

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Dissertação de Mestrado

**Introdução à modelagem usando equações
diferenciais e aproximações usando
elementos finitos**

por

Hilkias Jordão de Souza

Mestrado Profissional em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof^a. Dr^a. Maria Cristina de Castro Cunha

Co-Orientador: Prof.Dr. Pêrsio L. de Almeida Barros

INTRODUÇÃO À MODELAGEM USANDO EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E
APROXIMAÇÕES USANDO ELEMENTOS FINITOS

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Hilkias Jordão de Souza** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 16 de janeiro de 2009.



Prof. Dr^a :. Maria Cristina de C. Cunha
Orientadora



Prof. Dr.: Pécio L. de Almeida Barros
Co-orientador

Banca Examinadora:

Prof^a. Dr^a:. Maria Cristina de Castro Cunha.

Prof. Dr.: Fermín S. Viloche Bazán.

Prof^a. Dr^a:. Valéria Abrão Podestá.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em MATEMÁTICA.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Miriam Cristina Alves- CRB8a 5069

Souza, Hilkias Jordão de
So89i Introdução à modelagem usando equações diferenciais e aproximações
usando elementos finitos/Hilkias Jordão de Souza-- Campinas, [S.P. : s.n.],
2009.

Orientadores : Maria Cristina de Castro Cunha; Pécio Leister de Almeida
Barros.

Trabalho final (mestrado profissional) - Universidade Estadual de
Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

I. Modelos matemáticos. 2. Equações diferenciais. 3. Método dos
elementos finitos.. I. Cunha, Maria Cristina de Castro. II. Barros, Pécio Leister
de Almeida. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Introduction to modeling using differential equations and approximations by
finite element.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Mathematical model. 2. Differential equations. 3. Finite
element method .

Área de concentração: Matemática aplicada

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Profa. Dra. Maria Cristina de Castro Cunha (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Fermín Sinfórano Viloche Bazán (UFSC)
Profa. Dra. Valéria Abrão Podestá (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 16/01/2009

Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 16 de janeiro de 2009 e aprovada

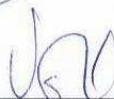
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). MARIA CRISTINA DE CASTRO CUNHA



Prof. (a). Dr (a). FERMIN SINFORIANO VILOCHE BAZAN



Prof. (a). Dr (a). VALÉRIA ABRÃO DE PODESTÁ

Dedico este trabalho, à minha esposa Lourdes Maria, às minhas filhas Flávia e Milena, ao meu filho Vitor Davi, e ao pequeno Rodrigo meu neto.

Agradecimentos

- 1 *Primeiramente, agradeço a Deus pela vida, pela família e pelos amigos.*
- 2 *À minha orientadora, Prof^ª. Dr^ª. Maria Cristina de Castro Cunha pela orientação, segurança e competência, dando-me estímulo e confiança ao longo deste trabalho.*
- 3 *À Prof^ª. Dr^ª. Sueli I. Rodrigues Costa Coordenadora do Mestrado Profissional em Matemática pela sua atitude amiga e motivadora.*
- 4 *A todos os Professores do Mestrado Profissional em Matemática promovido pela UNICAMP em Convênio com a UEMA e o CEFET-MA.*

Resumo

Este trabalho está dividido em três partes. Na primeira, apresentamos os conceitos de modelo e modelagem matemática, bem como a utilização da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem e finalizamos com um relato histórico das funções trigonométricas, visando mostrar modelos matemáticos utilizados por nossos antepassados. Na segunda parte apresentamos a construção de algumas equações diferenciais como modelos matemáticos para princípios físicos e desenvolvemos detalhadamente um modelo para placas elásticas. Na terceira parte comentamos as dificuldades de obtenção de soluções analíticas para equações diferenciais e apresentamos uma introdução ao método dos elementos finitos como ferramenta para construir soluções aproximadas de problemas bidimensionais.

Palavras-chave: Modelo matemático, Equações diferenciais, Método dos elementos finitos.

Abstract

This work is divided in three parts. In the first one, we are going to show the concepts of models and mathematical modeling, as well as the use of the mathematical modeling as a teaching and learning strategy and we are going to finish, with a historical report of the trigonometrical functions in order to show mathematical models used by our ancestors. In the second part, we are going to show a construction of some differential equations as mathematical models for physical principles and we are going to develop detailedly a model for elastic plates. In the third and last one, we are going to comment the difficulties of obtaining analytical solutions to differential equations and we are going to present an introduction to the finite element method as tool to construct solutions by approximation of two-dimensional problems.

Key words: Mathematical model, Differential equations, Finite element method.

Sumário

Introdução	1
1 MATEMÁTICA E MODELOS MATEMÁTICOS	3
1.1 O que é Matemática?	4
1.2 Modelos matemáticos	9
1.3 Modelagem matemática	11
1.4 Modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem no ensino superior	14
1.5 Como usar a modelagem matemática na sala de aula	17
1.6 Um pouco de história	17
1.6.1 As funções trigonométricas — trigonometria	18
2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM MODELOS PARA PRINCÍPIOS FÍSICOS	33
2.1 A corda vibrante	34
2.2 A membrana vibrante	36
2.3 Ondas em um meio elástico	39
2.4 O modelo de gravitação de Newton - potencial gravitacional	44
2.4.1 A lei de gravitação de Newton	44
2.4.2 O potencial gravitacional	46
2.4.3 A equação de Poisson	48
2.5 Modelo matemático da placa elástica - placa delgada	51
2.5.1 Hipóteses simplificadoras para construção do modelo de cálculo	51
2.5.2 Esforços, deformações e deslocamentos	52

2.5.3	Equação diferencial da placa em coordenadas cartesianas	58
2.5.4	Condições de contorno	60
2.5.5	Analogia da membrana	62
3	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS EM PROBLEMAS BIDIMEN-	
	SIONAIS	65
3.1	Considerações gerais	65
3.1.1	Solução analítica de uma equação diferencial parcial	66
3.1.2	Soluções por aproximações numéricas	71
3.2	Método dos elementos finitos - notícia histórica	72
3.3	Conceitos básicos do método dos elementos finitos	73
3.3.1	Discretização em elementos finitos	73
3.3.2	Equação associada a um elemento	74
3.3.3	Montagem ou reunião das equações dos elementos e solução	75
3.3.4	Convergência e estimativa do erro	75
3.4	Formulação do método dos elementos finitos	77
3.4.1	Formulação variacional	77
3.4.2	Formulação em elementos finitos	79
3.4.3	Funções de interpolação	81
3.4.4	Algoritmo-método dos elementos finitos	83
3.4.5	Considerações sobre a convergência, completude e conformidade do método dos elementos finitos	85
	Conclusão	93
	Referências Bibliográficas	95

Lista de Figuras

1.1	O “seqt” egípcio.	19
1.2	O Teorema de Ptolomeu.	22
1.3	O “Jiva” hindu.	23
1.4	O raio unitário de Al Battani.	24
1.5	Fórmula para calcular a tabela de Al Battani.	25
1.6	Correspondência entre um número real e seu seno através de um ponto do círculo trigonométrico.	30
2.1	Corda Vibrante	35
2.2	Membrana Vibrante	37
2.3	Ondas em um meio elástico - volume elementar	40
2.4	Partícula m sofre uma força de atração gravitacional na direção de M	45
2.5	Atração gravitacional produzida por um corpo extenso.	46
2.6	Superfície arbitrária com uma massa m no seu interior.	49
2.7	Esforços internos na superfície mediana do elemento.	53
2.8	Secção antes e depois da deflecção.	53
2.9	Distorções angulares.	55
2.10	Esforços atuantes em um elemento da membrana.	63
3.1	Representação de um círculo por elementos finitos. (a) Discretização por elementos finitos. (b) Elemento finito típico. (c) Erro de aproximação na fronteira.	74

3.2	Discretização por elementos finitos retangulares e triangulares, e convergência das soluções. (a) Malha de elementos retangulares. (b) Malha de elementos retangulares e triangulares. (c) Convergência da solução por elementos finitos.	76
3.3	Domínio Ω dividido em quatro elementos finitos retangulares Ω^e . Pontos nodais em cada elemento são quatro, num total de nove. Condições de contorno.	78
3.4	Nó $P_k = (x_i, y_j)$ no domínio Ω discretizado.	81
3.5	Elemento Finito número 1: Cálculo de $Q_l^{(e)}$	83

Introdução

É consenso que a Matemática, e em especial o Cálculo Diferencial e Integral, é componente importante nos Cursos Superiores nas áreas das ciências exatas e tecnologia. Nesse contexto as equações diferenciais têm um papel fundamental na física e na engenharia, onde aparecem naturalmente quando são utilizados os recursos do cálculo para estudar a aplicação de princípios físicos a problemas reais. O resultado são equações diferenciais como modelos matemáticos para os processos físicos em estudo.

A construção de modelos matemáticos é objeto da disciplina Modelagem Matemática que inserida no campo da Matemática Aplicada também trata da solução do problema matemático (equação diferencial) bem como da interpretação desta solução e verificação de sua validade. Por outro lado a Modelagem Matemática também pode ser vista como metodologia de aprendizagem no ensino. Em particular no ensino superior sua utilização é uma realidade reconhecida pedagogicamente.

Os aspectos comentados acima nos motivaram a trabalhar uma dissertação que relacionasse modelagem matemática e equações diferenciais. Dessa forma traçamos os seguintes objetivos:

1. apresentar um estudo sobre modelos e modelagem matemática, mostrando a modelagem como método de pesquisa e como estratégia de ensino e aprendizagem, bem como aspectos históricos de funções que se tornaram básicas por serem modelos matemáticos usados por nossos antepassados.
2. apresentar através de exemplos, equações diferenciais como modelos matemáticos obtidos a partir da utilização de princípios físicos em problemas reais de interesse nas ciências e na tecnologia.

3. apresentar uma introdução ao método dos elementos finitos para solução de problemas bidimensionais (equação de Poisson) como alternativa de solução por aproximação numérica, considerando as dificuldades existentes na obtenção de soluções analíticas.

Esperamos que o trabalho possa ser útil, tanto aos que ensinam quanto aos que trabalham na área de tecnologia.

MATEMÁTICA E MODELOS MATEMÁTICOS

“Sem saber o rumo o sonho é mera fantasia.”

(Francisco Gomes de Matos)

Neste capítulo inicial, procuramos construir uma resposta para uma pergunta que sempre está presente na mente de alunos e demais pessoas que necessitam estudar e/ou trabalhar com a Matemática: “O que é Matemática?”

A busca da resposta a essa pergunta torna-se importante, uma vez que a presente Dissertação integra o Programa do Mestrado Profissional, que se caracteriza por uma forte preocupação com o ensino de Matemática. Em particular, neste trabalho buscamos a elaboração e utilização de Modelos Matemáticos como recursos no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos e afins.

Assim sendo, tratamos também neste capítulo de conceituar e caracterizar o que são Modelos Matemáticos, bem como suas utilizações, tanto no ensino como na pesquisa, em matemática e em outras ciências. E por outro lado, focar aspectos históricos que revelam o uso de modelos matemáticos por estudiosos que contribuíram e contribuem na solução de problemas do cotidiano da humanidade, relacionados à matemática, às ciências e a tecnologia.

1.1 O que é Matemática?

“O Universo foi escrito no idioma da matemática e seus símbolos são triângulos, círculos e outras figuras geométricas sem as quais é humanamente impossível entender uma única palavra do seu texto.”

(Galileu Galilei, *Il Saggiatore* - 1623)

Para responder a pergunta: “O que é Matemática?,” consultamos a Enciclopédia Barsa [8] e encontramos: Conjunto de disciplinas lógicas que tratam das relações existentes entre grandezas e operações, reúne métodos pelos quais essas relações são dedutíveis de outras conhecidas ou supostas. É, em suma, a ciência das relações de grandeza, ordem, forma, espaço e continuidade.

Por outro lado, seguindo os passos de Richard Courant e Herbert Robbins em seu clássico livro “What is Mathematics?”[19], podemos entender que a Matemática, como expressão da mente, reflete a vontade ativa, a razão contemplativa e o desejo da perfeição estética. Seus elementos básicos são a lógica e a intuição, a análise e a construção, a generalidade e a individualidade. Mesmo que diferentes culturas e suas tradições possam dar ênfase a diferentes aspectos, que lhes pareçam importantes em face de suas necessidades, é somente através da interação recíproca destas antíteses e a busca incessante por sua síntese que traduzem a vida, a utilidade e o supremo valor da ciência Matemática.

Os primeiros registros que podemos considerar como matemática foram encontrados no Oriente onde por volta de 2000 a.C. os povos babilônios em suas placas cuneiformes colecionaram uma grande quantidade de material que nos dias de hoje seriam enquadrados como Álgebra Elementar. Entretanto, como ciência no sentido moderno, a Matemática somente vai aparecer na Grécia Antiga, especificamente nos séculos V e VI a.C., através de uma maior troca de informações entre os gregos e os povos do oriente, a partir do Império Persa e culminando no período posterior às conquistas de Alexandre, O Grande, que permitiu aos gregos incorporarem a matemática e a astronomia dos babilônios.

Como é do conhecimento geral nas ciências, o pensamento filosófico desenvolvia-se

sobremaneira na Grécia Antiga e portanto a Matemática foi logo submetida à discussão pelos filósofos gregos. Assim procedendo, os formuladores do pensamento grego, se envolveram e puderam ficar conscientes das dificuldades específicas associadas aos conceitos matemáticos de continuidade, movimento e infinito, bem como ao problema da medição de quantidades quaisquer, fixada uma unidade de comparação.

Nesse contexto, os pensadores gregos enfrentaram o desafio de forma corajosa e admirável, coroando-se o resultado com o trabalho de Eudóxio (408-347 a.C) do contínuo geométrico, trabalho esse que só encontrou paralelo mais de vinte séculos depois, com a moderna Teoria dos Números Irracionais. A matemática dedutiva e postulacional, iniciada na época de Eudóxio, encontrou nos Elementos de Euclides, sua consolidação.

Mesmo considerando que a metodologia teórica e postulacional da matemática grega continue sendo uma de suas facetas importantes e, de fato, tenha exercido grandiosa influência não apenas na Matemática mas também em outras ciências de um modo geral, não é possível afirmar que a utilização prática e conexão com a realidade vivencial, tiveram uma participação igualmente significativa na Matemática da Antiguidade. E cumpre ressaltar que em várias ocasiões, uma forma de abordagem mais flexível que a euclidiana era mais procurada. Os matemáticos gregos mergulharam na complexa geometria axiomática, o que pode ter acontecido em face às dificuldades que encontraram ao tratar com quantidades incomensuráveis. O resultado desse comportamento dos pensadores gregos é que por aproximadamente dois mil anos, aí incluída toda a Idade Média e seu obscurantismo, o fardo da tradição geométrica dos gregos não permitiu a evolução do conceito de número e da manipulação algébrica que constitui um dos fundamentos da ciência moderna.

Foi necessário então, um longo período de tempo e uma vagarosa fase de preparação até que na Matemática, e nas ciências de um modo geral, iniciou-se uma época de revolução fabulosa no século XVII, com a Geometria Analítica de René Descartes (1596-1650) e Pierre Fermat (1601-1665) e a invenção do Cálculo Diferencial e Integral de Newton (1643-1727) e Leibniz (1646- 1716). Ainda que a geometria grega, mantivesse um lugar de destaque, nos séculos XVII e XVIII a formulação enfaticamente axiomática e a dedução sistemática constantes no ideal grego foram abandonadas. Os novos construtores da Ciência Matemática,

consideravam aparentemente irrelevantes raciocínios logicamente precisos que se iniciavam com definições claras e sem ambigüidades e ainda axiomas simples e evidentes. Típico de gênios, em um notório processo de trabalho criativo e de adivinhação, onde a intuição resalta sobremaneira, segue-se o raciocínio lógico perfeito, combinado com um misticismo sem explicação e com uma segurança insofismável na capacidade sobre-humana do procedimento formal. Esses grandes homens da ciência, construíram um mundo matemático de inesgotável frutificação.

Após as grandes conquistas da Matemática, alcançadas nos séculos XVII e XVIII, paulatinamente ao ímpeto dos avanços vai amadurecendo a carência de uma autocrítica, ou seja, de uma avaliação criteriosa das conquistas já materializadas. Segue-se então, impulsionada pelos ideais da Revolução Francesa que delinearam a necessidade de consolidação e o desejo de maior qualidade e segurança na extensão de conhecimentos mais avançados, a realização de uma revisão dos fundamentos sobre os quais estava assentada a nova Matemática, e em especial, os fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral. Dessa forma, o século XIX ficou marcado, tanto por novos e importantes avanços na Matemática, quanto pela revisão criteriosa dos fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral, revisão essa em que se destaca o nome do matemático francês Cauchy (1789-1857) e que nos permite ainda dizer que o século XIX trouxe de volta para a Matemática o bem sucedido ideal clássico da precisão e da demonstração rigorosa caracterizando-se por avanços para a lógica pura e também para a abstração.

Observando o atual momento, percebemos que a Matemática continua evoluindo conforme os ideais clássicos da precisão e das demonstrações rigorosas. Confirmando esta observação, podemos citar a recente demonstração (1995) do Último Teorema de Fermat pelo matemático britânico Andrew Wiles (1953), que tendo apresentado sua demonstração inicial, após exame pela Comissão nomeada para analisar e dar parecer quanto a sua perfeição, teve que efetuar correções, que demandaram dois anos de trabalhos, até que fosse obtida a demonstração precisa e rigorosa que resolveu o problema que desafiou grandes matemáticos por aproximadamente três séculos e meio.

Registramos ainda que na atualidade vivemos um período de estreita relação entre

a Matemática e as demais ciências em face das necessidades tecnológicas e de mercado que norteiam as pesquisas científicas nos dias atuais. As simplificações alcançadas com fundamento na compreensão mais nítida dos objetivos da Matemática como Ciência, torna possível dominar a teoria matemática sem perder de vista as aplicações em outras ciências e na tecnologia, tendo como objetivo o bem da humanidade. O estabelecimento definitivo da união orgânica entre a Ciência pura e aplicada e um bom equilíbrio entre a generalidade abstrata e a individualidade concreta, pode determinar muito bem, a finalidade suprema da Matemática no presente e no futuro.

Vamos agora considerar alguns aspectos relacionados com a Filosofia na Matemática. Sempre que se lança um olhar filosófico, tem-se a impressão de que existe um grande perigo na ênfase excessiva, que se sobrepõe ao caráter postulacional-dedutivo da Matemática. Não resta dúvida que o elemento de invenção construtiva de direcionar e motivar a intuição, tende a fugir de qualquer formulação filosófica. Entretanto ela se mantém como o cerne de qualquer realização matemática, mesmo nos campos mais abstratos estudados. Se na pesquisa matemática a forma dedutiva consolidada é o objetivo final, a intuição natural e a conseqüente construção podem ser consideradas as forças propulsoras do processo criativo. Para muitos vale a assertiva de que a Matemática nada mais é do que um sistema de conclusões extraídas de definições e postulados que podem ser criados de forma consistente porém livremente pelos matemáticos; isto em si, constitui uma perigosa ameaça à vida da Ciência como um todo. Se essa concepção fosse verdade, a Ciência Matemática não teria nenhum atrativo que motivasse as mentes brilhantes. Seria simplesmente um jogo de definições, regras e silogismos, sem atrativo motivacional, objetivo ou alvo. Trata-se de uma verdade parcial a convicção de que o intelecto humano, pode por mero capricho ou desejo, construir sistemas postulacionais significativos relacionados com a realidade universal. Somente regida pela ordem e disciplina do compromisso com o todo orgânico pode a mente humana livre obter resultados de valor científico.

É claro que o aspecto contemplativo da análise lógica não corresponde ao todo da Matemática; entretanto ele tem contribuído para uma compreensão mais aprofundada dos fatos matemáticos e de sua interdependência, e ainda uma compreensão mais nítida da

essência dos conceitos matemáticos, característica de um comportamento científico universal.

Independente de qual seja nossa corrente filosófica, para todas as finalidades da observação científica de um objeto em estudo, este se esgota, no que tange às possíveis relações existentes entre os pares: objeto e observador ou objeto e instrumento de medição. Não resta dúvida que a simples percepção de um fato, não constitui em si, conhecimento ou perspicácia; é necessária coordenação e interpretação relativa a alguma entidade subjacente; uma “coisa em si”, que não pode ser observada fisicamente de forma direta, pertence à metafísica. Porém, no âmbito do procedimento científico, é importante eliminar todos os elementos de caráter metafísico, e considerar sempre fatos observáveis, como recursos últimos de noções, conceitos e construções. A decisão de abandonar o objetivo de compreender “o objeto em si”, de descobrir e saber “a verdade absoluta”, de decodificar a essência mais íntima do universo, pode ser uma sofrida decepção para muitos entusiastas menos avisados, mas de fato essa atitude representa uma das mais significativas e frutíferas revoluções no pensamento moderno. A Matemática e as ciências atuais não se envolvem mais com o porquê das coisas; elas cuidam de obter respostas às perguntas: “o que acontece?,” “e como acontece?,” deixando para a filosofia os problemas gerais da origem dos fatos e fenômenos, ou seja, deixa para a filosofia a pesquisa do porquê das coisas.

Através dos tempos os matemáticos têm considerado seus objetos, tais como números, pontos, etc., como coisas em si próprias. Isto porque estas entidades sempre tinham desafiado tentativas de uma descrição coerente e adequada. Manifestou-se então no século XIX a forte convicção de que a questão do significado destes objetos como coisas em si não fazia sentido dentro do universo da Matemática ou mesmo nas ciências de um modo geral. As únicas assertivas relativas a eles não dizem respeito à realidade, elas traduzem apenas as inter-relações entre “objetos indefinidos” matematicamente e as regras governando as operações com eles. O que pontos, retas, números, “efetivamente” são, não precisa ser discutido na Matemática. O que de fato é importante e o que corresponde a fatos “verificáveis” é a estrutura e as relações entre os objetos: que dois pontos determinam uma reta, que números se combinam de acordo com certas regras para formar outros números, etc. Decorre então uma percepção muito clara de que não são necessários os conceitos da chamada matemá-

tica elementar, o que tem sido um dos mais importantes, significativos e úteis resultados do desenvolvimento postulacional moderno.

A Matemática e a Ciência têm avançado de maneira fantástica nos dias atuais, porque mentes brilhantes e criativas são capazes de esquecer crenças filosóficas dogmáticas sempre que o apego a elas não permite realizações construtivas; prevalece o senso objetivo e prático. Portanto, podemos dizer, tanto para os mais eruditos quanto para os leigos, que não é a filosofia, mas a experiência ativa na própria matemática que pode responder à questão: “O que é Matemática?”

1.2 Modelos matemáticos

A palavra modelagem, conforme os dicionários, traduz a ação de modelar, ou seja, traçar, delinear, conformar, dar forma a um objeto que se deseja reproduzir por imitação ou ainda a representação em escala reduzida de um objeto, que se pretenda analisar, interpretar ou ainda construir em tamanho real. A esse objeto reduzido, damos o nome genérico de modelo. Porém, as palavras acima expressas, referem-se a um modelo qualquer. Entretanto, estamos interessados em Modelos Matemáticos. Segue-se então a pergunta: o que é um Modelo Matemático?

Segundo Santaella [36] a Matemática como ciência, se utiliza da observação, posto que é capaz de construir objetos ideais na imaginação. Isso, “de acordo com preceitos abstratos, passando então, a observar esses objetos imaginários, para neles encontrar relações entre as partes que não estavam especificadas no preceito da construção”.

A observação não é um recurso exclusivo da Matemática, pois a Ciência de um modo geral se utiliza da observação, e o faz por intermédio de modelos, que representam a realidade do fenômeno.

Subsiste, portanto, à noção de modelo, a idéia de analogia, a saber, certa correlação de forma e estrutura entre o modelo proposto e o fenômeno em estudo. Sob a ótica do estudioso e pesquisador, naquele momento de caracterização, entretanto, sempre existe uma diferença entre a observação e a realidade, o que é traduzido através da expressa equivalência

parcial entre entidades e aspectos, que de um modo geral podem parecer distintos. Fica claro que construir analogias é um processo que tem como objetivo comparar entidades e aspectos que guardam, de alguma maneira equivalência. O procedimento envolve a busca de semelhanças bem definidas entre o modelo e os objetos, entre os fenômenos observados no cotidiano e sua caracterização através de relações matemáticas, seja com auxílio de gráficos e diagramas, seja com auxílio de uma equação que descreve a trajetória de um objeto sob a ação do campo gravitacional terrestre, por exemplo uma trajetória balística, definindo uma correspondência entre uma situação, ou estado, e uma abordagem em linguagem formal que procura caracterizar esses fenômenos.

Para o professor Bassanezi [2], um modelo é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. A estas primeiras considerações, acrescenta: “Quando se procura refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender, ou de agir sobre ela - o processo usual é selecionar no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial : o modelo.”

Podemos assim, perceber uma importante e fundamental característica de um modelo: evidenciar de maneira aproximadamente formal, conforme leis e normatização da representação pictórica, geométrica, espacial etc., as várias relações, muitas vezes não percebidas pelo observador, entre as diversas partes do objeto em estudo a ser representado.

Convém ainda destacar, que os modelos são elaborados em conformidade com os fenômenos ou situações analisadas, podendo ser classificados considerando-se o tipo de matemática utilizada. Assim, ao estudar os alvéolos das abelhas e considerar a forma geométrica hexagonal para abordar o problema, aparece o modelo dito estático. Por outro lado, para estudar o crescimento populacional de uma cultura de bactérias, são utilizados os modelos ditos dinâmicos. Um modelo é dito dinâmico, se é capaz de simular variações de estágios do fenômeno; caso contrário é dito estático.

1.3 Modelagem matemática

Volvendo o olhar para a evolução da ciência e da tecnologia, podemos observar que até o século XIX, a Matemática manteve-se mais estreitamente ligada à física e à engenharia em suas várias áreas de atuação, participando de forma decisiva e contínua na elaboração de aplicações da Matemática ao estudo e resolução de problemas desses campos da Ciência e da Tecnologia. A partir do século XX a Matemática Aplicada se caracteriza por duas atividades importantes e essenciais na evolução do conhecimento humano nas mais diversas áreas: a Modelagem Matemática e o emprego de métodos e técnicas matemáticas.

A Matemática Pura e seu abstratismo se utilizada sem a conseqüente dedução matemática das conseqüências e comparações com as observações é apenas uma parte do trabalho. As técnicas e métodos matemáticos, assim utilizadas, podem produzir resultados estéreis Kapur [27]. Reforçando essa afirmativa, encontramos em McLone [30], a observação de que a grande maioria dos estudantes de Matemática são submetidos ao desenvolvimento de teorias com elevado grau de formalização em campos ou áreas bem particulares e ao domínio de um grande número de métodos e técnicas matemáticas. Decorre então que o estudante não tem, por exemplo, a oportunidade de ver como Newton pesquisou, trabalhou e desenvolveu a gravitação universal que hoje constitui uma teoria consolidada. E ainda nessa linha de raciocínio constatamos que o estudante não tem a sua atenção dirigida para a importância desse modelo matemático na solução de problemas práticos, que serão enfrentados por ele no futuro quando já profissional. Dessa maneira, permanece a impressão de que a aplicação da Matemática se reduz basicamente em encontrar e aplicar fórmulas adequadas para encontrar determinadas respostas.

Do ponto de vista de Kapur [27] a modelagem matemática é considerada uma arte e portanto, deve ser ensinada e aprendida como arte. Dessa maneira a pedagogia da modelagem matemática deve encontrar sua fonte de inspiração na pedagogia das nobres Artes e da Música, muito mais do que nas ciências naturais como a Física e a Química, por exemplo. Tudo indica que a Música e a Pintura, entre outras, parecem exigir, mais arte, mais sensibilidade e mais interpretação que a Física e a Química. Ainda nessa abordagem, o autor

citado, destaca, que a modelagem matemática é aprendida através da ação, ou seja, através da construção de modelos matemáticos e da aplicação dedicada na busca da melhoria e aperfeiçoamento desses modelos. Somente a experiência e a prática podem conduzir à confiança na construção de modelos. A partir dos mais simples e grosseiros modelos, adquirimos a qualidade para a prática da modelagem matemática.

A Paleontologia nos revela, que a modelagem matemática tem sido praticada desde a pré-história. O homem vive cada instante da vida na busca constante de conhecer e compreender o meio ambiente ao seu redor. Para explorá-lo e conhecê-lo, o homem lança mão de suas faculdades físicas e mentais, de seus instintos e de sua razão. Ao raciocinar, refletir e pensar, o homem foi capaz de questionar sobre a natureza e seus fenômenos naturais como a chuva, o vento, as frentes frias, os terremotos, a eletricidade, a radiação e outros.

O homem começou a desenvolver sua ciência na medida em que procurou conhecer esses fenômenos. Entretanto essa ciência estava sempre associada ao contexto do mundo da época, bem como dos aspectos social, político e religioso de cada povo. Dessa forma, ciências como a Matemática e a Astronomia, alcançaram maior desenvolvimento.

A Matemática recebendo contribuições desde a antiguidade, tem um progresso decisivo e culminante com a invenção do Cálculo Diferencial e Integral por Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716), o que determinou uma verdadeira revolução na Ciência de tal forma que o seu estudo e desenvolvimento veio a constituir-se no principal elemento propulsor dos progressos alcançados pela matemática moderna [46].

Desta maneira, a Matemática tornou-se uma ferramenta poderosa a ser usada pelo homem no estudo da natureza e de seus fenômenos. Usando esse conhecimento, o homem passou a agir basicamente de duas maneiras: num primeiro momento, buscando atenuar os efeitos destrutivos de fenômenos tais com chuvas, frentes frias, ventos, furacões, terremotos, maremotos etc.; e num segundo momento, a faculdade do ser humano de pensar, raciocinar, questionar e criar, associadas ao ímpeto de investigar, bem como a disponibilidade da ferramenta matemática já desenvolvida, possibilitando ao homem explorar seu meio ambiente, modelando-o para melhor conhecê-lo e dele melhor utilizar-se.

A modelagem matemática, constitui-se portanto de um conjunto de regras e pro-

cedimentos, cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar matematicamente os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, auxiliando-o a fazer previsões e a tomar decisões.

A modelagem matemática “consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” [2]. Ela permite a realização de previsões e tendências, e é eficiente a partir do momento da tomada de consciência de que estamos trabalhando sobre representações de um sistema ou parte dele. É um processo dinâmico, onde, partindo-se de um problema real associado a um conjunto de hipóteses é obtido um modelo que forneça possíveis soluções para o problema em estudo.

As últimas décadas têm se caracterizado por um crescente fluxo de interesse em modelagem matemática, motivado por uma nova identidade e uma nova unidade à Matemática Aplicada, enfatizando os campos da indústria em geral e o segmento de armamentos, possibilitando oportunidades de trabalho para matemáticos com habilidades em modelagem matemática.

Como método de pesquisa científica, a disciplina modelagem matemática, tem uma orientação metodológica a ser utilizada. Com essa finalidade, foram desenvolvidos vários esquemas descrevendo as etapas pertinentes a um processo de modelagem matemática. Um esquema, que frequentemente é encontrado na literatura existente entre as quais citamos [3], [4], [26] é composto pelas seguintes etapas:

1ª - Definição do problema:

A partir de uma situação real é identificado o problema a ser estudado e devemos obter os dados necessários para sua modelagem.

2ª - Simplificação e formulação de hipóteses:

Os dados são examinados e selecionados de modo que preservem as características do problema visando uma simplificação.

3ª - Dedução do modelo matemático:

Nesta etapa, substituímos o problema por uma descrição matemática coerente.

4ª - Resolução do problema matemático:

É a fase em que utilizamos métodos matemáticos na busca da solução do problema formulado.

5ª - Validação:

Nesta fase a aceitação do modelo proposto é analisada. Assim, os dados reais são comparados com os dados fornecidos pelo modelo. Caso não haja compatibilidade devemos retornar à formulação de hipóteses e simplificações e reiniciar o processo.

6ª - Aplicação do modelo:

Caso seja considerado válido, o modelo é utilizado para compreender, explicar, analisar, prever ou decidir sobre a realidade em estudo. Esta é a fase que possibilita o intervir, o exercitar, o manejar situações associadas ao problema estudado.

O esquema acima apresentado e suas etapas, não representam uma receita rígida a ser seguida, mas estabelece uma seqüência de procedimentos norteadores, que podem proporcionar a obtenção de melhores resultados no estudo de problemas por meio da modelagem matemática.

1.4 Modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem no ensino superior

A utilização da modelagem matemática no contexto do ensino da Matemática exige algumas mudanças no que diz respeito à organização e objetivos. A essência de um processo de modelagem matemática, está na transposição de um problema real para um universo matemático. Se o objetivo é o ensino e o processo de construção e utilização de modelos se desenvolve em sala de aula, devemos considerar especial atenção ao cenário pedagógico, isto é, aos aspectos relacionados ao ensino e à matemática integrante do currículo estabelecido [5].

A modelagem matemática tem seu lugar reconhecido como alternativa pedagógica na condução do processo de ensino e aprendizagem em cursos regulares submetidos a programas e cronogramas bem determinados [6].

Para justificar e sugerir a criação de um ambiente que inclua atividades de modela-

1.4. MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM NO ENSINO

gem matemática na estrutura curricular de Matemática podemos citar os seguintes argumentos:

1º - Certificação do papel da Matemática na sociedade:

A Matemática, como ciência exata, tem sido bastante utilizada como suporte para apresentar sugestões e propostas de soluções a vários problemas da sociedade. É reconhecida a importância do seu papel, em face de dados estatísticos e outros resultados numéricos que fundamentam argumentações para tomada de decisões. Esta capacidade da Matemática de deter argumentos para decisão é subsidiada pelo que se conhece por “ideologia da certeza” [7]. Depreendemos então, ser importante que todo cidadão reconheça o papel da Matemática na vida, tanto nos aspectos profissionais quanto sociais. Assim, encontramos em [32], o seguinte destaque “se a Matemática é tão importante na sociedade, parece natural que no ensino da Matemática se mostre o porquê e como”.

2º - Desenvolvimento de qualidades sociais:

As divergências e choques de interesses decorrentes da interação dos indivíduos pode gerar benefícios mútuos às pessoas que desfrutam de um mesmo patamar de desenvolvimento cognitivo mas que avaliam uma determinada situação com perspectivas diferentes. As atividades desenvolvidas em grupos permitem o desenvolvimento do senso de responsabilidade, a auto-estima, a cooperação e a capacidade de crítica. Para esses grupos são valorizadas qualidades sociais, tais como: capacidade de negociar, de comunicar-se na linguagem do grupo, de participar responsabilidades e de trabalhar em equipe. Qualidades essas proporcionadas num ambiente de modelagem matemática [22].

3º - Incorporação de conceitos matemáticos e suas aplicações:

As grandes dificuldades registradas no aprendizado da Matemática mostram que esse aspecto ultrapassa os limites do ensino fundamental e ensino médio, chegando ao ensino superior. Essa ocorrência determina um elevado grau de desistência e reprovação nas disciplinas de Matemática e de outras que exigem pré-requisitos de Matemática. Observamos também que se o aluno, durante sua vida acadêmica não teve a possibilidade de participar de forma significativa da elaboração e solução de situações problemas, fazendo pesquisa e coleta de dados, sugerindo hipóteses, encontrando a solução, este provavelmente encontrará em sua vida profissional, grande dificuldade de solucionar os problemas que lhe forem apresentados.

Dessa maneira, é necessária uma educação em todos os níveis, que possibilite e incentive a resolução de problemas, mostrando de forma clara e objetiva, onde e como se aplica a Matemática.

A utilização de conceitos matemáticos em situações do dia-a-dia pré-supõe que essa habilitação seja desenvolvida e que o professor deva trabalhar em sua sala de aula com “verdadeiras situações problemas” [42]. Uma atividade de modelagem matemática, pode dar suporte aos alunos na aquisição e compreensão dos conteúdos matemáticos, bem como promover atividades e habilidades, que estimulem a criatividade e a solução de problemas [31]. A apresentação de novos conceitos a partir de problemas reais, pode ser uma base concreta para desenvolver os conceitos, bem como representar relevante papel motivador.

4º- Desenvolvimento do conhecimento reflexivo :

“A Matemática está formatando nossa sociedade” [39]. Acrescenta o autor que a Matemática, como disciplina, intervem na realidade quando proporciona não apenas discussões de fenômenos mas possibilita também a construção de modelos para a evolução de comportamentos. Afirma ainda que nós, seres humanos, agimos de acordo com a Matemática, tornando-se necessário desenvolver uma capacidade crítica nos alunos que torne possível lidar com o desenvolvimento social e tecnológico que estamos presenciando nos dias atuais. Essa forma particular de saber, está relacionada com o conhecimento reflexivo que se refere “à competência de refletir sobre o uso da Matemática e avaliá-lo” [40].

5º- Processos cognitivos desenvolvidos pelos alunos:

“O conhecimento construído através de modelos é um saber contextualizado e com significado” [25]. O aluno é agente do processo de construção, onde observa, coleta dados, procura soluções e toma decisões. Se o conceito for construído pelo aluno, será facilmente resgatado, quando necessário. Alguns aspectos cognitivos foram desenvolvidos por um grupo de alunos e observados [14]: compreensão de situações extra matemáticas, atribuição de significado aos aspectos matemáticos, aplicação de conhecimentos, introdução de novos conceitos e elaboração de estratégias próprias.

1.5 Como usar a modelagem matemática na sala de aula

Em um ambiente de ensino e aprendizagem os trabalhos de modelagem matemática podem ser desenvolvidos de forma gradativa com os alunos, respeitando diferentes momentos [23]:

1º momento:

Abordar com todos os alunos as situações que estão em estudo considerando os aspectos relacionados à dedução, utilização, análise e exploração de um modelo matemático a partir de uma situação problema já estabelecida.

2º momento:

O professor sugere uma situação problema já estabelecida, juntamente com um conjunto de informações e os alunos realizam a formulação de hipóteses e a dedução do modelo durante uma investigação e finalmente validam o modelo encontrado para o problema em estudo.

3º momento:

Os alunos, já divididos em grupos, são incentivados a conduzir um processo de modelagem a partir de uma situação problema por eles escolhida, com assessoria do professor. Uma vez estabelecido o problema, os alunos procedem a coleta dos dados e informações necessárias para tornar possível uma solução. O processo de validação do modelo possibilita ao aluno analisar, tomar decisões, discutir, descobrir, explorar, experimentar o novo [23].

Esta forma de encaminhar as atividades de modelagem matemática em sala de aula, embora não constitua uma prescrição rigorosa, tem-se mostrado bastante adequada na prática em diferentes níveis de ensino. Mesmo em cursos regulares, com limitação de tempo e conteúdos programáticos, é possível desenvolver as atividades de modelagem matemática e proporcionar grande eficiência no processo de aprendizagem dos alunos [24].

1.6 Um pouco de história

Vamos falar de funções importantes da matemática que se tornaram básicas por serem modelos usados por nossos antepassados.

A noção de função foi construída e aperfeiçoada ao longo de vários séculos. É possível detectar sinais de que os babilônios já teriam uma idéia ainda que vaga de função através das tábuas de quadrados, cubos e de raízes quadradas utilizadas por aquele povo na antiguidade.

As funções matemáticas que hoje utilizamos foram desenvolvidas a partir da solução de problemas práticos. Assim as funções polinomiais surgiram a partir das equações algébricas construídas para solucionar problemas que conhecemos como do primeiro, segundo e terceiro graus. Problemas financeiros ligados a juros e amortizações conduziram às funções logarítmicas e exponenciais. As funções trigonométricas tiveram sua origem em problemas de astronomia e agrimensura.

Para Leibniz (1646-1716), o primeiro a utilizar a palavra “função” e para os matemáticos do século XVIII, a idéia de uma relação funcional estava mas ou menos identificada com a existência de uma fórmula matemática simples expressando a natureza exata da relação. Esse conceito mostrou ser demasiadamente limitado para as exigências da Física Matemática, e a idéia de função foi submetida a um longo processo de generalização e esclarecimento até atingir a forma atualmente utilizada.

Muitas funções são básicas na Matemática e não seria possível tratar de todas nestas poucas páginas. Por sua importância selecionamos as funções trigonométricas, que ilustram como a modelagem matemática esteve presente em seu desenvolvimento.

1.6.1 As funções trigonométricas — trigonometria

A trigonometria como ciência analítica estudada atualmente teve sua origem no século XVII, após o desenvolvimento do simbolismo algébrico. Se levarmos em consideração a Geometria associada à Astronomia, suas origens remontarão aos trabalhos de Hiparco no século II a.C., embora existam registros anteriores de seu uso. Por outro lado, se considerarmos como “medidas no triângulo”, sua origem será deslocada para o terceiro milênio antes de Cristo.

O estudo da história das funções trigonométricas, permite também observar o surgimento e o progresso da Álgebra e da Análise, áreas da Matemática nela contidas de forma embrionária. Podemos destacar que a trigonometria, mais do que qualquer outra área da Ma-

temática, desenvolveu-se no mundo antigo a partir de necessidades práticas, principalmente relacionadas à agrimensura, à astronomia e à navegação.

Origens da trigonometria

Os rudimentos da trigonometria surgiram no Egito e na Babilônia a partir do cálculo de razões entre números e entre medidas de lados de triângulos semelhantes.

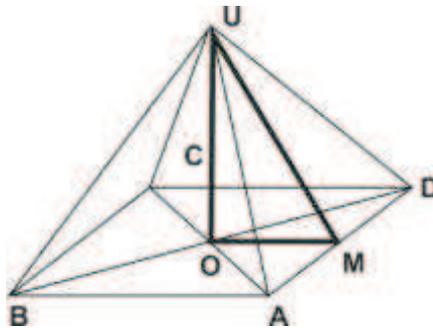


Figura 1.1: O “seqt” egípcio.

Utilizado no Egito antigo, isto pode ser conhecido graças ao papiro Ahmes, também conhecido como papiro Rhind de 1650 a.C., que contém 84 problemas, dos quais quatro citam o “seqt” de um ângulo, reconhecido hoje como a cotangente do ângulo formado pelo plano da base de uma pirâmide com o plano de uma face lateral. Na construção de uma pirâmide egípcia, era essencial manter constante a inclinação das faces laterais, fato que levou os construtores e matemáticos egípcios a introduzirem o conceito de “seqt” de um ângulo. Além da utilização da trigonometria na medição e construção de pirâmides, surgiu no Egito por volta de 1500 a.C., a idéia de relacionar as sombras de uma vareta vertical com sequências de números, associando seus comprimentos com as horas do dia: o relógio de sol. As idéias dos construtores do relógio de sol para medir o tempo e as necessidades práticas de medir alturas e distâncias, fundamentaram posteriormente a construção das funções trigonométricas tangente e cotangente.

O povo babilônio alcançou um grande desenvolvimento na Astronomia que exerceu uma forte influência em várias outras civilizações posteriores. Eles construíram no século

XXVIII a.C., durante o reinado de Sargão um calendário astrológico que chegou até os dias de hoje [41], atestando a validade dos modelos elaborados por estes nossos antepassados. Na China foram encontrados registros de uma trigonometria primitiva por volta do ano 1110 a.C., época do imperador Chóu-pei Suan King. Eram utilizados triângulos para calcular distâncias e existem evidências de que conheciam as razões trigonométricas, o conceito de ângulo e de como medi-los.

A trigonometria dos gregos

A primeira contribuição documentada dos gregos para a Trigonometria surgiu por volta 180 a.C., quando Hipsícles, possivelmente influenciado pelos babilônios, dividiu o zodíaco em 360 partes. Essa idéia foi depois generalizada para um círculo qualquer por Hiparco (180-125 a.C.) [21].

Usando semelhança de triângulos e razões trigonométricas, Eratóstenes (276-196 a.C.), realizou a mais notável medida na antiguidade para a circunferência terrestre, realização que levou o Sábio de Cirene a perceber a necessidade de relações mais sistemáticas entre ângulos e cordas.

Um marco na história da trigonometria e das funções trigonométricas aconteceu na segunda metade do século II a.C., quando Hiparco, inspirado nos conhecimentos dos babilônios dividiu a circunferência em 360 partes e a cada parte atribuiu o nome de arco de um grau. Ele também dividiu cada arco de um grau em 60 partes, obtendo o arco de um minuto. Sua trigonometria estava fundamentada em uma única “função”, na qual a cada arco de circunferência de raio arbitrário, era associada a respectiva corda. Hiparco construiu o que foi possivelmente a primeira tábua trigonométrica com os valores das cordas de uma série de arcos de 0° a 180° com auxílio de interpolação linear. Também observou que para um dado círculo, a razão arco/corda diminui quando o arco diminui desde 180° até 0° e resolveu associar a cada corda de um arco, o ângulo central correspondente, o que significou um grande avanço para a Astronomia, sendo por isso agraciado com o título de “Pai da

Trigonometria”. Em linguagem atual esse resultado corresponde a:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1;$$

Segue-se então, o surgimento da obra mais importante da trigonometria da antiguidade no século II em Alexandria, “Syntaxis Mathemática”, conhecida como Almagesto, em árabe “A Maior”, do grande Cláudio Ptolomeu. O Almagesto é uma referência, um Modelo de Astronomia que perdurou até o século XVI, quando Nicolau Copernico estabeleceu o Modelo Heliocêntrico e alavancou a astronomia moderna e a mecânica celeste. Ptolomeu no seu Almagesto compilou e sintetizou todo conhecimento disponível em sua época e em especial, os trabalhos de Hiparco. O Almagesto sobreviveu e por isso temos suas tabelas trigonométricas e também uma exposição dos modelos e métodos usados por Ptolomeu que são importantes, pois muito conhecimento daquela época foi perdido.

O trabalho de Ptolomeu não contém tabelas das “funções” seno e cosseno, mais sim, a função corda do arco x , embora naturalmente estes termos não apareçam em seus escritos. A “função” corda do arco x , era definida como sendo o comprimento da corda que corresponde a um arco de x graus em um círculo de raio 60. A tabela tinha três colunas, a primeira para o arco x , a segunda para o comprimento da corda correspondente e a terceira para a variação média da corda por minuto, usada para interpolações.

Encontramos no Almagesto:

1 - Uma tabela com ângulos de meio em meio grau, de 0° a 180° , mais completa que a calculada por Hiparco.

2 - Uso da base sexagesimal, circunferência dividida em 360 graus e o raio em 60 partes e frações decimais, não só para expressar ângulos, mas para qualquer tipo de cálculo, onde aplicável.

3 - O teorema, hoje conhecido como teorema de Ptolomeu, que tem o seguinte enunciado: “Para todo quadrilátero convexo inscrito em um círculo, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos”.

Com auxílio desse teorema e operações envolvendo as cordas dos arcos, Ptolomeu foi capaz de obter o que vamos chamar de “relações” equivalentes às conhecidas fórmulas

para soma e subtração de arcos, ou seja, $\text{sen}(a + b)$ e $\text{sen}(a - b)$. Em particular, utilizou a fórmula para a corda da diferença de dois arcos para calcular sua tábua trigonométrica.

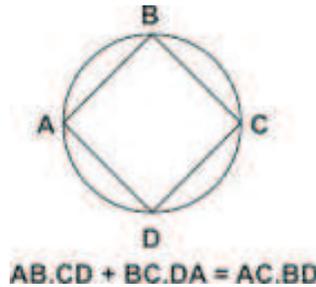


Figura 1.2: O Teorema de Ptolomeu.

4 - Avaliação do seno do arco metade, também com auxílio de cordas.

Analisando o trabalho de Ptolomeu no *Almagesto*, podemos reconhecer o valor de sua contribuição para a ciência, na medida em que através de seus modelos astronômicos e das ferramentas matemáticas disponíveis, entre elas a Trigonometria, ele mostrou que uma descrição matemática dos fenômenos naturais é possível, desejável e capaz de fornecer previsões confiáveis [1].

Tratando das funções trigonométricas em suas origens, sucintamente veremos o desenvolvimento do conceito de função. Os gregos não desenvolveram o conceito de função propriamente dito, porém com Aristóteles (384-322 a.C.) aparecem idéias de quantidades variáveis e nos trabalhos de Arquimedes de Siracusa (287-212a.C.) e Apolônio de Pérgamo (262-190a.C.) sobre as cônicas, encontramos o conceito de “Sympton” de uma curva, que é definido como a condição para que um ponto pertencesse à cônica, o que evidencia de certa forma a idéia de função. A Matemática na antiguidade clássica não foi capaz de estabelecer a idéia geral de quantidade variável ou de função; em toda metodologia e na manipulação de quantidades não havia preocupação com a generalização. Na astronomia por exemplo, o objetivo era representar em tabelas relações entre quantidades discretas.

A trigonometria do povo hindu

Após a queda do império romano, a Índia passou a centralizar a cultura no mundo de então, quando notáveis contribuições foram incorporadas à trigonometria através de textos

denominados Siddhanta, cujo significado é sistemas de astronomia. Chegou até os nossos dias o Surya Siddhanta, sistemas do sol, datado de aproximadamente 400 d.C. Trata-se de um trabalho em versos com poucos esclarecimentos e nenhuma demonstração, não necessárias, pois reza a tradição, que foi escrito por um Deus [9].

O grande significado do Surya Siddhanta para a Matemática de hoje é que ele criou novos caminhos para a Trigonometria por não adotar o modelo de Ptolomeu, que relacionava as cordas de um círculo com os ângulos centrais correspondentes. Para fazer aplicações da “função” corda na astronomia era sempre necessário duplicar o arco antes de usá-lo na tábua de cordas. Portanto, era mais conveniente dispor de uma tábua na qual o próprio arco desempenhava o papel de variável independente. No Surya Siddhanta, a relação utilizada chamada de “Jiva”, era calculada entre a metade da corda e a metade do ângulo central correspondente. Essa forma de abordar o problema possibilitou a visualização de um triângulo retângulo na circunferência como mostramos na figura abaixo.

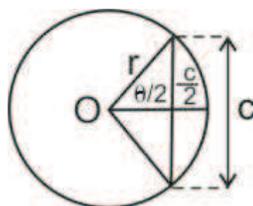


Figura 1.3: O “Jiva” hindu.

Os hindus definiam o “Jiva” como sendo a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa:

$$\text{jiva} \frac{\theta}{2} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{sen} \frac{\theta}{2} = \frac{c/2}{r} = \frac{c}{2r} = \frac{1}{2r} \text{crd} \theta.$$

A metade da corda dividida pelo raio do círculo é o seno da metade do arco (ou da metade do ângulo central correspondente a todo o arco). Com a contribuição do povo hindu as principais “funções” trigonométricas foram introduzidas na Matemática e os métodos de tabulação se aperfeiçoaram, em particular interpolações quadrática e linear. O matemático hindu Aryabhata (475-550 d.C.) por volta do ano 500 d.C., já calculava semicordas e usava o sistema decimal, desenvolvido aproximadamente em 600 d.C. Quando os matemáticos hindus

introduziram os conceitos de semicorda e de seno, foram capazes de demonstrar algumas identidades trigonométricas, e encontramos nos trabalhos de Varahamihira, em 505 d.C., a expressão equivalente de $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ [20].

A trigonometria dos povos árabes e persas

O império árabe viveu extraordinário avanço nos diversos campos das ciências e das artes no período compreendido entre os séculos VIII e XI com notável destaque no século IX. A grande expansão da cultura árabe ou muçumana encontra explicação, principalmente em função da difusão da língua árabe, que substituiu o grego como língua internacional. Graças ao emprego da língua árabe foi possível a preservação e a fixação de muitas obras antigas importantes, que foram traduzidas e difundidas entre os intelectuais muçumanos.

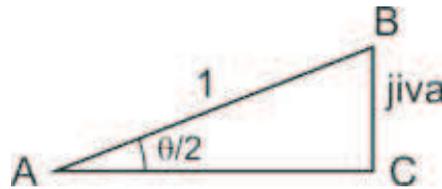


Figura 1.4: O raio unitário de Al Battani.

A grande influência árabe teve início com a criação da Escola de Bagdad, no século IX, tendo como um de seus maiores expoentes o príncipe da Síria Mohamed-ben-Geber, também chamado de Al Battani (850-929 d.C.). Al Battani, também conhecido por Albategnius nas traduções latinas, é chamado o Ptolomeu de Bagdad e seus trabalhos permitiram que a trigonometria hindu fosse adotada pelos árabes principalmente a partir de sua idéia de introduzir o círculo de raio unitário e com isso demonstrar que a razão jiva é válida para qualquer triângulo retângulo independentemente do valor da medida da hipotenusa conforme relações abaixo, ver figura 1.4.

$$\text{jiva} = \frac{\text{cateto oposto}}{1} = \frac{BC}{1}$$

$$\text{sen } \frac{\theta}{2} = \frac{BC}{1}$$

Se um triângulo retângulo tem um ângulo agudo $\frac{\theta}{2}$ então, quaisquer que sejam as medidas do cateto oposto e da hipotenusa (ver figura 1.5), podemos afirmar que:

$\triangle ABC \approx \triangle AB^1C^1$
 No $\triangle ABC$ temos $\text{sen } \frac{\theta}{2} = \frac{\text{jiva}}{1}$
 Pelo teorema de Tales, temos $\frac{\text{jiva}}{1} = \frac{BC}{AB} = \frac{B^1C^1}{AB^1}$
 Logo $\text{sen } \frac{\theta}{2} = \frac{B^1C^1}{AB^1} = \frac{\text{jiva}}{1}$.

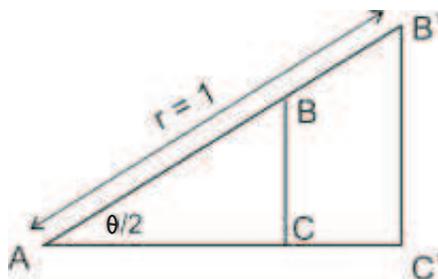


Figura 1.5: Fórmula para calcular a tabela de Al Battani.

Depois de Al-Battani, merece registro entre os matemáticos árabes Abû'l Wêfa (940-998) que em 980 tratou da organização e da sistematização de provas e teoremas de trigonometria. Destacamos também o astrônomo persa Nasîr ed-dên al-Tûsî (1201-1274) autor do primeiro trabalho no qual a trigonometria apareceu como uma ciência por ela própria, desvinculada da astronomia. Isto seria retomado na Europa no século XV, quando Regiomontanus (1436-1476) estabeleceu a trigonometria como um ramo da Matemática. Com o declínio da Escola de Bagdad o centro das atividades intelectuais deslocou-se para o sul da Europa na Península Ibérica e com ele o estudo da trigonometria. A cidade de Toledo tornou-se o mais importante centro de cultura a partir de 1085 após sua libertação pelos cristãos do domínio mouro. Isto ocorreu porque para ela se deslocaram os estudiosos ocidentais visando adquirir o saber mulçumano. O século XII na história da Matemática é conhecido como um século de tradutores, dos quais destacamos Platão de Tivoli (viveu em Barcelona de 1134-1145), Gerardo de Cremona (1114-1187), Adelardo de Bath (1075-1160) e Robert de Chester, que viveu na Espanha por volta de 1150. O trabalho desses tradutores permitiu à Europa incorporar a matemática dos árabes e absorvendo assim o conhecimento grego preservado [20].

O conhecimento árabe e os europeus

Diversos astrônomos árabes foram trabalhar na Espanha e repassaram seus conhecimentos. Os mais importantes foram Ibrâhîm ibn Yahyâ al Naqqâsh (1028-1087), conhecido como Arzachel, que viveu em Córdoba, sendo autor de um conjunto de tábuas trigonométricas publicadas em 1050 e Jabir ibn Aflah (1100-1150) que viveu em Sevilha e cujos estudos divulgados em 1145 se mostraram tão interessantes que séculos mais tarde (1543) foram publicados em Nuremberg.

O matemático europeu mais destacado do século XII foi Fibonacci (1170-1250). Ele estudou no norte da África e depois viajou pelo Oriente como mercador, quando sofreu grande influência dos árabes. Sua obra “*Practica Geometriae*” de 1220 é uma aplicação da trigonometria na resolução de problemas de agrimensura.

Em 1250 o rei Alfonso X de Castela ordenou aos estudiosos de Toledo a tradução dos livros de astronomia e modernizassem as tábuas trigonométricas árabes. Em 1254 foram concluídas as Tábuas Afonsinas, que junto com “*Os Libros del Saber*” se tornaram de grande valia para as navegações espanholas e portuguesas realizadas nos séculos XV e XVI.

A trigonometria no continente europeu a partir do século XIV

Na Europa do século XIV ocorreram importantes avanços para o desenvolvimento da Matemática. Pela primeira vez as noções de quantidades variáveis e de função são expressas e, tanto na Escola de Filosofia Natural do Merton College de Oxford, quanto na Escola de Paris, chegou-se à conclusão de que “*a Matemática é o principal instrumento para o estudo dos fenômenos naturais.*” Com o início do estudo da velocidade instantânea ou pontual e a atenção especial dada ao movimento, tornou-se necessário o desenvolvimento de um novo suporte matemático [20].

Paralelamente ao desenvolvimento da Trigonometria, que já ocorria na Europa desde o século XI, a partir da retomada do conhecimento árabe, ocorreu o desenvolvimento das funções. Nesse campo destacamos Nicole Oresme (1323-1382) com seu “*Treatise on the configuration of Qualities and Motions*” no qual introduziu a representação gráfica que explicita

a noção de funcionalidade entre variáveis (velocidade e tempo). Os trabalhos de Oresme influenciaram Galileu (1565-1642) e Descartes (1596-1650) e deram início à consolidação do conceito de função.

No século XV o inglês Peurbach (1423-1461) retomou a obra de Ptolomeu e construiu uma nova tábua de senos muito conhecida dos estudiosos europeus. Peurbach foi professor de Regiomontanus (1436-1475), um dos maiores matemáticos do século XV, cujo trabalho exerceu grande influência, estabelecendo a Trigonometria como uma ciência independente da Astronomia.

Regiomontanus escreveu um Tratado sobre Triângulos em cinco livros, contendo uma trigonometria completa. A invenção dos logaritmos e alguns dos teoremas demonstrados por Napier (1550-1617) mostram que a trigonometria de Regiomontanus não difere basicamente da que utilizamos hoje em dia. Em seu Tratado Regiomontanus calculou novas tábuas trigonométricas, aperfeiçoando as do seno de Peurbach, e introduziu na trigonometria europeia o uso das tangentes, que incluiu em suas tábuas. Podemos dizer que foi ele quem estabeleceu os fundamentos para os futuros trabalhos nas trigonometrias plana e esférica.

Nicolau Copérnico (1473-1543) também desenvolveu estudos em trigonometria ao completar em 1520 alguns trabalhos de Regiomontanus que incluiu em um capítulo de seu trabalho “De Lateribus et Angulis Triangulorum,” publicado em separado por seu discípulo Rhaeticus em 1542.

Com a invenção da imprensa por Guttemberg no século XV surge o primeiro trabalho impresso em trigonometria, a “Tabula Directionum” de Regiomontanus, publicado em Nuremberg por volta de 1485.

Em 1551 na cidade de Leipzig, Joachim Rhaeticus (1514-1576) publica “Canon Doctrinae Triangulorum”, onde pela primeira vez as seis funções trigonométricas foram definidas como funções do ângulo em vez de funções do arco e subentendidas como razões, embora ele não tenha dado nomes para seno, cosseno ou cossecante. Rhaeticus refez as tábuas de Regiomontanus de 1464, com maior rigor nos cálculos, aumentando a precisão para onze casas decimais e os senos, cossenos, tangentes e secantes foram calculados de minuto em minuto para os arcos do primeiro quadrante e de dez em dez segundos para o arco de 1° (um

grau). Ele foi o primeiro a adotar a organização das tábuas de semiquadrantes, dando os valores dos senos, cossenos e tangentes de ângulos até 45° e completando a tabela com o uso da igualdade $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$. Deve-se também a Rhaeticus a introdução das secantes na trigonometria européia e os cálculos do $\sin n\theta$ em termos de $\sin \theta$, que foram retomados e aprimorados por Jacques Bernoulli (1654-1705).

Neste breve resumo histórico registramos ainda o francês Francois Viète (1540-1603), que introduziu o tratamento analítico na trigonometria em 1580 e foi o primeiro matemático a usar letras para representar coeficientes gerais, fato que representou grande avanço no campo da álgebra. Viète também construiu tábuas trigonométricas, tendo calculado $\sin 1'$ com treze casas decimais e iniciou o desenvolvimento sistemático de cálculo de medidas de lados e ângulos nos triângulos planos e esféricos aproximados até minutos, com ajuda de todas as seis funções trigonométricas. Além disso, foi ele quem introduziu métodos gerais de resolução em matemática. É dele a idéia de decompor em triângulos retângulos os triângulos oblíquos para determinar as medidas de todos os lados e ângulos, conforme está descrito em sua obra “Canon Mathematicus.” Em seu livro “Variorum de rebus mathematicis” aparece um equivalente da conhecida lei das tangentes $\frac{\operatorname{tg}(A+B)}{\operatorname{tg}(A-B)} = \frac{a+b}{a-b}$, com A e B ângulos e a e b os arcos respectivos. Na verdade, esta relação só foi publicada em Basel no ano de 1583 pelo dinamarquês Thomas Fincke em seu trabalho “Geometria Rotundi,” apesar de ser devida a Francois Viète.

Destacamos agora por seus notáveis trabalhos em trigonometria Bartholomaeus Pitiscus (1561-1613), que publicou um tratado em 1595 no qual corrigiu as tábuas de Rhaeticus e modernizou o tratamento do assunto. A palavra *trigonometria* aparece pela primeira vez, como título de um livro.

Por outro lado, dando seqüência aos avanços na trigonometria, registramos os trabalhos do britânico Napier que estabeleceu regras para os triângulos esféricos, que foram amplamente aceitas numa época na qual sua maior contribuição, os logaritmos, ainda não eram reconhecidos como válidos. Suas considerações sobre os triângulos esféricos foram publicadas posteriormente no “Napier Analogies” do “Constructio” no ano de 1619, em Edinburgh.

Outra importante contribuição na trigonometria foi dada por Oughtred (1575-1660),

que em seu trabalho de 1657 deu ênfase ao desenvolvimento do ponto de vista simbólico. Entretanto o simbolismo algébrico ainda estava em seu estágio inicial e a idéia não foi bem aceita, até que Euler desenvolvesse esse aspecto no século XVIII.

Citamos também John Newton (1622-1678) que apoiado nos trabalhos dos autores que o antecederam publicou em 1658 o tratado “Trigonometria Britannica” considerado o mais completo livro de trigonometria de sua época.

Um passo importante na trigonometria foi dado por John Wallis (1616-1703) ao expressar as fórmulas trigonométricas através de equações, substituindo assim as tradicionais proporções e também por trabalhar com séries infinitas.

Finalizando estas considerações, registramos que Issac Newton (1642-1727) também contribui na trigonometria pois, paralelamente aos seus estudos de cálculo infinitesimal apoiados fortemente na geometria do movimento, trabalhou com séries infinitas, tendo expandido $\arcsen x$ em séries e, por reversão, obtido a série para $\sen x$. Por outro lado, obteve a fórmula geral para $\sen(nx)$ e $\cos(nx)$ e assim criou as condições para o $\sen x$ e o $\cos x$ surgirem como números e não mais como grandezas. O alemão Abraham Kästner (1719-1800) foi o primeiro matemático a definir as funções trigonométricas em números puros no ano de 1759.

A trigonometria incorporada pela análise matemática

A trigonometria que estudamos nos dias atuais teve seu início quando Euler (1707-1783) adota a medida do raio de um círculo como unidade e define funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo como acontecia nessa época. A passagem das conhecidas razões trigonométricas para as funções periódicas começou com Viète no século XVI; em seguida teve um novo crescimento com a criação do Cálculo Infinitesimal no século XVII e teve sua conclusão com os trabalhos de Euler no século XVIII. Uma das idéias de Euler foi a criação da função E , que denominamos aqui de função trigonometria de Euler, função essa que associa para cada número real, um ponto de uma circunferência C_1 de raio unitário com centro na origem do plano cartesiano. Seu domínio é o conjunto dos números reais \mathbb{R} e seu contradomínio é C_1 . A função $E : \mathbb{R} \longrightarrow C_1$, associa a cada $x \in \mathbb{R}$, um ponto $P \in C_1$, $P = (m, n)$ pertence a C_1 , se e somente se $m^2 + n^2 = 1$. Na figura 1.6 ilustramos a associação

entre um número real e o seu seno através do ponto P correspondente no conhecido ciclo trigonométrico.

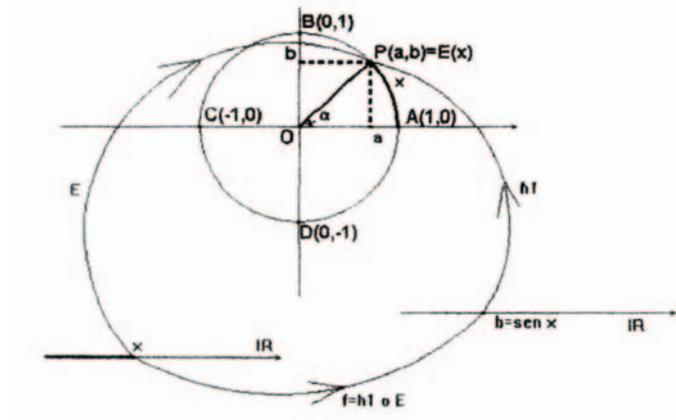


Figura 1.6: Correspondência entre um número real e seu seno através de um ponto do círculo trigonométrico.

Como a função E estabelece a correspondência entre cada número real x e um ponto da circunferência C_1 , logo ao número zero corresponde o ponto $A = (1, 0)$ e, para cada $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, medimos a partir desse ponto A no sentido anti-horário um arco de comprimento x e assim obtemos o ponto $P = E(x)$. Tudo se passa como se o efeito da função E consistisse no enrolamento da reta real \mathbb{R} , como se esta fosse um fio inextensível sobre circunferência C_1 , como se esta fosse um carretel. A partir da correspondência estabelecida pela função E , foi possível definição das funções seno e cosseno de um número real x e não mais de um ângulo, como anteriormente acontecia. Com relação à função E encontramos em [28]: “A função $E : \mathbb{R} \rightarrow C_1$, que possibilita encontrar $\sin x$ e $\cos x$, como função de uma variável real x , abriu para a trigonometria as portas da análise matemática e de inúmeras aplicações às ciências físicas”. Em 1748 Leonard Euler publicou o livro “Introductio in Analysin Infinitorum,” onde o seno deixou de ser uma grandeza e adquiriu o status de número obtido pela coordenada de um ponto de um círculo unitário, ou o número definido pela série infinita $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$. Euler mostrou que $\sinh x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ e $\cosh x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, onde i é a unidade imaginária possibilitando a extensão das funções

seno e cosseno no campo complexo [20].

Portanto a trigonometria que nos primórdios era uma auxiliar da agrimensura e da astronomia, tornou-se autônoma e transformou-se em uma parte da análise matemática. Foi um longo caminho da humanidade até a trigonometria que hoje ensinamos aos nossos alunos. Aqui, buscamos apresentar parte dessa trajetória. Deixamos uma mensagem para quem ensina trigonometria ou matemática de um modo geral, que discuta com seus alunos questões que objetivamente esclareçam que o conhecimento matemático não surgiu pronto e acabado e que a evolução desse conhecimento pode ser acompanhada e ter a participação deles.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM MODELOS PARA PRINCÍPIOS FÍSICOS

“A mecânica é o paraíso das ciências matemáticas, porque nela se chega ao fruto matemático.”

(Leonardo da Vinci)

Em muitas ocasiões a parte mais complexa na utilização da Matemática para estudar um problema associado a um fenômeno físico, é a transladação da realidade para o formalismo matemático. Essa transladação torna-se difícil, pois envolve a conversão de hipóteses imprecisas face às simplificações, em equações e fórmulas precisas matematicamente. A modelagem matemática é portanto uma arte difícil, e como em toda arte, a melhor maneira de obtermos bons resultados é praticando. Em seguida, apresentamos em alguns exemplos, a dedução de equações diferenciais, bem como relacionamos as hipóteses simplificadoras, ilustrando essas etapas da modelagem matemática.

2.1 A corda vibrante

Simple e de ocorrência freqüente em vários campos da ciência aplicada, o estudo da corda vibrante constitui um exemplo clássico em que o emprego da modelagem matemática resulta na análise e solução de uma equação diferencial.

Considerando então uma corda de comprimento l fixada em suas extremidades, o problema se reduz a determinar a equação do movimento que caracteriza a posição de um ponto da corda de abscissa x , no instante t , $u(x, t)$ após uma determinada perturbação ocorrida no instante inicial $t_0 = 0$.

A fim de obtermos uma equação simples adotamos as seguintes hipóteses simplificadoras iniciais:

1. A corda é flexível e elástica, não resiste a momento fletor e portanto a tensão é sempre tangente à curva definida pela corda em cada ponto considerado.
2. Não existe deformação de cada elemento da corda e portanto pela lei de Hooke (1635-1703) a tensão é constante ao longo de toda a corda.
3. O peso da corda é pequeno em comparação com a tensão aplicada na corda.
4. A deflexão é pequena em comparação com o comprimento da corda.
5. A declividade da corda em movimento em qualquer ponto é pequena em comparação com a unidade.
6. Existe apenas vibração transversal.

Consideremos agora um elemento Δs da corda, seja T a tensão tangente à corda atuando nas extremidades do elemento Δs , conforme indicamos na Figura 2.1.

A resultante das forças atuantes no elemento Δs na direção vertical é

$$F_R = T \sin \beta - T \sin \alpha. \quad (2.1)$$

De acordo com a segunda lei de Newton, $F_R = \text{massa} \times \text{aceleração}$, segue-se então em cada ponto (x, t) ,

$$T \operatorname{sen} \beta - T \operatorname{sen} \alpha = \rho \cdot \Delta s \cdot u_{tt}(x, t),$$

onde ρ = densidade linear da corda e $u_{tt}(x, t)$ = aceleração = $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$.

Como a declividade é pequena, durante o movimento podemos considerar

$$\Delta s \approx \Delta x,$$

como os ângulos α e β são pequenos podemos escrever

$$\operatorname{sen} \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \quad e \quad \operatorname{sen} \beta \approx \operatorname{tg} \beta.$$

Portanto, com essas aproximações simplificadoras a expressão anterior toma a forma

$$\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho \Delta x}{T} u_{tt}(x, t). \quad (2.2)$$

Mas do cálculo diferencial sabemos que

$$\operatorname{tg} \alpha = u_x(x, t) \quad e \quad \operatorname{tg} \beta = u_x(x + \Delta x, t).$$

Logo podemos escrever a equação (2.2) como a seguir:

$$\frac{1}{\Delta x} [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] = \frac{\rho}{T} u_{tt}(x, t).$$

Usando o limite desta última expressão, quando $\Delta x \rightarrow 0$ obtemos

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\rho}{T} u_{tt}(x, t) \implies u_{tt}(x, t) = \frac{T}{\rho} u_{xx}(x, t).$$

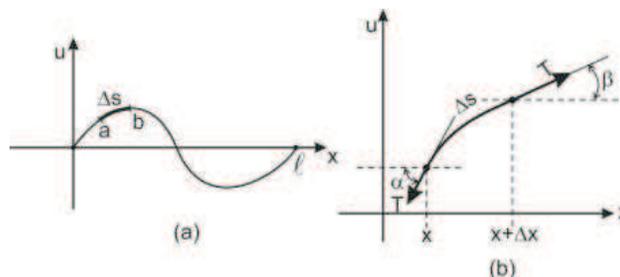


Figura 2.1: Corda Vibrante

Finalmente, fazendo $\frac{T}{\rho} = c^2$ obtemos

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t). \quad (2.3)$$

Esta equação diferencial parcial é conhecida como *equação da corda vibrante* ou *equação de onda unidimensional* e representa o modelo matemático para o problema das vibrações transversais de uma corda: encontrar a posição de um ponto (x, t) , $u(x, t)$ satisfazendo a equação diferencial parcial.

A equação (2.3) ainda pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.4)$$

A diferença entre (2.3) e (2.4) é apenas a notação matemática para as derivadas u_{xx} e u_{tt} . Se existir uma força externa f por unidade de comprimento ao longo da corda as equações (2.3) e (2.4) tomam as formas

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f^{(*)} \quad (2.5)$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f^{(*)}, \quad (2.6)$$

onde $(f^{(*)} = \frac{f}{\rho})$, f pode ser uma pressão, gravitação, uma resistência, etc.

2.2 A membrana vibrante

A membrana vibrante também representa um modelo interessante, pois embora simples, encontra várias aplicações práticas na engenharia. Por exemplo, placas delgadas sujeitas a vibrações mecânicas podem ser analisadas com auxílio desse modelo matemático. Na oceanografia, a membrana vibrante encontra utilização no estudo das ondas do mar que ocorrem na superfície da água, interpretada como uma membrana.

Para a obtenção do modelo matemático da membrana vibrante, suposta com densidade superficial ρ constante, adotamos as seguintes hipóteses simplificadoras:

1. A membrana é flexível e elástica, ou seja, não resiste à flexão e a tensão tem sempre a direção da tangente à superfície da membrana em cada ponto.

2. Não existe deformação de cada elemento da membrana e então pela lei de Hooke, a tensão é constante em intensidade.
3. O peso da membrana é pequeno em comparação com a tensão na membrana.
4. A deflexão é pequena em comparação com a menor dimensão da membrana.
5. A declividade da membrana deslocada em um ponto qualquer é pequena em comparação com a unidade.
6. Só existe vibração transversal.

Com as hipóteses acima, seja Δa um elemento da membrana. Como a deflexão e a declividade são pequenas, podemos com aproximação avaliar a área de elemento por:

$$\Delta a = \Delta x \cdot \Delta y.$$

Se T é a tensão por unidade de comprimento nas direções x e y , então as forças atuantes nas bordas do elemento Δa , são $T\Delta x$ e $T\Delta y$, como ilustramos Figura 2.2 abaixo.

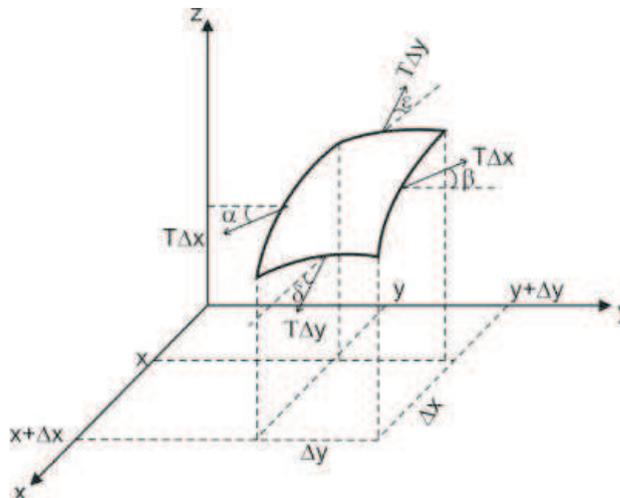


Figura 2.2: Membrana Vibrante

A força resultante na direção vertical tem como expressão:

$$F_R = T\Delta x \text{sen } \beta - T\Delta x \text{sen } \alpha + T\Delta y \text{sen } \delta - T\Delta y \text{sen } \gamma.$$

Como as declividades são pequenas, podemos usar as aproximações:

$$\text{sen } \alpha \approx \text{tg } \alpha$$

$$\text{sen } \beta \approx \text{tg } \beta$$

$$\text{sen } \delta \approx \text{tg } \delta$$

$$\text{sen } \gamma \approx \text{tg } \gamma.$$

Obtemos então para força resultante a expressão:

$$F_R = T\Delta x(\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha) + T\Delta y(\text{tg } \delta - \text{tg } \gamma).$$

Pela segunda lei de Newton, a resultante das forças é igual ao produto da massa pela aceleração e podemos então escrever a equação:

$$F_R = T\Delta x(\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha) + T\Delta y(\text{tg } \delta - \text{tg } \gamma) = \rho\Delta a u_{tt}(x, y, t), \quad (2.7)$$

onde ρ é a densidade superficial (massa por unidade de área), $\Delta a \approx \Delta x \cdot \Delta y$ é a área do elemento considerado, e $u_{tt}(x, y, t)$ é a aceleração avaliada em algum ponto (x, y) da região considerada no instante t .

Mas do cálculo diferencial, nós temos que:

$$\text{tg } \alpha = u_y(x_1, y, t)$$

$$\text{tg } \beta = u_y(x_2, y + \Delta y, t)$$

$$\text{tg } \gamma = u_x(x, y_1, t)$$

$$\text{tg } \delta = u_x(x + \Delta x, y_2, t),$$

onde x_1 e x_2 são os valores de x entre x e $x + \Delta x$ e y_1 e y_2 são os valores de y entre y e $y + \Delta y$. Substituindo esses valores na equação (2.7), obtemos:

$$T\Delta x [u_y(x_2, y + \Delta y, t) - u_y(x_1, y, t)] + T\Delta y [u_x(x + \Delta x, y_2, t) - u_x(x, y_1, t)] = \rho\Delta x \Delta y u_{tt}(x, y, t).$$

Dividimos agora por $\rho\Delta x \cdot \Delta y$ e obtemos,

$$\frac{T}{\rho} \left[\frac{u_y(x_2, y + \Delta y, t) - u_y(x_1, y, t)}{\Delta y} + \frac{u_x(x + \Delta x, y_2, t) - u_x(x, y_1, t)}{\Delta x} \right] = u_{tt}(x, y, t). \quad (2.8)$$

Usando o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta y \rightarrow 0$, obtemos uma equação diferencial para a função deslocamento $u(x, y, t)$:

$$u_{tt} = \frac{T}{\rho}(u_{xx} + u_{yy}).$$

Colocando $\frac{T}{\rho} = c^2$, temos

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) \quad (2.9)$$

Esta equação representa o modelo matemático para as vibrações de uma membrana, sendo chamada de *equação da membrana vibrante* ou *equação de onda bi-dimensional*. Havendo uma força externa f por unidade de área atuando na membrana, a equação (2.9) toma a forma:

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) + f^*,$$

onde $f^* = \frac{f}{\rho}$.

2.3 Ondas em um meio elástico

O som e outros fenômenos ondulatórios se propagam nos meios materiais supostos elásticos, dessa forma o modelo matemático para a propagação de ondas nos meios materiais encontra inúmeras aplicações de interesse da vida humana e citamos como exemplos o sonar dos submarinos e os sismógrafos. Vejamos então esse importante modelo matemático.

Se uma pequena perturbação é originada em um ponto de um meio elástico, as partículas da vizinhança entram em movimento e o meio material fica submetido a um estado de tensão. Consideramos que o movimento das partículas se propaga em todas as direções, que os deslocamentos do meio são pequenos e que não são consideradas rotações ou translações do meio material como um todo.

Consideramos ainda que o corpo material em estudo é homogêneo e isotrópico, isto é, as propriedades independem das direções. Seja ΔV um volume elementar do corpo e sejam as tensões atuantes nas faces do volume respectivamente: τ_{xx} , τ_{yy} , τ_{zz} , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} e τ_{zy} . As três primeiras tensões são chamadas de tensões normais e as restantes

recebem o nome de tensões tangenciais ou de cisalhamento, conforme indicamos na Figura 2.3.

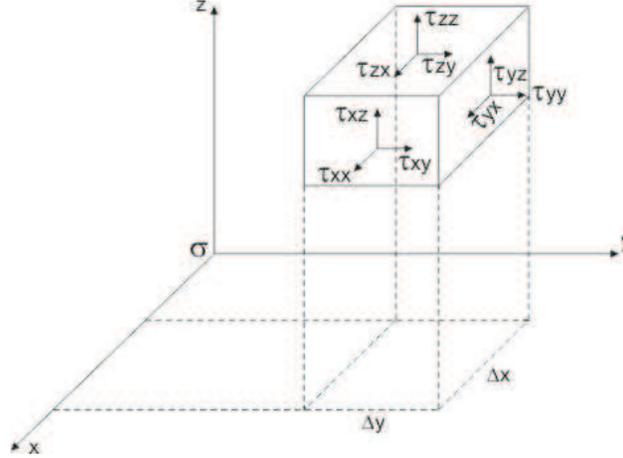


Figura 2.3: Ondas em um meio elástico - volume elementar

Vamos ainda admitir que o tensor das tensões τ_{ij} é simétrico, ou seja, $\tau_{ij} = \tau_{ji}$; $i, j = x, y, z$, condição necessária ao equilíbrio à rotação do elemento ΔV [38]. Desprezando-se o peso do corpo e quaisquer outras forças que atuem sobre ele, a resultante de todas as forças que atuam no elemento de volume ΔV na direção do eixo x é dada por

$$[\tau_{xx(x+\Delta x)} - \tau_{xx(x)}]\Delta y\Delta z + [\tau_{xy(y+\Delta y)} - \tau_{xy(y)}]\Delta z\Delta x + [\tau_{xz(z+\Delta z)} - \tau_{xz(z)}]\Delta x\Delta y.$$

Pela segunda lei de Newton, essa resultante oriunda das tensões é igual ao produto da massa do elemento ΔV pela sua aceleração, obtemos então:

$$[\tau_{xx(x+\Delta x)} - \tau_{xx(x)}]\Delta y\Delta z + [\tau_{xy(y+\Delta y)} - \tau_{xy(y)}]\Delta z\Delta x + [\tau_{xz(z+\Delta z)} - \tau_{xz(z)}]\Delta x\Delta y = \rho\Delta x\Delta y\Delta z u_{tt},$$

onde ρ é a densidade do corpo e u é a componente do deslocamento na direção do eixo x .

Agora usando o limite quando $\Delta V \rightarrow 0$, obtemos

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.10)$$

Procedendo de forma análoga, obtemos as equações correspondentes às direções dos eixos y e z :

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.12)$$

onde v e w são as componentes do deslocamento nas direções y e z respectivamente.

Agora vamos considerar as deformações lineares:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.13)$$

onde ε_{xx} , ε_{yy} e ε_{zz} representam as deformações unitárias nas direções x , y e z respectivamente.

Em seguida:

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad \varepsilon_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.14)$$

onde ε_{yz} , ε_{zx} e ε_{xy} representam as deformações de cisalhamento ou transversais unitárias.

Sendo o corpo em estudo isotrópico, ou seja, tem a mesmas propriedades em todas as direções, podemos recorrer à mecânica dos materiais e a lei de Hooke generalizada [43] que tem a forma:

$$\tau_{xx} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{xx} \quad \tau_{yz} = \mu\varepsilon_{yz} \quad (2.15)$$

$$\tau_{yy} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{yy} \quad \tau_{zx} = \mu\varepsilon_{zx} \quad (2.16)$$

$$\tau_{zz} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{zz} \quad \tau_{xy} = \mu\varepsilon_{xy}, \quad (2.17)$$

onde $\theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ é chamada de dilatação e λ e μ são conhecidas como constantes de Lamé (1795-1870), [43].

Expressando agora as tensões em termos das deformações temos:

$$\tau_{xx} = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.18)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.19)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.20)$$

Diferenciando as equações obtemos:

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2 y} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} \right) \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2 z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (2.23)$$

Agora substituindo em (2.10), (2.21), (2.22) e (2.23) temos:

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.24)$$

Podemos agora observar que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.25)$$

e que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u = \text{Laplaciano de } u. \quad (2.26)$$

Levando (2.25) e (2.26) em (2.24), esta assume a forma:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.27)$$

De forma semelhante, a partir de (2.11) e (2.12) obtemos as equações

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.28)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.29)$$

Estas equações podem ser compactadas na forma vetorial a seguir:

$$\text{Fazendo-se } \vec{U} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} \text{ e}$$

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \theta = \text{div } \vec{U} = \nabla \cdot \vec{U},$$

obtem-se a equação geral do movimento a seguir:

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{U}) + \mu \nabla^2 \vec{U} = \rho \vec{U}_{tt}. \quad (2.30)$$

Observações:

(i) Se $\text{div } \vec{U} = 0$ a equação (2.30) se torna

$$\begin{aligned}\mu \nabla^2 \vec{U} &= \rho \vec{U}_{tt} \text{ ou seja,} \\ \vec{U}_{tt} &= c^2 \nabla^2 \vec{U},\end{aligned}\tag{2.31}$$

onde $c^2 = \frac{\mu}{\rho}$ e a velocidade de propagação das ondas é $v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$.

Este é o caso conhecido como *propagação da onda equivolumial*, pois a variação do volume é nula ($\text{div } \vec{U} = 0$) para ondas se propagando com essa velocidade. Em algumas situações, essas ondas são conhecidas como *ondas de distorção*, porque a velocidade depende de μ e de ρ ; o módulo de cisalhamento μ caracteriza a distorção e a rotação do elemento de volume ΔV [45].

(ii) Se $\text{rot } \vec{U} = 0$ a identidade $\text{rot}(\text{rot } \vec{U}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{U}) - \nabla^2 \vec{U}$ fornece $\nabla(\nabla \cdot \vec{U}) = \nabla^2 \vec{U}$ e a equação (2.30) se reduz a

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \vec{U} &= \rho \vec{U}_{tt} \text{ ou seja,} \\ \vec{U}_{tt} &= c^2 \nabla^2 \vec{U}\end{aligned}\tag{2.32}$$

onde a velocidade de propagação é dada por

$$v_0 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

Este caso é conhecido como *propagação de onda irrotacional ou dilatacional*, pois $\text{rot } \vec{U} = 0$ descreve os chamados movimentos irrotacionais [45]. As equações (2.31) e (2.32) são conhecidas como equação de onda no espaço tridimensional. Observando (2.3), (2.9) e (2.32) vemos que elas podem ser escritas de uma única forma, chamada equação de onda:

$$U_{tt} = c^2 \nabla^2 \vec{U},$$

onde o Laplaciano pode ser de uma (1D), duas (2D) ou três dimensões (3D).

As deduções apresentadas na obtenção de (2.3), (2.9) e (2.32) nos permite observar o quanto cresceu o grau de dificuldade na passagem dos modelos 1D para 2D e 2D para 3D. Por exemplo, no caso 3D foi necessário usar tensores que representam as tensões normais e tangenciais

(cisalhamento) às superfícies do volume elementar e conseqüentemente é necessário definir novos parâmetros do material (constantes de Lamé) e buscar novos arranjos matemáticos convenientes para obter (2.30) ou sua forma simplificada (2.32).

A importância da equação de onda reside no fato de que esse tipo de equação, ou seja, esse modelo matemático, aparece em muitos problemas físicos; por exemplo, propagação do som no espaço, vibrações elétricas em um condutor, oscilações torçiais em uma barra, ondas superficiais na água, escoamentos lineares supersônicos em um gás, ondas em linhas de transmissão de energia elétrica, ondas em magnetohidrodinâmica e vibrações longitudinais de uma barra.

2.4 O modelo de gravitação de Newton - potencial gravitacional

2.4.1 A lei de gravitação de Newton

Por volta de 1666, Isaac Newton (1642-1727) já tinha formulado e verificado numericamente a lei de gravitação universal, que veio a publicar em seu livro “Principia”, em 1687. Newton esperou 20 anos para publicar seus resultados, porque não podia justificar seu método de avaliação numérica no qual havia considerado a Terra e a Lua como pontos materiais. Com a Matemática formulada no cálculo diferencial e integral (o qual Newton inventou mais tarde juntamente com Leibniz), podemos resolver bem mais facilmente o problema que Newton enfrentou no século XVII.

A lei de Newton da gravitação universal estabelece que:

“Dois pontos materiais quaisquer, de massas m e M , separados pela distância r , atraem-se gravitacionalmente com força que atua na direção da reta que passa por eles e cuja intensidade é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles.”

2.4. O MODELO DE GRAVITAÇÃO DE NEWTON - POTENCIAL GRAVITACIONAL 45

Em forma matemática, escreve-se a lei de gravitação assim

$$\vec{F} = -G \frac{m \cdot M}{r^2} \vec{e}_r. \quad (2.33)$$

O vetor unitário \vec{e}_r , aponta de M para m e o sinal de menos indica que a força \vec{F} é atrativa, ou seja, que m é atraído na direção de M .

A verificação em laboratório da lei de gravitação e a determinação do valor de G , foi feita em 1798 pelo físico inglês Henry Cavendish (1731-1810). Em sua experiência, Cavendish utilizou uma balança de torção. O valor de G hoje aceito, com as melhores medições é de $(6,6726 \pm 0,0008) \cdot 10^{-11}$.

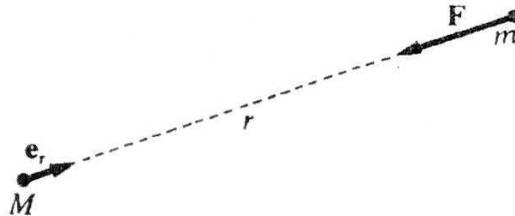


Figura 2.4: Partícula m sofre uma força de atração gravitacional na direção de M .

Na forma da equação (2.33), a lei se aplica estritamente apenas para pontos materiais, ou seja, partículas de massa. Se uma ou ambas as partículas forem substituídas por um corpo com certa extensão, devemos fazer antes uma hipótese adicional, para poder calcular a força. Vamos assumir que a força do campo gravitacional é linear, ou seja, o campo gravitacional é linear.

Em outras palavras, assumimos que é possível calcular a força total de gravitação em uma partícula, provocada por muitas outras partículas pela simples soma vetorial de todas as forças individuais [29]. Para um corpo constituído de uma distribuição contínua de matéria, a soma se torna uma integral.

$$\vec{F} = -Gm \int_V \frac{\rho(\vec{r}_1) \vec{e}_r}{r^2} dv, \quad (2.34)$$

onde $\rho(\vec{r}_1)$ é a densidade de massa e dv é o elemento de volume na posição definida pelo vetor $\rho(\vec{r}_1)$; a partir de uma origem (arbitrária) até o ponto considerado na distribuição de massa.

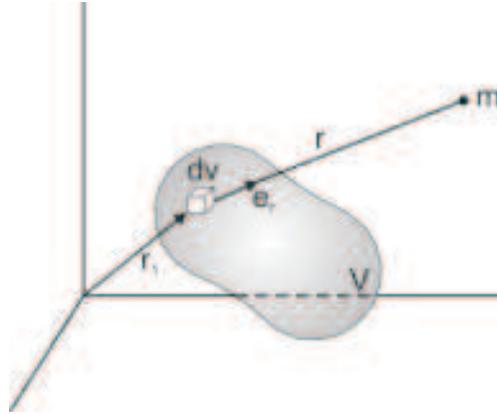


Figura 2.5: Atração gravitacional produzida por um corpo extenso.

Se ambos os corpos, o de massa M e de massa m , têm extensão finita, uma segunda integração sobre o volume de m será necessária para computar a força gravitacional total.

O *vetor campo gravitacional* \vec{g} é o vetor que representa a força por unidade de massa exercida pelo campo gravitacional do corpo de massa M . Então

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \frac{M}{r^2} \vec{e}_r, \quad (2.35)$$

ou seja

$$\vec{g} = -G \int_V \frac{\rho(\vec{r}_1) \vec{e}_r}{r^2} dv. \quad (2.36)$$

A grandeza \vec{g} tem a dimensão de uma força por unidade de massa, assim como a aceleração. De fato, nas proximidades da superfície da Terra, a magnitude de \vec{g} é considerada constante e denominada aceleração normal da gravidade. Medidas com o auxílio de um pêndulo simples são suficientes para mostrar que $|\vec{g}|$ é aproximadamente $9,80m/s^2$ ou $9,80N/kg$ na superfície da Terra.

2.4.2 O potencial gravitacional

O campo gravitacional representado pelo vetor \vec{g} varia com $1/r^2$ e portanto satisfaz a condição de ser representado como o vetor gradiente de uma função escalar. Matematicamente essa condição se expressa:

condição: $\nabla \Lambda \vec{g} = 0$. Portanto,

podemos escrever:

$$\vec{g} = -\nabla\Phi, \quad (2.37)$$

onde Φ é chamada de potencial gravitacional e tem dimensão de *força por unidade de massa* x *distância*, ou ainda *energia por unidade de massa*.

O fato de \vec{g} ter apenas variação radial, implica que a variação do potencial Φ também ocorre apenas em função de r . Por conseguinte, usando a equação (2.35) para \vec{g} , tem-se $\nabla\Phi = \frac{d\Phi}{dr}\vec{e}_r = g\frac{M}{r^2}\vec{e}_r$; integrando, obtemos:

$$\Phi = -G\frac{M}{r}. \quad (2.38)$$

A possível constante de integração foi suprimida, porque o potencial fica indeterminado com uma constante aditiva; isto é, somente diferenças de potencial são significativas, não valores particulares. Esta ambigüidade é normalmente removida, adotando-se arbitrariamente que $\Phi \rightarrow 0$ (Φ tende a zero), quando $r \rightarrow \infty$ (r tende ao infinito); então a equação (2.38) fornece corretamente o potencial nessa condição.

O potencial produzido por uma distribuição contínua de massa é

$$\Phi = -G \int_V \frac{\rho(\vec{r}_1)}{r} dv. \quad (2.39)$$

Similarmente, se a massa é distribuída sobre uma película fina (isto é, uma distribuição superficial), então

$$\Phi = -G \int_S \frac{\rho_S}{r} ds, \quad (2.40)$$

onde ρ_S é a densidade superficial de massa.

Finalmente, para uma linha com distribuição de massa, cuja densidade linear é ρ_l ,

$$\Phi = -G \int_L \frac{\rho_l}{r} dl. \quad (2.41)$$

O significado físico do problema gravitacional torna-se claro quando se considera o trabalho mecânico dW , que deve ser realizado por um agente externo para deslocar uma unidade de massa em um deslocamento $d\vec{r}$ num campo gravitacional. Neste caso o trabalho é igual ao

produto escalar da força pelo deslocamento. Então, para o trabalho realizado no corpo por unidade de massa, tem-se

$$dW = -\vec{g} \cdot \vec{d}_r = (\nabla\Phi) \cdot \vec{d}_r = \sum_i^3 \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} dx_i = d\Phi, \quad (2.42)$$

porque Φ é uma função somente das coordenadas do ponto no qual é medido: $\Phi = \Phi(x_1, x_2, x_3) = \Phi(x_i)$. Por conseguinte, o valor do trabalho por unidade de massa, realizado para deslocá-la de uma posição para outra num campo gravitacional, é igual à diferença de potencial entre esses dois pontos.

A posição de dois pontos quaisquer é arbitrária, e portanto pode-se considerar um desses pontos no infinito. Se por definição adota-se o potencial no infinito igual a zero, pode-se interpretar o potencial Φ de um ponto, como o trabalho realizado para trazer desde o infinito até esse ponto, uma unidade de massa. Sendo o trabalho igual à energia, define-se a *energia potencial* de um corpo de massa m , localizado em um ponto de potencial Φ , pelo produto de uma massa pelo potencial. Se U é a energia potencial gravitacional, então

$$U = m\Phi, \quad (2.43)$$

segue-se, que a força \vec{F} , que atua em um corpo de massa m , localizado em um ponto de potencial Φ e que portanto tem energia potencial U , é dada por

$$\vec{F} = -\nabla U. \quad (2.44)$$

2.4.3 A equação de Poisson

É interessante comparar as propriedades que verificamos acima para um campo gravitacional, com alguns resultados de eletromagnetismo decorrentes de formulação através das equações de Maxwell. Consideremos uma superfície S como na figura abaixo, com uma massa m localizada em um ponto qualquer de seu interior. Assim, como no caso do campo elétrico, vamos determinar o fluxo do campo gravitacional Φ_m emanando da massa m através da superfície arbitrária S .

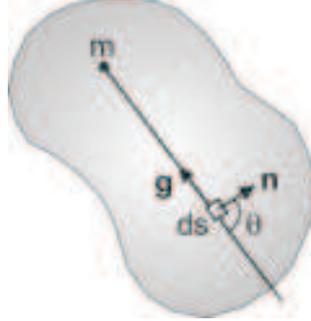


Figura 2.6: Superfície arbitrária com uma massa m no seu interior.

Tem-se que:

$$\Phi_m = \int_S \vec{n} \cdot \vec{g} \, ds, \quad (2.45)$$

onde a integração ocorre sobre a superfície S e o vetor \vec{n} é normal à superfície S no elemento diferencial de área ds . Substituindo-se \vec{g} pelo seu valor dado em (2.35) para o vetor campo gravitacional produzido por um corpo de massa \underline{m} , tem-se para o produto escalar $\vec{n} \cdot \vec{g}$,

$$\vec{n} \cdot \vec{g} = -Gm \frac{\cos \theta}{r^2},$$

onde θ é o ângulo entre \vec{n} e \vec{g} . Substituindo-se esse valor na equação anterior (2.45) obtém-se

$$\Phi_m = -Gm \int_S \frac{\cos \theta}{r^2} \, ds. \quad (2.46)$$

Essa integral é sobre o ângulo sólido da superfície S e portanto seu valor é 4π esferoradianos, o que fornece para o fluxo de massa \underline{m} :

$$\Phi_m = \int_S \vec{n} \cdot \vec{g} \, ds = -4\pi Gm. \quad (2.47)$$

Esse resultado independe da localização da massa \underline{m} dentro da superfície S . Pode-se generalizar esse resultado para um número qualquer de massas m_i dentro da superfície S ; somando sobre essas massas, assim:

$$\int_S \vec{n} \cdot \vec{g} \, ds = -4\pi G \sum_i m_i. \quad (2.48)$$

Para o caso de uma distribuição contínua de massa dentro de S , tem-se:

$$\int_S \vec{n} \cdot \vec{g} \, ds = -4\pi G \int_V \rho \, dv, \quad (2.49)$$

onde a integral do lado direito é sobre o volume V englobada por S e ρ é a densidade de massa.

Com o auxílio do teorema de divergência, onde $d\vec{s} = \vec{n} \, ds$, escreve-se

$$\int_S \vec{n} \cdot \vec{g} \, ds = \int_V \nabla \cdot \vec{g} \, dv. \quad (2.50)$$

Comparando (2.49) e (2.50), obtemos:

$$\int_V (-4\pi G)\rho \, dv = \int_V \nabla \cdot \vec{g} \, dv,$$

sendo S arbitrária e portanto também seu volume V , estas duas integrais devem ser iguais, logo:

$$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho, \quad (2.51)$$

este resultado é semelhante à forma diferencial da lei de Guass para o campo elétrico $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon$.

Agora substituímos $\vec{g} = -\nabla\Phi$ conforme equação (2.37) em (2.51) e obtemos

$$\nabla(-\nabla \cdot \Phi) = -4\pi G\rho,$$

e portanto podemos escrever

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \quad (2.52)$$

Esta é a conhecida equação de Poisson, que tem utilização em diversas situações que envolvem a teoria do potencial.

Se o segundo membro da equação de Poisson é nulo temos a equação de Laplace

$$\nabla^2\Phi = 0. \quad (2.53)$$

2.5 Modelo matemático da placa elástica - placa delgada

2.5.1 Hipóteses simplificadoras para construção do modelo de cálculo

O cálculo exato das placas constitui um problema da teoria matemática da elasticidade, cujo estudo apresenta dificuldades analíticas conhecidas na solução das equações diferenciais. Entretanto a questão pode ser estudada admitindo hipóteses simplificadoras na sua idealização. O estudo subsequente implica na admissão explícita de que se verificam as seguintes hipóteses simplificadoras:

1. o material da placa é um meio contínuo, homogêneo e isotrópico;
2. o material da placa é elástico, sendo válida a lei de Hooke, com módulo de elasticidade à compressão e à tração iguais e constantes;
3. a espessura da placa é invariável e pequena em relação às demais dimensões, sendo a superfície média um plano;
4. as cargas e os esforços externos atuam perpendicularmente ao plano médio da placa;
5. pontos alinhados segundo uma normal ao plano médio da placa indeformada, encontram-se, na configuração deformada, também, linearmente dispostos em uma normal à superfície média deformada;
6. pontos pertencentes ao plano médio da placa deslocam-se somente na direção normal ao mesmo;
7. as tensões normais à superfície média da placa são desprezíveis, não variando portanto a espessura da placa na configuração deformada;
8. as deformações, supostas elásticas, são pequenas em relação à espessura da placa, sendo funções lineares das tensões e reciprocamente (lei de Hooke generalizada).

2.5.2 Esforços, deformações e deslocamentos

Tendo em mente as hipóteses simplificadoras acima adotadas, as relações matemáticas que daí decorrem entre os esforços (solicitantes e resistentes) e as deformações pertinentes podem ser demonstradas, considerando um elemento da placa referido a um sistema cartesiano ortogonal x , y , z , constituído por um paralelepípedo de altura igual à espessura h da placa, limitado por planos paralelos aos planos coordenados.

Nestas condições, coincidindo o plano médio da placa com o plano xy , obtemos a configuração de esforços que indicamos esquematicamente na Figura 2.7, onde σ_x e σ_y são tensões normais, que variam linearmente e dão origem aos momentos de flexão unitários (por unidade de largura), M_x e M_y ; τ_{xz} , τ_{yz} são tensões de cisalhamento, variando parabolicamente e tendo como resultantes as forças cortantes unitárias Q_x e Q_y , paralelamente aos planos xz e yz e cabe ainda considerar as tensões de cisalhamento $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, com variação linear no intervalo h e que constituem os momentos de torção unitários M_{xy} e M_{yx} respectivamente.

Com a notação indicada, os esforços unitários oriundos da ação da carga $pdx dy$, atuando normalmente ao plano médio da placa são respectivamente:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \quad (2.54)$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \quad (2.55)$$

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \quad (2.56)$$

$$Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \quad (2.57)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} z dz. \quad (2.58)$$

Mas na configuração deformada, um ponto $P(x, y, z)$ passa para a posição $P'(x + u, y + v, z + w)$, de modo que entre as componentes u , v , w do deslocamento e as deformações angulares pertinentes, ver Figura 2.8, existem as relações seguintes:

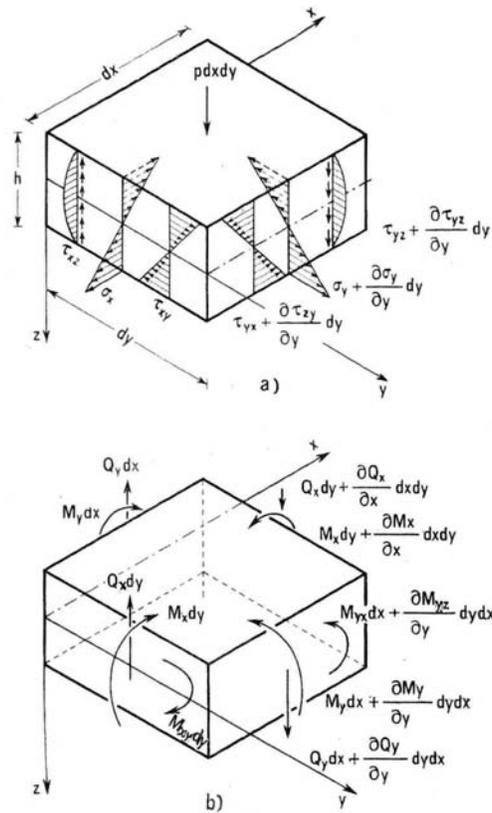


Figura 2.7: Esforços internos na superfície mediana do elemento.

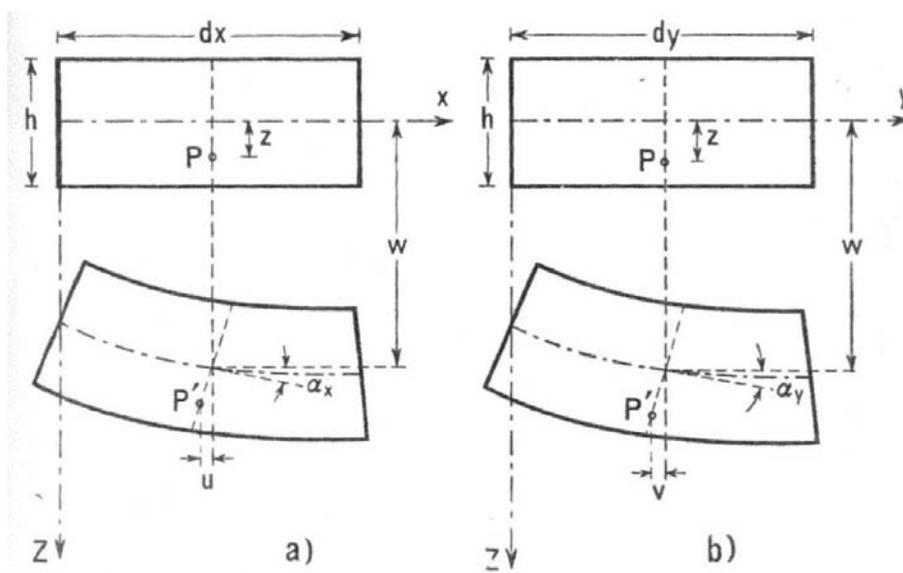


Figura 2.8: Seção antes e depois da deflexão.

$$\alpha_x \approx \operatorname{tg} \alpha_x = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.59)$$

$$\alpha_y \approx \operatorname{tg} \alpha_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.60)$$

$$u = -z \operatorname{sen} \alpha_x \approx -z \alpha_x = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.61)$$

$$v = -z \operatorname{sen} \alpha_y \approx -z \alpha_y = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.62)$$

Conseqüentemente, as deformações unitárias segundo x e y são ε_x e ε_y tais que:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.63)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (2.64)$$

Por outro lado, sendo E o módulo de elasticidade e μ o coeficiente de Poisson característicos do material da placa, podemos escrever pela lei de Hooke generalizada:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \mu \sigma_y \right) \quad (2.65)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left(\sigma_y - \mu \sigma_x \right). \quad (2.66)$$

Destas relações, se deduz:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y \right) \quad (2.67)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x \right). \quad (2.68)$$

Agora substituímos em (2.67) e (2.68) segundo (2.63) e (2.64) obtemos:

$$\sigma_x = -\frac{E}{1 - \mu^2} z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.69)$$

$$\sigma_y = -\frac{E}{1 - \mu^2} z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (2.70)$$

Com relação às tensões $\tau_{xy} = \tau_{yz}$ observamos que projetando-se a configuração deformada do elemento em estudo no plano xy evidencia-se uma deformação angular medida

pela distorção γ_{xy} tal que, sendo G o módulo de elasticidade transversal, temos pela lei de Hooke:

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = G \gamma_{xy}. \tag{2.71}$$

Com a notação indicada na Figura 2.9 podemos avaliar a distorção γ_{xy} e assim considerando as hipóteses admitidas (pequenas deformação, elasticidade linear) podemos escrever:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta \approx \text{tg } \alpha + \text{tg } \beta. \tag{2.72}$$

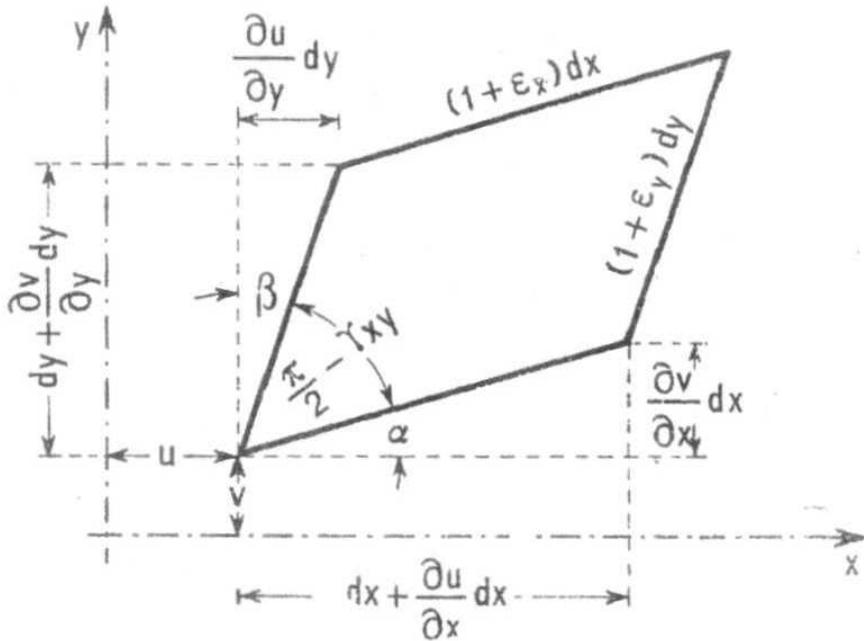


Figura 2.9: Distorções angulares.

Porém,

$$\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{\left(1 + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dy}. \tag{2.73}$$

E desprezando-se no denominador as derivadas em presença da unidade e, no numerador, os produtos combinados das diferenciais resulta, recorrendo a (2.61) e (2.62):

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2 z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{2.74}$$

Substituindo em (2.71) segundo (2.74) e sabendo que o módulo de elasticidade transversal G é dado por

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad (2.75)$$

obtemos:

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = -2G \ z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{E}{1 + \mu} \ z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.76)$$

Os esforços solicitantes M_x , M_y e M_{xy} podem ser obtidos através das relações (2.54) e (2.69), (2.55) e (2.70) assim como (2.58) e (2.76) respectivamente.

Considerando as hipóteses simplificadoras indicadas na subseção 2.5.1 em particular os itens 7 e 8, os deslocamentos verticais w (flechas) podem ser supostos independentes de x de modo que nas integrações (2.54), (2.55) e (2.58) as derivadas de segunda ordem de w são tratadas como constantes resultando:

$$M_x = -\frac{E}{12(1 - \mu^2)} \ h^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.77)$$

$$M_y = -\frac{E}{12(1 - \mu^2)} \ h^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.78)$$

$$M_{xy} = -\frac{G}{6} \ h^2 \ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -(1 - \mu) \frac{E}{12(1 - \mu^2)} \ h^2 \ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.79)$$

As relações existentes entre os momentos assim como as expressões relativas às forças cortantes Q_x , Q_y são obtidas a partir das condições de equilíbrio de um elemento da placa.

Considerando a Figura 2.7 temos:

1. Equacionando o equilíbrio vertical:

$$-Q_x dy + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_y dx + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx + p \ dx \ dy = 0,$$

isto é

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0. \quad (2.80)$$

2. Equacionando o equilíbrio de momentos em relação ao eixo O_y (desprezando os produtos $\frac{1}{2} \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx^2 dy$, $\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx^2 dy$ e $\frac{1}{2} p \ dx^2 dy$):

$$M_x dy - \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy + M_{yx} dx - \left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy \right) dx + Q_x dy dx = 0,$$

isto é

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0. \quad (2.81)$$

3. Equacionando o equilíbrio de momentos em relação ao eixo O_x (desprezando os produtos $\frac{1}{2} \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy^2$, $\frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy^2$, $\frac{1}{2} p dx dy^2$):

$$M_y dx - \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx + M_{xy} dy - \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) dy + Q_y dx dy = 0,$$

isto é

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0. \quad (2.82)$$

Derivando a equação (2.81) em relação a x , a equação (2.82) em relação a y e substituindo na equação (2.80) obtemos a relação entre os momentos:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p. \quad (2.83)$$

Substituindo em (2.82) segundo (2.78) e (2.80) resulta:

$$Q_x = -\frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right). \quad (2.84)$$

Analogamente considerando as equações (2.83), (2.79) e (2.80) obtemos:

$$Q_y = -\frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right). \quad (2.85)$$

Agora escrevemos

$$\frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)} = B = \text{conhecido como índice de rigidez à flexão da placa.} \quad (2.86)$$

Dessa maneira as relações (2.79), (2.80), (2.81), (2.84) e (2.85) podem ser escritas como a seguir:

$$M_x = -B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.87)$$

$$M_y = -B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.88)$$

$$M_{xy} = -B \left(1 - \mu \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.89)$$

$$Q_x = -B \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \mu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (2.90)$$

$$Q_y = -B \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \mu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right). \quad (2.91)$$

Calculando o momento de inércia para uma faixa de largura unitária temos:

$$J = \frac{1 \cdot h^3}{12}. \quad (2.92)$$

Podemos então escrever as tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} como a seguir:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{J} z \quad (2.93)$$

$$\sigma_y = \frac{M_y}{J} z \quad (2.94)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{M_{xy}}{J} z, \quad (2.95)$$

onde os valores extremos das tensões normais ocorrem para $z = \pm h/2$ e para as tensões de cisalhamento quando $z = 0$.

2.5.3 Equação diferencial da placa em coordenadas cartesianas

Nos desenvolvimentos anteriores determinamos as relações matemáticas envolvendo esforços, deformações e deslocamentos que nos permitem escrever a equação diferencial que governa o problema de flexão da placa elástica delgada, ou seja, o modelo matemático da placa delgada em coordenadas cartesianas.

Por derivação das equações (2.81) e (2.82) em relação a x e y respectivamente obtemos (2.83).

Agora consideramos (2.87), (2.88) e (2.89), e por derivação obtemos:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = -B \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \quad (2.96)$$

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -B \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \quad (2.97)$$

$$\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -B(1 - \mu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}. \quad (2.98)$$

Conseqüentemente substituindo em (2.83) segundo (2.96), (2.97) e (2.98) obtemos a equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{B}, \quad (2.99)$$

que é a conhecida equação de Lagrange.

Portanto para estudarmos uma determinada placa elástica e isotrópica de características geométricas, de carregamento e de vinculação conhecidas, devemos definir uma função $w(x, y)$ - ordenada da superfície elástica média deformada - tal que verifique a expressão fundamental (2.99) e satisfaça simultaneamente as condições de contorno correspondentes.

Assim, considerando faixas de largura unitária, podemos para cada ponto (x, y) calcular os valores dos momentos fletores (2.87) e (2.88), os momentos de torção (2.89) bem como os esforços cortantes (2.90) e (2.91) e conseqüentemente as tensões pertinentes através das expressões (2.92), (2.93), (2.94) e (2.95).

A equação em derivadas parciais (2.99), linear e não homogênea de quarta ordem pode ser desdobrada em duas equações em derivadas parciais de segunda ordem, considerando o operador Laplaciano como a seguir:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.100)$$

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \quad (2.101)$$

Assim podemos escrever (2.99) simbolicamente na forma:

$$\nabla^4 w = \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{p}{B}. \quad (2.102)$$

Por outro lado somando membro a membro (2.87) e (2.88) obtemos:

$$M_x + M_y = -(1 + \mu)B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -(1 + \mu)B \nabla^2 w, \quad (2.103)$$

de modo que podemos escrever

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \mu}. \quad (2.104)$$

M é conhecido como *soma reduzida de momentos* [10] e considerando (2.103) podemos escrever:

$$M = -B \cdot \nabla^2 w. \quad (2.105)$$

Obtemos também segundo (2.100), (2.101) e (2.102):

$$B \cdot \nabla^2 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (B \nabla^2 w) = p. \quad (2.106)$$

Portanto, segundo (2.105) e (2.106) a equação (2.99) é desdobrável nas duas seguintes equações em derivadas parciais de segunda ordem [37]:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -p \quad (2.107)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{B}. \quad (2.108)$$

O problema do estudo de uma placa elástica delgada fica assim reduzindo a determinar uma função $M(x, y)$ que, satisfazendo certas condições de contorno estabelecidas, verifique a equação (2.107) que é independente de w , devendo-se em seguida determinar, por sua vez, w considerando a expressão (2.108), mais simples que a (2.99). Observamos assim, que o desdobramento da equação de Lagrange nos conduz a duas equações de Poisson, evidenciando a grande versatilidade desse modelo matemático, que pode ser adotado para problemas de diversas áreas do conhecimento científico.

2.5.4 Condições de contorno

1. Considerações gerais

Conforme apresentamos no parágrafo anterior, a superfície elástica $w(x, y)$ e as solicitações correspondentes dadas pelas equações (2.87), (2.88), (2.89), (2.90) e (2.91) dependem não somente da forma da placa e das cargas que nela atuam, mas também

das condições a serem verificadas no contorno segundo as circunstâncias particulares de cada caso em apreço.

Vamos relacionar as condições de contorno para alguns casos particulares de interesse prático. O assunto pode ser aprofundado em [44].

2. Casos particulares de interesse prático

(a) Porção de contorno $x = \text{constante} = a$ completamente livre

Neste caso, em todos os pontos da porção de contorno definida por $x = a$, as tensões devem ser nulas. Conseqüentemente segundo (2.87) e outras considerações que envolvem esforços solicitantes internos [44] devemos ter:

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=a} = 0 \quad (2.109)$$

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} = 0. \quad (2.110)$$

(b) Porção de contorno $x = \text{constante} = a$ livremente apoiada sobre base rígida

Nesta hipótese, em todos os pontos da porção de contorno definida por $x = a$, as flechas w e os momentos M_x devem ser nulos, portanto devemos ter:

$$\left[w(x, y) \right]_{x=a} = 0 \quad (2.111)$$

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=a} = 0. \quad (2.112)$$

(c) Porção de contorno $x = \text{constante} = a$ livremente apoiada sobre base elástica

Nesta alternativa, em todos os pontos da porção de contorno definida por $x = a$, as flechas $w(a, y)$ devem satisfazer a lei $\phi(y)$ característica da deformação da base elástica, deve também ser nulo em cada ponto momento M_x . As condições de contorno são portanto

$$\left[w(x, y) \right]_{x=a} = \phi(y) \quad (2.113)$$

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=a} = 0. \quad (2.114)$$

(d) Porção de contorno $x = \text{constante} = a$ perfeitamente engastada

Neste caso, em todos os pontos da porção de contorno definida por $x = a$, devemos ter:

$$\left[w(a, y) \right]_{x=a} = 0 \quad (2.115)$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=a} = 0. \quad (2.116)$$

2.5.5 Analogia da membrana

A equação diferencial da placa em coordenadas cartesianas (2.99), como verificamos anteriormente, pode ser substituída pelas duas equações em derivadas parciais de segunda ordem (2.107) e (2.108).

Observamos que essas duas últimas relações são formalmente análogas à equação que caracteriza a configuração deformada de uma membrana preliminarmente plana solicitada pelas seguintes ações exteriores [37]:

1. força constante T por unidade de comprimento atuando em cada ponto normalmente ao contorno no plano tangente à membrana deformada;
2. carga transversal p distribuída por unidade de área, função das coordenadas x e y do ponto considerado na membrana.

Considerando uma membrana nas condições citadas e tendo presente os elementos indicados na Figura 2.10 temos:

(a) esforço atuando no elemento ab :

$$T_x \cdot dy \approx H \cdot dy$$

(b) componente vertical de $T_x \cdot dy$:

$$V_x \cdot dy = -T_x \cdot dy \cdot \text{sen } \varphi \approx -H \cdot dy \cdot \text{tg } \varphi = -H \frac{\partial z}{\partial x} dy$$

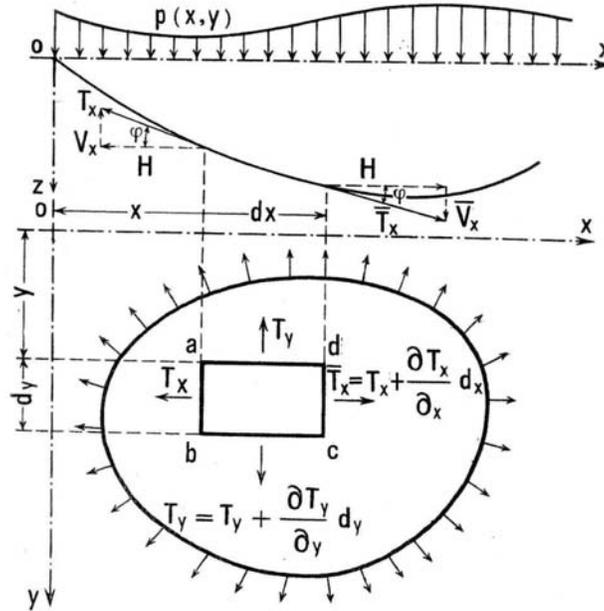


Figura 2.10: Esforços atuantes em um elemento da membrama.

(c) de forma análoga, a componente vertical do esforço atuando em cd é:

$$\hat{V}_x \cdot dy = \hat{T}_x \cdot dy \cdot \text{sen } \hat{\varphi} \approx H \cdot dy \cdot \text{tg } \hat{\varphi} = H \cdot dy \cdot \text{tg} \left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \right) = H \cdot dy \cdot \text{tg} \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx \right)$$

(d) resultante vertical das forças $V_x \cdot dy$ e $\hat{V}_x \cdot dy$:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} dx \cdot dy = H \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx \cdot dy$$

(e) resultante vertical das forças $T_x \cdot dy$ e $\hat{T}_x \cdot dy$ atuando nos elementos lineares ad e bc :

$$\frac{\partial V_y}{\partial y} dx \cdot dy = T_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx \cdot dy \approx H \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx \cdot dy$$

(f) equação de equilíbrio:

$$p dx dy + H \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx \cdot dy + H \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx \cdot dy = 0$$

(g) equação diferencial da superfície procurada:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{p}{H}. \quad (2.117)$$

As equações (2.107), (2.108) e (2.117) são portanto da mesma forma.

As integrações sucessivas das equações (2.107) e (2.108) constituem assim dois problemas idênticos à determinação da configuração deformada de uma membrana tensa e carregada nas condições referidas, o que pode ser feito, em princípio para diversos casos de interesse prático, por meio de experimentação adequada. A utilização de analogias constitui assim uma técnica de modelagem matemática muito interessante na solução de problemas da ciência e da tecnologia.

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS EM PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS

“Por mais sutil que venha a ser a nossa ciência pura ela sempre encontrará uma fonte de inspiração no mundo sensível, cuja infinita riqueza ser-lhe-á impossível traduzir integralmente.”

(Amoroso Costa)

3.1 Considerações gerais

Virtualmente todo fenômeno natural, quer biológico, geológico ou mecânico, pode ser descrito com auxílio de leis da física em termos de equações algébricas, diferenciais ou integrais relacionando quantidades variáveis de interesse. Determinar a distribuição das tensões em um recipiente de pressão com cavidades de formas diversas e numerosos enrijecedores, sujeitos a esforços mecânicos, térmicos ou aerodinâmicos; determinar a concentração de poluentes na água do mar ou na atmosfera e fazer simulações do tempo a fim de interpretar ou prever a mecânica de formação de tornados, tufões e furacões são alguns poucos exemplos de pro-

blemas práticos importantes. Enquanto a obtenção das equações que regem esses problemas não sejam necessariamente difíceis, suas soluções pelos métodos exatos da análise matemática, ditas soluções analíticas, é uma tarefa formidável na grande maioria dos problemas de interesse prático. À guisa de informação e esclarecimento apresentamos a seguir breve comentário e exemplo da solução analítica de uma equação diferencial parcial de segunda ordem.

3.1.1 Solução analítica de uma equação diferencial parcial

A solução analítica de uma equação diferencial consiste na construção de funções com expressões analíticas bem definidas que satisfaçam a equação diferencial, bem como as condições adicionais de contorno e iniciais. De um modo geral, esse procedimento é obtido com fórmulas expressas em termos de combinações algébricas das funções elementares do cálculo - polinômios, funções trigonométricas, logaritmos, exponenciais. A experiência tem mostrado que tais soluções são viáveis apenas para uma seleção limitada de problemas práticos e ainda frequentemente envolvem a utilização de somas infinitas (séries), cuja avaliação é aproximada. Entre os métodos mais utilizados citamos o de separação de variáveis com uso da série de Fourier (1768-1830).

exemplo.

Vamos considerar o problema da corda vibrante, representada no intervalo $[0, l]$ do eixo x , fixada em suas extremidades.

A solução que apresentamos considera as condições iniciais de Cauchy (1789-1857); temos portanto que o problema físico da corda vibrante, modelado pela equação diferencial parcial de segunda ordem conhecida com equação de onda é um *problema bem-posto*, ou seja, apresenta exatamente uma solução (existência e unicidade), a qual varia continuamente com os dados (estabilidade) [17].

Usando (2.4) apresentamos o problema sob a forma:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad 0 < x < l, \quad t > 0 \qquad (3.1)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.2)$$

$$u_t(x, 0) = g(x) \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.3)$$

$$u(0, t) = 0 \quad t \geq 0 \quad (3.4)$$

$$u(l, t) = 0 \quad t \geq 0 \quad (3.5)$$

onde f e g são o deslocamento inicial e a velocidade inicial, respectivamente.

Pelo método de separação de variáveis, vamos admitir a solução na forma

$$u(x, t) = X(x)T(t) \neq 0 \quad (3.6)$$

Substituindo (3.6) em (3.1), obtemos

$$XT'' = c^2 X''T \quad (3.7)$$

e então

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T}, \quad (3.8)$$

sempre que $XT \neq 0$. Desde que o 1º membro de (3.7) independe de t e o 2º membro independe de x , podemos escrever

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = \lambda, \quad (3.9)$$

onde λ é uma constante de separação e então,

$$X'' - \lambda X = 0 \quad (3.10)$$

$$T'' - \lambda c^2 T = 0. \quad (3.11)$$

Agora vamos usar as condições de contorno. De (3.4) e (3.6), obtemos

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0. \quad (3.12)$$

Sabemos que

$$T(t) \neq 0 \quad (3.13)$$

para todos os valores de t , portanto

$$X(0) = 0. \quad (3.14)$$

De maneira similar a condição de contorno (3.5) implica

$$X(l) = 0. \quad (3.15)$$

Assim determinamos $X(x)$ resolvendo preliminarmente o problema de autovalor

$$X'' - \lambda X = 0 \quad (3.16)$$

$$X(0) = 0 \quad (3.17)$$

$$X(l) = 0 \quad (3.18)$$

Procuramos pelos valores de λ que fornecem soluções não triviais; vamos então investigar três casos possíveis: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda < 0$.

Caso 1. $\lambda > 0$

A solução geral neste caso é da forma

$$X(x) = Ae^{-\sqrt{\lambda}x} + Be^{\sqrt{\lambda}x}, \quad (3.19)$$

onde A e B são constantes arbitrárias [11]. Para satisfazer as condições de contorno devemos ter

$$A + B = 0 \quad \text{e} \quad Ae^{-\sqrt{\lambda}l} + Be^{\sqrt{\lambda}l} = 0 \quad (3.20)$$

Notamos que o determinante do sistema linear homogêneo dado por (3.20) é diferente de zero, conseqüentemente, A e B devem ser ambos iguais a zero e portanto a solução geral $X(x)$ é identicamente nula. A solução é trivial.

Caso 2. $\lambda = 0$

Aqui a solução geral é da forma [11]

$$X(x) = A + Bx, \quad (3.21)$$

Aplicando as condições de contorno obtemos

$$A = 0 \quad \text{e} \quad A + Bl = 0, \quad (3.22)$$

consequentemente $A = B = 0$. Então a solução é identicamente nula.

Caso 3. $\lambda < 0$

Neste caso, a solução geral assume a forma [11]

$$X(x) = A \cos(\sqrt{-\lambda}x) + B \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x) \quad (3.23)$$

Da condição (3.14), $X(0) = 0$ resulta que $A = 0$. A condição (3.15), $X(l) = 0$ fornece

$$B \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}l) = 0. \quad (3.24)$$

Se $B = 0$, a solução é trivial. Para soluções não triviais, resulta

$$B \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}l) = 0. \quad (3.25)$$

Esta equação é satisfeita quando $\sqrt{-\lambda}l = n\pi$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ ou ainda

$$-\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2. \quad (3.26)$$

Para esse conjunto infinito de valores discretos de λ , o problema tem solução não trivial. Esses valores de λ são chamados de autovalores do problema e as funções

$$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$ são as correspondentes autofunções. Como $\operatorname{sen}\left(\frac{-n\pi}{l}x\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$, não precisamos considerar valores negativos de n , portanto as soluções do problema (3.16), (3.17) e (3.18) são

$$X_n(x) = B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right). \quad (3.27)$$

Para $\lambda = \lambda_n$, e considerando o procedimento anterior, a solução geral da equação (3.11) pode ser escrita na forma,

$$T_n(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) + D_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}ct\right), \quad (3.28)$$

onde C_n e D_n são constantes arbitrárias e $c = \frac{x}{t}$. Então de (3.6), (3.27) e (3.28) concluímos que as funções

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = (a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}ct\right)) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad (3.29)$$

satisfazem a equação (3.1) e as condições de contorno (3.4) e (3.5), onde $a_n = B_n C_n$ e $b_n = B_n D_n$. Como (3.1) é linear e homogênea, podemos utilizar o princípio da superposição e então a série infinita

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\frac{n\pi}{l} ct) + b_n \text{sen}(\frac{n\pi}{l} ct)) \text{sen}(\frac{n\pi}{l} x) \quad (3.30)$$

é também uma solução, verificada que é contínua e diferenciável duas vezes em relação a x e t [45]. Desde que cada termo da série (3.30) satisfaz as condições de contorno (3.4) e (3.5), a série também satisfaz essas condições. Ainda restam duas condições iniciais a serem satisfeitas e a partir dessas condições podemos determinar as constantes a_n e b_n . Inicialmente diferenciamos (3.30) em relação a t obtemos

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} c (-a_n \text{sen}(\frac{n\pi}{l} ct) + b_n \cos(\frac{n\pi}{l} ct)) \text{sen}(\frac{n\pi}{l} x). \quad (3.31)$$

Aplicando as condições de iniciais (3.2) e (3.3), temos

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \text{sen}(\frac{n\pi}{l} x)) \quad (3.32)$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n (\frac{n\pi}{l} c) \text{sen}(\frac{n\pi}{l} x)). \quad (3.33)$$

Estas equações são satisfeitas se $f(x)$ e $g(x)$ podem ser representadas por séries de Fourier em senos [45]; os coeficientes são dados por

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \text{sen}(\frac{n\pi}{l} x) dx, \quad (3.34)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l g(x) \text{sen}(\frac{n\pi}{l} x) dx \quad (3.35)$$

Concluimos que a solução analítica do problema da corda vibrante (equação de onda) é dada pela série (3.30) onde os coeficientes a_n e b_n são determinados pelas fórmulas (3.34) e (3.35).

3.1.2 Soluções por aproximações numéricas

Com o exemplo da corda vibrante mostramos a obtenção de uma solução analítica para um problema bem-posto com condições iniciais e de contorno simples e expressas matematicamente de forma simples. Entretanto a realidade tem mostrado que lidando com equações resultantes da modelagem de fenômenos físicos, a determinação de soluções exatas em domínios simples são difíceis mesmo que as condições iniciais e de contorno sejam simples [45]. Várias são as dificuldades que podem surgir na busca destas *soluções exatas*: complexidade da região, os coeficientes da equação podem variar iteponto a ponto e até mesmo depender da própria solução (problemas não lineares) [17]. Uma alternativa às soluções exatas, que tem sido cada vez mais usada desde o advento dos computadores, são as aproximações numéricas viabilizadas pelos métodos aproximados da análise matemática. Entre esses, o método das diferenças finitas, os métodos variacionais, como os Ritz-Rayleigh e Galerkin e ainda o método dos elementos finitos, derivado dos métodos variacionais são frequentemente os mais utilizados.

Na aproximação de uma equação diferencial por diferenças finitas, as derivadas são substituídas por quocientes de diferenças entre valores da solução em pontos de malhas discretas do domínio, e o sistema de equações resultante é resolvido após a imposição das condições de contorno para valores da solução nos pontos da malha. Embora o método das diferenças finitas seja simples na concepção, ele sofre de várias desvantagens. As mais relevantes são a inexatidão das derivadas da solução aproximada, a dificuldade na imposição das condições de contorno ao longo de fronteiras não retilíneas, a dificuldade em representar de forma exata domínios geometricamente complexos e inaptidão na utilização de malhas não uniformes e não retangulares.

Na solução por método variacional a equação diferencial é colocada em uma forma variacional equivalente, e então a solução aproximada é assumida como uma combinação $\sum c_j \phi_j$ de funções aproximadoras ϕ_j previamente construídas. Os parâmetros c_j são determinados a partir da forma variacional. Os métodos variacionais sofrem da desvantagem de que as funções aproximadoras para problemas com domínios arbitrários são de difícil construção.

O método dos elementos finitos, que introduzimos resumidamente neste capítulo, alivia as dificuldades dos métodos variacionais porque estabelece um procedimento sistemático para a construção das funções aproximadoras. O método é dotado de duas características básicas que contribuem para sua popularidade. Primeiro, um domínio de forma geométrica complexa de um determinado problema é representado como uma coleção de subdomínios de forma geométrica simples, chamados de *elementos finitos*. Segundo, sobre cada elemento finito as funções aproximadoras são construídas usando a idéia básica de que toda função contínua pode ser representada por uma combinação linear de polinômios algébricos. As funções aproximadoras são obtidas usando conceitos da teoria da interpolação polinomial, e por isso são conhecidas como *funções de interpolação*. O método dos elementos finitos pode ser interpretado como uma aplicação via discretização dos métodos variacionais na qual as funções aproximadoras são polinômios algébricos e os parâmetros indeterminados são representados por valores da solução em um número finito de pontos pré-selecionados chamados “nós” no contorno e no interior do elemento. A teoria da interpolação polinomial indica que o grau das funções de interpolação depende do número de nós do elemento finito e da suavidade exigida para a solução.

3.2 Método dos elementos finitos - notícia histórica

A idéia de representar um determinado domínio como uma coleção de elementos discretos não é uma novidade que surgiu com o método dos elementos finitos. Basta recordar que matemáticos da antiguidade avaliaram o valor π utilizando a percepção de que o perímetro de um polígono inscrito em um círculo é uma aproximação para o comprimento da circunferência do círculo. Eles foram capazes de avaliar o valor de π com exatidão de aproximadamente 40 dígitos significativos, representando o círculo como um polígono regular com um número finito, porém elevado de lados. Nos tempos modernos, a idéia encontrou guarida na análise estrutural de aeronaves, onde por exemplo, asas e fuselagem são tratadas como conjuntos de cabos, cascas e painéis cizalhantes. Em 1941 Herenikoff introduziu o método estrutural em que um meio elástico plano era representado por um conjunto de barras e vigas. A utilização

de funções contínuas discretizadas, definidas sobre um subdomínio para aproximar a função incógnita data de 1943, com o trabalho de Courant, que utilizou um conjunto de elementos triangulares e o princípio da energia potencial mínima para estudar o problema de torção de St. Venant. Conforme encontramos em [35], embora certos aspectos fundamentais do método dos elementos finitos possam ser encontrados nos trabalhos de Herenikoff (1941) e Courant (1943), a apresentação formal do método dos elementos finitos é atribuída a Agyres e Kelsey (1960) e Turner, Clough, Martin e Topp (1956), ainda segundo esse autor o termo “elemento finito” foi usado pela primeira vez por Clough em 1960.

3.3 Conceitos básicos do método dos elementos finitos

Vamos apresentar as idéias básicas do método dos elementos finitos através de um exemplo simples.

exemplo - área de um círculo:

Consideramos o problema da determinação da área de um círculo de raio R utilizando sua representação como uma coleção de triângulos e assumimos que a área de um triângulo pode ser calculada (isto é conhecemos a equação ou a fórmula para calcular a área de um triângulo). A área aproximada do círculo é a soma das áreas dos triângulos usados para representar o círculo. Embora este seja um exemplo simples podemos com ele mostrar várias das idéias e passos envolvidos na utilização do método dos elementos finitos. Mostramos os passos necessários ao cálculo da área aproximada e ao fazê-lo introduzimos conceitos que são utilizados na análise de um problema pelo método dos elementos finitos.

3.3.1 Discretização em elementos finitos

Inicialmente, a região contínua (isto é, o círculo) é representada como uma coleção de um número finito de subregiões (neste exemplo, triângulos). A esse procedimento chamamos *discretização do domínio* por triângulos e cada uma das regiões chamamos um *elemento*. A coleção das arestas dos elementos, denominamos de *malha de elementos finitos* ou *rede de elementos finitos*. Neste exemplo discretizamos o círculo em uma rede de cinco $n = 5$

triângulos e duas discretizações são mostradas na Figura 3.1. Como todos os elementos da discretização são iguais entre si chamamos a rede ou malha de *uniforme*.

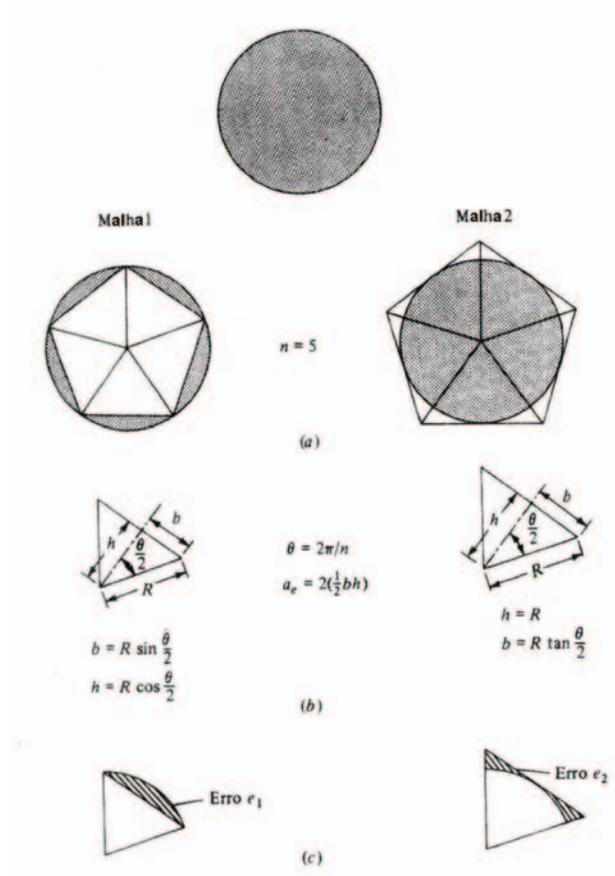


Figura 3.1: Representação de um círculo por elementos finitos. (a) Discretização por elementos finitos. (b) Elemento finito típico. (c) Erro de aproximação na fronteira.

3.3.2 Equação associada a um elemento

Um elemento típico (isto é, um triângulo) é isolado e sua propriedade (isto é, sua área) é computada; é aqui que levamos em consideração a equação que rege a propriedade requerida do elemento para efetuar seu cálculo. Seja A_{e1} a área do elemento e na malha M_1 e A_{e2} a área do elemento e na malha M_2 . Temos então:

$$A_{e1} = \frac{R^2}{2} \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \quad e \quad A_{e2} = \frac{R^2}{2} \text{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

onde R é o raio do círculo. As equações acima são chamadas *equações dos elementos*.

3.3.3 Montagem ou reunião das equações dos elementos e solução

A área aproximada do círculo é obtida pela reunião das propriedades de cada elemento. A esse processo chamamos *montagem ou reunião* das equações dos elementos. A *montagem* é baseada na idéia simples de que a área total da reunião dos elementos é igual à soma das áreas de cada elemento individualmente.

$$A_1 = \sum_{i=1}^n (A_{e1i}) \quad e \quad A_2 = \sum_{i=1}^n (A_{e2i}).$$

Como as malhas são uniformes, A_{e1} ou A_{e2} são sempre as mesmas para cada um dos elementos de cada uma das malhas e assim temos:

$$A_1^{(n)} = n \frac{R^2}{2} \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \quad e \quad A_2^{(n)} = n R^2 \text{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

3.3.4 Convergência e estimativa do erro

Para este problema conhecemos a solução exata: $A_o = \pi R^2$ então podemos estimar o erro da aproximação e verificar que a solução aproximada converge para a solução exata no limite quando n tende para o infinito. Para um elemento típico e , o erro da aproximação é igual à diferença entre a área do setor circular e a área do triângulo.

$$\epsilon_1 = |S_e - A_{e1}| \quad e \quad \epsilon_2 = |S_e - A_{e2}|$$

onde $S_e = \frac{R^2\theta}{2}$ é a área do setor. Então o erro estimado para um elemento das malhas M_1 e M_2 é dado por:

$$\epsilon_1 = \left| R^2 \left(\frac{\pi}{n} - \frac{1}{2} \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right) \right| \quad e \quad \epsilon_2 = \left| R^2 \left(\text{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) - \frac{\pi}{n} \right) \right|.$$

O erro total ou global é obtido multiplicando ϵ_i ; $i = 1, 2, 3, \dots$ por n . Obtemos:

$$E_1^{(n)} = \left| R^2 \left(\pi - \frac{n}{2} \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right) \right| = \left| \pi R^2 - A_1^{(n)} \right|$$

e

$$E_2^{(n)} = \left| R^2 \left(n \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) - \pi \right) \right| = \left| A_2^{(n)} - \pi R^2 \right|.$$

Vamos agora mostrar que $E_1^{(n)}$ e $E_2^{(n)}$ tendem para zero quando n tende para o infinito.

Fazendo a troca de variável $x = \frac{2}{n}$, temos:

$$A_1^{(n)} = R^2 \frac{n}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = R^2 \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_1^{(n)} = \lim_{x \rightarrow 0} R^2 \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \pi R^2 \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x} = \pi R^2.$$

De maneira análoga fazendo a troca de variável $y = \frac{1}{n}$ teremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_2^{(n)} = \lim_{y \rightarrow 0} R^2 \frac{\operatorname{tg}(\pi y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \pi R^2 \frac{\operatorname{tg}(\pi y)}{\pi y} = \pi R^2.$$

Então, $E_1^{(n)} = E_2^{(n)} = 0$ quando n tende para o infinito, o que prova a convergência.

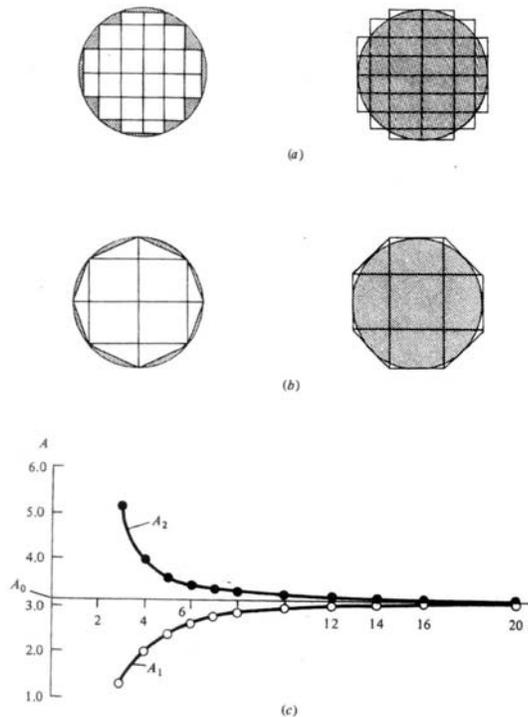


Figura 3.2: Discretização por elementos finitos retangulares e triangulares, e convergência das soluções. (a) Malha de elementos retangulares. (b) Malha de elementos retangulares e triangulares. (c) Convergência da solução por elementos finitos.

É importante destacar que podemos utilizar outras discretizações, por exemplo com retângulos, ou uma combinação de triângulos e retângulos, como ilustra a Figura 3.2a e b. O erro de aproximação em cada caso é diferente. Na Figura 3.2c apresentamos os gráficos de $A_1^{(n)}$ e $A_2^{(n)}$ para a convergência da solução por elementos finitos. Devemos ainda notar que a equação para cálculo da área do elemento é usada na sua forma exata, e assim nenhum erro de aproximação é introduzido na solução da equação nesse procedimento.

3.4 Formulação do método dos elementos finitos

Utilizamos um exemplo para ilustrar a formulação e apresentação do método dos elementos finitos, considerando a equação de Poisson

$$-\nabla^2 u - 1 = 0 \quad (3.36)$$

em um domínio $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1\}$ satisfazendo as condições de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0$$

$$u(1, y) = u(x, 1) = 0.$$

Apresentamos o exemplo de forma a deixar caracterizadas as idéias básicas do M.E.F., como detalhamos a seguir.

3.4.1 Formulação variacional

Para obter a chamada forma variacional, vamos dividir o domínio Ω em subdomínios, ou seja em *elementos finitos*. Neste caso adotaremos elementos retangulares, num total de 4(quatro). Entretanto podem ser usadas outras subdivisões do domínio, como: retângulos menores ou ainda triângulos. A Figura 3.3, ilustra a divisão do domínio em elementos finitos, uma *discretização*, na qual o domínio foi discretizado em elementos finitos retangulares iguais entre si.

O passo seguinte é a obtenção da forma variacional da equação (3.36) sobre *um elemento finito típico*, e para tal, multiplicamos a equação (3.36) por uma função v , dita

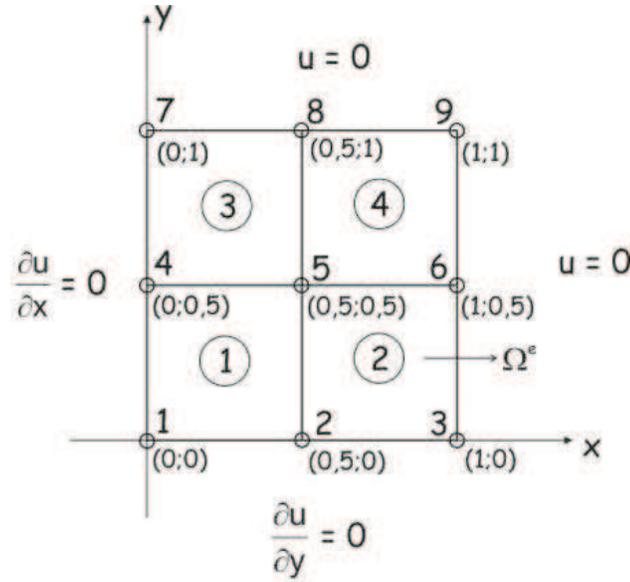


Figura 3.3: Domínio Ω dividido em quatro elementos finitos retangulares Ω^e . Pontos nodais em cada elemento são quatro, num total de nove. Condições de contorno.

função teste, supostamente diferenciável uma vez em relação a x e y , e integramos sobre o elemento finito típico Ω^e do domínio Ω . Assim, passamos de

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - 1 = 0$$

para

$$\int_{\Omega^e} v \left[-\frac{\partial}{\partial x}(F_1) - \frac{\partial}{\partial y}(F_2) - 1 \right] dx dy = 0$$

onde $F_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$ e $F_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$.

Considerando as identidades

$$-v \frac{\partial F_1}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(v F_1) + \frac{\partial v}{\partial x} F_1 \text{ e}$$

$$-v \frac{\partial F_2}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(v F_2) + \frac{\partial v}{\partial y} F_2,$$

a equação anterior toma a forma:

$$\int_{\Omega^e} \left[-\frac{\partial}{\partial x}(v F_1) + \frac{\partial v}{\partial x} F_1 \right] dx dy + \int_{\Omega^e} \left[-\frac{\partial}{\partial y}(v F_2) + \frac{\partial v}{\partial y} F_2 \right] dx dy + \int_{\Omega^e} (-v) dx dy = 0$$

ou ainda,

$$\int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial v}{\partial x} F_1 + \frac{\partial v}{\partial y} F_2 - v \right] dx dy - \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x} (v F_1) dx dy - \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial y} (v F_2) dx dy = 0.$$

Nos dois últimos termos desta equação reconhecemos o teorema da divergência, e assim podemos escrever

$$\int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x} (v F_1) dx dy + \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial y} (v F_2) dx dy = \oint_{\Gamma^e} v F_1 n_x ds + \oint_{\Gamma^e} v F_2 n_y ds = \oint_{\Gamma^e} v \frac{\partial u}{\partial x} n_x dx + \oint_{\Gamma^e} v \frac{\partial u}{\partial y} n_y dy.$$

Fazendo estas substituições na equação anterior, onde já consideramos $F_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$ e $F_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$ e considerando ainda que Γ^e é a fronteira ou contorno de Ω^e e $\vec{n} = (n_x, n_y)$ é o vetor unitário normal a Γ^e obtemos,

$$\int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - v \right] dx dy - \oint_{\Gamma^e} v \left[n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial u}{\partial y} \right] ds = 0.$$

Fazendo $q_n = n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial u}{\partial y}$, obtemos a forma variacional da equação considerada, $\nabla^2 u - 1 = 0$, ou seja,

$$\int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - v \right] dx dy - \oint_{\Gamma^e} q_n v ds = 0 \quad (3.37)$$

Obs.: A função $q_n = q_n(s)$ representa a projeção do vetor $\vec{F} = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j}$ sobre a normal de vetor unitário $\vec{n} = (n_x, n_y)$ ao contorno Γ^e , ou ainda pode ser interpretada com a derivada de u na direção da normal \vec{n} ao contorno Γ^e . A variável q_n é de interesse na Física em problemas, como por exemplo, a transferência de calor em meios anisótropos, onde representa o fluxo de calor através do contorno do elemento Ω^e .

3.4.2 Formulação em elementos finitos

A forma variacional (3.37) indica que a aproximação a ser escolhida para u , que indicamos por \hat{u} , deve ser pelo menos do primeiro grau em x e y , pois os dois primeiros termos e q_n são não nulos.

Fazendo-se

$$\hat{u} = \sum_{k=1}^u u_k \Psi_k, \quad (3.38)$$

onde $u_k \cong u(P_k)$, isto é, no nó $P_k(x_i, y_j)$ temos $u_k \cong u(x_i, y_j)$ e $\Psi_k(x, y)$ são funções de interpolação convenientemente escolhidas (depende da suavidade da solução desejada) e de preferência do primeiro grau em x e y com a propriedade:

$$\Psi_l(P_k) = \delta_{lk} \quad l, k = 1, 2, 3, 4 \quad (3.39)$$

Neste exemplo em particular as funções devem ter a primeira derivada integrável no domínio da solução. A forma específica de Ψ_l será determinada pela forma do elemento finito (triangular, retangular etc.).

Agora vamos substituir u por \hat{u} dada em (3.38) e v por $\Psi_l(x, y); l = 1, 2, \dots, n = 4$ de acordo com (3.39) na forma variacional (3.37), obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{n=4} \left\{ \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \Psi_l}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial x} u_k + \frac{\partial \Psi_l}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial y} u_k - \Psi_l \right] dx dy \right\} - \oint_{\Gamma^e} \Psi_l q_n ds \implies \\ 0 &= \sum_{k=1}^{n=4} \left\{ \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \Psi_l}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_l}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial y} \right] dx dy \right\} u_k - \int_{\Omega^e} \Psi_l dx dy - \oint_{\Gamma^e} \Psi_l q_n ds \end{aligned}$$

Fazendo-se:

$$a_{lk}^{(e)} = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \Psi_l}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_l}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial y} \right] dx dy \quad (*)$$

e

$$f_l^{(e)} = \int_{\Omega^e} \Psi_l dx dy + \oint_{\Gamma^e} \Psi_l q_n ds \quad (**)$$

obtemos

$$0 = \sum_{k=1}^{n=4} a_{lk}^{(e)} u_k - f_l^{(e)} \implies \sum_{k=1}^{n=4} a_{lk}^{(e)} u_k = f_l^{(e)}. \quad (3.40)$$

A equação (3.40) representa uma nova formulação que chamamos de o *modelo em elementos finitos* da equação $\nabla^2 u - 1 = 0$.

O cálculo dos $a_{lk}^{(e)}$ e dos $f_l^{(e)}$ será efetuado através de (*) e de (**) após a construção das funções de interpolação Ψ_l .

3.4.3 Funções de interpolação

No exemplo ilustrativo, os elementos finitos da discretização são idênticos. Vamos determinar os elementos da matriz $[a_{kl}]$ para apenas um elemento finito, por exemplo, o elemento 1.

Para um elemento com 4 pontos nodais, a função interpoladora que vamos adotar para a aproximação de u será

$$\hat{u}(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy$$

com $\hat{u}(x_k, y_k) = \hat{u}_k$. Temos que nos pontos nodais:

$$\hat{u}_1 = \hat{u}(0; 0) = c_1 + 0c_2 + 0c_3 + 0c_4$$

$$\hat{u}_2 = \hat{u}(0, 5; 0) = c_1 + 0,5c_2 + 0c_3 + 0c_4$$

$$\hat{u}_3 = \hat{u}(0, 5; 0, 5) = c_1 + 0,5c_2 + 0,5c_3 + 0,25c_4$$

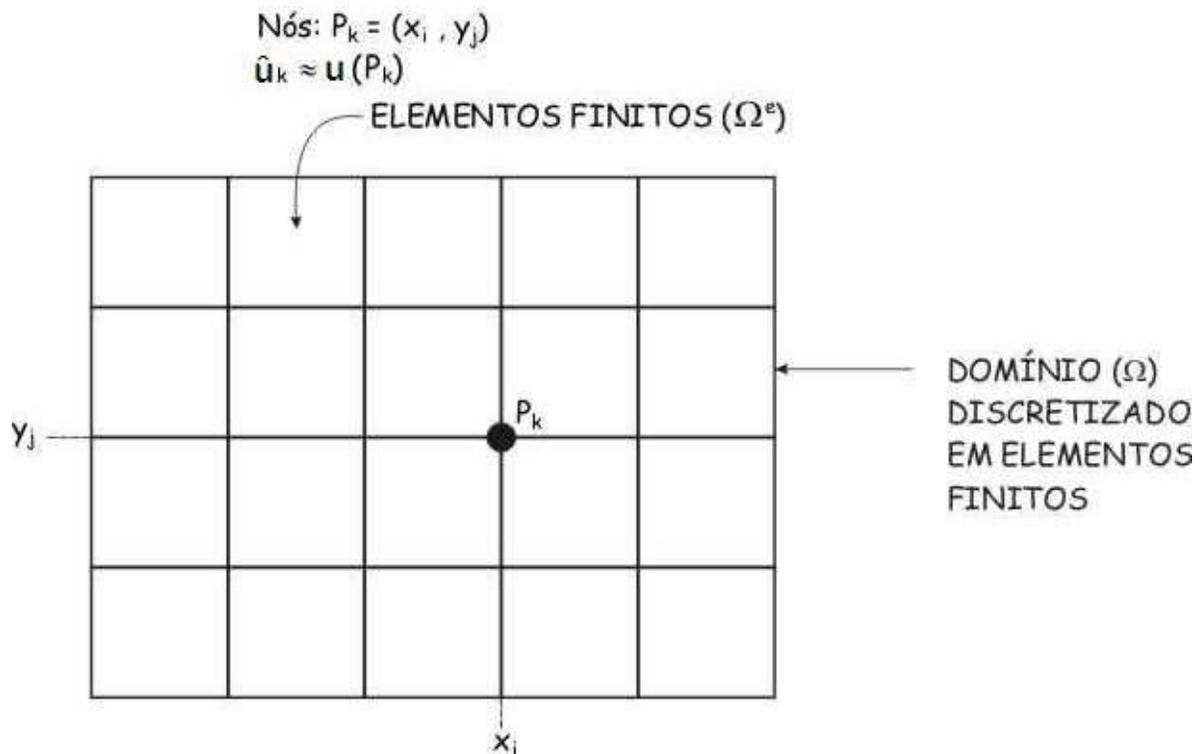


Figura 3.4: Nó $P_k = (x_i, y_j)$ no domínio Ω discretizado.

$$\hat{u}_4 = \hat{u}(0; 0, 5) = c_1 + 0c_2 + 0,5c_3 + 0c_4$$

Em Seguida:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{0,25} \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Escrevemos agora

$$\hat{u}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y & xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 & \Psi_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

E substituindo a equação (3.41) na (3.42) obtemos:

$$\Psi_1 = (1 - 2x)(-2y) = 1 - 2x - 2y - 4xy$$

$$\Psi_2 = 2x(1 - 2y) = 2x - 4xy$$

$$\Psi_3 = 4xy$$

$$\Psi_4 = (1 - 2x)2y = -4xy + 2y$$

De posse das Ψ_l , $l = 1, 2, 3, 4$ podemos determinar $a_{lk}^{(e)}$ e $f_l^{(e)}$ com as expressões (*) e (**). Como $f_l^{(e)} = \int_{\Omega^e} \Psi_l dx dy + \oint_{\Gamma^e} \Psi_l q_n ds$ devemos ainda calcular a parcela $\oint_{\Gamma^e} \Psi_l q_n ds = Q_l^{(e)}$ que depende de q_n e portanto do contorno do elemento finito.

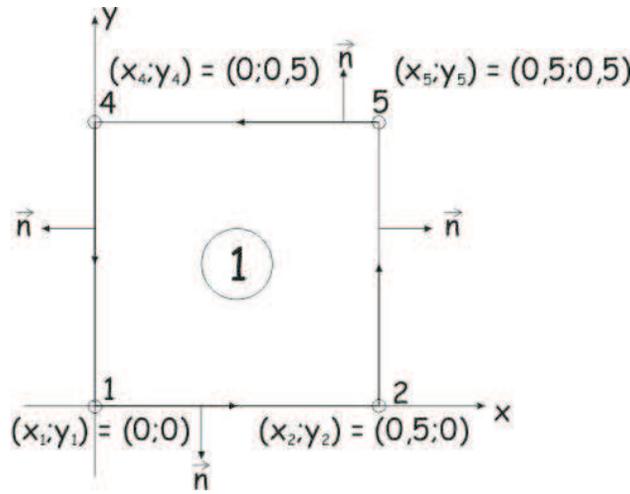


Figura 3.5: Elemento Finito número 1: Cálculo de $Q_l^{(e)}$

A expressão para $Q_l^{(e)}$ será:

$$Q_l^{(e)} = \int_{x_1=0}^{x_2=0,5} [qn\Psi_l(x, y)]_{y=0} dx + \int_{y_2=0}^{y_3=0,5} [qn\Psi_l(x, y)]_{x=0,5} dy + \int_{x_3=0,5}^{x_4=0} [qn\Psi_l(x, y)]_{y=0,5} dx + \int_{y_4=0,5}^{y_1=0} [qn\Psi_l(x, y)]_{x=0} dy$$

com $q_n = n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial u}{\partial y}$ avaliada em cada trecho (bordo) do elemento.

3.4.4 Algoritmo-método dos elementos finitos

Vamos agora apresentar um algoritmo para aproximar a solução de uma equação diferencial parcial do mesmo tipo que utilizamos no exemplo (item 3.4). Trata-se de uma equação de Poisson, ou seja, da forma

$$-\nabla^2 u - f = 0 \quad \text{ou} \quad -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f = 0,$$

com domínio $\Omega \subset R^2$ e condições de contorno também definidas como em nosso exemplo já referido.

1. Formulação variacional A utilização do método dos elementos finitos exige que a equação diferencial considerada seja colocada na forma variacional e para tal o domínio Ω deve ser discretizado em elementos finitos (Ω^e). A forma variacional é obtida sobre um

elemento típico Ω^e multiplicando-se a equação diferencial por uma função v de teste, supostamente diferenciável uma vez em relação a x e y , e integrando sobre o elemento típico Ω^e , conforme está exposto no item (3.4.1).

2. Algoritmo 1º passo-discretização: divida o domínio ou região Ω em elementos finitos (triângulos e/ou retângulos são os mais comuns) de modo que a união dos elementos represente uma aproximação do domínio Ω , constituindo uma malha de elementos finitos. Cada elemento finito e seus vértices ou nós devem ser identificados por um número. determine também as coordenadas cartesianas de cada nó. 2º passo-determinação das funções de interpolação: para cada elemento a função \hat{u} é aproximada por um polinômio de grau fixo em x e y para elementos triangulares usar o polinômio

$$\hat{u}(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y$$

para elementos retangulares usar o polinômio

$$\hat{u}(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy \text{ os coeficientes } c_r \text{ são determinados a partir dos valores de } u \text{ em cada nó do elemento considerado, ou seja } \hat{u}_k \approx u(P_k) \text{ com } P_k = (x_i, y_j) \text{ ver exemplo ilustrativo, item 3.4.3; agora considere } \hat{u}(x, y) = \sum_{k=1}^m u_k \Psi_k \text{ e que } \Psi_l(P_k) = \delta_{lk} \quad l, k = 1, 2, 3, \dots, m \text{ para obter as funções de interpolação } \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m \text{ para cada nó do elemento.}$$

3º passo-matrizes dos elementos: de posse das funções de interpolação Ψ_m determinar cada elemento das matrizes $[a_{lk}^{(e)}]$ e $[f_l^{(e)}]$ com auxílio das expressões (*) e (**), ver item 3.4.2. 4º passo-montagem da matriz global e resolução do sistema linear:

montar as matrizes $A = (a_{ij})_N$ e $F = (f_j)_N$ resultantes da reunião conveniente das matrizes de cada elemento e resolver o sistema linear

$$AU = B$$

com $U = (U_j)_N$, N =número de nós da malha de elementos.

Para um detalhamento deste algoritmo consultar [12].

3.4.5 Considerações sobre a convergência, completude e conformidade do método dos elementos finitos

Uma solução de um problema pelo método dos elementos finitos deve ser uma aproximação da solução exata. São questões importantes o quanto essa solução é próxima e se converge ou não para a solução exata. Apresentamos aqui algumas considerações sobre a exatidão e a convergência do método dos elementos finitos com o auxílio de argumentos heurísticos oriundos da experiência e da prática na solução de problemas pelo método dos elementos finitos.

Precisão, estabilidade e convergência em computação numérica

Quando um procedimento numérico está sendo selecionado, a precisão, a estabilidade e a convergência do método computacional devem estar entre as características a serem consideradas. Precisão é uma medida da aproximação da solução numérica em relação à solução exata ou verdadeira. A estabilidade (ou instabilidade) nos dá informações sobre a sensibilidade do método aos erros de arredondamento acumulados nos cálculos. Dizemos que um método é estável se pequenas perturbações nos dados conduzem a soluções próximas. Se isso não ocorre, dizemos que o método é instável. A convergência corresponde à aproximação cada vez melhor das soluções sucessivamente computadas para a solução limite quando algum parâmetro computacional, tal como tamanho do elemento ou número de termos na solução testada é refinado. O termo convergência é também aplicado no mesmo sentido a um processo iterativo, no qual um ou mais resultados anteriores são utilizados como dados de entrada para o próximo cálculo. Assim, um processo convergente é aquele em que a diferença entre dois resultados sucessivos decresce continuamente, tendendo a zero no limite. Definições mais precisas podem ser encontradas em textos de análise numérica e computacional. Devemos observar que a estabilidade é desejável para garantir que os cálculos sucessivos não se afastem da solução exata. Observamos, que dados experimentais obtidos principalmente na área de projetos de estruturas em engenharia, mostram que o refinamento de um procedimento computacional acarreta o crescimento da exatidão se o processo é con-

vergente e o respectivo decrescimento se o processo é divergente. Então um exame dos erros no método dos elementos finitos e de suas causas conduzem naturalmente à consideração da convergência.

Erros no método dos elementos finitos

Adicionalmente aos erros usuais de arredondamento e truncamento associados a qualquer procedimento computacional, existem aqueles erros que estão relacionados com a técnica dos elementos finitos especificamente. Esses erros podem ser subdivididos em:

1. Erros de discretização, resultantes das diferenças geométricas entre o contorno da região e sua aproximação por elementos finitos; e
2. Erros das funções aproximadoras ou funções de forma, devido à diferença entre a solução exata e sua representação pela função aproximadora.
3. Erros na solução do sistema de equações que fornecerá a solução aproximada.

Erros de discretização podem ser reduzidos utilizando elementos menores ou introduzindo elementos curvilíneos ao longo do contorno e, em qualquer caso, tendem a zero quando o tamanho dos elementos tende a zero. Os erros introduzidos pela função aproximadora não decrescem necessariamente quando são reduzidos os tamanhos dos elementos e podem então impedir a convergência para a solução exata ou até mesmo provocar divergência. Os erros do item 3 dependem do método numérico adotado na solução do sistema de equações.

Nos próximos itens vamos considerar os erros da função aproximadora em relação ao seu comportamento através do elemento, descontinuidade na fronteira entre elementos e admissibilidade da função aproximadora.

Erro da função aproximadora e completude

Dizemos que um conjunto de funções ϕ_r , é completo se uma função qualquer f pode ser aproximada com grau de precisão desejado tomando-se um número suficiente de termos na

combinação linear $\sum_{r=1}^M \alpha_r \phi_r$, tendo como caso limite

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^M \alpha_r \phi_r = f.$$

Um exemplo importante, é o conjunto das funções polinomiais em uma ou mais variáveis, cuja a completude pode ser demonstrada. De fato, uma função aproximadora é uma série polinomial, isto é, pode representar de forma exata a solução verdadeira sobre um elemento de tamanho finito, somente se o conjunto dos polinômios é completo e de grau infinito. Entretanto, nos casos práticos um número finito de termos deve ser usado, e portanto, a representação de uma função por um polinômio é uma aproximação da solução verdadeira, conduzindo a erros nesta etapa.

A título de ilustração, vamos considerar um problema unidimensional, porém as conclusões podem ser estendidas para os casos bi e tri dimensionais. Supondo que a função f tem derivadas até a ordem p , a série polinomial de \hat{u} deve ser pelo menos de grau p dada por sua série de Taylor em torno de um ponto convenientemente escolhido $x = a$, ou seja:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)\frac{(x - a)^2}{2} + \dots + \frac{f^p(a)}{p!}(x - a)^p$$

Os polinômios são funções bastante estudadas por nossos antepassados que se envolveram na resolução de equações algébricas resultantes de problemas práticos, e que serviram de ponto de partida para a construção da teoria dos polinômios e das equações algébricas. Portanto é natural que os polinômios tenham sido usados desde o início no método dos elementos finitos. Entretanto, como já foi visto, neste método o domínio é repartido em subdomínios, os elementos e portanto as aproximações polinomiais são realizadas em cada elemento. O passo seguinte é a justaposição dos “pedaços polinomiais” de modo a obter uma aproximação conveniente no domínio inteiro.

Erro da função aproximadora e conformidade

Em geral mecânica dos sólidos a formulação das equações que regem os fenômenos se escreve em termos de deformações e as soluções procuradas são os deslocamentos. Portanto os

deslocamentos são contínuos através do domínio e também são seccionalmente contínuos nos elementos. Esta idéia foi transportada para a área de elementos finitos para descrever uma representação da função aproximadora de forma suave através da região (domínio). Segundo [33] O termo mais genérico *conformidade* foi usado aparentemente pela primeira vez em 1966 por Bazely, Cheung, Irons, and Zienkiewics. A função aproximadora é dita conforme se suas derivadas até a ordem $p - 1$ são contínuas através (ao longo) das fronteiras entre elementos, onde p é ordem da derivada mais elevada.

Para a classe de problemas

$$Lu = f,$$

onde L é um operador diferencial linear auto-adjunto limitado inferiormente e u e f são funções, uma formulação variacional é possível tendo como função aproximadora uma forma quadrática linear. Essa classe, que inclui muitos problemas de engenharia, pode ser atendida considerando u e f como vetores. Para ser admissível, a função aproximadora deve em geral ser contínua e ter derivadas contínuas até a ordem $p - 1$, onde p é a ordem da derivada mais elevada que aparece na formulação variacional [33].

Para problemas de elasticidade linear, a convergência do método dos elementos finitos está baseada no princípio da energia potencial mínima e pode ser investigada para elementos conformes com a utilização de aproximação polinomial para a solução u em cada elemento. Essa abordagem foi utilizada por [15], e os resultados podem ser sintetizados como a seguir. Se a energia de deformação contém derivadas de u cuja maior ordem é p , a convergência está assegurada se para cada elemento a função aproximadora é representada por um polinômio completo de grau pelo menos igual a p . A convergência pode ser acelerada pela escolha de um polinômio de grau superior. Cumpre salientar que a análise da convergência do método dos elementos finitos é mais conveniente com a utilização dos espaços de Hilbert (1862-1943) e as normas de energia. Com essa abordagem [34] demonstrou a convergência do método dos elementos finitos é assegurada se a aproximação para u é um polinômio completo pelo menos até a ordem p (onde p é a ordem da derivada mais elevada na função aproximadora), provada que a condição de conformidade é satisfeita [33]. Podemos sintetizar as considerações apresentadas nas seções anteriores em dois critérios de convergência para a

classe de problemas considerada já em sua formulação variacional.

Critério - I: uma condição necessária para a convergência é que a representação da função aproximadora e suas derivadas tendam para seus valores exatos, sobre cada elemento, quando o tamanho do elemento tende para zero.

Critério - II: uma condição necessária para convergência é que a representação da função aproximadora e suas derivadas tendam para a mesma suavidade, que tem a solução exata, quando o tamanho do elemento tende para zero.

As conclusões de [34] são de que os critérios I e II são condições suficientes para a convergência do método dos elementos finitos para a classe de problemas citada [33].

Erro da função aproximadora e não conformidade

Utilizando espaços funcionais, vários autores concluíram que as condições suficientes para convergência do método dos elementos finitos são o critério de completude e um critério de conformidade, o qual é normalmente satisfeito nas aplicações práticas [33]. A conformidade ou critério entre elementos requer que a diferença ou descontinuidade em u ao longo de cada fronteira entre elementos se reduza com o diâmetro do maior subdomínio, para um crescente refinamento das subdivisões. A classe de problemas para os quais esses resultados foram obtidos é a mesma que citamos anteriormente, exceto que a relação mais geral $Lu = f$ foi utilizada, com L sendo positivo e definido.

O critério entre elementos pode ser generalizado pela percepção de que uma condição de convergência para a solução exata deve ser a de que a solução aproximadora \hat{u} tende para a solução exata quando a malha de elementos finitos é crescentemente refinada. Isso vem de encontro ao que ficou estabelecido no critério II.

Algumas observações sobre convergência

Para uma classe de problemas de interesse prático, pode-se mostrar que o critério I referente à completude, e o critério II, referente à conformidade são condições suficientes para a convergência. Podemos induzir em face dos argumentos já apresentados que as representações por elementos finitos para as quais a convergência foi assegurada são igualmente importantes.

Porém uma pergunta deve ser feita: Como podemos determinar a precisão na computação de uma solução para um caso prático? A resposta depende do problema específico. Entretanto uma indicação adequada da precisão, pode na prática ser obtida de uma das duas seguintes formas. A primeira, consiste na resolução de um problema do mesmo tipo para o qual a solução analítica é conhecida utilizando o método numa configuração prática. O erro calculado, pode ser usado para estimar o erro neste caso. O segundo método, requer que o tipo de convergência seja primeiramente determinado para a formulação particular adotada para o problema. Se a convergência é reconhecida como monotônica, quando a malha de elementos finitos é refinada, o problema pode ser resolvido repetidas vezes com elementos cada vez menores e o resultado obtido extrapolado para fornecer uma estimativa da solução procurada. Para alguns autores, uma formulação em elementos finitos converge monotonicamente para a solução exata se:

1. a representação por elementos finitos satisfaz às condições de completude e conformidade dos critérios I e II;
2. o refinamento da malha é tal que um elemento em cada nível de refinamento é uma subdivisão de um elemento do nível anterior;
3. os subdomínios em cada nível de refinamento estão contidos nos domínios dos níveis anteriores.

Vamos considerar por exemplo, uma representação linear para uma função sobre um elemento triangular e suponhamos que são satisfeitas as condições: (1) de completude e conformidade. A subdivisão de cada triângulo pela tomada dos pontos médios de cada lado satisfaria a condição (2) e desde que para cada subconjunto de elementos seja mantida a representação linear, a condição (3) também seria satisfeita. Contudo, pode não ser fácil, satisfazer os requisitos para a convergência monotônica em geral. Em particular, o refinamento da malha nos termos do procedimento acima explicados pode produzir mais elementos, após uma ou duas subdivisões, do que pode ser suportado pelas facilidades computacionais disponíveis.

Quando não são satisfeitas a completude e a conformidade, porém os critérios mais gerais I e II o são, de tal modo que a convergência é garantida no limite, é assumido freqüen-

temente, que para qualquer tamanho do elemento finito, uma única solução será obtida. Entretanto para número elevado de elementos a computação pode ser instável ou podem ocorrer múltiplas soluções. Deve ser usado um número de elementos adequado para se obter aproximações convergentes e estáveis. A única dificuldade é que esse tamanho adequado pode ser inviável economicamente. Mesmo quando uma solução única é obtida para cada tamanho do elemento finito os erros sobre uma ordem de tamanho prático pode ser grande e, se a convergência não é monotônica, pode variar de uma forma não esperada.

As dificuldades relatadas anteriormente não inviabilizam as noções de conformidade e completude. Entretanto, existem elementos finitos valiosos por suas aplicações e que são não conformes e em alguns casos não completos, mas que produzem elevada precisão e rápida convergência. Realmente, a performance de tais elementos pode ser superior à de elementos conformes e completos de uma mesma ordem polinomial. Encontramos em [33] que foi apontado por Zienkiewicz que elementos não conformes ou incompatíveis são “os melhores elementos para utilização prática” em certas áreas de aplicação.

O teste de convergência - the patch test

Uma orientação prática para o tratamento da convergência pode ser encontrada no “patch test”, que resumimos aqui, para o caso de um problema de mecânica dos sólidos. Na forma mais simples do teste, um pequeno pedaço da malha de elementos finitos (com pelo menos um nó não interno completamente ladeado por elementos vizinhos) é solicitado no contorno por forças correspondentes a um estado de deformação constante em todo pedaço considerado. Para que o processo seja convergente o “patch test” requer que os valores dos deslocamentos, deformações e tensões computadas na solução em elementos finitos, seja consistente com o estado de deformação constante inicialmente imposto. O teste pode alternativamente ser implementado pela aplicação de deslocamentos que correspondam a um estado de deformação constante através do pedaço da malha considerado.

O “patch test” não é restrito apenas a problemas que envolvem elementos conformes ou completos, pode também ser utilizado para verificar se elementos que não satisfazem esses critérios fornecerão uma solução convergente. Desenvolvido pela intuição dos engenheiros,

o “patch test” tem sido confirmado matematicamente como um teste necessário e suficiente para a convergência nos seguintes casos:

1. Quando elementos não conformes não utilizados;
2. Quando a formulação incorpora integração numérica.

O “patch test” pode ser aplicado para outros problemas além do que citamos de mecânica dos sólidos [34].

Sobre o suporte da base de elementos finitos

Como vimos, a formulação de elementos finitos nos levam a matrizes que representam os sistemas de equações nas incógnitas. Os métodos para solução de sistemas são mais eficientes quando os elementos da matriz aparecem de uma forma organizada (ao longo de diagonais, por exemplo) e um grande número destes elementos é nulo (matrizes esparsas).

Por exemplo, sistemas com matrizes tridiagonais,

$$a_{ij} = 0 \quad \text{se} \quad j > i + 1 \quad \text{ou} \quad j < i - 1,$$

são facilmente guardados em (4 vetores) e são resolvidos com baixo número de operações.

Portanto, é natural a busca de bases que se anulem fora de uma pequena região (funções com suporte pequeno). Assim por exemplo, as funções ϕ_r (ver item: erro da função aproximadora, páginas 86 e 87), usadas na representação da função aproximadora f formam uma base para as aproximações. Nesta direção vários autores trabalharam na construção de bases que são polinômios por parte e tenham o suporte menor possível [16].

Conclusão

Ao concluir este trabalho, podemos perceber a riqueza e a fertilidade que a prática da modelagem matemática e as consequentes equações diferenciais, representam para o estudo da natureza, sendo suas aplicações úteis de um modo geral a vários campos da atividade humana.

Acreditamos, que em sua simplicidade e amplitude limitadas, pois o assunto é podemos dizer inesgotável, nosso trabalho atinge seus objetivos na medida em que apresenta informações que serão úteis aos que de alguma forma, se envolvem com o ensino ou trabalham com aplicações da Matemática.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Aaboe, *Episódios Antigos da História da Matemática*, Sociedade Brasileira de Matemática-SBM, Rio de Janeiro, 1984.
- [2] R. C. Bassanezi, *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia*, Editora Contexto, São Paulo, 2002.
- [3] R. C. Bassanezi, W.C. Ferreira Jr, *Equações Diferenciais com Aplicações*, Editora Harbra Ltda, 1988.
- [4] M. S. Bienbengut, *Modelação Matemática como Método de Ensino-Aprendizagem em Cursoa do 1º e 2º Graus*, Dissertação de Mestrado, Rio Claro, 1990.
- [5] M. S. Bienbengut, N. Hein, *Modelagem Matemática no Ensino*, Editora Contexto, São Paulo, 2000.
- [6] M. S. Bienbengut, *Modelação Matemática & implicações no ensino e aprendizagem da matemática*, Editora da Furb, Blumenau, 1999.
- [7] M. C. Borba, O. Skovsmose, *The ideology of certainty*, For the learning of Mathematics, 1997
- [8] E. B. Brasil, *Enciclopédia Barsa*, Enciclopédia Britânica do Brasil, 1980.
- [9] C. Boyer, *História da Matemática*, Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1974.
- [10] M. F. Borodich, *Theory of Elasticity*, Peace Publishers Moscow, 1963.
- [11] W. E. Boyce, R. C. Diprima, *Equações Diferenciais Elementeres e Problemas de valores de Contorno*, Guanabara ois, Rio de Janeiro, 1979.

- [12] R. L. Burden, J. D. Faires, *Numerical Analysis*, Thompson Learning, 2001.
- [13] D. Burak, *Modelagem Matemática: Ações e Interções no Processo de Ensino-Aprendizagem*, Tese de Doutorado em Educação na Área de Concentração-Psicologia Educacional, Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP, Campinas, 1992
- [14] S. Carrera, *Construção e exploração de modelos matemáticos em situações do mundo real envolvendo Trigonometria*, Quadrante, Vol.2, nº1, 1993
- [15] G. R. Cawper, *Variational Procedures and convergence*, in: Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, Academic Press, 1973.
- [16] P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Paperback edition, 1980.
- [17] M.C. C. Cunha, *Métodos Numéricos*, Editora da UNICAMP, Campinas, São Paulo, 2003.
- [18] M. C. C. Cunha, M. A. N. Schleider, *Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais*, SBMAC, São Carlos, São Paulo, 2003.
- [19] R. Courant, H. Robbins, *What is Mathematics?*, Oxford University Press, 1969.
- [20] N. M. L. Costa, *Funções Seno e Cosseno: uma sequência de Ensino a Partir dos Contextos Mundo Experimental e do Computador*, Dissertação de Mestrado, PUC, São Paulo, 1997.
- [21] H. Eves, *Introdução à História da Matemática*, Editora da UNICAMP, Campinas, São Paulo, 1995.
- [22] E. Fernandes, *Fazer matemática compreendendo e compreender matemática fazendo: A apropriação de artefatos da matemática escolar*, Quadrante. Vol. 6, nº1, 2000.
- [23] E. C. Ferruzzi, *Modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do cálculo diferencial e integral nos cursos superiores de tecnologia*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2003

- [24] E. C. Ferruzzi, M. B. Gonçalves, J. Hruschka, L. M. W. Almeida, *Modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem nos cursos superiores de tecnologia*, in: World Congress on Engineering and Tecnology Education, São Paulo, 2004
- [25] R. H. O. L. Franchi, *A Modelagem Matemática como estratégia de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Engenharia*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESSP, Rio Claro, 1993
- [26] M. Gazzeta, *A Modelagem como estrtégis de aprendizagem da matemática em cursos de aperfeiçoamento de professores*, Dissertação de Mestrado, UNESP, Rio Claro, 1989
- [27] J.N. Kapur, *The art of teatching mathematical modelling*, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 1982.
- [28] E. L. Lima, *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, IMPA, 1991.
- [29] J. B. Marion, S. T. Thornton, *Classical dynamics of particles and systems*, Saunders College Publishing, 1995.
- [30] R.R. McLone, *Mathematical modelling. the art of. applying mathematics*, in:I.G. Andrews, R.R. McLone, *Mathematical Modelling*, Butterworths, London, 1976.
- [31] M. Niss, *Aims and scope of applications in mathematics curricula*, W. Blum et al(eds), *Applications and modelling in learning and teaching Mathematics*, Ellis Horwood Limited, Chichester, 1989
- [32] M. Niss, *O papel da aplicação e da modelação na matemática escoçar*, Revista Educação e Matemática, n° 23, Lisboa, 1992
- [33] D. H. Norrie, G. Vries, *An Introduction to Finite Element Analysis*, Aademic Press, 1978.
- [34] E. R. A. Oliveira, *Convergence and accuracy in the finite element method*, in: World Congr. Finite Element Method, England , 1975.

- [35] J. N. Reddy, *an Introduction to the Finite element Method*, McGraw-hill Book company, 1985.
- [36] L. Santaella, *A Assinatura das Coisas*, Imago, Rio de Janeiro, 1993.
- [37] F. J. San Martin, *Teoria e Cálculo das Lajes*, in: Manual do Engenheiro Globo, Tomo 7, Vol.I, 1973.
- [38] I. H. Shames, *Introdução à Mecânica dos Sólidos*, Prentice/Hall do Brasil, 1983.
- [39] O. Skovsmose, *Cenários para investigação*, in: Bolema-Boletim de Educação Matemática, Ano 13, nº 14, 2000
- [40] O. Skovsmose, *Educação Matemática Crítica-A questão da democracia*, Editora Papirus, 2001
- [41] D. E. Smith, *History of Mathematics*, Dover Publications, New York, 1958..
- [42] F. Tavares, *Os modelos matemáticos e o processo de modelação matemática*, MILLENIUM, Revista do Instituto Superior Politécnico de Viseu, nº3, 1996
- [43] S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, McGraw-hill Book Company, 1951.
- [44] S. P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-hill Kogakusha Ltda, 1959.
- [45] Tym Myint-U, L. Debnath, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Elsevier Science Publishing Co., Inc. 1987.
- [46] F. A. Vasconcelos, *História das matemáticas na antiguidade*, Ailland-Bertrand, Lisboa, 1925.