do Reis, litoral sul do Estado do Rio de Janeiro, região conhecida no meio turístico como Costa Verde. Geograficamente seus limites vão da latitude $22°50'$ até $23°20'$S e da longitude $44°00'$ até $44°45'$W, domínio de águas tranquilas e claras, e com 365 ilhas. As elevações da Serra do Mar e seus recortes fazem com que a maioria das 2000 praias sejam de pequena extensão e com vegetação de Mata Atlântica abundante. A temperatura média máxima anual é de aproximadamente $26°C$ e a mínima de $18°C$ (www.cptec.inpe.br).

Num formato um pouco menos poético, a Baía de Ilha Grande, que pode ser visualizada na figura 0.1[1] , consiste de dois corpos aquáticos separados por um canal formado pelo estreitamento entre o continente e uma ilha, a Ilha Grande. Mahiques, citado por Corrêa (1994), faz a seguinte divisão fisiográfica da Baía: Porção Oeste, Canal Central e Porção Leste. Também utilizaremos esta divisão na descrição de outras características físicas que aparecerão no decorrer deste trabalho. O Canal Central, segundo Corrêa (1994), apresenta as maiores profundidades, com máxima de 55 metros.

Num passado não muito distante, uma das fontes de renda de boa parte da população de Angra dos Reis era a pesca. Mas a atitude, indo da não preservacionista até aquela altamente predatória, repetida durante décadas, fez com que a produção despencasse. As famílias que viviam tradicionalmente da pesca ou se mantêm a duras penas nesta atividade ou vieram a abandoná-la, migrando para atividades mais urbanas ou atuando fortemente no turismo, transformando as traineiras, antes direcionadas para a pesca, em barcos de passeio e as antigas fábricas de sardinha em pousadas e restaurantes. A região apenas recentemente assumiu sua vocação turística, porém ainda sem uma atitude de preservação mais efetiva do meio ambiente.

São muitos os condomínios voltados para as classes média alta e alta vindas principalmente do Rio de Janeiro e de São Paulo, que em geral não interagem com a população local nem contribuem para uma conscientização em defesa da natureza privilegiada daquela região. Os manguezais foram duramente atingidos pela especulação imobiliária.

Neste quadro dramático de maus tratos à natureza também está inserida a principal motivação deste trabalho, os derrames de petróleo e/ou derivados no mar. O terminal marítimo da PETROBRAS (DTSE/GEBIG ou TEBIG) está localizado no continente (Ponta do Leme), latitude $23°03'38''$S e

[1]Esta imagem foi obtida no *site* `www.cdbrasil.cnpm.embrapa.br` e tratada por Chico Nogueira.

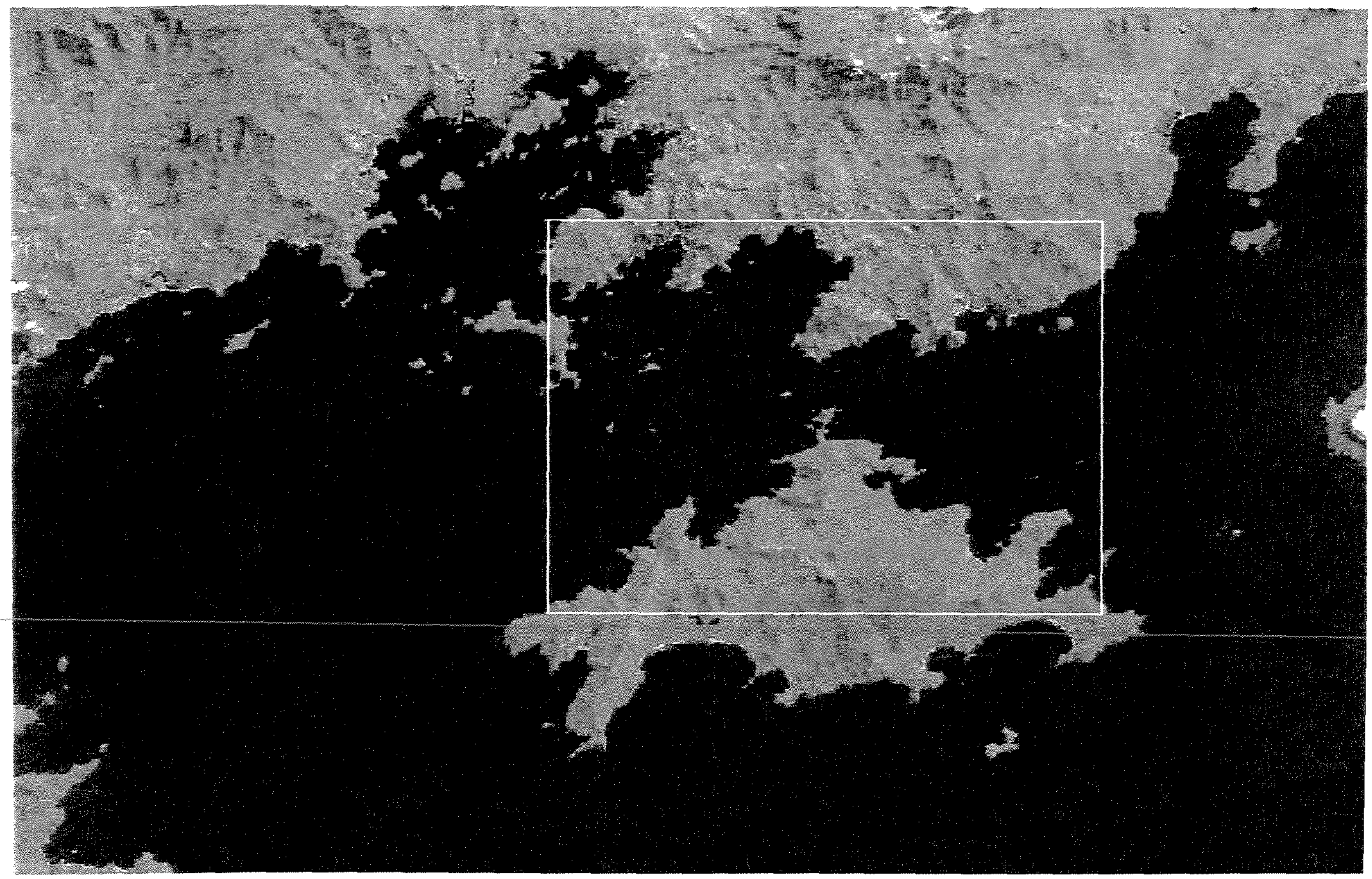


Figura 0.1: A Baía de Ilha Grande.

longitude $44^o 13' 10''$ W, em frente à parte central da Ilha Grande, onde ocorrem operações de carga e descarga de petróleo e derivados. Segundo estatísticas internacionais e nacionais estas são as principais causas de derrames na água e os responsáveis podem ser os navios, e as falhas no terminal e nos oleodutos.

Quando ocorre um derrame de petróleo ou de derivados na água, antes que cessem os efeitos impactantes mais sensíveis desses produtos químicos para o meio ambiente, podem transcorrer dias, no caso de derivados leves, como a gasolina, por exemplo, ou meses e anos, dependendo do tipo de petróleo cru e de aspectos ambientais (temperatura, geografia, vento, correntes e ondas, entre outros). Por exemplo, a imprensa escrita ainda registra efeitos de impacto ambiental causados pelo derrame de 41.580 toneladas de óleo em 1989, do navio petroleiro Exxon Valdez, no Alaska. Segundo dados do IPIECA[2], 1991, *in* Poffo, 2000, a gravidade dos danos causados por um vazamento é influenciada pelo tipo de óleo, pelo volume derramado, por fatores biológicos, condições meteorológicas, estações do ano e métodos de limpeza empregados.

No Brasil, nas regiões sul e sudeste, o local mais freqüentemente atingido por eventos deste tipo é o Canal de São Sebastião, litoral norte de São Paulo, onde se encontra outro terminal da PETROBRAS (DTCS/GTSS ou TEBAR). Desde 1974, ano em que se registra o primeiro grande vazamento causado pelo petroleiro Takimyia Maru, são contabilizadas 220 ocorrências nos 25 anos seguintes. Em 167 casos (75%) os derrames são de pequeno porte, inferiores a $1m^3$, e foram poucos os registros superiores a $2.000m^3$. Este comportamento também está presente em registros internacionais. Uma análise histórica dos derrames no Canal de São Sebastião é encontrada em Poffo, 2000.

O desprazer de notícias de derrame de petróleo no mar nos chega de outros cantos, como os da Baía de Guanabara e da Baía de Ilha Grande que, segundo a imprensa nacional (JB, O Globo e Folha de São Paulo), são anualmente impactadas por derrames de petróleo de pequeno e médio porte, dificilmente comparáveis aos derrames como o do Exxon Valdez ou daqueles ocorridos no Golfo Árabe, durante a guerra entre Irã e Iraque em 1991. Entretanto, segundo Schaeffer-Novelli in Poffo, *op. cit.*, a extensão do impacto ambiental nem sempre é proporcional ao volume vazado. Deve-se levar em conta a toxidade do produto e o grau de sensibilidade dos ecossistemas envolvidos, podendo o dano ser agravado caso haja reincidência no período entre seis meses e dois anos.

O impacto depende de diversos fatores biológicos, químicos e geográficos e os danos biológicos e sociais são sentidos a curto, médio e longo prazos, sendo muitas vezes de difícil quantificação. Áreas abrigadas e de baixa energia como os manguezais, devem ter prioridade nas medidas preventivas (Gundlach e Hayes, in Poffo, *op. cit.*). A superfície em geral é a primeira área atingida e, portanto, os primeiros organismos afetados pertencem ao planctôn, e estão na base da cadeia trófica. Há exemplos de experimentos laboratoriais cujas conseqüências são de mortalidade em 24 horas ou de 3 a 4 dias e redução na taxa de crescimento. Outros experimentos indicam que concentrações de óleo de $0.001 ml/L$ impedem que as larvas de lagosta passem do quarto estágio de desenvolvimento (Wells,1972, *in* Milanelli, 1994) ou indicam ainda que as larvas das cracas são cem vezes mais sensíveis ao óleo do que indivíduos adultos (Evans e Rice, *in* Milanelli, *op. cit.*).

A médio e longo prazo devemos levar em conta a bioacumulação, isto é, frações de óleo absorvidas ou ingeridas e transferidas através da cadeia trófica, acumulando-se nos níveis mais elevados. O cultivo de mexilhões tem sido estimulado na região de Angra dos Reis e estes animais podem acumular em seus tecidos concentrações de hidrocarbonetos mil vezes maiores do que as existentes no meio em que vivem (Wells,1972, *in* Milanelli, *op. cit.*).

O destino do petróleo na água tem sido fonte de pesquisa e de publicação há décadas. De uma forma geral, tais estudos pretendem auxiliar a tomada de decisão das autoridades locais, responsáveis pelas ações de emergência a serem realizadas quando ocorre um derrame de petróleo. Faz parte

[2]Não encontrei o significado desta sigla.

dessas ações o transporte do equipamento de limpeza para o local do derrame, porém anterior a este procedimento há decisões a serem tomadas como do tipo e da quantidade de equipamentos, sua origem, seu transporte e seu uso. Com a chegada dos equipamentos se decide a sua localização, no sentido de proteger as áreas mais estrategicamente sensíveis. Ou seja, o processo de tomada de decisão acontece em três níveis hierárquicos : estratégico, tático e operacional, conforme Psaraftis e Ziogas (1985). Uma versão bastante mais simplificada do organograma encontrado em Psaraftis e Ziogas (1985) é apresentada na figura abaixo.

ESTRATÉGICO

Planejamento de Recursos e Restrições

↓

TÁTICO

Ações Globais em Resposta a Derrames

↓

OPERACIONAL

Ações Locais em Resposta a Derrames

Organismos Internacionais, como o National Oceanic Atmospheric Administration (NOAA), United States Environmental Protection Agency (USEPA) e Environmental Protection Service do Canadá, entre outros, patrocinaram vários grupos de pesquisa no desenvolvimento de modelos computacionais, o que no Brasil vem sendo feito com ações cooperativas entre universidades (como UERJ, UFRG, UFRJ, UNICAMP, UNIVALE e USP), centros de pesquisa (como FIOCRUZ , INPE e LNCC), a PETROBRAS e entidades estaduais (como CETESB, FEEMA e Instituto Ambiental do Paraná).

Os modelos geram cenários de acidentes que podem ser utilizados nos níveis tático e estratégico, em planos de contigência e treinamento (nível operacional) ou em avaliação de impacto ambiental. Ou seja, atuam em um conjunto de ações pré-derrame e, com suas previsões, também em ações pós-derrame. Há ainda os IOSM, *ideal oil spill models* (Cekirge *et al*, 1994), capazes de atuar em tempo real. Esta ferramenta será tão mais aplicada quanto maior for a sua rapidez nas respostas, sua precisão nas previsões, sua capacidade de se ajustar a dados de campo (de preferência em tempo real) e sua fácil relação com o usuário.

Em 1998, segundo Cantão (1998), a PETROBRAS dispunha de um programa denominado SIMOL, em que a mancha é considerada circular e seu centro se move em função da hidrodinâmica local. O tratamento dado é unidimensional em função do raio da mancha. Em visita ao CENPES, em 1998, percebi que a enfâse era dada para imagens de satélite que faziam a distinção de óleo e água, ou seja, uma atitude pós-derrame.

Em janeiro de 2000, em derrame ocorrido na Baía de Guanabara, tanto nos órgãos de imprensa nacionais quanto no *site* da PETROBRAS, [54], nada foi mencionado sobre a utilização de modelos de previsão da movimentação da mancha. A ênfase foi a de insistir que 50, 60, 70% do óleo havia sido recolhido. E o óleo chegou aonde os técnicos acreditavam que não chegaria, na área de manguezal e reserva ambiental de Guapimirim. Ainda em 2000, com os dados obtidos pela farta cobertura dada ao derrame da Baía de Guanabara, Cantão, de Oliveira e Meyer, [5], rodaram um modelo e a mancha simulada atinge Guapimirim, antes de voltar e rodear a Ilha de Paquetá, sem chegar visivelmente à ponte Rio-Niterói o que de fato ocorreu!

Este trabalho pretende modelar o comportamento evolutivo de manchas de óleo (petróleo ou derivados) no período de tempo que sucede um derrame na Baía de Ilha Grande. O tratamento é bidimensional na variável espacial x, que modela a superfície, e a concentração de óleo $u(t, \mathrm{x})$ é considerada em cada ponto x e em cada instante t. Será utilizada equação de difusão-advecção-reação com coeficientes variáveis devido aos diversos fenômenos intervenientes como as sucessivas degradações, a difusividade variando com a concentração do óleo derramado e comportamentos circulatórios de correntes marítimas, obtidas por equação de Stokes para o domínio escolhido por este estudo, o Canal Central da Baía de Ilha Grande. Cenários serão descritos *a priori* e um manual de possibilidades será gerado como resultado das simulações.

Não se deve esperar deste trabalho uma alta precisão quantitativa espacial ou temporal em suas previsões, o que aliás não é o objetivo do trabalho. O entendimento desta aparente ausência de preocupação com a precisão pode ser obtido no capítulo 1. O que se pretende são previsões qualitativamente corretas em termos de comportamentos, tendências e riscos.

No capítulo 1 o fenômeno óleo na água é descrito, com algum detalhe, e as equações que modelam a trajetória da mancha e a circulação no canal central da Baía de Ilha Grande são apresentadas.

No capítulo 2 é apresentada a formulação variacional adotada, bem como resultado de existência e unicidade de solução. As notações utilizadas fazem parte de relação apresentada logo após o índice.

No capítulo 3, as discretizações relacionadas ao método de Galerkin e Crank-Nicolson são apresentadas, bem como estimativas originais de erro.

No capítulo 4, a parte computacional é enfatizada e seus ensaios estão no capítulo 5. As conclusões e sugestões fecham o último capítulo, o sexto.

As implementações são apresentadas no apêndice e resolvemos anexar a carta náutica da região estudada, para facilitar a localização de praias, pontas, enseadas e etc... citadas na descrição de cenários e nas simulações.

Capítulo 1

O Fenômeno, o Modelo e sua Aplicação

Este capítulo apresenta uma rápida descrição do fenômeno petróleo na água, contextualizando-o, apresenta algumas referências a modelos já existentes, suas classificações e justificativa para o uso do modelo explicitado neste trabalho em derrames na região da Baía de Ilha Grande. Estaremos eventualmente trocando a expressão petróleo e seus derivados simplesmente por óleo. Inserido no texto que segue, há um pequeno glossário relativo a petróleo e sua relação com meio ambiente.

1.1 O Petróleo e o Fenômeno

A razão entre a densidade de um óleo e a da água pura, conhecida por densidade relativa, é, para a maioria dos óleos, menor que 1, indicando que o óleo é mais leve do que a água. Quando esta relação é inferior a 0.85 g/L o óleo é classificado como leve. De acordo com a densidade relativa, os óleos são classificados em quatro grupos que constam da tabela 6.1, nos anexos.

Os hidrocarbonetos, compostos de hidrogênio e carbono, são os compostos mais abundantes na composição do petróleo, algo em torno de 98% do total (Bícego, 1988, *in* Poffo, 2000). Além deles há também a presença de compostos com oxigênio, nitrogênio e enxofre (Solomons, 1996) e alguns metais tais como níquel, cobalto e vanádio (NRC, 1985, *in* Poffo, 2000). Dentre os hidrocarbonetos há os que não apresentam ligações múltiplas entre os átomos de carbono e são chamados de compostos saturados pois contêm o maior número possível de átomos de hidrogênio em um composto de carbono. Os insaturados são aqueles compostos que possuem átomos de hidrogênio em menor número e são capazes de reagir com o hidrogênio. Há ainda a classificação entre alifáticos (do grego *aleiphar*, graxa), para aqueles que se comportam como a gordura, e aromáticos . Segundo Poffo, 2000, os aromáticos participam de quase todos os tipos de óleo, são insaturados e relativamente solúveis em água, apresentam maior toxidade e têm baixo ponto de ebulição. São classificados como aromáticos os óleos leves e refinados, como gasolina, querosene e nafta. Os alifáticos estão em maior proporção no petróleo, são saturados, menos tóxicos que os aromáticos e constituem a porção mais rapidamente removida pela degradação biológica.

Segundo Fay (1969, 1970), quando óleo é derramado na água há uma tendência de espalhamento resultante da ação das forças gravitacional e de tensão superficial, ajudadas pelo movimento da superfície induzido por ventos, correntes e marés. As forças que resistem a este espalhamento são a de inércia e a de viscosidade. Óleos com baixa densidade relativa apresentam alta taxa de espalhamento (Poffo, 2000), taxa esta que aumenta com a elevação da temperatura e consequente redução da tensão superficial. A viscosidade do óleo depende da participação de componentes aromáticos; quanto mais leve for o óleo menor é a resistência ao espalhamento, isto é, a viscosidade. Quanto maior a temperatura menor a viscosidade.

Nas horas iniciais de um derrame, a gravidade e a inércia dominam, havendo um espalhamento horizontal e vertical, até uma certa altura, que é função do volume de óleo derramado, e formando um piscinão de óleo. Esta é, ainda de acordo com Fay, a primeira fase do fenômeno e o espalhamento é chamado de inercial.

O espalhamento horizontal continua, ampliando a área superficial da mancha, a espessura diminui e atinge um valor crítico a partir do qual a viscosidade domina a inércia. Esta é a denominada segunda fase de Fay, cujo espalhamento é chamado de viscoso e pode durar semanas.

Com a camada de óleo já bem fina, a atuação da gravidade é dominada pela tensão superficial. Estamos na terceira fase de Fay, em que o óleo tem suas propriedades físico-químicas bastante alteradas ocasionando a interrupção do espalhamento e evidenciando um comportamento majoritariamente advectivo.

Em geral, derramamentos costeiros são identificados ou de imediato ou poucas horas após sua ocorrência, o que significa que a efetivação de atividade de contenção, controle, proteção e limpeza irão dar-se durante aquilo que Fay chama de fase viscosa-gravitacional, ou segunda fase. Estaremos modelando o fenômeno nesta fase, a de espalhamento viscoso. Ou seja, passaram-se algumas horas após o início do derrame e a mancha pode ser vista como um conjunto conexo de espessura aproximadamente homogênea e de poucos centímetros ou milímetros, que começará a ser influenciada e a se movimentar pela ação dos ventos, correntes e marés. A resultante destes movimentos advectivos é o principal mecanismo que faz mover a mancha. Além disso, consideramos o movimento difusivo, que não deve ser confundido com a difusão apenas molecular e sim considerado como uma difusão efetiva, relacionada a tensão superficial e turbulência (Csanady, *in* Barrientos, Marchuck e Okubo). A difusão causa um aumento gradativo na aréa da superfície da mancha.

O óleo irá sofrer alteração em suas características físico-químicas e a mancha vai sofrer perdas em sua massa causadas pela ação de agentes naturais[1] (temperatura, vento, correntes, marés, ondas, luminosidade, bactérias entre outros) e também por agentes químicos. As perdas principais ocasionadas por agentes naturais são aquelas oriundas da evaporação, dispersão na coluna d'água e encalhe (Cekirge *et al*, 1994). Também podem ser inseridos produtos químicos ou biológicos (bactérias) que

[1]Estamos aqui utilizando a expressão agentes naturais como tradução livre de *weathering processes*, encontrada nos artigos de Barrientos (1980), Coon *et al* (1990), Carro *et al* (1993) entre outros.

reduzam a permanência do óleo no ambiente.

A principal entre estas perdas é a ocasionada pela evaporação inicial de alguns componentes do petróleo e ocorre mais intensamente nas primeiras horas do derrame (Sen Gupta *et al*, 1993; Drapeau *et al*, 1975; Kolluru e Mendelson, 1995; Salas de Leon, 1986; Cekirge, 1992). Na literatura, encontra-se estimativa para esta perda oscilando entre 25% a 60% num período que varia de 2 horas após o derrame até as primeiras 24 horas, assim como encontram-se modelos para prever a parcela a se evaporar (Cantão, 1998, Cuesta *el al*, 1990, Mackay *el al*, 1980, entre outros). A maioria dos artigos apresenta seus resultados de evaporação para mar aberto e não para uma região de águas tranquilas e semi-fechada, como é a Baía de Ilha Grande.

A dispersão na coluna d'água tem as ondas e a turbulência na superfície do meio aquático como principais agentes, segundo Cekirge, 1992, Delvigne, 1991, e Cohen *et al*, 1980. Evidentemente, tais fatores têm menor importância à medida que o meio se torna, do ponto de vista de energia física, gradativamente mais calmo .

A oxidação, reação dos componentes hidrocarbonetos do petróleo com o oxigênio, muitas vezes causadas pela luz do sol e tendo por resultante um produto solúvel ou formação de piche, e a biodegradação, em que as parcelas mais pesadas do óleo são degradadas por bactérias que existem no mar, têm efeito menor se comparadas às outras formas de degradação do óleo citadas acima. Cohen *et al, op. cit.*, consideram que a dissolução tem efeito negligenciável sobre a composição da mancha.

Segundo Sen Gupta *et al* (*op. cit.*), em águas mornas tropicais os processos de degradação acontecem bastante rápido e uma "estimativa otimista" para o conjunto de perdas seria de 50% nas primeiras vinte e quatro horas, percentual este que varia com o tipo de óleo.

Quando o derrame atinge áreas costeiras, a mancha pode sofrer encalhe. A extensão do encalhe depende da área atingida pelas marés (Gundlach, 1987). Se a maré é vazante o óleo será depositado de acordo com a espessura da mancha e a distância da costa. Se a maré é crescente o óleo depositado poderá ser removido. O depósito de óleo ocorrerá até atingir o máximo da capacidade de retenção da área atingida, que é função da densidade da mancha e da inclinação da costeria. A remoção, bem como o depósito, dependem do tipo da área costeira atingida. Numa praia de cascalho é mais difícil de haver remoção do que numa praia arenosa. Neste mesmo artigo de Gundlach é apresentada tabela em que o percentual removido em praias de areia com ondas pequenas é de 18% a 26%, enquanto que em costeiras rochosas é de 60% a 63%. No Canal de São Sebastião, segundo Lopes *et al*, 2001, entre as praias arenosas, as mais sensíveis são as compostas por sedimentos mais finos, com menor declive e ação das ondas.

Os agentes naturais podem também causar um ganho de volume da mancha através da emulsificação, processo pelo qual o óleo absorve água formando uma mousse marrom, responsável pela maior persistência dos óleos leves e medianamente cru (ver classificação no tabela 6.1, em anexos) no ambiente aquático. O efeito da emulsificação e a estabilidade das mousses foram pouco estudadas em regiões semi-fechadas, segundo Mackay *et al*, 1980. Este artigo de Mackay *et al* apresenta resultado de estudos realizados em laboratório e cita o pouco entendimento deste processo em mares tranquilos.

1.2 Os Modelos

Historicamente, chegar a um modelo matemático se constitui em uma longa trajetória inclusive na escolha da perspectiva da análise do derrame. Todos os modelos levam em consideração alguns dos aspectos dentre espalhamento da mancha, os efeitos de ventos, correntes e marés no transporte da mancha, as perdas por evaporação, dispersão na coluna d'agua e encalhe, além de emulsificação, sedimentação, entre outros.

Segundo Mackay *et al*, 1980, os modelos podem ser classificados em modelos comportamentais, que tentam quantificar a ação dos agentes naturais nas propriedades físico-químicas do óleo, e modelos de trajetória, que descrevem a advecção e o espalhamento de óleo no mar.

Segundo Cekirge, 1992, e Salas de Leon, 1986, os modelos existentes podem ser classificados em modelos de primeira, segunda e terceira gerações.

Na primeira geração os modelos não levam em consideração ventos, correntes e marés; aqui estão Blokker, 1964, e Fay, 1975, que trabalham com equações empíricas e com a mancha circular ou retangular.

A segunda geração considera a resultante de ventos, correntes e marés e a equação de difusão-advecção, mas, segundo Cekirge, 1992, sua análise da hidrodinâmica e do destino da mancha é limitada pela utilização de modelos bidimensionais e computadores que não comportam os cálculos intensos das versões tridimensionais e resposta em tempo real. Aqui estão Benqué *et al* (1982, *in* Cuesta *et al*, [16]), Cuesta e Giralt (1990), Cantão (1998) e Cantão, de Oliveira e Meyer (2000).

A terceira geração é constituída pelos *ideal oil spill modelling*, que segundo Cekirge (1994) consistem de um conjunto de submodelos que descrevem os processos de transporte advectivo e difusivo e o espalhamento, fazendo-o tridimensionalmente, bem como a evaporação, a dispersão vertical e a emulsificação. Esta geração, segundo Spaulding (1988, *in* Elliot, 1991) substitui aquela que faz uso das três fases de Fay. Aqui está certamente Cekirge (1994) e talvez Coon *et al* (1990), Elliot (1991) e Lardner *et al* (1993). Entretanto, são muitos os modelos que não se enquadram nesta classificação por um motivo ou por outro, evidenciando, mais uma vez, que classificações muito rígidas invariavelmente se vêem em dificuldade.

Em Meyer, 1994, os artigos, publicações e avaliações que existem na literatura dos derrames de petróleo, podem ser classificados em três categorias distintas, embora complementares e necessárias.

A primeira categoria apresenta uma visão posterior ao derrame, como é o caso de artigos encontrados em Oil and Gas Journal, em 1989 e 1990, nos trabalhos Industry learning from oil spills e Clean-up Analysis, em Poffo, 2000, ou ainda na Revista Meio Ambiente Industrial, 2001, no artigo Atendimento Emergencial ao Derrame de Óleo Ocorrido em São Sebastião (SP), provocado pelo Navio "Vergina II", que apresentam dados, relatos de impactos e avaliação dos procedimentos tomados.

A segunda apresenta uma visão durante o derrame, inclusive com testemunhos de técnicos e pesquisadores, como por exemplo o trabalho de Pellew, R.: *Gulf Pollution-How Bad is it?*, 1990.

Na terceira postura, na qual se situa esta tese, está a visão anterior, em que cenários são definidos a priori e resultados são simulados criando assim um manual de possibilidades: um estudo de caso efetivo, em que se prevê o movimento, a posição futura e a trajetória de uma mancha no espaço e no tempo.

Esta tese faz uso dos três regimes de Fay, e se aplica a sua segunda fase, uma vez que trata de derrames costeiros, em geral notificados ou conhecidos ou até descobertos algumas horas depois do fato ocorrido.

Neste trabalho há diferenças em alguns fatores primordiais relativamente aos trabalhos citados anteriormente, como o tratamento específico para condições de contorno relativas a topografia da costa e para o comportamento da circulação, mas a decisão de usar equações diferenciais parciais não lineares se mantém.

1.3 O Modelo

A equação de difusão-advecção-reação para u representando a concentração de certa substância tem sua origem nas leis de conservação e seu formato mais geral dado por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + div(fluxo) + decaimento = fonte.$$

Muitos dela fizeram uso e dentre esses muitos citamos os clássicos[2] Nihoul (1975) no estudo de sistemas marinhos, Okubo (1980) em estudos de problemas ecológicos e Marchuk (1986) em problemas gerais de poluição ambiental.

No artigo de Cuesta, Grau e Giralt (1990) a equação de difusão-advecção aparece modelando a espessura da mancha de óleo no mar e o decaimento representa a evaporação, obtida de uma equação acoplada. No trabalho de Carro *et al* (fotocópia não identificada) a equação de difusão-advecção para a concentração não tem a parcela de decaimento, as perdas são modeladas à parte apenas como sedimentação. Salas de Leon (1986) faz uso das equações de Nihoul (1983), que propõe um modelo não linear e um tratamento bem distinto daquele que faremos aqui.

Uma dificuldade em todos estes modelos está na parametrização de alguns dos termos: fluxo, decaimento, fonte e ainda nas condições iniciais e de fronteira. Vamos a seguir apresentar essas dificuldades, além das simplificações e parametrizações conseqüentes.

[2] Clássicos no sentido de sobreviver às modas e ao tempo.

1.3.1 O Domínio Espacial

Como a densidade do óleo é menor que a da água, o óleo bóia. Na segunda fase, a espessura da mancha é de apenas poucos centímetros ou milímetros e será considerada homogênea em primeira simplificação. Além disto, o domínio espacial objeto deste estudo, o Canal Central, tem seu maior comprimento na direção oeste-leste em torno de 24 km, bastante superior à profundidade máxima de 55 metros em alguns poucos locais. Estes argumentos pretendem justificar o tratamento bidimensional para a variável espacial $\mathrm{x} = (x, y)$, indicando coordenadas superficiais. Assim $u(t, \mathrm{x})$ representa a concentração do óleo no ponto (x, y) da superfície e no instante t. Esta simplificação é bastante difundida nas atividades de modelar fenômenos de derrames.

Por que é que o Canal Central provoca maior interesse? O motivo é o de concentrarem-se, nesta porção da Baía de Ilha Grande, a grande maioria de atividades relevantes da região: criação, pesca costeira, turismo; além de estar aí o terminal da PETROBRAS. Outro motivo é o comportamento da circulação local, que será elucidado a seguir.

1.3.2 O Fluxo

Segundo Fay, após as primeiras horas do derrame, a mancha começa a se mover e sofre influência de ventos, correntes e marés ao mesmo tempo que se espalha.

É assumido que a mancha se movimenta à mesma[3] velocidade da água do mar, cujo fluxo não é laminar, ou seja, invariavelmente deve-se levar em conta turbulência. Segundo Csanady (1973):

> *... os movimentos turbulentos têm provado ser um dos mais intratáveis problemas das ciências físicas ...*

Csanady adota um procedimento estatístico para fluxo turbulento.

Vamos considerar o fluxo em duas parcelas: advectivo, modelando os movimentos macroscópicos do mar causados por correntes, marés e vento, e difusivo, optando pela modelagem da difusão efetiva, que contem os efeitos da difusão molecular e da turbulenta, esta última acontecendo em escalas superiores à primeira e sendo bastante mais ... efetiva ([42], [36]). Assim,

$$fluxo = fluxo\ advectivo + fluxo\ difusivo.$$

Do ponto de vista teórico-físico, o modelo matemático deve levar em consideração os movimentos de caráter aleatório, oriundos da diversidade das escalas e formas dos vórtices constituintes do fluxo turbulento, e por isso mesmo chamado de fluxo difusivo. Pretendemos, com a difusão efetiva, contabilizar o movimento irregular das partículas de óleo, que proporciona um movimento regular no

[3] Há controvérsias. Sen Gupta, [51], diz que nesta fase a velocidade do óleo é maior que a da água do mar, pois a tensão superficial do óleo é menor .

todo. Neste sentido, a escolha de variável espacial bidimensional na superfície indica que estaremos considerando a difusão horizontal que, segundo Okubo (1980), é de fato muito maior em ordem de magnitude do que a vertical. Uma outra razão para esta regularidade é a formulação variacional, também chamada de formulação média, obtida pela integração sobre o domínio como um todo.

Para a modelagem matemática das flutuações, na circulação superficial local, referentes ao fluxo difusivo, faremos uma analogia com a lei de Fick, ou seja,

$$fluxo\ difusivo = -\alpha \nabla u,$$

sendo o gradiente de u considerado em relação às coordenadas espaciais. Chamamos o coeficiente α de difusividade (entendida como difusividade efetiva). Pela participação turbulenta, α deve ser função de t e de x e, pelas características da substância derramada no mar, o óleo, pensamos num aspecto não linear considerando $\alpha(u)$ ou ainda $\alpha(t, \mathrm{x}, u)$. O valor mínimo de α representa a difusividade molecular. A literatura destaca fórmulas relacionando a escala do fenômeno ao coeficiente de difusividade; tais fórmulas em geral indicam o crescimento de α com a magnitude da escala do fenômeno.

Nihoul (1973) tece sérias críticas à representação do fluxo turbulento tal como descrita acima. As escalas espaciais para cobrir os movimentos rápidos dos vórtices deveriam ser bem menores que as adotadas pelos modelos matemáticos e de simulação, que em geral sacrificam os *insights* físicos em prol de escalas relevantes para a observação do fenômeno e para a estabilidade dos algoritmos. Assim, segundo Nihoul (1973), os conceitos de difusividade turbulenta são utilizados apenas como artifícios numéricos sem nenhum significado físico. Por outro lado, a formulação variacional se presta à consideração global, inclusive, porque descreve o fenômeno "na média".

É do *fluxo advectivo*, que representamos por Wu, a maior influência na movimentação da mancha de óleo. Neste trabalho, W representa a circulação local e é considerado como a resultante do comportamento médio da circulação superficial com a corrente superficial induzida pelo vento. Matematicamente[4],

$$W = c_v W_v + W_p,$$

sendo W_v o vetor de vento a 10 metros acima da superfície do mar, W_p a circulação superficial padrão do Canal Central e c_v constante de proporcionalidade, que segundo Lardner *et al*, [29], tem recebido valores de 1% a 6%, sendo os mais utilizados 3% e 3,5%.

Considera-se também uma rotação de ângulo θ para o vetor W_v , relacionado às forças de Coriolis e que foi obtido a partir de procedimentos empíricos realizados no local analisado. Para o Golfo Árabe, região da qual tratam Lardner *et al* (*op. cit.*), $\theta = 26^o 2'$ foi obtido como função da velocidade de vento, através da fórmula

$$\theta = be^{-\frac{av^3}{g\gamma}},$$

sendo g a aceleração da gravidade, γ a viscosidade cinemática da água do mar, v a velocidade do vento e os parâmetros a e b foram ajustados através de dados obtidos para o Golfo.

[4]Esta abordagem é bastante difundida na modelagem do *fluxo advectivo*.

É geral e notória a dificuldade em se obter dados de qualidade para vento. Estes dados são obtidos a partir de locais de observação, em geral distantes, onde medidas são feitas ou são obtidos por modelos de circulação, tais como o modelo estatístico de Paluszkiewicz (1988), ou as equações de Navier-Stokes do trabalho de Signorini (1980). Os resultados do modelo de Signorini foram ponderados pela distribuição de freqüências das direções de vento, obtidas por série histórica para região da Baía de Ilha Grande.

Para a parcela W_v de W abrimos mão da deflexão e trabalhamos com 3% do vetores de vento que ocorrem com maior frequência na região, representativos de cenários escolhidos no capítulo 5, e que serão invariantes no domínio considerado. Em outras palavras, os dados também são "na média"!

A circulação na Baía de Ilha Grande foi objeto de estudo dos trabalhos de Signorini (1980) e Corrêa (1994), entre outros por eles citados, realizados no Instituto Oceanográfico da USP.

Signorini enfatizou a relação existente entre a circulação na Baía da Ilha Grande e na baía adjacente, a Baía de Sepetiba. Utilizou dados cedidos pela Diretoria de Hidrografia e Navegação[5], dados obtidos em pesquisa de campo realizada pelo Instituto Oceanográfico da USP em 1975 e 1977, dados de vento medidos na Área Militar de Santa Cruz entre setembro de 1974 a dezembro de 1975 e, ainda, utilizou "*uma inesperada fonte de evidência para a circulação*" dada por um derrame de petróleo ocorrido na Ilha de São Sebastião em janeiro de 1978.

Não satisfeito com a qualidade dos dados para suas asserções, Signorini modelou a corrente e a influência dos ventos na circulação da Baía da Ilha Grande. Isto tudo para afirmar, entre outras coisas, que a circulação ocorre no sentido horário ao redor da Ilha Grande: entra pela Porção Oeste passa pelo Canal Central e sai pela Porção Leste. Tem comportamento quasi-estacionário, que dura por períodos maiores que os das marés, evidenciando uma relativa independência das marés. Este comportamento foi mantido mesmo na ausência de ventos.

Corrêa utilizou dados obtidos no período de 23 a 29 de janeiro de 1982 em 5 pontos localizados dentro e ao largo da Baía de Ilha Grande, com 24 horas de dados para cada estação. Conclui pela existência de uma circulação intensa e unidirecional, nas camadas superiores a 5 metros de profundidade , da Porção Oeste para a Porção Leste através do Canal Central, com pouca influência de ventos e marés. O fluxo só não é estacionário no período de 24 horas porque há alteração de intensidade.

Este caráter quasi-estacionário, com pouca influência das marés, descrito acima, nos levou a modelar a circulação superficial padrão W_p como função apenas da variável espacial x. Assim o campo W_p não modela em primeira aproximação as marés. A "variação temporal" só aparecerá na mudança de cenários de vento.

Para o modelo de simulação, portanto, o campo vetorial W_p é obtido pela equação de Stokes

$$-div(\nabla W_p) + \nabla P = g, \tag{1.3.1}$$

[5]Quando, no trabalho citado de Meyer, de Oliveira e Cantão, em 2000, foram solicitadas as informações à DHN, foram fornecidas de modo amplo, imediato e generoso.

supondo $divW_p = 0$, com condições de fronteira de Dirichlet para W_p. Utilizamos o programa implementado por D'Afonseca e Cantão [6], com as condições de fronteira retiradas de Signorini (1980) e Correa (1994). O comportamento de circular ao redor da Ilha Grande no sentido horário é mantido, mas aparecem vetores de magnitude pouco realista em enseada nas proximidades de Monsuaba e Verolme. Esta aproximação talvez seja o preço maior que devemos pagar por considerarmos um domínio bidimensional.

1.3.3 O Decaimento

Pretendemos com a parcela do *decaimento* modelar algumas das perdas do óleo causadas pelos agentes naturais. Não adotamos esquema especial para modelar a principal entre estas perdas, a evaporação. Ao supormos que estamos na segunda fase de Fay, a perda fundamental causada pela evaporação já terá ocorrido nas horas anteriores.

A Baía de Ilha Grande tem águas tropicais tranqüilas e, assim, descartamos um tratamento em separado para a dispersão na coluna d'agua e a dissolução, optando por incorporar estas perdas num decaimento linear global.

O encalhe depende do movimento das marés, que nós optamos por não modelar, conforme descrito acima. Entretanto, tentaremos incluí-lo nas condições de fronteira, onde ocorre.

Portanto, o decaimento será uma totalização em percentual ρ da concentração perdida pela soma dos efeitos da evaporação que ocorre ainda a partir das horas iniciais, da oxidação e da biodegradação. Este percentual será tratado como uma função $\rho(t, \mathrm{x})$.

Apesar da emulsificação promover um ganho de volume da mancha, a pouca informação sobre este processo em regiões semi-fechadas nos convenceu a não considerá-la diretamente, incluindo-a na perda líquida. Entretanto isto pode vir a ser mais uma fonte de erro, pois, segundo Krogh (1984), *in* Cekirge *et al* (1994), o aumento de volume poderia compensar as perdas sofridas em outros processos.

1.3.4 O Problema a ser Resolvido

A partir dessas considerações, a equação de difusão-advecção-reação com a qual trabalharemos é

$$\frac{\partial u}{\partial t} + div(-\alpha \nabla u + Wu) + \rho u = f, \tag{1.3.2}$$

sendo $f(t, \mathrm{x})$ a fonte poluente.

A condição inicial é dada por $u(0, \mathrm{x}) = u_0(\mathrm{x})$ e as condições de fronteira são de três tipos:

(*i*) Para as fronteiras de mar aberto não atingidas pela mancha ou a montante da corrente e representadas por Γ_2, temos

[6] A aproximação desta equação é feita com elementos finitos de segunda ordem.

$$u|_{\Gamma_2} = 0,$$

(*ii*) Para as fronteiras de mar aberto por onde a mancha passa, representadas por Γ_1, temos

$$-\alpha\frac{\partial u}{\partial \eta}|_{\Gamma_1} = p(W \bullet \eta)u = pW_\eta u,$$

(*iii*) Para as fronteiras ao longo da costa e das ilhas, em que pode ocorrer o encalhe, e representadas Γ_0, temos

$$-\alpha\frac{\partial u}{\partial \eta}|_{\Gamma_0} = ku.$$

O parâmetro p representa um percentual de passagem e o parâmetro $(1-k)$ representa a porção acumulada ao longo da costa. Como a abordagem usada neste trabalho não considera o comportamento temporal de marés, o parâmetro k pode ser considerado como

$$k(t, \mathbf{x}) = h(t)r(\mathbf{x}),$$

sendo $h(t)$ uma função periódica, que simula o depósito de óleo na maré baixa e a remoção na maré alta. Para distinguir as costeiras rochosas das praias de areia, r pode ser uma função de $\mathbf{x}$ assumindo dois valores distintos. Entretanto, no que segue trabalhamos com $k = 0$, ou seja não há perda significativa de óleo para a costa.

Capítulo 2

O Problema Matemático

A seguir faremos algumas considerações matemáticas para o problema descrito em 1.3.4, no intuito de chegarmos à sua formulação variacional. Também obteremos desigualdades absolutamente necessárias para concluirmos, por exemplo, a existência e unicidade de solução fraca.

2.1 O Domínio e o Problema

Consideremos a porção da Baía de Ilha Grande vista na figura 2.1. Este é o que chamamos de Canal Central.

No domínio matemático foram consideradas apenas as maiores ilhas, a saber: Gipóia, Macacos, Porcos e Maia, além da Ilha Grande, claro. O terminal da PETROBRAS (TEBIG) pode ser melhor visualizado na figura 0.1.

Matematicamente, trataremos esta porção de mar como um aberto Ω de $\mathbb{R}^2$, limitado e de bordo $\partial\Omega$, suficientemente regular para definirmos, por exemplo, o vetor normal exterior unitário η ao seu redor (figura 2.2).

O movimento da mancha de petróleo é modelado pelo problema abstrato

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - div(\alpha(u)\nabla u) + div(Wu) + \rho u = f, \ (t, \boldsymbol{x}) \in (0, T) \times \Omega, \\ u(0, \boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}), \ \boldsymbol{x} \in \Omega, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

para algum $T > 0$ fixado. As fronteiras foram divididas em três tipos Γ_0, Γ_1 e Γ_2, definidos na seção 1.3.4 e relacionados às condições de Neumann e de Dirichlet:

Para as fronteiras ao longo da costa e das ilhas,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \ (t, \boldsymbol{x}) \in [0, T] \times \Gamma_0,$$

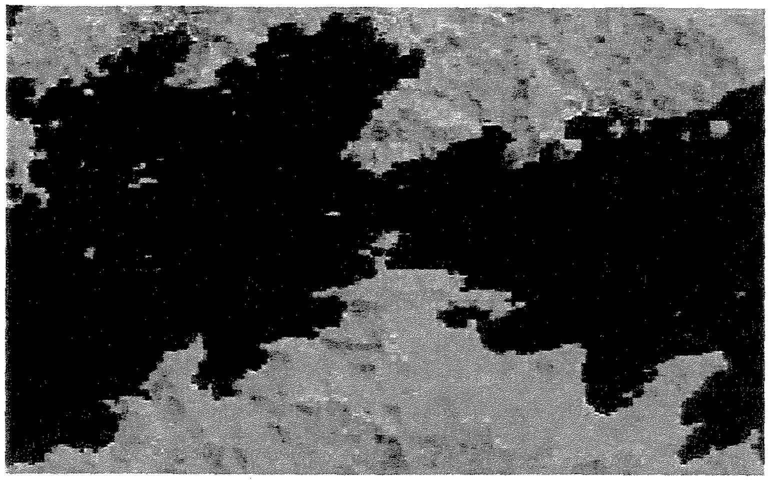


Figura 2.1: O canal central da Baía de Ilha Grande.

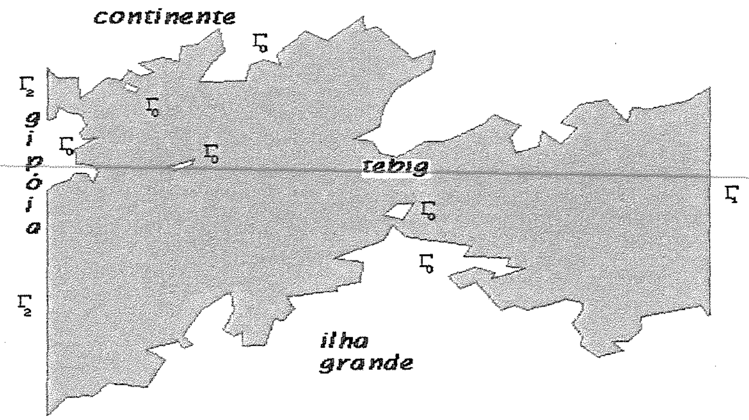


Figura 2.2: Temos $\partial\Omega$ assinalada em vermelho.

para as fronteiras de mar por onde a mancha passa,

$$-\alpha(u)\frac{\partial u}{\partial \eta} = pW_\eta u, \ (t, \boldsymbol{x}) \in [0, T] \times \Gamma_1,$$

e para as fronteiras de mar não atingidas pela mancha

$$u = 0, \ (t, \boldsymbol{x}) \in [0, T] \times \Gamma_2.$$

A escolha das fronteiras Γ_1 e Γ_2, tal como consta na figura (2.2), é justificada por aspectos físicos e geográficos associados à circulação de água e ao vento. De fato, a circulação na baía se dá no sentido horário ao redor da Ilha Grande, ou seja, entra pela entrada oeste e sai pela leste. A entrada oeste, pela geografia da região, está mais protegida de ventos estritamente de leste e sul-leste. Neste sentido, acreditamos que num cenário mais provável de acidente, dentro dos limites de Ω, a probabilidade de uma mancha atingir as fronteiras Γ_2 é pequena. É claro que se o acidente acontece muito próximo destas fronteiras devemos ou ampliar o domínio Ω no intuito de manter, se possível, as condições como descritas acima ou mudar as condições de fronteira.

Os mesmos argumentos podem ser utilizados para justificar uma provável passagem da mancha pela fronteira Γ_1, exceto pelo fato de que neste caso temos uma maior variedade de ventos atingindo está porção da baía.

As fronteiras Γ_0 certamente mereciam um tratamento que diferenciasse, pelo menos,os costões rochosos das praias. Mas, inicialmente e como já adiantado em 1.3.4, trataremos costões e praias da mesma forma.

As funções

$$f : (0, T) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

e

$$u_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

são dadas, assim como os coeficientes

$$\alpha(u), \ \rho(t, x)$$

e o campo de velocidades

$$W = (W_1, W_2).$$

Definimos $\Omega_T \equiv (0, T) \times \Omega$ e consideramos ρ em $L^\infty(\Omega_T)$, ou simplesmente uma constante, a função f será considerada em $L^2(\Omega_T)$ e u_0 em $L^2(\Omega)$. Tais considerações são plenamente justificáveis do ponto de vista da aplicação uma vez que f representa uma fonte poluente (discutida na seção 4.3.2), u_0 a condição inicial e ρ um percentual de perdas. Quanto à W e α faremos comentários na seção seguinte.

2.2 Hipóteses Simplicadoras

Adotamos algumas hipóteses simplificadoras, que especificamos:

(h1) Considerada no sentido de Marchuk [36] e Okubo [42] e como função da concentração, a difusão deve ser limitada inferior e superiormente, isto é, existem constantes α_{inf} e α_{sup} tais que

$$0 < \alpha_{inf} \leq \alpha(u) \leq \alpha_{sup}.$$

Poderíamos pensar, por exemplo, em α_{inf} sendo a difusão molecular na situação de menor mobilidade;

(h2) Ainda quanto à difusão precisamos de uma condição Lipschitziana. Portanto, supomos a existência de constante positiva K tal que

$$\|\alpha(w) - \alpha(v)\| \leq K\|w - v\|, \forall w, v \in L^2(\Omega),$$

o que implica ser α Lipschitziana como função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. De fato, considerando w e v funções constantes de Ω em $\mathbb{R}$ temos

$$\int_\Omega |\alpha(w) - \alpha(v)|^2 d\Omega \leq K^2 \int_\Omega |w - v|^2 d\Omega$$

donde segue que

$$|\alpha(w) - \alpha(v)| \leq K|w - v|.$$

Esta condição expressa o bom comportamento da difusão no meio homogêneo: água do mar. Ou ainda, para um mesmo óleo, pequenas variações na concentração correspondem a pequenas variações na difusibilidade, durante a segunda fase de Fay;

(h3) Como os cenários de vento, corrente e marés são descritivos do que efetivamente ocorre, podemos supor o campo $W(x, y) = (W_1(x, y), W_2(x, y))$ satisfazendo

$$|W_i(x, y)| \leq \widetilde{W}, i = 1, 2.$$

Esta constante positiva $\widetilde{W}$ poderá ser obtida por exemplo em Correa [14] ou mesmo a partir de dados oficiais junto à Diretoria de Hidrografia e Navegação.

(h4) O caráter quasi-estacionário do campo W nos levou a obtê-lo através da equação 1.3.1, em que fizemos $divW = 0$, manteremos esta hipótese.

2.3 A Formulação Variacional

Pretendemos garantir existência e unicidade de solução fraca para (2.1.1), para tal precisamos inicialmente definir a formulação variacional do problema sobre a qual trabalharemos.

Para as funções de variáveis espaciais, trabalhamos essencialmente com subespaços de $L^2(\Omega)$ e de $H^1(\Omega)$. Para o produto interno em $L^2(\Omega)$ adotamos a notação

$$(u, v) = \int_\Omega uv d\Omega,$$

ou, caso haja possibilidade de dúvida, aparecerá com sub-índice, isto é, $(.,.)_{L^2(\Omega)}$ e para a norma temos

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega u^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Quando estivermos em $H^1(\Omega)$ temos

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x})_{L^2(\Omega)} + (\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y})_{L^2(\Omega)}$$

e

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\frac{\partial u}{\partial x}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\frac{\partial u}{\partial y}\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Considerando Ω aberto limitado de classe C^1, definimos V como o subespaço vetorial de $H^1(\Omega)$ dado por

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_2=0} \right\},$$

sendo a expressão $v|_{\Gamma_2=0}$ entendida no sentido do traço.

O Teorema do Traço, na versão aqui utilizada e encontrada em [41], garante que:

> Se Ω for limitado e com fronteira localmente Lipschitiziana, existem um operador linear limitado
>
> $$T : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega),$$
>
> e uma constante C, que depende de Ω, tais que
>
> $$\|Tv\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)},$$
>
> para cada $v \in H^1(\Omega)$.

Temos $\partial\Omega = \bigcup_{n=0}^{n=2} \Gamma_n$ e utilizamos o teorema acima para dar sentido à definição de V e também garantir que este é um subespaço fechado de $H^1(\Omega)$. Portanto, com o produto interno e a norma induzida, V é um espaço de Hilbert e separável. Além disso, valem as inclusões algébricas

$$H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

e precisaremos de resultados de densidade e inclusões contínuas (e compactas) para

$$V \subset L^2(\Omega). \tag{2.3.1}$$

Pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, [2], a inclusão $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ é contínua e compacta. Como a norma de V é a de $H^1(\Omega)$ o mesmo pode ser dito para (2.3.1).

O espaço de funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω, representado por $C_c^\infty(\Omega)$, é denso em $H_0^1(\Omega)$, por definição. Pela inclusão contínua de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ segue que $C_c^\infty(\Omega)$ é um subespaço de V denso em $L^2(\Omega)$. Resumindo, obtemos que:

(i) Os espaços V e $L^2(\Omega)$ são de Hilbert e separáveis.

(ii) A inclusão $V \subset L^2(\Omega)$ é contínua e compacta.

(iii) O subespaço V é denso em $L^2(\Omega)$.

O espaço $L^2(\Omega)$ é reflexivo, portanto, podemos identificá-lo com o seu dual. Sendo V' o dual de V e com os resultados descritos acima obtemos que as inclusões

$$V \subset L^2(\Omega) \subset V'$$

são contínuas e densas.

A solução $u(t, \boldsymbol{x})$ de variáveis $t \in [0, T]$ e $\boldsymbol{x} \in \Omega$ será considerada como uma família em t de funções de x , isto é, sendo V um espaço de funções, então

$$\boldsymbol{u} : [0, T] \longrightarrow V$$

será vista da seguinte forma

$$\boldsymbol{u}(t) = u(t, .) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

sendo

$$[\boldsymbol{u}(t)](\boldsymbol{x}) = u(t, \boldsymbol{x}),$$

para $t \in [0, T]$.

Faremos o mesmo com $f(t, \boldsymbol{x})$ definindo

$$\boldsymbol{f} : [0, T] \longrightarrow L^2(\Omega)$$

por

$$[\boldsymbol{f}(t)](x) = f(t, x).$$

Definimos

$$\boldsymbol{u}' : [0, T] \longrightarrow V'$$

por

$$< \boldsymbol{u}'(t), v >= (\frac{\partial u}{\partial t}(t), v),$$

com $\frac{\partial u}{\partial t}$ considerada no sentido das distribuições, isto é, existe uma única $\Psi \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ tal que

$$-\int_0^T \boldsymbol{u}(t)\Phi'(t)dt = \int_0^T \Psi(t)\Phi(t)dt,$$

para qualquer função $\Phi \in C_c^\infty(0, T)$; fazemos $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Psi$.

O que faremos a seguir é obter formalmente a formulação variacional do problema (2.1.1).

Fixado t, multiplicamos a equação diferencial de (2.1.1) por funções $v \in V$ e integramos em relação a $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Formalmente obtemos

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} v d\Omega + \int_\Omega \alpha(u)(\nabla_{\boldsymbol{x}} u \bullet \nabla v) d\Omega + \int_\Omega (W \bullet \nabla u) v d\Omega + \int_\Omega \rho u v d\Omega + \int_{\Gamma_1} p(W \bullet \eta) u v dS = \int_\Omega f v d\Omega, \tag{2.3.2}$$

onde utilizamos o $divW = 0$, o teorema de Green e aplicamos as condições de fronteira.

A notação $\nabla_{\boldsymbol{x}}$ foi utilizada para deixar claro que operador gradiente foi realizado apenas para as variáveis espaciais $\boldsymbol{x} = (x, y)$, ou seja,

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}).$$

Uma vez que só aplicaremos o gradiente em relação a (x, y), vamos utilizar simplesmente

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}).$$

Para o produto interno em $L^2(\Gamma_1)$ adotamos a notação

$$(u, v)_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_1} uvdS.$$

e ainda

$$\int_{\Gamma_1} p\,(W \bullet \eta)\, uvdS = \int_{\Gamma_1} pW_\eta uvdS.$$

Além destas, para u e v em $H^1(\Omega)$ fazemos

$$(\alpha(u)\nabla u, \nabla v) = \int_\Omega \alpha(u)(\nabla u \bullet \nabla v)d\Omega.$$

Fixado t, reescrevemos (2.3.2) obtendo

$$(\frac{\partial u}{\partial t}(t), v) + a(t; \boldsymbol{u}(t); \boldsymbol{u}(t), v) + (pW_\eta \boldsymbol{u}(t), v)_{\Gamma_1} = (\boldsymbol{f}(t), v), \tag{2.3.3}$$

sendo

$$a(t; \boldsymbol{w}(t); \boldsymbol{u}(t), v) = (\alpha(\boldsymbol{w}(t))\nabla \boldsymbol{u}(t), \nabla v) + (W \bullet \nabla \boldsymbol{u}(t), v) + (\rho \boldsymbol{u}(t), v) \tag{2.3.4}$$

com $w \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Ou ainda, fazendo

$$\tilde{a}(t; \boldsymbol{w}(t); u, v) = a(t; \boldsymbol{w}(t); u, v) + (pW_\eta u, v)_{\Gamma_1}. \tag{2.3.5}$$

podemos reescrever 2.3.3 obtendo

$$(\frac{\partial u}{\partial t}(t), v) + \tilde{a}(t; \boldsymbol{u}(t); \boldsymbol{u}(t), v) = (\boldsymbol{f}(t), v). \tag{2.3.6}$$

O Teorema de Lions, encontrado em [2], garante existência e unicidade para uma classe de problemas abstratos que descrevemos a seguir:

> Seja H um espaço de Hilbert com produto escalar $(.,.)$ e norma $|.|$. Suponha que H e o dual H' possam ser identificados. Seja V um outro espaço de Hilbert de norma $||.||$ tal que $V \subset H$, com inclusão contínua e V denso em H, de modo que
>
> $$V \subset H \subset V'.$$

Seja $T > 0$, fixado, e para quase todo $t \in [0, T]$ se considera uma forma bilinear

$$\mathrm{a}(t; \boldsymbol{u}, v) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

que verifica as seguinte hipóteses:

(i) a função $t \longrightarrow \mathrm{a}(t; u, v)$ é mensurável, $\forall u, v \in V$,

(ii) $|\mathrm{a}(t; u, v)| \leq M\|u\|\|v\|$ q.t.p. $t \in [0, T]$ e $\forall u, v \in V$,

(iii) $\mathrm{a}(t; v, v) \geq \beta\|v\|^2 - \lambda|v|$ q.t.p. $t \in [0, T]$ $\forall v \in V$,

sendo $\beta > 0$, M e λ constantes.

Dadas $f \in L^2(0, T; V')$ e $u_0 \in H$, existe uma única função $\boldsymbol{u}$ tal que

$$\boldsymbol{u} \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; H)$$

e

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} \in L^2(0, T; V')$$

$$\begin{cases} < \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}(t), v > + \mathrm{a}(t; \boldsymbol{u}(t), v) = < \boldsymbol{f}(t), v >, \text{q.t.p. } t \in [0, T], \forall v \in V \\ \boldsymbol{u}(0) = u_0. \end{cases}$$

Observemos que, fixado t em (2.3.3) e (2.3.6), a não é linear e por conseqüência também não o é $\tilde{a}$. Portanto, não podemos aplicar o Teorema de Lions, enunciado acima, diretamente a 2.3.6. Entretanto, na seção 2.5, veremos um resultado para o caso não linear, também devido a Lions, que o utiliza indiretamente na demonstração da existência de solução para uma classe de problemas não lineares, no qual nos enquadraremos.

Na próxima seção apresentaremos alguns cálculos absolutamente necessários para as demais seções.

2.4 Desigualdades Necessárias

Fixados $t \in (0, T)$ e $\boldsymbol{w} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, obtemos formas bilineares em $V \times V$ dadas por $a(t; \boldsymbol{w}(t); ., .)$ e $\tilde{a}(t; \boldsymbol{w}(t); ., .)$ e vamos obter estimativas para as parcelas que aparecem na definição destas formas bilineares.

Para $v \in V$, temos

$$(\alpha(v)\nabla v, \nabla v) = \int_\Omega \alpha(v) \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right] d\Omega \leq \alpha_{sup} \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \tag{2.4.1}$$

e

$$\begin{aligned} (W \bullet \nabla v, v) &= \int_\Omega W_1 \frac{\partial v}{\partial x} v d\Omega + \int_\Omega W_2 \frac{\partial v}{\partial y} v d\Omega \\ &\leq \widetilde{W} \left[\int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x} v \right| d\Omega + \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial y} v \right| d\Omega \right]. \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Como v, $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega)$, utilizando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x} v\right| d\Omega + \int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial y} v\right| d\Omega \leq \left(\|\frac{\partial v}{\partial x}\|_{L^2(\Omega)} + \|\frac{\partial v}{\partial y}\|_{L^2(\Omega)} \right) \|v\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.4.3}$$

Sejam $a > 0$ e $b > 0$, pela desigualdade de Cauchy com ϵ vale

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon}, \forall \epsilon > 0. \tag{2.4.4}$$

Utilizando (2.4.4)duas vezes em (2.4.3) ,com $\epsilon = \frac{1}{2}$, obtemos

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x} v\right| d\Omega + \int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial y} v\right| d\Omega \leq \frac{1}{2} \left[\|\frac{\partial v}{\partial x}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\frac{\partial v}{\partial y}\|^2_{L^2(\Omega)} \right] + \|v\|^2_{L^2(\Omega)}$$

e substituindo em (2.4.2) segue

$$(W \bullet \nabla v, v) \leq \widetilde{W} \left[\|\frac{\partial v}{\partial x}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\frac{\partial v}{\partial y}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \right] = \widetilde{W} \|v\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{2.4.5}$$

Para as parcelas subseqüentes temos

$$(\rho v, v) \leq \|\rho\|_{L^\infty(\Omega_T)} \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \tag{2.4.6}$$

e

$$(pW_\eta v, v)_{\Gamma_1} \leq p\widetilde{W} \|v\|^2_{L^2(\Gamma_1)}. \tag{2.4.7}$$

Observemos que

$$\int_{\Gamma_1} \|v\|^2 dS \leq \int_{\partial\Omega} \|v\|^2 dS$$

e, como $\partial\Omega$ é de classe C^1, podemos aplicar o teorema do traço (ver Evans [21])para concluir que, no sentido do traço, vale

$$\|v\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \leq C \|v\|^2_{H^1(\Omega)},$$

sendo C constante que depende apenas de Ω. Utilizando esta desigualdade , (2.4.7) torna-se

$$(pW_\eta v, v)_{\Gamma_1} \leq p\widetilde{W} C \|v\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{2.4.8}$$

Sintetizando, obtemos por (2.4.1), (2.4.5) e (2.4.6)

$$\begin{aligned} a(t; \boldsymbol{w}(t); v, v) &\leq \alpha_{sup} \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \widetilde{W} \|v\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\rho\|_{L^\infty(\Omega_T)} \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(\alpha_{sup} + \widetilde{W} + \|\rho\|_{L^\infty(\Omega_T)} \right) \|v\|^2_{H^1(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

com $t \in (0, T)$ e $\boldsymbol{w} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ fixados.

A próxima desigualdade a ser obtida dará uma estimativa tipo Garding para $a(t; \boldsymbol{w}(t); v, v)$,com $t \in (0, T)$ e $\boldsymbol{w} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ fixados. Isto é, pretendemos encontrar λ e $\beta \geq 0$ constantes tais que

$$a(t; \boldsymbol{w}(t); v, v) + \lambda \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \beta \|v\|^2_{H^1(\Omega)}, \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2.4.10}$$

Pela definição de $a(t;\boldsymbol{w}(t);v,v)$ podemos escrever

$$a(t;\boldsymbol{w}(t);v,v) \geq \alpha_{inf}\int_{\Omega}|\nabla v|^2 d\Omega - \widetilde{W}\int_{\Omega}\left[\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|\right]|v|d\Omega - \|\rho\|_{L^\infty(\Omega_T)}\int_{\Omega}|v|^2 d\Omega. \quad (2.4.11)$$

Utilizando (2.4.4), obtemos as desigualdades

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right||v| \leq \epsilon\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 + \frac{1}{4\epsilon}|v|^2$$

e

$$\left|\frac{\partial v}{\partial y}\right||v| \leq \epsilon\left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|^2 + \frac{1}{4\epsilon}|v|^2,$$

que somadas tornam-se

$$\left[\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|\right]|v| \leq \epsilon|\nabla v|^2 + \frac{1}{2\epsilon}|v|^2.$$

Portanto,

$$-\widetilde{W}\int_{\Omega}\left[\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|\right]|v|d\Omega \geq -\widetilde{W}\int_{\Omega}\left[\epsilon|\nabla v|^2 + \frac{1}{2\epsilon}|v|^2\right]d\Omega.$$

Fazendo $\epsilon = \frac{\alpha_{inf}}{2\widetilde{W}}$, e substituindo em (2.4.11), obtemos

$$\begin{aligned} a(t;\boldsymbol{w}(t);v,v) &\geq \frac{\alpha_{inf}}{2}\int_{\Omega}|\nabla v|^2 d\Omega - \left(\frac{\widetilde{W}^2}{\alpha_{inf}} + \|\rho\|_{L^\infty(\Omega_T)}\right)\int_{\Omega}|v|^2 d\Omega \\ &= \frac{\alpha_{inf}}{2}\int_{\Omega}\left(|\nabla v|^2 + |v|^2\right)d\Omega - \left(\frac{\widetilde{W}^2}{\alpha_{inf}} + \|\rho\|_{L^\infty(\Omega_T)} + \frac{\alpha_{inf}}{2}\right)\int_{\Omega}|v|^2 d\Omega. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Para

$$\lambda = \frac{\widetilde{W}^2}{\alpha_{inf}} + \|\rho\|_{L^\infty(\Omega_T)} + \frac{\alpha_{inf}}{2} \quad (2.4.13)$$

e $\beta = \frac{\alpha_{inf}}{2}$ a desigualdade (2.4.12) está no formato (2.4.10) que buscávamos.

Fixado $t \in (0,T)$ e $\boldsymbol{w} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ consideramos a outra forma bilinear em $V \times V$

$$\tilde{a}(t;\boldsymbol{w}(t);u,v) = a(t;\boldsymbol{w}(t);u,v) + (pW_\eta u, v)_{\Gamma_1}$$

e fazendo

$$M = \max\left\{\alpha_{sup}, \tilde{W}, \|\rho\|_{L^\infty(\Omega_T)}, p\tilde{W}C\right\},$$

sendo C constante dada pelo teorema do traço, temos

$$|\tilde{a}(t;\boldsymbol{w}(t);u,v)| \leq M\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (2.4.14)$$

Utilizamos o seguinte resultado, encontrado na página 23 de [30]:

Para todo $\epsilon > 0$ existe constante $c(\epsilon)$ tal que

$$(v, v)_{\Gamma_1} \leq \epsilon \|v\|^2_{H^1(\Omega)} + c(\epsilon)\|v\|^2_{L^2(\Omega)}, \ \forall v \in H^1(\Omega).$$

Daí concluímos que

$$(pW_\eta v, v)_{\Gamma_1} \leq p\widetilde{W}C[\epsilon\|v\|^2_{H^1(\Omega)} + c(\epsilon)\|v\|^2_{L^2(\Omega)}], \ \forall v \in H^1(\Omega).$$

Repetimos os cálculos de (2.4.10) para obter

$$\tilde{a}(t; \boldsymbol{w}(t); v, v) \geq \left(\frac{\alpha_{inf}}{2} - p\tilde{W}\epsilon\right) \|v\|^2_{H^1(\Omega)} - \left(\frac{\widetilde{W}^2}{\alpha_{inf}} + \|\rho\|_{L^\infty(\Omega_T)} + \frac{\alpha_{inf}}{2} + p\tilde{W}c(\epsilon)\right) \|v\|^2_{L^2(\Omega)},$$

ou, equivalentemente,

$$\tilde{a}(t; \boldsymbol{w}(t); v, v) + \tilde{\lambda}\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \tilde{\beta}\|v\|^2_{H^1(\Omega)}, \tag{2.4.15}$$

sendo ϵ suficientemente pequeno para

$$\tilde{\beta} = \frac{\alpha_{inf}}{2} - p\tilde{W}\epsilon > 0$$

e

$$\tilde{\lambda} = \frac{\widetilde{W}^2}{\alpha_{inf}} + \|\rho\|_{L^\infty(\Omega_T)} + \frac{\alpha_{inf}}{2} + p\tilde{W}c(\epsilon).$$

2.5 Existência e Unicidade de Solução Fraca

Em Lions, [30], página 59, encontramos teorema de existência para a seguinte classe de problemas não lineares:

Sejam V, W e H espaços de Hilbert tais que as inclusões algébricas

$$V \subset W \subset H$$

sejam também contínuas e a inclusão de V em W seja compacta.

Os espaços V e W são separáveis e V é denso em H,que por sua vez é reflexivo.

Representamos o produto interno em H por $(.,.)$ e sua norma $\|.\|_H$; a norma de V representamos por $\|.\|_V$.

É dada uma família em $t \in [0, T]$ e em $w \in W$ de formas bilineares e contínuas em V:

$$\mathrm{a}(t; u, v; w) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

com a dependência em w e t sendo não necessariamente linear, satisfazendo as seguintes hipóteses:

(i) para $\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{v}(t)$ em $L^2(0,T;V)$ e $\boldsymbol{w}(t)$ em $L^2(0,T;W)$, a função
$t \longrightarrow \mathrm{a}(t;\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{w}(t))$ é mensurável,

(ii) $|\mathrm{a}(t;u,v;w)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V$, M sendo uma constante que independe de t e de w

(iii) $\mathrm{a}(t;v,v;w) \geq \beta\|v\|_V^2$, com w arbitrário em W, $\forall v \in V$ e $\beta > 0$ constante que independe de w,

(iv) se $w_n(t) \longrightarrow w(t)$, com convergência forte em $L^2(0,T;W)$, então
$\int_0^T |\mathrm{a}(t;\boldsymbol{w}_n(t);\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}(t)) - \mathrm{a}(t;\boldsymbol{w}(t);\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}(t))|\,dt \longrightarrow 0$,
para u fixado em $L^2(0,T;V)$ e uniformemente para v em um conjunto limitado de $L^2(0,T;V)$.

Dadas $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;H)$ e $u_0 \in H$, existe uma função $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V)$que satisfaz a seguinte equação de distribuição
$\left\{ \frac{d}{dt}(\boldsymbol{u}(t),v) + \mathrm{a}(t;\boldsymbol{u}(t),v;\boldsymbol{u}(t)) = (\boldsymbol{f}(t),v) + (u_0,v)\delta, \text{q.t.p. } t \in [0,T], \forall v \in V. \right.$
Além disto, para $\gamma \in (0,\frac{1}{4})$, $D_t^\gamma \boldsymbol{u} \in L^2(0,T;H)$[1].

Na seção onde descrevemos a formulação variacional 2.3.6 vimos que os espaços funcionais considerados cumprem as exigências do teorema acima. A seguir verificaremos as demais hipóteses.

Para $\boldsymbol{w} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in L^2(0,T;V)$, devemos mostrar que

$$t \longmapsto \tilde{a}(t;\boldsymbol{w}(t);\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}(t)) \tag{2.5.1}$$

é mensurável e integrável, o faremos mostrando que esta função é soma de funções de $L^1(0,T)$.

Cabe aqui a seguinte caracterização do espaço de funções vetoriais $L^2(0,T;H^1(\Omega))$

$$\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \longleftrightarrow \boldsymbol{u}, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} \in L^2(\Omega_T),$$

[32].

Como α é contínua e $\boldsymbol{w}$ é mensurável em Ω_T então a função

$$\Psi(t,x) = \alpha(\boldsymbol{w})\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}$$

é mensurável em Ω_T e o mesmo podemos dizer para a função $|\Psi(t,x)|$. Observemos ainda que, por nossas hipóteses,

$$\int_\Omega |\Psi(t,\boldsymbol{x})|d\Omega < \infty$$

e

$$\int_0^T \int_\Omega |\Psi(t,\boldsymbol{x})|d\Omega < \infty.$$

[1]Isto significa que existe $U \in L^2(-\infty,\infty;V)$ com $U = \boldsymbol{u}$, q.t.p em $(0,T)$, e $|\xi|^\gamma \hat{U}(\xi) \in L^2(0,T;H)$, sendo $\hat{U}$ a transformada de Fourier em t de $U(t)$.

Portanto, aplicando o Teorema de Tonelli obtemos $\Psi \in L^1(\Omega_T)$ e assim o Teorema de Fubini ([2] , [24]) garante que a função

$$t \longmapsto \int_\Omega \Psi(t, \boldsymbol{x}) d\Omega$$

pertence a $L^1(0, T)$.

De modo análogo é mostrado que as demais parcelas são mensuráveis e integráveis , o que conclui (2.5.1).

Por (2.4.14), existe constante M independente de t e de w tal que

$$|\tilde{a}(t; w; u, v)| \leq M \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

para quase todo $t \in [0, T]$ e quaisquer $u, v \in V$.

Por (2.4.15), existe constante positiva $\tilde{\beta}$ tal que

$$\tilde{a}(t; \boldsymbol{w}(t); u, v) + \tilde{\lambda} \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \tilde{\beta} \|v\|^2_{H^1(\Omega)},$$

para quase todo $t \in [0, T]$ e qualquer $v \in V$.

Como última hipótese a ser satisfeita no caso do resultado enunciado no início desta seção, devemos mostrar que:

Se $(\boldsymbol{w}_n)(t)$ converge forte para $\boldsymbol{w}(t)$ em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ então

$$\int_0^T |\tilde{a}(t; \boldsymbol{w}_n(t); \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)) - \tilde{a}(t; \boldsymbol{w}(t); \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t))| \, dt \longrightarrow 0, \tag{2.5.2}$$

para u fixado em $L^2(0, T; V)$ e uniformemente para v em um conjunto limitado de $L^2(0, T; V)$.

Pela definição de $\tilde{a}(t; \boldsymbol{w}(t); \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t))$ basta provarmos

$$\int_0^T |a(t; \boldsymbol{w}_n(t); \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)) - a(t; \boldsymbol{w}(t); \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t))| \, dt \longrightarrow 0.$$

Observemos que

$$|a(t; \boldsymbol{w}_n(t); \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)) - a(t; \boldsymbol{w}(t); \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t))| = \left| \int_\Omega \left(\alpha(\boldsymbol{w}_n(t)) - \alpha(\boldsymbol{w}(t))\right) \left(\nabla \boldsymbol{u}(t) \bullet \nabla \boldsymbol{v}(t)\right) d\Omega \right|$$

Consideramos a função

$$\varphi : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$w \longmapsto \varphi(w) = \int_\Omega \alpha(w(t)) \left(\nabla \boldsymbol{u}(t) \bullet \nabla \boldsymbol{v}(t)\right) d\Omega.$$

Como α é uma função contínua e limitada, φ é um funcional contínuo em $L^2(\Omega)$. Portanto, se

$$\boldsymbol{w}_n(t) \longrightarrow \boldsymbol{w}(t) \text{ em } L^2(\Omega)$$

então

$$\varphi(\boldsymbol{w}_n(t)) \longrightarrow \varphi(\boldsymbol{w}(t)),$$

para quase todo t fixado. Além disto,

$$|\varphi(\boldsymbol{w}_n(t))| \leq \alpha_{sup}\|\boldsymbol{u}(t)\|_{H^1(\Omega)}\ \|\boldsymbol{v}(t)\|_{H^1(\Omega)},$$

para quase todo t, e fazendo

$$G(t) = \alpha_{sup}\|\boldsymbol{u}(t)\|_{H^1(\Omega)}\ \|\boldsymbol{v}(t)\|_{H^1(\Omega)}$$

temos

$$\int_0^T G(t)dt < \infty.$$

Aplicamos o Teorema da Convergência Dominada para concluir que

$$\int_0^T |\varphi(\boldsymbol{w}_n(t)) - \varphi(\boldsymbol{w}(t))|\, dt \longrightarrow 0,$$

o que demonstra a última hipótese e nos permite garantir a existência de solução, segundo o resultado enunciado no início desta seção.

Observe que a derivada garantida para uma solução $\boldsymbol{u}$ é fracionária. Se conseguirmos resultado de regularidade para garantirmos que $\boldsymbol{u}' \in L^2([0,T];V')$, então temos a unicidade assegurada e uma demonstração pode ser obtida em [37]. Para utilizarmos este resultado devemos demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 2.5.1 *Dadas $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$, seja $\boldsymbol{u}$ tal que*

$$\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;V) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$$

com

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} \in L^2(0,T;V')$$

e

$$\begin{cases} < \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}(t), v > + \tilde{a}(t;\boldsymbol{u}(t);\boldsymbol{u}(t),v) = (\boldsymbol{f}(t),v),\ q.t.p.\ t \in [0,T], \forall v \in V \\ \boldsymbol{u}(0) = u_0, \end{cases}$$

sendo $\tilde{a}$ dada por (2.3.5). Então

$$\max_{t\in[0,T]} \|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(0,T;V)} \leq \mathcal{C}\left(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right)$$

com $\mathcal{C}$ constante.

Demonstração:

Com as hipóteses da proposição é possível mostrar (ver [21]) que a função

$$t \longrightarrow \|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

é absolutamente contínua com $< \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}(t), \boldsymbol{u}(t) >= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$.

Supondo t fixo e arbitrário, substituímos $v = \boldsymbol{u}(t)$ na formulação variacional da proposição e obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \tilde{a}(t;\boldsymbol{u}(t);\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t)) = (\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{u}(t)),$$

Pela desigualdade tipo Garding (2.4.15) para $\tilde{a}$ podemos escrever

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \tilde{\beta}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq (\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{u}(t)) + \tilde{\lambda}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{2.5.3}$$

ou ainda, eliminando a parcela com $\tilde{\beta}$ e utilizando as desigualdades de Hölder e Cauchy obtemos

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2\epsilon}\|\boldsymbol{f}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2(\epsilon+\tilde{\lambda})\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Considerando $\aleph(t) = \|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$, função não negativa e absolutamente contínua em $[0,T]$, $\xi(t) = \|\boldsymbol{f}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$, integrável em $[0,T]$ e não negativa, e as constantes positivas $\mathcal{C}_1 = 2(\epsilon+\tilde{\lambda})$ e $\mathcal{C}_2 = \frac{1}{2\epsilon}$, a desigualdade acima pode ser reescrita

$$\aleph'(t) \leq \mathcal{C}_1\aleph(t) + \mathcal{C}_2\xi(t)$$

e segue da desigualdade de Gronwall em sua forma diferencial que

$$\aleph(t) \leq e^{\mathcal{C}_1 t}\left(\aleph(0) + \mathcal{C}_2\int_0^t \xi(s)ds\right),$$

ou equivalentemente,

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{\mathcal{C}_1 t}\left(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \mathcal{C}_2\int_0^t \|\boldsymbol{f}(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds\right).$$

Portanto,

$$\max_{t\in[0,T]}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{C}\left(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right). \tag{2.5.4}$$

Voltamos à desigualdade (2.5.3) e aplicamos as desigualdades de Hölder e Cauchy, sem eliminar a parcela em $\tilde{\beta}$, para obtermos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \tilde{\beta}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq c_1\|\boldsymbol{f}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + c_2\|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

que ao intergrarmos no intervalo $[0,T]$ nos possibilita escrever

$$\int_0^T \|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{H^1(\Omega)}dt \leq c\left(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \|\boldsymbol{f}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt + \int_0^T \|\boldsymbol{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}dt\right).$$

Utilizando a majoração obtida em (2.5.4) concluímos que

$$\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(0,T;V)} \leq c\left(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right) \tag{2.5.5}$$

e daí a demonstração da proposição.

Capítulo 3

Estimativas de Erro

O Método de Galerkin é um método de aproximação que, a grosso modo, propõe a resolução do problema variacional em subespaços de V, de dimensão finita. É uma ferramenta utilizada em procedimentos numéricos e também teoricamente. Por exemplo, como o espaço V é Hilbert e separável, consideramos

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$$

uma base Hilbertiana de V e o subespaço V_{n_h} de dimensão finita gerado por

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_h}\}.$$

O sub-índice h de n, que costuma ser mais utilizado, já é uma indicação de que, nos capítulos seguintes, estaremos trabalhando com a solução numérica dada pelo método de elementos finitos. No que segue substituímos o sub-índice n_h simplesmente por h, exceto em limite superior de somatórios.

Supomos

$$u_h(t, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n_h} q_i(t)\varphi_i(\boldsymbol{x})$$

satisfazendo o problema aproximado

$$(\frac{\partial u_h}{\partial t}(t), v_h) + a(t; u_h(t); u_h(t), v_h) + (pW_\eta u_h(t), v_h)_{\Gamma_1} = (f(t), v_h), \forall v_h \in V_h, \tag{3.0.1}$$

para t em $(0, T]$, fixo e arbitrário, com condição inicial satisfazendo

$$(u_h(0, .), v_h) = (u_0, v_h), \forall v_h \in V_h. \tag{3.0.2}$$

A solução u_h é chamada de solução aproximada do método de Galerkin. A existência e unicidade desta solução é garantida na próxima seção.

Teoricamente a solução do problema original é obtida no limite em que os subespaços V_h tornem-se densos em V. Numericamente estaremos satisfeitos com uma "boa aproximação", cuja definição está associada à natureza física do problema modelado.

Na primeira seção faremos análise de erro *a priori* cometido quando consideramos a solução aproximada do método de Galerkin contínuo em t. Em seguida, serão obtidas estimativas para o problema discretizado no tempo, via Crank-Nicolson.

As estimativas são feitas para o erro absoluto definido por

$$||u - u_h||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))},$$

com u satisfazendo

$$(\frac{\partial u}{\partial t}, v) + a(u; u, v) + (pW_\eta u, v)_{\Gamma_1} = (f, v), \forall v \in V, \tag{3.0.3}$$

e

$$(u(0,.), v) = (u_0, v), \forall v \in V, \tag{3.0.4}$$

e, além disso, supomos u, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Estaremos trabalhando de forma clássica, como pode ser encontrado em Douglas e Dupont [18], Meyer [37] e Strang [56].

3.1 Galerkin Contínuo

Consideramos o problema aproximado (3.0.1)-(3.0.2) válido para todo $t \in (0, T]$, justifica-se assim uma simplificação da notação fazendo, no que segue,

$$a(t; \boldsymbol{u}(t); \boldsymbol{u}(t), v) = a(u; u, v)$$

e , por analogia, também para as demais parcelas.

Substituindo o somatório que define u_h em (3.0.1) e fazendo como é usual $v_h = \varphi_j$, sendo $j = 1, 2, \ldots, n$, obtemos o seguinte sistema não linear de equações diferenciais

$$M.Q'(t) + N(Q(t)).Q(t) = F(t), \tag{3.1.1}$$

sendo

$$M(j,i) = (\varphi_i, \varphi_j),$$

$$N(j,i)(Q(t)) = a(\textstyle\sum_{k=1}^{n} q_k(t)\varphi_k(\boldsymbol{x}); \varphi_i, \varphi_j) + (pW_\eta\varphi_i, \varphi_j)_{\Gamma_1},$$

$$F(t) = (f(t), \varphi_i),$$

$$Q(t) = (q_1(t), \ldots, q_1(t))^T.$$

A condição inicial u_{h_0} é dada por

$$u_{h_0}(\boldsymbol{x}) = u_h(0, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n_h} q_i(0)\varphi_i(\boldsymbol{x}),$$

com $q_i(0)$ sendo a i-ésima coordenada do vetor $Q(0)$ solução do sistema

$$M.Q(0) = ((u_0, \varphi_1), \ldots, (u_0, \varphi_n))^T. \tag{3.1.2}$$

Resolvido este sistema obtemos a condição inicial do sistema de equações diferenciais ordinárias (3.1.1) e, conseqüentemente, do problema (3.0.1).

Uma vez asseguradas existência e unicidade de solução para o problema de valor inicial (3.1.1)-(3.1.2), com $t \in (0, T)$, obtemos a solução aproximada u_h.

Fixado $t \in (0, T)$ arbitrário, inicialmente vamos obter estimativa para

$$\frac{d(\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)})}{dt}$$

para em seguida integrarmos em relação a t e assim estimarmos

$$\|u - u_h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Para $\phi \in L^2(0, T; V_h)$, façamos em (3.0.3) e (3.0.1)

$$v = v_h = \phi - u_h,$$

com t fixo, e em seguida subtraímos (3.0.1) de (3.0.3) obtendo

$$\begin{aligned}(\frac{\partial}{\partial t}(u - u_h), \phi - u_h) + [a(u; u, \phi - u_h) - a(u_h; u_h, \phi - u_h)]&\\ +(pW_\eta(u - u_h), \phi - u_h)_{\Gamma_1} = 0.&\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Consideremos as seguintes equivalências:

(i) $(\frac{\partial}{\partial t}(u - u_h), \phi - u_h) = (\frac{\partial}{\partial t}(u - u_h), u - u_h) - (\frac{\partial}{\partial t}(u - u_h), u - \phi)$

(ii) $a(u_h; u - u_h, u - u_h) - [a(u; u, \phi - u_h) - a(u_h; u_h, \phi - u_h)]$

$= [a(u_h; u, \phi - u_h) - a(u; u, \phi - u_h)] + a(u_h; u - u_h, u - \phi)$

(iii) $(pW_\eta(u - u_h), \phi - u_h)_{\Gamma_1} = (pW_\eta(u - u_h), u - u_h)_{\Gamma_1} - (pW_\eta(u - u_h), u - \phi)_{\Gamma_1}$

Somando $a(u_h; u - u_h, u - u_h)$ aos dois lados de (3.1.3), trazendo

$$[a(u; u, \phi - u_h) - a(u_h; u_h, \phi - u_h)]$$

para lado direito da equação e utilizando as equivalências (i),(ii) e (iii) obtemos

$$\begin{aligned}&(\frac{\partial}{\partial t}(u - u_h), u - u_h) + a(u_h; u - u_h, u - u_h) + (pW_\eta(u - u_h), u - u_h)_{\Gamma_1}\\ &= (\frac{\partial}{\partial t}(u - u_h), u - \phi) + a(u_h; u - u_h, u - \phi) + (pW_\eta(u - u_h), u - \phi)_{\Gamma_1}\\ &\qquad +[a(u_h; u, \phi - u_h) - a(u; u, \phi - u_h)]\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

No que segue estaremos tratando das parcelas de (3.1.4) separadamente, para isto utilizaremos as desigualdades obtidas e consideradas na seção (2.4) .

Temos

$$|a(u_h;u,\phi-u_h)-a(u;u,\phi-u_h)| \leq \int_\Omega |\alpha(u_h)-\alpha(u)|\,|\nabla u \bullet \nabla(\phi-u_h)|\, d\Omega$$

e utilizando a hipótese (h2) do capítulo 1 obtemos

$$|a(u_h;u,\phi-u_h)-a(u;u,\phi-u_h)| \leq K\int_\Omega |u_h-u| \left|\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial(\phi-u_h)}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial(\phi-u_h)}{\partial y}\right| d\Omega.$$

Supondo que $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ estejam em $L^\infty\left(0,T,L^\infty(\Omega)\right)$, para t fixo e arbitrário consideremos

$$S(t) = \sup ess \left\{ \|\frac{\partial u(.,t)}{\partial x}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\frac{\partial u(.,t)}{\partial y}\|_{L^\infty(\Omega)} \right\}.$$

Definimos então

$$\|\nabla u\|_{L^\infty \times L^\infty} = \sup_{t\in(0,T)} ess \left\{S(t)\right\}.$$

Utilizando estas hipóteses na última desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned}|a(u_h;u,\phi-u_h)-a(u;u,\phi-u_h)| &\leq K\|\nabla u\|_{L^\infty\times L^\infty} \\ &\int_\Omega |u_h-u| \left[\left|\frac{\partial(\phi-u_h)}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial(\phi-u_h)}{\partial y}\right|\right] d\Omega,\end{aligned}$$

e, por Hölder, temos

$$\begin{aligned}|a(u_h;u,\phi-u_h)-a(u;u,\phi-u_h)| &\leq K\|\nabla u\|_{L^\infty\times L^\infty}\|u_h-u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\cdot\left[\left\|\frac{\partial(\phi-u_h)}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial(\phi-u_h)}{\partial y}\right\|_{L^2(\Omega)}\right]. \\ &\leq 2K\|\nabla u\|_{L^\infty\times L^\infty}\|u_h-u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla(\phi-u_h)\|_{L^2(\Omega)} \\ &= 2\widetilde{K}\|u_h-u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla(\phi-u_h)\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

sendo

$$\widetilde{K} = K\|\nabla u\|_{L^\infty\times L^\infty}.$$

Podemos escrever ainda

$$\begin{aligned}|a(u_h;u,\phi-u_h)-a(u;u,\phi-u_h)| &\leq 2\widetilde{K}\|u_h-u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\cdot\left[\|\nabla(\phi-u_h)\|_{L^2(\Omega)}+\|\nabla(u-u_h)\|_{L^2(\Omega)}\right].\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Aplicando (2.4.4) com $\epsilon=\epsilon_1$, (3.1.5) torna-se

$$\begin{aligned}|a(u_h;u,\phi-u_h)-a(u;u,\phi-u_h)| &\leq 2\frac{\widetilde{K}^2}{\epsilon_1}\|u_h-u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+\epsilon_1\left[\|\nabla(\phi-u_h)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla(u-u_h)\|^2_{L^2(\Omega)}\right].\end{aligned}$$

Seguindo para outra parcela de (3.1.4), usamos as hipóteses (h1) e (h3) nos cálculos

$$
\begin{aligned}
|a(u_h; u-u_h, u-\phi)| &\le \alpha_{sup}\int_\Omega |\nabla(u-u_h)\bullet\nabla(u-\phi)|\, d\Omega \\
&+ \int_\Omega |W\bullet\nabla(u-u_h)|\,|u-\phi| d\Omega + \|\rho\|_{L^\infty(\Omega_T)}\int_\Omega |u-u_h||u-\phi| d\Omega \\
&\le \alpha_{sup}\int_\Omega \left[\left|\frac{\partial(u-u_h)}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial(u-\phi)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial(u-u_h)}{\partial y}\right|\left|\frac{\partial(u-\phi)}{\partial y}\right|\right] d\Omega \\
&+\widetilde{W}\int_\Omega \left[\left|\frac{\partial(u-u_h)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial(u-u_h)}{\partial y}\right|\right]|u-\phi| d\Omega \\
+\|\rho\|_{L^\infty(\Omega_T)}\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}\|u-\phi\|_{L^2(\Omega)} &\le 2\alpha_{sup}\|\nabla(u-u_h)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla(u-\phi)\|_{L^2(\Omega)} \\
&+\widetilde{W}\left[\left\|\frac{\partial(u-u_h)}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial(u-u_h)}{\partial y}\right\|_{L^2(\Omega)}\right]\|u-\phi\|_{L^2(\Omega)} \\
&+\|\rho\|_{L^\infty(\Omega_T)}\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}\|u-\phi\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Desta última desigualdade segue que

$$
\begin{aligned}
|a(u_h; u-u_h, u-\phi)| &\le 2\alpha_{sup}\|\nabla(u-u_h)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla(u-\phi)\|_{L^2(\Omega)} \\
+2\widetilde{W}\|u-\phi\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla(u-u_h)\|_{L^2(\Omega)} &+ \|\rho\|_{L^\infty(\Omega_T)}\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}\|u-\phi\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
\tag{3.1.6}
$$

daí, aplicando (2.4.4), (3.1.6) torna-se

$$
\begin{aligned}
|a(u_h; u-u_h, u-\phi)| &\le \epsilon_2\|\nabla(u-u_h)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha^2_{sup}}{\epsilon_2}\|\nabla(u-\phi)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+\epsilon_3\|\nabla(u-u_h)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\widetilde{W}^2}{\epsilon_3}\|u-\phi\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+\epsilon_4\|u-\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\|\rho\|^2_{L^\infty(\Omega_T)}}{4\epsilon_4}\|u-u_h\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
\tag{3.1.7}
$$

Para a última parcela do lado direito de (3.1.4), que não envolve a derivada no tempo, temos, no sentido do traço,

$$
\begin{aligned}
|(pW_\eta(u-u_h), u-\phi)_{\Gamma_1}| &\le p\widetilde{W}\|u-u_h\|_{L^2(\Gamma_1)}\|u-\phi\|_{L^2(\Gamma_1)} \\
&\le p\widetilde{W}C^{(1)}C^{(2)}\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)}\|u-\phi\|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}
$$

com $C^{(1)}$ e $C^{(2)}$ constantes dadas pelo teorema do traço (ver Evans [21]). Assim obtemos

$$
|(pW_\eta(u-u_h), u-\phi)_{\Gamma_1}| \le Q\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)}\|u-\phi\|_{H^1(\Omega)},
$$

sendo Q constante que depende de constantes p, $\widetilde{W}$ e de Ω. Aplicando (2.4.4) novamente, vem

$$
|(pW_\eta(u-u_h), u-\phi)_{\Gamma_1}| \le \frac{Q^2}{4\epsilon_5}\|u-\phi\|^2_{H^1(\Omega)} + \epsilon_5\|u-u_h\|^2_{H^1(\Omega)}.
$$

Quanto ao lado esquerdo de (3.1.4) utilizaremos uma desigualdade de tipo Garding, obtida em (2.4.10) com constantes λ e β dadas em (2.4.13). Para tal somaremos a parcela $\lambda\|u-u_h\|^2_{L^2(\Omega)}$ aos dois lados de (3.1.4). Além disto, podemos obter

$$(pW_\eta(u-u_h), u-u_h)_{\Gamma_1} \geq -\widetilde{W}p\|u-u_h\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \geq -\frac{Q}{C^{(2)}}\|u-u_h\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Substituindo em (3.1.4) todas estas desigualdades obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u-u_h\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \beta\|u-u_h\|^2_{H^1(\Omega)} - \frac{Q}{C^{(2)}}\|u-u_h\|^2_{H^1(\Omega)} \\
&\leq \|u-u_h\|^2_{L^2(\Omega)}\left(2\frac{\widetilde{K}^2}{\epsilon_1} + \frac{\|\rho\|^2_{L^\infty(\Omega_T)}}{4\epsilon_4} + \lambda\right) + \|\nabla(u-u_h)\|^2_{L^2(\Omega)}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3) \\
&+\|u-u_h\|^2_{H^1(\Omega)}\epsilon_5 + \|u-\phi\|^2_{L^2(\Omega)}\left(\frac{\widetilde{W}^2}{\epsilon_3}+\epsilon_4\right) + \|u-\phi\|^2_{H^1(\Omega)}\frac{Q^2}{4\epsilon_5} \\
&+\|\nabla(u-\phi)\|^2_{L^2(\Omega)}\left(\epsilon_1 + \frac{\alpha^2_{sup}}{\epsilon_2}\right) + \left(\frac{\partial(u-u_h)}{\partial t}, u-\phi\right). \qquad (3.1.8)
\end{aligned}$$

Multiplicando (3.1.8) por 2 e fazendo

(i) $\Delta = \left\{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_5+\frac{Q}{C^{(2)}}\right\}$,

(ii) $\delta = 2(\beta-\Delta), \delta$ pode e será considerado negativo,

(iii) $C = 2\left\{2\frac{\widetilde{K}^2}{\epsilon_1} + \frac{\|\rho\|^2_{L^\infty(\Omega_T)}}{4\epsilon_4} + \lambda + \epsilon_1 + \frac{\alpha^2_{sup}}{\epsilon_2} + \frac{Q^2}{4\epsilon_5} + \frac{\widetilde{W}^2}{\epsilon_3} + \epsilon_4\right\}$,

obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\|u-u_h\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \delta\|u-u_h\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C\|u-u_h\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+C\left[\|u-\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|u-\phi\|^2_{H^1(\Omega)}\right] + 2\left(\frac{\partial(u-u_h)}{\partial t}, u-\phi\right).
\end{aligned}$$

Multiplicando a desigualdade acima por e^{-Ct}, considerando

$$e^{-Ct}\frac{d}{dt}\left(\|u-u_h\|^2_{L^2(\Omega)}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{-Ct}\|u-u_h\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + Ce^{-Ct}\|u-u_h\|^2_{L^2(\Omega)}$$

e integrando-a de 0 a s, em relação a t, obtemos

$$\begin{aligned}
&e^{-Ct}\|u(s,.)-u_h(s,.)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u_0-u_{h0}\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta\int_0^s e^{-Ct}\|u-u_h\|^2_{H^1(\Omega)}(t)dt \\
&\leq C\int_0^s e^{-Ct}\left[\|u(t,.)-\phi(t,.)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|u(t,.)-\phi(t,.)\|^2_{H^1(\Omega)}\right]dt \\
&+2\int_0^s e^{-Ct}\left(\frac{\partial(u(t,.)-u_h(t,.))}{\partial t}, u(t,.)-\phi(t,.)\right)dt. \qquad (3.1.9)
\end{aligned}$$

O que faremos a seguir é obter uma estimativa para a última parcela de (3.1.9).

Observe-se que, integrando por partes,

$$\int_0^s \left(\frac{\partial(u(t,.)-u_h(t,.))}{\partial t}, e^{-Ct}(u(t,.)-\phi(t,.)) \right) dt$$
$$= \Big(u(s,.)-u_h(s,.), e^{-Cs}(u(s,.)-\phi(s,.))\Big) - (u_0-u_{h_0}, u_0-\phi(0,.))$$
$$+\int_0^s e^{-Ct}\left[C\,(u(t,.)-u_h(t,.), u(t,.)-\phi(t,.)) - \left(u(t,.)-u_h(t,.), \frac{\partial(u(t,.)-\phi(t,.))}{\partial t}\right)\right] dt$$

e, por Hölder,

$$\int_0^s \left(\frac{\partial(u(t,.)-u_h(t,.))}{\partial t}, e^{-Ct}(u(t,.)-\phi(t,.)) \right) dt$$
$$\leq e^{-Cs}\|u(s,.)-u_h(s,.)\|_{L^2(\Omega)}\|u(s,.)-\phi(s,.)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_0-u_{h_0}\|_{L^2(\Omega)}\|u_0-\phi(0,.)\|_{L^2(\Omega)}$$
$$+C\int_0^s e^{-Ct}\|u(t,.)-u_h(t,.)\|_{L^2(\Omega)}\|u(t,.)-\phi(t,.)\|_{L^2(\Omega)}dt$$
$$+\int_0^s e^{-Ct}\|u(t,.)-u_h(t,.)\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial(u(t,.)-\phi(t,.))}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)} dt.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy com ϵ, e sabendo que, para C e s positivos, vale $e^{-Cs} < 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
&2\int_0^s \left(\frac{\partial(u(t,.)-u_h(t,.))}{\partial t}, e^{-Ct}(u(t,.)-\phi(t,.)) \right) dt \leq 2\epsilon\Big[\|u(s,.)-u_h(s,.)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\|u_0-u_{h_0}\|^2_{L^2(\Omega)} + (C+1)\int_0^s \|u(t,.)-u_h(t,.)\|^2_{L^2(\Omega)}dt\Big]\\
&+\frac{1}{2\epsilon}\Big[\|u(s,.)-\phi(s,.)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0-\phi(0,.)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\int_0^s \|u(t,.)-\phi(t,.)\|^2_{L^2(\Omega)}dt + \int_0^s \left\|\frac{\partial(u(t,.)-\phi(t,.))}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt\Big].
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Incluindo (3.1.10) em (3.1.9) obtemos nova desigualdade, que chamaremos de $(*)$, cujo lado esquerdo é maior ou igual a

$$e^{-Cs}\|u(s,.)-u_h(s,.)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|u_0-u_{h_0}\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta\|u-u_h\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}, \tag{3.1.11}$$

aqui foi usado que $\delta < 0$ e $C > 0$. As parcelas do lado direito são majoradas da seguinte forma

(i) $C\int_0^s e^{-Ct}\left[\|u(t,.)-\phi(t,.)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|u(t,.)-\phi(t,.)\|^2_{H^1(\Omega)}\right] dt$

$\leq 3C\int_0^s \|u(t,.)-\phi(t,.)\|^2_{H^1(\Omega)}dt \ \leq 3C\|u-\phi\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$,

(ii) $2\epsilon\|u(s,.)-u_h(s,.)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2\epsilon\|u-u_h\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$,

(iii) $2\epsilon(C+1)\int_0^s \|u(t,.)-u_h(t,.)\|^2_{L^2(\Omega)}dt \leq 2\epsilon(C+1)\|u-u_h\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$,

(iv) $\frac{1}{2\epsilon}\|u(s,.)-\phi(s,.)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2\epsilon}\|u-\phi\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$,

(v) $\frac{1}{2\epsilon}\int_0^s \|u(t,.)-\phi(t,.)\|^2_{L^2(\Omega)}dt \leq \frac{1}{2\epsilon}\|u-\phi\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$,

(vi) $\frac{1}{2\epsilon}\int_0^s \left\|\frac{\partial(u(t,.)-\phi(t,.))}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt \leq \frac{1}{2\epsilon}\left\|\frac{\partial(u-\phi)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$.

Daí, todo o lado direito da desigualdade $(*)$ fica majorado por

$$\begin{aligned}
&\left[2\epsilon\|u_0-u_{h0}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\epsilon}\|u_0-\phi(0,.)\|^2_{L^2(\Omega)}\right] + 2\epsilon\|u-u_h\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\\
&+2\epsilon(C+1)\|u-u_h\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega)} + \frac{1}{2\epsilon}\|u-\phi\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\\
&+\left(\frac{1}{2\epsilon}+3C\right)\|u-\phi\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega)} + \frac{1}{2\epsilon}\left\|\frac{\partial(u-\phi)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))},
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

que independe da variável t. Com a nova desigualdade obtida de (3.1.11) e (3.1.12), passando ao supremo em $t \in (0,T)$, obtemos

$$\begin{aligned}
&(1-2\epsilon)\|u-u_h\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + [\delta - 2\epsilon(C+1)]\|u-u_h\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega)}\\
&\leq (1+2\epsilon+\frac{1}{2\epsilon})\|u_0-\phi(0,.)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\epsilon}\|u-\phi\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\\
&+\left(\frac{1}{2\epsilon}+3C\right)\|u-\phi\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega)} + \frac{1}{2\epsilon}\left\|\frac{\partial(u-\phi)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.
\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Aqui, utilizamos que

$$\|u-u_h\|^2_{L^2(\Omega)}(0) \leq \|u-\phi\|^2_{L^2(\Omega)}(0).$$

Observemos também que

$$\|u_0-\phi(0,.)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u-\phi\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Além disto, para $\epsilon < \frac{1}{2}$,

$$\widetilde{\delta} = \frac{\delta - 2\epsilon(C+1)}{1-2\epsilon} \text{ e } \widetilde{C} = \frac{1}{1-2\epsilon}\max\left\{1+2\epsilon+\frac{1}{\epsilon}\,,\ \frac{1}{2\epsilon}+3C\right\},$$

modificamos a desigualdade acima para obter

$$\begin{aligned}
&\|u-u_h\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \widetilde{\delta}\|u-u_h\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq \widetilde{C}\left[\|u-\phi\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right.\\
&\left.+\|u-\phi\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega)} + \left\|\frac{\partial(u-\phi)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right].
\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

Podemos sintetizar o que foi obtido nesta seção com a seguinte proposição

Proposição 3.1.1 *Sejam u e u_h satisfazendo (3.0.3) e (3.0.1), respectivamente. Para $u \in L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))$, existem constantes $\widetilde{\delta} < 0$ e $\widetilde{C} > 0$, dependentes dos dados do problema e de $\|\nabla u\|_{L^\infty \times L^\infty}$, tais que (3.1.14) é válida para qualquer $\phi \in L^2(0,T;V_h)$.*

A parcela em derivada de (3.1.14) nos impede de afirmar que a solução de Galerkin seja a melhor possível em $L^2(0,T;V_h)$, mas mantém uma característica de otimalidade.

3.2 Galerkin e Crank-Nicolson

A discretização na variável tempo será feita pelo método de diferenças finitas de Crank-Nicolson. Portanto, estaremos considerando a equação (3.0.1) no tempo

$$t_{m+\frac{1}{2}} = (m + \frac{1}{2})\Delta t,$$

sendo $m \geq 0$ um inteiro e Δt o passo no tempo.

Como resultado desta discretização acharemos solução aproximada representada por U e obteremos estimativa para o erro dado por $u - U$.

Com a necessidade de escrevermos a formulação (3.0.3) no tempo $t_{m+\frac{1}{2}}$, faremos as seguintes considerações. Para $\boldsymbol{x}$ fixo e arbitrário em $\overline{\Omega}$, consideramos $u(., \boldsymbol{x})$ três vezes diferenciável em relação a t e desenvolvemos por Taylor numa vizinhança de $t_{m+\frac{1}{2}}$ obtendo

$$u(t_{m+\frac{1}{2}}, \boldsymbol{x}) = \frac{u(t_{m+1}, \boldsymbol{x}) + u(t_m, \boldsymbol{x})}{2} + \tau_m,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_{m+\frac{1}{2}}, \boldsymbol{x}) = \frac{u(t_{m+1}, \boldsymbol{x}) - u(t_m, \boldsymbol{x})}{\Delta t} + \varrho_m,$$

para $\boldsymbol{x} \in \Omega$, e

$$u(t_{m+\frac{1}{2}}, \boldsymbol{x}) = \frac{u(t_{m+1}, \boldsymbol{x}) + u(t_m, \boldsymbol{x})}{2} + \tilde{\tau_m},$$

para $\boldsymbol{x} \in \Gamma_1$. Ainda por Taylor temos τ_m, ϱ_m e $\tilde{\tau_m}$ sendo $O((\Delta t)^2)$.

Supondo que $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x}$ sejam contínuas em $\overline{\Omega_T}$ e o mesmo para as respectivas derivadas na variável y, garantimos a existência de $\nabla \tau_m$ e que $\tau_m \in H^1(\Omega)$ e $\tilde{\tau_m} \in L^2(\Gamma_1)$; isto justifica algumas integrais que realizaremos a seguir. Além disto, se $\dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3}$ é limitada em $\overline{\Omega_T}$ então $\varrho_m \in L^2(\Omega)$ e é $O((\Delta t)^2)$

Utilizamos a notação $g_m = g(t_m, x)$ e $g_{m+\frac{1}{2}} = \dfrac{g(t_{m+1}, x) + g(t_m, x)}{2}$.

As equivalências acima são substituídas em (3.0.3)implicando a seguinte equação

$$\begin{aligned} &\left(\frac{u_{m+1} - u_m}{\Delta t} + \varrho_m, v\right) + a\left(u_{m+\frac{1}{2}} + \tau_m; u_{m+\frac{1}{2}} + \tau_m, v\right) \\ &+ \left(pW_\eta(u_{m+\frac{1}{2}} + \tilde{\tau_m}), v\right)_{\Gamma_1} = \left(f(t_{m+\frac{1}{2}}, x), v\right), \forall v \in V, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

com a condição inicial u_0 dada.

Aplicando Galerkin e Crank-Nicolson, a solução aproximada para (3.0.3) é representada por U e satisfaz

$$\begin{aligned} &\left(\frac{U_{m+1} - U_m}{\Delta t}, v_h\right) + a\left(\frac{U_{m+1} + U_m}{2}; \frac{U_{m+1} + U_m}{2}, v_h\right) \\ &+ \left(pW_\eta \frac{U_{m+1} + U_m}{2}, v_h\right)_{\Gamma_1} = \left(f(t_{m+\frac{1}{2}}, x), v_h\right), \forall v_h \in V_h, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

e

$$(U_0, v_h) = (u_0, v_h), \forall v_h \in V_h, \tag{3.2.3}$$

Fazendo $v = v_h$ nas equações (3.2.1) e (3.2.2), subtraindo-as obtemos

$$\left(\frac{(u_{m+1} - U_{m+1}) - (u_m - U_m)}{\Delta t} + \varrho_m, v_h \right) + a\left(u_{m+\frac{1}{2}} + \tau_m; u_{m+\frac{1}{2}} + \tau_m, v\right)$$

$$-a\left(U_{m+\frac{1}{2}}; U_{m+\frac{1}{2}}, v_h\right) + \left(pW_\eta \left(\frac{(u_{m+1} - U_{m+1}) + (u_m - U_m)}{2} + \tilde{\tau_m} \right), v_h \right)_{\Gamma_1} = 0, \forall v_h \in V_h,$$

e considerando $z = u - U$ a equação acima torna-se

$$\left(\frac{z_{m+1} - z_m}{\Delta t} + \varrho_m, v_h \right) + \left(pW_\eta (z_{m+\frac{1}{2}} + \tilde{\tau_m}), v_h \right)_{\Gamma_1}$$

$$\left[a\left(u_{m+\frac{1}{2}} + \tau_m; u_{m+\frac{1}{2}} + \tau_m, v_h\right) - a\left(U_{m+\frac{1}{2}}; U_{m+\frac{1}{2}}, v_h\right) \right] = 0, \forall v_h \in V_h. \tag{3.2.4}$$

Seja $\phi \in L^2(0,T;V_h)$ e consideremos a função teste $v_h = (\phi - U)_{m+\frac{1}{2}}$ ou, equivalentemente,

$$v_h = (\phi - u)_{m+\frac{1}{2}} + z_{m+\frac{1}{2}}.$$

Realizando esta substituição e algumas manipulações algébricas na formulação anterior, obteremos

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2\Delta t}\left(\|z_{m+1}\|^2_{L^2(\Omega)} - \|z_m\|^2_{L^2(\Omega)} \right) + a\left(U_{m+\frac{1}{2}}; z_{m+\frac{1}{2}}, z_{m+\frac{1}{2}}\right) \\
&+ \left(pW_\eta z_{m+\frac{1}{2}}, z_{m+\frac{1}{2}}\right)_{\Gamma_1} = \left(\tfrac{z_{m+1}-z_m}{\Delta t}, (u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\right) \\
&+a\left(U_{m+\frac{1}{2}}; z_{m+\frac{1}{2}}, (u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\right) + \left(pW_\eta z_{m+\frac{1}{2}}, (u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\right)_{\Gamma_1} \\
&- \left(\varrho_m, (\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right) - \left(pW_\eta \tilde{\tau_m}, (\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right)_{\Gamma_1} - a\left(U_{m+\frac{1}{2}}; \tau_m, (\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right) \\
&+ \left[a\left(U_{m+\frac{1}{2}}; u_{m+\frac{1}{2}} + \tau_m, (\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right) - a\left(u_{m+\frac{1}{2}} + \tau_m; u_{m+\frac{1}{2}} + \tau_m, (\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right) \right].
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

De fato, considerando

(i) $\left(\frac{z_{m+1}-z_m}{\Delta t} + \varrho_m, (\phi-u)_{m+\frac{1}{2}} + z_{m+\frac{1}{2}}\right) = \left(\varrho_m, (\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right)$

$+ \left(\frac{z_{m+1}-z_m}{\Delta t}, z_{m+\frac{1}{2}}\right) + \left(\frac{z_{m+1}-z_m}{\Delta t}, (\phi-u)_{m+\frac{1}{2}}\right),$

(ii) $\left(pW_\eta(z_{m+\frac{1}{2}} + \tilde{\tau_m}), (\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right)_{\Gamma_1} = \left(pW_1\eta_1 z_{m+\frac{1}{2}}, z_{m+\frac{1}{2}}\right)_{\Gamma_1}$

$+ \left(pW_1\eta_1 z_{m+\frac{1}{2}}, (\phi-u)_{m+\frac{1}{2}}\right)_{\Gamma_1} + \left(pW_1\eta_1\tilde{\tau_m}, (\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right)_{\Gamma_1},$

(iii) $\left[a\left(u_{m+\frac{1}{2}} + \tau_m; u_{m+\frac{1}{2}} + \tau_m, (\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right) - a\left(U_{m+\frac{1}{2}}; U_{m+\frac{1}{2}}, (\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right)\right]$

$= a\left(u_{m+\frac{1}{2}} + \tau_m; u_{m+\frac{1}{2}} + \tau_m, (\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right) + a\left(U_{m+\frac{1}{2}}; u_{m+\frac{1}{2}}, (\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right)$

$-a\left(U_{m+\frac{1}{2}}; u_{m+\frac{1}{2}}, (\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right) - a\left(U_{m+\frac{1}{2}}; U_{m+\frac{1}{2}}, (\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right)$

$= a\left(u_{m+\frac{1}{2}} + \tau_m; u_{m+\frac{1}{2}} + \tau_m, (\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right) + a\left(U_{m+\frac{1}{2}}; z_{m+\frac{1}{2}}, (\phi-u)_{m+\frac{1}{2}}\right)$

$+a\left(U_{m+\frac{1}{2}}; z_{m+\frac{1}{2}}, z_{m+\frac{1}{2}}\right) - a\left(U_{m+\frac{1}{2}}; u_{m+\frac{1}{2}}, (\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right),$

de (i),(ii) e (iii) seguem, respectivamente, as três equações

$$\frac{1}{2\Delta t}\left(\|z_{m+1}\|^2_{L^2(\Omega)}-\|z_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right)=\left(\frac{z_{m+1}-z_m}{\Delta t},z_{m+\frac{1}{2}}\right)$$
$$=\left(\frac{z_{m+1}-z_m}{\Delta t}+\varrho_m,(\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right)-\left(\varrho_m,(\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right)$$
$$-\left(\frac{z_{m+1}-z_m}{\Delta t},(\phi-u)_{m+\frac{1}{2}}\right),$$

$$\left(pW_1\eta_1 z_{m+\frac{1}{2}},z_{m+\frac{1}{2}}\right)_{\Gamma_1}=\left(pW_\eta(z_{m+\frac{1}{2}}+\tilde{\tau_m}),(\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right)_{\Gamma_1}$$
$$-\left(pW_1\eta_1 z_{m+\frac{1}{2}},(\phi-u)_{m+\frac{1}{2}}\right)_{\Gamma_1}-\left(pW_1\eta_1\tilde{\tau_m},(\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right)_{\Gamma_1},$$

$$a\left(U_{m+\frac{1}{2}};z_{m+\frac{1}{2}},z_{m+\frac{1}{2}}\right)=\left[a\left(u_{m+\frac{1}{2}}+\tau_m;u_{m+\frac{1}{2}}+\tau_m,(\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right)\right.$$
$$\left.-a\left(U_{m+\frac{1}{2}};U_{m+\frac{1}{2}},(\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right)\right]-a\left(U_{m+\frac{1}{2}};z_{m+\frac{1}{2}},(\phi-u)_{m+\frac{1}{2}}\right)$$
$$+a\left(U_{m+\frac{1}{2}};u_{m+\frac{1}{2}},(\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right)-a\left(u_{m+\frac{1}{2}}+\tau_m;u_{m+\frac{1}{2}}+\tau_m,(\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right).$$

Somando estas três equações e utilizando (3.2.4), obtemos (3.2.5), a partir de que faremos as desejadas e necessárias majorações.

Aproveitando o desenvolvimento da seção anterior, de (3.1.7), obtemos

$$a\left(U_{m+\frac{1}{2}};z_{m+\frac{1}{2}},(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\right)\leq(\epsilon_2+\epsilon_3)\|\nabla z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\rho^2}{4\epsilon_4}\|z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+\frac{\alpha^2_{sup}}{\epsilon_2}\|\nabla(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}+\left(\frac{\widetilde{W}^2}{\epsilon_3}+\epsilon_4\right)\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}$$

e

$$a\left(U_{m+\frac{1}{2}};\tau_m,(U-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\right)=a\left(U_{m+\frac{1}{2}};\tau_m,(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}-z_{m+\frac{1}{2}}\right)$$
$$\leq 2\frac{\alpha^2_{sup}}{\tilde{\epsilon_2}}\|\nabla\tau_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\tilde{\epsilon_2}\|\nabla(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}+\tilde{\epsilon_2}\|\nabla z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+2\frac{\widetilde{W}^2}{\tilde{\epsilon_3}}\|\nabla\tau_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\tilde{\epsilon_3}\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}+\tilde{\epsilon_3}\|z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+\frac{\rho^2}{2\tilde{\epsilon_4}}\|\tau_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\tilde{\epsilon_4}\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}+\tilde{\epsilon_4}\|z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$=(\tilde{\epsilon_3}+\tilde{\epsilon_4})\|z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}+\tilde{\epsilon_2}\|\nabla z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+(\tilde{\epsilon_3}+\tilde{\epsilon_4})\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}+\tilde{\epsilon_2}\|\nabla(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+\frac{\rho^2}{2\tilde{\epsilon_4}}\|\tau_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\left(2\frac{\alpha^2_{sup}}{\tilde{\epsilon_2}}+2\frac{\widetilde{W}^2}{\tilde{\epsilon_3}}\right)\|\nabla\tau_m\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Quanto aos termos de fronteira, para a parcela

$$\left(pW_\eta z_{m+\frac{1}{2}}, z_{m+\frac{1}{2}}\right)_{\Gamma_1} = \left(pW_\eta \frac{z_{m+1}+z_m}{2}, \frac{z_{m+1}+z_m}{2}\right)_{\Gamma_1}$$

utilizamos dados referentes à circulação na Baía de Ilha Grande, encontrados em Correa [14], Signorini [52] e [53] e no *site* do Terminal Marítimo da Baía da Ilha Grande. A corrente superficial, considerada unidirecional [1], entra pela porção oeste, circula ao redor da Ilha Grande passando pelo canal central e saindo pela porção leste. Este comportamento pouco se altera pela ação direta do vento local. Como Γ_1 é a parte do domínio à direita, e como nessa parte a corrente sai, podemos traduzir estas informações fazendo

$$W_\eta|_{\Gamma_1} > 0.$$

Além disto, na fronteira Γ_1 o vetor $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ normal exterior é dado por $(1,0)$, daí segue da inequação acima que $W_1|_{\Gamma_1} > 0$. Ainda sobre W_1, tendo em vista os cenários descritivos do que realmente ocorre naquela baia, podemos supor a existência de constantes positivas W_1^{inf} e W_1^{sup} tais que

$$W_1^{inf} \leq W_1|_{\Gamma_1} \leq W_1^{sup}.$$

Das observações acima obtemos

$$\left(pW_\eta z_{m+\frac{1}{2}}, z_{m+\frac{1}{2}}\right)_{\Gamma_1} \geq \frac{pW_1^{inf}}{2}\left[\frac{1}{2}\left(z_{m+1}, z_{m+1}\right)_{\Gamma_1} + \frac{1}{2}\left(z_m, z_m\right)_{\Gamma_1} + \left(z_{m+1}, z_m\right)_{\Gamma_1}\right].$$

Além disto, consideremos as seguintes majorações, levando em conta a definição de $\widetilde{W}$ dada na seção (2.2)

$$-\frac{pW_1^{inf}}{2}\left(z_{m+1}, z_m\right)_{\Gamma_1} \leq \frac{pW_1^{inf}\tilde{\epsilon}}{2}\|z_{m+1}\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \frac{pW_1^{inf}}{8\tilde{\epsilon}}\|z_m\|^2_{L^2(\Gamma_1)},$$

$$\left|\left(pW_1\eta_1 z_{m+\frac{1}{2}}, (u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\right)_{\Gamma_1}\right| = \frac{p}{2}\left|\left(W_1\eta_1 z_{m+1}, (u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\right)_{\Gamma_1} + \left(W_1\eta_1 z_m, (u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\right)_{\Gamma_1}\right|$$

$$\leq \frac{p\widetilde{W}}{2}\left(\|z_{m+1}\|_{L^2(\Gamma_1)}\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Gamma_1)} + \|z_m\|_{L^2(\Gamma_1)}\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Gamma_1)}\right)$$

$$\leq \frac{p\widetilde{W}}{2}\left(\epsilon\|z_{m+1}\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \epsilon\|z_m\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \frac{1}{2\epsilon}\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\right),$$

e

$$-\left(pW_\eta\tilde{\tau_m}, (\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right)_{\Gamma_1} = \left(pW_\eta\tilde{\tau_m}, (u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\right)_{\Gamma_1} - \left(pW_\eta\tilde{\tau_m}, z_{m+\frac{1}{2}}\right)_{\Gamma_1}$$

$$\leq p\widetilde{W}\|\tilde{\tau_m}\|_{L^2(\Gamma_1)}\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Gamma_1)} + \frac{p\widetilde{W}}{2}\left(\|\tilde{\tau_m}\|_{L^2(\Gamma_1)}\|z_{m+1}\|_{L^2(\Gamma_1)} + \|\tilde{\tau_m}\|_{L^2(\Gamma_1)}\|z_m\|_{L^2(\Gamma_1)}\right)$$

$$\leq \frac{p\widetilde{W}}{2\hat{\epsilon}}\|\tilde{\tau_m}\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \frac{p\widetilde{W}\hat{\epsilon}}{2}\left(\|z_{m+1}\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \|z_m\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\right) + p\widetilde{W}\hat{\epsilon}\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Gamma_1)}.$$

[1] A palavra “unidirecional” deve ser entendida no sentido marítimo, não no matemático!

Por analogia ao que foi feito em (3.1.5), obtemos para o colchete

$$\Big[a(U_{m+\frac{1}{2}};u_{m+\frac{1}{2}}+\tau_m,(\phi-U)_{m+\frac{1}{2}})-a(u_{m+\frac{1}{2}}+\tau_m;u_{m+\frac{1}{2}}+\tau_m,(\phi-U)_{m+\frac{1}{2}})\Big]$$

$$\leq 2\tilde{K}\|U_{m+\frac{1}{2}}-u_{m+\frac{1}{2}}-\tau_m\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla(\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega)}$$

$$=2\tilde{K}\|z_{m+\frac{1}{2}}+\tau_m\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla((\phi-u)_{m+\frac{1}{2}}+z_{m+\frac{1}{2}})\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq 2\tilde{K}\|z_{m+\frac{1}{2}}+\tau_m\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla(\phi-u)_{m+\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega)}+2\tilde{K}\|z_{m+\frac{1}{2}}+\tau_m\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla z_{m+\frac{1}{2}}\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq\frac{\tilde{K}^2}{\epsilon_8}\|z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}+2\epsilon_8\|\nabla z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\tilde{K}^2}{\epsilon_8}\|\tau_m\|^2_{L^2(\Omega)}+2\epsilon_8\|\nabla(\phi-u)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Enfim, para a última parcela a ser tratada obtemos a desigualdade

$$\left(\varrho_m,(\phi-U)_{m+\frac{1}{2}}\right)=\left(\varrho_m,(\phi-u)_{m+\frac{1}{2}}+z_{m+\frac{1}{2}}\right)$$

$$\leq\frac{1}{2\epsilon_7}\|\varrho_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\epsilon_7\left(\|z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

O objetivo agora é utilizar estas desigualdades para minorar o lado esquerdo e majorar o direito de (3.2.5). Organizamos algebricamente o lado esquerdo, deixando neste lado o termo de fronteira em z_{m+1} e passando os demais para a direita, de tal forma que fica minorado por

$$\frac{1}{2\Delta t}\left(\|z_{m+1}\|^2_{L^2(\Omega)}-\|z_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right)+a\left(U_{m+\frac{1}{2}};z_{m+\frac{1}{2}},z_{m+\frac{1}{2}}\right)+\left(\frac{pW_1^{inf}}{4}z_{m+1},z_{m+1}\right)_{\Gamma_1}.$$

e o lado direito fica majorado por

$$\begin{aligned}
&-\left(\tfrac{p}{2}\left[\tfrac{W_1^{inf}}{2}-\widetilde{W}(\epsilon+\hat{\epsilon})-\tfrac{W_1^{inf}}{4\tilde{\epsilon}}\right]z_m,z_m\right)_{\Gamma_1}+\left(\tfrac{p}{2}\left[\widetilde{W}(\epsilon+\hat{\epsilon})+W_1^{inf}\tilde{\epsilon}\right]z_{m+1},z_{m+1}\right)_{\Gamma_1}\\
&+\|z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}\left(\tfrac{\rho^2}{4\epsilon_4}+\tilde{\epsilon_3}+\tilde{\epsilon_4}+\tfrac{\tilde{K}^2}{\epsilon_8}+\epsilon_7\right)+\|\nabla z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}\left(\epsilon_2+\epsilon_3+\tilde{\epsilon_2}+2\epsilon_8\right)\\
&+\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}\left(\tfrac{\widetilde{W}^2}{\epsilon_3}+\epsilon_4+\tilde{\epsilon_3}+\tilde{\epsilon_4}+\epsilon_7\right)+\|\nabla(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}\left(\tfrac{\alpha^2_{sup}}{\epsilon_2}+\tilde{\epsilon_2}+2\epsilon_8\right)\\
&+\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\left(\tfrac{p\widetilde{W}}{4\epsilon}+p\widetilde{W}\hat{\epsilon}\right)\\
&+\|\tau_m\|^2_{L^2(\Omega)}\left(\tfrac{\rho^2}{2\tilde{\epsilon_4}}+\tfrac{\tilde{K}^2}{\epsilon_8}\right)+\|\nabla\tau_m\|^2_{L^2(\Omega)}\left(2\tfrac{\alpha^2_{sup}}{\tilde{\epsilon_2}}+2\tfrac{\widetilde{W}^2}{\tilde{\epsilon_3}}\right)\\
&+\tfrac{1}{2\epsilon_7}\|\varrho_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\tfrac{p\widetilde{W}}{2\hat{\epsilon}}\|\tilde{\tau_m}\|^2_{L^2(\Gamma_1)}+\left(\tfrac{z_{m+1}-z_m}{\Delta t},(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\right).
\end{aligned}$$

E ainda, a partir destes novos limitantes à esquerda e à direita, passando os termos de fronteira em

z_{m+1} da direita para a esquerda, obtemos para o lado direito

$$-\left(\frac{p}{2}\left[\frac{W_1^{inf}}{2}-\widetilde{W}(\epsilon+\hat{\epsilon})-\frac{W_1^{inf}}{4\tilde{\epsilon}}\right]z_m, z_m\right)_{\Gamma_1}$$
$$+\|z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}\left(\frac{\rho^2}{4\epsilon_4}+\tilde{\epsilon_3}+\tilde{\epsilon_4}+\frac{\tilde{K}^2}{\epsilon_8}+\epsilon_7\right)+\|\nabla z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}\left(\epsilon_2+\epsilon_3+\tilde{\epsilon_2}+2\epsilon_8\right)$$
$$+\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}\left(\frac{\widetilde{W}^2}{\epsilon_3}+\epsilon_4+\tilde{\epsilon_3}+\tilde{\epsilon_4}+\epsilon_7\right)+\|\nabla(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}\left(\frac{\alpha^2_{sup}}{\epsilon_2}+\tilde{\epsilon_2}+2\epsilon_8\right)$$
$$+\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\left(\frac{p\widetilde{W}}{4\epsilon}+p\widetilde{W}\hat{\epsilon}\right)$$
$$+\|\tau_m\|^2_{L^2(\Omega)}\left(\frac{\rho^2}{2\tilde{\epsilon_4}}+\frac{\tilde{K}^2}{\epsilon_8}\right)+\|\nabla\tau_m\|^2_{L^2(\Omega)}\left(2\frac{\alpha^2_{sup}}{\tilde{\epsilon_2}}+2\frac{\widetilde{W}^2}{\tilde{\epsilon_3}}\right)$$
$$+\frac{1}{2\epsilon_7}\|\varrho_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{p\widetilde{W}}{2\tilde{\epsilon}}\|\tilde{\tau_m}\|^2_{L^2(\Gamma_1)}+\left(\frac{z_{m+1}-z_m}{\Delta t},(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\right)$$

e o novo limite inferior a ser obtido para o lado esquerdo virá da desigualdade de Garding cuja aplicação nos dá

$$a\left(U_{m+\frac{1}{2}};z_{m+\frac{1}{2}},z_{m+\frac{1}{2}}\right)+\lambda\|z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}\geq\beta\|z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{H^1(\Omega)},$$

e dos termos de fronteira em z_{m+1} vindos do lado direito resultando

$$\frac{1}{2\Delta t}\left(\|z_{m+1}\|^2_{L^2(\Omega)}-\|z_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right)+\beta\|z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{H^1(\Omega)}+\left(\frac{p}{2}\left[\frac{W_1^{inf}}{2}-\widetilde{W}(\epsilon+\hat{\epsilon})-\tilde{\epsilon}W_1^{inf}\right]z_{m+1},z_{m+1}\right)_{\Gamma_1}$$

e uma nova parcela para o lado direito

$$\lambda\|z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Fazendo as seguintes considerações

(i) $\|z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\frac{1}{2}\left(\|z_{m+1}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|z_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right)$,

(ii) $\delta_1=\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{\rho^2}{4\epsilon_4}+\tilde{\epsilon_3}+\tilde{\epsilon_4}+\frac{\tilde{K}^2}{\epsilon_8}+\epsilon_7\right)$,

(iii) $\delta_2=\epsilon_2+\epsilon_3+\tilde{\epsilon_2}+2\epsilon_8$,

(iv) $\delta_3=\max\left\{\frac{\widetilde{W}^2}{\epsilon_3}+\epsilon_4+\tilde{\epsilon_3}+\tilde{\epsilon_4}+\epsilon_7,\frac{\alpha^2_{sup}}{\epsilon_2}+\tilde{\epsilon_2}+2\epsilon_8\right\}$,

(v) $\delta_4=p\widetilde{W}\left(\frac{1}{4\epsilon}+\hat{\epsilon}\right)$,

(vi) $\delta_5=\max\left\{\frac{\rho^2}{2\tilde{\epsilon_4}}+\frac{\tilde{K}^2}{\epsilon_8},2\frac{\alpha^2_{sup}}{\tilde{\epsilon_2}}+2\frac{\widetilde{W}^2}{\tilde{\epsilon_3}}\right\}$,

(vii) $\delta_6=\frac{1}{2\epsilon_7}$,

(viii) $\delta_7=\frac{p\widetilde{W}}{2\tilde{\epsilon}}$,

(ix) $\tilde{\beta}=\beta-\delta_2$,

a nova desigualdade obtida torna-se

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2\Delta t}\left(\|z_{m+1}\|^2_{L^2(\Omega)}-\|z_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right)+\tilde{\beta}\|z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{H^1(\Omega)}\\
&+\left(\tfrac{p}{2}\left[\tfrac{W_1^{inf}}{2}-\widetilde{W}(\epsilon+\hat{\epsilon})-\tilde{\epsilon}W_1^{inf}\right]z_{m+1},z_{m+1}\right)_{\Gamma_1}\leq-\left(\tfrac{p}{2}\left[\tfrac{W_1^{inf}}{2}-\widetilde{W}(\epsilon+\hat{\epsilon})-\tfrac{W_1^{inf}}{4\tilde{\epsilon}})\right]z_m,z_m\right)_{\Gamma_1}\\
&\delta_1\left(\|z_{m+1}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|z_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right)+\delta_3\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{H^1(\Omega)}+\delta_4\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\\
&+\delta_5\|\tau_m\|^2_{H^1(\Omega)}+\delta_6\|\varrho_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\delta_7\|\tilde{\tau_m}\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\\
&+\left(\tfrac{z_{m+1}-z_m}{\Delta t},(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\right).
\end{aligned}
$$

Observemos que, pela arbitrariedade dos *epsilons* que aparecem na definição de δ_2, podemos afirmar que $\tilde{\beta}>0$.

Multiplicando esta última desigualdade por $2\Delta t$, fazendo

$$C=2\max\{\delta_1,\delta_3,\delta_4,\delta_5,\delta_6,\delta_7\},$$

somando e subtraindo $\Delta t\|z_m\|^2_{L^2(\Omega)}$, após algum algebrismo feito com o objetivo de deixar do lado esquerdo os termos em z_{m+1}, obtemos

$$
\begin{aligned}
&(1-C\Delta t)\,\|z_{m+1}\|^2_{L^2(\Omega)}+2\Delta t\tilde{\beta}\|z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{H^1(\Omega)}+\Delta tC_1p\|z_{m+1}\|_{\Gamma_1}\\
&\leq\Delta tC_2p\|z_m\|_{\Gamma_1}+(1+(C+1)\Delta t)\,\|z_m\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+C\Delta t\left\{\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{H^1(\Omega)}+\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Gamma_1)}+\|\tau_m\|^2_{H^1(\Omega)}+\|\varrho_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\tilde{\tau_m}\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\right\}\\
&-\Delta t\|z_m\|^2_{L^2(\Omega)}+2\Delta t\left(\tfrac{z_{m+1}-z_m}{\Delta t},(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\right),
\end{aligned}
\tag{3.2.6}
$$

com

$$C_1=\frac{W_1^{inf}}{2}-\widetilde{W}(\epsilon+\hat{\epsilon})-\tilde{\epsilon}W_1^{inf}$$

e

$$C_2=-\frac{W_1^{inf}}{2}+\widetilde{W}(\epsilon+\hat{\epsilon})+\frac{W_1^{inf}}{4\tilde{\epsilon}}.$$

Supondo valores para $\tilde{\epsilon}$,ϵ e $\hat{\epsilon}$ tais que $0<\tilde{\epsilon}<\frac{1}{2}$ e

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\tilde{\epsilon}\right)<\frac{\widetilde{W}}{W_1^{inf}}(\epsilon+\hat{\epsilon})<\left(\frac{1}{2}-\tilde{\epsilon}\right)$$

obtemos $0<C_1<C_2$.

Consideremos

$$\tilde{C}_1(\Delta t)=\min\{1-C\Delta t,pC_1\}$$

e

$$\tilde{C}_2(\Delta t)=\max\{1+(C+1)\Delta t,pC_2\}$$

e utilizemos estas definições para obter, a partir de (3.2.6), a desigualdade

$$\begin{aligned}
&\tilde{C}_1\|z_{m+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\Delta t\tilde{\beta}\|z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{H^1(\Omega)} + \Delta t\tilde{C}_1 p\|z_{m+1}\|_{\Gamma_1} - \tilde{C}_2\|z_m\|^2_{L^2(\Omega)} - \Delta t\tilde{C}_2 p\|z_m\|_{\Gamma_1}\\
&\leq C\Delta t\left\{\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{H^1(\Omega)} + \|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \|\tau_m\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\varrho_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{\tau_m}\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\right\}\\
&-\Delta t\|z_m\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\Delta t\left(\tfrac{z_{m+1}-z_m}{\Delta t}, (u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\right).
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Façamos Δt suficientemente pequeno para que $0 < C\Delta t < \frac{1}{2}$ e, neste domínio, definamos a função

$$F(\Delta t) = \frac{\tilde{C}_1(\Delta t)}{\tilde{C}_2(\Delta t)}.$$

Afirmamos que existe constante L_1 tal que

$$0 < L_1 \leq F(\Delta t) < 1.$$

De fato, se $\tilde{C}_1(\Delta t) = 1 - C\Delta t$ então

$$F(\Delta t) = \frac{1 - C\Delta t}{1 + (C+1)\Delta t}$$

ou

$$F(\Delta t) = \frac{1 - C\Delta t}{pC_2}.$$

Como $0 < C\Delta t < \frac{1}{2}$, segue que

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{2C}} < \frac{1 - C\Delta t}{1 + (C+1)\Delta t} < \frac{1}{1 + \Delta t}.$$

Por outro lado, quando $pC_2 \geq 1 + (C+1)\Delta t$ então

$$\frac{1}{2pC_2} < F(\Delta t) = \frac{1 - C\Delta t}{pC_2} \leq \frac{1 - C\Delta t}{1 + (C+1)\Delta t} < 1.$$

Caso $\tilde{C}_1(\Delta t) = pC_1$ então

$$F(\Delta t) = \frac{C_1}{C_2}$$

ou

$$F(\Delta t) = \frac{pC_1}{1 + (C+1)\Delta t}$$

e como, neste caso, $pC_1 \leq 1 - C\Delta t$ então vale

$$\frac{pC_1}{\frac{3}{2} + \frac{1}{2C}} < F(\Delta t) = \frac{pC_1}{1 + (C+1)\Delta t} \leq \frac{1 - C\Delta t}{1 + (C+1)\Delta t} < 1.$$

Destas argumentações segue que

$$L_1 = \min\left\{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{2C}}, \frac{1}{2pC_2}, \frac{C_1}{C_2}, \frac{pC_1}{\frac{3}{2} + \frac{1}{2C}}\right\},$$

o que demonstra nossa afirmação. Utilizando este resultado, também podemos mostrar que existem constantes $\tilde{L_1}$ e $\tilde{L_2}$ tais que

$$0 < \tilde{L_1} \leq (F(\Delta t))^m \, (\tilde{C}_2)^{-1} < \tilde{L_2} < 1.$$

Multiplicamos (3.2.7) por $(F(\Delta t))^m \, (\tilde{C}_2)^{-1}$, utilizamos as definições acima e os limitantes $\tilde{L_1}$ e $\tilde{L_2}$ para escrevermos

$$\begin{aligned}
&(F(\Delta t))^{m+1} \, \|z_{m+1}\|^2_{L^2(\Omega)} - (F(\Delta t))^m \, \|z_m\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\Delta t \tilde{\beta} \tilde{L_1} \|z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{H^1(\Omega)} \\
&+\Delta t \left[(F(\Delta t))^{m+1} \, \|z_{m+1}\|^2_{\Gamma_1} - (F(\Delta t))^m \, \|z_m\|^2_{\Gamma_1} \right] \\
&\leq \tilde{L_2} C \Delta t \left\{ \|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{H^1(\Omega)} + \|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \|\tau_m\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\varrho_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{\tau_m}\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \right\} \\
&-\tilde{L_1} \Delta t \|z_m\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\Delta t \, (F(\Delta t))^m \, (\tilde{C}_2)^{-1} \left(\tfrac{z_{m+1}-z_m}{\Delta t}, (u-\phi)_{m+\frac{1}{2}} \right).
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Partindo de (3.2.8) realizamos o somatório $\sum_{m=0}^{M-1}$ trabalhando parcela a parcela. Obtemos assim

(i) $\sum_{m=0}^{M-1} \left[(F(\Delta t))^{m+1} \, \|z_{m+1}\|^2_{L^2(\Omega)} - (F(\Delta t))^m \, \|z_m\|^2_{L^2(\Omega)} \right] = (F(\Delta t))^M \, \|z_M\|^2_{L^2(\Omega)} - \|z_0\|^2_{L^2(\Omega)}$,

(ii) $2\Delta t \tilde{\beta} \tilde{L_1} \sum_{m=0}^{M-1} \|z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{H^1(\Omega)}$,

(iii) $\Delta t \sum_{m=0}^{M-1} \left[(F(\Delta t))^{m+1} \, \|z_{m+1}\|^2_{L^2(\Gamma_1)} - (F(\Delta t))^m \, \|z_m\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \right] = \Delta t \left[(F(\Delta t))^M \, \|z_M\|^2_{L^2(\Gamma_1)} - \|z_0 \right.$

(iv) $C \Delta t \tilde{L_2} \sum_{m=0}^{M-1} \left\{ \|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{H^1(\Omega)} + \|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \|\tau_m\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\varrho_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{\tau_m}\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \right.$

(v) $-\Delta t \tilde{L_1} \sum_{m=0}^{M-1} \|z_m\|^2_{L^2(\Omega)}$,

(vi) $\Delta t \sum_{m=0}^{M-1} \left(\dfrac{z_{m+1} - z_m}{\Delta t}, 2\, (F(\Delta t))^m \, (\tilde{C}_2)^{-1} (u-\phi)_{m+\frac{1}{2}} \right)$.

A parcela(vi) pode ser substituída pela soma das parcelas

$$\frac{2\Delta t}{\tilde{C}_2} \left\{ \sum_{m=0}^{M-2} \left(\frac{z_{m+1}}{\Delta t}, (F(\Delta t))^m \, (u-\phi)_{m+\frac{1}{2}} \right) + \left(\frac{z_M}{\Delta t}, (F(\Delta t))^{M-1} \, (u-\phi)_{M-\frac{1}{2}} \right) \right\}$$

com

$$\frac{2\Delta t}{\tilde{C}_2} \left\{ \sum_{m=1}^{M-1} \left(\frac{z_m}{\Delta t}, -\, (F(\Delta t))^m \, (u-\phi)_{m+\frac{1}{2}} \right) - \left(\frac{z_0}{\Delta t}, (u-\phi)_{\frac{1}{2}} \right) \right\},$$

ou equivalentemente, obtemos

$$\frac{2\Delta t}{\tilde{C}_2} \sum_{m=1}^{M-1} \left(z_m, \frac{(F(\Delta t))^{m-1} (u-\phi)_{m-\frac{1}{2}} - (F(\Delta t))^m (u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right)$$

$$+\frac{2}{\tilde{C}_2}\left\{\left(z_M,(F(\Delta t))^{M-1}(u-\phi)_{M-\frac{1}{2}}\right)-\left(z_0,(u-\phi)_{\frac{1}{2}}\right)\right\}$$

Reunindo as parcela de (i) até (vi), o somatório $\sum_{m=0}^{M-1}$ aplicado a (3.2.8) gera

$$\begin{aligned}
&(F(\Delta t))^M\|z_M\|^2_{L^2(\Omega)}-\|z_0\|^2_{L^2(\Omega)}+2\Delta t\tilde{\beta}\tilde{L}_1\sum_{m=0}^{M-1}\|z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{H^1(\Omega)}\\
&+\Delta t\left[(F(\Delta t))^M\|z_M\|^2_{L^2(\Gamma_1)}-\|z_0\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\right]\leq C\Delta t\tilde{L}_2\sum_{m=0}^{M-1}\left\{\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{H^1(\Omega)}\right.\\
&\left.+\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Gamma_1)}+\|\tau_m\|^2_{H^1(\Omega)}+\|\varrho_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\tilde{\tau_m}\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\right\}\\
&-\Delta t\tilde{L}_1\sum_{m=0}^{M-1}\|z_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{2}{\tilde{C}_2}\left\{\left(z_M,(F(\Delta t))^{M-1}(u-\phi)_{M-\frac{1}{2}}\right)-\left(z_0,(u-\phi)_{\frac{1}{2}}\right)\right\}\\
&\frac{2\Delta t}{\tilde{C}_2}\sum_{m=1}^{M-1}\left(z_m,\frac{(F(\Delta t))^{m-1}(u-\phi)_{m-\frac{1}{2}}-(F(\Delta t))^m(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}}{\Delta t}\right)
\end{aligned}\tag{3.2.9}$$

Pela desigualdade de Cauchy seguem

(i) $\left|\left(z_M,(F(\Delta t))^{M-1}(u-\phi)_{M-\frac{1}{2}}\right)\right|\leq\xi_1\|z_M\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{4\xi_1}\|(u-\phi)_{M-\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}$,

(ii) $\left|\left(z_0,(u-\phi)_{\frac{1}{2}}\right)\right|\leq\xi_2\|z_0\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{4\xi_2}\|(u-\phi)_{\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}$,

(iii) $\left(z_m,\frac{(F(\Delta t))^{m-1}(u-\phi)_{m-\frac{1}{2}}-(F(\Delta t))^m(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}}{\Delta t}\right)\leq\xi_3\|z_m\|^2_{L^2(\Omega)}$
$+\frac{1}{4\xi_3}\left\|\frac{(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}-(u-\phi)_{m-\frac{1}{2}}}{\Delta t}\right\|^2_{L^2(\Omega)}$,

que utilizadas em (3.2.9) implicam

$$\begin{aligned}
&\left[(F(\Delta t))^M-\frac{2\xi_1}{\tilde{C}_2}\right]\|z_M\|^2_{L^2(\Omega)}+2\Delta t\tilde{\beta}\tilde{L}_1\sum_{m=0}^{M-1}\|z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{H^1(\Omega)}+\Delta t\,(F(\Delta t))^M\|z_M\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\\
&\leq C\Delta t\tilde{L}_2\sum_{m=0}^{M-1}\left\{\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{H^1(\Omega)}+\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Gamma_1)}+\|\tau_m\|^2_{H^1(\Omega)}\right.\\
&\left.+\|\varrho_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\tilde{\tau_m}\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\right\}+\left(1+\frac{2\xi_2}{\tilde{C}_2}-\tilde{L}_1\Delta t\right)\|z_0\|^2_{L^2(\Omega)}+\Delta t\|z_0\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\\
&+\Delta t\left(\frac{2\xi_3}{\tilde{C}_2}-\tilde{L}_1\right)\sum_{m=1}^{M-1}\|z_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{2}{\tilde{C}_2}\left\{\frac{1}{4\xi_1}\|(u-\phi)_{M-\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{4\xi_2}\|(u-\phi)_{\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)}\right.\\
&\left.\frac{\Delta t}{4\xi_3}\sum_{m=1}^{M-1}\left\|\frac{(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}-(u-\phi)_{m-\frac{1}{2}}}{\Delta t}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right\}
\end{aligned}$$

Pela definição, observamos que a função $\tilde{C}_2$ é limitada inferiormente por 1. Portanto,

$$\frac{2\xi_3}{\tilde{C}_2} < 2\xi_3$$

e trocamos, por majoração na desigualdade acima, a parcela

$$\Delta t \left(\frac{2\xi_3}{\tilde{C}_2} - \tilde{L}_1 \right) \sum_{m=1}^{M-1} \|z_m\|^2_{L^2(\Omega)}$$

por

$$\Delta t \left(2\xi_3 - \tilde{L}_1 \right) \sum_{m=1}^{M-1} \|z_m\|^2_{L^2(\Omega)},$$

que desaparecerá da desigualdade ao fixarmos ξ_3 de tal forma que $2\xi_3 = \tilde{L}_1$. Além disso, utilizamos na mesma desigualdade que

$$\|z_0\|_{L^2(\Omega)} = \|u_0 - U_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0 - \phi(0,.)\|_{L^2(\Omega)}, \forall \phi \in L^2(0,T;V_h),$$

para obter

$$\begin{aligned}
&D_0\|z_M\|^2_{L^2(\Omega)} + \Delta t D_1 \sum_{m=0}^{M-1} \|z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{H^1(\Omega)} + \Delta t D_2 \|z_M\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \\
&\leq \Delta t D_3 \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \left[\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{H^1(\Omega)} + \|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \right] \right. \\
&\left. + \sum_{m=1}^{M-1} \left\| \frac{(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}} - (u-\phi)_{m-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + O((\Delta t)^4) \right\} \\
&+ D_4 \|u_0 - \phi(0,.)\|^2_{L^2(\Omega)} + \Delta t \|u_0 - \phi(0,.)\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \\
&+ D_5 \left\{ \|(u-\phi)_{M-\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|(u-\phi)_{\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)} \right\},
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

sendo

$$D_0 = (F(\Delta t))^M - \frac{2\xi_1}{\tilde{C}_2},$$

$$D_1 = 2\tilde{\beta}\tilde{L}_1,$$

$$D_2 = (F(\Delta t))^M,$$

$$D_3 = max\left\{ C\tilde{L}_2, \frac{1}{2\tilde{L}_1} \right\}$$

$$D_4 = 1 + \frac{2\xi_2}{\tilde{C}_2} - \tilde{L}_1 \Delta t,$$

e

$$D_5 = \frac{2}{\tilde{C}_2} max\left\{ \frac{1}{4\xi_1}, \frac{1}{4\xi_2} \right\}.$$

Os $D_i^{'}$s descritos acima podem ser minorados e majorados, de fato, utilizando os limitantes de $\tilde{C}_2$ e $(F(\Delta t))^M$, obtemos

(i) $(L_1)^M - 2\xi_1 < D_0 < 1 - \dfrac{2\xi_1}{\tilde{C}_2^{sup}}$,

(ii) $D_1 > 0$,

(iii) $(L_1)^M < D_2 < 1$,

(iv) $D_3 < max\left\{C, \dfrac{1}{2\tilde{L}_1}\right\}$,

(v) $1 + \dfrac{2\xi_2}{\tilde{C}_2^{sup}} - \dfrac{\tilde{L}_1}{2C} < D_4 < 1 + 2\xi_2$,

(vi) $\dfrac{2}{\tilde{C}_2^{sup}} max\left\{\dfrac{1}{4\xi_1}, \dfrac{1}{4\xi_2}\right\} < D_5 < 2max\left\{\dfrac{1}{4\xi_1}, \dfrac{1}{4\xi_2}\right\}$.

Podemos sintetizar o que foi obtido nesta seção com a seguinte proposição.

Proposição 3.2.1 *Consideramos u satisfazendo (3.0.3) e (3.0.4). Para x fixo e arbitrário em $\overline{\Omega}$, consideramos $u(.,x)$ três vezes diferenciável em relação a t e , além disto, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3}$ limitada em $\overline{\Omega_T}$. Supomos ainda que $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x}$ sejam contínuas em $\overline{\Omega_T}$ e o mesmo para a variável y. Reescrevemos (3.0.3) obtendo (3.2.1).*

Para U satisfazendo (3.2.2)e (3.2.3), definimos $z = u - U$. Então existem constantes positivas δ_1, δ_2 e C, que dependem dos dados do problema e de $\|\nabla u\|_{L^\infty \times L^\infty}$, e tais que, para Δt suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned}
&\|z_M\|^2_{L^2(\Omega)} + \Delta t \delta_1 \sum_{m=0}^{M-1} \|z_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{H^1(\Omega)} + \Delta t \delta_2 \|z_M\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \\
&\leq C\Delta t \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \left[\|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{H^1(\Omega)} + \|(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \right] \right. \\
&\left. + \sum_{m=1}^{M-1} \left\| \frac{(u-\phi)_{m+\frac{1}{2}} - (u-\phi)_{m-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + O((\Delta t)^4) \right\} \\
&+ C\|u_0 - \phi(0,.)\|^2_{L^2(\Omega)} + \Delta t \|u_0 - \phi(0,.)\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \\
&+ C\left\{ \|(u-\phi)_{M-\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|(u-\phi)_{\frac{1}{2}}\|^2_{L^2(\Omega)} \right\},
\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

para qualquer $\phi \in L^2(0,T;V_h)$.

As proposições deste capítulo podem ser aplicadas à teoria de aproximação, gerando taxas de convergência quando particularizamos o tipo de função ϕ. Este procedimento pode ser visto em [18]. Nesse artigo de Douglas e Dupont, para uma estimativa como as obtidas aqui, as funções ϕ

são consideradas polinômios de Hermite, em um domínio retangular. Nós não desenvolvemos um resultado nesta direção, mas separamos o desafio para futuras considerações, e trabalhos.

Capítulo 4

Elementos Finitos

Neste capítulo explicitamos os métodos aplicados para a determinação da solução numérica. Utilizamos o bem conhecido método dos elementos finitos na dicretização espacial e das diferenças finitas para a temporal.

Quando a advecção é dominante em relação à difusão, freqüentemente surgem indesejáveis oscilações na solução numérica obtida pelo método de Galerkin convencional. Para evitarmos tais oscilações adotamos a formulação conhecida por *streamline upwind Petrov-Galerkin*, SUPG, inicialmente apresentada por Hughes e Brooks em 1982 ([3], [27]).

4.1 Discretização Espacial

Consideramos $\{\Omega_e\}_{e=1}^{NT}$ uma família finita de NT triângulos Ω_e, dois a dois disjuntos ou tendo como interseção um vértice ou uma aresta, e tais que

$$\bar{\Omega} = \cup_{e=1}^{NT}\Omega_e.$$

Portanto, em primeira aproximação, estamos considerando $\bar{\Omega}$ um polígono e, em linguagem da teoria de elementos finitos, como a encontrada em [9], Ω_e será um 2-simplex de tipo k sendo k inteiro maior ou igual a 1.

Associamos a esta malha triangular o parâmetro h dado por

$$h = \max_e\{diam(\Omega_e)\},$$

e assim denotamos a família $\{\Omega_e\}_{e=1}^{NT}$ por $\mathcal{T}_h$.

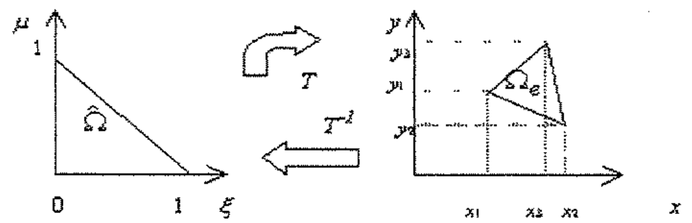
Uma vez definida $\mathcal{T}_h$, vamos construir o subespaço W_h de funções polinomiais por parte, com o qual o método dos elementos finitos trabalhará.

Consideremos l um inteiro positivo e $P_l(\Omega_e)$ o espaço de polinômios p de grau menor ou igual a l em Ω_e, ou seja,

$$p(x,y) = \sum_{|\alpha|\leq l} a_{\alpha_1\alpha_2}x^{\alpha_1}y^{\alpha_2},$$

com $(x, y) \in \Omega_e$ e $a_{\alpha_1 \alpha_2}$ coeficientes reais. O espaço $P_l(\Omega_e)$ tem dimensão finita $N = \binom{2+k}{k}$ e toda função p é determinada, de forma única, pelo seu valor em um conjunto $\sum_{\Omega_e}$ de N pontos, chamados nós. Os nós dos elementos finitos são especificados a partir da fixação de seu tipo k.

Os elementos finitos $(\Omega_e, P_l(\Omega_e), \sum_{\Omega_e})$ da família definida acima são todos afim-equivalentes a um único elemento $(\hat{\Omega}, \hat{P}_l(\hat{\Omega}), \hat{\sum}_{\hat{\Omega}})$, chamado de elemento de referência.



$$T(\xi, \mu) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Figura 4.1: Exemplo de tranformação afim que leva o elemento de referência $\hat{\Omega}$ em Ω_e.

Definamos W_h por

$$W_h = \{\varphi \in C^0(\bar{\Omega}) | \varphi_{|\Omega_e} \in P_l(\Omega_e), \forall \Omega_e \in T_h\},$$

de fato, prova-se que $W_h \subset H^1(\Omega)$, [32].

No caminho para a definição de uma base de W_h, consideremos

$$\bigcup_{e=1}^{NT} \sum \Omega_e = \{b_j; 1 \leq j \leq NTN\},$$

o conjunto de todos os nós da malha e NTN funções $\varphi_i \in W_h$ satisfazendo

$$\varphi_i(b_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, \ldots, NTN.$$

O conjunto

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{NTN}\}$$

constitui uma base para W_h e para qualquer $v_h \in W_h$ podemos escrever

$$v_h(x, y) = \sum_{j=1}^{NTN} v_h(b_j) \varphi_j(x, y).$$

Adequando estas definições ao problema em questão, estamos interessados no subconjunto de funções de W_h que se anulem na fronteira Γ_2, ou seja,

$$W_{h0} = W_h \bigcap V.$$

Assim, o conjunto de nós considerados é reduzido aos nós que pertencem a $\bar{\Omega}-\Gamma_2$ e, por conseqüência, a base de funções φ_j também é reduzida.

4.2 SUPG

O método de Galerkin convencional aplicado aos elementos finitos consiste em encontrar solução $U_h \in L^2(0,T;W_{h0})$, com $\dfrac{\partial U_h}{\partial t} \in L^2(0,T;W_{h0}{'})$, satisfazendo

$$(\frac{\partial U_h}{\partial t},\varphi_j) + a(U_h;U_h,\varphi_j) + (pW_\eta U_h,\varphi_j)_{\Gamma_1} = (f,\varphi_j), \tag{4.2.1}$$

para t fixo e arbitrário em $[0,T]$ e φ_j elemento da base de W_{h0}.

A solução U_h é representada por

$$U_h(t,\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{NTN} q_i(t)\varphi_i(\boldsymbol{x}) \tag{4.2.2}$$

e substituída em (4.2.1). Em seguida, esta equação é discretizada no tempo via Crank-Nicolson, como já descrito anteriormente.

Segundo Brooks e Hughes, [3], as oscilações nas soluções obtidas pelo Método de Galerkin ocorrem quando o termo advectivo é muito superior ao difusivo ou quando condições de fronteira inadequadas geram mudanças bruscas na solução. Enquadramos-nos, na melhor das hipóteses, na primeira causa e, no sentido de evitar oscilações, seguimos uma das recomendações encontrada em Hughes e Brooks em 1982 ([3], [27]), utilizando o Método *streamline upwind Petrov-Galerkin* (SUPG).

Em sua origem o método SUPG tenta contornar o problema das oscilações sem inserir difusão artificial ou apresentar soluções excessivamente difusivas ou perder em consistência. Em linhas gerais, o método trabalha com funções teste descontínuas do tipo

$$\tilde{\varphi}_j = \varphi_j + \psi_j,$$

sendo φ_j as funções da base de W_{h0} definida acima e a contribuição ou perturbação descontínua ψ_j sendo uma função relacionada ao campo de velocidades W e ao número de Peclet. As descontinuidades estão nas fronteiras dos triângulos Ω_e.

As novas funções $\tilde{\varphi}_j$ são então introduzidas na formulação de Galerkin (4.2.1) substituindo as φ_j e neste sentido variacional o método é consistente e ainda hoje bastante utilizado, ([35],[11]).

Assim, a formulação do SUPG é a seguinte

$$\begin{aligned}(\frac{\partial U_h}{\partial t},\varphi_j) + a(U_h;U_h,\varphi_j) + (pW_\eta U_h,\varphi_j)_{\Gamma_1} +\\ \sum_e \int_{\Omega_e} (\frac{\partial U_h}{\partial t} + div(-\alpha(U_h)\nabla U_h + WU_h) + \rho U_h - f)\psi_j d\Omega\\ = (f,\varphi_j),\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

com U_h dada por (4.2.2) e encontrada em [32].

Neste trabalho consideramos

$$\psi_j = \tau W \bullet \nabla \varphi_j,$$

sendo τ um parâmetro, que teoricamente é escolhido com o intuito de se obter solução ótima nos nós da malha ou muito próxima disto. Em Codina, [11], para o cálculo do parâmetro τ, chamado de tempo intrínseco, é dito que uma estratégia bastante adotada em dimensão espacial maior que 1 é a de repetir os procedimentos do caso unidimensional que, para elementos finitos lineares, consegue solução exata nos nós fazendo

$$\tau = (coth(Pe) - \frac{1}{Pe})\frac{h}{2W},$$

sendo o número de Peclet $Pe = \frac{Wh}{2\alpha}$, com α a difusividade, W a velocidade unidimensional e h o comprimento de um elemento da malha uniforme. Mais recentemente, o valor de τ tem sido proposto baseado em análise de convergência do método ([10], [11]).

Como não fizemos análise de convergência do SUPG para o problema em questão, que segundo Codina *et al* ([10]) pode vir a ser realizada completamente, utilizamos para o cálculo de τ o procedimento encontrado neste mesmo artigo e já utilizado com sucesso em trabalhos correlatos como [4] e [5]. O tempo intrínseco será denotado por τ_e, com o subíndice e indicando que seu cálculo será realizado em cada elemento.

A subrotina que calcula τ_e e que está no anexo das listagens segue os passos contidos na tabela 4.1 e plenamente justificados em [10]. Observamos que estes cálculos não são efetuados para os triângulos que possuem todos vértices em fronteiras de terra.

Em [10] são apresentadas estimativas de erro para o caso estacionário da equação de difusão-advecção, válidas sob determinadas condições impostas ao tempo intrínseco e que são satisfeitas pelos procedimentos contidos na tabela 4.1. Os procedimentos do artigo de Codina *et al* (*op. cit.*) são aplicados ao caso em que a difusão α é dada como $\alpha = \alpha(t, x)$.

4.3 A Implementação Comentada

No que segue não apresentaremos a implementação propriamente dita uma vez que os programas serão disponibilizados no apêndice. Pretendemos citar alguns detalhes do "como fazer" e do que foi efetivamente implementado, informações estas que não estão completamente explicitadas nos programas.

4.3.1 A Malha

Os elementos Ω_e utilizados são triângulos do tipo $k = 1$, isto é, os nós são os vértices dos triângulos, caracterizando assim os elementos finitos de primeira ordem.

Passo 1:	Calcula-se a velocidade característica W_e do triângulo Ω_e, isto é, a norma euclidiana da média aritmética das velocidades nos nós de Ω_e,
Passo 2:	Os vetores velocidade de Ω_e são trazidos para os nós do triângulo de referência $\hat{\Omega}$, por uma aplicação afim (figura 4.1), e a velocidade característica W_{ref} de $\hat{\Omega}$ é calculada como descrito no *Passo 1*,
Passo 3:	Calcula-se o comprimento característico h_e dado por $h_e = 0.7\frac{W_e}{W_{ref}}$,
Passo 4:	Calcula-se o número de Peclet γ_e dado por $\gamma_e = \frac{h_e W_e}{2\alpha}$,
Passo 5:	Calcula-se a função de *upwind* ϵ dada por $\epsilon = (\frac{1}{tanh\ \gamma_e}) - \frac{1}{\gamma_e}$,
Passo 6:	O tempo intrínseco τ_e é dado por $\tau_e = \frac{\epsilon h_e}{2W_e}$.

Tabela 4.1: Passos para o cálculo do tempo intrínsico.

Trabalhamos com uma malha fixa obtida através do software *Triangle*, gerador de malhas, que necessita das coordenadas dos pontos da fronteira (especificada no Capítulo 1), como dado de entrada. O *Triangle* é acionado e oferece como saída arquivos contendo informações como a numeração dos nós e suas coordenadas, a numeração dos triângulos e seus vértices e, ainda, identificadores de segmentos contidos na fronteira ou no interior. Os vértices dos triângulos são percorridos no sentido anti-horário.

Os dados de saída do gerador da malha são tratados para serem utilizados na geração do campo de velocidades, que simula a circulação padrão, e no programa que simula o movimento da mancha.

A malha utilizada nas simulações do Capítulo 5 está na figura 4.2

4.3.2 A Fonte e a Condição Inicial

Em Poffo ([47]), foi feito um histórico dos vazamentos ocorridos no litoral norte do Estado de São Paulo. No banco de dados da CETESB e do Terminal da PETROBRAS em São Sebastião foram registradas 232 ocorrências no período de 1974 a 2000.

As fontes de vazamento, segundo Poffo (*in op.cit.*), podem ser os navios, os oleodutos ou as instalações do terminal, onde os petroleiros realizam operação de carga e descarga, armazenamento e bombeamento para os dutos. Há ainda a fonte não identificada, havendo o aparecimento de mancha sem se saber a causa.

Nas simulações, consideramos a fonte pontual e localizada no próprio terminal, o que representaria um acidente em que, por alguma razão técnica, não foi possível desligar a fonte poluente nas primeiras

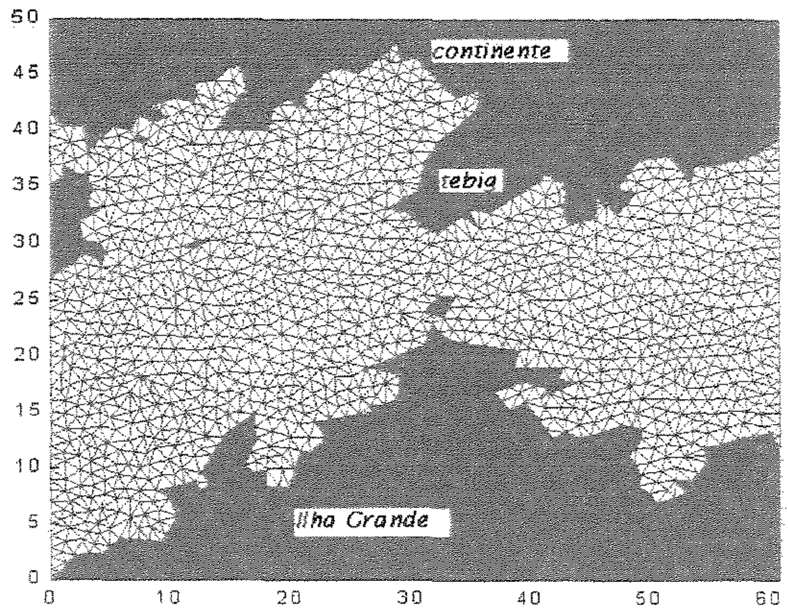


Figura 4.2: Malha triangular gerada pelo *Triangle*, contendo 2544 triângulos e 1446 nós.

horas.

Uma fonte pontual poderia representar também algo como um oleoduto vazando ou um acidente com o navio já ancorado ou ainda um acidente do tipo do "Prestige", ocorrido em dezembro de 2002, na Galícia.

Citamos alguns exemplos de acidentes em que as fontes foram desligadas antes de começar a segunda fase de Fay:

i O vazamento ocorrido em maio de 2002 em Angra dos Reis, decorrente de um furo no tanque do navio ancorado no terminal, foi descoberto e estancado três horas depois, de acordo com as notícias veiculadas nos principais órgãos de imprensa nacional (O Globo, Folha de São Paulo, JB, e outros);

ii O acidente na Baía de Guanabara, em janeiro de 2000, em que um duto em terra vazou durante 4 horas e foi fechado, de acordo com as notícias veiculadas nos principais órgãos de imprensa nacional (O Globo, Folha de São Paulo, JB, e outros).

Em acidentes como estes, não teríamos o termo fonte e partiríamos de uma condição inicial. No exemplo da Baía de Guanabara, obtivemos a condição inicial de uma imagem de satélite divulgada no Jornal O Globo.

Na Baía de Ilha Grande existem inúmeros locais considerados perigosos na orientação dada pelo TEBIG aos petroleiros em manobra ([54]); em um cenário de derrame, podemos utilizá-los como localização de uma provável condição inicial ou de uma provável fonte de poluição.

4.3.3 O Tratamento para a Difusão, o Decaimento e as Condições de Fronteira

Informações da CETESB (comunicação oral de 14 de janeiro de 2003) dão conta de uma variação no comportamento difusivo de certos óleos quando a maré provoca altos gradientes de salinidade e temperatura, introduzindo difusibilidade na coluna d'água. Esta seria uma situação relevante em regiões estuarinas.

Para fins de implementação, o coeficiente de difusão foi considerado constante. Entretanto, pretendemos num momento seguinte considerá-lo, de fato, como função da concentração e analisar se esta mudança é significativa para o comportamento do deslocamento da mancha.

Também são constantes o decaimento e o fator de proporcionalidade, p, que indica a passagem da mancha pela fronteira Γ_1.

Como havíamos adiantado o encalhe será simulado fazendo $k = 0$, nas fronteiras Γ_0.

Sabemos que algumas destas novas simplificações não atendem às exigências de órgãos governamentais tais como a CETESB, que seguindo a Resolução Ambiental de número 293, sugere a modelagem dos *weathering processes* (intemperização), no sentido de se obter simulações mais realistas, do ponto de vista quantitativo, e uma vez que tais processos modificam as características físico-químicas do poluente, alterando assim a difusividade, o decaimento e o encalhe.

4.3.4 A Circulação

D'Afonseca e Cantão desenvolveram uma suíte de simulação chamada de Stokes em que as saídas do *Triangle*, devidamente tratadas, e a condição da circulação nas fronteiras são necessárias, como entradas, para se obter, como saída, um campo estacionário de velocidades. A solução numérica da equação de Stokes (1.3.1) é obtida por elementos finitos de segunda ordem e gera o campo que consideramos como a circulação padrão da Baía de Ilha Grande.

As condições de fronteira necessárias para Stokes foram quase que inteiramente retiradas dos artigos de Signorini ([52], [53]). Neste trabalho, realizado com o apoio do Instituto de Oceanografia da USP, os correntômetros foram posicionados em vários pontos da Baía de Ilha Grande, dentre os quais haviam dois pontos representativos das fronteiras de mar que escolhemos para o nosso estudo. A partir da rosa das correntes, nos dois pontos das fronteiras de mar a leste e a oeste do terminal, escolhemos as condições de fronteira para Stokes. Para a terceira fronteira de mar, entre o continente e a Ilha da Gipóia, contamos com a assessoria, em comunicação verbal, de um morador local e arrais amador, [43]. A saída de Stokes simula um campo vetorial que descreve, nó por nó, o vetor velocidade devido à correnteza e que possui o comportamento descrito em [52], [53] e [14], ou seja, a corrente circula ao redor da Ilha Grande, no sentido horário (figura 4.3). Alguns poucos vetores menos realistas que aparecem em algumas enseadas devem-se, possivelmente, a opção por uma abordagem que modela o domínio bidimensionalmente, porém seu efeito no cenário geral resulta muito pouco significativo.

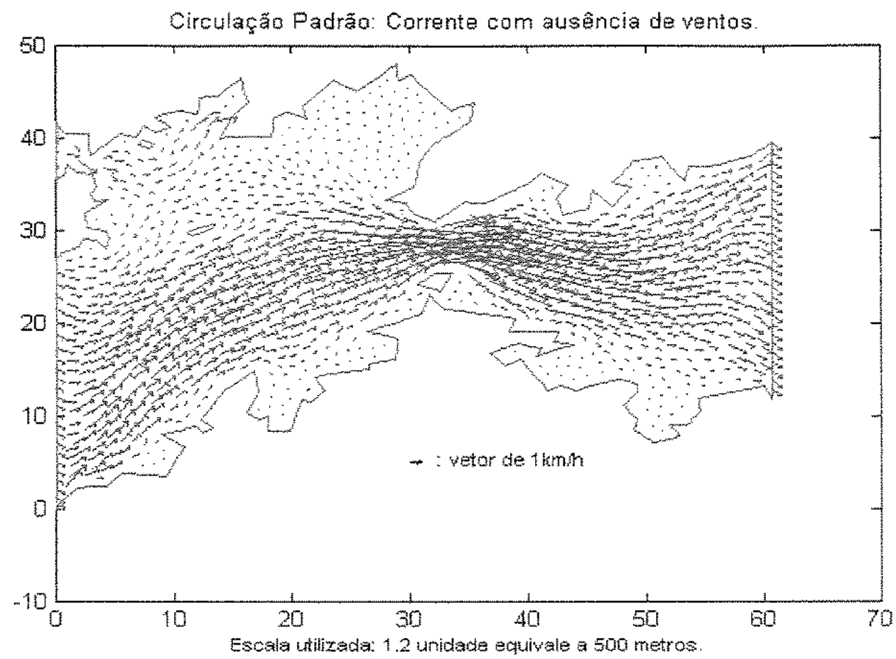


Figura 4.3: A circulação padrão, com os vetores posicionados nos 1446 nós.

Esta informação é, em seguida, incorporada ao mapa da circulação acrescentando a influência do vento. Isto é feito usando uma aproximação linear da Equação de Ekman. Foi usada a relação

$$W_{vento} = 0.03W_v,$$

sendo W_{vento} a velocidade induzida da corrente e W_v o vetor de vento a 10 metros acima do mar. Os vetores W_v descrevem os cenários de vento considerados no capítulo 5.

4.3.5 O Matlab

A simulação para o deslocamento da mancha foi gerada em Matlab, versões 5.2 e 6.1, disponíveis nos laboratórios do IMECC-UNICAMP. Utilizamos macros para resolução de sistemas, armazenagem esparsa e visualização.

Falta muito pouco para este programa poder ser efetivamente considerado como um IOSP (*ideal oil spill program*). Por exemplo, na resolução dos sistemas lineares oriundos das discretizações, poderia ser considerado o caráter esparso das matrizes envolvidas. Ou ainda, poderia haver a opção para elementos de segunda ordem (como foi feito na parte circulatória - STOKES).

Entretanto, o grupo de pesquisa em ecotoxologia e dispersão populacional da matemática aplicada da UNICAMP terá, em breve, seus procedimentos computacionais uniformizados através da Tese de Doutorado de Renato Fernandes Cantão e nossos modelos oferecidos gratuitamente a órgãos públicos e sem a exigência de pacotes e aplicativos de alto custo.

Capítulo 5

Os Cenários e as Simulações

Neste capítulo apresentaremos os cenários a partir dos quais o modelo será rodado e terá suas simulações comentadas.

Na primeira seção revisitamos alguns aspectos discutidos nos capítulos precendentes e que nos levaram às escolhas de localização de uma mancha inicial ou fonte poluente nas simulações apresentadas aqui.

Na segunda seção são caracterizados os ventos que atingem o canal central e é feita a escolha daqueles de maior freqüência e intensidade que comporão os cenários.

Além destas informações, para executar os programas, precisamos de outros dados que são discutidos na terceira seção.

5.1 Os Acidentes

Os acidentes de caráter tecnológico decorrem de falhas operacionais e da falta de manutenção de equipamentos afetando a segurança nas operações dos navios, do pier ou do terminal, [48]. Podemos ver no ano de 2002 uma ascendência de acidentes em comparação com 2001.

O pouco cuidado na manutenção dos petroleiros velhos, a não implantação de novas tecnologias para os novos, como casco duplo, e a falta de regulamentação entre países, ou mesmo internamente, no transporte globalizado de produtos químicos, nos faz testemunhar tragédias ambientais como a ocorrida no litoral da Espanha e França com o navio *Prestige*, que caracterizou uma fonte poluente a quase 4 quilômetros abaixo do nível do mar.

Os mais recentes e amplamente noticiados acidentes ocorridos em Angra foram causados por falhas em operações de carga e descarga no terminal; por este motivo temos em um dos cenários uma fonte posicionada no terminal.

Entretanto, não estamos livres de tragédias com os navios em manobra, afinal no canal central existem inúmeros locais considerados perigosos na orientação dada pelo TEBIG aos petroleiros em manobra, [54]. Um destes locais é a Laje Branca, formação rochosa localizada na abertura oeste, entre as Ilhas da Gipóia e Grande (ver figura 2.2), esta é a razão de considerarmos também um cenário com uma condição inicial próxima a esta posição. O porquê da escolha deste local em detrimento de outros tantos é a possibilidade de haver uma mancha poluindo uma região de extrema importância turística para Angra dos Reis: Ilha da Gipóia, Ilha das Botinas e praias próximas ao centro da cidade. Ao contrário do que costuma acontecer em acidentes no pier do terminal com as manchas se dirigindo para Mangaratiba.

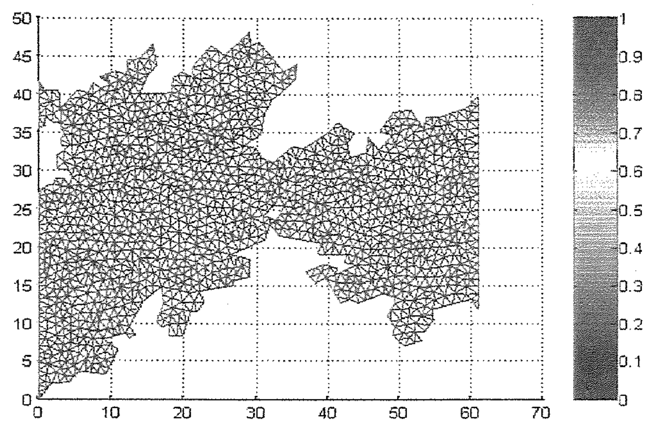


Figura 5.1: Mancha inicial próxima à Laje Branca

5.2 A Escolha dos Cenários de Vento

Lembramos que os vetores de vento e sua participação no movimento advectivo da mancha foram considerados constantes em relação ao tempo e ao espaço. Para tornar nossos resultados mais realistas procuramos fontes de dados que disponibilizassem as direções e intensidades de ventos mais freqüentes e efetivas em Angra dos Reis e, a partir destas informações, geramos alterações no padrão de circulação da Baía de Ilha Grande, isto é, geramos cenários distintos de circulação.

A relação entre as estações climáticas anuais e a predominância de certas direções e intensidade de ventos pode ser observada na figura 5.2, gerada a partir de série histórica de dados coletados entre os anos de 1931 a 1970 na estação meteorológica de Angra dos Reis, latitude $23^o01'$ e longitude $44^o19'$, fornecidos pela Diretoria de Geografia e Estatistítica da Fundação Instituto de Desenvolvimento Econômico e Social do Rio de Janeiro em publicação de 1978, [28].

Uma outra informação contida nesta publicação é que em 55% deste período as medições indicaram a ausência de ventos significativos.

Nos trabalhos de Signorini,[52] e [53], foram utilizadas medidas de vento realizadas durante os 16 meses que vão de setembro de 1974 a dezembro de 1975. As médias mais freqüentes de intensidade estiveram entre 6 e 10 nós (ou equivalentemente, de $3m/s$ a $5m/s$). Nestes artigos o referencial

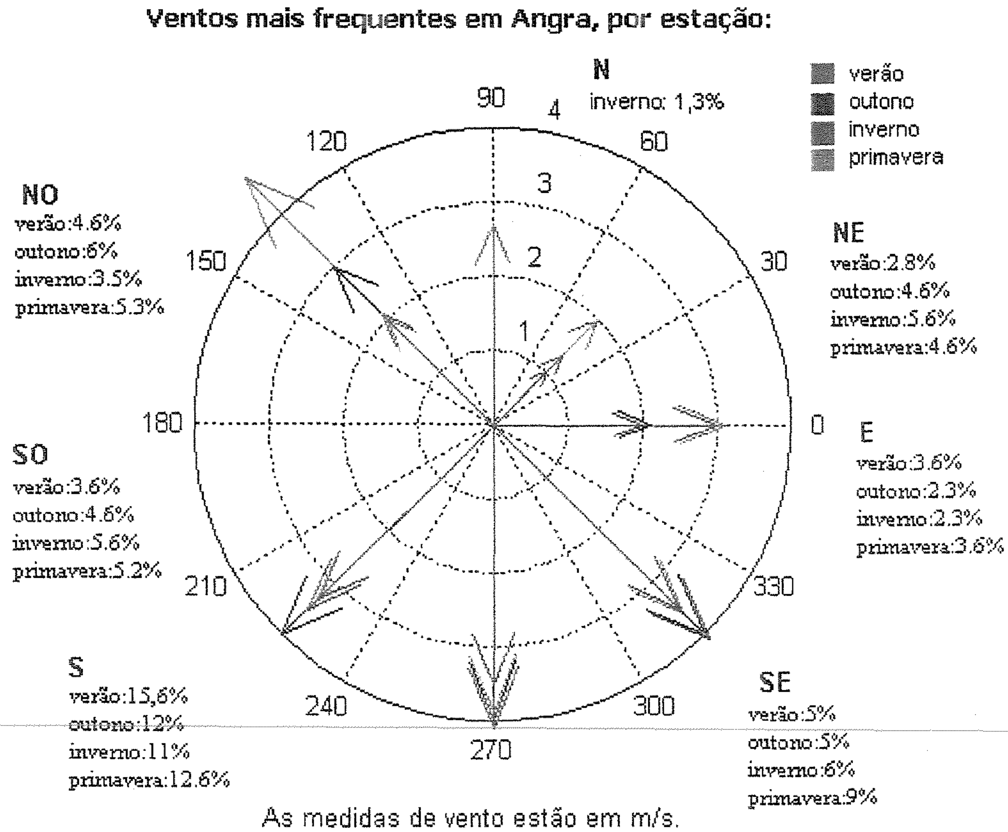


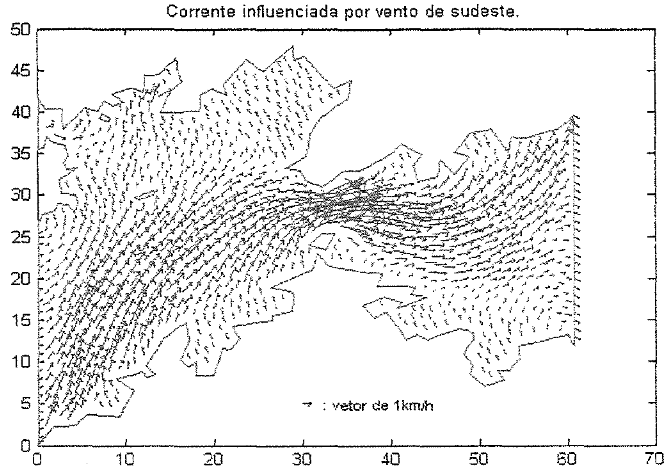
Figura 5.2: A rosa dos ventos por estação.

espacial adotado tem eixo x a 61.7^o do norte verdadeiro, no sentido horário, o que corresponde à maior extensão da baía, e o eixo y está a 331.7^o. A direção mais frequente é a de 210^o, medida a partir do norte verdadeiro e no sentido horário, seguida da direção de 50^o. Porém, as direções que causam fluxos de vento mais fortes, isto é, os mais efetivos na indução de correntes superficiais estão a 70^o, fluxo de leste, e 250^o, fluxo de oeste.

Balisados por estas informações e pela assessoria, em comunicação verbal, de um morador local [43], trabalhamos com 4 direções de ventos predominantes: de sudeste (SE), de sudoeste (SO), de noroeste (NO) e de nordeste (NE). Os ventos vindos do sul (S) não foram considerados, pois a Ilha Grande com sua posição e recortes geográficos impede ventos predominantemente de sul na parte do canal considerada. A ausência de vento será simulada considerando apenas a circulação padrão.

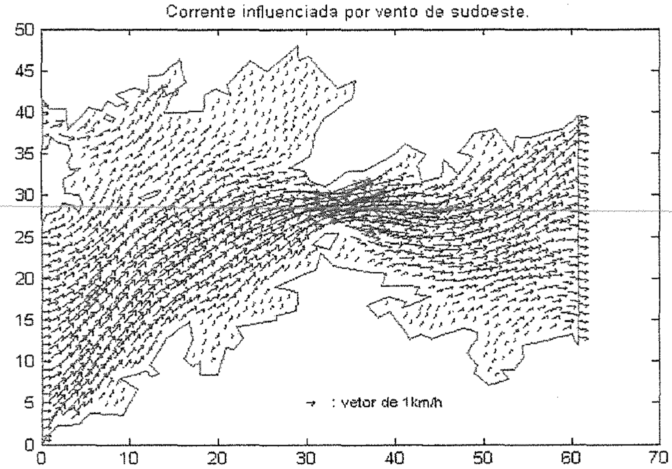
As figuras abaixo são resultantes da visualização do campo de velocidades gerado pelo programa que denominamos de Stokes, do modo descrito na seção 4.3.4.

Corrente influenciada por vento de sudeste.



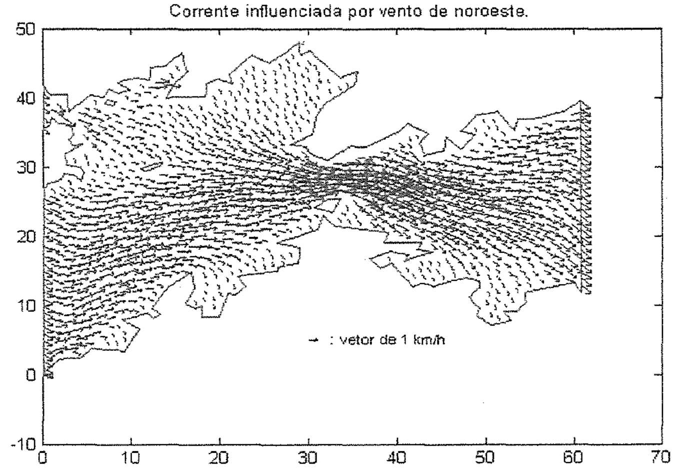
Escala utilizada : 1.2 unidade equivale a 500 metros.

Corrente influenciada por vento de sudoeste.



Escala utilizada: 1.2 unidade equivale a 500 metros.

Corrente influenciada por vento de noroeste.



Escala utilizada: 1.2 unidade equivale a 500 metros

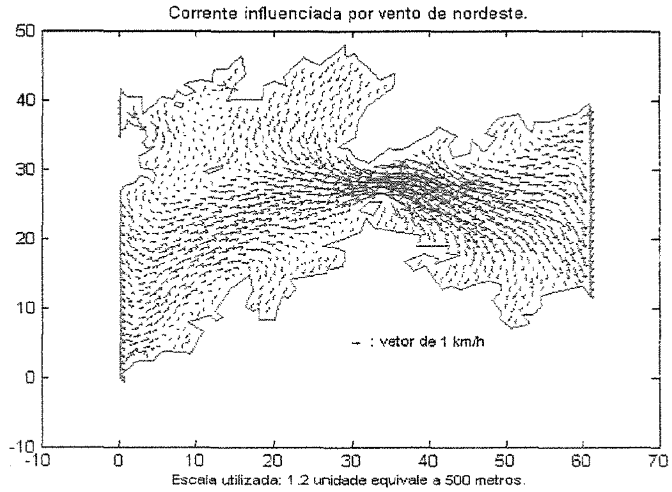


Figura 5.3: A circulação induzida por cada tipo predominante de vento.

5.3 Os Parâmetros

Além de informações que são resultantes da influência de ventos e correntes e de possíveis localizações de acidentes, devemos ainda definir, visando a execução do programa *oilsupgvento* alguns dados:

i o movimento da mancha na fronteira em mar aberto, onde vale a condição de contorno

$$-\alpha(u)\frac{\partial u}{\partial \eta} = pW_{\eta}u,$$

iremos usar $p = 1$ para realizarmos os ensaios. Este valor não foi retirado da literatura especializada porque não foi encontrado, mas assumimos passagem integral, no sentido da normal, pela fronteira de mar oriental,ou seja, não há impedimentos à movimentação da mancha;

ii o decaimento do óleo, de acordo com as referências citadas no capítulo 1, ocorre em quantidade maior no início do derrame, estaremos considerando $\rho = 0.00001$;

iii a difusão, constante, será $\alpha = 0.007$, cujo valor foi obtido a partir da relação de proporcionalidade entre o coeficiente de difusão e o produto da velocidade de difusão e a escala espacial, devida a Joseph e Sendner e encontrada em [42]. Foi utilizado um valor inferior a $1cm/s$ para a velocidade de difusão, justificado pelos experimentos contidos no artigo [55];

iv o passo no tempo $\Delta t = 0.025$;

v a fonte, quando existe, terá vazão constante de 0.05 por unidade de tempo.

Portanto, as figuras apresentadas aqui foram obtidas quando os parâmetros são:

difusividade	0.007
decaimento	0.00001
fator de passagem por fronteira	1
passo no tempo	0.025
fonte	0.05

Tabela 5.1: Parâmetros utilizados nas figuras que seguem.

5.4 Cenário 1: Fonte Poluente no Terminal

Apresentamos as simulações para cada situação de vento.

5.4.1 Calmaria

Em 50% das medidas de vento não há vento de intensidade significativa, ou seja, temos calmaria. Esta situação é simulada com a circulação dada pela circulação padrão (figura 4.3).

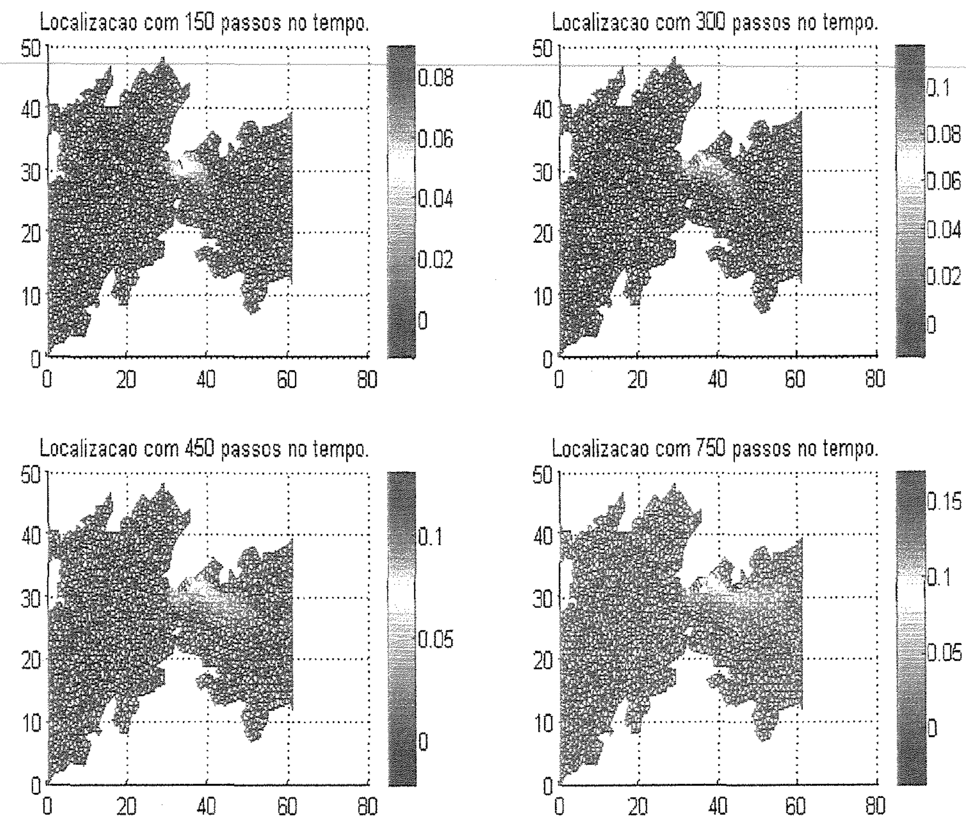


Figura 5.4: Fonte no Terminal e Calmaria

Ou seja, na maioria dos casos com acidentes no terminal a mancha atinge os costões rochosos e as praias em uma região de muitos condomínios e avança para Mangaratiba.

5.4.2 Vento de Sudeste

Para o cenário com fonte poluente no terminal obtemos como saída a figura 5.5. Neste caso, a mancha fica retida numa região de costão rochoso, próxima a condomínios de classe média-alta e alta. Com mais passos no tempo teríamos parte da mancha abrindo na direção de Mangaratiba.

Este comportamento foi o que de fato ocorreu no acidente descrito na seção 4.3.2 e este era o cenário de vento.

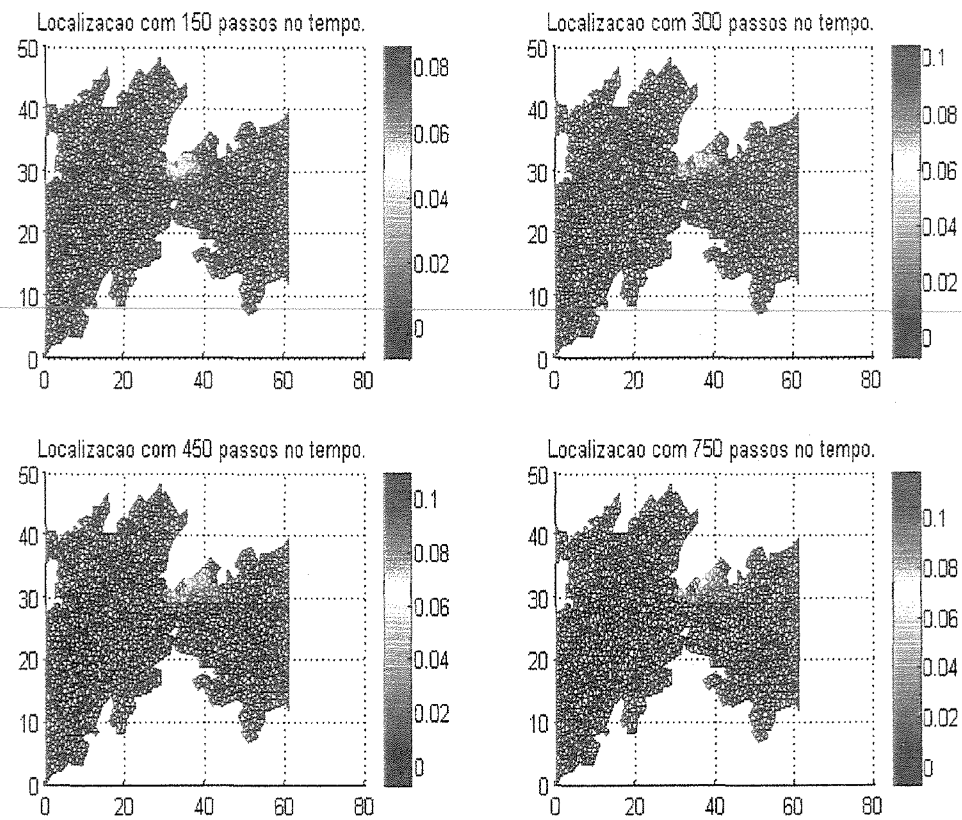


Figura 5.5: Vento de Sudeste e Fonte.

5.4.3 Vento de Sudoeste

Para o cenário com fonte poluente no terminal obtemos como saída a figura 5.6. Neste caso, a mancha é mantida mais tempo na costeira de Angra apesar de também seguir para Mangaratiba.

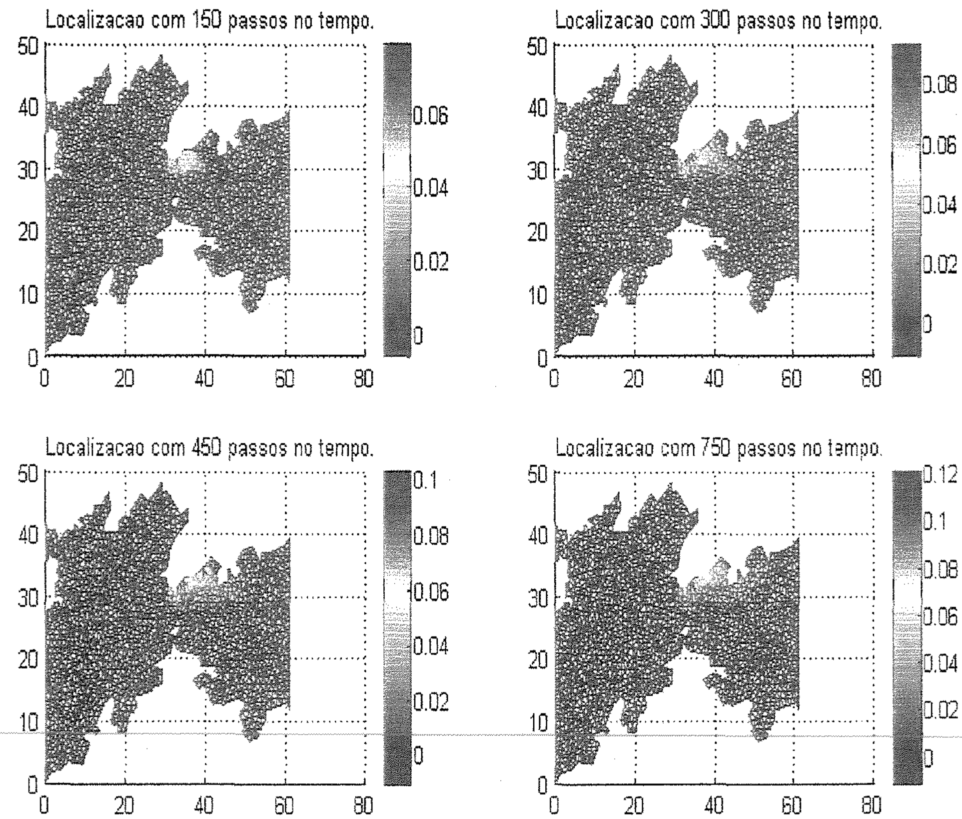


Figura 5.6: Vento de Sudoeste e Fonte.

5.4.4 Vento de Nordeste

Para o cenário com fonte poluente no terminal obtemos como saída a figura 5.7. Neste caso, com o passar do tempo, a mancha se dirige para a Ilha Grande, aproximando-se da Enseada das Estrelas e do Saco do Céu, região de mangue.

5.4.5 Vento de Noroeste

Para o cenário com fonte poluente no terminal obtemos como saída a figura 5.8. Neste caso, a mancha se aproxima da Ilha Grande, mas tende a ir para a abertura leste da Baía.

5.5 Cenário 2: Mancha Inicial

Seguem as simulações para uma mancha localizada próxima à Laje Branca.

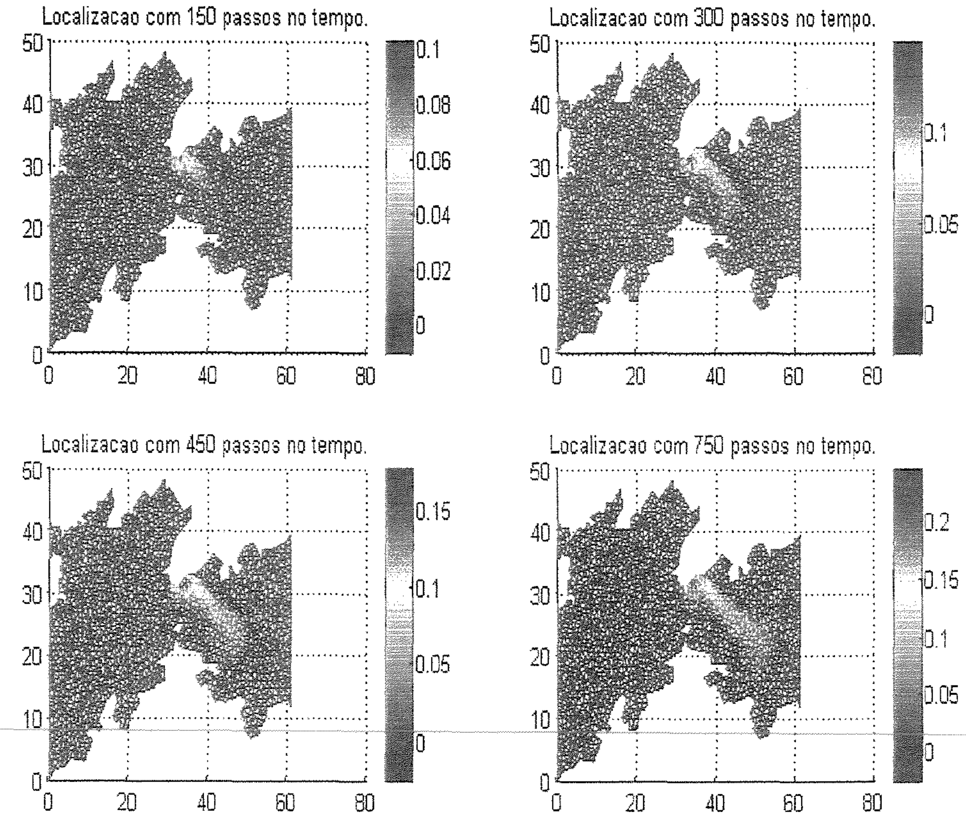


Figura 5.7: Vento de Nordeste e Fonte.

5.5.1 Calmaria

Para a situação mais freqüente, figura 5.9, a mancha acompanha a extensão da ilha, atinge a Ponta de Sítio Forte, mas se afasta desta enseada indo para Ilha dos Macacos e Lagoa Azul.

Neste caso, a entrada de ventos de noroeste ou mesmo nordeste, poderá empurrar a mancha para uma região de criação de mexilhão e de pesqueiros naturais (cercos).

5.5.2 Vento de Sudeste

Este cenário, pelo que vemos na figura (5.10), foi o único, neste estudo de casos que fizemos, que afasta a mancha da Ilha Grande, direcionando-a para a região da baía onde estão a Ilha dos Porcos, Ilha das Botinas e o centro de Angra. Entretanto, pela posição geográfica da mancha e pelas características geográficas da região, concluímos que é pouco provável que o vento de sudeste atinja significativamente a mancha nesta localização.

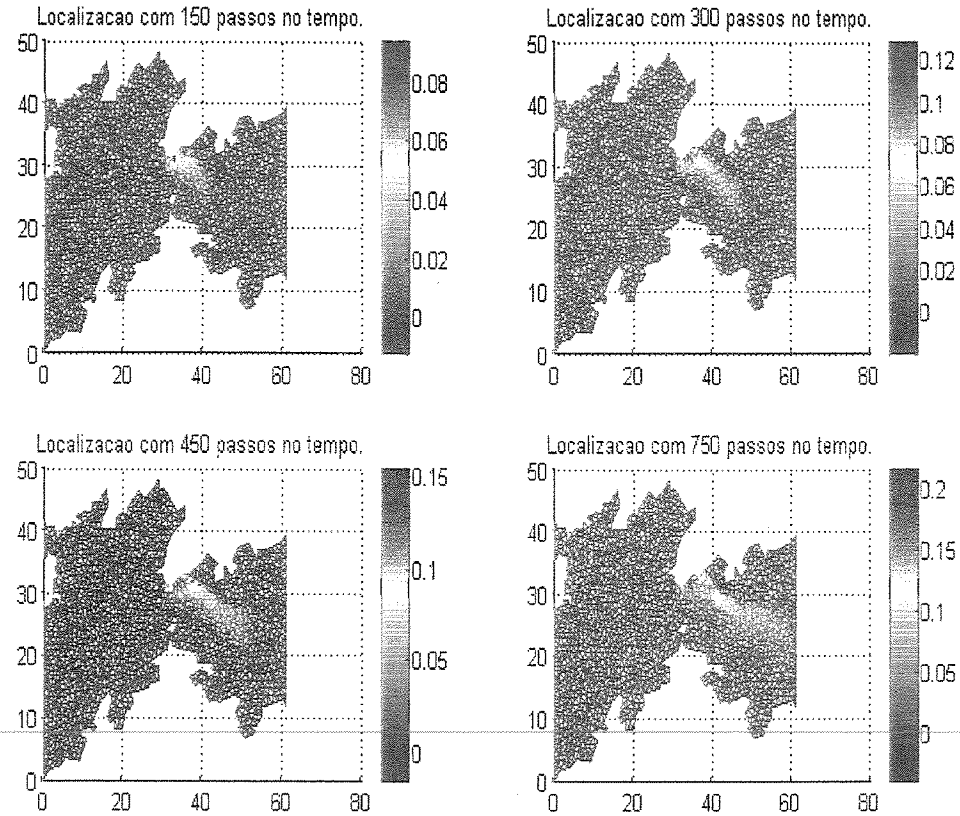


Figura 5.8: Vento de Noroeste e Fonte.

5.5.3 Vento de Sudoeste

Neste caso, pela figura (5.11) a mancha chega mais rapidamente ao terminal. Com o passar do tempo, atinge toda a costeira de Angra até Mangaratiba, inclusive. Os ventos de sudoeste prevêem a chegada de frente fria e costumam se manter por dois ou três dias.

5.5.4 Vento de Nordeste

Para o cenário com um derrame na Laje Branca obtemos como saída a figura 5.12. Neste caso, a mancha se mantém na costeira da Ilha Grande, próximo a Araçatiba. Atinge a Praia da Longa.

5.5.5 Vento de Noroeste

Para o cenário com um derrame na Laje Branca obtemos como saída a figura 5.13. Este é o cenário mais prejudicial às populações da Ilha Grande: dos nativos, dos turistas, dos mexilhões... Este vento mantém a mancha próxima à ilha.

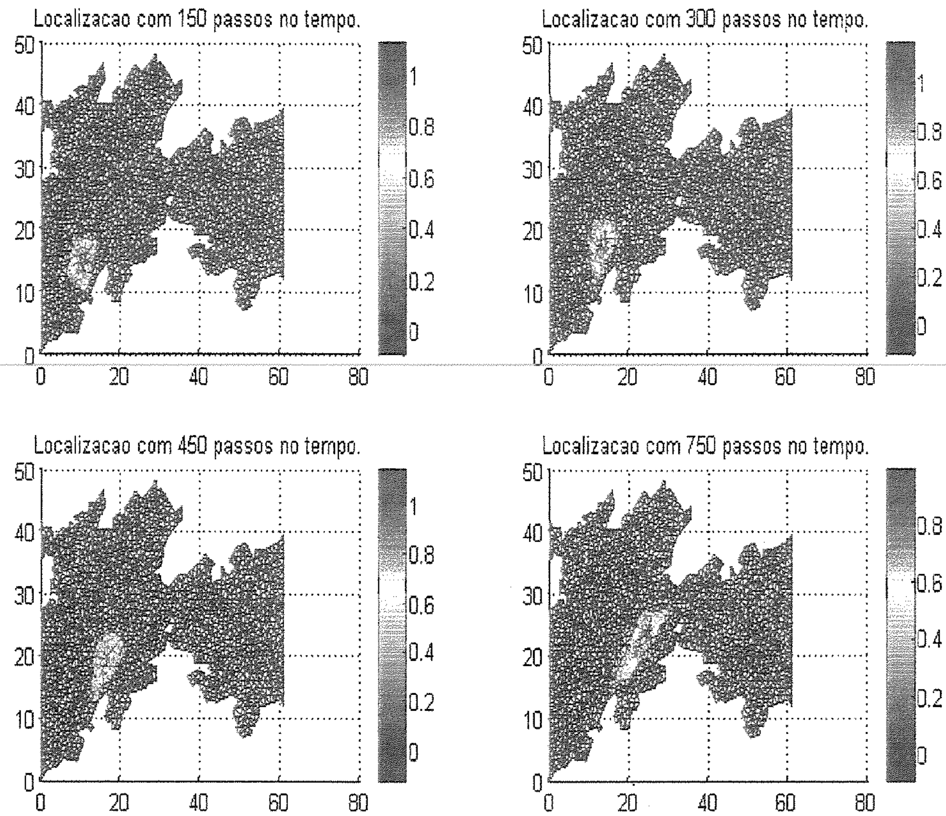


Figura 5.9: Calmaria e solução inicial

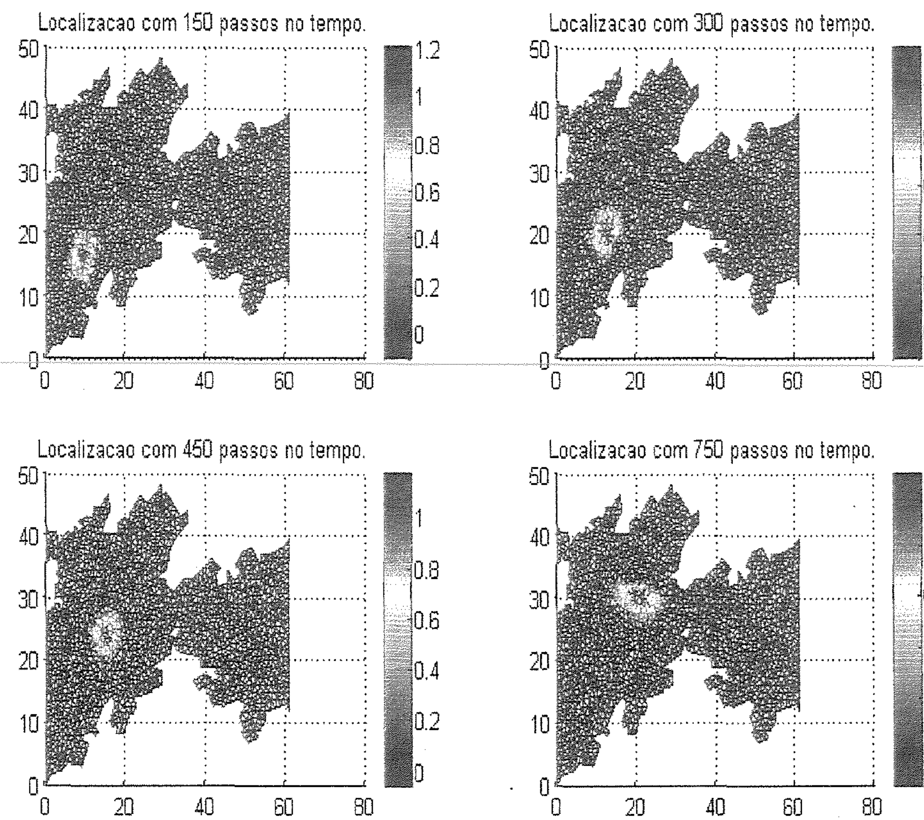


Figura 5.10: Vento de sudeste e solução inicial.

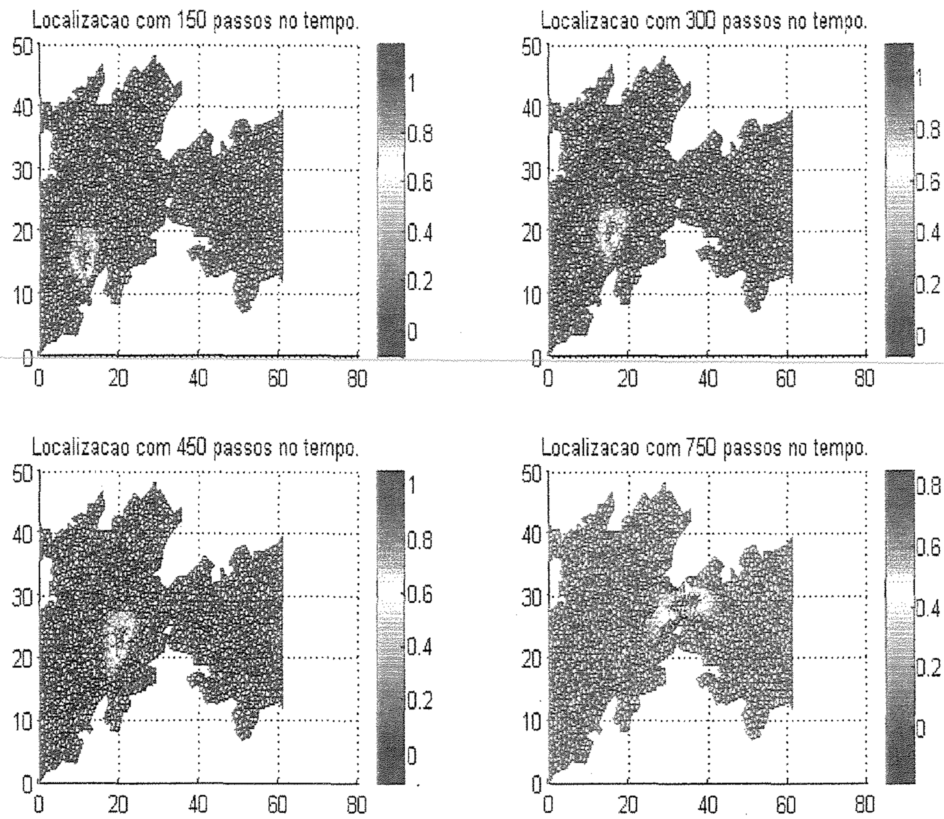


Figura 5.11: Vento de sudoeste e solução inicial.

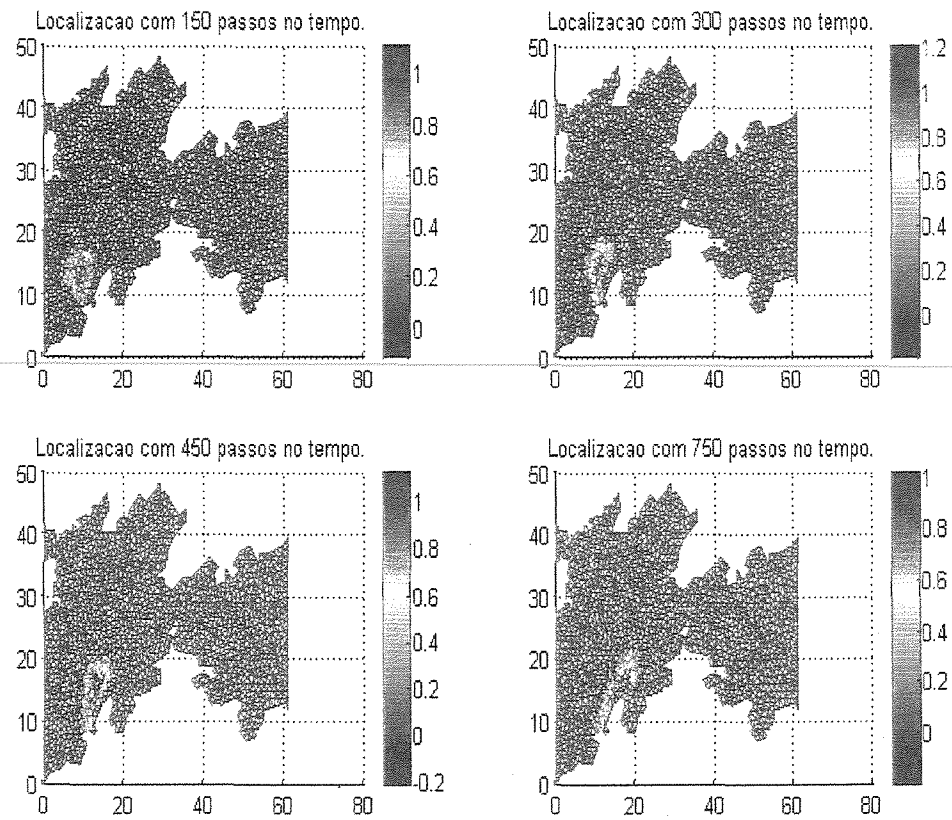


Figura 5.12: Vento de Nordeste e Solução Inicial.

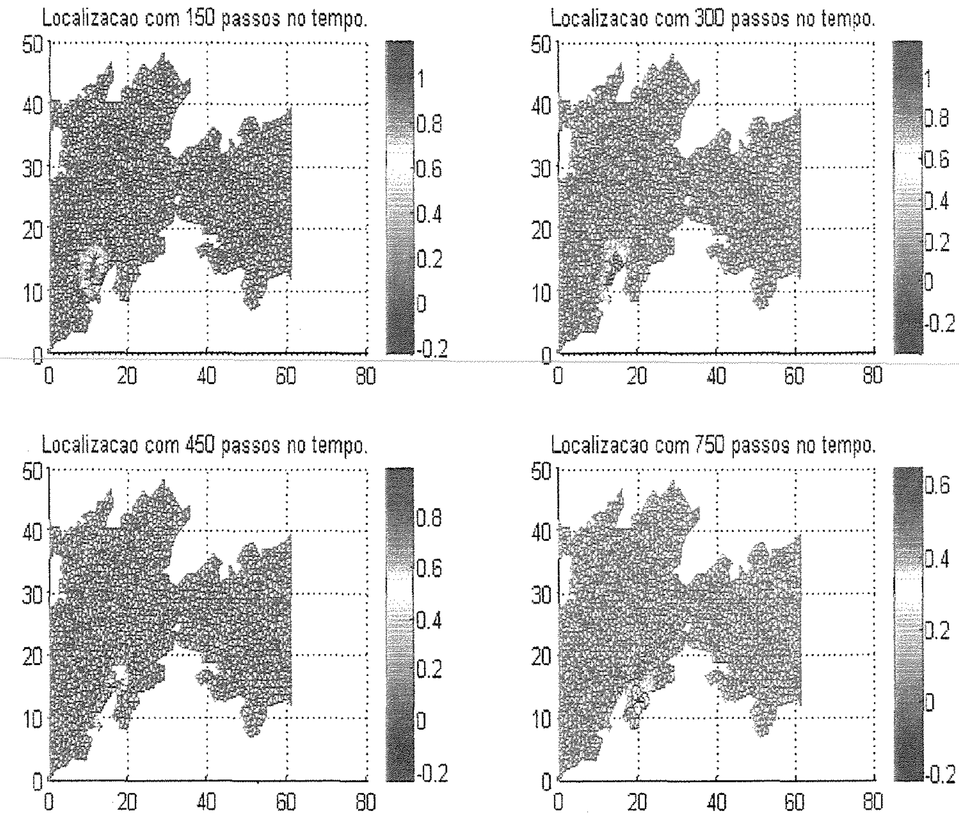


Figura 5.13: Vento de Noroeste e Solução Inicial.

Capítulo 6

Conclusões

O Conselho Nacional de Meio Ambiente (CONAMA), considerando os graves incidentes de derramamento de óleo ocorridos no país e a urgência de estabelecimento de diretrizes e procedimentos eficazes nas ações de resposta a incidentes de poluição por óleo nas instalações portuárias ou terminais, dutos, plataformas e em suas instalações de apoio e considerando a necessidade de serem estabelecidas diretrizes para a elaboração de plano de emergência individual (Lei 9.966, de agosto de 2000) propôs através da resolução de número 293, de dezembro de 2001, um conteúdo mínimo de plano de emergência (PE). O tópico de informações e procedimentos de resposta do PE deve conter os procedimentos para o monitoramento da mancha de óleo derramado que devem incluir, conforme o caso, não só o monitoramento visual e por meio de imagens de satélite ou outros meios, mas também a **modelagem matemática**.

A CETESB, seguindo esta resolução ambiental e segundo comunicação oral em 14 de janeiro de 2003, exige, para o licenciamento ambiental de uma empresa, um conjunto de modelos matemáticos acoplados para a previsão de espalhamento, circulação e intemperismo (*weathering processes*), que de preferência atuem tridimensionalmente e em tempo real. Os dados de entrada para os modelos devem ser de qualidade, isto é, devem realmente reproduzir as condições ambientais do local. Além disso, como o risco de incêndios e toxidade aumenta com a probabilidadede de um óleo leve se evaporar rapidamente, os modelos devem simular o comportamento na interface água-ar. Ou seja, está se exigindo mais do que um *Ideal Oil Spill*, [8], apresentado no capítulo 1.

O que fizemos não se concretiza em pacote para uso *on line*, ou mesmo em um sistema de modelos que cumpra as exigências acima, antes é um manual de suporte para as decisões e procedimentos num plano de contingência.

Apesar de serem os modelos bidimensionais, e não tri, eles apoiam-se em um largo espectro de informações locais e, portanto, de confiabilidade para os possíveis usuários. A escolha dos cenários tem suporte em dados de vento de 40 anos de medição em Angra, em uma circulação padrão que representa a circulação local ([52],[53],[54],[14]) e na escolha de incidentes representativos do que ocorreu ou poderá ocorrer, conforme estatísticas oficiais ([47], [48]).

Os motivos para se aceitar qualitativamente os resultados do programa não se devem apenas a resultados teóricos de convergência, mas também a ensaios anteriores em outros cenários ([5], [39]).

Entretanto, a resposta desejada pelos órgãos governamentais responsáveis pelo controle da qualidade ambiental é quantitativa e dimensional. Pelas características sócio-econômicas e geográficas da região atingida por um derrame e do volume e tipo de óleo derramado, nossas simulações devem rodar com passo no tempo de poucos minutos e o passo no espaço sendo inferior a 500 metros. A concentração deve estar em partes por milhão, que no nosso caso torna-se toneladas por metro quadrado.

É provável que a CETESB venha a ter dificuldades em avaliar se os modelos apresentados pelas empresas de fato fazem o que dizem fazer, com dados de boa qualidade. Segundo Garcia-Martinez, no artigo [25], em março de 1998, foi realizado um *workshop* na Noruega com o propósito de estabelecer uma metodologia para testar modelos computacionais aplicados a derrame de óleo. Esta tarefa foi por ele considerada difícil e, numa tentativa inicial, estabeleceu-se que a calibração de um modelo só terá lugar quando o modelo computacional for suficientemente testado e se possível comparado com solução analítica.

Não sabemos se há um monitoramento feito na Baía de Ilha Grande, como o realizado na Baía de São Sebastião, São Paulo, que nos permita a obtenção de dados de campo para uma futura calibração e validação dos modelos. Um possível caminho em busca de informações e opiniões talvez seja procurar a equipe do TEBIG que cuida do nível operacional e apresentar nossos ensaios.

No acidente de 31 de agosto de 2000 foram derramados 4000 litros de óleo pelo navio Cantagalo no terminal e segundo relato da Sociedade Angrense de Proteção Ecológica/APEDEMA-Sul, durante a manhã do dia primeiro de setembro a mancha se espalhou pelos costões próximos ao terminal e uma outra porção aproximou-se da Ilha Grande. À tarde a entrada de ventos afastou a mancha da Ilha Grande levando-a em direção a Conceição de Jacareí, distrito de Mangaratiba. A preocupação era com os cercos dos pescadores artesanais e fazendas marinhas instaladas naquela área.

No acidente de 13 de maio de 2002, vazaram 16 mil litros de óleo cru do tipo bonny-3 de origem nigeriana, considerado leve. Na tarde do dia 14 de maio o vento era de sudeste e havia o receio de que a mancha, que estava a 2 quilômetros do litoral de Angra, atingisse as praias de Itapinhoacanga e Fazenda. Os costões entre as praias de Maciéis e Portogalo ficaram tomados de óleo, as bóias não conseguiram conter o óleo. No dia 15 a mancha havia avançado 15 quilômetros chegando à Ponta da Figueira (Mangaratiba).

Pretendemos realizar os testes exigidos para a verificação de confiabilidade do algoritmo, mas podemos destacar que os ensaios realizados neste trabalho simularam bem o que está descrito acima.

Pelas incertezas inerentes a dados de vento e corrente, futuras possibilidades podem ser tanto um tratamento *fuzzy* para os parâmetros da equação de evolução apresentada aqui quanto a adoção da terceira dimensão, desde a simulação por Stokes até o estabelecimento de cenários como aqueles aqui propostos. Finalmente, podem-se incluir os comportamentos evolutivos de marés e mudanças nos ventos (como a chegada repentina do "noroestão" que se vai após algumas horas), bem como a inclusão, no domínio, da Baía de Sepetiba.

Apêndice:

Apresentamos a seguir os códigos computacionais que geraram as simulações do capítulo 5.

```
%--------------------------------------------------------------------------------
%
%oilsupgvento.m: calcula a solucao numerica da equacao difusao-adveccao que modela
% derrames na Baia de Ilha Grande.
%
%--------------------------------------------------------------------------------
%
%Os parametros:
%
% pars: [dif,dec,p,ht,Nt,f,vento,fonte],
%
%dif: difusao,
%
%dec: decaimento,
%
%p: passagem pela fronteira oriental,
%
%ht: passo no tempo,
%
%Nt: total de passos no tempo,
%
%f: intensidade da fonte,
%
%vento: tipo de vento (sudeste=1, nordeste=2, noroeste=3 e sudoeste=4)
%
%fonte: escolha de fonte (1) ou condicao inicial (0).
%
%--------------------------------------------------------------------------------
%
%Os dados devem vir armazenados em um arquivo de dados:
%
% IGdir_11: arquivo com a malha, nos e o campo de velocidades. Além de outras
%       informações necessárias para resolução do problema.
%
%--------------------------------------------------------------------------------
function oilsupgvento(pars)
%--------------------------------------------------------------------------------

dif=pars(1);          %Difusividade.
dec=pars(2);          %Decaimento.
p=pars(3);            %Porcentagem de passagem na fronteira.
```

```
ht=pars(4);          %Passo no tempo.
Nt=pars(5);          %Quantidade de Passos no Tempo.
vento=pars(7);        %Escolha do cenário de vento.
fonte=pars(8);        %Liga e desliga fonte.
%-----------------------------------------------------------------------------
%Carregando o arquivo de dados:
%-----------------------------------------------------------------------------
%
load IGdir_11;
%
%-----------------------------------------------------------------------------
%Carregando o arquivo com o posicionamento da laje branca:
%-----------------------------------------------------------------------------
%
load lajebranca;
%
%-----------------------------------------------------------------------------
%Trabalhando com uma escala tal que a intensidade do campo velocidade seja a
% padrão (na média) em Angra:
%-----------------------------------------------------------------------------
%
[z] = normmaxvel(vel);  % Achando o vetor de norma maxima.
vel=vel*(3.6/z);       %Fazendo com que o a norma maxima seja 3.6 km/h
%
%-----------------------------------------------------------------------------
%Adicionando o vento, de acordo com o tipo:
%-----------------------------------------------------------------------------
%
if vento==1
  load lestão;
  vel=vel+0.432*leste;  %3 porcento de 4m/s ou 14.4 km/h.
end
if vento==2
  load nordestao;
  vel=vel+0.432*nordeste;
end
if vento==3
  load noroestao;
  vel=vel+0.432*noroeste;
end
if vento==4
  load sudoestao;
  vel=vel+0.432*sudoeste;
end
%-----------------------------------------------------------------------------
%
f=pars(6); %A fonte pontual caso exista, isto é, se pars(7)=1.
%
%-----------------------------------------------------------------------------
%
%Elementos finitos e Crank-Nicolson:
%
%-----------------------------------------------------------------------------
pars1=[0 1 0]+(pars(1:3)*ht/2);
```

```
pars2=[0 1 0]-(pars(1:3)*ht/2);
%
%Constantes que aparecem no calculo das submatrizes de rigidez:
%
ref1=1/12;
ref2=1/24;
ref3=3*ref1;
%
%Integral do produto das fis:
%
    fis=[ref1  ref2   ref2;
      ref2  ref1   ref2;
      ref2  ref2   ref1];

%Integral de linha do produto das fis, relacionada a condicao de
%fronteira:

   fislin=[ref3 ref1;ref1 ref3;ref1 ref1];

%Constante relacionada a condicao de fronteira:

  truk=60.8*ones(3,1);
  tol=10^(-6);


%Constante relacionada a fonte:

R=1/6;

%Constantes que determinam o tamanho do sistema e da solucao:

NTT=size(malha,1);
NTN=size(nos,1);

%Inicializacoes:

M=sparse(NTN,NTN);
N=sparse(NTN,NTN);
F=sparse(NTN,1);

for ind = 1:NTT
     ind;
     vert=nos(malha(ind,1:3),:); %os vertices do triangulo de numero ind.

     v1=vert(3,:)-vert(1,:); %v1 e v2 representam o novo sistema de
     v2=vert(2,:)-vert(1,:); %coordenadas, usado nas integrais.
     v3=vert(3,:)-vert(2,:);
     c1=norm(v1)^2;
     c2=norm(v2)^2;
     c1c2=v1(1)*v2(1)+v1(2)*v2(2);
     area2=det([v2' v1']);
     area4=2*area2;
     area=area2/2;
%-----------------------------------------------------------------------
```

```
    % As matrizes que entram no calculo da submatriz de rigidez:
%-------------------------------------------------------------------------
    % Produto dos gradientes:

     grad=[c1+c2-2*c1c2 -c1+c1c2 -c2+c1c2;
        -c1+c1c2    c1     -c1c2;
        -c2+c1c2    -c1c2    c2];
%
   %Produto de Vel, gradiente e fis:
%
 velo=vel(malha(ind,1:3),:);
     vegrafi=fis*velo*[-v3(2)  v1(2) -v2(2); v3(1)  -v1(1)  v2(1)];
%-------------------------------------------------------------------------
% Matrizes e cálculos vindos do SUPG:
%-------------------------------------------------------------------------
     prodw1w1=(sum(velo(:,1).*velo(:,1))+ sum(sum(velo(:,1)*(velo(:,1)')))));
     %
     prodw2w2=(sum(velo(:,2).*velo(:,2))+ sum(sum(velo(:,2)*(velo(:,2)')))));
     %
     prodw1w2=(sum(velo(:,1).*velo(:,2))+ sum(sum(velo(:,1)*(velo(:,2)')))));
     %
     prodifx=[v3(2)^2    -v1(2)*v3(2) v2(2)*v3(2);
          -v3(2)*v1(2)   v1(2)^2  -v2(2)*v1(2);
          v3(2)*v2(2)  -v1(2)*v2(2)     v2(2)^2];
     %
     prodify=[v3(1)^2    -v1(1)*v3(1) v2(1)*v3(1);
          -v3(1)*v1(1)   v1(1)^2  -v2(1)*v1(1);
          v3(1)*v2(1)  -v1(1)*v2(1)     v2(1)^2];
     %
    prodifxy=[-2*v3(2)*v3(1)     v1(2)*v3(1)+v1(1)*v3(2) -(v2(2)*v3(1)+v2(1)*v3(2));
          v1(2)*v3(1)+v1(1)*v3(2)  -2*v1(2)*v1(1)      v2(2)*v1(1)+v2(1)*v1(2) ;
          -(v2(2)*v3(1)+v2(1)*v3(2)) v1(2)*v2(1)+v1(1)*v2(2)     -2*v2(2)*v2(1)];

%--------------------------------------------------------------------------
%Chamada da function que calcula tau e peclet
%--------------------------------------------------------------------------

     [peclet,tau] = supg(vert,v1,v2,area2,velo,dif);
     %
   prodwdif=(ref2*tau)/(area2)*(prodw1w1*prodifx+prodw2w2*prodify+prodw1w2*prodifxy

%--------------------------------------------------------------------------
%As submatrizes de rigidez com SUPG:
%--------------------------------------------------------------------------

     SM=((pars1(1)/area4)*grad)+(pars1(2)*(area2*fis+tau*(vegrafi)'))+
      ((ht/2)*(vegrafi+prodwdif));

     SN=((pars2(1)/area4)*grad)+(pars2(2)*(area2*fis+tau*(vegrafi)'))+
      (-(ht/2)*(vegrafi+prodwdif));
%--------------------------------------------------------------------------

%A condicao de fronteira neste exemplo, obriga calculos com integrais de
% de linha na fronteira x=60.8:
```

```
truque=truk-vert(:,1);
y=find(truque"¡tol);
if size(y,1)==2
   lim=vert(y,2);
   k=abs(lim(2)-lim(1));
   front1=fislin*vel(malha(ind,y),1);
   front2=zeros(3);
   front2(y(1),y(1))=front1(1);
   front2(y(2),y(2))=front1(2);
   front2(y(1),y(2))=front1(3);
   front2(y(2),y(1))=front1(3);

   SM=SM+pars1(3)*(k)*front2;
   SN=SN+pars2(3)*(k)*front2;

end % fim do if

%Construcão das matrizes M, N e da fonte:

for iloc=1:3

  igl=malha(ind,iloc);
  if malha(ind,iloc+3)==1

    for jloc=1:3
     jgl=malha(ind,jloc);
     if malha(ind,jloc+3)==1
      M(igl,jgl)=M(igl,jgl)+SM(iloc,jloc);
      N(igl,jgl)=N(igl,jgl)+SN(iloc,jloc);
     end %if
    end %jloc

     % A Fonte Poluente da Baia, o oleoduto:
     %tebig=[nos(79,:);nos(245,:);nos(769,:);nos(859,:);nos(948,:);nos(949,:);
          nos(1085,:);nos(1398,:);nos(1415,:)];
if fonte==1
     if (igl==79"—igl==245—igl==769"—igl==859"—igl==948"—igl==949"—igl==1085
       "—igl==1398"—igl==1415)
       F(igl)=F(igl)+f*R*ht*area;
  end %if definição de F, a fonte.
end
  end %if
 end %iloc

end %ind

%Devemos eliminar as linhas e colunas nulas de M, N e a coordenada
%nula de F correspondente. Para isto usamos um vetor condnos arma-
%zenado em IG_l1 e que indica em que nos a solucao e conhecida e
%nula e onde a solucao nao e conhecida:

snc=find(condnos==1);
M=M(snc,snc); N=N(snc,snc); F=F(snc);
%Condição inicial nula:
```

```
inic=sparse(size(snc,1),1);
sol=zeros(NTN,1);
if fonte==0
  sol(indmancha)=1;
end
inic=sol(snc);
%Decomposicao da matriz M:
[L U]=lu(M);
malha=(malha(:,1:3))';
Nmo=Nt/50;
filme=moviein(Nmo);
%O tempo:
for t=1:Nt
 b=N*inic+F;
 inic=L\b;
 inic=U\inic;
 zz=rem(t,50);
 sol(snc)=inic;
 if (zz==0)
  tt=t/50;
  trisurf(malha',nos(:,1),nos(:,2),sol);
  view(0,90);
  filme(:,tt)=getframe;
  end
end
movie(filme)
```

A subrotina que calcula os parâmetros do SUPG:

```
%-------------------------------------------------------
%       O cálculo do parâmetro tau para o método SUPG
%       e do número de Peclet.
%
%
%   supg( vert,v1,v2,area2,vel,dif)
%
% vert   -     matriz 3x2 com as coordenadas dos vértices
%             do triângulo de número ind da malha.
%
% vel     -   matriz 3 x 2 com as coordenadas do campo
%             velocidade W em cada vértice do triângulo.
%
% area2    -    o dobro da área do triângulo
%
%
% Os vértices devem estar numerados no sentido anti-horário.
%
%
%-------------------------------------------------------
function [peclet,tau] = supg(vert,v1,v2,area2,vel,dif)
%-------------------------------------------------------------------------------
%Média das velocidades no triângulo
ve=(vel(1,:)+vel(2,:)+vel(3,:))/3;
ve=norm(ve);
```

```
%-------------------------------------------------------------------------------------------
% O cálculo do campo velocidade no triângulo de referência:
%Alguns cuidados são tomados o sentido de posicionar o campo
%vetorial nos devidos vértices.
vel(1,:)=vel(1,:)+vert(1,:);
vel(2,:)=vel(2,:)+vert(2,:);
vel(3,:)=vel(3,:)+vert(3,:);
vref=(velref(v1,v2,vel(1,:),area2,vert(1,:))+(velref(v1,v2,vel(2,:),area2,vert(1,:)
-[1;0])+(velref(v1,v2,vel(3,:),area2,vert(1,:))-[0;1]))/3;
vref=norm(vref);
%-------------------------------------------------------------------------------------------
he=0;
if vref~=0
  he=0.7*ve/vref;
end
peclet=ve*he/(2*dif);
if peclet~=0
  epsilon=(1/tanh(peclet))-(1/peclet);
  tau=(epsilon*he)/(2*ve);
else
  tau=0;
end

%-------------------------------------------------------------------------------------------
%A transformação que leva um elemento qualquer no triângulo de
%referência, aplicada ao campo vetorial:
function v = velref (v1,v2,velo,area2,vert1)
Mb=(1/area2)*[v1(2) -v1(1);-v2(2) v2(1)];
v=Mb*(velo'-vert1');

%-------------------------------------------------------------------------------------------
```

Anexo 1: Tipos de Óleo

Apresentamos uma classificação dos tipos de óleo derramado, integralmente retirada de [47].

A densidade do óleo e seus derivados é expressa, internacionalmente, como grau API, um padrão criado pelo *American Petroleum Institute* . De acordo com a densidade específica e grau API, os óleos mais freqüentemente transportados pelo mar foram classificados em quatro grupos (veja tabela 6.1).

Tabela 6.1: Classificação dos Grupos de Óleo

Grupo	Densidade	Grau API	Composição	Meia Vida	Persistência
Grupo I	< 0.80	> 45	Leve	$\sim$ 24h	1-2 dias
Grupo II	0.80 a 0.85	35 a 45	Leve	$\sim$ 48h	3-4 dias
Grupo III	0.85 a 0.95	17.5 a 35	Pesado	$\sim$ 72h	6-7 dias
Grupo IV	> 0.95	< 17.5	Pesado	$\sim$ 168h	> 7 dias

Grupo I - Óleos leves, que pouco se misturam com a água do mar, permanecendo de um a dois dias na superfície, com alta taxa de evaporação;

Grupo II - Óleos leves em que a emulsão água-óleo é maior do que no grupo anterior, degradando-se naturalmente entre três e quatro dias;

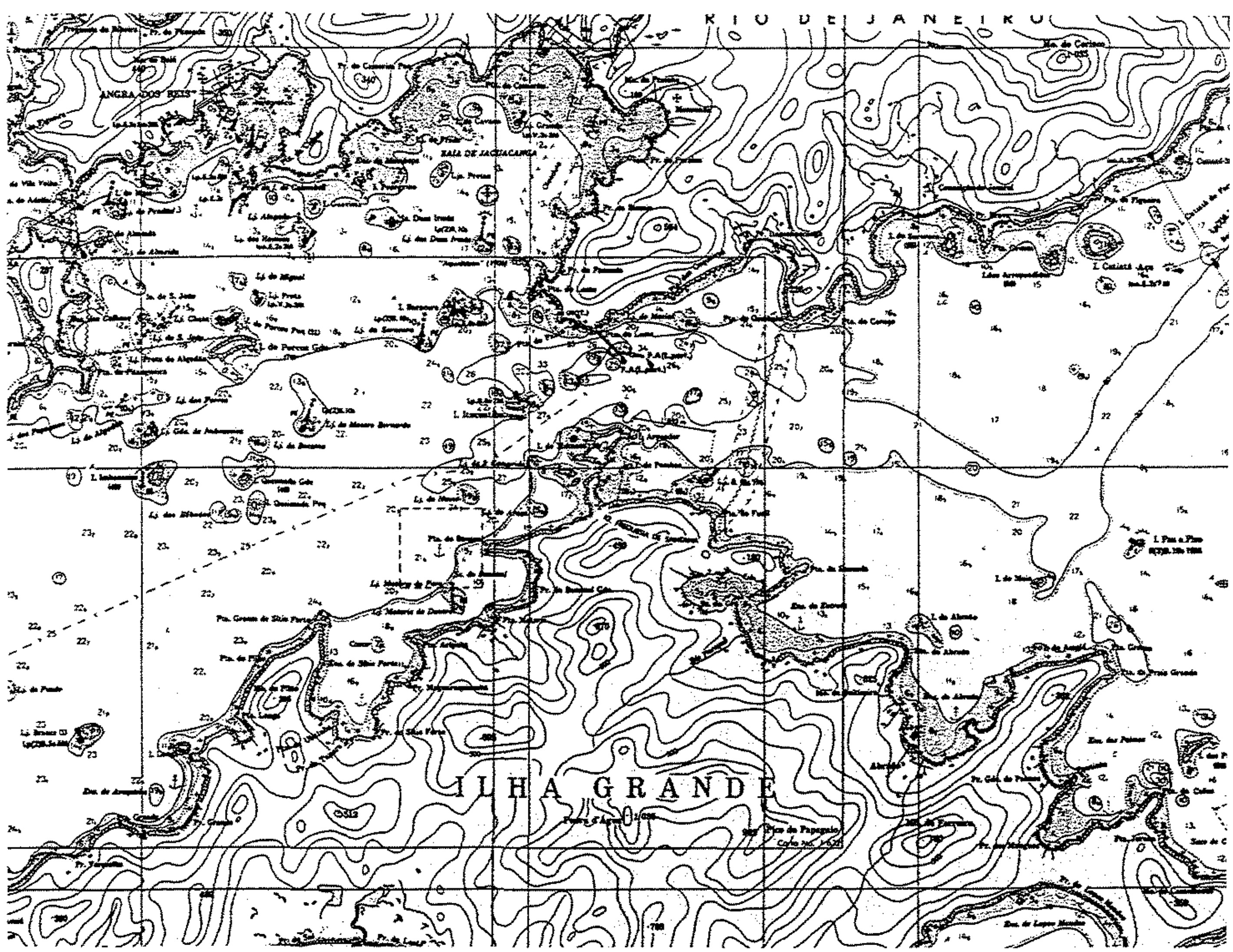
Grupo III - Óleos pesados: ocorre uma grande mistura de óleo com água do mar, que começa a se degradar nos dois primeiros dias, o que resta persiste ainda até uma semana. Em situações oceanográficas e climáticas turbulentas, estes óleos podem ser comportar como se fossem do grupo II e em calmaria podem se comportar com a persistência do grupo IV;

Grupo IV - Óleos pesados: ocorre pouca mistura do óleo com a água e o tempo no meio ambiente é o maior de todos, com tendência a formar placas densas, principalmente no sedimento.

Os óleos leves tais como gasolina, nafta, querosene e diesel tendem a desaparecer mais rapidamente, porém são mais tóxicos aos organismos aquáticos, principalmente nos primeiros dias após o vazamento. Os óleos mais pesados atuam principalmente por efeitos físicos (recobrimento e asfixia), podem permanecer nos costões rochosos, sedimentos de praias e manguezais de alguns meses até dez anos ou mais, dependendo das condições físicas do meio ambiente.

Anexo 2: Carta Náutica

Resolvemos anexar a carta náutica da região, para a localização de praias, pontas, enseadas e etc... citadas nos cenários.



Referências Bibliográficas

[1] Barrientos, C.S., *Development of ocean oil spill concentration and trajectory forecast methods*, NOAA-National Oceanographic and Atmospheric Administration, USA, fotocópia não identificada, de ano posterior a 1980.

[2] Brézis, H., *Análisis Funcional Teoría e Aplicaciones*, Alianza Editorial, 1984.

[3] Brooks, A.N., e Hughes J.R., *Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the Navier-Stokes equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 32, 199-259, North-Holland Publishing Company, 1982.

[4] Cantão, R.F., *Modelagem e Simulação Numérica de Derrames de Óleo no Canal de São Sebastião*, Dissertação de Mestrado, IMECC-UNICAMP, 1998.

[5] Cantão, R.F., De Oliveira, R.F. e Meyer,J.F.C.A., *Numerical simulation of an oil spill accident in Guanabara*, Environmental Coastal Regions III, WITpress Southampton, Boston, 2000.

[6] Carro, M., Becerra, J., Delis, J., Arcos, D. e Mennickent H., *Forecasting the motion of oil spill*, Universidad de Concepcion, fotocópia não identificada, de ano posterior a 1993.

[7] Cekirge,H.M., *Incorporation of state-of-the-art modeling capabilities into oil spill modeling*, Tecnical Report Series 92-006, 1992.

[8] Cekirge H.M., Giammona C.P., Berlin J., Long C., Koch M. e Jamail R., *Oil spill modeling using parallel computations*, Spill Science & Technology Bulletin, vol 1, No 1, pp 61-68, Elsevier Science S.A., 1994.

[9] Ciarlet, P.G., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam, 1978.

[10] Codina, R., Oñate, E. e Cervera, M., *The intrinsic time for the Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulation using quadratic elements.*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 94, 239-262, Elsevier Science S.A, 1992.

[11] Codina, R., *Comparison of some finite element methods for solving the diffusion-convection-reaction equation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 156, 185-210, Elsevier Science S.A, 1998.

[12] Cohen, Y., Mackay, D. e Shiu, W.Y., *Mass transfer rates between oil slicks and water*, The Canadian Journal of Chemical Engineering, vol. 58, october 1980.

[13] Coon, M.D., Knoke, G.S., Stika, M.A., *Performance and compatibility analysis of four oil-spill fate computer models* - 22^{nd} Offshore Technology Conference, Houston, May 1990.

[14] Correa, M.A., *Análise das oscilações das correntes observadas na Baía de Ilha Grande*, Dissertação de Mestrado, IO-USP, 1994.

[15] Csanady, G.T., *Turbulent Diffusion in the Environment*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1973.

[16] Cuesta, I., Grau, F.X. e Giralt, F., *Numerical simulation in a generalized domain*, Oil & Chemical Pollution, vol. 7, pp. 143-159, Elsevier Science Publishers Ltd., 1991.

[17] Delvigne, G.A.L., *On scale modeling of droplet formation from spilled oil*, Proceedings of 1991 Oil Spill Conference, American Petroleum Institute, Washington, DC, pp. 501-506.

[18] Douglas, J. e Dupont, T., *Galerkin methods for parabolic equations*, SIAM J. Numer. Anal., vol.7, No.4 (1970), 575-626.

[19] Drapeau, G., Harrison, W., Bien, W. e Leinonen P., *Oil slick fate in region of strong tidal currents*, Coastal Engineering - Chapter 130 - pp. 2245-2259, fotocópia não identificada, de ano posterior a 1975.

[20] Elliott A.J., *Oceanografic processes and NW European shelf databases*, Marine Pollution Bulletin, vol 22. No 11, pp. 548-553, Pergamon Press Ltd., 1991.

[21] Evans, L.C., *Partial Differential Equations*, Berkeley Mathematics Lecture Notes, vol. 3A, 1993.

[22] Fay, J.A., *The spread of oil slicks on a calm sea*, Oil on the sea, ed. D.P. Hoult. Plenum Press, New York, pp. 53-63, 1969.

[23] Fay, J.A., *Physical processes in the spread oil slick on a water surface*, Proceedings of Conference on Prevention and Control of Oil Spills, API, Washington, DC, pp. 463-467, 1970.

[24] Fernandez, P.J., *Medida e Integração*, Projeto Euclides, IMPA, 1976.

[25] García-Martinez, R., *Some recommendations for testing oil spill computer models*, Oil and Hydrocarbon Spills, Modelling, Analysis and Control, pp. 97-105, WITpress, Computational Mechanics Publications, 1998.

[26] Gundlach, E.R., *Oil-holding capacities and removal coefficients for different shoreline types to computer simulate spills in coastal waters*, Proceedings of 1987 Oil Spill Conference, American Petroleum Institute, Washington, DC, pp. 451-457.

[27] Hughes J.R. e Brooks, A.N., *A theorical framework for Petrov-Galerkin methods with discontinous weitghting function: application to the streamline upwind procedure*, Finite Elements in Fluids, vol. IV, Wiley Ed., New York, 1982.

[28] *Indicadores Climatológicos do Rio de Janeiro*, Série SIPE, Diretoria de Geografia e Estatistítica da Fundação Instituto de Desenvolvimento Econômico e Social do Rio de Janeiro, 1978.

[29] Lardner, R.W., Al-Rabeh, A.H., Gunay, N., Hossain, M., Reynolds, R.M. e Lehr, W.J., *Computation of the residual flow in the Gulf using the "Mt Mitchell" data and the KFUPM/RI hydrodynamical models* , Marine Pollution Bulletin, vol. 27, pp. 61-70, Pergamon Press Ltd., 1993.

[30] Lions, J.L., *Equations Differentielles Operationnelles et Problèmes aux Limites*, Springer-Verlag Berlin.Gottingen.Heidelberg, 1961.

[31] Lopes, C.F., Poffo, I.R.F. e Haddad, E.H., *Atendimento emergencial ao derrame de óleo ocorrido em São Sebastião (SP), provocado pelo navio "Vergina II"*, Revista Meio Ambiente Industrial, pp. 76-83, fotocópia não identificada, de ano posterior a 2001.

[32] Kardestuncer, H., *Finite Element Handbook*, McGraw-Hill, Inc., 1987.

[33] Kolluru, V.S. e Mendelson, D.L., *A Simplified approach to compute constants used in Mackay's evaporation model*, fotocópia não identificada, de ano posterior a 1995.

[34] Mackay, D., Buist, I., Mascarenhas, R. e Paterson, S., *Oil spill processes an models*, Report of Environment Canada, Res. and Dev. Division, 1980.

[35] Malta,S.M.C. e Loula,A.F.D., *Numerical analysis of finite element methods for miscible displacement in porous media*, Numerical Methods in Partial Differential Equations, vol. 14, pp. 519-548, 1998.

[36] Marchuk, G.I., *Mathematical Models in Environmental Problems*, Studies in Mathematics and its Applications, vol. 16, North-Holland, 1986.

[37] Meyer, J.F.C.A., *Modelagem e simulação numérica do transiente térmico em meios compostos*, Tese de Doutorado, UNICAMP, 1988.

[38] Meyer, J.F.C.A., *Derrame de petróleo em águas costeiras: modelagem e simulação numérica*, III Simpósio de Ecossistemas da Costa Brasileira, vol. 2, 1994.

[39] Meyer, J.F.C.A., Cantão, R.F. & Poffo, I.R.F., Oil spill movement in coastal seas: modelling and numerical simulations, Oil and Hydrocarbon Spills, Modelling, Analysis and Control, pp. 23-32, WITpress, Computational Mechanics Publications, 1998.

[40] Milanelli, J.C.C., *Efeitos do petróleo e da limpeza por jateamento em um costão rochoso da praia de Barequeçaba, São Sebastião, SP*, Dissertação de Mestrado, Instituto Oceanográfico, USP, 1994.

[41] Necas, J., *Les méthodes directes en theórie des équations elliptiques*, Masson, 1967.

[42] Okubo, A., *Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models*, Berlin Heidelberg New York: Springer, 1980.

[43] Oliveira, H.E., comunicação oral em 2002.

[44] Paluszkiewicz, T. and Marshall, C.F., *Comparison of techniques for forcing an oil spill trajectory model*, Proceedings of 1989 Oil Spill Conference, American Petroleum Institute, Washington, DC, pp. 547-553.

[45] Pellew, R., *Gulf Pollution-How Bad is it?*, (World Conserv. Monitor Contrl.) Petrol. Rev., vol. 45, no 531,pp. 53-68 April 1991.

[46] Psaraftis H.N. e Ziogas B.O., *A tactical decision algorithm for the optimal dispatching of oil equipment*, Management Science, vol. 31, No. 12 , 1985.

[47] Poffo, I.R.F.,*Vazamentos de Óleo no Litoral Norte do Estado de São Paulo: Análise Histórica*, Tese de Doutorado, USP, 2000.

[48] Poffo, I.R.F., Xavier, J.C.M. e Serpa, R.R., *A história dos 27 anos de vazamento de óleo no litoral norte do Estado de São Paulo (1974-2000)*, Revista Meio Ambiente Industrial, pp. 98-104, fotocópia não identificada, de ano posterior a 2001.

[49] Renardy, M. e Rogers, C.R., *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag New York Inc., 1993.

[50] Salas de Leon, D.A., *Modelo numerico para la prediccion del transporte y la dispersion de petroleo en el oceano*, Revista del Instituto Mexicano del Petroleo, 1986.

[51] Sen Gupta, R. , Fondekar, S.P. e Alagarsamy, R., *State of oil pollution in the Northern Arabian Sea after the 1991 Gulf oil spill*, Marine Pollution Bulletin, vol. 27, pp. 85-91, Pergamon Press Ltd., 1993.

[52] Signorini, S.R., *A Study of the circulation in Bay of Ilha Grande and Bay of Sepetiba.Part I: A survey of the circulation in based on experimental field data*, Boletim do Instituto Oceanográfico, USP, São Paulo, 29(1):41-55, 1980.

[53] Signorini, S.R., *A Study of the circulation in Bay of Ilha Grande and Bay of Sepetiba.Part II: An assessment to the tidally and wind-driven circulation using a finite element numerical model*, Boletim do Instituto Oceanográfico, USP, São Paulo, 29(1):57-68, 1980.

[54] *Site* da PETROBRAS: `www.petrobras.com.br`

[55] Smircic, A., Vilibic, I., Leder, N. e Grzetic, Z., *Diffusion experiment in the Split harbour (middle Adriatic Sea)*, Oil and Hydrocarbon Spills, Modelling, Analysis and Control, pp. 267-274, WITpress, Computational Mechanics Publications, 1998.

[56] Strang, G. e Fix, G.J., *An Analysis of The Finite Element Method*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1973.

[57] Solomons, T.W.G., *Química Orgânica 1*, Livros Técnicos e Científicos S.A., 1996.