

Universidade Estadual de Campinas
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Decomposições de Fluxos Estocásticos

Fabiano Borges da Silva

Doutorado em Matemática

Orientador: **Prof. Dr. Paulo R. C. Ruffino**

Campinas - Fevereiro de 2009

Decomposições de Fluxos Estocásticos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Fabiano Borges da Silva** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 26 de Fevereiro de 2009.



Prof. Dr. Paulo R. C. Ruffino
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino
Prof. Dr. Pedro José Catuogno
Prof. Dr. Alain Jacquemard
Prof. Dr. Claudio Buzzi
Prof. Dr. Edson Alberto Coayla Teran

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Crislene Queiroz Custódio – CRB8 / 7966

Silva, Fabiano Borges da

Si38d Decomposições de fluxos estocásticos / Fabiano Borges da Silva --
Campinas, [S.P. : s.n.], 2009.

Orientador : Paulo Régis Caron Ruffino

Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto
de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Fluxo estocástico. 2. G-estruturas. 3. Sistemas hamiltonianos. 4.
Conjugação de fluxos. I. Ruffino, Paulo Régis Caron. II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica. III. Título.

(cqc/imecc)

Título em inglês: Decomposition of stochastic flows

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Stochastic flow. 2. G-estruturas. 3. Hamiltonian
systems. 4. Conjugation of flows.

Área de concentração: Sistemas Dinâmicos

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Pedro José Catuogno (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Alain Jacquemard (Universite de Bourgogne - França)
Prof. Dr. Cláudio Buzzzi (UNESP)
Prof. Dr. Edson Alberto Coayla Teran (UFBA)

Data da defesa: 26/02/2009

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 26 de fevereiro de 2009 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). PAULO RÉGIS CARON RUFFINO



Prof(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO



Prof(a). Dr(a). ALAIN GUY JACQUEMARD



Prof(a). Dr(a). CLAUDIO AGUINALDO BUZZI



Prof(a). Dr(a). EDSON ALBERTO COAYLA TERAN

*Este trabalho dedico à
minha esposa Livia,
que sempre esteve
ao meu lado, me
apoando e me aju-
dando em todas as
etapas do mestrado e
do doutorado.*

Agradecimentos

- Agradeço a Deus por me dar esta oportunidade única em minha vida.
- Agradeço muito a minha esposa Lívia pela sua paciência, pela sua compreensão diante de tantas horas dedicadas à matemática, pelo suporte que me deu (pagar as contas, ir ao mercado, etc.), pela confiança e pelas palavras de apoio nos momentos delicados.
- Agradeço a minha família pelo apoio. Em especial minha mãe, que me deu todas as condições necessárias para que eu pudesse desenvolver esse trabalho.
- Agradeço meu orientador, Paulo Ruffino, pela paciência e por acreditar em mim desde o mestrado. Aprendi muito com ele como matemático e como pessoa pois, durante este período, ganhei não só um mestre, mas também um grande amigo.
- Agradeço ao Prof. Pedro e ao Prof. San Martin, pelos atendimentos, sempre prestados com muita paciência.
- Agradeço aos amigos do grupo de cálculo estocástico, pela companhia nos seminários, nos estudos e nas conversas.
- Agradeço ao pessoal da secretaria de Pós: Ednaldo, Tânia e Cidinha, pelo seu trabalho e pela paciência.

- Agradeço aos meus amigos de Americana e Guararapes pelo apoio no decorrer de todos esses anos.
- Agradeço ao CNPq e à CAPES pelo apoio financeiro em todo esse processo.

Muito Obrigado!

Resumo

Este trabalho consiste basicamente em três níveis de decomposições de fluxos estocásticos: 1) decomposição via G -estruturas; 2) decomposição com componente em trajetórias hamiltonianas e 3) conjugações de fluxos aleatórios.

A primeira consiste em decompor o fluxo ϕ_t , gerado por uma equação diferencial estocástica, na forma $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$, onde ξ_t preserva algum tensor k , i.e., $\xi_t^* k = k$. Este tensor k está associado a uma G -estrutura $P \subset GL(M)$, de tal maneira que para uma base $u_0 \in P$, temos que $\psi_{t*} u_0 = u_0 q_t$, onde q_t é um processo num determinado subgrupo de Lie em $Gl(n, \mathbb{R})$.

A segunda trata de uma decomposição para o fluxo estocástico ϕ_t , com $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t \circ \theta_t$, numa variedade simplética. A componente $(\xi_t \circ \psi_t)$ é uma difusão com seu suporte em curvas de nível de uma função $h \in C^\infty(M)$, ξ_t tem seu suporte em trajetórias hamiltonianas (geradas pelo campo hamiltoniano X_h) e θ_t é a componente transversal nas folhas.

A última decomposição do fluxo permite conjugarmos um fluxo estocástico ϕ_t que não é diferenciável no tempo por um fluxo aleatório ψ_t diferenciável no tempo. Nossa técnica permite ainda mostrar que, se ϕ_t preserva determinados tipos de tensores, então as trajetórias diferenciáveis no tempo os preservarão.

Abstract

This thesis concerns three different kind of decomposition of stochastic flows: 1) decompositions preserving G -structures; 2) decompositions with a component whose trajectories are hamiltonians and; 3) tensor preserving conjugacies with random time differentiable cociclos.

Namely, the first decomposition decomposes a flow ϕ_t generated by a stochastic differential equation into the form $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$, where ξ_t preserves a tensor k , i.e., $\xi_t^* k = k$. This tensor k is associated to a G -structure $P \subset GL(M)$, such that for a given basis $u_0 \in P$, we have that $\psi_{t*} u_0 = u_0 q_t$, where q_t is a process in a certain Lie subgroup of the linear group $GL(n, \mathbb{R})$.

The second decomposition regards an stochastic flow ϕ_t in a symplectic manifold M . The first component of the decomposition ξ_t is a diffusion in the constant energy submanifold, the last component has trajectories transversal to these submanifolds.

The last part of this thesis explores a technique of finding conjugacies of cocicles (cohomologies) with trajectories which are time differentiable, such that the conjugacy preserves some tensor, if the original flow does.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	7
1.1 Regra diferencial para composição de semimartingales	7
1.2 Equações Diferenciais Estocásticas	12
1.2.1 Equações diferenciais estocásticas em grupos de Lie.	16
1.3 Fluxos estocásticos agindo em tensores	18
1.4 Fibrado das bases e suas propriedades	21
1.5 G -estrutura	24
1.6 Variedade simplética	26
2 Decomposição do Fluxo Estocástico via G-Estruturas	30
2.1 Introdução	31
2.2 Teorema Principal	31
2.2.1 Isometrias	35
2.3 Outras Aplicações	36
2.3.1 G -estrutura Flat	37
2.3.2 Exemplo: Fluxo Norte-Sul	42
2.3.3 Comentário sobre a geometria da variedade	43

2.3.4	$Sl(n, \mathbb{R})$ -estrutura na variedade M	43
2.3.5	Teoremas de Recorrência	44
2.4	Soma dos Expoentes de Lyapunov	46
2.5	Cascata de decomposição do fluxo	48
3	Difusão em Variedade Simplética	51
3.1	Difusão em curvas de nível	52
3.1.1	Subvariedade Integral Maximal h -Simplética	55
3.2	Trajetórias Hamiltonianas.	56
4	Conjugação do Fluxo Estocástico e Tensores	61
4.1	Equações Diferenciais Aleatórias e Estocásticas	61
4.2	Conjugação	63
4.3	Conjugações que Preservam Tensores.	67
	Referências Bibliográficas	70

Introdução

Nesta tese estaremos trabalhando com fluxos estocásticos gerados por equações diferenciais estocásticas (EDE's). A ferramenta do cálculo estocástico que permite decompor tais fluxos é conhecida como Fórmula de Itô generalizada (uma das versões). O nosso interesse nesse trabalho é obter, por meio desta fórmula, uma fatoração para o fluxo como, por exemplo, $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$ de tal maneira que a componente ξ_t possua propriedades interessantes com relação a sua dinâmica. Entre outras propriedades, a que mais nos interessa nesse trabalho é que ξ_t seja um difeomorfismo que preserva tensores. Devido a sua importância, a forma volume, a forma simplética e a métrica riemanniana são os tensores que mais aparecem em nossos exemplos.

A decomposição $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$, com ξ_t sendo um difeomorfismo no grupo das transformações afins que são isometrias ($\xi_t^* g = g$) proposta em Liao [17], motivou a primeira parte desta tese, que consiste em fatorar ϕ_t de modo que ξ_t pertença a um grupo de difeomorfismos que preserva um determinado tensor k ($\xi_t^* k = k$), que não seja a métrica. Quando tomamos o tensor k sendo a forma simplética numa variedade, muitas aplicações surgem naturalmente e sendo assim, fizemos um capítulo a parte.

Por fim, procuramos utilizar a técnica de decompor fluxos para obtermos uma conjugação entre o fluxo estocástico ϕ_t (portanto não diferenciável no tempo) e um fluxo aleatório diferenciável no tempo ψ_t (como em Imkeller e Lederer [13]):

$$\phi_t = H(\theta_t \omega) \circ \psi_t(\omega) \circ H(\omega)^{-1}.$$

Além disso, constatamos que, se o fluxo estocástico preserva determinado tipo de tensor k , então seu conjugado também preserva.

Comentaremos agora alguns aspectos relevantes de cada capítulo.

Capítulo 1

Inicialmente é dada uma breve introdução ao cálculo estocástico para os leitores menos familiarizados com o assunto. Os pontos principais da integração estocástica são as integrais estocásticas de Itô e de Stratonovich. Para diferenciar as integrais, estaremos usando “ $\circ d$ ” nas integrais de Stratonovich. A partir delas, podemos definir as equações diferenciais estocásticas (EDE's), que apesar do nome, na verdade são equações integrais. As EDE's de Stratonovich, cujas integrais são de Stratonovich, em geral, dão ênfase às trajetórias e, portanto, são utilizadas quando estamos interessados na dinâmica dos processos. Por outro lado, as EDE's de Itô, cujas integrais são de Itô, geralmente enfatizam a teoria de Martingales e portanto são apropriadas quando trata-se de um problema probabilístico.

Os fluxos que estaremos trabalhando ao longo desta tese são gerados por EDE's da forma

$$dx_t = \sum_{j=0}^m X_j(x_t) \circ dW_t^j. \quad (0.0.1)$$

onde os campos $X_0, \dots, X_m \in C^k$ (com k suficientemente grande) e suas derivadas covariantes ∇X_j 's são limitadas e W_t^j , $j = 1, \dots, m$ são movimentos brownianos independentes ($W_t^0 := dt$). Um fluxo ϕ_t gerado por uma EDE da forma 0.0.1, tem a propriedade que $\phi_t(\omega, \cdot) : M \rightarrow M$ é um C^k -difeomorfismo, ω -quase-sempre, e sendo assim denotaremos por ϕ_{t*} a diferencial do fluxo estocástico com relação a variável espacial x .

Entre outras ferramentas apresentadas no capítulo, destacamos uma das fórmulas de Itô generalizada (para Stratonovich), que consiste numa regra para diferenciação da composição de dois semi-martingales. Esta fórmula é fundamental para a diferenciação da composição

entre dois fluxos ξ_t e ψ_t , que seguindo as mesmas notações de [13], [17] e [23], temos que

$$d(\xi_t(\psi_t(x))) = \xi_{t*}(\odot d\psi_t(x)) + \odot d\xi_t(\psi_t(x)).$$

Analogamente ao caso determinístico, sendo ϕ_t o fluxo gerado pela EDE 0.0.1, definimos o dual da aplicação ϕ_{t*} , e obtemos uma fórmula para a ação de fluxos em tensores. Por meio desta fórmula, caracterizamos quando um fluxo é preservado por um tensor k , mais precisamente, $\phi_t^*k = k$ se, e somente se, em termos da derivada de Lie $L_{X_j}k = 0$ (ω -q.s.) (ver e.g. Kunita [16]).

Na Seção 1.4, introduzimos algumas notações e conceitos sobre fibrado das bases $GL(M)$ e sua conexão linear. O levantamento natural de um campo X na variedade M será denotado por δX . Um tipo de campo de vetores que estaremos abordando ao longo deste trabalho, são os chamados campos infinitesimais afins. Denotando por ω a conexão linear do fibrado das bases, um campo X é infinitesimal afim se, e somente se, em termos da derivada de Lie $L_{\delta X}\omega = 0$. Se M for uma variedade riemanniana com a métrica g , temos o fibrado das bases ortonormais o qual denotaremos por $O(M)$. Quando um campo X é tal que $L_X g = 0$, ele é chamado de campo de Killing, e este possui ainda a propriedade de ser um campo infinitesimal afim. Este fato nos motivou no segundo capítulo da tese, à explorar campos infinitesimais afins que preservasse um tensor k , que não fosse a métrica. De maneira natural, assim como a métrica g se relaciona com o fibrado $O(M)$, procuramos uma relação do tensor k com outro fibrado P , que fosse um subfibrado de $GL(M)$. Isto nos levou à mencionar algumas propriedades básicas sobre G -estruturas que se encontra na Seção 1.5.

Devido ao interesse em fluxos estocásticos gerados por campos hamiltonianos, fizemos também na Seção 1.6, uma pequena introdução às notações e propriedades que dizem respeito a variedade simplética e campos hamiltonianos.

Capítulo 2

Um dos resultados principais deste capítulo, é o Teorema 2.2.1, que trata-se da decomposição do fluxo estocástico $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$, com ξ_t sendo um processo de difusão em $G(M)$ e $\tilde{\psi}_t(u_0) = u_0 \cdot q_t$. A base u_0 ($\pi(u_0) = x_0$) pertence a G -estrutura $P \subset GL(M)$, que esta associada à um determinado tensor k . Enquanto que $G(M)$ é um grupo de difeomorfismos, que preservam o tensor k . A decomposição tem como um de seus pilares, a decomposição na álgebra de Lie das matrizes: $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{q}$. Com a técnica que utilizamos, x_0 é um ponto fixo para ψ_t , e q_t é um processo estocástico no subgrupo de Lie $\exp(\mathfrak{q}) \subset GL(n, \mathbb{R})$.

O Teorema 2.2.1 é uma generalização de um dos teoremas principais de decomposição do fluxo estocástico que se encontra no artigo do Liao [17]. Em sua decomposição, toma-se a G -estrutura P como sendo o fibrado das bases ortonormais e o tensor k como sendo a métrica. Sua decomposição se baseia na decomposição vetorial de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ em matrizes anti-simétricas e triangulares superiores, e $G(M)$ é o grupo das isometrias.

Neste trabalho, exploramos principalmente a decomposição do fluxo onde se obtém, como uma das componentes, uma difusão que preserva volume, e portanto, neste caso o tensor k é a forma volume. Num primeiro momento trabalhamos com a G -estrutura flat $P = \mathbb{R}^n \times Sl(n)$, a qual nos forneceu uma boa intuição para chegarmos a um teorema mais geral, citado anteriormente.

Encontrar uma condição geométrica na variedade M que substitua a hipótese H2 do Teorema 2.2.1 é uma das possibilidades para um trabalho futuro. No caso específico em que $G(M)$ é o grupo das isometrias, tal resultado já foi obtido por Ruffino [23] da seguinte forma:

- Se a variedade M é simplesmente conexa e tem curvatura constante, então para toda base ortonormal u_0 o fluxo estocástico ϕ_t possui a decomposição $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$. Reciprocamente, se todo fluxo ϕ_t em M tem esta decomposição, então M tem curvatura constante.

A soma dos expoentes de Lyapunov faz parte do contexto de fluxos estocásticos que preservam volume. Destacamos em nosso trabalho, que na decomposição $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$, com ξ_t sendo

uma difusão que preserva volume, a soma dos expoentes de Lyapunov de ϕ_t é dada pela componente ψ_t . Além disso, pudemos explicitar uma fórmula para a soma dos expoentes em função dos campos da EDE que gera ϕ_t .

Ainda no capítulo 2, fizemos uma cascata de decomposições para o fluxo ϕ_t , da seguinte forma:

$$\phi_t = \xi_t^1 \circ \dots \circ \xi_t^{n-1} \circ \xi_t^n \circ \psi_t,$$

onde cada $(\xi_t^1 \circ \xi_t^2 \circ \dots \circ \xi_t^k)$, $1 \leq k \leq n-1$, pertence a um grupo de difeomorfismos que preservam um determinado tensor, $(\xi_t^1 \circ \dots \circ \xi_t^n)$ é uma transformação afim e ψ_t é um “resto” que tem um ponto fixo x_0 .

Capítulo 3

Dada uma variedade simplética (M, ω) , assumindo que ela seja paracompacta, a estrutura simplética ω induz uma métrica $\bar{g} = \omega(\cdot, J\cdot)$, onde J é uma estrutura quase-complexa ω -compatível. Sendo assim, o gradiente de uma função $h \in C^\infty(M)$ é dado pela relação $\nabla h = JX_h$, onde X_h denota o campo hamiltoniano da função h .

Utilizando estas propriedades fornecidas pela forma simplética, obtemos os seguintes resultados:

- Seja $h \in C^\infty(M)$ uma submersão. Então podemos decompor o fluxo estocástico como $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$, sendo ξ_t um processo de difusão tal que $\xi_t(x)$ fica restrito à subvariedade $h^{-1}(x)$ q.s.. Além disso, $\psi_t(x)$ é um processo estocástico, transversal às curvas de nível de h e é gerado por $\xi_{t*}^{-1}(JX_h)$.
- Seja (M, ω) uma variedade simplética e $h \in C^\infty$ uma submersão. Então podemos decompor o fluxo estocástico ϕ_t gerado pela EDE 3.0.1 como $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$, sendo $\xi_t(x)$ um processo de difusão restrito à subvariedade integral maximal h -simplética que passa por

$x \in M$. Além disso, $\psi_t(x)$ é um processo estocástico transversal às integrais maximais gerado por $\xi_{t*}^{-1}(JX_h)$.

- Seja h uma submersão. Então existe a decomposição $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$ com o suporte da difusão ξ_t morando em trajetórias hamiltonianas geradas pelo campo X_h . Além disso, ψ_t possui trajetórias transversais às trajetórias hamiltonianas.

Capítulo 4

Dizemos que os fluxos aleatórios ϕ_t e ψ_t são conjugados se existe um homeomorfismo aleatório $H : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\phi_t(\omega) = H(\theta_t \omega) \circ \psi_t(\omega) \circ H(\omega)^{-1},$$

onde $\theta_t : \Omega \longrightarrow \Omega$ é o shift no espaço de probabilidade.

Dado um fluxo estocástico ϕ_t gerado por uma EDE, obtemos uma conjugação entre ϕ_t e um fluxo aleatório diferenciável no tempo, onde $H(\omega) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo $(\omega - q.s.)$ de classe C^k .

Além disso, obtemos um resultado que, se ϕ_t preserva um tensor k do tipo (p,q) , com $(p + q = 2r, r \in \mathbb{N})$, então o fluxo aleatório diferenciável no tempo ψ_t e o difeomorfismo H também preservam o tensor k $(\omega - q.s.)$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, daremos algumas definições e resultados relevantes para um melhor entendimento do restante do trabalho.

1.1 Regra diferencial para composição de semimartingales

Nesta seção, para a conveniência de leitores menos familiarizados com o assunto, faremos uma breve introdução ao cálculo estocástico. Nessa primeira etapa, nosso objetivo é enunciar o teorema sobre como diferenciar a composição de semimartingales. Estaremos usando as mesmas notações e definições usuais da literatura, ver e.g. Oksendal [19] e Kunita [16], entre outros.

Seja $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade filtrado que satisfaz as seguintes condições usuais:

- $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ é uma filtração, ou seja, uma família crescente de sub- σ -álgebras da σ -álgebra $\mathcal{F}$;

- Para todo $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t$ é completo com relação à medida de probabilidade $\mathbb{P}$, isto é, todo subconjunto de um conjunto de medida zero está contido em $\mathcal{F}_t$;
- $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ é contínuo à direita, isto é, para todo $t \geq 0$,

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s.$$

Denotaremos por $\mathbb{E}$ a esperança associada à probabilidade $\mathbb{P}$ e por $\mathbb{E}[\cdot | \mathcal{F}_t]$ a esperança condicional de $\mathbb{E}$ com relação à filtração $\mathcal{F}_t$.

Um *processo estocástico* $(X_t)_{t \geq 0}$ a valores em $\mathbb{R}$ (ou um espaço topológico), é uma aplicação

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{t \geq 0} \times \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\rightarrow X_t(\omega), \end{aligned}$$

na qual é mensurável com relação à $\mathcal{B}(\mathbb{R}_{t \geq 0}) \otimes \mathcal{F}$. O processo $(X_t)_{t \geq 0}$ é dito adaptado (com relação à filtração $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$) se, para todo $t \geq 0$, X_t é $\mathcal{F}_t$ -mensurável. E dizemos que é um processo contínuo se, para quase todo $\omega \in \Omega$, a função $t \rightarrow X_t(\omega)$ é contínua. Um processo estocástico $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$ é chamado de *modificação* de $(X_t)_{t \geq 0}$ se, para cada $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}\{\omega : X_t(\omega) = \tilde{X}_t(\omega)\} = 1.$$

Citaremos um teorema sobre continuidade para processos conhecidos como Critério de Continuidade de Kolmogorov.

Teorema 1.1.1 *Se existem $\alpha, \beta, c > 0$ e o processo $(X_t)_{t \geq 0}$ satisfaz para todo $s, t \geq 0$,*

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^\alpha] \leq c |t - s|^{1+\beta},$$

então existe uma modificação contínua de $(X_t)_{t \geq 0}$.

(ver e.g. Oksendal [19]).

Um exemplo importante de processo estocástico é um processo gaussiano $(B_t)_{t \geq 0}$ (não necessariamente contínuo) que satisfaz, para $s \leq t < \infty$, as seguintes propriedades:

MB(1) $B_t - B_s$ é independente de $\mathcal{F}_s$;

MB(2) $B_t - B_s$ é variável aleatória Gaussiana com média zero e variância $t - s$.

A existência de um processo com essas propriedades é garantida pelo Teorema da Extensão de Kolmogorov, estendendo-se medidas sobre cilindros de dimensão finita para a σ -álgebra gerada por eles (ver e.g. Revus e Yor [22]). Uma vez que, para $\alpha = 4, \beta = 1$ e $c = 3$, verificamos o Critério de Kolmogorov para o processo gaussiano B_t , i.e.:

$$\mathbb{E} [|B_t - B_s|^4] \leq 3 |t - s|^2,$$

então sempre existe uma modificação contínua para B_t . A essa modificação contínua chamamos de *movimento browniano* na reta. Também denotamos por W_t por ser um processo de Wiener. Daqui em diante estaremos assumindo que B_t é a tal versão contínua.

Um processo adaptado e contínuo $(M_t)_{t \geq 0}$ é um *martingale* com relação à filtração $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ se:

- 1) Para $t \geq 0$, a esperança $\mathbb{E}(|M_t|) < +\infty$;
- 2) Para $0 \leq s \leq t$, a esperança condicional $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$.

Pela condição de independência MB(1), verifica-se facilmente que B é um martingale.

Uma variável aleatória T é chamada de um *tempo de parada* em relação à uma filtração $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ se o evento $\{\omega : T(\omega) \leq t\}$ pertence à σ -álgebra $\mathcal{F}_t$ para todo $t \geq 0$. Um exemplo de tempo de parada T usual, é tomarmos $T(\omega) = \inf\{t \geq 0, X_t(\omega) \in A\}$, onde $(X_t)_{t \geq 0}$ é um processo de trajetórias contínuas adaptado à filtração e $A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto aberto ou

fechado. Um processo X_t contínuo e adaptado é chamado de *martingale local* se existe uma seqüência de tempos de paradas $\{T_n\}$, $T_n \rightarrow \infty$, tal que cada processo parado $X_t^{T_n} \equiv X_{\min\{t, T_n\}}$ é um martingale. Definimos um *semimartingale* como sendo a soma de um martingale local e um processo de variação limitada. Os semimartingales, em particular o movimento browniano, são também definidos no $\mathbb{R}^m$ (veja e.g. Oksendal [19]).

A integração estocástica é um ponto central na análise estocástica. Daremos agora a definição de dois tipos de integrais estocásticas, que serão usadas ao longo deste trabalho. Em seguida, daremos a definição de um tipo de variação que relaciona tais integrais. O leitor interessado na teoria de integração estocástica pode consultar, entre outras, as referências [19], [21] e [22].

Seja $(P_n)_{n=1,2,\dots}$ uma seqüência de partições finitas

$$P_n = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{i_n} < \infty\}$$

de $[0, \infty)$ com $t_{i_n} \rightarrow \infty$ e $|P_n| = \sup_{t_i \in P_n} |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0$. Denotemos por $a \wedge b$ o mínimo entre a e b .

Observação 1.1.2 *Os limites que tomaremos nas definições seguintes são em probabilidade.*

Definição 1.1.3 *Seja Y um semimartingale. Para cada processo real X contínuo e adaptado, definimos a integral estocástica de Itô como*

$$\int_0^t X_s dY_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in P_n} X_{t_i} (Y_{s \wedge t_{i+1}} - Y_{s \wedge t_i}), \quad t_i \leq t.$$

E a integral estocástica de Stratonovich como

$$\int_0^t X_s \circ dY_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in P_n} \frac{1}{2} (X_{t_i} + X_{t_{i+1}}) (Y_{s \wedge t_{i+1}} - Y_{s \wedge t_i}), \quad t_i \leq t.$$

Observação 1.1.4 *As integrais de Itô dão ênfase à teoria de martingales, ou seja, é conveniente trabalharmos com tais integrais quando estamos interessados nas probabilidades dos processos. Por outro lado, as integrais de Stratonovich enfatizam as trajetórias e a dinâmica do processo.*

Definição 1.1.5 *A variação quadrática $[\cdot, \cdot]$ entre dois semimartingales contínuos é definida para qualquer $t \geq 0$ por*

$$[X, Y]_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in P_n} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}), \quad t_i \leq t.$$

A fórmula de conversão para as integrais de Itô e Stratonovich é dada pela variação quadrática, i.e.:

$$\int_0^t X_s \circ dY_s = \int_0^t X_s dY_s + \frac{1}{2}[X, Y]_t.$$

Se $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^m)$ é um movimento browniano m -dimensional, então temos a seguinte propriedade para a variação quadrática: $[B^i, B^j]_t = \delta_{ij}t$.

Daremos agora uma das Fórmulas de Itô generalizada, que trata-se de uma regra geral para diferenciação de composições de dois processos estocásticos.

Teorema 1.1.6 (Bismut-Kunita) *Seja $F_t(x)$, $t \in [0, a]$, $x \in \mathbb{R}^d$ um campo aleatório contínuo (t, x) q.s.(quase sempre), satisfazendo as seguintes hipóteses:*

(a) *Para cada t , $F_t(\cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^3 q.s..*

(b) *Para cada $x \in \mathbb{R}^d$, $F_t(x)$ é um semimartingale contínuo e satisfaz*

$$F_t(x) = F_0(x) + \sum_{j=1}^m \int_0^t f_s^j(x) \circ dY_s^j, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad \text{q.s.},$$

onde $Y_s^1, \dots, Y_s^m$ são semimartingales contínuos, $f_s^j(x)$ são campos aleatórios C^3 em x e para cada x , $f_s^j(x)$ são processos adaptados.

Seja $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$ um semimartingale contínuo. Então temos

$$F_t(X_t) = F_0(X_0) + \sum_{j=1}^m \int_0^t f_s^j(X_s) \circ dY_s^j + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial F_s}{\partial x_i}(X_s) \circ dX_s^i. \quad (1.1.1)$$

Ou escrevendo na forma diferencial

$$d(F_t(X_t)) = \circ dF_t(X_t) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial F_t}{\partial x_i}(X_t) \circ dX_t^i. \quad (1.1.2)$$

Um corolário importante do teorema acima é a Fórmula de Itô clássica. Sua importância está nas aplicações e resultados que podem ser obtidos por meio dela.

Corolário 1.1.7 *Seja $F \in C^3(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ e $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$ um semimartingale contínuo em $\mathbb{R}^d$. Então $F(X_t)$ é um semimartingale contínuo e*

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s) \circ dX_s^i.$$

Ou ainda, pela fórmula de conversão:

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) [dX^i, dX^j]_s.$$

Um exemplo do que podemos obter com a Fórmula de Itô é que $\frac{1}{2}(B_t^2 - t) = \int_0^t B_s dB_s$ e, portanto, $B_t^2 - t$ é um martingale.

1.2 Equações Diferenciais Estocásticas

Uma equação diferencial estocástica (EDE) em $\mathbb{R}^d$, no sentido de Itô, é uma expressão do tipo:

$$\begin{aligned} d\xi_t &= X_0(t, \xi_t)dt + \sum_{j=1}^m X_j(t, \xi_t)dW_t^j, \\ \xi_s &= x \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

onde $X_0, X_1, \dots, X_m : [0, a] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ são aplicações contínuas e $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^m)$ é um movimento browniano canônico em $\mathbb{R}^m$ (cada W^j é um movimento browniano real). O campo X_0 é conhecido como *drift* da EDE enquanto que os demais campos X_j 's são os coeficientes da parte difusa. Uma solução de 1.2.3 é um processo $\xi_{s,t}$ a valores em $\mathbb{R}^d$ que satisfaz a equação integral correspondente, isto é, para $t \in [0, a]$ temos

$$\xi_{s,t} = x + \int_s^t X_0(u, \xi_u) du + \sum_{j=1}^m \int_s^t X_j(u, \xi_u) dW_u^j \quad (1.2.4)$$

($\xi_{s,s} = x$ é a condição inicial). No drift temos uma integral usual sobre caminhos aleatórios e na parte difusa, integrais estocásticas no sentido de Itô. Uma interpretação dinâmica/física para a solução acima, é que $\xi_{s,t}(x)$ tem direção preferencial X_0 dada pelo drift da EDE e uma “vibração gaussiana” nas demais direções X_j 's dada pela parte difusa. Por conveniência iremos escrever dt como dW_t^0 e a EDE 1.2.4 como

$$\xi_t = x + \sum_{j=0}^m \int_s^t X_j(u, \xi_u) dW_u^j. \quad (1.2.5)$$

Ao longo deste trabalho estaremos sempre interessados com as chamadas soluções fortes, isto é, procuramos fixar inicialmente um movimento browniano que pode ser tomado, sem perda de generalidade, como o movimento browniano canônico que é definido sobre o espaço de Wiener $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ onde $\Omega = \{\omega : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m : \omega \text{ é contínua, } \omega(0) = 0\}$, $\mathcal{F}_t$ é o completamento da σ -álgebra gerada por $\{W_s : 0 \leq s \leq t\}$ e $\mathbb{P}$ é a medida de Wiener. Para soluções iniciadas em ξ_s , $s > 0$, é necessário tomar uma variação da σ -álgebra deste movimento browniano (ver e.g. Kunita [16]). Em soluções fracas admite-se a possibilidade de construir uma solução em alguma base estocástica, ou seja, em relação a alguma outra versão do movimento browniano.

Se os campos são globalmente Lipschitz, isto é, existe uma constante positiva L tal que

$$|X_j(t, x) - X_j(t, y)| \leq L|x - y|$$

para todo $t \in [0, a]$ e $x, y \in \mathbb{R}^d$, então a EDE tem uma única solução $\xi_{s,t}$ para qualquer condição inicial dada. Além disso, existe uma modificação para a solução $\xi_{s,t}$ de tal forma que $\xi_{s,t}(\cdot, \omega) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é um homeomorfismo para quase todo ω .

Também podemos falar em diferenciabilidade da solução $\xi_{s,t}(x)$ com relação à variável espacial x , i.e., diferenciabilidade da aplicação $\xi_{s,t}(\cdot, \omega) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. No entanto, é necessário fazer algumas exigências sobre os campos da EDE que gera tal solução. Uma aplicação $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é de classe $C^{k,\alpha}$ se é k -vezes diferenciável e suas k -ésimas derivadas são localmente Holder contínuas de ordem α . Se suas derivadas são globalmente Holder contínuas, denotamos por $C_g^{k,\alpha}$. Quando os coeficientes da EDE de Itô são $C_g^{k,\alpha}$ para algum $\alpha > 0$ e suas k -ésimas derivadas são limitadas, então a aplicação $\xi_{s,t}(\cdot, \omega) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é um C^k -difeomorfismo para todo $s < t$ quase sempre (ver Kunita [16]).

As equações diferenciais estocásticas autônomas (i.e., quando os campos que geram a EDE são autônomos) geram soluções $\xi_{s,t}$ que dependem apenas de $\xi_{0,t}$. De maneira mais precisa $\xi_{s,t}(\omega)(x) = \xi_{0,t-s}(\theta_s(\omega))(x)$, onde $\theta : \Omega \rightarrow \Omega$ é o “shift” dado por $(\theta_s(\omega))(t) = \omega(t+s) - \omega(s)$. Mais ainda, tomando $\phi_t = \xi_{0,t}$, este satisfaz a propriedade de cociclo (equação do fluxo):

$$\phi_{t+s}(\omega) = \phi_t(\theta_s(\omega)) \circ \phi_s(\omega).$$

Pode-se perceber, a partir da Fórmula de Itô, que as equações diferenciais estocásticas de Stratonovich se comportam bem sob mudanças de coordenadas. Sendo assim, estas são úteis para trabalharmos em variedades. Suas soluções são definidas como em 1.2.4, com a diferença que na sua equação integral, as integrais são tomadas no sentido de Stratonovich, i.e.,

$$\xi_t = x + \int_s^t X_0(u, \xi_u) du + \sum_{j=1}^m \int_s^t X_j(u, \xi_u) \circ dW_u^j. \quad (1.2.6)$$

Porém, para dar sentido nas EDE's de Stratonovich e também para garantir a existência e unicidade das soluções, precisamos exigir mais sobre os campos das EDE's de Stratonovich do que em EDE's de Ito. Mais precisamente, estas exigências são:

- (1) X_0 é contínua, tem derivadas parciais em relação a x e estas são contínuas em relação a (t, x) ;
- (2) $X_j, j = 1, \dots, m$, é de classe C^1 , tem derivadas parciais de segunda ordem e estas são contínuas como função de (t, x) .

Com estas hipóteses sobre os campos, uma EDE de Stratonovich é equivalente a uma EDE de Itô com campos de classe C^1 . Denotando por $D_{X_j}X_j$ a derivada direcional de X_j na direção dela mesma, temos a seguinte relação:

$$\sum_{j=1}^m \int_s^t X_j(u, \xi_u) \circ dW_u^j = \sum_{j=1}^m \int_s^t X_j(u, \xi_u) dW_u^j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \int_s^t (D_{X_j}X_j)(u, \xi_u) du.$$

Vamos agora definir equações diferenciais estocásticas em variedades. Seja M uma variedade C^∞ , d -dimensional, conexa e paracompacta. Suponha que são dados $m+1$ campos de vetores em M com parâmetro $t \in [0, a]$; $X_0(t), \dots, X_m(t)$. Assuma que $X_1, \dots, X_m$ são campos C^2 em x e C^1 em t , i.e., em uma coordenada local $(x_1, \dots, x_d)$, estes campos são escritos da forma

$$X_j(t) = \sum_{i=1}^d X_j^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde $X_j^i(t, x)$ são funções C^1 de t e funções C^2 de x . E para o campo X_0 , assume que a função $X_0^i(t, x)$ é contínua em t e C^1 em x . Uma equação diferencial estocástica de Stratonovich em M pode ser escrita exatamente como em 1.2.6, tomando as condições descritas anteriormente nos campos. O semimartingale $\xi_{s,t}(x)$ é solução de 1.2.6 se, para qualquer função de classe C^3 , $F(\xi_{s,t}(x))$ é um semimartingale contínuo e

$$F(\xi_{s,t}(x)) = F(x) + \sum_{j=0}^m \int_s^t X_j(r) F(\xi_{s,r}(x)) \circ dW_r^j. \quad (1.2.7)$$

O parâmetro t da EDE 1.2.7 está definido até seu tempo de explosão $T(s, x)$. Para maiores detalhes ver e.g. Kunita [16].

Nos demais capítulos deste trabalho, estaremos interessados nos aspectos dinâmicos e, portanto, assumiremos que os campos são C^∞ e autônomos.

1.2.1 Equações diferenciais estocásticas em grupos de Lie.

Antes de falarmos das equações diferenciais estocásticas em grupos de Lie, relembremos algumas propriedades básicas de grupos de Lie.

Seja $R_g : G \rightarrow G$ a translação à direita dada por $R_g(h) = hg$. Um campo de vetores X em G é dito invariante à direita se $(R_g)_*X = X$, i.e.,

$$d(R_g)_h(X(h)) = X(hg).$$

E será invariante à esquerda se $(L_g)_*X = X$. Se X é um campo invariante à direita, então seu fluxo $x_t = L_{\exp(tX)}$, i.e., $x_t(g) = \exp(tX)g$. Por outro lado, se X é um campo invariante à esquerda, então seu fluxo $x_t = R_{\exp(tX)}$, i.e., $x_t(g) = g \exp(tX)$.

Seja M uma variedade diferenciável. Suponha que G atua em M por difeomorfismos $x \mapsto gx$, $x \in M, g \in G$. Considere A um campo de vetores invariante à direita em G . Denotando por e^A a aplicação exponencial em G , a expressão

$$\tilde{A}(x) = \left. \frac{d}{dt}(e^{tA}x) \right|_{t=0}$$

define um campo de vetores em M . A trajetória do campo A que passa pela identidade de G (i.e. e^{tA}) é uma solução fundamental para o fluxo φ_t associado ao campo $\tilde{A}$, i.e., $\varphi_t(x) = e^{tA}(x)$. Os campos de vetores $\tilde{A}$ são completos pois seus fluxos são definidos globalmente, para todo $t \in \mathbb{R}$ (ver e.g. Kobayashi e Nomizu [14]).

Seja G um grupo de Lie e $X_0, X_1, \dots, X_m$ campos invariantes à direita em G (para simplificar, tomamos campos independentes de t). Considere a seguinte EDE em G :

$$dg_t = X_0(g_t)dt + \sum_{j=1}^m X_j(g_t) \circ dW_t^j. \quad (1.2.8)$$

Como os campos X_j 's são C^∞ (na verdade analíticos), soluções maximais existem. Denote por e a identidade em G e seja g_t a solução com $g_0 = e$. Tome $h \in G$ arbitrário e $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 . Pela fórmula de Itô

$$\begin{aligned} f(g_th) &= f \circ R_h(g_t) = f(h) + \sum_{j=0}^m \int_0^t (X_j(f \circ R_h))(g_s) \circ dW_s^j \\ &= f(h) + \sum_{j=0}^m \int_0^t (X_j f)(g_s h) \circ dW_s^j \end{aligned}$$

pois X_j é invariante à direita e portanto, $X_j(f \circ R_h) = (X_j f) \circ R_h$. Então a solução $\varphi_t(h)$, com condição inicial $(0, h)$, é $\varphi_t(h) = g_t h = L_{g_t} h$ onde L_{g_t} é a translação à esquerda. Ainda temos que se T é o tempo de explosão de g_t , então $T = \infty$ q.s..

A solução g_t da equação (1.2.8) é uma solução fundamental em M da EDE:

$$dx_t = \tilde{X}_0(x_t)dt + \sum_{j=1}^m \tilde{X}_j(x_t) \circ dW^j. \quad (1.2.9)$$

Isto porque se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^3 então, para $x \in M$, a função $f_x : g \in G \mapsto f(gx) \in \mathbb{R}$ é de classe C^3 e

$$f_x(g_t) = f(g_t x) = f(x) + \sum_{j=0}^m \int_0^t (X_j f_x)(g_s) \circ dW_s^j.$$

Mas, como o fluxo de $\tilde{A}$ é e^{tA} , temos que $X_j f_x = (\tilde{X}_j f)_x$ e portanto,

$$f(g_t x) = f(x) + \sum_{j=0}^m \int_0^t (\tilde{X}_j f)(g_s x) \circ dW_s^j$$

i.e., soluções de (1.2.9) são da forma $g_t x$. E ainda, temos que seus tempos de explosão são iguais a ∞ (ver e.g. Arnold [3] ou San Martin e Marques [25]).

1.3 Fluxos estocásticos agindo em tensores

Um fluxo estocástico de difeomorfismos gerado por uma EDE em uma variedade age naturalmente em tensores. Estaremos interessados em caracterizar um determinado fluxo estocástico que preserva determinado tensor k por meio dos campos de sua EDE. Nesta seção ainda daremos algumas notações de geometria diferencial e alguns resultados importantes para os demais capítulos que podem ser encontrados em Bismut [5] e Kunita [16].

Sendo ϕ um difeomorfismo de M , sua diferencial $(\phi_*)_x : T_x M \rightarrow T_{\phi(x)} M$ é uma aplicação linear tal que para toda $f \in C^\infty(M)$, $(\phi_*)_x X_x f = X_x(f \circ \phi)$, para todo $X_x \in T_x M$. Dado um campo de vetores X em M , denotemos por X_x a restrição de X no ponto x . Definimos então o novo campo de vetores $\phi_* X$ por

$$(\phi_* X)_x = \phi_{*\phi^{-1}(x)} X_{\phi^{-1}(x)}.$$

Logo, para $f \in C^\infty(M)$, temos $\phi_* X f(x) = X(f \circ \phi)(\phi^{-1}(x))$.

Seja Y um campo de vetores e ϕ_t seu fluxo, i.e., grupo a 1-parâmetro de transformações de M gerado por Y :

$$\frac{d}{dt}(f \circ \phi_t)(x) \Big|_{t=0} = Yf(x), \quad \forall f \in C^\infty.$$

A derivada de Lie de um campo X com relação à Y é o campo de vetores $L_Y X$ definido por

$$(L_Y X)_x = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{(\phi_{t*} X)_x - X_x\} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{\phi_{t*} \phi_t^{-1}(x) X_{\phi_t^{-1}(x)} - X_x\}.$$

Uma propriedade bastante conhecida é que $L_Y X = [Y, X]$, onde $[\cdot, \cdot]$ denota o colchete de Lie.

Nas mesmas condições da Seção 1.2, seja $\xi_{s,t}(x)$ a solução da EDE

$$d\xi_t = \sum_{j=0}^m X_j(t, \xi_t) \circ dW_t^j. \quad (1.3.10)$$

Vamos assumir que $\xi_{s,t}$ define um fluxo estocástico de difeomorfismos. Então a diferencial $\xi_{s,t*}$ está bem definida quase sempre para qualquer $s < t$ e temos a seguinte fórmula para a ação do fluxo estocástico em campos de vetores:

Teorema 1.3.1 *Suponha que os coeficientes $X_1, \dots, X_m$ da EDE 1.3.10 são campos $C^{5,\alpha}$ para algum $\alpha > 0$ e X_0 é um campo $C^{4,\alpha}$ para algum α . Então $\xi_{s,t*}$ satisfaz a seguinte fórmula para qualquer campo X , C^3 ,*

$$\xi_{s,t*}X - X = - \sum_{j=0}^m \int_s^t L_{X_j(r)}(\xi_{s,r*}X) \circ dW_r^j. \quad (1.3.11)$$

(ver e.g. Kunita [16]).

Sendo ϕ um difeomorfismo de M , denotemos por $\phi_x^* : T_{\phi(x)}M^* \rightarrow T_xM^*$ (espaço cotangente) o dual da aplicação ϕ_* , definido por $\langle \phi_x^* \theta_{\phi(x)}, X_x \rangle = \langle \theta_{\phi(x)}, \phi_* X_x \rangle$ para todo $\theta_{\phi(x)} \in T_{\phi(x)}M^*$ e $X_x \in T_xM$. Dada uma 1-forma θ , denotamos por $\phi^* \theta$ a 1-forma tal que $(\phi^* \theta)_x = \phi_x^* \theta_{\phi(x)}$. Portanto, $\langle \phi^* \theta, X \rangle_x = \langle \theta, \phi_* X \rangle_{\phi(x)}$. Seja X um campo completo e ϕ_t seu fluxo de difeomorfismo. A derivada de Lie da 1-forma θ é dada por

$$L_X \theta = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ \phi_t^* \theta - \theta \}.$$

Uma relação entre derivadas de Lie e 1-formas é dada por:

$$X(\langle \theta, Y \rangle) = \langle L_X \theta, Y \rangle + \langle \theta, L_X Y \rangle.$$

Um tensor k do tipo (p, q) é, por definição, a escolha de um tensor k_x de $T_q^p(x)$ para cada ponto $x \in M$, onde

$$T_q^p(x) = \underbrace{T_x M \otimes \dots \otimes T_x M}_{p \text{ vezes}} \otimes \underbrace{T_x M^* \otimes \dots \otimes T_x M^*}_{q \text{ vezes}}.$$

Assim, para cada x , k_x é uma forma multilinear no espaço produto

$$T_x M^* \times \dots \times T_x M^* \times T_x M \times \dots \times T_x M.$$

Dados as 1-formas $\theta^1, \dots, \theta^p$ e os campos $Y_1, \dots, Y_q$, a aplicação

$$x \in M \mapsto k_x(\theta_x^1, \dots, \theta_x^p, (Y_1)_x, \dots, (Y_q)_x) \in \mathbb{R}$$

é um campo escalar, que assumiremos de classe C^3 . Se ϕ é um difeomorfismo de M , definimos ϕ^*k por

$$(\phi^*k)_x(\theta^1, \dots, \theta^p, Y_1, \dots, Y_q) = k_{\phi(x)}((\phi^*)^{-1}\theta^1, \dots, (\phi^*)^{-1}\theta^p, \phi_*Y_1, \dots, \phi_*Y_q).$$

Se X é um campo completo e ϕ_t é seu fluxo de difeomorfismos, então a derivada de Lie do tensor k é dado por

$$L_X k = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{\phi_t^* k - k\}.$$

Sendo k um tensor do tipo (p, q) ainda temos que

$$\begin{aligned} X(k_x(\theta^1, \dots, \theta^p, Y_1, \dots, Y_q)) &= (L_X k)_x(\theta^1, \dots, \theta^p, Y_1, \dots, Y_q) \\ &+ \sum_{k=1}^p k_x(\theta^1, \dots, L_X \theta^k, \dots, \theta^p, Y_1, \dots, Y_q) \\ &+ \sum_{l=1}^q k_x(\theta^1, \dots, \theta^p, Y_1, \dots, L_X Y_l, \dots, Y_q). \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Podemos agora, depois das definições acima, dar uma fórmula de Itô para a ação de $\xi_{s,t}^*$ em campos de tensores.

Teorema 1.3.2 *Suponha que os coeficientes $X_1, \dots, X_m$ da EDE 1.3.10 são campos $C^{5,\alpha}$ para algum $\alpha > 0$ e X_0 é um campo $C^{4,\alpha}$ para algum α . Seja k um tensor C^3 do tipo (p, q) . Então $\xi_{s,t}^*$ satisfaz a seguinte fórmula:*

$$\xi_{s,t}^* k - k = \sum_{j=0}^m \int_s^t \xi_{s,r}^* (L_{X_j(r)} k) \circ dW_r^j. \quad (1.3.13)$$

(ver e.g. Kunita [16]).

Corolário 1.3.3 *Consideremos as mesmas hipóteses do teorema anterior sobre os campos e o tensor k . Então $\xi_{s,t}^* k = k$ quase sempre se, e somente se, $L_{X_j(r)} k = 0$, para $r \in [s, t]$ e $j = 0, \dots, m$.*

Nos demais capítulos estaremos assumindo que os campos $X_0, \dots, X_m \in C^k$, com k suficientemente grande e suas derivadas covariantes ∇X_j 's são limitadas. Com isso, estaremos satisfazendo as hipóteses dos teoremas desta seção.

1.4 Fibrado das bases e suas propriedades

Seja $GL(M)$ o fibrado das bases, o qual é um fibrado principal $\pi : GL(M) \rightarrow M$ com o grupo estrutural $Gl(n, \mathbb{R})$. O grupo $Gl(n, \mathbb{R})$ age à direita em $GL(M)$ da seguinte forma. Se $u = (X_1, \dots, X_n)$ é uma base linear no ponto x e $a = (a_j^i) \in Gl(n, \mathbb{R})$, então ua é uma base $(Y_1, \dots, Y_n)$ no ponto x definida por $Y_i = \sum_{j=1}^n a_j^i X_j$. A base u também pode ser vista como o isomorfismo linear

$$u : \mathbb{R}^d \longrightarrow T_x M.$$

E, considerando $a \in Gl(n, \mathbb{R})$ como a transformação linear $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, a qual leva e_j em $\sum_{i=1}^n a_j^i e_i$, temos que $ua : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ é uma composição das aplicações u e a .

Uma conexão em $GL(M)$ é chamada de conexão linear de M . Dada uma conexão linear Γ , associamos com cada $v \in \mathbb{R}^n$ um único campo horizontal (standard) $B(v)$ em $GL(M)$, dado por $d\pi((B(v))_u) = u(v)$. Além disso, se θ é a forma canônica $\theta_u : T_u GL(M) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\theta_u(Y) = u^{-1} d\pi(Y),$$

então $\theta(B(v)) = v$.

Sejam $H_1, \dots, H_n$ os campos horizontais (standard) correspondentes à base $e_1, \dots, e_n$ de $\mathbb{R}^n$ e $\{E_i^{j*}\}$ os campos fundamentais correspondentes à base $\{E_i^j\}$ da álgebra de Lie $gl(n, \mathbb{R})$. Então temos que os $n^2 + n$ vetores $\{(H_k)_u, (E_i^{j*})_u\}$ formam uma base para $T_u GL(M)$, para todo $u \in GL(M)$ (ver e.g. [14, p.122]).

Um difeomorfismo $\phi : M \rightarrow M$ induz, de maneira natural, um automorfismo $\tilde{\phi}$ no fibrado $GL(M)$; $\tilde{\phi}$ leva a base $u = (X_1, \dots, X_n)$ no ponto $x \in M$ para a base $\tilde{\phi}(u) = (\phi_* X_1, \dots, \phi_* X_n)$

no ponto $\phi(x) \in M$. Não é difícil ver que $\tilde{\phi}^*\theta = \theta$ (ver e.g. [14, p.226]). Dizemos que o difeomorfismo ϕ é uma transformação afim se $\phi_* : TM \rightarrow TM$ leva curvas horizontais em curvas horizontais, i.e., leva cada campo paralelo ao longo da curva γ de M em campos paralelos da curva $\phi(\gamma)$. Ou ainda, se ω é a forma conexão de uma dada conexão linear Γ em M , dizer que ϕ é uma transformação afim em M é equivalente a dizer que $\tilde{\phi}^*\omega = \omega$.

O levantamento natural do campo X é o único campo δX em $GL(M)$ tal que:

- a) δX é invariante por R_a , para todo $a \in G$ ($R_{a*}\delta X(u) = \delta X(ua)$);
- b) $L_{\delta X}\theta = 0$;
- c) $d\pi(\delta X(u)) = X(\pi(u))$, para todo $u \in GL(M)$.

Reciprocamente, dado um campo δX em $GL(M)$ satisfazendo (a) e (b), existe um único campo X em M satisfazendo (c). Em termos da sua dinâmica, se η_t é o fluxo do campo X em M , então

$$\delta X(u) = \frac{d}{dt}\tilde{\eta}_t(u)|_{t=0}.$$

A aplicação $X \mapsto \delta X$ é um isomorfismo da álgebra de Lie $\mathfrak{X}(M)$ dos campos em M na álgebra de Lie $\mathfrak{X}(GL(M))$ dos campos em $GL(M)$. Dada uma conexão linear Γ e sua forma conexão ω em M , o campo X em M é uma transformação afim infinitesimal se, e somente se, $L_{\delta X}\omega = 0$. Seja $a(M)$ o conjunto das transformações afins infinitesimais em M . Então $a(M)$ forma uma sub-álgebra de Lie de $\mathfrak{X}(M)$, a qual é isomorfa à seguinte sub-álgebra de Lie de $\mathfrak{X}(GL(M))$:

$$a(GL(M)) = \{\delta X \in \mathfrak{X}(GL(M)) : L_{\delta X}\omega = 0\}.$$

Como a aplicação linear $f : a(GL(M)) \rightarrow T_u GL(M)$, $\delta X \mapsto \delta X(u)$ é injetiva, temos que $\dim a(GL(M)) \leq \dim T_u GL(M) = n^2 + n$ ($n = \dim M$). E assim, se M for uma variedade conexa, temos que $\dim a(M) \leq n^2 + n$ (ver e.g. [14, p.232]).

Seja M uma variedade riemanniana com a métrica g e $O(M)$ o fibrado das bases ortonormais sobre M . Toda conexão em $O(M)$ determina uma conexão em $GL(M)$, i.e., uma conexão linear em M . Neste caso, uma conexão linear em M é chamada de conexão métrica e é determinada pela conexão em $O(M)$. Um caso particular de conexão métrica é quando a torção é nula (chamada de conexão de Levi-Civita). Dizemos que o difeomorfismo $\phi : M \rightarrow M$ é uma isometria se $\phi^*g = g$. Uma isometria é necessariamente uma transformação afim (ver e.g. [14, p.236]). Dizemos que um campo em M é de Killing quando $L_X g = 0$. Isto é equivalente a dizer que o levantamento natural δX para $GL(M)$ é tangente a $O(M)$, para todo ponto de $O(M)$. O conjunto dos campos de Killing em M formam uma álgebra de Lie de dimensão no máximo $\frac{1}{2}n(n+1)$ quando M é uma variedade conexa. (ver e.g. [14, p.238]).

Seja Γ uma conexão linear em M e ω sua forma conexão. Tomemos $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ a álgebra de Lie correspondente ao grupo de Lie $GL(n, \mathbb{R})$. Esta álgebra é o conjunto das matrizes $d \times d$ equipado com o colchete de Lie $[A, B] = AB - BA$. Dado $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, seja

$$uA = \frac{d}{dt}[ue^{tA}]_{t=0}$$

o vetor tangente à curva $t \mapsto ue^{tA}$ em $GL(M)$ em $t = 0$, onde e denota a aplicação exponencial: $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$. Tais vetores são chamados de verticais e formam o subespaço vertical $T_u^v GL(M)$ de $T_u GL(M)$. Para $X \in T_x M$, tomemos z_t como sendo a curva em M tal que $\frac{d}{dt}(z_t)|_{t=0} = X$ e seja u_t o transporte paralelo da base u ao longo de z_t com relação à ω . Seja

$$H(X)(u) = \frac{d}{dt}[u_t]_{t=0}$$

chamado de levantamento horizontal de X para $GL(M)$ em u . Então $T_u^h GL(M) = \{H(X)(u) : X \in T_x M\}$ é um subespaço de $T_u GL(M)$ e qualquer elemento nele é chamado de horizontal. Ainda temos que $T_u GL(M) = T_u^h GL(M) \oplus T_u^v GL(M)$.

Sabemos que a componente vertical do campo levantado é relacionado com a derivada covariante por $(\delta X)^v(u) = \nabla X(u) = (\nabla X(u_1), \dots, \nabla X(u_d))$. Sendo assim, existe uma única matriz $[\tilde{X}(u)] \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ tal que $\nabla X(u) = u[\tilde{X}(u)]$.

Se $\mathfrak{s}$ é uma sub-álgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, então denotaremos

$$u\mathfrak{s} = \{uA : A \in \mathfrak{s}\}.$$

1.5 G -estrutura

Por uma G -estrutura em M queremos dizer um sub-fibrado P de $GL(M)$ com o grupo estrutural $G \subseteq Gl(n, \mathbb{R})$. A existência de uma G -estrutura depende muito da topologia da variedade M . Por exemplo, se uma variedade é paracompacta, então ela admite uma $O(n)$ -estrutura. Obstruções para a existência de G -estruturas podem ser melhor compreendidas através do estudo de “cross sections” em fibrados associados, veja Kobayashi-Nomizu [14].

Uma G -estrutura induz um tensor na variedade da seguinte forma. Seja K um tensor sobre $\mathbb{R}^n$ e G o grupo das transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ deixando K invariante, i.e., para $v_1, \dots, v_l \in \mathbb{R}^n$, temos para $g \in G$

$$K(v_1, \dots, v_l) = K(gv_1, \dots, gv_l).$$

Seja P uma G -estrutura em M e k o campo tensorial em M definido por K e P da seguinte maneira: para cada $x \in M$, escolha um isomorfismo linear $u : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M \in P$. Para $w_1, \dots, w_l \in T_x M$, definimos

$$k_x(w_1, \dots, w_l) = K(u^{-1}w_1, \dots, u^{-1}w_l).$$

Esta definição independe da escolha da base u pois, se tomarmos outra base $p : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M \in P$, como existe $g \in G$ tal que $p^{-1} = gu^{-1}$, temos

$$\begin{aligned} k_x(w_1, \dots, w_l) &= K(p^{-1}w_1, \dots, p^{-1}w_l) \\ &= K(gu^{-1}w_1, \dots, gu^{-1}w_l) \\ &= K(u^{-1}w_1, \dots, u^{-1}w_l). \end{aligned}$$

Sejam P e P' G -estruturas sobre M e M' . Seja f um difeomorfismo de M sobre M' e $f_* : GL(M) \rightarrow GL(M')$ o isomorfismo induzido no fibrado das bases. Se f_* leva P em P' , chamamos f de um isomorfismo da G -estrutura P sobre a G -estrutura P' . Se $M = M'$ e $P = P'$, então um *isomorfismo* f é chamado de *automorfismo* da G -estrutura P .

Um campo de vetores X em M é chamado de um *automorfismo infinitesimal* de uma G -estrutura P , se ele gera um grupo local a 1-parâmetro de automorfismos de P .

Proposição 1.5.1 *Seja K o tensor sobre $\mathbb{R}^n$ e G o grupo das transformações lineares sobre $\mathbb{R}^n$ deixando K invariante. Seja P uma G -estrutura em M e k o campo tensorial em M definido por K e P . Então:*

1. *Um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é um automorfismo de P se, e somente se, f deixa k invariante (i.e. $k_x(f_*w_1, \dots, f_*w_l) = k_x(w_1, \dots, w_l)$);*
2. *Um campo de vetores X em M é um automorfismo infinitesimal de P se, e somente se, $L_X k = 0$.*

Exemplos de G -estruturas:

1. Consideremos o grupo de Lie das matrizes de determinante 1, $G = Sl(n, \mathbb{R})$, e sua álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : \text{tr} A = 0\}$. A ação natural de $Gl(n, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^n$ induz uma ação de $Gl(n, \mathbb{R})$ em $\Lambda^n \mathbb{R}^n$ tal que

$$Av = \det(A) \cdot v \quad \text{para } A \in Gl(n, \mathbb{R}) \text{ e } v \in \Lambda^n \mathbb{R}^n.$$

O grupo $Gl(n, \mathbb{R})$ é transitivo em $\Lambda^n \mathbb{R}^n - \{0\}$ com o subgrupo de isotropia $Sl(n, \mathbb{R})$ tal que $\Lambda^n \mathbb{R}^n - \{0\} = Gl(n, \mathbb{R})/Sl(n, \mathbb{R})$. Disto segue que as “cross sections” $\sigma : M \rightarrow GL(M)/Sl(n, \mathbb{R})$ estão em bijeção com os elementos de volume de M , i.e., as n -formas em M que não são nulas para qualquer ponto de M (e estas portanto, em bijeção com

as G -estruturas, ou seja, cada elemento de volume é um “tensor k ” que define uma G -estrutura). Em outras palavras, uma $Sl(n, \mathbb{R})$ -estrutura nada mais é que um elemento de volume em M . E a variedade admite uma $Sl(n, \mathbb{R})$ -estrutura se, e somente se, é orientável.

Seja $\varphi = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ o elemento de volume correspondente a uma dada $Sl(n, \mathbb{R})$ -estrutura. Um difeomorfismo de M é um automorfismo da $Sl(n, \mathbb{R})$ -estrutura se, e somente se, preserva o elemento de volume φ . Seja X um campo em M . A função $\text{div} X$ definida por

$$L_X \varphi = (\text{div} X) \cdot \varphi$$

é chamada de divergente de X com relação a φ . Claramente, X é um automorfismo infinitesimal da $Sl(n, \mathbb{R})$ -estrutura se, e somente se, $\text{div} X = 0$.

2. Tomemos o grupo de Lie $G = O(n, \mathbb{R}) = \{A \in Gl(n, \mathbb{R}); A^t A = I\}$ e sua álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : A + A^t = 0\}$ (matrizes anti-simétricas). Cada métrica riemanniana em M corresponde a um fibrado das bases ortonormais sobre M . Isto nos dá uma bijeção entre as métricas riemannianas em M e as $O(n)$ -estruturas em M . Um automorfismo de uma $O(n)$ -estrutura é uma isometria da métrica riemanniana correspondente. Um automorfismo infinitesimal de uma $O(n)$ -estrutura é uma isometria infinitesimal ou campo de Killing.

1.6 Variedade simplética

Uma variedade diferenciável $2n$ -dimensional M é dita variedade simplética, se ela possui uma estrutura simplética ω , i.e., uma 2-forma fechada na qual é não-degenerada no sentido de que para cada $x \in M$, $\omega_x(v, w) = 0$ para todo $w \in T_x M$ implica $v = 0$. Toda variedade simplética tem uma medida volume dada por $\wedge^n \omega$, chamada de medida de Liouville. Seja $i_v \omega(\cdot) = \omega(v, \cdot)$

a redução da 2-forma para a 1-forma. A aplicação de TM para T^*M dado por $v \mapsto i_v\omega$ é um isomorfismo nos fibrados vetoriais e existe uma bijeção entre campos diferenciáveis e 1-formas diferenciáveis. Um campo simplético X é um campo que preserva a estrutura simplética, ou seja, em termos da derivada de Lie, $L_X\omega = 0$. Equivalentemente, $i_X\omega$ é uma 1-forma diferenciável fechada, o que pode ser facilmente notado pela fórmula de Cartan:

$$L_X\omega = i_X \underbrace{d\omega}_{=0} + d(i_X\omega).$$

A estrutura simplética canônica em $\mathbb{R}^{2n}$ em coordenadas $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, é representado por

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i.$$

O Teorema de Darboux assegura que qualquer variedade simplética $2n$ -dimensional é localmente o $\mathbb{R}^{2n}$ com sua estrutura simplética canônica. Mais precisamente, para todo ponto $x \in M$, existe uma carta coordenada $\mathfrak{U} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ centrada em x tal que em $\mathfrak{U}$, podemos escrever $\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$.

Uma estrutura quase-complexa J numa variedade M é uma seção diferenciável $x \mapsto J_x$, com $J_x : T_xM \rightarrow T_xM$ sendo uma transformação linear tal que $J_x^2 = -Id$. Dizemos que J é ω -compatível com uma variedade simplética (M, ω) se a escolha $x \mapsto \bar{g}_x : T_xM \times T_xM \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\bar{g}_x(u, v) := \omega(u, J_x v)$, define uma métrica riemanniana em M . A métrica $\bar{g}$ é chamada de métrica associada. Uma variedade simplética que admite estrutura quase-complexa compatível globalmente J é chamada de variedade quase-Kähler. Superfícies orientáveis e espaços projetivos complexos $\mathbb{C}P^n$ são alguns exemplos de variedades quase-Kähler (ver e.g. [11]). Uma variedade simplética (paracompacta) sempre possui uma estrutura quase-complexa J a qual é ω -compatível, $\bar{g}(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$ (ver e.g. [2]).

Para toda função $h \in C^\infty(M)$, como ω é não-degenerada, existe um único campo de vetores

$X_h \in \mathfrak{X}(M)$ satisfazendo a equação hamiltoniana

$$i_{X_h}\omega = dh.$$

Há campos que preservam a forma simplética, mas que não são hamiltonianos (veja alguns exemplos em [2]). Se a primeira cohomologia de Rham $\mathbb{H}^1(M, \mathbb{R})$ se anula, assim como o caso do $\mathbb{R}^{2n}$, todo campo simplético é dado por uma função hamiltoniana.

No espaço simplético $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, em coordenadas $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, podemos representar o campo hamiltoniano associado à função hamiltoniana $h : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, por

$$X_h = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

Como o campo gradiente de h relativo à métrica euclidiana é

$$\nabla h := \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right),$$

se tomarmos a estrutura quase complexa canônica dada por $J(\frac{\partial}{\partial q_i}) = \frac{\partial}{\partial p_i}$ e $J(\frac{\partial}{\partial p_i}) = -\frac{\partial}{\partial q_i}$, então temos a relação

$$JX_h = \nabla h. \tag{1.6.14}$$

De forma ainda mais geral, se a variedade simplética possui uma estrutura quase-complexa ω -compatível J , então não é difícil ver que o campo gradiente ∇h definido pela métrica associada se relaciona com o campo hamiltoniano X_h como em (1.6.14).

O espaço das funções em M tem uma estrutura de álgebra de Lie dada pelo colchete de Poisson. O colchete de Poisson de duas funções é denotado por $\{f_1, f_2\}$ e $\{f_1, f_2\} = df_1(X_{f_2}) = \omega(X_{f_1}, X_{f_2})$. O campo correspondente ao colchete de Poisson $\{f_1, f_2\}$ é exatamente o campo dado pelo colchete de Lie dos campos, i.e., $[X_{f_1}, X_{f_2}]$. O colchete de Poisson em $\mathbb{R}^{2n}$ é dado da seguinte forma:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right).$$

Nas mesmas condições da Seção 1.2, seja $\phi_t(x)$ a solução da EDE

$$d\phi_t = \sum_{j=0}^m X_j(\phi_t) \circ dW_t^j. \quad (1.6.15)$$

Vamos assumir que ϕ_t define um fluxo estocástico de difeomorfismos. Suponha que $X_0, \dots, X_m$ são campos hamiltonianos C^∞ e que $h_0, \dots, h_m \in C^\infty$ são suas respectivas funções hamiltonianas. Então temos o seguinte teorema:

Teorema 1.6.1 *Seja $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ . Para que tenhamos q.s.*

$$h(\phi_t(\omega, x)) = h(x)$$

é necessário e suficiente que

$$\{h, h_0\} = \{h, h_1\} = \dots = \{h, h_m\} = 0.$$

A grosso modo, o teorema acima garante que a difusão ϕ_t dada por campos hamiltonianos, fica restrita às curvas de nível da função h se, e somente se, suas funções hamiltonianas $h_0, \dots, h_m$ comutam com a função h com relação ao colchete de Poisson. Este resultado pode ser encontrado, dentre outros, em Bismut [5].

Capítulo 2

Decomposição do Fluxo Estocástico via G -Estruturas

Dado um fluxo estocástico ϕ_t gerado por uma EDE e um ponto $x_0 \in M$, estaremos, numa primeira etapa, fatorando $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$ de tal forma que ξ_t seja uma difusão no grupo das transformações afins que preservam um determinado tensor k , com $\psi_t(x_0) = x_0$ para todo t . Sendo assim, dependendo da escolha do tensor k , ξ_t pode ser uma transformação afim que preserva volume, métrica, etc.

Numa segunda etapa, estaremos dando mais ênfase ao caso em que k é uma forma volume e, portanto, ξ_t preserva volume. Ainda nesse contexto, buscaremos uma fórmula para a soma dos expoentes de Lyapunov e analisaremos possibilidades para termos uma recorrência para fluxo ϕ_t numa variedade compacta.

Por fim, faremos um teorema sobre cascata de decomposições para ϕ_t , i.e.,

$$\phi_t = \xi_t^1 \circ \xi_t^2 \circ \dots \circ \xi_t^n \circ \psi_t$$

onde cada seqüência $\xi_t^1 \circ \xi_t^2 \circ \dots \circ \xi_t^k$, $1 \leq k \leq n - 1$, pertence a um determinado grupo de

difeomorfismos que preservam um determinado k e $\xi_t^1 \circ \xi_t^2 \circ \dots \circ \xi_t^n$ é uma transformação afim.

2.1 Introdução

Considere a seguinte EDE de Stratonovich numa variedade riemanniana M^d , compacta e conexa:

$$dx_t = \sum_{i=0}^k X_i(x_t) \circ dW_t^i \quad (2.1.1)$$

onde cada X_i é um campo C^∞ em M , $(W_t^0) = t$ e $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^k)$ é um movimento browniano k -dimensional definido num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. O fluxo estocástico associado à EDE (2.1.1) é um processo estocástico ϕ_t no grupo de $\text{Diff}(M)$ (difeomorfismos de M) tal que, para quase todo $\omega \in \Omega$, a aplicação $(\phi_t =) \phi_t(\omega)(\cdot) : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo de M , com $\phi_0 = \text{id}_M$ (aplicação identidade em M), e que $\forall x \in M$, $x_t = \phi_t(x)$ é uma solução de (2.1.1) (ver e.g. Seção 1.2).

Um difeomorfismo $\phi : M \rightarrow M$ induz, de maneira natural, um automorfismo $\tilde{\phi}$ no fibrado das bases $GL(M)$; $\tilde{\phi}$ leva a base $u_x = (X_1, \dots, X_n)$ para a base $\tilde{\phi}(u)_{\phi(x)} = (\phi_* X_1, \dots, \phi_* X_n)$. Sendo assim, se ϕ_t é um fluxo estocástico da EDE (2.1.1), então seu processo derivado $\tilde{\phi}_t(u)$ satisfaz a seguinte EDE em $GL(M)$:

$$d\tilde{\phi}_t(u) = \sum_{i=0}^k \delta X_i(\tilde{\phi}_t(u)) \circ dW_t^i, \quad (2.1.2)$$

onde δX_i denota o levantamento natural do campo X_i (ver e.g. Elworthy [9]).

2.2 Teorema Principal

Suponhamos que a variedade riemanniana M admite uma G -estrutura P , onde G é um subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$. E denotemos por k o tensor em M gerado por P (para maiores detalhes

veja seção 1.5). Seja $\pi_0 : P \rightarrow M$ a restrição da projeção $\pi : GL(M) \rightarrow M$. Fixemos $u_0 \in P$, onde $\pi_0(u_0) = x_0$.

Gostaríamos de relembrar que um fluxo φ_t é um automorfismo de P se, e somente se, preserva o tensor k_x , para cada $x \in M$ fixado. E se φ_t é um automorfismo e $u_0 \in P$ então $\tilde{\varphi}_t(u_0) \in P$. E portanto, $\delta X(u_0) \in T_{u_0}P$ e a aplicação linear

$$\begin{aligned} \gamma : g(M) &\rightarrow T_{u_0}P \\ X &\mapsto \delta X(u_0) \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

está bem definida, onde $g(M) = \{X \in a(M) : L_X k = 0\}$ é uma sub-álgebra de Lie dos infinitesimais afins $a(M)$. Além disso, γ é injetiva pois é restrição da aplicação linear e injetiva $a(M) \rightarrow T_{u_0}GL(M)$, $X \mapsto \delta X(u_0)$.

Cada campo $X \in g(M)$ gera um grupo a 1-parâmetro $\varphi_t = \exp(tX)$ de transformações de M . Como a dimensão de $g(M)$ é finita, o grupo destas transformações é um grupo de Lie (ver e.g. [15, Th.3.1]) o qual denotaremos por $G(M)$. Assim, se $\xi_t \in G(M)$, então ξ_t é uma transformação afim e $\xi_t^* k = k$.

Consideremos as seguintes hipóteses:

H1) $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{q}$, onde $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{q}$ são sub-álgebras de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, de tal forma que:

$$T_{u_0}GL(M) \cong T_{u_0}P \oplus u_0\mathfrak{q} \cong H(T_{u_0}GL(M)) \oplus u_0\mathfrak{p} \oplus u_0\mathfrak{q}.$$

Sendo assim, se $Y \in T_{u_0}GL(M)$, denotaremos por Y_p sua componente em $T_{u_0}P$.

H2) $[\delta(\xi_{t*}X_j)(u_0)]_p \in \text{Im}(\gamma)$, para toda transformação $\xi_t \in G(M)$ e para os campos X_j , $j = 0, 1, \dots, m$ da EDE (2.1.1). $\text{Im}(\gamma)$ denota a imagem da aplicação γ .

Teorema 2.2.1 *Sob as condições acima, o fluxo estocástico ϕ_t associado à EDE (2.1.1) tem a decomposição da forma $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$, onde ξ_t é um processo de difusão em $G(M)$, $\psi_t(x_0) = x_0$*

e $\tilde{\psi}_t(u_0) = u_0 \cdot q_t$, onde q_t é um processo estocástico no subgrupo de Lie $\exp(\mathfrak{q}) \subset Gl(n, \mathbb{R})$. Se existir uma decomposição única para o grupo $Gl(n, \mathbb{R}) = (\exp(\mathfrak{p})) \cdot (\exp(\mathfrak{q}))$, então esta decomposição para ϕ_t é única.

Demonstração:

Para $\xi \in G(M)$ e para Y na sua álgebra de Lie, sejam ξY e $Y\xi$ os vetores tangentes em $T_\xi G(M)$ obtidos por translações à esquerda e à direita, respectivamente, de Y . Assim, $\xi \mapsto \xi Y$ ($Y\xi$) pode ser considerado um campo invariante à esquerda (direita) em $G(M)$. Como o grupo de difeomorfismos $G(M)$ age em M , o campo ξY no grupo das transformações $G(M)$ induz um campo em M , o qual denotaremos por Y .

Seja ξ_t a solução da seguinte EDE em $G(M)$ com $\xi_0 = id_M$:

$$d\xi_t = \sum_{j=0}^k \xi_t [\xi_{t*}^{-1}(X_j)]^s \circ dW_t^j, \quad (2.2.4)$$

onde $[\xi_{t*}^{-1}(X_j)]^s$ é o único campo em $g(M)$ tal que $\delta[\xi_{t*}^{-1}(X_j)]^s(u_0) = [\delta(\xi_{t*}^{-1}(X_j))(u_0)]_p$. Sendo assim, seus campos horizontais coincidem e portanto, $[\xi_{t*}^{-1}(X_j)]^s(x_0) = (\xi_{t*}^{-1}(X_j))(x_0)$.

Como os campos envolvidos na equação acima só dependem de ξ_t , vemos que ξ_t é um processo de difusão em $G(M)$. Além disso, uma vez que $\xi_t^{-1}\xi_t = id_M$, temos que $(\circ d\xi_t^{-1})\xi_t + \xi_t^{-1}(\circ d\xi_t) = 0$ e portanto,

$$d\xi_t^{-1} = - \sum_{j=0}^k [\xi_{t*}^{-1}(X_j)]^s \xi_t^{-1} \circ dW_t^j. \quad (2.2.5)$$

Por sua vez, como esta equação possui campos invariantes à direita, ela gera a seguinte EDE na variedade M :

$$d(\xi_t^{-1}(x)) = - \sum_{j=0}^k [\xi_{t*}^{-1}(X_j)]^s (\xi_t^{-1}(x)) \circ dW_t^j. \quad (2.2.6)$$

Sejam $x_t = \phi_t(x)$ e $y_t = \xi_t^{-1}(x_t)$. Usando uma versão da fórmula de Itô generalizada (Seção 1.1), temos que

$$dy_t = (\circ d\xi_t^{-1})(x_t) + \xi_{t*}^{-1}(\circ dx_t).$$

E, portanto, pelas equações (2.1.1) e (2.2.6):

$$dy_t = \sum_{j=0}^k \xi_{t*}^{-1}(X_j(x_t)) \circ dW_t^j - \sum_{j=0}^k [\xi_{t*}^{-1}(X_j)]^s(\xi_t^{-1}(x_t)) \circ dW_t^j.$$

Como $\xi_{t*}^{-1}(X_j(\phi_t(x))) = (\xi_{t*}^{-1}X_j)(\xi_t^{-1}(\phi_t(x)))$, podemos escrever ainda

$$dy_t = \sum_{j=0}^k \{(\xi_{t*}^{-1}X_j) - [\xi_{t*}^{-1}(X_j)]^s\}(y_t) \circ dW_t^j. \quad (2.2.7)$$

Os campos $\{(\xi_{t*}^{-1}X_j) - [\xi_{t*}^{-1}(X_j)]^s\}$ da EDE acima são aleatórios e dependentes do tempo t , cujo levantamento natural $\delta\{(\xi_{t*}^{-1}X_j) - [\xi_{t*}^{-1}(X_j)]^s\}$ ainda está bem definido se fixarmos t e ω . Notemos ainda que, como $\{(\xi_{t*}^{-1}X_j) - [\xi_{t*}^{-1}(X_j)]^s\}(x_0) = 0$, se $y_0 = x_0$, então $y_t = x_0$, para todo $t > 0$.

Seja $\psi_t = \xi_t^{-1} \circ \phi_t$. Temos então que ψ_t é um processo no grupo dos difeomorfismos de M , $y_t = \psi_t(y)$ é solução da EDE (2.2.7) e seu processo derivado $\tilde{\psi}_t(u_0)$ satisfaz a seguinte EDE em $GL(M)$:

$$d\tilde{\psi}_t(u_0) = \sum_{j=0}^k \delta\{(\xi_{t*}^{-1}X_j) - [\xi_{t*}^{-1}(X_j)]^s\}(\tilde{\psi}_t(u_0)) \circ dW_t^j. \quad (2.2.8)$$

Como $\psi_t(x_0) = x_0$, para todo $t > 0$ (pois $\psi_0(x_0) = x_0$), temos um automorfismo $\psi_{t*}(x_0) : T_{x_0}M \rightarrow T_{x_0}M$ e portanto, podemos escrever $\tilde{\psi}_t(u_0) = \psi_{t*}(x_0)(u_0) = u_0 g_t$ para algum processo g_t , a princípio, no grupo $Gl(n, \mathbb{R})$. Mas por hipótese, para cada j , existe uma única matriz $A_j \in \mathfrak{q}$ tal que

$$\delta\{(\xi_{t*}^{-1}X_j) - [\xi_{t*}^{-1}(X_j)]^s\}(u_0) = u_0 A_j.$$

Portanto, da EDE (2.2.8), obtemos que o processo g_t é solução da equação

$$d(g_t) = \sum_{j=0}^k A_j(g_t) \circ dW_t^j \quad (2.2.9)$$

e portanto, g_t é um processo em $\exp(\mathfrak{q})$, onde $g_0 = Id$.

Quanto à unicidade, vamos supor que existam duas fatorações para ϕ_t , i.e., $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t = \xi'_t \circ \psi'_t$. Na base u_0 , temos que $\tilde{\psi}_t(u_0) = u_0 q_t$ e $\tilde{\psi}'_t(u_0) = u_0 q'_t$, com $q_t, q'_t \in \exp(\mathfrak{q})$. Assim temos que

$$\tilde{\phi}_t(u_0) = \tilde{\xi}_t(u_0 q_t) = \tilde{\xi}'_t(u_0 q'_t).$$

Como $\tilde{\xi}_t(u_0)$ e $\tilde{\xi}'_t(u_0)$ estão na mesma fibra que $\tilde{\phi}_t(u_0)$, temos que $\tilde{\xi}_t(u_0) = v_0 p_t = v_0 p'_t = \tilde{\xi}'_t(u_0)$, com $p_t, p'_t \in \exp(\mathfrak{p})$ e v_0 uma base na fibra de $\tilde{\phi}_t(u_0)$. Logo temos que $v_0(p_t q_t) = v_0(p'_t q'_t)$. Portanto, se temos uma fatoração única de $Gl(n, \mathbb{R}) = (\exp(\mathfrak{p})) \cdot (\exp(\mathfrak{q}))$, então $p_t = p'_t$ e $q_t = q'_t$.

□

2.2.1 Isometrias

O Teorema 2.2.1 é uma generalização de um dos teoremas principais de decomposição do fluxo estocástico que se encontra no artigo do Liao [17]. Em sua decomposição, toma-se a G -estrutura como sendo o fibrado das bases ortonormais. Sua decomposição baseia-se na decomposição vetorial de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, com matrizes anti-simétricas e triangulares superiores para a hipótese H1 do Teorema 2.2.1. Na mesma descrição do Teorema 2.2.1, ξ_t é um processo de difusão no grupo das transformações de M que são isometrias e $\tilde{\psi}_t(u_0) = u_0 g_t$, com g_t um processo estocástico no grupo das matrizes triangulares superiores. Neste caso a decomposição é única pois, cada $g \in Gl(n, \mathbb{R})$ se escreve de maneira única como $g = ks$ com k no grupo das matrizes ortonormais e s no grupo das matrizes triangulares superiores.

Esta decomposição com uma componente no grupo das isometrias possibilitou o desenvolvimento de outros trabalhos como, por exemplo, o estudo assintótico angular de fluxos estocásticos realizado por Ruffino [23], o qual também destacou a existência da fatoração $\phi_t = \Delta_t \circ \theta_t$, com Δ_t sendo uma difusão no grupo das transformações afins e $\tilde{\theta}_t(u_0) = u_0$, ou

seja, $\theta_{t*} = Id_{T_{x_0}M}$. Por sua vez, tal observação motivou a seguinte decomposição:

$$\phi_t = \xi_t \circ \psi_t \circ \theta_t,$$

onde ξ_t é uma isometria e $(\xi_t \circ \psi_t)$ é uma difusão no grupo das transformações afins. No final deste capítulo temos um teorema, ao qual nos referimos como cascata de decomposição de fluxo, que generaliza esta fatoração $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t \circ \theta_t$.

No caso específico da fatoração $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$, com ξ_t no grupo das isometrias, existe um teorema dado por Ruffino [23] que substitui a condição dada nos campos de vetores, que corresponde à hipótese H2 do Teorema 2.2.1, por uma condição geométrica na variedade:

- se a variedade M é simplesmente conexa e com curvatura constante, então, para toda base ortonormal u_0 , o fluxo estocástico ϕ_t possui a decomposição $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$, com $\tilde{\psi}_t(u_0) = u_0 q_t$, onde q_t é um processo no grupo das matrizes triangulares superiores. Reciprocamente, se todo fluxo ϕ_t em M tem esta decomposição, então M tem curvatura constante.

O Teorema 2.2.1, além de generalizar o teorema do Liao, também serve para produzir outras aplicações por meio da fatoração do fluxo, como veremos em seguida.

2.3 Outras Aplicações

O interesse por fluxos que preservam volume surgiu naturalmente em diversos problemas de sistema dinâmico e até mesmo em outras áreas como na física, finanças, etc. Isso nos motivou a explorar uma decomposição do fluxo estocástico como a de Liao [17], porém com uma componente que preservasse volume. Alguns aspectos desta teoria, que encontrar-se-ão ao longo desta seção, tiveram papel fundamental para a motivação e demonstração do Teorema 2.2.1

que generaliza a decomposição de Liao. Num primeiro momento iremos trabalhar com o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, pois esse dará consistência para a fatoração do fluxo numa variedade M que admite uma $Sl(n)$ -estrutura.

2.3.1 G -estrutura Flat

Tomaremos neste caso o tensor k do Teorema 2.2.1 como sendo a forma volume μ em $\mathbb{R}^n$ e $P = \mathbb{R}^n \times Sl(n)$ uma $Sl(n)$ -estrutura em $\mathbb{R}^n$ correspondente a μ . Logo $T_u P = T_u \mathbb{R}^n \times \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, o que nos propõe a tomar uma álgebra de Lie dos campos em $\mathbb{R}^n$ compatível com este fato. Seja então $\mathfrak{S}$ a álgebra de Lie gerada pelos campos lineares em $\mathbb{R}^n$,

$$\{Y_1, \dots, Y_n, Y_{n+1}, \dots, Y_{n^2+n-1}\},$$

com Y_j , $j = 1, \dots, n$ sendo o campo constante $\vec{e}_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ e para $j = n+1, \dots, n^2+n-1$, tomemos $Y_j(x) = A_j(x)$, onde A_j são matrizes de traço nulo. Assim temos que $\text{div} Y_j = 0$ para $j = 1, \dots, n, \dots, n^2+n-1$.

Para $u \in P$, a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma_s : \mathfrak{S} &\rightarrow T_u P \\ Y &\mapsto \delta Y(u) \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

está bem definida pois, sendo φ_t o fluxo associado ao campo $Y \in \mathfrak{S}$, temos que φ_t é um automorfismo de P , isto é, $\tilde{\varphi}_t(P) \subseteq P$. Além disso, γ_s é uma aplicação linear. De fato, como $\delta Y(u)$ se decompõe de maneira única numa parte horizontal e outra vertical, $\delta Y(u) = H(Y)(u) + \nabla(Y)(u)$ e os levantamentos horizontais e verticais são lineares, segue que γ_s é linear. Como os campos de $\mathfrak{S}$ são infinitesimais afins em $\mathbb{R}^n$, temos que a aplicação γ_s é injetiva. Note que estamos restringindo os campos infinitesimais afins cujo divergente se anula, ou se preferir, sua derivada de Lie com relação a μ se anula. Portanto, $\mathfrak{S}$ está substituindo a álgebra de Lie $g(M)$ do Teorema 2.2.1.

Também temos que as combinações lineares dos campos

$$\{\delta Y_1(u), \dots, \delta Y_n(u), \delta Y_{n+1}(u), \dots, \delta Y_{n^2+n-1}(u)\}$$

geram $T_u P$. Ainda mais, $\{\delta Y_1(u), \dots, \delta Y_n(u)\}$ gera a parte horizontal ($\dim HT_u P = n$) e $\{\delta Y_{n+1}(u), \dots, \delta Y_{n^2+n-1}(u)\}$ a parte vertical de $T_u P$ ($\dim VT_u P = n^2 - 1$). Assim, temos que γ_s é, na verdade, bijetiva.

Para $u \in P$, temos os isomorfismos

$$T_u GL(\mathbb{R}^n) \cong T_u P \oplus \mathbb{R} \quad (\cong T_u \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}).$$

Ou ainda, nas mesmas notações do Teorema 2.2.1,

$$T_u P = \{H(X)(u) : X \in T_x M\} \oplus \{uA : A \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})\}.$$

Como no caso geral, precisamos decompor $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ em sub-álgebras de Lie $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{q}$. Tomemos então $\mathfrak{q} = \mathfrak{D}$ como sendo a seguinte sub-álgebra de Lie unidimensional:

$$\mathfrak{D} = \{a \cdot Id : a \in \mathbb{R}\}$$

e sua álgebra de Lie complementar $\mathfrak{p} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, a álgebra de Lie das matrizes de traço nulo.

Como a projeção linear

$$\begin{aligned} \pi : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto A - \frac{\text{tr} A}{n} Id \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

é sobrejetora, temos que $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ se decompõe unicamente da forma

$$A = (A - \frac{\text{tr} A}{n} Id) + \frac{\text{tr} A}{n} Id = A_{\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})} + A_{\mathfrak{D}}$$

onde $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ e $\mathfrak{D}$ são álgebras de Lie de dimensões $n^2 - 1$ e 1, respectivamente.

Esta decomposição na álgebra de Lie induz a seguinte decomposição no grupo de Lie $Gl(n, \mathbb{R})$:

$$e^A = B \cdot \sqrt[n]{\det(e^A)} \cdot Id$$

onde $\det B = 1$, uma vez que $e^{tr A} = \det(e^A)$.

Seja D o subgrupo de Lie associado à álgebra de Lie $\mathfrak{D}$. Claramente temos que $D \cong \mathbb{R}$. Ou ainda,

$$D = \{e^a \cdot Id : a \in \mathbb{R}\}.$$

Tomemos $S(M) = \exp(\mathfrak{S})$ como sendo o grupo de Lie dado pelos automorfismos $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\xi^* \mu = \mu$. Fixemos $x_0 \in M$ e $u_0 \in P$ com $\pi_0(u_0) = x_0$. Então, supondo que (2.1.1) é uma EDE em $\mathbb{R}^n$, temos o seguinte teorema de decomposição do fluxo estocástico ϕ_t .

Corolário 2.3.1 *O fluxo estocástico ϕ_t tem uma decomposição única $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$, onde ξ_t é um processo de difusão no grupo de difeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ que preserva a forma volume μ , $\psi_t(x_0) = x_0$ e $\psi_{t*}(u_0) = u_0 g_t$, para algum processo estocástico g_t em D .*

Como ilustração deste corolário veja a figura 2.1.

Demonstração: A demonstração segue facilmente do caso geral. Devemos apenas ressaltar algumas alterações que ocorrem para este caso particular.

Como a aplicação γ_s é bijetiva, a hipótese H2 do Teorema 2.2.1 é naturalmente satisfeita. Além disso, a decomposição do campo levantado pode ser escrita como

$$\delta X(u_0) = H(X)(u_0) + u_0[\tilde{X}(u_0)] = H(X)(u_0) + u_0[\tilde{X}(u_0)]_{\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})} + u_0[\tilde{X}(u_0)]_{\mathfrak{D}}. \quad (2.3.12)$$

E como $u_0 \in P$, segue que

$$[\delta X(u_0)]_P = H(X)(u_0) + u_0[\tilde{X}(u_0)]_{\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})}. \quad (2.3.13)$$

Sendo assim,

$$\delta\{(\xi_{t*}^{-1} X_j) - [\xi_{t*}^{-1}(X_j)]^s\}(u_0) = u_0[\tilde{X}(u_0)]_{\mathfrak{D}}.$$

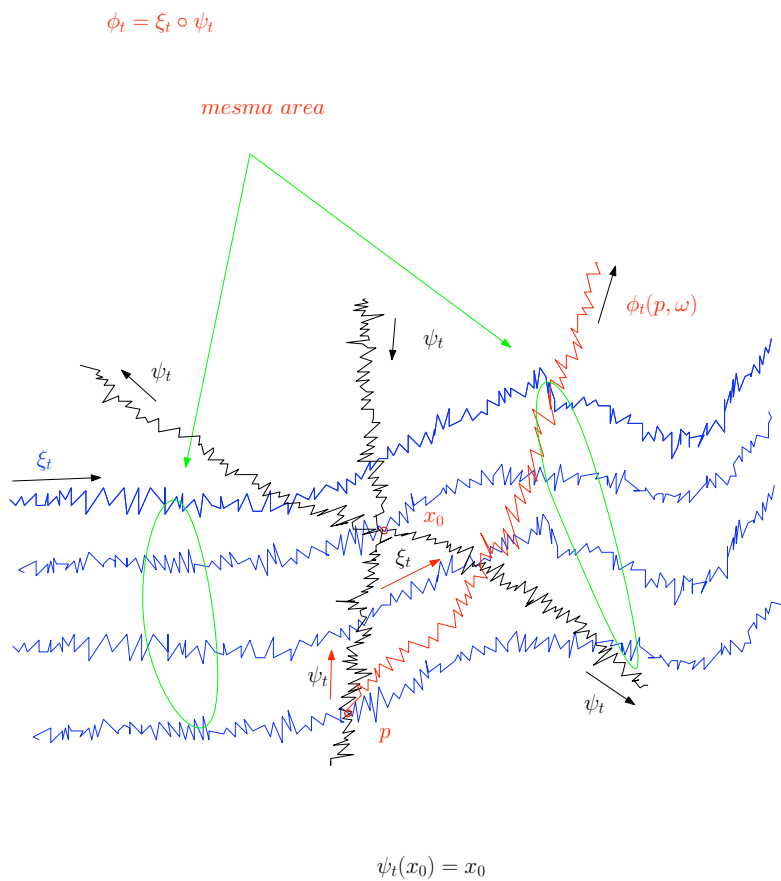


Figura 2.1: $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$ com ξ_t preservando área.

Ou seja, para cada j , existe uma única matriz $A_j \in \mathfrak{D}$ tal que

$$\delta\{(\xi_{t*}^{-1}X_j) - [\xi_{t*}^{-1}(X_j)]^s\}(u_0) = u_0 A_j.$$

E assim temos a seguinte EDE para o processo g_t :

$$d(g_t) = \sum_{j=0}^k A_j(g_t) \circ dW_t^j. \quad (2.3.14)$$

Portanto g_t é um processo em D , onde $g_0 = Id$.

A unicidade segue do Teorema 2.2.1. □

Como já dissemos na Subseção 2.2.1, a decomposição do fluxo estocástico numa componente que é isometria em Liao [17] é um caso particular do nosso Teorema 2.2.1. De maneira análoga ao que foi feito para uma componente que preserva volume, também podemos fazer uma “versão flat” para a decomposição de Liao. Neste caso tomaríamos k como sendo a métrica em $\mathbb{R}^n$ e $P = \mathbb{R}^n \times O(n)$ como sendo a $O(n)$ -estrutura em $\mathbb{R}^n$. Sendo assim, convenientemente tomaríamos a álgebra de Lie $\mathfrak{D}$ gerada pelos campos em $\mathbb{R}^n$,

$$\{Y_1, \dots, Y_n, Y_{n+1}, \dots, Y_{n+\frac{n^2-n}{2}}\},$$

com Y_j , $j = 1, \dots, n$ sendo o campo constante $\vec{e}_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ e para $j = n+1, \dots, n+\frac{n^2-n}{2}$, $Y_j(x) = A_j(x)$, com A_j sendo matrizes anti-simétricas. Desta forma, para $u \in P$, a aplicação linear

$$\begin{aligned} \gamma_o : \mathfrak{D} &\rightarrow T_u P \\ Y &\mapsto \delta Y(u) \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

seria bijetiva e, portanto, a hipótese H2 seria satisfeita.

2.3.2 Exemplo: Fluxo Norte-Sul

Vamos dar agora um exemplo para a decomposição $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$, onde ξ_t é uma isometria.

Seja $S^2 - \{N\}$ parametrizada pela projeção estereográfica $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$, onde $\mathbb{R}^2$ intercepta a esfera S^2 no equador. O fluxo norte-sul φ_t é dado pela projeção em S^2 da contração exponencial linear em $\mathbb{R}^2$, i.e., $\varphi_t(p) = \pi \circ e^{-t} \pi^{-1}(p)$. Ele está associado ao campo de vetores $X(x) = \pi_x(-e_3)$, onde π_x é a projeção ortogonal no espaço tangente $T_x S^2$. Para um ponto $(x, y, z) \in S^2$, podemos verificar que o fluxo é dado por

$$\varphi_t(x, y, z) = \frac{1}{\cosh(t) - z \sinh(t)} (x, y, z \cosh(t) - \sinh(t)).$$

Note que os pontos $N = (0, 0, 1)$ e $S = (0, 0, -1)$ são pontos fixos para φ_t .

Sejam $x_0 = e_1$ e $u_0 = (e_2, e_3)$. Para estas condições iniciais temos a decomposição: $\varphi_t = \xi_t \circ \psi_t$ onde

$$\xi_t = \begin{pmatrix} \operatorname{sech}(t) & 0 & \tanh(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\tanh(t) & 0 & \operatorname{sech}(t) \end{pmatrix}.$$

Além disso, usando as fórmulas $\sinh(2t) = 2 \sinh(t) \cosh(t)$ e $\cosh(2t) = 2 \cosh^2(t) - 1$, temos

$$\Psi_t = \left(\frac{2x - 2}{\cosh(2t) - z \sinh(2t) + 1} + 1, \frac{y}{\cosh(t) - z \sinh(t)}, \frac{2(z \cosh(t) + (x - 1) \sinh(t))}{\cosh(2t) - z \sinh(2t) + 1} \right).$$

Portanto, o processo derivado ψ_{t*} no ponto $(1, 0, 0)$ é

$$(\psi_{t*})_{(1,0,0)} = \begin{pmatrix} \operatorname{sech}^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sech}(t) & 0 \\ \tanh(t) & 0 & \operatorname{sech}(t) \end{pmatrix}.$$

Logo

$$(\psi_{t*})_{(1,0,0)}(u_0) = u_0 q_t,$$

onde q_t é a matriz triangular superior

$$q_t = \begin{pmatrix} \operatorname{sech}(t) & 0 \\ 0 & \operatorname{sech}(t) \end{pmatrix}.$$

2.3.3 Comentário sobre a geometria da variedade

Como pudemos perceber anteriormente, ao tomar uma G -estrutura $P = \mathbb{R}^n \times G$, por construção, sempre é possível satisfazer a hipótese $H2$ do Teorema 2.2.1.

Uma outra alternativa para a hipótese $H2$ ser automaticamente satisfeita para uma G -estrutura P em geral, é procurar uma condição geométrica para a variedade M de tal maneira que a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma : g(M) &\rightarrow T_{u_0}P \\ X &\mapsto \delta X(u_0) \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

seja sobrejetiva, onde a sub-álgebra de Lie $g(M)$ é dada por: $g(M) = \{X \in a(M) : L_X k = 0\}$.

Por exemplo, quando M tem curvatura constante e k é a métrica, segue que a aplicação γ é bijetiva e a substituição da hipótese $H2$ por uma condição geométrica já foi explorada em Ruffino [23]. Do mesmo modo, uma linha de pesquisa que ainda não conseguimos concluir, é para quais tensores k , temos uma bijeção para a aplicação 2.3.16 sob uma determinada hipótese geométrica na variedade M .

2.3.4 $Sl(n, \mathbb{R})$ -estrutura na variedade M

Numa variedade M que admite uma $Sl(n, \mathbb{R})$ -estrutura P , e portanto uma correspondente forma volume μ , a mesma técnica explorada na Seção 2.3.1 pode ser incorporada para obtermos a decomposição do fluxo estocástico com uma componente invariante à tal forma volume. Sendo

assim, tomemos a seguinte álgebra de Lie:

$$s(M) = \{X \in a(M) : L_X \mu = 0\},$$

onde $a(M)$ são os campos infinitesimais afins. Notemos que as inclusões $i(M) \subsetneq s(M) \subsetneq a(M)$, onde $i(M)$ são os campos de Killing, nos garantem que $s(M)$ é uma álgebra de Lie que contém os campos de Killing, mas não é o próprio $i(M)$, o qual já foi analisado anteriormente.

Dando seqüência a nossa técnica, novamente temos que, para $u \in P$, a aplicação linear

$$\begin{aligned} \gamma_s : s(M) &\rightarrow T_u P \\ X &\mapsto \delta X(u) \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

é injetiva. E, analogamente ao caso flat, $\delta X(u) = H(\delta X(u)) + u\mathfrak{p} + u\mathfrak{q}$, onde $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{q}$ e para $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, temos a decomposição $A = (A - \frac{\text{tr} A}{n} Id) + \frac{\text{tr} A}{n} Id = A_{\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})} + A_{\mathfrak{D}}$. Vendo de uma maneira mais geométrica, esta decomposição é obtida do fato de que a parte vertical do levantamento natural δX possui a seguinte decomposição:

$$\nabla(X) = (\nabla(X) - \frac{\text{div} X}{n} Id) + \frac{\text{div} X}{n} Id,$$

sendo que $\text{div} X = \text{tr} \nabla(X)$. Tendo isso, a decomposição do fluxo segue diretamente do caso geral. Ou melhor, tem as mesmas propriedades discutidas no Corolário 2.3.1.

2.3.5 Teoremas de Recorrência

Vamos dar agora alguns corolários do Teorema 2.2.1 sobre recorrência para um fluxo estocástico iniciado num determinado ponto de uma variedade compacta.

Corolário 2.3.2 *Dado um ponto x_0 de uma variedade compacta M , suponha que existe a decomposição do fluxo estocástico $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$, com ξ_t sendo uma isometria e $\psi_t(x_0) = x_0$ (como no Teorema 2.2.1). Então, dados $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$, existe tempo de parada $T \geq \delta > 0$, tal que a distância $d(\phi_T(x_0), x_0) < \epsilon$.*

Demonstração: Seja U aberto centrado em x_0 tal que a distância $d(x_0, y) < \frac{\epsilon}{3}$, para todo $y \in U$. Como M é uma variedade compacta e ξ_t é uma isometria (portanto preserva volume), segue que existe tempo de parada $T \geq \delta > 0$ tal que $\xi_T(U) \cap U \neq \emptyset$. Logo $\xi_T(x_0) \in \xi_T(U) \cap U$ e portanto, como $\psi_t(x_0) = x_0$ para todo $t \geq 0$,

$$d(\phi_T(x_0), x_0) = d(\xi_T(x_0), x_0) < \epsilon.$$

□

Corolário 2.3.3 (“Recorrência de Poincaré”) *Dado $\delta > 0$ e a decomposição $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$ onde ξ_t preserva volume, então para todo aberto U de M , existe $t \geq \delta > 0$ tal que o conjunto*

$$W = \{x \in U : \xi_t(\omega, x) \in U\}$$

tem volume igual a U .

Demonstração: Aplicação direta do Teorema de Poincaré.

□

Observação 2.3.4 *Se $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t \forall t \geq 0$, então o $\xi_t(\omega, x) \in U$ numa infinidade de intervalos de tempo, como no caso do Teorema de Poincaré.*

Corolário 2.3.5 *Dado $\delta > 0$ e a decomposição $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$ onde ξ_t preserva volume, então para todo aberto U de M , existe $t \geq \delta > 0$ tal que o volume de $\psi_t(V)$ é igual ao volume de U , onde*

$$V = \{x \in \psi_t^{-1}(U) : \phi_t(\omega, x) \in U\}.$$

Demonstração: Aplicação direta do Teorema de Poincaré.

□

2.4 Soma dos Expoentes de Lyapunov

Nesta seção vamos tomar novamente o caso particular do Teorema 2.2.1, onde a decomposição $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$ possui a componente ξ_t sendo uma difusão que preserva volume. Vamos assumir que $x_t = \phi_t(x)$ tem uma medida ergódica ρ . Isto ocorre se assumirmos que a álgebra de Lie gerada pelos campos $X_0, \dots, X_m$ da EDE, geram $T_x M$, para qualquer $x \in M$ (ver e.g. Liao [17]).

Aplicando o Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledec para fluxos estocásticos (ver e.g. Arnold [3]), podemos mostrar que, para $\rho \times \mathbb{P}$ -quase todo (x, ω) ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\phi_{t*}(x)^* \phi_{t*}(x)]^{1/2t} \rightarrow \Lambda(x, \omega),$$

onde $\phi_{t*}(x)^* : T_{\phi_t(x)} M \rightarrow T_x M$ é o operador adjunto de $\phi_{t*}(x) : T_x M \rightarrow T_{\phi_t(x)} M$ definido em relação à métrica g e $\Lambda(x, \omega)$ é um operador auto-adjunto em $T_x M$ com autovalores

$$e^{\lambda_1} \geq e^{\lambda_2} \geq \dots \geq e^{\lambda_d}$$

independente de (x, ω) . Os números $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d$ são chamados de *expoentes de Lyapunov*.

Denotemos por λ_Σ a soma dos expoentes de Lyapunov. Do Teorema Ergódico Multiplicativo e suas extensões temos que

$$\lambda_\Sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\det \phi_{t*}(\omega)|$$

para $\rho \times \mathbb{P}$ -quase todo (x, ω) , onde o determinante é definido em relação à métrica g (ver e.g. Carverhill, Chappel and Elworthy [8]). Portanto, λ_Σ tem uma interpretação geométrica como a taxa exponencial no qual o fluxo varia seu volume (ou área se a $\dim M = 2$).

Usando a fatoração $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$, temos então que

$$\lambda_\Sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\det \phi_{t*}(x)(\omega)| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\det \psi_{t*}(x)(\omega)|$$

para $\rho \times \mathbb{P}$ -quase todo (x, ω) . No caso particular da decomposição do Corolário 2.3.1, como $\psi_{t*}(x_0)$ é uma transformação linear tal que $\psi_{t*}(x_0)(u_0) = u_0 g_t$, temos que

$$\lambda_\Sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\det g_t|.$$

Ou seja, a soma dos expoentes de Lyapunov do fluxo ϕ_t é dada pela matriz estocástica g_t . Relembremos que g_t é solução da EDE

$$dg_t = \sum_{j=0}^k A_j(g_t) \circ dW_t^j, \quad (2.4.18)$$

onde $A_j \in \mathfrak{D}$ (ver demonstração do Corolário 2.3.1) é a única matriz tal que $\delta\{(\xi_{t*}^{-1} X_j) - [\xi_{t*}^{-1}(X_j)]^s\}(u_0) = u_0 A_j$. Pela Fórmula de Itô temos que

$$\log |\det g_t| = \int_0^t \sum_{j=0}^k (\operatorname{div} A_j)(g_s) \circ dW_s^j$$

(ver e.g. Arnold [3]). Nosso interesse agora é tomar o limite $1/t$, com $t \rightarrow \infty$, na EDE acima. Porém, em sua correspondente EDE de Itô pois este limite num martingale é nulo. Sendo assim, utilizando a fórmula de conversão de Stratonovich para Itô, tem-se

$$\log |\det g_t| = \int_0^t [\operatorname{div} A_0(g_s) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k (A_j(\operatorname{div} A_j))(g_s)] ds + \underbrace{\int_0^t \sum_{j=1}^k \operatorname{div} A_j(g_s) dW_s^j}_{\text{martingale}}. \quad (2.4.19)$$

Finalmente, por um Teorema Ergódico para difusões (argumento de Furstenberg-Khasminskii), temos que

$$\lambda_\Sigma = \int_M \operatorname{div} A_0(x) \rho(dx) + \frac{1}{2} \int_M \sum_{j=1}^k (A_j(\operatorname{div} A_j))(x) \rho(dx). \quad (2.4.20)$$

O interessante desta fórmula é que podemos obter a soma dos expoentes de Lyapunov, sem a parte difusa da equação estocástica. Mais ainda, sua soma pode ser expressa apenas em função dos campos A_j 's. Esta fórmula já foi obtida em outro contexto por Baxendale, como foi citado em [8].

2.5 Cascata de decomposição do fluxo

Um corolário do Teorema 2.2.1 que ainda não comentamos, é tomar a sub-álgebra de Lie $g(M)$ como sendo a própria álgebra de Lie dos infinitesimais afins $a(M)$. Sua decomposição consiste basicamente na fatoraçoão $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$, com ξ_t sendo uma difusão no grupo das transformações afins, e o resto ψ_t com as propriedades: $\psi_t(x_0) = x_0$ e $\psi_{t*} = Id_{T_{x_0}M}$, $\forall t \geq 0$. Esta decomposição é única e já foi trabalhada em Ruffino [23]. Utilizando este resultado e repetidamente o Teorema 2.2.1, obtemos uma cascata de decomposições do fluxo, como veremos no teorema 2.5.1.

Suponha que temos as seguintes condições:

C1) Uma cadeia de sub-álgebras de Lie

$$g^1(M) \subset \dots \subset g^{n-1}(M) \subset g^n(M) = a(M)$$

onde $g^j(M) = \{X \in a(M) : L_X k^j = 0\}$, $j = 1, \dots, n$, para algum tensor k^j . E portanto temos uma cadeia de grupos de transformações de M , correspondente à cadeia das sub-álgebras de Lie, i.e.,

$$G^1(M) \subset \dots \subset G^{n-1}(M) \subset G^n(M);$$

C2) Seja P^j uma G -estrutura associada aos tensores k^j , com $P^1 \subset \dots \subset P^{n-1} \subset P^n = GL(M)$, e que ainda,

$$T_{u_0} GL(M) \cong T_{u_0} P^{n-1} \oplus u_0 \mathfrak{q}^{n-1},$$

$$T_{u_0} GL(M) \cong T_{u_0} P^{n-2} \oplus u_0 \mathfrak{q}^{n-2},$$

$$\vdots$$

$$T_{u_0} GL(M) \cong T_{u_0} P^1 \oplus u_0 \mathfrak{q}^1,$$

com $\mathfrak{q}^{n-1} \subset \mathfrak{q}^{n-2} \subset \dots \subset \mathfrak{q}^1 \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Teorema 2.5.1 *Com as condições acima, temos a seguinte fatoração do fluxo estocástico:*

$$\phi_t = \xi_t^1 \circ \dots \circ \xi_t^{n-1} \circ \xi_t^n \circ \psi_t,$$

onde $(\xi_t^1 \circ \dots \circ \xi_t^n) \in G^n(M)$ é uma transformação afim, $\psi_t(x_0) = x_0$ e $\psi_{t*} = Id_{T_{x_0}M}$, $\forall t \geq 0$. Cada componente $(\xi_t^1 \circ \xi_t^2 \circ \dots \circ \xi_t^k) \in G^k(M)$, $1 \leq k \leq n-1$, $(\xi_t^{k+1} \circ \dots \circ \xi_t^n \circ \psi_t)(x_0) = x_0$ e $(\xi_t^{k+1} \circ \dots \circ \xi_t^n \circ \psi_t)_*(u_0) = u_0 q_t$ com q_t sendo um processo em $\mathfrak{q}^k \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Demonstração: A primeira decomposição a ser feita é $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$, com ξ_t sendo uma difusão no grupo das transformações afins e o resto ψ_t tendo as propriedades que $\psi_t(x_0) = x_0$ e $\psi_{t*} = Id_{T_{x_0}M}$, $\forall t \geq 0$. Usando o Teorema 2.2.1 para o fluxo afim ξ_t , temos que $\xi_t = \xi_t^1 \circ \Delta_t^1$, com $\xi_t^1 \in G^1(M)$, $\Delta_t^1(x_0) = x_0$ e $\Delta_{t*}^1 u_0 = u_0 q_t$, onde $q_t \in \mathfrak{q}^1$. Mais ainda, como $\psi_{t*} = Id_{T_{x_0}M}$ temos que $(\Delta_t^1 \circ \psi_t)_* u_0 = u_0 q_t$.

Novamente pelo Teorema 2.2.1, $\xi_t = (\xi_t^1 \circ \xi_t^2) \circ \Delta_t^2$ com $(\xi_t^1 \circ \xi_t^2) \in G^2(M)$, $(\Delta_t^2 \circ \psi_t)x_0 = x_0$ e $(\Delta_t^2 \circ \psi_t)_* u_0 = u_0 q_t$, onde agora $q_t \in \mathfrak{q}^2$. Fazendo isso sucessivamente, no $(n-1)$ -ésimo passo, obteremos $\xi_t = (\xi_t^1 \circ \xi_t^2 \circ \dots \circ \xi_t^{n-1}) \circ \Delta_t^{n-1}$ com $(\xi_t^1 \circ \xi_t^2 \circ \dots \circ \xi_t^{n-1}) \in G^{n-1}(M)$, $(\Delta_t^{n-1} \circ \psi_t)x_0 = x_0$ e $(\Delta_t^{n-1} \circ \psi_t)_* u_0 = u_0 q_t$, onde $q_t \in \mathfrak{q}^{n-1}$.

Finalmente, tomando mais um passo com o Teorema 2.2.1, $\xi_t = (\xi_t^1 \circ \xi_t^2 \circ \dots \circ \xi_t^n) \circ \Delta_t^n$ com $(\xi_t^1 \circ \xi_t^2 \circ \dots \circ \xi_t^n) \in G^n(M)$. Pela unicidade da decomposição $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$, segue que $\Delta_t^n = \psi_t$, e portanto

$$\phi_t = \xi_t^1 \circ \dots \circ \xi_t^{n-1} \circ \xi_t^n \circ \psi_t.$$

□

Exemplo:

Vamos supor agora, que a nossa variedade possui uma métrica $g = g_{ij}dx_i \otimes dx_j$ e que sua forma volume é dada em função desta métrica, i.e.,

$$\mu_g = \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Portanto estamos supondo que a $O(n, \mathbb{R})$ -estrutura P^1 está contida na $Sl(n, \mathbb{R})$ -estrutura P^2 , i.e.,

$$P^1 \subset P^2 \subset GL(M).$$

Tomando $\mathfrak{q}^2$ como sendo a sub-álgebra de Lie dada pelas matrizes diagonais da forma $a \cdot Id$, $a \in \mathbb{R}$ e $\mathfrak{q}^1$ a sub-álgebra de Lie das matrizes triangulares, temos:

$$\mathfrak{q}^2 \subset \mathfrak{q}^1 \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}).$$

Pelo Teorema 2.5.1,

$$\phi_t = \xi_t^1 \circ \xi_t^2 \circ \xi_t^3 \circ \psi_t,$$

onde ξ_t^1 é uma difusão no grupo das isometrias, $(\xi_t^1 \circ \xi_t^2)$ preserva volume e $(\xi_t^1 \circ \xi_t^2 \circ \xi_t^3)$ é transformação afim. Além disso, $\xi_t^2(x_0) = \xi_t^3(x_0) = \psi_t(x_0) = x_0$, $(\xi_t^2 \circ \xi_t^3 \circ \psi_t)_* u_0 = u_0 q_t$ com $q_t \in \mathfrak{q}^1$ e $(\xi_t^3 \circ \psi_t)_* u_0 = u_0 q_t$ onde $q_t \in \mathfrak{q}^2$.

Capítulo 3

Difusão em Variedade Simplética

Neste capítulo assumiremos que (M, ω) é uma variedade diferenciável $2n$ -dimensional simplética, paracompacta e conexa. A paracompacticidade da variedade é para garantir a existência de uma métrica riemanniana e, portanto, a existência de uma estrutura quase-complexa J ω -compatível (ver e.g. seção 1.6).

Tomaremos o fluxo estocástico ϕ_t como sendo o fluxo gerado pela seguinte EDE (em M)

$$dx_t = \sum_{i=0}^k X_i(x_t) \circ dW_t^i, \quad (3.0.1)$$

e estaremos interessados em fatorações para ϕ_t , que possam ser obtidas por meio das propriedades oferecidas pela estrutura simplética da variedade. Na EDE 3.0.1 assumiremos que seus campos X_i 's são de classe C^k (com k suficientemente grande) e suas derivadas covariantes são limitadas.

3.1 Difusão em curvas de nível

Daremos nesta seção um teorema que permite decompor o fluxo estocástico como $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$, com a componente ξ_t sendo uma difusão que mora numa curva de nível de uma determinada função $h : M \rightarrow \mathbb{R}$, ou mais precisamente, $\xi_t(x) \in h^{-1}(x)$ q.s.. Este tipo de decomposição pode vir a ser útil em problemas de outras áreas. Num problema físico por exemplo, se h for uma função temperatura, a difusão $\xi_t(x)$ permanecerá numa determinada região onde a temperatura é constante igual a $h(x)$. Citaremos outras motivações no decorrer desta seção.

Teorema 3.1.1 *Seja $h \in C^\infty(M)$ uma submersão. Então podemos decompor o fluxo estocástico como $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$, sendo ξ_t um processo de difusão tal que $\xi_t(x)$ fica restrito à subvariedade $h^{-1}(x)$ q.s.. Além disso, $\psi_t(x)$ é um processo estocástico, transversal às curvas de nível de h e é gerado por $\xi_{t*}^{-1}(JX_h)$.*

Demonstração:

Tomemos uma estrutura quase-complexa ω -compatível J , a qual define a métrica associada $\bar{g} = \omega(\cdot, J\cdot)$ e seja ∇h o campo gradiente definido por $\bar{g}(\nabla h, \cdot) = dh$. Sendo X_h o campo hamiltoniano associado à função h , temos que $\nabla h = JX_h$. Para maiores detalhes veja Seção 1.6.

Vamos definir o seguinte campo de vetores $\widetilde{X}$ em função dos campos X_j da EDE e do campo hamiltoniano X_h :

$$\widetilde{X}_j(x) = X_j(x) - \frac{\omega(X_j(x), X_h(x))}{\omega(JX_h(x), X_h(x))} JX_h(x).$$

A expressão $\omega(X_j(x), X_h(x))$ pode ser interpretada como a projeção ortogonal de $X_j(x)$ em ∇h com relação à métrica associada. Note que $\widetilde{X}$ é um campo diferenciável e que por construção $\widetilde{X}_j(x)$ está no núcleo da aplicação $dh(x) : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$.

Dado $x \in M$, seja $\xi_t(x)$ solução da seguinte EDE em M :

$$d\xi_t(x) = \sum_{j=0}^k \tilde{X}_j(\xi_t(x)) \circ dW_t^j.$$

Como sabemos, $dh(\tilde{X}_j) = L_{\tilde{X}_j}h = 0$ e assim temos que $h(\xi_t(\cdot, x)) = h(x)$ q.s.(ver e.g. Bismut [5]). Como $\xi_t^{-1} \circ \xi_t = Id_M$, temos, por uma versão da fórmula de Itô generalizada, que $\xi_{t*}^{-1}(d\xi_t(x)) + d\xi_t^{-1}(\xi_t(x)) = 0$. Logo, $\xi_t^{-1}(x)$ é solução da seguinte EDE

$$d\xi_t^{-1}(x) = - \sum_{j=0}^k \xi_{t*}^{-1} \tilde{X}_j(\xi_t^{-1}(x)) \circ dW_t^j.$$

Tomando $\psi_t = \xi_t^{-1} \circ \phi_t$, obtemos novamente que $d\psi_t(x) = \xi_{t*}^{-1}(\circ d\phi_t(x)) + \circ d\xi_t^{-1}(\phi_t(x))$ e portanto,

$$d\psi_t(x) = \sum_{j=0}^k \xi_{t*}^{-1} \{X_j - \tilde{X}_j\}(\psi_t(x)) \circ dW_t^j.$$

Ou ainda,

$$d\psi_t(x) = \sum_{j=0}^k \xi_{t*}^{-1}(\lambda_t^x(JX_h))(\psi_t(x)) \circ dW_t^j,$$

onde $\lambda_t^x = \frac{\omega(X_j(\psi_t(x)), X_h(\psi_t(x)))}{\omega(JX_h(\psi_t(x)), X_h(\psi_t(x)))} \in \mathbb{R}$. □

Exemplo:

Vamos tomar M como sendo o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$, em coordenadas (x, y) , com a forma simplética $\omega_0 = dx \wedge dy$. Considere a hamiltoniana $h(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ e seu campo hamiltoniano associado dado por $X_h(x, y) = (-y, x)$. Tomemos o fluxo estocástico ϕ_t gerado pela EDE

$$d\phi_t = e_1 dt + e_2 \circ dW_t.$$

A aplicação $t \mapsto \phi_t(p, \cdot)$ “caminha” na direção de $e_1 = (1, 0)$ com ruído na direção de $e_2 = (0, 1)$, para quase todo $\omega \in \Omega$. Seguindo a demonstração acima, seja ξ_t o fluxo estocástico gerado pela EDE

$$d(x_t, y_t) = \tilde{e}_1(x_t, y_t)dt + \tilde{e}_2(x_t, y_t) \circ dW_t, \quad (3.1.2)$$

onde os campos $\tilde{e}_1$ e $\tilde{e}_2$ são da forma:

$$\tilde{e}_1(x, y) = (1, 0) - \frac{x}{x^2 + y^2}(x, y);$$

$$\tilde{e}_2(x, y) = (0, 1) - \frac{y}{x^2 + y^2}(x, y);$$

se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $\tilde{e}_1(0, 0) = \tilde{e}_2(0, 0) = (0, 0)$.

A equação 3.1.2 torna-se então equivalente a resolver as equações:

$$dx_t = \frac{y_t^2}{x_t^2 + y_t^2}dt - \frac{y_t x_t}{x_t^2 + y_t^2} \circ dW_t; \quad (3.1.3)$$

$$dy_t = -\frac{y_t x_t}{x_t^2 + y_t^2}dt + \frac{x_t^2}{x_t^2 + y_t^2} \circ dW_t. \quad (3.1.4)$$

Das equações 3.1.3 e 3.1.4 obtemos:

$$x_t \circ dx_t = \frac{x_t y_t^2}{x_t^2 + y_t^2}dt - \frac{y_t x_t^2}{x_t^2 + y_t^2} \circ dW_t; \quad (3.1.5)$$

$$y_t \circ dy_t = -\frac{y_t^2 x_t}{x_t^2 + y_t^2}dt + \frac{y_t x_t^2}{x_t^2 + y_t^2} \circ dW_t. \quad (3.1.6)$$

E portanto $x_t \circ dx_t + y_t \circ dy_t = 0$. Por outro lado,

$$d(x_t^2) = 2x_t \circ dx_t;$$

$$d(y_t^2) = 2y_t \circ dy_t.$$

Ou seja, na forma integral temos que

$$x_t^2 + y_t^2 = x_0^2 + y_0^2 + \underbrace{2 \left(\int_0^t x_s \circ dx_s + \int_0^t y_s \circ dy_s \right)}_{=0}.$$

Logo, como era de se esperar, $x_t^2 + y_t^2$ permanece na curva de nível da função h :

$$h(x_t, y_t) = \frac{1}{2}(x_t^2 + y_t^2) = \frac{1}{2}(x_0^2 + y_0^2).$$

3.1.1 Subvariedade Integral Maximal h -Simplética

Daremos agora uma abordagem mais geométrica para a decomposição que fizemos em termos das curvas de nível da função h no Teorema 3.1.1. Para isso, relembremos brevemente algumas definições sobre distribuição e variedades integrais maximais.

Uma distribuição S de dimensão r numa variedade M é uma escolha (para cada $p \in M$) de um subespaço r -dimensional S_p de $T_p M$. Dizemos que um campo de vetores X pertence a S se $X(p) \in S_p$, para todo $p \in M$. A distribuição S é dita involutiva se $[X, Y] \in S$ quando $X, Y \in S$. Uma subvariedade conexa N de M é chamada de variedade integral da distribuição S se $i_*(T_p(N)) = S_p$, para todo $p \in N$, onde $i : N \hookrightarrow M$ é um mergulho, e esta é maximal se S não contém outra subvariedade integral que contém N . O teorema de Frobenius garante que se S for involutiva, então, para todo ponto $p \in M$, há uma única integral maximal $N(p)$ de S .

Dada uma submersão $h \in C^\infty$ numa variedade simplética, a escolha do subespaço

$$S_p = \{Y \in T_p M : \omega_p(Y, X_h(p)) = 0\}$$

em termos do campo hamiltoniano X_h define uma subvariedade integral maximal em função da energia h , a qual chamaremos de integral maximal h -simplética que passa por $p \in M$.

Como o campo de vetores $\widetilde{X}$ definido em termos dos campos X_j da EDE 3.0.1 e do campo hamiltoniano X_h , por:

$$\widetilde{X}_j(p) = X_j(p) - \frac{\omega(X_j(p), X_h(p))}{\omega(JX_h(p), X_h(p))} JX_h(p),$$

é tal que $\omega_p(\tilde{X}_j(p), X_h(p)) = 0$, para todo $p \in M$, podemos reescrever o Teorema 3.1.1 da seguinte maneira:

Teorema 3.1.2 *Seja (M, ω) uma variedade simplética e $h \in C^\infty$ uma submersão. Então podemos decompor o fluxo estocástico ϕ_t gerado pela EDE 3.0.1 como $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$, sendo $\xi_t(x)$ um processo de difusão restrito à integral maximal h -simplética que passa por $x \in M$. Além disso, $\psi_t(x)$ é um processo estocástico transversal às integrais maximais gerado por $\xi_{t*}^{-1}(JX_h)$.*

3.2 Trajetórias Hamiltonianas.

Nesta seção temos como resultado principal a fatoração do fluxo estocástico $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$, de tal forma que o movimento $\xi_t(\omega, x)$ fique restrito sobre uma trajetória hamiltoniana dada por um campo hamiltoniano, para quase todo $\omega \in \Omega$.

Antes de enunciarmos o teorema precisaremos do seguinte lema:

Lema 3.2.1 *Sejam $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e X um campo de vetores C^∞ . Considere as seguintes equações:*

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = X(x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \dot{y} = f(t)X(y(t)), \\ y(0) = x_0. \end{cases}$$

Então as soluções de (1) e (2) têm a mesma trajetória.

Demonstração: Devemos mostrar que se γ_1 é solução de (1) e γ_2 é solução de (2) então $\gamma_2(t) = \gamma_1(g(t))$ para alguma função g .

De fato, derivando os dois lados de $\gamma_2(t) = \gamma_1(g(t))$ temos:

$$\dot{\gamma}_2(t) = \dot{\gamma}_1(g(t))\dot{g}(t). \quad (3.2.7)$$

Por outro lado, $\dot{\gamma}_2(t) = f(t)X(\gamma_2(t))$ e $\dot{\gamma}_1(g(t))\dot{g}(t) = X(\gamma_1(g(t)))\dot{g}(t)$. E portanto

$$f(t)X(\gamma_2(t)) = X(\gamma_1(g(t)))\dot{g}(t).$$

Como, por hipótese, $\gamma_2(t) = \gamma_1(g(t))$, temos que $\dot{g}(t) = f(t)$ e portanto,

$$g(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

□

Equivalentemente, se as equações acima fossem de Stratonovich, i.e., $dx_t = X(x_t) \circ dW_t$ e $dy_t = f(t)X(y_t) \circ dW_t$, suas soluções também teriam a mesma trajetória.

Teorema 3.2.2 *Seja h uma submersão e X_h seu campo hamiltoniano. Então existe a decomposição $\phi_t = \xi_t \circ \psi_t$ com o suporte da difusão ξ_t morando em trajetórias hamiltonianas geradas pelo campo X_h . Além disso, ψ_t possui trajetórias transversais às trajetórias hamiltonianas.*

Demonstração: Para cada X_j da EDE 3.0.1, tomaremos o campo $\widetilde{X}_j$, por meio da projeção ortogonal de X_j em X_h da seguinte maneira: para cada $x \in M$, seja $\widetilde{X}_j(x)$ a projeção

$$\widetilde{X}_j(x) = \frac{\omega(X_j(x), JX_h(x))}{\omega(X_h(x), JX_h(x))}X_h(x).$$

Agora, de maneira análoga à demonstração do Teorema 3.1.2, tomaremos ξ_t como sendo a solução da seguinte EDE em M :

$$dx_t = \sum_{j=0}^k \widetilde{X}_j(x_t) \circ dW_t^j.$$

Como $\widetilde{X}_j(x_t) = f_j(t)X_h(x_t)$ para alguma função $f_j \in C^\infty(\mathbb{R})$, pelo Lema 3.2.1, temos que $\xi_t(x)$ ficará restrito sob a trajetória hamiltoniana de X_h que passa pelo ponto x , com a diferença que existirá um “ruído” unidimensional enquanto $\xi_t(x)$ percorre tal trajetória. Utilizando uma

versão da fórmula de Itô generalizada para $\psi_t = \xi_t^{-1} \circ \phi_t$, como na demonstração do Teorema 3.1.2, obtemos:

$$d\psi_t(x) = \sum_{j=0}^k \xi_{t*}^{-1}(\alpha_t \nabla h)(\psi_t(x)) \circ dW_t^j,$$

onde $\alpha_t \in \mathbb{R}$. □

Corolário 3.2.3 *O fluxo estocástico possui a seguinte fatoração:*

$$\phi_t = \xi_t^1 \circ \xi_t^2 \circ \psi_t,$$

onde ξ_t^1 é uma difusão que fica restrita às trajetórias hamiltonianas geradas por X_h , $(\xi_t^1 \circ \xi_t^2)(x)$ “mora” na curva de nível $h^{-1}(x)$ e ψ_t possui trajetórias transversais às trajetórias hamiltonianas.

Demonstração: Notando que $dh(X_h) = 0$, a demonstração segue diretamente do Teorema 3.1.1 e Teorema 3.2.2. □

Exemplo:

Vamos tomar a variedade M como sendo o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$, em coordenadas (x, y) , com a forma simplética $\omega_0 = dx \wedge dy$. Tomemos a estrutura quase-complexa dada por $J_0(\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}$ e $J_0(\frac{\partial}{\partial y}) = -\frac{\partial}{\partial x}$. Com relação à base $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$, podemos escrever

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e também temos a relação $\omega_0(u, v) = \langle J_0(u), v \rangle$.

Consideremos a função hamiltoniana $h(x, y) = x - y$ em $\mathbb{R}^2$. Portanto, seu campo hamiltoniano é o campo constante $X_h(p) = (-\frac{\partial h}{\partial y}(p), \frac{\partial h}{\partial x}(p)) = (1, 1)$. Tomemos o fluxo estocástico ϕ_t gerado pela EDE

$$dx_t = e_1 dt + e_2 \circ dW_t.$$

O fluxo ϕ_t tem a propriedade que $t \mapsto \phi_t(p, \cdot)$ “caminha” na direção de $e_1 = (1, 0)$ com ruído na direção de $e_2 = (0, 1)$, para quase todo $\omega \in \Omega$. Pelo teorema anterior ξ_t é o fluxo estocástico gerado pela equação:

$$d\tilde{x}_t = \tilde{e}_1 dt + \tilde{e}_2 \circ dW_t,$$

onde $\tilde{e}_1 = \tilde{e}_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ são campos constantes obtidos pela projeção definida acima. Assim

$$\xi_t(p) = p + t(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) + W_t(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}),$$

para $p \in \mathbb{R}^2$ e $t \geq 0$. E sendo assim, $\xi_t^* = id$ e obtemos a seguinte EDE para ψ_t :

$$dy_t = (\frac{2 - \sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2})dt + (\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{2 - \sqrt{2}}{2}) \circ dW_t.$$

Possibilidades:

Comentaremos agora uma possibilidade para um trabalho futuro. Gostaríamos de encontrar uma boa definição de uma projeção π de um aberto/fechado A na trajetória $y_t(p)$, onde y_t é o fluxo associado ao campo X_h . Veja a ilustração da figura 3.1.

A decomposição do fluxo estocástico induz uma decomposição nas probabilidades de transição dos fluxos ϕ e ξ . Denotando por $P_t^\phi(p, A)$ a probabilidade de transição de ϕ com relação a p e A , i.e., a probabilidade de $\phi_t(p)$ atingir A para algum tempo de parada $T \in (0, \infty)$, temos o seguinte possível teorema.

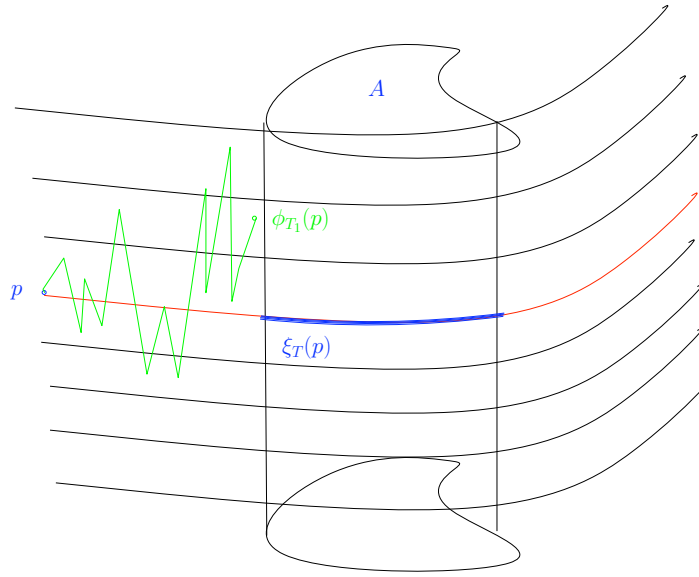


Figura 3.1: Projeção

Conjectura: Temos as relações nas probabilidades de transição:

$$P_t^\phi(p, A) \leq P_t^\xi(p, \pi(A)),$$

para $0 \leq t < T$.

Ainda gostaríamos de mostrar que possivelmente não existe uma função f , tal que $P_t^\phi(p, A) = f_A^p P_t^\xi(p, \pi(A))$ e outras consequências.

Capítulo 4

Conjugação do Fluxo Estocástico e Tensores

Imkeller e Lederer mostraram em [13] que, a menos de uma mudança de coordenada estacionária (conjugação), os fluxos gerados por EDE, cujas trajetórias não são diferenciáveis no tempo quase sempre, podem ser descritos por fluxos aleatórios que são diferenciáveis no tempo. O que faremos neste capítulo é estudar uma classe especial de EDE que permitem boas conjugações, ou melhor, sob determinadas hipóteses, o fluxo estocástico pode ser conjugado à um fluxo aleatório diferenciável no tempo e que ainda preserva certos tensores como, por exemplo, um tensor métrico, uma forma volume, uma forma simplética, etc.

4.1 Equações Diferenciais Aleatórias e Estocásticas

O conceito de sistema dinâmico aleatório abrange uma enorme diversidade de objetos da matemática. O tipo de aleatoriedade dada nestes sistemas que mais nos interessa é o chamado “cociclo” ou “random dynamical system”, como menciona L. Arnold [3]. Os cociclos possuem

uma dinâmica no espaço de estado e ainda, existe uma dinâmica na base probabilística.

Mais precisamente, seja $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{R}})$ um sistema dinâmico métrico, i.e., θ é uma aplicação mensurável que preserva a medida de probabilidade ($\theta_*\mathbb{P} = \mathbb{P}$) e tem a propriedade de semi-grupo: $\theta_{t+s} = \theta_s \circ \theta_t$, com $\theta_0 = id_\Omega$. Dizemos que a aplicação $\phi : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um sistema dinâmico aleatório (“random dynamical system”) ou cociclo aleatório em $\mathbb{R}^n$ se:

- ϕ é $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{F} \otimes \mathcal{B}^n$ -mensurável,
- ϕ satisfaz, para todo $s, t \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \Omega$,

$$\phi(0, \omega) = id_{\mathbb{R}^n},$$

$$\phi(t + s, \omega) = \phi(t, \theta_s(\omega)) \circ \phi(s, \omega).$$

A definição acima poderia ser mais geral, tomando $\phi : T \times \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $T \in \{\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}$. Na definição com $T = \mathbb{R}$, temos ainda que $\phi(t, \omega)^{-1} = \phi(-t, \theta_t \omega)$, ou equivalentemente, $\phi(-t, \omega) = \phi(t, \theta_t^{-1} \omega)^{-1}$.

Sistemas dinâmicos aleatórios podem ser gerados por equações diferenciais aleatórias (EDA) da forma

$$dx_t = f(\theta_t \omega, x_t) dt,$$

supondo algumas propriedades sobre o campo aleatório $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Este tipo de equação pode ser resolvida, uma vez que fixamos ω , como uma equação diferencial ordinária não-autônoma. Dizemos que ϕ é solução desta equação se

$$\phi(t, \omega)x = x + \int_0^t f(\theta_s \omega, \phi(s, \omega)x) ds.$$

Tomando campos diferenciáveis autônomos $X_0, \dots, X_m$ em $\mathbb{R}^n$, a equação diferencial estocástica de Stratonovich da forma

$$dx_t = \sum_{i=0}^k X_i(x_t) \circ dW_t^i \tag{4.1.1}$$

gera um fluxo estocástico com a propriedade de cociclo com relação ao shift θ (ω -q.s.). (ver e.g. Seção 1.2).

Definição 4.1.1 *Dois sistemas dinâmicos aleatórios Φ e Ψ em $\mathbb{R}^n$ são conjugados, se existe um homeomorfismo aleatório $H : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, para ω -q.s. e todo $t \in T$, temos*

$$\Psi_t(\omega) = H(\theta_t \omega) \circ \Phi_t(\omega) \circ H^{-1}(\omega).$$

Neste caso H é chamado de uma cohomologia entre Φ e Ψ (cf. terminologia do Imkeller e Lederer [13]).

Notemos na definição de cohomologia que, se Φ_t é cociclo, então Ψ_t também é cociclo. De fato,

$$\begin{aligned} \Psi_t(\theta_s \omega) \circ \Psi_s(\omega) &= H(\theta_{t+s} \omega) \circ \Phi_t(\theta_s \omega) \circ H^{-1}(\theta_s \omega) \circ H(\theta_s \omega) \circ \Phi_s(\omega) \circ H^{-1}(\omega) \\ &= H(\theta_{t+s} \omega) \circ \Phi_{t+s}(\omega) \circ H(\omega) \\ &= \Psi_{t+s}(\omega) \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

A cohomologia de dois sistemas dinâmicos aleatórios pode ser considerada uma mudança de coordenada pela qual o comportamento dinâmico descrito por um dos sistemas é transladado para o comportamento dinâmico descrito pelo outro sistema. Propriedades assintóticas intrínsecas do sistema dinâmico aleatório, tais como expoente de Lyapunov ou atratores aleatórios, são preservadas pelas cohomologias estacionárias.

4.2 Conjugação

A conjugação que estamos interessados nesta seção é entre um fluxo estocástico ϕ_t (que não é diferenciável no tempo), gerado por uma EDE, com um fluxo aleatório ψ_t que é diferenciável no

tempo. Primeiramente faremos uma conjugação usando parte da técnica que está em Imkeller e Lederer [13] para obtermos a tal conjugação entre ϕ_t e ψ_t e posteriormente acrescentaremos que, se o fluxo estocástico ϕ_t preserva um determinado tipo de tensor, então ψ_t também preserva.

Consideremos ϕ_t o fluxo estocástico gerado pela EDE 4.1.1 em $\mathbb{R}^n$. Como iremos trabalhar com “integrais definidas de $-\infty$ a t ”, gostaríamos de reforçar que a EDE 4.1.1, corresponde a equação integral

$$x_t = x + \int_0^t X_0(x_u) du + \sum_{j=1}^m \int_0^t X_j(x_u) \circ dW_u^j.$$

Assumiremos que os campos $X_0, \dots, X_m \in C^k$ (com k suficientemente grande), suas derivadas covariantes ∇X_j 's são limitadas e W_t^j , $j = 1, \dots, m$ são movimentos brownianos independentes (relembrando que $W_t^0 := dt$).

Como parte da técnica que usaremos no Teorema 4.2.2, precisamos obter um fluxo h_t tal que $h_0(\theta_t \omega) = h_t(\omega)$ para ω -q.s (estacionaridade).

Lema 4.2.1 *Seja h_t a solução da EDE dada na forma integral por*

$$h_t(x) = x + \sum_{j=1}^m e^{-t} \int_{-\infty}^t e^u X_j(h_u(x)) \circ dW_u^j. \quad (4.2.3)$$

Então $h_t(\theta_s \omega, x) = h_{t+s}(\omega, x)$ (ω -q.s.). Em particular $h_t(\omega, x) = h_0(\theta_t \omega, x)$.

A demonstração deste lema, para campos X_j 's como assumimos anteriormente, segue em Imkeller e Lederer [13].

Exemplo:

Vamos tomar a seguinte equação na reta: $dx_t = X(x_t) \circ dW_t$ com $X(x) \equiv 1$. Logo sua solução é dada por $\phi_t(x) = x + W_t$. E portanto

$$h_s(\omega, x) = x + e^{-s} \int_{-\infty}^s e^u dW_u.$$

Vamos mostrar então, para este caso particular, que $h_t(\omega, x) = h_0(\theta_t\omega, x)$. Usaremos para isso uma técnica diferente da qual se encontra em [13].

Pela fórmula de Itô temos que:

$$\int_a^s e^u dW_u = e^s W_s - e^a W_a - \int_a^s W_u e^u du.$$

E portanto

$$\begin{aligned} h_s(\omega, x) &= x + e^{-s} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^s e^u dW_u \\ &= x + e^{-s} [e^s W_s - \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^s W_u e^u du] \\ &= x + W_s - \lim_{a \rightarrow -\infty} e^{-s} \int_a^s W_u e^u du. \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Como $W_u(\theta_t\omega) = (\theta_t\omega)(u) = \omega(t+u) - \omega(t) = W_{t+u} - W_t$, temos

$$\begin{aligned} h_0(\theta_t\omega, x) &= x - [\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^u dW_u] \circ \theta_t \\ &= x - [\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 W_u e^u du] \circ \theta_t \\ &= x - [\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 (W_{t+u} - W_t) e^u du] \\ &= x + W_t - \lim_{a \rightarrow -\infty} e^{-t} \int_a^t W_v e^v dv. \\ &= h_t(\omega, x) \end{aligned}$$

Portanto temos a estacionaridade para h_t .

Note que apesar do limite $\lim_{a \rightarrow -\infty} e^{-s} \int_a^s W_u e^u du$ não existir, a expressão $e^{-s} \int_{-\infty}^s W_u e^u du$ se aproxima de W_s quando $s \rightarrow -\infty$, e portanto, por 4.2.4 vemos que $h_s(x) \rightarrow x$ quando $s \rightarrow -\infty$. Ou seja, temos $h_{-\infty}(\theta_t\omega) = h_{-\infty}(\omega)$ (ω -q.s.). Isto nos permite intuir a seguinte alternativa para o substituir o Lema 4.2.1:

Conjectura: Assuma que $\lim_{t \rightarrow -\infty} h_t(x) = x$ para a equação 4.2.3. Então $h_t(\theta_s \omega, x) = h_{t+s}(\omega, x)$ (ω -q.s.).

Acreditamos que uma demonstração pode ser feita usando argumento de indução sobre intervalos do tipo $(-\infty, T)$.

Voltando ao tópico principal do capítulo, segue abaixo um teorema sobre conjugação de fluxo estocástico. Uma versão deste resultado aparece em Imkeller e Lederer [13]. Nossa técnica além de simplificar e corrigir¹ a usada naquele artigo, ainda permite preservar tensores como será feito na próxima seção.

Teorema 4.2.2 *Seja ϕ_t o fluxo estocástico gerado pela EDE 4.1.1. Então existe um fluxo aleatório ψ_t diferenciável no tempo, tal que temos a conjugação de classe C^k*

$$\phi_t(\omega) = H(\theta_t \omega) \circ \psi_t(\omega) \circ H(\omega)^{-1}.$$

Demonstração: A equação diferencial para h_t é da forma

$$dh_t = \sum_{j=1}^m X_j(h_t) \circ dW_t^j - \sum_{j=1}^m e^{-t} \left(\int_{-\infty}^t e^u X_j(h_u) \circ dW_u^j \right) dt.$$

Como $h_t^{-1} \circ h_t = id$, temos que $h_{t*}^{-1}(\circ dh_t(x)) + \circ dh_t^{-1}(h_t(x)) = 0$ e portanto,

$$dh_t^{-1}(x) = - \sum_{j=1}^m h_{t*}^{-1} X_j(h_t^{-1}(x)) \circ dW_t^j + \sum_{j=1}^m e^{-t} h_{t*}^{-1} \left(\int_{-\infty}^t e^u X_j(h_u^{-1}(x)) \circ dW_u^j \right) dt.$$

¹ Na técnica usada em [13], tomou-se

$$\phi_t(\omega) = h_0(\theta_t \omega) \circ \psi_t(\omega) \circ (id_{\mathbb{R}^n})^{-1} = h_0(\theta_t \omega) \circ \psi_t(\omega) \circ h_0(\omega)^{-1},$$

o que não ocorre, pois em geral, $h_0(\omega)$ não é a identidade (ω -q.s.).

Tomemos então $\Psi_t = h_t^{-1} \circ \phi_t$. Por uma versão da fórmula de Itô generalizada temos que:

$$\begin{aligned}
d\Psi_t(x) &= h_{t*}^{-1}(\circ d\phi_t(x)) + \circ dh_t^{-1}(\phi_t(x)) \\
&= \sum_{j=0}^m h_{t*}^{-1} X_j(h_t^{-1}(\phi_t(x))) \circ dW_t^j - \sum_{j=1}^m h_{t*}^{-1} X_j(h_t^{-1}(\phi_t(x))) \circ dW_t^j \\
&\quad + \sum_{j=1}^m e^{-t} h_{t*}^{-1} \left(\int_{-\infty}^t e^u X_j(h_u^{-1}(\phi_u(x))) \circ dW_u^j \right) dt. \\
&= \left[h_{t*}^{-1} X_0(\Psi_t(x)) + \sum_{j=1}^m e^{-t} h_{t*}^{-1} \int_{-\infty}^t e^u X_j(\Psi_u(x)) \circ dW_u^j \right] dt.
\end{aligned}$$

A equação que obtemos para Ψ_t é uma equação diferencial funcional.

Seja $\psi_t := \Psi_t \circ h_0$, ou ainda, $\psi_t(\omega, x) = \Psi_t(\omega, h_0(\omega)x)$. Logo, como Ψ_t é diferenciável no tempo, segue que ψ também é diferenciável no tempo. Denotando por H o homeomorfismo aleatório dado por $h_0 : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, temos a conjugação

$$\phi_t(\omega) = H(\theta_t \omega) \circ \psi_t(\omega) \circ H(\omega)^{-1},$$

onde ψ_t é um fluxo aleatório diferenciável no tempo. □

4.3 Conjugações que Preservam Tensores.

Suponha que temos um fluxo estocástico ϕ_t gerado por uma EDE e que este ainda preserva um determinado tensor k do tipo (p, q) , ou seja, $\phi_t^* k = k$ q.s.. Nesta seção vamos mostrar, através da técnica obtida na seção anterior, que podemos construir um fluxo aleatório ψ_t gerado por uma EDA, portanto diferenciável no tempo, que é conjugado a ϕ_t e que ainda mantém a propriedade de preservar o tensor k . Aplicações interessantes podem surgir quando tomamos k sendo uma métrica, uma forma simplética, etc.

Teorema 4.3.1 *Como no Teorema 4.2.2, tomemos a conjugação $\phi_t(\omega) = H(\theta_t\omega) \circ \psi_t(\omega) \circ H^{-1}(\omega, \cdot)$. Então, o fluxo estocástico ϕ_t preserva tensores k do tipo (p, q) , com $p+q = 2r, r \in \mathbb{N}$, se, e somente se, ψ_t e H preservam k .*

Demonstração: Devemos mostrar que se ϕ_t preserva o tensor k , então ψ_t e H preservam k pois a recíproca segue do fato que a composição de difeomorfismos que preservam um tensor k , também preserva o tensor k .

De fato, nas mesmas notações acima, temos que $x_t = h_t(x)$ é solução da equação

$$dx_t = \sum_{j=1}^m X_j(x_t) \circ dW_t^j - (x_t - x)dt. \quad (4.3.5)$$

Agora, analisando primeiramente uma equação do tipo $dx_t = Y(x_t)dt$, onde o campo é dado por $Y(\cdot) = -Id(\cdot) + x$, temos que se η_t é seu fluxo gerado, então $\eta_{t*} = -Id$. Como $\phi_t^*k = k$ (ω -q.s.) segue que $L_{X_j}k = 0$ para $j = 1, \dots, m$, e portanto, $h_t^*k = k$ se, e somente se, $\eta_t^*k = k$. Por fim, como $\eta_{t*} = -Id$, temos que $\eta_t^*k = k$ se, e somente se, o tensor k é do tipo (p, q) , com $p+q = 2r, r \in \mathbb{N}$. Logo, para $p+q = 2r, r \in \mathbb{N}$, o difeomorfismo $H = h_0$ preserva k e portanto, ψ_t também preserva pois é composição de difeomorfismos que preservam. $\square$

Tensores como a métrica riemaniana, forma simplética e a forma volume $\mu = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ com n par, são alguns exemplos de tensores que são preservados pela conjugação.

Exemplo:

A técnica em geral envolve contas longas, mesmo para sistemas relativamente simples. O exemplo a seguir é meramente ilustrativo para o leitor.

Considere a seguinte EDE no espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$:

$$dx_t = X_0(x_t)dt + X_1(x_t) \circ dW_t,$$

onde $X_0(x, y) = (1, 0)$ e $X_1(x, y) = (0, 1)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Notemos que se ϕ_t é a solução da EDE acima, então

$$\phi_t(x, y) = (x, y) + (e^t, W_t),$$

é fluxo estocástico que tem a propriedade de ser isometria. De acordo com a demonstração do Teorema 4.2.2, o processo estacionário $h_t(x, y) = (h_t^x, h_t^y)$ é dado por

$$\begin{pmatrix} h_t^x \\ h_t^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + e^{-t} \int_{-\infty}^t e^u dW_u \end{pmatrix}.$$

E portanto

$$\begin{pmatrix} dh_t^x \\ dh_t^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ dW_t - (h_t^x + y)dt \end{pmatrix}$$

Neste exemplo simples é fácil constatar que $h_{t*} = Id$, e sendo assim

$$\begin{pmatrix} d\Psi_t^x \\ d\Psi_t^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_t^x \\ e^{-t} \int_{-\infty}^t e^u dW_u \end{pmatrix} dt.$$

Logo o fluxo Ψ_t que é diferenciável no tempo é dado por

$$\begin{pmatrix} \Psi_t^x \\ \Psi_t^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + e^t \\ y + \int_0^t dW_s - e^{-t} \int_{-\infty}^t e^u dW_u \end{pmatrix}.$$

Como $h_0(x, y) = (x, y + \int_{-\infty}^0 e^u dW_u)$, segue que $\psi_t = \Psi_t \circ h_0$ é da forma

$$\begin{pmatrix} \psi_t^x \\ \psi_t^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + e^t \\ y + \int_{-\infty}^0 e^u dW_u + \int_0^t dW_s - e^{-t} \int_{-\infty}^t e^u dW_u \end{pmatrix}.$$

Com as expressões acima, e notando que $h_0^{-1}(x, y) = (x, y - \int_{-\infty}^0 e^u dW_u)$, é fácil verificar que

$$\phi_t(\omega)(x, y) = h_0(\theta_t \omega) \circ \psi_t(\omega) \circ h_0^{-1}(\omega)(x, y).$$

Referências Bibliográficas

- [1] ANA CANNAS DA SILVA – *Introduction to symplectic and Hamiltonian geometry*, Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications] Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2003.
- [2] L. ARNOLD – *Lectures on symplectic geometry* Lecture Notes in Math., 1764. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [3] L. ARNOLD – *Random Dynamical Systems* (Springer, 1998).
- [4] BAXENDALE, P.H. – *Asymptotic Behaviour of Stochastic Flows of Diffeomorphisms*, Lecture Notes in Math. 1203, 1-17 (1986).
- [5] BISMUT, J. M. – *Mécanique aléatoire*, Lecture Notes in Math., 866. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981.
- [6] CHEEGER, J. AND EBIN, D. – *Comparison theorems in Riemannian Geometry*, North Holland, 1975.
- [7] DO CARMO, M. P. – *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.
- [8] A.P. CARVERHILL, M.J. CHAPPEL AND K.D. ELWORTHY – *Characteristic Exponents for Stochastic Flows*, Lecture Notes in Math., 1158, Springer, Berlin, 1986.

- [9] ELWORTHY, K.D. – *Geometric aspects of diffusions on manifolds*, (Ecole d' Eté Probabilités de Saint Flour XVII, July 1987), Lecture Notes in Math. 1362, 276-425 (1989).
- [10] EMERY, M. – *Stochastic Calculus in Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [11] HENRIQUE BURSZTYN E LEONARDO MACARINI – *Introdução à geometria simplética*, XIV Escola de Geometria Diferencial. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2006.
- [12] HSU, E.P. – *Stochastic Analysis on Manifolds*, Vol.38. Graduate Studies in Mathematics, 2002.
- [13] P. IMKELLER AND C. LEDERER – *The cohomology of stochastic and random differential equations, and local linearization of stochastic flows* , Stochastics and Dynamics, Vol.2, No.2 (2002) 131-159.
- [14] KOBAYASHI, S. AND NOMIZU, K. – *Foundations of Differential Geometry*, Vol.1. Interscience Publishers, 1969.
- [15] KOBAYASHI, S. – *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer-Verlag, 1972.
- [16] H. KUNITA – *Stochastic Differential Equations and Stochastic Flows of Diffeomorphisms*, Lecture Notes in Math., (1097) 143-303.
- [17] M. LIAO – *Decomposition of stochastic flows and Lyapunov exponents* , Probab. Theory Rel. Fields 117 (2000) 589-607.
- [18] M. LIAO – *Lyapunov exponents of stochastic flows* , Ann Probab 25, 1241-1256 (1997).
- [19] OKSENDAL, B. – *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, 2000.

- [20] OMORI, H. – *On the group of diffeomorphisms on a compact manifold*, Proc. Symp. Pure Math. XV, Amer. Math. Soc., 1970, 167-183.
- [21] PROTTER, P. – *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer, 1990.
- [22] REVUZ, D. AND YOR, M. – *Continuous Martingale and Brownian Motion*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [23] P. R. C. RUFFINO – *Decomposition of Stochastic Flows and Rotation Matrix*, Stochastics and Dynamics, Vol.2, No.1 (2002) 93-107.
- [24] STERNBERG, S. – *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall 1964.
- [25] SAN MARTIN, L. E MARQUES, M. S. F. – *Equações Diferenciais Estocásticas* (18º Colóquio Brasileiro de Matemática).