



CARLOS FRANK LIMA DOS SANTOS

MODELAGEM MATEMÁTICA DO AUMENTO DE  
DENSIDADE DE VEGETAÇÃO NA AMAZÔNIA E  
DINÂMICA POPULACIONAL COM COMPETIÇÃO  
INTRA E INTERESPECÍFICA

CAMPINAS  
2013





UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística  
e Computação Científica

CARLOS FRANK LIMA DOS SANTOS

MODELAGEM MATEMÁTICA DO AUMENTO DE  
DENSIDADE DE VEGETAÇÃO NA AMAZÔNIA E  
DINÂMICA POPULACIONAL COM COMPETIÇÃO  
INTRA E INTERESPECÍFICA

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática aplicada.

Orientador: João Frederico da Costa de Azevedo Meyer

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO CARLOS FRANK LIMA DOS SANTOS, E ORIENTADA PELO PROF. DR. JOÃO FREDERICO DA COSTA DE AZEVEDO MEYER.

Assinatura do Orientador

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "J. Meyer", is written over a horizontal line.

CAMPINAS  
2013

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

Santos, Carlos Frank Lima dos, 1976-  
Sa59m      Modelagem matemática do aumento de densidade de vegetação na  
Amazônia e dinâmica populacional com competição intra e interespecífica / Carlos  
Frank Lima dos Santos. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: João Frederico da Costa Azevedo Meyer.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Dinâmica populacional. 2. Competição (Biologia). 3. Competição  
interespecífica. 4. Competição intraespecífica. 5. Simulação (Computadores). I.  
Meyer, João Frederico da Costa Azevedo, 1947-. II. Universidade Estadual de  
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Mathematical modeling of the increased density of vegetation in the Amazon competition and population dynamics with inter and intra-specific

**Palavras-chave em inglês:**

Population dynamics

Competition (Biology)

Interspecific competition

Intraspecific competition

Computer simulation

**Área de concentração:** Matemática Aplicada

**Titulação:** Mestre em Matemática Aplicada

**Banca examinadora:**

João Frederico da Costa Azevedo Meyer [Orientador]

Véra Lucia da Rocha Lopes

Geraldo Lúcio Diniz

**Data de defesa:** 05-09-2013

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática Aplicada

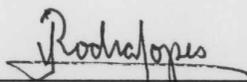
**Dissertação de Mestrado defendida em 05 de setembro de 2013 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



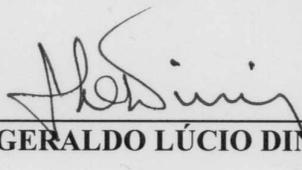
---

**Prof.(a). Dr(a). JOÃO FREDERICO DA COSTA AZEVEDO MEYER**



---

**Prof.(a). Dr(a). VERA LUCIA DA ROCHA LOPES**



---

**Prof.(a). Dr(a). GERALDO LÚCIO DINIZ**

## Abstract

The main objective of this work is that of obtaining an adequate mathematical model and, consequently, a computational algorithm to describe the interaction between two competing species in face of a density variation in vegetation. Population dispersal and dynamics and the presence of a term relating the loss of vegetation density to higher mortality for both competing species must be considered, as well as the inverse: a raise in vegetation density is bound to increase the survival of species. In order to describe the interaction between vegetation and animals, a classic Lotka-Volterra system is used, coupled with the use of the diffusion-reaction partial differential equation for all three participants considered in the model: vegetation density and both animal species. For the interacting animal species, no migration is considered, although the possibility of a preferential direction similar to an advective component is permitted in the dispersal of plants. Numerical discretization include centered finite differences in order to obtain second order approximations in space variables, as well as a Crank-Nicolson method, also second order, for approximations in time. In order to qualitatively analyze possible results, a MATLAB environment was used, with the possibility of exhibiting graphical results based on the numerical ones. This is done in order to create a numerical auxiliary tool which can be used by researchers and professional agents in the evaluation of ecological and environmental policies and decisions, as well as the description of some of the effects of anthropic a actions.

**Keywords:** Population dynamics, interaction between specieses, diffusion-advection systems, finite differences.

## Resumo

O proposito deste trabalho é desenvolver uma modelagem matemática que descreverá computacionalmente o convívio entre duas espécies competidoras sem característica migratória diante da variação de densidade de vegetação. As equações utilizadas nesta modelagem incluíram os fenômenos de difusão de vegetação, processos de dispersão populacional, dinâmicas vitais e um decaimento proporcional a variação de densidade de mata, no sentido de que quanto maior a densidade de mata menor o decaimento populacional quanto menor a densidade de mata maior a mortalidade populacional. Para as espécies competidoras usaremos as clássicas modelagem do tipo Lotka-Volterra (não-linear) combinado a equação diferenciais parciais de difusão-advecção. Primeiramente faremos a descrição do modelo matemático e a descrição do domínio visando o uso do método de diferenças finitas para o espaço combinados a um modelo de Crank-Nicolson no tempo. Em seguida, desenvolveremos um algoritmo em ambiente MATLAB , que aproxima as soluções relativas a difusão de vegetação e a cada população em cada ponto

e ao longo do tempo considerado nas simulações. Por fim, foram obtidos resultados gráficos que foram analisados o efeito da recuperação da mata no convívio das espécies competidoras consideradas. De modo que se disponha de ferramentas mais acessíveis a profissionais e pesquisadores ligados aos estudos de ecologia matemática e meio ambiente, bem como aos responsáveis pelas adoções de medidas de emergências e contingências de áreas destruídas pelas ações antrópicas.

**Palavras-chave:** Dinâmicas populacionais, interação entre espécies, sistema de difusão-advecção, diferenças finitas.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Uma modelagem matemática da recuperação de mata em ambiente amazônico</b>	<b>5</b>
1.1 Descrição do modelo matemático . . . . .	5
1.2 Descrição da condição de fronteira . . . . .	6
1.3 Descrição do domínio . . . . .	7
1.4 As aproximações das derivadas através do método das diferenças finitas . . . . .	8
1.5 Método de Crank-Nicolson para a discretização temporal . . . . .	9
<b>2 Aproximação numérica e simulação computacional</b>	<b>10</b>
2.1 Discretização do domínio . . . . .	10
2.2 Aproximação da solução da equação de difusão-advecção por diferenças finitas . . . . .	11
2.3 Fronteiras . . . . .	14
2.4 Implementação computacional . . . . .	22
<b>3 Modelagem do convívio de duas espécies competidoras com recuperação da mata</b>	<b>27</b>
3.1 O modelo matemático . . . . .	27
3.2 Descrição da condição de fronteira . . . . .	29
<b>4 Aproximação numérica da resolução do sistema e simulação computacional</b>	<b>32</b>
4.1 Aproximação da solução do sistema não-linear . . . . .	32
<b>5 Implementações computacionais</b>	<b>39</b>
<b>Referência Bibliográfica</b>	<b>50</b>
<b>Apêndice</b>	<b>51</b>
<b>Anexo</b>	<b>69</b>

*A Deus , à minha família,  
ao meu orientador e todas aquelas pessoas que  
contribuíram de uma forma direta ou  
indiretamente para a realização  
dessa obra. . . .*

. . . .

# Agradecimentos

Agradeço primordialmente a presença de Deus em minha vida, sem a qual jamais conseguiria vencer as tribulações.

Gostaria de externar a minha eterna gratidão, carinho ao ilustríssimo professor Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer (Joni), pela valiosa orientação, sugestão a mim transmitidas com paciência, disposição em sempre me ajudar sem as quais a conclusão deste trabalho jamais seria possível.

Aos professores da banca examinadora que dispuseram a aceitar a tarefa de analisar, avaliar e propor sugestões visando o aperfeiçoamento deste trabalho.

Aos professores que ministraram disciplinas ao longo do curso, pela contribuição no meu amadurecimento intelectual e pessoal.

Aos funcionários do instituto, pela eficácia nos trabalhos de regulamentação e burocracia.

Aos meus amigos e colegas de estudo e lazer, pelo companheirismo ao longo desta jornada.

Ao IMECC e à Coordenação deste Mestrado, em especial ao prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros, pelo estímulo e compreensão a mim dispensada.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE, representado pelo Senhor Eng. Luís Geraldo Ferreira, que gentilmente cedeu-me valiosas informações relativas ao Município de Lábrea - AM, campo dessa pesquisa.

Ao Sistema de Proteção da Amazônia – SIPAM, representado pela Senhora Liliane Araújo: chefe da Divisão de Sistematização de Informações-DIVSIN , que gentilmente cedeu-me as imagens do desmatamento da amazônia relativas ao Município de Lábrea - AM, campo dessa pesquisa.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas- FAPEAM representado pela Senhora Lady Mariana Siqueira Pinheiro: chefe do Departamento de Análise de Projeto- DEAP pelo imprescindível apoio financeiro a mim concedido.

Aos meus amados pais: Onoraldo e Maria Silça, pelo legado ético, pelo amor, pela paciência, compreensão e estímulo incomensuráveis a mim dispensados serenamente, na realização deste sonho acalentado por mim há anos.

Ao meu querido irmão Ricardo e sua esposa Valdéia, que pacientemente me ampararam e alimentaram por todos esses anos de dedicação, sem medir esforços, tão necessários para continuar adiante.

Aos demais irmãos que contribuíram para esse trabalho.

Aos meu queridos amigos de sala, de curso que contribuíram fortemente para conclusão dessa obra , Abel , Junior Cesar, Raniere. Enfim, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão deste trabalho, meus sinceros agradecimentos.

# Lista de Figuras

1	Um resultado de desmatamento no município de Lábrea Fonte:INPE . . . . .	1
2	Imagens do município de Lábrea-AM <a href="http://homemculto.files.wordpress.com/2011/09/tranas.jpg">http://homemculto.files.wordpress.com/2011/09/tranas.jpg</a> . . . . .	3
3	Desmatamento no município de Lábrea, imagem satelitária 2001 Fonte:INPE . . . . .	3
4	Espécies competidoras <a href="https://www.google.com.br/search?q=cotia+e+paca&amp;source=lnms&amp;tbm=isch&amp;sa=X&amp;ei=XWszUpKZLIGQ9QT914DYBg&amp;ved=0CAcQ_AUoAQ&amp;biw=1366&amp;bih=664&amp;dpr=1">https://www.google.com.br/search?q=cotia+e+paca&amp;source=lnms&amp;tbm=isch&amp;sa=X&amp;ei=XWszUpKZLIGQ9QT914DYBg&amp;ved=0CAcQ_AUoAQ&amp;biw=1366&amp;bih=664&amp;dpr=1</a> . . . . .	3
1.1	Desmatamento no município de Lábrea, imagem por satélite <a href="http://www.inpe.br">http://www.inpe.br</a> . . . . .	7
1.2	Indicação dos nós adjacentes do nó $i$ . . . . .	8
2.1	Indicação da malha do domínio . . . . .	10
2.2	Caracterização de ponto interior da malha em $\Omega$ . . . . .	11
2.3	Ponto de fronteira horizontal superior tipo $c_1$ . . . . .	14
2.4	Ponto de fronteira horizontal inferior tipo $c_2$ . . . . .	15
2.5	pontos da fronteira vertical à esquerda tipo $c_3$ . . . . .	16
2.6	Ponto da fronteira vertical à direita tipo $c_4$ . . . . .	17
2.7	Ponto do canto superior esquerdo. . . . .	18
2.8	Ponto do canto inferior esquerdo. . . . .	19
2.9	Ponto do canto superior direito. . . . .	20
2.10	Ponto do canto inferior direito. . . . .	21
2.11	Difusão de vegetação de 2001 à 2004 . . . . .	22
2.12	Difusão de vegetação de 2006 à 2009 . . . . .	23
2.13	Difusão de vegetação de 2011 e 2012 . . . . .	23
2.14	Densidade inicial de vegetação. . . . .	24
2.15	Densidade de vegetação aos 12 meses. . . . .	24
2.16	Densidade de vegetação aos 60 meses. . . . .	25
2.17	Densidade final de vegetação. . . . .	25
5.1	Densidade inicial de vegetação. . . . .	40
5.2	Distribuição inicial da população de pacas. . . . .	40
5.3	Distribuição inicial da população de cotias. . . . .	41
5.4	Densidade de vegetação aos 12 meses. . . . .	41
5.5	População de pacas aos 12 meses. . . . .	42
5.6	População de cotias aos 12 meses. . . . .	42
5.7	Densidade de vegetação aos 60 meses. . . . .	43
5.8	População de pacas aos 60 meses. . . . .	43
5.9	População de cotias aos 60 meses. . . . .	44

5.10	Densidade final de vegetação. . . . .	45
5.11	População final da população de pacas. . . . .	45
5.12	População final da população de cotias.. . . .	46

# Lista de Tabelas

2.1	Tabela dos parâmetros usados na simulação da difusão de mata. . . . .	23
5.1	Tabela dos parâmetros usados nas simulações das dinâmicas iterativas. . . . .	39
2	Tabela da redução do desmatamento ao longo do tempo. . . . .	51
3	Tabela da aumento da densidade de vegetação. . . . .	52
4	Tabela para encontrar o parâmetro de difusibilidade de mata. . . . .	54

# Introdução

A floresta amazônica brasileira permaneceu quase completamente intacta de desmatamento até o início da era “moderna” com a inauguração da rodovia Transamazônica, em 1970. Os índices de desmatamento na Amazônia vêm aumentando desde 1991 num ritmo variado, sendo desmatada por inúmeras razões.

Ao se analisar os impactos ambientais causados na Amazônia ao longo do tempo, observou-se que o desmatamento é um dos problemas que chama mais a atenção pelo fato de afetar diretamente as dinâmicas entre as espécies que ali convivem, prejudicando a biodiversidade, comprometendo o equilíbrio ecológico e causando graves riscos a biota.

O combate a essa prática ilegal vem sendo feito por diversos institutos brasileiros como (Ibama), Polícia Federal (PF) e outros, porém este ainda é insuficiente para combater tal impacto.

Segundo dados da revista TERRA CLASS (2008) da Empresa Brasileira (EMBRAPA), a cobertura do solo da Amazônia brasileira está distribuída da seguinte forma: floresta 79,4%, desflorestamento 17,8%, hidrografia 2,8%.

Ainda segundo esse trabalho da EMBRAPA a ocupação da área desflorestada se dá da seguinte forma: pasto limpo, vegetação secundária, pasto sujo, agricultura, regeneração da floresta, área urbana, mineração e outros de menores áreas.

A Regeneração da Floresta se dá em apenas 21%, da área inicial e, sendo assim, temos um prejuízo de 79% de floresta afetando diretamente a biota. Espécies que têm características migratórias como aves, por exemplo, que migram quando se sentem ameaçadas por estes e outros tipos de impactos. Porém as espécies que não realizam migração acabam sofrendo sérias consequências e, muitas vezes, correm sérios riscos de extinção.

Diante do exposto, existe a necessidade de se prevenir no meio ambiente os riscos reais provenientes de atividades antrópicas, sejam elas ligadas a projetos de agricultura ou pecuária, sejam resultantes de explorações, ou pela presença de comunidades e seus efluentes normais. No entanto já há alguns programas de combate a essa prática.



Figura 1: Um resultado de desmatamento no município de Lábrea Fonte: INPE  
acesso em: 28/10/2012

Recorremos às aplicações da ecologia matemática para estudar, discutir e desenvolver uma modelagem matemática que pudesse descrever o processo evolutivo da recuperação de áreas que sofreram esse

tipo de impacto (e, como estudo de caso elegemos o município de Lábrea /AM), para análise, simulação numérica e computacional do problema, podendo possibilitar uma avaliação gradual, através de cenários gerados por possíveis impactos, políticas de recuperação e estratégias de preservação.

O propósito deste trabalho é propor, analisar e discutir uma modelagem matemática que descreva o convívio de espécies competidoras de modo intra e interespecífico sem característica migratória diante do aumento de densidade de vegetação, o que, em geral, altera as dinâmicas populacionais de ambas as espécies. As interações possíveis podem ser prejudiciais (ou não) para uma das espécies ou para ambas. Para representar essas interações entre as espécies mediante o aumento da densidade de vegetação, usamos um sistema de equações diferenciais parciais não lineares que podem ser consideradas clássicas no contexto da modelagem de dispersão populacional, em conjunto com dinâmicas populacionais de tipo logístico genérico, também, incorporando as ações interespecíficas de tipo clássico, na linha de Lotka-Volterra (ver, por exemplo, MEYER; SOSSAE; LOISELLE e ROSSIA (1999)).

As equações do sistema proposto para descrever tais fenômenos permitem a inclusão da variação de densidade da vegetação, que cresce ao longo do tempo em função não apenas de difusão efetiva (no sentido de Marchuk, (1986), ou de Okubo, (1980)), mas também do transporte advectivo por algumas causas naturais e, além disso, as populações estudadas, em função de ambientes de interações intra-específica, podem sofrer efeitos permanentes, visto que os equilíbrios de convivência são reconhecidamente de frágil estabilidade – uma modelagem que reúne ideias já clássicas em termos de convívio entre espécies (EDELSTEIN-KESHET, (1988); MURRAY, (2002)).

Os principais motivadores deste esforço foram:

- modelar matematicamente o convívio de espécies interativas, aproximando numericamente soluções para cenários possíveis;
- construir um instrumental numérico-computacional que permita simulação como auxílio em processos decisórios relativos a políticas públicas de preservação, de ocupação e de recuperação de áreas.

Uma modelagem matemática adequada e que permita simulações de cenário é uma poderosa ferramenta auxiliar para se estimar, *a priori* o efeito da recuperação da floresta que foi afetada por atividades antrópicas na Amazônia. Como consequência de alterações ambientais, pode haver necessidade de algumas espécies migrarem e passarem a viver juntas, acarretando uma intensificação nas relações dos indivíduos de mesma espécie e entre espécies distintas.

Há, neste quadro, risco de extinção e, daí, a necessidade de simulações computacionais prévias e de avaliação. Este trabalho visa construir conhecimento sobre os comportamentos de espécies que interagem mediante o aumento da densidade de vegetação. Portanto, o reflorestamento surge no sentido de favorecer a relação nos habitats de espécies que ali convivem.

Lábrea é um município brasileiro do interior do estado do Amazonas, situado às margens do Rio Purus (ver Fig 2), sua população é de 39.022 habitantes e com uma área de 68.233,824  $km^2$  de acordo com estimativas do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) em (2012). A sua escolha para este estudo de caso se deve ao fato de ser um município do estado do Amazonas e por ser um dos mais afetado pelo desmatamento, o que se deve ao fato desse município ser cortado pela rodovia transamazônica que é uma rodovia brasileira, projetada durante o governo do presidente Emílio Garrastazu Médici (1969 a 1974), sendo uma das chamadas "obras faraônicas" devido às suas proporções gigantescas, ligando Paraíba à Lábrea, no Amazonas, cortando sete estados brasileiros; Paraíba, Ceará, Piauí, Maranhão, Tocantins, Pará e Amazonas. Nasce na cidade de Cabedelo, na Paraíba, e segue até Lábrea, no Amazonas, facilitando acesso com esses e outros estados brasileiros e permitindo um fácil escoamento de madeira e outros produtos.



Figura 2: Imagens do município de Lábrea-AM <http://homemculto.files.wordpress.com/2011/09/tranas.jpg>

acesso em: 22/03/2013

No capítulo 1 apresenta-se um modelo para descrever o aumento da densidade de vegetação e a fig: 3 será o nosso domínio.

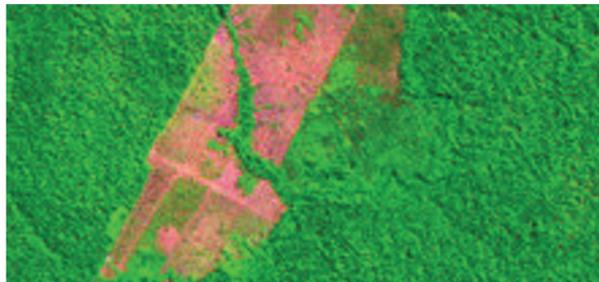


Figura 3: Desmatamento no município de Lábrea, imagem satelária 2001 Fonte: INPE  
acesso em:28/10/2012

No capítulo 2 apresentamos o resultados de simulações computacionais para se observar a evolução da recuperação da mata ao longo do tempo, bem como as tendências dos efeitos posteriores.

No capítulo 3 propõe-se uma modelagem que descreve a recuperação da floresta e o efeito desta sobre o convívio entre as duas espécies que competem pela mesma base alimentar, as espécies consideradas são cotia e paca (ver Fig: 4).



(a) Paca



(b) Cotia

Figura 4: Espécies competidoras [https://www.google.com.br/search?q=cotia+e+paca&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=XWszUpKZLIGQ9QT914DYBg&ved=0CAcQ\\_AUoAQ&biw=1366&bih=664&dpr=1](https://www.google.com.br/search?q=cotia+e+paca&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ei=XWszUpKZLIGQ9QT914DYBg&ved=0CAcQ_AUoAQ&biw=1366&bih=664&dpr=1)

acesso em: 02/05/2013

No capítulo 4 são apresentadas as soluções do sistema nao linear pelo método de diferenças finitas para as variáveis espaciais e o método de Crank-Nicolson para o tempo.

No capítulo 5 apresentamos os resultados das simulações computacionais feitas com base na modelagem proposta.

# Capítulo 1

## Uma modelagem matemática da recuperação de mata em ambiente amazônico

Modelos matemáticos para difusão da densidade de vegetação em diferentes meios já vêm sendo desenvolvidos: Skellam (1951) obteve os primeiros resultados e é considerado um trabalho clássico dos difundidos atualmente. Sobre a Amazônia brasileira, onde serão feitas as aplicações deste trabalho, a EMBRAPA por meio do seu projeto TERRA CLASS (2008), obteve os primeiros resultados dessa difusão do comportamento evolutivo da recuperação da floresta em superfície afetada por atividades antrópicas, atividades estas cuja introdução se deve à presença da agricultura, pastagens, extração de madeiras, queimadas entre outros.

Neste capítulo será descrita uma modelagem matemática para a difusão da densidade de vegetação, aplicado ao município de Lábrea no interior do Amazonas.

### 1.1 Descrição do modelo matemático

Aqui vamos apresentar uma equação adaptada para a situação em destaque, a qual descreve a recuperação da floresta que foi desmatada.

A equação utilizada neste tipo de modelagem é a clássica equação de difusão-advecção, utilizada em vários estudos ligados a ecologia matemática (*ver* POLETTI, e MEYER, (2009)). Vamos considerar uma função de densidade de vegetação (reflorestamento natural) cujo domínio é  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto não vazio, limitado e com a fronteira suficientemente regular.

Considerando a densidade de mata  $M = M(x, y, t)$  em  $(x, y)$  no instante  $t \in (0, T]$ , no ponto  $(x, y) \in \Omega$ , temos a equação de difusão- advecção:

$$\frac{\partial M}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha \nabla M) + \operatorname{div}(MV) + \mu M = \lambda M \left(1 - \frac{M}{L}\right). \quad (1.1.1)$$

Neste modelo, são considerados basicamente os seguintes fenômenos:

- A difusão, ou seja, o espalhamento natural da floresta num meio desmatado, que descreve uma dinâmica difusiva resultante de uma larga gama de possibilidades naturais. Neste trabalho será considerada a difusão efetiva, no sentido de Marchuk (1986), Okubo (1980), Skellam (1951);
- A advecção que é o movimento provocado pela movimentação no próprio meio; (quando relevante, pode ser considerado vento dominante como um campo advectivo associado à sua direção e à sua magnitude);

- O decaimento, fenômeno que reúne alterações sofridas pelo meio de tal forma que reduz densidade da vegetação ao longo do tempo;
- O aumento da densidade de vegetação (recuperação da floresta ) representado pelo clássica dinâmica de Verhulst, no qual se supõe uma densidade máxima  $L$ , considerado nesta modelagem como uma capacidade de suporte para a cobertura vegetal.

Assim, com algumas manipulações algébricas e considerando que  $\text{div}(V) = 0$ , teremos para  $(x, y) \in \Omega$  e  $t \in (0, T]$ ,

$$\frac{\partial M}{\partial t} - \alpha \Delta M + \text{div}(MV) + \mu M = \lambda M \left(1 - \frac{M}{L}\right). \quad (1.1.2)$$

Em termos dos fenômenos e parâmetros esta equação está caracterizada por:

- $L$ , a densidade máxima de  $M$ , é a capacidade de suporte na equação (1.1.2);
- $\alpha = \alpha(x, y, t)$  é a dispersão ou difusibilidade de  $M$ ;
- $\mu = \mu(x, y, t)$  é o decaimento natural de  $M$  em  $(x, y)$  no instante  $t$ ;
- $\lambda$  é a taxa intrínseca de crescimento de  $M$ ;
- $V = (u, v)$  caracteriza o campo de velocidade advectiva, descrevendo um possível fenômeno da advecção, com  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  e como observado acima,  $\text{div}(V) = 0$  e  $V = \langle u, v \rangle$ .

## 1.2 Descrição da condição de fronteira

Em termo de condição de fronteira considera-se, por exemplo  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , como sendo uma partição da fronteira de  $\partial\Omega$ .

- Neste trabalho vamos recorrer a uma forma mais geral, usando as condições homogêneas de Robin, que descreve uma variação de  $M$  na fronteira dependente do próprio  $M$  ao longo da borda.

Sendo  $\eta$  um vetor unitário normal a  $\partial\Omega$ , externo a  $\Omega$ ,  $\partial\Omega$  é composto por  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ , com

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \text{ e } \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset, \text{ considerando a condição dada por:}$$

$$-\alpha \frac{\partial M}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_i} = c_i M. \quad (1.2.1)$$

- Aqui,  $c_1, c_2, c_3, c_4$  são os parâmetros de proporcionalidade adequados para a condição de Robin em cada parte  $\Gamma_i$  da fronteira

Entendemos assim que há variação da densidade de vegetação na fronteira.

Finalmente completando a equação (1.1.1) com as condições de fronteira, o modelo será reescrito da forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha \nabla M) + \operatorname{div}(MV) + \mu M = \lambda M \left(1 - \frac{M}{L}\right); \\ M(x, y, 0) = M_0(x, y), \forall (x, y) \in \Omega; \\ -\alpha \frac{\partial M}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_i} = c_i M|_{\Gamma_i} \forall t \in (0, T]; \end{cases} \quad (1.2.2)$$

### 1.3 Descrição do domínio

Para efetivar um estudo de caso relevante, optou-se por usar no presente trabalho um domínio retangular ( $\Omega = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ ) que contenha em seu interior uma região do município de Lábrea (ver figura 1.1) afetada pelo desmatamento. A recuperação dessa área é o que se pretende modelar e estudar, além do efeito desta sobre o convívio das duas espécies competidoras pela mesma base alimentar (cotia e paca).

A opção por um domínio retangular deve-se à facilidade de resultante quando se opta por um método de diferenças finitas.

Assim, adotamos para  $\Omega$  as dimensões 6,6 km x 3 Km, e a consideramos uma região aproximadamente plana.



Figura 1.1: Desmatamento no município de Lábrea, imagem por satélite <http://www.inpe.br> acesso em 28/10/2012

Foram realizadas modelagem matemática, aproximações numéricas e simulações computacionais, favorecendo o estudo e possibilitando analisar e avaliar o quadro apresentado pela recuperação da mata. Neste caso, o modelo é adaptado para o domínio apresentadas na Fig. 1.1, em que consideramos o desmatamento de uma superfície, resultando na taxa de variação de densidade de vegetação dada pelo sistema 1.2.2.

## 1.4 As aproximações das derivadas através do método das diferenças finitas

As equações que descrevem esse tipo de modelagem de difusão-advecção têm uma difícil obtenção de solução analítica, mesmo para domínios considerados regulares. Neste caso, mesmo dado um domínio real retangular não há essa solução. A maneira é usar uma aproximação por um método adequado. Neste trabalho a proposta de solução será por aproximação numérica pelo métodos de diferenças finitas para variáveis espaciais que têm como suporte as expansões polinomiais para a possível solução *cf.* Ruggiero e Lopes (1997) ; Lima, (2007) e LEVEQUE (2007) e que exigem características de regularidade da solução. A expansão de Taylor é o instrumental matemático utilizado na discretização espacial via método das diferenças finitas. As aproximações mais utilizadas para as derivadas de primeira e segunda ordem, para um ponto  $(x_i, y_i) \in \Omega$  são: diferença avançada, diferença atrasada e diferença centrada e, neste trabalho, vamos utilizar diferenças centradas de segunda ordem. Neste caso o erro é de  $O(h^2)$ . O método de diferenças finitas em domínio de  $R^2$  é descrito como:

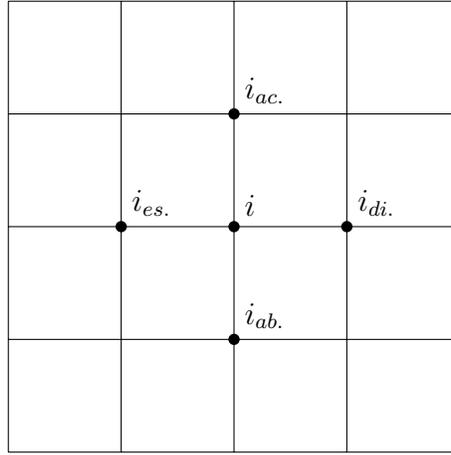


Figura 1.2: Indicação dos nós adjacentes do nó  $i$

$$\frac{\partial M}{\partial x} \approx \frac{M_{i_{es.}} - M_{i_{di.}}}{2\Delta x} \quad (1.4.1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \approx \frac{M_{i_{ab.}} - M_{i_{ac.}}}{2\Delta y}. \quad (1.4.2)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \approx \frac{M_{i_{es.}} - 2M_i + M_{i_{di.}}}{\Delta x^2} \quad (1.4.3)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial y^2} \approx \frac{M_{i_{ab.}} - 2M_i + M_{i_{ac.}}}{\Delta y^2}. \quad (1.4.4)$$

Ver RUGGIERO e LOPES (1997).

## 1.5 Método de Crank-Nicolson para a discretização temporal

O método de Crank-Nicolson (ver Cunha, (2003)) é um método numérico de segunda ordem de aproximação no tempo e é numericamente estável se comparado com outros métodos numéricos de diferenças finitas.

Vamos usar este método a fim de aproximar a solução do modelo deste trabalho, que se constitui em uma equação diferencial parcial não-linear.

Esse esquema numérico consiste em, primeiramente, dividir o intervalo de tempo  $[0, T]$  em  $r$  subintervalos regulares de tamanho  $\Delta t$ , de modo que a partição uniforme resultante dessa discretização seja dada por  $\{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_r = T\}$ .

Podemos observar que  $t_{n+1} - t_n = \Delta t$ , para  $n = 1, \dots, r - 1$ .

Este método permite escrevermos a equação (1.2) para  $t = t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{\Delta t}{2}$ .

$t_{n+1} = t_n + \Delta t$ , onde  $\Delta t = \frac{t}{r}$ , estimar  $\frac{\partial M}{\partial t}$ , em  $t_n + \frac{\Delta t}{2}$ , segue que

$M(x, y, t) \rightarrow M_i^n$  ou seja  $M(x, y, t_n + \frac{\Delta t}{2}) \rightarrow M_i^{n+\frac{1}{2}}$  escrevendo  $M_i^n$  e  $M_i^{n+1}$  vamos ter

$$M_i^n = M_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{(-\frac{\Delta t}{2})^2}{2} \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} + 0(\Delta t)^3 \quad (1.5.1)$$

$$M_i^{n+1} = M_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{(\frac{\Delta t}{2})^2}{2} \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} + 0(\Delta t)^3. \quad (1.5.2)$$

subtraindo a equação (1.5.1) da equação (1.5.2) obtemos:  $M_i^{n+1} - M_i^n = \frac{\Delta t \partial M}{\partial t}$  daí temos

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{M_i^{n+1} - M_i^n}{\Delta t}.$$

Agora somando a equação (1.5.1) com a equação (1.5.2) temos  $M_i^{n+1} + M_i^n = 2M_i^{n+\frac{1}{2}}$  daí segue que  $M_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2}$  para encontrarmos a densidade de vegetação no instante  $t = n + \frac{1}{2}$ .

Deste modo, obtemos a discretização na variável tempo o qual podemos comprovar a estabilidade do método para  $\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$  e  $\alpha \frac{\Delta t}{\Delta y^2}$  segundo (CARNAHAN, (1969)).

Vale lembrar que no método de Crank-Nicolson, indicamos:

$\Delta x$  será o incremento no eixo das abscissas;

$\Delta y$  será o incremento no eixo das ordenadas;

$\Delta t$  será o incremento no tempo.

# Capítulo 2

## Aproximação numérica e simulação computacional

Os resultados que apresentaremos a seguir têm como propósito efetivar a aproximação da solução do modelo descrito no capítulo anterior, para os métodos propostos.

Levando em consideração os parâmetros do modelo, buscou-se uma compatibilidade com estudos teóricos.

Para as simulações, os códigos utilizados serão desenvolvidos em ambiente Matlab, cujas propriedades possibilitam uma interface gráfica mais satisfatória.

Aqui fixamos um ponto da área desmatada para fazermos o acompanhamento do processo evolutivo da recuperação da floresta ao longo do tempo.

### 2.1 Discretização do domínio

O domínio  $\Omega$  como sendo retangular, consideramos uma área desmatada cercada de floresta.

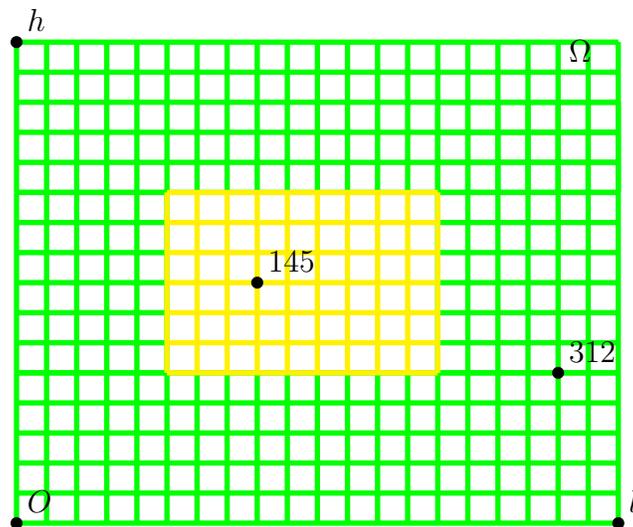


Figura 2.1: Indicação da malha do domínio

- A área verde da figura 2.1 é a região do domínio  $\Omega$  que não sofreu ação do desmatamento.

- A área amarela da figura 2.1 é a região do domínio  $\Omega$  inicialmente desmatada.

Nesta discretização pode-se ver na figura 2.1 área desmatada mais clara, a área que não foi afetada pelo desmatamento com malha e rio que contenha  $\Omega$  com suas margens preservando ainda a cobertura vegetal.

Agora, fazendo  $\Omega = [0, l] \times [0, h]$ , temos que dividindo o intervalo  $[0, l]$  em  $mx$  subintervalos,  $\Delta x = l/mx$  e dividindo  $[0, h]$  em  $my$  subintervalos, temos  $\Delta y = h/my$  e, para enumerar os nós da malha, vamos ter  $nx = mx + 1$  como sendo o número de nós no eixo das abscissas e  $ny = my + 1$  o número de nós no eixo das ordenadas, para as condições de contorno.

O ponto  $M_i$  é o valor aproximado de  $M$  em  $(x_i, y_i)$  e  $M_i^n$  aproxima o valor de  $M(x_i, y_i)$  no instante  $t_n$ .

A idéia desta discretização está esquematizada na Fig.2.1 considerando como os pontos  $M_{i-mx}$  anterior e  $M_{i+mx}$  posterior a  $M_i$  no eixo espacial das abscissas e os pontos  $M_{i-1}$  abaixo e  $M_{i+1}$  posterior no eixo das ordenadas, todos num instante  $t$ .

$$M_i^{n+1} = M(x_i, y_i, t_n);$$

$$M_i^n = M(x_i, y_i, t_n).$$

## 2.2 Aproximação da solução da equação de difusão-advecção por diferenças finitas

Sendo assim, para os pontos interiores do domínio, temos o esquema da figura 2.2.

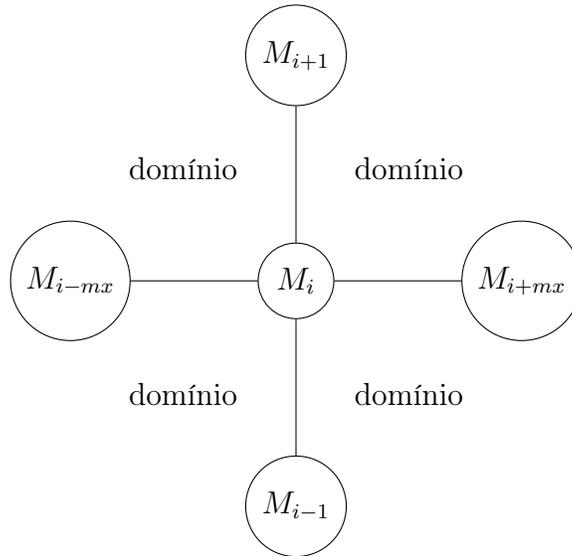


Figura 2.2: Caracterização de ponto interior da malha em  $\Omega$ .

Das seções 1.4; 1.5 temos então:

$$\frac{\partial M}{\partial t} \Big|_{(x_i, y_i, t_n)};$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} \Big| \approx \frac{M_i^{n+1} - M_i^n}{\Delta t};$$

$$M_i^{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2}.$$

Com algumas manipulações algébricas na equação 1.2.2 se obtém:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 M^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial M^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} - v \frac{\partial M^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y} - \mu M^{n+\frac{1}{2}} + \lambda M^{n+\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{M^{n+\frac{1}{2}}}{L} \right),$$

Aplicando o método de discretização para o ponto  $(x_i, y_i, t_n)$  a equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} |_{(x_i, y_i, t_n)} = & \alpha \left( \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} |_{(x_i, y_i, t_n)} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} |_{(x_i, y_i, t_n)} \right) - u \frac{\partial M}{\partial x} |_{(x_i, y_i, t_n)} - \\ & v \frac{\partial M}{\partial y} |_{(x_i, y_i, t_n)} - \mu M |_{(x_i, y_i, t_n)} + \lambda M |_{(x_i, y_i, t_n)} \left( 1 - \frac{M}{L} |_{(x_i, y_i, t_n)} \right), \end{aligned}$$

se torna

$$\begin{aligned} \frac{M_i^{n+1} - M_i^n}{\Delta t} \approx & \alpha \left[ \frac{M_{i+mx}^{n+\frac{1}{2}} - 2M_i^{n+\frac{1}{2}} + M_{i-mx}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} + \frac{M_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2M_i^{n+\frac{1}{2}} + M_{i-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} \right] - u \left[ \frac{M_{i+mx}^{n+\frac{1}{2}} - M_{i-mx}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right] - \\ & - v \left[ \frac{M_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - M_{i-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta y} \right] - \mu M_i^{n+\frac{1}{2}} + \lambda M_i^{n+\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{M_i^{n+\frac{1}{2}}}{L} \right). \end{aligned}$$

Aplicando agora o método de Crank-Nicolson se tem:

$$\begin{aligned} \frac{M_i^{n+1} - M_i^n}{\Delta t} = & \alpha \left[ \frac{\frac{M_{i+mx}^{n+1} + M_{i+mx}^n}{2} - 2 \frac{(M_i^{n+1} + M_i^n)}{2} + \frac{M_{i-mx}^{n+1} + M_{i-mx}^n}{2}}{\Delta x^2} + \right. \\ & \left. \frac{\frac{M_{i+1}^{n+1} + M_{i+1}^n}{2} - 2 \frac{(M_i^{n+1} + M_i^n)}{2} + \frac{M_{i-1}^{n+1} + M_{i-1}^n}{2}}{\Delta y^2} \right] - u \left[ \frac{\frac{M_{i+mx}^{n+1} + M_{i+mx}^n}{2} - \left( \frac{M_{i-mx}^{n+1} + M_{i-mx}^n}{2} \right)}{2\Delta x} \right] - \\ & - v \left[ \frac{\frac{M_{i+1}^{n+1} + M_{i+1}^n}{2} - \left( \frac{M_{i-1}^{n+1} + M_{i-1}^n}{2} \right)}{2\Delta y} \right] - \mu \left[ \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2} \right] + \lambda \left( \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2} \right) \left( 1 - \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2L} \right). \end{aligned}$$

Agora multiplicando ambos os membros da equação por  $\Delta t$ , daí

$$M_i^{n+1} - M_i^n = \Delta t \alpha \left[ \frac{\frac{M_{i+mx}^{n+1} + M_{i+mx}^n}{2} - 2 \frac{(M_i^{n+1} + M_i^n)}{2} + \frac{M_{i-mx}^{n+1} + M_{i-mx}^n}{2}}{\Delta x^2} + \right. \\ \left. \frac{\frac{M_{i+1}^{n+1} + M_{i+1}^n}{2} - 2 \frac{(M_i^{n+1} + M_i^n)}{2} + \frac{M_{i-1}^{n+1} + M_{i-1}^n}{2}}{\Delta y^2} \right] - \Delta t u \left[ \frac{\frac{M_{i+mx}^{n+1} + M_{i+mx}^n}{2} - \left( \frac{M_{i-mx}^{n+1} + M_{i-mx}^n}{2} \right)}{2\Delta x} \right] - \\ - \Delta t v \left[ \frac{\frac{M_{i+1}^{n+1} + M_{i+1}^n}{2} - \left( \frac{M_{i-1}^{n+1} + M_{i-1}^n}{2} \right)}{2\Delta y} \right] - \Delta t \mu \left[ \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2} \right] + \lambda \Delta t \left( \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2} \right) \left( 1 - \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2L} \right),$$

resolvendo as frações se tem:

$$M_i^{n+1} - M_i^n = \Delta t \alpha \left[ \frac{M_{i+mx}^{n+1} + M_{i+mx}^n - 2M_i^{n+1} - 2M_i^n + M_{i-mx}^{n+1} + M_{i-mx}^n}{2\Delta x^2} + \right. \\ \left. \frac{M_{i+1}^{n+1} + M_{i+1}^n - 2M_i^{n+1} - 2M_i^n + M_{i-1}^{n+1} + M_{i-1}^n}{2\Delta y^2} \right] - \Delta t u \left[ \frac{M_{i+mx}^{n+1} + M_{i+mx}^n - M_{i-mx}^{n+1} - M_{i-mx}^n}{4\Delta x} \right] - \\ \Delta t v \left[ \frac{M_{i+1}^{n+1} + M_{i+1}^n - M_{i-1}^{n+1} - M_{i-1}^n}{4\Delta y} \right] - \Delta t \mu \left[ \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2} \right] + \lambda \Delta t \left( \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2} \right) \left( 1 - \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2L} \right).$$

Agrupando os termos semelhantes obtemos o sistema não linear:

$$M_{i-mx}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t u}{4\Delta x} \right) + M_{i-1}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha}{2\Delta y^2} - \frac{\Delta t v}{4\Delta y} \right) + M_i^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \lambda}{2} + \frac{\Delta t \alpha}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu}{2} + 1 \right) + \\ M_{i+1}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha}{2\Delta y^2} + \frac{\Delta t v}{4\Delta y} \right) + M_{i+mx}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t u}{4\Delta x} \right) + \frac{\lambda \Delta t}{2} M_i^{n+1} \left( \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2L} \right) = \\ M_{i-mx}^n \left( \frac{\Delta t \alpha}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t u}{4\Delta x} \right) + M_{i-1}^n \left( \frac{\Delta t \alpha}{2\Delta y^2} + \frac{\Delta t v}{4\Delta y} \right) + M_i^n \left( \frac{\Delta t \lambda}{2} - \frac{\Delta t \alpha}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu}{2} + 1 \right) + \\ M_{i+1}^n \left( \frac{\Delta t \alpha}{2\Delta y^2} - \frac{\Delta t v}{4\Delta y} \right) + M_{i+mx}^n \left( \frac{\Delta t \alpha}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t u}{4\Delta x} \right) - \frac{\lambda \Delta t}{2} M_i^{n+1} \left( \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2L} \right).$$

## 2.3 Fronteiras

Para obter estimativa das derivadas nas fronteiras, temos:

- Fronteira horizontal superior

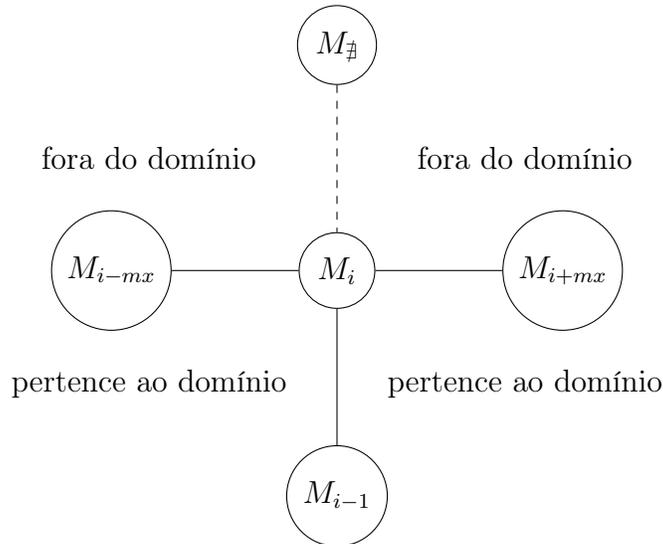


Figura 2.3: Ponto de fronteira horizontal superior tipo  $c_1$ .

Aqui  $\frac{\partial M}{\partial \eta} = \frac{\partial M}{\partial y}$ . Daí considerando  $\partial_{\#y}$ , assim se tem  $-\alpha \frac{\partial M}{\partial \eta} = c_1 M \implies \frac{\partial M}{\partial \eta} = -\frac{c_1 M}{\alpha}$ ,

a aproximação adotada é dada por:

$$\frac{M_{\#y}^n - M_{i-1}^n}{2\Delta y} = -c_1 \frac{M_i^n}{\alpha} \implies M_{\#y} = M_{i+1}^n - 2\Delta y \frac{c_1 M_i^n}{\alpha}. \quad (2.3.1)$$

Pela aproximação da derivada segunda se obtém:

$$\frac{M_{\#y}^n - 2M_i^n + M_{i-1}^n}{\Delta y^2} = \frac{2M_{i-1}^n - 2(1 + \frac{\Delta y c_1}{\alpha})M_i^n}{\Delta y^2}. \quad (2.3.2)$$

Aplicando esses valores na equação 2.3.2 vamos ter:

$$\frac{\partial M}{\partial \eta} = \left\langle \left( \frac{\partial M}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial y} \right), \eta \right\rangle = \left\langle \left( \frac{\partial M}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial y} \right), (0, 1) \right\rangle = \frac{\partial M}{\partial y},$$

com isto, resolvendo a aproximação na fronteira horizontal superior se obtém:

$$\begin{aligned}
& M_{i-mx}^{n+1} \left( -\frac{\alpha\Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta tu}{4\Delta x} \right) + M_{i-1}^{n+1} \left( -\frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} \right) + \\
& M_i^{n+1} \left( 1 + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} + \frac{c_1\Delta t}{\Delta y} + \frac{v\Delta tc_1}{2\alpha} + \frac{\mu\Delta t}{2} - \frac{\Delta t\lambda}{2} \right) + \\
& + M_{i+mx}^{n+1} \left( -\frac{\alpha\Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{u\Delta t}{4\Delta x} \right) + \frac{\lambda\Delta t}{2} M_i^{n+1} \left( \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2L} \right) = \\
& M_{i-mx}^n \left( \frac{\alpha\Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta tu}{4\Delta x} \right) + M_{i-1}^n \left( \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} \right) + \\
& M_i^n \left( 1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} - \frac{c_1\Delta t}{\Delta y} - \frac{v\Delta tc_1}{2\alpha} - \frac{\mu\Delta t}{2} + \frac{\Delta t\lambda}{2} \right) + \\
& M_{i+mx}^n \left( \frac{\alpha\Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{u\Delta t}{4\Delta x} \right) - \frac{\lambda\Delta t}{2} M_i^n \left( \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2L} \right).
\end{aligned}$$

- Para os pontos de fronteiras horizontal inferiores precisamos considerar

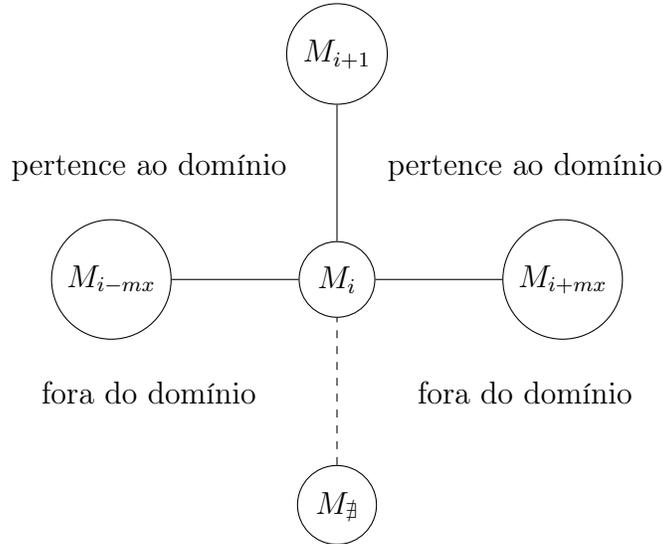


Figura 2.4: Ponto de fronteira horizontal inferior tipo  $c_2$ .

$$-\alpha \frac{\partial M}{\partial \eta} = c_2 M \text{ e } \frac{\partial M}{\partial \eta} = \left\langle \left( \frac{\partial M}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial y} \right), \eta \right\rangle = \left\langle \left( \frac{\partial M}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial y} \right), (0, -1) \right\rangle = \frac{\partial M}{\partial y} \text{ daí, vem que:}$$

$$\begin{aligned}
& M_{i-mx}^{n+1} \left( -\frac{\alpha\Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta tu}{4\Delta x} \right) + M_i^{n+1} \left( 1 + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} + \frac{c_2\Delta t}{\Delta y} + \frac{v\Delta tc_2}{2\alpha} + \frac{\mu\Delta t}{2} - \frac{\Delta t\lambda}{2} \right) + \\
& M_{i+1}^{n+1} \left( -\frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} \right) + M_{i+mx}^{n+1} \left( -\frac{\alpha\Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{u\Delta t}{4\Delta x} \right) + \frac{\lambda\Delta t}{2} M_i^{n+1} \left( \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2L} \right) = \\
& M_{i-mx}^n \left( \frac{\alpha\Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta tu}{4\Delta x} \right) + M_i^n \left( 1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} - \frac{c_2\Delta t}{\Delta y} - \frac{v\Delta tc_2}{2\alpha} - \frac{\mu\Delta t}{2} + \frac{\Delta t\lambda}{2} \right) + \\
& M_{i+1}^n \left( \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} \right) + M_{i+mx}^n \left( \frac{\alpha\Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{u\Delta t}{4\Delta x} \right) - \frac{\lambda\Delta t}{2} M_i^n \left( \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2L} \right).
\end{aligned}$$

- Para os pontos da fronteira vertical à esquerda será considerada a condição:

$$-\alpha \frac{\partial M}{\partial \eta} = c_3 M \implies \frac{\partial M}{\partial \eta} = -\frac{c_3 M}{\alpha}$$

escrevendo os pontos de fronteira à esquerda temos:

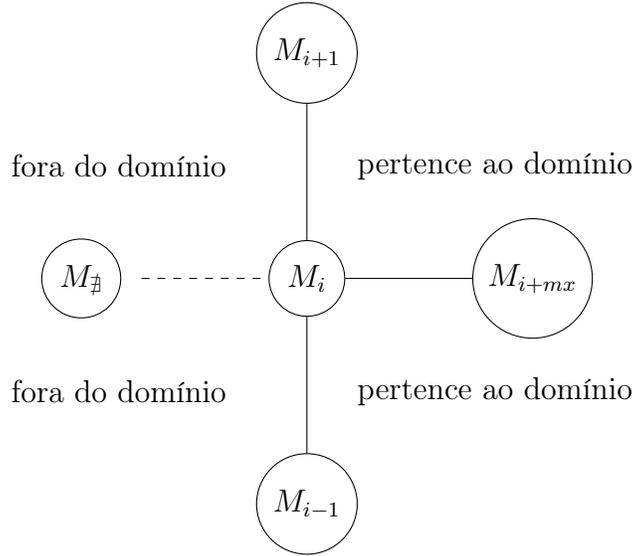


Figura 2.5: pontos da fronteira vertical à esquerda tipo  $c_3$ .

$$\frac{M_{\#x}^n - M_{i+mx}^n}{2\Delta x} = -\frac{c_3 M_i^n}{\alpha},$$

segue que  $M_{\#x}^n = M_{i+mx}^n - 2\Delta x \frac{c_3 M_i^n}{\alpha}$ ,

temos que  $\frac{\partial M}{\partial \eta} = \left\langle \left( \frac{\partial M}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial y} \right), \eta \right\rangle = \left\langle \left( \frac{\partial M}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial y} \right), (-1, 0) \right\rangle = -\frac{\partial M}{\partial x}$ ,

daí vem :

$$\begin{aligned}
& M_{i-1}^{n+1} \left( -\frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} - \frac{v\Delta t}{4\Delta y} \right) + M_i^{n+1} \left( 1 + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} + \frac{c_3\Delta t}{\Delta x} + \frac{u\Delta t c_3}{2\alpha} + \frac{\mu\Delta t}{2} - \frac{\Delta t \lambda}{2} \right) + \\
& M_{i+1}^{n+1} \left( -\frac{\alpha\Delta t}{2\Delta y^2} + \frac{v\Delta t}{4\Delta y} \right) + M_{i+mx}^{n+1} \left( -\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \right) + \frac{\lambda\Delta t}{2} M_i^{n+1} \left( \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2L} \right) = \\
& M_{i-1}^n \left( \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} + \frac{v\Delta t}{4\Delta y} \right) + M_i^n \left( 1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} - \frac{c_3\Delta t}{\Delta x} - \frac{u\Delta t c_3}{2\alpha} - \frac{\mu\Delta t}{2} + \frac{\Delta t \lambda}{2} \right) + \\
& M_{i+1}^n \left( \frac{\alpha\Delta t}{2\Delta y^2} - \frac{v\Delta t}{4\Delta y} \right) + M_{i+mx}^n \left( \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \right) - \frac{\lambda\Delta t}{2} M_i^n \left( \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2L} \right).
\end{aligned}$$

- Para os pontos da fronteiras verticais à direita, será considerado:

$$-\alpha \frac{\partial M}{\partial \eta} = c_4 M \implies \frac{\partial M}{\partial \eta} = -\frac{c_4 M}{\alpha}.$$

Escrevendo os pontos da fronteira à direita se tem:

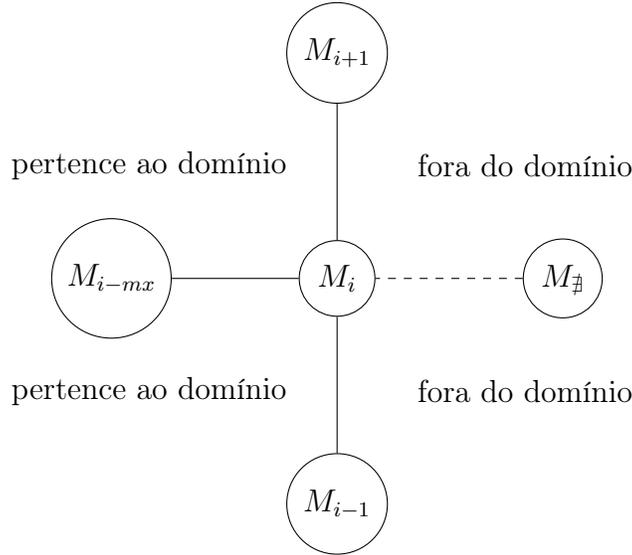


Figura 2.6: Ponto da fronteira vertical à direita tipo  $c_4$ .

$$M_{\#x}^n = M_{i-mx}^n - 2\Delta x \frac{c_4 M_i^n}{\alpha}, \text{ temos que } \frac{\partial M}{\partial \eta} = \left\langle \left( \frac{\partial M}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial y} \right), \eta \right\rangle = \left\langle \left( \frac{\partial M}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial y} \right), (1, 0) \right\rangle = \frac{\partial M}{\partial x},$$

daí vem:

$$\begin{aligned}
& M_{i-mx}^{n+1} \left( -\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \right) + M_{i-1}^{n+1} \left( -\frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} - \frac{v\Delta t}{4\Delta y} \right) + \\
& M_i^{n+1} \left( 1 + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} + \frac{c_4\Delta t}{\Delta x} - \frac{u\Delta tc_4}{2\alpha} + \frac{\mu\Delta t}{2} - \frac{\Delta t\lambda}{2} \right) + M_{i+1}^{n+1} \left( -\frac{\alpha\Delta t}{2\Delta y^2} + \frac{v\Delta t}{4\Delta y} \right) + \\
& + \frac{\lambda\Delta t}{2} M_i^{n+1} \left( \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2L} \right) = \\
& M_{i-mx}^n \left( \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \right) + M_{i-1}^n \left( \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} + \frac{v\Delta t}{4\Delta y} \right) + \\
& M_i^n \left( 1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} - \frac{c_4\Delta t}{\Delta x} + \frac{u\Delta tc_4}{2\alpha} - \frac{\mu\Delta t}{2} + \frac{\Delta t\lambda}{2} \right) + M_{i+1}^n \left( \frac{\alpha\Delta t}{2\Delta y^2} - \frac{v\Delta t}{4\Delta y} \right) - \\
& \frac{\lambda\Delta t}{2} M_i^n \left( \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2L} \right).
\end{aligned}$$

- Para os pontos de fronteiras nos cantos.

Aqui serão feitas combinações dos resultados das fronteiras horizontal superior e vertical à esquerda, portanto, 2 condições de fronteira simultâneas.

- Para o canto superior à esquerda, se tem:

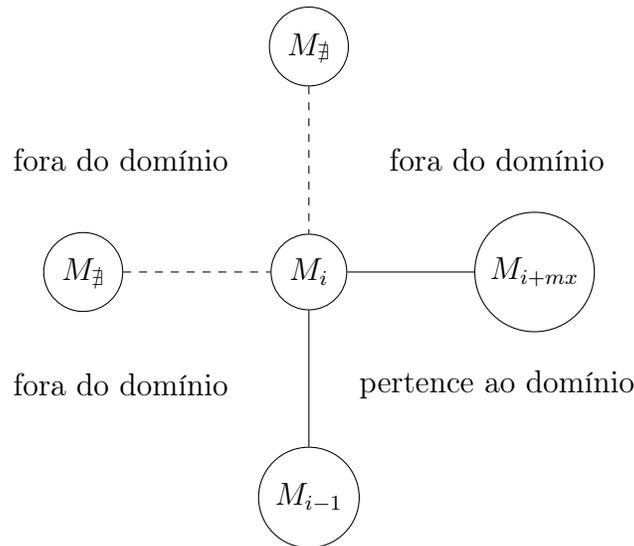


Figura 2.7: Ponto do canto superior esquerdo.

$$\begin{aligned}
& M_{i-1}^{n+1} \left( -\frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} \right) + M_i^{n+1} \left( 1 + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{c_3 \Delta t}{\Delta x} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} + \frac{c_1 \Delta t}{\Delta y} + \frac{v \Delta t c_1}{2\alpha} + \frac{u \Delta t c_3}{2\alpha} + \frac{\mu \Delta t}{2} - \frac{\Delta t \lambda}{2} \right) + \\
& + M_{i+mx}^{n+1} \left( -\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \right) + \frac{\lambda \Delta t}{2} M_i^{n+1} \left( \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2L} \right) = \\
& M_{i-1}^n \left( \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} \right) + M_i^n \left( 1 - \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} - \frac{c_3 \Delta t}{\Delta x} - \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} - \frac{c_1 \Delta t}{\Delta y} - \frac{v \Delta t c_1}{2\alpha} - \frac{u \Delta t c_3}{2\alpha} - \frac{\mu \Delta t}{2} + \frac{\Delta t \lambda}{2} \right) + \\
& M_{i+mx}^n \left( \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \right) - \frac{\lambda \Delta t}{2} M_i^n \left( \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2L} \right).
\end{aligned}$$

Aqui serão feitas combinações dos resultados das fronteiras horizontal inferior e vertical à esquerda, portanto, 2 condições de fronteira simultâneas.

- Para o canto inferior da esquerda, se tem:

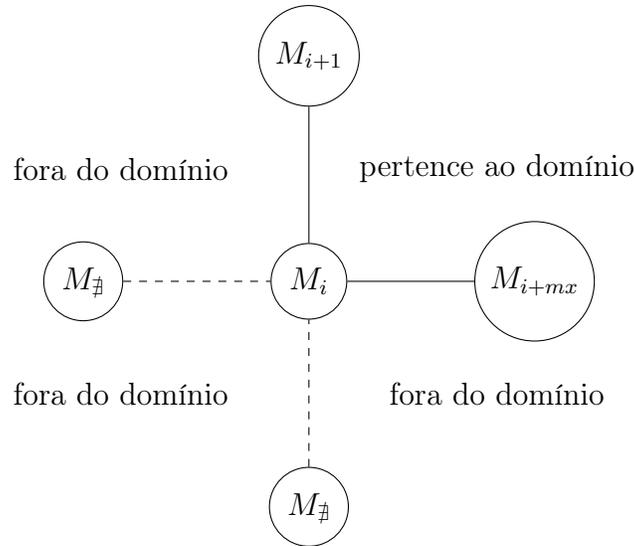


Figura 2.8: Ponto do canto inferior esquerdo.

$$\begin{aligned}
& M_i^{n+1} \left( 1 + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{c_3 \Delta t}{\Delta x} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} + \frac{c_2 \Delta t}{\Delta y} + \frac{v \Delta t c_2}{2\alpha} + \frac{u \Delta t c_3}{2\alpha} + \frac{\mu \Delta t}{2} - \frac{\Delta t \lambda}{2} \right) + M_{i+1}^{n+1} \left( -\frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} \right) + \\
& + M_{i+mx}^{n+1} \left( -\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \right) + \frac{\lambda \Delta t}{2} M_i^{n+1} \left( \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2L} \right) = \\
& M_i^n \left( 1 - \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} - \frac{c_3 \Delta t}{\Delta x} - \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} - \frac{c_2 \Delta t}{\Delta y} - \frac{v \Delta t c_2}{2\alpha} - \frac{u \Delta t c_3}{2\alpha} - \frac{\mu \Delta t}{2} + \frac{\Delta t \lambda}{2} \right) + M_{i+1}^n \left( \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} \right) + \\
& M_{i+mx}^n \left( \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \right) - \frac{\lambda \Delta t}{2} M_i^n \left( \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2L} \right).
\end{aligned}$$

Aqui serão feitas combinações dos resultados das fronteiras horizontal superior e vertical à direita, portanto, 2 condições de fronteira simultâneas.

- Para o canto superior da direita, se tem:

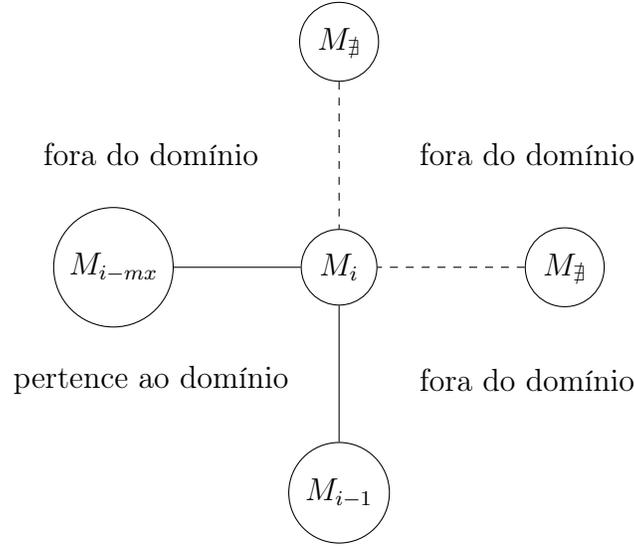


Figura 2.9: Ponto do canto superior direito.

$$\begin{aligned}
& M_{i-mx}^{n+1} \left( -\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \right) + M_{i-1}^{n+1} \left( -\frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} \right) + \\
& M_i^{n+1} \left( 1 + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{c_4\Delta t}{\Delta x} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} + \frac{c_1\Delta t}{\Delta y} + \frac{v\Delta tc_1}{2\alpha} + \frac{u\Delta tc_4}{2\alpha} + \frac{\mu\Delta t}{2} - \frac{\Delta t\lambda}{2} \right) + \\
& \frac{\lambda\Delta t}{2} M_i^{n+1} \left( \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2L} \right) = \\
& M_{i-mx}^n \left( \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \right) + M_{i-1}^n \left( \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} \right) + \\
& M_i^n \left( 1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{c_4\Delta t}{\Delta x} - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} - \frac{c_1\Delta t}{\Delta y} - \frac{v\Delta tc_1}{2\alpha} - \frac{u\Delta tc_4}{2\alpha} - \frac{\mu\Delta t}{2} + \frac{\Delta t\lambda}{2} \right) - \\
& \frac{\lambda\Delta t}{2} M_i^n \left( \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2L} \right).
\end{aligned}$$

Aqui serão feitas combinações dos resultados das fronteiras horizontal inferior e vertical à direita, portanto, 2 condições de fronteira simultâneas.

- Para o canto inferior da direita, se tem:

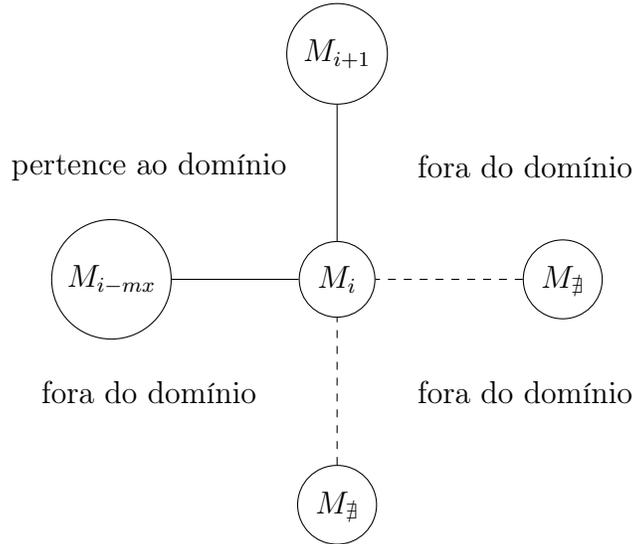


Figura 2.10: Ponto do canto inferior direito.

$$\begin{aligned}
& M_{i-mx}^{n+1} \left( -\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \right) + M_i^{n+1} \left( 1 + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{c_4\Delta t}{\Delta x} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} + \frac{c_2\Delta t}{\Delta y} + \frac{v\Delta tc_2}{2\alpha} + \frac{u\Delta tc_4}{2\alpha} + \frac{\mu\Delta t}{2} - \frac{\Delta t\lambda}{2} \right) + \\
& M_{i+1}^{n+1} \left( -\frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} \right) + \frac{\lambda\Delta t}{2} M_i^{n+1} \left( \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2L} \right) = \\
& M_{i-mx}^n \left( \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \right) + M_i^n \left( 1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{c_4\Delta t}{\Delta x} - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} - \frac{c_2\Delta t}{\Delta y} - \frac{v\Delta tc_2}{2\alpha} - \frac{u\Delta tc_4}{2\alpha} - \frac{\mu\Delta t}{2} + \frac{\Delta t\lambda}{2} \right) + \\
& M_{i+1}^n \left( \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2} \right) - \frac{\lambda\Delta t}{2} M_i^n \left( \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2L} \right).
\end{aligned}$$

## 2.4 Implementação computacional

Na implementação computacional do sistema (1.2.2), o domínio espacial foi então discretizado através do método de diferenças finitas centradas de segunda ordem.

Uma proposta algorítmica para implementação em ambiente Matlab para a construção das matrizes se encontra no apêndice. A escolha do método de Crank-Nicolson nas aproximações das variáveis temporais se deve à sua estabilidade numérica e sua margem de erro, que é de ordem de  $(\Delta t)^2$ . Para maiores detalhes sobre os métodos e critérios numéricos usados neste trabalho ver Lopes e Ruggiero (1997); Carnahan et al. (1969) e Kardestuncer e Norrie (1987).

A figura 2.5 é a discretização de um trecho do município de Lábrea no interior do Amazonas através do métodos das diferenças finitas centradas de segunda ordem usada nas simulações.

As imagens a seguir foram divulgadas pelo INPE e, a partir delas, calculamos os parâmetros da tabela 2.1:

Figura 2.11: Difusão de vegetação de 2001 à 2004

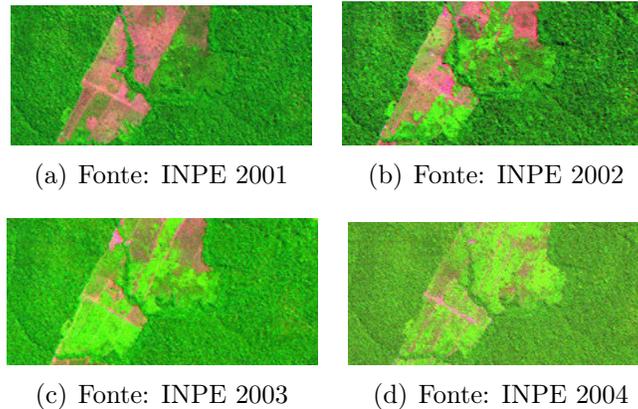


Figura 2.12: Difusão de vegetação de 2006 à 2009

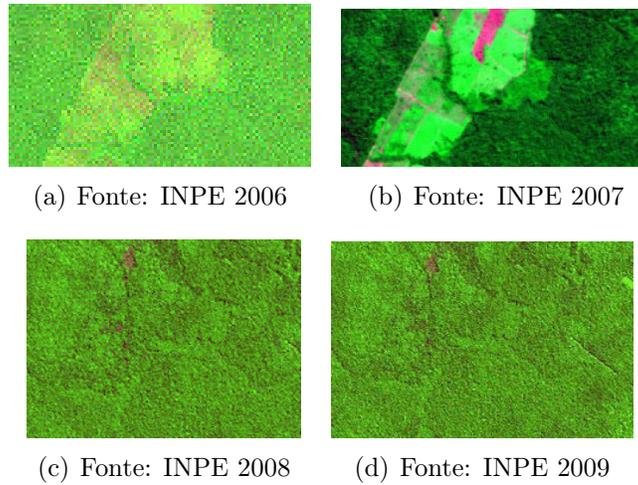
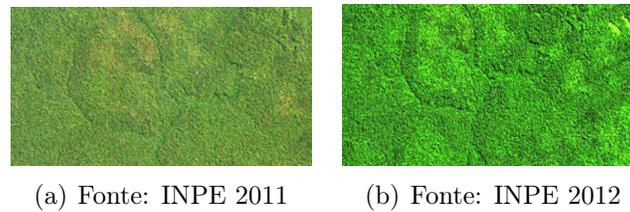


Figura 2.13: Difusão de vegetação de 2011 e 2012



Os parâmetros  $\lambda, L$  para as simulações deste trabalho foram obtidos com base nestas imagens do INPE.

Para que os resultados qualitativos sejam mais visíveis na solução aproximada, o parâmetro  $\mu = 0$  foi inicialmente assumido como um valor efetivo no algoritmo mencionado.

O parâmetro  $\alpha$  foi calculado de acordo com o que foi proposto em Edelstein-kesht (1988).

Tabela 2.1: Tabela dos parâmetros usados na simulação da difusão de mata.

$\alpha$	$0.327e - 2$	$Km^2 / \text{mês}$
$\mu$	0.0	unid.
$\lambda$	0.115	$Km^2 / \text{mês}$
$L$	16.7101	anc. de vegetação
$TF$	131	meses corresp. a 11 anos

Fonte: Autoria própria, usando as imagens acima

Para simular a recuperação da área que foi impactada pelo desmatamento no município de Lábrea

no interior do Amazonas, foram escolhidos alguns nós do domínio dentro e fora da região desmatada, para estudar seu comportamento ao longo do tempo. A unidade de tempo  $t$  usada neste trabalho foi dada em meses.

As figuras 2.11 até 2.14 representam a difusão da floresta num meio desmatado com características favoráveis à recuperação da área, numa situação evolutiva no tempo. Cada figura representa a recuperação da floresta em um determinado tempo  $t$ : no início das simulações  $t = 0$ , seguido por  $t = 12, 60, 131$  meses. No conjunto deste cenário é possível constatar que, à medida que o tempo passa a densidade de vegetação vai aumentando na região desmatada cuja área diminui significativamente.

Distribuição inicial das regiões desmatada,  $t = 0$ :

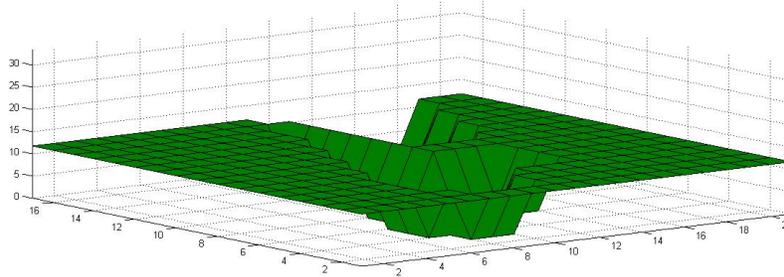


Figura 2.14: Densidade inicial de vegetação.

O aumento da densidade de vegetação em  $t = 12$  está na figura 2.12;

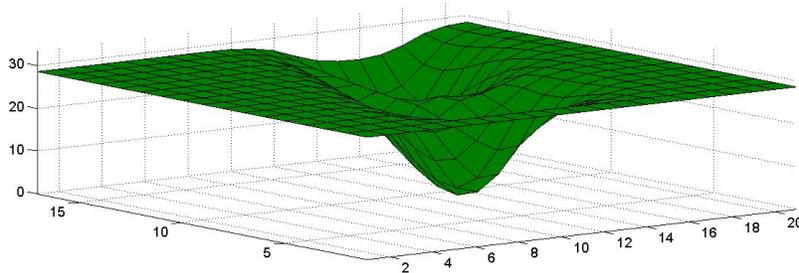
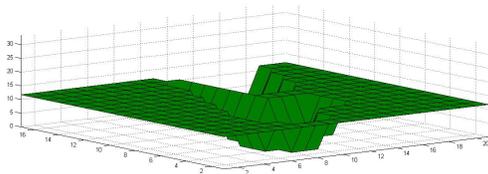
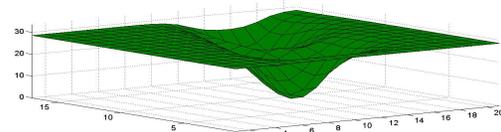


Figura 2.15: Densidade de vegetação aos 12 meses.



(a) Figura 2.11



(b) Figura 2.12

Para efetuarmos uma comparação colocamos as figuras 2.11 e 2.12 lado a lado.

O aumento da densidade de vegetação para  $t = 60$  está na figura 2.13

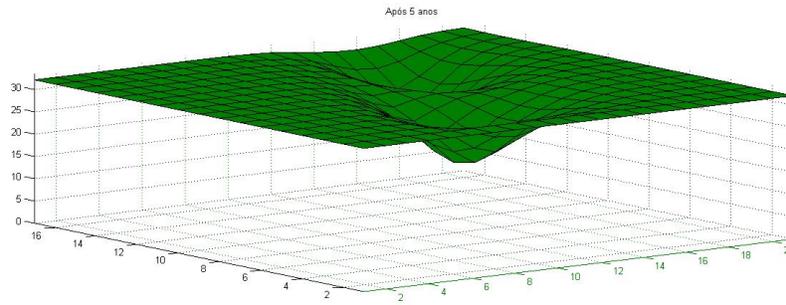
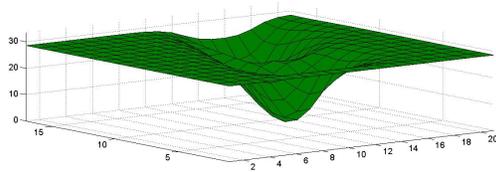
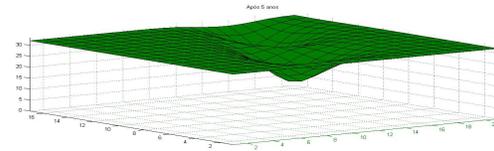


Figura 2.16: Densidade de vegetação aos 60 meses.



(a) Figura 2.12



(b) Figura 2.13

Para efetuarmos uma comparação colocamos as figuras 2.12 e 2.13 lado a lado.

Nas figuras 2.11 até 2.14 é possível observar claramente o efeito das dinâmicas difusivo-advectivas no aumento da densidade de vegetação na região desmatada ao longo do tempo, como era esperado.

Densidade final de vegetação para  $t = 131$  está na figura 2.14

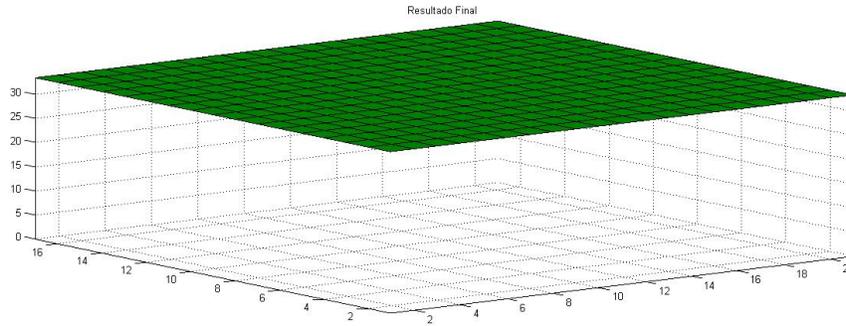
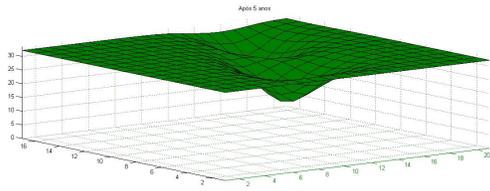
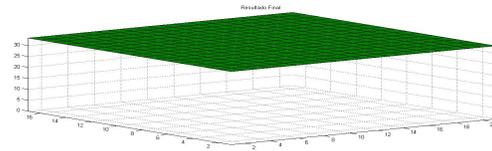


Figura 2.17: Densidade final de vegetação.



(a) Figura 2.13



(b) Figura 2.14

Para efetuarmos uma comparação colocamos as figuras 2.13 e 2.14 lado a lado.

As figuras acima mostram o processo evolutivo ao longo de 11 anos compatíveis com as imagens do INPE de recuperação da mata na região desmatada .

Efetuada todas as iterações, obtém-se um cenário para a distribuição final da cobertura vegetal do meio, como mostra a figura 2.14.

A fim de observarmos o comportamento evolutivo da recuperação da floresta, escolhemos dois nós da malha um que estava na região impactada e o outro fora dessa região.

Para um acompanhamento evolutivo, elegemos os nós 145 e 312 assinalados na figura 2.1.

O nó 145, situado na região desmatada inicialmente, se ver que há uma rápida recuperação da vegetação, o que já era esperado pela modelagem desenvolvida neste capítulo, pois a difusão e a dinâmica advectiva fazem com que o aumento da densidade de vegetação aconteça de forma gradativa.

O nó 312, está na região onde não há desmatamento inicial, percebe-se que não há variação de densidade na região, correspondendo totalmente às expectativas da modelagem proposta.

Estes resultados serão utilizados nos capítulos seguintes para se estudar e analisar os efeitos da recuperação da densidade de mata sobre o convívio de duas espécies competidoras sem características migratórias do ecossistema local.

# Capítulo 3

## Modelagem do convívio de duas espécies competidoras com recuperação da mata

O modelo clássico de Lotka-Volterra de 1927 (Batschelet, (1978)) é um modelo de importância histórica na modelagem matemática de sistemas ecológicos, este modelo mostra que nenhuma espécie existe isoladamente de outras. Mark Kot (2001), descreve que o modelo surgiu em meados da década de 1920. Sistemas de equações diferenciais ordinárias que incorporam relações intra e interespecíficas começaram a ser usados de diversos modos no estudo e na compreensão de muitos fenômenos de convívio entre espécies. No entanto, estes modelos consideravam somente a variação no tempo, pressupondo uma distribuição espacial homogênea das populações envolvidas.

Os fenômenos de dispersão, (Sossae (1995)) que são observados em quase todo tipo de população existente na natureza, tornaram necessário a inclusão das variáveis espaciais nas modelagens, cujo pioneiro foi Skellam (1951).

Este capítulo é o ponto culminante deste trabalho, no qual é feita uma combinação dos resultados obtidos nos capítulos anteriores com um sistema de equações diferenciais parciais não-lineares de dispersão envolvendo termos do tipo Lotka-Volterra e dinâmicas vitais do tipo Verhulst, (Sossae, (2003) e Batschelet, (1978)), no município de Lábrea, região que abrange o domínio das aplicações deste trabalho, onde se estudou a modelagem e possibilidades de simulação computacional com competição das espécies (cotia e paca).

### 3.1 O modelo matemático

No modelo (1.1.1) se inclui duas espécies animais (cotia e paca) que possuem a mesma base alimentar, de forma a permitir simular relações entre indivíduos da mesma espécie e de espécies diferentes.

Assim, levando em conta duas populações  $P, C$  e a densidade de mata,  $M$  que interagem entre si, o sistema não linear que descreve tais fenômenos para as variações de densidades populacionais  $P(x, y, t), C(x, y, t)$  e  $M(x, y, t)$  com  $(x, y) \in \Omega$  e  $t \in (0, T]$  é dado por (Cantrell e Cosner, (2003)).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha \nabla M) + \nabla M \cdot V + \mu M = \lambda M \left(1 - \frac{M}{L}\right) - aPM - bCM; \\ \frac{\partial P}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_p \nabla P) + \mu_p P = \lambda_p P \left(1 - \frac{P + \gamma_p C}{K}\right) + a_p PM; \\ \frac{\partial C}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_c \nabla C) + \mu_c C = \lambda_c C \left(1 - \frac{C + \gamma_c P}{K}\right) + a_c CM. \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

Nesta proposta de modelagem, os principais fenômenos considerados são:

- A dispersão populacional de cada espécie;
- decaimento das espécies devido às competições;
- dinâmicas vitais;
- relações inter e intra-específicas.

Em termos dos parâmetros serão considerados:

- $\alpha_p = \alpha_p(x, y, t)$ ,  $\alpha_c = \alpha_c(x, y, t)$  representam as dispersões populacionais de cada espécie;
- $\frac{\lambda_p \gamma_c}{K}$ ,  $\frac{\lambda_c \gamma_p}{K}$  representam a taxa de relação interespecífica (o sinal negativo caracteriza a competição);
- $\frac{\lambda_p}{K}$ ,  $\frac{\lambda_c}{K}$  representam a taxa de relação intraespecífica (o sinal negativo caracteriza a competição);
- $\lambda_p, \lambda_c$  taxas de crescimento intrínsecas de  $P$  e  $C$  respectivamente;
- $K$  é a capacidade de suporte para ambas as espécies considerada como comum;
- $L$  é a capacidade de suporte do meio para a cobertura vegetal;
- $\mu_p, \mu_c$  representa o decaimento populacional natural de cada espécie;
- $a_p$  é o quanto a população  $P$  se beneficia com o crescimento de  $M$ ;

- $a_c$  é o quanto a população  $C$  se beneficia com o crescimento de  $M$ ;
- $a, b$  representam, respectivamente a mortalidade de  $M$ , devido as ações das espécies.

A mortalidade de ambas as espécies varia de acordo com a variação de densidade de  $M$ , mas quanto menor a densidade de  $M$ , maior a mortalidade de  $P, C$  e quanto menor a densidade de  $M$  maior a mortalidade das espécies.

Vale ressaltar aqui que uma das diferenças deste trabalho em relação aos demais que utilizaram uma modelagem matemática para os fenômenos que estão sendo estudados é que no sistema (3.1.1), utilizamos uma capacidade suporte  $L$  para o meio e uma capacidade suporte  $K$  para ambas as populações. Esta idéia se deve ao fato de que, estamos considerando que as duas espécies competem pelos mesmos recursos, possuem a mesma base alimentar e estes recursos são limitados. Desta forma, evitamos a hipótese que exclui o tratamento isolado a cada espécie. Estamos considerando também que as espécies envolvidas não possuem características migratórias.

## 3.2 Descrição da condição de fronteira

Levando em consideração a condição de fronteira considera-se  $\Gamma_i, i = 1, \dots, 4$ , como sendo a fronteira de  $\partial\Omega$ , conforme a situação nos ensaios computacionais iremos tratar de  $\partial\Omega$  igual em toda a borda, mas o algoritmo prevê a possibilidade de condições distintas em bordas distintas.

- Neste trabalho vamos recorrer a uma forma mais geral, usando as condições homogêneas de Robin, que descreve uma variação de  $M$  e das espécies estudadas na fronteira dependente do próprio  $M$  e de cada espécie.

Sendo  $\eta$  um vetor unitário normal a  $\partial\Omega$ , externo a  $\Omega$ ;  $\partial\Omega$  é composto por  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ , com

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \text{ e } \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset,$$

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial M}{\partial \eta} \right|_{\Gamma_i} = c_i M; \\ \left. \frac{\partial P}{\partial \eta} \right|_{\Gamma_i} = \rho_i P; \\ \left. \frac{\partial C}{\partial \eta} \right|_{\Gamma_i} = \sigma_i C. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

- $c_i, \rho_i, \sigma_i$  aqui, são os parâmetros de proporcionalidade adequado para a condição de Robin em cada parte  $\Gamma_i$  de  $\partial\Omega$ .

Entendemos assim que há variação da densidade de vegetação na fronteira, bem como das espécies consideradas.

Os parâmetros usados nesta modelagem podem depender de  $M$  e das espécies  $P, C$ , porém, devido ao intervalo de tempo que será considerado nas simulações, a proposta de tratamento numérico para este modelo se optou por parâmetros constantes.

Nessa situação, a equação que descreve tais fenômenos, levando em conta as populações  $P, C$  e  $M$  que interagem entre si, o sistema não linear de equações a derivadas parciais para as densidades populacionais  $P(x, y, t), C(x, y, t)$  e  $M(x, y, t)$  com  $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$  e  $t \in (0, T]$ , é escrito da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial t} = \operatorname{div}(\alpha \nabla M) - \nabla M \cdot V - \mu M + \lambda M - \frac{\lambda}{L} MM - aPM - bCM; \\ \frac{\partial P}{\partial t} = \operatorname{div}(\alpha_p \nabla P) - \mu_p P + \lambda_p P - \frac{\lambda_p}{K} PP - \frac{\lambda_p \gamma_c}{K} PC + a_p PM; \\ \frac{\partial C}{\partial t} = \operatorname{div}(\alpha_c \nabla C) - \mu_c C + \lambda_c C - \frac{\lambda_c}{K} CC - \frac{\lambda_c \gamma_p}{K} CP + a_c CM. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

que pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial t} = \alpha \Delta M - \nabla M \cdot V + (\lambda - \mu)M - \left( \frac{\lambda}{L} M - aP - bC \right) M; \\ \frac{\partial P}{\partial t} = \alpha_p \Delta P + (\lambda_p - \mu_p)P - \left( \frac{\lambda_p}{K} P - \frac{\lambda_p \gamma_c}{K} C - a_p M \right) P; \\ \frac{\partial C}{\partial t} = \alpha_c \Delta C + (\lambda_c - \mu_c)C - \left( \frac{\lambda_c}{K} C - \frac{\lambda_c \gamma_p}{K} P - a_c M \right) C. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Com o mesmo argumento usado na seção 1.2, vamos reescrever o sistema (3.1.1) com as condições de fronteiras e iniciais:

$P = P(x, y, t)$ ,  $C = C(x, y, t)$ ,  $M = M(x, y, t)$  com  $(x, y) \in \Omega \subset R^2$  e  $t \in (0, T]$ ;

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial M}{\partial t} = \alpha \Delta M - \nabla M \cdot V + (\lambda - \mu)M - \left( \frac{\lambda}{L}M - aP - bC \right) M; \\
 \frac{\partial P}{\partial t} = \alpha_p \Delta P + (\lambda_p - \mu_p)P - \left( \frac{\lambda_p}{K}P - \frac{\lambda_p \gamma_c}{K}C - a_p M \right) P; \\
 \frac{\partial C}{\partial t} = \alpha_c \Delta C + (\lambda_c - \mu_c)C - \left( \frac{\lambda_c}{K}C - \frac{\lambda_c \gamma_p}{K}P - a_c M \right) C. \\
 \\
 \frac{\partial P}{\partial \eta} |_{\Gamma_i} = \rho_i P; \\
 \frac{\partial C}{\partial \eta} |_{\Gamma_i} = \sigma_i C, e \\
 \\
 \frac{\partial M}{\partial \eta} |_{\Gamma_i} = c_i M; \\
 \\
 P(x, y, 0) = P_0(x, y); \\
 \\
 C(x, y, 0) = C_0(x, y); \\
 \\
 M(x, y, 0) = M_0(x, y); \\
 \\
 \forall (x, y) \in \Omega \subset R^2, t \in (0, T].
 \end{array} \right. \quad (3.2.4)$$

# Capítulo 4

## Aproximação numérica da resolução do sistema e simulação computacional

### 4.1 Aproximação da solução do sistema não-linear

Reescrevendo o sistema (3.2.3), na forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial M}{\partial x} - v \frac{\partial M}{\partial y} - (\mu - \lambda)M - \left( \frac{\lambda}{L}M - aP - bC \right) M; \\ \frac{\partial P}{\partial t} = \alpha_p \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) - (\mu_p - \lambda_p)P - \left( \frac{\lambda_p}{K}P + \frac{\lambda_p \gamma_c}{K}C - a_p M \right) P; \\ \frac{\partial C}{\partial t} = \alpha_c \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) - (\mu_c - \lambda_c)C - \left( \frac{\lambda_c}{K}C + \frac{\lambda_c \gamma_p}{K}P - a_p M \right) C, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

usando o método das diferenças finitas para a variável espacial e o método de Crank-Nicolson, para a variável temporal, visto nas seções (1.4) e (1.5) respectivamente.

Escrevendo a solução para a evolução da densidade de vegetação  $M$ , se tem:

$$\begin{aligned} \frac{M_i^{n+1} - M_i^n}{\Delta t} = & \alpha \left[ \frac{M_{i+mx}^{n+\frac{1}{2}} - 2M_i^{n+\frac{1}{2}} + M_{i-mx}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} + \frac{M_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2M_i^{n+\frac{1}{2}} + M_{i-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} \right] - u \left[ \frac{M_{i+mx}^{n+\frac{1}{2}} - M_{i-mx}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \right] - \\ & - v \left[ \frac{M_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - M_{i-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta y} \right] - (\mu - \lambda)M_i^{n+\frac{1}{2}} - \left( \frac{\lambda}{K}M_i^{n+\frac{1}{2}} - aP_i^{n+\frac{1}{2}} - bC_i^{n+\frac{1}{2}} \right) M_i^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Aplicando nesta equação o método de Crank-Nicolson se tem:

$$\begin{aligned}
\frac{M_i^{n+1} - M_i^n}{\Delta t} = & \alpha \left[ \frac{\frac{M_{i+mx}^{n+1} + M_{i+mx}^n}{2} - 2\frac{(M_i^{n+1} + M_i^n)}{2} + \frac{M_{i-mx}^{n+1} + M_{i-mx}^n}{2}}{\Delta x^2} + \right. \\
& + \left. \frac{\frac{M_{i+1}^{n+1} + M_{i+1}^n}{2} - 2\frac{(M_i^{n+1} + M_i^n)}{2} + \frac{M_{i-1}^{n+1} + M_{i-1}^n}{2}}{\Delta y^2} \right] - u \left[ \frac{\frac{M_{i+mx}^{n+1} + M_{i+mx}^n}{2} - \left(\frac{M_{i-mx}^{n+1} + M_{i-mx}^n}{2}\right)}{2\Delta x} \right] - \\
& - v \left[ \frac{\frac{M_{i+1}^{n+1} + M_{i+1}^n}{2} - \left(\frac{M_{i-1}^{n+1} + M_{i-1}^n}{2}\right)}{2\Delta y} \right] - (\mu - \lambda) \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2} - \\
& - \left( \frac{\lambda}{L} \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2} - a \frac{P_i^{n+1} + P_i^n}{2} - b \frac{C_i^{n+1} + C_i^n}{2} \right) \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2}.
\end{aligned}$$

Com alguns procedimentos algébricos análogos aos do capítulo 2 se tem:

$$\begin{aligned}
M_i^{n+1} - M_i^n = & \Delta t \alpha \left[ \frac{M_{i+mx}^{n+1} + M_{i+mx}^n - 2M_i^{n+1} - 2M_i^n + M_{i-mx}^{n+1} + M_{i-mx}^n}{2\Delta x^2} + \right. \\
& + \left. \frac{M_{i+1}^{n+1} + M_{i+1}^n - 2M_i^{n+1} - 2M_i^n + M_{i-1}^{n+1} + M_{i-1}^n}{2\Delta y^2} \right] - \Delta t u \left[ \frac{M_{i+mx}^{n+1} + M_{i+mx}^n - M_{i-mx}^{n+1} - M_{i-mx}^n}{4\Delta x} \right] - \\
& - \Delta t v \left[ \frac{M_{i+1}^{n+1} + M_{i+1}^n - M_{i-1}^{n+1} - M_{i-1}^n}{4\Delta y} \right] - \Delta t (\mu - \lambda) \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2} - \\
& - \Delta t \left( \frac{\lambda}{L} \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2} - a \frac{P_i^{n+1} + P_i^n}{2} - b \frac{C_i^{n+1} + C_i^n}{2} \right) \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2}.
\end{aligned}$$

Agrupando os termos no mesmo passo de tempo de modo conveniente, se tem:

$$\begin{aligned}
& M_{i-mx}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t v}{4\Delta x} \right) + M_{i-1}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha}{2\Delta y^2} - \frac{\Delta t v}{4\Delta y} \right) + M_i^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \lambda}{2} + \frac{\Delta t \alpha}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu}{2} + 1 \right) + \\
& + M_{i+1}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha}{2\Delta y^2} + \frac{\Delta t v}{4\Delta y} \right) + M_{i+mx}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t v}{4\Delta x} \right) + \\
& + \frac{\Delta t}{2} M_i^{n+1} \left( \frac{\lambda M_i^{n+1} + M_i^n}{L} - a \frac{P_i^{n+1} + P_i^n}{2} - b \frac{C_i^{n+1} + C_i^n}{2} \right) = \\
& = M_{i-mx}^n \left( \frac{\Delta t \alpha}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t v}{4\Delta x} \right) + M_{i-1}^n \left( \frac{\Delta t \alpha}{2\Delta y^2} + \frac{\Delta t v}{4\Delta y} \right) + M_i^n \left( \frac{\Delta t \lambda}{2} - \frac{\Delta t \alpha}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu}{2} + 1 \right) + \\
& + M_{i+1}^n \left( \frac{\Delta t \alpha}{2\Delta y^2} - \frac{\Delta t v}{4\Delta y} \right) + M_{i+mx}^n \left( \frac{\Delta t \alpha}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t v}{4\Delta x} \right) - \\
& - \frac{\Delta t}{2} M_i^n \left( \frac{\lambda M_i^{n+1} + M_i^n}{L} - a \frac{P_i^{n+1} + P_i^n}{2} - b \frac{C_i^{n+1} + C_i^n}{2} \right).
\end{aligned}$$

Analogamente, para a população  $P$  (pacas), se tem:

$$\text{agora } \frac{\partial P}{\partial t} = \alpha_p \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) - (\mu_p - \lambda_p)P - \left( \frac{\lambda_p}{K}P + \frac{\lambda_{p\gamma c}}{K}C - a_p M \right) P.$$

Usando o método das diferenças finitas, se tem:

$$\begin{aligned}
\frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} &= \alpha_p \left[ \frac{P_{i-mx}^{n+\frac{1}{2}} - 2P_i^{n+\frac{1}{2}} + P_{i+mx}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} + \frac{P_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} - 2P_i^{n+\frac{1}{2}} + P_{i+1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} \right] - \\
& - (\mu_p - \lambda_p)P_i^{n+\frac{1}{2}} - \left( \frac{\lambda_p}{K}P_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\lambda_{p\gamma c}}{K}C_i^{n+\frac{1}{2}} - a_p M_i^{n+\frac{1}{2}} \right) P_i^{n+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Aplicando o método de Crank-Nicolson se tem:

$$\begin{aligned}
\frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} = \alpha_p & \left[ \frac{\frac{P_{i-mx}^{n+1} + P_{i-mx}^n}{2} - 2\frac{(P_i^{n+1} + P_i^n)}{2} + \frac{P_{i+nx}^{n+1} + P_{i+nx}^n}{2}}{\Delta x^2} + \right. \\
& \left. + \frac{\frac{P_{i-1}^{n+1} + P_{i-1}^n}{2} - 2\frac{(P_i^{n+1} + P_i^n)}{2} + \frac{P_{i+1}^{n+1} + P_{i+1}^n}{2}}{\Delta y^2} \right] - (\mu_P - \lambda_P) \frac{P_i^{n+1} + P_i^n}{2} - \\
& - \left( \frac{\lambda_p}{K} \frac{P_i^{n+1} + P_i^n}{2} + \frac{\lambda_{p\gamma c}}{K} \frac{C_i^{n+1} + C_i^n}{2} + a_p \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2} \right) \frac{P_i^{n+1} + P_i^n}{2}.
\end{aligned}$$

Com algumas manipulações algébricas, se tem:

$$\begin{aligned}
P_i^{n+1} - P_i^n = \Delta t \alpha_p & \left[ \frac{P_{i-mx}^{n+1} + P_{i-mx}^n - 2P_i^{n+1} - 2P_i^n + P_{i+mx}^{n+1} + P_{i+mx}^n}{2\Delta x^2} + \right. \\
& \left. + \frac{P_{i-1}^{n+1} + P_{i-1}^n - 2P_i^{n+1} - 2P_i^n + P_{i+1}^{n+1} + P_{i+1}^n}{2\Delta y^2} \right] - \Delta t (\mu_p - \lambda_p) \frac{P_i^{n+1} + P_i^n}{2} - \\
& - \Delta t \left( \frac{\lambda_p}{K} \frac{P_i^{n+1} + P_i^n}{2} + \frac{\lambda_{p\gamma c}}{K} \frac{C_i^{n+1} + C_i^n}{2} - a_p \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2} \right) \frac{P_i^{n+1} + P_i^n}{2}.
\end{aligned}$$

Agrupando os termos no mesmo passo de tempo de modo conveniente, se tem:

$$\begin{aligned}
& P_{i-mx}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha_p}{2\Delta x^2} \right) + P_{i-1}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha_p}{2\Delta y^2} \right) + P_i^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \lambda_p}{2} + \frac{\Delta t \alpha_p}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_p}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_p}{2} + 1 \right) + P_{i+1}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha_p}{2\Delta y^2} \right) + \\
& + P_{i+mx}^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha_p}{2\Delta x^2} \right) - \frac{\Delta t}{2} P_i^{n+1} \left( \frac{\lambda_p}{K} \frac{P_i^{n+1} + P_i^n}{2} + \frac{\lambda_{p\gamma c}}{K} \frac{C_i^{n+1} + C_i^n}{2} - a_p \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2} \right) = \\
& = P_{i-mx}^n \left( \frac{\Delta t \alpha_p}{2\Delta x^2} \right) + P_{i-1}^n \left( \frac{\Delta t \alpha_p}{2\Delta y^2} \right) + P_i^n \left( \frac{\Delta t \lambda_p}{2} - \frac{\Delta t \alpha_p}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_p}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_p}{2} + 1 \right) + P_{i+1}^n \left( \frac{\Delta t \alpha_p}{2\Delta y^2} \right) + \\
& + P_{i+mx}^n \left( \frac{\Delta t \alpha_p}{2\Delta x^2} \right) + \frac{\Delta t}{2} P_i^n \left( \frac{\lambda_p}{K} \frac{P_i^{n+1} + P_i^n}{2} + \frac{\lambda_{p\gamma c}}{K} \frac{C_i^{n+1} + C_i^n}{2} - a_p \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2} \right).
\end{aligned}$$

Analogamente, para  $C$  (cotias), se tem:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \alpha_c \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) - (\mu_c - \lambda_c)C - \left( \frac{\lambda_c}{K}C + \frac{\lambda_{c\gamma p}}{K}P - a_cM \right) C.$$

Usando o método das diferenças finitas, se tem:

$$\begin{aligned}
\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} &= \alpha_c \left[ \frac{C_{i-mx}^{n+\frac{1}{2}} - 2C_i^{n+\frac{1}{2}} + C_{i+mx}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} + \frac{C_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} - 2C_i^{n+\frac{1}{2}} + C_{i+1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} \right] - \\
& - (\mu_c - \lambda_c)C_i^{n+\frac{1}{2}} - \left( \frac{\lambda_c}{K}C_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\lambda_{c\gamma p}}{K}P_i^{n+\frac{1}{2}} + a_cM_i^{n+\frac{1}{2}} \right) C_i^{n+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Aplicando o método de Crank-Nicolson se tem:

$$\begin{aligned}
\frac{C_i^{m+1} - C_i^n}{\Delta t} = \alpha_c & \left[ \frac{\frac{C_{i-mx}^{m+1} + C_{i-mx}^n}{2} - 2\frac{(C_i^{m+1} + C_i^n)}{2} + \frac{C_{i+mx}^{m+1} + C_{i+mx}^n}{2}}{\Delta x^2} + \right. \\
& \left. + \frac{\frac{C_{i-1}^{m+1} + C_{i-1}^n}{2} - 2\frac{(C_i^{m+1} + C_i^n)}{2} + \frac{C_{i+1}^{m+1} + C_{i+1}^n}{2}}{\Delta y^2} \right] - (\mu_c - \lambda_c) \frac{C_i^{m+1} + C_i^n}{2} - \\
& - \left( \frac{\lambda_c}{K} \frac{C_i^{m+1} + C_i^n}{2} + \frac{\lambda_{c\gamma p}}{K} \frac{P_i^{n+1} + P_i^n}{2} - a_c \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2} \right) \frac{C_i^{m+1} + C_i^n}{2}.
\end{aligned}$$

Com algumas manipulações algébricas, se tem:

$$\begin{aligned}
C_i^{m+1} - C_i^n = \Delta t \alpha_c & \left[ \frac{C_{i-mx}^{m+1} + C_{i-mx}^n - 2C_i^{m+1} - 2C_i^n + C_{i+mx}^{m+1} + C_{i+mx}^n}{2\Delta x^2} + \right. \\
& \left. \frac{C_{i-1}^{m+1} + C_{i-1}^n - 2C_i^{m+1} - 2C_i^n + C_{i+1}^{m+1} + C_{i+1}^n}{2\Delta y^2} \right] - \Delta t \mu_c \left[ \frac{C_i^{m+1} + C_i^n}{2} \right] + \Delta t \lambda_c \left[ \frac{C_i^{m+1} + C_i^n}{2} \right] - \\
& - \Delta t \left( \frac{\lambda_c}{K} \frac{C_i^{m+1} + C_i^n}{2} + \frac{\lambda_{c\gamma p}}{K} \frac{P_i^{n+1} + P_i^n}{2} - a_c \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2} \right) \frac{C_i^{m+1} + C_i^n}{2}.
\end{aligned}$$

Agrupando os termos no mesmo passo de tempo de modo conveniente, se tem:

$$\begin{aligned}
& C_{i-mx}^{m+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha_c}{2\Delta x^2} \right) + C_{i-1}^{m+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha_c}{2\Delta y^2} \right) + C_i^{n+1} \left( -\frac{\Delta t \lambda_c}{2} + \frac{\Delta t \alpha_c}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t \alpha_c}{\Delta y^2} + \frac{\Delta t \mu_c}{2} + 1 \right) + C_{i+1}^{m+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha_c}{2\Delta y^2} \right) + \\
& + C_{i+mx}^{m+1} \left( -\frac{\Delta t \alpha_c}{2\Delta x^2} \right) - \frac{\Delta t}{2} C_i^{m+1} \left( \frac{\lambda_c C_i^{n+1} + C_i^n}{K} - \frac{\lambda_{c\gamma p} P_i^{n+1} + P_i^n}{K} - a_c \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2} \right) = \\
& = C_{i-mx}^n \left( \frac{\Delta t \alpha_c}{2\Delta x^2} \right) + C_{i-1}^n \left( \frac{\Delta t \alpha_c}{2\Delta y^2} \right) + C_i^n \left( \frac{\Delta t \lambda_c}{2} - \frac{\Delta t \alpha_c}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t \alpha_c}{\Delta y^2} - \frac{\Delta t \mu_c}{2} + 1 \right) + C_{i+1}^n \left( \frac{\Delta t \alpha_c}{2\Delta y^2} \right) + \\
& + C_{i+mx}^n \left( \frac{\Delta t \alpha_c}{2\Delta x^2} \right) + \frac{\Delta t}{2} C_i^n \left( \frac{\lambda_c C_i^{n+1} + C_i^n}{K} - \frac{\lambda_{c\gamma p} P_i^{n+1} + P_i^n}{K} - a_c \frac{M_i^{n+1} + M_i^n}{2} \right).
\end{aligned}$$

A expressão acima caracteriza um sistema não-linear iterativo de modo que as sucessivas soluções aproximadas a partir de  $M^0, P^0, C^0$  levam a procurada aproximação de  $M^{npt}, P^{npt}, C^{npt}$ . Tal sistema é dado de modo genérico por:

npt é o número de passos no tempo.

$$\begin{cases}
A.(M^n, M^{n+1}, P^n, P^{n+1}, C^n, C^{n+1}).M^{n+1} = B.(M^n, M^{n+1}, P^n, P^{n+1}, C^n, C^{n+1}).M^n; \\
A_p.(M^n, M^{n+1}, P^n, P^{n+1}, C^n, C^{n+1}).M^{n+1} = B_p.(M^n, M^{n+1}, P^n, P^{n+1}, C^n, C^{n+1}).M^n; \\
A_c.(M^n, M^{n+1}, P^n, P^{n+1}, C^n, C^{n+1}).M^{n+1} = B_c.(M^n, M^{n+1}, P^n, P^{n+1}, C^n, C^{n+1}).M^n.
\end{cases} \quad (4.1.2)$$

A não linearidade de (4.1.2) será abordada pelo método de Douglas-Dupont (SOSSAE,(1995); MEYER e SALVATIERRA,(2006)).

Aspectos do algoritmo e das simulações numéricas estão no capítulo 5 a seguir.

# Capítulo 5

## Implementações computacionais

Nestas simulações, as densidades populacionais iniciais  $P$  e  $C$  das duas espécies (paca e cotia, respectivamente) serão distribuídas de forma homogênea na parte do domínio, não desmatado e nula na parte de mata destruída.

A tabela seguinte mostra os parâmetros utilizados nesta simulação.

Tabela 5.1: Tabela dos parâmetros usados nas simulações das dinâmicas iterativas.

Parâmetros	Valores	Parâmetros	Valores	Parâmetros	Valores	Unid. Medida
$\alpha$	$0.327e - 2$	$\alpha_p$	$0.14e - 5$	$\alpha_c$	$0.1325e - 5$	área/tempo
$\mu$	0.0	$\mu_p$	0.001	$\mu_c$	0.003	n <sup>o</sup> real
$u$	0.01	$u_p$	0.0	$u_c$	0.0	Km/mes
$v$	0.0075	$v_p$	0.0	$v_c$	0.0	Km/mes
$\lambda$	0.115	$\lambda_p$	0.171	$\lambda_c$	0.0156	n <sup>o</sup> real
$L$	16.7101	$K$	20.7101	$\tilde{K}$	20.7101	n <sup>o</sup> real
$a$	$a = -0.1e - 7$	$a_p$	$0.215e - 7$	$a_c$	$0.165e - 5$	área/ind. $t^2$
$b$	$b = -0.2e - 7$	$\gamma_c$	0.002	$\gamma_p$	0.001	área/ind. $t^2$

Fonte: Autoria própria, usando as imagens divulgadas pelo INPE.

Esta tabela mostra os parâmetros utilizados na simulação do convívio entre duas espécies competidoras, sem característica migratórias sob o aumento de densidade de vegetação.

Os parâmetros  $u_p, v_p, u_c, v_c$  são considerados nulos porque as espécies paca e cotia, não possuem característica migratórias,  $\mu$  é nulo inicialmente para que os resultados qualitativos sejam mais visíveis na solução aproximada, como visto anteriormente. Portanto, é suposto aqui que as simulações tentam retratar o convívio destas espécies diante da recuperação de  $M$ .

Os gráficos a seguir descrevem a partir das condições iniciais o comportamento evolutivo de  $M, P$  e  $C$  em instante escolhidos, a saber  $t = 0, 12, 60, 131$ .

Neste cenário observamos um comportamento qualitativamente semelhante ao anterior no que diz respeito à recuperação da floresta. Ao longo do tempo as condições ambientais vão favorecendo o

convívio entre espécies e após  $t = 131$  vimos que a mata já esta totalmente recuperada, porém ainda não está totalmente ocupada pelas espécies. Somente algum tempo depois esta área recuperada passa a ser ocupada.

Distribuição inicial da mata e das espécies competidoras.  
 $M^0$ .

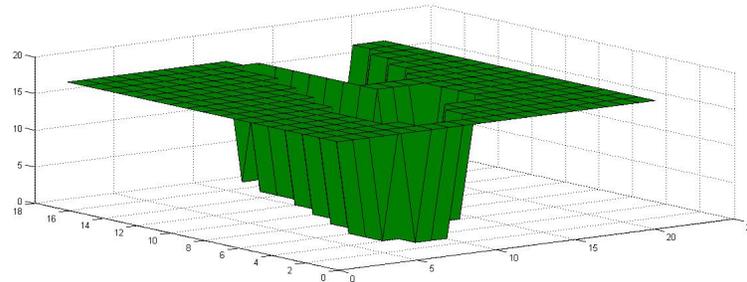


Figura 5.1: Densidade inicial de vegetação.

$P^0$ .

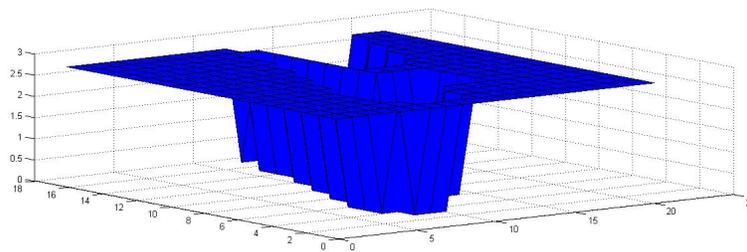
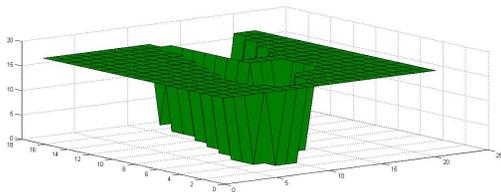
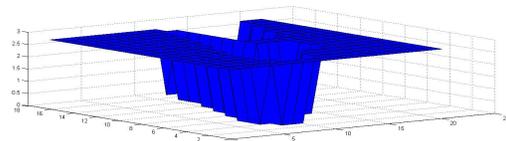


Figura 5.2: Distribuição inicial da população de pacas.



(a) Figura 5.1



(b) Figura 5.2

Para efetuarmos uma comparação entre a distribuição inicial de mata com a distribuição inicial da população de pacas, colocamos as figuras 5.1 e 5.2 lado a lado.

$C^0$ .

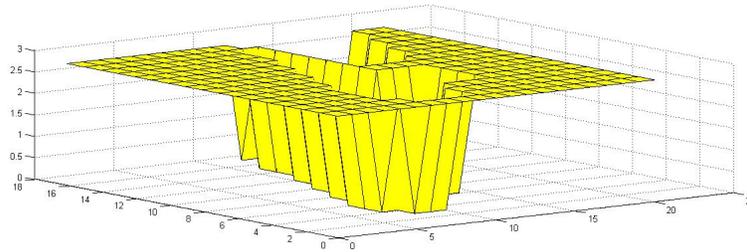
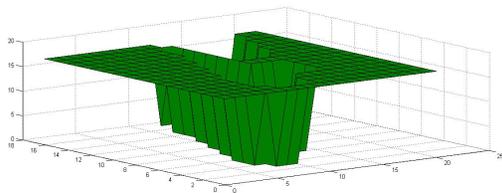
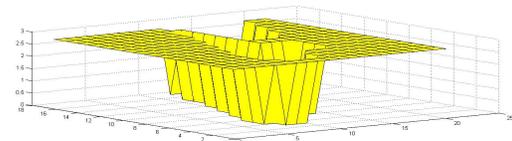


Figura 5.3: Distribuição inicial da população de cotias.

Podemos observar que não há ocupação por espécies na área desmatada em  $t = 0$ .



(a) Figura 5.1



(b) Figura 5.3

Para efetuarmos uma comparação entre a distribuição inicial de mata com a distribuição inicial da população de cotias, colocamos as figuras 5.1 e 5.3 lado a lado.

Com o tempo  $t = 12$  temos conforme a figura 5.4.  
 $M^{12}$ .

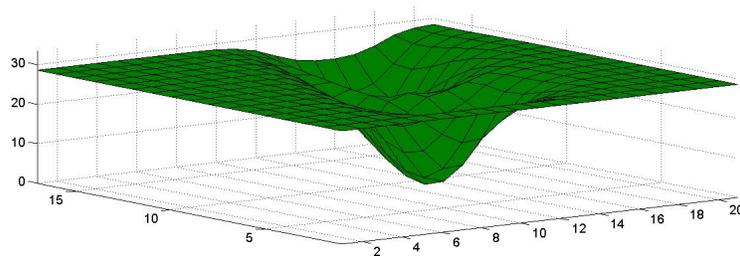


Figura 5.4: Densidade de vegetação aos 12 meses.

Com o tempo  $t = 12$  temos conforme a figura 5.5.  
 $P^{12}$ .

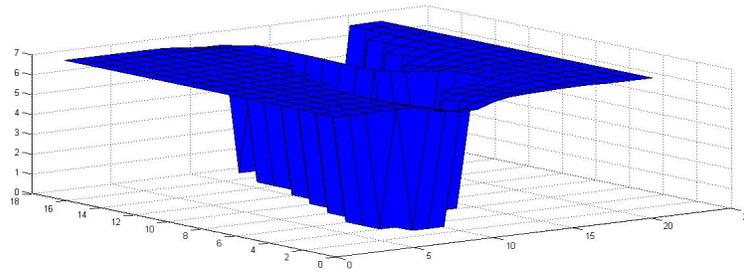
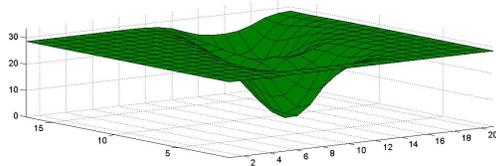
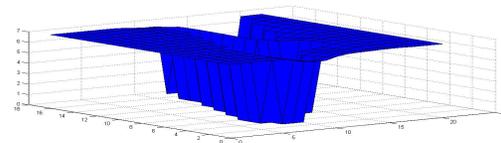


Figura 5.5: População de pacas aos 12 meses.



(a) Figura 5.4



(b) Figura 5.5

Para efetuarmos uma comparação entre a densidade de mata com a distribuição da população de pacas com  $t = 12$ , colocamos as figuras 5.4 e 5.5 lado a lado.

Com o tempo  $t = 12$  temos conforme a figura 5.6.

$C^{12}$ .

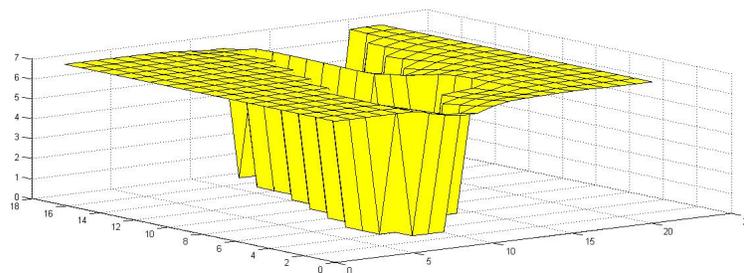
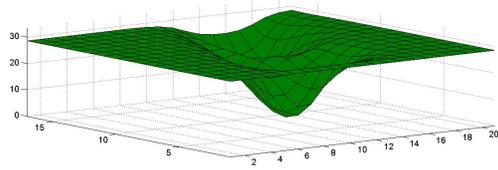
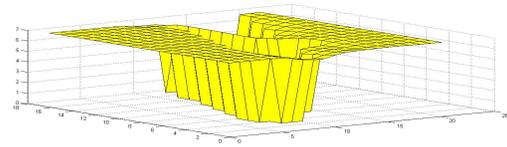


Figura 5.6: População de cotias aos 12 meses.



(a) Figura 5.4



(b) Figura 5.6

Para efetuarmos uma comparação entre a densidade de mata com a distribuição da população de cotias com  $t = 12$ , colocamos as figuras 5.4 e 5.6 lado a lado.

Com  $t = 12$  pode-se ver (figuras 5.4; 5.5; e 5.6) que a espécie  $P$  começa a crescer mais do que a espécie  $C$  devido ao aumento da densidade de vegetação que começa a beneficiar mais a espécie  $P$ , resultado numérico influenciado pela diferença entre os parâmetros  $\lambda_p, \lambda_c, a, a_p, a_c, c, \gamma_p, \gamma_c$ .

Com o tempo  $t = 60$  temos conforme a figura 5.7.  
 $M^{60}$ .

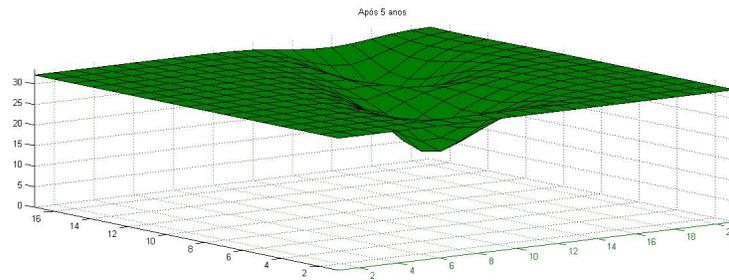


Figura 5.7: Densidade de vegetação aos 60 meses.

$P^{60}$ .

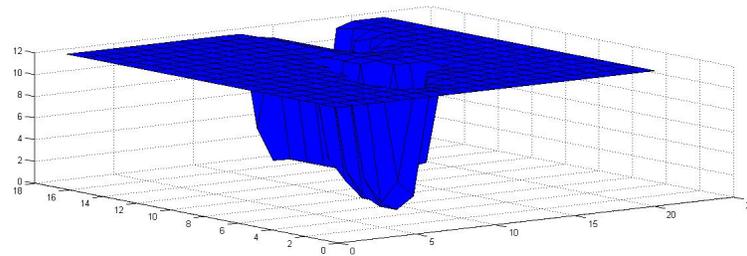
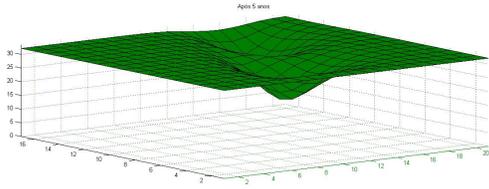
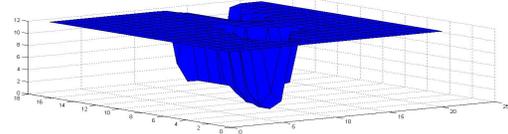


Figura 5.8: População de pacas aos 60 meses.



(a) Figura 5.7



(b) Figura 5.8

Para efetuarmos uma comparação entre a densidade de mata com a distribuição da população de pacas com  $t = 60$ , colocamos as figuras 5.7 e 5.8 lado a lado.

$C^{60}$ .

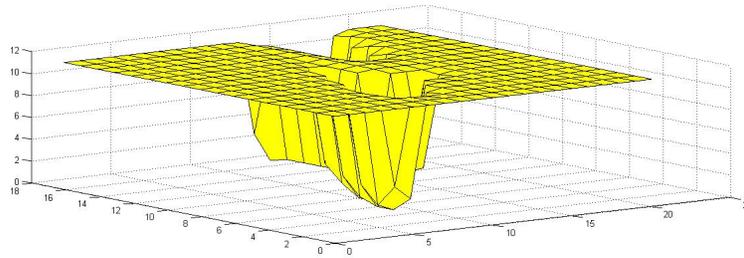
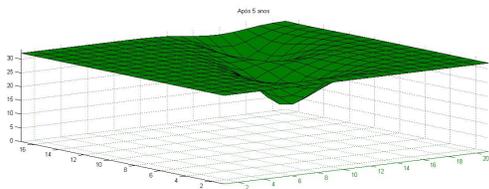
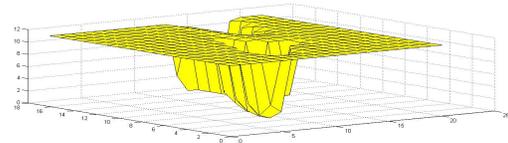


Figura 5.9: População de cotias aos 60 meses.



(a) Figura 5.7



(b) Figura 5.9

Para efetuarmos uma comparação entre a densidade de mata com a distribuição da população de cotias com  $t = 60$ , colocamos as figuras 5.7 e 5.9 lado a lado.

Com o tempo  $t = 60$ , observa-se que a espécie  $P$  se recupera na região desmatada de início mais rapidamente do que a espécie  $C$ .

Com o tempo  $t = 131$  temos conforme a figura 5.10.

$M^{131}$ .

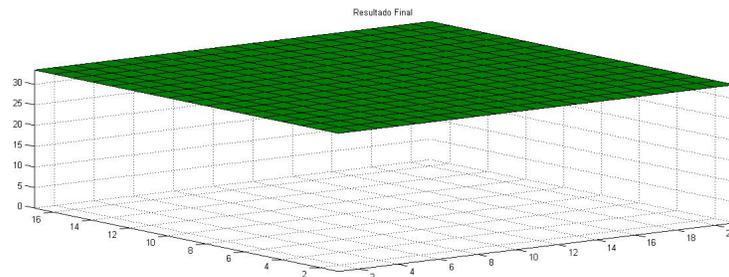


Figura 5.10: Densidade final de vegetação.

$P^{131}$ .

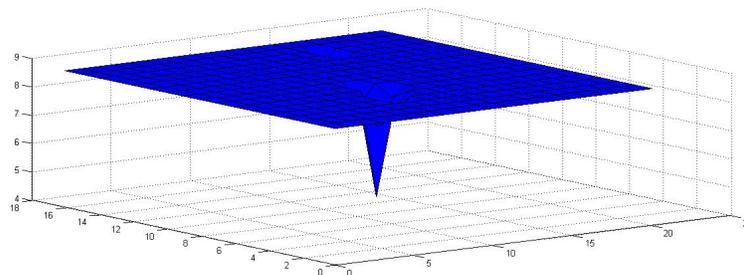
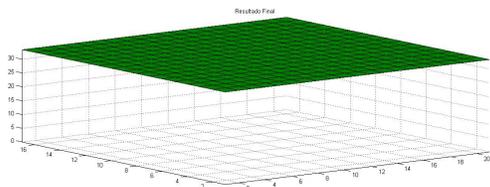
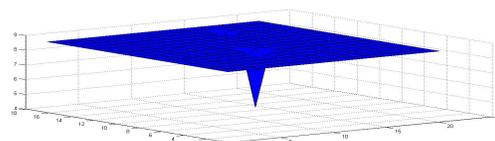


Figura 5.11: População final da população de pacas.



(a) Figura 5.10



(b) Figura 5.11

Para efetuarmos uma comparação entre a densidade de mata com a distribuição da população de pacas com  $t = 131$ , colocamos as figuras 5.10 e 5.11 lado a lado.

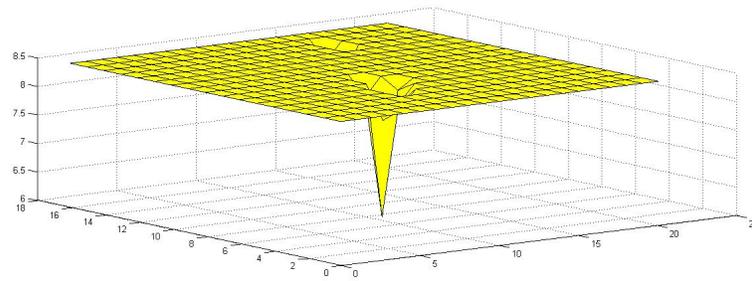
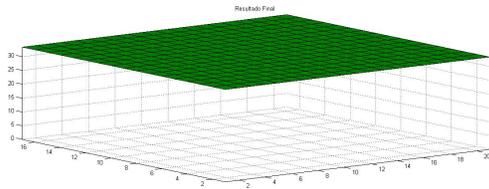
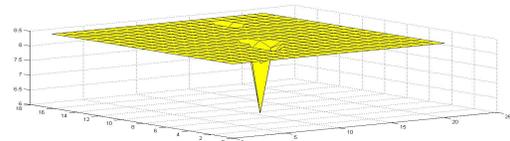


Figura 5.12: População final da população de cotias..



(a) Figura 5.10



(b) Figura 5.12

Para efetuarmos uma comparação entre a densidade de mata com a distribuição da população de cotias com  $t = 131$ , colocamos as figuras 5.10 e 5.11 lado a lado.

Com  $t = 131$  unidades de tempo, o que corresponde ao tempo final de 11 anos pode-se perceber agora que a área anteriormente afetada pelo desmatamento já está totalmente recuperada e estes resultados são coerentes com a realidade. Porém as espécies  $P$  e  $C$  ainda não estão totalmente recuperadas, ainda estão em fase de aumento da densidades populacionais e levarão mais algum tempo para se recuperarem totalmente (ver figuras 5.11 e 5.12).

Observamos que a área que foi afetada pelo desmatamento é onde há as menores densidades populacionais.

Desse modo a competição interespecífica está influenciando negativamente na dinâmica populacional.

Por outro lado, as regiões onde se tem maior densidades populacionais das espécies  $P, C$  se situam onde não se teve impacto do desmatamento.

# Conclusões

Há evidências de resultados extremamente prejudiciais à vida e a biodiversidade a curto, médio e longo prazos decorrentes de uma larga gama de efeitos de impactos ambientais. Dentre estes o desmatamento, que afeta de modo irreversível o delicado e instável equilíbrio do convívio de espécies que se interrelacionam ambientalmente. Em alguns casos, determinadas espécies, cuja presença e permanência são fundamentais na estabilidade do ecossistema. Neste trabalho, nossa proposta é elaborar um programa que simule a recuperação de uma área que foi desmatada e o efeito desta sobre o convívio de duas espécies competidoras pela mesma base alimentar (ver anexos 1 e 2), o que em geral altera as dinâmicas de ambas as populações.

Os resultados obtidos das simulações apresentadas nos capítulos 2 e 5, mostram-se de acordo com as expectativas, sendo que o processo de difusão da mata está em consonância com as imagens divulgadas pelo INPE.

Quanto aos resultados das simulações deste trabalho concluímos que é possível:

- construir instrumentos matemáticos que contribuam significativamente para os planos e a execução de ações governamentais em políticas públicas de combate ao desmatamento e de recuperação efetiva de áreas já desmatadas;
- construir conhecimento em simulação de impactos ambientais;
- tornar mais eficazes as estratégias ambientais e de recuperação em áreas afetadas por ações impactantes e sua possível recuperação;
- disponibilizar instrumental matemático numérico que permita simulações computacionais a priori de possíveis estratégias de preservação e uso ambiental.

Diante do exposto, espera-se que todas estas ferramentas desenvolvidas possam ou venham a contribuir com políticas e ações de modo positivo para:

- manter e preservar a biodiversidade, visando o resgate de regiões já impactadas;
- planejar combates de futuras ações de desmatamentos que interferem no convívio entre as espécies;
- fortalecer o equilíbrio ecológico entre as espécies e ampliar a diversidade;
- planejar ações preventivas ao desmatamento, assim teremos um ambiente sempre preservado.

Neste trabalho o uso de uma mesma capacidade de suporte para as populações em estudo não foi simplesmente para facilitar os cálculos: foi um esforço para integrar a clássica modelagem do tipo Lotka-Volterra em um ambiente de recuperação da biota, e de convívio interespecíficos.

O objetivo deste estudo foi de propor, analisar e discutir uma modelagem matemática que descreva o convívio de espécies competidoras inter e intraespecífico sem características migratórias diante da variação de densidade de mata para construir conhecimento em termos da situação geral apresentada.

Vale a pena frisar que neste trabalho os parâmetros utilizados para a difusibilidade foram considerados constantes no espaço e no tempo. Um desafio para futuros trabalhos seria o de fazê-los variáveis.

As implementações computacionais realizadas para aproximar numericamente as soluções dos sistemas propostos neste trabalho, foram elaboradas em ambiente MATLAB 7.10, de modo que se dispusesse de ferramentas mais acessíveis a profissionais e pesquisadores ligados aos estudos de ecologia matemática e meio ambiente, bem como os responsáveis pela adoção de medidas de contenção, mitigação e recuperação de áreas destruídas pela ação antrópica.

Assim, defendemos a idéia de que a matemática aplicada e computacional na sua subárea de ecologia matemática pode e deve criar ambientes e instrumentos de simulação para suportes técnicos a entidades governamentais auxiliaadoras na análise de procedimentos de possíveis ou prováveis impactos ambientais.

Secundariamente, achamos que uma conclusão válida deste trabalho é estabelecer novos pontos de partida: mais espécies, uso de instrumental fuzzy, cooperação próxima com estudiosos da mata amazônica com visando à obtenção de melhores informações sobre os fenômenos aqui considerados.

# Referências Bibliográficas

- [1] BATSCHELET, E. **Introdução à matemática para biocientistas**. Interciência; São Paulo: EDUSP, 1978.
- [2] CANTRELL, R. S.; COSNER, C. **Spatial ecology via reaction-diffusion equations**. John Wiley, 2003.
- [3] CARNAHAN, B.; LUTHER, H., AND WILKES, J. **Applied Numerical Methods**. New York: John Wiley, 1969.
- [4] COSNER, C. **Variability, vagueness and comparison methods for ecological models**. *Bulletin of Mathematical Biology* **58**, 2 (1996), 207–246.
- [5] COUTINHO, A. C. *et al.* **Uso e cobertura da terra nas áreas desflorestadas da Amazônia Legal : TerraClass 2008**. Brasília, DF: Embrapa; Belém: INPE, 2013.
- [6] CUNHA, M. C. **Métodos numéricos**. Editora da UNICAMP, 2003.
- [7] DISPONÍVEL EM: [HTTP://HOMEMCULTO.FILES.WORDPRESS.COM/2011/09/TRANAS.JPG](http://HOMEMCULTO.FILES.WORDPRESS.COM/2011/09/TRANAS.JPG), 2000. acesso em: 22 mar. 2013.
- [8] DISPONÍVEL EM: [HTTP://PACATATUECOTIATAMBEM.BLOGSPOT.COM.BR/2007/07/PACA-TATU-E-COTIA-TAMBM.HTML](http://PACATATUECOTIATAMBEM.BLOGSPOT.COM.BR/2007/07/PACA-TATU-E-COTIA-TAMBM.HTML) . pacatatuecotiatambem, 2001. acesso em: 2 mai. 2013.
- [9] DISPONÍVEL EM: [HTTP://WWW.IBGE.GOV.BR](http://WWW.IBGE.GOV.BR). Ibge, 2012. acesso em: 7 jul. 2013.
- [10] DISPONÍVEL EM: [HTTP://WWW.INPE.BR](http://WWW.INPE.BR). Inpe, 2012. acesso em: 28 out. 2012.
- [11] EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical models in biology**, vol. 46. Siam, 1988.
- [12] KARDESTUNCER, H.; NORRIE, D. H. **Finite element handbook**. McGraw-Hill, Inc., 1987.
- [13] KOT, M. **Elements of mathematical ecology**. Cambridge University Press, 2001.
- [14] LEVEQUE, R. **Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems**. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
- [15] LIMA, E. L. **Curso de Análise**, vol. 2. Impa, 2007.
- [16] LOPES, V. L. R.; RUGGIERO, M. A. G. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. Makron Books do Brasil, 1997.

- [17] MARCHUK, G. I. **Mathematical models in environmental problems**, vol. 16. North Holland, 1986.
- [18] MEYER, J. F. C. A.; SALVATIERRA, M. M. **Modelagem matemática e simulação computacional da presença de materiais impactantes tóxicos em casos de dinâmica populacional com competição inter e intra-específica**. *Biomatemática IMECC/Unicamp* 16, 22 (2006).
- [19] MURRAY, J. D. *Mathematical biology: I. An introduction*, vol. 2. Springer, 2002.
- [20] OKUBO, A. **Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models**, vol. 1. Springer, 1980.
- [21] POLETTI, E. C. C. **Dispersão de poluente em sistema de reservatório: modelagem matemática e simulação computacional utilizando-se aproximação numérica e conjuntos fuzzy**. Tese de Doutorado IMECC-UNICAMP.
- [22] SKELLAM, J. C. **Random dispersal in theoretical populations**. *Biometrika* (1951).
- [23] SOSSAE, R. C. **Dinâmica populacional densidade-dependente em processos de dispersão e migração**. *Master's thesis, IMECC-UNICAMP, Campinas/SP* (1995).
- [24] SOSSAE, R. C. et al. **Mathematical Modeling and Numerical Simulation of Space-Dependent Multispecies Interactions**. *Annals of the New York Academy of Sciences* 879, 1 (1999), 440–443.
- [25] SOSSAE, R. C. **A presença evolutiva de um material impactante e seu efeito no transiente populacional de espécies interativas: modelagem e aproximação**. Tese de Doutorado, UNICAMP.

# Apêndice

## Seção A.1

A tabela abaixo mostra o aumento da densidade de mata entre os anos 2001 e 2012. A área total da região  $\Omega \subset R^2$  considerada é de  $4,77Km^2$  com uma área desmatada de  $1,53Km^2$  no ano de 2001.

Observe na tabela abaixo que a área desmatada vai reduzindo ao longo dos anos.

Tabela 2: Tabela da redução do desmatamento ao longo do tempo.

Ano	Área desmatada em $Km^2$
2001	1,53
2002	1,17
2003	0,36
2004	0,27
2006	0,225
2007	0,18
2008	0,135
2009	0,09
2011	0,054
2012	0,00

Fonte: Autoria própria, usando as imagens divulgadas pelo INPE

A tabela seguinte mostra a variação da densidade de mata tendendo a capacidade máxima do meio.

Daí, segue que:

$$\frac{dM}{dt} = \lambda M \left(1 - \frac{M}{L}\right) \Rightarrow \frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = \lambda \left(1 - \frac{1}{L}M\right) = \lambda - \frac{\lambda}{L}M.$$

$$\frac{dM}{dt} = \lambda M \left(1 - \frac{M}{L}\right) \Rightarrow \frac{dM}{M \left(1 - \frac{M}{L}\right)} = \lambda dt.$$

Tabela 3: Tabela da aumento da densidade de vegetação.

Área	Área total - Área desmatada $Km^2$	Área reflorestada em $Km^2$
$M_1$	4,77 -1,53	3,24
$M_2$	4,77 -1,17	3,6
$M_3$	4,77 -0,36	4,41
$M_4$	4,77 -0,27	4,5
$M_6$	4,77 -0,225	4,5450
$M_7$	4,77 -0,18	4,59
$M_8$	4,77 -0,135	4,635
$M_9$	4,77 -0,09	4,68
$M_{11}$	4,77 -0,054	4,716
$M_{12}$	4,77 -0,00	4,77

Fonte: Autoria própria, usando as imagens divulgadas pelo INPE

Integrando ambos os membros temos:

$$\int \frac{dM}{P \left(1 - \frac{M}{L}\right)} = \int \lambda dt = \lambda t + c$$

$$\int \frac{dM}{P} + \int \frac{dM}{1 - \frac{M}{L}} = \lambda t + c,$$

fazendo  $1 - \frac{M}{L} = u \Rightarrow du = -\frac{M}{L}$

$$\int \frac{dM}{M} + \int \frac{dM}{1 - \frac{M}{L}} = \int \frac{dM}{M} - \int \frac{du}{u} = \lambda t + c.$$

Dai, vem que

$$\frac{1}{M \left(1 - \frac{M}{L}\right)} = \frac{A}{M} + \frac{B}{1 - \frac{M}{L}} = \frac{A - \frac{A}{L}M + BM}{M \left(1 - \frac{M}{L}\right)},$$

donde

$$\begin{cases} A = 1 \\ -\frac{A}{L} + B = 0 \end{cases}$$

o que implica  $B = \frac{A}{L} = \frac{1}{L}$ .

Agora, substituindo os valores de A e B nas integrais e resolvendo essas integrais temos

$$\ln|M| - \ln\left|1 - \frac{M}{L}\right| = \lambda t + c$$

$$\ln\left|\frac{M}{1 - \frac{M}{L}}\right| = \lambda t + c; e^{\lambda t + c} = De^{\lambda t}$$

$$\frac{M}{1 - \frac{M}{L}} = De^{\lambda t} \Leftrightarrow M = De^{\lambda t} - \frac{M}{L}De^{\lambda t}$$

$$M\left(1 + \frac{De^{\lambda t}}{L}\right) = De^{\lambda t}$$

$$M(t) = \frac{De^{\lambda t}}{1 + \frac{De^{\lambda t}}{L}}$$

multiplicando o numerador e o denominador por  $L\frac{1}{D}e^{-\lambda t}$ , vamos ter:

$$M(t) = \frac{LDe^{\lambda t}\frac{1}{D}e^{-\lambda t}}{\left(1 + \frac{De^{\lambda t}}{L}\right)L\frac{1}{D}e^{-\lambda t}} = \frac{L}{1 + \frac{L}{D}e^{-\lambda t}} = \frac{L}{1 + Re^{-\lambda t}}$$

com  $R = \frac{L}{D}$ .  
Segue que

$$M_0 = \frac{L}{1 + R} \Rightarrow 1 + R = \frac{L}{M_0} \Rightarrow R = \frac{L - M_0}{M_0}$$

$$M(t) = \frac{L}{1 + \frac{L - M_0}{M_0}e^{-\lambda t}}$$

$$\frac{dM}{dt} = \lambda M\left(1 - \frac{M}{L}\right)$$

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} \approx \frac{1}{M_n} \frac{M_{n+1} - M_n}{i} = \lambda - \frac{\lambda}{L}M.$$

Temos que  $\lambda - \frac{\lambda}{L}M = a - bM$ .

Fazendo  $a = \lambda$  segue que  $x = \frac{\lambda}{\lambda - b}$ ; isso nos dá que  $x = L$ , donde  $a + bL = 0$  e  $L = \frac{\lambda}{(-b)}$ .

Levando em conta a seguinte tabela:

Tabela 4: Tabela para encontrar o parâmetro de difusibilidade de mata.

x	y
1	$\frac{M_2 - M_1}{M_1} = 0,1111$
2	$\frac{M_3 - M_2}{M_2} = 0,225$
3	$\frac{M_4 - M_3}{M_3} = 0,0204$
4	$\frac{M_6 - M_4}{2M_4} = 0,1012$
6	$\frac{M_7 - M_6}{M_6} = 0,0099$
7	$\frac{M_8 - M_7}{M_7} = 0,0098$
8	$\frac{M_8 - M_8}{M_8} = 0,0097$
9	$\frac{M_{11} - M_9}{2M_9} = 0,0842$
11	$\frac{M_{12} - M_{11}}{M_{11}} = 0,115$

Fonte: Autoria própria, usando as imagens divulgadas pelo INPE.

vamos obter:

Números de termos  $N = 9$ ,  $\sum x_i = 51$ ,  $\sum y_i = 0,6863$ ,  $\sum x_i y_i = 3,2555$ ,  $\sum x_i^2 = 381$ .

Agora vamos construir a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix}$$

, que nos dá o sistema

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

daí, substituindo os dados se obtém

$$\begin{bmatrix} 9 & 51 \\ 51 & 381 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6863 \\ 3,2555 \end{bmatrix},$$

cuja solução é  $a = \lambda = 0.1153$  e  $b = -0.0069$ .

Vimos que  $L = \frac{a}{-b}$ , logo,  $L = \frac{0,1153}{0,0069} = 16.7101$ .

## Seção A.2

### SIMULAÇÃO DA DIFUSÃO DE VEGETAÇÃO NA AMAZÔNIA

```
% EDP da Mata
%
clear all
%
% entrada de parametros do problema
alfa=0.327e-5; mu=0.0;
u=0.01; v=0.0075; lambda=0.115; L=16.7101;
%
% parametros do dominio
l=6; h=3; tf=131;
%
% parametros da discretizacao
nx=20; dx=l/nx; ny=16; dy=h/ny;
nnx=nx+1; nny=ny+1; nn=nnx*nny;
npt=250; dt=tf/npt;
%
% calculos auxiliares
ddx=dx*dx; ddy=dy*dy;
dd2x=2*ddx; dd2y= 2*ddy;
atx=alfa*dt/dd2x; aty=alfa*dt/dd2y;
d4x=4*dx; d4y= 4*dy;
udx= u*dt/d4x; vdy=v*dt/d4y;
dmle=(mu-lambda)*dt/2;
dmld=(-mu+lambda)*dt/2;
cnl=lambda*dt/(4*L);
%
% montagem das matrizes - parte linear apenas
for i=1:nn
    me(i,i)=1+2*(atx+aty)+dmle;
    md(i,i)=1-2*(atx+aty)+dmld;
end
for i= 1:nn-1;
    me(i+1,i)=-aty-vdy;
    md(i+1,i)=aty+vdy;
    me(i,i+1)=-aty+vdy;
    md(i,i+1)=aty-vdy;
```

```

end
for i= 1:nn-nny;
    me(i+nny,i)=-atx-udx;
    md(i+nny,i)=atx+udx;
    me(i,i+nny)=-atx+udx;
    md(i,i+nny)=atx-udx;
end
%adequar a borda horizontal inferior
for i=1:nnx-1;
    ind=i*nny+ny;
    me(ind,ind-1)=0;
    md(ind,ind-1)=0;
    me(ind,ind+1)=-2*aty;
    md(ind,ind+1)=2*aty;
end
%
%falta ind=1
me(1,2)=-2*aty;
md(1,2)=2*aty;
%
%adequar a borda horizontal superior
for i= 1:nnx-1;
    ind=i*nny;
    me(ind,ind+1)=0;
    md(ind,ind+1)=0;
    me(ind,ind-1)=-2*aty;
    md(ind,ind-1)=2*aty;
end
%falta ind=nn
me(nn,nn-1)=-2*aty;
md(nn,nn-1)=2*aty;
%adequar a borda vertical da esquerda
for i=1:nny
    me(i,i+nny)=-2*atx;
    md(i,i+nny)=2*atx;
end
%
%adequar a borda vertical da direita
for i=1:nny
    in= nx*nny+i;
    me(in,in-nny)=-2*atx;
    md(in,in-nny)=2*atx;
end
% condicao inicial
mz=(L-5)*ones(nn,1);
for j=114:116;
    mz(j)=0;

```

```

end
for j=129:134;
    mz(j)=0;
end
for j=144:151;
    mz(j)=0;
end
for j=159:168;
    mz(j)=0;
end
for j=173:183;
    mz(j)=0;
end
for j=188:188;
    mz(j)=0;
end
for j=197:199;
    mz(j)=0;
end
for j=205:211;
    mz(j)=0;
end
for j=214:216;
    mz(j)=0;
end
for j=222:228;
    mz(j)=0;
end
for j=231:233;
    mz(j)=0;
end
for j=239:245;
    mz(j)=0;
end
for j=256:261;
    mz(j)=0;
end
for j=273:276;
    mz(j)=0;
end
for j=290:291;
    mz(j)=0;
end
%for j=3:4;
%for i=3:4;
%    ind=(i-1)*nny+j;
%    mz(ind)=0;

```

```

    % end
%end
m=mz;
% resolução repetida do sistema
mun=sparse(nn);
ver=zeros(nny,nnx);
for it=1:npt
    for indm=1:nn
        mun(indm,indm)=cnl*mz(indm);
    end
    for iri=1:5
        mb=(m+mz);mfe=me+mun; mfd=md-mun;
        mi=mfe\(mfd*mz);
        m=mi;
    end
    pv(it)=m(26);
% para poder ver
    for i=1:nny;
        for j=1:nnx;
            ind=(j-1)*nny+i;
            ver(nny+1-i,j)=m(ind);
        end
    end
end
figure(1)
contour(ver, 7);
%surf(ver), grid on
caxis([0 L]) % Atribui a cor azul ao valor 0 e a cor vermelha ao valor L
axis([1 21 1 17 0 33.43]) % Fixa os eixos
pause(0.5)
it;
mz=m;
end

```

## Seção A.3

CONVÍVIO ENTRE DUAS ESPÉCIES COMPETIDORAS SOB O AUMENTO DA DENSIDADE DE VEGETAÇÃO

```

% EDP da Competicao
%
clear all
%
% entrada de parametros do problema
alfa=0.327e-2; mu=0.02;
u=0.01; v=0.0075; lambda=0.185; K=20.7101;

```

```

alfap=0.14e-5; alfac=0.1325e-5; muc=0.003; mup=0.001;
lambdap=0.171271; lambdac=0.169262; nupc=0.01e-5; nucp=0.02e-5; gammac=0.002; gammap=0.001;
betac=lambdac/K; betap=lambdap/K; deltac=betac+nupc; deltap=betap+nucp;
L=21.7101; a=-0.1e-7; b=-0.2e-7; ap=0.215e-7; ac=0.165e-5; bp=-0.0001; bc=-0.00021;
%
% parametros do dominio
l=5; h=3; tf=131;
%
% parametros da discretizacao
nx=20; dx=l/nx; ny=16; dy=h/ny;
nnx=nx+1; nny=ny+1; nn=nnx*nny;
npt=655; dt=tf/npt;
%
% calculos auxiliares
ddx=dx*dx; ddy=dy*dy;
dd2x=2*ddx; dd2y= 2*ddy;
atx=alfa*dt/dd2x; aty=alfa*dt/dd2y;
atxp=alfap*dt/dd2x; atyp=alfap*dt/dd2y;
atxc=alfac*dt/dd2x; atyc=alfac*dt/dd2y;
d4x=4*dx; d4y= 4*dy;
udx= u*dt/d4x; vdy=v*dt/d4y;
dmle=(mu-lambda)*dt/2;
dmlld=(-mu+lambda)*dt/2;
ple=(mup-lambdap)*dt/2;
plld=-(mup-lambdap)*dt/2;
cle=(muc-lambdac)*dt/2;
clld=-(muc-lambdac)*dt/2;
cnl=lambda*dt/(4*L);

me=zeros(nn); md=zeros(nn);
pe=zeros(nn); pd=zeros(nn);
ce=zeros(nn); cd=zeros(nn);
%
% montagem das matrizes - parte linear apenas
for i=1:nn
    me(i,i)=1+2*(atx+aty)+dmle;
    md(i,i)=1-2*(atx+aty)+dmlld;
    pe(i,i)=1+2*(atxp+atyp)+ple;
    pd(i,i)=1-2*(atxp+atyp)+plld;
    ce(i,i)=1+2*(atxc+atyc)+cle;
    cd(i,i)=1-2*(atxc+atyc)+clld;
end
for i= 1:nn-1;
    me(i+1,i)=-aty-vdy;
    md(i+1,i)=aty+vdy;
    me(i,i+1)=-aty+vdy;
    md(i,i+1)=aty-vdy;

```

```

    pe(i+1,i)=-atyp;
    pd(i+1,i)=atyp;
    pe(i,i+1)=-atyp;
    pd(i,i+1)=atyp;
    ce(i+1,i)=-atyc;
    cd(i+1,i)=atyc;
    ce(i,i+1)=-atyc;
    cd(i,i+1)=atyc;
end
for i= 1:nn-nny;
    me(i+nny,i)=-atx-udx;
    md(i+nny,i)=atx+udx;
    me(i,i+nny)=-atx+udx;
    md(i,i+nny)=atx-udx;
    pe(i+nny,i)=-atxp;
    pd(i+nny,i)=atxp;
    pe(i,i+nny)=-atxp;
    pd(i,i+nny)=atxp;
    ce(i+nny,i)=-atxc;
    cd(i+nny,i)=atxc;
    ce(i,i+nny)=-atxc;
    cd(i,i+nny)=atxc;
end
%adequar a borda horizontal inferior
for i=1:nnx-1;
    ind=i*nny+1;
    me(ind,ind-1)=0;
    md(ind,ind-1)=0;
    me(ind,ind+1)=-2*aty;
    md(ind,ind+1)=2*aty;
    pe(ind,ind-1)=0;
    pd(ind,ind-1)=0;
    pe(ind,ind+1)=-2*atyp;
    pd(ind,ind+1)=2*atyp;
    ce(ind,ind-1)=0;
    cd(ind,ind-1)=0;
    ce(ind,ind+1)=-2*atyc;
    cd(ind,ind+1)=2*atyc;
end
%
%falta ind=1
me(1,2)=-2*aty;
md(1,2)=2*aty;
pe(1,2)=-2*atyp;
pd(1,2)=2*atyp;
ce(1,2)=-2*atyc;
cd(1,2)=2*atyc;

```

```

%
%adequar a borda horizontal superior
for i= 1:nnx-1;
    ind=i*nny;
    me(ind,ind+1)=0;
    md(ind,ind+1)=0;
    me(ind,ind-1)=-2*aty;
    md(ind,ind-1)=2*aty;
    pe(ind,ind+1)=0;
    pd(ind,ind+1)=0;
    pe(ind,ind-1)=-2*atyp;
    pd(ind,ind-1)=2*atyp;
    ce(ind,ind+1)=0;
    cd(ind,ind+1)=0;
    ce(ind,ind-1)=-2*atyc;
    cd(ind,ind-1)=2*atyc;
end
%falta ind=nn
me(nn,nn-1)=-2*aty;
md(nn,nn-1)=2*aty;
pe(nn,nn-1)=-2*atyp;
pd(nn,nn-1)=2*atyp;
ce(nn,nn-1)=-2*atyc;
cd(nn,nn-1)=2*atyc;
%adequar a borda vertical da esquerda
for i=1:nny
    me(i,i+nny)=-2*atx;
    md(i,i+nny)=2*atx;
    pe(i,i+nny)=-2*atxp;
    pd(i,i+nny)=2*atxp;
    ce(i,i+nny)=-2*atxc;
    cd(i,i+nny)=2*atxc;
end
%
%adequar a borda vertical da direita
for i=1:nny
    in=nx*nny+i;
    me(in,in-nny)=-2*atx;
    md(in,in-nny)=2*atx;
    pe(in,in-nny)=-2*atxp;
    pd(in,in-nny)=2*atxp;
    ce(in,in-nny)=-2*atxc;
    cd(in,in-nny)=2*atxc;
end
% condicao inicial
mz=(L-5)*ones(nn,1);
for j=114:116;

```

```
    mz(j)=0;
end
for j=129:134;
    mz(j)=0;
end
for j=144:151;
    mz(j)=0;
end
for j=159:168;
    mz(j)=0;
end
for j=173:183;
    mz(j)=0;
end
for j=188:188;
    mz(j)=0;
end
for j=197:199;
    mz(j)=0;
end
for j=205:211;
    mz(j)=0;
end
for j=214:216;
    mz(j)=0;
end
for j=222:228;
    mz(j)=0;
end
for j=231:233;
    mz(j)=0;
end
for j=239:245;
    mz(j)=0;
end
for j=256:261;
    mz(j)=0;
end
for j=273:276;
    mz(j)=0;
end
for j=290:291;
    mz(j)=0;
end

%for j=3:4;
    % for i=3:4;
```

```

%      ind=(i-1)*nny+j;
%      mz(ind)=0;
% end
%end
m=mz;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
pz=(K-5)*ones(nn,1);
for j=114:116;
    pz(j)=0;
end
for j=129:134;
    pz(j)=0;
end
for j=144:151;
    pz(j)=0;
end
for j=159:168;
    pz(j)=0;
end
for j=173:183;
    pz(j)=0;
end
for j=188:188;
    pz(j)=0;
end
for j=197:199;
    pz(j)=0;
end
for j=205:211;
    pz(j)=0;
end
for j=214:216;
    pz(j)=0;
end
for j=222:228;
    pz(j)=0;
end
for j=231:233;
    pz(j)=0;
end
for j=239:245;
    pz(j)=0;
end
for j=256:261;
    pz(j)=0;
end
for j=273:276;

```

```

    pz(j)=0;
end
for j=290:291;
    pz(j)=0;
end
%for j=3:4;
% for i=3:4;
%     ind=(i-1)*nny+j;
%     pz(ind)=0;
% end
%end
p=pz;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
cz=(K-5)*ones(nn,1);
for j=114:116;
    cz(j)=0;
end
for j=129:134;
    cz(j)=0;
end
for j=144:151;
    cz(j)=0;
end
for j=159:168;
    cz(j)=0;
end
for j=173:183;
    cz(j)=0;
end
for j=188:188;
    cz(j)=0;
end
for j=197:199;
    cz(j)=0;
end
for j=205:211;
    cz(j)=0;
end
for j=214:216;
    cz(j)=0;
end
for j=222:228;
    cz(j)=0;
end
for j=231:233;
    cz(j)=0;
end
end

```

```

for j=239:245;
    cz(j)=0;
end
for j=256:261;
    cz(j)=0;
end
for j=273:276;
    cz(j)=0;
end
for j=290:291;
    cz(j)=0;
end

%for j=3:4;
    %for i=3:4;
        % ind=(i-1)*nny+j;
        % cz(ind)=0;
    %end
%end
c=cz;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% resolução repetida do sistema
% nme=sparse(nn); nmd=sparse(nn);
% npe=sparse(nn); npd=sparse(nn);
% nce=sparse(nn); ncd=sparse(nn);

nme=me; nmd=md;
npe=pe; npd=pd;
nce=ce; ncd=cd;

%para visualizar
verm=zeros(nny,nnx);
verp=zeros(nny,nnx);
verc=zeros(nny,nnx);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% mint=(m+mz)/2;
% cint=(c+cz)/2;
% pint=(p+pz)/2;
% nme=sparse(nn); nmd=sparse(nn);
% npe=sparse(nn); npd=sparse(nn);
% nce=sparse(nn); ncd=sparse(nn);
% for k=1:nn
% nme(k,k)=me(k,k)+(lambda/L*mint(k)+a*pint(k)+b*cint(k))*dt/2;
% nmd(k,k)=md(k,k)-(lambda/L*mint(k)+a*pint(k)+b*cint(k))*dt/2;
% npe(k,k)=pe(k,k)+(lambdap/K*pint(k)+lambdap*gammap/K*cint(k)-ap*mint(k))*dt/2;
% npd(k,k)=pd(k,k)-(lambdap/K*pint(k)+lambdap*gammap/K*cint(k)-ap*mint(k))*dt/2;

```

```

%     nce(k,k)=ce(k,k)+(lambdac/K*cint(k)+lambdac*gammac/K*pint(k)-ac*mint(k))*dt/2;
%     ncd(k,k)=cd(k,k)-(lambdac/K*cint(k)+lambdac*gammac/K*pint(k)-ac*mint(k))*dt/2;
% end
%     for k=1:nn
%         m=nme\(nmd*mz);
%         %mint=(m+mz)/2;
%         p=npe\(npd*pz);
%         %pint=(p+pz)/2;
%         c=nce\(ncd*cz);
%         %cint=(c+cz)/2;
%     end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for it=1:npt;

    %%% Intermediario (estimativa)
    mint=(m+mz)/2;
    cint=(c+cz)/2;
    pint=(p+pz)/2;

    for k=1:nn
        nme(k,k)=me(k,k)+(lambda/L*mint(k)+a*pint(k)+b*cint(k))*dt/2;
        nmd(k,k)=md(k,k)-(lambda/L*mint(k)+a*pint(k)+b*cint(k))*dt/2;
    end

        m=nme\(nmd*mz);
        mint=(m+mz)/2;

    for k=1:nn
        npe(k,k)=pe(k,k)+(lambdap/K*pint(k)+lambdap*gammap/K*cint(k)-ap*mint(k))*dt/2;
        npd(k,k)=pd(k,k)-(lambdap/K*pint(k)+lambdap*gammap/K*cint(k)-ap*mint(k))*dt/2;
    end

        p=npe\(npd*pz);
        pint=(p+pz)/2;

    for k=1:nn
        nce(k,k)=ce(k,k)+(lambdac/K*cint(k)+lambdac*gammac/K*pint(k)-ac*mint(k))*dt/2;
        ncd(k,k)=cd(k,k)-(lambdac/K*cint(k)+lambdac*gammac/K*pint(k)-ac*mint(k))*dt/2;
    end

        c=nce\(ncd*cz);
        cint=(c+cz)/2;

    %%% Final (real)

```

```

for k=1:nn
    nme(k,k)=me(k,k)+(lambda/L*mint(k)+a*pint(k)+b*cint(k))*dt/2;
    nmd(k,k)=md(k,k)-(lambda/L*mint(k)+a*pint(k)+b*cint(k))*dt/2;
end

    m=nme\(nmd*mz);
    mint=(m+mz)/2;

for k=1:nn
    npe(k,k)=pe(k,k)+(lambdap/K*pint(k)+lambdap*gammap/K*cint(k)-ap*mint(k))*dt/2;
    npd(k,k)=pd(k,k)-(lambdap/K*pint(k)+lambdap*gammap/K*cint(k)-ap*mint(k))*dt/2;
end

    p=npe\(npd*pz);
    pint=(p+pz)/2;

for k=1:nn
    nce(k,k)=ce(k,k)+(lambdac/K*cint(k)+lambdac*gammap/K*pint(k)-ac*mint(k))*dt/2;
    ncd(k,k)=cd(k,k)-(lambdac/K*cint(k)+lambdac*gammap/K*pint(k)-ac*mint(k))*dt/2;
end

    c=nce\(ncd*cz);
    cint=(c+cz)/2;

    mz=m; pz=p; cz=c;
    mlt(it)=m(20);
    plt(it)=p(35);
    clt(it)=c(25);
% para poder ver
%   for i=1:nny
%       for j=1:nnx
%           ind=(j-1)*nny+i;
%           verm(nny+1-i,j)=m(ind);
%       end
%   end
%   for i=1:nny
%       for j=1:nnx
%           ind=(j-1)*nny+i;
%           verp(nny+1-i,j)=p(ind);
%       end
%   end
%   for i=1:nny
%       for j=1:nnx
%           ind=(j-1)*nny+i;
%           verc(nny+1-i,j)=c(ind);
%       end
%   end

```

```

% end
% surf(verm), grid on
% pause(0.75)
% it;
end
%subplot(2,2,1)
%plot(mlt),grid, xlabel('tempo'), ylabel('mata')
%subplot(2,2,2)
%plot(plt), xlabel('tempo'), ylabel('paca')
%subplot(2,2,3)
%plot(clt), xlabel('tempo'), ylabel('cotia')
%subplot(2,2,2)
%plot(plt)
%subplot(2,2,3)
%plot(clt)
%subplot(2,2,4)
% para poder ver
    for i=1:nny
        for j=1:nnx
            ind=(j-1)*nny+i;
            verm(nny+1-i,j)=m(ind);
        end
    end
    for i=1:nny
        for j=1:nnx
            ind=(j-1)*nny+i;
            verp(nny+1-i,j)=p(ind);
        end
    end
    for i=1:nny
        for j=1:nnx
            ind=(j-1)*nny+i;
            verc(nny+1-i,j)=c(ind);
        end
    end

    end
% subplot(2,2,1), surf(verm)
% subplot(2,2,2), surf(verp)
% subplot(2,2,3), surf(verc)
% pause
% subplot(2,2,1), surf(verm), axis([0 10 0 7.5 0 24])
% subplot(2,2,2), surf(verp)
% subplot(2,2,3), surf(verc)

surf(verc)

```

# Anexo

## Anexo 1

Paca (Agouti paca):

Classe: Mammalia;

Ordem: Rodentia;

Família: Dasyproctidae;

Nome científico: Agouti paca;

Nome vulgar: Paca;

Categoria: Vulnerável.

Vive nas florestas tropicais, de preferência perto de um rio ou riacho. É boa nadadora e gosta da água, que é o local onde ela se refugia quando está em perigo. Sua toca tem muitas saídas de emergência, bem escondidas por folhas. A paca passa o dia na sua toca. Seu tempo de vida é de 18 anos. Alimenta-se de frutos, sementes, folhas, caules e raízes. É solitária. O período de gestação é de cerca de quatro meses. As fêmeas podem se reproduzir até duas vezes por ano. Geralmente nasce um filhote que pesa cerca de 700 gramas. Sua distribuição geográfica abrange o Paraguai, o México e em todo o território brasileiro.

## Anexo 2

Cotia (Dasyprocta aguti):

Classe: Mammalia;

Ordem: Rodentia;

Família: Dasyproctidae;

Nome científico: Dasyprocta aguti;

Nome vulgar: Cotia;

Categoria: Vulnerável.

Tem hábito alimentar herbívoro. Habita florestas, cerrados, capoeira e caatingas. De hábitos diurnos, cava galerias nas margens dos rios, no chão da floresta e principalmente nas raízes das árvores. São terrestres, correndo com grande rapidez entre a vegetação. Cada buraco é ocupado por um único animal. Repousam sobre as patas traseiras e seguram os alimentos com as patas anteriores. Alimenta-se de frutas, sementes e raízes.