

O Algebróide Classificante de uma Estrutura Geométrica

Ivan Struchiner*

Orientador: Prof. Dr. Rui Loja Fernandes

Co-Orientador: Prof. Dr. Luiz A.B. San Martin

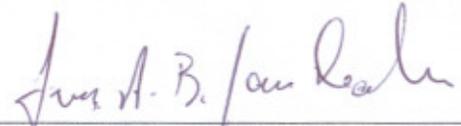
Tese de Doutorado do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
da Universidade Estadual de Campinas

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Ivan Struchiner e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 15 de fevereiro de 2009



Prof. Dr. Rui Loja Fernandes
Orientador



Prof. Dr. Luiz A. B. San Martin
Co-orientador

Banca Examinadora:

- 1) Prof. Dr. Henrique Bursztyn (IMPA)
- 2) Prof. Dr. Claudio Gorodski (IME – USP)
- 3) Prof. Dr. Marcos Martins Alexandrino da Silva (IME – USP)
- 4) Prof. Dr. Pedro José Catuogno (IMECC – UNICAMP)
- 5) Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros (IMECC – UNICAMP)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Struchiner, Ivan

St89a O algebróide classificante de uma estrutura geométrica/Ivan Struchiner
-- Campinas, [S.P. :s.n.], 2009.

Orientadores : Rui Loja Fernandes; Luiz Antonio Barrera San
Martin

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Algebróide de Lie. 2. Lie, Simetrias de. 3. Geometria diferencial.
I. Fernandes, Rui Loja. II. San Martin, Luiz Antonio Barrera. III.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: The classifying Lie algebroid of a geometric structure

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Lie algebroid. 2. Lie symmetries. 3. Differential
geometry.

Área de concentração: Geometria diferencial

Titulação: Doutor em Matemática

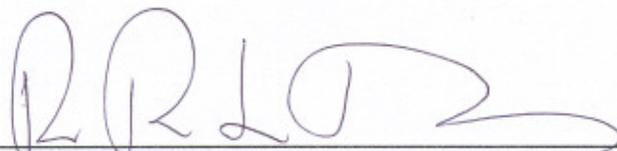
Banca examinadora: Prof. Dr. Rui Loja Fernandes (IST-Lisboa)
Prof. Dr. Henrique Bursztyn (IMPA)
Prof. Dr. Claudio Gorodski (IME-USP)
Prof. Dr. Marcos Martins Alexandrino da Silva (IME-USP)
Prof. Dr. Pedro José Catuogno (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 23/01/2009

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 23 de janeiro de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). RUI ANTONIO LOJA FERNANDES



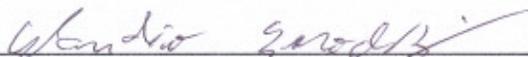
Prof(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO



Prof(a). Dr(a). CAIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS



Prof(a). Dr(a). HENRIQUE BURSZTYN



Prof(a). Dr(a). CLAUDIO GORODSKI



Prof.(a). Dr(a). MARCOS MARTINS ALEXANDRINO DA SILVA

Resumo.

O objetivo desta tese é mostrar como utilizar algebróides de Lie e grupóides de Lie para compreender aspectos das teorias de invariantes, simetrias e espaços de módulos de estruturas geométricas de tipo finito. De uma forma geral, podemos descrever tais estruturas como sendo objetos, definidos em uma variedade, que podem ser caracterizados por cor-referenciais (possivelmente em outra variedade). Exemplos incluem G -estruturas de tipo finito e geometrias de Cartan.

Para uma classe de estruturas geométricas de tipo finito cujo espaço de moduli (dos germes) de seus elementos tem dimensão finita, construímos um algebróide de Lie $A \rightarrow X$, chamado de algebróide de Lie classificante, que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Para cada ponto na base X corresponde um germe de uma estrutura geométrica pertencente à classe.
2. Dois destes germes são isomorfos se e somente se eles correspondem ao mesmo ponto de X .
3. A álgebra de Lie de isotropia de A num ponto x é a álgebra de Lie das simetrias infinitesimais da estrutura geométrica correspondente.
4. Se dois germes de estruturas geométricas pertencem à mesma estrutura geométrica global numa variedade conexa, então eles correspondem a pontos na mesma órbita de A em X .

Além do mais, quando o algebróide de Lie classificante é integrável, o seu grupóide de Lie pode ser utilizado para construir modelos explícitos das geometrias na classe sendo descrita. Estes modelos são universais, ou seja, qualquer outra estrutura geométrica da classe é localmente isomorfa a um destes modelos, e globalmente equivalentes, a menos de recobrimento, a um subconjunto aberto de um desses modelos. No caso em que a estrutura geométrica é uma G -estrutura de tipo finito, damos uma descrição detalhada dessa correspondência.

Uma das consequências da nossa construção é que o algebróide de Lie classificante pode ser usado para obter invariantes das estruturas geométricas correspondentes. Para ilustrar, apresentamos dois exemplos de invariantes que são induzidos pela cohomologia do algebróide de Lie.

Para demonstrar os resultados mencionados acima, definimos as noções de forma de Maurer-Cartan em grupóides de Lie e de equação de Maurer-Cartan para um formas diferenciais com valores num algebróide de Lie. A seguir, provamos que a forma de Maurer-Cartan em um grupóide de Lie satisfaz uma propriedade universal análoga à propriedade satisfeita pela forma de Maurer-Cartan em um grupo de Lie.

Para concluir esta tese, descrevemos diversos exemplos relacionados às conexões sem torção em G -estruturas. Nossa classe principal de exemplos são as conexões simpléticas especiais para as quais incluímos uma discussão detalhada.

Abstract.

The purpose of this thesis is to show how to use Lie algebroids and Lie groupoids to get a better understanding of problems concerning symmetries, invariants and moduli spaces of geometric structures of finite type. In general terms, these structures are objects defined on manifolds which can be characterized by a coframe (on a possibly different manifold). Examples include G -structures of finite type and Cartan geometries.

For a given class of such structures whose moduli space (of germs) of elements is finite dimensional, we are able to construct a Lie algebroid $A \rightarrow X$, called the classifying Lie algebroid, which has the following properties:

1. To each point on the base X there corresponds a germ of a geometric structure which belongs to the class.
2. Two such germs are isomorphic if and only if they correspond to the same point in X .
3. The isotropy Lie algebra of A at a point x is the symmetry Lie algebra of the corresponding geometric structure.
4. If two germs of the geometric structure belong to the same connected manifold, then they correspond to points on the same orbit of A in X .

Moreover, when the classifying Lie algebroid is integrable, its Lie groupoid can be used to construct explicit models of the geometries in the class being described. These models turn out to be universal in the sense that every other geometric structure in the class is locally isomorphic to one of these models, and globally equivalent up to covering to an open set of one of these models. We describe this thoroughly when the geometric structure in consideration is a finite type G -structure.

One of the consequences of our construction is that the classifying Lie algebroid can be used to obtain invariants of the corresponding geometric structures. We present two examples of invariants that are induced by the cohomology of the Lie algebroid.

The method that we use to prove the statements above is to define the notion of a Maurer-Cartan form on a Lie groupoid, as well as a Maurer-Cartan equation for Lie algebroid valued differential one forms. We then prove a universal property for the Maurer-Cartan form of a Lie groupoid. We believe that these results are of independent interest.

To conclude this thesis, we give a description of several examples related to torsion-free connections on G -structures. Our main class of examples are the special symplectic connections for which we include a detailed discussion.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Os Resultados Principais	1
1.2	O Conteúdo dos Capítulos	6
1.3	Convenções	8
2	Algebróides de Lie e Grupóides de Lie	11
2.1	Algebróides de Lie	11
2.1.1	Definições e Primeiros Exemplos	11
2.1.2	Morfismos de Algebróides de Lie	15
2.2	Grupóides de Lie	17
2.3	Teoria de Lie	18
2.4	Exemplos de Grupóide de Lie	20
3	G-Estruturas	25
3.1	Definição e Primeiros Exemplos	25
3.2	O Problema de Equivalência	27
3.3	Prolongamento	29
3.4	Funções Estruturais de Segunda Ordem	33
3.5	Funções Estruturais de Ordem Superior	34
4	O Problema de Classificação de Correferenciais	39
4.1	Equivalência de Correferenciais	39
4.2	O Problema de Realização de Cartan e Equivalência Global	42
4.3	Condições Necessárias para a Existência de Soluções	44
4.4	Formas de Maurer-Cartan	45
4.5	A Propriedade Universal Local	47
4.6	A Propriedade Universal Global	50
4.7	Resolvendo o Problema de Classificação Local	52
4.8	Simetrias de Realizações	53
4.9	O Problema de Globalização	55
4.10	O Problema de Classificação Global	57

5	O Problema de Classificação para G-Estruturas de Tipo Finito	61
5.1	O Problema de Realização para G -Estruturas de Tipo 1	61
5.2	Existência de Soluções	62
5.3	Construção Geométrica de Modelos	65
5.4	O Problema de Realização para G -Estruturas de Tipo Finito	68
6	Aplicações	75
6.1	O Problema de Realização Generalizado	75
6.2	Simetrias de Estruturas Geométricas	78
6.3	Invariantes Cohomológicos de Estruturas Geométricas	80
7	Exemplos	85
7.1	As Equações Estruturais de uma Conexão Sem Torção	85
7.2	Conexões Sem Torção de Curvatura Constante	87
7.3	Conexões Localmente Simétricas	89
7.4	Grupos Próprios de Holonomia	90
7.5	Álgebras de Lie Simpléticas Especiais	93
7.6	Variedades Simpléticas Especiais	96
7.7	Aplicações Deformadoras Associadas	99
7.8	Modulí, Simetrias e Modelos de Conexões Simpléticas Especiais	102
8	Referências Bibliográficas	107

Agradecimentos

Muitas pessoas contribuíram para a minha formação como matemático. Eu não poderia me privar de agradecer algumas delas. Agradeço ao Franco pelos cursos que lecionou, os quais me deram quase toda a base em geometria que possuo. Agradeço também aos professores Márcio Rosa e Mario Gneri que me orientaram durante a graduação. Agradeço aos meus orientadores Luiz San Martin, que sempre teve paciência para me ensinar os assuntos mais básicos, principalmente nos primeiros anos do doutorado, e ao Rui pelas inúmeras discussões intermináveis que moldaram esta tese. Além de um excelente orientador, o Rui sempre foi um grande amigo, que me proporcionou experiências inigualáveis.

Agradeço a FAPESP pela bolsa de doutorado direto, e a CAPES pela bolsa de doutorado sanduíche durante o período em que estive em Lisboa.

Agradeço a minha mãe, meu pai e meu irmão que sempre me mostraram, através de exemplos, o quanto a pesquisa e o estudo podem ser gratificantes.

Não posso deixar de lembrar de pessoas que sempre se mostraram presentes, as quais não sei como retribuir. Agradeço muito aos meus amigos do peito Paula, André e Rodolfo. Sou grato também ao Jakub, à Débora, ao Marcelo e ao Daniel por terem me acolhido como parte da família. Por fim, agradeço em especial à Léa, é impossível expressar em palavras tudo que devo a ela.

Introdução

Neste capítulo explicaremos os resultados principais contidos na tese. Depois, descreveremos o conteúdo de cada capítulo. Terminaremos esta introdução apresentando as convenções que serão utilizadas ao longo da tese.

1.1 Os Resultados Principais

Esta tese trata de simetrias, invariantes e espaços de moduli de estruturas geométricas de tipo finito. Por uma estrutura geométrica de tipo finito, nos referimos a qualquer objeto em uma variedade suave que determina, e é determinado, por um correferencial em uma variedade (possivelmente distinta da variedade onde se encontra o objeto). Recordamos que um **correferencial** numa variedade n -dimensional M é um conjunto $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ de 1-formas em M que são linearmente independentes em todos os pontos. Exemplos destas estruturas geométricas incluem:

1. G -estruturas de tipo finito (Definição 3.3.5), que são determinadas pela forma tautológica do seu último prolongamento não trivial;
2. Geometrias de Cartan (Definição 6.2.4), que são determinadas por uma conexão de Cartan, interpretada como um correferencial num fibrado principal $P \rightarrow M$;
3. Conexões lineares ∇ no fibrado tangente TM de uma variedade, que podem ser tomadas de forma a preservarem algum tensor (ou uma G -estrutura) em M . Estas conexões são caracterizadas por um correferencial no fibrado dos referenciais $\mathcal{B}(M)$ de M (ou em uma G -estrutura $\mathcal{B}_G(M)$ sobre M) dado pela forma tautológica e pela forma de conexão associada a ∇ .

O primeiro problema no qual estaremos interessados é o de determinar quando duas destas estruturas geométricas são (localmente) isomorfas. Esta questão é conhecida como o problema de equivalência. Quando duas estruturas geométricas do mesmo tipo estão devidamente caracterizadas por correferenciais $\{\theta^i\}$ e $\{\bar{\theta}^i\}$ em variedades n -dimensionais M e \bar{M} , o problema de equivalência (local) pode ser enunciado por:

Problema 1.1.1 (Problema de Equivalência) *Existe um difeomorfismo (localmente definido) $\phi : M \rightarrow \bar{M}$ tal que*

$$\phi^* \bar{\theta}^i = \theta^i$$

para todo $1 \leq i \leq n$?

A solução deste problema é baseada no fato de que diferenciação exterior e pullbacks comutam. Tomando a diferencial exterior, e usando o fato de que $\{\theta^i\}$ é um correferencial, podemos escrever as **equações estruturais**

$$d\theta^k = \sum_{i < j} C_{ij}^k(x) \theta^i \wedge \theta^j \quad (1.1.1)$$

onde as funções $C_{ij}^k \in C^\infty(M)$ são chamadas de **funções estruturais** do correferencial. Analogamente, podemos escrever

$$d\bar{\theta}^k = \sum_{i < j} \bar{C}_{ij}^k(\bar{x}) \bar{\theta}^i \wedge \bar{\theta}^j.$$

Claramente, segue de

$$\phi^* d\bar{\theta}^k = d\phi^* \bar{\theta}^k,$$

que uma condição necessária para a equivalência dos correferenciais é que

$$\bar{C}_{ij}^k(\phi(x)) = C_{ij}^k(x).$$

Logo, as funções estruturais podem ser vistas como invariantes do correferencial.

Na direção oposta, podemos considerar o problema de determinar quando um conjunto de funções pode ser realizado como o conjunto de funções estruturais de um correferencial. Esta questão foi proposta e resolvida por Cartan em [9] (veja também o apêndice de [5]). Sua formulação precisa é dada por:

Problema 1.1.2 (Problema de Realização de Cartan) *Dados:*

- um número inteiro $n \in \mathbb{N}$,
- um subconjunto aberto $X \subset \mathbb{R}^d$,
- um conjunto de funções $C_{ij}^k \in C^\infty(X)$, cujos índices percorrem $1 \leq i, j, k \leq n$,
- e um conjunto de funções $F_i^a \in C^\infty(X)$ com $1 \leq a \leq d$

existe

- uma variedade n -dimensional M ;
- um correferencial $\{\theta^i\}$ em M ;

- e uma aplicação $h : M \rightarrow X$

tais que

$$d\theta^k = \sum_{i < j} C_{ij}^k(h(m))\theta^i \wedge \theta^j \quad (1.1.2)$$

$$dh^a = \sum_i F_i^a(h(m))\theta^i \quad (1.1.3)$$

Estaremos interessados também em responder as seguintes questões:

Problema de Classificação Local Quais são todos os germes de correferenciais que solucionam um problema de realização de Cartan?

Problema de Equivalência Local Quando que dois destes germes de correferenciais são equivalentes?

Iremos solucionar completamente ambos os problemas acima.

Antes de continuarmos com a descrição dos problemas tratados nesta tese, apresentaremos um exemplo simples, porém motivante:

Exemplo 1.1.3 Suponha que nosso interesse seja em resolver os problemas de equivalência e classificação locais para correferenciais cujas funções estruturais são constantes. Em termos do problema de realização de Cartan, este contexto corresponde ao caso em que $d = 0$, e portanto, X é um ponto (em particular, as funções F_i^a são identicamente nulas).

Condições necessárias para a existência de soluções do problema de realização são obtidas por

$$d^2\theta^k = 0 \quad (k = 1, \dots, n).$$

Elas implicam que $-C_{ij}^k$ têm de ser as constantes de estrutura de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , i.e., deve existir uma álgebra de Lie \mathfrak{g} com uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ tal que

$$[e_i, e_j] = - \sum_k C_{ij}^k e_k.$$

Esta condição é também suficiente. De fato, se G é um grupo de Lie qualquer com álgebra de Lie \mathfrak{g} , então as componentes de sua forma de Maurer-Cartan invariante à direita com valores em \mathfrak{g} , denotada por ω_{MC} , com respeito a base $\{e_1, \dots, e_n\}$, têm C_{ij}^k como suas funções estruturais.

Agora, seja (M, θ^i, h) outra solução qualquer do problema de realização. Se definirmos uma 1-forma em M com valores em \mathfrak{g} por

$$\theta = \sum_i \theta^i e_i,$$

então as equações estruturais (1.1.1) para o correferencial $\{\theta^i\}$ implicam que θ satisfaz a equação de Maurer-Cartan

$$d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta] = 0.$$

Logo, pela propriedade universal das formas de Maurer-Cartan em grupos de Lie, segue que existe um difeomorfismo localmente definido

$$\psi : M \rightarrow G,$$

que toma valores numa vizinhança da identidade, tal que

$$\theta = \psi^* \omega_{MC}.$$

Assim, pelo menos localmente, existe uma única solução do problema de realização, a menos de equivalência.

No caso geral, quando as funções estruturais não são constantes, elas não podem determinar uma álgebra de Lie. No entanto, iremos mostrar que existem soluções de um problema de Cartan se e somente se os dados iniciais do problema determinam um algebróide de Lie, que será chamado de **algebróide de Lie classificante** do problema de realização.

Um algebróide de Lie é um fibrado vetorial $A \rightarrow X$ que generaliza ao mesmo tempo as álgebras de Lie e os fibrados tangentes de variedades. Sua contrapartida global é um grupóide de Lie, que é uma variedade \mathcal{G} equipada com duas submersões sobrejetivas s e t , de \mathcal{G} em X , além de uma multiplicação suave parcialmente definida, para a qual existem elementos neutros e tal que cada elemento de \mathcal{G} tem uma inversa (veja o Capítulo 2 para definições precisas). Dois aspectos importantes de um algebróide de Lie são que (i) ele determina uma distribuição (possivelmente singular) em X , cujas variedades integrais maximais são chamadas de **folhas** ou **órbitas** de A , e (ii) sobre cada ponto x de X existe uma álgebra de Lie chamada de **álgebra de Lie de isotropia** em x .

Inspirados pelo exemplo apresentado acima, propomos a seguinte solução do problema de realização de Cartan. Uma condição necessária para a existência de uma realização é a existência de um algebróide de Lie classificante. Suponha, por simplicidade, que este algebróide de Lie vem de um grupóide de Lie \mathcal{G} (veja a Seção 2.3). Para provarmos que esta condição necessária é também suficiente, introduziremos as formas de Maurer-Cartan em grupóides de Lie. Então, mostraremos que a forma de Maurer-Cartan ω_{MC} induz um correferencial em cada s -fibra de \mathcal{G} , que soluciona o problema de realização. Além do mais, deduziremos uma propriedade universal da forma de Maurer-Cartan que implicará que toda solução do problema de Cartan é localmente equivalente à uma das s -fibras. Isto resolve os problemas propostos até aqui nesta introdução.

Uma das maiores vantagens de utilizar esta abordagem, através de algebróides de Lie, ao invés dos métodos originais do Cartan, é que enquanto os resultados do Cartan só tratam da existência de soluções, o algebróide de Lie classificante (ou melhor, seu grupóide de Lie local) fornece uma receita para a construção de soluções explícitas do problema. Estas soluções são as s -fibras do grupóide equipadas com a restrição da forma de Maurer-Cartan.

O algebróide de Lie classificante de um problema de Cartan satisfaz algumas propriedades muito interessantes. Para citar somente algumas:

1. Cada ponto de X corresponde a um germe de um correferencial que é uma solução do problema de realização;
2. Dois destes germes de correferenciais são equivalentes se e somente se eles correspondem ao mesmo ponto de X ;

3. A álgebra de Lie de isotropia em um ponto x de X é isomorfa à álgebra de Lie de simetrias do germe de correferencial correspondente, i.e., à álgebra de Lie dos germes de campos de vetores que preservam o germe de correferencial.

Por enquanto, somente discutimos aspectos locais da teoria. Estaremos interessados também em resultados globais. O primeiro destes problemas que iremos solucionar é o problema de globalização:

Problema 1.1.4 (Problema de Globalização) *Suponha que sejam dados um problema de Cartan com dados iniciais (n, X, C_{ij}^k, F_i^a) e dois germes de correferenciais, θ_0 e θ_1 , que solucionam o problema. Existe uma solução global (M, θ, h) do problema de realização, com M conexa, para a qual θ_0 é o germe de θ em um ponto $p_0 \in M$ e θ_1 é o germe de θ em um ponto $p_1 \in M$?*

Novamente, a solução deste problema reside na compreensão do algebróide de Lie classificante. Iremos mostrar que se dois germes de correferenciais pertencem à mesma realização conexa global, então eles correspondem a pontos na mesma órbita de A . Além do mais, se o algebróide de Lie vem de um grupóide de Lie, então a recíproca também vale, i.e., se dois germes de correferenciais correspondem a pontos na mesma órbita de A , então eles pertencem à mesma realização conexa. Segue que o algebróide de Lie classificante também fornece informações sobre o espaço de moduli das soluções globais do problema de Cartan.

Outro problema global que será tratado nesta tese é o problema de equivalência global. Em geral, o algebróide de Lie classificante não distingue entre uma realização e seu recobrimento universal. Se (M, θ, h) é uma realização e $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ é uma aplicação de recobrimento, então $(\tilde{M}, \pi^*\theta, \pi^*h)$ também é uma realização chamada de **realização induzida**. Às vezes, iremos nos referir à esta realização como um **recobrimento de realizações** de (M, θ, h) .

Portanto, fica natural considerar a seguinte relação de equivalência no conjunto das realizações de um problema de Cartan. Duas realizações (M_1, θ_1, h_1) e (M_2, θ_2, h_2) serão ditas **globalmente equivalentes, a menos de recobrimento** se elas tiverem um recobrimento de realizações em comum (M, θ, h) , i.e.,

$$\begin{array}{ccc} & (M, \theta, h) & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ (M_1, \theta_1, h_1) & & (M_2, \theta_2, h_2) \end{array}$$

Isto nos leva ao:

Problema 1.1.5 (Problema de Classificação Global) *Quais são todas as soluções de um problema de realização de Cartan a menos de equivalência global, a menos de recobrimento?*

Assim como no problema de globalização, para resolver este problema precisaremos de uma hipótese de integrabilidade: que o algebróide de Lie classificante (ou mais precisamente, a sua restrição a cada órbita) venha de um grupóide de Lie. Neste caso, mostraremos que qualquer solução do problema de Cartan é globalmente equivalente, a menos

de recobrimento, a um subconjunto aberto de uma s -fibra do grupóide de Lie. Este resultado é uma generalização dos dois teoremas sobre equivalência global apresentados em [27] (veja o Corolário 4.10.3).

O algebróide de Lie classificante também pode ser usado para produzir invariantes de estruturas geométricas de tipo finito, bem como para recuperar resultados clássicos sobre seus grupos de simetrias. De fato, se assumirmos uma hipótese de regularidade, qualquer correferencial θ numa variedade M determina um problema de realização de Cartan (n, X, C_{ij}^k, F_i) e uma aplicação $h : M \rightarrow X$ que torna (M, θ, h) numa solução do problema. Neste caso, no entanto, precisamos permitir que X seja uma variedade, ao invés de simplesmente um subconjunto aberto de \mathbb{R}^d . Mas, isto não impõe nenhuma dificuldade extra ao problema, e ainda assim obtemos um algebróide de Lie classificante A sobre X , que será sempre transitivo. Com isto, um correferencial θ poderá ser visto como um morfismo de algebróides de Lie $\theta : TM \rightarrow A$ que cobre a aplicação h .

Por um lado, utilizaremos o algebróide de Lie classificante para fornecer demonstrações simples de resultados clássicos sobre a dimensão do grupo de Lie de simetrias de uma estrutura geométrica. Todos estes resultados serão corolários imediatos do fato de que a álgebra de Lie do grupo de simetrias é isomorfa à álgebra de Lie de isotropia num ponto do algebróide de Lie classificante. Para exemplificar, demonstraremos três teoremas que estão presentes em [21].

Por outro lado, iremos argumentar que um correferencial, visto como um morfismo de algebróides de Lie, deve relacionar os invariantes do algebróide de Lie classificante com os invariantes do correferencial. Para ilustrar este ponto de vista, explicaremos dois exemplos de invariantes cohomológicos: a cohomologia básica de um correferencial e a classe modular de um correferencial.

Podemos resumir esta introdução aos problemas tratados nesta tese dizendo que existem essencialmente duas formas em que utilizaremos a existência de um algebróide de classificante para um problema de Cartan.

- Para uma classe de estruturas geométricas de tipo finito, para a qual o espaço de módulos (dos germes) tem dimensão finita, podemos montar um problema de realização de Cartan cujo algebróide de Lie classificante fornece informações sobre os problemas de equivalência e classificação locais, bem como sobre os problemas de globalização e classificação global.
- Para uma única estrutura geométrica de tipo finito fixada, podemos montar um problema de realização de Cartan cujo algebróide de Lie classificante descreve as simetrias da geometria, bem como fornece uma receita para a construção de invariantes da estrutura.

Para concluir esta tese, apresentaremos uma série de exemplos que ilustram os resultados que foram obtidos.

1.2 O Conteúdo dos Capítulos

Indicaremos agora, de forma sucinta, o conteúdo de cada capítulo.

Capítulo 2 No Capítulo 2, introduzimos os conceitos de algebróides de Lie e grupóides de Lie. Como estes objetos cumprem um papel fundamental ao longo de toda a tese,

decidimos por enunciar todos os resultados que serão utilizados. Para começar, definimos um algebróide de Lie e apresentamos diversos exemplos. Ao invés de fornecermos uma lista exaustiva, nos concentraremos nos exemplos que serão relevantes para esta tese. Depois, apresentamos uma discussão detalhada sobre morfismos de algebróides de Lie, de duas maneiras equivalentes, ambas as quais serão úteis. A segunda seção contém a definição de um grupóide de Lie e algumas de suas propriedades mais básicas. A Seção 2.3 trata da teoria de Lie para algebróides de Lie e grupóides de Lie. Começamos explicando como se constrói um algebróide de Lie a partir de um grupóide de Lie. No entanto, nem todo algebróide de Lie aparece desta forma, e as obstruções para que isto aconteça, que foram obtidas em [12], são descritas no final da seção. Ao longo do caminho, enunciamos uma versão para algebróides de Lie dos dois primeiros teoremas de Lie. O capítulo termina com uma série de exemplos de grupóides de Lie que serão utilizados no restante da tese.

Capítulo 3 O terceiro capítulo é sobre G -estruturas, que são a principal fonte de exemplos de estruturas geométricas consideradas nesta tese. O capítulo começa com a definição e alguns exemplos de G -estruturas. Depois, descrevemos o seu problema de equivalência e obtemos condições necessárias para a sua solução. Para encontrarmos condições necessárias ainda mais refinadas, introduzimos, na Seção 3.3, o método do prolongamento. Isto nos leva ao conceito de G -estruturas de tipo finito, para o qual nossos resultados podem ser aplicados. O capítulo termina com uma descrição das funções estruturais e das equações estruturais para G -estruturas de tipo finito. O primeiro caso que descrevemos é o de G -estruturas de tipo 1, para só depois tratarmos das G -estruturas gerais, de tipo k . Estes resultados serão cruciais para podermos enunciar e resolver problemas de classificação para estas estruturas geométricas.

Capítulo 4 Enquanto que os capítulos anteriores contêm majoritariamente resultados para referência, este capítulo é o núcleo da tese. Começamos por descrever o problema de equivalência de correferenciais. Para tal, seguimos de perto as apresentações contidas em [27] e [33]. A análise das condições necessárias para resolver este problema nos levam a considerar o problema de realização de Cartan. Mostramos que se uma solução do problema de realização existir, então os dados iniciais do problema determinam um algebróide de Lie, o qual chamamos de algebróide de Lie classificante. Para solucionar o problema de Cartan, introduzimos as formas de Maurer-Cartan em grupóides de Lie e demonstramos a sua propriedade universal local. Quando adicionamos uma hipótese topológica, obtemos também uma propriedade universal global para estas formas. Estes resultados são então aplicados para solucionar o problema de classificação local, bem como para descrever as simetrias de uma realização. O capítulo termina com a discussão de aspectos globais. Resolvemos os problemas de globalização e de equivalência global.

Capítulo 5 No Capítulo 5, especializamos ao caso em que o correferencial vem de uma G -estrutura de tipo finito. Como as equações estruturais e as funções estruturais para estes correferenciais têm a forma particular descrita no fim Capítulo 3, segue que o algebróide de Lie classificante também terá propriedades especiais. De fato, ele vem equipado com uma ação infinitesimal de \mathfrak{g} , a álgebra de Lie de G , por automorfismos internos de algebróides de Lie. Começamos com a descrição do

caso de G -estruturas de tipo 1, que depois é usado, no fim do capítulo, para resolver o problema de realização para G -estruturas de tipo finito gerais. Antes de fazer isto descrevemos o que acontece no melhor cenário possível, i.e., quando o algebróide classificante A é integrado por um grupóide de Lie \mathcal{G} , e a ação infinitesimal de \mathfrak{g} em A é integrada por uma ação livre e própria de G em \mathcal{G} . Este é o conteúdo da Seção 5.3.

Capítulo 6 Neste capítulo apresentamos diversas aplicações da existência de um algebróide de Lie classificante associado a um problema de realização. Ele começa com uma pequena generalização do problema de Cartan apresentado anteriormente para o caso em que X é uma variedade ao invés de um subconjunto aberto de \mathbb{R}^d . Esta generalização será útil tanto em exemplos concretos, quanto na demonstração de resultados clássicos sobre o grupo das simetrias de uma estrutura geométrica. De fato, utilizamos isto para recuperar três teoremas do livro [21]. O capítulo termina com uma discussão sobre como obter invariantes de estruturas geométricas através de invariantes do algebróide de Lie classificante.

Capítulo 7 O capítulo final da tese é dedicado aos diversos exemplos que servem como ilustrações dos resultados obtidos anteriormente. Começamos por deduzir as equações estruturais e as funções estruturais de uma conexão sem torção arbitrária numa G -estrutura. Acontece, no entanto, que o espaço de moduli de tais conexões numa G -estrutura fixada pode ter dimensão infinita, e portanto, não pode ser tratado pelos nossos métodos. Por outro lado, existem muitas classes de conexões sem torção que podem ser tratadas utilizando o algebróide de Lie classificante. O primeiro exemplo que apresentamos é o de conexões sem torção de curvatura constante. Em particular, exibimos o algebróide de Lie classificante para conexões sem torção planas em uma G -estrutura arbitrária, bem como para métricas de curvatura Gaussiana constante em \mathbb{R}^2 . Depois, olhamos para o espaço das conexões localmente simétricas. A existência de um algebróide de Lie classificante para estas conexões pode ser usada para mostrar que toda álgebra de Berger simétrica é a álgebra de Lie de holonomia de alguma conexão sem torção. Isto será discutido na Seção 7.4. A nossa principal classe de exemplos, no entanto, são as variedades simpléticas especiais. Apresentamos uma descrição detalhada do algebróide de Lie classificante para estas variedades, e utilizamos isto para demonstrar resultados sobre suas simetrias e seu espaço de moduli. Também mostramos como encontrar exemplos destas variedades. Observamos que apesar da maioria destes resultados não serem novos, a nossa abordagem difere da abordagem original. Nosso ponto de partida é a construção do algebróide de Lie classificante, de onde todas as outras propriedades são deduzidas. Assim, os resultados se tornam mais naturais e menos misteriosos.

1.3 Convenções

Esta tese está inserida na categoria C^∞ . Portanto, a menos que seja mencionado explicitamente, todas as variedades são suaves, segundo contáveis e Hausdorff, e todas as funções são também suaves. A única exceção é o espaço total \mathcal{G} de um grupóide de Lie, para o qual exemplos importantes nos forçam a permitir que seja uma variedade não-Hausdorff.

Por outro lado, as s -fibras e as t -fibras de um grupóide de Lie, bem como a sua base X , são sempre espaços Hausdorff.

Algebróides de Lie e Grupóides de Lie

Este capítulo é dedicado ao estudo de algebróides de Lie e grupóides de Lie. Como estes vão cumprir um papel fundamental na tese, decidimos enunciar todos os resultados que iremos utilizar. Para mais detalhes e demonstrações, sugerimos que o leitor consulte [8], [26], [23], [24] ou [15].

2.1 Algebróides de Lie

Esta seção é sobre algebróides de Lie. Um algebróide de Lie deve ser pensado como um bom substituto para o fibrado tangente de uma variedade, sempre que uma estrutura geométrica (possivelmente singular) se encontra nesta.

2.1.1 Definições e Primeiros Exemplos

Definição 2.1.1 *Um algebróide de Lie sobre uma variedade diferenciável X é um fibrado vetorial (real) $A \rightarrow X$ dotado de um colchete de Lie $[\cdot, \cdot]$ no espaço das seções $\Gamma(A)$ e uma aplicação de fibrados $\# : A \rightarrow TX$ chamada de **âncora** de A que satisfazem:*

$$[\alpha, f\beta] = f[\alpha, \beta] + (\#(\alpha)f)\beta \text{ para todo } \alpha, \beta \in \Gamma(A) \text{ e } f \in C^\infty(X).$$

*A condição acima é conhecida como a **identidade de Leibniz**. Ela implica que a âncora, quando vista como uma aplicação de $\Gamma(A)$ em $\mathfrak{X}(X)$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, i.e.,*

$$\#([\alpha, \beta]_A) = [\#(\alpha), \#(\beta)]_{\mathfrak{X}(X)} \text{ para todo } \alpha, \beta \in \Gamma(A).$$

Segue desta identidade também que o núcleo de $\#$, sobre cada ponto $x \in X$, é uma álgebra de Lie com estrutura induzida pelo colchete de A . Chamamos esta álgebra de

álgebra de Lie de isotropia de x . Outra propriedade importante dos algebróides de Lie é que a imagem da âncora é uma distribuição integrável, no sentido de Sussman [34]. Em geral, esta distribuição pode ser singular, i.e., seu posto não é necessariamente constante sobre X . Suas subvariedades integrais maximais serão chamadas de **órbitas** ou **folhas** de A .

Em qualquer algebróide de Lie $A \rightarrow X$, podemos definir uma diferencial $d_A : \Gamma(\wedge^\bullet A^*) \rightarrow \Gamma(\wedge^{\bullet+1} A^*)$ através de

$$d_A \eta(\alpha_0, \dots, \alpha_k) = \sum_{i=1}^k (-1)^i \#(\alpha_i) \cdot \eta(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_k) + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \eta([\alpha_i, \alpha_j], \alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_k)$$

com a qual $(\Gamma(\wedge^\bullet A^*), d_A)$ se torna um complexo. De fato, existe uma correspondência bijetora entre estruturas de algebróides de Lie num fibrado vetorial $E \rightarrow X$ e derivações de grau um da álgebra $\Gamma(\wedge^2 E^*)$. A cohomologia $H^\bullet(A)$ do complexo $(\Gamma(\wedge^\bullet A^*), d_A)$ será chamada de **cohomologia de algebróide de A**.

Podemos descrever a estrutura de um algebróide de Lie em termos de coordenadas locais. Para tal, sejam (x_1, \dots, x_d) coordenadas em um aberto $U \subset X$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ uma base de seções locais de A sobre U . Definimos as funções de estrutura $C_{ij}^k, F_i^a \in C^\infty(U)$ de A relativas a estas coordenadas por

$$[\alpha_i, \alpha_j] = \sum_k C_{ij}^k(x) \alpha_k \quad (2.1.1)$$

$$\# \alpha_i = \sum_a F_i^a(x) \frac{\partial}{\partial x_a}. \quad (2.1.2)$$

Assim, as condições que definem um algebróide de Lie se traduzem nas seguintes equações diferenciais parciais:

$$\sum_{b=1}^d \left(F_i^b \frac{\partial F_j^a}{\partial x_b} - F_j^b \frac{\partial F_i^a}{\partial x_b} \right) = \sum_{l=1}^r C_{ij}^l F_l^a \quad (2.1.3)$$

para todo $1 \leq i, j \leq r, 1 \leq a \leq d$ e

$$\sum_{b=1}^d \left(F_j^b \frac{\partial C_{kl}^i}{\partial x_b} + F_k^b \frac{\partial C_{lj}^i}{\partial x_b} + F_l^b \frac{\partial C_{jk}^i}{\partial x_b} \right) = \sum_{m=1}^r (C_{mj}^i C_{kl}^m + C_{mk}^i C_{lj}^m + C_{ml}^i C_{jk}^m) \quad (2.1.4)$$

para todo $1 \leq i, j, k, l \leq r$.

Apresentamos agora alguns exemplos de algebróides de Lie. Nosso objetivo não é apresentar uma lista extensa de exemplos, mas sim descrever aqueles que serão usados ao longo desta tese.

Exemplo 2.1.2 (Fibrados Tangentes) O exemplo mais simples de um algebróide de Lie é o fibrado tangente TX de uma variedade X . Seu colchete é dado pelo colchete de Lie de campos de vetores e sua âncora é dada pela aplicação identidade.

Exemplo 2.1.3 (Álgebras de Lie) Outro exemplo extremo de um algebróide de Lie ocorre quando X é um ponto. Neste caso, A é simplesmente um espaço vetorial equipado com um colchete de Lie, i.e., uma álgebra de Lie.

Exemplo 2.1.4 (Folheações) Seja \mathcal{F} uma folheação (regular) em X , de modo que $T\mathcal{F} \subset TX$ é uma distribuição involutiva de posto constante. Então $T\mathcal{F}$ é um algebróide de Lie sobre X cujo colchete é o colchete de Lie de campos de vetores em X , e cuja âncora é a inclusão $i : T\mathcal{F} \rightarrow TX$. Note que as órbitas deste algebróide de Lie são precisamente as folhas de \mathcal{F} .

Exemplo 2.1.5 (Algebróide de Atiyah) Seja

$$\begin{array}{c} P \curvearrowright G \\ \downarrow \pi \\ X \end{array}$$

um fibrado principal com grupo estrutural G . Obtemos um algebróide de Lie, conhecido como o **algebróide de Atiyah** do fibrado principal da seguinte forma: como fibrado vetorial, $A \rightarrow X$ é o quociente TP/G do fibrado tangente a P pela ação de G . Podemos identificar as seções de A com campos de vetores invariantes em P . Como o colchete de Lie de campos invariantes é de novo invariante obtemos um colchete bem definido em $\Gamma(A)$. A âncora de A é a aplicação $[\pi_*] : A \rightarrow TX$ induzida por π_* .

Note que este algebróide de Lie é transitivo (i.e., a órbita de qualquer ponto x é toda a base X de A), e que suas álgebras de Lie de isotropia são isomorfas a \mathfrak{g} , a álgebra de Lie de G .

Exemplo 2.1.6 (Ações Infinitesimais) Seja

$$\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(X)$$

uma ação infinitesimal de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} em X . Obtemos um algebróide de Lie, chamado de **algebróide de transformações** associado à ação, da seguinte forma. Definimos A como sendo o fibrado vetorial trivial $X \times \mathfrak{g}$, com âncora $\#(x, \alpha) = \psi(\alpha)|_x$ e colchete

$$[\alpha, \beta](x) = [\alpha(x), \beta(x)]_{\mathfrak{g}} + (\psi(\alpha) \cdot \beta)(x) - (\psi(\beta) \cdot \alpha)(x),$$

onde estamos identificando as seções de A com as aplicações suaves $X \rightarrow \mathfrak{g}$.

Neste caso, as folhas de A coincidem com as órbitas da ação de \mathfrak{g} , e suas álgebras de Lie de isotropia são as subálgebras de isotropia da ação.

Exemplo 2.1.7 (Variedades de Poisson) Uma **estrutura de Poisson** numa variedade X é um colchete de Lie $\{, \}$ no espaço das funções suaves em X , $C^\infty(X)$, que satisfaz a identidade de Leibniz

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h \text{ para todo } f, g, h \in C^\infty(X).$$

De forma equivalente, podemos definir uma estrutura de Poisson como sendo um campo de bivectores $\Pi \in \Gamma(\wedge^2 TX)$ tal que $[\Pi, \Pi] = 0$, onde $[,]$ denota o colchete de Schouten em campos de multi-vectores. A correspondência entre as duas definições é dada por

$\Pi(df, dg) = \{f, g\}$. Uma **variedade de Poisson** é uma variedade X dotada de uma estrutura de Poisson Π .

Dada uma variedade de Poisson (X, Π) , podemos construir um algebróide de Lie da seguinte maneira: como fibrado vetorial, A é o fibrado cotangente de X , T^*X . A estrutura de Poisson determina uma aplicação

$$\Pi^\sharp : T^*X \rightarrow TX, \quad \Pi^\sharp(\alpha)(\beta) = \Pi(\alpha, \beta) \text{ para todo } \alpha, \beta \in T^*X,$$

que é definida como a âncora de A . O colchete de Lie em $\Gamma(A) = \Omega^1(X)$ é dado por

$$[\alpha, \beta] = \mathcal{L}_{\Pi^\sharp(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\Pi^\sharp(\beta)}\alpha - d(\Pi(\alpha, \beta)).$$

Este é o único colchete em $\Omega^1(X)$ tal que $[df, dg] = d\{f, g\}$. Chamamos este algebróide de Lie por **algebróide de Lie cotangente** da variedade de Poisson.

É importante ressaltar que a restrição do bivetor de Poisson Π a cada folha de A é não-degenerado, e portanto induz uma forma simplética em cada folha. Explicitamente, se L é uma folha de A , temos

$$\omega_L(\xi_1, \xi_2) = ((\Pi|_L)^\sharp)^{-1}(\xi_1)(\xi_2) \text{ para todo } \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{X}(L).$$

Por esta razão, a folheação em X induzida por uma estrutura de Poisson é chamada de **folheação simplética**.

Apresentamos agora dois exemplos de variedades de Poisson que utilizaremos nesta tese.

Exemplo 2.1.8 (Variedades de Lie-Poisson) Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Podemos definir uma estrutura de Poisson natural em \mathfrak{g}^* , conhecida como a **estrutura de Poisson de Kostant-Kirilov-Souriau**. Seu colchete de Poisson é dado por

$$\{f, g\}(\rho) = \rho([d_\rho f, d_\rho g]) \text{ para todo } f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*),$$

onde identificamos $T_\rho^*\mathfrak{g}^*$ com \mathfrak{g} . A variedade de Poisson $(\mathfrak{g}^*, \{, \})$ é chamada de **variedade de Lie-Poisson**. Seu algebróide de Lie cotangente $A = T^*\mathfrak{g}^*$ pode ser identificado com o algebróide de transformações induzido pela ação co-adjunta de \mathfrak{g} em \mathfrak{g}^* .

Exemplo 2.1.9 (Subvariedades Cosimpléticas) Seja (X, Π) uma variedade de Poisson. Uma subvariedade Y será chamada de **subvariedade cosimplética** se sua intercessão com cada folha L de $A = T^*X$ é transversal, e se a restrição da forma simplética ω_L a $T_y Y \cap T_y L_y$ é não degenerada para todo $y \in Y$. Equivalentemente, podemos expressar esta condição como

$$TX|_Y = TY \oplus (TY)^\perp,$$

onde $TY^\perp \subset TX$ denota a imagem por Π^\sharp do anulador de TY em T^*X .

Toda subvariedade cosimplética Y de (X, Π) carrega um bivetor de Poisson natural, chamado de **estrutura de Poisson coinduzida**, definida por

$$\Pi_Y(\xi_1, \xi_2) = \Pi(\iota^{-1}(\xi_1), \iota^{-1}(\xi_2)),$$

onde ι denota a restrição da projeção natural $T^*X \rightarrow T^*Y$ à W .

2.1.2 Morfismos de Algebróides de Lie

Sejam $A \rightarrow X$ e $B \rightarrow Y$ algebróides de Lie. Podemos definir um morfismo de algebróides de Lie de A para B de duas formas equivalentes. A primeira forma apareceu em [20] a qual referimos para uma exposição detalhada sobre morfismos de algebróides de Lie.

Definição 2.1.10 *Um morfismo de algebróides de Lie é uma aplicação de fibrados*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{F} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

que é compatível com as âncoras e os colchetes.

Explicaremos agora o significado de compatibilidade. Uma aplicação de fibrados (F, f) de A para B é dita **compatível com as âncoras** se

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{F} & B \\ \# \downarrow & & \downarrow \# \\ TX & \xrightarrow{f_*} & TY. \end{array}$$

A dificuldade em definir compatibilidade com os colchetes é que uma aplicação de fibrados (F, f) não induz, em geral, uma aplicação entre as seções de A e as seções de B . Para contornar este problema temos que trabalhar no pullback f^*B do fibrado B . Note que cada $\alpha \in \Gamma(A)$ induz uma seção $F(\alpha) \in \Gamma(f^*B)$ ao mesmo tempo em que cada seção $\beta \in \Gamma(B)$ também induz uma seção $f^*\beta \in \Gamma(f^*B)$. Com isto, se α e $\tilde{\alpha}$ pertencem à $\Gamma(A)$, suas imagens em $\Gamma(f^*B)$ podem ser escritas (de forma não única) como

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \sum_i u_i (f^* \beta_i) \\ F(\tilde{\alpha}) &= \sum_j \tilde{u}_j (f^* \tilde{\beta}_j) \end{aligned}$$

onde $u_i, \tilde{u}_j \in C^\infty(X)$ e $\beta_i, \tilde{\beta}_j \in \Gamma(B)$.

Dizemos que (F, f) é **compatível com os colchetes** se

$$\begin{aligned} F([\alpha, \tilde{\alpha}]_A) &= \sum_{i,j} u_i \tilde{u}_j (f^*[\beta_i, \tilde{\beta}_j]_B) + \\ &+ \sum_j (\# \alpha)(\tilde{u}_j) f^* \tilde{\beta}_j - \sum_i (\# \tilde{\alpha})(u_i) f^* \beta_i \quad (2.1.5) \end{aligned}$$

para todo $\alpha, \tilde{\alpha} \in \Gamma(A)$. Observamos que esta definição não depende das escolhas de decomposições de $F(\alpha)$ e $F(\tilde{\alpha})$.

Podemos expressar a condição de compatibilidade com os colchetes (2.1.5) de uma forma mais invariante, que servirá de inspiração para alguns dos resultados principais

desta tese. Seja ∇ uma conexão arbitrária no fibrado vetorial $B \rightarrow Y$, e denote por $\bar{\nabla}$ a conexão induzida em f^*B ,

$$\bar{\nabla}_\xi \left(\sum_i u_i (f^* \beta_i) \right) = \sum_i u_i f^* (\nabla_{f_* \xi} \beta_i) + \sum \xi(u_i) f^* \beta_i. \quad (2.1.6)$$

Definimos a torção da conexão pullback $\bar{\nabla}$ por

$$T_{\bar{\nabla}} \left(\sum u_i f^* \beta_i, \sum \tilde{u}_j f^* \tilde{\beta}_j \right) = \sum_{i,j} u_i \tilde{u}_j f^* T_{\nabla}(\beta_i, \tilde{\beta}_j) \quad (2.1.7)$$

onde a torção de uma conexão num algebróide de Lie é dada por

$$T_{\nabla}(\beta_i, \tilde{\beta}_j) = \nabla_{\# \beta_i} \tilde{\beta}_j - \nabla_{\# \tilde{\beta}_j} \beta_i - [\beta_i, \tilde{\beta}_j]. \quad (2.1.8)$$

Finalmente, para uma aplicação de fibrados $(F, f) : A \rightarrow B$ definimos o tensor $R_F \in \Gamma(\wedge^2 A^* \otimes f^* B)$ por

$$R_F(\alpha, \tilde{\alpha}) = \bar{\nabla}_{\# \alpha} F(\tilde{\alpha}) - \bar{\nabla}_{\tilde{\alpha}} F(\alpha) - F([\alpha, \tilde{\alpha}]) - T_{\bar{\nabla}}(F(\alpha), F(\tilde{\alpha})). \quad (2.1.9)$$

É fácil verificar que se (F, f) é compatível com as âncoras, então R_F não depende da escolha de ∇ . Além disso, segue que (F, f) é um morfismo de algebróides de Lie se e somente se $R_F \equiv 0$.

A segunda maneira equivalente de definir morfismos de algebróides se deve ao Vain-trob [35]. Ela é natural quando se pensa num algebróide de Lie como um certo tipo de super-variedade.

Uma aplicação de fibrados

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{F} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

induz uma aplicação pullback $F^* : \Gamma(B^*) \rightarrow \Gamma(A^*)$ definida por

$$\langle (F^* \phi)_x, \alpha_x \rangle = \langle (\phi \circ f)(x), F(\alpha_x) \rangle$$

para todo $\phi \in \Gamma(B^*)$, $x \in X$ e $\alpha \in \Gamma(A)$. Podemos estender esta aplicação à

$$F^* : \Gamma(\wedge^\bullet B^*) \rightarrow \Gamma(\wedge^\bullet A^*)$$

onde tomamos em grau zero $F^*(h) = h \circ f$ para $h \in C^\infty(X)$.

Proposição 2.1.11 (Vain-trob [35]) *Uma aplicação de fibrados (F, f) de A para B é um morfismo de algebróides de Lie se e somente se a aplicação*

$$F^* : (\Gamma(\wedge^\bullet B^*), d_B) \rightarrow (\Gamma(\wedge^\bullet A^*), d_A)$$

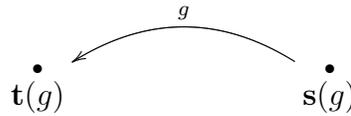
é um morfismo de complexos de cadeia.

2.2 Grupóides de Lie

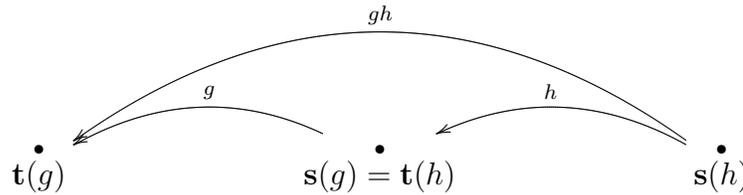
O objeto global associado a um algebróide e Lie é um grupóide de Lie. De forma concisa, podemos definir um grupóide como sendo uma categoria pequena na qual todo morfismo é invertível. Podemos abrir esta definição em:

Definição 2.2.1 Um **grupóide de Lie** (denotado por $\mathcal{G} \rightrightarrows X$) sobre uma variedade X é formado por duas variedades: X , chamada de base do grupóide e \mathcal{G} (em geral não-Hausdorff), chamada de espaço total do grupóide, além das seguintes funções suaves:

1. duas submersões sobrejetivas $s, t : \mathcal{G} \rightarrow X$ chamadas de fonte e alvo, respectivamente. Cada ponto g de \mathcal{G} deve ser visto como uma seta ligando $s(g)$ à $t(g)$



2. uma multiplicação suave m definida em $\mathcal{G}^{(2)} = \{(g, h) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} : s(g) = t(h)\}$ que denotaremos por $m(g, h) = gh$ e que satisfaz $s(gh) = s(h)$ e $t(gh) = t(g)$. A multiplicação é associativa, i.e., se $(gh)k$ está definido, então $g(hk)$ também está definido e $g(hk) = (gh)k$.

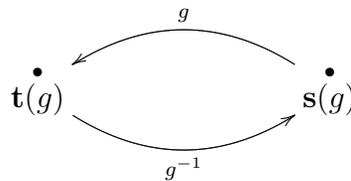


3. um mergulho $\mathbf{1} : X \rightarrow \mathcal{G}$ chamado de seção da identidade que satisfaz $\mathbf{1}_x g = g$ para todo g em $t^{-1}(x)$ e $g \mathbf{1}_x = g$ para todo g em $s^{-1}(x)$ (em particular, temos que $s \circ \mathbf{1} = Id_M = t \circ \mathbf{1}$)



e

4. um difeomorfismo $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, $g \mapsto g^{-1}$ chamado de inversão, que satisfaz $s \circ i = t$, $t \circ i = s$ e $g^{-1}g = \mathbf{1}_{s(g)}$, $gg^{-1} = \mathbf{1}_{t(g)}$



Definimos o grupo de Lie de isotropia em $x \in X$ como sendo o conjunto das setas de \mathcal{G} que começam e terminam em x , i.e.,

$$\mathcal{G}_x = \{g \in \mathcal{G} : s(g) = x = t(g)\}.$$

Já a órbita de x é definida como o conjunto dos pontos de X que podem ser ligados à x através de uma seta de \mathcal{G} , i.e.

$$\mathcal{G} \cdot x = \{\mathbf{t}(g) : g \in \mathbf{s}^{-1}(x)\}.$$

As órbitas de \mathcal{G} são subvariedades imersas que não são necessariamente conexas.

Diremos que um grupóide de Lie é **s-conexo** se suas s-fibras forem conexas, e **s-simplesmente conexo** se suas s-fibras forem conexas e simplesmente conexas.

Diversos exemplos de grupóides de Lie serão descritos na seção 2.4.

2.3 Teoria de Lie

Para cada grupóide de Lie podemos associar um algebróide de Lie. Como fibrado vetorial, A é a restrição à seção da identidade (que identificamos com X) do fibrado vetorial formado pelos vetores tangentes às s-fibras de \mathcal{G} , i.e., se denotarmos por $\ker \mathbf{s}_* = T^s\mathcal{G}$, então $A = T^s\mathcal{G} \big|_X$. As seções de A podem ser identificadas com os campos de vetores s-verticais em \mathcal{G} que são invariantes à direita

$$\Gamma(A) \cong \mathfrak{X}_{\text{inv}}^s(\mathcal{G}). \quad (2.3.1)$$

Segue de uma conta simples, que

$$[\mathfrak{X}_{\text{inv}}^s(\mathcal{G}), \mathfrak{X}_{\text{inv}}^s(\mathcal{G})]_{\mathfrak{X}(\mathcal{G})} \subset \mathfrak{X}_{\text{inv}}^s(\mathcal{G}). \quad (2.3.2)$$

Logo, o colchete de Lie de campos de vetores de \mathcal{G} induz um colchete de Lie em $\Gamma(A)$. Finalmente, se tomarmos a restrição à A de \mathbf{t}_* como sendo a âncora $\#$ de A , obtemos uma estrutura de algebróide de Lie em A . Sua álgebra de Lie de isotropia num ponto x é a álgebra de Lie do grupo de Lie de isotropia \mathcal{G}_x de \mathcal{G} em x . Além disso, quando \mathcal{G} é s-conexo, suas órbitas coincidem com as órbitas de A .

Diferentemente das álgebras de Lie, nem todo algebróide de Lie está associado a um grupóide de Lie. Quando isto ocorre, dizemos que A é **integrável**. As obstruções para a integrabilidade são conhecidas e serão brevemente expostas no fim desta seção. Convidamos o leitor a consultar [12] para uma discussão detalhada do problema de integrabilidade de algebróides de Lie, e [13] para o caso particular de variedades de Poisson. Como veremos agora, outros aspectos da teoria de Lie se aplicam aos grupóides de Lie e algebróides de Lie. Para demonstrações dos resultados a seguir, consulte [26] ou [12].

Proposição 2.3.1 (Lie I) *Seja \mathcal{G} um grupóide de Lie com algebróide de Lie A . Então existe um único grupóide de Lie s-simplesmente conexo com algebróide de Lie A .*

Proposição 2.3.2 (Lie II) *Sejam $A \rightarrow X$ e $B \rightarrow Y$ algebróides de Lie integráveis. Denote por $\mathcal{G}(A)$ o grupóide s-simplesmente conexo que integra A e por \mathcal{H} qualquer grupóide de Lie que integra B . Se $\Phi : A \rightarrow B$ é um morfismo de algebróides de Lie que cobre $f : X \rightarrow Y$, então existe um único morfismo de grupóides de Lie $F : \mathcal{G}(A) \rightarrow \mathcal{H}$ que também cobre f tal que*

$$dF_{\mathbf{1}_x}(v) = \Phi(v) \quad (2.3.3)$$

para todo $x \in X$ e $v \in T_{\mathbf{1}_x}^s\mathcal{G}(A)$. Neste caso, dizemos que F integra Φ .

O terceiro teorema de Lie para álgebras de Lie, que diz que toda álgebra de Lie de dimensão finita é integrável, não vale para algebróides de Lie. Daremos agora uma breve descrição da obstrução para a integrabilidade de um algebróide de Lie. Enunciaremos também os critérios para a integrabilidade que serão usados ao longo desta tese.

Para começar, descreveremos um grupóide topológico s-simplesmente conexo, denotado por $\mathcal{G}(A)$, canonicamente associado a um algebróide de Lie A , chamado de **grupóide de Weinstein** de A .

Definição 2.3.3 • Um **A -caminho** num algebróide de Lie A é um caminho $a : I \rightarrow A$ tal que

$$\frac{d}{dt}\pi(a(t)) = \#a(t).$$

Denotaremos o espaço dos A -caminhos por $P(A)$.

- Uma **A -homotopia** entre A -caminhos a_0 e a_1 é um morfismo de algebróides de Lie $T(I \times I) \rightarrow A$ que cobre uma homotopia (usual) com as extremidades fixas entre os caminhos $\pi(a_i(t))$.
- O **grupóide de Weinstein de A** é o grupóide topológico

$$\mathcal{G}(A) = P(A) / \sim,$$

onde \sim denota a relação de equivalência dada por A -homotopia. A multiplicação de $\mathcal{G}(A)$ é dada por concatenação de caminhos, e as aplicações s e t são as projeções nos pontos inicial e final do A -caminho.

Observação 2.3.4 O conjunto dos A -caminhos pode ser identificado com o conjunto dos morfismos de algebróides de Lie de TI para A . Tal conjunto tem a estrutura de uma variedade de Banach de dimensão infinita.

Para descrever a obstrução para a existência de uma estrutura de grupóide de Lie em $\mathcal{G}(A)$, e portanto para a integrabilidade de A , denotamos por \mathfrak{g}_x a álgebra de Lie de isotropia de A em x , e por $Z(\mathfrak{g}_x)$ seu centro.

Definição 2.3.5 O **grupo de monodromia de A em x** é o conjunto

$$N_x(A) = \{v \in Z(\mathfrak{g}_x) : v \text{ é } A\text{-homotópico ao caminho constante } 0_x\} \subset A_x.$$

Um fato extraordinário é a existência de uma **aplicação de monodromia**

$$\partial : \pi_2(L, x) \rightarrow \mathcal{G}(\mathfrak{g}_x)$$

cuja imagem é precisamente o subgrupo de monodromia $N_x(A)$, onde L é a folha de A passando por x , $\mathcal{G}(\mathfrak{g}_x)$ é o grupo de Lie simplesmente conexo com álgebra de Lie \mathfrak{g}_x , e onde identificamos $N_x(A) \subset Z(\mathfrak{g}_x)$ com um subgrupo abeliano de $\mathcal{G}(\mathfrak{g}_x)$. Estamos agora aptos a enunciar o terceiro teorema de Lie para algebróides de Lie:

Teorema 2.3.6 (Lie III; Crainic e Fernandes [12]) Seja $A \rightarrow X$ um algebróide de Lie. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. A é integrável.
2. O grupóide de Weinstein $\mathcal{G}(A)$ é um grupóide de Lie.
3. Os grupos de monodromia são uniformemente discretos.

Apesar de não utilizarmos este teorema na forma enunciada acima, será útil ter critérios simples para decidir quando um algebróide é integrável. Nos corolários a seguir, apresentamos os critérios que serão utilizados nesta tese.

Corolário 2.3.7 *Seja A um algebróide de Lie para o qual todas as folhas tem o segundo grupo de homotopia trivial. Então A é integrável. Em particular, todo algebróide de Lie transitivo sobre uma base contrátil é integrável.*

Corolário 2.3.8 *Seja A um algebróide de Lie para o qual todas as álgebras de Lie de isotropia têm centro trivial. Então A é integrável. Em particular, qualquer algebróide de Lie com âncora injetiva é integrável.*

Corolário 2.3.9 *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e seja \mathfrak{g}^* sua variedade de Lie-Poisson. Então o algebróide de Lie cotangente $T^*\mathfrak{g}^*$ é integrável.*

Corolário 2.3.10 *Seja A um subalgebróide de Lie de um algebróide de Lie integrável B . Então A é integrável.*

Corolário 2.3.11 *Seja (X, Π) uma variedade de Poisson integrável, e seja $Y \subset X$ uma subvariedade cosimplética. Então a estrutura de Poisson coinduzida em Y é integrável.*

2.4 Exemplos de Grupóide de Lie

Apresentamos agora diversos exemplos de grupóides de Lie. Em cada exemplo, indicaremos, sem apresentar demonstrações, o algebróide de Lie correspondente.

Exemplo 2.4.1 (Grupóide Fundamental) *Seja X uma variedade e denote por $\Pi_1(X)$ a variedade cujos os pontos são as classes de homotopia com extremidades fixas de curvas em X . Então $\Pi_1(X) \rightrightarrows X$ é um grupóide de Lie com a seguinte estrutura: seja $\gamma : I \rightarrow X$ uma curva em X , e denote por $[\gamma]$ sua classe de homotopia. A fonte e o alvo de $[\gamma]$ são seus pontos inicial e final, i.e., $\mathfrak{s}([\gamma]) = \gamma(0)$, e $\mathfrak{t}([\gamma]) = \gamma(1)$. Se γ_1 e γ_2 são duas curvas tais que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, definimos o seu produto através da concatenação de caminhos,*

$$[\gamma_2][\gamma_1] = [\gamma_2 * \gamma_1].$$

O elemento neutro num ponto $x \in X$ é a classe do caminho constante em x , e a inversa de $[\gamma]$ é a classe de $\bar{\gamma} : I \rightarrow X$, onde $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1 - t)$.

Observamos que as órbitas do grupóide fundamental são as componentes conexas de X , e que o grupo de isotropia em x é o grupo fundamental de X com ponto base x . O algebróide de Lie de $\Pi_1(X)$ é o fibrado tangente TX . De fato, $\Pi_1(X)$ é o único grupóide de Lie s -simplesmente conexo que tem TX como seu algebróide de Lie.

Exemplo 2.4.2 (Grupóide do Par) Outro grupóide de Lie que tem o fibrado tangente a X como seu algebróide de Lie é o **grupóide do par** $X \times X \rightrightarrows X$, cuja estrutura é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(x_1, x_2) &= x_2, \\ \mathbf{t}(x_1, x_2) &= x_1, \\ (x_1, x_2)(x_2, x_3) &= (x_1, x_3), \\ \mathbf{1}_x &= (x, x), e \\ (x_1, x_2)^{-1} &= (x_2, x_1). \end{aligned}$$

Exemplo 2.4.3 (Grupos de Lie) Todo grupo de Lie pode ser visto como um grupóide de Lie sobre um ponto. Neste caso, o grupo de Lie de isotropia é todo o grupóide.

Exemplo 2.4.4 (Grupóide de Monodromia de uma Folheação) Seja \mathcal{F} uma folheação regular em X . O **grupóide de monodromia** da folheação é o único grupóide de Lie $\Pi_1(\mathcal{F}) \rightrightarrows X$ que tem $T\mathcal{F}$ como seu algebróide de Lie, e cujas \mathbf{s} -fibras são conexas e simplesmente conexas. Ele pode ser descrito como o conjunto das classes de homotopia de curvas contidas nas folhas de \mathcal{F} , onde somente permitimos homotopias que não saem das folhas. Assim com o grupóide fundamental, sua multiplicação é dada por concatenação de caminhos, os elementos neutros são as classes de caminhos constantes, e a inversa de uma curva é a própria curva percorrida na direção contrária.

As órbitas do grupóide de monodromia de \mathcal{F} coincidem com as folhas da folheação. O grupo de isotropia em x é o grupo fundamental da folha passando por x , com ponto base x , i.e., $\pi_1(L_x, x)$.

Exemplo 2.4.5 (Grupóide de Holonomia de uma Folheação) Se no exemplo anterior tomarmos as classes de holonomia das curvas, ao invés de suas classes de homotopia, obtemos outro grupóide de Lie, chamado de **grupóide de holonomia** da folheação $\text{Hol}(\mathcal{F}) \rightrightarrows X$. Seu algebróide de Lie associado também é $T\mathcal{F}$.

Qualquer outro grupóide de Lie \mathcal{G} que tenha $T\mathcal{F}$ como seu algebróide de Lie, se encaixa na seguinte sequência exata de recobrimentos de grupóides

$$\Pi_1(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \text{Hol}(\mathcal{F}),$$

onde um recobrimento de grupóides é um morfismo cuja restrição às \mathbf{s} -fibras são aplicações de recobrimento.

Exemplo 2.4.6 (Grupóide de Calibre) Seja

$$\begin{array}{c} P \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} G \\ \downarrow \pi \\ X \end{array}$$

um fibrado principal com grupo estrutural G . O **grupóide de calibre** de P , $\mathcal{G}(P) \rightrightarrows X$ é definido por

$$\mathcal{G}(P) = \frac{P \times P}{G}$$

onde o quociente se refere à ação diagonal de G em $P \times P$, $(p, q) \cdot g = (pg, qg)$. Denote por $[p, q]$ a classe de equivalência de (p, q) . A estrutura de $\mathcal{G}(P)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}[p, q] &= \pi(q), \\ \mathbf{t}[p, q] &= \pi(p), \\ [p_1, q_1][q_1, p_2] &= [p_1, p_2], \\ \mathbf{1}_x &= [p, p] \text{ para algum } p \in \pi^{-1}(x), e \\ [p, q]^{-1} &= [q, p]. \end{aligned}$$

Note que podemos identificar cada ponto $[p, q] \in \mathcal{G}(P)$ com um difeomorfismo G -equivariante $\phi_{p,q} : \pi^{-1}(\pi(q)) \rightarrow \pi^{-1}(\pi(p))$ que leva q em p . Segue que cada seção σ de \mathbf{s} pode ser identificado com um automorfismo do fibrado principal P que cobre $\mathbf{t} \circ \sigma : X \rightarrow X$. Uma transformação de calibre de P é o caso especial em que $\mathbf{t} \circ \sigma = \text{Id}_X$.

O grupóide de calibre de P é um grupóide de Lie transitivo cujo grupo de Lie de isotropia em um ponto qualquer x é isomorfo à G . Reciprocamente, se $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ é um grupóide de Lie transitivo, então para cada $x \in X$,

$$\begin{array}{c} \mathbf{s}^{-1}(x) \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \mathcal{G}_x \end{array} \\ \downarrow \mathbf{t} \\ X \end{array}$$

é um fibrado principal com grupo estrutural \mathcal{G}_x , o grupo de isotropia em x . O grupóide de calibre deste fibrado é isomorfo a \mathcal{G} . Desta forma, qualquer grupóide de Lie pode ser visto como uma coleção de fibrados principais (com grupo estrutural variando) colados um ao outro de alguma maneira.

Exemplo 2.4.7 (Ações de Grupos de Lie) Seja G um grupo de Lie que age numa variedade X . Definimos o **grupóide de transformações** associado à ação $\mathcal{G} = G \times X \rightrightarrows X$ como sendo o grupóide de Lie cuja estrutura é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(g, x) &= x, \\ \mathbf{t}(g, x) &= gx, \\ (h, gx)(g, x) &= (hg, x) \\ \mathbf{1}_x &= (e, x), e \\ (g, x)^{-1} &= (g^{-1}, gx), \end{aligned}$$

onde e denota o elemento identidade de G .

As folhas do grupóide de transformações coincidem com as órbitas da ação. Os grupos de isotropia de \mathcal{G} são também isomorfos aos subgrupos de isotropia da ação. O algebróide de Lie do grupóide de transformações é o algebróide de transformações da ação infinitesimal de \mathfrak{g} associada a ação de G .

Exemplo 2.4.8 (Grupóides Simpléticos) Um **grupóide simplético** é um par (\mathcal{G}, ω) , onde $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ é um grupóide de Lie, e ω é uma forma simplética em \mathcal{G} que é compatível com multiplicação no seguinte sentido:

$$m^*\omega = \pi_1^*\omega + \pi_2^*\omega, \quad (2.4.1)$$

onde $m : \mathcal{G}^{(2)} \rightarrow \mathcal{G}$ denota o produto de \mathcal{G} e π_1 e π_2 denotam as projeções naturais de $\mathcal{G}^{(2)} \subset \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ em \mathcal{G} . Uma forma diferencial em \mathcal{G} satisfazendo (2.4.1) é chamada de uma **forma multiplicativa**. Note que a existência de uma forma simplética multiplicativa em \mathcal{G} implica que $\dim \mathcal{G} = 2 \dim X$.

Se (\mathcal{G}, ω) é um grupóide simplético sobre X , então existe uma única estrutura de Poisson em X tal que s é um morfismo de variedades Poisson e t é um anti-morfismo de variedades de Poisson. Aqui, \mathcal{G} é vista como uma variedade de Poisson com sua estrutura não-degenerada induzida por ω . O algebróide de Lie de \mathcal{G} é canonicamente isomorfo ao algebróide cotangente T^*X . Em particular, todas as órbitas de \mathcal{G} têm uma estrutura simplética natural.

Exemplo 2.4.9 (Fibrado Cotangente de um Grupo de Lie) Um exemplo particular de grupóide simplético é o fibrado cotangente de um grupo de Lie $\mathcal{G} = T^*G \rightrightarrows \mathfrak{g}^*$, visto como um grupóide sobre \mathfrak{g}^* , com sua estrutura simplética canônica. Se identificarmos T^*G com $G \times \mathfrak{g}^*$, a estrutura de grupóide em T^*G se identifica com a do grupóide de transformações associado à ação co-adjunta de G em \mathfrak{g}^* .

G-Estruturas

Neste capítulo, recordaremos os aspectos da teoria de G -estruturas que usaremos nesta tese. Para mais detalhes, sugerimos [21, 32, 33].

3.1 Definição e Primeiros Exemplos

Denotamos por

$$\begin{array}{c} \mathcal{B}(M) \xleftarrow{\text{GL}_n} \\ \pi \downarrow \\ M \end{array}$$

o fibrado dos referenciais de M . Podemos definir neste fibrado uma 1-forma canônica com valores em \mathbb{R}^n que denotamos por $\theta \in \Omega^1(\mathcal{B}(M); \mathbb{R}^n)$. Ela é definida por

$$\theta_p(\xi) := p^{-1}(\pi_*\xi), \quad (\xi \in T_p\mathcal{B}(M)),$$

e chamada de **forma tautológica** (ou **forma de soldagem**) de $\mathcal{B}(M)$. A forma tautológica é uma **forma tensorial**, i.e., ela é horizontal e $\text{GL}(n)$ -equivariante (com respeito à ação natural em \mathbb{R}^n). Um subespaço $H_p \subset T_p\mathcal{B}_G(M)$ é **horizontal** se a restrição $d_p\pi : H_p \rightarrow T_{\pi(p)}M$ for um isomorfismo. Quando chamamos θ de horizontal, queremos dizer que $\theta(\xi) = 0$ se e somente se ξ é tangente às fibras de π . Note que um subespaço H_p é horizontal se e somente se a restrição $\theta : H_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo.

Qualquer difeomorfismo φ entre duas variedades M e N pode ser levantado a um isomorfismo (um difeomorfismo GL_n -equivariante) dos fibrados de referenciais associados:

$$\mathcal{B}(\varphi) : \mathcal{B}(M) \rightarrow \mathcal{B}(N).$$

A correspondência que associa a cada variedade o seu fibrado dos referenciais, e a cada difeomorfismo o seu levantamento é functorial.

Definição 3.1.1 Seja G um subgrupo de Lie de GL_n . Uma G -estrutura em M é uma redução do fibrado dos referenciais $\mathcal{B}(M)$ a um subfibrado principal $\mathcal{B}_G(M)$ com grupo estrutural G .

Isto significa que $\mathcal{B}_G(M) \subset \mathcal{B}(M)$ é um subfibrado tal que, para todo $p \in \mathcal{B}_G(M)$ e $a \in GL(n)$, temos que $pa \in \mathcal{B}_G(M)$ se e somente se $a \in G$. Dada uma G -estrutura $\mathcal{B}_G(M)$, continuaremos a denotar por θ a restrição da forma tautológica à $\mathcal{B}_G(M)$.

Observação 3.1.2 Quando G é um subgrupo fechado de GL_n , o quociente $\mathcal{B}(M)/G$ é um fibrado sobre M com fibra típica GL_n/G . Além disso, $\pi_G : \mathcal{B}(M) \rightarrow \mathcal{B}(M)/G$ é um fibrado principal com grupo estrutural G . Neste caso, existe uma bijeção entre G -estruturas em M e seções $\sigma : M \rightarrow \mathcal{B}(M)/G$. A G -estrutura correspondente à seção σ é dada por

$$\mathcal{B}_G(M) = \pi_G^{-1}(\sigma(M)) \subset \mathcal{B}(M).$$

Quando agimos com G em $\mathcal{B}_G(M)$, a forma tautológica se transforma de acordo com

$$(R_a^*\theta)(\xi) = a^{-1} \cdot (\theta(\xi)), \quad (3.1.1)$$

onde a ação do lado direito é a ação natural de $G \subset GL_n$ em \mathbb{R}^n . A versão infinitesimal da equação (3.1.1) é dada por

$$\mathcal{L}_{\tilde{A}}\theta = -A \cdot \theta, \quad (3.1.2)$$

onde $A \in \mathfrak{g}$ e $\tilde{A} \in \mathfrak{X}(\mathcal{B}_G(M))$ é o campo fundamental gerado por A . Segue da fórmula mágica de Cartan que

$$\iota_{\tilde{A}}d\theta = -A \cdot \theta. \quad (3.1.3)$$

Definição 3.1.3 Dizemos que duas G -estruturas $\mathcal{B}_G(M)$ e $\mathcal{B}_G(N)$ são **equivalentes** se existir um difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow N$ tal que

$$\mathcal{B}(\varphi)(\mathcal{B}_G(M)) = \mathcal{B}_G(N).$$

Uma **simetria** de uma G -estrutura é uma equivalência $\varphi : M \rightarrow M$ de $\mathcal{B}_G(M)$ em $\mathcal{B}_G(M)$.

Dada uma variedade M e um subgrupo de Lie G de GL_n , pode ser que não exista uma G -estrutura em M . Alguns exemplos de G -estruturas são:

Exemplo 3.1.4 Quando $G = \{e\}$ é o subgrupo que contém somente a identidade, uma G -estrutura em M é o mesmo que uma seção de $\mathcal{B}(M)$, i.e., um paralelismo completo de TM . Logo, não existe nenhuma $\{e\}$ -estrutura na esfera bidimensional $M = S^2$.

Exemplo 3.1.5 Quando $G = O_n$, uma G -estrutura em M é o mesmo que uma métrica Riemanniana em M . De fato, se denotarmos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno Euclideano de \mathbb{R}^n , então dada uma O_n -estrutura em M , podemos definir uma métrica Riemanniana por

$$(v, w)_{T_x M} = \langle p^{-1}v, p^{-1}w \rangle$$

onde $v, w \in T_x M$ e $p \in \mathcal{B}_{O_n}(M)$ é um referencial sobre x . Claramente, como quaisquer referenciais sobre x diferem por um elemento de O_n , esta definição não depende da escolha de p . Reciprocamente, dada uma métrica Riemanniana em M , o conjunto dos referenciais $p : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ para os quais a base canônica de \mathbb{R}^n é mapeada numa base ortonormal de $T_x M$ formam uma redução do fibrado dos referenciais para um subfibrado com grupo estrutural O_n . É claro que qualquer variedade M admite uma O_n -estrutura.

A tabela abaixo contém outros exemplos de G -estruturas. A correspondência entre a G -estrutura em M e uma estrutura geométrica em M pode ser verificada de forma completamente análoga ao exemplo acima. Deixamos os detalhes a cargo do leitor.

G	Estrutura Geométrica
$GL_n^+(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$	Orientação
$SL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$	Forma Volume
$Sp_n(\mathbb{R}) \subset GL_{2n}(\mathbb{R})$	Estrutura Quase Simplética
$GL_n(\mathbb{C}) \subset GL_{2n}(\mathbb{R})$	Estrutura Quase Complexa

Observação 3.1.6 A definição que demos de G -estrutura está no contexto da geometria diferencial real. Observamos que as mesmas definições poderiam ser usadas para tratar de geometrias sobre outros corpos. Por exemplo, podemos definir o fibrado dos referenciais complexos, a forma tautológica com valores em \mathbb{C}^n , e assim por diante.

3.2 O Problema de Equivalência

Um dos problemas mais básicos que trataremos aqui é de determinar quando duas G -estruturas são equivalentes. A forma tautológica é a peça chave na solução deste problema de equivalência. De fato, se $\varphi : M \rightarrow N$ é uma aplicação de equivalência entre duas G -estruturas $\mathcal{B}_G(M)$ e $\mathcal{B}_G(N)$, então é fácil verificar que $\mathcal{B}(\varphi) : \mathcal{B}_G(M) \rightarrow \mathcal{B}_G(N)$ é um difeomorfismo que satisfaz $\mathcal{B}(\varphi)^*(\theta_N) = \theta_M$. Além disso, temos:

Proposição 3.2.1 Um difeomorfismo $\psi : \mathcal{B}_G(M) \rightarrow \mathcal{B}_G(N)$ é o levantamento de uma aplicação de equivalência se e somente se $\psi^*\theta_N = \theta_M$.

Demonstração. É claro que o levantamento de uma aplicação de equivalência preserva as formas tautológicas.

Reciprocamente, seja $\psi : \mathcal{B}_G(M) \rightarrow \mathcal{B}_G(N)$ um difeomorfismo que satisfaz $\psi^*\theta_N = \theta_M$. Primeiramente, iremos provar que ψ é um morfismo de fibrados principais. Note que, como ψ preserva as formas tautológicas, segue que ψ_* leva vetores verticais em vetores verticais. Logo, ψ mapeia fibras em fibras e portanto cobre um difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow N$. Agora, se $a \in G$, denote por $a \cdot \theta_N$ a forma em $\mathcal{B}_G(N)$, com valores em \mathbb{R}^n definida por $(a \cdot \theta_N)(\xi) = a \cdot (\theta_N(\xi))$. Então

$$\begin{aligned} \psi^*(a^{-1} \cdot \theta_N)(\xi) &= (a^{-1} \cdot \theta_N)(\psi_*\xi) \\ &= a^{-1} \cdot (\theta_N(\psi_*\xi)) \\ &= a^{-1} \cdot (\theta_M(\xi)) \\ &= (a^{-1} \cdot \theta_M)(\xi), \end{aligned}$$

e portanto,

$$(R_a \circ \psi)^*\theta_N = (\psi \circ R_a)^*\theta_N.$$

Segue que ψ é G -equivariante. De fato, sejam $p, q \in \mathcal{B}_G(M)$ pontos na mesma fibra de π_M . Então, $q = pa$ para um único $a \in G$. Como ψ mapeia fibras em fibras, segue que $\psi(p)$ pertence a mesma fibra que $\psi(q)$, e portanto $\psi(q) = \psi(p)b$ para um único $b \in G$.

Seja $v \in \mathbb{R}^n$ e denote por $\xi_v \in \mathfrak{X}(\mathcal{B}_G(M))$ o campo de vetores invariante à direita que satisfaz $(\theta_M)_p(\xi_v) = v$. Então,

$$\begin{aligned} a^{-1}v &= (\theta_M)_{pa}(\xi_v) \\ &= (\theta_N)_{\psi(q)}(\psi_*\xi_v) \\ &= (\theta_N)_{\psi(p)b}(\psi_*\xi_v) \\ &= (R_b)^*((\theta_N)_{\psi(p)}(\psi_*\xi_v)) \\ &= b^{-1}((\theta_N)_{\psi(p)}(\psi_*\xi_v)) \\ &= b^{-1}v. \end{aligned}$$

Como a expressão acima vale para todo $v \in \mathbb{R}^n$, segue que $a = b$, i.e., ψ é G -equivariante.

para concluir a demonstração, mostraremos que ψ coincide com o levantamento $\mathcal{B}(\varphi)$ do difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow N$ que ele cobre. Seja $\tilde{\psi} : \mathcal{B}_G(M) \rightarrow \mathcal{B}_G(M)$ a aplicação $\tilde{\psi} = \mathcal{B}(\varphi)^{-1} \circ \psi$. É óbvio que

$$\tilde{\psi}^*\theta_M = \theta_M.$$

Logo, por um argumento completamente análogo ao que acabamos de apresentar, segue que $\tilde{\psi}$ é um morfismo de G -fibrados principais que cobre a identidade e portanto $\tilde{\psi}$ é necessariamente da forma

$$\tilde{\psi} = R_{g(\pi(p))},$$

para alguma aplicação suave $g : M \rightarrow G$. Assim, calculando-se em qualquer ponto $p \in \mathcal{B}_G(M)$, obtemos

$$\theta_M = R_g^*\theta_M = g^{-1} \cdot \theta_M.$$

Concluimos que

$$g(\pi(p)) = e \text{ para todo } p \in \mathcal{B}_G(M)$$

de onde segue a proposição. ■

Com o intuito de obter invariantes de equivalência de G -estruturas, escolhemos um subespaço horizontal H_p em $p \in \mathcal{B}_G(M)$. Dado $v \in \mathbb{R}^n$, existe um único vetor $\xi_v \in H_p$ tal que $\theta(\xi_v) = v$. Definimos:

$$\begin{aligned} c_{H_p} : \wedge^2 \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ c_{H_p}(v, w) &:= d\theta(\xi_v, \xi_w). \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Esta função depende da escolha de um subespaço horizontal, e portanto não define um invariante. Se H_p e H'_p dois espaços horizontais distintos em $p \in \mathcal{B}_G(M)$, e $\xi_v \in H_p$ e $\xi'_v \in H'_p$ são os vetores tais que $\theta(\xi_v) = v = \theta(\xi'_v)$ então $\xi_v - \xi'_v$ é um vetor vertical, e portanto determina um elemento de \mathfrak{g} , a álgebra de Lie de G . Desta forma, obtemos uma aplicação $S_{H_p, H'_p} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$. Agora, calculamos:

$$\begin{aligned} c_{H_p}(v, w) - c_{H'_p}(v, w) &= d\theta(\xi_v, \xi_w) - d\theta(\xi'_v, \xi'_w) \\ &= d\theta(\xi_v - \xi'_v, \xi_w) + d\theta(\xi'_v, \xi_w - \xi'_w) \\ &= (\iota_{S_{H_p, H'_p}(v)} \widetilde{d\theta})(\xi_w) - (\iota_{S_{H_p, H'_p}(w)} \widetilde{d\theta})(\xi'_v). \end{aligned}$$

Usando a equação (3.1.3) podemos escrever

$$c_{H_p}(v, w) - c_{H'_p}(v, w) = S_{H_p, H'_p}(w)v - S_{H_p, H'_p}(v)w.$$

Segue que

$$c_{H_p} - c_{H'_p} \in \mathcal{A}(\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})),$$

onde \mathcal{A} o operador de anti-simetrização:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g}) &\rightarrow \text{Hom}(\wedge^2 \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \\ \mathcal{A}(T)(u, v) &:= T(u)v - T(v)u. \end{aligned}$$

Assim, é natural definir:

Definição 3.2.2 Dada uma G -estrutura $\mathcal{B}_G(M)$ definimos sua **função estrutural de primeira ordem** por:

$$c : \mathcal{B}_G(M) \rightarrow \frac{\text{Hom}(\wedge^2 \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}{\mathcal{A}(\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g}))}, \quad c(p) := [c_{H_p}].$$

Já que um isomorfismo $\psi : \mathcal{B}_G(M) \rightarrow \mathcal{B}_G(N)$ leva espaço horizontal em espaço horizontal, e é uma equivalência se e somente se $\psi^* \theta_N = \theta_M$, obtemos

Proposição 3.2.3 (Sternberg [33]) Sejam $\mathcal{B}_G(M)$ e $\mathcal{B}_G(N)$ são G -estruturas. Se $\phi : M \rightarrow N$ é uma equivalência, então

$$c_N \circ \mathcal{B}(\phi) = c_M.$$

3.3 Prolongamento

Para obter invariantes mais refinados de equivalência de G -estruturas, precisamos olhar para termos de ordem superior. Este processo é conhecido como **prolongamento** e acontece no fibrado dos jatos $J^k \mathcal{B}_G(M)$.

Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado. Denotamos por $\pi^1 : J^1 E \rightarrow M$ seu fibrado de 1-jatos, cuja fibra sobre $m \in M$ é dada por:

$$(J^1 E)_m = \{j_m^1 s \mid s \text{ é uma seção de } E\}.$$

Este fibrado pode ser descrito geometricamente por:

$$J^1 E = \{H_p : p \in E \text{ e } H_p \subset T_p E \text{ é horizontal}\}.$$

Se s é uma seção local de E tal que $s(m) = p$ então a correspondência acima é dada por

$$j_m^1 s \mapsto H_p = d_m s(T_m M).$$

Se definirmos a projeção $\pi_0^1 : J^1 E \rightarrow E$ por $\pi_0^1(H_p) = p$, então $J^1 E$ é um fibrado afim sobre E .

Exemplo 3.3.1 A função estrutural de primeira ordem de uma G -estrutura $\mathcal{B}_G(M)$ pode ser descrita como uma aplicação $c : J^1 \mathcal{B}_G(M) \rightarrow \text{Hom}(\wedge^2 \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ pela fórmula (3.2.1).

No caso em que E é o fibrado dos referenciais de uma variedade M , $\pi : \mathcal{B}(M) \rightarrow M$, é fácil verificar que seu fibrado de 1-jatos $\pi_0^1 : J^1\mathcal{B}(M) \rightarrow \mathcal{B}(M)$ pode ser identificado com um subfibrado de $\mathcal{B}(\mathcal{B}(M))$: a cada subespaço horizontal $H_p \subset T_p\mathcal{B}(M)$ podemos associar um referencial de $\mathcal{B}(M)$, i.e., um isomorfismo linear $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathfrak{gl}(n) \rightarrow T_p\mathcal{B}(M)$, definido por

$$\mathbb{R}^n \times \mathfrak{gl}(n) \ni (v, \rho) \xrightarrow{\phi} (\pi|_{H_p} \circ p)^{-1}(v) + \rho \cdot p \in T_p\mathcal{B}(M).$$

Note que se H_p e H'_p são dois subespaços horizontais em $p \in \mathcal{B}(M)$, então os referenciais associados $\phi, \phi' : \mathbb{R}^n \times \mathfrak{gl}(n) \rightarrow T_p\mathcal{B}(M)$ são relacionados por

$$\phi'(v, \rho) = \phi(v, \rho) + T(v) \cdot p,$$

para algum $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{gl}(n))$. Reciprocamente, dado um referencial ϕ associado a algum espaço horizontal H_p , e $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{gl}(n))$, esta fórmula determina um referencial ϕ' que está associado a outro espaço horizontal H'_p . Segue que $J^1\mathcal{B}(M)$ é uma $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{gl}(n))$ -estrutura sobre $\mathcal{B}(M)$, onde vemos $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{gl}(n)) \subset \text{GL}(\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n))$ como o subgrupo das transformações:

$$(v, \rho) \mapsto (v, \rho + T(v)), \text{ com } T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{gl}(n)).$$

Suponha agora que $\mathcal{B}_G(M)$ é uma G -estrutura, e que portanto, $J^1\mathcal{B}_G(M) \subset J^1\mathcal{B}(M)$ é um subfibrado. Por um argumento similar ao descrito acima, segue que:

Proposição 3.3.2 Se $\mathcal{B}_G(M)$ é uma G -estrutura, então $J^1\mathcal{B}_G(M) \rightarrow \mathcal{B}_G(M)$ é uma $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$ -estrutura em $\mathcal{B}_G(M)$.

Com o intuito de motivar nossa próxima definição, apresentamos o seguinte exemplo.

Exemplo 3.3.3 Considere a G -estrutura plana em \mathbb{R}^n :

$$\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^n) := \mathbb{R}^n \times G \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \times \text{GL}(n).$$

Dado um campo de vetores ξ em \mathbb{R}^n , denotamos por $\phi_\xi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ o seu fluxo. Observe que ξ é um automorfismo infinitesimal da G -estrutura $\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^n)$ se e somente se o levantamento de ϕ_ξ^t é um automorfismo $\mathcal{B}(\phi_\xi^t) : \mathcal{B}_G(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{B}_G(\mathbb{R}^n)$. O levantamento $\mathcal{B}(\phi_\xi^t)$ é, por sua vez, o fluxo de um campo de vetores em $\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^n)$, chamado de levantamento de ξ . Em coordenadas (m^1, \dots, m^n) , onde $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial m^i}$, o campo levantado é dado por :(*)

$$\tilde{\xi} = \frac{\partial \xi^i}{\partial m^j} \frac{\partial}{\partial p_j^i},$$

onde (p_j^i) são as coordenadas associadas em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tais que um referencial $p \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ se escreve como:

$$p = (p_1^i \frac{\partial}{\partial m^i}, \dots, p_n^i \frac{\partial}{\partial m^i}).$$

Segue que ξ é um automorfismo infinitesimal se e somente se:

$$\left[\frac{\partial \xi^i}{\partial m^j} \right]_{i,j=1,\dots,n} \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n).$$

*Usamos a convenção de somar sobre índices repetidos.

Suponha agora que o levantamento do fluxo de ξ fixa o ponto $(0, I) \in \mathbb{R}^n \times \text{GL}(n)$, i.e., que o campo levantado $\tilde{\xi}$ se anula nesse ponto. Se fizermos o prolongamento para o fibrado dos jatos $J^1\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^n)$, obtemos um fluxo que é gerado pelo campo de vetores:

$$j^1\tilde{\xi} = \frac{\partial \xi^i}{\partial m^{j_1} \partial m^{j_2}} \frac{\partial}{\partial p_{j_1, j_2}^i},$$

onde $(m^i, p_j^i, p_{j_1, j_2}^i)$ denotam as coordenadas induzidas no fibrado dos jatos. Note que os coeficientes $a_{j_1, j_2}^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial m^{j_1} \partial m^{j_2}}$ de $j^1\tilde{\xi}$ satisfazem:

$$[a_{j_1, j_2}^i]_{i, j_1=1, \dots, n} \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n),$$

além de serem simétricos nos índices j_1 e j_2 . Portanto, concluímos que:

Lema 3.3.4 *O levantamento das simetrias da G -estrutura plana $\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \times G$, cujos fluxos fixam $(0, I) \in \mathbb{R}^n \times G$, para o espaço dos jatos $J^1\mathcal{B}_G(\mathbb{R}^n)$ geram um subgrupo de Lie $G^{(1)} \subset \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$ com álgebra de Lie:*

$$\mathfrak{g}^{(1)} := \{T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g}) : T(u)v = T(v)u, \forall u, v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Isto motiva a seguinte definição:

Definição 3.3.5 *Seja $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma álgebra de Lie. O primeiro prolongamento de \mathfrak{g} é o subespaço $\mathfrak{g}^{(1)} \subset \text{Hom}(V, \mathfrak{g})$ formado pelas transformações $T : V \rightarrow \mathfrak{g}$ tais que*

$$T(v_1)v_2 = T(v_2)v_1, \quad \text{para todo } v_1, v_2 \in V.$$

O k -ésimo prolongamento de \mathfrak{g} é o subespaço $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \text{Hom}(V, \mathfrak{g}^{(k-1)})$ definido indutivamente por

$$\mathfrak{g}^{(k)} = (\mathfrak{g}^{(k-1)})^{(1)}.$$

Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ será dita de tipo finito k se existir um $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^{(k-1)} \neq 0$ e $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$. Caso contrário, diremos que \mathfrak{g} é de tipo infinito.

De forma similar, definimos:

Definição 3.3.6 *Seja G um subgrupo de Lie de $GL(V)$. O primeiro prolongamento de G é o subgrupo abeliano $G^{(1)}$ de $GL(V \oplus \mathfrak{g})$ formado pelas transformações:*

$$(v, \rho) \mapsto (v, \rho + T(v)), \quad \text{onde } T \in \mathfrak{g}^{(1)}.$$

O k -ésimo prolongamento de G é o subgrupo $G^{(k)}$ de $GL(V \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^{(k)})$ definido indutivamente por

$$G^{(k)} := (G^{(k-1)})^{(1)}.$$

Para cada G -estrutura $\mathcal{B}_G(M)$, podemos reduzir o grupo estrutural de $J^1\mathcal{B}_G(M)$ ao subgrupo $G^{(1)}$, obtendo assim uma $G^{(1)}$ -estrutura:

Proposição 3.3.7 (Singer and Sternberg [32]) *Seja $\mathcal{B}_G(M)$ uma G -estrutura em M e denote por $c : \mathcal{J}^1\mathcal{B}_G(M) \rightarrow \text{Hom}(\wedge^2\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ a sua função estrutural de primeira ordem. Para cada escolha de um subespaço C complementar à $\mathcal{A}(\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g}))$ em $\text{Hom}(\wedge^2\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, obtemos um subfibrado:*

$$\mathcal{B}_G(M)^{(1)} = \{H_p \in \mathcal{J}^1\mathcal{B}_G(M) : c_{H_p} \in C\},$$

que é uma redução de $\mathcal{J}^1\mathcal{B}_G(M)$ ao grupo estrutural $G^{(1)}$. Diferentes escolhas de complementos dão lugar a subfibrados que estão relacionados por translação à direita por um elemento de $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$.

Observação 3.3.8 *Em geral, não existe uma escolha canônica de complemento C , e escolher um complemento “bom” é parte do trabalho exigido para resolver um problema de equivalência. Sempre que possível, procuramos por um espaço complementar C que seja invariante pela ação de G . Quando tal complemento existir, diremos que G é **reduutivo** (CUIDADO: não confunda este conceito com o de álgebra de Lie reduitiva).*

A $G^{(1)}$ -estrutura $\mathcal{B}_G(M)^{(1)} \rightarrow \mathcal{B}_G(M)$ será chamada de **primeiro prolongamento** de $\mathcal{B}_G(M)$. De maneira indutiva, definimos também o k -ésimo **prolongamento** de $\mathcal{B}_G(M)$ por:

$$\mathcal{B}_G(M)^{(k)} = (\mathcal{B}_G(M)^{(k-1)})^{(1)},$$

que, por sua vez, é uma $G^{(k)}$ -estrutura sobre $\mathcal{B}_G(M)^{(k-1)}$.

O prolongamento de G -estruturas é relevante para o problema de equivalência por causa do seguinte resultado:

Teorema 3.3.9 (Singer and Sternberg [32]) *Sejam $\mathcal{B}_G(M)$ e $\mathcal{B}_G(N)$ duas G -estruturas. Então $\mathcal{B}_G(M)$ e $\mathcal{B}_G(N)$ são equivalentes se e somente se seus prolongamentos $\mathcal{B}_G(M)^{(1)}$ e $\mathcal{B}_G(N)^{(1)}$ (correspondente à mesma escolha de espaço complementar C) são $G^{(1)}$ -estruturas equivalentes.*

Assim, podemos obter novas condições necessárias para a equivalência de G -estruturas analisando a função estrutural de seu prolongamento $\mathcal{B}_G(M)^{(1)}$, que é uma função

$$c^{(1)} : \mathcal{B}_G(M)^{(1)} \rightarrow \frac{\text{Hom}(\wedge^2(\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}), \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g})}{\mathcal{A}(\text{Hom}(\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(1)}))}$$

chamada de **função estrutural de segunda ordem** de $\mathcal{B}_G(M)$. Podemos continuar este processo, construindo o segundo prolongamento de $\mathcal{B}_G(M)$ e analisando a sua função estrutural, e assim por diante.

Concluimos que a importância das G -estruturas de tipo finito se deve ao fato de que podemos reduzir o conjunto das condições necessárias para verificar a equivalência de tais estruturas à um conjunto finito de condições. De fato, pelo método de prolongamento, o problema de equivalência de G -estruturas de tipo finito, pode ser reduzido à um problema de equivalência para $\{e\}$ -estruturas (correferenciais). Além disso, como veremos na Seção 6.2, o grupo de simetrias de tais estruturas é um grupo de Lie de dimensão finita.

3.4 Funções Estruturais de Segunda Ordem

Descreveremos agora as funções estruturais de segunda ordem de uma G -estrutura $\mathcal{B}_G(M)$. Para tal, fixamos um complemento C de $\mathcal{A}(\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g}))$ em $\text{Hom}(\wedge^2 \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Seja $z = H_p \in \mathcal{B}_G^{(1)} = \mathcal{B}_G(M)^{(1)}$ um ponto do primeiro prolongamento $\mathcal{B}_G^{(1)}$ e denote por \mathcal{H}_z um subespaço horizontal de $T_z \mathcal{B}_G^{(1)}$. Então, podemos decompor $c_{\mathcal{H}_z}^{(1)} \in \text{Hom}(\wedge^2(\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}), \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g})$ em três componentes:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\wedge^2(\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}), \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}) &= \text{Hom}(\wedge^2 \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}) \oplus \text{Hom}(\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{g}, \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}) \oplus \\ &\oplus \text{Hom}(\wedge^2 \mathfrak{g}, \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}) \end{aligned}$$

Descrevemos agora cada uma destas componentes. Denote por u, v vetores de \mathbb{R}^n e por A, B elementos de \mathfrak{g} :

- A primeira componente de $c_{\mathcal{H}_z}^{(1)}$ inclui a função estrutural de primeira ordem de $\mathcal{B}_G(M)$:

$$c_{\mathcal{H}_z}^{(1)}(u, v) = c_{H_p}(u, v) + R_{\mathcal{H}_z}(u, v),$$

para alguma aplicação $R_{\mathcal{H}_z} \in \text{Hom}(\wedge^2 \mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$.

- A segunda componente de $c_{\mathcal{H}_z}^{(1)}$ pode ser escrita como:

$$c_{\mathcal{H}_z}^{(1)}(A, u) = -Au + S_{\mathcal{H}_z}(A, u)$$

para alguma aplicação $S_{\mathcal{H}_z} \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{g}, \mathfrak{g})$.

- A última componente de $c_{\mathcal{H}_z}^{(1)}$ é dada por

$$c_{\mathcal{H}_z}^{(1)}(A, B) = -[A, B]_{\mathfrak{g}}.$$

Um caso importante ocorre quando $G^{(1)} = \{e\}$, no qual uma $G^{(1)}$ -estrutura é o mesmo que uma escolha de um espaço horizontal em cada ponto $p \in \mathcal{B}_G(M)$. Esta, por sua vez, é o mesmo que uma escolha de uma forma diferencial η em \mathcal{B}_G com valores em \mathfrak{g} (não necessariamente equivariante). O par (θ, η) é um correferencial em \mathcal{B}_G . Neste caso, a projeção de $\mathcal{B}_G^{(1)}$ em \mathcal{B}_G é um difeomorfismo, e portanto podemos ver a função estrutural de segunda ordem como uma função definida em \mathcal{B}_G . Assim, obtemos as **equações estruturais** do par (θ, η) :

$$\begin{cases} d\theta = c(\theta \wedge \theta) - \eta \wedge \theta \\ d\eta = R(\theta \wedge \theta) + S(\theta \wedge \eta) - \eta \wedge \eta \end{cases} \quad (3.4.1)$$

onde $\eta \wedge \theta$ é a 2-forma com valores em \mathbb{R}^n obtida pela ação de \mathfrak{g} em \mathbb{R}^n , e $\eta \wedge \eta$ é a 2-forma com valores em \mathfrak{g} obtida pelo colchete de Lie de \mathfrak{g} .

Quando os espaços horizontais podem ser escolhidos de forma a serem invariantes, i.e., se $R_{a*}H_p = H_{pa}$ para todo $a \in G$, obtemos uma conexão principal no fibrado \mathcal{B}_G com forma de conexão η . Neste caso, temos que:

- S é identicamente nula;

- R é a curvatura da conexão;

e portanto, as equações (3.4.1) se reduzem às equações estruturais usuais para uma conexão.

No Capítulo 5, mostraremos como usar as equações estruturais (3.4.1) para resolver problemas de classificação de G -estruturas de tipo 1.

3.5 Funções Estruturais de Ordem Superior

Nesta seção, iremos deduzir as equações estruturais de uma G -estrutura, cujo grupo estrutural $G \subset \text{GL}_n$ é um subgrupo de Lie de tipo k , i.e., tal que $G^{(k)} = \{e\}$. Faremos isto de forma indutiva. Na Seção 5.4, iremos explicar como usar estas equações para resolver problemas de classificação de G -estruturas de tipo finito.

Seja M uma variedade, $\mathcal{B}_G(M)$ uma G -estrutura em M e $(\mathcal{B}_G(M))^{(k)}$ seu k -ésimo prolongamento. Então,

$$\begin{array}{c} (\mathcal{B}_G(M))^{(k)} \circlearrowleft_{G^{(k)}} \\ \pi^{(k)} \downarrow \\ (\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)} \end{array}$$

é uma $G^{(k)}$ -estrutura sobre $(\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)}$. Sua forma tautológica $\theta^{(k)}$ toma valores no espaço vetorial $V \oplus \mathfrak{g} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^{(k-1)}$. É fácil verificar que

$$\theta^{(k)} = (\pi^{(k)})^* \theta^{(k-1)} + \eta^{(k-1)}$$

onde $\eta^{(k-1)}$ é uma forma diferencial com valores em $\mathfrak{g}^{(k-1)}$, e $\theta^{(k-1)}$ é a forma tautológica de $(\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)}$, que toma valores em $V \oplus \mathfrak{g} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^{(k-2)}$. Para simplificar a notação, omitiremos o pullback por $\pi^{(k)}$ e escreveremos

$$\theta^{(k)} = (\theta^{(k-1)}, \eta^{(k-1)}).$$

Também iremos utilizar a notação

$$\mathfrak{g}^l = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^{(l)}.$$

Recorde que cada ponto de $(\mathcal{B}_G(M))^{(k)}$ é um par (p, H_p) , onde $p \in (\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)}$ e H_p é um subespaço horizontal de $T_p(\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)}$ tal que a função estrutural de ordem $k-1$, $c_{H_p}^{(k-1)}$, toma valores num subespaço fixado

$$C \subset \text{Hom}(\wedge^2(V \oplus \mathfrak{g}^{k-2}), V \oplus \mathfrak{g}^{k-2}),$$

que é complementar à $\mathcal{A}(\text{Hom}(V \oplus \mathfrak{g}^{k-2}, \mathfrak{g}^{(k-1)}))$. A **função estrutural de k -ésima ordem** é uma aplicação

$$c^{(k)} : (\mathcal{B}_G(M))^{(k)} \rightarrow \frac{\text{Hom}(\wedge^2(V \oplus \mathfrak{g}^{k-1}), V \oplus \mathfrak{g}^{k-1})}{\mathcal{A}(\text{Hom}(V \oplus \mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}^{(k)})}.$$

Sejam $z = (p, H_p) \in (\mathcal{B}_G(M))^{(k)}$ um referencial sobre $p \in (\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)}$ e $\mathcal{H}_z \subset T_z(\mathcal{B}_G(M))^{(k)}$ um subespaço horizontal. Vamos descrever um representante $c_{\mathcal{H}_z}^{(k)}$ de $c^{(k)}(z)$.

De maneira completamente análoga à discussão na seção anterior, podemos decompor $c_{\mathcal{H}_z}^{(k)} \in \text{Hom}(\wedge^2(\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}^{k-2} \oplus \mathfrak{g}^{(k-1)}), \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}^{k-2} \oplus \mathfrak{g}^{(k-1)})$ em três componentes:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\wedge^2(\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}^{k-2} \oplus \mathfrak{g}^{(k-1)}), \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}^{k-2} \oplus \mathfrak{g}^{(k-1)}) &= \\ &= \text{Hom}(\wedge^2(\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}^{k-2}), \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}^{k-2} \oplus \mathfrak{g}^{(k-1)}) \oplus \\ &\quad \oplus \text{Hom}((\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}^{k-2}) \otimes \mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}^{k-2} \oplus \mathfrak{g}^{(k-1)}) \oplus \\ &\quad \oplus \text{Hom}(\wedge^2 \mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}^{k-2} \oplus \mathfrak{g}^{(k-1)}) \end{aligned}$$

Para descrever cada componente, denotamos por u, v vetores de $\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}^{k-2}$ e por A, B elementos de $\mathfrak{g}^{(k-1)}$:

- A primeira componente de $c_{\mathcal{H}_z}^{(k)}$ inclui a função estrutural de $(\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)}$, i.e., a função estrutural de ordem $k-1$ de $\mathcal{B}_G(M)$:

$$c_{\mathcal{H}_z}^{(k)}(u, v) = c_{\mathcal{H}_p}^{(k-1)}(u, v) + R_{\mathcal{H}_z}^{(k-1)}(u, v),$$

para alguma aplicação $R_{\mathcal{H}_z}^{(k-1)} \in \text{Hom}(\wedge^2(\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}^{k-2}), \mathfrak{g}^{(k-1)})$.

- A segunda componente de $c_{\mathcal{H}_z}^{(k)}$ é dada por:

$$c_{\mathcal{H}_z}^{(k)}(A, u) = -Au + S_{\mathcal{H}_z}^{(k-1)}(A, u)$$

para alguma aplicação $S_{\mathcal{H}_z}^{(k-1)} \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{g}^{k-2}, \mathfrak{g}^{(k-1)})$. O primeiro termo do lado direito da expressão acima se refere à ação de $A \in \mathfrak{g}^{(k-1)} \subset \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}^{k-2})$ em $u \in \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}^{k-2}$.

- A última componente de $c_{\mathcal{H}_z}^{(k)}$ é dada pelo colchete de $\mathfrak{g}^{(k-1)}$

$$c_{\mathcal{H}_z}^{(k)}(A, B) = -[A, B]_{\mathfrak{g}^{(k-1)}},$$

que se anula sempre que $k \geq 1$.

Quando $G^{(k)} = \{e\}$, uma $G^{(k)}$ -estrutura é o mesmo que uma escolha de um subespaço horizontal em cada ponto $p \in (\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)}$, ou equivalentemente, uma escolha de uma forma diferencial $\eta^{(k-1)}$ em $(\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)}$ com valores em $\mathfrak{g}^{(k-1)}$ (não necessariamente equivariante). O par $(\theta^{(k-1)}, \eta^{(k-1)})$ é um correferencial em $(\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)}$. Note que a forma tautologica de $(\mathcal{B}_G(M))^{(k)}$ é dada por

$$\theta^{(k)} = (\pi^{(k)})^* \theta^{(k-1)} + \eta^{(k-1)}.$$

Neste caso, a projeção de $(\mathcal{B}_G(M))^{(k)}$ em $(\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)}$ é um difeomorfismo, e portanto, podemos ver as funções estruturais de k -ésima ordem como funções definidas em $(\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)}$. Obtemos assim, as **equações estruturais** do par $(\theta^{(k-1)}, \eta^{(k-1)})$:

$$\begin{cases} d\theta^{(k-1)} &= c^{(k-1)}(\theta^{(k-1)} \wedge \theta^{(k-1)}) - \eta^{(k-1)} \wedge \theta^{(k-1)} \\ d\eta^{(k-1)} &= R^{(k-1)}(\theta^{(k-1)} \wedge \theta^{(k-1)}) + S^{(k-1)}(\theta^{(k-1)} \wedge \eta^{(k-1)}) \end{cases} \quad (3.5.1)$$

Observação 3.5.1 Podemos continuar o processo de decomposição das funções estruturais e das equações estruturais de $(\mathcal{B}_G(M))^{(k)}$. De fato, a forma tautológica $\theta^{(k-1)}$ de $(\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)}$ toma valores em $\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}^{k-3} \oplus \mathfrak{g}^{(k-2)}$ e podemos expressá-la como

$$\theta^{(k-1)} = (\pi^{(k-1)})^* \theta^{(k-2)} + \eta^{(k-2)}$$

onde $\pi^{(k-1)}$ é a projeção de $(\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)}$ em $(\mathcal{B}_G(M))^{(k-2)}$, $\theta^{(k-2)}$ é a forma tautológica de $(\mathcal{B}_G(M))^{(k-2)}$, e $\eta^{(k-2)}$ é uma 1-forma com valores em $\mathfrak{g}^{(k-2)}$.

Se levarmos tal processo adiante, obtemos uma decomposição de $\theta^{(k)}$ em

$$\theta^{(k)} = (\theta, \eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \dots, \eta^{(k-1)})$$

onde $\eta^{(0)} = \eta$, θ é a forma tautológica de $\mathcal{B}_G(M)$ e cada $\eta^{(l)}$ é uma 1-forma com valores em $\mathfrak{g}^{(l)}$. Deste modo, obtemos também uma decomposição das equações estruturais (3.5.1) em $k + 1$ equações envolvendo as componentes de $\theta^{(k)}$.

Exemplo 3.5.2 Seja $\mathcal{B}_G(M)$ uma G -estrutura, onde $G \subset \text{GL}_n$ é um grupo de Lie de tipo 2, i.e., $G^{(2)} = \{e\}$. Neste caso, podemos escrever as equações estruturais (3.5.1) como

$$\begin{cases} d\theta^{(1)} &= c^{(1)}(\theta^{(1)} \wedge \theta^{(1)}) - \eta^{(1)} \wedge \theta^{(1)} \\ d\eta^{(1)} &= R^{(1)}(\theta^{(1)} \wedge \theta^{(1)}) + S^{(1)}(\theta^{(1)} \wedge \eta^{(1)}) \end{cases} \quad (3.5.2)$$

Agora, para decompor estas equações em termos de $\theta^{(1)} = (\theta, \eta)$, precisamos analisar cada um de seus fatores. O primeiro termo, $c^{(1)}(\theta^{(1)} \wedge \theta^{(1)})$ foi descrito em detalhes na Seção 3.4, onde mostramos que

$$c^{(1)}(\theta^{(1)} \wedge \theta^{(1)}) = (c(\theta \wedge \theta) - \eta \wedge \theta, R(\theta \wedge \theta) + S(\theta \wedge \eta) - \eta \wedge \eta).$$

O segundo fator de $d\theta^{(1)}$ é dado pela ação de $\mathfrak{g}^{(1)}$ em $\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}$. Lembre-se que $\mathfrak{g}^{(1)} \subset \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$ é a subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g})$ formada pelas transformações:

$$(u, A) \mapsto (0, T(u)), \text{ onde } T \in \mathfrak{g}^{(1)}.$$

Assim, podemos escrever

$$\eta^{(1)} \wedge \theta^{(1)} = (0, \eta^{(1)} \wedge \theta).$$

Finalmente, para decompor a equação de $d\eta^{(1)}$, simplesmente escrevemos as componentes de $R^{(1)} \in \text{Hom}(\wedge^2(\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}), \mathfrak{g}^{(1)})$ e $S^{(1)} \in \text{Hom}((\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)})$, i.e.,

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\wedge^2(\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}), \mathfrak{g}^{(1)}) &= \text{Hom}(\wedge^2 \mathbb{R}^n, \mathfrak{g}^{(1)}) \oplus \text{Hom}(\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(1)}) \oplus \text{Hom}(\wedge^2 \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(1)}) \\ R^{(1)} &= R_1^{(1)} + R_2^{(1)} + R_3^{(1)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{Hom}((\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}) &= \text{Hom}(\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}) \oplus \text{Hom}(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}) \\ S^{(1)} &= S_1^{(1)} + S_2^{(1)}. \end{aligned}$$

As equações estruturais (3.5.2) se tornam

$$\left\{ \begin{array}{l} d\theta = c(\theta \wedge \theta) - \eta \wedge \theta \\ d\eta = R(\theta \wedge \theta) + S(\theta \wedge \eta) - \eta \wedge \eta - \eta^{(1)} \wedge \theta \\ d\eta^{(1)} = R_1^{(1)}(\theta \wedge \theta) + R_2^{(1)}(\theta \wedge \eta) + R_3^{(1)}(\eta \wedge \eta) + \\ \quad + S_1^{(1)}(\theta \wedge \eta^{(1)}) + S_2^{(1)}(\eta \wedge \eta^{(1)}). \end{array} \right. \quad (3.5.3)$$

O Problema de Classificação de Correferenciais

Este capítulo começa com uma introdução ao problema de equivalência para correferenciais, que será baseada na apresentação de [33] e [27]. A análise das condições necessárias para resolver este problema nos levará naturalmente a considerar o problema de realização de Cartan. Para resolver esta questão, iremos definir a forma de Maurer-Cartan em grupóides de Lie, e deduzir suas propriedades universais. Com isto, será possível obter uma classificação de todas as soluções de um problema de realização de Cartan. Em seguida, iremos descrever as simetrias de uma realização, conforme apresentado no apêndice de [5]. Finalmente, resolveremos o problema de globalização e discutiremos o problema de equivalência global.

4.1 Equivalência de Correferenciais

Um correferencial numa variedade n -dimensional M é um conjunto $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ de 1-formas linearmente independentes em M . Apesar de não discutirmos aqui, existem obstruções topológicas bem conhecidas para a existência de um correferencial global numa variedade. Apresentaremos, no entanto, alguns resultados sobre o problema de equivalência global de correferenciais.

Sejam \bar{M} outra variedade de dimensão n e $\{\bar{\theta}^i\}$ um correferencial em \bar{M} . Utilizaremos letras sem barras para denotar objetos em M e com barras para denotar objetos em \bar{M} . Um dos problemas centrais que estaremos interessados é o problema de equivalência:

Problema 4.1.1 (Problema de Equivalência) *Existe um difeomorfismo (localmente definido)*

$$\phi : M \rightarrow \bar{M}$$

tal que

$$\phi^* \bar{\theta}^i = \theta^i ?$$

Apresentamos agora algumas condições necessárias para a equivalência de correferenciais. Conforme discutido no exemplo da introdução, as equações estruturais (1.1.1)

$$d\theta^k = \sum_{i < j} C_{ij}^k(m) \theta^i \wedge \theta^j$$

e as funções estruturais $C_{ij}^k \in C^\infty(M)$ cumprem um papel fundamental na solução deste problema. Por exemplo, já que um correferencial $\bar{\theta}$ equivalente a θ satisfaz

$$\bar{C}_{ij}^k(\phi(m)) = C_{ij}^k(m),$$

segue que as funções estruturais podem ser usadas para obter um conjunto de condições necessárias para resolver o problema de equivalência. Tais funções são exemplos de funções invariantes, onde:

Definição 4.1.2 Uma função $I \in C^\infty(M)$ é chamada de **função invariante do correferencial** $\{\theta^i\}$ se para qualquer auto equivalência (simetria) $\phi : M \rightarrow M$ temos que

$$I \circ \phi = I.$$

Note agora, que para qualquer função $f \in C^\infty(M)$, podemos definir suas derivadas correferenciais $\frac{\partial f}{\partial \theta^k}$ como sendo os coeficientes da diferencial de f quando a expressamos em termos do correferencial $\{\theta^i\}$,

$$df = \sum_k \frac{\partial f}{\partial \theta^k} \theta^k.$$

Usando o fato que $d\phi^* = \phi^*d$, segue que se $I \in C^\infty(M)$ é uma função invariante, então $\frac{\partial I}{\partial \theta^k}$ também é invariante, para todo $1 \leq k \leq n$. É, portanto, natural considerarmos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &= \{C_{ij}^k\} \\ \mathcal{F}_1 &= \left\{ C_{ij}^k, \frac{\partial C_{ij}^k}{\partial \theta^l} \right\} \\ &\vdots \\ \mathcal{F}_t &= \left\{ C_{ij}^k, \frac{\partial C_{ij}^k}{\partial \theta^l}, \dots, \frac{\partial^s C_{ij}^k}{\partial \theta^{l_1} \dots \partial \theta^{l_t}} \right\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

que fornecem condições necessárias para resolver um problema de equivalência. Esquemáticamente, podemos escrever

$$\phi^* \bar{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t$$

para todo $t \geq 0$.

Para que se possa obter critérios efetivos para decidir se dois correferenciais são equivalentes, é necessário reduzir este conjunto infinito de condições necessárias a uma quantidade finita. Para tal, notamos que nem todos os elementos de \mathcal{F}_t são funcionalmente independentes, i.e., podemos encontrar elementos f_1, \dots, f_l em \mathcal{F}_t tais que existe um função $H : \mathbb{R}^{l-1} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

$$f_l = H(f_1, \dots, f_{l-1}).$$

Localmente, numa vizinhança de um ponto $m \in M$, as funções f_1, \dots, f_l são funcionalmente independentes se e somente se suas diferenciais são linearmente independentes em m .

Agora, observe que se $\{\theta^i\}$ e $\{\bar{\theta}^i\}$ são correferenciais equivalentes, e se $f_l = H(f_1, \dots, f_{l-1})$ então os elementos correspondentes $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_l$ em $\bar{\mathcal{F}}_t$ com os mesmos índices necessariamente satisfazem a mesma relação funcional

$$\bar{f}_l = H(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{l-1})$$

com a mesma função H . Isto mostra que não precisamos lidar com todas as funções invariantes em \mathcal{F}_t , mas somente com as que são independentes.

Para que possamos tornar isto mais preciso, e para podermos trabalhar com alguma generalidade, iremos impor uma hipótese de regularidade. Para tal, seja $\mathcal{C} \subset C^\infty(M)$ um conjunto qualquer de funções em M . Definimos:

Definição 4.1.3 O posto de \mathcal{C} em $m \in M$, denotado por $r_m(\mathcal{C})$, é a dimensão do espaço vetorial gerado por $\{df_m : f \in \mathcal{C}\}$. \mathcal{C} é dito regular em m se $r_{m'}(\mathcal{C}) = r_m(\mathcal{C})$ para todo m' próximo de m em M .

Quando \mathcal{C} é regular de posto k em m , segue do teorema da função implícita que podemos encontrar um sistema de coordenadas (m^1, \dots, m^n) numa vizinhança de m tal que

$$m^1 = f^1, \dots, m^k = f^k,$$

e tal que toda $f \in \mathcal{C}$ pode ser escrita nestas coordenadas como

$$f = f(m^1, \dots, m^k).$$

Definição 4.1.4 Um correferencial θ será dito **completamente regular** em $m \in M$ se, para todo $t \geq 0$, os conjuntos \mathcal{F}_t forem regulares em m .

Observamos que o conjunto dos pontos de M nos quais um correferencial é completamente regular formam um aberto denso. Agora, definimos

$$k_t(m) = r_m(\mathcal{F}_t).$$

Como $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$ para todo t , segue que

$$0 \leq k_0(m) \leq k_1(m) \leq \dots \leq k_t(m) \leq \dots \leq n.$$

Finalmente, não é difícil verificar ([27] ou [33]) que se $\{\theta^i\}$ é completamente regular em m , então existe um número inteiro s tal que

$$k_{s-1}(m) < k_s(m)$$

e

$$k_s(m) = k_{s+1}(m) = k_{s+2}(m) = \dots$$

O número s será chamado de **ordem** de θ em m e $k_s(m)$ de **posto** de θ em m .

Para correferenciais que são completamente regulares podemos reduzir as condições necessárias para equivalência local a um número finito. Suponha que θ é um correferencial completamente regular em m , de ordem s e posto d . Neste caso, podemos encontrar

um conjunto $\{h_1, \dots, h_d\}$ de funções invariantes pertencentes à \mathcal{F}_s que 'geram' \mathcal{F}_t numa vizinhança de m , para todo $t \geq 0$. Se $\bar{\theta}$ é outro correferencial completamente regular que é localmente equivalente à θ em m através de $\phi : M \rightarrow \bar{M}$, então é claro que $\bar{\theta}$ tem ordem s e posto d em $\bar{m} = \phi(m)$. Além disso, o conjunto $\{\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_d\}$ de funções invariantes pertencentes à $\bar{\mathcal{F}}_s$ com os índices correspondentes também 'geram' $\bar{\mathcal{F}}_t$ numa vizinhança de \bar{m} , para todo $t \geq 0$. Finalmente, se

$$h_i(m) = \bar{h}_i(\phi(m))$$

então

$$\phi^* \bar{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t \quad (4.1.1)$$

para todo $t \geq 0$.

Podemos resumir todos os dados relevantes ao problema de equivalência local de correferenciais completamente regulares de ordem s e posto d , numa vizinhança de um ponto, da seguinte maneira conveniente. Para começar, temos um conjunto de funções invariantes que determinam uma aplicação

$$\begin{aligned} h : M &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ h(m) &= (h_1(m), \dots, h_d(m)) \end{aligned}$$

Como as funções $\{h_i\}$ são independentes e geram \mathcal{F}_t para todo $t \geq 0$ (em particular, geram também \mathcal{F}_0), podemos ver h_1, \dots, h_d como coordenadas num subconjunto aberto $X \subset \mathbb{R}^d$. Assim, as funções estruturais podem ser encaradas como $C_{ij}^k \in C^\infty(X)$. Por fim, se diferenciarmos as funções h_a obtemos

$$dh_a = \sum_i F_i^a \theta^i. \quad (4.1.2)$$

Novamente, pela mesma razão, as funções F_i^a podem ser vistas como elementos de $C^\infty(X)$. Estas funções estão todas relacionadas por

$$d\theta^k = \sum_{i < j} C_{ij}^k(h) \theta^i \wedge \theta^j \quad (4.1.3)$$

$$dh_a = \sum_i F_i^a(h) \theta^i. \quad (4.1.4)$$

Obtemos assim, os dados iniciais de um problema de realização de Cartan 4.2.1 que descreveremos em detalhes na próxima seção.

4.2 O Problema de Realização de Cartan e Equivalência Global

No problema de realização de Cartan, somos dados um conjunto de funções e queremos determinar quais são todos os correferenciais que têm estas funções como suas funções estruturais. De forma mais precisa,

Problema 4.2.1 (Problema de Realização de Cartan) Dados:

- um número inteiro $n \in \mathbb{N}$,
- um conjunto aberto $X \subset \mathbb{R}^d$,
- um conjunto de funções $C_{ij}^k \in C^\infty(X)$ com índices $1 \leq i, j, k \leq n$,
- um conjunto de funções $F_i^a \in C^\infty(X)$ com $1 \leq a \leq d$;

existe

- um variedade n -dimensional M ,
- um correferencial $\{\theta^i\}$ em M ,
- uma aplicação $h : M \rightarrow X$

tais que

$$d\theta^k = \sum_{i < j} C_{ij}^k(h(m))\theta^i \wedge \theta^j \quad (4.2.1)$$

$$dh^a = \sum_i F_i^a(h(m))\theta^i \quad (4.2.2)$$

Este problema foi proposto e resolvido por Cartan em in [9]. A exposição do problema que apresentamos aqui foi inspirada no apêndice de [5].

Estaremos interessados em responder também às seguintes perguntas:

Problema de Classificação Local Quais são todos os germes de correferenciais que solucionam o problema de realização?

Problema de Equivalência Local Quando que dois destes germes de correferenciais são equivalentes?

Problema de Globalização Quando que dois destes germes de correferenciais podem ser realizados pelo mesmo correferencial global?

Existe também um problema de classificação global que podemos tratar depois de resolver o problema de realização de Cartan. Antes de enuncia-lo, definimos:

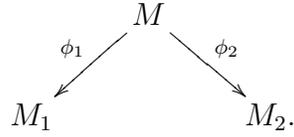
Definição 4.2.2 Sejam (M_1, θ_1, h_1) e (M_2, θ_2, h_2) duas realizações de (n, X, C_{ij}^k, F_i^a) .

- Um **morfismo de realizações** é um difeomorfismo local $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ tal que $\phi^*\theta_2 = \theta_1$ (em particular, $h_2 \circ \phi = h_1$).
- Uma **aplicação de recobrimento de realizações** é um morfismo de realizações sobrejetivo $\phi : (M_1, \theta_1, h_1) \rightarrow (M_2, \theta_2, h_2)$. Neste caso, dizemos que M_1 é um **recobrimento de realizações** de M_2 .

Se (M, θ, h) é uma realização e $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ uma aplicação de recobrimento (usual), então $(\tilde{M}, \pi^*\theta, h \circ \pi)$ também é uma realização, que será chamada de **realização induzida**. Com esta estrutura, a aplicação de recobrimento π é um morfismo de realizações.

As dificuldades em enunciar e resolver o problema de equivalência global se devem ao fato de que os invariantes que podemos construir não distinguem entre uma realização e a realização induzida no seu recobrimento universal. Portanto, para lidarmos com questões globais, definimos:

Definição 4.2.3 Sejam (M_1, θ_1, h) e (M_2, θ_2, h_2) realizações de um problema de Cartan. Diremos que M_1 e M_2 são **globalmente equivalentes, a menos de recobrimento**, se elas têm uma cobertura de realizações em comum M , i.e., se existir um realização (M, θ, h) e morfismos de realizações sobrejetivos



Obtemos assim:

Problema 4.2.4 (Problema de Classificação Global) Dado um problema de realização de Cartan, quais são todas as suas soluções a menos de equivalência global, a menos de recobrimento?

O restante deste capítulo é dedicado à solução das questões propostas nesta seção, bem como a análise de suas consequências.

4.3 Condições Necessárias para a Existência de Soluções

Usando o fato que $d^2 = 0$, podemos obter condições necessárias óbvias para a existência de soluções de um problema de realização. De fato, temos a seguinte proposição:

Proposição 4.3.1 Para que um problema de realização de Cartan tenha solução é necessário que $-C_{ij}^k, F_i^a \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ sejam as funções estruturais de um algebróide de Lie A sobre X .

Demonstração. Diferenciando as equações (4.2.1) e (4.2.2), e igualando-as a zero, obtemos

$$\sum_{b=1}^d \left(F_i^b \frac{\partial F_j^a}{\partial x_b} - F_j^b \frac{\partial F_i^a}{\partial x_b} \right) = - \sum_{l=1}^r C_{ij}^l F_l^a \quad (4.3.1)$$

para todo $1 \leq i, j \leq r, 1 \leq a \leq d$ e

$$- \sum_{b=1}^d \left(F_j^b \frac{\partial C_{kl}^i}{\partial x_b} + F_k^b \frac{\partial C_{lj}^i}{\partial x_b} + F_l^b \frac{\partial C_{jk}^i}{\partial x_b} \right) = \sum_{m=1}^r (C_{mj}^i C_{kl}^m + C_{mk}^i C_{lj}^m + C_{ml}^i C_{jk}^m) \quad (4.3.2)$$

para todo $1 \leq i, j, k, l \leq r$. Note que, a menos de um sinal, estas são exatamente as equações diferenciais (2.1.3) e (2.1.4) que definem um algebróide de Lie em termos de coordenadas locais, de onde segue a proposição. ■

Definição 4.3.2 O algebróide de Lie construído a partir dos dados iniciais de um problema de realização de Cartan será chamado de **algebróide classificante** do problema.

A recíproca desta proposição também vale, mas antes de nos aprofundarmos em sua demonstração, iremos apresentar um exemplo que servirá de inspiração para o resultado mais geral.

Exemplo 4.3.3 Suponha que $X = \{pt\}$, i.e., $d = 0$. Neste caso, as funções C_{ij}^k são todas constantes e as $F_i^a \equiv 0$. As condições necessárias obtidas para a existência de uma realização são que as constantes $-C_{ij}^k$ formam as constantes de estrutura de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} . Uma solução óbvia ao problema de realização é obtida tomando o correferencial dado pela forma de Maurer-Cartan invariante à direita, ω_{MC} , em qualquer grupo de Lie G que integra \mathfrak{g} . Além do mais, a propriedade universal das formas de Maurer-Cartan implica que qualquer outra realização é obtida, localmente, tomando pullback de ω_{MC} . Em outras palavras, este problema de realização tem (localmente) somente uma solução a menos de equivalência.

4.4 Formas de Maurer-Cartan

Para estendermos o exemplo acima para o caso geral, iremos generalizar a equação de Maurer-Cartan usual, para formas com valores numa álgebra de Lie, ao caso de formas com valores num algebróide de Lie. Para começar, definimos as forma de Maurer-Cartan num grupóide de Lie.

Seja \mathcal{F} uma folheação em M . Uma k -**forma \mathcal{F} -folheada em M** é uma seção de $\wedge^k(T\mathcal{F})^*$, i.e., é uma k -forma em M que só está definida para campos de vetores que são tangentes à folheação.

Definição 4.4.1 Uma **1-forma \mathcal{F} -folheada em M com valores num algebróide de Lie $A \rightarrow X$** é uma aplicação de fibrados

$$\begin{array}{ccc} T\mathcal{F} & \xrightarrow{\theta} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{h} & X \end{array} \quad (4.4.1)$$

que é compatível com as âncoras, i.e., tal que $\# \circ \theta(\xi) = h_*\xi$ para todo $\xi \in \mathfrak{X}(\mathcal{F}) = \Gamma(T\mathcal{F})$.

Em cada grupóide de Lie, podemos definir de maneira canônica uma 1-forma s -folheada com valores no seu algebróide de Lie (que cobre a aplicação t):

Definição 4.4.2 A **forma de Maurer-Cartan de um grupóide de Lie \mathcal{G}** é a 1-forma s -folheada com valores no seu algebróide de Lie A

$$\begin{array}{ccc} T^s\mathcal{G} & \xrightarrow{\omega_{MC}} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{t} & X \end{array}$$

definida por

$$\omega_{MC}(\xi) = (dR_{g^{-1}})_g(\xi) \in A_{t(g)} \quad (4.4.2)$$

para todo $\xi \in T_g^s\mathcal{G}$.

Seja \mathcal{G} um grupóide de Lie. Como a translação à direita por um elemento $g \in \mathcal{G}$ é uma aplicação

$$R_g : \mathfrak{s}^{-1}(\mathfrak{t}(g)) \rightarrow \mathfrak{s}^{-1}(\mathfrak{s}(g)), \quad (4.4.3)$$

não faz sentido chamar uma forma em \mathcal{G} de invariante à direita. Precisamos nos restringir à formas \mathfrak{s} -folheadas.

Diremos que uma forma \mathfrak{s} -folheada ω em \mathcal{G} é **invariante à direita** se

$$\omega(\xi) = \omega((R_g)_*(\xi)) \quad (4.4.4)$$

para todo ξ tangente à uma \mathfrak{s} -fibra e $g \in \mathcal{G}$. Equivalentemente, escreveremos

$$(R_g)^*\omega = \omega. \quad (4.4.5)$$

Claramente, a forma de Maurer-Cartan num grupóide de Lie é invariante à direita.

Definiremos agora a equação de Maurer-Cartan generalizada para formas \mathcal{F} -folheadas com valores num algebróide de Lie. Já que não existe uma maneira canônica de diferenciar formas com valores num fibrado vetorial, precisamos fixar uma conexão arbitrária ∇ no fibrado vetorial $A \rightarrow X$. Seja $\theta \in \Omega_{\text{fol}}^1(M; A)$ uma 1-forma folheada com valores em A . Para $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{X}(F)$ definimos $d_{\nabla}\theta(\xi_1, \xi_2)$ como sendo a seção de $\Gamma(h^*A)$ dada por

$$d_{\nabla}\theta(\xi_1, \xi_2) = \nabla_{\xi_1}\theta(\xi_2) - \nabla_{\xi_2}\theta(\xi_1) - \theta([\xi_1, \xi_2]) \quad (4.4.6)$$

onde continuamos a denotar por ∇ a conexão pullback em h^*A . Neste ponto, o leitor deve ser avisado que $d_{\nabla}^2 \neq 0$, e portanto, d_{∇} não é um operador diferencial exterior.

O próximo passo é o de fazer sentido da expressão $[\theta, \phi]$, onde $\phi : TM \rightarrow A$ é outra 1-forma folheada com valores em A que cobre a mesma aplicação h . Antes disso, para motivar a nossa definição, apresentamos o seguinte exemplo:

Exemplo 4.4.3 Lembre que se ∇ é uma conexão num algebróide de Lie $A \rightarrow X$, podemos definir a sua torção por

$$T_{\nabla}(\alpha, \beta) = \nabla_{\#\alpha}\beta - \nabla_{\#\beta}\alpha - [\alpha, \beta].$$

Agora suponha que \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie, vista como um algebróide de Lie sobre um ponto. Seja ∇ a conexão trivial, identicamente nula, em \mathfrak{g} . Neste caso, obtemos

$$[\alpha, \beta]_{\mathfrak{g}} = -T_{\nabla}(\alpha, \beta),$$

para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}$.

Assim, fica natural que seja definido

$$[\theta, \phi]_{\nabla}(\xi_1, \xi_2) = -(T_{\nabla}(\theta(\xi_1), \phi(\xi_2)) + T_{\nabla}(\phi(\xi_1), \theta(\xi_2))) \quad (4.4.7)$$

onde T_{∇} é a torção da conexão pullback ∇ , como foi descrita em (2.1.7).

Definição 4.4.4 A equação de Maurer-Cartan generalizada para 1-formas folheadas (θ, h) com valores num algebróide de Lie é

$$d_{\nabla}\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta]_{\nabla} = 0. \quad (4.4.8)$$

Como esta equação é simplesmente $R_\theta \equiv 0$ (equação (2.1.9)) obtemos:

Proposição 4.4.5 *A equação de Maurer-Cartan generalizada é independente da escolha da conexão ∇ . Além do mais, uma 1-forma \mathcal{F} -folheada (θ, h) com valores em A satisfaz a equação de Maurer-Cartan generalizada se e somente se ela é um morfismo de algebróides de Lie $T\mathcal{F} \rightarrow A$.*

Como é de se esperar, temos a seguinte proposição:

Proposição 4.4.6 *A forma de Maurer-Cartan ω_{MC} de \mathcal{G} satisfaz a equação de Maurer-Cartan generalizada.*

Demonstração. *A proposição é uma consequência da seguinte conta:*

$$\begin{aligned} d_\nabla \omega_{MC}(\xi_1, \xi_2) &= \nabla_{\mathfrak{t}^* \xi_1} \omega_{MC}(\xi_2) - \nabla_{\mathfrak{t}^* \xi_2} \omega_{MC}(\xi_1) - \omega_{MC}([\xi_1, \xi_2]) \\ &= \nabla_{\# \alpha} \beta - \nabla_{\# \beta} \alpha - [\alpha, \beta] \\ &= T_\nabla(\alpha, \beta) \\ &= T_\nabla(\omega_{MC}(\xi_1), \omega_{MC}(\xi_2)) \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

onde ξ_1 e ξ_2 são campos de vetores invariantes à direita em \mathcal{G} , e $\alpha, \beta \in \Gamma(A)$ são seus geradores. ■

4.5 A Propriedade Universal Local

Mostraremos agora que qualquer 1-forma numa variedade M com valores num algebróide de Lie integrável A , que satisfaz a equação de Maurer-Cartan generalizada é localmente o pullback da forma de Maurer-Cartan num grupóide de Lie que integra A . Precisaremos do seguinte lema:

Lema 4.5.1 *Seja \mathcal{F} uma folheação numa variedade M e seja Ω uma 1-forma \mathcal{F} -folheada (sobre h) em M com valores num algebróide de Lie $A \rightarrow X$. Seja ∇ uma conexão arbitrária em A . Suponha que a distribuição $\mathcal{D} = \{\ker \Omega_x : x \in M\} \subset T\mathcal{F} \subset TM$ tem posto constante. Então \mathcal{D} é integrável se e somente se $d_\nabla \Omega(\xi_1, \xi_2) = 0$ sempre que $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{D}$.*

Demonstração. *Escolha uma base local $\xi_1, \dots, \xi_r \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$ de \mathcal{D} num subconjunto aberto de M . Pelo Teorema de Frobenius, \mathcal{D} é integrável se e somente se $[\xi_i, \xi_j] \in \text{span}\{\xi_1, \dots, \xi_r\}$ para todo $1 \leq i, j \leq r$, o que ocorre se e somente se $\Omega([\xi_i, \xi_j]) = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq r$. Como $\Omega(\xi_i) = 0$ para todo $1 \leq i \leq r$ temos*

$$d_\nabla \Omega(\xi_i, \xi_j) = \bar{\nabla}_{\xi_i} \Omega(\xi_j) - \bar{\nabla}_{\xi_j} \Omega(\xi_i) - \Omega([\xi_i, \xi_j]) = -\Omega([\xi_i, \xi_j]) \quad (4.5.1)$$

de onde segue o lema. ■

Proposição 4.5.2 *Seja θ uma 1-forma (sobre h) numa variedade M com valores num algebróide de Lie integrável $A \rightarrow X$. Seja \mathcal{G} um grupóide de Lie que integra A e denote por ω_{MC} a sua forma de Maurer-Cartan. Suponha que θ satisfaz a equação de Maurer-Cartan generalizada. Então, para cada $m \in M$ e $g \in \mathcal{G}$ tal que $h(m) = \mathfrak{t}(g)$, existe um*

único difeomorfismo localmente definido (numa vizinhança de m) $\phi : M \rightarrow \mathfrak{s}^{-1}(\mathfrak{s}(g))$ que satisfaz

$$\phi(m) = g \quad (4.5.2)$$

e

$$\phi^* \omega_{MC} = \theta. \quad (4.5.3)$$

Observação 4.5.3 Podemos resumir a proposição acima dizendo que, pelo menos localmente, existe uma única aplicação $\phi : M \rightarrow \mathcal{G}$ que faz comutar o seguinte diagrama de morfismos de algebróides de Lie:

$$\begin{array}{ccc}
 TM & \overset{\phi_*}{\dashrightarrow} & T\mathfrak{s}\mathcal{G} \\
 \downarrow & \searrow \theta & \swarrow \omega_{MC} \\
 & A & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M & \overset{\phi}{\dashrightarrow} & \mathcal{G} \\
 \downarrow h & & \downarrow \mathfrak{t} \\
 & X &
 \end{array}$$

Demonstração. Para demonstrar a proposição iremos construir o gráfico de ϕ . Isto será feito integrando uma distribuição conveniente. A unicidade então segue da unicidade das subvariedades integrais.

Denote por $M \times_{h,\mathfrak{t}} \mathcal{G} = \{(m, g) \in M \times \mathcal{G} : h(m) = \mathfrak{t}(g)\}$ o produto fibrado sobre X (que é uma variedade porque \mathfrak{t} é uma submersão sobrejetiva. Seja \mathcal{F} a folheação em $M \times_{h,\mathfrak{t}} \mathcal{G}$ dada pelas fibras de $\mathfrak{s} \circ \pi_{\mathcal{G}}$. Considere a foma \mathcal{F} -folheada em $M \times_{h,\mathfrak{t}} \mathcal{G}$ com valores em A dada por

$$\Omega = \pi_M^* \theta - \pi_{\mathcal{G}}^* \omega_{MC}. \quad (4.5.4)$$

Finalmente, denote por $\mathcal{D} = \ker \Omega$ a distribuição associada em $M \times_{h,\mathfrak{s}} \mathcal{G}$.

Para podermos aplicar o lema anterior, precisamos mostrar que \mathcal{D} tem posto constante. Faremos isto mostrando que

$$(\mathrm{d}\pi_M)_{(m,g)}|_{\mathcal{D}_{(m,g)}} : \mathcal{D}_{(m,g)} \rightarrow T_m M \quad (4.5.5)$$

é um isomorfismo, para cada $(m, g) \in M \times_{h,\mathfrak{t}} \mathcal{G}$. Note que isto também implica que se \mathcal{D} é integrável, então a folha passando por (m, g) é localmente o gráfico de um difeomorfismo (localmente definido) de M na \mathfrak{s} -fibra de \mathcal{G} que contém g .

Suponha que $(\mathrm{d}\pi_M)_{(m,g)}(v, w) = 0$ para algum $(v, w) \in \mathcal{D}_{(m,g)}$. Como \mathcal{D} está contido em $T\mathcal{F}$, segue que w é \mathfrak{s} -vertical e que $\omega_{MC}(w)$ é simplesmente a translação à direita de w à $\mathbf{1}_{\mathfrak{t}(g)}$, logo,

$$\begin{aligned}
 (\mathrm{d}\pi_M)_{(m,g)}(v, w) = 0 & \implies v = 0 \\
 & \implies \omega_{MC}(w) = 0 \quad (= \theta(v)) \\
 & \implies w = 0 \\
 & \implies (v, w) = 0
 \end{aligned}$$

e portanto $(\mathrm{d}\pi_M)_{(m,g)}$ é injetora. Agora, se $v \in T_m M$ então $(v, (R_g)_* \theta(v))$ é um elemento de $\mathcal{D}_{(m,g)}$. Segue que $(\mathrm{d}\pi_M)_{(m,g)}$ é também sobrejetora.

Tendo mostrado isto, podemos utilizar o lema para completar a demonstração. Calculamos (omitindo os pullbacks para simplificar a notação):

$$\begin{aligned} d_{\nabla}\Omega &= d_{\nabla}\theta - d_{\nabla}\omega_{MC} \\ &= -\frac{1}{2}[\theta, \theta] + \frac{1}{2}[\omega_{MC}, \omega_{MC}]. \end{aligned}$$

Substituindo θ por $\Omega + \omega_{MC}$ obtemos

$$\begin{aligned} d_{\nabla}\Omega &= -\frac{1}{2}[\Omega + \omega_{MC}, \Omega + \omega_{MC}] + \frac{1}{2}[\omega_{MC}, \omega_{MC}] \\ &= -\frac{1}{2}[\Omega, \Omega] - \frac{1}{2}[\Omega, \omega_{MC}] - \frac{1}{2}[\omega_{MC}, \Omega]. \end{aligned}$$

Logo, $d_{\nabla}\Omega(\xi_1, \xi_2) = 0$ sempre que $\Omega(\xi_1) = 0 = \Omega(\xi_2)$ e portanto \mathcal{D} é integrável, o que conclui a demonstração. ■

Observação 4.5.4 Com uma pequena modificação, a proposição continua válida mesmo quando A não é integrável. De fato, como uma forma de Maurer-Cartan em M com valores em A

$$(\theta, h) \in \Omega^1(M, A)$$

é o mesmo que um morfismo de algebróides de Lie

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\theta} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

segue que $h(M)$ está contido numa única órbita de A em X . Se restringirmos h à uma vizinhança suficientemente pequena, podemos assumir que sua imagem é um aberto contrátil $U \subset L$ de uma folha L de A em X . Neste caso, a restrição de A à U é integrável (veja o Corolário 2.3.7 ou [12]) e podemos proceder como na demonstração da proposição.

Como consequência da proposição obtemos o seguinte corolário que nos será útil:

Corolário 4.5.5 Seja \mathcal{G} um grupóide de Lie com forma de Maurer-Cartan ω_{MC} . Se $\phi : \mathfrak{s}^{-1}(x) \rightarrow \mathfrak{s}^{-1}(y)$ é uma simetria de ω_{MC} (i.e., $\phi^*\omega_{MC} = \omega_{MC}$) então x e y pertencem a mesma órbita de \mathcal{G} e ϕ é localmente da forma $\phi = R_g$ para algum $g \in \mathcal{G}$.

Demonstração. Tudo que precisamos mostrar é que x e y pertencem a mesma órbita de \mathcal{G} , pois neste caso o corolário segue da unicidade na Proposição 4.5.2. Para tal, note que $(\omega_{MC})_{1_x}$ toma valores em A_x . Por outro lado, $(\phi^*\omega_{MC})_{1_x}$ toma valores em $A_{\mathfrak{t}(\phi(1_x))}$. Como $\phi^*\omega_{MC} = \omega_{MC}$, segue que $x = \mathfrak{t}(\phi(1_x))$ e portanto $\phi(1_x)$ é uma seta ligando y à x . ■

4.6 A Propriedade Universal Global

Podemos dar uma demonstração mais conceitual da Proposição 4.5.2 que nos levará a uma versão global da propriedade universal das formas de Maurer-Cartan com valores em algebróides de Lie. Como a proposição acima é um resultado local, podemos supor, por um momento, que M é simplesmente conexo. Neste caso, o grupóide de Lie s -simplesmente conexo que integra TM é o grupóide do par $M \times M \rightrightarrows M$.

Pelo segundo teorema de Lie (Proposição 2.3.2), existe um único morfismo de grupóides de Lie

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \xrightarrow{H} & \mathcal{G} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ M & \xrightarrow{h} & X \end{array} \quad (4.6.1)$$

que integra θ . No entanto, depois de fixar um ponto m_0 em M , podemos escrever

$$H(m, m') = \phi(m)\phi(m')^{-1} \quad (4.6.2)$$

onde $\phi : M \rightarrow \mathfrak{s}^{-1}(h(m_0)) \subset \mathcal{G}$ é definido por

$$\phi(m) = H(m, m_0). \quad (4.6.3)$$

Mas neste caso, ϕ satisfaz

$$\phi(m_0) = \mathbf{1}_{h(m_0)} \quad (4.6.4)$$

$$\phi^*\omega_{MC} = \theta. \quad (4.6.5)$$

No caso geral, quando M não é simplesmente conexo, o morfismo de algebróides de Lie θ é integrado por um morfismo de grupóides de Lie

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(M) & \xrightarrow{F} & \mathcal{G} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ M & \xrightarrow{h} & X \end{array} \quad (4.6.6)$$

onde $\Pi_1(M)$ denota o grupóide fundamental de M . Como veremos a seguir, o problema de determinar quando θ é globalmente o pullback da forma de Maurer-Cartan num grupóide de Lie \mathcal{G} que integra A se reduz ao problema de determinar quando o morfismo F pode ser fatorado pelo recobrimento de grupóides de Lie

$$\begin{aligned} p : \Pi_1(M) &\rightarrow M \times M \\ p([\gamma]) &= (\gamma(1), \gamma(0)). \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

Teorema 4.6.1 *Seja A um algebróide de Lie integrável com grupóide de Lie s -simplesmente conexo $\mathcal{G}(A)$ e seja $(\theta, h) \in \Omega^1(M, A)$ uma 1-forma em M com valores em A . Então, existe um difeomorfismo local globalmente definido*

$$\phi : M \rightarrow \mathfrak{s}^{-1}(h(m_0))$$

satisfazendo

$$\begin{cases} \phi(m_0) = \mathbf{1}_{h(m_0)} \\ \phi^*\omega_{MC} = \theta \end{cases} \quad (4.6.8)$$

se e somente se

1. (obstrução local) θ satisfaz a equação de Maurer-Cartan generalizada;
2. (obstrução global) o morfismo de grupóides de Lie F que integra θ é trivial quando restrito ao grupo fundamental de M com ponto base m_0 , isto é, o grupo de isotropia em m_0 .

Demonstração. Para começar, mostraremos que ambas as condições são necessárias. Se $\theta = \phi^* \omega_{MC}$ então é claro que θ satisfaz a equação de Maurer-Cartan generalizada. Logo, tudo o que precisamos mostrar é que F é trivial quando restrito ao grupo de isotropia $\pi_1(M, m_0)$. Suponha que existe ϕ . Então, a aplicação

$$H : M \times M \rightarrow \mathcal{G} \quad (4.6.9)$$

dada por

$$H(m, m') = \phi(m)\phi(m')^{-1}.$$

define um morfismo de grupóides de Lie sobre $\mathfrak{t} \circ \phi$.

Segue de $\phi^* \omega_{MC} = \theta$ que $\mathfrak{t} \circ \phi = h$ e que H integra θ . De fato, note que se f e g são aplicações de M para \mathcal{G} tais que $\varphi(m, m') = f(m) \cdot g(m')$ está bem definido, então

$$(d\varphi)_{(m, m')}(v, w) = (dL_{f(m)})_{g(m')}(dg)_{m'}(w) + (dR_{g(m')})_{f(m)}(df)_m(v) \quad (4.6.10)$$

para todo $v, w \in T_{(m, m')}(M \times M)$. Portanto, no nosso caso, obtemos

$$\begin{aligned} (dH)_{(m, m)}(0, v) &= (dR_{\phi(m)^{-1}})_{\phi(m)}(d\phi)_m(v) \\ &= \omega_{MC}(\phi_* v) \\ &= \phi^* \omega_{MC}(v) \\ &= \theta(v). \end{aligned} \quad (4.6.11)$$

onde $v \in T_m M$.

Finalmente, como H integra θ , obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(M) & \xrightarrow{F} & \mathcal{G} \\ p \downarrow & \nearrow H & \\ M \times M & & \end{array} \quad (4.6.12)$$

onde p denota o recobrimento de grupóides $p([\gamma]) = (\gamma(1), \gamma(0))$. Assim, F só depende dos pontos inicial e final de γ e não de sua classe de homotopia.

Reciprocamente, suponha que as duas condições sejam satisfeitas. Então, pela Proposição 4.5.2 e a condição (1), segue que θ é localmente o pullback de ω_{MC} por uma aplicação ϕ_{loc} . No entanto, como F só depende dos pontos inicial e final de γ e não de sua classe de homotopia, segue que F pode ser fatorada por

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(M) & \xrightarrow{F} & \mathcal{G} \\ p \downarrow & \dashrightarrow H & \\ M \times M & & \end{array} \quad (4.6.13)$$

Assim, se definirmos

$$\phi(m) = H(m, m_0) \quad (4.6.14)$$

obtemos uma aplicação global, que pelo resultado de unicidade da Proposição 4.5.2, se restringe à aplicação ϕ_{loc} . Segue que $\phi^*\omega_{\text{MC}} = \theta$ e $\phi(m_0) = \mathbf{1}_{h(m_0)}$, o que conclui a demonstração do teorema. ■

Observação 4.6.2 Pelos resultados citados na Seção 2.3, observamos que a obstrução global no teorema acima pode ser expressada infinitesimalmente, i.e., sem fazer menção explícita ao grupóide de Lie \mathcal{G} que integra A . De fato, dada uma curva $\gamma : I \rightarrow M$, o caminho $\theta \circ \dot{\gamma} : I \rightarrow A$ satisfaz

$$\#(\theta \circ \dot{\gamma}(t)) = \frac{d}{dt}(h \circ \gamma)(t) \text{ para todo } t \in I$$

e portanto, é um A -caminho (veja a Definição 2.3.3). Assim, podemos re-escrever a condição como:

- (Obstrução Global) Para cada laço γ em M , homotópico a curva constante em m , o A -caminho $\theta \circ \dot{\gamma}$ é A -homotópico ao A -caminho constante igual a zero em $h(m)$.

Note que esta condição também pode ser expressada em termos de uma equação diferencial. De fato, pelos resultados de [12] podemos descrevê-la como:

- (Obstrução Global) Para todo laço homotopicamente trivial γ em (M, m) , existe uma variação $a_\epsilon(t) = a(\epsilon, t)$ de A -caminhos ligando $a_0 = \theta \circ \dot{\gamma}$ ao caminho constante igual a zero $a_1 = 0_{h(m)}$ tal que a solução $b(\epsilon, t)$ da equação diferencial

$$\partial_t b - \partial_\epsilon a = T_\nabla(a, b), \quad b(\epsilon, 0) = 0$$

satisfaz $b(\epsilon, 1) = 0$ para todo $\epsilon \in I$, onde ∇ é uma conexão arbitrária em A .

4.7 Resolvendo o Problema de Classificação Local

Retornamos agora ao problema de realização de Cartan. Vimos que a condição necessária para resolver o problema de Cartan, obtida por $d^2 = 0$, é que as funções $-C_{ij}^k$ e F_i^a são as funções estruturais de um algebróide de Lie $A \rightarrow X$ escrita em coordenadas x_1, \dots, x_d e seções $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Suponha por um momento que A é integrável, e seja \mathcal{G} um grupóide de Lie que integra A . Denote por ω_{MC} a forma de Maurer-Cartan de \mathcal{G} , e por $(\omega_{\text{MC}}^1, \dots, \omega_{\text{MC}}^n)$ as suas componentes com relação à base $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Então, é claro que para todo $x_0 \in X$, $(s^{-1}(x_0), \omega_{\text{MC}}^i, \mathfrak{t})$ é uma realização do problema de Cartan com dados iniciais (n, X, C_{ij}^k, F_i^a) . Um argumento parecido funciona também no caso em que A não é integrável. Neste caso, para cada $x_0 \in X$, podemos encontrar uma vizinhança $U \subset L$ de x_0 na folha L que contém tal que a restrição de A à U é integrável por um grupóide de Lie $\mathcal{G} \rightrightarrows U$. A forma de Maurer-Cartan de \mathcal{G} toma valores em $A|_U \hookrightarrow A$ e portanto, podemos vê-la como uma forma de Maurer-Cartan com valores em A . Novamente, é claro que $(s^{-1}(x_0), \omega_{\text{MC}}^i, \mathfrak{t})$ é uma realização de (n, X, C_{ij}^k, F_i^a) .

Observe também, que se (M, θ^i, h) é outra realização de (n, X, C_{ij}^k, F_i^a) , então a 1-forma em M com valores em A , $\theta \in \Omega^1(M, A)$, definida por

$$\theta = \sum_i \theta^i(\alpha_i \circ h) \tag{4.7.1}$$

satisfaz a equação de Maurer-Cartan generalizada. Isto é uma consequência da seguinte conta:

$$\begin{aligned}
d_{\nabla}\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i}, \frac{\partial}{\partial\theta^j}\right) &= \bar{\nabla}_{\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i}\right)}\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta^j}\right) - \bar{\nabla}_{\left(\frac{\partial}{\partial\theta^j}\right)}\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i}\right) - \theta\left([\frac{\partial}{\partial\theta^i}, \frac{\partial}{\partial\theta^j}]\right) \\
&= \nabla_{\#\alpha_i}\alpha_j - \nabla_{\#\alpha_j}\alpha_i - [\alpha_i, \alpha_j] \\
&= -T_{\nabla}(\alpha_i, \alpha_j) \\
&= -T_{\nabla}\left(\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i}\right), \theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta^j}\right)\right)
\end{aligned} \tag{4.7.2}$$

onde $\bar{\nabla}$ denota a conexão pullback em h^*A . Assim, se $m_0 \in M$ é tal que $h(m_0) = x_0$, então pela propriedade universal das formas de Maurer-Cartan em grupóides de Lie, podemos encontrar uma vizinhança V de m_0 em M e um único difeomorfismo $\phi : V \rightarrow \phi(V) \subset s^{-1}(x_0)$ tal que $\phi(m_0) = \mathbf{1}_{m_0}$ e $\phi^*\omega_{MC} = \theta$. Ou seja, qualquer realização de um problema de Cartan é localmente equivalente à uma vizinhança da identidade numa s -fibra de \mathcal{G} , equipada com sua forma de Maurer-Cartan. Acabamos então de provar o seguinte resultado de existência e unicidade que soluciona os problemas de classificação e de equivalência local:

Teorema 4.7.1 *Sejam (n, X, C_{ij}^k, F_i^a) os dados iniciais de um problema de realização de Cartan. Então, para todo $x_0 \in X$, existe uma realização (M, θ^i, h) com $m_0 \in M$ tal que $h(m_0) = m_0$ se e somente se*

$$\sum_{b=1}^d \left(F_i^b \frac{\partial F_j^a}{\partial x_b} - F_j^b \frac{\partial F_i^a}{\partial x_b} \right) = - \sum_{l=1}^r C_{ij}^l F_l^a \tag{4.7.3}$$

para todo $1 \leq i, j \leq r, 1 \leq a \leq d$ e

$$\begin{aligned}
\sum_{b=1}^d \left(F_j^b \frac{\partial C_{kl}^i}{\partial x_b} + F_k^b \frac{\partial C_{lj}^i}{\partial x_b} + F_l^b \frac{\partial C_{jk}^i}{\partial x_b} \right) = \\
- \sum_{m=1}^r (C_{mj}^i C_{kl}^m + C_{mk}^i C_{lj}^m + C_{ml}^i C_{jk}^m)
\end{aligned} \tag{4.7.4}$$

para todo $1 \leq i, j, k, l \leq r$.

Além do mais, qualquer realização é localmente equivalente à uma vizinhança da identidade numa s -fibra de um grupóide de Lie \mathcal{G} equipada com a sua forma de Maurer-Cartan. Duas realizações são localmente equivalentes se e somente se elas correspondem ao mesmo ponto $x_0 \in X$, e neste caso, elas diferem por translação à direita por um elemento de \mathcal{G} .

4.8 Simetrias de Realizações

Nesta seção, demonstraremos alguns resultados sobre simetrias de uma realização. Muitos destes resultados se devem ao Cartan [9]. A formulação que apresentamos, no entanto, é baseada em [5]. O objetivo desta seção é mostrar como usar o algebróide classificante para obter demonstrações simples destes fatos.

Definição 4.8.1 Seja (M, θ, h) uma realização de um problema de Cartan. Uma *simetria* de (M, θ, h) é um difeomorfismo $\phi : M \rightarrow M$ tal que $\phi^*\theta = \theta$. Uma *simetria infinitesimal* é um campo de vetores $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\mathcal{L}_\xi\theta = 0$.

Proposição 4.8.2 (Teorema A.2 de [5]) Seja (M, θ, h) uma realização conexa e simplesmente conexa de um problema de Cartan com algebróide classificante $A \rightarrow X$, tal que $h(M)$ está contido na folha L de A . Então, o conjunto $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{X}(M)$ das simetrias infinitesimais da realização é uma álgebra de Lie de dimensão $\dim \mathfrak{s} = \dim M - \dim L$.

Demonstração. Para demonstrar a proposição, iremos mostrar que \mathfrak{s} é isomorfa à álgebra de Lie de isotropia \mathfrak{g}_x de A em algum (e portanto qualquer) ponto $x \in L$.

Para começar, note que um correferencial θ em M determina um par de conexões em TM , que denotaremos por ∇ e $\bar{\nabla}$. A primeira é a conexão plana canônica associada à trivialização de $TM = M \times \mathbb{R}^n$ induzida por θ . A segunda conexão é definida por

$$\bar{\nabla}_{\xi_1}\xi_2 = \nabla_{\xi_2}\xi_1 + [\xi_1, \xi_2].$$

Segue que:

1. a conexão $\bar{\nabla}$ também é plana;
2. um campo de vetores ξ preserva θ^i , para todo $1 \leq i \leq n$ se e somente se ξ é $\bar{\nabla}$ -paralelo, i.e., $\bar{\nabla}_{\xi'}\xi = 0$ para todo $\xi' \in \mathfrak{X}(M)$.

Segue do fato que campos de vetores paralelos só dependem do seu valor em um ponto que \mathfrak{s} tem dimensão finita.

Agora, como um campo de vetores $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ é uma simetria infinitesimal de uma realização se e somente se ξ preserva h , i.e., $h_*(\xi) = 0$, obtemos uma aplicação

$$\psi : \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{g}_x, \quad \psi(\xi) = \theta(\xi(p)),$$

onde $p \in M$ é qualquer ponto tal que $h(p) = x$.

Observe que \mathfrak{s} é fechada pelo colchete de Lie de campos de vetores. De fato, se $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{s}$, então

$$h_*[\xi_1, \xi_2] = \# \circ \theta([\xi_1, \xi_2]) = [\# \circ \theta(\xi_1), \# \circ \theta(\xi_2)] = 0$$

mostra que \mathfrak{s} é uma álgebra de Lie.

Além do mais, como θ é um morfismo de algebróides de Lie, segue que ψ é um homomorfismo de álgebras de Lie. Mostraremos agora que este homomorfismo é um isomorfismo. Para ver que ele é injetivo, observamos que θ é um isomorfismo fibra a fibra, e que se um campo de vetores paralelo se anula em um ponto, então ele se anula identicamente. Logo, $\ker \psi = 0$.

Finalmente, seja α um elemento qualquer de \mathfrak{g}_x . Denote por $\tilde{\alpha} \in \mathfrak{X}(M)$ o campo de vetores em M obtido por translação $\bar{\nabla}$ -paralela ao longo de qualquer curva do vetor $\theta^{-1}(\alpha)$. Isto está bem definido, pois $\bar{\nabla}$ é plana, e M é simplesmente conexa por hipótese. Mas, então é claro que $\psi(\tilde{\alpha}) = \alpha$, o que prova a proposição. ■

Observação 4.8.3 Quando M não é simplesmente conexo, a álgebra de Lie de isotropia \mathfrak{g}_x pode ser identificada com a álgebra de Lie dos germes de campos de vetores em M , num ponto p tal que $h(p) = x$, que preservam o germe de θ em p .

Podemos enunciar também o seguinte resultado semi-global sobre simetrias de uma realização:

Proposição 4.8.4 (Teorema A.3 de [5]) *Sejam (n, X, C_{ij}^k, F_i^a) os dados iniciais de um problema de realização para os quais $-C_{ij}^k, F_i^a$ são as funções de estruturas de um algebróide de Lie $A \rightarrow X$. Seja $L \subset X$ uma folha de A cuja álgebra de Lie de isotropia denotamos por \mathfrak{g} , e seja G um grupo de Lie qualquer com álgebra de Lie \mathfrak{g} .*

Então, sobre qualquer subconjunto aberto e contrátil $U \subset L$, existe um fibrado principal com grupo estrutural G , $h : M \rightarrow U$, e um correferencial G -invariante θ em M tal que (M, θ, h) é uma realização do problema de Cartan. Além do mais, esta realização é localmente única a menos de isomorfismo.

Demonstração. Esta proposição é uma consequência imediata do Teorema de Classificação 4.7.1. De fato, como U é contrátil, e a restrição de A à U é transitivo, segue que $A|_U$ é integrável. Além disso, para qualquer grupo de Lie G com álgebra de Lie \mathfrak{g} , existe um grupóide de Lie \mathcal{G} que integra A cujos grupos de isotropia são isomorfos à G . Segue que a restrição da forma de Maurer-Cartan de \mathcal{G} à qualquer s -fibra fornece o único correferencial G -invariante que estavam a procura. ■

4.9 O Problema de Globalização

Estamos agora aptos a resolver o problema de globalização. Suponha que sejam dados dois germes de correferenciais θ_0 e θ_1 que solucionam um problema de realização, e queremos saber se eles são os germes de uma mesma realização global. Temos o seguinte resultado:

Teorema 4.9.1 *Suponha que o algebróide classificante, A , do problema de Cartan é integrável. Então θ_0 e θ_1 são os germes de uma mesma realização global conexa (M, θ, h) se e somente se eles correspondem a pontos de X na mesma órbita de A .*

Demonstração. Suponha que os dois germes de correferenciais θ_0 e θ_1 correspondem a pontos x_0 e x_1 na mesma órbita de A e seja \mathcal{G} um grupóide de Lie que integra A . Então, a s -fibra de \mathcal{G} sobre x_0 contém um ponto g com $\mathfrak{t}(g) = x_1$. Logo, θ_0 pode ser identificado com o germe de ω_{MC} em $\mathbf{1}_{x_0}$ e θ_1 com o germe de ω_{MC} em g . Concluimos que θ_0 e θ_1 são ambos germes da realização $(\mathfrak{s}^{-1}(x_0), \omega_{MC}, \mathfrak{t})$.

Reciprocamente, suponha que existe uma realização conexa (M, θ, h) tal que θ_0 e θ_1 são os germes de θ em pontos m_0 e m_1 de M , respectivamente. Seja γ uma curva qualquer que liga m_0 a m_1 e seja U_1, \dots, U_k uma família finita de conjuntos abertos de M que cobrem esta curva, com a propriedade que a restrição de θ à cada U_i é equivalente à restrição da forma de Maurer-Cartan de \mathcal{G} à alguma s -fibra, i.e., $\theta|_{U_i} = \phi_i^* \omega_{MC}$ para algum difeomorfismo $\phi_i : U_i \rightarrow \phi_i(U_i) \subset \mathfrak{s}^{-1}(x_i)$.

A demonstração segue por indução no número de abertos necessários para ligar m_0 a m_1 . Suponha que m_0 e m_1 pertencem ao mesmo aberto U_1 . Neste caso, $\phi_1(m_0)$ e $\phi_1(m_1)$ pertencem a mesma s -fibra. Logo, $h(m_0) = \mathfrak{t} \circ \phi_1(m_0)$ pertence a mesma órbita que $h(m_1) = \mathfrak{t} \circ \phi_1(m_1)$. Agora, assumamos que o resultado vale para $k - 1$ conjuntos abertos. Neste caso, qualquer ponto q de U_{k-1} é mapeado por h para a mesma órbita que $h(m_0)$. Seja q um ponto de $U_{k-1} \cap U_k$. Por um lado, como q e m_1 pertencem a U_k , segue que h

leva os dois pontos na mesma órbita de A . Por outro lado, pela hipótese indutiva, segue que h também leva m_0 e q para a mesma folha de A , o que conclui a demonstração. ■

Observação 4.9.2 *A proposição pode não ser verdade quando A não é integrável. O problema neste caso é que o objeto global associado a A é um grupóide topológico, que só tem estrutura suave numa vizinhança da seção da identidade. Logo, se $x, y \in X$ são pontos da mesma órbita de A que estão 'distantes demais', pode ser que não seja possível encontrar uma realização diferenciável que cobre os dois pontos ao mesmo tempo.*

Motivado por esta observação, é natural considerar o problema de existência de uma realização (M, θ, h) de um problema de Cartan, tal que a imagem de h é uma folha inteira do algebróide de Lie classificante.

Definição 4.9.3 *Uma realização (M, θ, h) é dita **cheia** se h é sobrejetiva sobre a órbita de A que ela cobre.*

Antes de continuarmos, apresentamos o seguinte exemplo:

Exemplo 4.9.4 *Suponha que o algebróide de Lie classificante A é integrável e seja \mathcal{G} um grupóide de Lie qualquer que integra A . Então, as s -fibras de \mathcal{G} com suas formas de Maurer-Cartan são realizações cheias.*

Temos uma recíproca parcial ao exemplo acima; que se existir uma realização completa cobrindo uma órbita L do algebróide classificante, então a restrição $A|_L$ é integrável. Uma situação análoga aparece em [29].

Definição 4.9.5 *Uma realização (M, θ, h) de um problema de Cartan é dita **completa** se ela é uma realização cheia, para a qual todas as simetrias infinitesimais $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ são campos de vetores completos.*

Proposição 4.9.6 *Sejam $A \rightarrow X$ o algebróide classificante de um problema de Cartan, e $L \subset X$ uma folha de A . Então, existe uma realização completa que cobre L se e somente se a restrição $A|_L$ é integrável.*

Demonstração. *Suponha que $A|_L$ é integrado por $\mathcal{G} \rightrightarrows L$. Então, claramente, para qualquer $x \in L$, a realização $(s^{-1}(x), \omega_{MC}, \mathbf{t})$ é completa.*

Reciprocamente, seja (M, θ, h) uma realização completa que cobre L . Pela (demonstração da) Proposição 4.8.2, a álgebra de Lie de simetrias de θ é a álgebra de Lie de isotropia \mathfrak{g} de A num ponto $x \in L$. Agora, como (M, θ, h) é completa, podemos integrar a ação infinitesimal de \mathfrak{g} em M para uma ação de \tilde{G} , onde \tilde{G} denota o grupo de Lie simplesmente conexo com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Mas neste caso,

$$\begin{array}{c} M \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \leftarrow \end{array} \tilde{G} \\ \downarrow h \\ L \end{array}$$

é um fibrado principal. Seu algebróide de Atiyah é isomorfo à $A|_L$. Logo, $A|_L$ pode ser integrado pelo grupóide de calibre de $M \rightarrow L$. ■

4.10 O Problema de Classificação Global

Nesta seção, apresentaremos a solução do problema de classificação global 4.2.4. Ao longo desta seção, (n, X, C_{ij}^k, F_i^a) denotam os dados iniciais de um problema de realização com algebróide de Lie classificante $A \rightarrow X$, e (M, θ, h) denota uma realização.

O problema de classificação global para realizações de um problema de Cartan é muito mais delicado do que o problema local. O motivo disto é que o algebróide classificante não distingue entre uma realização e seus recobrimentos.

Exemplo 4.10.1 *Para ilustrar esta dificuldade, explicamos aqui um exemplo apresentado em [27] (veja também [28]) de uma variedade simplesmente conexa, equipada com uma forma de Maurer-Cartan com valores numa álgebra de Lie, que não pode ser globalmente mergulhada em nenhum grupo de Lie G , mas que é localmente equivalente em todos seus pontos à uma vizinhança da identidade de G .*

Seja $M = \mathbb{R}^2 - \{(-1, 0)\}$ o plano sem um ponto equipado com seu correferencial canônico $\{dx, dy\}$. Seja \tilde{M} o seu recobrimento universal. Então \tilde{M} é um helicóide que podemos identificar com o semi-plano $\{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : r > 0\}$. Usando esta identificação, a aplicação de recobrimento $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ pode ser escrita como

$$\pi(r, \varphi) = (r \cos \varphi - 1, r \sin \varphi)$$

Sejam

$$\theta^1 = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi, \quad \theta^2 = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi$$

os pullbacks de dx e dy por π . Então $\theta = (\theta^1, \theta^2)$ é uma forma de Maurer-Cartan em \tilde{M} com valores na álgebra de Lie abeliana \mathbb{R}^2 .

Segue que θ é localmente equivalente, em cada ponto de \tilde{M} , à forma de Maurer-Cartan do grupo de Lie abeliano \mathbb{R}^2 . Por outro lado, θ não pode ser globalmente equivalente à forma de Maurer-Cartan em nenhum subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 . Para ver isto, note que θ induz uma estrutura de grupo de Lie local em \tilde{M} da seguinte maneira. Se fixarmos o ponto $(1, 0) \in \tilde{M}$ como sendo a identidade, podemos definir o produto $w = u \cdot v$ de dois pontos $u, v \in \tilde{M}$ de forma que ele projeta na soma usual, i.e., $\pi(w) = \pi(u) + \pi(v)$. Além do mais, este produto pode ser definido para que seja suave sempre que pelo menos um dos elementos pertença a mesma folha do recobrimento que o elemento identidade $(1, 0)$.

Este produto, no entanto, não pode ser associativo. De fato, o produto $u \cdot v \cdot w$ só está bem definido se o triângulo com vértices $\pi(u), \pi(u) + \pi(v)$ e $\pi(u) + \pi(v) + \pi(w)$ não contém o ponto $(-1, 0)$ no seu interior. Caso contrário, os produtos $(u \cdot v) \cdot w$ e $u \cdot (v \cdot w)$ pertencem a folhas diferentes do espaço de recobrimento \tilde{M} . Mesmo se restringirmos à um subconjunto de \tilde{M} para o qual o produto de quaisquer três elementos está bem definido, iremos encontrar o mesmo tipo de problema na hora de definir o produto de quatro elementos, e assim por diante. Logo, o correferencial θ em \tilde{M} não pode ser globalmente equivalente a forma de Maurer-Cartan num subconjunto do grupo de Lie \mathbb{R}^2 .

Temos no entanto, o seguinte teorema (compare com o Teorema 14.28 de [27]):

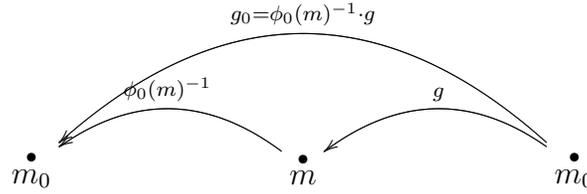
Teorema 4.10.2 *Seja (M, θ, h) uma realização cheia de um problema de Cartan e suponha que o algebróide de Lie classificante $A \rightarrow X$ é integrável. Então M é globalmente*

equivalente, a menos de recobrimento, à um subconjunto aberto de uma s -fibra dum grupóide de Lie \mathcal{G} que integra A .

Demonstração. Denote por \mathcal{D} a distribuição em $M \times_{h,t} \mathcal{G}$ utilizada na demonstração da Proposição 4.5.2, e seja N uma variedade integral maximal de \mathcal{D} . Denote por $\pi_M : M \times_{h,t} \mathcal{G} \rightarrow M$ e por $\pi_{\mathcal{G}} : M \times_{h,t} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ as projeções naturais. Então $\pi_{\mathcal{G}}(N)$ está totalmente contida numa única s -fibra de \mathcal{G} , $s^{-1}(x)$. Além do mais, a restrição das projeções à N , $\pi_M : N \rightarrow M$ e $\pi_{\mathcal{G}} : N \rightarrow s^{-1}(x)$ são difeomorfismos locais.

A subvariedade N , equipada com o correferencial $\pi_M^* \theta = \pi_{\mathcal{G}}^* \omega_{MC}$, é uma cobertura de realizações comum de M e um subconjunto aberto da s -fibra de \mathcal{G} . Para ver isto, precisamos mostrar que $\pi_M(N) = M$. De fato, se isto for verdade, M será globalmente equivalente, a menos de cobertura, à $\pi_{\mathcal{G}}(N) \subset s^{-1}(x)$.

Suponha que $\pi_M(N)$ seja uma subvariedade própria de M e seja $m_0 \in M - \pi_M(N)$ um ponto no fecho de $\pi_M(N)$ (lembre-se que $\pi_M|_N$ é uma aplicação aberta). Então, pela propriedade universal das formas de Maurer-Cartan em grupóides de Lie, existe uma vizinhança aberta U de m_0 em M e um difeomorfismo $\phi_0 : U \rightarrow \phi_0(U) \subset s^{-1}(h(m_0))$ tal que $\phi_0^* \omega_{MC} = \theta$ e $\phi_0(m_0) = \mathbf{1}_{h(m_0)}$. Segue que o gráfico de ϕ_0 é também uma subvariedade integral N_0 da distribuição \mathcal{D} em $M \times_{h,t} \mathcal{G}$, que passa por $(m_0, \mathbf{1}_{h(m_0)})$. Agora, seja $m = \pi_M(m, g)$ um ponto qualquer de $U \cap \pi_M(N)$ onde $(m, g) \in N$. Então $\phi_0(m) \in \mathcal{G}$ é uma seta ligando $h(m_0)$ à $h(m)$ e g é uma seta ligando m à $h(p)$, logo, $g_0 = \phi_0(m)^{-1} \cdot g$ é uma seta ligando x à $h(m_0)$, i.e.,



Como a forma de Maurer-Cartan é invariante por translação, segue que a variedade

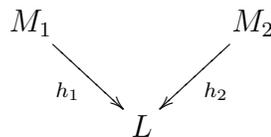
$$R_{g_0} N_0 = \{(\bar{m}, \bar{g} \cdot g_0) : (\bar{m}, \bar{g}) \in N_0\}$$

é uma subvariedade integral de \mathcal{D} . Mas, o ponto $(m, g) = (m, \phi_0(m) \cdot g_0)$ pertence à $R_{g_0} N_0$ e também à N , e portanto, pela unicidade e maximalidade de N , segue que N contém $R_{g_0} N_0$. No entanto, $(m_0, \phi_0(m_0) \cdot g_0)$ é um ponto de N que projeta por π_M em m_0 , o que contradiz o fato que $m_0 \in M - \pi_M(N)$. ■

Como consequência deste teorema, podemos recuperar os dois resultados principais sobre equivalência global de [27]:

Corolário 4.10.3 (Olver [27]) 1. Se θ é um correferencial de posto 0 em M , então M é globalmente equivalente, a menos de recobrimento, à um aberto de um grupo de Lie.

2. Se (M_1, θ_1, h_1) e (M_2, θ_2, h_2) são realizações cheias de posto n , que cobrem a mesma órbita $L \subset X$ de A , então M_1 e M_2 são recobrimentos de realizações de uma mesma realização (L, θ, h) , i.e.,



Demonstração.

1. A primeira parte do corolário é trivial. A restrição de algebróide de Lie classificante à $h(M) = \{pt\}$ é uma álgebra de Lie, e portanto, integrável por um grupo de Lie G . Segue que M é globalmente equivalente, a menos de recobrimento, a um subconjunto aberto de G .
2. Para demonstrar a segunda parte do corolário, sejam $A \rightarrow X$ o algebróide de Lie classificante do problema de realização e L uma folha n -dimensional de A para a qual $h_1(M_1) = L = h_2(M_2)$. Como A tem posto n , segue que a restrição da âncora de A à L é injetora, e portanto $A|_L$ é integrável. Além do mais, o seu grupóide de Lie \mathcal{G} é étale, i.e., as aplicações s e t são difeomorfismos locais.

Podemos tornar L numa realização se definirmos em L o correferencial dado pelo pullback da forma de Maurer-Cartan pelas inversas locais de \mathfrak{t} . De forma mais precisa, seja U um subconjunto aberto de $s^{-1}(x)$ para o qual a restrição de \mathfrak{t} é bijetora, e denote por $V = \mathfrak{t}(U)$ a imagem aberta de U por \mathfrak{t} . Defina o correferencial θ_U em V por

$$\theta_U = (\mathfrak{t}|_U^{-1})^* \omega_{MC}.$$

Então, θ_U é a restrição à V de um correferencial globalmente definido em L . De fato, suponha que \bar{U} é outro aberto de $s^{-1}(x)$ para o qual $\mathfrak{t}|_{\bar{U}}$ é bijetora e tal que $\bar{V} = \mathfrak{t}(\bar{U})$ intersecta V . Denote por $\theta_{\bar{U}}$ o correferencial em \bar{V} definido por

$$\theta_{\bar{U}} = (\mathfrak{t}|_{\bar{U}}^{-1})^* \omega_{MC}.$$

Mostraremos que θ_U e $\theta_{\bar{U}}$ coincidem na interseção $V \cap \bar{V}$. Depois de encolher U e \bar{U} , se necessário, podemos assumir que $V = \bar{V}$. Mas, neste caso, como \mathcal{G} é étale, segue que o grupo de isotropia \mathcal{G}_x é discreto, o que implica que U é a translação à direita de \bar{U} por um elemento $g \in \mathcal{G}_x$, i.e.,

$$U = R_g(\bar{U}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \theta_U &= (R_g \circ \mathfrak{t}|_{\bar{U}}^{-1})^* \omega_{MC} \\ &= (\mathfrak{t}|_{\bar{U}}^{-1})^* (R_g^* \omega_{MC}) \\ &= (\mathfrak{t}|_{\bar{U}}^{-1})^* \omega_{MC} \\ &= \theta_{\bar{U}}, \end{aligned}$$

e θ é um correferencial global bem definido em L .

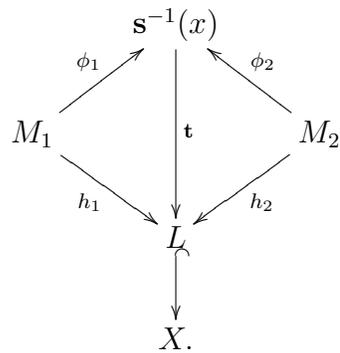
Agora, como M_1 e M_2 são ambos globalmente equivalentes, a menos de recobrimentos, a conjuntos abertos de $s^{-1}(x)$, segue que as submersões sobrejetivas $h_i : M_i \rightarrow L$ são recobrimentos de realizações.

Se o leitor preferir, podemos dar um argumento mais direto para mostrar que h_i é um morfismo de realizações. De fato, o correferencial θ_1 em M_1 é localmente o pullback da forma de Maurer-Cartan numa s -fibra de \mathcal{G} por um difeomorfismo

localmente definido $\phi_1 : W_1 \subset M_1 \rightarrow s^{-1}(x)$. Depois de encolher W_1 , podemos assumir que a restrição de \mathbf{t} à $U_1 = \phi_1(W_1)$ é bijetora. Então,

$$\begin{aligned} h_1^* \theta &= (\mathbf{t} \circ \phi_1)^* \theta \\ &= \phi_1^* (\mathbf{t}^* \circ (\mathbf{t}|_{U_1}^{-1})^* \omega_{MC}) \\ &= \phi_1^* \omega_{MC} \\ &= \theta_1. \end{aligned}$$

É óbvio que o mesmo argumento pode ser usado para mostrar que a aplicação h_2 também é um morfismo de realizações. Podemos resumir esta demonstração no seguinte diagrama:



■

O Problema de Classificação para G -Estruturas de Tipo Finito

Este capítulo é dedicado ao problema de realização para G -estruturas de tipo finito. Em particular, descreveremos a estrutura do algebróide classificante, bem como algumas de suas propriedades.

Para começar, explicamos o caso em que $G^{(1)} = \{e\}$. O caso geral seguirá, quase que imediatamente, do fato de que o k -ésimo prolongamento $(\mathcal{B}_G)^{(k)}$ de uma G -estrutura \mathcal{B}_G coincide com o primeiro prolongamento de $(\mathcal{B}_G)^{(k-1)}$.

5.1 O Problema de Realização para G -Estruturas de Tipo 1

Considere uma G -estrutura, onde G é um subgrupo de GL_n tal que $G^{(1)} = \{e\}$. Vimos no Capítulo 3 que existem funções estruturais que determinam a G -estrutura, a menos de equivalência. Reciprocamente, suponha que seja dado um conjunto de funções e que queremos determinar quais são todas as G -estruturas para as quais estas são suas funções estruturais. Então, pelas equações estruturais (3.4.1) precisamos resolver o seguinte problema de realização:

Problema 5.1.1 (Problema de Realização para G -Estruturas com $G^{(1)} = \{e\}$) Dados:

1. um subconjunto aberto $X \subset \mathbb{R}^d$;
2. um número inteiro $n \in \mathbb{N}$;
3. uma subálgebra de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n$ tal que $\mathfrak{g}^{(1)} = 0$;

4. Um subgrupo de Lie $G \subset GL(n)$ com álgebra de Lie \mathfrak{g} ;
5. aplicações $c : X \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $R : X \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n, \mathfrak{g})$, $S : X \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, $\Theta : X \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$, e $\Phi : X \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}^d)$

existe

1. uma variedade M^n ;
2. uma G -estrutura $\mathcal{B}_G(M)$ em M com forma tautológica $\theta \in \Omega^1(\mathcal{B}_G, \mathbb{R}^n)$;
3. uma 1-forma vertical $\eta \in \Omega^1(\mathcal{B}_G, \mathfrak{g})$ de posto máximo;
4. uma aplicação $h : \mathcal{B}_G \rightarrow X$

tais que

$$\begin{cases} d\theta &= c(h)(\theta \wedge \theta) - \eta \wedge \theta \\ d\eta &= R(h)(\theta \wedge \theta) + S(h)(\theta \wedge \eta) - \eta \wedge \eta \\ dh &= \Theta(h) \circ \theta + \Phi(h) \circ \eta \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Também estaremos interessados numa pequena variante deste problema: Ao invés de tomarmos um grupo de Lie G tal que $G^{(1)} = \{e\}$ tomamos um subgrupo arbitrário de GL_n . Neste caso, o problema de realização acima fornece uma redução da $G^{(1)}$ -estrutura $\mathcal{B}_G(M)^{(1)}$ sobre $\mathcal{B}_G(M)$ ao subgrupo $\{e\}$. Este tipo de problema aparece, por exemplo, quando desejamos descrever conexões numa variedade que preservam uma estrutura geométrica. Discutiremos um exemplo disto no Capítulo 7.

5.2 Existência de Soluções

Para resolvermos este problema de realização, começamos por descrever algumas condições necessárias para a existência de soluções. Para tal, note que se $(M, \mathcal{B}_G, \theta, \eta, h)$ é uma realização do problema de Cartan, então, em particular, $(\mathcal{B}_G, (\theta, \eta), h)$ é uma solução do problema de realização associado para correferenciais. Isto significa que os dados iniciais do problema determinam um algebróide de Lie classificante $A \rightarrow X$ tal que

$$\begin{array}{ccc} T\mathcal{B}_G & \xrightarrow{(\theta, \eta)} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}_G & \xrightarrow{h} & X \end{array} \quad (5.2.1)$$

é um morfismo de algebróides de Lie.

Agora, descreveremos as propriedades extras que A deve ter devido ao fato que os correferenciais que ele classifica correspondem a $\{e\}$ -estruturas em $\mathcal{B}_G(M)$, i.e., devido ao formato das equações estruturais. Antes de mais nada, note que como fibrado vetorial, $A \cong X \times (\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g})$ e que sua estrutura de algebróide de Lie pode ser descrita explicitamente (em seções constantes) por

$$[(u, \rho), (v, \sigma)](x) = (w, \tau) \quad (5.2.2)$$

onde,

$$\begin{aligned} w &= -c(x)(u \wedge v) + \rho \cdot v - \sigma \cdot u \\ \tau &= -R(x)(u \wedge v) - S(x)(u \otimes \sigma - v \otimes \rho) + [\rho, \sigma]_{\mathfrak{g}} \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

e

$$\#(u, \rho) = \Theta(x)u + \Phi(x)\rho. \quad (5.2.4)$$

Segue que

$$[(0, \rho), (0, \sigma)]_A = (0, [\rho, \sigma]_{\mathfrak{g}}) \quad (5.2.5)$$

e portanto

$$\mathfrak{g} \hookrightarrow \Gamma(A) \quad (5.2.6)$$

é um homomorfismo de álgebras de Lie. Deste modo, obtemos uma ação de \mathfrak{g} em A por automorfismos internos

$$\psi(\rho)(\alpha) = [(0, \rho), \alpha]_A \quad (5.2.7)$$

onde α é uma seção qualquer de A .

Resumindo, obtemos que uma condição necessária para a existência de realizações do problema de Cartan para G -estruturas de tipo 1 é que os dados iniciais devem determinar um algebróide de Lie trivial (como fibrado) no qual \mathfrak{g} age por automorfismos internos. Além do mais, a estrutura do algebróide de Lie não é completamente arbitrária: ela deve ter a forma específica (5.2.3) e (5.2.4).

Descrevemos agora até que ponto que estas condições são (pelo menos localmente) também suficientes. Iremos mostrar que se as condições acima são satisfeitas, então para cada x na base X do algebróide de Lie, podemos construir uma G -estrutura em \mathbb{R}^n que contém um referencial p na origem tal que $h(p) = x$ e para o qual as equações estruturais são satisfeitas numa vizinhança de p . Mais precisamente:

Teorema 5.2.1 *Seja G um subgrupo de Lie de GL_n tal que $G^{(1)} = \{e\}$ e sejam*

$$(n, X, G, (c, R, S), (\Theta, \Phi))$$

os dados iniciais de um problema de realização para G -estruturas. Então, para cada $x \in X$, existe uma realização $(U, \mathcal{B}_G(U), (\theta, \eta), h)$ definida numa vizinhança U da origem de \mathbb{R}^n que contém um referencial $p \in \mathcal{B}_G$, tal que $h(p) = x$ se e somente se o colchete (5.2.3) e a âncora (5.2.4) determinam a estrutura de um algebróide de Lie em $A \cong \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g} \rightarrow X$.

Além do mais, neste caso, \mathfrak{g} age infinitesimalmente em A por automorfismos internos, e a ação é localmente livre.

Demonstração. Suponha que os dados iniciais do problema de realização determinam um algebróide de Lie $A \rightarrow X$ cuja estrutura é dada por (5.2.3) e (5.2.4). Seja $(P, (\theta, \eta), h)$ uma realização do problema de Cartan associado para correferenciais, i.e.,

$$\begin{array}{ccc} TP & \xrightarrow{(\theta, \eta)} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \xrightarrow{h} & X \end{array} \quad (5.2.8)$$

é um morfismo de algebróides de Lie. O que mostraremos através de uma série de passos é que (depois de nos restringir a um aberto suficientemente pequeno de P) podemos identificar P com um subconjunto aberto de uma G -estrutura definida numa vizinhança da origem de \mathbb{R}^n .

Passo 1 $\theta = 0$ define uma distribuição integrável \mathcal{D} em P .

Como $d\theta = c(\theta \wedge \theta) - \eta \wedge \theta$, segue que $d\theta(\xi_1, \xi_2) = 0$ sempre que $\theta(\xi_1) = 0 = \theta(\xi_2)$. Logo, a afirmação segue do Teorema de Frobenius.

Passo 2 Cada folha de \mathcal{D} é localmente difeomorfa à uma vizinhança da identidade de G .

Note que a equação estrutural para $d\eta$, quando restrita à $\theta = 0$, é simplesmente a equação de Maurer-Cartan

$$d\eta + \eta \wedge \eta = 0. \quad (5.2.9)$$

Logo, pela propriedade universal das formas de Maurer-Cartan em grupos de Lie, segue que cada ponto da folha tem uma vizinhança localmente difeomorfa à uma vizinhança da identidade de G . Além do mais, vendo η como uma aplicação

$$\mathcal{D} \rightarrow X \times \mathfrak{g},$$

como ambos os fibrados acima tem o mesmo posto, e η é sobrejetiva fibra a fibra, segue que podemos inverter η para obter uma ação infinitesimal

$$\eta^{-1} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{D}) \subset \mathfrak{X}(P). \quad (5.2.10)$$

Passo 3 θ é equivariante com relação à ação infinitesimal de \mathfrak{g} em P .

É lógico que isto é uma consequência da equação estrutural para $d\theta$. Denote por $\tilde{\rho} = \eta^{-1}(\rho)$ o campo de vetores tangente às folhas de $\theta = 0$ que é gerado por ρ . Então, pela Fórmula Mágica de Cartan, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{\rho}}\theta &= i_{\tilde{\rho}}d\theta + di_{\tilde{\rho}}\theta \\ &= i_{\tilde{\rho}}d\theta \\ &= i_{\tilde{\rho}}(c(\theta \wedge \theta) - \eta \wedge \theta) \\ &= -\rho \cdot \theta \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

que demonstra a afirmação.

Passo 4 P tem (localmente) a estrutura de fibrado sobre \mathbb{R}^n .

Basta restringir (θ, η) a um subconjunto aberto suficientemente pequeno (que continuaremos a denotar por P) tal que:

1. as folhas de $\theta = 0$ são as fibras de uma submersão $P \rightarrow \mathbb{R}^n$ e
2. a restrição de η à cada folha L é o pullback da forma de Maurer-Cartan de G por um difeomorfismo $L \rightarrow U \subset G$.

Então $P \cong \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um fibrado trivial com fibra típica U .

Passo 5 Podemos estender P à uma G -estrutura sobre \mathbb{R}^n que resolve o problema de realização numa vizinhança de um referencial.

Seja $\tilde{P} \cong \mathbb{R}^n \times G$ o fibrado principal trivial com fibra G . Note que

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{i} & \tilde{P} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathbb{R}^n & \end{array} \quad (5.2.12)$$

Agora, defina em \tilde{P} a 1-forma $\tilde{\theta}$ com valores em \mathbb{R}^n dada por

$$\tilde{\theta}_{(v,g)}(\xi) := g^{-1} \cdot \theta_{(v,e)}((R_{g^{-1}})_*\xi), \quad (5.2.13)$$

que está bem definida pela equivariância de θ . Então $\tilde{\theta}$ é uma forma tensorial não-degenerada em \tilde{P} e, portanto, determina um mergulho de \tilde{P} no fibrado das bases de \mathbb{R}^n . Segue que \tilde{P} é uma G -estrutura, \mathcal{B}_G , sobre \mathbb{R}^n com forma tautológica $\tilde{\theta}$. ■

Observação 5.2.2 Note que a G -estrutura construída acima não é uma realização global do problema de Cartan. De fato, a existência da aplicação h e da 1-forma η para as quais as equações estruturais são satisfeitas só ocorre numa vizinhança de um referencial $p \in \mathcal{B}_G(M)$.

No entanto, se o grupo G for reductivo, i.e., se podemos escolher um complemento G -invariant C para $\mathcal{A}(\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g}))$ em $\text{Hom}(\wedge^2 \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, (veja o Capítulo 3), ou mais geralmente, se a função estrutural S for nula, então η será equivariante (uma forma de conexão) e podemos estendê-la a todo \tilde{P} através de

$$\tilde{\eta}_{(v,g)}(\xi) := \text{Ad}_{g^{-1}} \cdot \eta_{(v,e)}((R_{g^{-1}})_*\xi) \quad (5.2.14)$$

obtendo assim uma realização que satisfaz as equações estruturais em todos os pontos.

5.3 Construção Geométrica de Modelos

Para que se tenha uma compreensão melhor do problema de realização de G -estruturas, e para que possamos obter resultados semi-globais, descrevemos nesta seção o que ocorre no melhor dos casos, i.e., quando o algebróide de Lie classificante A é integrável e a ação infinitesimal de \mathfrak{g} em A se integra numa ação livre e própria de G em \mathcal{G} . O problema de realização para G -estruturas de tipo finito será deixado para a próxima seção.

Começamos por descrever as propriedades das ações de grupos de Lie e álgebras de Lie em algebróides e grupóides de Lie que utilizaremos. Para mais detalhes, referimos o leitor à [18] de onde nos baseamos para o que segue.

Definição 5.3.1 1. Uma ação de um grupo de Lie G num grupóide de Lie \mathcal{G} é uma ação suave $\Psi : G \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ tal que para cada $a \in G$, a aplicação

$$\Psi_a : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}, \quad \Psi_a(g) = a \cdot g$$

é um automorfismo do grupóide de Lie.

2. Uma ação de um grupo de Lie G num algebróide de Lie A é uma ação suave $\Psi : G \times A \rightarrow A$ tal que para cada $a \in G$, a aplicação

$$\Psi_a : A \rightarrow A, \quad \Psi_a(\alpha) = a \cdot \alpha$$

é um automorfismo de algebróides de Lie.

Se $\Psi : G \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ é uma ação de G em \mathcal{G} , então, para cada $a \in G$, a aplicação

$$(\Psi_a)_* : A \rightarrow A$$

é um automorfismo de algebróides de Lie. Logo, diferenciando na seção da identidade de \mathcal{G} , podemos passar de ações de grupos de Lie em grupóides à ações de grupos de Lie em algebróides. Existe também uma maneira de passar de ações em algebróides para ações em grupóides, mas não iremos isto nesta tese.

Olhamos agora para ações infinitesimais de álgebras de Lie em algebróides de Lie.

Definição 5.3.2 1. Uma *derivação de um algebróide de Lie* A é um operador linear $D : \Gamma(A) \rightarrow \Gamma(A)$ tal que existe um campo de vetores $\sigma_D \in \mathfrak{X}(X)$, chamado de símbolo de D , para o qual

$$D(f\alpha) = fD(\alpha) + \sigma_D(f)\alpha$$

e tal que

$$D([\alpha, \beta]) = [D(\alpha), \beta] + [\alpha, D(\beta)]$$

para quaisquer seções $\alpha, \beta \in \Gamma(A)$ e função $f \in C^\infty(X)$.

2. Uma *ação infinitesimal de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} num algebróide de Lie A* é um homomorfismo de álgebras de Lie $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(A)$, onde $\text{Der}(A)$ denota o espaço das derivações de A .

Dada uma ação $\Psi : G \times A \rightarrow A$ de um grupo de Lie G num algebróide de Lie A , então para $\rho \in \mathfrak{g}$,

$$\psi(\rho)(\alpha) = \left. \frac{d}{dt} \exp(t\rho) \cdot \alpha \right|_{t=0}$$

define uma ação infinitesimal de \mathfrak{g} em A . Neste caso, diremos que a ação de G em A integra a ação infinitesimal \mathfrak{g} .

É possível definir também uma ação infinitesimal de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} num grupóide de Lie \mathcal{G} , e todos os quatro tipos de ações citados aqui estão relacionados. No entanto, como isto não será usado na tese, iremos omitir sua descrição.

Retornamos agora ao problema de realização. Então $A \cong X \times (\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}) \rightarrow X$ é o algebróide de Lie classificante de um problema de Cartan para G -estruturas e $G \subset \text{GL}_n$ é um subgrupo de Lie de tipo 1. A inclusão $i : \mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(A)$ determina uma ação infinitesimal

$$\psi(\rho)(\alpha) = [(0, \rho), \alpha]_A$$

por derivações internas. Esta ação induz um morfismo de algebróides de Lie

$$\phi : \mathfrak{g} \times X \rightarrow A, \quad \phi(\rho, x) = i(\rho)(x),$$

do algebróide de transformações $\mathfrak{g} \times X$ para A . Suponha que a ação de \mathfrak{g} em X é completa, que A é integrável por um grupóide de Lie \mathcal{G} e que a aplicação ϕ pode ser integrada por um morfismo de grupóides de Lie

$$\Phi : G \times X \rightarrow \mathcal{G},$$

do grupóide de transformações $G \times X$ para \mathcal{G} . Observamos que isto é sempre o caso quando G é simplesmente conexo. Então, podemos descrever a ação associada de G em \mathcal{G} por

$$\Psi : G \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}, \quad \Psi(a, g) = \Phi(a, \mathbf{t}(g)) \cdot g \cdot (\Phi(a, \mathbf{s}(g)))^{-1}.$$

Neste caso, obtemos também uma ação de G em cada s -fibra de \mathcal{G} , que pode ser descrita explicitamente por

$$a \cdot g = \Phi(a, \mathbf{t}(g)) \cdot g.$$

Além do mais, quando a ação de G em X é própria e $\ker \Phi = \{e\} \times X$, segue que a ação de G em cada s -fibra de \mathcal{G} é também livre e própria. Quando isto ocorre, denotaremos por M_x a variedade obtida tomando o quociente de $s^{-1}(x)$ pelas órbitas da ação de G .

Proposição 5.3.3 *O fibrado principal*

$$\begin{array}{c} s^{-1}(x) \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ G \end{array} \\ \pi \downarrow \\ M_x \end{array}$$

é uma G -estrutura sobre M_x .

Demonstração. Seja ω_{MC} a restrição à $s^{-1}(x)$ da forma de Maurer-Cartan e denote por θ a sua componente com valores em \mathbb{R}^n . Segue das equações estruturais do algebróide de Lie A e do fato que a ação de G em A integra a ação infinitesimal de \mathfrak{g} , que θ é não-degenerada, horizontal e equivariante. Logo, existe um mergulho $s^{-1}(x) \rightarrow \mathcal{B}(M_x)$ tal que θ é a restrição da forma tautológica de $\mathcal{B}(M_x)$ à $s^{-1}(x)$, o que demonstra a proposição. ■

Agora, para obter um resultado de classificação local, assumimos que a 1-forma η pode ser tomada equivariante (por exemplo, se G for reductivo). Seja $(M, \mathcal{B}_G(M), (\theta, \eta), h)$ uma realização de um problema de Cartan e seja $p \in \mathcal{B}_G(M)$ um referencial. Então, pela propriedade universal das formas de Maurer-Cartan em grupóides de Lie, segue que existe uma vizinhança U de p em $\mathcal{B}_G(M)$ e um difeomorfismo $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset s^{-1}(h(p))$ tal que $\phi(p) = \mathbf{1}_{h(p)}$ e $\phi^* \omega_{MC} = (\theta, \eta)$. No entanto, como (θ, η) e ω_{MC} são ambos G -equivariantes, podemos estender ϕ a um subconjunto aberto da forma $\pi^{-1}\pi(U) \subset \mathcal{B}_G(M)$. Isto é feito impondo a equivariância de ϕ . Assim, acabamos de provar que:

Teorema 5.3.4 (Classificação Local) *Seja $A \rightarrow X$ o algebróide de Lie classificante de um problema de realização de G -estruturas, onde G é um grupo de Lie reductivo de tipo 1. Suponha que A é integrável e que*

1. a ação infinitesimal de \mathfrak{g} em X se integra a uma ação própria de G em X ;
2. o algebróide de transformações $\mathfrak{g} \times X \subset A$ se integra a um subgrupóide de $\mathcal{G}(A)$ que é isomorfo ao grupóide de transformações $G \times X \rightrightarrows X$.

Então qualquer realização $\mathcal{B}_G(M) \rightarrow M$ é localmente equivalente à $s^{-1}(x) \rightarrow M_x$ para algum $x \in X$.

Antes de continuarmos, gostaríamos de fazer um último comentário. Como estamos assumindo que a ação de G em \mathcal{G} é livre e própria, e como a ação induzida de G em A é por automorfismos de algebróides de Lie, segue que $A/G \rightarrow X/G$ é também um algebróide de Lie. De fato, ele é o algebróide de Lie do grupóide de Lie $\mathcal{G}/G \rightrightarrows X/G$, e sua estrutura é dada por

$$[\alpha \cdot G, \beta \cdot G] = [\alpha, \beta] \cdot G, \quad \#(\alpha \cdot G) = \#(\alpha) \cdot G.$$

Agora, como consequência do fato que $h : \mathcal{B}_G(M) \rightarrow X$ é equivariante, i.e., $h(p \cdot a) = a^{-1} \cdot h(p)$, obtemos que existe uma correspondência bijetora entre os pontos de X/G e os germes de soluções do problema de realização para G -estruturas. Em outras palavras, duas soluções $s^{-1}(x) \rightarrow M_x$ e $s^{-1}(y) \rightarrow M_y$ do problema de Cartan são localmente equivalentes se e somente se x e y pertencem à mesma órbita de G em X .

Além do mais, qualquer realização vem dotada de um morfismo de algebróides de Lie equivariante

$$(\theta, \eta) : T\mathcal{B}_G(M) \rightarrow A.$$

Assim, passando ao quociente, obtemos um morfismo de algebróides de Lie

$$\begin{array}{ccc} T\mathcal{B}_G(M)/G & \longrightarrow & A/G \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & X/G \end{array}$$

onde $T\mathcal{B}_G(M)/G$ é o algebróide de Atiyah do fibrado G -principal $\mathcal{B}_G(M) \rightarrow M$.

5.4 O Problema de Realização para G -Estruturas de Tipo Finito

Lidamos agora com o problema de realização para G -estruturas de tipo finito. Sua formulação é baseada nas equações estruturais (3.5.1) que deduzimos na Seção 3.5. Utilizaremos a notação

$$\mathfrak{g}^l = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^{(l)}$$

introduzida na seção referida acima.

Problema 5.4.1 (Problema de Realização para G -Estruturas de tipo k) Dados:

1. um subconjunto aberto $X \subset \mathbb{R}^d$;
2. um número inteiro $n \in \mathbb{N}$;
3. uma subálgebra de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n$ tal que $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$,
4. um grupo de Lie $G \subset GL(n)$ com álgebra de Lie \mathfrak{g} ;
5. aplicações

- $c^{(k-1)} : X \rightarrow \text{Hom}(\wedge^2(\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}^{k-2} \oplus \mathfrak{g}^{(k-1)}), \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}^{k-2})$,
- $R^{(k-1)} : X \rightarrow \text{Hom}(\wedge^2(\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}^{k-2} \oplus \mathfrak{g}^{(k-1)}), \mathfrak{g}^{(k-1)})$,

- $S^{(k-1)} : X \rightarrow \text{Hom}((\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}^{k-2}) \otimes \mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)})$,
- $\Theta : X \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}^{k-2}, \mathbb{R}^d)$, e
- $\Phi : X \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathbb{R}^d)$

existe

1. uma variedade M^n ;
2. uma G -estrutura $\mathcal{B}_G(M)$ em M com prolongamento $(\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)}$, cuja forma tautológica denotamos por

$$\theta^{(k-1)} \in \Omega^1((\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)}, \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g}^{k-2} \oplus \mathfrak{g}^{(k-1)});$$

3. uma 1-forma vertical $\eta^{(k-1)} \in \Omega^1((\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)})$ de posto máximo;
4. uma aplicação $h : (\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)} \rightarrow X$

tais que

$$\begin{cases} d\theta^{(k-1)} &= c^{(k-1)}(h)(\theta^{(k-1)} \wedge \theta^{(k-1)}) - \eta^{(k-1)} \wedge \theta^{(k-1)} \\ d\eta^{(k-1)} &= R^{(k-1)}(h)(\theta^{(k-1)} \wedge \theta^{(k-1)}) + S^{(k-1)}(h)(\theta^{(k-1)} \wedge \eta^{(k-1)}) \\ dh &= \Theta(h) \circ \theta^{(k-1)} + \Phi(h) \circ \eta^{(k-1)} \end{cases} \quad (5.4.1)$$

Antes de descrever a solução no caso geral, olhamos para o caso particular em que $k = 2$:

Exemplo 5.4.2 ($G^{(2)} = \{e\}$) Suponha que G é um subgrupo de Lie de GL_n tal que $G^{(2)} = \{e\}$ e sejam $(n, X, \mathfrak{g}, (c^{(1)}, R^{(1)}, S^{(1)})(\Theta, \Phi))$ os dados iniciais de um problema de Cartan para G -estruturas. Ao invés de procurar soluções deste problema, podemos nos perguntar sobre a existência de:

- uma variedade P de dimensão $n + \dim \mathfrak{g}$;
- uma $G^{(1)}$ -estrutura $\mathcal{B}_{G^{(1)}}(P)$ sobre P com forma tautológica

$$\theta^{(1)} \in \Omega^1(\mathcal{B}_{G^{(1)}}(P), \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g});$$

- uma 1-forma vertical $\eta^{(1)} \in \Omega^1(\mathcal{B}_{G^{(1)}}(P), \mathfrak{g}^{(1)})$ de posto máximo;
- uma aplicação $h : \mathcal{B}_{G^{(1)}}(P) \rightarrow X$

tais que

$$\begin{cases} d\theta^{(1)} &= c^{(1)}(h)(\theta^{(1)} \wedge \theta^{(1)}) - \eta^{(1)} \wedge \theta^{(1)} \\ d\eta^{(1)} &= R^{(1)}(h)(\theta^{(1)} \wedge \theta^{(1)}) + S^{(1)}(h)(\theta^{(1)} \wedge \eta^{(1)}) - \eta^{(1)} \wedge \eta^{(1)} \\ dh &= \Theta(h) \circ \theta^{(1)} + \Phi(h) \circ \eta^{(1)}. \end{cases}$$

Chamaremos este problema de **problema de realização subjacente para $G^{(1)}$ -estruturas**.

Agora, suponha que, para cada $x \in X$, exista uma realização $\mathcal{B}_G(M)$ com um 1-referencial $p \in (\mathcal{B}_G(M))^{(1)}$ tal que $h(p) = x$. Então, é claro que $(\mathcal{B}_G(M))^{(1)} \rightarrow \mathcal{B}_G(M)$ é uma solução do problema de realização subjacente para $G^{(1)}$ -estruturas. Segue do Teorema 5.2.1 que $((c^{(1)}, R^{(1)}, S^{(1)})(\Theta, \Phi))$ são as funções estruturais de um algebróide de Lie $A \cong X \times (\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{(1)})$ sobre X . Além do mais, A vem equipado com uma ação infinitesimal de $\mathfrak{g}^{(1)}$ por automorfismos internos.

Reciprocamente, suponha que os dados iniciais do problema de realização determinam uma estrutura de algebróide de Lie em $A \cong X \times (\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{(1)})$, e seja $\mathcal{B}_{G^{(1)}}(P)$ uma solução do problema de realização subjacente para $G^{(1)}$ -estruturas, que existe pelo Teorema 5.2.1. O problema agora se reduz a decidir quando que $\mathcal{B}_{G^{(1)}}(P)$ é localmente equivalente, em cada ponto, ao prolongamento de uma G -estrutura $\mathcal{B}_G(M)$.

Vimos que numa G -estrutura arbitrária $\mathcal{B}_G(M)$, as equações estruturais podem ser decompostas em (3.5.3)

$$\left\{ \begin{array}{l} d\theta = c(\theta \wedge \theta) - \eta \wedge \theta \\ d\eta = R(\theta \wedge \theta) + S(\theta \wedge \eta) - \eta \wedge \eta - \eta^{(1)} \wedge \theta \\ d\eta^{(1)} = R_1^{(1)}(\theta \wedge \theta) + R_2^{(1)}(\theta \wedge \eta) + R_3^{(1)}(\eta \wedge \eta) + \\ \quad + S_1^{(1)}(\theta \wedge \eta^{(1)}) + S_2^{(1)}(\eta \wedge \eta^{(1)}). \end{array} \right.$$

Segue que as funções fornecidas nos dados iniciais do problema de realização não podem ser arbitrárias. Elas devem ser decomponíveis conforme descrito no Exemplo 3.5.2. De agora em diante, assumimos que este é o caso.

As duas primeiras equações estruturais acima implicam que a distribuição

$$\mathcal{D} = \{\xi \in \mathfrak{X}(\mathcal{B}_{G^{(1)}}(P)) : \theta(\xi) = 0 = \eta(\xi)\}$$

é integrável. Logo, depois de restringir a um subconjunto aberto, se necessário, podemos supor que

$$P \cong \mathcal{B}_{G^{(1)}}(P)/\mathcal{D}.$$

Analogamente, a primeira equação implica que a distribuição

$$\mathcal{D}' = \{\xi \in \mathfrak{X}(\mathcal{B}_{G^{(1)}}(P)) : \theta(\xi) = 0\}$$

também é integrável, e de novo, depois de restringir a um subconjunto aberto, podemos supor que

$$M = \mathcal{B}_{G^{(1)}}(P)/\mathcal{D}'$$

é uma variedade. Além do mais, como $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$, segue que P é um fibrado sobre M .

Agora, seja $\sigma : P \rightarrow \mathcal{B}_{G^{(1)}}(P)$ uma seção (novamente, caso se faça necessário, restringimos mais uma vez a um subconjunto aberto de P), e denote por $\theta' = \sigma^*\theta$ e por $\eta' = \sigma^*\eta$ os pullbacks de θ e η por σ . Então θ' e η' formam um correferencial em P cujas equações estruturais podem ser descritas por

$$\left\{ \begin{array}{l} d\theta' = c'(\theta' \wedge \theta') - \eta' \wedge \theta' \\ d\eta' = R'(\theta' \wedge \theta') + S'(\theta' \wedge \eta') - \eta' \wedge \eta' \end{array} \right. \quad (5.4.2)$$

onde $c', R',$ e S' são os pullbacks de $c, R,$ e S por σ .

Por argumentos completamente análogos aos dados na demonstração do Teorema 5.2.1, segue que \mathfrak{g} age infinitesimalmente em P e que θ é horizontal e equivariante por esta ação. Logo, pelo menos localmente, P pode ser mergulhado numa G -estrutura sobre M que satisfaz as equações estruturais (5.4.2). Mas como duas G -estruturas são equivalentes se e somente se seus prolongamentos também são, podemos concluir que $(\mathcal{B}_G(M))^{(1)}$ é localmente equivalente à $\mathcal{B}_{G^{(1)}}(P)$, o que demonstra a existência de uma realização.

Podemos resumir este exemplo dizendo que uma solução do problema de realização para G -estruturas de tipo 2 com dados iniciais

$$(n, X, \mathfrak{g}, (c^{(1)}, R^{(1)}, S^{(1)})(\Theta, \Phi))$$

existe se e somente se:

1. As funções $((c^{(1)}, R^{(1)}, S^{(1)})(\Theta, \Phi))$ podem ser decompostas como se fossem as funções estruturais do primeiro prolongamento de uma G -estrutura;
2. as funções $((c^{(1)}, R^{(1)}, S^{(1)})(\Theta, \Phi))$ determinam a estrutura de um algebróide de Lie no fibrado vetorial trivial $A \rightarrow X$ com fibra $\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{(1)}$.

A solução do problema de realização no caso geral, para G -estruturas de tipo k , é muito parecida com a solução do problema para G -estruturas de tipo 2 discutida no exemplo acima. As funções $(c^{(k-1)}, R^{(k-1)}, S^{(k-1)})$ não podem ser completamente arbitrárias. De fato, algumas componentes destas funções devem ser constantes. Para ilustrar esta afirmação, notamos que a componente de $c^{(k-1)}$ que toma valores em $\text{Hom}(\mathbb{R}^n \otimes \mathfrak{g}, \mathbb{R}^n)$ deve ser constante e dada pela ação de \mathfrak{g} em \mathbb{R}^n . Sua componente que toma valores em $\text{Hom}(\wedge^2 \mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ deve ser dada pelo colchete de Lie de \mathfrak{g} . Chamaremos as funções $(c^{(k-1)}, R^{(k-1)}, S^{(k-1)})$ de **admissíveis** se elas podem ser decompostas como se fossem as funções estruturais do prolongamento de alguma G -estrutura arbitrária. Temos o seguinte teorema:

Teorema 5.4.3 *Sejam $(n, X, \mathfrak{g}, (c^{(k-1)}, R^{(k-1)}, S^{(k-1)})(\Theta, \Phi))$ os dados iniciais de um problema de Cartan para G -estruturas de tipo k . Então, para cada $x \in X$, existe uma realização $(M, (\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)}, (\theta^{(k-1)}, \eta^{(k-1)}), h)$ que contém um referencial $p \in (\mathcal{B}_G(U))^{(k-1)}$ tal que $h(p) = x$ se e somente se*

1. as funções $(c^{(k-1)}, R^{(k-1)}, S^{(k-1)})$ são admissíveis;
2. as funções $((c^{(k-1)}, R^{(k-1)}, S^{(k-1)})(\Theta, \Phi))$ são as funções estruturais de um algebróide de Lie

$$A \cong X \times (\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^{(k-1)})$$

sobre X .

Além do mais, neste caso, $\mathfrak{g}^{(k-1)}$ age infinitesimalmente em A por automorfismos internos, e a ação é localmente livre.

Demonstração. Suponha que para cada $x \in X$ podemos encontrar uma solução

$$(M, (\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)}, (\theta^{(k-1)}, \eta^{(k-1)}), h)$$

do problema de realização, com um referencial $p \in (\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)}$ tal que $h(p) = x$. Então $(c^{(k-1)}, R^{(k-1)}, S^{(k-1)})$ são as funções estruturais do $k - 1$ -ésimo prolongamento de uma G -estrutura, e portanto, podem ser decompostas com tal, i.e., são admissíveis.

Além do mais, $(\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)}$ também é uma solução do problema de realização subjacente para $G^{(k-1)}$ -estruturas, e portanto, pelo Teorema 5.2.1, segue que

$$(c^{(k-1)}, R^{(k-1)}, S^{(k-1)}), (\Theta, \Phi)$$

são as funções estruturais de um algebróide de Lie $A \rightarrow X$, no qual $\mathfrak{g}^{(k-1)}$ age de forma localmente livre por automorfismos internos.

Reciprocamente, suponha que $((c^{(k-1)}, R^{(k-1)}, S^{(k-1)})(\Theta, \Phi))$ são funções estruturais de um algebróide de Lie

$$A \cong X \times (\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^{(k-1)})$$

sobre X , e que as funções $(c^{(k-1)}, R^{(k-1)}, S^{(k-1)})$ são admissíveis. Procedemos exatamente como no Exemplo 5.4.2. Como $A \rightarrow X$ é um algebróide de Lie, segue que para cada $x \in X$ podemos encontrar uma realização

$$(Q, \mathcal{B}_{G^{(k-1)}}(Q), (\theta^{(k-1)}, \eta^{(k-1)}), h)$$

do problema de realização subjacente para $G^{(k-1)}$ -estruturas tal que $h(p_{k-1}) = x$ para algum $p_{k-1} \in \mathcal{B}_{G^{(k-1)}}(Q)$.

A 1-forma $\theta^{(k-1)}$ toma valores em $\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{g} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^{(k-2)}$ e pode ser decomposta em suas componentes

$$\theta^{(k-1)} = (\theta, \eta, \eta^{(1)}, \dots, \eta^{(k-2)}).$$

Como as funções $c^{(k-1)}, R^{(k-1)}, S^{(k-1)}$ são admissíveis, as equações estruturais para $(\theta^{(k-1)}, \eta^{(k-1)})$ podem ser decompostas em

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = c(\theta \wedge \theta) - \eta \wedge \theta \\ \eta = R(\eta \wedge \eta) + S(\theta \wedge \theta) - \eta \wedge \eta - \eta^{(1)} \wedge \theta \\ \vdots \\ \text{equações de ordem superior} \end{array} \right. \quad (5.4.3)$$

As primeiras duas equações implicam que a distribuição $\mathcal{D} = \ker(\theta, \eta)$ é integrável, enquanto que a primeira equação implica que $\mathcal{D}' = \ker \theta$ é integrável. Assim, depois de restringir a um subconjunto aberto, podemos supor que

$$M = \mathcal{B}_{G^{(k-1)}}(Q)/\mathcal{D}' \text{ e } P = \mathcal{B}_{G^{(k-1)}}(Q)/\mathcal{D}$$

são ambas variedades, e que P é um fibrado sobre M .

Seja $\sigma : P \rightarrow \mathcal{B}_{G^{(k-1)}}(Q)$ uma seção da projeção canônica $\mathcal{B}_{G^{(k-1)}}(Q) \rightarrow P$ (novamente, se uma seção global não existir, restringimos a um subconjunto aberto ainda

menor), e denote por θ' e por η' os pullbacks de θ e η por σ . Então, θ', η' é um correferencial em P , que satisfaz as equações estruturais

$$\begin{cases} d\theta' &= c'(\theta' \wedge \theta') - \eta' \wedge \theta' \\ d\eta' &= R'(\theta' \wedge \theta') + S'(\theta' \wedge \eta') - \eta' \wedge \eta' \end{cases}$$

onde $c', R',$ e S' são os pullbacks de $c, R,$ e S por σ .

Pelos mesmos argumentos dados no Exemplo 5.4.2, segue que P pode ser localmente mergulhada numa G -estrutura $\mathcal{B}_G(M)$ sobre M tal que $(\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)}$ é localmente equivalente à $\mathcal{B}_{G^{(k-1)}}(Q)$. Logo, $(M, (\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)}, (\theta^{(k-1)}, \eta^{(k-1)}), h)$ é uma realização, de onde segue o teorema. ■

6

Aplicações

Neste capítulo descreveremos diversas aplicações da existência de um algebróide de Lie classificante, A , para um problema de Cartan. Por um lado, mostraremos como usar o algebróide classificante para provar alguns resultados clássicos sobre as simetrias de uma G -estrutura. Por outro lado, argumentamos que o algebróide de Lie classificante de uma estrutura geométrica fixada numa variedade M deve ser visto como um invariante fundamental da estrutura. Em particular, indicamos uma forma de definir invariantes cohomológicos de uma estrutura geométrica usando a cohomologia de algebróide de Lie de A .

Para isso, primeiramente explicamos uma pequena extensão do problema de Cartan que é melhor adaptado a estes propósitos.

6.1 O Problema de Realização Generalizado

Nesta seção iremos generalizar o problema de realização de Cartan para o caso em que X é uma variedade. Isto será útil tanto em exemplos práticos quanto na demonstração de resultados clássicos da geometria diferencial.

Recorde que num problema de realização de Cartan, são fornecidos como dados iniciais, um número inteiro n , um subconjunto aberto X de \mathbb{R}^d , e funções $C_{ij}^k, F_i^a \in C^\infty(X)$, onde $1 \leq i, j, k \leq n$ e $1 \leq a \leq d$. Se x_1, \dots, x_d denotam coordenadas em X , então podemos definir n campos de vetores em X por

$$F_i = \sum_a F_i^a \frac{\partial}{\partial x_a}.$$

Quando (M, θ^i, h) é uma realização do problema de Cartan cujos dados iniciais são (n, X, C_{ij}^k, F_i^a) , podemos interpretar

$$dh = \sum_i F_i \theta^i$$

como um aplicação $TM \rightarrow TX$. Note que, com esta formulação, não fazemos nenhuma menção explícita às coordenadas x_a em X . Isso sugere que podemos generalizar o problema de realização da seguinte forma:

Problema 6.1.1 (Problema de Realização Generalizado) *Dados:*

- um número inteiro n ;
- uma variedade d -dimensional X ;
- funções $C_{ij}^k \in C^\infty(X)$, com $1 \leq i, j, k \leq n$;
- n campos de vetores $F_i \in \mathfrak{X}(X)$,

existe

- uma variedade n -dimensional M ;
- um correferencial θ^i em M ;
- uma aplicação suave $h : M \rightarrow X$

tais que

$$d\theta^k = \sum_{i < j} C_{ij}^k(h) \theta^i \wedge \theta^j \quad (6.1.1)$$

$$dh = \sum_i F_i(h) \theta^i ? \quad (6.1.2)$$

A solução deste problema é completamente análoga à solução do problema de realização original. As condições necessárias para existência de soluções obtidas impondo que $d^2 = 0$ se traduzem em

$$F_j C_{kl}^i + F_k C_{lj}^i + F_l C_{jk}^i = - \sum_m (C_{mj}^i C_{kl}^m + C_{mk}^i C_{lj}^m + C_{ml}^i C_{jk}^m) \quad (6.1.3)$$

$$[F_i, F_j] = - \sum_k C_{ij}^k F_k. \quad (6.1.4)$$

Denote por $A \rightarrow X$ o fibrado vetorial trivial sobre X com fibra \mathbb{R}^n e sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ uma base de seções de A . Então podemos definir uma aplicação de fibrados

$$\# : A \rightarrow TX, \quad \#(\alpha_i) = F_i.$$

Podemos também definir um colchete em $\Gamma(A)$ por

$$[\alpha_i, \alpha_j] = - \sum_k C_{ij}^k \alpha_k$$

em seções da base, e estendendo para qualquer seção pela imposição da identidade de Leibniz. Segue que (6.1.3) é equivalente à identidade de Jacobi para este colchete e que (6.1.4) é equivalente à $\# : \Gamma(A) \rightarrow \mathfrak{X}(X)$ ser um homomorfismo de álgebras de Lie. Logo, as condição necessária que obtemos para a existência de soluções do problema

de realização generalizado é que os dados iniciais do problema devem determinar uma estrutura de algebróide de Lie no fibrado vetorial trivial $A \cong X \times \mathbb{R}^n$ sobre X .

Reciprocamente, se os dados iniciais do problema de realização determinam a estrutura de um algebróide de Lie em $A \cong X \times \mathbb{R}^n \rightarrow X$, então (6.1.2) é equivalente à (θ, h) ser uma 1-forma com valores num algebróide de Lie, e (6.1.1) é equivalente à esta 1-forma satisfazer a equação de Maurer-Cartan generalizada. Assim, podemos aplicar a propriedade universal das formas de Maurer-Cartan em grupóides de Lie para concluir que existem realizações e que, além do mais, qualquer realização é localmente equivalente à restrição da forma de Maurer-Cartan à uma vizinhança da identidade numa s-fibra de um grupóide de Lie local que integra A .

A vantagem de introduzir o problema de realização generalizado é que agora, qualquer correferencial completamente regular determina um problema deste tipo, e portanto, um algebróide de Lie classificante. De fato, seja θ^i um correferencial completamente regular, de ordem s e posto d , numa variedade M . Denote por \mathcal{F}_s o conjunto de todas as derivadas correferenciais de ordem menor ou igual à s das funções estruturais C_{ij}^k do correferencial θ^i , i.e.,

$$\mathcal{F}_s = \left\{ C_{ij}^k, \frac{\partial C_{ij}^k}{\partial \theta^l}, \dots, \frac{\partial^s C_{ij}^k}{\partial \theta^{l_1} \dots \partial \theta^{l_s}} \right\}.$$

Denote por $\mathcal{F}_s(M)$ a imagem de M por todas as funções de \mathcal{F}_s , i.e.,

$$\mathcal{F}_s(M) = \{I(x) : x \in M \text{ e } I \in \mathcal{F}_s\}.$$

Então, como assumimos que o correferencial é regular, segue que $\mathcal{F}_s(M)$ é um subvariedade imersa d -dimensional (possivelmente com auto-interseção) do espaço Euclídeo \mathbb{R}^N cujas coordenadas são dadas por $z = (\dots, z_\sigma, \dots)$, onde $\sigma = (i, j, k, l_1, \dots, l_r)$, $0 \leq r \leq s$.

Recorde que (veja a Seção 4.1), localmente, podemos encontrar funções invariantes $I_1, \dots, I_d \in \mathcal{F}_s$ que geram \mathcal{F}_t para todo $t \geq 0$. Em outras palavras, qualquer $I \in \mathcal{F}_t$ pode ser escrita como $I = H(I_1, \dots, I_d)$ para alguma função suave $H : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Assim, o conjunto I_1, \dots, I_d pode ser interpretado como um sistema de coordenadas em $\mathcal{F}_s(M)$.

Para obter um problema de realização generalizado, tomamos $X = \mathcal{F}_s(M)$. Neste caso, já sabemos que as funções C_{ij}^k podem ser vistas com funções definidas em X . Seja $h : M \rightarrow X$ a aplicação

$$h(x) = \left(C_{ij}^k(x), \frac{\partial C_{ij}^k}{\partial \theta^l}(x), \dots, \frac{\partial^s C_{ij}^k}{\partial \theta^{l_1} \dots \partial \theta^{l_s}}(x) \right)$$

e defina n campos de vetores em X por $F_i = dh(\frac{\partial}{\partial \theta^i})$. Então (n, X, C_{ij}^k, F_i) são os dados iniciais de um problema de realização generalizado.

Finalmente, notamos que o algebróide de Lie classificante para o problema de Cartan descrito acima é sempre transitivo. De fato, isto poderia ser deduzido diretamente, através da observação que a aplicação h tem posto d . No entanto, preferimos dar o seguinte argumento: Vimos que para cada ponto x da base do algebróide classificante está associado um germe de um correferencial. Além do mais, se dois destes germes pertencem ao mesmo correferencial global, então eles correspondem a pontos na mesma folha de A em X . Mas, por construção, cada germe de correferencial determinado X é o germe do correferencial θ^i em algum ponto de M , e portanto, o algebróide de Lie classificante tem de ser transitivo.

6.2 Simetrias de Estruturas Geométricas

Nesta seção iremos demonstrar alguns resultados sobre as simetrias de uma estrutura geométrica regular. Nosso objetivo é mostrar como usar o algebróide de Lie classificante para recuperar alguns resultados clássicos da geometria diferencial. Para mais resultados sobre grupos de transformações sugerimos o livro [21]. Observamos, no entanto, que os resultados apresentados aqui são ligeiramente mais fracos que os de [21], pois precisamos impor uma hipótese de regularidade.

Para começar, enunciamos o seguinte corolário imediato da Proposição 4.8.2:

Corolário 6.2.1 (Teorema I.3.2 de [21]) *Seja θ^i um correferencial completamente regular numa variedade M . Então seu grupo de simetrias S é um grupo de Lie de dimensão $\dim S \leq \dim M$. Além do mais, as órbitas da ação de S em M são subvariedades fechadas de M .*

Demonstração. Como θ^i é um correferencial completamente regular, segue que suas funções estruturais e suas derivadas correferenciais de todas as ordens determinam um problema de Cartan generalizado para o qual (M, θ, h) é uma realização, onde h é a aplicação que associa à cada ponto p de M o valor dos invariantes estruturais em p . Logo, a Proposição 4.8.2 implica que a álgebra de Lie de simetrias \mathfrak{s} de M tem dimensão menor ou igual a dimensão de M . O grupo de simetrias S é um grupo de Lie cuja álgebra de Lie é isomorfa à \mathfrak{s} , o que demonstra a primeira parte do corolário.

Agora, para ver que as órbitas de S são subvariedades fechadas de M , notamos que $p, q \in M$ pertencem à mesma órbita se e somente se $h(p) = h(q)$. Logo, a órbita de S passando pelo ponto p é dada por $h^{-1}(h(p))$, que é claramente um subvariedade fechada.

■

Seja G um subgrupo de Lie de GL_n , e seja $\mathcal{B}_G(M)$ uma G -estrutura sobre M . Recorde que uma simetria de $\mathcal{B}_G(M)$ é um difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow M$ cujo levantamento preserva a G -estrutura.

Definição 6.2.2 *Seja $G \subset \mathrm{GL}_n$ um subgrupo de Lie de tipo finito k . Uma G -estrutura será chamada de **completamente regular** se a forma tautológica do seu k -ésimo prolongamento $(\mathcal{B}_G(M))^{(k)}$ (vista como um correferencial em $(\mathcal{B}_G(M))^{(k-1)}$) for completamente regular.*

Como as simetrias de uma G -estrutura coincidem com as simetrias dos seus prolongamentos (veja o Teorema 3.3.9), obtemos:

Corolário 6.2.3 (Teorema I.5.1 de [21]) *Seja $G \subset \mathrm{GL}_n$ um subgrupo de Lie de tipo finito k , e seja $\mathcal{B}_G(M)$ uma G -estrutura completamente regular sobre M . Então o grupo de simetrias S de $\mathcal{B}_G(M)$ é um grupo de Lie de dimensão*

$$\dim S \leq \dim M + \dim \mathfrak{g}^{k-1},$$

onde \mathfrak{g} denota a álgebra de Lie de G e $\mathfrak{g}^{k-1} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^{(k-1)}$.

Finalmente, descrevemos uma pequena generalização da noção de G -estruturas equipadas com conexões, para a qual nossos resultados ainda valem. Agora, G denota um grupo de Lie arbitrário, $H \subset G$ um subgrupo fechado de G e

$$\begin{array}{c} P \curvearrowright H \\ \downarrow \pi \\ M \end{array}$$

é um fibrado principal com grupo estrutural H sobre uma variedade M cuja dimensão é igual a $\dim G/H$.

Definição 6.2.4 Uma *conexão de Cartan* no fibrado H -principal P é uma 1-forma $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ tal que

1. $\omega(\tilde{A}) = A$ para todo $A \in \mathfrak{h}$, onde \tilde{A} denota o campo de vetores fundamental em P que é gerado por A ,
2. $(R_h)^*\omega = \text{Ad}_{h^{-1}}\omega$ para todo $h \in H$, onde Ad denota a ação adjunta de H em \mathfrak{g} , e
3. $\omega(\xi) \neq 0$ para todo vetor não nulo ξ tangente à P .

Chamaremos $(P, \pi, M, G, H, \omega)$ de uma **geometria de Cartan** em M .

Observação 6.2.5 Uma conexão de Cartan não é uma conexão no fibrado principal P . De fato, pelo último item na definição, e como $\dim P = \dim \mathfrak{g}$, segue que (as componentes de) uma conexão de Cartan é um correferencial em P , e portanto não pode ser uma forma de conexão, pois não se anula em vetores horizontais.

A **curvatura** de uma conexão de Cartan é a 2-forma Ω com valores em \mathfrak{g} definida por

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega].$$

Como veremos, uma geometria de Cartan pode ser vista como um espaço homogêneo deformado pela curvatura.

Apresentamos agora alguns exemplos de conexões de Cartan. Para outros exemplos, que incluem geometria conforme e projetiva, referimos a [21] e [30].

Exemplo 6.2.6 (G -Estruturas com Conexões) Sejam $H \subset \text{GL}_n$ um subgrupo fechado, $\mathcal{B}_H(M)$ uma H -estrutura sobre M com forma tautológica θ , e $\eta \in \Omega^1(\mathcal{B}_H(M), \mathfrak{h})$ uma forma de conexão. Então a 1-forma $\omega = (\theta, \eta)$ com valores em $\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{h}$ é uma conexão de Cartan. Aqui, G é o produto semi-direto $\mathbb{R}^n \rtimes H$.

A curvatura Ω desta geometria de Cartan toma valores em $\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{h}$, e suas componentes são a torção e a curvatura da conexão η .

Exemplo 6.2.7 (Espaços Homogêneos) Seja $M = G/H$ um espaço homogêneo. A forma de Maurer-Cartan ω_{MC} de G é uma conexão de Cartan no fibrado principal $P = G$ com grupo estrutural H sobre M . A curvatura Ω desta geometria de Cartan se anula identicamente.

Reciprocamente, se a curvatura de uma geometria de Cartan em M é nula, então como consequência da propriedade universal das formas de Maurer-Cartan em grupos de Lie, segue que cada ponto de M tem uma vizinhança que é difeomorfa à uma vizinhança de eH no espaço homogêneo G/H .

Definição 6.2.8 Uma *simetria* de uma geometria de Cartan em M é um automorfismo φ do fibrado principal P que preserva a conexão de Cartan, i.e., $\phi^*\omega = \omega$.

Novamente, diremos que uma geometria de Cartan é **completamente regular** se sua conexão de Cartan, vista como um correferencial em P , for completamente regular. Obtemos:

Corolário 6.2.9 (Teorema IV.3.1 de [21]) O grupo de simetrias S de uma geometria de Cartan $(P, \pi, M, G, H, \omega)$ é um grupo de Lie de dimensão $\leq \dim P$. Além do mais, as suas órbitas são subvariedades fechadas de P .

6.3 Invariantes Cohomológicos de Estruturas Geométricas

Nesta seção, argumentamos que o algebróide de Lie classificante A , de uma estrutura geométrica fixada, deve ser visto como um invariante fundamental da estrutura. Apesar da classe de isomorfismo do algebróide classificante não distinguir entre correferenciais que são globalmente equivalentes, a menos de recobrimento, mostramos como usar a cohomologia de algebróide de Lie de A para construir invariantes de isomorfismo global de correferenciais.

Sejam θ um correferencial completamente regular numa variedade M , e $A \rightarrow X$ o algebróide de Lie classificante do problema de realização generalizado associado a θ . Denotamos por $h : M \rightarrow X$ a aplicação que torna (M, θ, h) numa realização.

Recorde que denotamos por $\mathcal{F}_s(\theta)$ o conjunto de todas as funções estruturais de θ , além de suas derivadas correferenciais de ordem menor ou igual a s . O ponto fundamental a ser notado é que se $\bar{\theta}$ é outro correferencial numa variedade \bar{M} , e se $\pi : \bar{M} \rightarrow M$ é um difeomorfismo local sobrejetivo que preserva os correferenciais, então

$$\mathcal{F}_s(\bar{\theta}) = \pi^*\mathcal{F}_s(\theta), \text{ para todo } s \geq 0.$$

Logo, em particular, $(\bar{M}, \bar{\theta}, h \circ \pi)$ é uma realização do problema de Cartan generalizado determinado por (M, θ) , e π é um recobrimento de realizações. É claro que:

Proposição 6.3.1 Seja θ um correferencial completamente regular em M e seja $\bar{\theta}$ um correferencial arbitrário em \bar{M} . Se (M, θ) e $(\bar{M}, \bar{\theta})$ são globalmente equivalentes, a menos de recobrimento, então

1. $\bar{\theta}$ é um correferencial completamente regular em \bar{M} , e
2. o algebróide de Lie classificante associado a $\bar{\theta}$ é isomorfo ao algebróide de Lie classificante associado a θ .

Observação 6.3.2 A recíproca da proposição acima não vale. De fato, o Exemplo 4.10.1 mostra que dois correferenciais (M, θ) e $(\bar{M}, \bar{\theta})$ podem ter seus algebróides de Lie classificantes isomorfos sem que os correferenciais sejam globalmente equivalentes, a menos de recobrimento.

Segue que a classe de isomorfismo do algebróide de Lie classificante de um correferencial completamente regular é um invariante da classe de equivalência global, a menos de recobrimento, do correferencial.

A filosofia geral que advogamos é que um correferencial θ em M , visto como um morfismo de algebróides de Lie $\theta : TM \rightarrow A$, deve relacionar os invariantes de A com os invariantes do correferencial. Para ilustrar este ponto de vista, iremos descrever dois invariantes de correferenciais usando a cohomologia de algebróide de Lie de A .

Lembre que (veja a Seção 2.1) em qualquer algebróide de Lie existe uma diferencial exterior $d_A : \Gamma(\wedge^\bullet A^*) \rightarrow \Gamma(\wedge^{\bullet+1} A^*)$ que torna $(\Gamma(\wedge^\bullet A^*), d_A)$ em um complexo de cadeia cuja cohomologia $H^\bullet(A)$ chamamos de cohomologia de algebróide de A . Explícitamente,

$$d_A \phi(\alpha_0, \dots, \alpha_k) = \sum_{i=1}^k (-1)^i \#(\alpha_i) \cdot \phi(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_k) + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \phi([\alpha_i, \alpha_j], \alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_k).$$

Lembre também que um morfismo de algebróides de Lie $A \rightarrow B$ é uma aplicação de complexos de cadeia

$$(\Gamma(\wedge^\bullet B^*), d_B) \rightarrow (\Gamma(\wedge^\bullet A^*), d_A)$$

(veja a Proposição 2.1.11). Segue que um correferencial completamente regular θ em M induz uma aplicação $\theta^* : H^\bullet(A) \rightarrow H_{\text{dR}}^\bullet(M)$ da cohomologia de algebróide de Lie do algebróide classificante para a cohomologia de de Rham de M .

Denotamos por

$$H^*(A) = \bigoplus_{k=1}^n H^k(A),$$

o anél de cohomologia de A . Então, é claro que:

Proposição 6.3.3 *Sejam (M, θ) e $(\bar{M}, \bar{\theta})$ correferenciais completamente regulares que são globalmente equivalentes, a menos de recobrimento. Denote por (N, η) um recobrimento de realizações comum a ambos os correferenciais, i.e.,*

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ \phi \swarrow & & \searrow \bar{\phi} \\ M & & \bar{M}. \end{array}$$

Então os subanéis $\phi^* \theta^*(H^*(A))$ e $\bar{\phi}^* \bar{\theta}^*(H^*(A))$ de $H_{\text{dR}}(N)$ são isomorfos.

Em particular, se (M, θ) e $(\bar{M}, \bar{\theta})$ são correferenciais globalmente isomorfos, então os subanéis $\theta^*(H^*(A)) \subset H_{\text{dR}}^*(M)$ e $\bar{\theta}^*(H^*(A)) \subset H_{\text{dR}}^*(\bar{M})$ são isomorfos.

Observação 6.3.4 *Podemos descrever o subanél $\theta^*(H^*(A))$ em termos da folheação em M dada pelas órbitas da ação infinitesimal da álgebra de Lie de simetrias, ou equivalentemente, pelas fibras da aplicação $h : M \rightarrow X$.*

De fato, recordamos que uma k -forma diferencial ϕ em M é chamada de **básica** se ela é o pullback de uma seção φ de $\wedge^k A^*$ por θ , i.e.,

$$\phi = \theta^* \varphi.$$

Assim, por definição, qualquer elemento de $\theta^*(H^*(A))$ tem um representante que é básico. Se escrevermos ϕ em termos do correferencial θ

$$\phi = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1, \dots, i_k} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_k},$$

então ϕ é básica se e somente se $f_{i_1, \dots, i_k} \in C^\infty(M)$ satisfazem

$$f_{i_1, \dots, i_k} = a_{i_1, \dots, i_k} \circ h,$$

onde $a_{i_1, \dots, i_k} \in C^\infty(X)$. Em outras palavras, as funções f_{i_1, \dots, i_k} têm de ser constantes ao longo das fibras de h , i.e., elas são **funções básicas** com respeito a folheação em M dada pelas fibras de h , ou equivalentemente, pelas órbitas da ação infinitesimal da álgebra de Lie de simetrias de θ .

As 1-formas θ^k são básicas, e como as funções estruturais de θ podem ser escritas como funções definidas em X , segue que as 2-formas $d\theta^k$ são básicas também. Além do mais, como as derivadas correferenciais de h também podem ser escritas como funções definidas em X , obtemos, como consequência da regra da cadeia que as derivadas correferenciais de um função básica é também básica. Logo, o conjunto das formas básicas em M formam um subcomplexo de $(\Omega^\bullet(M), d)$.

Chamaremos uma função $f \in C^\infty(M)$ de **1-básica** se suas derivadas correferenciais forem funções básicas. Definimos indutivamente o conjunto das **funções l-básicas** como sendo o subconjunto das funções em M cujas derivadas correferenciais são $l-1$ -básicas. Fica natural definir também o conjunto das **k-formas l-básicas**, $\Omega^{l,k}(M, \theta)$, como o conjunto das k -formas em M cujos coeficientes, quando escrito em termos do correferencial θ , são funções l -básicas. A diferencial exterior de formas em M induz uma diferencial

$$\delta : \Omega^{l,k}(M, \theta) \rightarrow \Omega^{l-1, k+1}(M, \theta)$$

que torna $(\Omega^{\bullet, \bullet}, \delta)$ num complexo bigraduado. Se denotarmos a cohomologia deste complexo por $H^{l,k}(M, \theta)$, fica claro que $\theta^*(H^k(A))$ é isomorfo a $H^{0,k}(M, \theta)$.

Outra maneira de obter invariantes cohomológicos de um correferencial é olhando para as classes características de A . Recordamos aqui o caso mais simples, a **classe modular** de A . Para maiores detalhes e exemplos, sugerimos que o leitor consulte [16] e [22]. Para a definição de outras classes características de algebróides de Lie, referimos a [17], [11], e [14].

Definição 6.3.5 Uma representação de um algebróide de Lie $A \rightarrow X$ num fibrado vetorial $E \rightarrow X$ é uma aplicação \mathbb{R} -bilinear

$$\nabla : \Gamma(A) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$$

que satisfaz

- $\nabla_{f\alpha} s = f \nabla_{\alpha} s$,
- $\nabla_{\alpha} f s = f \nabla_{\alpha} s + \# \alpha(f) s$, e
- $\nabla_{\alpha} \nabla_{\alpha'} s - \nabla_{\alpha'} \nabla_{\alpha} s - \nabla_{[\alpha, \alpha']} s = 0$,

para quaisquer seções $\alpha, \alpha' \in \Gamma(A)$, $s \in \Gamma(E)$ e qualquer função $f \in C^\infty(X)$.

Quando $E = \mathbb{L}$ é um fibrado de linha orientável, e λ é uma seção não nula de \mathbb{L} , a seção φ_λ de A^* definida por

$$\varphi_\lambda(\alpha)\lambda = \nabla_\alpha \lambda, \text{ para todo } \alpha \in \Gamma(A)$$

é d_A -fechada. Além do mais, sua classe de cohomologia de algebróide de Lie é independente da escolha de λ . Ela será chamada de **classe característica** da representação, e denotada por $\text{char}(\nabla)$.

Se \mathbb{L} não é orientável, então $\mathbb{L} \otimes \mathbb{L}$ é orientável. A representação ∇ em \mathbb{L} induz uma representação $\bar{\nabla}$ em $\mathbb{L} \otimes \mathbb{L}$. Neste caso, definimos

$$\text{char}(\nabla) := \frac{1}{2} \text{char}(\bar{\nabla}).$$

Todo algebróide de Lie pode ser representado naturalmente no fibrado de linha

$$\mathbb{L} = \wedge^{\text{top}} A \otimes \wedge^{\text{top}} T^* X$$

através de

$$\nabla_\alpha(\psi \otimes \phi) = [\alpha, \psi] \otimes \phi + \psi \otimes \mathcal{L}_{\# \alpha} \phi,$$

onde $[\cdot, \cdot]$ denota o colchete de Gerstenhaber em $\Gamma(\wedge^\bullet A)$. A classe característica desta representação, denotada por $\text{Mod}(A)$, é chamada de **classe modular** do algebróide de Lie.

Definição 6.3.6 Seja θ um correferencial completamente regular em M com algebróide de Lie classificante A . A **classe modular do correferencial**, $\text{Mod}(\theta)$, é a classe de cohomologia

$$\text{Mod}(\theta) = -\theta^* \text{Mod}(A) \in H_{\text{dR}}^1(M).$$

Observação 6.3.7 Como a classe modular do fibrado tangente de uma variedade é nula, a definição acima é consistente com a definição de classe modular de um morfismo de algebróides de Lie apresentada em [22].

Claramente, temos:

Proposição 6.3.8 Sejam (M, θ) e $(\bar{M}, \bar{\theta})$ correferenciais completamente regulares que são globalmente equivalentes, a menos de recobrimento. Seja (N, η) um recobrimento de realizações comum a ambos os correferenciais, i.e.,

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ \phi \swarrow & & \searrow \bar{\phi} \\ M & & \bar{M} \end{array}$$

Então

$$\phi^* \text{Mod}(\theta) = \bar{\phi}^* \text{Mod}(\bar{\theta}).$$

Em particular, se θ_1 e θ_2 são correferenciais completamente regulares numa mesma variedade M , que são globalmente isomorfos, então, $\text{Mod}(\theta_1) = \text{Mod}(\theta_2)$.

Exemplos

Este capítulo é dedicado à apresentação de alguns exemplos que ilustram os resultados obtidos ao longo da tese. Iremos exibir o algebróide de Lie classificante em diversos exemplos relacionados à conexões sem torção numa G -estrutura. Para começar, consideramos uma conexão sem torção arbitrária numa G -estrutura também arbitrária. Acontece, no entanto, que o espaço de moduli de todos os germes de tais conexões tem dimensão infinita, e portanto, não pode ser tratado pelos nossos métodos. Por outro lado, existem muitas classes interessantes de conexões sem torção cujo espaço de moduli tem dimensão finita. Este é caso das conexões sem torção de curvatura constante e das conexões sem torção que são localmente simétricas, os primeiros exemplos apresentados abaixo.

O nosso exemplo principal, no entanto, são as conexões simpléticas especiais, para as quais dedicamos uma parte substancial deste capítulo. Apesar da maioria dos resultados apresentados sobre estas conexões não serem novos, a nossa abordagem ao problema é ligeiramente diferente da abordagem original. O nosso ponto de partida é a construção do algebróide de Lie classificante para estas estruturas, a partir da qual, todas as outras propriedades são deduzidas. Isto torna muitas das construções naturais e menos misteriosas. Referências precisas serão dadas ao longo do texto.

7.1 As Equações Estruturais de uma Conexão Sem Torção

Seja $G \subset GL(V)$ um subgrupo de Lie, onde V é um espaço vetorial (real) de dimensão n . Se o leitor preferir, ele pode fixar uma base de V para identificá-lo com \mathbb{R}^n . Seja $\mathcal{B}_G(M)$ uma G -estrutura sobre M e seja η uma forma de conexão em $\mathcal{B}_G(M)$. Então, (θ, η) é um correferencial em $\mathcal{B}_G(M)$, onde θ denota a forma tautológica de $\mathcal{B}_G(M)$. Suas equações

estruturais tomam a forma

$$\begin{cases} d\theta = -\eta \wedge \theta \\ d\eta = R(\theta \wedge \theta) - \eta \wedge \eta \end{cases} \quad (7.1.1)$$

onde $R : \mathcal{B}_G(M) \rightarrow \wedge^2 V^* \otimes \mathfrak{g}$ é uma aplicação suave.

Quando igualamos a diferencial da primeira equação a 0, i.e., quando impomos que $d^2\theta = 0$, obtemos, para cada $p \in \mathcal{B}_G(M)$

$$R(p)(u, v)w + R(p)(v, w)u + R(p)(w, u)v = 0 \text{ para todo } u, v, w \in V,$$

que é conhecida como a **primeira identidade de Bianchi**. Segue que a aplicação R toma valores no **espaço das curvaturas formais**

$$\mathcal{K}(\mathfrak{g}) = \{R \in \wedge^2 V^* \otimes \mathfrak{g} : R(u, v)w + \text{perm. cícl.} = 0 \text{ para todo } u, v, w \in V\},$$

ou seja,

$$R : \mathcal{B}_G(M) \rightarrow \mathcal{K}(\mathfrak{g}).$$

Como $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$ é um espaço vetorial, a diferencial de R é uma aplicação

$$dR : T\mathcal{B}_G(M) \rightarrow \mathcal{K}(\mathfrak{g}).$$

Usando o fato de que (θ, η) é um correferencial em $\mathcal{B}_G(M)$, podemos expressar dR em termos de sua componente horizontal $\frac{\partial R}{\partial \theta}$, sua componente vertical $\frac{\partial R}{\partial \eta}$, e o correferencial por

$$dR = \frac{\partial R}{\partial \theta} \circ \theta + \frac{\partial R}{\partial \eta} \circ \eta, \quad (7.1.2)$$

onde

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} : \mathcal{B}_G(M) \rightarrow V^* \otimes \mathcal{K}(\mathfrak{g}), \text{ e } \frac{\partial R}{\partial \eta} : \mathcal{B}_G(M) \rightarrow \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{K}(\mathfrak{g}).$$

Quando diferenciamos a equação para $d\eta$ e impomos $d^2\eta = 0$ obtemos, para cada $p \in \mathcal{B}_G(M)$ e para todo $u, v, w \in V$ e $A \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \theta}(p)(u)(v, w) + \frac{\partial R}{\partial \theta}(p)(v)(w, u) + \frac{\partial R}{\partial \theta}(p)(w)(u, v) &= 0 \\ \frac{\partial R}{\partial \eta}(p)(A)(u, v) - R(p)(Au, v) - R(p)(u, Av) - [A, R(p)(u, v)]_{\mathfrak{g}} &= 0. \end{aligned}$$

A primeira equação acima, conhecida como a **segunda identidade de Bianchi**, implica que $\frac{\partial R}{\partial \theta}$ toma valores no espaço das **derivadas covariantes formais**

$$\mathcal{K}^1(\mathfrak{g}) = \{\psi \in V^* \otimes \mathcal{K}(\mathfrak{g}) : \psi(u)(v, w) + \text{perm. cícl.} = 0 \text{ para todo } u, v, w \in V\},$$

ou seja,

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} : \mathcal{B}_G(M) \rightarrow \mathcal{K}^1(\mathfrak{g}).$$

Por outro lado, a segunda equação expressa $\frac{\partial R}{\partial \eta}$ como uma função de R . Se definirmos uma aplicação $\Xi : \mathcal{K}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{K}(\mathfrak{g})$ por

$$\Xi(R)(A)(u, v) = R(Au, v) + R(u, Av) + [A, R(u, v)]_{\mathfrak{g}} \quad (7.1.3)$$

então para qualquer conexão sem torção η em $\mathcal{B}_G(M)$, temos

$$\frac{\partial R}{\partial \eta}(p) = \Xi(R(p)) \text{ para todo } p \in \mathcal{B}_G(M).$$

Segue que $\frac{\partial R}{\partial \eta}(p)$ é determinado por $R(p)$, e portanto é irrelevante para o problema de equivalência de conexões sem torção em G -estruturas.

Para que possamos continuar, precisamos diferenciar a equação (7.1.2) e impor a condição $d^2 R = 0$. Como consequência, aparecem relações nos coeficientes de

$$d\left(\frac{\partial R}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial^2 R}{(\partial \theta)^2} \circ \theta + \frac{\partial^2 R}{\partial \eta \partial \theta} \circ \eta$$

que precisam ser satisfeitos. Novamente, a componente vertical, $\frac{\partial^2 R}{\partial \eta \partial \theta}$ pode ser escrita como uma função de R e $\frac{\partial R}{\partial \theta}$, e a função invariante relevante será $\frac{\partial^2 R}{(\partial \theta)^2}$. Este novo invariante terá de satisfazer uma condição que podemos chamar de **terceira identidade de Bianchi**.

O objetivo final deste processo de diferenciar as equações estruturais e impor a condição $d^2 = 0$ é o de obter um conjunto de funções invariantes que determinam qualquer outro invariante estrutural. Quando isto ocorre, teremos que $d^2 = 0$ será uma consequência formal das equações anteriores.

Acontece, no entanto, que para uma conexão sem torção arbitrária numa G -estrutura, este processo nunca irá terminar, i.e., a cada passo teremos que introduzir uma função invariante nova, que é funcionalmente independente das anteriores. Para ver isto, notamos que existem conexões cujas derivadas covariantes de ordem k coincidem num ponto, para todo k , mas que não são localmente equivalentes.

Descreveremos agora alguns exemplos nos quais, depois de restringir os possíveis valores da curvatura R da conexão sem torção, obtemos um espaço de moduli de dimensão finita.

7.2 Conexões Sem Torção de Curvatura Constante

Nesta seção iremos descrever o espaço das conexões sem torção numa G -estrutura $\mathcal{B}_G(M)$ para as quais a aplicação de curvatura $R : \mathcal{B}_G(M) \rightarrow \mathcal{K}(\mathfrak{g})$ é constante. Começamos com um exemplo:

Exemplo 7.2.1 (Conexões Planas Sem Torção) O exemplo mais simples que podemos considerar é o de conexões sem torção η em $\mathcal{B}_G(M)$ que são planas, i.e., tal que a curvatura R é identicamente nula, $R(p) \equiv 0$.

Se η é uma conexão sem torção plana numa G -estrutura $\mathcal{B}_G(M)$, então ela satisfaz a equação estrutural

$$\begin{cases} d\theta &= -\eta \wedge \theta \\ d\eta &= -\eta \wedge \eta \end{cases} \quad (7.2.1)$$

onde θ é a forma tautológica de $\mathcal{B}_G(M)$.

Note que estas são as equações estruturais da álgebra de Lie $W = V \rtimes \mathfrak{g}$, cujo colchete é dado por

$$[(u, A), (v, B)] = (Av - Bu, [A, B]_{\mathfrak{g}}), \text{ para todo } u, v \in V, \text{ e } A, B \in \mathfrak{g}.$$

A 1-forma (θ, η) com valores em $V \oplus \mathfrak{g}$ é uma forma de Maurer-Cartan em $\mathcal{B}_G(M)$ com valores numa álgebra de Lie. Segue que $\mathcal{B}_G(M)$ tem de ser localmente equivalente a G -estrutura plana canônica $\mathcal{B}_G(V) \cong V \times G$ sobre V .

Retornamos agora ao problema de classificação de conexões sem torção de curvatura constante. Vimos que para qualquer conexão sem torção η , temos

$$dR = \frac{\partial R}{\partial \theta} \theta + \Xi(R)\eta.$$

Quando a curvatura é uma função constante, segue que $dR = 0$, e isto impõe restrições nos possíveis valores de R . De fato, é necessário que $\Xi(R) = 0$, e portanto R toma valores no espaço vetorial $\ker(\Xi) \subset \mathcal{K}(\mathfrak{g})$. Assim, obtemos:

Teorema 7.2.2 *Seja η uma conexão sem torção de curvatura constante numa G -estrutura $\mathcal{B}_G(M)$. Então η satisfaz as equações estruturais*

$$\begin{cases} d\theta &= -\eta \wedge \theta \\ d\eta &= R(\theta \wedge \theta) - \eta \wedge \eta \\ dR &= 0 \end{cases} \quad (7.2.2)$$

onde $R : \mathcal{B}_G(M) \rightarrow \ker(\Xi)$.

Observação 7.2.3 *Do nosso ponto de vista, o teorema acima deve ser interpretado como dizendo que o algebróide classificante das conexões sem torção de curvatura constante é um fibrado de álgebras de Lie sobre $\ker(\Xi)$, cuja fibra sobre um ponto $R \in \ker(\Xi)$ é a álgebra de Lie $V \rtimes \mathfrak{g}$ equipada com o colchete*

$$[(u, A), (v, B)] = (Av - Bu, [A, B]_{\mathfrak{g}} - R(u, v)).$$

Exemplo 7.2.4 (Métricas de Curvatura Constante em \mathbb{R}^2) *Como um exemplo simples, suponha que queremos classificar todas as métricas Riemannianas de curvatura constante numa vizinhança da origem de \mathbb{R}^2 . A G -estrutura que temos de considerar neste caso é o fibrado dos referenciais ortonormais de \mathbb{R}^2 ($G = O_2$). É um fato bem conhecido que, neste caso, a função estrutural de primeira ordem é nula e que $O_2^{(1)} = \{e\}$. As equações estruturais têm a forma:*

$$\begin{cases} d\omega &= -\eta \wedge \omega \\ d\eta &= k\omega \wedge \omega \end{cases} \quad (7.2.3)$$

onde η é a forma de conexão que corresponde a conexão de Levi-Civita e k é a curvatura Gaussiana de η . Se a curvatura k é constante, então $dk = 0$. Em termos da base canônica de \mathbb{R}^2 as equações estruturais são

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= -\eta \wedge \omega^2 \\ d\omega^2 &= \eta \wedge \omega^1 \\ d\eta &= k\omega^1 \wedge \omega^2 \\ dk &= 0 \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

A curvatura Gaussian é a única função invariante. Segue que o algebróide de Lie classificante que obtemos é $A \rightarrow \mathbb{R}$ que tem uma base de seções $\{e_1, e_2, e_3\}$ e estrutura dada por

$$\begin{aligned} [e_1, e_2](k) &= -ke_3 \\ [e_1, e_3](k) &= e_2 \\ [e_2, e_3](k) &= -e_1 \\ \#e_i &= 0. \end{aligned} \tag{7.2.5}$$

Logo, algebróide de Lie que obtemos é um fibrado de álgebras de Lie cujas fibras são isomorfas a

\mathfrak{sl}_2	se $k < 0$	Geometria Hiperbólica
\mathfrak{se}_2	se $k = 0$	Geometria Euclideana
\mathfrak{so}_3	se $k > 0$	Geometria Esférica

A ação infinitesimal de \mathfrak{o}_2 em A por automorfismos internos é a ação fibra a fibra obtida pela representação adjunta. Segue que para cada valor de $k \in \mathbb{R}$ corresponde um germe em 0 de uma métrica de curvatura constante em \mathbb{R}^2 .

7.3 Conexões Localmente Simétricas

Na mesma direção do exemplo da seção anterior, descrevemos agora as conexões sem torção numa G -estrutura $\mathcal{B}_G(M)$ para as quais a derivada covariante da curvatura se anula.

Definição 7.3.1 Uma conexão sem torção η numa G -estrutura $\mathcal{B}_G(M)$ será chamada de **localmente simétrica** se a derivada covariante da sua curvatura se anula, i.e., $\frac{\partial R}{\partial \theta} \equiv 0$.

Se η é uma conexão localmente simétrica, então

$$dR = \Xi(R)\eta.$$

Diferenciando esta equação obtemos uma restrição nos possíveis valores de R . De fato, se denotarmos por $\Psi : \mathcal{K}(\mathfrak{g}) \rightarrow \wedge^2 V^* \otimes \mathcal{K}(\mathfrak{g})$ a aplicação

$$\Psi(R)(u, v) = \Xi(R)(R(u, v)),$$

então $d^2R = 0$, aplicado a dois campos fundamentais horizontais implica que R tem de tomar valores no conjunto dos zeros de Ψ , i.e.,

$$R : \mathcal{B}_G(M) \rightarrow Z(\Psi) = \{R \in \mathcal{K}(\mathfrak{g}) : \Psi(R) = 0\}.$$

Se aplicarmos $d^2R = 0$ a dois campos fundamentais verticais, vemos que R tem de tomar valores no conjunto dos zeros da aplicação $\Phi : \mathcal{K}(\mathfrak{g}) \rightarrow \wedge^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{K}(\mathfrak{g})$,

$$\Phi(R)(A, B)(u, v) = \Xi(\Xi(R)(A))(B) - \Xi(\Xi(R)(B))(A) - \Xi(R)([A, B]).$$

Depois de uma conta longa, porém direta, podemos mostrar que

$$\Phi(R)(A, B)(u, v) = -2[[A, B], R(u, v)].$$

Finalmente, aplicando $d^2R = 0$ a um par formado por um vetor fundamental horizontal e um vertical não obtemos nenhuma nova restrição nos valores permitidos de R . Concluimos que:

Teorema 7.3.2 *Seja η uma conexão localmente simétrica numa G -estrutura $\mathcal{B}_G(M)$. Então η satisfaz as equações estruturais*

$$\begin{cases} d\theta &= -\eta \wedge \theta \\ d\eta &= R \circ \theta \wedge \theta - \eta \wedge \eta \\ dR &= \Xi(R)\eta \end{cases} \quad (7.3.1)$$

onde $R : \mathcal{B}_G(M) \rightarrow Z(\Psi) \cap \ker \Phi$ e $Z(\Psi)$ é o conjunto dos zeros da aplicação Ψ .

Observação 7.3.3 *Observamos que $Z(\Psi) \cap \ker \Phi$ é a interseção do conjunto de zeros de uma aplicação quadrática com um subespaço linear, e (pelo menos a priori) não é uma variedade. Para podermos aplicar nossos métodos, precisamos remover todos os seus pontos singulares para obtermos um algebróide de Lie classificante, ou equivalentemente, um problema de realização generalizado. Esta restrição vem do fato de que consideramos somente correferenciais que são completamente regulares.*

7.4 Grupos Próprios de Holonomia

Nesta seção iremos enunciar alguns fatos gerais sobre o grupo de holonomia de uma conexão num fibrado G -principal. Esta seção é uma coleção dos resultados de [31] e [33] para os quais referimos para maiores detalhes.

Seja

$$\begin{array}{c} P \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \leftarrow \end{array} G \\ \pi \downarrow \\ M \end{array}$$

um fibrado principal com grupo estrutural G sobre M , e seja $\eta \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ uma forma de conexão. Denote por Γ a distribuição horizontal em P

$$\Gamma_p = \{\xi \in T_p P : \eta_p(\xi) = 0\}$$

associado a η . Seja Y um campo de vetores em M . Em cada ponto $p \in P$ existe um único vetor $\xi_Y \in \Gamma_p$ tal que $\pi_*(\xi_Y) = Y$. Um campo de vetores $\xi \in \mathfrak{X}(P)$ que é tangente à Γ em todos os pontos de P será chamado um **campo de vetores horizontal**.

Agora, seja γ uma curva em M . Usando o levantamento horizontal de campos de vetores em M a campos de vetores horizontais em P , podemos mostrar que para um ponto $p \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ dado, existe uma única curva horizontal $\tilde{\gamma}_p$ em P tal que $\tilde{\gamma}_p(0) = p$ e $\pi(\tilde{\gamma}_p) = \gamma$. No primeiro olhar, devemos esperar que a curva $\tilde{\gamma}_p$ só está definida para $0 \leq t < \epsilon$. No entanto, não é difícil de mostrar que ela pode ser estendida até $t = 1$. Defimos o **transporte paralelo** ao longo de γ como sendo a aplicação \mathcal{P}_γ que associa a cada ponto $p \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ o ponto $\tilde{\gamma}_p(1) \in \pi^{-1}(\gamma(1))$, i.e.,

$$\mathcal{P}_\gamma : \pi^{-1}(\gamma(0)) \rightarrow \pi^{-1}(\gamma(1)), \quad p \mapsto \tilde{\gamma}_p(1).$$

Em particular, se γ é uma curva fechada em M , então $\mathcal{P}_\gamma : \pi^{-1}(\gamma(0)) \rightarrow \pi^{-1}(\gamma(0))$ é um difeomorfismo da fibra em si mesma. Além do mais, \mathcal{P}_γ é G -equivariante, i.e., $\mathcal{P}_\gamma(pa) = \mathcal{P}_\gamma(p)a$ para todo $a \in G$. O conjunto

$$\text{Hol}_x(\eta) = \{\mathcal{P}_\gamma : \gamma \text{ é uma curva fechada em } M \text{ com ponto base } x\}$$

é um grupo de Lie cujo produto é herdado da concatenação de caminhos. Ele é chamado de **grupo de holonomia de η em x** .

Suponha que M é conexo, seja y outro ponto de M e seja γ uma curva ligando x a y . Então é fácil ver que

$$\text{Hol}_y(\eta) = \mathcal{P}_\gamma \text{Hol}_x(\eta) \mathcal{P}_\gamma^{-1},$$

e portanto, ambos os grupos são isomorfos.

Agora fixe um ponto p na fibra de P sobre x . para qualquer $\mathcal{P} \in \text{Hol}_x(\eta)$ temos que $\mathcal{P}(p) = pa_{\mathcal{P}}$ para algum $a_{\mathcal{P}} \in G$. A aplicação

$$\psi_p : \text{Hol}_x(\eta) \rightarrow G \quad \mathcal{P} \mapsto a_{\mathcal{P}}$$

é um homomorfismo injetor de grupos. Além do mais, a classe de conjugação da sua imagem em G é independente das escolhas de p e x . Por abuso de linguagem, iremos nos referir a ambos $\text{Hol}(\eta) = \psi_p(\text{Hol}_x(\eta))$ e sua classe de conjugação como o **grupo de holonomia de η** . Quando houver a necessidade de se evitar mal entendidos, iremos denotar a classe de conjugação de $\text{Hol}(\eta)$ por $[\text{Hol}(\eta)]$.

A holonomia de uma conexão é útil quando se quer encontrar reduções de um fibrado principal. De fato, temos o seguinte teorema que foi demonstrado em [33]:

Teorema 7.4.1 *Seja η uma conexão em P com grupo de holonomia $\text{Hol}(\eta)$. Então existe uma redução P' de P ao grupo $\text{Hol}(\eta)$. Além do mais, η se restringe a uma conexão em P' .*

Podemos calcular a álgebra de Lie do grupo de holonomia de uma conexão de uma maneira bastante simples. Recorde que a curvatura de uma conexão η é a 2-forma Ω em P com valores em \mathfrak{g} definida por

$$\Omega(\xi_1, \xi_2) = d\eta(\xi_1^\Gamma, \xi_2^\Gamma) = d\eta(\xi_1, \xi_2) - [\eta(\xi_1), \eta(\xi_2)], \text{ para todo } \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{X}(P),$$

onde ξ^Γ denota a componente horizontal de ξ . Agora, denote por $\mathfrak{hol}_x(\eta)$ a álgebra de Lie de $\text{Hol}_x(\eta)$. Se fixarmos um ponto $p \in \pi^{-1}(x)$, podemos ver a álgebra de holonomia em x como uma subálgebra $d_e\psi_p(\mathfrak{hol}_x(\eta))$ de \mathfrak{g} , onde e denota a identidade de $\text{Hol}_x(\eta)$. Um dos resultados principais da teoria de holonomia é a relação entre a curvatura de η e $\mathfrak{hol}_x(\eta)$. Ela é dada pelo teorema de holonomia de Ambrose-Singer [1] que enunciamos abaixo.

Teorema 7.4.2 (Teorema de Holonomia de Ambrose-Singer [1]) *Fixe um ponto $p \in \pi^{-1}(x)$. Então a álgebra de Lie de holonomia de η em x , $\mathfrak{hol}_x(\eta)$, vista como uma subálgebra de \mathfrak{g} , é gerada pelos elementos da forma $\Omega_q(\xi_1, \xi_2)$, onde q é qualquer ponto de P que pode ser obtido de p por transporte paralelo, e ξ_1 e ξ_2 são vetores horizontais tangentes a P em q .*

Voltamos agora para o caso em que $P = \mathcal{B}(M)$ é o fibrado dos referenciais de M . Foi demonstrado em [19] que qualquer subgrupo fechado de $\text{GL}(V)$ pode ser realizado como o grupo de holonomia de alguma conexão em $\mathcal{B}(M)$. No entanto, se nos restringimos a conexões sem torção, o problema de determinar quais os subgrupos fechados que são os grupos de holonomia de alguma conexão se torna não trivial.

Definição 7.4.3 Um subgrupo próprio $H \subset \mathrm{GL}_n$ é chamado de um **grupo próprio de holonomia** se existir uma variedade M e uma conexão sem torção η em $\mathcal{B}(M)$ cujo grupo de holonomia é (conjugado a) H .

Em [2], foi introduzido um critério algébrico para decidir se uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}_n$ pode ser a álgebra de Lie de um grupo próprio de holonomia. Recorde que $\mathcal{K}(\mathfrak{h}) \subset \wedge^2 V^* \otimes \mathfrak{h}$ denota o espaço das curvaturas formais de conexões sem torção em G -estruturas e que $\mathcal{K}^1(\mathfrak{h}) \subset V^* \otimes \mathcal{K}(\mathfrak{h})$ denota o espaço das derivadas covariantes formais. Denotamos por

$$\underline{\mathfrak{h}} = \{R(u, v) \in \mathfrak{h} : R \in \mathcal{K}(\mathfrak{h}) \text{ e } u, v \in V\}$$

o subespaço de \mathfrak{h} gerado por todos os possíveis valores das curvaturas formais. Isto nos leva a:

Definição 7.4.4 Uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}_n$ é chamada de uma **álgebra de Berger** se $\underline{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}$. Uma álgebra de Berger é dita **simétrica** se $\mathcal{K}^1(\mathfrak{h}) = 0$ e **não-simétrica** caso contrário.

Uma consequência simples do teorema de holonomia de Ambrose-Singer é que:

Proposição 7.4.5 Se $H \subset \mathrm{GL}_n$ é um grupo próprio de holonomia, então \mathfrak{h} é uma álgebra de Berger. Além do mais, se \mathfrak{h} é uma álgebra de Berger simétrica, então toda conexão sem torção que tem álgebra de holonomia \mathfrak{h} é localmente simétrica.

A classificação das álgebras de Berger irredutíveis (reais e complexas) começou em [2] e só foi concluída em [25]. Para uma descrição da história de tal problema, bem como uma demonstração do teorema de classificação, sugerimos que o leitor consulte [31].

Para lidar com o problema de classificação dos possíveis grupos próprios de holonomia, é necessário decidir quais álgebras de Berger são de fato a álgebra de Lie de holonomia de uma conexão sem torção.

No caso das álgebras de Berger simétricas isto é fácil de estabelecer. Qualquer destas álgebras pode ser realizada como a álgebra de Lie de holonomia de uma conexão localmente simétrica. Isto pode ser visto como uma consequência da existência de um algebróide de Lie classificante para estas conexões (veja a Seção 7.3).

Para as álgebras de Berger não simétricas, os principais esforços foram divididos em dois casos: o caso Riemanniano e o não-Riemanniano. Foi demonstrado que qualquer subálgebra de Berger de $\mathfrak{so}_{p,q}$ é a álgebra de holonomia da conexão de Levi-Civita de uma variedade pseudo-Riemanniana. As últimas subálgebras de Berger a serem realizadas como álgebras de Lie de holonomia de uma variedade Riemanniana foram as álgebras de Lie excepcionais \mathfrak{g}_2 e $\mathfrak{spin}(7)$. Explicaremos agora, de forma sucinta, a idéia da solução apresentada em [4].

Para começar, notamos que se $H \subset G$ é um subgrupo de Lie, então qualquer H -estrutura em M induz uma G -estrutura canônica em M . Para tal, tomamos

$$\mathcal{B}_G(M) = \{\mathcal{B}_H(M) \cdot a : a \in G\},$$

que está bem definido pois $\mathcal{B}_H(M) \subset \mathcal{B}(M)$. Quando $G = \mathrm{O}_{p,q}$ é o grupo das transformações lineares de V que preservam uma forma bilinear simétrica não-degenerada, a métrica induzida em M será chamada de **estrutura pseudo-Riemanniana subjacente induzida por H** .

Segue que o conjunto das métricas em M cuja holonomia é um subgrupo $H \subset O_{p,q}$ coincide com o conjunto das métricas subjacentes a uma H -estrutura $\mathcal{B}_H(M)$ para a qual a função estrutural de primeira ordem se anula. Estas, por sua vez, podem ser descritas como as soluções de um sistema diferencial exterior. Este sistema é involutivo no caso em que H é um dos grupos G_2 ou $\text{Spin}(7)$, e portanto, a teoria de Cartan-Kähler pode ser usada para provar a existência de soluções. Do nosso ponto de vista, este método pode ser pensado como uma "versão em dimensão infinita" do problema de realização de Cartan.

Nas próximas seções, daremos uma descrição detalhada do problema de realizar uma subálgebra de Berger de $\mathfrak{sp}(V)$ como a álgebra de Lie de holonomia de uma conexão simplética numa variedade simplética (M, ω) . Neste caso, os nossos métodos se aplicam.

7.5 Álgebras de Lie Simpléticas Especiais

Nesta seção iremos descrever as álgebras de Lie de holonomia de conexões simpléticas sem torção. Coletamos aqui toda a informação algébrica que será utilizada depois.

Seja ω uma forma simplética numa variedade M , e seja $\mathcal{B}_{\text{Sp}_n}(M)$ a Sp_n -estrutura associada em M . Uma **conexão simplética** em M é uma conexão η neste fibrado principal. Tais conexões correspondem a conexões lineares ∇ em TM para as quais a forma simplética é paralela

$$\nabla\omega = 0.$$

Às vezes iremos nos referir a ∇ ao invés de η como a conexão simplética.

Definição 7.5.1 *Seja (V, ω_0) um espaço vetorial simplético. Um subgrupo próprio e irredutível $H \subset \text{Sp}(V, \omega_0)$ é chamado de **grupo simplético próprio de holonomia** se for o grupo de holonomia de uma conexão simplética sem torção em alguma variedade simplética (M, ω) . Sua álgebra de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sp}(V, \omega_0)$ será chamada de uma **álgebra de Lie simplética própria de holonomia**.*

Existe um isomorfismo $\text{Sp}(V)$ -equivariante canônico $\mathfrak{sp}(V) \cong S^2(V)$ dado explicitamente por

$$(u \odot v) \cdot w = \omega_0(u, w)v + \omega_0(v, w)u.$$

Além do mais, a forma bilinear

$$(u \odot v, w \odot z) = \omega_0(u, w)\omega_0(v, z) + \omega_0(u, z)\omega_0(v, w)$$

é um múltiplo da forma de Killing de $\mathfrak{sp}(V, \omega_0)$. O seguinte lema está demonstrado em [25]:

Lema 7.5.2 *Seja \mathfrak{h} uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{sp}(V)$ e considere a aplicação \mathfrak{h} -equivariante $\circ : S^2(V) \cong \mathfrak{sp}(V) \rightarrow \mathfrak{h}$ dada por*

$$(u \circ v, T) = \omega_0(Tu, v) \text{ para todo } u, v \in V \text{ e } T \in \mathfrak{h}. \quad (7.5.1)$$

Se \mathfrak{h} é uma álgebra de Lie simplética própria de holonomia, então

$$(u \circ v)w - (u \circ w)v = 2\omega_0(v, w)u - \omega_0(u, v)w + \omega_0(u, w)v. \quad (7.5.2)$$

Isto motiva a nossa próxima definição.

Definição 7.5.3 Uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sp}(V)$ é chamada de **álgebra de Lie simplética especial** se ela satisfaz a equação (7.5.2).

As álgebras de Lie simpléticas especiais estão fortemente relacionadas com certas álgebras de Lie simples, chamadas de álgebras de Lie 2-graduadas. A discussão abaixo é baseada em [6] para a qual referimos o leitor para uma apresentação mais detalhada.

Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie complexa simples, e seja α uma raiz longa numa decomposição de Cartan de \mathfrak{g} . Seja $x \neq 0$ um elemento do espaço de raízes \mathfrak{g}_α . O **cone de raiz de \mathfrak{g}** é a órbita adjunta de x , $\text{Ad}_G(x)$. Ela é independente da escolha de decomposição de Cartan. Qualquer elemento $y \in \text{Ad}_G(x)$ será chamado de **elemento de raiz maximal de \mathfrak{g}** .

Definição 7.5.4 Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie simples sobre \mathbb{R} . Dizemos que \mathfrak{g} é **2-graduada** se ela contém um elemento de raiz maximal de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$.

O motivo pelo qual estas álgebras de Lie são chamadas de 2-graduadas é que, para cada uma delas, podemos encontrar uma raiz longa $\alpha_0 \in \Delta$ e um único elemento $H_{\alpha_0} \in [\mathfrak{g}_{\alpha_0}, \mathfrak{g}_{-\alpha_0}]$ satisfazendo $\alpha_0(H_{\alpha_0}) = 2$ tais que, se

$$\mathfrak{g}^i = \bigoplus_{\{\beta \in \Delta: \langle \beta, \alpha_0 \rangle = i\}} \mathfrak{g}_\beta$$

para $i \neq 0$ e

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\{\beta \in \Delta: \langle \beta, \alpha_0 \rangle = 0\}} \mathfrak{g}_\beta,$$

onde $\langle \beta, \alpha_0 \rangle$ denota o número de Cartan, então,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2.$$

Segue que

$$\mathfrak{g}^{\pm 2} = \mathfrak{g}_{\pm \alpha_0}$$

e

$$\mathfrak{g}^0 = \mathbb{R}H_{\alpha_0} \oplus \mathfrak{h}$$

onde

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{sl}_{\alpha_0}] = 0$$

e

$$\mathfrak{sl}_{\alpha_0} = \text{span} \langle \mathfrak{g}_{\alpha_0}, \mathfrak{g}_{-\alpha_0}, H_{\alpha_0} \rangle$$

é uma subálgebra de \mathfrak{g} isomorfa a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

Se definirmos

$$\mathfrak{g}^{\text{ev}} = \mathfrak{g}^{-2} \oplus \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^2$$

e

$$\mathfrak{g}^{\text{odd}} = \mathfrak{g}^{-1} \oplus \mathfrak{g}^1$$

então \mathfrak{g}^{ev} é isomorfa como álgebra de Lie a $\mathfrak{sl}_{\alpha_0} \oplus \mathfrak{h}$. Além do mais, $\mathfrak{g}^{\text{odd}}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^2 \otimes V$ como um \mathfrak{g}^{ev} -módulo e a ação de \mathfrak{h} em V é efetiva. Logo, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(V)$. A álgebra de Lie \mathfrak{g} , por sua vez, é isomorfa ao produto semi-direto $\mathfrak{g}^{\text{ev}} \ltimes \mathfrak{g}^{\text{odd}}$.

Agora fixe uma forma de área $a \in \wedge^2(\mathbb{R})^*$. Ela induz um isomorfismo $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ -equivariante

$$\begin{aligned} S^2(\mathbb{R}^2) &\rightarrow \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \\ (ef) \cdot g &= a(e, g)f + a(f, g)e. \end{aligned}$$

Com esta identificação, a estrutura de álgebra de Lie em $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \cong S^2(\mathbb{R}^2)$ pode ser descrita por

$$[ef, gh] = a(e, g)fh + a(e, g)fg + a(f, g)eh + a(f, h)eg$$

Estamos aptos a enunciar a relação entre as álgebras de Lie simple 2-graduadas e as álgebras de Lie simpléticas especiais.

Proposição 7.5.5 *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie simples 2-graduada*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-2} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}^{\text{ev}} \oplus \mathfrak{g}^{\text{odd}} \cong (\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{h}) \oplus (\mathbb{R} \otimes V).$$

Então existe uma forma simplética \mathfrak{h} -invariante $\omega_0 \in \wedge^2 V^*$ e um produto \mathfrak{h} -equivariante $\circ : S^2(V) \rightarrow \mathfrak{h}$ tais que

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \wedge^2 \mathfrak{g}^{\text{odd}} &\rightarrow \mathfrak{g}^{\text{ev}} \\ [e \otimes u, f \otimes v] &= \omega_0(u, v)ef + a(e, f)u \circ v. \end{aligned} \quad (7.5.3)$$

Além do mais, existe um múltiplo (\cdot, \cdot) da forma de Killing tal que

$$(T, u \circ v) = \omega_0(Tu, v) = \omega_0(Tv, u)$$

e

$$(u \circ v)w - (u \circ w)v = 2\omega(v, w)u - \omega(u, v)w + \omega(u, w)v$$

para todo $T \in \mathfrak{h}$ e $u, v, w \in V$, i.e., \mathfrak{h} é uma subálgebra de Lie simplética especial de $\mathfrak{sp}(V, \omega_0)$.

Reciprocamente, se \mathfrak{h} é uma subálgebra de Lie simplética especial de $\mathfrak{sp}(V, \omega_0)$, então (7.5.3) pode ser usada para definir a estrutura de uma álgebra de Lie simples 2-graduada em

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-2} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}^{\text{ev}} \oplus \mathfrak{g}^{\text{odd}} \cong (\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{h}) \oplus (\mathbb{R} \otimes V).$$

Observamos que quando $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sp}(V)$ é uma álgebra de Lie simplética especial com grupo de Lie $H \subset \text{Sp}(V)$ então H é fechado e reutivo e

$$\mathfrak{h} = \{T \in \mathfrak{sp}(V) : [T, u \circ v] = (Tu) \circ v + u \circ (Tv) \text{ para todo } u, v \in V\}.$$

A proposição acima nos dá uma correspondência bijetora entre subálgebras de Lie simpléticas especiais e álgebras de Lie simples 2-graduadas que pode ser usada para classificar as álgebras de Lie simpléticas especiais. Notamos que os resultados apresentados aqui continuam válidos quando V é um espaço vetorial complexo. A tabela abaixo, que foi extraída de [6], exhibe todos os possíveis grupos de Lie simpléticos especiais (reais e complexos), bem como seus espaços de representações V , e suas álgebras de Lie simples 2-graduadas associadas. Utilizamos a notação $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Tabela 1: Grupos de Lie Simpléticos Especiais Reais e Complexos

	Type of Δ	G	H	V
(i)	$A_k, k \geq 2$	$SL_{n+2}(\mathbb{F}), n \geq 1$	$GL_n(\mathbb{F})$	$\mathbb{F}^n \oplus (\mathbb{F}^n)^*$
(ii)		$SU(p+1, q+1), p+q \geq 1$	$U(p, q)$	\mathbb{C}^{p+q}
(iii)	$C_k, k \geq 2$	$Sp_{n+1}(\mathbb{F})$	$Sp_n(\mathbb{F})$	\mathbb{F}^{2n}
(iv)	$B_k, D_{k+1}, k \geq 3$	$SO_{n+4}(\mathbb{C}), n \geq 3$	$SL_2(\mathbb{C}) \cdot SO_n(\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^n$
(v)		$SO(p+2, q+2), p+q \geq 3$	$SL_2(\mathbb{R}) \cdot SO(p, q)$	$\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^{p+q}$
(vi)		$SO_{n+2}(\mathbb{H}), n \geq 2$	$Sp_1 \cdot SO_n(\mathbb{H})$	\mathbb{H}^n
(vii)	G_2	$G'_2, G_2^{\mathbb{C}}$	$SL_2(\mathbb{F})$	$S^3(\mathbb{F}^2)$
(viii)	F_4	$F_4^{(1)}, F_4^{\mathbb{C}}$	$Sp_3(\mathbb{F})$	$\mathbb{F}^{14} \subset \wedge^3 \mathbb{F}^6$
(ix)	E_6	$E_6^{\mathbb{F}}$	$SL_6(\mathbb{F})$	$\wedge^3 \mathbb{F}^6$
(x)		$E_6^{(2)}$	$SU(1, 5)$	$\mathbb{R}^{20} \subset \wedge^3 \mathbb{C}^6$
(xi)		$E_6^{(3)}$	$SU(3, 3)$	$\mathbb{R}^{20} \subset \wedge^3 \mathbb{C}^6$
(xii)	E_7	$E_7^{\mathbb{C}}$	$Spin(12, \mathbb{C})$	\mathbb{C}^{32}
(xiii)		$E_7^{(5)}$	$Spin(6, 6)$	$\mathbb{R}^{32} \subset \mathbb{C}^{32}$
(xiv)		$E_7^{(6)}$	$Spin(6, \mathbb{H})$	$\mathbb{R}^{32} \subset \mathbb{C}^{32}$
(xv)		$E_7^{(7)}$	$Spin(2, 10)$	$\mathbb{R}^{32} \subset \mathbb{C}^{32}$
(xvi)	E_8	$E_8^{\mathbb{C}}$	$E_7^{\mathbb{C}}$	\mathbb{C}^{56}
(xvii)		$E_8^{(8)}$	$E_7^{(5)}$	\mathbb{R}^{56}
(xviii)		$E_8^{(9)}$	$E_7^{(7)}$	\mathbb{R}^{56}

7.6 Variedades Simpléticas Especiais

Nesta seção iremos definir as variedades simpléticas especiais e fornecer uma lista de todas as possíveis geometrias que aparecem. Faremos isso somente para variedades reais. Notamos, no entanto, que praticamente todas as construções a serem apresentadas aqui podem ser adaptadas ao caso de variedades complexas também. Depois, daremos uma descrição em termos de G -estruturas e deduzimos suas equações estruturais. Assim, obteremos uma descrição explícita do algebróide classificante para cada geometria simplética especial. Uma parte desta seção é baseada em [6] e [7].

Seja $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ uma subálgebra de Lie qualquer. Recorde que o espaço das curvaturas formais (de conexões sem torção) é

$$\mathcal{K}(\mathfrak{g}) = \{R \in \wedge^2 V^* \otimes \mathfrak{g} : R(u, v)w + \text{perm. cíc.} = 0, \text{ para todo } u, v, w \in V\}$$

e que o espaço das derivadas covariantes formais é

IV) Holonomia Simplética Própria Se H é um dos grupos das entradas (iv) a (xviii) da tabela 1, então $\mathcal{K}(\mathfrak{h}) = \mathcal{R}_{\mathfrak{h}}$ e portanto, ∇ é uma conexão simplética cujo grupo de holonomia é um subgrupo próprio irredutível de $\mathrm{Sp}(V)$.

No que se segue, iremos deduzir as equações estruturais de uma variedade simplética especial. Para tal, precisamos do seguinte lema (veja [7] para a demonstração):

Lema 7.6.2 Seja $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sp}(V)$ uma álgebra de Lie simplética especial, e suponha que $\dim V \geq 4$. Se $\varphi \in \mathfrak{h}$ é uma aplicação linear $\varphi : V \rightarrow V$ que satisfaz

$$\varphi(x) \circ y = \varphi(y) \circ x,$$

então φ é um múltiplo da identidade.

A estrutura de uma variedade simplética especial é dada pelo seguinte teorema, cuja demonstração é baseada em [7].

Teorema 7.6.3 (Cahen e Schwachhöfer [7]) Seja (M, ω, ∇) uma variedade simplética especial associada a uma álgebra de Lie simplética especial \mathfrak{h} , com $\dim M \geq 4$. Então existem uma H -estrutura sobre M que é compatível com ∇ ,

$$\begin{array}{c} \mathcal{B}_H(M) \xrightarrow{H} \\ \pi \downarrow \\ M \end{array}$$

e aplicações $\rho : \mathcal{B}_H(M) \rightarrow \mathfrak{h}$, $u : \mathcal{B}_H(M) \rightarrow V$ e $f : \mathcal{B}_H(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que a forma tautológica $\theta \in \Omega^1(\mathcal{B}_H(M), V)$ e a forma de conexão $\eta \in \Omega^1(\mathcal{B}_H(M), \mathfrak{h})$ satisfazem as equações estruturais:

$$\begin{cases} d\theta = -\eta \wedge \theta \\ d\eta = R_\rho(\theta \wedge \theta) - \eta \wedge \eta \\ d\rho = u \circ \theta - [\eta, \rho] \\ du = (\rho^2 + f)\theta - \eta u \\ df = -2\omega(\rho u, \theta) \quad (= -d(\rho, \rho)) \end{cases} \quad (7.6.1)$$

onde

$$R_\rho(x, y) = 2\omega(x, y)\rho + x \circ (\rho y) - y \circ (\rho x).$$

Demonstração. Primeiramente, notamos que, como a curvatura de ∇ está contida em $\mathcal{R}_{\mathfrak{h}}$, segue do Teorema de Holonomia de Ambrose-Singer que a álgebra de Lie holonomia $\mathfrak{hol}(\nabla)$ também está contida em $\mathcal{R}_{\mathfrak{h}} \cong \mathfrak{h}$. Logo, existe uma redução do fibrado dos referenciais de M ao subgrupo H

$$\begin{array}{c} \mathcal{B}_H(M) \xrightarrow{H} \\ \pi \downarrow \\ M \end{array}$$

que é compatível com ∇ , no sentido que a forma de conexão com valores em $\mathfrak{gl}(V)$ que corresponde a ∇ se restringe a uma forma de conexão η em $\mathcal{B}_H(M)$ com valores em \mathfrak{h} .

A hipótese de que η é sem torção é equivalente a

$$d\theta = -\eta \wedge \theta.$$

Por hipótese, também, existe uma aplicação equivariante $\rho : \mathcal{B}_H(M) \rightarrow \mathfrak{h}$ tal que a curvatura de η é R_ρ . Logo,

$$d\eta = R_\rho(\theta \wedge \theta) - \eta \wedge \eta$$

Agora, para $x \in V$ e $T \in \mathfrak{h}$, sejam $\xi_x, \xi_T \in \mathfrak{X}(\mathcal{B}_H(M))$ os campos de vetores em $\mathcal{B}_H(M)$ que satisfazem

$$\theta(\xi_x) = x, \quad \theta(\xi_T) = 0, \quad \eta(\xi_x) = 0, \quad \text{e } \eta(\xi_T) = T.$$

Como ρ é equivariante, segue que

$$\xi_T(\rho) = -[T, \rho].$$

De fato, fixe $p \in \mathcal{B}_H(M)$ e seja $\alpha : I \rightarrow \mathfrak{h}$ a curva definida por

$$\alpha(t) = \rho(R_{\exp(tT)}(p)) = \text{Ad}(\exp(-tT)) \cdot \rho(p).$$

Então, diferenciando em $t = 0$ obtemos

$$d\rho_p(\xi_T(p)) = -[T, \rho(p)].$$

Note que

$$\xi_x(R_\rho) = R_{\xi_x \rho}.$$

Segue que $\xi_x \rho$ representa a derivada covariante de R_ρ , o que implica que $\xi_x \rho \in \mathcal{R}_{\mathfrak{h}}^{(1)}$. Logo, existe uma aplicação equivariante $u : \mathcal{B}_H(M) \rightarrow V$ tal que

$$\xi_x \rho = u \circ x.$$

Concluimos que

$$d\rho = u \circ \theta - [\eta, \rho]. \quad (7.6.2)$$

Para demonstrar a próxima equação estrutural, note que como $u : \mathcal{B}_H(M) \rightarrow V$ é equivariante, segue que

$$\xi_T u = -T u.$$

Agora, diferenciando ambos os lados de (7.6.2) obtemos

$$[d\eta, \rho] - [\eta, d\rho] = du \circ \theta + u \circ d\theta.$$

Aplicando esta expressão a ξ_x, ξ_y nos leva a

$$(\xi_x u - \rho^2 x) \circ y = (\xi_y u - \rho^2 y) \circ x.$$

Segue do Lema 7.6.2 que existe uma função $f : \mathcal{B}_H(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$du = (\rho^2 + f)\theta - \eta u. \quad (7.6.3)$$

Para continuar, diferenciamos ambos os lados de (7.6.3) e impomos a condição $d^2 = 0$. Obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= (\rho d\rho + (d\rho)\rho) \wedge \theta + (\rho^2 + f)d\theta - (d\eta)u + \eta \wedge du + df \wedge \theta \\ &= \rho(u \circ \theta) \wedge \theta - \rho[\eta, \rho] \wedge \theta + (u \circ \theta)\rho \wedge \theta - [\eta, \rho]\rho \wedge \theta - \rho^2(\eta \wedge \theta) + \\ &\quad - f\eta \wedge \theta - R_\rho(\theta \wedge \theta)u + \eta \wedge (\rho^2 + f)\theta + (\eta \wedge \eta)u - \eta \wedge (\eta u) + df \wedge \theta \end{aligned}$$

Se aplicamos esta última equação a (ξ_T, ξ_x) vemos que

$$\xi_T f = 0.$$

Se aplicamos a (ξ_x, ξ_y) obtemos (depois de uma conta longa, porém direta)

$$(\xi_x(f) + 2\omega(\rho u, x))y - (\xi_y(f) + 2\omega(\rho u, y))x = 0.$$

Segue que

$$df = -2\omega(\rho u, \theta). \quad (7.6.4)$$

Finalmente, depois de outra conta entediante, que usa a equação para $d\rho$ e as identidades (7.5.1) e (7.5.2), podemos mostrar que o lado direito de (7.6.4) é igual a $d(\rho, \rho)$. Segue que $d^2 f = 0$ é uma consequência das outras equações estruturais. ■

Podemos usar as equações estruturais deduzidas acima para construir, para cada álgebra de Lie simplética especial \mathfrak{h} , o algebróide de Lie classificante que controla o espaço de moduli das estruturas geométricas correspondentes.

Como fibrado vetorial, A é o fibrado trivial sobre $X \cong \mathfrak{h} \oplus V \oplus \mathbb{R}$ com fibra típica $V \oplus \mathfrak{h}$. O seu colchete e sua âncora são definidos em seções constantes por

$$\begin{aligned} [(x, T), (y, U)](\rho, u, f) &= (Ty - Ux, [T, U] - R_\rho(x, y)) \\ \#(x, T)(\rho, u, f) &= (u \circ x - [T, \rho], (\rho^2 + f)x - Tu, -2\omega(\rho u, x)) \end{aligned}$$

e depois estendidos a seções quaisquer pela imposição de linearidade e da identidade de Leibniz.

7.7 Aplicações Deformadoras Associadas

Nesta seção iremos começar a descrever a estrutura do algebróide de Lie classificante $A \rightarrow X$ para conexões simpléticas especiais. Em particular, mostraremos que X pode ser decomposto em subconjuntos saturados pelas folhas de A para os quais a restrição de A é isomorfo ao algebróide de Lie cotangente de uma deformação quadrática de uma variedade de Poisson linear. Isto, por sua vez, será usado como uma ferramenta para entender a estrutura do algebróide de Lie classificante, e portanto, para obter modelos explícitos de conexões simpléticas especiais (veja a Seção 7.8). Todos os resultados apresentados nesta seção estão presentes nos artigos de Schwachhöfer et al. (veja, por exemplo, [10]). Nossa abordagem, que é baseada na análise do algebróide classificante, difere da abordagem apresentada no artigo acima citado.

Para começar, note que a última equação estrutural que é satisfeita por qualquer conexão simplética especial,

$$df = -d(\rho, \rho),$$

implica que $F = f + (\rho, \rho)$ é constante. Logo,

$$F_c = \{(\rho, u, f) \in \mathfrak{h} \oplus V \oplus \mathbb{R} : f + (\rho, \rho) = c\} \subset \mathfrak{h} \oplus V \oplus \mathbb{R}$$

é uma subvariedade que é saturada pelas folhas de A . Denotamos por $A_c \rightarrow F_c$ a restrição do algebróide de Lie classificante A a F_c .

A aplicação $(\rho, u) \mapsto (\rho, u, c - (\rho, \rho))$ é um difeomorfismo de $\mathfrak{h} \oplus V$ para F_c . Se identificarmos \mathfrak{h} com \mathfrak{h}^* usando (\cdot, \cdot) e V com V^* usando $\omega(\cdot, \cdot)$, podemos ver A_c como uma estrutura de algebróide de Lie em $T^*(\mathfrak{h}^* \oplus V^*)$. Utilizaremos a notação $(\rho, u)^*$ para denotar $((\rho, \cdot), \omega(u, \cdot)) \in \mathfrak{h}^* \oplus V^*$.

Proposição 7.7.1 *O algebróide de Lie $A_c \rightarrow \mathfrak{h}^* \oplus V^*$ é isomorfo ao algebróide de Lie cotangente associado a uma estrutura de Poisson $\{, \}_c$ em $\mathfrak{h}^* \oplus V^*$.*

Demonstração. Podemos usar a âncora de A_c para definir uma estrutura de Poisson em $\mathfrak{h}^* \oplus V^*$. De fato, para $(T, x), (U, y) \in \mathfrak{h} \oplus V$, vistos como funções em $\mathfrak{h}^* \oplus V^*$ definimos

$$\{(T, x), (U, y)\}_c(\rho, u)^* = \langle \#_{A_c}(T, x)_{(\rho, u)^*}, (U, y) \rangle$$

Quando abrimos esta expressão obtemos

$$\begin{aligned} \{(T, x), (U, y)\}_c(\rho, u)^* &= \langle \#_{A_c}(T, x)_{(\rho, u)^*}, (U, y) \rangle \\ &= \langle (u \circ x - [T, \rho], (\rho^2 - (\rho, \rho) + c)x - Tu)^* (U, y) \rangle \\ &= (u \circ x, U) - ([T, \rho], U) + \omega((\rho^2 - (\rho, \rho) + c)x, y) \\ &\quad - \omega(Tu, y) \\ &= -\omega(u, Ux) + (\rho, [T, U]) + \omega((\rho^2 - (\rho, \rho) + c)x, y) \\ &\quad + \omega(u, Ty) \\ &= (\rho, [T, U]) + \omega(u, Ty - Ux) + \omega((\rho^2 - (\rho, \rho) + c)x, y) \end{aligned}$$

É fácil verificar que o colchete acima define uma estrutura de Poisson em $\mathfrak{h}^* \oplus V^*$. De fato, ela é uma estrutura de Lie-Poisson deformada por um termo quadrático.

Calculamos agora o colchete de algebróide de Lie induzido em $T^*(\mathfrak{h}^* \oplus V^*)$. Ele é obtido por diferenciação do colchete de Poisson $\{, \}_c$, i.e.,

$$[(T, x), (U, y)]_c(\rho, u)^* = d_{(\rho, u)^*} \{(T, x), (U, y)\}_c$$

Logo, se $(\rho', u')^* \in T_{(\rho, u)^*}(\mathfrak{h}^* \oplus V^*) \cong \mathfrak{h}^* \oplus V^*$ obtemos

$$\begin{aligned} \langle (\rho', u')^*, [(T, x), (U, y)]_c(\rho, u)^* \rangle &= (\rho', [T, U]) + \omega(u', Ty - Ux) + \\ &\quad + \omega((\rho\rho' + \rho'\rho - 2(\rho', \rho))x, y) \end{aligned} \quad (7.7.1)$$

Finalmente, para concluir a proposição, calculamos

$$\begin{aligned} \langle (\rho', u')^*, [(T, x), (U, y)]_{A_c}(\rho, u)^* \rangle &= \langle (\rho', u')^*, ([T, U] - R_\rho(x, y), Ty - Ux) \rangle \\ &= (\rho', [T, U]) + \omega(u', Ty - Ux) - (\rho', R_\rho(x, y)) \\ &= (\rho', [T, U]) + \omega(u', Ty - Ux) - (\rho', 2\omega(x, y)\rho + x \circ (\rho y) - y \circ (\rho x)) \\ &= (\rho', [T, U]) + \omega(u', Ty - Ux) - (\rho', \rho)2\omega(x, y) - (\rho', x \circ (\rho y)) + (\rho', y \circ (\rho x)) \\ &= (\rho', [T, U]) + \omega(u', Ty - Ux) + \omega(-2(\rho', \rho)x, y) - \omega(\rho'x, \rho y) + \omega(\rho'y, \rho x) \\ &= (\rho', [T, U]) + \omega(u', Ty - Ux) + \omega((\rho\rho' + \rho'\rho - 2(\rho', \rho))x, y). \end{aligned}$$

■

Observamos que os dois primeiros termos do colchete de Poisson

$$\{(T, x), (U, y)\}_c(\rho, u)^* = (\rho, [T, U]) + \omega(u, Ty - Ux) + \omega((\rho^2 - (\rho, \rho) + c)x, y)$$

são lineares, e correspondem ao colchete de Lie-Poisson no dual do produto semi-direto de álgebras de Lie $\mathfrak{h} \ltimes V$, enquanto que o último termo é uma função quadrática em ρ .

A aplicação $\phi_c : \mathfrak{h}^* \rightarrow \wedge^2 V^*$ dada por

$$\phi_c(\rho^*)(x, y) = \omega((\rho^2 - (\rho, \rho) + c)x, y)$$

é um exemplo de uma aplicação deformadora.

Definição 7.7.2 Seja $G \subset \text{GL}(V)$ um subgrupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Uma aplicação suave $\phi : \mathfrak{g}^* \rightarrow \wedge^2 V^*$ é chamada de **aplicação deformadora** se

1. ϕ é G -equivariante, e
2. para todo $\rho \in \mathfrak{g}^*$, a aplicação dual $(d_\rho \phi)^* : \wedge^2 V \rightarrow \mathfrak{g}$ está contida em $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$.

As aplicações deformadoras foram introduzidas em [10], com o objetivo de mostrar a existência de uma série infinita de grupos próprios de holonomia que não constavam na lista original de grupos de Berger. Elas fornecem uma receita para a construção de conexões sem torção em G -estruturas, da seguinte forma:

Seja $W = V \ltimes \mathfrak{g}$ o produto semi-direto de álgebras de Lie, denote por $\text{pr} : W^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ a projeção natural e seja $\Phi = \phi \circ \text{pr}$. É imediato verificar que se $\phi : \mathfrak{g}^* \rightarrow \wedge^2 V^*$ é uma aplicação deformadora, então

$$\{f, g\}_\phi(p) = p([(x, A), (y, B)]) + \Phi(p)(x, y)$$

é um colchete de Poisson em W^* , onde $df_p = (x, A)$ e $dg_p = (y, B)$. De fato, para uma aplicação G -equivariante $\phi : \mathfrak{g}^* \rightarrow \wedge^2 V^*$, o colchete $\{, \}_\phi$ é um colchete de Poisson se e somente se ϕ é uma aplicação deformadora. Observamos que quando $\phi = 0$ recuperamos o colchete de Poisson linear $\{, \cdot\}$ de W^* .

O algebróide de Lie cotangente $T^*W^* \rightarrow W^*$ de $(W^*, \{, \}_\phi)$ é um fibrado vetorial trivial no qual \mathfrak{g} age infinitesimalmente por automorfismos internos de algebróides de Lie. Segue que podemos interpretá-lo como o algebróide de Lie classificante de uma classe de conexões em G -estruturas. As conexões que pertencem a esta classe são chamadas de **conexões induzidas pela aplicação deformadora** ϕ .

Observamos que a estrutura de algebróide de Lie de T^*W^* pode ser usada para obter as equações estruturais que as conexões induzidas por uma aplicação deformadora satisfazem:

Proposição 7.7.3 Seja $G \subset \text{GL}(V)$ um subgrupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} e seja $\mathcal{B}_G(M)$ uma G -estrutura, cuja forma tautológica denotamos por θ . Então, para qualquer conexão η em $\mathcal{B}_G(M)$ que é induzida por uma aplicação deformadora $\phi : \mathfrak{g}^* \rightarrow \wedge^2 V^*$, existem aplicações equivariantes $\rho : \mathcal{B}_G(M) \rightarrow \mathfrak{g}^*$ e $\mu : \mathcal{B}_G(M) \rightarrow V^*$ tais que as equações estruturais

$$\begin{cases} d\theta &= -\eta \wedge \theta \\ d\eta &= R_\rho \circ \theta \wedge \theta - \eta \wedge \eta \\ d\rho &= j(\mu \otimes \theta) - \eta \cdot \rho \\ d\mu &= \phi(\rho)^\sharp(\theta) - \eta \cdot \mu \end{cases} \quad (7.7.2)$$

são satisfeitas. Aqui, os pontos denotam as ações naturais de \mathfrak{g} em \mathfrak{g}^* e V^* , $R_\rho = (d_\rho\phi)^*$, $j : V^* \otimes V \rightarrow \mathfrak{g}^*$ é a projeção natural $j(\mu \otimes u)(A) = \mu(Au)$, e $\phi(\rho)^\sharp : V \rightarrow V^*$ é a aplicação $\phi(\rho)^\sharp(u)(v) = \phi(\rho)(u, v)$.

Segue da primeira equação da proposição acima que toda conexão induzida por uma aplicação deformadora ϕ é sem torção. A segunda equação nos diz que a curvatura da conexão é $R_\rho = (d_\rho\phi)^*$.

Resumindo, como consequência da Proposição 7.7.1, obtemos que toda conexão simplética especial é uma conexão induzida por uma das aplicações deformadoras ϕ_c .

7.8 Moduli, Simetrias e Modelos de Conexões Simpléticas Especiais

Nesta seção iremos concluir o nosso estudo das conexões simpléticas especiais. Mostraremos que existe uma estrutura de Poisson em $\mathfrak{h} \oplus V \oplus \mathbb{R}$ tal que seu algebróide de Lie cotangente é uma extensão do algebróide de Lie classificante para geometrias simpléticas especiais. Isto nos permitirá descrever as álgebras de Lie de isotropia deste algebróide de Lie cotangente como extensões das álgebras de Lie de simetrias de variedades simpléticas especiais por uma álgebra de Lie 1-dimensional. Descrevemos também como construir exemplos explícitos de conexões simpléticas especiais e fornecemos resultados sobre o espaço de moduli de tais estruturas.

Para começar, recordamos algumas propriedades básicas sobre extensões de algebróides de Lie. Estes resultados são bem conhecidos, e referimos o leitor a [11] para demonstrações.

Definição 7.8.1 *Sejam A e \tilde{A} algebróides de Lie e seja E um fibrado de álgebras de Lie, todos sobre a mesma base X . Dizemos que \tilde{A} é uma **extensão de A por E** se existir uma sequência exata de algebróide de Lie*

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \tilde{A} \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0.$$

A extensão será chamada de **central** se $[s, \tilde{\alpha}] = 0$ para todo $s \in \Gamma(E)$ e $\tilde{\alpha} \in \Gamma(\tilde{A})$ (neste caso, E é necessariamente abeliano, i.e., só um fibrado vetorial).

Observação 7.8.2 *Existe uma noção mais geral de extensão de algebróides de Lie sobre bases diferentes [3]. No entanto, como isto não será utilizado nesta tese, omitimos sua descrição.*

Toda extensão central induz uma representação de A em E (veja a Definição 6.3.5). De fato, temos:

Lema 7.8.3 *Se \tilde{A} é uma extensão central de A por E então, para $\alpha \in \Gamma(A)$ e $s \in \Gamma(E)$,*

$$\nabla_\alpha s = [\tilde{\alpha}, s]$$

define uma representação de A em E , onde $\tilde{\alpha} \in \Gamma(\tilde{A})$ é um levantamento arbitrário de α .

Agora, seja $\sigma : A \rightarrow \tilde{A}$ uma cisão arbitrária de π . A curvatura de σ é a 2-forma $\Omega_\sigma \in \Gamma(\wedge^2 A^* \otimes E)$ com valores em E , definida por

$$\Omega_\sigma(\alpha, \beta) = \sigma([\alpha, \beta]_A) - [\sigma(\alpha), \sigma(\beta)]_{\tilde{A}}.$$

Lema 7.8.4 Se \tilde{A} é uma extensão central de A por E , ∇ é a representação associada de A em E , e σ é uma cisão arbitrária de $\pi : \tilde{A} \rightarrow A$, então \tilde{A} é isomorfo ao algebróide de Lie $A_\sigma = A \oplus E$, cuja âncora é dada por $\#_\sigma(\alpha, v) = \#_A(\alpha)$ e o colchete é dado por

$$[(\alpha, s), (\alpha', s')]_\sigma = ([\alpha, \alpha']_A, \nabla_\alpha s' - \nabla_{\alpha'} s + \Omega_\sigma(\alpha, \alpha')). \quad (7.8.1)$$

Observação 7.8.5 Dada uma representação de A em E , podemos definir a cohomologia de A com coeficientes em E , a qual denotamos por $H^\bullet(A; E)$. Esta é a cohomologia do complexo das formas diferenciais em A com valores em E , cuja diferencial $d_{A,E} : \Gamma(\wedge^\bullet A^* \otimes E) \rightarrow \Gamma(\wedge^{\bullet+1} A^* \otimes E)$ é dada por

$$\begin{aligned} d_{A,E}\eta(\alpha_0, \dots, \alpha_k) &= \sum_{i=1}^k (-1)^i \nabla_{\alpha_i} \eta(\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_k) + \\ &+ \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \eta([\alpha_i, \alpha_j], \alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_k). \end{aligned}$$

Com esta diferencial, a 2-forma Ω_σ é um cocíclo. De fato, dada uma 2-forma em A com valores numa representação E , o colchete (7.8.1) é um colchete de Lie se e somente se a 2-forma for um cocíclo.

Retornamos agora, deste pequeno desvio, ao estudo das conexões simpléticas especiais. A família a um parâmetro de estruturas de Poisson $\{, \}_c$ em $\mathfrak{h}^* \oplus V^*$ pode ser colada em uma única estrutura de Poisson em $\mathfrak{h}^* \oplus V^* \oplus \mathbb{R}$ por

$$\{(T, x, t), (U, y, s)\}(\rho^*, u^*, c) = (\rho, [T, U]) + \omega(u, Ty - Ux) + \omega((\rho^2 - (\rho, \rho) + c)x, y).$$

Proposição 7.8.6 As inclusões

$$i_c : (\mathfrak{h}^* \oplus V^*, \{, \}_c) \rightarrow \mathfrak{h}^* \oplus V^* \oplus \{c\} \subset (\mathfrak{h}^* \oplus V^* \oplus \mathbb{R}, \{, \})$$

das variedades de Poisson induzidas por cada uma das aplicações deformadoras ϕ_c são morfismos de variedades de Poisson.

Demonstração. Isto segue de uma conta simples. Se $f \in C^\infty(\mathfrak{h}^* \oplus V^* \oplus \mathbb{R})$ é uma aplicação linear, e se denotarmos por $f_{\mathfrak{h}^* \oplus V^*}$ e $f_{\mathbb{R}}$ suas componentes em $\mathfrak{h}^* \oplus V^*$ e \mathbb{R} , então

$$f \circ i_c(\rho^*, u^*) = f(\rho^*, u^*, c) = f_{\mathfrak{h}^* \oplus V^*}(\rho^*, u^*) + f_{\mathbb{R}}(c).$$

O último termo é constante, e portanto não irá alterar o colchete de Poisson. Logo,

$$\begin{aligned} \{(T, x, t), (U, y, s)\} \circ i_c(\rho^*, u^*) &= \{(T, x, t), (U, y, s)\}(\rho^*, u^*, c) \\ &= \{(T, x), (S, y)\}_c(\rho^*, u^*) \\ &= \{(T, x, t) \circ i_c, (U, y, s) \circ i_c\}_c(\rho^*, u^*), \end{aligned}$$

de onde segue a proposição. ■

O próximo resultado que será apresentado deve ser interpretado como uma versão infinitesimal do Teorema B de [6]. No que segue, iremos identificar \mathfrak{h} com \mathfrak{h}^* , e V com V^* sem mais avisos.

Proposição 7.8.7 *O algebróide de Lie cotangente da variedade de Poisson $(\mathfrak{h}^* \oplus V^* \oplus \mathbb{R}, \{, \})$ é uma extensão central do algebróide de Lie classificante A , por um fibrado de linha \mathbb{L} .*

Demonstração. *Primeiramente, notamos que a projeção natural $\pi : T^*(\mathfrak{h}^* \oplus V^* \oplus \mathbb{R}) \rightarrow A$ é um morfismo de algebróides de Lie. De fato, uma conta simples mostra que*

$$\begin{aligned} & \langle (\rho', u')^*, \pi([(T, x, t), (U, y, s)]_{T^*(\mathfrak{h}^* \oplus V^* \oplus \mathbb{R})}) \rangle_{(\rho, u, f)^*} \\ &= (\rho', [T, U]) + \omega(u', Ty - Ux) + \omega((\rho\rho' + \rho'\rho - 2(\rho', \rho))x, y) \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\pi([(T, x, t), (U, y, s)]_{T^*(\mathfrak{h}^* \oplus V^* \oplus \mathbb{R})}) = ([\pi(T, x, t), \pi(U, y, s)]_A)$$

para todo $(T, x, t), (U, y, s) \in \mathfrak{h} \oplus V \oplus \mathbb{R}$. Obviamente,

$$\mathbb{L}_{(\rho, u, c)} = \ker \pi_{(\rho, u, c)} = \{(0, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

e portanto \mathbb{L} é um fibrado de linha. A proposição segue como consequência do fato de que

$$[(0, 0, t), (U, y, s)]_{T^*(\mathfrak{h}^* \oplus V^* \oplus \mathbb{R})} = 0,$$

o que demonstra que a extensão é central. ■

Como foi explicado acima, esta extensão induz uma representação de A em \mathbb{L} . No entanto, não há nada de novo aqui. Esta representação é simplesmente a representação canônica, i.e.,

$$\nabla_\alpha f = \# \alpha(f)$$

onde $f \in C^\infty(\mathfrak{h} \oplus V \oplus \mathbb{R}) \cong \Gamma(\mathbb{L})$.

O que é interessante é o 2-cociclo $\Omega_\sigma \in \Gamma(\wedge^2 A^*)$ induzido pela cisão óbvia

$$\sigma : (T, x) \mapsto (T, x, 0)$$

de π . Uma conta direta mostra que

$$\Omega_\sigma((T, x), (U, y)) = \omega(x, y),$$

e portanto $\Omega_\sigma = \omega(\theta \wedge \theta)$ é dado pela forma simplética.

Segue da equação 7.8.1 que a estrutura de algebróide de Lie de $T^*(\mathfrak{h}^* \oplus V^* \oplus \mathbb{R})$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} [(T, x, t), (U, y, s)](\rho, u, f) &= ([T, U] - R_\rho(x, y), Ty - Ux, -\omega(x, y)) \\ \#(T, x, t)(\rho, u, f) &= (u \circ x - [T, \rho], (\rho^2 + f)x - Tu, -2\omega(\rho u, x)), \end{aligned}$$

ou equivalentemente, suas equações estruturais são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} d\theta = -\eta \wedge \theta \\ d\eta = R_\rho(\theta \wedge \theta) - \eta \wedge \eta \\ d\kappa = \omega(\theta \wedge \theta) \\ d\rho = u \circ \theta - [\eta, \rho] \\ du = (\rho^2 + f)\theta - \eta u \\ df = -2\omega(\rho u, \theta) \end{array} \right. \quad (7.8.2)$$

As seguintes consequências são imediatas.

Corolário 7.8.8 *As folhas de A em $\mathfrak{h} \oplus V \oplus \mathbb{R}$ coincidem com as folhas simpléticas de $T^*(\mathfrak{h}^* \oplus V^* \oplus \mathbb{R})$.*

Corolário 7.8.9 *Seja \mathfrak{s}_{λ_0} a álgebra de Lie de isotropia de A em $\lambda_0 = (\rho, u, f) \in \mathfrak{h} \oplus V \oplus \mathbb{R}$, i.e., a álgebra de Lie de simetria da conexão simplética especial correspondente, e seja*

$$\mathfrak{g}_{\lambda_0} = \{\tilde{\alpha} \in \mathfrak{h} \oplus V \oplus \mathbb{R} \subset \mathfrak{g} : \text{ad}_{\tilde{\alpha}}^* \lambda_0 = 0\}$$

a álgebra de Lie de isotropia de $T^(\mathfrak{h}^* \oplus V^* \oplus \mathbb{R})$. Então*

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}\lambda_0 \longrightarrow \mathfrak{g}_{\lambda_0} \longrightarrow \mathfrak{s}_{\lambda_0} \longrightarrow 0$$

é uma extensão de álgebras de Lie. Em particular,

$$\dim \mathfrak{s}_{\lambda_0} = \dim \mathfrak{g}_{\lambda_0} - 1.$$

As informações infinitesimais coletadas aqui nos ajudam na construção de modelos explícitos de variedades simpléticas especiais.

Foi mostrado em [6], que a estrutura de Poisson em $\mathfrak{h}^ \oplus V^* \oplus \mathbb{R}$ é integrável. De fato, seja \mathfrak{g} a álgebra simples 2-graduada associada a \mathfrak{h} e seja $a \in \wedge^2 \mathbb{R}^*$ a forma de área utilizada para identificar $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ com $S^2(\mathbb{R}^2)$ (veja a Seção 7.5). Fixamos uma base e_+, e_- of \mathbb{R}^2 tal que $a(e_+, e_-) = 1$. Se identificarmos \mathfrak{g} com \mathfrak{g}^* usando a forma bi-invariante $(,)$ e definirmos a subvariedade Q de \mathfrak{g}^* determinada por*

$$Q = \left\{ \frac{1}{2}(e_-^2 + fe_+^2) + \rho + (e_+ \otimes u) : f \in \mathbb{R}, \rho \in \mathfrak{h}, e u \in V \right\} \subset \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*,$$

então obtemos o seguinte teorema crucial (referimos a [6] para uma demonstração):

Teorema 7.8.10 (Cahen e Schwachhöfer [6]) *O difeomorfismo $\Phi : Q \rightarrow \mathfrak{h} \oplus V \oplus \mathbb{R}$ definido por*

$$\frac{1}{2}(e_-^2 + fe_+^2) + \rho + (e_+ \otimes u) \mapsto \rho + u + (f + (\rho, \rho))$$

é um isomorfismo de variedades de Poisson. Além do mais, Q é uma subvariedade co-simplética de \mathfrak{g}^ cujo grupóide de Lie simplético é dado por*

$$\Sigma(Q) = \{(\lambda, g) \in Q \times G : \text{Ad}_g^* \lambda \in Q\} \rightrightarrows Q$$

onde G é um grupo de Lie que integra \mathfrak{g} .

Observação 7.8.11 *A estrutura de grupóide de $\Sigma(Q)$ é a estrutura herdada do grupóide de Lie $T^*G \cong \mathfrak{g}^* \times G$ que integra a variedade de Lie-Poisson \mathfrak{g}^* .*

Logo, podemos identificar $\Sigma(\mathfrak{h} \oplus V \oplus \mathbb{R})$ com o subgrupóide de Lie simplético

$$\{(\lambda, g) \in (\mathfrak{h} \oplus V \oplus \mathbb{R}) \times G : \text{Ad}_g^* \lambda \in \mathfrak{h} \oplus V \oplus \mathbb{R}\} \rightrightarrows \mathfrak{h} \oplus V \oplus \mathbb{R}$$

de $\Sigma(\mathfrak{g}^) = T^*G$.*

Agora, como o grupo de Lie simplético especial H de \mathfrak{h} coincide com a componente da identidade de (veja [6])

$$\text{stab}(\mathfrak{h} \oplus V \oplus \mathbb{R}) = \{g \in G : \text{Ad}_g^*(\mathfrak{h} \oplus V \oplus \mathbb{R}) \subset \mathfrak{h} \oplus V \oplus \mathbb{R}\},$$

segue que $\Sigma(\mathfrak{h} \oplus V \oplus \mathbb{R})$ é invariante pela ação livre de H em T^*G por multiplicação à direita. Além do mais, as s -fibras de $\Sigma(\mathfrak{h} \oplus V \oplus \mathbb{R})$ também são invariantes.

Por outro lado, o subgrupo a um parâmetro $\exp(\mathbb{R}\lambda)$ de G também age de forma localmente livre em $s^{-1}(\lambda)$, para cada $\lambda \in \mathfrak{h} \oplus V \oplus \mathbb{R}$ e esta ação comuta com a ação de H . Logo, "integrando" a extensão

$$0 \longrightarrow \mathbb{L} \longrightarrow T^*(\mathfrak{h}^* \oplus V^* \oplus \mathbb{R}) \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

obtemos (compare com o Teorema B de [6]):

Teorema 7.8.12 *Se $s^{-1}(\lambda)/\exp(\mathbb{R}\lambda)$ for uma variedade suave, então cada um de seus pontos tem uma vizinhança que pode ser mergulhada no espaço total $\mathcal{B}_H(M)$ de uma H -estrutura que corresponde a uma variedade simplética especial. Além do mais, se*

$$M_\lambda = \frac{(s^{-1}(\lambda)/\exp(\mathbb{R}\lambda))}{H}$$

for uma variedade suave, então ela é uma variedade simplética especial.

Demonstração. Este resultado é uma consequência direta do Teorema 5.2.1. Se $s^{-1}(\lambda)/\exp(\mathbb{R}\lambda)$ for uma variedade suave, então a restrição de A a órbita de λ é integrável por um grupóide de Lie cuja s -fibra coincide com $s^{-1}(\lambda)/\exp(\mathbb{R}\lambda)$. ■

Referências Bibliográficas

- [1] W. Ambrose and I. M. Singer. *A theorem on holonomy*. Trans. Amer. Math. Soc., 75:428–443, 1953.
- [2] M. Berger. *Sur les groupes d’holonomie des variété à connexion affine et de variété riemanniennes*. Bull. Soc. Math. France, 83:279–330, 1955.
- [3] O. Brahic. *Extensions of Lie brackets*. preprint disponível em arXiv: math.DG/0810.1462, 2008.
- [4] R. L. Bryant. *Metrics with exceptional holonomy*. Annals of Mathematics, 126(2):525–576, 1987.
- [5] R. L. Bryant. *Bochner-Kähler metrics*. J. of Amer. Math. Soc., 14(3):623–715, 2001.
- [6] M. Cahen and L. J. Schwachhöfer. *Special symplectic connections and Poisson geometry*. Lett. Math. Phys., 69:115–137, 2004.
- [7] M. Cahen and L. J. Schwachhöfer. *Special symplectic connections*. preprint disponível em arXiv: math.DG/0402221, 2004.
- [8] A. Cannas da Silva and A. Weinstein. *Geometric models for noncommutative algebras, volume 10 of Berkeley Mathematics Lecture Notes*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [9] E. Cartan. *Sur la structure des groupes infinis de transformations*. Ann. Éc. Norm., 3:153–206, 1904.
- [10] Q.-S. Chi, S. A. Merkulov, and L. J. Schwachhöfer. *On the existence of infinite series of exotic holonomies*. Invent. Math., 126(2):391–411, 1996.
- [11] M. Crainic. *Differentialble and algebroid cohomology, Van Est isomorphism, and characteristic classes*. Comment. Math. Helv., 78:681–721, 2003.

- [12] M. Crainic and R. L. Fernandes. *On integrability of Lie brackets*. *Annals of Mathematics*, (157):575–620, 2003.
- [13] M. Crainic and R. L. Fernandes. *Integrability of Poisson brackets*. *J. of Differential Geometry*, 66:71–137, 2004.
- [14] M. Crainic and R. L. Fernandes. *Secondary characteristic classes of Lie algebroids*. In *Quantum field theory and noncommutative geometry*, volume 662 of *Lecture Notes in Phys.*, pages 157–176. Springer, Berlin, 2005.
- [15] M. Crainic and R. L. Fernandes. *Lectures on integrability of Lie brackets*. preprint disponível em arXiv: math.DG/0611259, 2006.
- [16] S. Evans, J. H. Lu, and A. Weinstein. *Transverse measures, the modular class and a cohomology pairing for Lie algebroids*. *Quart. J. Math.*, 50(Ser. 2):417–436, 1999.
- [17] R. L. Fernandes. *Lie algebroids, holonomy and characteristic classes*. *Adv. Math.*, 170(1):119–179, 2002.
- [18] R. L. Fernandes and D. I. Ponte. *Symmetries and reduction of Poisson Lie groupoids*. preprint em preparação.
- [19] J. Hano and H. Ozeki. *On the holonomy groups of linear connections*. *Nagoya Math. J.*, 10:97–100, 1956.
- [20] P. J. Higgins and K. Mackenzie. *Algebraic constructions in the category of Lie algebroids*. *J. Algebra*, 129(1):194–230, 1990.
- [21] S. Kobayashi. *Transformation Groups in Differential Geometry*. Springer-Verlag, 1972.
- [22] Y. Kosmann-Schwarzbach, C. Laurent-Gengoux, and A. Weinstein. *Modular class of Lie algebroid morphisms*. Preprint available at arXiv:0712.3021 [math.DG], pages 1–33, 2008.
- [23] K. Mackenzie. *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry*, volume 124 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [24] K. C. H. Mackenzie. *General theory of Lie groupoids and Lie algebroids*, volume 213 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [25] S. A. Merkulov and L. J. Schwachhöfer. *Classification of irreducible holonomies of torsion-free affine connections*. *Annals of Mathematics*, 150(1):77 – 149, 1999.
- [26] I. Moerdijk and J. Mrcun. *Introduction to Foliations and Lie Groupoids*, volume 91 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, 2003.
- [27] P. J. Olver. *Equivalence, Invariants and Symmetry*. Cambridge University Press, 1995.
- [28] P. J. Olver. *Non-associative local Lie groups*. *J. Lie Theory*, 6:23–51, 1996.
- [29] *Proceedings of the "Rencontres Mathématiques de Glanon"*. *Symplectic Connections via Integration of Poisson Structures*, 2002.

- [30] R. W. Sharpe. *Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program*, volume *Volume 166 of Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1997.
- [31] L. J. Shwachhöfer. *Connections with irreducible holonomy representations*. *Adv. in Mathematics*, 160(1):1 – 80, June 2001.
- [32] I. M. Singer and S. Sternberg. *The infinite groups of Lie and Cartan*. *J. D'Anal. Math.*, 15:1–113, 1965.
- [33] S. Sternberg. *Lectures on Differential Geometry*. Prentice-Hall, 1964.
- [34] H. Sussman. *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (180):171–188, 1973.
- [35] A. Y. Vaintrob. *Lie algebroids and homological vector fields*. *Uspekhi Mat. Nauk*, 52(2(314)):161–162, 1997.