FRANCISMAR FERREIRA LIMA

PONTOS FIXOS POR GRUPOS FINITOS AGINDO SOBRE GRUPOS SOLÚVEIS DE TIPO FP INFINITO

CAMPINAS
2013

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

FRANCISMAR FERREIRA LIMA

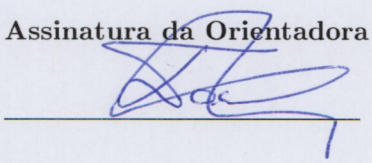
PONTOS FIXOS POR GRUPOS FINITOS AGINDO SOBRE GRUPOS SOLÚVEIS DE TIPO FP INFINITO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Dessislava Hristova Kochloukova

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO FRANCISMAR FERREIRA LIMA, E ORIENTADA PELA PROF.ª DR.ª DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA.

Assinatura da Orientadora



CAMPINAS
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

L628p

Lima, Francismar Ferreira, 1985-
Pontos fixos por grupos finitos agindo sobre grupos solúveis de tipo FP infinito / Francismar Ferreira Lima. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Dessislava Hristova Kochloukova.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria dos grupos. 2. Invariantes geométricos. 3. Grupos solúveis. I. Kochloukova, Dessislava Hristova,1970-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

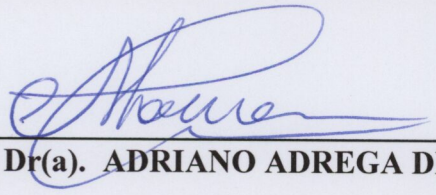
Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Fixed points by finite groups acting on soluble groups of type FP infinity
Palavras-chave em inglês:
Group theory
Geometric invariants
Soluble groups
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Dessislava Hristova Kochloukova [Orientador]
Adriano Adrega de Moura
Aline Gomes da Silva Pinto
Data de defesa: 13-09-2013
Programa de Pós-Graduação: Matemática

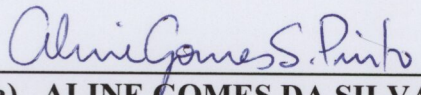
Dissertação de Mestrado defendida em 13 de setembro de 2013 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA



Prof.(a). Dr(a). ADRIANO ADREGA DE MOURA



Prof.(a). Dr(a). ALINE GOMES DA SILVA PINTO

ABSTRACT

This work discusses the Theory of Groups and it specifically discusses a especial class of groups, that is, groups of type FP_∞. A group G is of type FP_∞ if it is of type FP_m for all $m \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ and it is of type FP_m if there is a partial projective resolution of the trivial $\mathbf{Z}G$-module $\mathbf{Z}$ where each projective in dimension less than or equal to m is finitely generated. The main aim of this work is to show that the fixed points by finite groups acting on soluble groups of type FP_∞ form a subgroup of type FP_∞ as well as proved in *C. Martinez-Perez, B. E. A. Nucinkis. Virtually soluble groups of type FP_∞. Comment. Math. Helv., 2010. nº 1 v. 85. p. 135-150.* One of the essentials tools that was used to demonstrate this fact was the Bieri-Strebel geometric invariant Σ as well as some results about soluble groups of type FP_∞.

Keywords: finiteness conditions, soluble groups of type FP_∞, Bieri-Strebel geometric invariant Σ, nilpotent-by-abelian-by-finite groups, constructible groups

RESUMO

Este trabalho aborda a Teoria de Grupos e, especificamente, uma classe especial de grupos: grupos de tipo FP_∞. Um grupo G é de tipo FP_∞ se é de tipo FP_m para cada $m \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ e é de tipo FP_m se existe uma resolução parcial projetiva do $\mathbf{Z}G$-módulo trivial $\mathbf{Z}$ onde cada projetivo em dimensão menor ou igual a m é finitamente gerado. O objetivo principal deste trabalho é mostrar que os pontos fixos por grupos finitos agindo sobre grupos solúveis de tipo FP_∞ formam subgrupo também de tipo FP_∞ como mostrado em *C. Martinez-Perez, B. E. A. Nucinkis. Virtually soluble groups of type FP_∞. Comment. Math. Helv., 2010. nº 1 v. 85. p. 135-150.* Para a demonstração desse fato, uma das ferramentas essenciais utilizadas foi o invariante geométrico Σ de Bieri-Strebel, bem como alguns resultados sobre grupos solúveis de tipo FP_∞.

Palavras-chaves: condições de finitude, grupos solúveis de tipo FP_∞, invariante geométrico Σ de Bieri-Strebel, grupos nilpotente-por-abeliano-por-finitos, grupos construtíveis

SUMÁRIO

RENÚNCIA

Chora de manso e no íntimo... procura
Tentar curtir sem queixa o mal que te crucia:
O mundo é sem piedade e até riria
Da tua inconsolável amargura.

Só a dor enobrece e é grande e é pura.
Aprende a amá-la que a amarás um dia.
Então ela será tua alegria,
E será ela só tua ventura...

A vida é vã como a sombra que passa
Sofre sereno e de alma sombranceira
Sem um grito sequer tua desgraça.

Encerra em ti tua tristeza inteira
E pede humildemente a Deus que a faça
Tua doce e constante companheira...

Manuel Bandeira

AGRADECIMENTOS

Aqui cometerei injustiças, uma vez que foram tantas pessoas, momentos, situações, experiências que, de uma forma ou outra, direta ou indiretamente, contribuíram e ajudaram para que este trabalho existisse que fica difícil mencionar todos, do contrário, eu precisaria de capítulos e não só de duas páginas. Cometerei a injustiça, então, de mencionar somente alguns.

Gostaria de agradecer, e muito, à minha orientadora, professora Dessislava, pela atenção aguçada, a prestatividade, as inúmeras dicas e conselhos valiosos, o compromisso, a seriedade, a paciência enorme e a dedicação incansável. Posso dizer que com ela aprendi bastante Matemática. Além disso, a professora Dessislava teve uma participação decisiva nesta Dissertação. Sua paciência para abrir inúmeras contas no papel e sua dedicação em me mostrar os caminhos foram inestimáveis para este trabalho. Por isso tudo a ela sou realmente muito grato.

Agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) que possibilitaram a minha dedicação a este trabalho por meio do apoio financeiro, à UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas) e ao IMECC (Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica) pela oportunidade de estar aqui, ao SAE (Serviço de Apoio ao Estudante) e ao PME (Programa de Moradia Estudantil) pela ajuda incomensurável.

Agradeço aos professores (ou ex-professores) do IMECC pela dedicação e pela minha formação. Muitos deles ajudaram muito a amainar a aspereza das tecnicidades matemáticas e conseguiram me fazer ver a beleza sutil da Matemática. Em especial, agradeço aos professores Adriano, Christina, Daniela, Dessislava, Plamen, Sérgio pela caminhada de anos e pelos ensinamentos de vida.

Agradeço aos colegas de Mestrado e de Doutorado do IMECC por uma ou outra ajuda com materiais, informações, alguma continha ou exercício, ou mesmo a companhia em algum almoço ou jantar. Em especial, ao Nuno por contribuições significativas em meu aprendizado em Matemática ao longo destes anos.

Agradeço aos amigos em Minas Gerais e em São Paulo pelos momentos de conversa (que com alguns duravam horas a fio...), de reflexão, de acolhida, ou de puro extravasamento que, mesmo indiretamente, ajudaram na conclusão deste trabalho. Em especial, à Iza e ao Márcio pelas acolhidas carinhosas em São Paulo (e pelo computador, que me ajudou muito com parte da digitação deste trabalho) e, em especial também, aos amigos de escalada por me propiciarem momentos ímpares em cada rocha, ou em cada bandejão...

Agradeço à minha mãe pelo amor incondicional, pela força hercúlea, pelo exemplo de postura perante a vida, pela alegria e o bom humor sempre, sempre presentes, pelo carinho,

que foram e são agentes inspiradores para mim para poder continuar a vida mesmo em situações hostis. Agradeço ao meu pai pela sabedoria, pela calmaria, pela doçura no trato, pela bondade na alma, pelo exemplo de humildade, coisas essas que sempre me foram fonte de força e vontade.

Agradeço à Vida pelos sabores e dissabores... Por cada Leão que me foi dado e, muitos dos quais, venho conseguindo matar. Pois, de fato, o conceito de vitória só faz sentido se existiu batalha. E pela batalha que foi este trabalho e muitas outras, menores ou maiores, sou real e profundamente grato.

À Bia: meu Deus! Que sorte a minha te encontrar! Agradeço pelo amor, pela dedicação firme, pelo cuidado sempre presente. Agradeço por ter dividido comigo momentos tão sem-palavras... e, principalmente, pelo tão vibrante e gostoso sorriso...

TABELA DE SÍMBOLOS ESPECIAIS

R - anel associativo com identidade

$\mathbb{Z}$ - conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Z}_+$ - conjunto dos números inteiros positivos

$\mathbb{Q}$ - conjunto dos números racionais

$\mathbb{R}$ - conjunto dos números reais

$\mathbb{R}_+$ - conjunto dos números reais positivos

$\mathbb{S}^n$ - esfera n-dimensional contida em $\mathbb{R}^{n+1}$

Z - grupo abeliano usual dos inteiros, ou anel usual dos inteiros

Q - corpo usual dos racionais, ou **Q**-espaço vetorial

R - grupo abeliano cujo conjunto de elementos é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e a operação é a soma usual em $\mathbb{R}$

$\mathbf{Z}^n$ - grupo abeliano cujo conjunto de elementos é o conjunto de n-uplas de números inteiros $\mathbb{Z}^n$ e a operação é a soma usual em $\mathbb{Z}^n$

$\mathbf{R}^n$ - grupo abeliano cujo conjunto de elementos é o conjunto de n-uplas de números reais $\mathbb{R}^n$ e a operação é a soma usual em $\mathbb{R}^n$

0 - subgrupo trivial de grupo com a operação com notação aditiva, ou submódulo trivial de módulo

1 - subgrupo trivial de grupo com a operação com notação multiplicativa

1_G ou 1 - elemento neutro do grupo G com operação com notação multiplicativa

0_A ou 0 - elemento neutro do grupo A com operação com notação aditiva, ou elemento neutro do módulo A

$Hom(G, H)$ - grupo abeliano aditivo dos homomorfismos de grupo de um grupo G em um grupo H [1]

[1] A operação + de grupo abeliano aditivo em $Hom(G, H)$ é tomada como sendo, $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in Hom(G, H)$ e $\forall g \in G, (\varphi_1 + \varphi_2)(g) := \varphi_1(g) + \varphi_2(g)$, cuja boa definição é imediata.

$A \leq B$ - significa que o grupo A é subgrupo do grupo B, ou que o módulo A é submódulo do módulo B

$A \geq B$ - significa que o grupo B é subgrupo do grupo A, ou que o módulo B é submódulo do módulo A

$|X|$ - cardinalidade do conjunto X

$|g|$ - ordem do elemento g pertencente a algum grupo

$G_1 \times G_2$ - produto direto dos grupos G_1 e G_2

$\nmid$ - símbolo que significa "não divide"

$\lhd$ - símbolo que denota subgrupo normal

$\lhd_{car}$ - símbolo que denota subgrupo característico

$\cong$ - símbolo que significa "isomorfo a"

$\twoheadrightarrow$ - símbolo utilizado para funções que são sobrejetivas

$\rightarrowtail$ - símbolo utilizado para funções que são injetivas

$\hookrightarrow$ - símbolo utilizado para funções que são inclusões

$\leftrightarrow$ - símbolo utilizado para bijeção entre conjuntos

$[G : H]$ - símbolo que denota o índice do subgrupo H no grupo G

$\mathcal{M}_R$ - classe dos R-módulos à direita

${}_R\mathcal{M}$ - classe dos R-módulos à esquerda

${}_R\mathcal{M}_S$ - classe dos $(R - S)$-bimódulos, sendo S um anel associativo com identidade

$\dot{\bigcup}$ - símbolo utilizado para união disjunta

$\bigotimes_{\mathbf{Z}}^{s} A$ - símbolo utilizado para indicar $\underbrace{A \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} A}_{s \text{ vezes}}$, onde A é um $\mathbf{Z}$-módulo

PREFÁCIO

Quando escrevi este trabalho, o meu compromisso para com o leitor era criar um texto que fosse o mais autocontido possível, fazendo pressupostos apenas de teoria de grupos básica e de noções básicas de teoria de módulos. O motivo desse compromisso era criar um texto que fosse acessível, principalmente, aos alunos de graduação em Matemática que tivessem curiosidade em relação à Álgebra e, mais especificamente, à Teoria de Grupos. Um texto que não afugentasse os graduandos, pelo contrário, atraísse-os. Um texto que desse, principalmente, ao estudante de graduação em Matemática um pouco de noção dessa área de estudo antes mesmo dele ingressar no Mestrado. No entanto, uma autocontinência absoluta em uma Dissertação de Mestrado é, no mínimo, difícil na minha opinião, hajam vista a limitação de tempo para se concluir o trabalho, a grande quantidade de páginas que a mesma teria e o fato de talvez não ser esse o espírito da coisa. Dessa forma, embora a autocontinência de teoria não fora absoluta neste trabalho, essa motivação de escrever um trabalho que fosse também útil aos estudantes de graduação explica o porquê do grande volume de páginas desta Dissertação, bem como a insistência em enunciar e demonstrar resultados óbvios (principalmente no primeiro capítulo) e a delonga em algumas demonstrações.

Com relação à classificação de fatos matemáticos em Lemas, Proposições e Teoremas, como tal classificação é de certa forma subjetiva, nesta Dissertação classifiquei como Lemas resultados menores, ou técnicos, ou mesmo resultados que foram utilizados imediatamente em seguida de serem enunciados e demonstrados, classifiquei como Proposições resultados mais relevantes no trabalho, ou resultados de interesse mais geral para a teoria de grupos ou módulos e como Teoremas os resultados mais importantes no trabalho, ou resultados consagrados como teoremas, ou ainda resultados de demonstrações mais delicadas e intrincadas.

Espero que esse material atenda, pelo menos em parte, essas minhas expectativas e, oxalá, seja também útil a outrem que o leia como também me fora escrevê-lo.

Francismar Ferreira Lima
Agosto de 2013
Campinas, SP

Introdução

Seja R um anel associativo com identidade arbitrário. Dizemos que um R-módulo M é de tipo FP_n, com $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, se existe uma resolução parcial projetiva do R-módulo M

$$P_n \to \ldots \to P_0 \to M \to \mathbf{0}$$

onde, para $0 \leq i \leq n$, cada R-módulo P_i é finitamente gerado. Temos, assim, que um módulo é de tipo FP_0 se, e somente se, é finitamente gerado e um módulo ser de tipo FP_1 é equivalente ao mesmo ser finitamente apresentável. Se um módulo é de tipo FP_n, então, obviamente, o mesmo é de tipo FP_i para $0 \leq i \leq n$, daí que os tipos FP_2, FP_3, etc são restrições sucessivamente mais fortes impostas ao módulo. Um módulo é de tipo FP_∞ se é de tipo FP_n para cada $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$.

Nesta dissertação estudamos os pontos fixos por grupos finitos que agem sobre grupos solúveis de tipo FP_∞. Um grupo é de tipo FP_∞ se é de tipo FP_n para cada $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ e ser de tipo FP_n significa que existe resolução parcial projetiva do $\mathbf{Z}G$-módulo trivial $\mathbf{Z}$ onde cada projetivo em dimensão menor ou igual n é finitamente gerado.

No primeiro capítulo desta Dissertação, estudamos propriedades básicas de grupos que foram usadas mais tarde, ao longo do texto. Os resultados desse primeiro Capítulo são basicamente "lemas" para o restante do trabalho. Em [12], temos resultado que classifica os grupos solúveis de tipo FP_∞ como grupos obtidos do grupo trivial por meio de extensões finitas, ou extensões HNN, isto é, como grupos solúveis construtíveis. Por causa disso, estudamos também, nesse primeiro Capítulo, grupos livres, grupos finitamente apresentáveis e extensões HNN. Existem outras construções importantes, como produtos livres amalgamados, mas como esses, em geral, não geram grupos solúveis, não os mencionamos neste trabalho.

A parte principal da Dissertação é estudar o artigo [14]. Uma das ferramentas principais usadas é o invariante geométrico Σ de Bieri-Strebel definido para grupos nilpotente-por-abeliano-por-finitos no artigo [7]. Este invariante generaliza o primeiro invariante Σ definido em [8]. Observamos ainda em [7] que os grupos solúveis construtíveis finitamente gerados são nilpotente-por-abeliano-por-finitos e que o invariante geométrico Σ de Bieri-Strebel foi crucial para caracterizar os grupos metabelianos finitamente apresentáveis no artigo [8]. Támbem existe classificação de grupos nilpotente-por-abeliano-por-finitos de tipo FP_∞ por meio do invariante geométrico Σ de Bieri-Strebel, o que é enunciado no Capítulo 3.

Estudamos o invariante geométrico Σ de Bieri-Strebel no Capítulo 2 deste trabalho. Como este invariante é definido usando módulos, estudamos, na parte preliminar, teoria de módulos noetherianos e localização em aneis comutativos. Embora exista conexão entre teoria de valorizações e o invariante geométrico Σ de Bieri-Strebel, não abordamos esse fato na Dissertação. Entretanto, o estudo deste invariante, em geral, é baseado em métodos de Álgebra Comutativa. A demonstração do resultado principal usa técnicas de grupos nilpotentes,

como série central descendente de grupo nilpotente e apresentação de fatores desta série como quocientes de potências tensoriais da abelianização do grupo em questão. Assim, incluímos, na parte preliminar, resultados básicos sobre produto tensorial.

O Capítulo 3 ficou dedicado a definições preliminares e a alguns resultados sobre grupos de tipo FP_∞.

O resultado principal, que diz que se G for um grupo solúvel de tipo FP_∞ com grupo finito F agindo sobre G, então o subgrupo de pontos fixos $C_G(F) = \{g \in G : g^f = g, \forall f \in F\}$ é também de tipo FP_∞, é demonstrado no último capítulo desta Dissertação. Esse resultado é o principal resultado no artigo [14]. Uma vez que $C_G(F)$ é de tipo FP_∞, temos como implicação que $N_G(F) = \{g \in G : F^g = F\}$ é também de tipo FP_∞, pois $[N_G(F) : C_G(F)] < \infty$. Em [14] é mostrado também que cada extensão H de G por F tem número finito de classes de conjugação de subgrupos finitos. Assim, aplicando um teorema de W. Lück ([14, Theorem 1.2, p. 136]), cada extensão H de G por F tem modelo de tipo finito para $\underline{E}H$, isto é, existe um H-CW-complexo X, denominado de espaço de classificação de ação própria, tal que $X^S = \{x \in X : x^s = x, \forall s \in S\}$ é contráctil se S é subgrupo finito de H e $X^S = \emptyset$ se S não for subgrupo finito de H e X tem tipo finito, isto é, X/H tem número finito de células.

Capítulo 1

Propriedades Básicas de Grupos e Módulos e Definições Preliminares

1.1 Propriedades Básicas de Grupos e Definições Preliminares

1.1.1 Alguns Resultados sobre Grupos Arbitrários

Teorema 1.1 (1^o Teorema de Isomorfismo para Grupos)**.** *Sejam G, H grupos e $\varphi : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Então,*

$$ker(\varphi) \lhd G \qquad e \qquad G/ker(\varphi) \cong Im(\varphi).$$

Tal isomorfismo de grupos é dado por

$$gker(\varphi) \mapsto \varphi(g).$$

Demonstração. (Ver [16, Theorem 1.76 (First Isomorphism Theorem, p. 50].) □

Teorema 1.2 (2^o Teorema de Isomorfismo para Grupos)**.** *Sejam G um grupo, $H \lhd G$ e K um subgrupo de G. Então, HK é subgrupo de G, $H \cap K \lhd K$ e*

$$K/(H \cap K) \cong HK/H.$$

Demonstração. (Ver [16, Theorem 1.80 (Second Isomorphism Theorem, p. 52].) □

Teorema 1.3 (3^o Teorema de Isomorfismo para Grupos)**.** *Sejam G um grupo e $H, K \lhd G$ tais que $K \subseteq H$. Então, $H/K \lhd G/K$ e*

$$(G/K)/(H/K) \cong G/H.$$

Demonstração. (Ver [16, Theorem 1.81 (Third Isomorphism Theorem, p. 52].) □

Teorema 1.4 (Teorema de Correspondência para Grupos)**.** *Sejam G um grupo, $H \lhd G$, $\pi : G \twoheadrightarrow G/H$ a projeção canônica, $\mathcal{A}$ a família de subgrupos de G os quais contêm H e $\mathcal{B}$ a família de subgrupos de G/H. Então, existe uma função bijetiva $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ dada por*

$$A \mapsto \pi(A) = A/H, \text{ para todo } A \in \mathcal{A},$$

onde $\theta^{-1} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ é dada por

$$B \mapsto \pi^{-1}(B), \text{ para todo } B \in \mathcal{B}.$$

Além disso, dados $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, $A_1 \subseteq A_2$ se, e somente se, $A_1/H \subseteq A_2/H$ e $A_1 \lhd A_2$ se, e somente se, $A_1/H \lhd A_2/H$.

Demonstração. (Ver [16, Proposition 1.82 (Correspondence Theorem, p. 53].) □

Lema 1.1. *Sejam I um conjunto de índices, G um grupo e $\{G_i : i \in I\}$ uma família de subgrupos de G. Temos que $\bigcap_{i\in I} G_i$ é subgrupo de $G_i, \forall i \in I$.*

Demonstração. Sejam $g_1, g_2 \in \bigcap_{i\in I} G_i$. Temos, então, que $g_1, g_2 \in G_i, \forall i \in I$. Como G_i é grupo, $\forall i \in I$, segue que $g_1 g_2^{-1} \in G_i, \forall i \in I$, logo $g_1 g_2^{-1} \in \bigcap_{i\in I} G_i$. □

Lema 1.2. *Sejam G grupo e $\mathcal{F} = \{H_i \lhd G : i \in I\}$ uma família de subgrupos normais de G (onde I é algum conjunto de índices). Então, $\bigcap_{i\in I} H_i \lhd G$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.1 (p. 4), temos que $\bigcap_{i\in I} H_i$ é subgrupo de G. Seja $x \in \bigcap_{i\in I} H_i$. Então, $x \in H_i, \forall i \in I$. Como $H_i \lhd G, \forall i \in I$, segue que, $gxg^{-1} \in H_i, \forall g \in G$ e $\forall i \in I$. Daí que, $\forall g \in G, gxg^{-1} \in \bigcap_{i\in I} H_i$. Como $x \in \bigcap_{i\in I} H_i$ foi tomado arbitrário, segue que $g(\bigcap_{i\in I} H_i)g^{-1} \subseteq \bigcap_{i\in I} H_i, \forall g \in G$ e, portanto, $\bigcap_{i\in I} H_i \lhd G$. □

Lema 1.3. *Sejam G um grupo, S um subgrupo de G e $H \lhd G$. Então, $H \cap S \lhd S$.*

Demonstração. Dado $s \in S$, seja $x \in s(H \cap S)s^{-1}$. Então, $x = sys^{-1}$, para algum $y \in H \cap S$. Por um lado, $y \in S$ implica que $x = sys^{-1} \in S$. Por outro lado, $y \in H$ e $H \lhd G$ acarretam que $x = sys^{-1} \in H$. Daí que $x \in H \cap S$ e, portanto, como $x \in s(H \cap S)s^{-1}$ foi tomado arbitrário, temos que $s(H \cap S)s^{-1} \subseteq H \cap S, \forall s \in S$. Segue, assim, que $H \cap S \lhd S$. □

Lema 1.4. *Sejam G um grupo e S, A, B subgrupos de G. Se $B \lhd A$, então $B \cap S \lhd A \cap S$.*

Demonstração. Dado $a \in A \cap S$, seja $x \in a(B \cap S)a^{-1}$. Então, $x = aya^{-1}$, para algum $y \in B \cap S$, e como $a, a^{-1}, y \in S$, segue que $x \in S$. Agora, $y \in B$ e $B \lhd A$, logo $aya^{-1} \in B$, o que acarreta que $x \in B$ e, consequentemente, $x \in B \cap S$, daí que, como $x \in a(B \cap S)a^{-1}$ foi tomado arbitrário, $a(B \cap S)a^{-1} \subseteq B \cap S$, para todo $a \in A \cap S$ e, portanto, $(B \cap S) \lhd (A \cap S)$. □

Lema 1.5. *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Se $[G:H] < \infty$, então existe um subconjunto finito T de G tal que*

$$\bigcap_{g\in G} g^{-1}Hg = \bigcap_{t\in T} t^{-1}Ht.$$

Demonstração. Como $[G:H] < \infty$, existe um subconjunto finito T de G tal que $G = \dot{\bigcup_{t\in T}} Ht$ (T é uma transversal à direita de H em G). Assim, dado $g \in G$, segue que existe único $t \in T$ tal que $g \in Ht$ e, portanto, existe único $h \in H$ tal que $g = ht$, logo

$$g^{-1}Hg = (t^{-1}h^{-1})H(ht) = t^{-1}Ht.$$

Daí que

$$\bigcap_{g\in G} g^{-1}Hg = \bigcap_{t\in T} t^{-1}Ht, \text{ onde } T \text{ é finito.}$$

□

Proposição 1.1. *Sejam G, H grupos e $\varphi : G \to H$ um homomorfismo de grupos.*

a) *Se A é subgrupo de G, então $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = Aker(\varphi)$.*

b) *Se B é subgrupo de H, então $\varphi(\varphi^{-1}(B)) = B \cap Im(\varphi)$, onde para um subgrupo C de H, temos que $\varphi^{-1}(C) = \{g \in G : \varphi(g) \in C\}$ é subgrupo de G.*

Demonstração. ***a)*** Primeiramente, vamos mostrar que $Aker(\varphi) \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(A))$. Temos que $ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{1_H\}) \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(A))$ e $A \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(A))$. Como $\varphi^{-1}(\varphi(A))$ é subgrupo de G, segue que $Aker(\varphi) \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(A))$. Para mostrar a inclusão inversa, seja $g \in \varphi^{-1}(\varphi(A))$. Logo, $\varphi(g) \in \varphi(A)$, isto é, existe $a \in A$ tal que $\varphi(g) = \varphi(a)$, o que implica que $\varphi(a)^{-1}\varphi(g) = 1_H$, ou seja, $\varphi(a^{-1}g) = 1_H$, o que acarreta que $a^{-1}g \in ker(\varphi)$. Portanto, existe $g_0 \in ker(\varphi)$ tal que $g = ag_0 \in Aker(\varphi)$. Como $g \in \varphi^{-1}(\varphi(A))$ foi tomado arbitrário, concluímos que $\varphi^{-1}(\varphi(A)) \subseteq Aker(\varphi)$.

b) Das definições de imagem e pré-imagem de uma função segue que $\varphi(\varphi^{-1}(B)) \subseteq B \cap Im(\varphi)$. A fim de mostrarmos a inclusão inversa, seja $b \in B \cap Im(\varphi)$. Como $b \in Im(\varphi)$, existe $g \in G$ tal que $b = \varphi(g)$. Como $b \in B$, $b = \varphi(g) \in B$, daí que $g \in \varphi^{-1}(B)$ e, portanto, $b = \varphi(g) \in \varphi(\varphi^{-1}(B))$. Como $b \in B \cap Im(\varphi)$ foi tomado arbitrário, segue que $B \cap Im(\varphi) \subseteq \varphi(\varphi^{-1}(B))$. □

Lema 1.6. *Sejam G um grupo, A, B subgrupos de G tais que $A \lhd G$ ou $B \lhd G$ e $N \lhd G$ tal que $N \subseteq A, B$. Então, $A/N \cdot B/N = (AB)/N$.*

Demonstração. Como $N \lhd G$, resulta que $A/N, B/N$ são grupos e se $A \lhd G$ ou $B \lhd G$, então AB é subgrupo de G, daí que AB/N também é grupo. Assim, dadas as classes laterais $aN \in A/N$ e $bN \in B/N$, segue que $aN \cdot bN = abN$. Concluímos, portanto, que $A/N \cdot B/N = (AB)/N$. □

Lema 1.7. *Sejam G um grupo, $H \lhd G$ e $\pi : G \twoheadrightarrow G/H$ o homomorfismo de grupos projeção canônica. Sejam também C um subgrupo de G/H e $B \lhd G/H$. Então,*

$$\pi^{-1}(BC) = \pi^{-1}(B)\pi^{-1}(C).$$

Demonstração. Como C é subgrupo de G/H e $B \lhd G/H$, pelo Teorema 1.4 (p. 4) (Teorema de Correspondência para Grupos), segue que

$$\pi^{-1}(C) \text{ é subgrupo de } G \text{ e } \pi^{-1}(B) \lhd G$$

$$\text{com } B = \pi(\pi^{-1}(B)) = \pi^{-1}(B)/H \text{ e } C = \pi(\pi^{-1}(C)) = \pi^{-1}(C)/H.$$

Assim, $BC = (\pi^{-1}(B)/H)\cdot(\pi^{-1}(C)/H)$ e, pelo Lema 1.6 (p. 5), $(\pi^{-1}(B)/H)\cdot(\pi^{-1}(C)/H) = (\pi^{-1}(B)\pi^{-1}(C))/H$, isto é,

$$BC = (\pi^{-1}(B)\pi^{-1}(C))/H$$

o que implica que

$$\pi^{-1}(BC) = \pi^{-1}(B)\pi^{-1}(C).$$

□

Lema 1.8. *Sejam G um grupo, $N \lhd G$ e K, H subgrupos de G tais que $K \subseteq H$. Se $[H : K] < \infty$, então $[NH : NK] < \infty$.*

Demonstração. Como $N \lhd G$, temos que NH, NK são subgrupos de G. Além disso, como $K \subseteq H$, segue que $NK \subseteq NH$ e, por hipótese,

$$H = \dot{\bigcup_{t\in T}} Kt,$$

onde T é subconjunto de H e $|T| < \infty$ (T é uma transversal à direita de K em H). Observamos, assim, que

$$NH = N(\dot{\bigcup_{t\in T}} Kt) = \bigcup_{t\in T} NKt.$$

Portanto, $[NH : NK] \leq |T| < \infty$. □

Proposição 1.2. *Sejam G, H grupos e $\pi : G \twoheadrightarrow H$ um epimorfismo de grupos.*

a) *Se B e A são subgrupos de H tais que $B \subseteq A$, então $[\pi^{-1}(A) : \pi^{-1}(B)] = [A : B]$.*

b) *Se $B \lhd A \lhd H$, então $\pi^{-1}(B) \lhd \pi^{-1}(A) \lhd G$ e $\pi^{-1}(A)/\pi^{-1}(B) \cong A/B$.*

Demonstração. ***a)*** Como B é subgrupo de A, temos que $\pi^{-1}(B)$ é subgrupo de $\pi^{-1}(A)$, daí que

$$\pi^{-1}(A) = \dot{\bigcup_{t\in T}} \pi^{-1}(B)t, \tag{1.1}$$

para algum subconjunto T de $\pi^{-1}(A)$, onde $\pi^{-1}(B)t$ é classe lateral à direita de $\pi^{-1}(B)$ em $\pi^{-1}(A), \forall t \in T$ (T é uma transversal à direita de $\pi^{-1}(B)$ em $\pi^{-1}(A)$). Logo,

$$A = \pi(\pi^{-1}(A)) = \pi(\dot{\bigcup_{t\in T}} \pi^{-1}(B)t) = \bigcup_{t\in T} \pi(\pi^{-1}(B))\pi(t) = \bigcup_{t\in T} B\pi(t) = \bigcup_{\pi(t)\in\pi(T)} B\pi(t) =$$

$$= \dot{\bigcup_{\pi(t)\in\pi(T)}} B\pi(t), \tag{1.2}$$

onde essa última união é, de fato, disjunta, pois, do contrário, existiriam $\pi(t_1), \pi(t_2) \in \pi(T)$ tais que $\pi(t_1) \neq \pi(t_2)$ e $B\pi(t_1) = B\pi(t_2)$. Logo, $\pi(t_1)\pi(t_2)^{-1} = \pi(t_1 t_2^{-1}) \in B$, o que implicaria que $t_1 t_2^{-1} \in \pi^{-1}(B)$ e, portanto, $\pi^{-1}(B)t_1 = \pi^{-1}(B)t_2$. Mas, $t_1 \neq t_2$, pois $\pi(t_1) \neq \pi(t_2)$. Assim, teríamos uma contradição com a união disjunta em (1.1) (p. 6).

Temos também que $|T| = |\pi(T)|$, pois, dados $t_1, t_2 \in T$, se $t_1 \neq t_2$, então por (1.1) (p. 6) $\pi^{-1}(B)t_1 \neq \pi^{-1}(B)t_2$, logo $t_1 t_2^{-1} \notin \pi^{-1}(B)$, o que implica que $\pi(t_1 t_2^{-1}) \notin B$ e, portanto, por (1.2) (p. 7) $\pi(t_1) \neq \pi(t_2)$. Por (1.1) (p. 6) e (1.2) (p. 7), segue que

$$[\pi^{-1}(A) : \pi^{-1}(B)] = |T| = |\pi(T)| = [A : B].$$

b) Como $B \lhd A \lhd H$, pelo Teorema 1.4 (p. 4) (Teorema de Correspondência para Grupos), temos que $\pi^{-1}(B) \lhd \pi^{-1}(A) \lhd G$. Sejam $\rho : A \twoheadrightarrow A/B$ o homomorfismo de grupos projeção canônica e $\psi : \pi^{-1}(A) \to A$ definida por $\psi(x) = \pi(x), \forall x \in \pi^{-1}(A)$. Definamos

$$\theta : \pi^{-1}(A) \to A/B \text{ por } \theta := \rho\psi.$$

Como ψ e ρ são epimorfismos de grupos, segue que θ também o é. Pelo Teorema 1.1 (p. 3) (1º Teorema de Isomorfismo para Grupos), $\pi^{-1}(A)/ker(\theta) \cong Im(\theta) = A/B$ e, por outro lado, $ker(\theta) = \theta^{-1}(\mathbf{1}) = (\rho\psi)^{-1}(\mathbf{1}) = \psi^{-1}\rho^{-1}(\mathbf{1}) = \pi^{-1}(B)$. Daí que $\pi^{-1}(A)/\pi^{-1}(B) \cong A/B$. □

Corolário 1.1. *Sejam G, H grupos, $\varphi : G \to H$ um isomorfismo de grupos e A_1, B_1 subgrupos de G tais que $B_1 \lhd A_1$. Então, $A_1/B_1 \cong \varphi(A_1)/\varphi(B_1)$.*

Demonstração. Basta usar o Teorema 1.4 (p. 4) (Teorema de Correspondência para Grupos) e a Proposição 1.2 b) (p. 6). □

Proposição 1.3. *Sejam G um grupo e A, B subgrupos de G. Se $[G : A] < \infty$, então $[B : A \cap B] < \infty$.*

Demonstração. Por hipótese $[G : A] < \infty$, logo $G/A = \{Ag : g \in G\}$ é um conjunto finito, onde, $\forall g \in G, Ag$ denota a classe lateral à direita de A em G. Temos que $\Delta = \{Ab : b \in B\}$ é também um conjunto finito, pois $B \subseteq G$. Vamos mostrar que existe uma bijeção entre os conjuntos Δ e $B/(A \cap B) = \{(A \cap B)b : b \in B\}$. Seja $\varphi : B/(A \cap B) \to \Delta$ dada por

$$\varphi((A \cap B)b = Ab$$

Então, φ está bem definida, pois, dados $(A\cap B)b_1, (A\cap B)b_2 \in B/(A\cap B)$ tais que $(A\cap B)b_1 = (A\cap B)b_2$, segue que $b_1 b_2^{-1} \in A\cap B \subseteq A$, logo $Ab_1 = Ab_2$, isto é, $\varphi((A\cap B)b_1) = \varphi((A\cap B)b_2)$. Por outro lado, φ é função injetiva, uma vez que, dados $(A\cap B)b_1, (A\cap B)b_2 \in B/(A\cap B)$, se

$\varphi((A\cap B)b_1) = \varphi((A\cap B)b_2)$, então $Ab_1 = Ab_2$, o que implica que $b_1b_2^{-1} \in A$. Como $b_1, b_2 \in B$, temos também que $b_1b_2^{-1} \in B$. Daí que $b_1b_2^{-1} \in A \cap B$, ou seja, $(A \cap B)b_1 = (A \cap B)b_2$. Além disso, observe que, por construção, φ é sobrejetiva. Desta forma, concluímos que $|\Delta| = |B/(A\cap B)|$ e, portanto, $B/(A\cap B)$ é um conjunto finito. Assim, $[B : A\cap B] < \infty$. □

Proposição 1.4. *Sejam G, H grupos, $\varphi : G \to H$ um homomorfismo de grupos, A, B subgrupos de G tais que $B \subseteq A$. Se $[A : B] < \infty$, então $[\varphi(A) : \varphi(B)] < \infty$.*

Demonstração. Por hipótese temos que existe um subconjunto T de A tal que

$$A = \dot{\bigcup_{t\in T}} Bt \quad \text{e} \quad |T| < \infty,$$

(T é uma transversal à direita de B em A). Daí que

$$\varphi(A) = \varphi(\dot{\bigcup_{t\in T}} Bt) = \bigcup_{t\in T} \varphi(B)\varphi(t) = \bigcup_{\varphi(t)\in\varphi(T)} \varphi(B)\varphi(t).$$

Visto que $\varphi(B)\varphi(t)$ é classe lateral à direita de $\varphi(B)$ em $\varphi(A)$ para todo $\varphi(t) \in \varphi(T)$, podemos tomar essa última união como sendo também disjunta, bastando para isso que eliminemos da união as classes laterias repetidas. Assim, teremos que

$$\varphi(A) = \dot{\bigcup_{y\in Y}} \varphi(B)y, \text{ onde } Y \subseteq \varphi(T).$$

Daí que $[\varphi(B) : \varphi(A)] = |Y| \leq |\varphi(T)| \leq |T| < \infty$. □

Notação 1.1. Seja G um grupo. Denotemos por G' o grupo comutador de G, isto é,

$$G' = \langle\{[g_1, g_2] \in G : g_1, g_2 \in G\}\rangle, \text{ onde } [g_1, g_2] = g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2 \in G.$$

Proposição 1.5. *Sejam G um grupo e $H \lhd G$. Então, G/H é grupo abeliano se, e somente se, $G' \subseteq H$. Em particular G/G' é grupo abeliano.*

Demonstração. Vamos mostrar que se G/H é grupo abeliano, então $G' \subseteq H$. Seja $x \in G'$. Então, $x = [y_1, z_1]^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot [y_n, z_n]^{\varepsilon_n}$, com $n \in \mathbb{Z}_+$, $y_i, z_i \in G$ e $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, onde $1 \leq i \leq n$. Agora, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, sejam y_iH, z_iH classes laterais em G/H. Como G/H é grupo abeliano, temos que $y_iH \cdot z_iH = z_iH \cdot y_iH$ e, portanto, $y_i^{-1}z_i^{-1}y_iz_iH = H$. Segue que $[y_i, z_i] \in H$. Como H é grupo, obtemos que $x \in H$. Daí que, por $x \in G'$ ter sido tomado arbitrário, $G' \subseteq H$.

Mostraremos agora a afirmação recíproca. Sejam xH, yH classes laterais em G/H, onde $x, y \in G$. Como $G' \subseteq H$, temos que $[x, y] \in H$ e, portanto, $x^{-1}y^{-1}xy \in H$. Daí que $x^{-1}y^{-1}xyH = H$ e, consequentemente, $xyH = yxH$, isto é, $xH \cdot yH = yH \cdot xH$. Assim, G/H é grupo abeliano. □

Corolário 1.2. *Seja G um grupo. Então, $G' = \mathbf{1}$ se, e somente se, G é grupo abeliano.*

Demonstração. Se $G' = \mathbf{1}$, então $G \cong G/\mathbf{1} = G/G'$, logo G é grupo abeliano pela Proposição 1.5 (p. 8). Caso G seja um grupo abeliano, então $G/\mathbf{1}$ é grupo abeliano e, portanto, $G' \subseteq \mathbf{1}$ pela Proposição 1.5 (p. 8). □

Proposição 1.6. *Sejam G, H grupos e $\varphi : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Se G é um grupo abeliano, então $\varphi(G)$ é um grupo abeliano. Em particular, se $H \lhd G$ e G é grupo abeliano, então G/H é grupo abeliano.*

Demonstração. $\forall \varphi(g_1), \varphi(g_2) \in \varphi(G), \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \varphi(g_1g_2) = \varphi(g_2g_1) = \varphi(g_2)\varphi(g_1)$.

Se $H \lhd G$ e G for grupo abeliano, basta aplicar o resultado acima para o homomorfismo de grupos projeção canônica $\pi : G \twoheadrightarrow G/H$, que é epimorfismo de grupos. □

Proposição 1.7. *Sejam G um grupo, $A, B \lhd G$ tais que $B \subseteq A$. Então, $\varphi : G/B \to G/A$ dada por*

$$\varphi(gB) = gA,$$

para toda classe lateral $gB \in G/B$, é um epimorfismo de grupos. Além disso, $ker(\varphi) = A/B$.

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que φ está bem definida. Dados $g_1B, g_2B \in G/B$, se $g_1B = g_2B$, então $g_1g_2^{-1} \in B$. Como $B \subseteq A$, segue que $g_1g_2^{-1} \in A$ e, portanto, $g_1A = g_2A$, isto é, $\varphi(g_1B) = \varphi(g_2B)$.

Agora, φ é homomorfismo de grupos, pois, dados $g_1B, g_2B \in G/B$, temos que

$$\varphi(g_1B \cdot g_2B) = \varphi(g_1g_2B) = g_1g_2A = g_1A \cdot g_2A = \varphi(g_1B)\varphi(g_2B)$$

e é sobrejetivo, pois, para todo $z \in G/A$, segue que $z = gA$, para algum $g \in G$, ou seja, $z = \varphi(gB)$.

Para vermos que $ker(\varphi) = A/B$, para toda classe lateral $xB \in G/B$, temos que $xB \in ker(\varphi)$ se, e somente se, $\varphi(xB) = 1_{G/A} = A$, o que é equivalente a $x \in A$ e que, por sua vez, é equivalente a $xB \in A/B$. □

Lema 1.9. *Sejam G um grupo e $G_1, G_2, G_3 \lhd G$ tais que $G_2 \subseteq G_1$. Então,*

a) *$G_2G_3 \lhd G_1G_3$ e, portanto, $\dfrac{G_1G_3}{G_2G_3}$ é grupo quociente.*

b) *$G_1 \cap (G_2G_3) = G_2(G_1 \cap G_3)$.*

Demonstração. ***a)*** Observemos que, como $G_2 \lhd G$ e $G_3 \lhd G$, segue que $G_2G_3 \lhd G$. Visto que $G_2 \subseteq G_1$, temos que $G_2G_3 \subseteq G_1G_3$. Daí que $G_2G_3 \lhd G_1G_3$ e, portanto, $\dfrac{G_1G_3}{G_2G_3}$ é grupo quociente.

b) Vamos mostrar que $G_1 \cap (G_2G_3) \subseteq G_2(G_1 \cap G_3)$. Seja $x \in G_1 \cap (G_2G_3)$. Logo, $x = g_1$ e $x = g_2g_3$, com $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$ e $g_3 \in G_3$. Daí que $g_1 = g_2g_3$, o que implica que $g_2^{-1}g_1 = g_3$. Como $G_2 \subseteq G_1$, segue que $g_3 \in G_1$ e, portanto, $x = g_2g_3 \in G_2(G_1 \cap G_3)$. Como $x \in G_1 \cap (G_2G_3)$ foi tomado arbitrário, segue que $G_1 \cap (G_2G_3) \subseteq G_2(G_1 \cap G_3)$. Para mostrarmos a inclusão inversa, seja $x \in G_2(G_1 \cap G_3)$. Logo, $x = g_2g$, com $g_2 \in G_2$ e $g \in G_1 \cap G_3$. Daí que $x \in G_2G_3$. Como $G_2 \subseteq G_1$ e $g \in G_1$, segue que $x = g_2g \in G_1$. Temos, assim, que $x \in G_1 \cap (G_2G_3)$. Como $x \in G_2(G_1 \cap G_3)$ foi tomado arbitrário, concluímos que $G_1 \cap (G_2G_3) \supseteq G_2(G_1 \cap G_3)$. □

Lema 1.10. *Sejam G um grupo e $G_1, G_2, G_3 \lhd G$ tais que $G_2 \subseteq G_1$. Então*

$$\frac{G_1G_3}{G_2G_3} \cong \frac{G_1}{G_2(G_1 \cap G_3)}.$$

Demonstração. Pelo Lema 1.9 a) (p. 9) $\dfrac{G_1G_3}{G_2G_3}$ é grupo quociente. Seja $\mu : G_1 \to \dfrac{G_1G_3}{G_2G_3}$ dada por $\mu(g_1) = g_1G_2G_3, \forall g_1 \in G_1$. Temos que μ é homomorfismo de grupos, pois, dados $g_1, g_1' \in G_1$, temos que $\mu(g_1g_1') = g_1g_1'G_2G_3 = g_1G_2G_3 \cdot g_1'G_2G_3 = \mu(g_1)\mu(g_1')$. Além disso, μ é sobrejetivo. De fato, $\forall x \in \dfrac{G_1G_3}{G_2G_3}$, $x = g_1g_3G_2G_3$, com $g_1 \in G_1$ e $g_3 \in G_3$. Assim,

$$x = g_1g_3G_2G_3 = g_1G_2G_3 \cdot g_3G_2G_3 =$$

$$= g_1G_2G_3 \cdot g_3G_3G_2 = g_1G_2G_3 \cdot G_3G_2 = g_1G_2G_3 \cdot G_2G_3 = \mu(g_1).$$

Agora, vamos mostrar que $ker(\mu) = G_1 \cap (G_2G_3)$. Seja $g_1 \in ker(\mu)$. Logo, $\mu(g_1) = G_2G_3$, isto é, $g_1G_2G_3 = G_2G_3$, o que implica que $g_1 \in G_2G_3$, isto é, $g_1 \in G_1 \cap (G_2G_3)$. Como $g_1 \in ker(\mu)$ foi tomado arbitrário, temos que $ker(\mu) \subseteq G_1 \cap (G_2G_3)$. Para mostrar a inclusão inversa, seja $x \in G_1 \cap (G_2G_3)$. Então, $\mu(x) = xG_2G_3 = G_2G_3$. Logo, $x \in ker(\mu)$. Como $x \in G_1 \cap (G_2G_3)$ foi tomado arbitrário, concluímos que $ker(\mu) \supseteq G_1 \cap (G_2G_3)$. Pelo Lema 1.9 b) (p. 9), segue que

$$ker(\mu) = G_2(G_1 \cap G_3).$$

Pelo 1º Teorema de Isomorfismo para Grupos, $G_1/ker(\mu) \cong Im(\mu)$. Logo,

$$\frac{G_1}{G_2(G_1 \cap G_3)} \cong \frac{G_1G_3}{G_2G_3}.$$

□

Definição 1.1. *Sejam $P_1, P_2, \cdots, P_n$ propriedades de grupos que são preservadas por isomorfismos de grupos, onde $n \in \mathbb{Z}_+$. Dizemos que um grupo G é P_1-**por**-P_2-**por**-...-**por**-P_n se existem $A_1, A_2 \ldots, A_{n-1} \lhd G$ tais que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_{n-1} \subseteq G$ e A_1 possui a propriedade P_1, A_2/A_1 possui a propriedade P_2, ... , A_{n-1}/A_{n-2} possui a propriedade P_{n-1} e G/A_{n-1} possui a propriedade P_n.*

Notação 1.2. A classe dos grupos nilpotente-por-abeliano-por-finitos é denotada por $\mathfrak{NAF}$. Assim, se G é um grupo nilpotente-por-abeliano-por-finito, escrevemos $G \in \mathfrak{NAF}$.

Proposição 1.8. *Sejam G, H grupos e $\varphi : G \to H$ um isomorfismo de grupos. Se G é P_1-por-P_2-por-...-por-P_n, então H é P_1-por-P_2-por-...-por-P_n.*

Demonstração. Por hipótese G é P_1-por-P_2-por-...-por-P_n, logo existem $A_1, A_2 \ldots, A_{n-1} \lhd G$ tais que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_{n-1} \subseteq G$ e A_1 possui a propriedade P_1, A_2/A_1 possui a propriedade P_2, ... , A_{n-1}/A_{n-2} possui a propriedade P_{n-1} e G/A_{n-1} possui a propriedade P_n. Temos que $\varphi(A_1), \varphi(A_2), \ldots \varphi(A_{n-1}) \lhd H$ e $\varphi(A_1) \subseteq \varphi(A_2) \subseteq \ldots \subseteq \varphi(A_{n-1}) \subseteq H$. Além disso, temos que $A_1 \cong \varphi(A_1)$ e, pelo Corolário 1.1 (p. 7), $A_{i+1}/A_i \cong \varphi(A_{i+1})/\varphi(A_i)$, com $1 \leq i \leq n-2$, e $G/A_{n-1} \cong H/\varphi(A_{n-1})$. Segue que $\varphi(A_1)$ também possui a propriedade P_1, $\varphi(A_2)/\varphi(A_1)$ também possui a propriedade P_2, ... , $\varphi(A_{n-1})/\varphi(A_{n-2})$ também possui a propriedade P_{n-1} e $H/\varphi(A_{n-1})$ também possui a propriedade P_n. Assim, concluímos que H é também P_1-por-P_2-por-...-por-P_n. □

Proposição 1.9. *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Se G é grupo abeliano-por-finito, então H também o é.*

Demonstração. Como G é grupo abeliano-por-finito, existe $A \lhd G$ tal que A é grupo abeliano e G/A é grupo finito. Temos que $A \cap H \lhd H$ pelo Lema 1.3 (p. 4). Além disso, $A \cap H$ é grupo abeliano, pois A é abeliano, e $H/(A \cap H)$ é grupo finto, já que, pelo Teorema 1.2 (p. 3) (2º Teorema de Isomorfismo para Grupos), $H/(A \cap H) \cong HA/A \leq G/A$, sendo este último grupo finito. Portanto, H é grupo abeliano-por-finito. □

Lema 1.11. *[14, Lemma 3.7, p. 143] Sejam G um grupo e $N_1, \ldots, N_s \lhd G$, onde $s \in \mathbb{Z}_+$. Se $G/N_1, \ldots, G/N_{s-1}$ e G/N_s são grupos abeliano-por-finitos, então $G/(\bigcap_{i=1}^{s} N_i)$ é grupo abeliano-por-finito.*

Demonstração. Seja $\pi : G \to G/N_1 \times \ldots \times G/N_s$ o homomorfismo de grupos dado por $\pi(g) = (gN_1, \ldots, gN_s)$. Então, $ker(\pi) = \bigcap_{i=1}^{s} N_i$ e, pelo Teorema 1.1 (p. 3) (1º Teorema de Isomorfismo para Grupos), $G/\bigcap_{i=1}^{s} N_i \cong Im(\pi) \leq G/N_1 \times \ldots \times G/N_s$, que é abeliano-por-finito, e, portanto, $Im(\pi)$ é também abeliano-por-finito pela Proposição 1.9 (p. 11). Pela Proposição 1.8 (p. 10), segue que $G/(\bigcap_{i=1}^{s} N_i)$ é grupo abeliano-por-finito. □

Lema 1.12. *Sejam G um grupo e $A_1, \ldots, A_n$ subgrupos de G, onde $n \in \mathbb{Z}_+$. Se $[G : A_i] < \infty$, para $1 \leq i \leq n$, então $[G : \bigcap_{i=1}^{n} A_i] < \infty$.*

Demonstração. Temos que

$$[G : \bigcap_{i=1}^{n} A_i] = [G : (\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \cap A_n] = [G : A_n][A_n : (\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \cap A_n].$$

Por hipótese $[G : A_n] < \infty$ e, pela Proposição 1.3 (p. 7), $[A_n : (\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \cap A_n] < \infty$. □

Lema 1.13. *Sejam G, H grupos, $S \lhd G$ e $\varphi : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Se $S \subseteq ker(\varphi)$, então φ induz um homomorfismo de grupos $\theta : G/S \to H$ dado por $\theta(gS) = \varphi(g)$, para toda classe lateral $gS \in G/S$.*

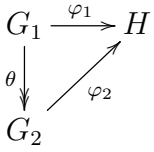
Demonstração. Vamos mostrar que θ está bem definida. Sejam $g_1S, g_2S \in G/S$ tais que $g_1S = g_2S$. Logo, $g_1g_2^{-1} \in S$. Como $S \subseteq ker(\varphi)$, temos que $\varphi(g_1g_2^{-1}) = 1_H$, logo $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ e, portanto, $\theta(g_1S) = \theta(g_2S)$, isto é, θ está bem definida.

Vamos mostrar agora que θ é homomorfismo de grupos. Sejam $g_1S, g_2S \in G/S$. Então, $\theta(g_1S \cdot g_2S) = \theta(g_1g_2S) = \varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \theta(g_1s)\theta(g_2S)$. □

Lema 1.14. *Sejam G_1, G_2, H grupos, $\varphi_1 : G_1 \to H, \varphi_2 : G_2 \to H$ homomorfismos de grupos e $\theta : G_1 \twoheadrightarrow G_2$ um epimorfismo de grupos tais que $\varphi_2\theta = \varphi_1$. Então,*

$$\theta(ker(\varphi_1)) = ker(\varphi_2).$$

Demonstração. Por hipótese temos que o seguinte diagrama é comutativo



Vamos mostrar primeiramente que $\theta(ker(\varphi_1)) \subseteq ker(\varphi_2)$. Seja $g_2 \in \theta(ker(\varphi_1))$. Então, existe $g_1 \in ker(\varphi_1)$ tal que $g_2 = \theta(g_1)$. Daí que, $\varphi_2(g_2) = \varphi_2\theta(g_1) = \varphi_1(g_1) = 1_H$. Logo, $g_2 \in ker(\varphi_2)$. Como $g_2 \in \theta(ker(\varphi_1))$ foi tomado arbitrário, segue que $\theta(ker(\varphi_1)) \subseteq ker(\varphi_2)$. Para mostrar a inclusão inversa, seja $g_2 \in ker(\varphi_2)$. Então, $\varphi_2(g_2) = 1_H$. Mas, como θ é sobrejetivo, existe $g_1 \in G_1$ tal que $g_2 = \theta(g_1)$. Daí que $1_H = \varphi_2(g_2) = \varphi_2(\theta(g_1)) = \varphi_1(g_1)$ e, portanto, $g_1 \in ker(\varphi_1)$, ou seja, $g_2 \in \theta(ker(\varphi_1))$. Como $g_2 \in ker(\varphi_2)$ foi tomado arbitrário, segue que $\theta(ker(\varphi_1)) \supseteq ker(\varphi_2)$. □

Lema 1.15. *Sejam G, G_1, G_2 grupos e $\varphi_1 : G \twoheadrightarrow G_1, \varphi_2 : G \twoheadrightarrow G_2, \theta : G_1 \twoheadrightarrow G_2$ epimorfismos de grupos tais que $\varphi_1 = \theta\varphi_2$. Então, θ é isomorfismo de grupos se, e somente se, $ker(\varphi_1) = ker(\varphi_2)$.*

Demonstração. Suponhamos primeiramente que θ é isomorfismo de grupos. Pelo Lema 1.14 (p. 12), segue que

$$\varphi_2(ker(\varphi_1)) = ker(\theta) = 1_{G_1},$$

logo $ker(\varphi_1) \subseteq ker(\varphi_2)$. Analogamente, como $\theta^{-1}\varphi_1 = \varphi_2$, concluímos que

$$\varphi_1(ker(\varphi_2)) = ker(\theta^{-1}) = 1_{G_2},$$

logo $ker(\varphi_2) \subseteq ker(\varphi_1)$. Suponhamos agora que $ker(\varphi_1) = ker(\varphi_2)$. Pelo Lema 1.14 (p. 12), temos que $\varphi_2(ker(\varphi_1)) = ker(\theta)$, logo $\varphi_2(ker(\varphi_2)) = ker(\theta)$, ou seja, $1_{G_1} = ker(\theta)$ e, portanto, θ é monomorfismo de grupos. Como θ é epimorfismo de grupos por hipótese, concluímos que θ é isomorfismo de grupos. □

Lema 1.16. *Sejam G_1, G_2, G_3 grupos e $\varphi : G_1 \to G_2, \psi : G_2 \to G_3$ homomorfismos de grupos. Então,*

$$ker(\psi\varphi) = \varphi^{-1}(\ker(\psi)).$$

Demonstração. Vamos mostrar primeiramente que $ker(\psi\varphi) \subseteq \varphi^{-1}(\ker(\psi))$. Tomemos $x \in ker(\psi\varphi)$ arbitrário. Então, $\psi\varphi(x) = 1_{G_3}$. Segue que $\varphi(x) \in ker(\psi)$, ou seja, $x \in \varphi^{-1}(ker(\psi))$. Daí que $ker(\psi\varphi) \subseteq \varphi^{-1}(\ker(\psi))$. Para mostrar a inclusão inversa, seja $x \in \varphi^{-1}(\ker(\psi))$. Então, $\varphi(x) \in ker(\psi)$ e, portanto, $\psi\varphi(x) = 1_{G_3}$, ou seja, $x \in ker(\psi\varphi)$. Como $x \in \varphi^{-1}(\ker(\psi))$ foi tomado arbitrário, concluímos que $ker(\psi\varphi) \supseteq \varphi^{-1}(\ker(\psi))$. □

Lema 1.17. *Sejam G, H grupos, $A \lhd G$ e $\varphi : G \twoheadrightarrow H$ um epimorfismo de grupos. Então:*

a) *$\varphi_* : G/A \to H/\varphi(A)$ definida por $\varphi_*(gA) = \varphi(g)\varphi(A)$, para toda classe lateral $gA \in G/A$, é um epimorfismo de grupos;*

b) *Se φ_* e $\varphi|_A$ (restrição de φ sobre A) são isomorfismos de grupos, então φ é isomorfismo de grupos.*

Demonstração. ***a)*** Como $A \lhd G$, temos que $\varphi(A) \lhd H$, daí que $H/\varphi(A)$ é grupo quociente.

Para vermos que φ_* está bem definida, sejam $g_1A, g_2A \in G/A$ tais que $g_1A = g_2A$. Logo, $g_1g_2^{-1} \in A$, o que implica que $\varphi(g_1g_2^{-1}) \in \varphi(A)$, ou seja, $\varphi(g_1)\varphi(g_2)^{-1} \in \varphi(A)$, logo $\varphi(g_1)\varphi(A) = \varphi(g_2)\varphi(A)$ e, portanto, $\varphi_*(g_1A) = \varphi_*(g_2A)$. E para vermos que φ_* é homomorfismo de grupos, dados $g_1A, g_2A \in G/A$, temos que $\varphi_*(g_1A \cdot g_2A) = \varphi_*(g_1g_2A) = \varphi(g_1g_2)\varphi(A) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)\varphi(A) = \varphi(g_1)\varphi(A) \cdot \varphi(g_2)\varphi(A) = \varphi_*(g_1A)\varphi_*(g_2A)$. Por fim, temos que φ_* é sobrejetivo, pois, dado $z \in H/\varphi(A)$, temos que $z = h\varphi(A)$, para algum $h \in H$. Como φ é sobrejetivo, segue que $h = \varphi(g)$, para algum $g \in G$. Daí que $z = \varphi(g)\varphi(A) = \varphi_*(gA)$.

b) Basta mostrarmos que $ker(\varphi) = \mathbf{1}$.

Seja $g \in ker(\varphi)$. Temos que $\varphi(g) = 1_H$. Logo, $\varphi_*(gA) = \varphi(g)\varphi(A) = \varphi(A) = 1_{H/\varphi(A)}$. Daí que $gA \in ker(\varphi_*)$. Mas, $ker(\varphi_*) = \mathbf{1} = \{A\}$, pois φ_* é isomorfismo de grupos por hipótese, por conseguinte $gA = A$, isto é, $g \in A$. Como também $g \in ker(\varphi)$, temos que $g \in ker(\varphi|_A)$. Mas, $ker(\varphi|_A) = \mathbf{1} = \{1_G\}$, pois $\varphi|_A$ também é isomorfismo de grupos, portanto $g = 1_G$. Como $g \in ker(\varphi)$ foi tomado arbitrário, concluímos que $ker(\varphi) = \{1_G\} = \mathbf{1}$. □

1.1.2 Cálculos com Comutadores, Série Central Descendente e Grupos Nilpotentes

Notação 1.3. Seja G um grupo. Dado $i \in \mathbb{Z}_+$, temos a seguinte notação:

$$[g_1, \ldots, g_i] := [[g_1, \ldots, g_{i-1}], g_i],$$

onde $[g_1] := g_1$, $[g_1, g_2] := g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2$ e $g_i \in G, \forall i \in \mathbb{Z}_+$. Denominamos $[g_1, \ldots, g_i]$ de **comutador normado à esquerda de tamanho** i.

Notação 1.4. Sejam G um grupo e $A_1, \ldots, A_i$ subgrupos de G, onde $i \in \mathbb{Z}_+$. Temos, então, a seguinte notação:

$$[A_1, \ldots, A_i] := [[A_1, \ldots, A_{i-1}], A_i],$$

onde

$$[A_1] := A_1,$$

$$[A_1, A_2] = \Big\langle \big\{[a_1, a_2] \in G : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\big\} \Big\rangle = \Big\langle \{[a_1, a_2]\}_{a_1 \in A_1, a_2 \in A_2} \Big\rangle.$$

Lema 1.18. *Sejam G, H grupos, $\varphi : G \to H$ um homomorfismo de grupos e A, B subgrupos de G. Então,*

$$\varphi([A, B]) = [\varphi(A), \varphi(B)].$$

Demonstração. Dados $a \in A$ e $b \in B$, temos que

$$\varphi([a, b]) = \varphi(a^{-1}b^{-1}ab) = \varphi(a)^{-1}\varphi(b)^{-1}\varphi(a)\varphi(b) = [\varphi(a), \varphi(b)].$$

Segue daí que

$$\varphi([A,B]) = \varphi(\langle\{[a,b]\}_{a\in A,b\in B}\rangle) = \langle\varphi(\{[a,b]\}_{a\in A,b\in B})\rangle =$$

$$= \langle\{\varphi([a,b])\}_{a\in A,b\in B}\rangle = \langle\{[\varphi(a),\varphi(b)]\}_{a\in A,b\in B}\rangle = [\varphi(A),\varphi(B)].$$

□

Definição 1.2. *Sejam G um grupo e A um subgrupo de G. Definimos e denotamos o* ***centralizador de A em G*** *por*

$$C_G(A) = \{g \in G : ag = ga, \forall a \in A\}$$

e o ***centro de G*** *por*

$$Z(G) = \{g \in G : xg = gx, \forall x \in G\}.$$

Lema 1.19. *Sejam G um grupo, $B \lhd G$ e A um subgrupo de G tais que $B \subseteq A$. Então, $[A,G] \subseteq B$ se, e somente se, $A/B \subseteq Z(G/B)$.*

Demonstração.

$$[A,G] \subseteq B \Leftrightarrow [a,g] \in B, \forall a \in A, g \in G \Leftrightarrow a^{-1}g^{-1}agB = B, \forall a \in A, g \in G \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow agB = gaB, \forall a \in A, g \in G \Leftrightarrow aB \cdot gB = gB \cdot aB, \forall a \in A, g \in G \Leftrightarrow A/B \subseteq Z(G/B).$$

□

Definição 1.3. *Seja G um grupo. Para todo $i \in \mathbb{Z}_+$, definimos indutivamente*

$$\gamma_1(G) := G \quad e \quad \gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G].$$

Lema 1.20. *Seja G um grupo. Para todo $i \in \mathbb{Z}_+$, definamos*

$$C_i := \{[g_1, \ldots, g_i] : g_1, \ldots, g_i \in G\},$$

conjunto dos comutadores normados à esquerda de tamanho i. Temos, então, que

$$\gamma_i(G) = \langle C_i\rangle.$$

Demonstração. Faremos a demonstração por indução sobre i. Caso $i = 1$, temos $\gamma_1(G) = G = \langle G\rangle = \langle\{[g_1] : g_1 \in G\}\rangle = \langle C_1\rangle$. Caso $i > 1$, segue que $\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G]$. Pela hipótese de indução, $\gamma_i(G) = \langle C_i\rangle$, daí que, escrevendo $C_1 = \{g_{i+1} : g_{i+1} \in G\}$,

$$\gamma_{i+1}(G) = [\langle C_i\rangle, G] = [\langle C_i\rangle, \langle C_1\rangle] = \Big\langle\big\{[[g_1, \ldots, g_i], g_{i+1}] : g_1, \ldots, g_{i+1} \in G\big\}\Big\rangle =$$

$$= \Big\langle\big\{[g_1, \ldots, g_i, g_{i+1}] : g_1, \ldots, g_{i+1} \in G\big\}\Big\rangle = \langle C_{i+1}\rangle.$$

□

Proposição 1.10. *Seja G um grupo. Então,*

a) $\gamma_i(G) \lhd_{car} G, \forall i \in \mathbb{Z}_+$;

b) $\gamma_{i+1}(G) \lhd \gamma_i(G), \forall i \in \mathbb{Z}_+$.

Demonstração. ***a)*** Seja $\varphi : G \to G$ um automorfismo de grupos. A demonstração será feita através de indução sobre $i \in \mathbb{Z}_+$.

Caso $i = 1$, temos que $\varphi(\gamma_1(G)) = \varphi(G) \subseteq G = \gamma_1(G)$. Logo, $\gamma_1(G) \lhd_{car} G$.

Caso $i > 1$, usando o Lema 1.18 (p. 13) e a hipótese de indução, segue que $\varphi(\gamma_{i+1}(G)) = \varphi([\gamma_i(G), G]) = [\varphi(\gamma_i(G)), \varphi(G)] \subseteq [\gamma_i(G), G] = \gamma_{i+1}(G)$. Portanto, $\gamma_i(G) \lhd_{car} G$.

b) Como $\gamma_i(G) \lhd_{car} G, \forall i \in \mathbb{Z}_+$, temos que $\gamma_i(G) \lhd G, \forall i \in \mathbb{Z}_+$. Sendo assim, basta mostrarmos que $\gamma_{i+1}(G) \subseteq \gamma_i(G), \forall i \in \mathbb{Z}_+$. Sejam $x \in \gamma_i(G)$ e $g \in G$. Como $\gamma_i(G) \lhd G, \forall i \in \mathbb{Z}_+$, segue que $gx^{-1}g^{-1} \in \gamma_i(G)$, o que implica que $(gx^{-1}g^{-1})x \in \gamma_i(G)$. Usando novamente a normalidade de $\gamma_i(G)$ em G, concluímos que $g^{-1}(gx^{-1}g^{-1}x)g \in \gamma_i(G)$, isto é, $g^{-1}gx^{-1}g^{-1}xg = x^{-1}g^{-1}xg = [x, g] \in \gamma_i(G)$. Portanto, concluímos que $[\gamma_i(G), G] \subseteq \gamma_i(G)$, ou seja, $\gamma_{i+1}(G) \subseteq \gamma_i(G)$. □

Definição 1.4. *Sejam G um grupo, I um conjunto de índices totalmente ordenado e $\mathcal{F} = \{G_i\}_{i \in I}$ uma família de subgrupos de G. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma* ***filtração (ou série)*** *do grupo G se $G_i \subseteq G_j$, sempre que $i \leq j$, para todos $i, j \in I$. E, dizemos que $\mathcal{F}$ é uma* ***filtração descendente (ou série descendente)*** *do grupo G se $G_i \subseteq G_j$, sempre que $j \leq i$, para todos $i, j \in I$.*

Definição 1.5. *Sejam G um grupo e $\mathcal{F} = \{G_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ uma filtração (ou série) de G. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma* ***filtração normal (ou série normal)*** *de G se, $\forall i \in \mathbb{Z}_+$, $G_i \lhd G_{i+1}$. Neste caso, definimos o* ***comprimento de uma filtração normal (ou série normal)*** *como sendo o número de grupos quocientes não-triviais da forma $G_{i+1}/G_i, \forall i \in \mathbb{Z}_+$. Denominamos tais grupos quocientes de* ***grupos fatores****. De forma análoga definimos* ***filtração (ou série) normal descendente*** *e* ***comprimento de uma filtração (ou série) normal descendente****.*

Definição 1.6. *Seja G um grupo. A* ***série central descendente*** *de G é a seguinte filtração descendente:*

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \dots$$ [1]

Definição 1.7. *Dizemos que um grupo G é* ***nilpotente*** *se existe $c \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\gamma_{c+1}(G) = \mathbf{1}$. O menor inteiro positivo c para o qual tal propriedade vale é chamado* ***classe de nilpotência de*** *G.*

Proposição 1.11. *Sejam G, H grupos, $\varphi : G \to H$ um homomorfismo de grupos e A um subgrupo de G. Se $A = \gamma_1(A) \geq \gamma_2(A) \geq \cdots \geq \gamma_k(A) \geq \cdots$ é a série central descendente de A, então $\varphi(A) = \varphi(\gamma_1(A)) \geq \varphi(\gamma_2(A)) \geq \cdots \geq \varphi(\gamma_k(A)) \geq \cdots$ é a série central descendente de $\varphi(A)$. Em particular, se A é nilpotente, então $\varphi(A)$ é nilpotente.*

Demonstração. Basta que mostremos que $\gamma_k(\varphi(A)) = \varphi(\gamma_k(A)), \forall k \in \mathbb{Z}_+$. Façamos a demonstração por indução sobre $k \in \mathbb{Z}_+$.

Para $k = 1$, $\varphi(\gamma_1(A)) = \varphi(A) = \gamma_1(\varphi(A))$.

[1] A série central descendente pode terminar no subgrupo trivial $\mathbf{1}$ de G, ou pode não terminar.

Para $k > 1$, usando o Lema 1.18 (p. 13) e a hipótese de indução,

$$\varphi(\gamma_k(A)) = \varphi([\gamma_{k-1}(A), A]) = [\varphi(\gamma_{k-1}(A)), \varphi(A)] = [\gamma_{k-1}(\varphi(A)), \varphi(A)] = \gamma_k(\varphi(A)).$$

Agora, se A é nilpotente, então existe $s \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\gamma_{s+1}(A) = \mathbf{1}$. Daí que $\gamma_{s+1}(\varphi(A)) = \varphi(\gamma_{s+1}(A)) = \varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ e, portanto, $\varphi(A)$ é nilpotente. □

Lema 1.21. *Sejam G um grupo nilpotente com classe de nilpotência s,*

$$G = \gamma_1(G) \geq \ldots \geq \gamma_s(G) \geq \mathbf{1}$$

a série central descendente de G, $H \lhd G$ tal que $H \subseteq \gamma_s(G)$ e

$$G/H = \gamma_1(G/H) \geq \gamma_2(G/H) \geq \ldots$$

série central descendente de G/H. Então, para $1 \leq i \leq s$,

$$\gamma_i(G/H) = \gamma_i(G)/H.$$

Demonstração. Observemos que pela Proposição 1.11 (p. 15), G/H é grupo nilpotente com classe de nilpotência s. Façamos a demonstração por indução sobre i.

Para o caso $i = 1$ temos que $\gamma_1(G/H) = G/H = \gamma_1(G)/H$.

Para o caso $1 < i \leq s$, sendo $\pi : G \twoheadrightarrow G/H$ o homomorfismo de grupos projeção canônica, segue que, usando o Lema 1.18 (p. 13) e a hipótese de indução,

$$\gamma_i(G/H) = [\gamma_{i-1}(G/H), G/H] = [\gamma_{i-1}(G)/H, G/H] = [\pi(\gamma_{i-1}(G)), \pi(G)] =$$

$$= \pi([\gamma_{i-1}(G), G]) = [\gamma_{i-1}(G), G]/H = \gamma_i(G)/H.$$

□

Lema 1.22. *Sejam G um grupo, H, S subgrupos de G, $H = \gamma_1(H) \geq \gamma_2(H) \geq \ldots$ série central descendente de H e $H \cap S = \gamma_1(H \cap S) \geq \gamma_2(H \cap S) \geq \ldots$ série central descendente de $H \cap S$. Então, $\forall i \in \mathbb{Z}_+$,*

$$\gamma_i(H \cap S) \subseteq \gamma_i(H).$$

Em particular, se H é subgrupo nilpotente, então $H \cap S$ é subgrupo nilpotente.

Demonstração. Façamos a demonstração por indução sobre $i \in \mathbb{Z}_+$.

Caso $i = 1, \gamma_1(H \cap S) = H \cap S \subseteq H = \gamma_1(H)$.

Para o caso $i > 1$, usando a hipótese de indução,

$$\gamma_{i+1}(H \cap S) = [\gamma_i(H \cap S), H \cap S] \subseteq [\gamma_i(H), H] = \gamma_{i+1}(H).$$

Caso H seja subgrupo nilpotente, existe $s \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\gamma_{s+1}(H) = \mathbf{1}$. Pelo que foi visto acima, $\gamma_{s+1}(H \cap S) \subseteq \gamma_{s+1}(H) = \mathbf{1}$, daí que $H \cap S$ é subgrupo nilpotente. □

Lema 1.23. *Sejam G um grupo, N, S subgrupos de G e $N = \gamma_1(N) \geq \gamma_2(N) \ldots$ série central descendente de N. Então,*

a) $\dfrac{\gamma_i(N)}{\gamma_{i+1}(N)}$ *é grupo abeliano,* $\forall i \in \mathbb{Z}_+$*;*

b) $\dfrac{\gamma_i(N) \cap S}{\gamma_{i+1}(N) \cap S}$ *é grupo abeliano,* $\forall i \in \mathbb{Z}_+$*.*

Demonstração. ***a)*** Temos, $\forall i \in \mathbb{Z}_+$, que $\gamma_{i+1}(N) = [\gamma_i(N), N]$. Logo, pelo Lema 1.19 (p. 14), segue que $\dfrac{\gamma_i(N)}{\gamma_{i+1}(N)} \subseteq Z(N/\gamma_i(N))$, $\forall i \in \mathbb{Z}_+$, de onde concluímos que $\dfrac{\gamma_i(N)}{\gamma_{i+1}(N)}$ é abeliano $\forall i \in \mathbb{Z}_+$.

b) Observemos que

$$[\gamma_i(N) \cap S, \gamma_i(N) \cap S] \subseteq [\gamma_i(N) \cap S, N \cap S] \subseteq [\gamma_i(N), N] \cap S = \gamma_{i+1}(N) \cap S,$$

logo $\dfrac{\gamma_i(N) \cap S}{\gamma_{i+1}(N) \cap S}$ tem grupo comutador $\dfrac{[\gamma_i(N) \cap S, \gamma_i(N) \cap S]}{\gamma_{i+1}(N) \cap S}$, que grupo é trivial. Portanto, pelo Corolário 1.2 (p. 8), $\dfrac{\gamma_i(N) \cap S}{\gamma_{i+1}(N) \cap S}$ é grupo abeliano, $\forall i \in \mathbb{Z}_+$. □

Lema 1.24. *Seja G um grupo. Então, dados $a, b, c \in G$, temos que*

a)
$$[c, ab] = [c, b][c, a][c, a, b].$$

b)
$$[ab, c] = [a, c][a, c, b][b, c].$$

Demonstração. Para mostrar o item ***a)*** do enunciado, temos que

$$[c, ab] = c^{-1}b^{-1}a^{-1}cab = c^{-1}b^{-1}cbb^{-1}c^{-1}a^{-1}cab =$$

$$= [c, b]b^{-1}[c, a]b = [c, b][c, a][c, a]^{-1}b^{-1}[c, a]b = [c, b][c, a][[c, a], b].$$

E, para mostrar o item ***b)*** do enunciado, temos que

$$[ab, c] = b^{-1}a^{-1}c^{-1}abc = b^{-1}a^{-1}c^{-1}acbb^{-1}c^{-1}bc = b^{-1}a^{-1}c^{-1}acb[b, c] =$$

$$= b^{-1}[a, c]b[b, c] = [a, c][a, c]^{-1}b^{-1}[a, c]b[b, c] = [a, c][[a, c], b][b, c].$$

□

Corolário 1.3. *Seja G um grupo. Então, dados $n \in \mathbb{Z}_+$, $a, b, c_1, \ldots, c_n \in G$, temos que*

a) $[c_1, \ldots, c_n, ab] = [c_1, \ldots, c_n, b][c_1, \ldots, c_n, a][c_1, \ldots, c_n, a, b]$.

b) $[ab, [c_1, \ldots, c_n]] = [a, [c_1, \ldots, c_n]] \cdot [a, [c_1, \ldots, c_n], b] \cdot [b, [c_1, \ldots, c_n]]$.

Demonstração. Basta usarmos o Lema 1.24 (p. 17) para $c = [c_1, \ldots, c_n]$. □

Lema 1.25 (Identidade de Hall-Witt)**.** *Seja G um grupo. Então, dados $a, b, c \in G$, temos que*

$$\big(b^{-1}[a, b^{-1}, c]b\big)\big(c^{-1}[b, c^{-1}, a]c\big)\big(a^{-1}[c, a^{-1}, b]a\big) = 1_G$$

Demonstração. Observe que

$$b^{-1}[a,b^{-1},c]b = b^{-1}[a,b^{-1}]^{-1}c^{-1}[a,b^{-1}]cb = b^{-1}[b^{-1},a]c^{-1}a^{-1}bab^{-1}cb =$$

$$= b^{-1}ba^{-1}b^{-1}ac^{-1}a^{-1}bab^{-1}cb = a^{-1}b^{-1}ac^{-1}a^{-1}bab^{-1}cb.$$

Definamos

$$g_1 := a^{-1}b^{-1}ac^{-1}a^{-1}, \quad g_2 := b^{-1}c^{-1}ba^{-1}b^{-1} \quad \text{e} \quad g_3 := c^{-1}a^{-1}cb^{-1}c^{-1}.$$

Segue que

$$g_2^{-1} = bab^{-1}cb.$$

Logo,

$$b^{-1}[a,b^{-1},c]b = g_1g_2^{-1}.$$

Através de cálculos análogos, obtemos as seguintes igualdades:

$$c^{-1}[b,c^{-1},a]c = g_2g_3^{-1} \text{ e } a^{-1}[c,a^{-1},b]a = g_3g_1^{-1}.$$

Desta forma, segue que

$$b^{-1}[a,b^{-1},c]bc^{-1}[b,c^{-1},a]ca^{-1}[c,a^{-1},b]a = g_1g_2^{-1}g_2g_3^{-1}g_3g_1^{-1} = 1_G.$$

□

Lema 1.26 (Lema dos Três Subgrupos)**.** *Sejam G um grupo, $N \lhd G$ e A, B, C subgrupos de G. Se $[A,B,C],[B,C,A] \subseteq N$, então $[C,A,B] \subseteq N$.*

Demonstração. Observe que a Demonstração do Lema 1.20 (p. 14) é suficiente para afirmar que $[C,A,B]$ é subgrupo de G gerado por elementos da forma $[c,a^{-1},b]$, com $c \in C, a \in A$ e $b \in B$. Agora, como $[A,B,C],[B,C,A] \subseteq N$ e $N \lhd G$, concluímos que

$$b^{-1}[a,b^{-1},c]b \in N \quad \text{e} \quad c^{-1}[b,c^{-1},a]c \in N.$$

Pelo Lema 1.25 (p. 17) (Identidade de Hall-Witt), temos também que $a^{-1}[c,a^{-1},b]a \in N$, daí que, como $N \lhd G$, $[c,a^{-1},b] = a(a^{-1}[c,a^{-1},b]a)a^{-1} \in N$. Visto que $[C,A,B]$ é subgrupo de G gerado por elementos da forma $[c,a^{-1},b]$, com $c \in C, a \in A$ e $b \in B$, concluímos assim que $[C,A,B] \subseteq N$. □

Proposição 1.12. *Sejam G um grupo e $G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \ldots$ a série central descendente de G. Então, dados $i, j \in \mathbb{Z}_+$, temos que*

$$[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] \subseteq \gamma_{i+j}(G)$$

Demonstração. Procedamos por indução sobre j. Caso $j = 1$ e $i \in \mathbb{Z}_+$, a afirmação segue da definição de $\gamma_{i+1}(G)$. Caso $j > 1$ e $i \in \mathbb{Z}_+$, suponhamos, pela hipótese de indução que $[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] \subseteq \gamma_{i+j}(G), \forall i \in \mathbb{Z}_+$, observemos que $[\gamma_i(G), \gamma_{j+1}(G)] = [\gamma_{j+1}(G), \gamma_i(G)] = [\gamma_j(G), G, \gamma_i(G)]$. Pelo Lema 1.26 (p. 18) (Lema dos Três Subgrupos), para mostrarmos que

$[\gamma_j(G), G, \gamma_i(G)] \subseteq \gamma_{i+j+1}(G)$, como $\gamma_{i+j+1}(G) \lhd G$ pela Proposição 1.10 a) (p. 14), basta mostrarmos que

$$[G, \gamma_i(G), \gamma_j(G)] \subseteq \gamma_{i+j+1}(G) \quad \text{e} \quad [\gamma_i(G), \gamma_j(G), G] \subseteq \gamma_{i+j+1}(G).$$

Por um lado, usando a hipótese de indução, temos que

$$[\gamma_i(G), \gamma_j(G), G] = [[\gamma_i(G), \gamma_j(G)], G] = [\gamma_{i+j}(G), G] = \gamma_{i+j+1}(G).$$

E, por outro lado, usando novamente a hipótese de indução, segue que

$$[G, \gamma_i(G), \gamma_j(G)] = [[G, \gamma_i(G)], \gamma_j(G)] = [[\gamma_i(G), G], \gamma_j(G)] = [\gamma_{i+1}(G), \gamma_j(G)] \subseteq \gamma_{i+j+1}(G).$$

□

Lema 1.27. *Sejam G um grupo e $G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \ldots$ a série central descendente de G. Dados $n, s \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ e $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_s, a, b \in G$, temos que*

$$[c_1, \ldots, c_n, ab, d_1, \ldots, d_s] \in [c_1, \ldots, c_n, a, d_1, \ldots, d_s] \cdot [c_1, \ldots, c_n, b, d_1, \ldots, d_s]\gamma_{s+n+2}(G).$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre s.

Caso $s = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, pelo Corolário 1.3 a) (p. 17), segue que

$$[c_1, \ldots, c_n, ab] =$$

$$[c_1, \ldots, c_n, b][c_1, \ldots, c_n, a][c_1, \ldots, c_n, a, b] \in [c_1, \ldots, c_n, b][c_1, \ldots, c_n, a]\gamma_{n+2}(G),$$

logo, pelo Lema 1.23 a) (p. 16),

$$[c_1, \ldots, c_n, ab] \in [c_1, \ldots, c_n, a][c_1, \ldots, c_n, b]\gamma_{n+2}(G).$$

Para o caso $s > 0$ e para todo $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, definamos

$$\omega := [c_1, \ldots, c_n, ab, d_1, \ldots, d_s], \qquad \omega_1 := [c_1, \ldots, c_n, a, d_1, \ldots, d_{s-1}],$$
$$\omega_2 := [c_1, \ldots, c_n, b, d_1, \ldots, d_{s-1}]. \tag{1.3}$$

Pela hipótese de indução,

$$[c_1, \ldots, c_n, ab, d_1, \ldots, d_{s-1}] = [c_1, \ldots, c_n, a, d_1, \ldots, d_{s-1}][c_1, \ldots, c_n, b, d_1, \ldots, d_{s-1}]\beta,$$

onde $\beta \in \gamma_{s+n+1}(G)$. Daí que $\omega = [\omega_1\omega_2\beta, d_s]$. Pelo Lema 1.24 b) (p. 17) e pela Proposição 1.12 (p. 18), temos que

$$\omega = [\omega_1\omega_2\beta, d_s] = [\omega_1\omega_2, d_s][\omega_1\omega_2, d_s, \beta][\beta, d_s] \in$$
$$[\omega_1\omega_2, d_s][\gamma_{n+s}(G), G, \gamma_{n+s+1}(G)][\gamma_{n+s+1}(G), G] \subseteq [\omega_1\omega_2, d_s]\gamma_{2(n+s+1)}(G)\gamma_{n+s+2}(G) \subseteq$$
$$[\omega_1\omega_2, d_s]\gamma_{n+s+2}(G).$$

Novamente pelo Lema 1.24 b) (p. 17), concluímos que

$$[\omega_1\omega_2, d_s] = [\omega_1, d_s][\omega_1, d_s, \omega_2][\omega_2, d_s],$$

onde $[\omega_1, d_s, \omega_2] \in [\gamma_{n+s}(G), G, \gamma_{n+s}(G)] \subseteq \gamma_{2(n+s)+1}(G)$ pela Proposição 1.12 (p. 18). Daí que

$$[\omega_1\omega_2, d_s] \in [\omega_1, d_s][\omega_2, d_s]\gamma_{2(n+s)+1}(G),$$

pois $\gamma_{2(n+s)+1}(G) \lhd G$ e, portanto,

$$\omega \in [\omega_1\omega_2, d_s]\gamma_{n+s+2}(G) \subseteq [\omega_1, d_s][\omega_2, d_s]\gamma_{2(n+s)+1}(G)\gamma_{n+s+2}(G) \subseteq [\omega_1, d_s][\omega_2, d_s]\gamma_{n+s+2}(G).$$

Substituindo $\omega, \omega_1, \omega_2$ como em (1.3) (p. 19), obtemos o resultado desejado. □

1.1.3 Ações de Grupos sobre Conjuntos e sobre Grupos

Ações de Grupos sobre Conjuntos

Notação 1.5. Seja X um conjunto não-vazio. Denotaremos por $Perm(X)$ o grupo de permutações[2] de X.

Definição 1.8. *Sejam G, H grupos. Um* ***anti-homomorfismo de*** *G* ***em*** *H é uma função $\varphi : G \to H$ tal que $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_2)\varphi(g_1)$, para todos $g_1, g_2 \in G$.*

Definição 1.9. *Sejam X um conjunto não-vazio e F um grupo. Dizemos que F* ***age à direita sobre*** *X se existe um anti-homomorfismo de grupos $\alpha : F \to Perm(X)$, denominado ação à direita de F sobre X (observe que $\alpha(f)$ é uma bijeção de X). Denotaremos $\alpha(f)(x)$ por x^f, $\forall f \in F$ e $\forall x \in X$.*

Observação 1.1. Sejam X um conjunto não-vazio e F um grupo agindo à direita sobre X. Temos, então, as seguintes regras:

$$x^{1_F} = x, \quad (x^{f_1})^{f_2} = x^{f_1 f_2} \quad \text{e} \quad (x^f)^{f^{-1}} = (x^{f^{-1}})^f = x,$$

para todos $f_1, f_2, f \in F, x \in X$.

Sejam X um conjunto não-vazio e F um grupo. Dizemos também que F age à esquerda sobre X se existe um homomorfismo de grupos $\beta : F \to Perm(X)$, denominado ação à esquerda de F sobre X. Denotamos $\beta(f)(x)$ por ${}^f x$, $\forall f \in F$ e $\forall x \in X$.

Neste caso, com relação às regras descritas na Observação 1.1 (p. 20), dados $f_1, f_2 \in F$ e $x \in X$, temos que ${}^{f_1 f_2}x = {}^{f_1}({}^{f_2}x)$. As demais regras na Observação 1.1 (p. 20) valem de forma idêntica para a ação à esquerda.

Outro fato a se observar é que, sendo $\beta : F \to Perm(X)$ uma ação à esquerda de F sobre X, podemos obter $\alpha : F \to Perm(X)$, que é uma ação à direita de F sobre X, bastando para isso que definamos

$$\alpha(f)(x) := \beta(f^{-1})(x), \text{ isto é, } x^f := {}^{f^{-1}}x.$$

Analogamente, obtemos de uma ação à direita uma outra ação à esquerda.

Nesta Dissertação,

toda ação de um grupo sobre um conjunto não-vazio será à direita.

Proposição 1.13. *Sejam X um conjunto não-vazio e F um grupo. Então, F age à direita sobre X se, e somente se, existe uma função $\boldsymbol{a} : X \times F \to X$ tal que, $\forall x \in X$ e $f, f_1, f_2 \in F$,*

i) $\boldsymbol{a}(x, 1_F) = x$;

ii) $\boldsymbol{a}(x, f_1 f_2) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}(x, f_1), f_2)$.

[2] Uma permutação de X é uma bijeção $\alpha : X \to X$.

Demonstração. Caso F aja à direita sobre X, definamos $\boldsymbol{a} : X \times F \to X$ por $\boldsymbol{a}(x, f) := x^f$. Pela Observação 1.1 (p. 20), temos que a satisfaz *i)* e *ii)* do enunciado. Reciprocamente, caso exista uma função $\boldsymbol{a} : X \times F \to X$ satisfazendo *i)* e *ii)* do enunciado, definamos $\alpha : F \to Perm(X)$ por $\alpha(f)(x) := \boldsymbol{a}(x, f)$. Vamos mostrar primeiramente que $\alpha(f) \in Perm(X), \forall f \in F$. O que equivale a mostrar que $\alpha(f)$ é uma bijeção de X, $\forall f \in F$. Dado $x \in X$,

$$\alpha(f^{-1})\alpha(f)(x) = \alpha(f^{-1})(\boldsymbol{a}(x, f)) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}(x, f), f^{-1}) = \boldsymbol{a}(x, ff^{-1}) = \boldsymbol{a}(x, 1_F) = x =$$

$$= \boldsymbol{a}(x, 1_F) = \boldsymbol{a}(x, f^{-1}f) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}(x, f^{-1}), f) = \alpha(f)(\boldsymbol{a}(x, f^{-1})) = \alpha(f)\alpha(f^{-1})(x),$$

logo $\alpha(f^{-1})$ é a inversa de $\alpha(f)$, isto é, $\alpha(f)^{-1} = \alpha(f^{-1})$. Agora, precisamos mostrar que α é anti-homomorfismo de grupos. Dados $f_1, f_2 \in F$ e $x \in X$, segue que

$$\alpha(f_1f_2)(x) = \boldsymbol{a}(x, f_1f_2) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}(x, f_1), f_2) = \alpha(f_2)(\boldsymbol{a}(x, f_1)) = \alpha(f_2)\alpha(f_1)(x).$$

Assim, α, de fato, é anti-homomorfismo de grupos e, por definição, F age sobre X. □

Definição 1.10. *Sejam X um conjunto não-vazio e F um grupo agindo à direita sobre X. Dizemos que F* ***age trivialmente à direita sobre*** *X se $x^f = x, \forall x \in X, f \in F$.*

Notação 1.6. Sejam X um conjunto não-vazio, Y um subconjunto de X e F um grupo agindo à direita sobre X. Então, dado $f \in F$,

$$Y^f := \{y^f \in X : y \in Y\}.$$

Definição 1.11. *Sejam X um subconjunto não-vazio, Y um subconjunto de X e F um grupo agindo à direita sobre X. Dizemos que o subconjunto Y* ***é F-invariante*** *se Y for invariante pela ação à direita de F sobre X, isto é, $Y^f \subseteq Y$, para todo $f \in F$.*

Proposição 1.14. *Sejam X um conjunto não-vazio, Y um subconjunto de X e F um grupo agindo à direita sobre X. Se o subconjunto Y é F-invariante, então $Y = Y^f$, para todo $f \in F$.*

Demonstração. Como Y é F-invariante, temos que $Y^f \subseteq Y, \forall f \in F$, logo $Y^{f^{-1}} \subseteq Y$, o que implica que $Y = Y^{f^{-1}f} = (Y^{f^{-1}})^f \subseteq Y^f$, ou seja, $Y = Y^f, \forall f \in F$. □

Ações de Grupos sobre Grupos

Notação 1.7. Seja G um grupo. Denotaremos por $Aut(G)$ o grupo de automorfismos de G.

Definição 1.12. *Sejam G, F grupos. Dizemos que F* ***age à direita sobre*** *G se existe um anti-homomorfismo de grupos $\alpha : F \to Aut(G)$, denominado ação à direita de F sobre G (observe que $\alpha(f)$ é automorfismo de G). Denotaremos $\alpha(f)(g)$ por g^f, $\forall f \in F$ e $\forall g \in G$.*

Observação 1.2. Sejam G um grupo e F um grupo agindo à direita sobre G. Temos, então, as seguintes regras:

$$g^{1_F} = g, \quad (g^{f_1})^{f_2} = g^{f_1f_2}, \quad (g_1g_2)^f = (g_1^f)(g_2^f), \quad (g^f)^{f^{-1}} = (g^{f^{-1}})^f = g, \quad \text{e} \quad (g^{-1})^f = (g^f)^{-1},$$

para todos $f_1, f_2, f \in F, g, g_1, g_2 \in G$.

Sejam G, F grupos. Dizemos também que F age à esquerda sobre G se existe um homomorfismo de grupos $\beta : F \to Aut(G)$, denominado ação à esquerda de F sobre G. Denotamos $\beta(f)(g)$ por ${}^{f}g$, $\forall f \in F$ e $\forall g \in G$.

Neste caso, com relação às regras descritas na Observação 1.2 (p. 21), dados $f_1, f_2 \in F$ e $g \in G$, temos que ${}^{f_1 f_2}g = {}^{f_1}({}^{f_2}g)$. As demais regras na Observação 1.2 (p. 21) valem de forma idêntica para a ação à esquerda.

Outro fato a se observar é que, sendo $\beta : F \to Aut(G)$ uma ação à esquerda de F sobre G, podemos obter $\alpha : F \to Aut(G)$, que é uma ação à direita de F sobre G, bastando para isso que definamos

$$\alpha(f)(g) := \beta(f^{-1})(g), \text{ isto é, } g^f := {}^{f^{-1}}g.$$

Analogamente, obtemos de uma ação à direita uma outra ação à esquerda.

Nesta Dissertação,

toda ação de um grupo sobre outro grupo será à direita.

Exemplo 1.1. Sejam G um grupo e F um subgrupo de G. A conjugação à direita de elementos de G por elementos de F, isto é, $g^f := f^{-1}gf, \forall f \in F, g \in G$ é uma ação à direita de F sobre G. Dizemos que F age à direita sobre G via conjugação à direita.

Proposição 1.15. *Sejam G, F grupos. Então, F age à direita sobre G se, e somente se, existe uma função $\boldsymbol{a} : G \times F \to G$ tal que, $\forall g, g_1, g_2 \in G$ e $f, f_1, f_2 \in F$,*

i) $\boldsymbol{a}(g, 1_F) = g$

ii) $\boldsymbol{a}(g, f_1 f_2) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}(g, f_1), f_2)$;

iii) $\boldsymbol{a}(g_1 g_2, f) = \boldsymbol{a}(g_1, f)a(g_2, f)$;

Demonstração. Caso F aja à direita sobre G, definamos $\boldsymbol{a} : G \times F \to G$ por $\boldsymbol{a}(g, f) := g^f$. Pela Observação 1.2 (p. 21), temos que $\boldsymbol{a}$ satisfaz *i)*, *ii)* e *iii)* do enunciado. Reciprocamente, caso exista uma função $\boldsymbol{a} : G \times F \to G$ satisfazendo *i)*, *ii)* e *iii)* do enunciado, definamos $\alpha : F \to Aut(G)$ por $\alpha(f)(g) = \boldsymbol{a}(g, f)$. Para mostrarmos que α é um anti-homomorfismo de grupos, pela Demonstração da Proposição 1.13 (p. 20), basta mostrarmos que, $\forall f \in F$, $\alpha(f)$ é homomorfismo de grupos. Sendo assim, dados $f_1, f_2 \in F$ e $g \in G$, segue que

$$\alpha(f_1 f_2)(g) = \boldsymbol{a}(g, f_1 f_2) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}(g, f_1), f_2) = \alpha(f_2)(\boldsymbol{a}(g, f_1)) = \alpha(f_2)\alpha(f_1)(g).$$

Portanto, α, de fato, é anti-homomorfismo de grupos e, por definição, F age sobre G. □

Definição 1.13. *Sejam G um grupo e F um grupo agindo à direita sobre G. Dizemos que F* ***age trivialmente à direita sobre*** *G se $g^f = g, \forall g \in G, f \in F$.*

Definição 1.14. *Sejam G um grupo, F_1 um grupo agindo à direita sobre G e F_2 um grupo agindo à direita sobre F_1 e sobre G. Dizemos que* ***a ação à direita de*** *F_2* ***é compatível com a ação à direita de*** *F_1* ***sobre*** *G se, dados $g \in G, f_1 \in F_1$ e $f_2 \in F_2$,*

$$(g^{f_1})^{f_2} = (g^{f_2})^{f_1^{f_2}}.$$

Exemplo 1.2. Sejam G um grupo, F_1 um grupo agindo à direita sobre G via conjugação à direita e F_2 um grupo agindo à direita sobre F_1 e sobre G via conjugação à direita. Temos, então, que a ação à direita de F_2 é compatível com a ação à direita de F_1 sobre G.

Proposição 1.16. *Sejam G um grupo, $Hom(G,\mathbf{R})$ visto como grupo munido da operação $(v_1+v_2)(g)=v_1(g)+v_2(g), \forall g\in G, v_1,v_2\in Hom(G,\mathbf{R})$ e F um grupo agindo à direita sobre G. Então, F age à direita sobre $Hom(G,\mathbf{R})$ através da seguinte ação:*

$$v^f(g)=v(g^{f^{-1}}),$$

para todo $g\in G, f\in F, v\in Hom(G,\mathbf{R})$.

Demonstração. Definindo-se $\boldsymbol{a}: Hom(G,\mathbf{R})\times F\to Hom(G,\mathbf{R})$ por $\boldsymbol{a}(v,f)(g)=v^f(g)=v(g^{f^{-1}})$, pela Proposição 1.15 (p. 22), basta mostrar os seguintes itens:

i) $v^{1_F}=v, \forall v\in Hom(G,\mathbf{R})$;

ii) $(v^{f_1})^{f_2}=v^{f_1f_2}, \forall f_1,f_2\in F, v\in Hom(G,\mathbf{R})$;

iii) $(v_1+v_2)^f=v_1^f+v_2^f, \forall f\in F, v_1,v_2\in Hom(G,\mathbf{R})$.

Façamos, então, a demonstração de i), ii) e iii) a seguir.

i) Dados $v\in Hom(G,\mathbf{R})$ e $g\in G$, $v^{1_F}(g)=v(g^{1_F^{-1}})=v(g)$. Logo, $v^{1_F}=v$.

ii) Dados $v\in Hom(G,\mathbf{R})$, $f_1,f_2\in F$ e $g\in G$, temos que $(v^{f_1})^{f_2}(g)=(v^{f_1})(g^{f_2^{-1}})=v((g^{f_2^{-1}})^{f_1^{-1}})=v(g^{f_2^{-1}f_1^{-1}})=v(g^{(f_1f_2)^{-1}})=v^{f_1f_2}(g)$. Logo, $(v^{f_1})^{f_2}=v^{f_1f_2}$.

iii) Dados $v_1,v_2\in Hom(G,\mathbf{R})$, $f\in F$ e $g\in G$, segue que $(v_1+v_2)^f(g)=(v_1+v_2)(g^{f^{-1}})=v_1(g^{f^{-1}})+v_2(g^{f^{-1}})=v_1^f(g)+v_2^f(g)=(v_1^f+v_2^f)(g)$. Portanto, $(v_1+v_2)^f=v_1^f+v_2^f$.

□

Lema 1.28. *Sejam G um grupo, $H\lhd G$ e F um grupo agindo à direita sobre G. Então, $H^f\lhd G, \forall f\in F$.*

Demonstração. O resultado segue do fato de que, para todo $f\in F$, a ação de f sobre G é isomorfismo de grupos. □

Lema 1.29. *Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e F um grupo agindo à direita sobre G. Se $[G:H]<\infty$, então $[G:H^f]<\infty, \forall f\in F$.*

Demonstração. Seja $\alpha: F\to Aut(G)$ a ação à direita de F sobre G. Temos, então, que, dado $f\in F$, $\alpha(f)(G)=G$, isto é, $G^f=G, \forall f\in F$. Por hipótese, $[G:H]<\infty$, logo, pela Proposição 1.4 (p. 8), temos que $[\alpha(f)(G):\alpha(f)(H)]<\infty, \forall f\in F$, isto é, $[G:H^f]<\infty, \forall f\in F$. □

Lema 1.30. *Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e F um grupo agindo à direita sobre G. Então, $H_0:=\bigcap_{f\in F} H^f$ é F-invariante.*

Demonstração. Dado $f_0 \in F, H_0^{f_0} = (\bigcap_{f\in F} H^f)^{f_0} = \bigcap_{f\in F} H^{ff_0} = \bigcap_{ff_0\in F} H^{ff_0} = \bigcap_{\gamma\in F} H^{\gamma} = H_0$, onde $\gamma = ff_0$. Portanto, H_0 é F-invariante. □

Proposição 1.17. *Sejam G um grupo, $H \lhd G$ e F um grupo agindo à direita sobre G. Se H é F-invariante, então existe ação à direita de F sobre G/H, definida por*

$$(gH)^f := g^f H, \tag{1.4}$$

para todo $f \in F$ e para toda classe lateral $gH \in G/H$.

Demonstração. Vamos mostrar que a ação definida em (1.4) (p. 24) está bem definida. Primeiramente, temos que $g^f H \in G/H$, uma vez que que $g^f \in G$, pois F age à direita sobre G. Agora, dados $g_1H, g_2H \in G/H$, se $g_1H = g_2H$, então $g_2^{-1}g_1 \in H$ e, como H é F-invariante, $(g_2^{-1}g_1)^f \in H, \forall f \in F$, portanto $(g_2^{-1}g_1)^f = (g_2^{-1})^f g_1^f = (g_2^f)^{-1}g_1^f \in H$ e, assim, $g_1^f H = g_2^f H$. Resta mostrar que em (1.4) (p. 24) temos de fato uma ação. Definamos $\boldsymbol{a} : G/H \times F \to G/H$ por $\boldsymbol{a}(gH, f) = (gH)^f$, para toda classe lateral $gH \in G/H$. Pela Proposiçao 1.15 (p. 22) basta mostrarmos que $\boldsymbol{a}$ satisfaz i), ii) e iii) dessa mesma Proposição. É o que faremos a seguir, dados $f_1, f_2, f \in F$ e $g_1, g_2, g \in G$.

i) $\boldsymbol{a}(gH, 1_F) = (gH)^{1_F} = g^{1_F}H = gH$.

ii) $\boldsymbol{a}(gH, f_1f_2) = (gH)^{f_1f_2} = g^{f_1f_2}H = (g^{f_1})^{f_2}H = (g^{f_1}H)^{f_2} = ((gH)^{f_1})^{f_2} = \boldsymbol{a}((gH)^{f_1}, f_2) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}(gH, f_1), f_2)$.

iii) $\boldsymbol{a}(g_1H \cdot g_2H, f) = \boldsymbol{a}(g_1g_2H, f) = (g_1g_2H)^f = (g_1g_2)^f H = g_1^f g_2^f H = g_1^f H \cdot g_2^f H = \boldsymbol{a}(g_1H, f)\boldsymbol{a}(g_2H, f)$.

□

1.1.4 Alguns Resultados sobre Grupos Finitamente Gerados

Definição 1.15. *Seja G um grupo. Dizemos que G é um **grupo finitamente gerado** se existe um subconjunto finito X de G tal que $G = \langle X\rangle$, isto é,*

$$G = \{x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} \in G : n \text{ percorre o conjunto } \mathbb{Z}_+, x_j \in X \text{ e } \varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}, \text{ com } 1 \le j \le n\}.$$

*Neste caso, dizemos que G **é grupo finitamente gerado por** X, ou que o **subconjunto finito** X **gera o grupo** G, ou ainda que X **é um conjunto finito de geradores do grupo** G.*

Proposição 1.18. *Sejam G, H grupos e $\varphi : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Se G é grupo finitamente gerado, então $\varphi(G)$ é grupo finitamente gerado. Em particular, se $H \lhd G$ e G é um grupo finitamente gerado, então G/H é um grupo finitamente gerado.*

Demonstração. Sejam $n \in \mathbb{Z}_+$ e $X = \{g_1, \dots, g_n\}$ um conjunto finito de geradores do grupo G. Então, $G = \langle g_1, \dots, g_n\rangle$ e, portanto, $\varphi(G) = \varphi(\langle g_1, \dots, g_n\rangle) = \langle \varphi(g_1), \dots, \varphi(g_n)\rangle$. De fato, dado $h \in \varphi(G)$, temos que $h = \varphi(g)$, para algum $g \in G$. Como G é grupo gerado pelo subconjunto finito X, segue que $g = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_s}^{\varepsilon_s}$, onde $s \in \mathbb{Z}_+$, $\varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}$ e $i_j \in$

$\{1,\ldots,n\}$, com $1 \leq j \leq s$. Daí que, $h = \varphi(g) = \varphi(g_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots g_{i_s}^{\varepsilon_s}) = \varphi(g_{i_1})^{\varepsilon_1} \ldots \varphi(g_{i_s})^{\varepsilon_s}$. Assim, $\{\varphi(g_1),\ldots,\varphi(g_n)\}$ é um conjunto finito de geradores de $\varphi(G)$ e, portanto, $\varphi(G)$ é finitamente gerado.

Se $H \lhd G$ e G é um grupo finitamente gerado, basta aplicar o resultado acima para o homomorfismo de grupos projeção canônica $\pi : G \twoheadrightarrow G/H$, que é epimorfismo de grupos. □

Lema 1.31. *Sejam G um grupo, $H \lhd G$ e X um subconjunto de G. Se $G/H = \langle\{xH \in G/H : x \in X\}\rangle$, então $G = \langle X \cup H\rangle$.*

Demonstração. Seja $\pi : G \twoheadrightarrow G/H$ o homomorfismo de grupos projeção canônica. Dado $g \in G$, temos que $\pi(g) = gH = (x_1H)^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot (x_rH)^{\varepsilon_r} = x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_r^{\varepsilon_r}H$, onde $r \in \mathbb{Z}_+, \varepsilon_j \in \{-1,0,1\}, x_j \in X$ e $1 \leq j \leq r$, o que implica que $g^{-1}x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_r^{\varepsilon_r} \in H$, logo existe $h_0 \in H$ tal que $g^{-1}x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_r^{\varepsilon_r} = h_0$ e, portanto, $g = x_1^{\varepsilon_1} \ldots x_r^{\varepsilon_r}h_0^{-1} \in \langle X \cup H\rangle$. Como $g \in G$ foi tomado arbitrário e $\langle X \cup H\rangle \subseteq G$, segue que $G = \langle X \cup H\rangle$. □

Corolário 1.4. *Sejam G um grupo, $H \lhd G$, X um subconjunto de G e $\pi : G \twoheadrightarrow G/H$ o homomorfismo de grupos projeção canônica. Então, $G/H = \langle\{xH \in G/H : x \in X\}\rangle = \langle\pi(X)\rangle$ se, e somente se, $G = \langle X\rangle H$.*

Demonstração. Caso $G/H = \langle\{xH \in G/H : x \in X\}\rangle = \langle\pi(X)\rangle$, pelo Lema 1.31 (p. 25), segue que $G = \langle X \cup H\rangle = \langle\langle X\rangle \cup H\rangle$. Como $H \lhd G$, temos que $\langle X\rangle H$ é subgrupo de G, logo $\langle X\rangle H = \langle\langle X\rangle \cup H\rangle$. Portanto, $G = \langle X\rangle H$.

Agora, se $G = \langle X\rangle H$, então $G/H = \pi(G) = \pi(\langle X\rangle H) = \langle\pi(X)\rangle\pi(H) = \langle\pi(X)\rangle\mathbf{1} = \langle\pi(X)\rangle$. □

Proposição 1.19. *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G tal que $[G : H] < \infty$. Se H é um grupo finitamente gerado, então G é um grupo finitamente gerado.*

Demonstração. Suponhamos que H seja um grupo finitamente gerado. Então, existe um subconjunto finito Y de H tal que $H = \langle Y\rangle$. Por hipótese, $[G : H] < \infty$, logo $G = \bigcup_{t\in T}^{\bullet} Ht$, onde T é um subconjunto de G e $|T| < \infty$ (T é transversal à direita de H em G). Daí que, $G = \langle Y \cup T\rangle$, pois, dado $g \in G$, segue que existe um único $t_0 \in T$ tal que $g \in Ht_0$, logo $g = ht_0$, para algum $h \in H$, e como $H = \langle Y\rangle$, temos que $h = y_1^{\varepsilon_1} \ldots y_s^{\varepsilon_s}$, onde $s \in \mathbb{Z}_+$, $\varepsilon_j \in \{-1,0,1\}$ e $y_j \in Y$, com $1 \leq j \leq s$, ou seja, $g = y_1^{\varepsilon_1} \ldots y_s^{\varepsilon_s}t_0$ e, portanto, $g \in \langle Y \cup T\rangle$. Como $g \in G$ foi tomado arbitrário, segue que $G \subseteq \langle Y \cup T\rangle$. E como $Y, T \subseteq G$, temos que $G = \langle Y \cup T\rangle$. Mas, Y e T são conjuntos finitos, daí que G é um grupo finitamente gerado. □

1.1.5 Alguns Resultados sobre Grupos Abelianos Finitamente Gerados

Nesta Subseção Q **denotará um grupo abeliano finitamente gerado**.

Definição 1.16. *Seja F um grupo abeliano. Dizemos que F é um **grupo abeliano livre** se existe um subconjunto X de F de elementos de ordem infinita, denominado **base de** F tal que*

$$F = \bigoplus_{x\in X}\langle x\rangle.$$

Temos, então, que $F \cong \bigoplus_{x \in X} \mathbf{Z}_x$, *onde* $\mathbf{Z}_x \cong \mathbf{Z}, \forall x \in X$. *Um grupo abeliano livre com base* X *pode ser definido com propriedade universal como na Definição 1.20 (p. 27), onde* G *e* H *desta definição são abelianos.*

Teorema 1.5 (Teorema Fundamental da Teoria de Grupos Abelianos Finitamente Gerados)**.** *Seja* Q *um grupo abeliano finitamente gerado. Então,* $K := \{q \in Q : |q| < \infty\}$ *é um grupo finito e* $Q = F \oplus K$, *onde* F *é um grupo abeliano livre tal que* $F \cong \mathbf{Z}^n$, *para algum* $n \in \mathbb{Z}_+$, *e* $F \cong Q/K$.

Demonstração. (Ver [19, Theorem 10.20 (Fundamental Theorem), p. 319].) □

Definição 1.17. *Seja* Q *um grupo abeliano finitamente gerado. Pelo Teorema 1.5 (p. 26), sabemos que* $Q \cong \mathbf{Z}^n \oplus K$, *onde* $K = \{q \in Q : |q| < \infty\}$. *O número inteiro positivo* n *é chamado de* ***posto livre de torção de*** Q.

Proposição 1.20. *Sejam* Q *um grupo abeliano finitamente gerado. Então, todo subgrupo de* Q *é abeliano finitamente gerado.*

Demonstração. Seja Q_0 um subgrupo de Q. Como Q é um grupo abeliano, é óbvio que Q_0 é também um grupo abeliano. Resta mostrar que Q_0 é um grupo finitamente gerado.

Como Q é um grupo finitamente gerado, existe um subconjunto finito X de Q tal que $Q = \langle X \rangle$. Vamos concluir a demonstração da Proposição através de indução pela cardinalidade de X. Seja $Q_1 = \langle x_1 \rangle$, onde $x_1 \in X$. Segue que $Q_0 \cap Q_1$ é subgrupo de Q_1, e como Q_1 é grupo cíclico, temos que $Q_0 \cap Q_1$ é também grupo cíclico e, portanto, finitamente gerado. Como Q é grupo abeliano, segue que $Q_1 \lhd Q$. Seja $\pi : Q \twoheadrightarrow Q/Q_1$ o homomorfismo de grupos projeção canônica. Temos que $Q/Q_1 = \left\langle \{xQ_1 \in Q/Q_1 : x \in X \backslash \{x_1\}\} \right\rangle$. Além disso, pelo Lema 1.3 (p. 4), $Q_0 \cap Q_1 \lhd Q_0$ e, pelo Teorema 1.2 (p. 3) (2º Teorema de Isomorfismo para Grupos), $Q_0/Q_0 \cap Q_1 \cong Q_0Q_1/Q_1 \leq Q/Q_1$. Como Q/Q_1 é grupo abeliano pela Proposição 1.6 (p. 9) e tem $|X| - 1$ geradores, pela hipótese de indução, cada subgrupo de Q/Q_1 é finitamente gerado, logo Q_0Q_1/Q_1 é subgrupo finitamente gerado e, portanto, pela Proposição 1.18 (p. 24), $Q_0/Q_0 \cap Q_1$ é grupo finitamente gerado. Como $Q_0 \cap Q_1$ é grupo finitamente gerado, concluímos, pelo Lema 1.31 (p. 25), que Q_0 é grupo finitamente gerado. □

Definição 1.18. *Um grupo* G *é dito* ***limitado*** *se existe* $s \in \mathbb{Z}_+$ *tal que* $G^s = \{g^s : g \in G\} = \mathbf{1}$, *isto é,* $\forall g \in G, |g| \mid s$.

Definição 1.19. *Seja* G *um grupo. Uma* ***seção*** *de* G *é um grupo quociente* G_1/G_2, *onde* G_1, G_2 *são subgrupos de* G *e* $G_2 \lhd G_1$.

Proposição 1.21. *Seja* Q *um grupo abeliano finitamente gerado. Então, toda seção limitada de* Q *é finita, isto é, é um grupo finito.*

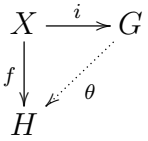
Demonstração. Seja Q_1/Q_2 uma seção de Q. Como Q é abeliano finitamente gerado, pela Proposição 1.20 (p. 26), segue que Q_1 é abeliano finitamente gerado, daí que, pela Proposição 1.18 (p. 24) e pela Proposição 1.6 (p. 9), Q_1/Q_2 também é abeliano finitamente gerado. Pelo Teorema 1.5 (p. 26), $Q_1/Q_2 = F \oplus K$, onde $K = \{x \in Q_1/Q_2 : |x| < \infty\}$ é um grupo finito, F é um grupo abeliano livre e $F \cong Q/K$. Como Q_1/Q_2 é seção limitada por hipótese, segue que $Q_1/Q_2 \subseteq K$, logo $Q_1/Q_2 = K$. Daí que Q_1/Q_2 é seção finita. □

1.1.6 Alguns Resultados sobre Grupos Finitamente Apresentáveis

Grupos Livres

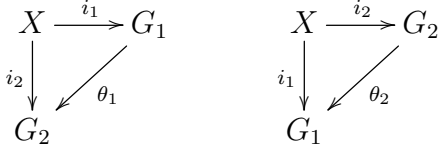
A noção de Grupo Livre é importante neste trabalho, pois é a base para explicar o conceito de Extensão HNN, que, por sua vez, faz parte da definição de Grupo Construtível. Adiante nesta Dissertação apresentaremos um resultado que relaciona grupos construtíveis e o invariante geométrico Σ de Bieri-Strebel. Tal resultado é uma ferramenta muito importante para obtenção do resultado principal desta Dissertação, obtido do artigo [14].

Definição 1.20. *Seja X um conjunto. Um* ***grupo livre com base*** *X é um par ordenado (G, i), onde G é um grupo e $i : X \to G$ é uma função, sendo esse par solução do seguinte problema universal: para cada grupo H e função $f : X \to H$, existe um único homomorfismo de grupos $\theta : G \to H$ tal que $\theta i(x) = f(x), \forall x \in X$, isto é, o seguinte diagrama é comutativo:*

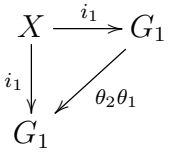


Teorema 1.6. *Sejam X um conjunto e $(G_1, i_1), (G_2, i_2)$ dois grupos livres com a mesma base X. Então, existe um único isomorfismo de grupos η entre G_1 e G_2 tal que $\eta i_1 = i_2$. Reciprocamente, sendo ainda X um conjunto, sejam (G, i) grupo livre com base X e H um grupo. Se $\eta : G \to H$ é um isomorfismo de grupos, então $(H, \eta i)$ é grupo livre com base X.*

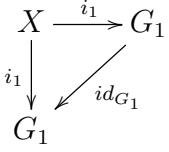
Demonstração. Pela propriedade universal da definição de grupo livre temos os seguintes diagramas comutativos:



isto é, existem únicos homomorfismos de grupos $\theta_1 : G_1 \to G_2$ e $\theta_2 : G_2 \to G_1$ tais que $\theta_1 i_1 = i_2$ e $\theta_2 i_2 = i_1$. Logo, $(\theta_2\theta_1)i_1 = \theta_2(\theta_1 i_1) = \theta_2 i_2 = i_1$, ou seja, $\theta_2\theta_1$ torna o seguinte diagrama comutativo:



Mas, $id_{G_1} : G_1 \to G_1$ é também homomorfismo de grupos que torna esse mesmo diagrama comutativo, pois $id_{G_1} i_1 = i_1$, isto é,



Pela unicidade na propriedade universal do grupo livre (G_1, i_1) temos que $\theta_2\theta_1 = id_{G_1}$. E, de forma análoga ao que foi feito acima, segue que $\theta_1\theta_2 = id_{G_2}$. Assim, definindo-se $\eta := \theta_1$,

resulta que G_1 e G_2 são isomorfos como grupos, sendo $\eta = \theta_1$ o isomorfismo entre eles, e $\eta i_1 = i_2$. Concluímos, portanto, que os grupos livres (G_1, i_1) e (G_2, i_2) são isomorfos.

Para demonstrar a afirmação recíproca, precisamos mostrar que, para cada grupo $\tilde{H}$ e uma função $f : X \to \tilde{H}$, existe um único homomorfismo de grupos $\mu : H \to \tilde{H}$ tal que $\mu(\eta i) = f$, isto é, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta i} & H \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow_{\mu} & \\ \tilde{H} & & \end{array}$$

Como (G, i) é grupo livre com base X, temos que existe um único homomorfismo de grupos $\theta : G \to \tilde{H}$ tal que $\theta i = f$, ou seja, o subsequente diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & G \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow_{\theta} & \\ \tilde{H} & & \end{array}$$

Agora, tomando-se $\mu := \theta\eta^{-1}$, temos que $\theta\eta^{-1} : H \to \tilde{H}$ é um homomorfismo de grupos tal que $(\theta\eta^{-1})(\eta i) = \theta i = f$, isto é, $\theta\eta^{-1}$ satisfaz a propriedade universal requerida. Precisamos mostrar, então, a unicidade de um tal homomorfismo satisfazendo tal propriedade universal. Seja, então, $\mu' : H \to \tilde{H}$ homomorfismo de grupos tal que $\mu'(\eta i) = (\mu'\eta)i = f$, segue, pela unicidade de θ satisfazendo a propriedade universal, que $\mu'\eta = \theta$ e, portanto, $\mu' = (\mu'\eta)\eta^{-1} = \theta\eta^{-1} = \mu$. □

Proposição 1.22. *Sejam X um conjunto e (G, i) um grupo livre com base X. Então, i é uma função injetiva.*

Demonstração. Seja $\mathcal{G} = \{f : X \to \mathbb{Z} \mid f \text{ é uma função}\}$. Munindo $\mathcal{G}$ com a operação $+$ onde, dados $f, g \in \mathcal{G}$, definimos $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, temos, claramente, que $\mathcal{G}$ é grupo. Definamos, $\forall x \in X$, $f_x \in \mathcal{G}$ por $f_x(y) = 0$, se $y \neq x$ e $f_x(y) = 1$, se $y = x$, $\forall y \in X$. Agora, seja $f : X \to \mathcal{G}$ definida por $f(x) = f_x$. Observemos que f é função injetiva, pois, dados $x_1, x_2 \in X$, se $f(x_1) = f(x_2)$, então $f_{x_1} = f_{x_2}$, o que implica que $x_1 = x_2$. Pela propriedade universal para o grupo livre (G, i) temos que existe um único homomorfismo de grupos $\theta : G \to \mathcal{G}$ tal que $\theta i = f$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & G \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow_{\theta} & \\ \mathcal{G} & & \end{array}$$

Como f é função injetiva e $\theta i = f$, segue que i é também função injetiva. □

Sendo X um conjunto, faremos adiante a construção de um grupo livre com base X. Mostrando, assim, a existência de grupos livres.

Definição 1.21. *Seja X um conjunto. Definimos um* ***conjunto inverso***[3] *de X como sendo um conjunto X^{-1} tal que $X^{-1} \cap X = \emptyset$ e tal que exista uma bijeção $X \to X^{-1}$ denotada por $x \mapsto x^{-1}$.*

Definição 1.22. *Sejam X um conjunto, X^{-1} um conjunto inverso de X e $\{1\}$ um conjunto unitário disjunto de X e de X^{-1}. Chamamos de* ***alfabeto*** *o par ordenado $(X \cup X^{-1}, 1)$, onde $X \cup X^{-1}$ representa a união disjunta dos conjuntos X e X^{-1}.*

Definição 1.23. *Seja $(X \cup X^{-1}, 1)$ um alfabeto. Chamamos de* ***letras*** *os elementos $y \in X \cup X^{-1}$ e o elemento 1 pertencente ao conjunto unitário $\{1\}$.*

Definição 1.24. *Seja $(X \cup X^{-1}, 1)$ um alfabeto e $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. Uma* ***palavra não-vazia*** *w em $(X \cup X^{-1}, 1)$ de* ***comprimento*** *n é uma n-upla $w = (x_1, \ldots, x_n) \in (X \cup X^{-1})^n$, nesse caso $n \in \mathbb{Z}_+$; a* ***palavra vazia*** *em $(X \cup X^{-1}, 1)$ é a letra 1, cujo comprimento é definido como sendo 0, e uma* ***palavra*** *w em $(X \cup X^{-1}, 1)$ de comprimento n é uma palavra não-vazia, nesse caso $n \in \mathbb{Z}_+$, ou é a palavra vazia, neste caso $n = 0$. Em particular, se $y \in X \cup X^{-1}$ é uma letra, então y é uma palavra não-vazia em $X \cup X^{-1}$.*

Notação 1.8. Sejam $(X \cup X^{-1}, 1)$ um alfabeto e $n \in \mathbb{Z}_+$.

- Denotaremos o fato de uma palavra w em $(X \cup X^{-1}, 1)$ ter comprimento n por $|w| = n$ e denotaremos o comprimento 0 da palavra vazia por $|1| = 0$;
- Uma palavra não-vazia w em $(X \cup X^{-1}, 1)$, onde $w = (x_1, \ldots, x_n) \in (X \cup X^{-1})^n$, será denotada pela concatenação de elementos de $X \cup X^{-1}$, isto é, $w = x_1 x_2 \ldots x_n$;
- $\forall x \in X$, definiremos $x^1 := x$ e $x^0 := 1$.

Definição 1.25. *Seja $(X \cup X^{-1}, 1)$ um alfabeto. Denotamos por $M(X)$ o conjunto de todas as palavras (não-vazias e vazia) em $(X \cup X^{-1}, 1)$. Em particular, $X, X^{-1}, \{1\} \subseteq M(X)$.*

Observação 1.3. Sejam $(X \cup X^{-1}, 1)$ um alfabeto e $n, m \in \mathbb{Z}_+$.

- Dadas $w_1 = x_1 x_2 \ldots x_n$ e $w_2 = y_1 y_2 \ldots y_m$ duas palavras não-vazias em $(X \cup X^{-1}, 1)$, a concatenação $w_1 w_2$ forma uma nova palavra em $(X \cup X^{-1}, 1)$ cuja forma é $w_1 w_2 = x_1 x_2 \ldots x_n y_1 y_2 \ldots y_m$, onde, então, $|w_1 w_2| = |w_1| + |w_2|$. Definimos a concatenação da palavra vazia 1 com qualquer outra palavra w em $(X \cup X^{-1}, 1)$ por $w1 = w$ e $1w = w$. Em particular, se $w = 1$, então $11 = 1$. Definindo-se dessa forma, temos que, de fato, $|w1| = |w| + |1| = |w| + 0 = |w|$ e, analogamente, $|1w| = |w|$;
- Uma palavra w em $(X \cup X^{-1}, 1)$ pode ser denotada por uma concatenação de letras do alfabeto $(X \cup X^{-1}, 1)$, isto é, $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$, onde $\varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}$, $x_j \in X$ e $1 \leq j \leq n$. Em particular, a palavra vazia 1 também pode ser denotada dessa forma, sendo $1 = x_1^0 x_2^0 \ldots x_n^0$, para quaisquer $x_j \in X$ e $n \in \mathbb{Z}_+$, onde $1 \leq j \leq n$;

  Doravante, usaremos essa notação para uma palavra w em $(X \cup X^{-1}, 1)$.

[3] A existência de um tal conjunto é demonstrada em Teoria de Conjuntos e em Lógica Matemática.

- Dadas $w_1 = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ e $w_2 = y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}$ duas palavras em $(X \cup X^{-1}, 1)$, onde $\varepsilon_j, \delta_k \in \{-1, 0, 1\}$, $x_j, y_k \in X$, $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq m$, então $w_1 = w_2$ se, e somente se, $n = m$, $x_j = y_j$ e $\varepsilon_j = \delta_j$, com $1 \leq j \leq n$.

Definição 1.26. *Sejam $(X \cup X^{-1}, 1)$ um alfabeto e $n \in \mathbb{Z}_+$. A **inversa de uma palavra** $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n} \in M(X)$, onde $\varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}$, $x_j \in X$ e $1 \leq j \leq n$, é a palavra $w^{-1} = x_n^{-\varepsilon_n} \dots x_2^{-\varepsilon_2} x_1^{-\varepsilon_1}$.*

Observação 1.4. Seja $(X \cup X^{-1}, 1)$ um alfabeto.

- Dada uma palavra $w \in M(X)$, $(w^{-1})^{-1} = w$;
- A inversa da palavra vazia 1 é ela mesma, em símbolos, $1^{-1} = 1$, pois, dado $x \in X$, $1^{-1} = (x^0)^{-1} = x^{-0} = x^0 = 1$.

Definição 1.27. *Sejam $(X \cup X^{-1}, 1)$ um alfabeto e $n \in \mathbb{Z}_+$. Uma **subpalavra** de uma palavra $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n} \in M(X)$, onde $\varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}$, $x_j \in X$ e $1 \leq j \leq n$, é a palavra vazia 1, ou é uma palavra $u = x_r^{\varepsilon_r} \dots x_s^{\varepsilon_s}$, onde $1 \leq r \leq s \leq n$. Observe que uma subpalavra da palavra vazia 1 é a própria palavra vazia 1.*

Definição 1.28. *Seja $(X \cup X^{-1}, 1)$ um alfabeto. Dadas $w_1, w_2 \in M(X)$, dizemos que w_1 é **elementarmente equivalente** a w_2 (o que denotamos por $w_1 \sim_0 w_2$) se*

$$w_1 = \alpha\beta \text{ e } w_2 = \alpha x x^{-1}\beta \quad \text{ou} \quad w_1 = \alpha\beta \text{ e } w_2 = \alpha x^{-1} x\beta$$

ou

$$w_2 = \alpha\beta \text{ e } w_1 = \alpha x x^{-1}\beta \quad \text{ou} \quad w_2 = \alpha\beta \text{ e } w_1 = \alpha x^{-1} x\beta,$$

onde $\alpha, \beta \in M(X)$ (podendo ser a palavra vazia) e $x \in X$.

*A relação $\sim_0$ é chamada de **equivalência elementar**, a qual não é uma relação de equivalência.*

Observação 1.5. Seja $(X \cup X^{-1}, 1)$ um alfabeto.

- Dadas $w_1, w_2 \in M(X)$, pela Definição 1.28 (p. 30) $w_1 \sim_0 w_2$ se, e somente se, $w_2 \sim_0 w_1$.
- Dadas $w_1, w_2, w \in M(X)$, pela Definição 1.28 (p. 30), se $w_1 \sim_0 w_2$, então $ww_1 \sim_0 ww_2$ e $w_1 w \sim_0 w_2 w$.

Exemplo 1.3. Seja $(X \cup X^{-1}, 1)$ um alfabeto. Dados $x_1, x_2 \in X$, temos que

$$x_1 x_2 x_2^{-1} x_1^{-1} \sim_0 x_1 x_1^{-1} = 1 x_1 x_1^{-1} \sim_0 1.$$

Definição 1.29. *Seja $(X \cup X^{-1}, 1)$ um alfabeto. Dadas $w_1, w_2 \in M(X)$, dizemos que w_1 é **equivalente** a w_2 (o que denotamos por $w_1 \sim w_2$) se, dado $n \in \mathbb{Z}_+$, existirem palavras $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in M(X)$ tais que*

$$w_1 \sim_0 \alpha_1 \sim_0 \dots \sim_0 \alpha_n \sim_0 w_2.$$

Lema 1.32. *Seja $(X \cup X^{-1}, 1)$ um alfabeto. A relação $\sim$ da Definição 1.29 (p. 30) é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Dados $w_1, w_2, w_3 \in M(X)$ e $x \in X$, temos que:

i) $w_1 \sim w_1$, pois $w_1 = 1w_1 \sim_0 1xx^{-1}w_1 \sim_0 1w_1 = w_1$.

ii) Se $w_1 \sim w_2$, então $w_2 \sim w_1$. De fato, como $w_1 \sim w_2$, segue que existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in M(X)$, onde $n \in \mathbb{Z}_+$, tais que $w_1 \sim_0 \alpha_1 \sim_0 \ldots \sim_0 \alpha_n \sim_0 w_2$. Pela Observação 1.5 (p. 30), temos que $w_2 \sim_0 \alpha_n \sim_0 \ldots \sim_0 \alpha_1 \sim_0 w_1$.

iii) Se $w_1 \sim w_2$ e $w_2 \sim w_3$, então $w_1 \sim w_3$. De fato, como $w_1 \sim w_2$ e $w_2 \sim w_3$, segue que existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in M(X)$, onde $n, m \in \mathbb{Z}_+$, tais que

$$w_1 \sim_0 \alpha_1 \sim_0 \ldots \sim_0 \alpha_n \sim_0 w_2 \quad \text{e} \quad w_2 \sim_0 \beta_1 \sim_0 \ldots \sim_0 \beta_m \sim_0 w_3,$$

logo $w_1 \sim_0 \alpha_1 \sim_0 \ldots \sim_0 \alpha_n \sim_0 w_2 \sim_0 \beta_1 \sim_0 \ldots \sim_0 \beta_m \sim_0 w_3$ e, portanto, $w_1 \sim w_3$.

□

Definição 1.30. *Seja $(X \cup X^{-1}, 1)$ um alfabeto. Dizemos que $w \in M(X)$ é uma palavra* ***reduzida*** *se w não possui subpalavra dos tipos xx^{-1}, ou $x^{-1}x$, onde $x \in X$.*

Teorema 1.7 (Forma Normal para Grupos Livres)**.** *Seja $(X \cup X^{-1}, 1)$ um alfabeto. Então, $\forall w \in M(X)$, existe uma única palavra reduzida $w_0 \in M(X)$ tal que $w \sim w_0$.*

Demonstração. (Ver [10, Theorem 4 (Normal form theorem for free groups), p. 5] e [16, Lemma 4.74, p. 274].) □

Definição 1.31. *Seja $(X \cup X^{-1}, 1)$ um alfabeto. Definimos $F(X)$ como sendo o conjunto das classes de equivalência segundo a relação de equivalência $\sim$ dada na Definição 1.29 (p. 30), isto é, $F(X) = M(X)/\sim$. Denotaremos os elementos de $F(X)$ por $[w] = \{v \in M(X) : w \sim v\}$.*

Notação 1.9. Seja $(X \cup X^{-1}, 1)$ um alfabeto.

- Dada $[w] \in F(X)$, definimos $[w]^1 := [w]$ e $[w]^0 := [1]$.

Proposição 1.23. *Seja $(X \cup X^{-1}, 1)$ um alfabeto. Então, definindo-se a seguinte operação: $\forall [w_1], [w_2] \in F(X), [w_1][w_2] := [w_1w_2]$, temos que $F(X)$ munido de tal operação é um grupo.*

Demonstração. Primeiramente, observemos que, dadas $w_1, w_2 \in M(X)$, temos que a concatenação w_1w_2 é também uma palavra em X, isto é, $w_1w_2 \in M(X)$.

Vamos mostrar que a operação considerada está bem definida. Sejam $[w_1], [v_1], [w_2], [v_2] \in F(X)$ tais que $[w_1] = [v_1]$ e $[w_2] = [v_2]$. Temos, então, que $w_1 \sim v_1$ e $w_2 \sim v_2$, ou seja, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in M(X)$, onde $n, m \in \mathbb{Z}_+$, tais que

$$w_1 \sim_0 \alpha_1 \sim_0 \ldots \sim_0 \alpha_n \sim_0 v_1 \quad \text{e} \quad w_2 \sim_0 \beta_1 \sim_0 \ldots \sim_0 \beta_m \sim_0 v_2.$$

Pela Observação 1.5 (p. 30) segue que

$$w_1w_2 \sim_0 w_1\beta_1 \sim_0 \ldots \sim_0 w_1\beta_m \sim_0 w_1v_2 \quad \text{e} \quad w_1v_2 \sim_0 \alpha_1v_2 \sim_0 \ldots \sim_0 \alpha_nv_2 \sim_0 v_1v_2,$$

logo $w_1w_2 \sim w_1v_2$ e $w_1v_2 \sim v_1v_2$, daí que $w_1w_2 \sim v_1v_2$ e, portanto, $[w_1w_2] = [v_1v_2]$, isto é, $[w_1][w_2] = [v_1][v_2]$.

Dadas $[w_1], [w_2], [w_3] \in F(X)$, temos que $[w_1]\big([w_2][w_3]\big) = [w_1][w_2w_3] = [w_1(w_2w_3)] = [(w_1w_2)w_3] = [w_1w_2][w_3] = \big([w_1][w_2]\big)[w_3]$. Logo, a operação considerada é associativa.

Dada $[w] \in F(X)$, temos que $[w][1] = [w1] = [w]$ e $[1][w] = [1w] = [w]$. Portanto, $[1]$ é o elemento neutro em relação à operação considerada.

Dada $[w] \in F(X)$, temos que $w = x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\dots x_n^{\varepsilon_n}$, onde $\varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}$, $x_j \in X$ e $1 \leq j \leq n$, segue que

$$[w][w^{-1}] = [ww^{-1}] = [x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\dots x_n^{\varepsilon_n}x_n^{-\varepsilon_n}\dots x_2^{-\varepsilon_2}x_1^{-\varepsilon_1}] = [1]$$

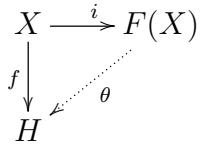
e

$$[w^{-1}][w] = [w^{-1}w] = [x_n^{-\varepsilon_n}\dots x_2^{-\varepsilon_2}x_1^{-\varepsilon_1}x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\dots x_n^{\varepsilon_n}] = [1].$$

Definamos, então, $[w]^{-1} := [w^{-1}]$. □

Teorema 1.8 (Existência de Grupo Livre)**.** *Sejam $(X \cup X^{-1}, 1)$ um alfabeto e $i : X \to F(X)$ uma função definida por $i(x) = [x]$. Então, $(F(X), i)$ é um grupo livre com base X.*

Demonstração. Sejam H um grupo e $f : X \to H$ uma função. Precisamos mostrar que existe um único homomorfismo de grupos $\theta : F(X) \to H$ tal que $\theta i = f$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:



Mostraremos primeiramente a unicidade de um tal homomorfismo de grupos θ. Suponhamos, então, que θ satisfaça a propriedade universal supracitada e seja $\psi : F(X) \to H$ um homomorfismo de grupos que também satisfaça a mesma propriedade universal, isto é, $\psi i = f$. Seja $[w] \in F(X)$. Então, $w = x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\dots x_n^{\varepsilon_n}$, onde $n \in \mathbb{Z}_+, x_j \in X, \varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}$, com $1 \leq j \leq n$. Temos que

$$\psi([w]) = \psi([x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\dots x_n^{\varepsilon_n}]) = \psi([x_1]^{\varepsilon_1}[x_2]^{\varepsilon_2}\dots[x_n]^{\varepsilon_n}) =$$

$$= \psi([x_1]^{\varepsilon_1})\psi([x_2]^{\varepsilon_2})\dots\psi([x_n]^{\varepsilon_n}) = \psi([x_1])^{\varepsilon_1}\psi([x_2])^{\varepsilon_2}\dots\psi([x_n])^{\varepsilon_n} =$$

$$= \psi(i(x_1))^{\varepsilon_1}\psi(i(x_2))^{\varepsilon_2}\dots\psi(i(x_n))^{\varepsilon_n} = f(x_1)^{\varepsilon_1}f(x_2)^{\varepsilon_2}\dots f(x_n)^{\varepsilon_n}.$$

E, por outro lado,

$$\theta([w]) = \theta([x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\dots x_n^{\varepsilon_n}]) = \theta([x_1]^{\varepsilon_1}[x_2]^{\varepsilon_2}\dots[x_n]^{\varepsilon_n}) =$$

$$= \theta([x_1]^{\varepsilon_1})\theta([x_2]^{\varepsilon_2})\dots\theta([x_n]^{\varepsilon_n}) = \theta([x_1])^{\varepsilon_1}\theta([x_2])^{\varepsilon_2}\dots\theta([x_n])^{\varepsilon_n} =$$

$$= \theta(i(x_1))^{\varepsilon_1}\theta(i(x_2))^{\varepsilon_2}\dots\theta(i(x_n))^{\varepsilon_n} = f(x_1)^{\varepsilon_1}f(x_2)^{\varepsilon_2}\dots f(x_n)^{\varepsilon_n}.$$

Daí que $\psi = \theta$.

Vamos mostrar agora a existência de um tal homomorfismo de grupos $\theta : F(X) \to H$. Seja $[w] \in F(X)$ tal que $w = x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\dots x_n^{\varepsilon_n}$, onde $n \in \mathbb{Z}_+, x_j \in X, \varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}$, com $1 \leq j \leq n$. Definamos

$$\theta([w]) := \theta([x_1^{\varepsilon_1}])\theta([x_2^{\varepsilon_2}])\dots\theta([x_n^{\varepsilon_n}]) \qquad \text{e} \qquad \theta([x_j^{\varepsilon_j}]) := f(x_j)^{\varepsilon_j}.$$

Vamos nos certificar de que θ está bem definida. Primeiramente, observemos que, dadas $w, v \in M(X)$, se $w \sim_0 v$, então $\theta([w]) = \theta([v])$. De fato, como $w \sim_0 v$, segue que

$$w = \alpha\beta \text{ e } v = \alpha x x^{-1}\beta, \tag{1.5}$$
$$\text{ou } w = \alpha\beta \text{ e } v = \alpha x^{-1} x\beta, \tag{1.6}$$
$$\text{ou } v = \alpha\beta \text{ e } w = \alpha x x^{-1}\beta, \tag{1.7}$$
$$\text{ou } v = \alpha\beta \text{ e } w = \alpha x^{-1} x\beta \tag{1.8}$$

onde $x \in X$ e $\alpha, \beta \in M(X)$, com $\alpha = y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}$ e $\beta = z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} \dots z_s^{\gamma_s}$, onde $m, s \in \mathbb{Z}_+, y_k, z_l \in X$ e $\delta_k, \gamma_l \in \{-1, 0, 1\}$, com $1 \leq k \leq m$ e $1 \leq l \leq s$. Caso tenhamos (1.5) (p. 33), segue por definição de θ que

$$\theta([v]) = \theta([y_1^{\delta_1}]) \dots \theta([y_m^{\delta_m}])\theta([x])\theta([x^{-1}])\theta([z_1^{\gamma_1}]) \dots \theta([z_s^{\gamma_s}]) =$$
$$= \theta([y_1^{\delta_1}]) \dots \theta([y_m^{\delta_m}]) f(x) f(x)^{-1} \theta([z_1^{\gamma_1}]) \dots \theta([z_s^{\gamma_s}]) =$$
$$= \theta([y_1^{\delta_1}]) \dots \theta([y_m^{\delta_m}])\theta([z_1^{\gamma_1}]) \dots \theta([z_s^{\gamma_s}]) = \theta([\alpha\beta]) = \theta([w]).$$

Analogamente, teremos a igualdade $\theta([v]) = \theta([w])$, caso tenhamos (1.6), (1.7), ou (1.8) (p .33). Agora, dados $[w], [v] \in F(X)$, se $[w] = [v]$, então $w \sim v$, logo existem $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in M(X)$, onde $r \in \mathbb{Z}_+$, tais que $w \sim_0 \alpha_1 \sim_0 \dots \sim_0 \alpha_r \sim_0 v$, daí que

$$\theta([w]) = \theta([\alpha_1]) = \dots = \theta([\alpha_r]) = \theta([v])$$

e, portanto, θ está bem definida.

θ é homomorfismo de grupos, pois, dados $[w], [v] \in F(X)$ tais que $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ e $v = y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} \dots y_m^{\delta_m}$, onde $n, m \in \mathbb{Z}_+, x_j, y_k \in X$ e $\varepsilon_j, \delta_k \in \{-1, 0, 1\}$, com $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq m$, temos que

$$\theta([w][v]) = \theta([wv]) = \theta([x_1^{\varepsilon_1}]) \dots \theta([x_n^{\varepsilon_n}])\theta([y_1^{\delta_1}]) \dots \theta([y_m^{\delta_m}]) = \theta([w])\theta([v]).$$

□

Observação 1.6. Pela Proposição 1.22 (p. 28), temos que $i : X \to F(X)$ do Teorema 1.8 (p. 32) é injetiva, logo, sendo $[X] = \{[x] \in F(X) : x \in X\}$, temos uma bijeção $X \to [X]$, definida por $x \leftrightarrow [x]$. Identificamos, portanto, X como um subconjunto de $F(X)$. Pela construção de $F(X)$ vemos que $F(X)$ é gerado pelo conjunto $[X] \subseteq F(X)$, isto é, $F(X) = \langle [X] \rangle$. Assim, com tal identificação feita pela bijeção acima, temos que $F(X)$ é gerado pelo conjunto X. Desta forma, uma palavra $[w] \in F(X)$ será escrita sem os colchetes, isto é, escreveremos $w \in F(X)$, onde $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$, com $\varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}$, $x_j \in X$ e $1 \leq j \leq n$. Cada elemento $w \in F(X)$ tem única forma $w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ como palavra reduzida.

Notação 1.10. Seja $(X \cup X^{-1}, 1)$ um alfabeto. Denotaremos por $F(X)$ simplesmente o grupo livre $(F(X), i)$ com base X, onde $i : X \to F(X)$ é dada por $i(x) = [x]$, conforme no Teorema 1.8 (p. 32).

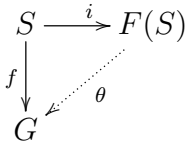
Definição 1.32. *Seja $F(X)$ um grupo livre com base X. A cardinalidade de X é chamada de **posto** do grupo $F(X)$.*

Proposição 1.24. *Sejam $F(X), F(Y)$ grupos livres com bases X e Y respectivamente. Se existe uma bijeção $\varphi : X \to Y$, então existe um isomorfismo de grupos $\theta : F(X) \to F(Y)$ tal que $\theta|_X = \varphi$.*

Demonstração. (Ver [16, Proposition 4.77, p. 277].) □

Teorema 1.9. *Seja G um grupo. Então, G é quociente de algum grupo livre. Dito de outra forma, existem um grupo livre $F(X)$ com base X, onde X é um conjunto, e H um subgrupo normal de $F(X)$ tal que $G \cong F(X)/H$ (isomorfismo de grupos).*

Demonstração. Sejam S um subconjunto de G tal que $G = \langle S \rangle$ e $f : S \to G$ a função inclusão canônica[4]. Então, pela propriedade universal para grupos livres, temos o seguinte diagrama:



onde $i : S \to F(S)$ é a função canônica na construção de grupo livre e θ é o único homomorfismo de grupos tal que $\theta i(s) = f(s) = s, \forall s \in S$. Daí que $\theta : F(S) \to G$ é sobrejetivo, pois, dado $g \in G$, temos que $g = s_1^{\varepsilon_1} \dots s_n^{\varepsilon_n}$, onde $n \in \mathbb{Z}_+, s_j \in S$ e $\varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}$, com $1 \leq j \leq n$. Daí que $g = s_1^{\varepsilon_1} \dots s_n^{\varepsilon_n} = (f(s_1))^{\varepsilon_1} \dots (f(s_n))^{\varepsilon_n} = (\theta i(s_1))^{\varepsilon_1} \dots (\theta i(s_n))^{\varepsilon_n} = (\theta([s_1]))^{\varepsilon_1} \dots (\theta([s_n]))^{\varepsilon_n} = \theta([s_1^{\varepsilon_1} \dots s_n^{\varepsilon_n}]) = \theta([g])$, onde $[g] \in F(S)$. Pelo Teorema 1.1 (p. 3) (1º Teorema de Isomorfismo para Grupos), segue que $F(S)/ker(\theta) \cong Im(\theta) = G$, onde $ker(\theta) \lhd F(S)$. Definamos, então, $H := ker(\theta)$. □

Grupos Finitamente Apresentáveis

Definição 1.33. *Sejam G um grupo e R um subconjunto de G. Sendo $R^G = \{g^{-1}rg \in G : r \in R, g \in G\}$, definimos o* ***fecho normal de*** *R* ***em*** *G (ou* ***o subgrupo normal de*** *G* ***gerado por*** *R) como sendo o subgrupo de G gerado por R^G, isto é, $\langle R^G \rangle$. Denotamos o fecho normal de R em G por $\langle R \rangle^G$.*

Lema 1.33. *Sejam G um grupo e R um subconjunto de G. Então, o fecho normal de R em G é o menor subgrupo normal em G que contém R.*

Demonstração. Observe primeiramente que $R \subseteq \langle R \rangle^G$, pois, $\forall r \in R$, $r = 1_G^{-1} r 1_G \in R^G \subseteq \langle R^G \rangle = \langle R \rangle^G$.

Vamos mostrar que $\langle R \rangle^G \lhd G$. Para isso, basta mostrar que, $\forall g \in G$, $g\langle R \rangle^G g^{-1} \subseteq \langle R \rangle^G$. Dado $g \in G$, seja $x \in gR^G g^{-1}$. Logo, $x = g(h^{-1}rh)g^{-1}$, onde $r \in R$ e $h \in G$. Daí que $x = (hg^{-1})^{-1} r (hg^{-1}) \in R^G$. Como $g \in gR^G g^{-1}$ foi tomado arbitrário, segue que $gR^G g^{-1} \subseteq R^G$, logo $\langle gR^G g^{-1} \rangle \subseteq \langle R^G \rangle, \forall g \in G$. Mas, $\langle gR^G g^{-1} \rangle = g\langle R^G \rangle g^{-1}$, para todo $g \in G$ fixado. Portanto, $g\langle R \rangle^G g^{-1} = g\langle R^G \rangle g^{-1} \subseteq \langle R^G \rangle = \langle R \rangle^G, \forall g \in G$.

Por fim, vamos mostrar que $\langle R \rangle^G$ é o menor subgrupo normal em G que contém R. Seja $B \lhd G$ tal que $R \subseteq B$ e $B \subseteq \langle R \rangle^G$. Seja $x \in R^G$. Logo, $x = g^{-1}rg$, onde $g \in G$ e $r \in R$.

[4] Todo grupo G pode ser escrito de tal forma, pois podemos, em particular, tomar o subconjunto S como o conjunto de todos os elementos do grupo G. Caso o subconjunto S seja o conjunto de todos os elementos de G, $f = id_S$.

Daí que $x = (g^{-1})r(g^{-1})^{-1} \in (g^{-1})R(g^{-1})^{-1} \subseteq g^{-1}B(g^{-1})^{-1} = B$, pois $B \lhd G$. Como $x \in R^G$ foi tomado arbitrário, segue que $R^G \subseteq B$ e, portanto, $\langle R\rangle^G = \langle R^G\rangle \subseteq \langle B\rangle = B$. Assim, $B = \langle R\rangle^G$. □

Lema 1.34. *Sejam G um grupo e R um subconjunto de G. Seja também $\mathcal{F} = \{H_i \lhd G : R \subseteq H_i, i \in I\}$ a família de todos os subgrupos normais de G que contêm R (onde I é um conjunto de índices). Então, $\bigcap_{i\in I} H_i = \langle R\rangle^G$.*

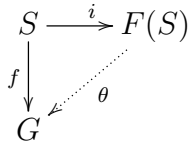
Demonstração. Como $\langle R\rangle^G \lhd G$ e $R \subseteq \langle R\rangle^G$, segue que $\langle R\rangle^G \in \mathcal{F}$, logo $\bigcap_{i\in I} H_i \subseteq \langle R\rangle^G$. Agora, $\bigcap_{i\in I} H_i \lhd G$ pelo Lema 1.2 (p. 4) e $R \subseteq \bigcap_{i\in I} H_i$, portanto, pelo Lema 1.33 (p. 34), segue que $\langle R\rangle^G \subseteq \bigcap_{i\in I} H_i$. Assim, $\langle R\rangle^G = \bigcap_{i\in I} H_i$. □

Definição 1.34. *Sejam G um grupo, $(X \cup X^{-1}, 1)$ um alfabeto, $F(X)$ o grupo livre com base X e R um subconjunto de $F(X)$, isto é, um subconjunto de palavras reduzidas em $(X \cup X^{-1}, 1)$. Dizemos que G é um grupo **apresentável** se $G \cong F(X)/\langle R\rangle^{F(X)}$. Neste caso, dizemos que G tem uma **apresentação** $\langle X|R\rangle$ e escrevemos $G = \langle X|R\rangle$.*

*Denominamos o conjunto X de **conjunto de geradores**[5] **(ou gerador)** de G e o conjunto R de **relações** em G.*

Teorema 1.10. *Todo grupo G possui uma apresentação.*

Demonstração. Pela Demonstração do Teorema 1.9 (p. 34), temos que $G \cong F(S)/ker(\theta)$, onde S é um subconjunto de G tal que $G = \langle S\rangle$, $F(S)$ é o grupo livre com base S e $\theta : F(S) \to G$ é o único homomorfismo de grupos que faz o seguinte diagrama comutar:



onde $i : S \to F(S)$ é a função canônica na construção de grupo livre e $f : S \to G$ é a função inclusão canônica. Da referida Demonstração segue que θ é epimorfismo de grupos. Agora, $\langle ker(\theta)\rangle^{F(S)} = \langle ker(\theta)^{F(S)}\rangle = ker(\theta)$, pois $ker(\theta) \lhd F(S)$, daí que

$$G \cong F(S)/\langle ker(\theta)\rangle^{F(S)}$$

e, pela Definição 1.34 (p. 35), temos que $G = \langle S|\ker(\theta)\rangle$ é uma apresentação de G. □

Lema 1.35. *Seja G um grupo. Então, G é um grupo finitamente gerado se, e somente se, existe uma apresentação $\langle X|R\rangle$ de G tal que X é finito.*

[5] O termo "conjunto de geradores", a princípio, não coincide com o termo da Definição 1.15 (p. 24). No Lema 1.35 (p. 35) veremos o porquê do uso de tal termo.

Demonstração. Suponhamos que G seja um grupo finitamente gerado. Logo, existe um subconjunto finito S de G tal que $G = \langle S \rangle$. Pela Demonstração do Teorema 1.10 (p. 35) segue que $\langle S|ker(\theta)\rangle$ é uma apresentação de G tal que S é finito, onde θ é o mesmo da referida Demonstração.

Suponhamos agora que exista uma apresentação $\langle X|R\rangle$ de G tal que X seja um conjunto finito. Por construção e pela Observação 1.6 (p. 33), $F(X)$ é gerado pelo conjunto X, temos, então, que $F(X)$ é grupo finitamente gerado, logo $F(X)/\langle R\rangle^{F(X)}$ é grupo finitamente gerado pela Proposição 1.18 (p. 24). Como $G = \langle X|R\rangle$, segue que $G \cong F(X)/\langle R\rangle^{F(X)}$ e, portanto, G é grupo finitamente gerado. □

Definição 1.35. *Seja G um grupo. Dizemos que G é um **grupo finitamente apresentável** se existe uma apresentação $\langle X|R\rangle$ de G tal que tanto X, quanto R são conjuntos finitos.*

O seguinte resultado é óbvio pelo que foi visto até então, no entanto vamos enunciá-lo meramente por registro.

Proposição 1.25. *Seja G um grupo. Se G é um grupo finitamente apresentável, então G é um grupo finitamente gerado.*

Demonstração. Como G é finitamente apresentável, existe uma apresentação $\langle X|R\rangle$ de G tal que X e R são conjuntos finitos. Pelo Lema 1.35 (p. 35), temos que G é um grupo finitamente gerado. □

Proposição 1.26. *Sejam G um grupo e $\langle X|S\rangle$ uma apresentação de G tal que X é um conjunto finito. Se G é finitamente apresentável, então existe um subconjunto finito $S_1 \subseteq S$ tal que $G = \langle X|S_1\rangle$.*

Demonstração. (Ver [10, Proposition 17, p. 23].) □

Proposição 1.27. *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G tal que $[G : H] < \infty$. Então, G é um grupo finitamente gerado se, e somente se, H é um grupo finitamente gerado.*

Demonstração. Suponhamos que H seja um subgrupo de G finitamente gerado. Então, pela Proposição 1.19 (p. 25), segue que G é um grupo finitamente gerado.

Suponhamos agora que G seja um grupo finitamente gerado. Então, pelo Lema 1.35 (p. 35), existe uma apresentação $\langle X|R\rangle$ de G tal que X é um conjunto finito, isto é, $G \cong F(X)/\langle R\rangle^{F(X)}$, onde $F(X)$ é o grupo livre com base X, e visto que X é um conjunto finito, $F(X)$ é grupo livre finitamente gerado. Sejam $\pi : F(X) \twoheadrightarrow F(X)/\langle R\rangle^{F(X)}$ o homomorfismo de grupos projeção canônica e $\varphi : F(X)/\langle R\rangle^{F(X)} \to G$ um isomorfismo de grupos. Definamos, então, $\psi : F(X) \twoheadrightarrow G$ por $\psi := \varphi\pi$, a qual é um epimorfismo de grupos, pois π e φ o são. Daí que $\psi^{-1}(H) = \pi^{-1}\varphi^{-1}(H)$ é subgrupo de $F(X)$ e, portanto, como ψ é epimorfismo de grupos, pela Proposição 1.2 a) (p. 6), $[F(X) : \psi^{-1}(H)] = [G : H] < \infty$. Pelo Teorema (Forma Fraca do Teorema de Schreier)[6] em [10, Theorem 1 (weak form of Schreier's Theorem), p. 167], segue que $\psi^{-1}(H)$ é subgrupo finitamente gerado de $F(X)$. Como $\psi(\psi^{-1}(H)) = H$, pela Proposição 1.18 (p. 24), segue que H é subgrupo finitamente gerado de G. □

[6] A Demonstração desse Teorema usa as noções de recobrimentos de grafos de grupos e grupos fundamentais, os quais não são abordados nesta Dissertação.

Proposição 1.28. *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Se G é um grupo abeliano-por-finito finitamente gerado, então H também o é.*

Demonstração. Como G é um grupo abeliano-por-finito, existe $A \lhd G$ tal que A é grupo abeliano e G/A é grupo finito. Também, pela Proposição 1.9 (p. 11), temos que H é grupo abeliano-por-finito. Por hipótese, G é um grupo finitamente gerado e, como $[G : A] = |G/A| < \infty$, pela Proposição 1.27 (p. 36), segue que A é grupo finitamente gerado.

Considerando $A \cap H$ como um subgrupo de A, como A é grupo abeliano finitamente gerado, temos que $A \cap H$ também é grupo abeliano finitamente gerado pela Proposição 1.20 (p. 26). Agora, como $A \lhd G$, segue que $A \cap H \lhd H$ pelo Lema 1.3 (p. 4), logo $H/(A \cap H)$ é grupo quociente. Além disso, $H/(A \cap H)$ é grupo finito, já que, pelo Teorema 1.2 (p. 3) (2^o Teorema de Isormorfismo para Grupos), $H/(A \cap H) \cong HA/A \leq G/A$, sendo este último grupo finito. Assim, $A \cap H$ é grupo finitamente gerado e $[H : A \cap H] < \infty$, portanto, pela Proposição 1.27 (p. 36), H é grupo finitamente gerado. □

Proposição 1.29. *Todo grupo finito G é um grupo finitamente apresentável.*

Demonstração. Como G é um grupo finito, temos que G é grupo finitamente gerado, pois $G = \langle G \rangle$. Daí que, pelo Lema 1.35 (p. 35), existe uma apresentação $\langle X|R\rangle$ de G tal que X é conjunto finito, logo $G \cong F(X)/ker(\theta)$ (onde $F(X)$ é grupo livre com base X e o epimorfismo de grupos $\theta : F(X) \twoheadrightarrow G$ é como na Demonstração do Teorema 1.10 (p. 35)) e $F(X)$ é grupo finitamente gerado. Assim, como G é grupo finito, segue que $F(X)/ker(\theta)$ é grupo finito, isto é, $[F(X) : ker(\theta)] < \infty$, o que implica que $ker(\theta)$ é grupo finitamente gerado pela Proposição 1.27 (p. 36), ou seja, existe subconjunto finito $Y \subseteq ker(\theta)$ tal que $ker(\theta) = \langle Y \rangle$. Assim, como $Y \subseteq \langle Y \rangle^{F(X)}$ pelo Lema 1.33 (p. 34), segue que $ker(\theta) \subseteq \langle Y \rangle \subseteq \langle Y \rangle^{F(X)} = ker(\theta)^{F(X)} = ker(\theta)$, isto é, $ker(\theta) = \langle Y \rangle^{F(X)}$. Portanto, $G \cong F(X)/\langle Y \rangle^{F(X)}$ e, assim, $\langle X|Y\rangle$ é uma apresentação de G onde X e Y são conjuntos finitos, daí que G é um grupo finitamente apresentável. □

Teorema 1.11. *Sejam G um grupo e $H \lhd G$. Se H e G/H são grupos finitamente apresentáveis, então G é um grupo finitamente apresentável.*

Demonstração. Como H e G/H são grupos finitamente apresentáveis, temos que existem $\langle X|R\rangle$ e $\langle Y|S\rangle$ apresentações de H e G/H, respectivamente, tais que X, R, Y e S são conjuntos finitos. Temos, então, que existem epimorfismos de grupos

$$\pi_1 : F(X) \twoheadrightarrow H, \text{ onde } ker(\pi_1) = \langle R \rangle^{F(X)}$$

$$\pi_2 : F(Y) \twoheadrightarrow G/H, \text{ onde } ker(\pi_2) = \langle S \rangle^{F(Y)}$$

Além disso, podemos supor, conforme a Demonstração do Teorema 1.10 (p. 35), que $X \subseteq H$ e $Y \subseteq G/H$. Assim,

$$\pi_1|_X = id|_X \text{ e } \pi_2|_Y = id|_Y.$$

Podemos supor também que $1_{G/H} \notin Y$ e $1_H \notin X$.

Seja

$$\rho : G \twoheadrightarrow G/H$$

o epimorfismo de grupos projeção canônica. Para todo $y \in Y \subseteq G/H$, podemos escolher um $y_0 \in G$ tal que $\rho(y_0) = y$. Seja, então, $Y_0 \subseteq G$ o conjunto formado por tais elementos $y_0 \in G$.

Observe que Y_0 é um conjunto finito. Agora, podemos supor ainda que $Y_0 \cap X = \emptyset$, pois, como $1_{G/H} \notin Y$, segue que $\rho(y_0) \neq 1_{G/H}, \forall y_0 \in Y_0$ e, por outro lado, $\rho(X) \subseteq \rho(H) = 1_{G/H}$.

Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} X \cup Y_0 & \xrightarrow{i_1} & F(X \cup Y_0) \\ {\scriptstyle \iota}\downarrow & \swarrow_{\pi} & \\ G & & \end{array}$$

onde i_1 é a função canônica da definição de grupo livre, ι é a função inclusão canônica e π é o único homomorfismo de grupos que faz tal diagrama comutar, cuja existência se deve à propriedade universal do grupo livre $F(X \cup Y_0)$. Temos, assim, que

$$\pi|_X = id|_X = \pi_1|_X \text{ e } \pi|_{Y_0} = id|_{Y_0}.$$

Temos ainda que π é sobrejetivo. De fato, $Im(\pi) \supseteq \langle \pi(X) \rangle = \langle X \rangle = H$ e, pelo Corolário 1.4 (p. 25), o fato de que $G/H = \langle Y \rangle = \langle \rho(Y_0) \rangle$ implica que $G = \langle Y_0 \rangle H$. Como $H, \langle Y_0 \rangle \subseteq Im(\pi)$, segue que $G \subseteq Im(\pi)$ e, portanto, $G = Im(\pi)$.

Dado $s \in S \subseteq F(Y)$, definamos $\tilde{s} \in F(Y_0) \subseteq F(X \cup Y_0)$ como sendo a palavra obtida de s substituindo $y \in Y$ por $y_0 \in Y_0$ e $y^{-1} \in Y^{-1}$ (conjunto inverso) por $y_0^{-1} \in Y_0^{-1}$. Temos, então, que $\rho(\pi(\tilde{s})) = s = 1_{G/H}$, logo $\pi(\tilde{s}) \in ker(\rho) = H = \langle X \rangle = \langle \pi(X) \rangle = \pi(\langle X \rangle)$ e, daí que, existe $w_s \in F(X)$ tal que $\pi(\tilde{s}) = \pi(w_s)$. Assim,

$$\tilde{s} w_s^{-1} \in ker(\pi). \tag{1.9}$$

Agora, $\langle X \rangle = H \lhd G$. Assim, $\forall x \in X$ e $\forall z \in X \cup Y_0$, $\pi(zxz^{-1}) \in \pi(z) H \pi(z)^{-1} = H = \langle X \rangle = \langle \pi(X) \rangle = \pi(\langle X \rangle)$, logo existe $\alpha(x,z) \in F(X)$ tal que $\pi(zxz^{-1}) = \pi(\alpha(x,z))$. Analogamente, temos que existe $\beta(x,z) \in F(X)$ tal que $\pi(z^{-1}xz) = \pi(\beta(x,z))$. Assim,

$$zxz^{-1}\alpha(x,z)^{-1} \in ker(\pi) \text{ e } z^{-1}xz\beta(x,z)^{-1} \in ker(\pi). \tag{1.10}$$

Definamos,

$$T := R \cup \Delta \cup \Omega.$$

Onde

$$\Delta := \{\tilde{s} w_s^{-1}\}_{s \in S} \qquad \text{e} \qquad \Omega := \{zxz^{-1}\alpha(x,z)^{-1}, z^{-1}xz\beta(x,z)^{-1}\}_{x \in X,\ z \in X \cup Y_0}$$

Veja que T é um conjunto finito.

Seja $G_0 := \dfrac{F(X \cup Y_0)}{\langle T \rangle^{F(X \cup Y_0)}}$. Queremos mostrar que

$$G_0 \cong G.$$

Se assim o fizermos, G terá apresentação $\langle X \cup Y_0 | T \rangle$. Como X, Y_0 e T são conjuntos finitos, concluíremos que G é um grupo finitamente apresentável.

Primeiramente, observemos que $R \subseteq F(X) \subseteq F(X \cup Y_0)$, logo $\pi(R) = \pi_1(R) = 1_H = 1_G$, ou seja, $R \subseteq ker(\pi)$. Esse último fato juntamente com (1.9) (p. 38) e (1.10) (p. 38) mostram que $T \subseteq ker(\pi)$, logo $\langle T \rangle^{F(X \cup Y_0)} \subseteq \langle ker(\pi) \rangle^{F(X \cup Y_0)} = ker(\pi)$ e, portanto, pelo Lema 1.13 (p.

11), existe um homomorfismo de grupos $\psi : G_0 \to G$ dado por $\psi(z\langle T\rangle^{F(X\cup Y_0)}) = \pi(z)$, para toda classe lateral $z\langle T\rangle^{F(X\cup Y_0)} \in G_0$.

A fim de que mostremos que $G_0 \cong G$, basta que mostremos que ψ é isomorfismo de grupos. Para isso usaremos o Lema 1.17 (p. 12). A seguir faremos as construções necessárias para aplicação de tal Lema.

Seja $\rho_1 : F(X \cup Y_0) \twoheadrightarrow G_0$ o epimorfismo de grupos projeção canônica. Pela definição de ψ, segue que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} F(X\cup Y_0) & \xrightarrow{\pi} & G \\ {\scriptstyle \rho_1}\downarrow & \nearrow_{\psi} & \\ G_0 & & \end{array}$$

Como π é epimorfismo de grupos e tal diagrama é comutativo, temos que ψ é também epimorfismo de grupos.

Definamos

$$H_0 := \langle \rho_1(X)\rangle.$$

Temos que $\psi(H_0) = \psi(\langle \rho_1(X)\rangle) = \langle \psi\rho_1(X)\rangle = \langle \pi(X)\rangle = \langle X\rangle = H$. Desta forma, a restrição $\psi|_{H_0} : H_0 \to H$ é um epimorfismo de grupos. Vamos mostrar agora que $\psi|_{H_0}$ é também monomorfismo de grupos. Para isso basta mostrarmos que $ker(\psi|_{H_0}) = \{1_{G_0}\}$. Seja, então, $h_0 \in ker(\psi|_{H_0}) = ker(\psi) \cap H_0$. Por um lado, $h_0 = \rho_1(f)$, onde $f \in F(X)$. Por outro lado, $1_G = \psi(h_0) = \psi\rho_1(f) = \pi(f) = \pi_1(f)$. Logo, $f \in \langle R\rangle^{F(X)}$. Mas, como $R \subseteq T$, temos que $\langle R\rangle^{F(X)} \subseteq \langle T\rangle^{F(X\cup Y_0)} = ker(\rho_1)$. Assim, $h_0 = \rho_1(f) = 1_{G_0}$. Como $h_0 \in ker(\psi|_{H_0})$ foi tomado arbitrário, segue que $ker(\psi|_{H_0}) = \{1_{G_0}\}$. Concluímos que

$$\psi|_{H_0} \text{ é isomorfismo de grupos.}$$

Queremos mostrar agora que $H_0 \lhd G_0$. Isto é equivalente a

$$\rho_1(z)H_0\rho_1(z)^{-1} \subseteq H_0 \text{ e } \rho_1(z)^{-1}H_0\rho_1(z) \subseteq H_0, \text{ para todo } z \in F(X\cup Y_0).$$

Como H_0 é gerado por $\rho_1(X)$ e $F(X\cup Y_0)$ é gerado por $X \cup Y_0$, basta mostrarmos que

$$\rho_1(z)\rho_1(x)\rho_1(z)^{-1} \in H_0 \text{ e } \rho_1(z)^{-1}\rho_1(x)\rho_1(z) \in H_0, \text{ para todos } z \in X\cup Y_0 \text{ e } x \in X.$$

Como $\Omega \subseteq T$, temos que, para todos $z \in X \cup Y_0$ e $x \in X$,

$$\rho_1(z)\rho_1(x)\rho_1(z)^{-1} = \rho_1(zxz^{-1}) = \rho_1(zxz^{-1}\alpha(x,z)^{-1}\alpha(x,z)) =$$

$$= \rho_1(zxz^{-1}\alpha(x,z)^{-1})\rho_1(\alpha(x,z)) = 1_{G_0}\rho_1(\alpha(x,z)) = \rho_1(\alpha(x,z)) \in H_0.$$

Analogamente,

$$\rho_1(z)^{-1}\rho_1(x)\rho_1(z) = \rho_1(\beta(x,z)) \in H_0.$$

Como $H_0 \lhd G_0$, $\psi : G_0 \twoheadrightarrow G$ é epimorfismo de grupos e $\psi(H_0) = H$, pelo Lema 1.17 a) (p. 12), segue que $\psi_* : G_0/H_0 \to G/H$ definida por $\psi_*(\xi H_0) = \psi(\xi)H$, para toda classe lateral $\xi \in G_0$, é epimorfismo de grupos. Pelo pelo Lema 1.17 b) (p. 12), inferimos que, se $\psi|_{H_0}$ e ψ_* são isomorfismos de grupos, então ψ é também isomorfismo de grupos. Sendo assim, conseguiremos finalizar a demonstração se mostrarmos que ψ_* é isomorfismo de grupos.

Seja $\tilde{\pi}_1 : F(Y_0) \to G/H$ um homomorfismo de grupos definido por

$$\tilde{\pi}_1 := \rho\pi\iota_1,$$

onde $\iota_1 : F(Y_0) \hookrightarrow F(X \cup Y_0)$ é o homomorfismo de grupos inclusão canônica. Observe que

$$\tilde{\pi}_1(y_0) = y_0H = y \in Y, \forall y_0 \in F(Y_0).$$

Além disso, $\tilde{\pi}_1$ é sobrejetivo, pois $G/H = \langle Y \rangle$.

Como $|Y_0| = |Y|$, existe uma bijeção $\varphi : Y \to Y_0$ dada por $\varphi(y) = y_0$. Logo, pela Proposição 1.24 (p. 34), existe isomorfismo de grupos $\theta : F(Y) \to F(Y_0)$ tal que $\theta(y) = y_0, \forall y \in Y$. Temos, então, o seguinte diagrama comutativo, pois $\tilde{\pi}_1 = p\pi\iota_1$:

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{\pi_2} & G/H \\ {\scriptstyle\theta}\downarrow & \nearrow_{\tilde{\pi}_1} & \\ F(Y_0) & & \end{array}$$

isto é,

$$\pi_2 = \tilde{\pi_1}\theta.$$

Assim, pelo Lema 1.14 (p. 12),

$$\theta(ker(\pi_2)) = ker(\tilde{\pi}_1).$$

Definindo-se $\tilde{S} := \theta(S)$, como $ker(\pi_2) = \langle S \rangle^{F(Y)}$, temos que

$$\ker(\tilde{\pi}_1) = \theta(\langle S \rangle^{F(Y)}) = \langle \theta(S) \rangle^{\theta(F(Y))} = \langle \tilde{S} \rangle^{F(Y_0)}. \tag{1.11}$$

Seja agora $f : X \cup Y_0 \to F(Y_0)$ uma função definida por

$$f(x) = 1_{F(Y_0)}, \forall x \in X \qquad \text{e} \qquad f(y_0) = y_0, \forall y_0 \in Y_0.$$

Pela propriedade universal do grupo livre $F(X \cup Y_0)$, existe um único homomorfismo de grupos $p : F(X \cup Y_0) \to F(Y_0)$ tal que

$$p(x) = 1_{F(Y_0)}, \forall x \in X \qquad \text{e} \qquad p(y_0) = y_0, \forall y_0 \in Y_0.$$

Observemos que p é sobrejetivo.

Seja $\rho_0 : G_0 \twoheadrightarrow G_0/H_0$ o epimorfismo de grupos projeção canônica. Definamos $\delta : F(X \cup Y_0) \to G_0/H_0$ por

$$\delta := \rho_0\rho_1.$$

Pela propriedade universal do grupo livre $F(Y_0)$, existe um único homomorfismo de grupos $\tilde{\pi}_2 : F(Y_0) \to G_0/H_0$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} Y_0 & \xrightarrow{i_2} & F(Y_0) \\ {\scriptstyle\delta|_{Y_0}}\downarrow & \swarrow_{\tilde{\pi}_2} & \\ G_0/H_0 & & \end{array}$$

onde i_2 é a função canônica na definição do grupo livre $F(Y_0)$ e $\delta|_{Y_0}$ é a restrição de δ sobre Y_0. Veja que

$$\tilde{\pi}_2 p = \delta,$$

pois

$$\tilde{\pi}_2 p(X \cup Y_0) = \tilde{\pi}_2(p(X) \cup p(Y_0)) = \tilde{\pi}_2(\{1_{F(Y_0)}\} \cup Y_0) = \tilde{\pi}_2(Y_0) = \delta|_{Y_0}(Y_0) = \delta(Y_0)$$

e, recordando que $H_0 = \langle \rho_1(X) \rangle$, temos que

$$\delta(X \cup Y_0) = \rho_0\rho_1(X \cup Y_0) = \rho_0(\rho_1(X) \cup \rho_1(Y_0)) =$$

$$\rho_0\rho_1(X) \cup \rho_0\rho_1(Y_0) = \{1_{G_0/H_0}\} \cup \rho_0\rho_1(Y_0) = \delta(Y_0).$$

Além disso, observe que $\tilde{\pi}_2$ é sobrejetivo, pois $\tilde{\pi}_2 p = \delta$ é sobrejetivo. Vamos mostrar agora que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} F(Y_0) & \xrightarrow{\tilde{\pi}_1} & G/H \\ {\scriptstyle \tilde{\pi}_2}\downarrow & \nearrow_{\psi_*} & \\ G_0/H_0 & & \end{array}$$

Por um lado, $\tilde{\pi}_1(y_0) = y_0 H, \forall y_0 \in Y_0$. Por outro lado, $\forall y_0 \in Y_0$,

$$\psi_*\tilde{\pi}_2(y_0) = \psi_*\tilde{\pi}_2 p(y_0) = \psi_*\delta(y_0) =$$

$$= \psi_*\rho_0\rho_1(y_0) = \psi_*(\rho_1(y_0)H_0) = \psi(\rho_1(y_0))H = \pi(y_0)H = y_0 H.$$

Assim, pela unicidade de $\tilde{\pi}_1$ na propriedade universal do grupo livre $F(Y_0)$, seque que

$$\tilde{\pi}_1 = \psi_*\tilde{\pi}_2. \tag{1.12}$$

Pelo Lema 1.15 (p. 12),

$$\psi_* \text{ é isomorfismo de grupos } \Leftrightarrow ker(\tilde{\pi}_1) = ker(\tilde{\pi}_2). \tag{1.13}$$

Como $H_0 = \langle \rho_1(X) \rangle \lhd G_0$, pelo Lema 1.16 (p. 12), temos que

$$ker(\delta) = ker(\rho_0\rho_1) = \rho_1^{-1}(ker(\rho_0)) = \rho_1^{-1}(H_0) = \rho_1^{-1}\rho_1(\langle X \rangle)$$

e, como $ker(\rho_1) = \langle T \rangle^{F(X \cup Y_0)}$, pela Proposição 1.1 a) (p. 5),

$$\rho_1^{-1}\rho_1(\langle X \rangle) = \langle X \rangle ker(\rho_1) = \langle X \rangle \langle T \rangle^{F(X \cup Y_0)} = \langle X \cup T^{F(X \cup Y_0)} \rangle.$$

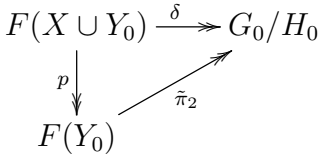
Logo,

$$ker(\delta) = \langle X \cup T^{F(X \cup Y_0)} \rangle$$

e, portanto,

$$ker(\delta) = \langle ker(\delta) \rangle^{F(X \cup Y_0)} = \langle \langle X \cup T^{F(X \cup Y_0)} \rangle \rangle^{F(X \cup Y_0)} = \langle T \cup X \rangle^{F(X \cup Y_0)}.$$

Temos também o seguinte diagrama comutativo, onde os três homomorfismos de grupos envolvidos são epimorfismos de grupos:



Daí que, pelo Lema 1.14 (p. 12),

$$ker(\tilde{\pi}_2) = p(ker(\delta)) = p(\langle T \cup X \rangle^{F(X \cup Y_0)}) = \langle p(T \cup X) \rangle^{F(Y_0)}.$$

Como $p(X) = \{1_{F(Y_0)}\}$, concluímos que

$$p(T) = p(R) \cup p(\Delta) \cup p(\Omega) = \{1_{F(Y_0)}\} \cup \{\tilde{s}\}_{s \in S} \cup \{1_{F(Y_0)}\}.$$

Observando que $\{\tilde{s}\}_{s \in S} = \theta(S) = \tilde{S}$, concluímos que

$$ker(\tilde{\pi}_2) = \langle \tilde{S} \rangle^{F(Y_0)}.$$

Por (1.11) (p. 40), segue que $ker(\tilde{\pi}_1) = ker(\tilde{\pi}_2)$. E, portanto, por (1.13) (p. 41), ψ_* é isomorfismo de grupos. □

Proposição 1.30. *Todo grupo Q abeliano finitamente gerado é um grupo finitamente apresentável.*

Demonstração. Como Q é um grupo abeliano finitamente gerado, pelo Teorema 1.5 (p. 26) temos que $Q = F \oplus K$, onde F é um grupo abeliano livre e $K = \{q \in Q : |q| < \infty\}$ é um grupo finito. Sendo assim, segue que $F \cong Q/K$ pelo Teorema 1.2 (p. 3) (2º Teorema de Isomorfismo para Grupos), logo Q/K é grupo abeliano livre e também, pela Proposição 1.18 (p. 24), finitamente gerado e, portanto, finitamente apresentável, pois $Q/K \cong \mathbf{Z}^n$, que é finitamente apresentável. Por outro lado, como K é grupo finito, concluímos também que K é grupo finitamente apresentável pela Proposição 1.29 (p. 37). Assim, pelo Teorema 1.11 (p. 37), concluímos que Q é grupo finitamente apresentável. □

Proposição 1.31. *Sejam H um grupo finitamente gerado, M um grupo finitamente apresentável e $\rho : H \twoheadrightarrow M$ um epimorfismo de grupos. Então, existem $s \in \mathbb{Z}_+$ e $h_1, \cdots, h_s \in ker(\rho)$ tais que*

$$ker(\rho) = \langle h_1^H, \cdots, h_s^H \rangle,$$

onde $h_j^H = \{h^{-1}h_j h \in H : h \in H\}$ para $1 \leq j \leq s$.

Demonstração. Como H é finitamente gerado, pelo Lema 1.35 (p. 35), temos que existe apresentação $\langle X|R \rangle$ de H tal que X é um conjunto finito, isto é, $H \cong F(X)/\langle R \rangle^{F(X)}$. Temos, então, os seguintes homomorfismos de grupos:

$$X \overset{i}{\hookrightarrow} F(X) \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \frac{F(X)}{\langle R \rangle^{F(X)}} \overset{\varphi}{\to} H \overset{\rho}{\twoheadrightarrow} M$$

onde i é a função canônica na construção do grupo livre $F(X)$, π é o epimorfismo de grupos projeção canônica e φ é um isomorfismo de grupos. Definamos $\tau : F(X) \to M$ por $\tau := \rho\varphi\pi$. Segue que τ é epimorfismo de grupos, pois ρ, φ, π o são. Pelo Teorema 1.1 (p. 3) (1^o Teorema de Isomorfismo para Grupos), concluímos que $M \cong F(X)/ker(\tau)$, logo $M \cong F(X)/\langle ker(\tau)\rangle^{F(X)}$, portanto $\langle X|ker(\tau)\rangle$ é uma apresentação de M, onde X é conjunto finito. Pela Proposição 1.26 (p. 36), existe subconjunto finito $S \subseteq ker(\tau)$ tal que $M = \langle X|S\rangle$ com $ker(\tau) = \langle S\rangle^{F(X)}$.

Observe agora que $ker(\rho) = \varphi\pi(ker(\tau))$. De fato, se $h \in ker(\rho)$, como $\varphi\pi : F(X) \twoheadrightarrow H$ é epimorfismo de grupos, existe $w \in F(X)$ tal que $h = \varphi\pi(w)$. Agora, $\tau(w) = \rho\varphi\pi(w) = \rho(h) = 1$. Daí que $w \in ker(\tau)$ e, portanto, $h \in \varphi\pi(ker(\tau))$. Por outro lado, dado $h \in \varphi\pi(ker(\tau)) \subseteq H$, temos que $h = \varphi\pi(w)$ tal que $w \in ker(\tau)$, logo $\rho(h) = \rho\varphi\pi(w) = \tau(w) = 1$, isto é, $h \in ker(\rho)$.

Desta forma, $ker(\rho) = \varphi\pi(ker(\tau)) = \varphi\pi(\langle S\rangle^{F(X)}) = \varphi\pi(\langle S^{F(X)}\rangle) = \langle\varphi\pi(S^{F(X)})\rangle = \langle\varphi\pi(S)^{\varphi\pi(F(X))}\rangle = \langle\varphi\pi(S)^H\rangle = \langle\varphi\pi(S)\rangle^H$. Como $S \subseteq ker(\tau)$, então $\tau(S) = \mathbf{1}$, o que implica que $\rho\varphi\pi(S) = \mathbf{1}$, isto é, $\varphi\pi(S) \subseteq ker(\rho)$. E como S é subconjunto finito de $ker(\tau)$, segue que $\varphi\pi(S)$ é conjunto finito de $ker(\rho)$. Digamos que $\varphi\pi(S) = \{h_1, \ldots, h_s\}$, onde $s \in \mathbb{Z}_+$ e $h_j \in ker(\rho)$, com $1 \leq j \leq s$. Então, $ker(\rho) = \langle\varphi\pi(S)\rangle^H = \langle\{h_1, \ldots, h_s\}\rangle^H = \langle\{h_1, \ldots, h_s\}^H\rangle = \langle h_1^H, \ldots, h_s^H\rangle$, onde $h_1 \ldots, h_s \in ker(\rho)$. □

1.1.7 Extensões HNN e Grupos Solúveis Construtíveis

Definição 1.36. *Seja G um grupo. Dizemos que G é um grupo **solúvel** se existe uma filtração normal descendente de comprimento finito de G tais que os grupos fatores são abelianos.*

Definição 1.37. *Sejam G um grupo, p um símbolo que não pertence a G (observe que $\langle p\rangle \cong \mathbb{Z}$) e A, B subgrupos de G tais que $\varphi : A \to B$ é um isomorfismo de grupos. Definimos como **extensão HNN** com grupo base G e grupos associados A e B o grupo H que possui a seguinte apresentação:*

$$H = \langle X, p|R \cup \{p^{-1}a_0p\varphi(a)_0^{-1} \in F(X \cup \{p\}) : a \in A\}\rangle,$$

onde G tem apresentação $\langle X|R\rangle, p \notin X$ e, para cada $g \in A \cup \varphi(A)$, fixamos uma palavra $g_0 \in F(X)$ cuja imagem em $G \cong \dfrac{F(X)}{\langle R\rangle^{F(X)}}$ é g. Informalmente, temos as seguintes apresentações para H:

$$H = \langle G, p|\{p^{-1}ap\varphi(a)^{-1} : a \in A\}\rangle,$$

$$H = \langle G, p|A^p = B\rangle.$$

Dizemos que H é extensão HNN com grupo base G, letra estável p e grupos associados A e B.

Definição 1.38. *Sejam G um grupo e $H \lhd G$. Dizemos que G é uma **extensão** de H por G/H. Dizemos ainda que G é uma **extensão finita** de H por G/H se o índice de H em G é finito, isto é, $[G : H] < \infty$.*

Definição 1.39. *Seja G um grupo solúvel. Dizemos que G é um **grupo solúvel construtível** se o mesmo pode ser obtido do grupo trivial $\mathbf{1}$ com as duas seguintes operações:*

i) extensão HNN com base e grupos associados construtíveis;

ii) extensão finita de grupos construtíveis.

Dito de outra forma, seja $\mathcal{C}$ a menor coleção de grupos que satisfaz os três itens abaixo:

i) $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$;

ii) Se $G_0, A, B \in \mathcal{C}$ e p é um símbolo não pertencente a G_0, então a extensão HNN H com grupo base G_0, letra estável p e grupos associados A e B pertence a $\mathcal{C}$, isto é, $H = \langle G_0, p | \{p^{-1}ap\varphi(a)^{-1} : a \in A\}\rangle \in \mathcal{C}$, onde $\varphi : A \to B$ é um isomorfismo de grupos;

iii) Se $H \in \mathcal{C}$ e $H \lhd G$ tal que $[G : H] < \infty$, então $G \in \mathcal{C}$.

Então, dizemos que um grupo solúvel G é um grupo solúvel construtível se $G \in \mathcal{C}$.

Exemplo 1.4. O grupo solúvel trivial $\mathbf{1}$ é um grupo solúvel construtível.

Exemplo 1.5. Como toda extensão finita de um grupo solúvel construtível é um grupo solúvel construtível, segue que todo grupo solúvel finito é um grupo solúvel construtível.

Exemplo 1.6. Observemos que $\mathbf{Z}$ é um grupo solúvel e que $\mathbf{Z}$ é a extensão HNN com base o grupo trivial $\mathbf{1}$. Segue que $\mathbf{Z}$ é um grupo solúvel construtível.

1.2 Propriedades Básicas de Módulos e Definições Preliminares

Nesta seção R **denotará um anel associativo com identidade** e, a menos que se diga ao contrário, **todos os módulos serão considerados como módulos à direita**.

1.2.1 Alguns Resultados sobre Módulos Arbitrários

Teorema 1.12 (1º Teorema de Isomorfismo para Módulos)**.** *Sejam M, N R-módulos à direita e $\varphi : M \to N$ um homomorfismo de R-módulos à direita. Então,*

$$M/ker(\varphi) \cong Im(\varphi).$$

Tal isomorfismo de R-módulos à direita é dado por

$$m + ker(\varphi) \mapsto \varphi(m),$$

para todo $m \in M$.

Demonstração. (Ver [18, Theorem 2.11 (First Isomorphism Theorem), p. 43].) □

Teorema 1.13 (2º Teorema de Isomorfismo para Módulos)**.** *Sejam M um R-módulo à direita e N_1, N_2 R-submódulos de M. Então,*

$$N_1/(N_1 \cap N_2) \cong (N_1 + N_2)/N_2.$$

Demonstração. (Ver [18, Theorem 2.12 (Second Isomorphism Theorem), p. 44].) □

Teorema 1.14 (3º Teorema de Isomorfismo para Módulos)**.** *Sejam M um R-módulo à direita e N_1, N_2 R-submódulos de M tais que $N_2 \subseteq N_1$. Então,*

$$(M/N_2)/(N_1/N_2) \cong M/N_1.$$

Demonstração. (Ver [18, Theorem 2.13 (Third Isomorphism Theorem), p. 44].) □

Teorema 1.15 (Teorema de Correspondência para Módulos)**.** *Sejam M um R-módulo à direita, N um R-submódulo de M, $\pi : M \twoheadrightarrow M/N$ o homomorfismo de R-módulos à direita projeção canônica, $\mathcal{A}$ a família de R-submódulos de M os quais contêm N e $\mathcal{B}$ a família de R-submódulos de M/N. Então, existe uma função bijetiva $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ dada por*

$$A \mapsto \pi(A) = A/N, \text{ para todo } A \in \mathcal{A},$$

onde $\theta^{-1} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ é dada por

$$B \mapsto \pi^{-1}(B), \text{ para todo } B \in \mathcal{B}.$$

Além disso, dados $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, $A_1 \subseteq A_2$ se, e somente se, $A_1/N \subseteq A_2/N$.

Demonstração. (Ver [18, Theorem 2.14 (Correspondence Theorem), p. 45].) □

Definição 1.40. *Sejam R um anel e M um R-módulo à direita. Dados N_1, N_2 R-submódulos de M tais que $N_2 \subseteq N_1$, dizemos que o módulo quociente N_1/N_2 é uma* ***seção*** *de M.*

Lema 1.36. *Sejam R um anel, M, N R-módulos à direita, M_1, M_2 R-submódulos de M e N_1, N_2 R-submódulos de N tais que $M_2 \subseteq M_1$, $N_2 \subseteq N_1$. Se $\varphi_1 : M_1 \to N_1$ e $\varphi_2 = \varphi_1|_{M_2} : M_2 \to N_2$ são isomorfismos de R-módulos à direita, então*

$$M_1/M_2 \cong N_1/N_2.$$

Demonstração. Seja $\psi : M_1/M_2 \to N_1/N_2$ definida por

$$\psi(m_1 + M_2) = \varphi_1(m_1) + N_2.$$

Vamos mostrar que ψ está bem definida. Dados $m_1 + M_2, x_1 + M_2 \in M_1/M_2$ tais que $m_1 + M_2 = x_1 + M_2$, segue que $m_1 - x_1 \in M_2 = \varphi_2^{-1}(N_2)$, daí que $\varphi_2(m_1 - x_1) \in N_2$, isto é, $\varphi_1(m_1 - x_1) \in N_2$, pois $\varphi_2 = \varphi_1|_{M_2}$. Assim, $\varphi_1(m_1) - \varphi_1(x_1) \in N_2$ e, portanto, $\varphi_1(m_1) + N_2 = \varphi_1(x_1) + N_2$, isto é, $\psi(m_1 + M_2) = \psi(x_1 + M_2)$.

Vamos mostrar agora que ψ é injetiva. Dados $m_1 + M_2, x_1 + M_2 \in M_1/M_2$ tais que $\varphi_1(m_1) + N_2 = \varphi_1(x_1) + N_2$, temos que $\varphi_1(m_1 - x_1) \in N_2$, logo $m_1 - x_1 \in \varphi_1^{-1}(N_2) = \varphi_2^{-1}(N_2)$, pois $\varphi_2 = \varphi_1|_{M_2}$. Como $\varphi_2^{-1}(N_2) = M_2$, segue que $m_1 - x_1 \in M_2$ e, portanto, $m_1 + M_2 = x_1 + M_2$.

Por construção é claro que ψ é sobrejetiva. Como também é claro que ψ é homomorfismo de R-módulos à direita. □

1.2.2 Anel de Grupo e Ações de Grupos sobre Aneis e Módulos

Seja M um R-módulo à direita e G um grupo. Nesta Dissertação, quando estivermos considerando uma ação à direita de G sobre M, na verdade, estaremos considerando ação à direita de G sobre o grupo abeliano subjacente M.

Definição 1.41. *Sejam G um grupo e K um anel comutativo. O* ***anel de grupo com coeficientes em*** *K, denotado por KG, é o K-módulo livre com base G (a definição de módulos livre se encontra na Definição 3.1 (p. 97). Assim,*

$$KG := \bigoplus_{g\in G} Kg = \{\sum_{g\in G} x_g g : x_g \in K\},$$

onde $x_g = 0$ exceto para um número finito de $x_g \in K$, com as operações soma (denotada por $+$) e multiplicação (denotada por $\cdot$) dadas a seguir, para todos $\sum_{g\in G} x_g g, \sum_{g\in G} y_g g, \sum_{h\in G} x_h h \in KG$:

$$(\sum_{g\in G} x_g g) + (\sum_{g\in G} y_g g) := \sum_{g\in G}(x_g + y_g)g,$$

$$(\sum_{g\in G} x_g g) \cdot (\sum_{h\in G} x_h h) := \sum_{g\in G}\sum_{h\in G}(x_g x_h)gh.$$

A igualdade de elementos de KG é dada por

$$\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{g\in G} y_g g \Leftrightarrow x_g = y_g, \forall g \in G,$$

para todos $\sum_{g\in G} x_g g, \sum_{g\in G} y_g g \in KG$.

Com as operações definidas acima, segue que KG é de fato um anel.

Observação 1.7. Observe que KG é um anel comutativo se, e somente se, G é um grupo abeliano.

Notação 1.11. Seja R um anel associativo com identidade. Denotaremos por $Aut(R)$ o grupo de automorfismos de R.

Definição 1.42. *Sejam R um anel e G um grupo. Dizemos que G* ***age à direita sobre*** *R se existe um anti-homomorfismo de grupos $\alpha : G \to Aut(R)$, denominado ação à direita de G sobre R (observe que $\alpha(g)$ é automorfismo de R). Denotaremos $\alpha(g)(r)$ por r^g, $\forall g \in G$ e $\forall r \in R$.*

Observação 1.8. Sejam R um anel e G um grupo agindo à direita sobre R. Temos, então, as seguintes regras:

$$r^{1_G} = r, \quad (r^{g_1})^{g_2} = r^{g_1 g_2}, \quad (r_1 + r_2)^g = r_1^g + r_2^g, \quad (r_1 r_2)^g = r_1^g r_2^g$$

$$1_R^g = 1_R, \quad (r^g)^{g^{-1}} = (r^{g^{-1}})^g = r, \quad \text{e} \quad (r^{-1})^g = (r^g)^{-1},$$

para todos $g_1, g_2, g \in G, r, r_1, r_2 \in R$.

Sejam R um anel e G um grupo. Dizemos também que G age à esquerda sobre R se existe um homomorfismo de grupos $\beta : G \to Aut(R)$, denominado ação à esquerda de G sobre R. Denotamos $\beta(g)(r)$ por ${}^{g}r$, $\forall g \in G$ e $\forall r \in R$.

Neste caso, com relação às regras descritas na Observação 1.8 (p. 46), dados $g_1, g_2 \in G$ e $r \in R$, temos que ${}^{g_1 g_2}r = {}^{g_1}({}^{g_2}r)$. As demais regras na Observação 1.8 (p. 46) valem de forma idêntica para a ação à esquerda de G sobre R.

Outro fato a se observar é que, sendo $\beta : G \to Aut(R)$ uma ação à esquerda de G sobre R, podemos obter $\alpha : G \to Aut(R)$, que é uma ação à direita de G sobre R, bastando para isso que definamos

$$\alpha(g)(r) := \beta(g^{-1})(r), \text{ isto é, } r^g := {}^{g^{-1}}r.$$

Analogamente, obtemos de uma ação à direita uma outra ação à esquerda.

Nesta Dissertação,

toda ação de um grupo sobre um anel será à direita.

Definição 1.43. *Sejam R um anel e G um grupo agindo à direita sobre R. Dizemos que G* ***age trivialmente à direita sobre*** *R se $r^g = r, \forall r \in R$ e $\forall g \in G$.*

Proposição 1.32. *Sejam R um anel e G um grupo. Então, G age à direita sobre R se, e somente se, existe uma função $\boldsymbol{a} : R \times G \to R$ tal que, $\forall r, r_1, r_2 \in R$ e $g, g_1, g_2 \in G$,*

i) $\boldsymbol{a}(r, 1_G) = r$;

ii) $\boldsymbol{a}(r, g_1 g_2) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}(r, g_1), g_2)$;

iii) $\boldsymbol{a}(r_1 + r_2, g) = \boldsymbol{a}(r_1, g) + \boldsymbol{a}(r_2, g)$;

iv) $\boldsymbol{a}(r_1 r_2, g) = \boldsymbol{a}(r_1, g)\boldsymbol{a}(r_2, g)$;

v) $\boldsymbol{a}(1_R, g) = 1_R$.

Demonstração. Análoga à Demonstração da Proposição 1.15 (p. 22). □

Proposição 1.33. *Sejam G um grupo e M um grupo abeliano. Se M é um $\mathbf{Z}G$-módulo à direita, então existe uma ação à direita de G sobre o grupo abeliano M dada por, $\forall g \in G$ e $\forall m \in M$,*

$$m^g := m(1g) \in \mathbf{Z}G.$$

Reciprocamente, se existe ação à direita de G sobre o grupo abeliano M, então M é um $\mathbf{Z}G$-módulo à direita, onde o produto do anel $\mathbf{Z}G$ sobre M é dado por, $\forall m \in M$ e para todo $\sum_{g \in G} x_g g \in \mathbf{Z}G$, com $x_g \in \mathbf{Z}$,

$$m(\sum_{g \in G} x_g g) := \sum_{g \in G} x_g m^g,$$

onde a soma e a multiplicação em $\mathbf{Z}G$ são dadas como na Definição 1.41 (p. 46).

Demonstração. Basta usar as definições de módulo, anel de grupo e ação de grupos sobre grupo (abeliano). □

A Proposição 1.33 (p. 47) justifica o fato de um $\mathbf{Z}G$-módulo à direita M ser chamado de G-módulo M, onde G é um grupo qualquer, uma vez que temos ação do grupo G sobre o grupo abeliano M.

Proposição 1.34. *Sejam G, H grupos quaisquer, A um grupo abeliano e $\varphi : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Então,*

a) *Se A é um $\mathbf{Z}H$-módulo à direita, então A é um $\mathbf{Z}G$-módulo à direita, onde a ação de G sobre A é dada, $\forall a \in A$ e $\forall g \in G$, por*

$$a^g := a^{\varphi(g)}.$$

b) *Se A é um $\mathbf{Z}G$-módulo à direita, φ é epimorfismo de grupos e o subgrupo $ker(\varphi)$ age trivialmente à direita sobre o grupo abeliano A, então A é um $\mathbf{Z}H$-módulo à direita, onde a ação de H sobre A é dada, $\forall a \in A$, $\forall h \in H$ e para algum $g \in \varphi^{-1}(\{h\})$, por*

$$a^h := a^g.$$

Demonstração. ***a)*** Usando a Proposição 1.33 (p. 47), definamos a ação à direita do grupo G sobre o $\mathbf{Z}H$-módulo à direita A por

$$a^g := a^{\varphi(g)}, \tag{1.14}$$

$\forall g \in G$ e $\forall a \in A$. Precisamos mostrar, pela Proposição 1.15 (p. 22), que:

i) em (1.14) (p. 48) temos de fato uma ação bem definida;

ii) $a^{1_G} = a, \forall a \in A$;

iii) $a^{g_1 g_2} = (a^{g_1})^{g_2}$, $\forall g_1, g_2 \in G$ e $\forall a \in A$;

iv) $(a_1 + a_2)^g = a_1^g + a_2^g$, $\forall g \in G$ e $\forall a_1, a_2 \in A$, onde $+$ é a operação do grupo abeliano A.

Façamos a seguir a demonstração de i), ii), iii) e iv).

i) Sejam $g_1, g_2 \in G$ tais que $g_1 = g_2$. Então, $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$, logo, $\forall a \in A, a^{\varphi(g_1)} = a^{\varphi(g_2)}$, pois H age sobre o grupo abeliano A e, portanto, $a^{g_1} = a^{g_2}$.

ii) $\forall a \in A, a^{1_G} = a^{\varphi(1_G)} = a^{1_H} = a$.

iii) $\forall g_1, g_2 \in G$ e $\forall a \in A, a^{g_1 g_2} = a^{\varphi(g_1 g_2)} = a^{\varphi(g_1)\varphi(g_2)} = (a^{\varphi(g_1)})^{\varphi(g_2)} = (a^{g_1})^{g_2}$.

iv) $\forall g \in G$ e $\forall a_1, a_2 \in A, (a_1 + a_2)^g = (a_1 + a_2)^{\varphi(g)} = a_1^{\varphi(g)} + a_2^{\varphi(g)} = a_1^g + a_2^g$.

b) Como neste item estamos considerando φ sobrejetivo, temos que, $\forall h \in H$, existe $g \in G$ tal que $h = \varphi(g)$, isto é, $\varphi^{-1}(\{h\}) \neq \emptyset$. Usando a Proposição 1.33 (p. 47), definamos, então, a ação à direita do grupo H sobre o grupo abeliano A por

$$a^h := a^g, \tag{1.15}$$

$\forall a \in A, \forall h \in H$ e para algum $g \in \varphi^{-1}(\{h\})$. Precisamos mostrar, pela Proposição 1.15 (p. 22), que:

i) em (1.15) (p. 48) temos de fato uma ação bem definida;

ii) $a^{1_H} = a, \forall a \in A$;

iii) $a^{h_1 h_2} = (a^{h_1})^{h_2}$, $\forall h_1, h_2 \in H$ e $\forall a \in A$;

iv) $(a_1 + a_2)^h = a_1^h + a_2^h$, $\forall h \in H$ e $\forall a_1, a_2 \in A$, onde $+$ é a operação do grupo abeliano A.

Façamos a seguir a demonstração de i), ii), iii) e iv).

i) Sejam $h_1, h_2 \in H$ tais que $h_1 = h_2$. Como φ é sobrejetivo, $h_1 = \varphi(g_1)$ e $h_2 = \varphi(g_2)$ para alguns $g_1, g_2 \in G$, logo $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$, o que implica que $g_1 g_2^{-1} \in ker(\varphi)$ e, portanto, $\forall a \in A, a^{g_1 g_2^{-1}} = a$, pois $ker(\varphi)$ age trivialmente à direita sobre o grupo abeliano A. Daí que $a^{g_2} = (a^{g_1 g_2^{-1}})^{g_2} = a^{(g_1 g_2^{-1}) g_2} = a^{g_1 (g_2^{-1} g_2)} = a^{g_1 1_G} = a^{g_1}$. Desta forma, temos que $a^{g_1} = a^{g_2}$, isto é, $a^{h_1} = a^{h_2}$.

ii) $\forall a \in A, a^{1_H} = a^{1_G} = a$.

iii) $\forall h_1, h_2 \in H$, como φ é sobrejetivo, temos que $h_1 = \varphi(g_1)$ e $h_2 = \varphi(g_2)$ para alguns $g_1, g_2 \in G$. Assim, $\forall a \in A, a^{h_1 h_2} = a^{g_1 g_2} = (a^{g_1})^{g_2} = (a^{h_1})^{h_2}$.

iv) $\forall h \in H$, da sobrejetividade de φ, temos que $h = \varphi(g)$ para algum $g \in G$. Assim, $\forall a_1, a_2 \in A, (a_1 + a_2)^h = (a_1 + a_2)^g = a_1^g + a_2^g = a_1^h + a_2^h$.

□

Corolário 1.5. *Sejam G um grupo, A um $\mathbf{Z}G$-módulo à direita e $H \lhd G$ agindo trivialmente à direita sobre A. Então, o grupo quociente G/H age à direita sobre A através da seguinte ação:*

$$a^{gH} := a^g,$$

para toda classe lateral $gH \in G/H$ e $\forall a \in A$.

Demonstração. Seja $\pi : G \twoheadrightarrow G/H$ o epimorfismo de grupos projeção canônica. Temos que $ker(\pi) = H$, o qual age trivialmente à direita sobre o grupo abeliano A. Pela Proposição 1.34 b) (p 48), temos a afirmação do Corolário. □

A Proposição 1.34 (p. 48) garante a seguinte Definição:

Definição 1.44. *Sejam G, H grupos, $\varphi : G \to H$ um homomorfismo de grupos e A um grupo abeliano.*

a) *Se A é um $\mathbf{Z}H$-módulo à direita, então dizemos que A* ***é um $\mathbf{Z}G$-módulo à direita via homomorfismo de grupos*** *φ quando a ação de G sobre A é dada por*

$$a^g := a^{\varphi(g)},$$

$\forall g \in G$ e $\forall a \in A$;

b) *Se A é um $\mathbf{Z}G$-módulo à direita, φ é um epimorfismo de grupos e $ker(\varphi)$ age trivialmente à direita sobre A, então dizemos que A* ***é um $\mathbf{Z}H$-módulo à direita via homomorfismo de grupos*** *φ quando a ação de H sobre A é dada por*

$$a^h := a^g,$$

$\forall a \in A, \forall h \in H$ e para algum $g \in \varphi^{-1}(\{h\})$.

Nesta Dissertação, sendo G um grupo, A um $\mathbf{Z}G$-módulo à direita, $H \lhd G$ agindo trivialmente à direita sobre o grupo abeliano A e $\pi : G \twoheadrightarrow G/H$ o epimorfismo de grupos projeção canônica, a ação à direita de G/H sobre A será a ação via homomorfismo de grupos π, isto é, para toda classe lateral $gH \in G/H$ e $\forall a \in A$,

$$a^{gH} = a^g.$$

Definição 1.45. *Sejam R um anel associativo com identidade e M um R-módulo à direita. Definimos o* ***centralizador de*** *M* ***em*** *R como sendo o conjunto*

$$C_R(M) := \{r \in R : mr = m, \forall m \in M\}.$$

Observemos que, caso $M \neq \mathbf{0}$, então $C_R(M)$ não é subanel de R, já que $C_R(M)$ não é fechado com relação à adição em R.

Definição 1.46. *Sejam R um anel associativo com identidade e M um R-módulo à direita. Definimos o* ***anulador de*** *M* ***em*** *R como sendo o conjunto*

$$Ann_R(M) := \{r \in R : mr = 0, \forall m \in M\}.$$

Observemos que $Ann_R(M)$ é ideal bilateral em R.

Observação 1.9. Sejam R um anel associativo com identidade e M um R-módulo à direita. Temos, então, a seguinte relação entre $C_R(M)$ e $Ann_R(M)$.

Para todo $m \in M$, dado $r \in R$,

$$r \in C_R(M) \Leftrightarrow mr = m \Leftrightarrow m(r - 1_R) = 0_M \Leftrightarrow r - 1_R \in Ann_R(M) \Leftrightarrow r \in 1_R + Ann_R(M).$$

Como $m \in M$ e $r \in R$ foram tomados arbitrários, isso mostra que

$$C_R(M) = 1_R + Ann_R(M).$$

Proposição 1.35. *Sejam G um grupo e F um grupo agindo à direita sobre G. Então, existe ação à direita de F sobre o anel de grupo $\mathbf{Z}G$ dada, $\forall f \in F$, por*

$$\lambda^f := \sum_{g \in G} x_g g^f,$$

para todo $\lambda = \sum_{g \in G} x_g g \in \mathbf{Z}G$, com $x_g \in \mathbf{Z}$.

Demonstração. Dados $f \in F$ e $\lambda = \sum_{g\in G} x_g g \in \mathbf{Z}G$, com $x_g \in \mathbf{Z}$, definindo-se $\boldsymbol{a} : \mathbf{Z}G \times F \to \mathbf{Z}G$ por $\boldsymbol{a}(\lambda, f) := \lambda^f = \sum_{g\in G} x_g g^f$, temos que claramente $\boldsymbol{a}$ está bem definida. Agora, usando a Proposição 1.32 (p. 47), basta mostrarmos os seguintes itens:

i) $\lambda^{1_F} = \lambda, \forall \lambda \in \mathbf{Z}G$;

ii) $\lambda^{f_1 f_2} = (\lambda^{f_1})^{f_2}, \forall f_1, f_2 \in F, \lambda \in \mathbf{Z}G$;

iii) $(\lambda_1 + \lambda_2)^f = \lambda_1^f + \lambda_2^f, \forall f \in F, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{Z}G$;

iv) $(\lambda_1\lambda_2)^f = \lambda_1^f \lambda_2^f, \forall f \in F, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{Z}G$;

v) $1_{\mathbf{Z}G}^f = 1_{\mathbf{Z}G}, \forall f \in F$.

A demonstração dos itens acima é feita através dos cálculos de rotina. □

Lema 1.37. *Sejam G um grupo, A um $\mathbf{Z}G$-módulo à direita (Pela Proposição 1.33 (p. 47) G age à direita sobre A) e F um grupo agindo à direita sobre G e à direita sobre A cuja ação seja compatível com a ação à direita de G sobre A. Dados $a \in A$ e $\lambda = \sum_{g\in G} x_g g \in \mathbf{Z}G$, com $x_g \in G$, temos que, $\forall f \in F$,*

$$(a\lambda)^f = a^f \lambda^f.$$

Demonstração. Usando as Proposições 1.33 (p. 47) e 1.35 (p. 50), temos que

$$(a\lambda)^f = (a(\sum_{g\in G} x_g g))^f = (\sum_{g\in G} x_g (a^g))^f = \sum_{g\in G} x_g (a^g)^f = \sum_{g\in G} x_g (a^f)^{g^f} = a^f (\sum_{g\in G} x_g g^f) = a^f \lambda^f.$$

□

Lema 1.38. *Sejam G um grupo, A um $\mathbf{Z}G$-módulo à direita (Pela Proposição 1.33 (p. 47) G age à direita sobre A) e F um grupo agindo à direita sobre G e à direita sobre A cuja ação seja compatível com a ação à direita de G sobre A. Então, o subconjunto $C_{\mathbf{Z}G}(A)$ é F-invariante.*

Demonstração. Seja $\lambda \in C_{\mathbf{Z}G}(A)$. Então, $a\lambda = a, \forall a \in A$. Daí que, $\forall a \in A$ e $\forall f \in F, a^{f^{-1}}\lambda = a^{f^{-1}}$ e, portanto, usando o Lema 1.37 (p. 51), $a = (a^{f^{-1}})^f = (a^{f^{-1}}\lambda)^f = a\lambda^f$. Deduzimos, assim, que $C_{\mathbf{Z}G}(A)$ é F-invariante. □

Proposição 1.36. *Sejam G, H grupos e $\varphi : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Então, φ induz uma função $\varphi_\# : \mathbf{Z}G \to \mathbf{Z}H$ definida por*

$$\varphi_\#(\sum_{g\in G} x_g g) = \sum_{g\in G} x_g \varphi(g),$$

para todo $\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbf{Z}G$, onde $x_g \in \mathbf{Z}$.

Demonstração. Por verificação imediata, temos que $\varphi_\#$ é uma função bem definida. □

Observação 1.10. Sejam G, H grupos, $\varphi : G \to H$ um homomorfismo de grupos e $\varphi_\# : \mathbf{Z}G \to \mathbf{Z}H$ definida como na Proposição 1.36 (p. 51). Observe que

$$\varphi_\#(\sum_{g\in G} x_g g) = \sum_{g\in G} x_g \varphi(g) = \sum_{\varphi(g)\in H} x_{\varphi(g)}\varphi(g),$$

onde $x_g, x_{\varphi(g)} \in \mathbf{Z}$. Neste último somatório, o que fizemos foi agrupar as parcelas em que os $\varphi(g)$ são iguais. Daí que,

$$x_{\varphi(g)} = \sum_{g'\in\varphi^{-1}(\{\varphi(g)\})} x'_g.$$

Observe que, se φ é um monomorfismo de grupos, então $x_{\varphi(g)} = x_g$ e, portanto, não fazemos nenhum agrupamento no somatório $\sum_{g\in G} x_g\varphi(g)$.

Proposição 1.37. *Sejam G, H grupos, $\varphi : G \to H$ um homomorfismo de grupos e $\varphi_\# : \mathbf{Z}G \to \mathbf{Z}H$ a função da Proposição 1.36 (p. 51).*

a) *$\varphi_\#$ é homomorfismo de aneis;*

b) *Se φ é epimorfismo de grupos, então $\varphi_\#$ é epimorfismo de aneis;*

c) *Seja A um $\mathbf{Z}H$-módulo à direita. Então, $\varphi_\#(C_{\mathbf{Z}G}(A)) \subseteq C_{\mathbf{Z}H}(A)$;*

d) *Seja A um $\mathbf{Z}G$-módulo à direita. Se φ é epimorfismo de grupos e $ker(\varphi)$ age trivialmente à direita sobre A, então $\varphi_\#(C_{\mathbf{Z}G}(A)) = C_{\mathbf{Z}H}(A)$.*

Demonstração. ***a)*** i) Dados $\sum_{g\in G} x_g g, \sum_{g\in G} x'_g g \in \mathbf{Z}G$,

$$\varphi_\#((\sum_{g\in G} x_g g) + (\sum_{g\in G} x'_g g)) = \varphi_\#(\sum_{g\in G}(x_g + x'_g)g) = \sum_{g\in G}(x_g + x'_g)\varphi(g) =$$

$$= (\sum_{g\in G} x_g\varphi(g)) + (\sum_{g\in G} x'_g\varphi(g)) = \varphi_\#(\sum_{g\in G} x_g g) + \varphi_\#(\sum_{g\in G} x'_g g).$$

ii) Dados $\sum_{g\in G} x_g g, \sum_{g'\in G} y_{g'} g' \in \mathbf{Z}G$,

$$\varphi_\#((\sum_{g\in G} x_g g)\cdot(\sum_{g'\in G} y_{g'} g')) = \varphi_\#(\sum_{g,g'\in G}(x_g y_{g'})gg') =$$

$$= \sum_{g,g'\in G}(x_g y_{g'})\varphi(gg') = \sum_{g,g'\in G}(x_g y_{g'})\varphi(g)\varphi(g') =$$

$$= (\sum_{g\in G} x_g\varphi(g))\cdot(\sum_{g'\in G} y_{g'}\varphi(g')) = \varphi_\#(\sum_{g\in G} x_g g)\cdot\varphi_\#(\sum_{g'\in G} y_{g'} g').$$

iii) $\varphi_{\#}(1_{\mathbf{Z}G}) = \varphi_{\#}(1_{\mathbf{Z}}1_G) = 1_{\mathbf{Z}}\varphi(1_G) = 1_{\mathbf{Z}}1_H = 1_{\mathbf{Z}H}$.

b) Pelo item ***a)*** sabemos que $\varphi_{\#}$ é homomorfismo de aneis. Basta, então, mostrarmos que $\varphi_{\#}$ é sobrejetivo.

Seja $\mu = \sum_{h\in H} x_h h \in \mathbf{Z}H$, com $x_h \in \mathbf{Z}$. Como φ é sobrejetivo, dado $h \in H$, temos que $\varphi^{-1}(\{h\}) \neq \emptyset$. Podemos, então, escrever $\mu = \sum_{g\in G} x_g\varphi(g)$, bastando para isso que escolhamos, para cada $h \in H$, um elemento $g_h \in \varphi^{-1}(\{h\})$, isto é, $\varphi(g_h) = h$, e definamos $x_g := x_h$, se $g = g_h$ e $x_g := 0$, se $g \in \varphi^{-1}(\{h\})\backslash\{g_h\}$. Segue, então, que $\mu = \sum_{g\in G} x_g\varphi(g) = \varphi_{\#}(\sum_{g\in G} x_g g)$, onde $\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbf{Z}G$. Como μ foi tomado arbitrário em $\mathbf{Z}H$, concluímos que $\varphi_{\#}$ é sobrejetivo.

c) Como A é um $\mathbf{Z}H$-módulo à direita, pela Proposição 1.34 a) (p 48), A é um $\mathbf{Z}G$-módulo à direita via homomorfismo φ.

Seja $\lambda = \sum_{g\in G} x_g g \in C_{\mathbf{Z}G}(A)$, isto é, $a\lambda = a(\sum_{g\in G} x_g g) = a, \forall a \in A$. Temos, então, pela Proposição 1.33 (p. 47) e pela Proposição 1.34 a) (p. 48) que, $\forall a \in A$,

$$a\varphi_{\#}(\lambda) = a\varphi_{\#}(\sum_{g\in G} x_g g) = a(\sum_{g\in G} x_g\varphi(g)) =$$

$$= \sum_{g\in G} x_g a^{\varphi(g)} = \sum_{g\in G} x_g a^g = a(\sum_{g\in G} x_g g) = a.$$

Segue que $\varphi_{\#}(\lambda) \in C_{\mathbf{Z}H}(A)$. Como λ foi tomado arbitrário em $C_{\mathbf{Z}G}(A)$, concluímos que $\varphi_{\#}(C_{\mathbf{Z}G}(A)) \subseteq C_{\mathbf{Z}H}(A)$.

d) Como φ é sobrejetivo e $ker(\varphi)$ age trivialmente à direita sobre A, pela Proposição 1.34 b) (p. 48), segue que A é $\mathbf{Z}H$-módulo à direita via homomorfismo φ, portanto, do item ***c)***, concluímos que $\varphi_{\#}(C_{\mathbf{Z}G}(A)) \subseteq C_{\mathbf{Z}H}(A)$. Basta, então, mostrarmos a inclusão inversa.

Seja $\mu \in C_{\mathbf{Z}H}(A) \subseteq \mathbf{Z}H$. Como φ é sobrejetivo, do item ***b)***, temos que $\varphi_{\#}$ também é sobrejetivo, daí que $\mu = \varphi_{\#}(\lambda)$, com $\lambda = \sum_{g\in G} x_g g \in \mathbf{Z}G$. Vamos mostrar que $\lambda \in C_{\mathbf{Z}G}(A)$. Pela Proposição 1.33 (p. 47) e pela Proposição 1.34 b) (p. 48), temos que, $\forall a \in A$,

$$a = a\mu = a\varphi_{\#}(\lambda) = a\varphi_{\#}(\sum_{g\in G} x_g g) = a(\sum_{g\in G} x_g\varphi(g)) =$$

$$= \sum_{g\in G} x_g a^{\varphi(g)} = \sum_{g\in G} x_g a^g = a(\sum_{g\in G} x_g g) = a\lambda.$$

Logo, $\lambda \in C_{\mathbf{Z}G}(A)$.

Como μ foi tomado arbitrário em $C_{\mathbf{Z}H}(A)$, segue que $C_{\mathbf{Z}H}(A) \subseteq \varphi_{\#}(C_{\mathbf{Z}G}(A))$, o que completa a demonstração.

□

Definição 1.47. *Sejam $\{G_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma família de grupos e $\{\varphi_n : G_n \to G_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma família de homomorfismos de grupos. Dizemos que o seguinte diagrama é uma* ***sequência de grupos****:*

$$\ldots \longrightarrow G_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} G_n \xrightarrow{\varphi_n} G_{n-1} \longrightarrow \ldots.$$

Definição 1.48. *Dizemos que uma sequência de grupos*

$$\ldots \longrightarrow G_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} G_n \xrightarrow{\varphi_n} G_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

é uma ***sequência exata de grupos*** *se $ker(\varphi_n) = Im(\varphi_{n+1}), \forall n \in \mathbb{Z}$.*

Definição 1.49. *Dizemos que que uma sequência exata de grupos da seguinte forma*

$$\boldsymbol{1} \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow \boldsymbol{1}.$$

é uma ***sequência exata curta de grupos****.*

Observação 1.11. Numa sequência exata curta de grupos

$$\mathbf{1} \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow \mathbf{1}$$

os homomorfismos $\mathbf{1} \to A$ e $C \to \mathbf{1}$ são respectivamente $1 \mapsto 1_A$ e $c \mapsto 1, \forall c \in C$. Como tal sequência é exata, concluímos que $ker(i) = \{1_A\}$ e $Im(p) = C$, ou seja, i é monomorfismo de grupos e p é epimorfismo de grupos. Desta forma, $A \cong i(A) = ker(p) \lhd B$, logo podemos enxergar A como um subgrupo normal de B. Além disso, pelo Teorema 1.1 (p. 3) (1º Teorema de Isomorfismo para Grupos), $B/ker(p) \cong Im(p) = C$, daí que

$$B/A \cong C.$$

Proposição 1.38. *Seja*

$$\boldsymbol{1} \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow \boldsymbol{1}$$

uma sequência exata curta de grupos. Se A é um grupo abeliano, então A é um $\mathbf{Z}C$-módulo à direita (equivalentemente, pela Proposição 1.33 (p. 47), existe ação à direita de C sobre A).

Demonstração. Mostraremos que o grupo abeliano A é um $\mathbf{Z}C$-módulo à direita com a operação adição (denotada por $+$) sendo a restrição da operação do grupo B sobre o grupo abeliano A e a ação à direita de C sobre o grupo abeliano A sendo, $\forall a \in A, c \in C$,

$$a^c := b^{-1}ab, \text{ para algum } b \in B \text{ tal que } p(b) = c. \tag{1.16}$$

Basta, então, mostrarmos que a expressão em (1.16) (p. 54) de fato é uma ação à direita do grupo C sobre o grupo abeliano A.

Primeiramente, vamos mostrar que a ação à direita de C sobre A dada em (1.16) (p. 54) está bem definida. Inicialmente, dados $a \in A$ e $c \in C$, temos que $a^c \in A$, pois $a^c = b^{-1}ab \in A$, já que $A \lhd B$, conforme a Observação 1.11 (p. 54). Precisamos mostrar agora que, dados $a \in A$ e $c \in C$, se $a^c = b^{-1}ab$, para algum $b \in B$ tal que $p(b) = c$, e $a^c = b_1^{-1}ab_1$, para algum $b_1 \in B$ tal que $p(b_1) = c$, então $b^{-1}ab = b_1^{-1}ab_1$. Agora, $p(bb_1^{-1}) = p(b)p(b_1)^{-1} = cc^{-1} = 1_C$,

o que implica que $bb_1^{-1} \in ker(p) = Im(i) = A$. Como A é grupo abeliano, temos que $a(bb_1^{-1}) = (bb_1^{-1})a$, logo $a = (bb_1^{-1})a(bb_1^{-1})^{-1}$, o que acarreta que $a = bb_1^{-1}ab_1b^{-1}$ e, portanto, $b^{-1}ab = b_1^{-1}ab_1$.

Agora para mostrarmos que a expressão definida em (1.16) (p. 54) define de fato uma ação à direita do grupo C sobre o grupo abeliano A, pela Proposição 1.15 (p. 22), se definirmos $f : A \times C \to A$ por $f(a, c) := a^c, \forall a \in A, c \in C$, basta mostrarmos que:

i) $\forall a \in A, a^{1_C} = a$;

ii) $\forall a \in A, c_1, c_2 \in C, a^{c_1c_2} = (a^{c_1})^{c_2}$;

iii) $\forall a_1, a_2 \in A, c \in C, (a_1 + a_2)^c = a_1^c + a_2^c$.

Mostraremos, então, i), ii) e iii) a seguir.

i) Seja $a \in A$. Temos que $a^{1_C} = 1_B^{-1}a1_B = a$.

ii) Sejam $a \in A$ e $c_1, c_2 \in C$. Como p é sobrejetivo, existem $b_1, b_2 \in B$ tais que $p(b_1) = c_1$ e $p(b_2) = c_2$. Então, $c_1c_2 = p(b_1)p(b_2) = p(b_1b_2)$. Logo,

$$a^{c_1c_2} = (b_1b_2)^{-1}a(b_1b_2).$$

Por outro lado, $a^{c_1} = b_1^{-1}ab_1$ e $a'^{c_2} = b_2^{-1}a'b_2, \forall a' \in A$, o que implica que

$$(a^{c_1})^{c_2} = (b_1^{-1}ab_1)^{c_2} = b_2^{-1}(b_1^{-1}ab_1)b_2 = (b_1b_2)^{-1}a(b_1b_2).$$

Assim, $a^{c_1c_2} = (a^{c_1})^{c_2}$.

iii) Sejam $a_1, a_2 \in A$ e $c \in C$. Como p é sobrejetivo, existe $b \in B$ tal que $p(b) = c$. Então,

$$(a_1 + a_2)^c = b^{-1}(a_1 + a_2)b =^{7} b^{-1}(a_1a_1)b = b^{-1}a_1bb^{-1}a_2b = a_1^ca_2^c = a_1^c + a_2^c.$$

□

1.2.3 Produto Tensorial de Módulos

Denotaremos nesta Subseção R e S como sendo aneis associativos com identidade, K anel comutativo, associativo com identidade, ${}_R\mathcal{M}$ como sendo a classe dos R-módulos à esquerda e $\mathcal{M}_R$ como sendo a classe dos R-módulos à direita.

Lema 1.39. *Sejam K um anel comutativo e $A \in {}_K\mathcal{M}$. Então, A pode ser visto também como elemento de $\mathcal{M}_K$ definindo-se o produto à direita de K sobre o grupo abeliano A por $ak := ka, \forall k \in K, a \in A$. Reciprocamente, se $A \in \mathcal{M}_K$, então A pode ser visto também como elemento de ${}_K\mathcal{M}$ definindo-se o produto à esquerda de K sobre o grupo abeliano A por $ka := ak, \forall k \in K, a \in A$.*

[7] Aqui usamos que a operação + de A é vista em B como a justaposição de elementos, ou seja $a_1 + a_2 \in A$ é denotado em B como a_1a_2

Demonstração. Suponhamos que $A \in {}_K\mathcal{M}$. Vamos mostrar que $A \in \mathcal{M}_K$. Precisamos verificar que, dados $a, a' \in A$ e $k, k' \in K$,

i) $a(k + k') = ak + ak'$;

ii) $(a + a')k = ak + a'k$;

iii) $a(kk') = (ak)k'$;

iv) $a1_K = a$.

Temos que i), ii) e iv) seguem naturalmente da definição do produto à direira de K sobre A e não exigem que K seja anel comutativo.

Vamos mostrar iii). Temos que $a(kk') = (kk')a = (k'k)a = k'(ka) = (ka)k' = (ak)k'$.

Analogamente, fazemos a demonstração caso $A \in \mathcal{M}_K$. □

Assim, sendo K um anel comutativo, os K-módulos à direita são também K-módulos à esquerda e vice-versa. Neste caso, denominaremos tais módulos simplesmente de K-módulos.

Definição 1.50. *Sejam R um anel associativo com identidade, $A \in \mathcal{M}_R, B \in {}_R\mathcal{M}$ e G um grupo abeliano cuja operação seja escrita em notação aditiva. Dizemos que uma função $f : A \times B \to G$ é uma função R-**biaditiva** se, dados $a, a' \in A, b, b' \in B$ e $r \in R$,*

i) $f(a + a', b) = f(a, b) + f(a', b)$;

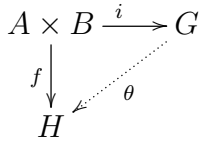
ii) $f(a, b + b') = f(a, b) + f(a, b')$;

iii) $f(ar, b) = f(a, rb)$.

*Sejam K um anel comutativo, A, B, M K-módulos. Dizemos que uma função $f : A \times B \to M$ é uma função K-**bilinear** se f é K-biaditiva e, dados $a \in A, b \in B$ e $k \in K$,*

$$f(ka, b) = f(a, kb) = kf(a, b).$$

Definição 1.51. *Sejam R um anel associativo com identidade, $A \in \mathcal{M}_R$ e $B \in {}_R\mathcal{M}$. Um **produto tensorial de A por B sobre o anel** R é um par ordenado (G, i), onde G é um grupo abeliano e $i : A \times B \to G$ é uma função R-biaditiva, sendo esse par solução do seguinte problema universal: para cada grupo abeliano H e função R-biaditiva $f : A \times B \to H$, existe um único homomorfismo de grupos abelianos $\theta : G \to H$ tal que $\theta i = f$, isto é, o seguinte diagrama é comutativo:*



Teorema 1.16 (Unicidade do Produto Tensorial)**.** *Sejam R um anel associativo com identidade, $A \in \mathcal{M}_R$ e $B \in {}_R\mathcal{M}$. Então, o produto tensorial de A por B sobre o anel R é único a menos de isomorfismo, isto é, se (G_1, i_1) e (G_2, i_2) são produtos tensoriais de A por B sobre o anel R, então existe um único isomorfismo de grupos abelianos $\eta : G_1 \to G_2$ tal que $\eta i_1 = i_2$.*

Demonstração. Como G_1, G_2 são grupos abelianos e i_1, i_2 são funções R-biaditivas, pela definição de produto tensorial, utilizando-se a propriedade universal, temos os seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} A\times B & \xrightarrow{i_1} & G_1 \\ {\scriptstyle i_2}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \theta_1} & \\ G_2 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A\times B & \xrightarrow{i_2} & G_2 \\ {\scriptstyle i_1}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \theta_2} & \\ G_1 & & \end{array}$$

isto é, existem únicos homomorfismos de grupos abelianos $\theta_1 : G_1 \to G_2$ e $\theta_2 : G_2 \to G_1$ tais que $\theta_1 i_1 = i_2$ e $\theta_2 i_2 = i_1$. Logo, $(\theta_2\theta_1)i_1 = \theta_2(\theta_1 i_1) = \theta_2 i_2 = i_1$, ou seja, $\theta_2\theta_1$ torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} A\times B & \xrightarrow{i_1} & G_1 \\ {\scriptstyle i_1}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \theta_2\theta_1} & \\ G_1 & & \end{array}$$

Mas, $id_{G_1} : G_1 \to G_1$ é também homomorfismo de grupos abelianos que também torna esse mesmo diagrama comutativo, pois $id_{G_1} i_1 = i_1$, ou seja:

$$\begin{array}{ccc} A\times B & \xrightarrow{i_1} & G_1 \\ {\scriptstyle i_1}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle id_{G_1}} & \\ G_1 & & \end{array}$$

Pela unicidade na propriedade universal temos que $\theta_2\theta_1 = id_{G_1}$. Analogamente ao que foi feito acima, segue que $\theta_1\theta_2 = id_{G_2}$. Portanto, $\theta_1 : G_1 \to G_2$ é isomorfismo de grupos abelianos com inversa θ_2. Assim, definindo-se $\eta : G_1 \to G_2$ por $\eta := \theta_1$ concluímos que G_1 e G_2 são isomorfos como grupos abelianos, sendo $\eta = \theta_1$ um isomorfismo entre eles, e $\eta i_1 = i_2$. □

Teorema 1.17 (Existência do Produto Tensorial)**.** *Sejam R um anel associativo com identidade, $A \in \mathcal{M}_R$ e $B \in {}_R\mathcal{M}$. Então, o produto tensorial de A por B sobre R existe.*

Demonstração. Seja V o grupo abeliano livre com base $A\times B$. Definamos T como o subgrupo de V gerado pelos elementos de V das seguintes três formas

$$(a+a',b)-(a,b)-(a',b), \qquad (a,b+b')-(a,b)-(a,b'), \qquad (ar,b)-(a,rb),$$

onde $a, a' \in A, b, b' \in B, r \in R$. Como V é grupo abeliano, segue que $T \lhd V$, logo V/T é grupo. Além disso, V/T é grupo abeliano pela Proposição 1.6 (p. 9). Seja $\pi : V \twoheadrightarrow V/T$ o homomorfismo de grupos projeção canônica. Como V é gerado por $A \times B$, isto é, $V = \langle A\times B\rangle$, segue, conforme a Demonstração da Proposição 1.18 (p. 24), que $V/T = \pi(V) = \pi(\langle A\times B\rangle) = \langle \pi(A\times B)\rangle = \big\langle \{(a,b)+T : a\in A, b\in B\}\big\rangle$. Seja $i : A\times B \to V/T$ definida por $i(a,b) = (a,b)+T$, ou seja, $i = \pi|_{A\times B}$. Observemos que i é R-biaditiva, pois, dados $a, a' \in A, b, b' \in B$ e $r \in R$, temos que $(a+a',b)-(a,b)-(a',b) \in T$, logo $(a+a',b)+T = ((a,b)+(a',b))+T$ e, portanto, $i(a+a',b) = i(a,b)+i(a',b)$. Analogamente, mostramos que $i(a,b+b') = i(a,b)+i(a,b')$ e que $i(ar,b) = i(a,rb)$. Vamos mostrar que $(V/T, i)$ é o produto tensorial de A por B sobre R.

Para cada grupo abeliano H e função R-biaditiva $f : A \times B \to H$, precisamos, então, demonstrar que existe um único homomorfismo de grupos abelianos $\theta : V/T \to H$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\ i\ } & V/T \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow_{\theta} & \\ H & & \end{array}$$

Agora, como V é grupo livre abeliano com base $A \times B$, segue que existe um único homomorfismo de grupos abelianos $\theta_1 : V \to H$ tal que $\theta_1 \iota = f$, onde $\iota : A \times B \to V$ é a função inclusão canônica. Assim, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\ \iota\ } & V \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow_{\theta_1} & \\ H & & \end{array}$$

Observemos que $T \subseteq ker(\theta_1)$, uma vez que f é R-biaditiva. Logo, pelo Lema 1.13 (p. 11), θ_1 induz um homorfismo de grupos abelianos $\theta_2 : V/T \to H$ tal que $\theta_2((a,b)+T) = \theta_1((a,b)) = f(a,b)$. Definamos, então, $\theta := \theta_2$. Daí que $\theta i = f$.

Suponhamos que $\theta' : V/T \to H$ seja um outro homomorfismo de grupos abelianos tal que $\theta' i = f$. Temos que, dado $v \in V$, então $v = \sum_{(a,b)\in A\times B} z_{(a,b)}(a,b)$, onde $z_{(a,b)} \in \mathbb{Z}, \forall (a,b) \in A\times B$ e quase todos $z_{(a,b)}$ são nulos. Agora, dado $w \in V/T$, temos que $w = v + T$, daí que $\theta'(w) = \theta'(v+T) = \theta'(\sum_{(a,b)\in A\times B} z_{(a,b)}((a,b)+T)) = \sum_{(a,b)\in A\times B} z_{(a,b)}\theta' i(a,b) = \sum_{(a,b)\in A\times B} z_{(a,b)} f(a,b) = \sum_{(a,b)\in A\times B} z_{(a,b)}\theta i(a,b) = \theta(\sum_{(a,b)\in A\times B} z_{(a,b)}((a,b)+T) = \theta(v+T) = \theta(w)$. Portanto, temos que θ é único.

Desta forma, vemos que $(V/T, i)$ satisfaz os requisitos da definição de produto tensorial de A por B sobre R. Definamos, então, $A \otimes_R B := V/T$. □

Notação 1.12. Tendo em vista a unicidade a menos de isomorfismo do produto tensorial pelo Teorema 1.16 (p. 56), sendo R um anel associativo com identidade, $A \in \mathcal{M}_R$ e $B \in {}_R\mathcal{M}$, denotaremos o produto tensorial de A por B sobre o anel R por $(A \otimes_R B, i)$, onde $i : A \times B \to A \otimes_R B$ é a mesma da Demonstração do Teorema 1.17 (p. 57), ou simplesmente por $A \otimes_R B$, deixando i implícita.

Notação 1.13. Sejam R um anel associativo com identidade, $A \in \mathcal{M}_R$ e $B \in {}_R\mathcal{M}$. Da demonstração do Teorema 1.17 (p. 57), sendo $i : A \times B \to V/T$, onde V é o grupo livre abeliano com base $A \times B$ e T é o subgrupo de V gerado pelos elementos de V das seguintes três formas

$$(a+a',b)-(a,b)-(a',b), \qquad (a,b+b')-(a,b)-(a,b'), \qquad (ar,b)-(a,rb),$$

onde $a, a' \in A, b, b' \in B, r \in R$, denotaremos as imagens $i(a,b) \in V/T$ por $a \otimes b$, onde $a \in A$ e $b \in B$. Desta forma, como $V/T = \langle i(A \times B)\rangle$, segue que $V/T = \big\langle \{a \otimes b \in V/T : a \in A, b \in B\}\big\rangle$. Um elemento da forma $a \otimes b$, com $a \in A, b \in B$, é chamado de **tensor puro**.

Definição 1.52. *Sejam R, S aneis associativos com identidade e A um grupo abeliano. Dizemos que o grupo abeliano A é um (R-S)-**bimódulo** se $A \in {}_R\mathcal{M}$ e $A \in \mathcal{M}_S$ e se os produtos de R e de S sobre A obedecem à seguinte relação, dados $r \in R, s \in S$ e $a \in A$:*

$$r(as) = (ra)s.$$

*Em particular, se $R = S$, diremos que A é um R-**bimódulo**. Um (R-S)-bimódulo A é denotado por ${}_RA_S$.*

Notação 1.14. Sejam R, S aneis associativos com identidade. Denotaremos, então, ${}_R\mathcal{M}_S$ como sendo a classe dos (R-S)-bimódulos.

Exemplo 1.7. Sejam K um anel comutativo, $A \in \mathcal{M}_K$ e $B \in {}_K\mathcal{M}$. Pelo Lema 1.39 (p. 55), segue que $A, B \in {}_K\mathcal{M}_K$.

Teorema 1.18. *Sejam R, S aneis associativos com identidade. Se $A \in \mathcal{M}_R$ e $B \in {}_R\mathcal{M}_S$, então $A \otimes_R B \in \mathcal{M}_S$, onde o produto de S sobre $A \otimes_R B$ é definido por:*

$$(a \otimes b)s = a \otimes (bs),$$

para todos $a \in A, b \in B$ e $s \in S$.

Semelhantemente, se $A \in {}_S\mathcal{M}_R$ e $B \in {}_R\mathcal{M}$, então $A \otimes_R B \in {}_S\mathcal{M}$, onde o produto de S sobre $A \otimes_R B$ é definido por:

$$s(a \otimes b) = (sa) \otimes b,$$

para todos $a \in A, b \in B$ e $s \in S$.

Demonstração. Consideremos o caso em que $A \in \mathcal{M}_R$ e $B \in {}_R\mathcal{M}_S$. Seja $i : A \times B \to A \otimes_R B$ dada por $i(a, b) = a \otimes b$ (i é a função R-biaditiva da definição de produto tensorial definida na Demonstração do Teorema 1.17 (p. 57)). Para todo $s \in S$ fixado, definamos $f_s : A \times B \to A \otimes_R B$ por $f_s(a, b) = a \otimes (bs)$. Observemos que f_s é uma função R-biaditiva. De fato, dados $a, a' \in A, b, b' \in B$ e $r \in R$, temos que

$$f_s(a + a', b) = (a + a') \otimes (bs) = a \otimes (bs) + a' \otimes (bs) = f_s(a, b) + f_s(a', b);$$

$$f_s(a, b + b') = a \otimes ((b + b')s) = a \otimes (bs + b's) = a \otimes (bs) + a \otimes (b's) = f_s(a, b) + f_s(a, b');$$

$$f_s(ar, b) = (ar) \otimes (bs) = a \otimes (r(bs)) = a \otimes ((rb)s) = f_s(a, rb).$$

Daí que pela propriedade universal do produto tensorial, temos que, para cada $s \in S$ fixado, existe um único homomorfismo de grupos abelianos $\theta_s : A \otimes_R B \to A \otimes_R B$ tal que $\theta_s i = f_s$, isto é, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\ i\ } & A \otimes_R B \\ {\scriptstyle f_s}\downarrow & \swarrow_{\theta_s} & \\ A \otimes_R B & & \end{array}$$

Vamos mostrar os seguintes itens:

i) Dados $s_1, s_2 \in S$, $\theta_{s_1}\theta_{s_2} = \theta_{s_2 s_1}$;

ii) Dados $s_1, s_2 \in S$, $\theta_{s_1+s_2} = \theta_{s_1} + \theta_{s_2}$;

iii) $\theta_{1_S} = id_{A\otimes_R B}$.

Para demonstrar tais igualdades de tais homomorfismos de grupos abelianos de $A \otimes_R B$ em $A \otimes_R B$, basta que mostremos a igualdade entre os mesmos sobre os geradores do grupo abeliano $A \otimes_R B$, que é o conjunto $\{a \otimes b \in A \otimes_R B : a \in A, b \in B\}$. Sendo assim, façamos as demonstrações de i), ii) e iii).

i) $\theta_{s_1}\theta_{s_2}(a \otimes b) = \theta_{s_1}(a \otimes (bs_2)) = a \otimes ((bs_2)s_1) = a \otimes (b(s_2 s_1)) = \theta_{s_2 s_1}(a \otimes b)$.

ii) $\theta_{s_1+s_2}(a \otimes b) = a \otimes (b(s_1 + s_2)) = a \otimes (bs_1 + bs_2) = a \otimes (bs_1) + a \otimes (bs_2) = \theta_{s_1}(a \otimes b) + \theta_{s_2}(a \otimes b)$.

iii) $\theta_{1_S}(a \otimes b) = a \otimes (b1_S) = a \otimes b = id_{A\otimes_R B}(a \otimes b)$.

Definindo-se $(a \otimes b)s := \theta_s(a \otimes b) = a \otimes (bs)$, por i), ii) e iii) e pelo fato de θ_s ser homomorfismo de grupos abelianos, temos o resultado.

O caso em que $A \in {}_S\mathcal{M}_R$ e $B \in_R \mathcal{M}$ tem demonstração análoga.

□

Corolário 1.6. *Seja K um anel comutativo. Se A e B são K-módulos, então $A \otimes_K B$ é também um K-módulo, onde o produto de K sobre o grupo abeliano $A \otimes_K B$ é dado por:*

$$k(a \otimes b) = (ka) \otimes b = a \otimes (kb),$$

para todos $a \in A, b \in B$ e $k \in K$.

Demonstração. Pelo Exemplo 1.7 (p. 59), temos que $A, B \in {}_K\mathcal{M}_K$, logo, pelo Teorema 1.18 (p. 59), concluímos que $A \otimes_K B \in {}_K\mathcal{M}_K$ e, para todos $a \in A, b \in B$ e $k \in K$, o produto de K sobre $A \otimes_K B$, por um lado, é dado por

$$k(a \otimes b) = (ka) \otimes b$$

e, por outro lado, é dado por

$$(a \otimes b)k = a \otimes (kb).$$

Pelo Lema 1.39 (p. 55), temos

$$(a \otimes b)k = k(a \otimes b).$$

□

Definição 1.53. *Sejam R um anel associativo com identidade, $A \in \mathcal{M}_R, B \in {}_R\mathcal{M}_S, C \in {}_S\mathcal{M}$ e G um grupo abeliano cuja operação seja escrita em notação aditiva. Dizemos que uma função $f : A \times B \times C \to G$ é uma função R-**triaditiva** se, dados $a, a' \in A, b, b' \in B, c, c' \in C$ e $r \in R$,*

i) $f(a + a', b, c) = f(a, b, c) + f(a', b, c)$;

ii) $f(a, b+b', c) = f(a, b, c) + f(a, b', c)$;

iii) $f(a, b, c+c') = f(a, b, c) + f(a, b, c')$;

iv) $f(ar, b, c) = f(a, rb, c)$ *e* $f(a, bs, c) = f(a, b, sc)$.

*Sejam K um anel comutativo, A, B, C, M K-módulos. Dizemos que uma função $f : A \times B \times C \to M$ é uma função K-**trilinear** se f é K-triaditiva e, dados $a \in A, b \in B, c \in C$ e $k \in K$,*

$$f(ka, b, c) = f(a, kb, c) = f(a, b, kc) = kf(a, b, c).$$

Teorema 1.19. *Sejam R, S aneis associativos com identidade. Se $A \in \mathcal{M}_R$, $B \in {}_R\mathcal{M}_S$ e $C \in {}_S\mathcal{M}$, então existe um isomorfismo*

$$\begin{array}{rccc} \Theta & : & A \otimes_R (B \otimes_S C) & \longrightarrow & (A \otimes_R B) \otimes_S C \\ & & a \otimes (b \otimes c) & \mapsto & (a \otimes b) \otimes c \end{array}$$

Demonstração. (Ver [18, Proposition 2.57 (Associativity), p. 80].) □

Notação 1.15. Sejam R, S aneis associativos com identidade, $A \in \mathcal{M}_R$, $B \in {}_R\mathcal{M}_S$ e $C \in {}_S\mathcal{M}$. O Teorema 1.19 (p. 61), em certo sentido[8], mostra a associatividade em produtos tensoriais. Desta forma, denotaremos $A \otimes_R (B \otimes_S C)$ e $(A \otimes_R B) \otimes_S C$ por $A \otimes_R B \otimes_S C$, esquecendo, assim, os parênteses.

Observação 1.12. Com o raciocínio e a construção feitos no Teorema 1.19 (p. 61) podemos generalizar a ideia de associatividade em produtos tensoriais. Sendo, então, $n \in \mathbb{Z}_+$, $R_1, \ldots, R_n$ aneis associativos com identidade e $A_1 \in \mathcal{M}_{R_1}, A_2 \in {}_{R_1}\mathcal{M}_{R_2}, \ldots, A_{n+1} \in {}_{R_n}\mathcal{M}$, podemos escrever o seguinte produto tensorial sem os parênteses $A_1 \otimes_{R_1} A_2 \otimes_{R_2} \otimes \ldots \otimes_{R_n} A_{n+1}$.

Aplicações do Produto Tensorial

Proposição 1.39. *Sejam G um grupo e G' o grupo comutador de G. Então, dado $i \in \mathbb{Z}_+$, existe um único epimorfismo de grupos abelianos*

$$\hat{\theta} : \otimes^i_{\mathbf{Z}}(G/G') \twoheadrightarrow \frac{\gamma_i(G)}{\gamma_{i+1}(G)},$$

dado por

$$\hat{\theta}(g_1G' \otimes \ldots \otimes g_iG') = [g_1, \ldots, g_i]\gamma_{i+1}(G),$$

para todo $g_1G' \otimes \ldots \otimes g_iG' \in \otimes^i_{\mathbf{Z}} G/G'$.

Demonstração. Observe que, pelo Lema 1.23 a) (p. 16), temos que $\dfrac{\gamma_i(G)}{\gamma_{i+1}(G)}$ é grupo abeliano e, pela Proposição 1.5 (p. 8), segue que G/G' é grupo abeliano. Definamos

$$\theta : \underbrace{G/G' \times \ldots \times G/G'}_{i \text{ vezes}} \to \frac{\gamma_i(G)}{\gamma_{i+1}(G)}$$

[8] De fato, não foi mostrado que $A \otimes_R (B \otimes_S C) = (A \otimes_R B) \otimes_S C$, mas sim que $A \otimes_R (B \otimes_S C) \cong (A \otimes_R B) \otimes_S C$ (como grupos abelianos).

por

$$\theta(g_1G', \ldots, g_iG') = [g_1, \ldots, g_i]\gamma_{i+1}(G),$$

para todo $g_1G', \ldots, g_iG' \in \underbrace{G/G' \times \ldots \times G/G'}_{i \text{ vezes}}$. Para mostrar que θ está bem definida, procedamos por indução sobre i.

Caso $i = 1$, segue que $\theta : G/G' \to G/G'$ é definida por $\theta(g_1G') = g_1G'$, para todo $g_1G' \in G/G'$. Daí que, dados $g_1G', h_1G' \in G/G'$ tais que $g_1G' = h_1G'$, segue que $\theta(g_1G') = g_1G' = h_1G' = \theta(h_1G')$.

Caso $i > 1$, dados $(g_1G', \ldots, g_iG'), (a_1G', \ldots, a_iG') \in \underbrace{G/G' \times \ldots \times G/G'}_{i \text{ vezes}}$ tais que

$$(g_1G', \ldots, g_iG') = (a_1G', \ldots, a_iG'),$$

temos que $g_jG' = a_jG'$ para $1 \leq j \leq i$, logo $g_ia_i^{-1}G' = G'$, ou seja, existe $h \in G'$ tal que

$$g_i = ha_i.$$

Precisamos mostrar que

$$[g_1, \ldots, g_i]\gamma_{i+1}(G) = [a_1, \ldots, a_i]\gamma_{i+1}(G),$$

o que é equivalente a

$$[g_1, \ldots, g_i] \in [a_1, \ldots, a_i]\gamma_{i+1}(G).$$

Vamos, então, mostrar este último fato. Pela hipótese de indução

$$[g_1, \ldots, g_{i-1}] \in [a_1, \ldots, a_{i-1}]\gamma_i(G),$$

logo existe $t \in \gamma_i(G)$ tal que

$$[g_1, \ldots, g_{i-1}] = [a_1, \ldots, a_{i-1}]t.$$

Agora,

$$[g_1, \ldots, g_i] = [[g_1, \ldots, g_{i-1}], g_i] = [[a_1, \ldots, a_{i-1}]t, g_i].$$

Usando o Lema 1.24 b) (p. 17), segue que

$$[[a_1, \ldots, a_{i-1}]t, g_i] = [[a_1, \ldots, a_{i-1}], g_i] \cdot [[a_1, \ldots, a_{i-1}], g_i, t] \cdot [t, g_i] =$$

$$= [a_1, \ldots, a_{i-1}, g_i] \cdot [a_1, \ldots, a_{i-1}, g_i, t] \cdot [t, g_i] = [a_1, \ldots, a_{i-1}, ha_i] \cdot [a_1, \ldots, a_{i-1}, g_i, t] \cdot [t, g_i].$$

Assim,

$$[g_1, \ldots, g_i] = [a_1, \ldots, a_{i-1}, ha_i] \cdot [a_1, \ldots, a_{i-1}, g_i, t] \cdot [t, g_i],$$

onde $[a_1, \ldots, a_{i-1}, g_i, t], [t, g_i] \in \gamma_{i+1}(G)$. Agora, $[a_1, \ldots, a_{i-1}, ha_i] = [[a_1, \ldots, a_{i-1}], ha_i]$. E, pelo Lema 1.24 a) (p. 17),

$$[[a_1, \ldots, a_{i-1}], ha_i] = [a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i] \cdot [a_1, \ldots, a_{i-1}, h] \cdot [a_1, \ldots, a_{i-1}, h, a_i],$$

onde $[a_1, \ldots, a_{i-1}, h] \in \gamma_{i+1}(G)$ pela Proposição 1.12 (p. 18) e $[a_1, \ldots, a_{i-1}, h, a_i] \in \gamma_{i+1}(G)$. Concluímos, então, que

$$[g_1, \ldots, g_i] = [a_1, \ldots, a_i]\beta,$$

onde

$$\beta = [a_1, \ldots, a_{i-1}, h] \cdot [a_1, \ldots, a_{i-1}, h, a_i] \cdot [a_1, \ldots, a_{i-1}, g_i, t] \cdot [t, g_i] \in \gamma_{i+1}(G),$$

ou seja, $[g_1, \ldots, g_i] \in [a_1, \ldots, a_i]\gamma_{i+1}(G)$.

Vamos mostrar agora que θ é i-aditiva.

Sejam $g_1, \ldots, g_{j-1}, g_j, g_{j+1}, \ldots, g_i, b \in G$. Usando o Lema 1.27 (p. 19), temos que

$$\theta(g_1, \ldots, g_{j-1}, g_j b, g_{j+1}, \ldots, g_i) = [g_1, \ldots, g_{j-1}, g_j b, g_{j+1}, \ldots, g_i]\gamma_{i+1}(G) =$$

$$= [g_1, \ldots, g_{j-1}, g_j, g_{j+1}, \ldots, g_i][g_1, \ldots, g_{j-1}, b, g_{j+1}, \ldots, g_i]\gamma_{i+1}(G) =$$

$$= \theta(g_1, \ldots, g_{j-1}, g_j, g_{j+1}, \ldots, g_i)\theta(g_1, \ldots, g_{j-1}, b, g_{j+1}, \ldots, g_i).$$

Agora, pela propriedade universal do produto tensorial para $\mathbf{Z}$-módulos (grupos abelianos) temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{G/G' \times \ldots \times G/G'}_{i \text{ vezes}} & \xrightarrow{p} & \bigotimes_{\mathbf{Z}}^{i} G/G' \\ {\scriptstyle\theta}\downarrow & \swarrow_{\hat{\theta}} & \\ \dfrac{\gamma_i(G)}{\gamma_{i+1}(G)} & & \end{array}$$

onde p é a função i-aditiva da definição de produto tensorial, $\bigotimes_{\mathbf{Z}}^{i} G/G'$ é o produto tensorial de i cópias do grupo abeliano G/G' sobre $\mathbf{Z}$ e $\hat{\theta}$ é o único homomorfismo de grupos abelianos que faz o diagrama comutar, isto é,

$$\hat{\theta}p = \theta. \tag{1.17}$$

Como, pelo Lema 1.20 (p. 14), $Im(\theta)$ gera $\dfrac{\gamma_i(G)}{\gamma_{i+1}(G)}$ como grupo abeliano, usando (1.17) (p. 63), segue que $\hat{\theta}$ é sobrejetivo. □

Proposição 1.40. *Sejam N um grupo nilpotente, N' o grupo comutador de N, X um subconjunto de N e $\pi : N \twoheadrightarrow N/N'$ o epimorfismo de grupos projeção canônica. Então, $N = \langle X \rangle$ se, e somente se, $N/N' = \langle \pi(X) \rangle$.*

Demonstração. Suponhamos que $N = \langle X \rangle$. Conforme a Demonstração da Proposição 1.18 (p. 24), segue que $N/N' = \pi(N) = \pi(\langle X \rangle) = \langle \pi(X) \rangle$.

Suponhamos agora que $N/N' = \langle \pi(X) \rangle$. Pelo Corolário 1.4 (p. 25), temos que

$$N = \langle X \rangle N'. \tag{1.18}$$

Vamos fazer a demonstração por indução sobre a classe de nilpotência $s \in \mathbb{Z}_+$ de N, isto é, $\gamma_s(N) \neq \mathbf{1}$ e $\gamma_{s+1}(N) = \mathbf{1}$.

Caso $s = 1$, então $N' = [N, N] = \gamma_2(N) = \mathbf{1}$. Por (1.18) (p. 63) segue que $N = \langle X \rangle$.

Caso $s > 1$, observemos primeiramente que $N/\gamma_s(N)$ é nilpotente com classe de nilpotência $s-1$, pois, pelo Lema 1.21 (p. 16), $\gamma_s(N/\gamma_s(N)) = \gamma_s(N)/\gamma_s(N) = \mathbf{1}$ e $\gamma_{s-1}(N/\gamma_s(N)) = \gamma_{s-1}(N)/\gamma_s(N) \neq \mathbf{1}$, do contrário teríamos

$$\gamma_{s-1}(N) = \gamma_s(N) = [\gamma_{s-1}(N), N] = [\gamma_s(N), N] = \gamma_{s+1}(N) = \mathbf{1},$$

que é contradição com a classe de nilpotência de N, que é s. Seja $\psi : N \twoheadrightarrow N/\gamma_s(N)$ o epimorfismo de grupos projeção canônica. Por (1.18) (p. 63) e pelo Lema 1.18 (p. 13), concluímos que $N/\gamma_s(N) = \psi(N) = \psi(\langle X\rangle N') = \psi(\langle X\rangle)\psi(N') = \langle\psi(X)\rangle\psi(N)' = \langle\psi(X)\rangle(N/\gamma_s(N))'$, isto é,

$$N/\gamma_s(N) = \langle\psi(X)\rangle(N/\gamma_s(N))'.$$

E, sendo $\varphi : N/\gamma_s(N) \twoheadrightarrow \dfrac{N/\gamma_s(N)}{(N/\gamma_s(N))'}$ o epimorfismo de grupos projeção canônica, pelo Corolário 1.4 (p. 25), resulta que

$$\frac{N/\gamma_s(N)}{(N/\gamma_s(N))'} = \langle\varphi(\psi(X))\rangle. \tag{1.19}$$

Daí que, como a classe de nilpotência de $N/\gamma_s(N)$ é $s-1$, pela hipótese de indução e por (1.19) (p. 64), temos que

$$N/\gamma_s(N) = \langle\psi(X)\rangle.$$

Portanto, pelo Corolário 1.4 (p. 25),

$$N = \langle X\rangle\gamma_s(N). \tag{1.20}$$

Agora, pela Proposição 1.39 (p. 61), existe único epimorfismo de grupos abelianos $\hat{\theta} : \bigotimes_{\mathbf{Z}}^{s} N/N' \twoheadrightarrow \gamma_s(N)$ definido por

$$\hat{\theta}(n_1N' \otimes \ldots \otimes n_sN') = [n_1, \ldots, n_s],$$

onde $n_i \in N$, com $1 \leq i \leq s$. Mas, $N/N' = \langle\pi(X)\rangle = \pi(\langle X\rangle)$ por hipótese, logo, para toda classe lateral $nN' \in N/N'$, existe $w \in \langle X\rangle$ tal que $nN' = \pi(w) = wN'$. Daí que, $n_iN' = w_iN'$, onde $w_i \in \langle X\rangle$, com $1 \leq i \leq s$. Assim, dado um tensor puro arbitrário $n_1N' \otimes \ldots \otimes n_sN'$ em $\bigotimes_{\mathbf{Z}}^{s} N/N'$, podemos escrevê-lo como $w_1N' \otimes \ldots \otimes w_sN'$, onde $w_i \in \langle X\rangle$, com $1 \leq i \leq s$, o que implica que, dado $[n_1, \ldots, n_s] \in \gamma_s(N)$, como $\hat{\theta}$ é sobrejetivo, temos que $[n_1, \ldots, n_s] = \hat{\theta}(n_1N' \otimes \ldots \otimes n_sN') = \hat{\theta}(w_1N' \otimes \ldots \otimes w_sN') = [w_1, \ldots, w_s]$, onde $w_i \in \langle X\rangle$, com $1 \leq i \leq s$. Observe que $[w_1, \ldots, w_s] \in \langle X\rangle$. Visto que, pelo Lema 1.20 (p. 14), $\gamma_s(N) = \big\langle\{[n_1, \ldots, n_s] \in N : n_1, \ldots, n_s \in N\}\big\rangle$, segue que $\gamma_s(N) = \big\langle\{[w_1, \ldots, w_s] \in \langle X\rangle : w_1, \ldots, w_s \in \langle X\rangle\}\big\rangle$, ou seja, $\gamma_s(N) \subseteq \langle X\rangle$. Agora, por (1.20) (p. 64), $N = \langle X\rangle\gamma_s(N)$, concluímos, então, que $N = \langle X\rangle$. □

Observação 1.13. Sejam C um grupo, $N \lhd C$ e a sequência de grupos

$$\mathbf{1} \to N/N' \overset{\iota}{\hookrightarrow} C/N' \overset{\rho}{\twoheadrightarrow} C/N \to \mathbf{1},$$

onde ι é o homomorfismo de grupos inclusão canônica e a função $\rho : C/N' \to C/N$ está definida como

$$\rho(cN') = cN,$$

para toda classe lateral $cN' \in C/N'$. Observe que ρ está bem definida, pois $N' \subseteq N$, e ρ é um epimorfismo de grupos tal que $ker(\rho) = N/N'$ pela Proposição 1.7 (p. 9). Segue assim que tal sequência é exata curta. Além disso, como N/N' é grupo abeliano, pela Proposição 1.38 (p. 54), temos que o grupo C/N age à direita sobre o grupo abeliano N/N' via conjugação à direita por elementos do grupo C/N', isto é,

$$(nN')^{cN} := (cN')^{-1}(nN')(cN'), \text{ onde } cN = \rho(cN'), \tag{1.21}$$

para toda classe lateral $nN' \in N/N'$ e para toda classe lateral $cN \in C/N$, onde $cN' \in C/N'$, o que equivale a dizer também, pela Proposição 1.33 (p. 47), que N/N' é um $\mathbf{Z}(C/N)$-módulo à direita via conjugação à direita por elementos de C/N' (onde a operação $+$ do $\mathbf{Z}(C/N)$-módulo à direita N/N' é a restrição da operação $\cdot$ do grupo C/N' sobre o subgrupo abeliano N/N'). **Não faremos distinção entre a notação da ação à direita de C/N sobre o grupo abeliano N/N' e a notação do produto de $\mathbf{Z}(C/N)$ sobre o grupo abeliano N/N'.**

Proposição 1.41. *[14, Lemma 3.8, p. 143] Sejam C um grupo e $N \lhd C$ tais que N é um subgrupo nilpotente e C/N seja um grupo abeliano-por-finito finitamente gerado. Então, C é grupo finitamente gerado se, e somente se, N/N' é finitamente gerado como $\mathbf{Z}(C/N)$-módulo à direita via conjugação à direita por elementos de C/N' (como na Observação 1.13 (p. 64)).*

Demonstração. Suponhamos que C seja um grupo finitamente gerado. Logo, C/N' também é grupo finitamente gerado, pela Proposição 1.18 (p. 24). Como C/N é grupo abeliano-por-finito, existe $H/N \lhd C/N$ tal que H/N é grupo abeliano e $(C/N)/(H/N)$ é grupo finito. Além disso, pelo Teorema 1.4 (p. 4) (Teorema de Correspondência para Grupos), $H \lhd C$ e, pelo Teorema 1.3 (p. 3) (3º Teorema de Isomorfismo para Grupos), $(C/N)/(H/N) \cong C/H$, donde C/H é também grupo finito.

Como $(C/N)/(H/N)$ é grupo finito, temos que $(C/N)/(H/N)$ é grupo finitamente apresentável pela Proposição 1.29 (p. 37). Agora, como C/N é grupo finitamente gerado e

$$[C/N : H/N] = |(C/N)/(H/N)| < \infty,$$

segue, pela Proposição 1.27 (p. 36), que H/N é grupo finitamente gerado. E, como H/N é grupo abeliano, concluímos, pela Proposição 1.30 (p. 42), que H/N é grupo finitamente apresentável. Portanto, pelo Teorema 1.11 (p. 37), C/N é grupo finitamente apresentável.

Desta forma, temos epimorfismo de grupos $\rho : C/N' \twoheadrightarrow C/N$ definido por

$$\rho(cN') = cN,$$

para toda classe lateral $cN' \in C/N'$, onde C/N' é grupo finitamente gerado e C/N é grupo finitamente apresentável. Segue da Proposição 1.31 (p. 42) que existem $s \in \mathbb{Z}_+$ e $n_1N' \dots n_sN' \in N/N'$ tais que

$$N/N' = ker(\rho) = \langle (n_1N')^{C/N'}, \dots, (n_sN')^{C/N'} \rangle. \tag{1.22}$$

Assim, dado $nN' \in N/N'$, por (1.22) (p. 65), podemos escrever

$$nN' = \prod_{j=1}^{r} \Big((\gamma_jN')^{-1}(n_{i_j}N')(\gamma_jN') \Big)^{\varepsilon_j},$$

onde $r \in \mathbb{Z}_+, i_j \in \{1, \ldots, s\}, \gamma_j N' \in C/N'$ e $\varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}$, logo, por (1.21) (p. 65),

$$nN' = \prod_{j=1}^{r} \Big((n_{i_j} N')^{\gamma_j N} \Big)^{\varepsilon_j}. \tag{1.23}$$

Até então, estamos vendo N/N' como grupo abeliano sobre o qual age à direita o grupo C/N. Pela Proposição 1.33 (p. 47), podemos enxergar N/N' como $\mathbf{Z}(C/N)$-módulo à direita e daí que, por (1.23) (p. 66), usando notação para módulos conforme Observação 1.13 (p. 64),

$$nN' = \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j (n_{i_j} N')^{\gamma_j N}.$$

Como $nN' \in N/N'$ foi tomado arbitrário, segue que N/N' é finitamente gerado como $\mathbf{Z}(C/N)$-módulo à direita via conjugação à direita pelos elementos $n_1 N', \ldots, n_s N' \in C/N'$. O que garante uma das afirmações da Proposição.

Suponhamos agora que N/N' seja finitamente gerado como $\mathbf{Z}(C/N)$-módulo à direita via conjugação à direita por elementos de C/N'. Logo, existe um subconjunto

$$Y = \{n_1 N', \ldots, n_s N'\} \subseteq N/N'$$

tal que

$$N/N' = \{\sum_{j=1}^{r} (n_{i_j} N')^{z_j} : r \in \mathbb{Z}_+, i_j \in \{1, \ldots, s\} \text{ e } z_j \in \mathbf{Z}(C/N)\}, \tag{1.24}$$

onde

$$z_j = \sum_{\gamma N \in C/N} x^j_{\gamma N} \gamma N,$$

com $x^j_{\gamma N} \in \mathbf{Z}$, para toda classe lateral $\gamma N \in C/N$. Daí que pela Proposição 1.33 (p. 47), considerando N/N' como grupo abeliano sob ação à direita do grupo C/N, temos que

$$N/N' = \{\prod_{j=1}^{r} \prod_{\gamma N \in C/N} ((n_{i_j} N')^{\gamma N})^{x^j_{\gamma N}} : r \in \mathbb{Z}_+, i_j \in \{1, \ldots, s\} \text{ e } x^j_{\gamma N} \in \mathbf{Z}\}. \tag{1.25}$$

Usando (1.21) (p. 65) e sendo $\rho : C/N' \twoheadrightarrow C/N$ tal que $\rho(cN') = cN$, para toda classe lateral $cN' \in C/N'$, obtemos que

$$N/N' = \{\prod_{j=1}^{r} \prod_{\gamma N' \in D_1} \big((\gamma N')^{-1} (n_{i_j} N') (\gamma N') \big)^{x^j_{\gamma N'}} : r \in \mathbb{Z}_+, i_j \in \{1, \ldots, s\} \text{ e } x^j_{\gamma N'} \in \mathbf{Z}\}, \tag{1.26}$$

onde D_1 é o conjunto formado pela escolha da pré-imagem $\gamma N' \in C/N'$ de ρ para cada $\gamma N \in C/N$ e $x^j_{\gamma N'} := x^j_{\gamma N}$. E como a conjugação à direita por elementos de C/N' sobre N/N' é uma ação à direita de C/N' sobre N/N', pela Proposição 1.33 (p. 47) e por (1.26) (p. 66), segue, respectivamente, que N/N' é também $\mathbf{Z}(C/N')$-módulo à direita via conjugação à direita e

$$N/N' = \{\sum_{j=1}^{r} \sum_{\gamma N' \in D_1} x^j_{\gamma N} (n_{i_j} N')^{\gamma N'} : r \in \mathbb{Z}_+, i_j \in \{1, \ldots, s\} \text{ e } x^j_{\gamma N} \in \mathbf{Z}\}.$$

Portanto, N/N' é finitamente gerado como $\mathbf{Z}(C/N')$-módulo à direita via conjugação à direita.

Agora, como C/N é grupo finitamente gerado, existem $m \in \mathbb{Z}_+$ e $c_1N, \ldots, c_mN \in C/N$ tais que

$$C/N = \langle c_1N, \ldots, c_mN \rangle.$$

Definamos o grupo

$$B := \langle c_1, \ldots, c_m \rangle \subseteq C.$$

Seja

$$X := \{n_1^B, \ldots, n_s^B\}.$$

Temos que $X \subseteq N$, pois $N \lhd C$. Sejam também $\psi : C \twoheadrightarrow C/N'$ e $\pi : N \twoheadrightarrow N/N'$ os epimorfismos de grupos projeções canônicas. Observemos que

$$\psi|_N = \pi. \tag{1.27}$$

Definamos o grupo

$$\overline{B} := \langle c_1N', \ldots, c_mN' \rangle.$$

Seja

$$\overline{X} := \{(n_1N')^{\overline{B}}, \ldots, (n_sN')^{\overline{B}}\}.$$

Temos que $\overline{X} \subseteq N/N'$, pois $N/N' \lhd C/N'$ pelo Teorema 1.4 (p. 4) (Teorema de Correspondência para Grupos). Daí que temos a seguinte continência de grupos

$$\langle \overline{X} \rangle \subseteq N/N'.$$

Recordemos que $\rho : C/N' \twoheadrightarrow C/N$ tal que $\rho(cN') = cN$, para toda classe lateral $cN' \in C/N'$. Temos que

$$\rho(\overline{B}) = C/N, \tag{1.28}$$

pois

$$\rho(\overline{B}) = \rho(\langle c_1N', \ldots, c_mN' \rangle) = \langle \rho(c_1N'), \ldots, \rho(c_mN') \rangle = \langle c_1N, \ldots, c_mN \rangle = C/N.$$

Daí que obtemos a continência de grupos a seguir

$$N/N' \subseteq \langle \overline{X} \rangle.$$

De fato, dado $nN' \in N/N'$, por (1.25) (p. 66), temos que $nN' = \prod_{j=1}^{r} \prod_{\gamma N \in C/N} \left((n_{i_j}N')^{\gamma N}\right)^{x_{\gamma N}^j}$, com $r \in \mathbb{Z}_+, i_j \in \{1, \ldots, s\}$ e $x_{\gamma N}^j \in \mathbf{Z}$. Usando (1.28) (p. 67), para cada $\gamma N \in C/N$, escolhamos $bN' \in \overline{B}$ tal que $\rho(bN') = \gamma N$ e definamos D_2 como sendo o conjunto de tais elementos bN' escolhidos. Daí que,

$$nN' = \prod_{j=1}^{r} \prod_{bN' \in D_2} \left((n_{i_j}N')^{\rho(bN')}\right)^{x_{bN'}^j},$$

com $bN' \in \overline{B}$ e $x^j_{bN'} := x^j_{\gamma N}$. Segue, por (1.21) (p. 65), que

$$nN' = \prod_{j=1}^{r} \prod_{bN' \in D_2} \left((bN')^{-1}(n_{i_j}N')(bN')\right)^{x^j_{bN'}}.$$

Como $bN' \in \overline{B}$, para todo $bN' \in D_2$, segue que $nN' \in \langle \overline{X} \rangle$. Concluímos que

$$N/N' = \langle \overline{X} \rangle. \tag{1.29}$$

Agora,

$$\pi(X) \overset{(*)}{=} \psi(X) = \psi(\{n_1^B, \ldots, n_s^B\}) = \{\psi(n_1^B), \ldots, \psi(n_s^B)\} =$$
$$= \{\psi(B^{-1}n_1B), \ldots, \psi(B^{-1}n_sB)\} = \{\psi(B)^{-1}\psi(n_1)\psi(B), \ldots, \psi(B)^{-1}\psi(n_s)\psi(B)\} \overset{(*)}{=}$$
$$\overset{(*)}{=} \{\overline{B}^{-1}\pi(n_1)\overline{B}, \ldots, \overline{B}^{-1}\pi(n_s)\overline{B}\} = \{(n_1N')^{\overline{B}}, \ldots, (n_sN')^{\overline{B}}\} = \overline{X},$$

onde em $(*)$ usamos (1.27) (p. 67). Assim, $\overline{X} = \pi(X)$. Como $N/N' = \langle \overline{X} \rangle = \langle \pi(X) \rangle$, usando a Proposição 1.40 (p. 63), concluímos que

$$N = \langle X \rangle. \tag{1.30}$$

Do fato de que $C/N = \langle c_1N, \ldots, c_mN \rangle$, temos que $C = \langle c_1, \ldots, c_m, N \rangle$ pelo Lema 1.31 (p. 25). Resulta, assim, de (1.30) (p. 68) e como $B = \langle c_1, \ldots, c_m \rangle$, que

$$C = \langle c_1, \ldots, c_m, X \rangle = \langle c_1, \ldots, c_m, n_1^B, \ldots, n_s^B \rangle = \langle c_1, \ldots, c_m, n_1, \ldots, n_s \rangle.$$

Portanto, C é finitamente gerado. □

Observação 1.14. Seja G um grupo abeliano e F um grupo agindo à direita sobre G. Temos, então, ação à direita de F sobre $\bigotimes^i_{\mathbf{Z}} G$ dada por

$$(\sum_{j=1}^{n} g_{j_1} \otimes \ldots \otimes g_{j_i})^f := \sum_{j=1}^{n} g^f_{j_1} \otimes \ldots \otimes g^f_{j_i},$$

para todos $f \in F, g_{j_k} \in G$, com $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq i$, onde $n \in \mathbb{Z}_+$. Usando a Proposição 1.15 (p. 22), é imediato mostrar que de fato a equação acima define uma ação. Tal ação é denominada **ação diagonal à direita de F sobre $\bigotimes^i_{\mathbf{Z}} G$**. Dizemos, então, que F **age diagonalmente à direita sobre $\bigotimes^i_{\mathbf{Z}} G$**.

1.2.4 Aneis e Módulos Noetherianos

Nesta Subseção R denotará um anel associativo com identidade **não necessariamente comutativo** e, dado $n \in \mathbb{Z}_+$, $R[X_1, \ldots, X_n]$ denotará o anel de polinômios no qual as incógnitas $X_1, \ldots, X_n$ comutam entre si e com todo elemento de R (no caso em que $n = 1$, denotaremos X_1 por X, isto é, denotaremos $R[X_1]$ por $R[X]$).

Todas as definições e resultados desta Subseção envolvendo módulos à direita podem ser feitas e obtidos, respectivamente, para módulos à esquerda de forma análoga.

Definição 1.54. *Seja $\mathcal{X}$ um conjunto. Uma* ***relação de ordem parcial em*** *$\mathcal{X}$ é uma relação em $\mathcal{X}$, denotada por $\preceq$, que satisfaz, para todos $x, y, z \in \mathcal{X}$, as seguintes propriedades:*

i) $x \preceq x$ *(isto é, $\preceq$ é reflexiva);*

ii) se $x \preceq y$ *e* $y \preceq x$*, então* $x = y$ *(isto é, $\preceq$ é antissimétrica);*

iii) se $x \preceq y$ *e* $y \preceq z$*, então* $x \preceq z$ *(isto é, $\preceq$ é transitiva).*

Quando $\mathcal{X}$ é munido de uma tal relação, dizemos que $\mathcal{X}$ é um ***conjunto parcialmente ordenado****.*

Definição 1.55. *Seja $\mathcal{X}$ um conjunto parcialmente ordenado munido de uma relação $\preceq$. Dizemos que $x_0 \in \mathcal{X}$ é um* ***elemento maximal em*** *$\mathcal{X}$ se não existe $x \in \mathcal{X}$ tal que $x_0 \preceq x$ e $x_0 \neq x$. E dizemos que $x_0 \in \mathcal{X}$ é um* ***elemento minimal em*** *$\mathcal{X}$ se não existe $x \in \mathcal{X}$ tal que $x \preceq x_0$ e $x_0 \neq x$.*

Definição 1.56. *Seja $\mathcal{X}$ um conjunto parcialmente ordenado munido de uma relação $\preceq$. Dizemos que uma sequência $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ em $\mathcal{X}$ é uma* ***cadeia ascendente em*** *$\mathcal{X}$ se $x_1 \preceq x_2 \preceq \ldots$ e é uma* ***cadeia descendente em*** *$\mathcal{X}$ se $x_1 \succeq x_2 \succeq \ldots$*[9]*.*

Definição 1.57. *Seja $\mathcal{X}$ um conjunto parcialmente ordenado munido de uma relação $\preceq$. Dizemos que uma cadeia ascendente ou descendente $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ em $\mathcal{X}$ é* ***estacionária*** *se existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $x_n = x_{n+1} = \ldots$.*

Proposição 1.42. *Seja $\mathcal{X}$ um conjunto parcialmente ordenado munido de uma relação $\preceq$. São equivalentes as seguintes condições:*

i) Toda cadeia ascendente (descendente) $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ em $\mathcal{X}$ é estacionária;

ii) Todo subconjunto não-vazio de $\mathcal{X}$ tem elemento maximal (minimal).

Demonstração. Vamos mostrar que *i)* implica *ii)* por contrapositiva. Suponhamos que exista um subconjunto $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ tal que $\mathcal{Y} \neq \emptyset$ e $\mathcal{Y}$ não possui elemento maximal (minimal). Tomemos $y_1 \in \mathcal{Y}$. Como $\mathcal{Y}$ não possui elemento maximal (minimal), existe $y_2 \in \mathcal{Y}$ tal que $y_1 \preceq y_2$ ($y_1 \succeq y_2$) e $y_1 \neq y_2$, mas y_2 também não é elemento maximal (minimal) de $\mathcal{Y}$, logo existe $y_3 \in \mathcal{Y}$ tal que $y_1 \preceq y_2 \preceq y_3$ ($y_1 \succeq y_2 \succeq y_3$) e $y_3 \neq y_2$. Procedendo desta forma, obtemos uma cadeia ascendente (descendente) $(y_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ em $\mathcal{Y}$, com $y_i \neq y_{i+1}$, isto é, não estacionária. Como tal cadeia ascendente (descendente) também é uma cadeia ascendente (descendente) em $\mathcal{X}$, obtemos a negação da afirmação *i)*.

Vamos mostrar agora que *ii)* implica *i)*. Seja $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ uma cadeia ascendente (descendente) em $\mathcal{X}$ e consideremos $\mathcal{Y} = \{x_1, x_2, \ldots\} \subseteq \mathcal{X}$. Logo, supondo *ii)*, temos que $\mathcal{Y}$ possui elemento maximal (minimal) $x_n \in \mathcal{Y}$, para algum $n \in \mathbb{Z}_+$, daí que $x_n = x_{n+1} = \ldots$, ou seja, a cadeia ascendente (descendente) $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ é estacionária. □

Definição 1.58. *Sejam R um anel, A um R-módulo à direita e $\mathcal{X}$ o conjunto de R-submódulos de A parcialmente ordenado munido da relação $\subseteq$. Dizemos que A é* ***noetheriano*** *se $\mathcal{X}$ satisfizer uma (portanto as duas) condições da Proposição 1.42 (p. 69) e dizemos que A é* ***artiniano*** *se $\mathcal{X}$ satisfizer uma (portanto as duas) condições entre parênteses da Proposição 1.42 (p. 69).*

[9] Dados $x, y \in \mathcal{X}$, usaremos a notação $x \succeq y$ para indicar que $y \preceq x$.

Definição 1.59. *Seja R um anel. R é dito* ***anel noetheriano à direita (artiniano à direita)*** *se R visto como R-módulo à direita é noetheriano (artiniano).*

Observação 1.15. Sejam R um anel, $\mathcal{X}$ o conjunto de R-submódulos de R (onde R é visto como R-módulo à direita) parcialmente ordenado munido da relação $\subseteq$ e $\mathcal{X}'$ o conjunto dos ideais à direita de R parcialmente ordenado munido da relação $\subseteq$. Notemos que $I \subseteq R$ é ideal à direita de R se, e somente se, I é R-submódulo de R (onde R é visto como R-módulo à direita), ou seja, $\mathcal{X} = \mathcal{X}'$. Sendo assim, pela Definição 1.59 (p. 70), temos que R é dito anel noetheriano à direita se $\mathcal{X}'$ satisfizer uma (portanto as duas) condições da Proposição 1.42 (p. 69) e dizemos que R é artiniano à direita se $\mathcal{X}'$ satisfizer uma (portanto as duas) condições entre parênteses da Proposição 1.42 (p. 69).

Lema 1.40. *Sejam R um anel, I um conjunto de índices e $\{B_i : i \in I\}$ uma família de R-módulos à direita. Temos que $\bigcap_{i\in I} B_i$ é R-submódulo de $B_i, \forall i \in I$.*

Demonstração. Sejam $b_1, b_2 \in \bigcap_{i\in I} B_i$ e $r \in R$. Temos, então, que $b_1, b_2 \in B_i, \forall i \in I$. Como B_i é R-módulo à direita, $\forall i \in I$, segue que $b_1 r - b_2 \in B_i, \forall i \in I$, logo $b_1 r - b_2 \in \bigcap_{i\in I} B_i$. □

Definição 1.60. *Sejam R um anel, I um conjunto de índices, A um R-módulo à direita, X um subconjunto de A e $\{B_i : i \in I\}$ a família de todos os R-submódulos de A que contêm X. Definimos o* ***R-submódulo de A gerado por*** *X por $\bigcap_{i\in I} B_i$. Denotamos tal R-submódulo por $\sum_{x\in X} xR$, ou $\langle X\rangle$.*

Proposição 1.43. *Sejam R um anel, A um R-módulo à direita e X um subconjunto de A.*

a) *Se $X = \emptyset$, então $\sum_{x\in X} xR =$ **0**.*

b) *Se $X \neq \emptyset$, então $\sum_{x\in X} xR = \left\{\sum_{finita} x_i r_i : r_i \in R, x_i \in X\right\}$.*

Demonstração. (Ver [17, Theorem 2.1, p. 25].) □

Definição 1.61. *Sejam R um anel e A um R-módulo à direita. Dizemos que A é um* ***R-módulo à direita finitamente gerado*** *se existe um subconjunto finito $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de A, onde $n \in \mathbb{Z}_+$, tal que*

$$A = x_1 R + \ldots + x_n R.$$

Poderemos também utilizar a notação

$$A = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle,$$

ao invés de $\langle\{x_1, \ldots, x_n\}\rangle$.

Proposição 1.44. *Sejam R um anel, A, B R-módulos à direita e $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de R-módulos à direita. Se A é um R-módulo à direita finitamente gerado com $A = x_1R + \ldots + x_nR$, então $\phi(A)$ é um R-módulo à direita finitamente gerado com $\varphi(A) = \varphi(x_1)R + \ldots + \varphi(x_n)R$. Em particular, se B é um R-submódulo de A e A é R-módulo à direita finitamente gerado com $A = x_1R + \ldots + x_nR$, então A/B é um R-módulo à direita finitamente gerado com $A/B = (x_1 + B)R + \ldots + (x_n + B)R$.*

Demonstração. Como A é R-módulo à direita finitamente gerado, existem $n \in \mathbb{Z}_+$ e $x_1, \ldots, x_n \in A$ tais que $A = x_1R + \ldots + x_nR$. Seja $z \in \varphi(A)$, temos que $z = \varphi(x)$, com $x \in A$. Pela Proposição 1.43 b) (p. 70), segue que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i$, onde $r_i \in R$, logo $z = \varphi(x) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i r_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) r_i \in \varphi(x_1)R + \ldots + \varphi(x_n)R$. Como $z \in \varphi(A)$ foi tomado arbitrário, segue que $\varphi(A) = \varphi(x_1)R + \ldots + \varphi(x_n)R$, isto é, $\varphi(A)$ é R-módulo à direita finitamente gerado.

Se B é um R-submódulo de A e A é R-módulo à direita finitamente gerado, basta aplicar o resultado acima para o epimorfismo de R-módulos à direita projeção canônica. □

Lema 1.41. *Sejam R um anel, A um R-módulo à direita, B um R-submódulo de A e X um subconjunto de A. Se $A/B = \langle \{x + B \in A/B : x \in X\} \rangle$, então $A = \langle X \cup B \rangle$.*

Demonstração. Seja $p : A \twoheadrightarrow A/B$ o epimorfismo de R-módulos à direita projeção canônica. Dado $a \in A$, pela Proposição 1.43 b) (p. 70), temos que $p(a) = \sum_{\text{finita}} (x + B) r_x$, com $r_x \in R$ e $x \in X$, logo $p(a) = (\sum_{\text{finita}} x r_x) + B$. Por outro lado, $p(a) = a + B$. Assim, $a + B = (\sum_{\text{finita}} x r_x) + B$, isto é, $a = b_0 + \sum_{\text{finita}} x r_x$, para algum $b_0 \in B$ e, portanto, $a \in \langle X \cup B \rangle$. Como $a \in A$ foi tomado arbitrário, segue que $A = \langle X \cup B \rangle$. □

Proposição 1.45. *Sejam R um anel e A um R-módulo à direita. A é R-módulo à direita noetheriano se, e somente se, todo R-submódulo de A é finitamente gerado.*

Demonstração. Suponhamos que A seja R-módulo à direita noetheriano. Seja B um R-submódulo de A arbitrário e seja $\mathcal{X}$ o conjunto de todos os R-submódulos de B finitamente gerados. Observemos que $\mathcal{X} \neq \emptyset$, pois o R-submódulo $\mathbf{0}$ pertence a $\mathcal{X}$. Como A é noetheriano, segue que $\mathcal{X}$ possui elemento maximal $B_0 \in \mathcal{X}$. Suponhamos que $B \neq B_0$. Logo, existe $b \in B$ tal que $b \notin B_0$. Consideremos, então, o R-submódulo $B_0 + bR$. Segue que $B_0 \subsetneqq B_0 + bR$ e $B_0 + bR$ é finitamente gerado, o que é contradição com a maximalidade de B_0. Assim, concluímos que $B = B_0$ e, portanto, B é R-submódulo finitamente gerado.

Suponhamos agora que todo R-submódulo de A seja finitamente gerado. Seja $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$ uma cadeia ascendente de R-submódulos de A. Definamos $B := \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Temos, então, que B é R-submódulo de A, portanto finitamente gerado. Sejam $x_1, \ldots, x_s$ os geradores de B, onde $s \in \mathbb{Z}_+$, ou seja, $B = x_1R + \ldots + x_sR$. Logo, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $x_1, \ldots, x_s \in B_n$. Como $x_1, \ldots, x_s$ geram B_j, com $j \in \mathbb{Z}_+$ e $j \geq n + 1$, segue que $B_n = B_{n+1} = \ldots$. Assim, a cadeia ascendente $(B_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ é estacionária e, portanto, A é R-módulo à direita noetheriano. □

Proposição 1.46. *Sejam R um anel e A um R-módulo à direita finitamente gerado. Se R é anel noetheriano à direita, então A é R-módulo à direita noetheriano.*

Demonstração. Seja B um R-submódulo arbitrário de A e, como A é R-módulo à direita finitamente gerado, suponhamos que $A = x_1R + \ldots + x_nR$, onde $n \in \mathbb{Z}_+$ e $x_i \in A$, com $1 \leq i \leq n$. Vamos mostrar que B é R-submódulo de A finitamente gerado usando indução sobre $n \in \mathbb{Z}_+$, isto é, sobre o número de geradores de A. Assim, pela Proposição 1.45 (p. 71) teremos que A é R-módulo à direita noetheriano.

Para o caso $n = 1$, temos que $A = x_1R$. Considerando R como R-módulo à direita, segue que $\varphi : R \to A$ definida por $\varphi(r) = x_1r$ é epimorfismo de R-módulos à direita. Como B é R-submódulo de A, temos que $\varphi^{-1}(B)$ é R-submódulo de R. Visto que R é R-módulo à direita noetheriano, pela Proposição 1.45 (p. 71), concluímos que $\varphi^{-1}(B)$ é R-submódulo de R finitamente gerado, isto é, $\varphi^{-1}(B) = r_1R + \ldots + r_sR$, onde $s \in \mathbb{Z}_+$ e $r_i \in R$, com $1 \leq i \leq s$. Portanto, usando a Proposição 1.44 (p. 71), $B = \varphi(\varphi^{-1}(B)) = \varphi(r_1)R + \ldots + \varphi(r_s)R$, ou seja, B é R-submódulo de A finitamente gerado.

Para o caso $n > 1$, seja $p : A \twoheadrightarrow A/x_1R$ o homomorfismo de R-módulos à direita projeção canônica. Como $A = x_1R + \ldots + x_nR$, usando a Proposição 1.44 (p. 71), segue que

$$A/x_1R = (x_2 + x_1R)R + \ldots + (x_n + x_1R)R,$$

isto é, A/x_1R é R-módulo à direita finitamente gerado com $n - 1$ geradores. Pela hipótese de indução, concluímos que $p(B)$ é R-submódulo de $p(A) = A/x_1R$ finitamente gerado. Suponhamos, então, que $p(B) = (y_1 + x_1R)R + \ldots + (y_s + x_1R)R$, onde $s \in \mathbb{Z}_+$ e $y_j \in B$, com $1 \leq j \leq s$. Por outro lado, como x_1R é R-submódulo de A com apenas um gerador ($x_1 \in A$), novamente pela hipótese de indução, temos que $B \cap x_1R$, que é R-submódulo de x_1R, é também finitamente gerado, ou seja, $B \cap x_1R = z_1R + \ldots + z_tR$, onde $t \in \mathbb{Z}_+$ e $z_k \in B \cap x_1R$, com $1 \leq k \leq t$. Vamos mostrar, então, que $B = y_1R + \ldots + y_sR + z_1R + \ldots + z_tR$.

Dado $b \in B$, temos que $b + x_1R = p(b) = \sum_{j=1}^{s}(y_j + x_1R)r_j$, onde $r_j \in R$. Logo, $b + x_1R = (\sum_{j=1}^{s} y_jr_j) + x_1R$, isto é, $b - \sum_{j=1}^{s} y_jr_j \in B \cap x_1R$. Agora, como $B \cap x_1R = z_1R + \ldots + z_tR$, segue que $b - \sum_{j=1}^{s} y_jr_j = \sum_{k=1}^{t} z_ks_k$, onde $s_k \in R$, e, portanto, $b = (\sum_{j=1}^{s} y_jr_j) + (\sum_{k=1}^{t} z_ks_k)$. Como $b \in B$ foi tomado arbitrário, concluímos que $B = y_1R + \ldots + y_sR + z_1R + \ldots + z_tR$ e, portanto, B é R-submódulo de A finitamente gerado. □

Proposição 1.47. *Sejam R um anel noetheriano à direita, A um R-módulo à direita e B um R-submódulo de A. A é R-módulo à direita finitamente gerado se, e somente se, B e A/B são R-módulos à direita finitamente gerados.*

Demonstração. Suponhamos que A seja R-módulo à direita finitamente gerado. Então, pela Proposição 1.44 (p. 71), A/B é R-módulo à direita finitamente gerado.

Agora, como A é R-módulo à direita finitamente gerado e R é anel noetheriano à direita, pela Proposição 1.46 (p. 72), temos que A é R-módulo à direita noetheriano e, pela Proposição 1.45 (p. 71), segue que B é R-módulo à direita finitamente gerado.

Suponhamos agora que B e A/B são R-módulos à direita finitamente gerados. Então, pelo Lema 1.41 (p. 71), concluímos que A é R-módulo à direita finitamente gerado. □

Observação 1.16. Observemos que na Proposição 1.47 (p. 72) a hipótese de que R é noetheriano à direita foi utilizada apenas para mostrar que B é R-submódulo de A finitamente gerado, quando A é um R-módulo à direita finitamente gerado.

Notação 1.16. Sejam R um anel e I um ideal à direita de R. Denotaremos

$$I = (x_1, \ldots, x_n) = x_1R + \ldots + x_nR$$

no caso em que I é ideal à direita de R gerado por $x_1, \ldots, x_n \in I$, onde $n \in \mathbb{Z}_+$.

Lema 1.42. *Seja R um anel. Então, R é noetheriano à direita se, e somente se, para toda sequência $(x_j)_{j\in\mathbb{Z}_+}$ em R, existem $n \in \mathbb{Z}_+$ e $r_1, \ldots, r_n \in R$ tais que $x_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} x_j r_j$.*

Demonstração. Suponhamos que R seja noetheriano à direita. Seja $(x_j)_{j\in\mathbb{Z}_+}$ uma sequência em R. Definamos, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, ideais à direita $I_n := (x_1, \ldots, x_n)$, isto é, I_n é ideal à direita de R gerado por $x_1, \ldots, x_n \in I_n$. Segue que $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$, ou seja, $(I_j)_{j\in\mathbb{Z}_+}$ é uma cadeia ascendente de ideais à direita de R, e como R é noetheriano à direita, temos que tal cadeia ascendente é estacionária, logo existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $I_n = I_{n+1} = \ldots$, portanto $x_{n+1} \in I_{n+1} = I_n$ e, assim, existem $r_1, \ldots, r_n \in R$ tais que $x_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} x_j r_j$.

Demonstremos a afirmação recíproca por contrapositiva. Suponhamos agora que R não seja noetheriano à direita. Logo, existe cadeia ascendente $(I_j)_{j\in\mathbb{Z}_+}$ de ideais à direita de R não-estacionária, isto é, $I_1 \subsetneqq I_2 \subsetneqq \ldots$. Agora, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, tomemos $x_{n+1} \in I_{n+1}$ tal que $x_{n+1} \notin I_n$, ou seja, $(x_j)_{j\in\mathbb{Z}_+}$ é uma sequência em R tal que $x_{n+1} \neq \sum_{j=1}^{n} x_j r_j$, para todo $r_j \in R$, do contrário $x_{n+1} \in I_n$, contradizendo a construção da sequência $(x_j)_{j\in\mathbb{Z}_+}$. □

Teorema 1.20 (Teorema da Base de Hilbert)**.** *Seja R um anel. Se R é noetheriano à direita, então $R[X]$ é anel noetheriano à direita (Aqui $R[X]$ denota o anel de polinômios no qual a incógnita X comuta com todo elemento de R).*

Demonstração. Pela Observação 1.15 (p. 70) e pela Proposição 1.45 (p. 71) basta mostrarmos que todo ideal à direita de $R[X]$ é finitamente gerado. Façamos a demonstração por absurdo. Sendo assim, suponhamos que exista I ideal à direita de $R[X]$ que não seja finitamente gerado. Notemos que, como I não é finitamente gerado, $I \neq (0)$ (ideal à direita trivial). Seja $p_1 \in I$ tal que $grau(p_1)$ seja mínimo. Definamos, então, $p_{n+1} \in I - (p_1, \ldots, p_n)$ tal que $grau(p_{n+1})$ seja mínimo. Observemos que, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, podemos tomar um tal $p_{n+1} \in I - (p_1, \ldots, p_n)$, uma vez que $I - (p_1, \ldots, p_n) \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{Z}_+$, do contrário $I = (p_1, \ldots, p_m)$, para algum $m \in \mathbb{Z}_+$ e, portanto, I seria finitamente gerado. Reparemos que

$$grau(p_1) \leq grau(p_2) \leq \ldots.$$

Seja $a_n^1 \in R$ o coeficiente líder de $p_n \in I$ (isto é, o coeficiente que faz parte do monômio que dá o grau de p_n). Temos, então, a sequência $(a_j^1)_{j\in\mathbb{Z}_+}$ em R. Como R é noetheriano à

direita por hipótese e pelo Lema 1.42 (p. 73), segue que existem $s \in \mathbb{Z}_+$ e $r_1, \ldots, r_s \in R$ tais que $a^1_{s+1} = \sum_{j=1}^{s} a^1_j r_j$, isto é,

$$a^1_{s+1} - \sum_{j=1}^{s} a^1_j r_j = 0. \tag{1.31}$$

Definamos

$$p := p_{s+1} - \sum_{j=1}^{s} p_j r_j x^{grau(p_{s+1}) - grau(p_j)}.$$

Claramente, temos que $p \in I$ e também que $p \notin (p_1, \ldots, p_s)$, do contrário, pela definição de p, teríamos que $p_{s+1} \in (p_1, \ldots, p_s)$, contradizendo a construção da sequência $(p_j)_{j \in \mathbb{Z}_+}$ em $R[x]$. Daí que $p \in I - (p_1, \ldots, p_s)$. Agora, $grau(p) < grau(p_{s+1})$, o que contradiz novamente a construção da sequência $(p_j)_{j \in \mathbb{Z}_+}$ em $R[X]$. Vamos mostrar que de fato $grau(p) < grau(p_{s+1})$.

Se $p_j = a^1_j x^{n_j} + a^2_j x^{n_j - 1} + \ldots + a^{n_j+1}_j$, onde $grau(p_j) = n_j$, então

$$p = p_{s+1} - \sum_{j=1}^{s} p_j r_j x^{n_{s+1} - n_j} =$$

$$(a^1_{s+1} x^{n_{s+1}} + a^2_{s+1} x^{n_{s+1}-1} + \ldots + a^{n_{s+1}+1}_{s+1}) - \sum_{j=1}^{s} (a^1_j x^{n_j} + a^2_j x^{n_j - 1} + \ldots + a^{n_j+1}_j) r_j x^{n_{s+1} - n_j} =$$

$$(a^1_{s+1} x^{n_{s+1}} + a^2_{s+1} x^{n_{s+1}-1} + \ldots + a^{n_{s+1}+1}_{s+1}) - \sum_{j=1}^{s} (a^1_j x^{n_{s+1}} + a^2_j x^{n_{s+1}-1} + \ldots + a^{n_j+1}_j x^{n_{s+1}-n_j}) r_j =$$

$$(a^1_{s+1} x^{n_{s+1}} + a^2_{s+1} x^{n_{s+1}-1} + \ldots + a^{n_{s+1}+1}_{s+1}) - (\sum_{j=1}^{s} a^1_j r_j x^{n_{s+1}}) -$$

$$\sum_{j=1}^{s} (a^2_j x^{n_{s+1}-1} + \ldots + a^{n_j+1}_j x^{n_{s+1}-n_j}) r_j \overset{(1.31)}{=}$$

$$(a^2_{s+1} x^{n_{s+1}-1} + \ldots + a^{n_{s+1}+1}_{s+1}) - \sum_{j=1}^{s} (a^2_j x^{n_{s+1}-1} + \ldots + a^{n_j+1}_j x^{n_{s+1}-n_j}) r_j.$$

Assim,

$$grau(p) \leq n_{s+1} - 1 = grau(p_{s+1}) - 1 < grau(p_{s+1}),$$

logo $grau(p) < grau(p_{s+1})$. Como obtemos tal contradição, concluímos que todo ideal à direita de $R[X]$ é finitamente gerado. □

Corolário 1.7. *Seja R um anel. Se R é noetheriano à direita, então, dado $n \in \mathbb{Z}_+$, $R[X_1, \ldots, X_n]$ é anel noetheriano à direita (Aqui $R[X_1, \ldots, X_n]$ denota o anel de polinômios no qual as incógnitas $X_1, \ldots, X_n$ comutam entre si e com todo elemento de R).*

Demonstração. Observando que por definição

$$R[X_1, \ldots, X_n] := (R[X_1, \ldots, X_{n-1}])[X_n]$$

com $R[X_1, \ldots, X_{n-1}] := R$ se $n = 1$, o resultado segue por indução utilizando para o caso $n = 1$, isto é, para $R[X]$ o Teorema 1.20 (p. 73). □

1.2.5 Anel de Fração e Localização

Nesta Subseção K denotará um anel associativo **comutativo** com identidade e, dado $n \in \mathbb{Z}_+$, $K[X_1, \ldots, X_n]$ denotará o anel comutativo de polinômios no qual as incógnitas $X_1, \ldots, X_n$ comutam entre si e com todo elemento de K (no caso em que $n = 1$, denotaremos X_1 por X, isto é, denotaremos $K[X_1]$ por $K[X]$).

Observemos que, sendo K um anel comutativo, então os ideais à direita de K e os ideais à esquerda de K coincidem, daí que, pela Observação 1.15 (p. 70), temos que K é um anel noetheriano à direita se, e somente se, K é um anel noetheriano à esquerda. Assim, caso K possua uma dessas propriedades (e, portanto, possua as duas) dizemos simplesmente que K é um anel noetheriano.

Definição 1.62. *Seja K um anel comutativo. Um **conjunto multiplicativo** $S \subseteq K$ é um conjunto tal que $1 \in S$, $0 \notin S$ e que é fechado em relação à multiplicação de K, ou seja, $\forall s_1, s_2 \in S, s_1 s_2 \in S$. Dito de outra forma, $S \subseteq K$ é um monóide não contendo o elemento $0 \in K$.*

Definição 1.63. *Sejam K um anel comutativo e $S \subseteq K$ um conjunto multiplicativo. Definamos a seguinte relação $\sim$ em $K \times S$:*

$$(x_1, s_1) \sim (x_2, s_2) \Leftrightarrow \exists t \in S \text{ tal que } (x_1 s_2 - x_2 s_1)t = 0.$$

Lema 1.43. *Sejam K um anel comutativo e $S \subseteq K$ um conjunto multiplicativo. A relação $\sim$ em $K \times S$ dada na Definição 1.63 (p. 75) é uma relação de equivalência.*

Demonstração. É fácil ver que $\sim$ é reflexiva e simétrica. Para mostrarmos que $\sim$ é transitiva, sejam $(x_1, s_1), (x_2, s_2), (x_3, s_3) \in K \times S$ tais que $(x_1, s_1) \sim (x_2, s_2)$ e $(x_2, s_2) \sim (x_3, s_3)$. Então, existem $t_1, t_2 \in S$ tais que $(x_1 s_2 - x_2 s_1)t_1 = 0$ e $(x_2 s_3 - x_3 s_2)t_2 = 0$, daí que desta última equação $x_2 s_3 t_2 = x_3 s_2 t_2$. Agora, $(x_1 s_2 - x_2 s_1)t_1 t_2 s_3 = 0$, logo $x_1 s_2 t_1 t_2 s_3 - x_2 s_1 t_1 t_2 s_3 = 0$, substituindo temos que $x_1 s_2 t_1 t_2 s_3 - x_3 s_2 t_2 s_1 t_1 = 0$, isto é, $(x_1 s_3 - x_3 s_1) s_2 t_1 t_2 = 0$, como S é fechado pela multiplição de K, temos que $s_2 t_1 t_2 \in S$ e, portanto, $(x_1, s_1) \sim (x_3, s_3)$. □

Notação 1.17. Sendo K, S e $\sim$ como acima, denotaremos o conjunto das classes de equivalência com relação a $\sim$ por $S^{-1}K$ e, dado $(x, s) \in K \times S$, denotaremos a classe de equivalência de (x, s) por x/s.

Teorema 1.21. *Sejam K um anel comutativo e $S \subseteq K$ um conjunto multiplicativo. Temos que $S^{-1}K$ é um anel associativo comutativo com identidade, onde, dadas as classes de equivalência $x_1/s_1, x_2/s_2 \in S^{-1}K$, a soma (denotada por $+$) é definida por $x_1/s_1 + x_2/s_2 := (x_1 s_2 + x_2 s_1)/s_1 s_2$ e a multiplicação (denotada por $\cdot$) é definida por $x_1/s_1 \cdot x_2/s_2 = x_1 x_2/s_1 s_2$.*

*$S^{-1}K$ munido de tais operações é denominado **anel de frações de K com respeito a S**.*

Demonstração. Vamos mostrar que as operações $+$ e $\cdot$ estão bem definidas.

Sejam $x_1/s_1, x_2/s_2, y_1/t_1, y_2/t_2 \in S^{-1}K$ tais que $x_1/s_1 = y_1/t_1$ e $x_2/s_2 = y_2/t_2$. Então, existem $u, v \in S$ tais que

$$(x_1 t_1 - y_1 s_1)u = 0 \text{ e } (x_2 t_2 - y_2 s_2)v = 0. \tag{1.32}$$

Temos, então, por (1.32) que $(x_1t_1 - y_1s_1)uvt_2s_2 = 0$ e $(x_2t_2 - y_2s_2)vut_1s_1 = 0$, logo $(x_1t_1 - y_1s_1)uvt_2s_2 + (x_2t_2 - y_2s_2)vut_1s_1 = 0$, o que implica que $(x_1t_1t_2s_2 - y_1s_1t_2s_2)uv + (x_2t_2t_1s_1 - y_2s_2t_1s_1)uv = 0$, resultando que $[(x_1s_2 + x_2s_1)t_1t_2 - (y_1t_2 + y_2t_1)s_1s_2]uv = 0$. Como S é conjunto multiplicativo, segue que $uv \in S$ e, portanto, $(x_1s_2+x_2s_1)/s_1s_2 = (y_1t_2+y_2t_1)/t_1t_2$, isto é, $x_1/s_1 + x_2/s_2 = y_1/t_1 + y_2/t_2$. Por outro lado, por (1.32) temos também que $(x_1t_1 - y_1s_1)uvx_2t_2 = 0$ e $(x_2t_2 - y_2s_2)vuy_1s_1 = 0$, logo $(x_1t_1 - y_1s_1)uvx_2t_2 + (x_2t_2 - y_2s_2)vuy_1s_1 = 0$, o que acarreta que $(x_1x_2t_1t_2 - y_1s_1x_2t_2 + x_2t_2y_1s_1 - y_1y_2s_1s_2)uv = 0$, isto é, $(x_1x_2t_1t_2 + y_1y_2s_1s_2)uv = 0$, portanto, $x_1x_2/s_1s_2 = y_1y_2/t_1t_2$ e, assim, $x_1/s_1 \cdot x_2/s_2 = y_1/t_1 \cdot y_2/t_2$.

É fácil ver que $+$ e $\cdot$ satisfazem os axiomas necessário para tornar $S^{-1}K$ um anel associativo comutativo com identidade.

Notemos que $0/1 \in S^{-1}K$ é o elemento neutro aditivo de $S^{-1}K$, onde $0/1 = 0/s, \forall s \in S$, e $1/1 \in S^{-1}K$ é o elemento identidade de $S^{-1}K$, onde $1/1 = s/s, \forall s \in S$. □

Proposição 1.48. *Sejam K um anel comutativo e $S \subseteq K$ um conjunto multiplicativo. Então, $\lambda : K \to S^{-1}K$ definida por $\lambda(x) = x/1, \forall x \in K$, é homomorfismo de aneis e $\lambda(s)$ é invertível em $S^{-1}K, \forall s \in S$.*

Denominamos λ de ***homomorfismo de localização****.*

Demonstração. Temos que $\lambda(1) = 1/1$, que é a identidade em $S^{-1}K$. Além disso, dados $x_1, x_2 \in K$, $\lambda(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)/1 = x_1/1 + x_2/1 = \lambda(x_1) + \lambda(x_2)$ e $\lambda(x_1x_2) = x_1x_2/1 = x_1/1 \cdot x_2/1 = \lambda(x_1)\lambda(x_2)$. Logo, λ é homomorfismo de aneis.

Agora, dado $s \in S$, $\lambda(s) = s/1$. Mas, $s/1 \cdot 1/s = s/s = 1/1$, isto é, $\lambda(s)$ é invertível em $S^{-1}K$. □

Proposição 1.49. *Sejam K anel comutativo e $S \subseteq K$ conjunto multiplicativo de K. Se K é anel noetheriano, então o anel de frações $S^{-1}K$ de K com respeito a S é também anel noetheriano.*

Demonstração. Seja $\lambda : K \to S^{-1}K$ o homomorfismo de localização da Proposição 1.48 (p. 76) dado por $\lambda(x) = x/1, \forall x \in K$. Seja também J um ideal arbitrário de $S^{-1}K$, logo $\lambda^{-1}(J)$ é ideal de K. Vamos mostrar que

$$J = S^{-1}\lambda^{-1}(J),$$

onde $S^{-1}\lambda^{-1}(J) = \{x/s \in S^{-1}K : s \in S \text{ e } x \in \lambda^{-1}(J)\}$. Se $x/s \in J$, com $x \in K$ e $s \in S$, então $s/1 \cdot x/s = s/s \cdot x/1 = x/1 = \lambda(x) \in J$, pois J é ideal de $S^{-1}K$ e, portanto, $x \in \lambda^{-1}(J)$. Isso mostra que $J \subseteq S^{-1}\lambda^{-1}(J)$. Por outro lado, se $x \in \lambda^{-1}(J)$, então $\lambda(x) = x/1 \in J$ e, portanto, como J é ideal de $S^{-1}K$, dado $s \in S$, $1/s \cdot x/1 = x/s \in J$, o que mostra que $S^{-1}\lambda^{-1}(J) \subseteq J$.

Agora, se K é anel noetheriano, então $\lambda^{-1}(J)$, que é ideal de K, é finitamente gerado pela Proposição 1.45 (p. 71) e pela Observação 1.15 (p. 70), ou seja, $\lambda^{-1}(J) = (x_1, \ldots, x_n)$, onde $n \in \mathbb{Z}_+$ e $x_i \in K$, com $1 \leq i \leq n$. Assim, dado $x/s \in S^{-1}\lambda^{-1}(J)$, temos que $x = \sum_{i=1}^{n} y_ix_i$, com $y_i \in K$, logo $x/s = (\sum_{i=1}^{n} y_ix_i)/s = \sum_{i=1}^{n}(y_i/s \cdot x_i/1)$, ou seja, $S^{-1}\lambda^{-1}(J) = (x_1/1, \ldots, x_n/1)$. Como $J = S^{-1}\lambda^{-1}(J)$, segue que $J = (x_1/1, \ldots, x_n/1)$. Portanto, todo ideal J de $S^{-1}K$ é finitamente gerado, novamente pela Proposição 1.45 (p. 71) e pela Observação 1.15 (p. 70), segue que $S^{-1}K$ é anel noetheriano. □

Definição 1.64. *Sejam K um anel comutativo, $K[X_1,\ldots,X_n]$ o anel comutativo de polinômios com $n \in \mathbb{Z}_+$ e $S = \{X_1^{j_1}X_2^{j_2}\ldots X_n^{j_n} \in K[X_1,\ldots,X_n] : j_l \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ e $1 \leq l \leq n\}$, que é conjunto multiplicativo de $K[X_1,\ldots,X_n]$. O anel de frações $S^{-1}K[X_1,\ldots,X_n]$ de $K[X_1,\ldots,X_n]$ com respeito a S é denotado por $K[X_1,X_1^{-1},\ldots,X_n,X_n^{-1}]$ e é chamado de* ***anel dos polinômios de Laurent****.*

Proposição 1.50. *Sejam K um anel comutativo, $K[X_1,\ldots,X_n]$ o anel comutativo de polinômios com $n \in \mathbb{Z}_+$ e*

$$S = \{X_1^{j_1}X_2^{j_2}\ldots X_n^{j_n} \in K[X_1,\ldots,X_n] : j_l \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \text{ e } 1 \leq l \leq n\},$$

que é conjunto multiplicativo de $K[X_1,\ldots,X_n]$. Temos o seguinte fato: se K é noetheriano, então $K[X_1,X_1^{-1},\ldots,X_n,X_n^{-1}]$ é anel noetheriano.

Demonstração. Pelo Corolário 1.7 (p. 74), segue que $K[X_1,\ldots,X_n]$ é anel noetheriano, logo, pela Proposição 1.49 (p. 76), o anel de frações $S^{-1}K[X_1,\ldots,X_n]$ é anel noetheriano, isto é, $K[X_1,X_1^{-1},\ldots,X_n,X_n^{-1}]$ é anel noetheriano. □

Proposição 1.51. *Sejam Q grupo abeliano livre de posto livre de torção n ($n \in \mathbb{Z}_+$) cuja operação binária é escrita em notação multiplicativa, o anel de grupo $\mathbf{Z}Q$ e o anel comutativo de polinômios de Laurent $\mathbf{Z}[X_1,X_1^{-1},\ldots,X_n,X_n^{-1}]$. Então,*

$$\mathbf{Z}Q \cong \mathbf{Z}[X_1,X_1^{-1},\ldots,X_n,X_n^{-1}] \text{ (como aneis).}$$

Demonstração. Como Q é grupo abeliano livre de posto livre de torção n, pelo Teorema 1.5 (p. 26), segue que $Q \cong \mathbf{Z}^n$. Assim, existem $q_1,\ldots,q_n \in Q$ tais que $Q = \langle q_1,\ldots,q_n\rangle$. Segue que, dado $q \in Q$, $q = q_1^{z_1}\ldots q_n^{z_n}$, onde $z_j \in \mathbb{Z}$, com $1 \leq j \leq n$ (lembremos que a operação binária em Q é escrita em notação multiplicativa). Como Q é grupo abeliano livre, a expressão acima para $q \in Q$ é única, isto é, z_j são únicos, com $1 \leq j \leq n$. Seja, então,

$$\psi : Q \to \mathbf{Z}[X_1,X_1^{-1},\ldots,X_n,X_n^{-1}]$$

$$\text{definida}^{10} \text{ por } \psi(q) = X_1^{z_{1,q}}\ldots X_n^{z_{n,q}},$$

onde $q = q_1^{z_{1,q}}\ldots q_n^{z_{n,q}}$. Temos que ψ está bem definida, pois $z_{j,q}$ são únicos, com $1 \leq j \leq n$. Agora, um elemento arbitrário $\lambda \in \mathbf{Z}Q$ tem a forma $\lambda = \sum_{q\in Q} z_q q$, onde $z_q \in \mathbf{Z}$. Desta forma, extendendo ψ por linearidade, temos um isomorfismo de aneis entre $\mathbf{Z}Q$ e $\mathbf{Z}[X_1,X_1^{-1},\ldots,X_n,X_n^{-1}]$, ou seja, definindo-se

$$\Psi : \mathbf{Z}Q \to \mathbf{Z}[X_1,X_1^{-1},\ldots,X_n,X_n^{-1}]$$

$$\text{por } \Psi(\lambda) = \sum_{q\in Q} z_q\psi(q),$$

onde $\lambda = \sum_{q\in Q} z_q q$ tal que $z_q \in \mathbf{Z}$ e $q = q_1^{z_{1,q}}\ldots q_n^{z_{n,q}}$, com $z_{j,q} \in \mathbb{Z}$, para $1 \leq j \leq n$, temos que Ψ é isomorfismo de aneis. De fato, sendo $1_Q \in Q$, o elemento neutro de Q que

[10] Observemos que estamos cometendo um abuso de notação na definição de ψ, uma vez que aqui $X_j^{z_{j,q}} = X_j^{z_{j,q}}/1$ se $z_{j,q} > 0$ e $X_j^{z_{j,q}} = 1/X_j^{-z_{j,q}}$ se $z_{j,q} < 0$, onde $1 \leq j \leq n$.

também é o elemento identidade de $\mathbf{Z}Q$, segue que $\Psi(1_Q) = X_1^0 \dots X_n^0 = 1$, que é o elemento identidade em $\mathbf{Z}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}]$. Agora, dados $\lambda = \sum_{q\in Q} z_q q$, $\mu = \sum_{q\in Q} y_q q \in \mathbf{Z}Q$, onde $z_q, y_q \in \mathbb{Z}$, temos que $\Psi(\lambda+\mu) = \Psi(\sum_{q\in Q}(z_q+y_q)q) = \sum_{q\in Q}(z_q+y_q)X_1^{z_{1,q}} \dots X_n^{z_{n,q}}$, onde $q = q_1^{z_{1,q}} \dots q_n^{z_{n,q}}$. E, $\sum_{q\in Q}(z_q+y_q)X_1^{z_{1,q}} \dots X_n^{z_{n,q}} = (\sum_{q\in Q} z_q X_1^{z_{1,q}} \dots X_n^{z_{n,q}}) + (\sum_{q\in Q} y_q X_1^{z_{1,q}} \dots X_n^{z_{n,q}}) = \Psi(\lambda) + \Psi(\mu)$. Por outro lado, dados $\lambda = \sum_{q\in Q} z_q q$, $\mu = \sum_{r\in Q} y_r r \in \mathbf{Z}Q$, onde $z_q, y_r \in \mathbf{Z}$, segue que $\Psi(\lambda\mu) = \Psi(\sum_{q\in Q}\sum_{r\in Q} z_q y_r qr) = \sum_{q\in Q}\sum_{r\in Q} z_q y_r X_1^{z_{1,q}+y_{1,r}} \dots X_n^{z_{n,q}+y_{n,r}}$, onde $q = q_1^{z_{1,q}} \dots q_n^{z_{n,q}}$ e $r = q_1^{y_{1,r}} \dots q_n^{y_{n,r}}$, isto é, $qr = q_1^{z_{1,q}+y_{1,r}} \dots q_n^{z_{n,q}+y_{n,r}}$. Daí que,

$$\Psi(\lambda\mu) = \sum_{q\in Q}\sum_{r\in Q} z_q y_r X_1^{z_{1,q}+y_{1,r}} \dots X_n^{z_{n,q}+y_{n,r}} = \sum_{q\in Q}\sum_{r\in Q} z_q X_1^{z_{1,q}} \dots X_n^{z_{n,q}} y_r X_1^{y_{1,r}} \dots X_n^{y_{n,r}} =$$

$$= \sum_{q\in Q} z_q X_1^{z_{1,q}} \dots X_n^{z_{n,q}} \cdot \sum_{r\in Q} y_r X_1^{y_{1,r}} \dots X_n^{y_{n,r}} = \Psi(\lambda)\Psi(\mu).$$

Por fim, é de fácil verificação que $ker(\Psi) = \mathbf{0}$ e que Ψ é sobrejetiva. Portanto, Ψ é isomorfismo de aneis. □

Corolário 1.8. *Seja Q um grupo abeliano finitamente gerado. Então, o anel de grupo $\mathbf{Z}Q$ é noetheriano.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.5 (p. 26), $Q = F \oplus T$, onde $F \cong \mathbf{Z}^n = \langle x_1, \dots, x_n\rangle$, para algum $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ e T é um grupo abeliano finito. Observamos que $T \cong \bigoplus_{i=1}^{s}\langle y_i\rangle$, para algum $s \in \mathbb{Z}_+$, onde y_i tem ordem $m_i \in \mathbb{Z}_+$. Assim,

$$\mathbf{Z}T \cong \frac{\mathbf{Z}[Y_1, \dots, Y_s]}{(Y_1^{m_1}-1, \dots, Y_s^{m_s}-1)}.$$

Juntando com o isomorfismo da Proposição 1.51 (p. 77), temos um isomorfismo de aneis

$$\mathbf{Z}Q \cong \mathbf{Z}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}, Y_1, \dots, Y_s]/I,$$

enviando x_j para $X_j + I$ e y_i para $Y_i + I$, com $1 \le j \le n$ e $1 \le i \le s$, onde, definindo-se

$$U = \mathbf{Z}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}, Y_1, \dots, Y_s],$$

I é o ideal do anel U gerado por $Y_1^{m_1}-1, \dots, Y_s^{m_s}-1$ e U é a localização do anel de polinômios $\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_s]$ com respeito ao conjunto multiplicativo

$$S = \{X_1^{j_1} X_2^{j_2} \dots X_n^{j_n} \in K[X_1, \dots, X_n] : j_l \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \text{ e } 1 \le l \le n\}.$$

Assim, pelo Teorema 1.20 (p. 73), $\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_s]$ é anel noetheriano, logo pela Proposição 1.49 (p. 76) a sua localização U é anel noetheriano e, portanto, pela Proposição 1.45 (p. 71) e pela Proposição 1.44 (p. 71), U/I é anel noetheriano. □

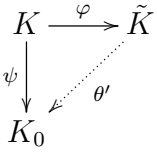
É fácil ver que U é isomorfo como anel ao produto tensorial

$$\mathbf{Z}[X_1, X_1^{-1}, \ldots, X_n, X_n^{-1}] \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[Y_1, \ldots, Y_s],$$

mas não vamos usar esse fato!

Sendo K um anel comutativo e $S \subseteq K$ um conjunto multiplicativo, definiremos abaixo o conceito de localização de K com respeito a S. Veremos a relação existente entre esse conceito e o anel de frações $S^{-1}K$.

Definição 1.65. *Sejam K um anel comutativo e $S \subseteq K$ um conjunto multiplicativo. Uma **localização de K com respeito a** S é um par ordenado $(\tilde{K}, \varphi)$, onde $\tilde{K}$ é um anel comutativo e $\varphi : K \to \tilde{K}$ é um homomorfismo de aneis tal que $\varphi(s)$ é invertível em $\tilde{K}, \forall s \in S$, sendo esse par solução do seguinte problema universal: para cada anel comutativo K_0 e homomorfismo de aneis $\psi : K \to K_0$ tal que $\psi(s)$ é invertível em $K_0, \forall s \in S$, existe um único homomorfismo de aneis $\theta' : \tilde{K} \to K_0$ tal que $\theta'\varphi = \psi$, isto é, o seguinte diagrama é comutativo:*



Teorema 1.22. *Sejam K um anel comutativo e $S \subseteq K$ um conjunto multiplicativo. Então, $(S^{-1}K, \lambda)$ é uma localização de K com respeito a S, onde λ é o homomorfismo de localização da Proposição 1.48 (p. 76).*

Demonstração. Precisamos mostrar que, para cada anel comutativo K_0 e homomorfismo de aneis $\psi : K \to K_0$ tal que $\psi(s)$ é invertível em $K_0, \forall s \in S$, existe um único homomorfismo de aneis $\theta : S^{-1}K \to K_0$ tal que $\theta\lambda = \psi$.

Verifiquemos a existência de θ.

Definamos $\theta : S^{-1}K \to K_0$ por $\theta(x/s) = \psi(x)\psi(s)^{-1}$. θ está bem definido, pois, dados $x_1/s_1, x_2/s_2 \in S^{-1}K$ tais que $x_1/s_1 = x_2/s_2$, então existe $u \in S$ com $(x_1s_2 - x_2s_1)u = 0$, logo $\psi((x_1s_2 - x_2s_1)u) = \psi(0) = 0$, isto é, $(\psi(x_1)\psi(s_2) - \psi(x_2)\psi(s_1))\psi(u) = 0$. Como $\psi(u)$ é invertível em K_0, segue que $\psi(x_1)\psi(s_2) = \psi(x_2)\psi(s_1)$, ou seja, $\psi(x_1)\psi(s_1)^{-1} = \psi(x_2)\psi(s_2)^{-1}$ e, portanto, $\theta(x_1/s_1) = \theta(x_2/s_2)$.

Agora, θ é homomorfismo de aneis, uma vez que $\theta(1/1) = \psi(1)\psi(1)^{-1} = 1$ e, dados $x_1/s_1, x_2/s_2 \in S^{-1}K$, temos que $\theta(x_1/s_1 + x_2/s_2) = \theta((x_1s_2 + x_2s_1)/s_1s_2) = \psi(x_1s_2 + x_2s_1)\psi(s_1s_2)^{-1} = \psi(x_1)\psi(s_1)^{-1} + \psi(x_2)\psi(s_2)^{-1} = \theta(x_1/s_1) + \theta(x_2/s_2)$ e $\theta(x_1/s_1 \cdot x_2/s_2) = \theta(x_1x_2/s_1s_2) = \psi(x_1x_2)\psi(s_1s_2)^{-1} = \psi(x_1)\psi(s_1)^{-1}\psi(x_2)\psi(s_2)^{-1} = \theta(x_1/s_1)\theta(x_2/s_2)$.

Segue também que $\forall x \in K, \theta\lambda(x) = \theta(x/1) = \psi(x)\psi(1)^{-1} = \psi(x)$, isto é, $\theta\lambda = \psi$.

Vamos mostrar agora que θ é única.

Seja θ' satisfazendo a propriedade universal. Então, dado $x \in K, \theta'(x/1) = \theta'\lambda(x) = \psi(x)$. Agora, dado $s \in S$, $\theta'(1/s) = \theta'((s/1)^{-1}) = \theta'(s/1)^{-1} = (\theta'\lambda(s))^{-1} = \psi(s)^{-1}$. Assim, dados $x \in K$ e $s \in S$, $\theta'(x/s) = \theta'(x/1)\theta'(1/s) = \psi(x)\psi(s)^{-1} = \theta(x/s)$. □

Teorema 1.23. *Sejam K um anel comutativo e $S \subseteq K$ um conjunto multiplicativo. Então, a localização $(S^{-1}K, \lambda)$ de K com respeito a S é única a menos de isomorfismo (onde λ é o homomorfismo de localização da Proposição 1.48 (p. 76)), isto é, se $(\tilde{K}, \varphi)$ é uma outra localização de K com respeito a S, então existe isomorfismo de aneis η entre $\tilde{K}$ e $S^{-1}K$ tal que $\eta\lambda = \varphi$.*

Demonstração. Suponhamos que $(\tilde{K}, \varphi)$ seja uma outra localização de K com respeito a S. Recordemos que pela Proposição 1.48 (p. 76), $\forall s \in S, \lambda(s)$ é invertível no anel comutativo $S^{-1}K$. Então, pela propriedade universal temos os seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{K} \\ {\scriptstyle\lambda}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle\theta'} & \\ S^{-1}K & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\lambda} & S^{-1}K\ , \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle\theta} & \\ \tilde{K} & & \end{array}$$

isto é, existem únicos homomorfismos de aneis $\theta' : \tilde{K} \to S^{-1}K$ e $\theta : S^{-1}K \to \tilde{K}$ tais $\theta'\varphi = \lambda$ e $\theta\lambda = \varphi$. Logo, $(\theta\theta')\varphi = \theta(\theta'\varphi) = \theta\lambda = \varphi$, ou seja, $\theta\theta'$ torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{K} \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle\theta\theta'} & \\ \tilde{K} & & \end{array}$$

Mas, $id_{\tilde{K}} : \tilde{K} \to \tilde{K}$ é também homomorfismo de aneis que torna esse mesmo diagrama comutativo, pois $id_{\tilde{K}}\varphi = \varphi$, isto é:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{K} \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle id_{\tilde{K}}} & \\ \tilde{K} & & \end{array}$$

Pela unicidade na propriedade universal, temos que $\theta\theta' = id_{\tilde{K}}$. E, de forma análoga ao que foi feito acima, concluímos que $\theta'\theta = id_{S^{-1}K}$. Assim, definindo-se $\eta := \theta$, temos que $\tilde{K}$ e $S^{-1}K$ são isomorfos como aneis comutativos, sendo $\eta = \theta$ o isomorfismo entre eles e temos que $\eta\lambda = \varphi$. □

Sejam K um anel comutativo e $S \subseteq K$ um conjunto multiplicativo. O Teorema 1.23 (p. 80) mostra que uma localização de K com respeito a S pode ser chamada de **"a"** localização de K com respeito a S.

Capítulo 2

Invariante Geométrico Σ de Bieri-Strebel

Recordemos, conforme Tabela de Símbolos Especiais, que $\mathbb{Z}$ denota o conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z}_+$ denota o conjunto dos números inteiros positivos, $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}_+$ denota o conjunto dos números reais positivos, $\mathbf{Z}$ denota o grupo abeliano cujo conjunto de elementos é o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ e a operação é a soma usual em $\mathbb{Z}$, $\mathbf{R}$ denota o grupo abeliano cujo conjunto de elementos é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ e a operação é a soma usual em $\mathbb{R}$, $\mathbf{Z}^n$ denota o grupo abeliano cujo conjunto de elementos é o conjunto de n-uplas de números inteiros $\mathbb{Z}^n$ e a operação é a soma usual em $\mathbb{Z}^n$ e $\mathbf{R}^n$ denota o grupo abeliano cujo conjunto de elementos é o conjunto de n-uplas de números reais $\mathbb{R}^n$ e a operação é a soma usual em $\mathbb{R}^n$.

Sejam G, H grupos abelianos. Consideraremos neste Capítulo $Hom(G,H)$ como grupo abeliano aditivo, cuja operação é dada por

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(g) := \varphi_1(g) + \varphi_2(g), \forall \varphi_1, \varphi_2 \in Hom(G,H) \text{ e } \forall g \in G.$$

Neste Capítulo, Q denotará um grupo abeliano finitamente gerado e a

operação binária em Q será escrita em notação multiplicativa.

Apesar de considerarmos $\mathbf{Z}Q$-módulos à direita neste Capítulo, as definições e resultados feitas e obtidos, respectivamente, também valem para $\mathbf{Z}Q$-módulos à esquerda.

Aqui vamos introduzir conceitos básicos de Σ-teoria, definida originalmente por Bieri e Strebel, pois ela é usada como ferramenta importante na demonstração do resultado principal da Dissertação.

2.1 Definições e Alguns Resultados

Definição 2.1. *Seja Q um grupo abeliano finitamente gerado. Um homomorfismo de grupos $v : Q \to \mathbf{R}$ é chamado de* ***caráter de*** *Q.*

Lema 2.1. *Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado, $r \in \mathbb{R}$ e $v : Q \to \mathbf{R}$ um caráter. Então, a função $rv : Q \to \mathbf{R}$ dada por $(rv)(q) = rv(q)$ é um caráter. Aqui a justaposição $rv(q)$ dos elementos r e $v(q)$ é a multiplicação usual em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Dados $q_1, q_2 \in Q$, temos que $(rv)(q_1q_2) = rv(q_1q_2) = r[v(q_1) + v(q_2)] = rv(q_1) + rv(q_2) = (rv)(q_1) + (rv)(q_2)$. Portanto, rv é um caráter. □

Definição 2.2. *Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado e $v_1, v_2 \in Hom(Q, \mathbf{R})$. Dizemos que v_1 **é equivalente a** v_2 (o que é denotado por $v_1 \sim v_2$) se existe $r \in \mathbb{R}_+$ tal que $v_1 = rv_2$.*

Lema 2.2. *Seja Q um grupo abeliano finitamente gerado. Então, $\sim$ (da Definição 2.2) é uma relação de equivalência em $Hom(Q, \mathbf{R})$.*

Demonstração. Sejam $v_1, v_2, v_3 \in Hom(Q, \mathbf{R})$. Precisamos mostrar que

i) $v_1 \sim v_1$;

ii) $v_1 \sim v_2 \Rightarrow v_2 \sim v_1$;

iii) $v_1 \sim v_2$ e $v_2 \sim v_3 \Rightarrow v_1 \sim v_3$.

Vamos, então, a seguir, fazer a demonstração dos itens i), ii) e iii).

i) De fato, $v_1 = 1v_1$, com $1 \in \mathbb{R}_+$.

ii) Temos que $v_1 \sim v_2$ implica que $v_1 = rv_2$, com $r \in \mathbb{R}_+$. Logo, $r \neq 0$ e $\frac{1}{r} \in \mathbb{R}_+$. Segue que $v_2 = \frac{1}{r}v_1$ e, portanto, $v_2 \sim v_1$.

iii) Primeiramente, temos que, $\forall q \in Q$ e $\forall r, s \in \mathbb{R}_+, (r(sv_3))(q) = r(sv_3)(q) = r(sv_3(q)) = (rs)v_3(q) = ((rs)v_3)(q)$, isto é, $r(sv_3) = (rs)v_3$.

   Agora, por hipótese, temos que $v_1 = rv_2$ e $v_2 = sv_3$, com $r, s \in \mathbb{R}_+$. Logo, $v_1 = r(sv_3) = (rs)v_3$ e $rs \in \mathbb{R}_+$ e, portanto, $v_1 \sim v_3$.

□

Notação 2.1. Seja Q um grupo abeliano finitamente gerado. Sendo $v \in Hom(Q, \mathbf{R})$, denotaremos a classe de equivalência de v segundo $\sim$ por $[v]$, onde

$$[v] = \{v' \in Hom(Q, \mathbf{R}) : v' \sim v\}.$$

Definição 2.3. *Seja Q um grupo abeliano finitamente gerado. Definimos a **esfera de caracteres** $S(Q)$ como sendo o conjunto das classes de equivalência dos caracteres não-nulos de Q com respeito à relação de equivalência $\sim$ da Definição 2.2 (p. 82), ou seja,*

$$S(Q) := \frac{Hom(Q, \mathbf{R})\backslash\{0\}}{\sim}$$

onde 0 denota o homomorfismo de grupos nulo, isto é, $0 : Q \to \mathbf{R}$ é definido por $0(q) = 0_{\mathbf{R}}, \forall q \in Q$.

Lema 2.3. *$Hom(\mathbf{Z}^n, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^n$ como grupos abelianos, onde $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Demonstração. Consideremos o grupo abeliano aditivo $\mathbf{R}^n$ como um espaço vetorial real com produto interno usual, este último denotado por $\langle\cdot,\cdot\rangle$, e seja, $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $\varphi_x : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R}$ definida por $\varphi_x(z) = \langle z, x\rangle$. Então, φ_x é homomorfismo de grupos abelianos. De fato, isso segue da linearidade de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na primeira entrada. Agora, seja $\varphi : \mathbf{R}^n \to Hom(\mathbf{Z}^n, \mathbf{R})$ dada por $\varphi(x) = \varphi_x$. Temos que φ é isomorfismo de grupos abelianos. O que mostraremos nos itens i), ii) e iii) a seguir.

i) φ é homomorfismo de grupos abelianos:

$\forall x, y \in \mathbf{R}^n$ e $\forall z \in \mathbf{Z}^n, \varphi(x+y)(z) = \varphi_{x+y}(z) = \langle z, x+y\rangle = \langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle = \varphi_x(z) + \varphi_y(z) = (\varphi_x + \varphi_y)(z) = (\varphi(x) + \varphi(y))(z)$. Logo, $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

ii) φ é injetiva:

$\forall x, y \in \mathbf{R}^n$, se $\varphi(x) = \varphi(y)$, então $\varphi_x(z) = \varphi_y(z), \forall z \in \mathbf{Z}^n$. Logo, $\langle z, x\rangle = \langle z, y\rangle$ o que implica que $\langle z, x-y\rangle = 0, \forall z \in \mathbf{Z}^n$. Sendo $z = (z_1, \ldots, z_n), x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, temos que $\langle z, x-y\rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j - y_j) = 0$. Em particular, se $z = e_i$, com $i \in \{1, \ldots, n\}$, onde $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ com 1 sendo a i-ésima coordenada de e_i, temos que $(x_i - y_i) = 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, isto é, $x_i = y_i, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Assim, $x = y$.

iii) φ é sobrejetiva:

Sejam $f \in Hom(\mathbf{Z}^n, \mathbf{R})$ e $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$, que é base ortonormal de $\mathbf{R}^n$ com respeito a $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Observe que $\beta \subseteq \mathbf{Z}^n$. Definamos $x := \sum_{j=1}^{n} f(e_j)e_j$. Então, $x \in \mathbf{R}^n$. Agora, $\langle e_i, x\rangle = \langle e_i, \sum_{j=1}^{n} f(e_j)e_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} f(e_j)\langle e_i, e_j\rangle = f(e_i)$. Logo, $\forall z \in \mathbf{Z}^n, \langle z, x\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} z_i e_i, \sum_{j=1}^{n} f(e_j)e_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} z_i f(e_j)\langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i f(e_i) \overset{(1)}{=} f(\sum_{i=1}^{n} z_i e_i) = f(z)$, onde em (1) usamos que f é homomorfismo de grupos. Portanto, $f = \varphi_x = \varphi(x)$.

□

Proposição 2.1. *Seja Q um grupo abeliano finitamente gerado. Então,*

$$Hom(Q, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^n,$$

como grupos abelianos, onde $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ é o posto livre de torção de Q ($\mathbf{R}^0 := \mathbf{0}$).

Demonstração. Nesta demonstração todos os símbolos de isomorfismo ($\cong$) são referentes a isomorfismos de grupos abelianos.

Pelo Teorema 1.5 (p. 26), sabemos que, como Q é grupo abeliano finitamente gerado, $Q \cong \mathbf{Z}^n \oplus K$, onde $K = \{q \in Q : |q| < \infty\}$ é subgupo abeliano finito de Q. Assim, $Hom(Q, \mathbf{R}) \cong Hom(\mathbf{Z}^n \oplus K, \mathbf{R})$.

Agora, dado $\varphi \in Hom(\mathbf{Z}^n \oplus K, \mathbf{R})$, afirmamos que $\varphi(K) = \mathbf{0}$. De fato, seja $q \in K$. Logo, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $q^n = 1$. Daí que $0 = \varphi(1) = \varphi(q^n) = n\varphi(q)$. Como $\mathbb{R}$ não

possui divisores de zero, segue que $\varphi(q) = 0$. Portanto, como $q \in K$ foi tomado arbitrário, concluímos que $\varphi(K) = \mathbf{0}$.

Definamos $\Psi : Hom(\mathbf{Z}^n \oplus K, \mathbf{R}) \to Hom(\mathbf{Z}^n, \mathbf{R})$ por $\Psi(\varphi) = \varphi|_{\mathbf{Z}^n}$. Observe que, claramente, Ψ está bem definida e é epimorfismo de grupos abelianos. A injetividade de Ψ é devida ao parágrafo precedente.

Assim, pelo Lema 2.3 (p. 82), temos que

$$Hom(Q, \mathbf{R}) \cong Hom(\mathbf{Z}^n \oplus K, \mathbf{R}) \cong Hom(\mathbf{Z}^n, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^n.$$

□

A Proposição 2.1 (p. 83) justifica a denominação "esfera" para $S(Q)$, uma vez que cada homomorfismo de grupos abelianos de Q em $\mathbf{R}$ é visto como um ponto no $\mathbf{R}^n$ e cada classe de equivalência em $S(Q)$ é vista como um raio em $\mathbf{R}^n$ partindo de $0 \in \mathbf{R}^n$, mas não o incluindo. Tomamos, então, para representante de tal classe a intersecção de tal raio com a esfera $(n-1)$-dimensional $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbf{R}^n$.

Definição 2.4. *Seja Q um grupo abeliano finitamente gerado. Dado $q \in Q$, definimos a* ***semiesfera aberta de caracteres relativa a*** *q como sendo o conjunto*

$$H_q = \big\{[v] \in S(Q) : v(q) > 0\big\}.$$

Proposição 2.2. *Seja Q um grupo abeliano finitamente gerado. Dado $q \in Q$, se $|q| < \infty$, então $H_q = \emptyset$.*

Demonstração. Seja $q \in Q$ tal que $|q| = n$ com $n \in \mathbb{Z}_+$. Suponhamos que $H_q \neq \emptyset$. Tomemos, então, $[v] \in H_q$. Logo, $v(q) > 0$. Mas, $0 = v(1) = v(q^n) = nv(q)$. Como $\mathbb{R}$ não possui divisores de zero, $v(q) = 0$. O que é contradição, pois $v(q) > 0$. Segue que $H_q = \emptyset$. □

Definição 2.5. *Seja G um grupo. Considerando o anel de grupo $\mathbf{Z}G$, dado $\lambda = \sum_{g \in G} x_g g \in \mathbf{Z}G$, com $x_g \in \mathbf{Z}$, definimos o* ***suporte de*** *λ, denotado por $supp(\lambda)$, como sendo o conjunto*

$$supp(\lambda) = supp(\sum_{g \in G} x_g g) := \{g \in G : x_g \neq 0\}.$$

Definição 2.6. *Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado e A um $\mathbf{Z}Q$-módulo à direita. Definimos o* ***invariante geométrico*** *Σ **de Bieri-Strebel** como sendo o conjunto*

$$\Sigma_A(Q) := \bigcup_{\lambda \in C_{\mathbf{Z}Q}(A)} \{[v] \in S(Q) : v(q) > 0, \forall q \in supp(\lambda)\}.$$

Nesta Dissertação, sempre que escrevermos $\Sigma_A(Q)$ ficará subentendido que Q é um grupo abeliano finitamente gerado e A é um $\mathbf{Z}Q$-módulo à direita.

Observação 2.1. Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado e A um $\mathbf{Z}Q$-módulo à direita. O complementar de $\Sigma_A(Q)$ como conjunto, isto é, $S(Q) \backslash \Sigma_A(Q)$, é o seguinte conjunto

$$\Sigma_A^c(Q) = \bigcap_{\lambda \in C_{\mathbf{Z}Q}(A)} \{[v] \in S(Q) : v(q) \leq 0, \text{para algum } q \in supp(\lambda)\}.$$

Observação 2.2. Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado e A um $\mathbf{Z}Q$-módulo à direita finitamente gerado. Seja também v um caráter de Q. Definimos o **monoide relativo ao caráter v de Q** como sendo

$$Q_v = \{q \in Q : v(q) \geq 0_{\mathbf{R}}\}.$$

Observe que Q_v é, de fato, um monoide e $\mathbf{Z}Q_v$ é um subanel de $\mathbf{Z}Q$.

Originalmente, a definição do invariante geométrico Σ de Bieri-Strebel é dada em [8, 2.4, p. 444] para apenas $\mathbf{Z}Q$-módulos à direita finitamente gerados como sendo

$$\Sigma_A(Q) = \{[v] \in S(Q) : \ A \text{ é finitamente gerado como } \mathbf{Z}Q_v\text{-módulo à direita}\}.$$

É mostrado em [8, Proposition 2.1, p. 443] a equivalência desta definição com a definição que demos anteriormente para o invariante geométrico Σ de Bieri-Strebel.

Proposição 2.3. *Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado e A um $\mathbf{Z}Q$-módulo à direita. Temos que*

$$\Sigma_A(Q) = \Sigma_{\mathbf{Z}Q/Ann_{\mathbf{Z}Q}(A)}(Q).$$

Demonstração. Pela definição do invariante geométrico Σ de Bieri-Strebel, basta que mostremos que $C_{\mathbf{Z}Q}(A) = C_{\mathbf{Z}Q}(\mathbf{Z}Q/Ann_{\mathbf{Z}Q}(A))$.

Vamos mostrar que $C_{\mathbf{Z}Q}(A) \subseteq C_{\mathbf{Z}Q}(\mathbf{Z}Q/Ann_{\mathbf{Z}Q}(A))$. Sejam $\lambda \in C_{\mathbf{Z}Q}(A)$ e $\overline{\mu} = \mu + Ann_{\mathbf{Z}Q}(A) \in \mathbf{Z}Q/Ann_{\mathbf{Z}Q}(A)$. Segue que, $\forall a \in A$, $a\lambda = a$, logo $a(\lambda\mu - \mu) = a\lambda\mu - a\mu = 0_A$. Daí que, $\lambda\mu - \mu \in Ann_{\mathbf{Z}Q}(A)$, donde $\lambda\mu + Ann_{\mathbf{Z}Q}(A) = \mu + Ann_{\mathbf{Z}Q}(A)$ e, portanto, $\overline{\mu}\lambda = \overline{\mu}$, isto é, $\lambda \in C_{\mathbf{Z}Q}(\mathbf{Z}Q/Ann_{\mathbf{Z}Q}(A))$.

Para mostrarmos a inclusão recíproca, sejam $\overline{1}_Q = 1_Q + Ann_{\mathbf{Z}Q}(A) \in \mathbf{Z}Q/Ann_{\mathbf{Z}Q}(A)$ e $\lambda \in C_{\mathbf{Z}Q}(\mathbf{Z}Q/Ann_{\mathbf{Z}Q}(A))$. Temos que $(1_Q + Ann_{\mathbf{Z}Q}(A))\lambda = 1_Q + Ann_{\mathbf{Z}Q}(A)$. Logo, $\lambda - 1_Q \in Ann_{\mathbf{Z}Q}(A)$, donde $a(\lambda - 1_Q) = 0_A, \forall a \in A$ e, portanto, $a\lambda = a, \forall a \in A$, ou seja, $\lambda \in C_{\mathbf{Z}Q}(A)$. □

Definição 2.7. *Seja Q um grupo abeliano finitamente gerado. Um caráter $v : Q \to \mathbf{R}$ é dito ser **discreto** se $v(Q) \cong \mathbf{Z}$.*

Definição 2.8. *Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado, A um $\mathbf{Z}Q$-módulo à direita e $\Omega \subseteq \Sigma^c_A(Q)$ um subconjunto. Definimos o seguinte conjunto*

$$dis\Omega := \{[v] \in \Omega : v \text{ é caráter discreto}\}.$$

Definição 2.9. *Seja G um grupo nilpotente-por-abeliano-por-finito finitamente gerado. Existem, então, $N, H \lhd G$ com $N \subseteq H \subseteq G$ e tais que N é subgrupo nilpotente, H/N é grupo abeliano e G/H é grupo finito. Definimos o seguinte conjunto*

$$\sigma(G) := \Sigma^c_{N/N'}(H/N)$$

onde N/N' é a abelianização de N.

É mostrado em [7, Theorem 2.3, p. 11] que a definição de $\sigma(G)$ independe da escolha de N e H tais que $N \subseteq H \subseteq G$ e N é subgrupo nilpotente, H/N é grupo abeliano e G/H é grupo finito.

Observação 2.3. Seja G um grupo nilpotente-por-abeliano-por-finito finitamente gerado. Existem, então, $N, H \lhd G$ com $N \subseteq H \subseteq G$ e tais que N é subgrupo nilpotente, H/N é grupo abeliano e G/H é grupo finito. Então, para vermos que $\sigma(G)$ está bem definido, precisamos mostrar que:

i) H/N é grupo abeliano finitamente gerado;

ii) N/N' é um $\mathbf{Z}(H/N)$-módulo à direita.

Vamos mostrar, então, i) e ii).

i) Por hipótese, estamos considerando G como um grupo finitamente gerado. Como $[G : H] < \infty$, segue da Proposição 1.27 (p. 36) que H é grupo finitamente gerado. Daí que, pela Proposição 1.18 (p. 24), H/N é grupo finitamente gerado.

ii) Pela Proposição 1.38 (p. 54), como N/N' é grupo abeliano, basta mostrarmos que

$$\mathbf{1} \longrightarrow N/N' \xrightarrow{j} H/N' \xrightarrow{\rho} H/N \longrightarrow \mathbf{1}$$

é sequência exata curta de grupos, onde j é o homomorfismo de grupos inclusão canônica e ρ é dada por,

$$\rho(hN') = hN, \text{ para toda classe lateral } hN' \in H/N'.$$

Agora, j é obviamente monomorfismo de grupos e $Im(j) = N/N'$. Por outro lado, pela Proposição 1.7 (p 9), ρ é epimorfismo de grupos tal que $ker(\rho) = N/N'$.

O conjunto $\Sigma^c_{N/N'}(H/N)$ frequentemente aparece na literatura com a notação $\sigma(G)$ e é por esse motivo que demos a Definição 2.9 (p. 85), no entanto doravante nesta Dissertação, quando formos nos referir ao conjunto $\sigma(G)$, usaremos a notação mais explícita $\Sigma^c_{N/N'}(H/N)$.

Definição 2.10. *Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado e P um subgrupo de Q. Definamos a* ***subesfera grande de*** $S(Q)$ ***com respeito a*** P *como sendo o conjunto*

$$S(Q, P) := \{[v] \in S(Q) : v(P) = \mathbf{0}\}.$$

Proposição 2.4. *Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado, A um $\mathbf{Z}Q$-módulo à direita e P um subgrupo de Q agindo trivialmente à direita sobre A. Então,*

$$\Sigma^c_A(Q) \subseteq S(Q, P).$$

Demonstração. Observemos que $P \subseteq Q \subseteq \mathbf{Z}Q$. Como P age trivialmente à direita sobre A, isto é, $a^s = a, \forall a \in A$ e $\forall s \in P$, temos que $P \subseteq C_{\mathbf{Z}Q}(A)$. Como P é subgrupo, $\forall s \in P, s^{-1} \in P \subseteq C_{\mathbf{Z}Q}(A)$.

Agora, seja $[v] \in \Sigma^c_A(Q)$. Então, $\forall \lambda \in C_{\mathbf{Z}Q}(A)$, existe $q_\lambda \in supp(\lambda)$ tal que $v(q_\lambda) \leq 0$. Em particular, para todo $s \in P \subseteq C_{\mathbf{Z}Q}(A), v(s) \leq 0$, pois $supp(s) = \{s\}$. Da mesma forma, $v(s^{-1}) \leq 0$. Como v é homomorfismo de grupos, temos que $0 \geq v(s^{-1}) = -v(s)$. Logo, $v(s) \geq 0$. Portanto, $v(s) = 0, \forall s \in P$. Segue que $\Sigma^c_A(Q) \subseteq S(Q, P)$. □

Proposição 2.5. *Sejam Q_1, Q_2 grupos abelianos finitamente gerados e $\varphi : Q_1 \to Q_2$ um homomorfismo de grupos. Então, φ induz uma função $\varphi^* : S(Q_2, Im(\varphi))^c \to S(Q_1)$ definida por*

$$\varphi^*([v]) = [v\varphi],$$

para toda classe lateral $[v] \in S(Q_2, Im(\varphi))^c = S(Q_2)\backslash S(Q_2, Im(\phi))$.

Demonstração. Precisamos mostrar que φ^* está bem definida. Primeiramente, observemos que $[v\varphi] \in S(Q_1)$, pois a composição $v\varphi$ pertence a $Hom(Q_1, \mathbf{R})$ e $v(Im(\varphi)) \neq 0$, isto é, $v\varphi \neq 0$. Além disso, dados $[v], [v'] \in S(Q_2, Im(\varphi))^c$ tais que $[v] = [v']$, temos que $v = rv'$, com $r \in \mathbb{R}_+$, logo, $\forall q_1 \in Q_1, v\varphi(q_1) = v(\varphi(q_1)) = (rv')(\varphi(q_1)) = rv'(\varphi(q_1)) = r(v'\varphi)(q_1)$ e, portanto, $[v\varphi] = [v'\varphi]$. Assim, concluímos que φ^* está bem definida. □

Observação 2.4. Sejam Q_1, Q_2 grupos abelianos finitamente gerados e $\varphi : Q_1 \twoheadrightarrow Q_2$ um epimorfismo de grupos. Então, $S(Q_2, Im(\varphi))^c = S(Q_2, Q_2)^c = S(Q_2)$. Daí que φ^* fica definida em todo domínio $S(Q_2)$ e, portanto, φ^* está definida em $\Sigma^c_A(Q_2) \subseteq S(Q_2)$.

Os dois Lemas a seguir são naturais, no entanto, ainda assim, enunciaremo-los, pois os usaremos adiante.

Lema 2.4. *Sejam Q_1, Q_2 grupos abelianos finitamente gerados, $\psi : Q_1 \to Q_2$ um isomorfismo de grupos, A um $\mathbf{Z}Q_1$-módulo à direita e $\psi^* : S(Q_2, Im(\psi))^c \to S(Q_1)$ dada por $\psi^*([v]) = [v\psi]$ a função induzida por ψ conforme a Proposição 2.5 (p. 87). Temos que*

$$\psi^*(\Sigma^c_A(Q_2)) = \Sigma^c_A(Q_1) \qquad e \qquad \psi^*(dis\Sigma^c_A(Q_2)) = dis\Sigma^c_A(Q_1).$$

Lema 2.5. *Sejam Q_1, Q_2 grupos abelianos finitamente gerados, $\psi : Q_1 \to Q_2$ um isomorfismo de grupos e A um $\mathbf{Z}Q_1$-módulo à direita.*

a) *$\Sigma^c_A(Q_1) \subseteq H_{g_0}$, para algum $g_0 \in Q_1$ se, e somente se, $\Sigma^c_A(Q_2) \subseteq H_{h_0}$, para algum $h_0 \in Q_2$.*

b) *$dis\Sigma^c_A(Q_1) \subseteq H_{g_0'}$, para algum $g_0' \in Q_1$ se, e somente se, $dis\Sigma^c_A(Q_2) \subseteq H_{h_0'}$, para algum $h_0' \in Q_2$.*

Sejam G_1, G_2 grupos abelianos cujas operações sejam escritas em notação multiplicativa e $G = G_1 \times G_2$ o produto direto de G_1 e G_2. Identificaremos, então, $G_1 \times \{1_{G_2}\}$ e $\{1_{G_1}\} \times G_2$, que são subgrupos de G, com G_1 e G_2 respectivamente. Consideraremos, portanto, G_1 e G_2 como subgrupos de G.

Definição 2.11. *Sejam Q_1, Q_2 grupos cujas operações sejam escritas em notação multiplicativa e $Q = Q_1 \times Q_2$ o produto direto de Q_1 e Q_2. Suponhamos que Q seja um grupo abeliano finitamente gerado. Sejam também $u_1 : Q_1 \to \mathbf{R}, u_2 : Q_2 \to \mathbf{R}$ caracteres. Definamos $(u_1, u_2) : Q \to \mathbf{R}$ por*

$$(u_1, u_2)(q_1, q_2) = u_1(q_1) + u_2(q_2),$$

onde $q_1 \in Q_1$ e $q_2 \in Q_2$. Observemos que (u_1, u_2) é um caráter e, $\forall r \in \mathbb{R}$, $r(u_1, u_2) = (ru_1, ru_2)$.

Observação 2.5. Sejam Q_1, Q_2 grupos cujas operações sejam escritas em notação multiplicativa e $Q = Q_1 \times Q_2$ o produto direto de Q_1 e Q_2. Suponhamos que Q seja um grupo abeliano finitamente gerado. Sejam também $j_1 : Q_1 \to Q, j_2 : Q_2 \to Q$ os homomorfismos de grupos inclusões canônicas e $v : Q \to \mathbf{R}$ um caráter. Façamos as composições $vj_1 : Q_1 \to \mathbf{R}$ e $vj_2 : Q_2 \to \mathbf{R}$ e sejam $v_1 := vj_1$ e $v_2 := vj_2$. Primeiramente, temos que (v_1, v_2) é um caráter e, dado $r \in \mathbb{R}_+$, $r(v_1, v_2) = (rv_1, rv_2)$. Além disso, dado um caráter $w : Q \to \mathbf{R}$, podemos escrever $w = (w_1, w_2)$, onde $w_1 = wj_1$ e $w_2 = wj_2$. De fato, $\forall q \in Q$, existem $q_1 \in Q_1$ e $q_2 \in Q_2$ tais que $q = (q_1, q_2)$. Logo,

$$w(q) = w((q_1, q_2)) = w((q_1, 1)(1, q_2)) = w(q_1, 1) + w(1, q_2) =$$

$$= wj_1(q_1) + wj_2(q_2) = w_1(q_1) + w_2(q_2) = (w_1, w_2)((q_1, q_2)) = (w_1, w_2)(q).$$

Lema 2.6. *Sejam Q_1, Q_2 grupos abelianos finitamente gerados, $\varphi : Q_1 \to Q_2$ um homomorfismo de grupos e A um $\mathbf{Z}Q_2$-módulo à direita (Observe que, pela Proposição 1.34 a) (p. 48), A é um $\mathbf{Z}Q_1$-módulo à direita via homomorfismo de grupos φ). Então, sendo*

$$\varphi^* : S(Q_2, Im(\varphi))^c \to S(Q_1)$$

dada por $\varphi^*([v]) = [v\varphi]$, temos que

$$\varphi^*(\Sigma_A^c(Q_2) \cap S(Q_2, Im(\varphi))^c) \subseteq \Sigma_A^c(Q_1)$$

$$\varphi^*((dis\Sigma_A^c(Q_2)) \cap S(Q_2, Im(\varphi))^c) = dis\Sigma_A^c(Q_1).$$

Demonstração. (Ver [7, Proposition 1.2, p. 6].) □

Proposição 2.6. *[14, Lemma 3.3, p. 140] Sejam Q_1, Q_2 grupos cujas operações sejam escritas em notação multiplicativa e $Q = Q_1 \times Q_2$ o produto direto de Q_1 e Q_2. Suponhamos que Q seja um grupo abeliano finitamente gerado. Sejam também $j_1 : Q_1 \to Q, j_2 : Q_2 \to Q$ os homomorfismos de grupos inclusões canônicas e A um $\mathbf{Z}Q$-módulo à direita. Conforme a Proposição 1.34 a) (p. 48), A é um $\mathbf{Z}Q_1$-módulo à direita via j_1 e A é um $\mathbf{Z}Q_2$-módulo à direita via j_2.*

- ***a)*** *Seja $[v] \in dis\Sigma_A^c(Q)$. Pela Observação (2.5) (p. 88), podemos escrever $v = (v_1, v_2)$. Se $v_i \neq 0$, então $[v_i] \in dis\Sigma_A^c(Q_1)$, onde $i \in \{1, 2\}$;*
- ***b)*** *Seja $[\tilde{v}] \in dis\Sigma_A^c(Q_1)$. Então, existe $\tilde{w} \in Hom(Q_2, \mathbf{R})$ tal que $[(\tilde{v}, \tilde{w})] \in dis\Sigma_A^c(Q)$.*

Demonstração. ***a)*** Seja $[v] \in dis\Sigma_A^c(Q)$. Temos, então, que $v = (v_1, v_2)$, onde $v_1 = vj_1$ e $v_2 = vj_2$. Seja também $\lambda_1 \in C_{\mathbf{Z}Q_1}(A)$. Então, como $\mathbf{Z}Q_1 \subseteq \mathbf{Z}Q$, temos que $C_{\mathbf{Z}Q_1}(A) \subseteq C_{\mathbf{Z}Q}(A)$. Daí que $\lambda_1 \in C_{\mathbf{Z}Q}(A)$. Agora, como $[v] \in dis\Sigma_A^c(Q)$, existe $q_{\lambda_1} \in supp(\lambda_1)$ tal que $v(q_{\lambda_1}) \leq 0$. Mas, $supp(\lambda_1) \subseteq Q_1$, daí que $q_{\lambda_1} \in Q_1$, isto é, $q_{\lambda_1} = j_1(q_{\lambda_1})$. Assim, $v_1(q_{\lambda_1}) = vj_1(q_{\lambda_1}) = v(q_{\lambda_1}) \leq 0$ e, como $v_1 \neq 0$, segue que $[v_1] \in \Sigma_A^c(Q_1)$. Da mesma forma, $[v_2] \in \Sigma_A^c(Q_2)$. Além disso, v é caráter discreto, logo, por um lado, $v(Q_1 \times Q_2) = v(Q) \cong \mathbf{Z}$ e, por outro lado, $v_1(Q_1) = vj_1(Q_1) = v(Q_1) \leq v(Q_1 \times Q_2) \cong \mathbf{Z}$, o que implica que $v_1(Q_1) \cong n\mathbf{Z}$, para algum $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, por conseguinte $v_1(Q_1) \cong \mathbf{Z}$. Analogamente, $v_2(Q_2) \cong \mathbf{Z}$. Segue, assim, que v_1, v_2 são caracteres discretos. Daí que $[v_1] \in dis\Sigma_A^c(Q_1)$ e $[v_2] \in dis\Sigma_A^c(Q_2)$.

b) Pela Proposição 2.5 (p. 87), a função

$$j_1^* : S(Q, Q_1)^c \to S(Q_1)$$

dada por

$$j_1^*([w]) = [wj_1],$$

induzida por j_1, está bem definida. Seja, então, $[\tilde{v}] \in dis\Sigma_A^c(Q_1)$. Pelo Lema 2.6 (p. 88), temos que

$$j_1^*((dis\Sigma_A^c(Q)) \cap S(Q, Q_1)^c) = dis\Sigma_A^c(Q_1).$$

Daí que existe $[w] \in (dis\Sigma_A^c(Q)) \cap S(Q, Q_1)^c$ tal que $[\tilde{v}] = j_1^*([w]) = [wj_1]$, o que acarreta que $\tilde{v} = r(wj_1)$, com $r \in \mathbb{R}_+$. Agora, escrevendo $w = (w_1, w_2)$ onde $w_1 = wj_1$ e $w_2 = wj_2$ conforme Observação 2.5 (p. 88), como $[w] \in (dis\Sigma_A^c(Q)) \cap S(Q, Q_1)^c$, isto é, $[w] \in dis\Sigma_A^c(Q)$ e $w(Q_1) \neq 0$, temos que, $w_1(Q_1) = wj_1(Q_1) = w(Q_1) \neq 0$, daí que, pelo item ***a)***, $[w_1] \in dis\Sigma_A^c(Q_1)$ e temos também que $w_2 \in Hom(Q_2, \mathbf{R})$. Definamos, então,

$$\tilde{w} := rw_2 \in Hom(Q_2, \mathbf{R}).$$

Assim, $(\tilde{v}, \tilde{w}) = (rw_1, rw_2) = r(w_1, w_2) = rw$. Portanto, $[(\tilde{v}, \tilde{w})] = [w] \in dis\Sigma_A^c(Q)$. □

Proposição 2.7. *Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado e F um grupo agindo à direita sobre Q. Então, existe ação à direita de F sobre a esfera de caracteres $S(Q)$ dada por*

$$[v]^f := [v^f],$$

para todo $v \in Hom(Q, \mathbf{R})$ e $\forall f \in F$. Onde a ação à direita de F sobre $Hom(Q, \mathbf{R})$ é dada como na Proposição 1.16 (p. 23).

Demonstração. Definindo-se $\boldsymbol{a} : S(Q) \times F \to S(Q)$ por $\boldsymbol{a}([v], f) = [v]^f$ e usando a Proposição 1.13 (p. 20), basta mostrarmos que:

i) $\boldsymbol{a}$ está bem definida;

ii) $[v]^{1_F} = [v]$, para toda classe lateral $[v] \in S(Q)$;

iii) $([v]^{f_1})^{f_2} = [v]^{f_1 f_2}$, para toda classe lateral $[v] \in S(Q)$ e $\forall f_1, f_2 \in F$.

Façamos, então, a demonstração de i), ii) e iii) a seguir.

i) Inicialmente, dados $[v] \in S(Q)$ e $f \in F$, observemos que $[v]^f \in S(Q)$. De fato, como $[v] \in S(Q)$, então existe $q \in Q$ tal que $v(q) \neq 0$ e, como $q^f \in Q$, temos que $v^f(q^f) = v((q^f)^{f^{-1}}) = v(q) \neq 0$, daí que $v^f \neq 0$. Agora, dados $f_1, f_2 \in F$ e $[v_1], [v_2] \in S(Q)$ tais que $f_1 = f_2$ e $[v_1] = [v_2]$, segue que $v_1 = rv_2$, com $r \in \mathbb{R}_+$. Logo, dado $q \in Q$,

$$v_1^{f_1}(q) = v_1(q^{f_1^{-1}}) = (rv_2)(q^{f_2^{-1}}) = rv_2(q^{f_2^{-1}}) = rv_2^{f_2}(q) = (rv_2^{f_2})(q)$$

e, portanto, $[v_1]^{f_1} = [v_2]^{f_2}$.

ii) Dada $[v] \in S(Q)$, pela Proposição 1.16 (p. 23), $[v]^{1_F} = [v^{1_F}] = [v]$.

iii) Dada $[v] \in S(Q)$ e dados $f_1, f_2 \in F$, pela Proposição 1.16 (p. 23), $([v]^{f_1})^{f_2} = [v^{f_1}]^{f_2} = [(v^{f_1})^{f_2}] = [v^{f_1 f_2}] = [v]^{f_1 f_2}$.

□

Observação 2.6. Sejam Q_1, Q_2 grupos cujas operações sejam escritas em notação multiplicativa e $Q = Q_1 \times Q_2$ o produto direto de Q_1 e Q_2. Suponhamos que Q seja um grupo abeliano finitamente gerado. Seja também F um grupo agindo à direita sobre Q tal que Q_1 e Q_2 sejam F-invariantes, $j_1 : Q_1 \to Q, j_2 : Q_2 \to Q$ os homomorfismos de grupos inclusões canônicas e $v : Q \to \mathbf{R}$ um caráter. Façamos as composições $vj_1 : Q_1 \to \mathbf{R}$ e $vj_2 : Q_2 \to \mathbf{R}$ e sejam $v_1 := vj_1$ e $v_2 := vj_2$. Dados $f \in F$ e $q \in Q$, onde $q = (q_1, q_2)$, com $q_1 \in Q_1$ e $q_2 \in Q_2$, como Q_1 e Q_2 são F-invariantes e usando a Proposição 1.16 (p. 23), temos que

$$(v_1, v_2)^f(q) = (v_1, v_2)^f((q_1, q_2)) = (v_1, v_2)((q_1, q_2)^{f^{-1}}) = (v_1, v_2)((q_1^{f^{-1}}, q_2^{f^{-1}})) =$$
$$= v_1(q_1^{f^{-1}}) + v_2(q_2^{f^{-1}}) = v_1^f(q_1) + v_2^f(q_2) = (v_1^f, v_2^f)((q_1, q_2)) = (v_1^f, v_2^f)(q).$$

Assim, concluímos que $(v_1, v_2)^f = (v_1^f, v_2^f), \forall f \in F$.

Proposição 2.8. *[14, Lemma 3.4, p. 141] Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado, A um $\mathbf{Z}Q$-módulo à direita (Pela Proposição 1.33 (p. 47) Q age à direita sobre A) e F um grupo agindo à direita sobre Q e à direita sobre A cuja ação seja compatível com a ação à direita de Q sobre A. Então, o conjunto $\Sigma_A^c(Q)$ é F-invariante.*

Demonstração. Seja $[v] \in \Sigma_A^c(Q)$. Por definição,

$$\Sigma_A^c(Q) = \bigcap_{\lambda \in C_{\mathbf{Z}Q}(A)} \{[v] \in S(Q) : v(q) \leq 0, \text{ para algum } q \in supp(\lambda)\}.$$

Seja $\lambda \in C_{\mathbf{Z}Q}(A)$. Então, $\lambda = \sum_{q \in Q} x_q q$, com $x_q \in \mathbf{Z}$. Pelo Lema 1.38 (p. 51), $\forall f \in F, \lambda^{f^{-1}} \in C_{\mathbf{Z}Q}(A)$. Por definição (Proposição 1.35 (p. 50)), $\lambda^{f^{-1}} = \sum_{q \in Q} x_q q^{f^{-1}}$. Como $[v] \in \Sigma_A^c(Q)$, segue que existe $q^{f^{-1}} \in supp(\lambda^{f^{-1}})$ tal que $v(q^{f^{-1}}) \leq 0$. Mas, $v^f(q) = v(q^{f^{-1}})$. Logo, $v^f(q) \leq 0$, com $q \in supp(\lambda)$. Assim, $[v]^f = [v^f] \in \Sigma_A^c(Q)$. Concluímos, então, que $\Sigma_A^c(Q)$ é F-invariante. □

Teorema 2.1. *Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado, Q_0 um subgrupo de Q e A um $\mathbf{Z}Q$-módulo à direita finitamente gerado. Então, A é $\mathbf{Z}Q_0$-módulo à direita finitamente gerado se, e somente se, $S(Q, Q_0) \subseteq \Sigma_A(Q)$.*

Demonstração. A Demonstração desse fato segue de [6, Theorem 5.1, p. 484] tomando-se $m = 0$ e observando-se que quando A é $\mathbf{Z}Q$-módulo finitamente gerado, $\Sigma^0(Q; A) := \Sigma_A(Q) = \{[v] \in S(Q) : A \text{ é } \mathbf{Z}Q\text{-módulo finitamente gerado }\}$. □

Definição 2.12. *Sejam R um anel associativo com identidade, A um R-módulo à direita, I um conjunto de índices totalmente ordenado e $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$ uma família de R-submódulos de A. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **filtração (ou série)** do R-módulo à direita A se $A_i \subseteq A_j$, sempre que $i \leq j$, para todos $i, j \in I$. E, dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **filtração (ou série) finita** do R-módulo à direita A se $\mathcal{F}$ é uma filtração (ou série) do R-módulo à direita A e I é um conjunto finito.*

Proposição 2.9. *Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado, A um $\mathbf{Z}Q$-módulo à direita (não necessariamente finitamente gerado) e A_0 um $\mathbf{Z}Q$-submódulo de A. Então,*

$$\Sigma^c_A(Q) = \Sigma^c_{A_0}(Q) \cup \Sigma^c_{A/A_0}(Q).$$

Demonstração. (Ver [8, Proposition 2.2 (iii), p.444] e [7, Lemma 1.1 (c), pp. 3 e 4].) □

Corolário 2.1. *Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado, A um $\mathbf{Z}Q$-módulo à direita (não necessariamente finitamente gerado) e $\mathcal{F} = \{A_0 = \mathbf{0}, A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m = A\}$ uma filtração finita de A, onde $m \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. Definamos $B_i := A_i/A_{i-1}$, com $1 \leq i \leq m$. Então,*

$$\Sigma^c_A(Q) = \bigcup_{i=1}^{m} \Sigma^c_{B_i}(Q).$$

Demonstração. Façamos a demonstração por indução sobre m. Caso $m = 0$, a afirmação é trivial. Consideremos, então, o caso em que $m > 0$. Pela hipótese de indução,

$$\Sigma^c_{A_{m-1}}(Q) = \bigcup_{i=1}^{m-1} \Sigma^c_{B_i}(Q).$$

Agora, pela Proposição 2.9 (p. 91),

$$\Sigma^c_A(Q) = \Sigma^c_{A_{m-1}}(Q) \cup \Sigma^c_{A/A_{m-1}}(Q).$$

Mas,

$$\Sigma^c_{A_{m-1}}(Q) \cup \Sigma^c_{A/A_{m-1}}(Q) = \Big(\bigcup_{i=1}^{m-1} \Sigma^c_{B_i}(Q)\Big) \cup \Sigma^c_{B_m}(Q) = \bigcup_{i=1}^{m} \Sigma^c_{B_i}(Q).$$

□

Definição 2.13. *Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado e A um $\mathbf{Z}Q$-módulo à direita. Sejam também $S(Q)$ a esfera de caracteres de Q e Σ_1, Σ_2 subconjuntos de $S(Q)$. Definimos a **soma convexa de** Σ_1 **e** Σ_2, denotada por $\Sigma_1 + \Sigma_2$, como sendo o conjunto*

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 := \{[v] \in S(Q) : v = r_1 v_1 + r_2 v_2 \text{ e } [v_1] \in \Sigma_1, [v_2] \in \Sigma_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}\}.$$

Observe que $v, v_1, v_2 \neq 0$, pois $[v], [v_1], [v_2] \in S(Q)$. Daí que r_1 e r_2 não podem ser simultaneamente iguais a 0.

Proposição 2.10. *Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado, A um $\mathbf{Z}Q$-módulo à direita e, sendo $i \in \mathbb{Z}_+$, consideremos $\bigotimes^i_{\mathbf{Z}} A$ como $\mathbf{Z}Q$-módulo à direita onde Q age diagonalmente à direita sobre $\bigotimes^i_{\mathbf{Z}} A$. Então*

$$dis\Sigma^c_{\bigotimes^i_{\mathbf{Z}} A}(Q) \subseteq \underbrace{dis\Sigma^c_A(Q) + \ldots + dis\Sigma^c_A(Q)}_{i \text{ vezes}},$$

onde a soma que aqui aparece é a soma convexa.

Demonstração. Segue por indução sobre i do resultado em [7, Theorem 1.3, p.7]. □

Teorema 2.2. *Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado, A um $\mathbf{Z}Q$-módulo à direita finitamente gerado e $i \in \mathbb{Z}_+$. Se, para quaisquer $[v_1], \ldots, [v_i] \in \Sigma_A^c(Q)$, temos que $\sum_{j=1}^{i} v_j \neq 0$, então $\bigotimes_{\mathbf{Z}}^i A$ é finitamente gerado como $\mathbf{Z}Q$-módulo à direita, onde Q age diagonalmente à direita sobre $\bigotimes_{\mathbf{Z}}^i A$.*

Demonstração. (Ver [4, Theorem 5.2, p. 77].) □

2.2 Alguns Exemplos

Exemplo 2.1. Sejam $Q = \langle x \rangle \cong \mathbf{Z}$ cuja operação binária de Q seja escrita em notação multiplicativa e $A = \mathbf{Z}[1/2] = \left\{ \frac{z}{2^n} : n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, z \in \mathbb{Z} \right\}$, que é grupo abeliano. Definamos a seguinte ação à direita de Q sobre A:

$$a^x = 2a \quad \text{e} \quad a^{x^{-1}} = \frac{a}{2}, \quad \forall a \in A$$

Pela Proposição 2.1 (p. 83), temos que $Hom(Q, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}$ (como grupos abelianos). Consequentemente, temos a seguinte bijeção:

$$\{-1, 1\} \cong \frac{\mathbf{R}\backslash\{0\}}{\sim} \leftrightarrow \frac{Hom(Q, \mathbf{R})\backslash\{0\}}{\sim} = S(Q),$$

onde $\sim$ é a relação de equivalência dada na Definição 2.2 (p. 82). Pelas Demonstrações da Proposição 2.1 (p. 83) e do Lema 2.3 (p. 82) e sendo $\theta : x \mapsto 1$ um isomorfismo de grupos entre Q e $\mathbf{Z}$, a bijeção acima é dada por

$$1 \mapsto [v_1], \text{ onde } v_1(x) = v_1(\theta^{-1}(1)) = \langle 1, 1 \rangle = 1$$

$$\text{e } -1 \mapsto [v_{-1}], \text{ onde } v_{-1}(x) = v_{-1}(\theta^{-1}(1)) = \langle 1, -1 \rangle = -1 = -v_1(x).$$

Logo,

$$S(Q) = \{[v_1], [-v_1]\}.$$

Observe que A é um $\mathbf{Z}Q$-módulo à direita gerado por $1_{\mathbf{Z}} \in \mathbf{Z}$, pois $A = 1_{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z}Q$. Logo, A é um $\mathbf{Z}Q$-módulo à direita finitamente gerado. Daí que, pela Observação 2.2 (p. 85),

$$\Sigma_A(Q) = \{[v] \in S(Q) : \text{ A é finitamente gerado como } \mathbf{Z}Q_v\text{-módulo à direita}\}.$$

Observemos agora que

$$Q_{-v_1} = \{q \in Q : -v_1(q) \geq 0\} = \{q \in Q : v_1(q) \leq 0\} = \{x^{-n} \in Q : n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}\}.$$

Concluímos que $A = 1_{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z}Q_{-v_1}$, isto é, A é $(\mathbf{Z}Q_{-v_1})$-módulo à direita gerado por $\{1_{\mathbf{Z}}\}$, portanto A é $(\mathbf{Z}Q_{-v_1})$-módulo à direita finitamente gerado. De fato, dado $a \in A$, temos que $a = \frac{z_n}{2^n}$, onde $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ e $z_n \in \mathbf{Z}$. Logo,

$$a = \frac{z}{2^n} = z(1_{\mathbf{Z}})^{x^{-n}} = 1_{\mathbf{Z}}(zx^{-n}) \in 1_{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z}Q_{-v_1}.$$

Por outro lado,

$$Q_{v_1} = \{q \in Q : v_1(q) \geq 0\} = \{x^n \in Q : n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}\}.$$

Como, $\forall a \in A$, $a^{x^n} = 2^n a$, com $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, concluímos que A não é finitamente gerado como $\mathbf{Z}Q_{v_1}$-módulo à direita, do contrário existiria um conjunto finito

$$X = \left\{a_1 = \frac{z_1}{2^{n_1}}, \ldots, a_s = \frac{z_s}{2^{n_s}}\right\} \subseteq A,$$

onde $s \in \mathbb{Z}_+, n_j \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, $z_j \in \mathbf{Z}$ e $2 \nmid z_j$ para $1 \leq j \leq s$, que geraria A como $\mathbf{Z}Q_{v_1}$-módulo à direita. No entanto, sendo

$$n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_s\},$$

temos que $\dfrac{1}{2^{n_0+1}}$ não é combinação linear dos elementos de X. Desta forma, temos que

$$\Sigma_A(Q) = \{[-v_1]\}.$$

Exemplo 2.2. Sejam $Q = \langle x \rangle \cong \mathbf{Z}$ cuja operação binária de Q seja escrita em notação multiplicativa e $A = \mathbf{Z}[1/6] = \left\{\dfrac{z}{6^n} : n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, z \in \mathbb{Z}\right\}$, que é grupo abeliano. Definamos a seguinte ação à direita de Q sobre A:

$$a^x = \frac{2a}{3} \quad \text{e} \quad a^{x^{-1}} = \frac{3a}{2}$$

Por raciocínio idêntico ao do Exemplo 2.1 (p. 92), segue que

$$S(Q) = \{[v_1], [-v_1]\},$$

onde $v_1(x) = 1$.

Vamos mostrar que A é um $\mathbf{Z}Q$-módulo à direita gerado por $1_{\mathbf{Z}} \in \mathbf{Z}$, isto é, $A = 1_{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z}Q$.

Veja que $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = \dfrac{2^n}{3^n}, \left(\dfrac{3}{2}\right)^n = \dfrac{3^n}{2^n} \in 1_{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z}Q$. Como o máximo divisor comum entre 2^{2n} e 3^{2n} é 1, pelo Teorema de Bezout, concluímos que existem $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tais que $\alpha 2^{2n} + \beta 3^{2n} = 1$. Daí que,

$$\frac{1}{6^n} = \frac{\alpha 2^{2n} + \beta 3^{2n}}{6^n} = \alpha \frac{2^n}{3^n} + \beta \frac{3^n}{2^n} = 1_{\mathbf{Z}}(\alpha x^n) + 1_{\mathbf{Z}}(\beta x^{-n}) \in 1_{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z}Q.$$

Logo, $A \subseteq 1_{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z}Q$ e, portanto, $A = 1_{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z}Q$. Assim, A é um $\mathbf{Z}Q$-módulo à direita finitamente gerado. Consequentemente, pela Observação 2.2 (p. 85),

$$\Sigma_A(Q) = \{[v] \in S(Q) : \text{ A é finitamente gerado como } \mathbf{Z}Q_v\text{-módulo à direita}\}.$$

Observemos agora que

$$Q_{v_1} = \{q \in Q : v_1(q) \geq 0\} = \{x^n \in Q : n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}\},$$

$$Q_{-v_1} = \{q \in Q : -v_1(q) \geq 0\} = \{q \in Q : v_1(q) \leq 0\} = \{x^{-n} \in Q : n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}\}.$$

Suponhamos que A seja finitamente gerado como $\mathbf{Z}Q_{v_1}$-módulo à direita. Logo, existe um conjunto finito

$$X = \left\{ a_1 = \frac{z_1}{6^{n_1}}, \ldots, a_s = \frac{z_s}{6^{n_s}} \right\} \subseteq A,$$

onde $s \in \mathbb{Z}_+, n_j \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, $z_j \in \mathbf{Z}$ e $6 \nmid z_j$ para $1 \leq j \leq s$, tal que

$$A = a_1\mathbf{Z}Q_{v_1} + \ldots + a_s\mathbf{Z}Q_{v_1}.$$

Dado $x^n \in Q_{v_1}$ e $j \in \{1, \ldots, s\}$, temos que

$$a_j^{x^n} = \left(\frac{z_j}{6^{n_j}}\right)^{x^n} = \frac{z_j}{6^{n_j}}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{z_j 2^n}{3^{n_j+n} \cdot 2^{n_j}} \in \mathbf{Z}[1/3] \cdot \frac{1}{2^{n_j}}.$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_s\}$. Então,

$$X^{x^n} := \{a_1^{x^n}, \ldots, a_s^{x^n}\} \subseteq \mathbf{Z}[1/3] \cdot \frac{1}{2^{n_0}} \subseteq A,$$

onde $\mathbf{Z}[1/3] \cdot \dfrac{1}{2^{n_0}}$ é subgrupo abeliano de A, logo

$$A = a_1\mathbf{Z}Q_{v_1} + \ldots + a_s\mathbf{Z}Q_{v_1} \subseteq \mathbf{Z}[1/3] \cdot \frac{1}{2^{n_0}},$$

isto é,

$$A = \mathbf{Z}[1/3] \cdot \frac{1}{2^{n_0}}. \tag{2.1}$$

Mas, $\dfrac{1}{2^{n_0+1}} = \dfrac{3^{n_0+1}}{6^{n_0+1}} \in A$ e $\dfrac{1}{2^{n_0+1}} \notin \mathbf{Z}[1/3] \cdot \dfrac{1}{2^{n_0}}$, do contrário $\dfrac{1}{2}$ pertenceria a $\mathbf{Z}[1/3] = \left\{ \dfrac{z}{3^m} : m \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, z \in \mathbb{Z} \right\}$, o que é absurdo. Temos, então, uma contradição com (2.1) (p. 94). Concluímos que A não é finitamente gerado como $\mathbf{Z}Q_{v_1}$-módulo à direita. De forma análoga, mostramos que A não é finitamente gerado como $(\mathbf{Z}Q_{-v_1})$-módulo à direita. Desta forma, temos que

$$\Sigma_A(Q) = \emptyset.$$

Definição 2.14. *Sejam Q um grupo abeliano livre finitamente gerado e A um $\mathbf{Z}Q$-módulo finitamente gerado tal que $Ann_{\mathbf{Z}Q}(A) = \mu\mathbf{Z}Q$, isto é, o anulador de A em $\mathbf{Z}Q$ é um ideal principal gerado por $\mu \in \mathbf{Z}Q$. Denominamos $q \in supp(\mu)$ de **"corner"** de μ se existe $v \in Hom(Q, \mathbf{R})\backslash\{0\}$ tal que $v(q) < v(x), \forall x \in supp(\mu)\backslash\{q\}$.*

Definição 2.15. *Sejam Q um grupo abeliano livre finitamente gerado e A um $\mathbf{Z}Q$-módulo finitamente gerado tal que $Ann_{\mathbf{Z}Q}(A) = \mu\mathbf{Z}Q$, isto é, o anulador de A em $\mathbf{Z}Q$ é um ideal principal gerado por $\mu \in \mathbf{Z}Q$. Cada "corner" q de μ dá origem a um conjunto não-vazio*

$$C_q = \{[v] \in S(Q) : v(q) < v(x), \forall x \in supp(\mu)\backslash\{q\}\}$$

$$= \bigcap_{x \in supp(\mu)\backslash\{q\}} H_{xq^{-1}},$$

onde recordamos que, dado $y \in Q$, $H_y = \{[v] \in S(Q) : v(y) > 0\}$.

Observe que $S(Q) = \bigcup\{C_q : q \text{ é um "corner" de } \mu\}$.

Proposição 2.11. *Sejam Q um grupo abeliano livre finitamente gerado e A um $\mathbf{Z}Q$-módulo finitamente gerado tal que $Ann_{\mathbf{Z}Q}(A) = \mu\mathbf{Z}Q$, isto é, o anulador de A em $\mathbf{Z}Q$ é um ideal principal gerado por $\mu \in \mathbf{Z}Q$, onde $\mu = \sum_{x\in Q} z_x x$ com $z_x \in \mathbf{Z}$.*

a) *Se $\mu = 0$, então $\Sigma_A(Q) = \emptyset$.*

b) *Se $\mu \neq 0$, então $\Sigma_A(Q) = \bigcup\{C_q : q$ é um "corner" de μ e $z_q \in \{-1, 1\}\}$.*

Demonstração. ***a)*** Pela Proposição 2.3 (p. 85), temos que $\Sigma_A(Q) = \Sigma_{\mathbf{Z}Q/Ann_{\mathbf{Z}Q}(A)}(Q)$. Caso $\mu = 0$, então $\mathbf{Z}Q/Ann_{\mathbf{Z}Q}(A) \cong \mathbf{Z}Q$. Mas, $\Sigma_{\mathbf{Z}Q}(Q) = \emptyset$, pois $C_{\mathbf{Z}Q}(\mathbf{Z}Q) = 1_Q$.

b) (Ver [11, Lemma 23 (i), p. 289].) □

Exemplo 2.3. Sejam Q o grupo abeliano livre gerado pelo conjunto $\{s, t\}$, A um $\mathbf{Z}Q$-módulo finitamente gerado tal que $Ann_{\mathbf{Z}Q}(A) = \mu\mathbf{Z}Q$, sendo

$$\mu = ms^{-1}t^{-1} + s^{-1} + t^{-1} + n + st \in \mathbf{Z}Q,$$

onde $m, n \in \mathbf{Z}$ e $|m| > 1$. Temos que os "corners" de μ são $s^{-1}t^{-1}, s^{-1}, t^{-1}$ e st, pois, tomando-se $v_1, v_2, v_3, v_4 : Q \to \mathbf{R}$ tais que

$$v_1(s) = 1 \text{ e } v_1(t) = 1$$

$$v_2(s) = 1 \text{ e } v_2(t) = -1$$

$$v_3(s) = -1 \text{ e } v_3(t) = 1$$

$$v_4(s) = -1 \text{ e } v_4(t) = -1$$

observamos que $v_1, v_2, v_3, v_4 \in Hom(Q, \mathbf{R})\backslash\{0\}$ e

$$v_1(s^{-1}t^{-1}) < v_1(s^{-1}), v_1(t^{-1}), v_1(st), v_1(1)$$

$$v_2(s^{-1}) < v_2(s^{-1}t^{-1}), v_2(t^{-1}), v_2(st), v_2(1)$$

$$v_3(t^{-1}) < v_3(s^{-1}t^{-1}), v_3(s^{-1}), v_3(st), v_3(1)$$

$$v_4(st) < v_4(s^{-1}t^{-1}), v_4(s^{-1}), v_4(t^{-1}), v_4(1)$$

Veja que 1_Q não pode ser "corner" de μ. Por outro lado, somente s^{-1}, t^{-1} e st tem coeficientes -1 ou 1. Assim, pela Proposição 2.11 b) (p. 95), segue que

$$\Sigma_A(Q) = C_{s^{-1}} \cup C_{t^{-1}} \cup C_{st}.$$

Capítulo 3

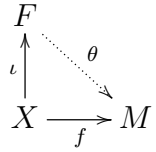
Propriedades de Grupos de Tipo FP_∞

Neste capítulo R denotará um anel associativo com identidade arbitrário.

Neste Capítulo descreveremos propriedades e definições básicas necessárias no desenvolvimento da teoria de grupos de tipo FP_∞, além de apresentar alguns teoremas que foram ferramentas impotantes na demonstração do resultado principal desta Dissertação. Tais teoremas ralacionam grupos de tipo FP_∞ e o invariante geométrico Σ de Bieri-Strebel.

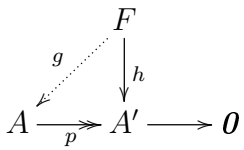
Definição 3.1. *Seja I um conjunto de índices. Um R-módulo à direita F é dito* ***livre*** *se existe um conjunto $\mathcal{B} = \{a_i \in F : i \in I\}$ tal que $F \cong \bigoplus_{i\in I} a_iR$, onde $a_iR \cong R$ (como R-módulos), para todo $i \in I$. Assim, temos que F é uma soma direta de cópias de R. Denominamos $\mathcal{B}$ de* ***base*** *de F.*

Proposição 3.1. *Seja F um R-módulo à direita livre com base X. Então, dados M um R-módulo à direita e $f : X \to M$ uma função, existe um único homomorfismo de R-módulos à direita $\theta : F \to M$ tal que $\theta\iota = f$, onde $\iota : X \hookrightarrow F$ é a função canônica inclusão, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:*



Demonstração. (Ver [18, Proposition 2.34 (Extending by Linearity), p. 57].) □

Proposição 3.2. *Seja F um R-módulo à direita livre. Então, dados A, A' R-módulos à direita, $h : F \to A'$ um homomorfismo de R-módulos à direita e $p : A \twoheadrightarrow A'$ um epimorfismo de R-módulos à direita, existe um homomorfismo de R-módulos à direita $g : F \to A$ tal que $pg = h$, isto é, o seguinte diagrama é comutativo:*



Demonstração. (Ver [18, Theorem 3.1, p.99].) □

Teorema 3.1. *Seja M um R-módulo à direita. Então, M é quociente de algum R-módulo à direita livre. Dito de outra forma, existem um R-módulo à direita livre F e um R-submódulo A de F tal que $M \cong F/A$ (isomorfismo de R-módulos). Além disso, M é um R-módulo à direita finitamente gerado se, e somente se, pudermos escolher, da forma acima, um R-módulo à direita livre F como sendo finitamente gerado.*

(Ver [18, Theorem 2.35, p.58].)

Definição 3.2. *Sejam $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma família de R-módulos à direita e $\{\varphi_n : A_n \to A_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma família de homomorfismos de R-módulos à direita. Dizemos que o seguinte diagrama é uma* ***sequência de R-módulos à direita****:*

$$\ldots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} A_n \xrightarrow{\varphi_n} A_{n-1} \longrightarrow \ldots.$$

E, sejam $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, $\{A_k\}_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\leq n}}$ uma família de R-módulos à direita e $\{\varphi_k : A_k \to A_{k-1}\}_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\leq n}}$ uma família de homomorfismos de R-módulos à direita. Dizemos que o seguinte diagrama é uma ***sequência parcial de R-módulos à direita****:*

$$A_n \xrightarrow{\varphi_n} A_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} A_{n-2} \longrightarrow \ldots.$$

Definição 3.3. *Dizemos que uma sequência de R-módulos à direita*

$$\ldots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} A_n \xrightarrow{\varphi_n} A_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

é uma ***sequência exata de R-módulos à direita*** *se $ker(\varphi_n) = Im(\varphi_{n+1}), \forall n \in \mathbb{Z}$. E dizemos que a mesma é um* ***complexo*** *se $ker(\varphi_n) \supseteq Im(\varphi_{n+1}), \forall n \in \mathbb{Z}$. Dizemos também que uma sequência parcial de R-módulos à direita*

$$A_n \xrightarrow{\varphi_n} A_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} A_{n-2} \longrightarrow \ldots$$

é uma ***sequência parcial exata de R-módulos à direita*** *se $ker(\varphi_k) = Im(\varphi_{k+1}), \forall k < n$.*

Definição 3.4. *Dizemos que uma sequência exata de R-módulos à direita*

$$\mathbf{0} \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \longrightarrow \mathbf{0}.$$

é uma ***sequência exata curta de R-módulos à direita****.*

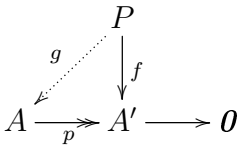
Definição 3.5. *Sejam I, J conjuntos de índices, F um R-módulo à direita livre com base $X = \{x_i \in F : i \in I\}$ e $Y = \{\sum_{i\in I} x_i r_{ji} \in F : j \in J\}$ um subconjunto de F. Se K é um R-submódulo de F gerado por Y, dizemos que o R-módulo à direita $M \cong F/K$ tem* ***geradores*** *X e* ***relações*** *Y. Dizemos também que $\langle X|Y\rangle$ é uma apresentação de M. Dizemos ainda que M é um R-módulo à direita* ***finitamente apresentável*** *se existir uma sequência parcial exata de R-módulos à direita*

$$R^m \to R^n \to M \to \mathbf{0},$$

para alguns $m, n \in \mathbb{Z}_+$.

Observação 3.1. Um R-módulo à direita M é finitamente gerado se existir alguma apresentação $\langle X|Y\rangle$ de M tal que X é um conjunto finito e M é finitamente apresentável se existir alguma apresentação $\langle X'|Y'\rangle$ de M tal que X' e Y' são finitos.

Definição 3.6. *Um R-módulo à direita P é dito* ***projetivo*** *se, para cada A, A' R-módulos à direita, $f : P \to A'$ um homomorfismo de R-módulos à direita e $p : A \twoheadrightarrow A'$ um epimorfismo de R-módulos à direita, sempre existir um homomorfismo de R-módulos à direita $g : P \to A$ tal que $pg = f$, isto é, o seguinte diagrama seja comutativo:*



Observação 3.2. Pela Proposição 3.2 (p. 97) e pela Definição 3.6 (p. 99), segue que todo R-módulo à direita livre é R-módulo à direita projetivo.

Definição 3.7. *Uma sequência exata curta de R-módulos à direita*

$$\mathbf{0} \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \longrightarrow \mathbf{0}$$

cinde *se existe um homomorfismo de R-módulos à direita $j : A'' \to A$ tal que $pj = id_{A''}$.*

Proposição 3.3. *Um R-módulo à direita P é projetivo se, e somente se, cada sequência exata curta de R-módulos à direita $\mathbf{0} \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} P \longrightarrow \mathbf{0}$ cinde.*

Demonstração. (Ver [18, Proposition 3.3, p. 100].) □

Proposição 3.4. *Seja P um R-módulo à direita. Então, P é um R-módulo à direita projetivo se, e somente se, P é uma parcela direta de um R-módulo à direita livre, isto é, existe um R-módulo à direita livre F tal que $F = P \oplus A$, onde A é algum R-submódulo de F. Além disso, existe epimorfismo de R-módulos $\varphi : F \twoheadrightarrow P$.*

Demonstração. (Ver [18, Theorem 3.5, p. 101].) □

Definição 3.8. *Seja A um R-módulo à direita. Uma* ***resolução de tipo finito do R-módulo à direita*** *A é uma sequência exata de R-módulos à direita*

$$\ldots \longrightarrow A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow A_1 \xrightarrow{d_1} A_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow \mathbf{0}$$

onde A_n é um R-módulo à direita finitamente gerado, $\forall n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. E,dado $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, uma ***resolução parcial de tipo finito do R-módulo à direita*** *A é uma sequência parcial exata de R-módulos à direita*

$$A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow A_1 \xrightarrow{d_1} A_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow \mathbf{0}$$

onde A_k é um R-módulo à direita finitamente gerado, $\forall k \leq n$.

Definição 3.9. *Seja A um R-módulo à direita. Uma* ***resolução projetiva do R-módulo à direita*** *A é uma sequência exata de R-módulos à direita*

$$\ldots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow \mathbf{0}$$

onde P_n é um R-módulo à direita projetivo, $\forall n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. E,dado $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, uma ***resolução parcial projetiva do R-módulo à direita*** *A é uma sequência parcial exata de R-módulos à direita*

$$P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow \mathbf{0}$$

onde P_k é um R-módulo à direita projetivo, $\forall k \leq n$.

Definição 3.10. *Seja A um R-módulo à direita. Uma* ***resolução livre do R-módulo à direita*** *A é uma sequência exata de R-módulos à direita*

$$\ldots \longrightarrow F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow \mathbf{0}$$

onde F_n é um R-módulo à direita livre, $\forall n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. E,dado $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, uma ***resolução parcial livre do R-módulo à direita*** *A é uma sequência parcial exata de R-módulos à direita*

$$F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow \mathbf{0}$$

onde F_k é um R-módulo à direita livre, $\forall k \leq n$.

Definição 3.11. *Dado $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, um* ***$R$-módulo à direita A é de tipo FP_n*** *se existe uma resolução parcial projetiva de tipo finito do R-módulo à direita A*

$$P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow \mathbf{0}.$$

E, um ***R-módulo à direita A é de tipo FP_∞*** *se existe uma resolução projetiva de tipo finito do R-módulo à direita A*

$$\ldots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Observemos que um R-módulo à direita A de tipo FP_n é de tipo FP_k para todo $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e um R-módulo à direita A de tipo FP_∞ é de tipo FP_k para todo $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$.

Definição 3.12. *Seja G um grupo. Um $\mathbf{Z}G$-módulo à direita A é dito* ***trivial*** *se G age trivialmente à direita sobre A*[1]*.*

Definição 3.13. *Seja G um grupo. Dado $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, dizemos que G é um* ***grupo de tipo FP_n*** *se o $\mathbf{Z}G$-módulo à direita trivial $\mathbf{Z}$ é de tipo FP_n. E dizemos que G é um* ***grupo de tipo FP_∞*** *se o $\mathbf{Z}G$-módulo à direita trivial $\mathbf{Z}$ é de tipo FP_∞.*

[1]Nesta definição estamos usando a Proposição 1.33 (p. 47).

Definição 3.14. *Seja G um grupo. Denominamos a função $\varepsilon : \mathbf{Z}G \to \mathbf{Z}$ dada por*

$$\varepsilon(\sum_{g\in G} x_g g) = \sum_{g\in G} x_g,$$

*onde $x_g \in \mathbf{Z}$, de **augmentação** e, denotando $ker(\varepsilon)$ por $Aug(\mathbf{Z}G)$, denominamo-lo de **ideal augmentado**.*

Observação 3.3. Seja G um grupo. Observe que, se $\mathbf{Z}$ é $\mathbf{Z}G$-módulo à direita trivial, a augmentação $\varepsilon : \mathbf{Z}G \to \mathbf{Z}$ é um epimorfismo de $\mathbf{Z}G$-módulos à direita. Observe também que o ideal augmentado $Aug(\mathbf{Z}G) := ker(\varepsilon)$ é, de fato, um ideal do anel $\mathbf{Z}G$.

Proposição 3.5. *Todo grupo G é um grupo de tipo FP_0.*

Demonstração. Precisamos mostrar que o $\mathbf{Z}G$-módulo à direita trivial $\mathbf{Z}$ é de tipo FP_0, isto é, que existe uma resolução parcial projetiva de tipo finito

$$P_0 \xrightarrow{d_0} \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Como $\varepsilon : \mathbf{Z}G \twoheadrightarrow \mathbf{Z}$ é um epimorfismo de $\mathbf{Z}G$-módulos à direita pela Observação 3.3 (p. 101), obtemos, então, a seguinte sequência parcial exata de $\mathbf{Z}G$-módulos à direita

$$\mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{0} \tag{3.1}$$

Como $\mathbf{Z}G$ é $\mathbf{Z}G$-módulo à direita livre, segue que $\mathbf{Z}G$ é $\mathbf{Z}G$-módulo à direita projetivo pela Observação 3.2 (p. 99). E, obviamente, $\mathbf{Z}G$ é $\mathbf{Z}G$-módulo à direita finitamente gerado. Portanto, temos que a sequência parcial exata em (3.1) (p. 101) é, de fato, uma resolução parcial projetiva de tipo finito. □

Proposição 3.6. *Todo grupo abeliano finitamente gerado Q é de tipo FP_∞.*

Demonstração. Seja $\varepsilon : \mathbf{Z}Q \twoheadrightarrow \mathbf{Z}$ a augmentação. Pelo Corolário 1.8 (p. 78) e pela Observação 1.7 (p. 46), temos que $\mathbf{Z}Q$ é um anel comutativo noetheriano, logo $Aug(\mathbf{Z}Q) = ker(\varepsilon)$ é finitamente gerado como $\mathbf{Z}Q$-submódulo de $\mathbf{Z}Q$ pela Proposição 1.45 (p. 71), daí que, pela Demonstração do Teorema 3.1 (p. 98), existem $\mathbf{Z}Q$-módulo livre finitamente gerado F_1 e $\varphi_1 : F_1 \twoheadrightarrow ker(\varepsilon)$ epimorfismo de $\mathbf{Z}Q$-módulos à direita. Definamos $d_1 := \iota_1\varphi_1$, onde $\iota_1 : ker(\varepsilon) \hookrightarrow \mathbf{Z}Q$ é o homomorfismo de $\mathbf{Z}Q$-módulos inclusão canônica. Segue que

$$Im(d_1) = d_1(F_1) = \iota_1\varphi_1(F_1) = \iota_1(ker(\varepsilon)) = ker(\varepsilon).$$

Temos, então, a seguinte resolução parcial livre de tipo finito de $\mathbf{Z}Q$-módulos

$$F_1 \xrightarrow{d_1} \mathbf{Z}Q \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Como F_1 é $\mathbf{Z}Q$-módulo finitamente gerado, segue que F_1 é $\mathbf{Z}Q$-módulo noetheriano pela Proposição 1.46 (p. 72), portanto $ker(d_1)$ é $\mathbf{Z}Q$-submódulo de F_1 finitamente gerado. Podemos, então, repetir o processo acima para construir um $\mathbf{Z}Q$-módulo livre finitamente gerado F_2 tal que a seguinte sequência é uma resolução parcial livre de tipo finito

$$F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} \mathbf{Z}Q \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{0},$$

onde d_2 é definido de modo análogo a d_1. Podemos repetir tal processo indefinidamente, obtendo, assim, uma resolução livre de tipo finito para o $\mathbf{Z}Q$-módulo trivial $\mathbf{Z}$. Usando a Observação 3.2 (p. 99) concluímos que Q é um grupo de tipo FP_∞. □

Lema 3.1. *Seja*

$$\boldsymbol{0} \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \longrightarrow \boldsymbol{0}$$

uma sequência exata curta de R-módulos. Se tal sequência cinde, então $A \cong A' \oplus A''$.

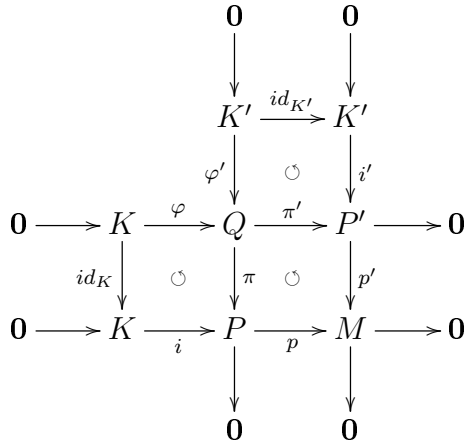
Demonstração. (Ver [18, Proposition 2.28, p. 52].) □

Lema 3.2 (Lema de Schanuel)**.** *Sejam*

$$\boldsymbol{0} \longrightarrow K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{p} M \longrightarrow \boldsymbol{0} \quad e \quad \boldsymbol{0} \longrightarrow K' \xrightarrow{i'} P' \xrightarrow{p'} M \longrightarrow \boldsymbol{0}$$

sequências exatas curtas de R-módulos à direita. Se P *e* P' *são R-módulos à direita projetivos, então* $P \oplus K' \cong P' \oplus K$.

Demonstração. Seja $Q = \{(x, x') \in P \times P' : p(x) = p'(x')\}$. Observe que Q é R-submódulo de $P \times P'$. Observe também que o seguinte diagrama é comutativo e possui linhas e colunas exatas



onde $\varphi' : K' \to Q$ está definida por $\varphi'(k') = (0, i'(k'))$, $\varphi : K \to Q$ está definida por $\varphi(k) = (i(k), 0)$, $\pi' : Q \to P'$ está definida por $\pi(x, x') = x'$ e $\pi : Q \to P$ está definida por $\pi(x, x') = x$. Como P e P' são R-módulos à direita projetivos, pela Proposição 3.3 (p. 99), temos que as seguintes sequências exatas curtas

$$\mathbf{0} \longrightarrow K' \xrightarrow{\varphi'} Q \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{0} \longrightarrow K \xrightarrow{\varphi} Q \xrightarrow{\pi'} P' \longrightarrow \mathbf{0}$$

cindem e, portanto, pelo Lema 3.1 (p. 102), $P \oplus K' \cong Q \cong P' \oplus K$. □

Proposição 3.7. *Seja* M *um R-módulo à direita. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) Existe uma sequência exata $R^m \to R^n \to M \to \boldsymbol{0}$ *para alguns* $m, n \in \mathbb{Z}_+$.

ii) Existe uma sequência exata $P_1 \to P_0 \to M \to \boldsymbol{0}$ *para alguns R-módulos à direita projetivos finitamente gerados* P_0 *e* P_1.

iii) M *é R-módulo à direita finitamente gerado e, para cada R-módulo à direita projetivo finitamente gerado* P *e epimorfismo de R-módulos à direita* $\varphi : P \twoheadrightarrow M$, *temos que* $ker(\varphi)$ *é R-submódulo finitamente gerado.*

Demonstração. (Ver [9, (4.1) Proposition, p. 192].) □

Proposição 3.8. *Seja M um R-módulo à direita.*

a) *M é R-módulo à direita finitamente gerado se, e somente se, M é R-módulo à direita de tipo FP_0.*

b) *M é R-módulo à direita finitamente apresentável se, e somente se, M é R-módulo à direita de tipo FP_1.*

Demonstração. ***a)*** Pelo Teorema 3.1 (p. 98), temos a seguinte sequência parcial exata de R-módulos à direita:

$$F_0 \to M \to \mathbf{0}, \tag{3.2}$$

onde F_0 é R-módulo à direita livre. Da Demonstração do Teorema 3.1 (p. 98), segue que se M é R-módulo à direita finitamente gerado, então podemos contruir F_0 como sendo um R-módulo à direita livre finitamente gerado. Usando (3.2) (p. 103) temos que M é R-módulo à direita de tipo FP_0.

Caso M seja R-módulo à direita de tipo FP_0, então temos a sequinte resolução parcial projetiva de tipo finito

$$P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow \mathbf{0}$$

Daí que $M \cong P_0/ker(d_0)$, sendo este último um R-módulo à direita finitamente gerado, visto que P_0 o é. Portanto, M é R-módulo à direita finitamente gerado.

b) Consequência imediata da Proposição 3.7 (p. 102).

□

Lema 3.3. *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Então, temos a seguinte igualdade de $\mathbf{Z}H$-módulos à direita:*

$$\mathbf{Z}G = \bigoplus_{t\in T} t\mathbf{Z}H,$$

onde T é uma transversal à esquerda de H em G, isto é, $G = \dot{\bigcup_{t\in T}} tH$ e $T \subseteq G$. Dito de outra forma, $\mathbf{Z}G$ é $\mathbf{Z}H$-módulo à direita livre.

Demonstração. Para todo $t \in T$, temos que $t\mathbf{Z}H \subseteq \mathbf{Z}G$, logo $\sum_{t\in T} t\mathbf{Z}H \subseteq \mathbf{Z}G$. Para mostrarmos a inclusão recíproca, dado $\lambda = \sum_{g\in G} x_g g \in \mathbf{Z}G$, com $x_g \in \mathbf{Z}$, segue que existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\lambda = \sum_{i=1}^{n} x_{g_i} g_i = \sum_{i=1}^{n} x_{g_i}(t_i h_i) = \sum_{i=1}^{n} t_i(x_{g_i} h_i)$, onde $g_i \in G$, $t_i \in T$ e $h_i \in H$, pois $G = \dot{\bigcup_{t\in T}} tH$. Temos que $t_i(x_{g_i} h_i) \in t_i\mathbf{Z}H$ para $1 \leq i \leq n$, logo $\lambda \in \sum_{j=1}^{s} t_{i_j}\mathbf{Z}H$, onde $t_{i_j} \in \{t_1, \ldots, t_n\}$ para $1 \leq j \leq s$, onde $s \leq n$ (Neste último somatório o que fizemos foi,

eventualmente, eliminar parcelas $t_i\mathbf{Z}H$ iguais). Se mostrarmos que $\sum_{j=1}^{s} t_{i_j}\mathbf{Z}H = \bigoplus_{j=1}^{s} t_{i_j}\mathbf{Z}H$, teremos que $\lambda \in \bigoplus_{j=1}^{s} t_{i_j}\mathbf{Z}H \subseteq \bigoplus_{t\in T} t\mathbf{Z}H$ e, portanto, $\mathbf{Z}G \subseteq \bigoplus_{t\in T} t\mathbf{Z}H$. Vamos mostrar, então, que $\sum_{j=1}^{s} t_{i_j}\mathbf{Z}H = \bigoplus_{j=1}^{s} t_{i_j}\mathbf{Z}H$. Para isso basta mostrarmos que, para todo $k \in \{1,\ldots,s\}$, $t_{i_k}\mathbf{Z}H \cap (\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{s} t_{i_j}\mathbf{Z}H) = \mathbf{0}$. Dado $k \in \{1,\ldots,s\}$, seja $\alpha \in t_{i_k}\mathbf{Z}H \cap (\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{s} t_{i_j}\mathbf{Z}H)$. Então, $\alpha = t_{i_k}\sum_{h\in H} x_h^k h = \sum_{h\in H} x_h^k(t_{i_k}h)$ e $\alpha = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{s} t_{i_j}(\sum_{h\in H} x_h^j h) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{s}\sum_{h\in H} x_h^j(t_{i_j}h)$. Segue que

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{s}\sum_{h\in H} x_h^j(t_{i_j}h) + \sum_{h\in H}(-x_h^k)(t_{i_k}h) = 0_{\mathbf{Z}G}. \tag{3.3}$$

Como G é união disjunta das classes laterais tH, concluímos que $t_{i_{j_1}}h \neq t_{i_{j_2}}h'$, para todos $j_1, j_2 \in \{1,\ldots,s\}$ tais que $j_1 \neq j_2$ e para todo $h, h' \in H$, daí que por (3.3) (p. 104) $x_h^l = 0$, para todo $l \in \{1,\ldots,s\}$ e para todo $h \in H$ e, portanto, $\alpha = 0_{\mathbf{Z}G}$. □

Lema 3.4. *Seja G um grupo. Então, $Aug(\mathbf{Z}G)$ é $\mathbf{Z}$-módulo livre com base*

$$\mathcal{B} = \{g - 1 \in \mathbf{Z}G : g \in G \text{ e } g \neq 1_G\}.$$

Demonstração. É fácil ver que $\mathcal{B}$ é um conjunto $\mathbf{Z}$-linearmente independente. Basta, então, mostrarmos que $\mathcal{B}$ gera $Aug(\mathbf{Z}G)$. Dado $\lambda = \sum_{g\in G} x_g g \in Aug(\mathbf{Z}G)$, segue que $\sum_{g\in G} x_g = 0$, daí que $\lambda = \sum_{g\in G} x_g g - \sum_{g\in G} x_g = \sum_{g\in G} x_g(g-1)$. Portanto, $\mathcal{B}$ gera $Aug(\mathbf{Z}G)$. Assim, $Aug(\mathbf{Z}G) = \bigoplus_{\substack{g\in G\\ g\neq 1_G}} \mathbf{Z}(g-1)$. □

Definição 3.15. *Um R-módulo à direita A é dito **plano** se o funtor $A\otimes_R -$ é exato, isto é, dada uma sequência exata curta de R-módulos à esquerda*

$$\mathbf{0} \longrightarrow B' \xrightarrow{\ i\ } B \xrightarrow{\ p\ } B'' \longrightarrow \mathbf{0},$$

então a sequência

$$\mathbf{0} \longrightarrow A\otimes_R B' \xrightarrow{id_A\otimes i} A\otimes_R B \xrightarrow{id_A\otimes p} A\otimes_R B'' \longrightarrow \mathbf{0}$$

é uma sequência exata curta de grupos abelianos.

E um R-módulo à esquerda B é dito plano se o funtor $-\otimes_R B$ é exato, isto é, dada uma sequência exata curta de R-módulos à direita

$$\mathbf{0} \longrightarrow A' \xrightarrow{\ i\ } A \xrightarrow{\ p\ } A'' \longrightarrow \mathbf{0},$$

então a sequência

$$\mathbf{0} \longrightarrow A' \otimes_R B \stackrel{i\otimes id_B}{\longrightarrow} A \otimes_R B \stackrel{p\otimes id_B}{\longrightarrow} A'' \otimes_R B \longrightarrow \mathbf{0}$$

é uma sequência exata curta de grupos abelianos[2].

Lema 3.5. *Seja G um grupo. Então, G é um grupo finitamente gerado se, e somente se, $Aug(\mathbf{Z}G)$ é finitamente gerado como ideal à direita do anel de grupo $\mathbf{Z}G$, isto é, $Aug(\mathbf{Z}G)$ é finitamente gerado como $\mathbf{Z}G$-submódulo do $\mathbf{Z}G$-módulo à direita $\mathbf{Z}G$.*

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que se G é um grupo finitamente gerado, então $Aug(\mathbf{Z}G)$ é finitamente gerado como $\mathbf{Z}G$-submódulo do $\mathbf{Z}G$-módulo à direita $\mathbf{Z}G$. Seja $G = \langle X \rangle$, onde X é um subconjunto arbitrário de G, vamos demonstrar que o conjunto

$$\mathcal{X} = \{x - 1 \in \mathbf{Z}G : x \in X\}$$

gera $Aug(\mathbf{Z}G)$ como $\mathbf{Z}G$-submódulo do $\mathbf{Z}G$-módulo à direita $\mathbf{Z}G$. É fácil ver que o $\mathbf{Z}G$-submódulo do $\mathbf{Z}G$-módulo à direita $\mathbf{Z}G$ gerado por $\mathcal{X}$ está contido em $Aug(\mathbf{Z}G)$, ou seja,

$$\sum_{x\in X}(x-1)\mathbf{Z}G \subseteq Aug(\mathbf{Z}G),$$

uma vez que $x-1 \in Aug(\mathbf{Z}G), \forall x \in X$ e $Aug(\mathbf{Z}G)$ é ideal de $\mathbf{Z}G$. Agora, dado $g \in G$, temos que $g = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$, onde $n \in \mathbb{Z}_+, x_j \in X$, $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$ e $1 \leq j \leq n$. Vamos mostrar por indução sobre n que $g - 1 \in \sum_{x\in X}(x-1)\mathbf{Z}G$.

Para $n = 1$, temos que $x_1 - 1 \in (x_1 - 1)\mathbf{Z}G \subseteq \sum_{x\in X}(x-1)\mathbf{Z}G$ e $x_1^{-1} - 1 = (x_1 - 1)(-x_1^{-1}) \in (x_1 - 1)\mathbf{Z}G \subseteq \sum_{x\in X}(x-1)\mathbf{Z}G$.

Para $n > 1$, segue, pela hipótese de indução, que

$$g-1 = (x_1^{\varepsilon_1}-1)x_2^{\varepsilon_2}x_3^{\varepsilon_3}\dots x_n^{\varepsilon_n}+(x_2^{\varepsilon_2}x_3^{\varepsilon_3}\dots x_n^{\varepsilon_n}-1) \in (x_1-1)\mathbf{Z}G+\sum_{x\in X}(x-1)\mathbf{Z}G \subseteq \sum_{x\in X}(x-1)\mathbf{Z}G.$$

Pelo Lema 3.4 (p. 104) e pelo que foi visto acima, concluímos que $Aug(\mathbf{Z}G) \subseteq \sum_{x\in X}(x-1)\mathbf{Z}G$. Assim, $Aug(\mathbf{Z}G) = \sum_{x\in X}(x-1)\mathbf{Z}G$. Se G é grupo finitamente gerado, temos que existe um subconjunto finito X de G tal que $G = \langle X \rangle$, logo $\mathcal{X}$ como acima é também um conjunto finito e, portanto, $Aug(\mathbf{Z}G)$ é finitamente gerado como $\mathbf{Z}G$-submódulo do $\mathbf{Z}G$-módulo à direita $\mathbf{Z}G$.

Suponhamos agora que $Aug(\mathbf{Z}G)$ seja finitamente gerado como $\mathbf{Z}G$-submódulo do $\mathbf{Z}G$-módulo à direita $\mathbf{Z}G$. Então,

$$Aug(\mathbf{Z}G) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{Z}G,$$

[2] As definições de $id_A \otimes i$, $id_A \otimes p$, $i \otimes id_B$ e $p \otimes id_B$ encontram-se em [18, Proposition 2.46, p. 74 e Theorem 2.48, p.74].

onde $n \in \mathbb{Z}_+$ e $\lambda_i \in Aug(\mathbf{Z}G)$ para $1 \leq i \leq n$ (Caso $Aug(\mathbf{Z}G) = \mathbf{0}$, então $G = \mathbf{1}$, pois $g - 1 \in Aug(\mathbf{Z}G), \forall g \in G$). Podemos escrever, então, $\lambda_i = \sum_{g \in G} x_{gi} g$ com $\sum_{g \in G} x_{gi} = 0$, onde $x_{gi} \in \mathbf{Z}$. Agora

$$\lambda_i = \sum_{g \in G} x_{gi} g - \sum_{g \in G} x_{gi} = \sum_{g \in G} x_{gi}(g-1) = \sum_{g \in G} (g-1) x_{gi},$$

daí que $\lambda_i \in \sum_{g \in supp(\lambda_i)} (g-1)\mathbf{Z} \subseteq \sum_{g \in supp(\lambda_i)} (g-1)\mathbf{Z}G$, pois $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Z}G$. Assim,

$$Aug(\mathbf{Z}G) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{Z}G \subseteq \sum_{i=1}^{n} \sum_{g \in supp(\lambda_i)} (g-1)\mathbf{Z}G \subseteq Aug(\mathbf{Z}G),$$

onde esta última continência acontece, pois $Aug(\mathbf{Z}G)$ é ideal de $\mathbf{Z}G$. Portanto,

$$Aug(\mathbf{Z}G) = \sum_{\substack{i=1 \\ g \in supp(\lambda_i)}}^{n} (g-1)\mathbf{Z}G.$$

Seja

$$X = \{g_1, \ldots, g_m\} = \bigcup_{i=1}^{n} supp(\lambda_i).$$

Então,

$$Aug(\mathbf{Z}G) = \sum_{j=1}^{m} (g_j - 1)\mathbf{Z}G. \tag{3.4}$$

Definamos

$$S := \langle X \rangle,$$

que é subgrupo de G. Pelos parágrafos precedentes, como S é gerado por X, segue que $Aug(\mathbf{Z}S)$ é gerado, como $\mathbf{Z}S$-submódulo do $\mathbf{Z}S$-módulo $\mathbf{Z}S$, por $\{g_j - 1 \in \mathbf{Z}S : 1 \leq j \leq m\}$, isto é, $Aug(\mathbf{Z}S) = \sum_{j=1}^{m} (g_j - 1)\mathbf{Z}S$. Logo,

$$Aug(\mathbf{Z}S) \cdot \mathbf{Z}G = (\sum_{j=1}^{m} (g_j - 1)\mathbf{Z}S) \cdot \mathbf{Z}G = \sum_{j=1}^{m} (g_j - 1)\mathbf{Z}G = Aug(\mathbf{Z}G),$$

ou seja,

$$Aug(\mathbf{Z}G) = Aug(\mathbf{Z}S) \cdot \mathbf{Z}G. \tag{3.5}$$

Veja que podemos escrever $G = \dot{\bigcup_{t \in T}} St$, onde T é uma transversal à direita de S em G. Logo, por uma variação do Lema 3.3 (p. 103), $\mathbf{Z}G = \bigoplus_{t \in T} \mathbf{Z}St$, daí que $\mathbf{Z}G$ é $\mathbf{Z}S$-módulo à esquerda

livre, o que implica que $\mathbf{Z}G$ é $\mathbf{Z}S$-módulo à esquerda plano por [18, Proposition 3.46 (iii), p. 132] e a Observação 3.2 (p. 99) e, portanto, o funtor $- \otimes_{\mathbf{Z}S} \mathbf{Z}G$ é exato. Considerando, então, a seguinte sequência exata curta de $\mathbf{Z}S$-módulos à direita

$$\mathbf{0} \longrightarrow Aug(\mathbf{Z}S) \xrightarrow{\iota} \mathbf{Z}S \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{0},$$

onde ι é o homomorfismo de $\mathbf{Z}S$-módulos à direita inclusão canônica, ε é a augmentação e $\mathbf{Z}$ é $\mathbf{Z}S$-módulo à direita trivial, temos que a sequência de $\mathbf{Z}$-módulos

$$\mathbf{0} \longrightarrow Aug(\mathbf{Z}S) \otimes_{\mathbf{Z}S} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\iota_*} \mathbf{Z}S \otimes_{\mathbf{Z}S} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}S} \mathbf{Z}G \longrightarrow \mathbf{0} \tag{3.6}$$

também é exata curta, onde $\iota_* = \iota \otimes id_{\mathbf{Z}G}$ e $\varepsilon_* = \varepsilon \otimes id_{\mathbf{Z}G}$. Observe agora que

$$\mathbf{Z}S \otimes_{\mathbf{Z}S} \mathbf{Z}G \cong \mathbf{Z}G \text{ como } \mathbf{Z}\text{-módulos},$$

onde o isomorfismo é dado por

$$\psi : \mu \otimes \lambda \mapsto \mu\lambda,$$

com $\mu \in \mathbf{Z}S$ e $\lambda \in \mathbf{Z}G$. Usando ainda o isomorfismo ψ e (3.5) (p. 106), segue que

$$Aug(\mathbf{Z}S) \otimes_{\mathbf{Z}S} \mathbf{Z}G \cong Aug(\mathbf{Z}S) \cdot \mathbf{Z}G = Aug(\mathbf{Z}G),$$

onde tal isomorfismo é também de $\mathbf{Z}$-módulos. Agora, por uma variação do Lema 3.3 (p. 103) e por [17, Theorem 2.8, p. 33], concluímos que

$$\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}S} \mathbf{Z}G = \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}S} (\bigoplus_{t\in T} \mathbf{Z}St) \cong \bigoplus_{t\in T} (\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}S} \mathbf{Z}St) \cong \underbrace{(\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}S} \mathbf{Z}S) \oplus \ldots \oplus (\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}S} \mathbf{Z}S)}_{|T| \text{ vezes}} \cong$$

$$\cong \underbrace{\mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}}_{|T| \text{ vezes}} \cong \bigoplus_{t\in T} \mathbf{Z}t,$$

onde tais isomorfismos acima também são de $\mathbf{Z}$-módulos. Sendo assim, da sequência exata curta (3.6) (p. 107) obtemos a seguinte sequência exata curta de $\mathbf{Z}$-módulos:

$$\mathbf{0} \longrightarrow Aug(\mathbf{Z}G) \xrightarrow{\alpha} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{t\in T} \mathbf{Z}t \longrightarrow \mathbf{0},$$

onde α é induzida por ι_* e β é induzida por ε_*. Como a augmentação $\varepsilon : \mathbf{Z}G \twoheadrightarrow \mathbf{Z}$ é epimorfismo de $\mathbf{Z}G$-módulos à esquerda, temos o seguinte isomorfismo de $\mathbf{Z}G$-módulos à esquerda:

$$\mathbf{Z}G/Aug(\mathbf{Z}G) \cong \mathbf{Z}.$$

Por outro lado, temos as seguintes igualdades e isomorfismos de $\mathbf{Z}$-módulos:

$$\bigoplus_{t\in T} \mathbf{Z}t = Im(\beta) \cong \mathbf{Z}G/ker(\beta) = \mathbf{Z}G/Im(\alpha) \cong \mathbf{Z}G/Aug(\mathbf{Z}G) \cong \mathbf{Z}.$$

Segue, então, que

$$\mathbf{Z} \cong \bigoplus_{t\in T} \mathbf{Z}t \text{ como } \mathbf{Z}\text{-módulos}. \tag{3.7}$$

Ademais, considerando o $(\mathbf{Z}, \mathbf{Q})$-bimódulo $\mathbf{Q}$, por um lado,

$$\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \cong \mathbf{Q} \text{ como } \mathbf{Q}\text{-espaços vetoriais.}$$

E, por outro lado, pelos resultados em [17, Theorem 2.8, p. 33 e Exercise 2.25, p.34],

$$(\bigoplus_{t \in T} \mathbf{Z}t) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \cong \underbrace{(\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}) \oplus \ldots \oplus (\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})}_{|T| \text{ vezes}} \cong \underbrace{\mathbf{Q} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Q}}_{|T| \text{ vezes}} \text{ como } \mathbf{Q}\text{-espaços vetoriais.}$$

Logo, usando (3.7) (p. 107), segue que

$$\underbrace{\mathbf{Q} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Q}}_{|T| \text{ vezes}} \cong \mathbf{Q} \text{ (isomorfismo de } \mathbf{Q}\text{-espaços vetoriais).}$$

Mas, $\dim_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q} = 1$ e $\dim_{\mathbf{Q}} (\underbrace{\mathbf{Q} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Q}}_{|T| \text{ vezes}}) = |T|$, logo $|T| = 1$ e, portanto, $[G : S] = 1$, ou seja, $G = S$. Daí que $G = \langle X \rangle$, onde $X = \{g_1, \ldots, g_m\}$, isto é, G é um grupo finitamente gerado. □

Lema 3.6. *Seja G um grupo. Então, G é um grupo finitamente gerado se, e somente se, $\mathbf{Z}$ é finitamente apresentável como $\mathbf{Z}G$-módulo à direita trivial.*

Demonstração. Se G é um grupo finitamente gerado, então, pelo Lema 3.5 (p. 105), $Aug(\mathbf{Z}G)$ é finitamente gerado como ideal à direita do anel de grupo $\mathbf{Z}G$, isto é, $Aug(\mathbf{Z}G)$ é finitamente gerado como $\mathbf{Z}G$-submódulo do $\mathbf{Z}G$-módulo à direita $\mathbf{Z}G$. Como a augmentação $\varepsilon : \mathbf{Z}G \twoheadrightarrow \mathbf{Z}$ é epimorfismo de $\mathbf{Z}G$-módulos à direita, temos o seguinte isomorfismo de $\mathbf{Z}G$-módulos à direita:

$$\mathbf{Z}G/Aug(\mathbf{Z}G) \cong \mathbf{Z}.$$

Agora, $\mathbf{Z}G$ é $\mathbf{Z}G$-módulo à direita livre finitamente gerado, e como $Aug(\mathbf{Z}G)$ é $\mathbf{Z}G$-submódulo finitamente gerado, concluímos que $\mathbf{Z}$ é finitamente apresentável como $\mathbf{Z}G$-módulo à direita.

Suponhamos agora que $\mathbf{Z}$ seja finitamente apresentável como $\mathbf{Z}G$-módulo à direita trivial. Então, existe uma sequência exata de $\mathbf{Z}G$-módulos à direita $\mathbf{Z}G^m \to \mathbf{Z}G^n \to \mathbf{Z} \to \mathbf{0}$ para alguns $m, n \in \mathbb{Z}_+$, logo, pela Proposição 3.7 (p. 102), como $\varepsilon : \mathbf{Z}G \twoheadrightarrow \mathbf{Z}$ é epimorfismo de $\mathbf{Z}G$-módulos à direita e $\mathbf{Z}G$ é $\mathbf{Z}G$-módulo à direita livre finitamente gerado, portanto projetivo finitamente gerado, temos que $ker(\varepsilon) = Aug(\mathbf{Z}G)$ é $\mathbf{Z}G$-submódulo finitamente gerado, ou seja, $Aug(\mathbf{Z}G)$ é finitamente gerado como ideal à direita do anel de grupo $\mathbf{Z}G$. Segue do Lema 3.5 (p. 105) que G é um grupo finitamente gerado. □

Proposição 3.9. *Seja G um grupo. Então, G é um grupo de tipo FP_1 se, e somente se, G é um grupo finitamente gerado.*

Demonstração. Pelo Lema 3.6 (p. 108), G é um grupo finitamente gerado se, e somente se, $\mathbf{Z}$ é finitamente apresentável como $\mathbf{Z}G$-módulo à direita trivial, o que é equivalente à existência de uma sequência parcial exata de $\mathbf{Z}G$-módulos à direita

$$\mathbf{Z}G^m \to \mathbf{Z}G^n \to \mathbf{Z} \to \mathbf{0}$$

para alguns $m, n \in \mathbb{Z}_+$. Esta última afirmação é equivalente ao fato de G ser grupo de tipo FP_1, uma vez que $\mathbf{Z}G^m, \mathbf{Z}G^n$ são $\mathbf{Z}G$-módulos à direita projetivos finitamente gerados, já que são $\mathbf{Z}G$-módulos à direita livres finitamente gerados, onde estamos usando a Proposição 3.7 (p. 102). □

Lema 3.7. *Sejam*

$$\boldsymbol{0} \to P_n \to \ldots \to P_0 \to M \to \boldsymbol{0} \quad e \quad \boldsymbol{0} \to P'_n \to \ldots \to P'_0 \to M \to \boldsymbol{0}$$

sequências exatas de R-módulos à direita. Se P_i, P'_i são R-módulos à direita projetivos para $0 \leq i \leq n-1$, então

$$P_0 \oplus P'_1 \oplus P_2 \oplus P'_3 \oplus \ldots \cong P'_0 \oplus P_1 \oplus P'_2 \oplus P_3 \oplus \ldots$$

Consequentemente, se P_i, P'_i são R-módulos à direita finitamente gerados para $0 \leq i \leq n-1$, então P_n é R-módulo à direita finitamente gerado se, e somente se, P'_n é R-módulo à direita finitamente gerado.

Demonstração. (Ver [9, (4.4) Lemma, p. 193].) □

Proposição 3.10. *Sejam M um R-módulo à direita e $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) Existe uma resolução parcial $F_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ onde cada F_i é R-módulo à direita livre finitamente gerado para $0 \leq i \leq n$;

ii) M é um R-módulo à direita de tipo FP_n;

iii) M é um R-módulo à direita finitamente gerado e, para toda resolução parcial projetiva de tipo finito $P_k \xrightarrow{d_k} \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow \boldsymbol{0}$ com $k < n$, $ker(d_k)$ é R-submódulo finitamente gerado.

Demonstração. Pela Observação 3.2 (p. 99), *i)* implica *ii)* trivialmente.

Vamos mostrar que *ii)* implica *iii)*. Suponhamos que M seja um R-módulo à direita de tipo FP_n. Primeiramente, observemos que M é, pelo menos, um R-módulo à direita de tipo FP_0, logo um R-módulo à direita finitamente gerado pela Proposição 3.8 a) (p. 103). Agora, para todo $k < n$, existe uma resolução parcial projetiva de tipo finito $P'_k \xrightarrow{d'_k} \ldots \longrightarrow P'_0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathbf{0}$ do R-módulo à direita M e, portanto, temos que $ker(d'_k)$ é um R-submódulo de P'_k finitamente gerado, uma vez que $ker(d'_k) = Im(d'_{k+1}) = d'_{k+1}(P'_{k+1})$, sendo este último um R-submódulo de P'_k finitamente gerado, pois P'_{k+1} é um R-módulo finitamente gerado. Pelo Lema 3.7 (p. 109), para qualquer outra resolução parcial projetiva de tipo finito $P_k \xrightarrow{d_k} \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathbf{0}$ do R-módulo à direita M, temos que $ker(d_k)$ é R-submódulo de P_k finitamente gerado e, portanto, temos a validade de *iii)*.

Mostraremos agora que *iii)* implica *i)*. A demonstração seguirá por indução sobre $n \geq 0$.

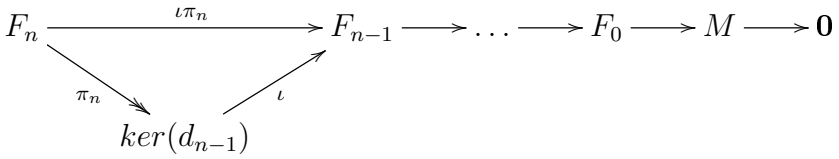
Caso $n = 0$, como M é R-módulo à direita finitamente gerado, existem R-módulo à direita livre finitamente gerado F_0 e epimorfismo de R-módulos à direita $d_0 : F_0 \twoheadrightarrow M$. Logo, obtemos resolução parcial

$$F_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow \mathbf{0},$$

onde F_0 é R-módulo à direita livre finitamente gerado.

Caso $n > 1$, suponhamos que temos resolução parcial livre de tipo finito $F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow \mathbf{0}$. Tal resolução parcial é também projetiva de tipo finito, logo, pela hipótese,

$ker(d_{n-1})$ é finitamente gerado e, portanto, existem F_n livre finitamente gerado e epimorfismo $\pi_n : F_n \twoheadrightarrow ker(d_{n-1})$. Assim, temos a seguinte resolução parcial livre de tipo finito:



onde ι é o homomorfismo de R-módulos inclusão canônica. □

Nos dois seguintes resultados (Lema 3.8 (p. 110) e Proposição 3.11 (p. 110)), mencionaremos e usaremos o funtor derivado Tor. A definição de tal funtor pode ser encontrada em [18, Definition, p. 346].

Lema 3.8 (Lema de Eckmann-Shapiro)**.** *Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e A um $\mathbf{Z}H$-módulo à esquerda. Então, temos o seguinte isomorfismo de $\mathbf{Z}$-módulos:*

$$Tor_n^{\mathbf{Z}H}(\mathbf{Z}, A) \cong Tor_n^{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}G \otimes_{\mathbf{Z}H} A).$$

Demonstração. (Ver [18, Proposition 9.76, p. 561].) □

Proposição 3.11. *Seja G um grupo tal que $G \cong F/R$ (isomorfismo de grupos), onde F é um grupo livre finitamente gerado e R é um subgrupo de F. Então, G é um grupo de tipo FP_2 se, e somente se, a abelianização R/R' é finitamente gerada como $\mathbf{Z}G$-módulo à direita.*

Demonstração. Temos sequência exata curta de $\mathbf{Z}F$-módulos à direita

$$\mathbf{0} \to Aug(\mathbf{Z}F) \to \mathbf{Z}F \to \mathbf{Z} \to \mathbf{0}$$

onde $\mathbf{Z}$ é $\mathbf{Z}F$-bimódulo trivial. Logo, temos sequência exata longa de $\mathbf{Z}$-módulos em Homologia para $Tor_*^{\mathbf{Z}F}(-, \mathbf{Z}G)$, onde $\mathbf{Z}G$ é $\mathbf{Z}F$-módulo à esquerda via homomorfismo π, onde $\pi : F \twoheadrightarrow F/R = G$ é o epimorfismo de grupos projeção canônica. Tal sequência exata longa de $\mathbf{Z}$-módulos é a seguinte:

$$\ldots \to Tor_1^{\mathbf{Z}F}(\mathbf{Z}F, \mathbf{Z}G) \to Tor_1^{\mathbf{Z}F}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}G) \to Tor_0^{\mathbf{Z}F}(Aug(\mathbf{Z}F), \mathbf{Z}G) \to$$

$$\to Tor_0^{\mathbf{Z}F}(\mathbf{Z}F, \mathbf{Z}G) \to Tor_0^{\mathbf{Z}F}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}G) \to \mathbf{0}. \tag{3.8}$$

Observemos que, como $\mathbf{Z}F$ é $\mathbf{Z}F$-módulo à direita livre, $Tor_1^{\mathbf{Z}F}(\mathbf{Z}F, \mathbf{Z}G) = \mathbf{0}$ (Ver [18, Theorem 7.2, p.405]).

Vamos mostrar que $\mathbf{Z}G \cong \mathbf{Z}F \otimes_{\mathbf{Z}R} \mathbf{Z}$ (isomorfismo de $\mathbf{Z}$-módulos). Podemos escrever $F = \dot{\bigcup_{t\in T}} tR$, onde T é uma transversal à esquerda de R em F (T é subconjunto de F). Pelo Lema 3.3 (p. 103), segue que $\mathbf{Z}F = \bigoplus_{t\in T} t\mathbf{Z}R$. Daí que, por [17, Theorem 2.8, p.33],

$$\mathbf{Z}F \otimes_{\mathbf{Z}R} \mathbf{Z} = (\bigoplus_{t\in T} t\mathbf{Z}R) \otimes_{\mathbf{Z}R} \mathbf{Z} \cong \bigoplus_{t\in T} (t\mathbf{Z}R \otimes_{\mathbf{Z}R} \mathbf{Z}) \cong \underbrace{(\mathbf{Z}R \otimes_{\mathbf{Z}R} \mathbf{Z}) \oplus \ldots \oplus (\mathbf{Z}R \otimes_{\mathbf{Z}R} \mathbf{Z})}_{|T| \text{ vezes}} \cong$$

$$\cong \underbrace{\mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}}_{|T| \text{ vezes}} \cong \bigoplus_{t \in T} t\mathbf{Z}.$$

Logo,

$$\mathbf{Z}F \otimes_{\mathbf{Z}R} \mathbf{Z} \cong \bigoplus_{t \in T} t\mathbf{Z} \text{ como } \mathbf{Z}\text{-módulos.}$$

Como $G = \{tR \in F/R : t \in T\}$, existe bijeção entre T e G enviando t para tR, logo $|T| = |G|$ e, portanto, $\bigoplus_{t \in T} t\mathbf{Z} \cong \bigoplus_{g \in G} g\mathbf{Z}$. Mas, $\mathbf{Z}G \cong \bigoplus_{g \in G} g\mathbf{Z}$ (como $\mathbf{Z}$-módulos), daí que

$$\mathbf{Z}G \cong \mathbf{Z}F \otimes_{\mathbf{Z}R} \mathbf{Z} \text{ (isomorfismo de } \mathbf{Z}\text{-módulos)}$$

De fato, este último isomorfismo é um isomorfismo de $\mathbf{Z}F$-módulos à esquerda, onde $\mathbf{Z}F$ é considerado como $\mathbf{Z}F$-bimódulo via produto. Temos, então, que

$$Tor_1^{\mathbf{Z}F}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}G) \cong Tor_1^{\mathbf{Z}F}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}F \otimes_{\mathbf{Z}R} \mathbf{Z}) \text{ como } \mathbf{Z}\text{-módulos.}$$

Pelo Lema 3.8 (p. 110) (Lema de Eckmann-Shapiro), segue que

$$Tor_1^{\mathbf{Z}F}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}F \otimes_{\mathbf{Z}R} \mathbf{Z}) \cong Tor_1^{\mathbf{Z}R}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \text{ como } \mathbf{Z}\text{-módulos.}$$

E temos também que

$$Tor_1^{\mathbf{Z}R}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \cong R/R' \text{ como } \mathbf{Z}\text{-módulos}$$

(Ver [18, Theorem 9.52, p. 539]). Sendo assim, concluímos que

$$Tor_1^{\mathbf{Z}F}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}G) \cong R/R' \text{ como } \mathbf{Z}\text{-módulos.}$$

Observemos que

$$Tor_0^{\mathbf{Z}F}(Aug(\mathbf{Z}F), \mathbf{Z}G) \cong Aug(\mathbf{Z}F) \otimes_{\mathbf{Z}F} \mathbf{Z}G,$$
$$Tor_0^{\mathbf{Z}F}(\mathbf{Z}F, \mathbf{Z}G) \cong \mathbf{Z}F \otimes_{\mathbf{Z}F} \mathbf{Z}G,$$
$$Tor_0^{\mathbf{Z}F}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}G) \cong \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}F} \mathbf{Z}G$$

como $\mathbf{Z}$-módulos (Ver [18, Theorem 6.29 (ii), p. 353]). Temos também que

$$\mathbf{Z}F \otimes_{\mathbf{Z}F} \mathbf{Z}G \cong \mathbf{Z}G \text{ como } \mathbf{Z}G\text{-módulos à direita,}$$

onde $\mathbf{Z}G$ é considerado como $\mathbf{Z}F$-módulo à esquerda via homomorfismo de grupos π e é considerado como $\mathbf{Z}G$-módulo à direita via produto. Da Demonstração do Lema 3.5 (p. 105), segue que $Aug(\mathbf{Z}F) = \bigoplus_{y \in Y}(y-1)\mathbf{Z}F$, onde $|Y| < \infty$. Logo, por [17, Theorem 2.8, p. 33 e Exercise 2.25, p. 34],

$$Aug(\mathbf{Z}F) \otimes_{\mathbf{Z}F} \mathbf{Z}G = (\bigoplus_{y \in Y}(y-1)\mathbf{Z}F) \otimes_{\mathbf{Z}F} \mathbf{Z}G \cong \bigoplus_{y \in Y}((y-1)\mathbf{Z}F \otimes_{\mathbf{Z}F} \mathbf{Z}G) \cong$$

$$\cong \underbrace{(\mathbf{Z}F \otimes_{\mathbf{Z}F} \mathbf{Z}G) \oplus \ldots \oplus (\mathbf{Z}F \otimes_{\mathbf{Z}F} \mathbf{Z}G)}_{|Y| \text{ vezes}} \cong \underbrace{\mathbf{Z}G \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}G}_{|Y| \text{ vezes}},$$

isto é,

$$Aug(\mathbf{Z}F) \otimes_{\mathbf{Z}F} \mathbf{Z}G \cong \underbrace{\mathbf{Z}G \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}G}_{|Y| \text{ vezes}} \text{ como } \mathbf{Z}G\text{-módulos à direita.}$$

Vamos mostrar agora que $\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}F} \mathbf{Z}G \cong \mathbf{Z}$ como $\mathbf{Z}G$-módulos à direita, onde G age trivialmente sobre $\mathbf{Z}$. Temos sequência exata curta de $\mathbf{Z}G$-módulos à direita

$$\mathbf{0} \longrightarrow Aug(\mathbf{Z}G) \xrightarrow{\iota} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{0},$$

onde $\mathbf{Z}$ é $\mathbf{Z}G$-módulo à direita trivial via homomorfismo π, ι é o homomorfismo de $\mathbf{Z}G$-módulos à direita inclusão canônica e ε é a augmentação. Por [18, Proposition 2.78 (Right Exactness), p. 93], temos que o funtor $\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}F} -$ é exato à direita (onde consideramos $\mathbf{Z}$ como $\mathbf{Z}F$-bimódulo trivial), logo, lembrando que $\mathbf{Z}G$ é $\mathbf{Z}F$-módulo à esquerda via homomorfismo de grupos π, temos a seguinte sequência exata de $\mathbf{Z}G$-módulos à direita

$$\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}F} Aug(\mathbf{Z}G) \xrightarrow{id_{\mathbf{Z}} \otimes \iota} \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}F} \mathbf{Z}G \xrightarrow{id_{\mathbf{Z}} \otimes \varepsilon} \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}F} \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Observemos que $\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}F} \mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}$ (como $\mathbf{Z}G$-módulos à direita) através do isomorfismo $z_1 \otimes z_2 \mapsto z_1 z_2$, com $z_1, z_2 \in \mathbf{Z}$. Daí que, como $id_{\mathbf{Z}} \otimes \varepsilon$ é sobrejetivo, se mostrarmos que $id_{\mathbf{Z}} \otimes \varepsilon$ é também injetivo, teremos que $\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}F} \mathbf{Z}G \cong \mathbf{Z}$ como $\mathbf{Z}G$-módulos à direita. Mas, para mostrarmos que $id_{\mathbf{Z}} \otimes \varepsilon$ é injetivo, basta mostrarmos que $Im(id_{\mathbf{Z}} \otimes \iota) = \mathbf{0}$. Seja $z \otimes \lambda \in \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}F} Aug(\mathbf{Z}G)$. Pelo Lema 3.4 (p. 104), segue que $\lambda = \sum_{\substack{g \in G \\ g \neq 1_G}} z_g(g-1)$, onde $z_g \in \mathbf{Z}$. Logo, $z \otimes \lambda = \sum_{\substack{g \in G \\ g \neq 1_G}} z_g(z \otimes (g-1))$ e, portanto, $(id_{\mathbf{Z}} \otimes \iota)(z \otimes \lambda) = \sum_{\substack{g \in G \\ g \neq 1_G}} z_g(z \otimes (g-1))$ em $\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}F} \mathbf{Z}G$. Observe agora que, no $\mathbf{Z}G$-módulo à direita $\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}F} \mathbf{Z}G$, temos a seguinte equação: dado $g \in G$ tal que $g = \pi(f)$, com $f \in F$,

$$z \otimes (g - 1_G) = z \otimes g - z \otimes 1_G = z \otimes \pi(f) - z \otimes 1_G = z \otimes (\pi(f) \cdot 1_G) - z \otimes 1_G =$$

$$z \otimes (f \cdot 1_G) - z \otimes 1_G = (zf) \otimes 1_G - z \otimes 1_G = z \otimes 1_G - z \otimes 1_G = 0.$$

Daí que, $Im(id_{\mathbf{Z}} \otimes \iota) = \mathbf{0}$.

Desta forma, obtemos de (3.8) (p. 110) a seguinte sequência exata de $\mathbf{Z}$-módulos à direita:

$$\mathbf{0} \to R/R' \xrightarrow{\alpha} \underbrace{\mathbf{Z}G \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}G}_{|Y| \text{ vezes}} \to \mathbf{Z}G \to \mathbf{Z} \to \mathbf{0}, \tag{3.9}$$

Tal sequência é também uma sequência exata de $\mathbf{Z}G$-módulos à direita, onde α é um homomorfismo de $\mathbf{Z}G$-módulos à direita, $\mathbf{Z}$ é $\mathbf{Z}G$-módulo à direita trivial e R/R' é $\mathbf{Z}G$-módulo à direita (usando a Proposição 1.33 (p. 47)) com a ação de G sobre R/R' dada pela Proposição 1.38 (p. 54) sendo a mesma a conjugação por elementos de F/R', onde consideramos a seguinte sequência exata curta de grupos para se usar a Proposição 1.38 (p. 54)

$$\mathbf{1} \to R/R' \xhookrightarrow{\iota} F/R' \xrightarrow{\rho} F/R = G \to \mathbf{1},$$

onde ι é o homomorfismo de grupos inclusão canônica e ρ é o epimorfismo de grupos dado pela Proposição 1.7 (p. 9). Outro jeito de se chegar à sequência 3.9 (p. 112) é usando-se Derivadas de Fox [9, (5.4) Proposition, p.43].

Observe agora que tanto $\mathbf{Z}G$, quanto $\underbrace{\mathbf{Z}G \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}G}_{|Y| \text{ vezes}}$ são $\mathbf{Z}G$-módulos à direita livres finitamente gerados, logo projetivos finitamente gerados. Pelo Teorema 3.1 (p. 98), existem um $\mathbf{Z}G$-módulo à direita livre F e epimorfismo de $\mathbf{Z}G$-módulos à direita $\varphi : F \twoheadrightarrow R/R'$ o que dá origem à seguinte sequência exata de $\mathbf{Z}G$-módulos à direita

$$\begin{array}{ccccccccc} F & & \xrightarrow{\quad\alpha\varphi\quad} & & \mathbf{Z}G^{|Y|} & \longrightarrow & \mathbf{Z}G & \longrightarrow & \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{0} \\ & \searrow^{\varphi} & & \nearrow_{\alpha} & & & & & \\ & & R/R' & & & & & & \end{array}$$

onde $\mathbf{Z}G^{|Y|} = \underbrace{\mathbf{Z}G \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}G}_{|Y| \text{ vezes}}$. Assim, usando a Proposição 3.10 (p. 109) e o fato de α ser injetivo mais a Proposição 3.10 iii) (p. 109), concluímos que G é grupo de tipo FP_2 se, e somente se, F é $\mathbf{Z}G$-módulo à direita finitamente gerado, o que é equivalente, por sua vez, pelo Teorema 3.1 (p. 98), a R/R' ser finitamente gerado como $\mathbf{Z}G$-módulo à direita. □

Corolário 3.1. *Seja G um grupo. Se G é um grupo finitamente apresentável, então G é um grupo de tipo FP_2.*

Demonstração. Como G é um grupo finitamente apresentável, existe apresentação $\langle X|S\rangle$ de G tal que X e S são conjuntos finitos. Daí que, $G \cong F/R$, onde $F := F(X)$, grupo livre com base X, e $R := \langle S\rangle^{F(X)}$. Logo, pela primeira parte da Demonstração da Proposição 1.41 (p. 65), R/R' é gerado como $\mathbf{Z}G$-módulo à direita pelo conjunto $\{sR'\}_{s\in S}$, que é finito. □

Proposição 3.12. *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G tal que $[G : H] < \infty$. Então, G é grupo de tipo FP_∞ se, e somente se, H é grupo de tipo FP_∞.*

Demonstração. De início observemos que, como $[G : H] < \infty$, então existe subconjunto T de G tal que $|T| < \infty$ e $G = \dot{\bigcup_{t\in T}} tH$ (T é transversal à esquerda de H em G). Pelo Lema 3.3 (p. 103), temos que

$$\mathbf{Z}G = \bigoplus_{t\in T} t\mathbf{Z}H \cong \underbrace{\mathbf{Z}H \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}H}_{|T| \text{ vezes}} \tag{3.10}$$

que é um isomorfismo de $\mathbf{Z}H$-módulos à direita, onde T é conjunto finito.

Suponhamos primeiramente que G seja um grupo de tipo FP_∞. Logo, para todo $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, existe resolução parcial projetiva de tipo finito de $\mathbf{Z}$ como $\mathbf{Z}G$-módulo à direita trivial

$$\mathcal{P}_n : P_n \to \ldots \to P_0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{0}.$$

Temos, então, que P_i é $\mathbf{Z}G$-módulo à direita projetivo finitamente gerado para $0 \le i \le n$. Pela Demonstração da Proposição 3.4 (p. 99), existe $\mathbf{Z}G$-módulo à direita livre finitamente gerado F_i (pois P_i é $\mathbf{Z}G$-módulo à direita finitamente gerado) tal que

$$F_i = P_i \oplus A_i, \tag{3.11}$$

onde A_i é algum $\mathbf{Z}G$-submódulo de F_i. Logo, existe $s \in \mathbb{Z}_+$ tal que $F_i \cong \underbrace{\mathbf{Z}G \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}G}_{s \text{ vezes}}$ e, por (3.10) (p. 113), $F_i \cong \underbrace{\mathbf{Z}H \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}H}_{s|T| \text{ vezes}}$ (isomorfos como $\mathbf{Z}H$-módulos à direita). Logo, F_i é $\mathbf{Z}H$-módulo à direita livre finitamente gerado. Usando (3.11) (p. 113), a Proposição 3.4 (p. 99), a Proposição 1.47 (p. 72) e a Observação 1.16 (p. 73), concluímos que P_i é $\mathbf{Z}H$-módulo à direita projetivo finitamente gerado para $0 \leq i \leq n$ e para todo $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. Portanto, H é grupo de tipo FP_∞.

Suponhamos agora que H seja um grupo de tipo FP_∞. Vamos mostrar que $\mathbf{Z}$ como $\mathbf{Z}G$-módulo à direita trivial satisfaz a afirmação iii) da Proposição 3.10 (p. 109), para todo $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, e, portanto, G será grupo de tipo FP_∞. Dado $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, sejam $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ tal que $k < n$ e $\mathcal{P}_k : P_k \xrightarrow{d_k} \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{0}$ uma resolução parcial projetiva de tipo finito de $\mathbf{Z}$ como $\mathbf{Z}G$-módulo à direita trivial. Pelo que foi demonstrado no parágrafo precedente temos que $\mathcal{P}_k$ é uma resolução parcial projetiva de tipo finito de $\mathbf{Z}$ como $\mathbf{Z}H$-módulo à direita trivial. Usando a Proposição 3.10 iii) (p. 109) e o fato de H ser de tipo FP_∞, concluímos que $\mathbf{Z}$ é $\mathbf{Z}H$-módulo à direita trivial finitamente gerado e, tomando-se $\mathcal{P}_k$, que $ker(d_k)$ é $\mathbf{Z}H$-submódulo de P_k finitamente gerado. Portanto, $\mathbf{Z}$ é $\mathbf{Z}G$-módulo à direita trivial finitamente gerado e $ker(d_k)$ é $\mathbf{Z}G$-submódulo de P_k finitamente gerado. □

Proposição 3.13. *Sejam $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ e*

$$\mathbf{0} \to A' \to A \to A'' \to \mathbf{0}$$

uma sequência exata curta de R-módulos à direita. Então, valem-se as seguintes afirmações:

- ***a)*** *Se A' é R-módulo à direita de tipo FP_{n-1} e A é R-módulo à direita de tipo FP_n, então A'' é R-módulo à direita de tipo FP_n.*
- ***b)*** *Se A é R-módulo à direita de tipo FP_{n-1} e A'' é R-módulo à direita de tipo FP_n, então A' é R-módulo à direita de tipo FP_{n-1}.*
- ***c)*** *Se A' e A'' são R-módulos à direita de tipo FP_n, então A também é R-módulo à direita de tipo FP_n.*

Demonstração. (Ver [3, Proposition 1.4, p. 12].) □

Teorema 3.2. *Seja G um grupo solúvel. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- *i) G é grupo de tipo FP_∞.*
- *ii) G é grupo construtível.*

Além disso, caso i) ou ii) valham, G é um grupo nilpotente-por-abeliano-por-finito.

Demonstração. Mostrar que G é grupo construtível, supondo que G seja grupo de tipo FP_∞, requer resultados mais sofisticados. A Demonstração pode ser encontrada em [12, Corollary, p. 57].

A Demonstração de que G é um grupo nilpotente-por-abeliano-por-finito pode ser encontrada em [7, Theorem 5.2, p.17].

Aqui vamos mostrar somente a parte fácil da afirmação. Suponhamos que G seja grupo construtível. Mostraremos que G é grupo de tipo FP_∞.

Seja H um subgrupo de G de tipo FP_∞. Da definição de grupo solúvel construtível, basta mostrarmos os seguintes itens:

i) Se $[G:H] < \infty$, então G é grupo de tipo FP_∞;

ii) Se G é extensão HNN com base H, letra estável p e subgrupos associados[3] H e H_1 tais que $H \cong H_1$, então G é grupo de tipo FP_∞.

Caso $[G:H] < \infty$, da Proposição 3.12 (p. 113) segue que G é grupo de tipo FP_∞.

Caso $G = \langle H, p | H^p = H_1 \rangle$, pode ser mostrado que a existência da forma normal em extensão HNN é equivalente à existência da seguinte sequência exata curta de $\mathbf{Z}G$-módulos à direita

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}H} \mathbf{Z}G \xrightarrow{d} \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}H} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{0}. \tag{3.12}$$

Aqui, $\mathbf{Z}$ é $\mathbf{Z}G$-módulo à direita trivial e, pela Demonstração do Lema 3.5 (p. 105), temos que $\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}H} \mathbf{Z}G \cong \underbrace{\mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}}_{|T| \text{ vezes}} \cong \bigoplus_{t \in T} \mathbf{Z}t$, onde $G = \dot{\bigcup}_{t \in T} Ht$ sendo T transversal à direita de H em G ($T \subseteq G$). Como existe bijeção entre as classes laterais à direita de H em G e T dada por $Ht \mapsto t$, segue que $\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}H} \mathbf{Z}G \cong \bigoplus_{\substack{Ht \in G/H \\ t \in T}} \mathbf{Z}(Ht) \cong \mathbf{Z}(G/H)$, daí que, em (3.12) (p. 115), $\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}H} \mathbf{Z}G$ é $\mathbf{Z}$-módulo livre com base $\{Ht\}_{t \in T}$ (classes laterais à direita de H em G) e, além disso, $d(Ht) = Hp^{-1}t$ e $\varepsilon(Ht) = 1$ (augmentação).

Agora, como H é grupo de tipo FP_∞, usando a Proposição 3.10 (p. 109), segue que existe a seguinte resolução livre de tipo finito de $\mathbf{Z}H$-módulos à direita para o $\mathbf{Z}H$-módulo à direita trivial $\mathbf{Z}$:

$$\ldots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{0}, \tag{3.13}$$

onde F_i é $\mathbf{Z}H$-módulo à direita livre finitamente gerado, $\forall i \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. Por uma variação do Lema 3.3 (p. 103), temos que $\mathbf{Z}G$ é $\mathbf{Z}H$-módulo à esquerda livre e, portanto, $\mathbf{Z}G$ é $\mathbf{Z}H$-módulo à esquerda plano (por [18, Proposition 3.46 iii), p. 132] e Observação 3.2 (p. 99), daí que o funtor $- \otimes_{\mathbf{Z}H} \mathbf{Z}G$ é exato, logo obtemos de (3.13) (p. 115) a seguinte sequência exata de $\mathbf{Z}G$-módulos à direita

$$\ldots \to F_2 \otimes_{\mathbf{Z}H} \mathbf{Z}G \to F_1 \otimes_{\mathbf{Z}H} \mathbf{Z}G \to F_0 \otimes_{\mathbf{Z}H} \mathbf{Z}G \to \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}H} \mathbf{Z}G \to \mathbf{0}.$$

Como F_i é $\mathbf{Z}H$-módulo à direita livre finitamente gerado, $\forall i \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, segue que $F_i \otimes_{\mathbf{Z}H} \mathbf{Z}G$ é $\mathbf{Z}G$-módulo à direita livre finitamente gerado, $\forall i \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. Logo, pela Proposição 3.10 (p. 109), concluímos que $\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}H} \mathbf{Z}G$ é $\mathbf{Z}G$-módulo à direita de tipo FP_∞. Assim, usando a sequência exata curta de $\mathbf{Z}G$-módulos à direita (3.12) (p. 115) e a Proposição 3.13 a) (p. 114), concluímos que $\mathbf{Z}$ é $\mathbf{Z}G$-módulo à direita trivial de tipo FP_∞ e, portanto, G é grupo de tipo FP_∞. □

[3] Se $G = \langle H, p | H_1^p = H_2 \rangle$ com $H \neq H_1$ e $H \neq H_2$, então pode ser mostrado que existe subgrupo livre de posto 2 em G e, portanto, G não seria solúvel. O que é uma contradição com a hipótese.

Teorema 3.3. *Seja*

$$N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow H$$

uma sequência exata curta de grupos tal que N é um grupo nilpotente, H é um grupo abeliano e G é um grupo finitamente gerado. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) G é um grupo de tipo FP_∞.

ii) $\sigma(G) = \Sigma^c_{N/N'}(H)$ está contido em alguma semiesfera aberta de caracteres de H.

iii) $dis\sigma(G) = dis\Sigma^c_{N/N'}(H)$ está contido em alguma semiesfera aberta de caracteres de H.

Além disso, caso i), ii) ou iii) valham, $\Sigma^c_{N/N'}(H) = dis\Sigma^c_{N/N'}(H)$, o qual é também um conjunto finito.

Demonstração. Esse Teorema é uma reformulação do Teorema 5.2 em [7, Theorem 5.2, p.17] juntamente com o Teorema 3.2 (p. 114). Não faremos Demonstração do mesmo nesta Dissertação, apenas a seguinte observação.

Veja que $G/N \cong H$, logo G/N é grupo abeliano e, portanto, G é um grupo nilpotente-por-abeliano-por-finito. Além disso, N e G/N serem grupos solúveis acarreta que G é grupo solúvel. Agora, caso G seja um grupo de tipo FP_∞, então, como G é grupo solúvel, segue do Teorema 3.2 (p. 114), que G é grupo construtível. Aplicando o Teorema 5.2 em [7, Theorem 5.2, p.17], temos que $\Sigma^c_{N/N'}(H)$ e, portanto, $dis\Sigma^c_{N/N'}(H)$ estão contidos em alguma semiesfera aberta de caracteres de H. Caso $\Sigma^c_{N/N'}(H)$, ou $dis\Sigma^c_{N/N'}(H)$) estejam contidos em alguma semiesfera aberta de caracteres de H, pelo Teorema 5.2 em [7, Theorem 5.2, p.17], segue que G é grupo construtível, e como também G é grupo solúvel, pelo Teorema 3.2 (p. 114), concluímos que G é grupo de tipo FP_∞.

Pelo que foi visto acima e pelo Teorema 5.2 em [7, Theorem 5.2, p.17], caso *i)*, *ii)*, ou *iii)* valham, então $\Sigma^c_{N/N'}(H) = dis\Sigma^c_{N/N'}(H)$, o qual é também um conjunto finito. □

Teorema 3.4. *Sejam G um grupo e $H \lhd G$. Se G é grupo solúvel de tipo FP_∞, então G/H também o é.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.2 (p. 114), temos que G é grupo construtível, logo, como é mostrado em [2, Theorem 4, p. 252], G/H é grupo construtível, e como G/H é também grupo solúvel, concluímos, pelo Teorema 3.2 (p. 114), que G/H é grupo de tipo FP_∞. □

Capítulo 4

Centralizadores de Grupos Finitos em Grupos Solúveis de Tipo FP_∞

Sejam G um grupo e M um $\mathbf{Z}G$-módulo à direita. Neste Capítulo, dados $\lambda \in \mathbf{Z}G$ e $m \in M$, ao invés de denotarmos o produto de λ e m por $m\lambda$, denotaremos o mesmo por

$$m^\lambda.$$

Observe que, dado $g \in G$, temos que $g \in \mathbf{Z}G$. Assim, não faremos distinção entre a notação da ação de $g \in G$ sobre um dado elemento m do grupo abeliano M e a notação do produto de $g \in \mathbf{Z}G$ sobre um dado elemento m do grupo abeliano M.

Sejam G, H grupos abelianos. Consideraremos neste Capítulo $Hom(G,H)$ como grupo abeliano aditivo, cuja operação é dada por

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(g) := \varphi_1(g) + \varphi_2(g), \forall \varphi_1, \varphi_2 \in Hom(G,H) \text{ e } \forall g \in G.$$

4.1 Definições e Resultados Preliminares

Nesta Subseção escreveremos em **notação multiplicativa** a operação binária de grupos abelianos.

Definição 4.1. *Seja F um grupo finito. Definamos*

$$e := \sum_{f \in F} f \in \mathbf{Z}F.$$

Definição 4.2. *Sejam V um grupo abeliano e F um grupo finito agindo à direita sobre V. Usando notação multiplicativa com relação à operação em V e usando a Proposição 1.33 (p. 47), definimos*

$$Ann_V(e) := \{v \in V : v^e = \prod_{f \in F} v^f = 1_V\}.$$

Lema 4.1. *Seja F um grupo finito. Então,*

a) *$f'ef'' =^1 e, \quad \forall f', f'' \in F.$*

[1] O produto $f'ef''$ feito aqui é o produto de elementos do anel de grupo $\mathbf{Z}F$.

b) $(|F| - e)e = 0_{\mathbf{Z}F}$.

Demonstração. ***a)*** Dados $f', f'' \in F \subseteq \mathbf{Z}F$, temos que

$$f'ef'' = f'(\sum_{f\in F} f)f'' = \sum_{f\in F} f'ff'' = \sum_{f'ff''\in F} f'ff'' = \sum_{\gamma\in F} \gamma = e, \text{ onde } \gamma = f'ff''.$$

b) $e^2 = (\sum_{f'\in F} f')\cdot(\sum_{f\in F} f) = \sum_{f'\in F}\sum_{f\in F} f'f = \sum_{f'\in F}\sum_{f'f\in F} f'f = \sum_{f'\in F}\sum_{\mu\in F} \mu = \sum_{f'\in F} e = |F|e$, onde $\mu = f'f$. Daí que

$$(|F| - e)e = 0_{\mathbf{Z}F}.$$

□

Lema 4.2. *Sejam V um grupo abeliano e F um grupo finito agindo à direita sobre V. Então, $Ann_V(e)$ é um subgrupo F-invariante de V, ou seja, um F-submódulo.*

Demonstração. Vamos mostrar que $Ann_V(e)$ é um conjunto F-invariante. Tomemos $v \in Ann_V(e)$ e $f \in F$ arbitrários. Usando o Lema 4.1 a) (p. 117), $(v^f)^e = v^{fe} = v^e = 1_V$. Portanto, $v^f \in Ann_V(e)$. Daí que $Ann_V(e)$ é F-invariante.

Mostraremos agora que $Ann_V(e)$ é subgrupo de V. Dados $v_1, v_2 \in Ann_V(e)$,

$$(v_1v_2)^e = \prod_{f\in F}(v_1v_2)^f = \prod_{f\in F} v_1^f v_2^f = \prod_{f\in F} v_1^f \cdot \prod_{f\in F} v_2^f = 1_V \cdot 1_V = 1_V.$$

Logo, $v_1v_2 \in Ann_V(e)$. Temos também que, dado $v \in Ann_V(e)$,

$$(v^{-1})^e = \prod_{f\in F}(v^{-1})^f = \prod_{f\in F}(v^f)^{-1} = (\prod_{f\in F} v^f)^{-1} = 1_V^{-1} = 1_V.$$

Logo, $v^{-1} \in Ann_V(e)$. □

Definição 4.3. *Sejam G um grupo e F um grupo agindo à direita sobre G. Definimos o* ***centralizador do grupo*** *F* ***em*** *G como sendo o conjunto*

$$C_G(F) := \{g \in G : g^f = g, \forall f \in F\}.$$

O centralizador do grupo G em F é também chamado de ***pontos fixos por*** *F* ***agindo sobre*** *G.*

Lema 4.3. *Sejam G um grupo e F um grupo agindo à direita sobre G. Então, $C_G(F)$ é um subgrupo F-invariante de G.*

Demonstração. Observemos que $C_G(F)$ é um conjunto F-invariante pela sua própria definição. Vamos mostrar, então, que $C_G(F)$ é subgrupo de G. Dados $g_1, g_2 \in C_G(F)$ e $f \in F, (g_1g_2^{-1})^f = g_1^f(g_2^{-1})^f = g_1(g_2^f)^{-1} = g_1g_2^{-1}$. Logo, $g_1g_2^{-1} \in C_G(F)$. □

Observação 4.1. Sejam G um grupo, F um grupo agindo à direita sobre G e $H \lhd G$ tal que H é F-invariante. Temos que

$$C_{G/H}(F) = \{gH \in G/H : (gH)^f = gH, \forall f \in F\}.$$

Lembremos que, pela Proposição 1.17 (p. 24), temos ação à direita de F sobre G/H. Além disso, pelo Lema 4.3 (p. 118), temos que $C_{G/H}(F)$ é subgrupo de G/H, segue, então, do Teorema 1.4 (p. 4) (Teorema de Correspondência para Grupos), que existe um subgrupo C de G tal que $H \subseteq C$ e

$$C_{G/H}(F) = C/H.$$

Lema 4.4. *Sejam G um grupo, F um grupo agindo à direita sobre G e $H_1, H_2 \lhd G$ tais que $H_2 \subseteq H_1$ com H_1 e H_2 grupos F-invariantes. Sejam ainda C_1, C_2 subgrupos de G tais que $C_{G/H_1}(F) = C_1/H_1$ e $C_{(G/H_2)/(H_1/H_2)}(F) = (C_2/H_2)/(H_1/H_2)$ como na Observação 4.1 (p. 119). Então, $C_1 = C_2$.*

Demonstração. Como $H_2 \subseteq H_1$, pela Proposição 1.7 (p. 9), temos que a função $\varphi : G/H_2 \twoheadrightarrow G/H_1$, dada por $\varphi(gH_2) = gH_1$, para toda classe lateral $gH_2 \in G/H_2$, onde $gH_1 \in G/H_1$, é um epimorfismo de grupos e $ker(\varphi) = H_1/H_2$. Pelo Teorema 1.1 (p. 3) (1º Teorema de Isomorfismo para Grupos), φ induz isomorfismo de grupos $\bar{\varphi} : (G/H_2)/(H_1/H_2) \to G/H_1$, dado por

$$\bar{\varphi}((gH_2)(H_1/H_2)) = gH_1,$$

para toda classe lateral $(gH_2)(H_1/H_2) \in (G/H_2)/(H_1/H_2)$, onde $gH_1 \in G/H_1$. Daí que, se $c_2 \in C_2$, então $(c_2H_2)(H_1/H_2) \in (C_2/H_2)/(H_1/H_2) = C_{(G/H_2)/(H_1/H_2)}(F)$, logo, dado $f \in F$, pela Proposição 1.17 (p. 24), como H_2 e H_1/H_2 são grupos F-invariantes, $(c_2H_2)(H_1/H_2) = ((c_2H_2)(H_1/H_2))^f = (c_2^fH_2)(H_1/H_2)$, o que implica que

$$c_2H_1 = \bar{\varphi}((c_2H_2)(H_1/H_2)) = \bar{\varphi}((c_2^fH_2)(H_1/H_2)) = c_2^fH_1 = (c_2H_1)^f,$$

resultando que $c_2H_1 \in C_{G/H_1}(F) = C_1/H_1$, isto é, $c_2 \in C_1$. Assim, $C_2 \subseteq C_1$. Analogamente, tomando-se um elemento arbitrário $c_1 \in C_1$ e usando o mesmo raciocínio juntamente com o isomorfismo de grupos $\bar{\varphi}^{-1}$, concluímos que $C_1 \subseteq C_2$. Desta forma, $C_1 = C_2$. □

Proposição 4.1. *[14, Lemma 3.5, p. 142] Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado e F um grupo finito agindo à direita sobre Q. Definindo-se $Q^{|F|} := \{q^{|F|} : q \in Q\}$, temos que:*

- ***a)*** *Existem subgrupo C de $C_Q(F)$ e subgrupo T de $Ann_Q(e)$ que são F-invariantes tais que CT é subgrupo de Q e $Q^{|F|}$ é subgrupo de CT;*
- ***b)*** *Os grupos $Q/Q^{|F|}, C_Q(F)/C$ e $C_Q(F) \cap T$ são finitos.*

Demonstração. ***a)*** Definamos

$$C := Q^e = \{q^e : q \in Q\}.$$

Vamos mostrar que C é subgrupo de $C_Q(F)$. Dados $f' \in F$ e $q^e \in C$,

$$(q^e)^{f'} = (\prod_{f \in F} q^f)^{f'} = \prod_{f \in F} q^{ff'} = \prod_{ff' \in F} q^{ff'} = \prod_{\gamma \in F} q^\gamma = q^e,$$

onde $\gamma = ff'$. Logo, $C \subseteq C_Q(F)$ e C é F-invariante. Além disso, dados $q_1^e, q_2^e \in C$,

$$q_1^e q_2^e = \prod_{f\in F} q_1^f \cdot \prod_{f\in F} q_2^f = \prod_{f\in F} q_1^f q_2^f = \prod_{f\in F} (q_1 q_2)^f = (q_1 q_2)^e \in C.$$

E, dado $q^e \in C$,

$$(q^e)^{-1} = (\prod_{f\in F} q^f)^{-1} = \prod_{f\in F} (q^f)^{-1} = \prod_{f\in F} (q^{-1})^f = (q^{-1})^e \in C.$$

Segue que C é subgrupo de $C_Q(F)$.

Por outro lado, definamos

$$T := Q^{|F|-e} = \{q^{|F|-e} : q \in Q\} = \{\prod_{f\in F} q(q^{-1})^f : q \in Q\}.$$

(Observe que $q^{|F|-e} = q^{|F|}q^{-e} = q^{|F|}(\prod_{f\in F} q^f)^{-1} = q^{|F|}\prod_{f\in F}(q^{-1})^f = \prod_{f\in F} q(q^{-1})^f$). Vamos mostrar que T é subgrupo de $Ann_Q(e)$. Dado $q^{|F|-e} \in T$, usando o Lema 4.1 b) (p. 117), temos que

$$(q^{|F|-e})^e = q^{(|F|-e)e} = q^0 = 1_Q.$$

Logo, $T \subseteq Ann_Q(e)$. Além disso, dados $q_1^{|F|-e}, q_2^{|F|-e} \in T$,

$$q_1^{|F|-e} q_2^{|F|-e} = q_1^{|F|} q_1^{-e} q_2^{|F|} q_2^{-e} = q_1^{|F|} q_2^{|F|} q_1^{-e} q_2^{-e} = (q_1 q_2)^{|F|} \cdot \prod_{f\in F} (q_1^{-1})^f \cdot \prod_{f\in F} (q_2^{-1})^f =$$

$$= (q_1 q_2)^{|F|} \prod_{f\in F} (q_1^{-1})^f (q_2^{-1})^f = (q_1 q_2)^{|F|} \prod_{f\in F} ((q_1 q_2)^{-1})^f = (q_1 q_2)^{|F|}(q_1 q_2)^{-e} =$$

$$= (q_1 q_2)^{|F|-e} \in T.$$

E, dado $q^{|F|-e} \in T$,

$$(q^{(|F|-e)})^{-1} = (\prod_{f\in F} q(q^{-1})^f)^{-1} = \prod_{f\in F} q^{-1}((q^{-1})^f)^{-1} = \prod_{f\in F} (q^{-1})((q^{-1})^{-1})^f =$$

$$= (q^{-1})^{|F|-e} \in T.$$

Segue que T é subgrupo de $Ann_Q(e)$.

Observemos que T é F-invariante, pois, dados $q^{|F|-e} \in T$ e $f \in F$, usando o Lema 4.1 a) (p. 117),

$$(q^{|F|-e})^f = (q^f)^{|F|-f^{-1}ef} = (q^f)^{|F|-e} \in T.$$

Agora, vamos verificar que $Q^{|F|}$ é subgrupo de CT. Dado $q^{|F|} \in Q^{|F|}$,

$$q^{|F|} = q^{e+|F|-e} = q^e q^{|F|-e} \in CT.$$

Logo, $Q^{|F|} \subseteq CT$. Além disso, $Q^{|F|}$ é subgrupo de Q, pois, dados $q_1^{|F|}, q_2^{|F|} \in Q^{|F|}$, $q_1^{|F|}(q_2^{|F|})^{-1} = q_1^{|F|}(q_2^{-1})^{|F|} = (q_1 q_2^{-1})^{|F|} \in Q^{|F|}$.

Temos também que $C \lhd Q$, pois Q é grupo abeliano. Portanto CT é subgrupo de Q. Sendo assim, como CT e $Q^{|F|}$ são subgrupos de Q e $Q^{|F|} \subseteq CT$, temos que $Q^{|F|}$ é subgrupo de CT.

Observe que para a demonstração do item ***a)*** não usamos o fato de Q ser grupo finitamente gerado.

b) Pelo Lema 4.3 (p. 118), $C_Q(F)$ é subgrupo de Q, e como Q é grupo abeliano finitamente gerado, segue, pela Proposição 1.20 (p. 26), que $C_Q(F)$ é grupo abeliano finitamente gerado. Assim, pela Proposição 1.21 (p. 26), toda seção limitada de Q e de $C_Q(F)$ é finita. Para mostrarmos, então, que $Q/Q^{|F|}$ e $C_Q(F)/C$ são grupos finitos, basta mostrarmos que $Q/Q^{|F|}$ e $C_Q(F)/C$ são seções limitadas. Façamos isso a seguir.

Para cada classe lateral $qQ^{|F|} \in Q/Q^{|F|}$, $(qQ^{|F|})^{|F|} = q^{|F|}Q^{|F|} = Q^{|F|}$. Logo, $(Q/Q^{|F|})^{|F|} = \mathbf{1}$, isto é, $Q/Q^{|F|}$ é seção limitada. Analogamente, para cada classe lateral $xC \in C_Q(F)/C$,

$$(xC)^{|F|} = x^{|F|}C = (\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{|F|\text{vezes}})C \overset{(*)}{=} (\prod_{f \in F} x^f)C = x^e C = C,$$

onde, em $(*)$, usamos que $x \in C_Q(F)$. Portanto, $(C_Q(F)/C)^{|F|} = \mathbf{1}$, isto é, $C_Q(F)/C$ é seção limitada.

Agora, vamos mostrar que $C_Q(F) \cap T$ é grupo finito. Seja $x \in C_Q(F) \cap T$. Então, $\forall f \in F, x^f = x$, pois $x \in C_Q(F)$, e $x = q^{|F|-e}$, para algum $q \in Q$, pois $x \in T$. Segue que

$$x^{|F|} = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{|F|\text{vezes}} \overset{(*)}{=} \prod_{f \in F} x^f = x^e,$$

onde, em $(*)$, usamos que $x \in C_Q(F)$. Assim, $x^{|F|} = x^e$. Mas, $x = q^{|F|-e}$, daí que, usando o Lema 4.1 b) (p. 117),

$$x^{|F|} = x^e = (q^{|F|-e})^e = q^{(|F|-e)e} = q^0 = 1_Q.$$

Portanto, $(C_Q(F) \cap C)^{|F|} = \mathbf{1}$. Assim, concluímos que $C_Q(F) \cap C$ é grupo limitado e, portanto, a seção $(C_Q(F) \cap C)/\{1_Q\}$ é limitada, já que $(C_Q(F) \cap C) \cong (C_Q(F) \cap C)/\{1_Q\}$. Como $C_Q(F) \cap C$ é subgrupo de $C_Q(F)$ e $C_Q(F)$ é grupo abeliano finitamente gerado, pela Proposição 1.20 (p. 26), segue que $C_Q(F) \cap C$ também é grupo abeliano finitamente gerado. Assim, pela Proposição 1.21 (p. 26), a seção $(C_Q(F) \cap C)/\{1_Q\}$ é finita. Segue que $C_Q(F) \cap C$ é grupo finito.

□

Proposição 4.2. *[14, Lemma 3.6, p. 142] Sejam Q um grupo abeliano finitamente gerado e F um grupo finito agindo à direita sobre Q. Suponhamos que $Q = C \times T$ (produto direto de grupos), que F aja trivialmente à direita sobre C e que T seja um subgrupo F-invariante de $Ann_Q(e)$. Seja também A um $\mathbf{Z}Q$-módulo à direita (Pela Proposição 1.34 a) (p. 48), A é um $\mathbf{Z}C$-módulo à direita via homomorfismo de grupos inclusão canônica). Se $dis\Sigma_A^c(Q) \subseteq H_q$,*

para algum $q \in Q$, então $dis\Sigma_A^c(C) \subseteq H_c$, para algum $c \in C$, onde H_q, H_c são semiesferas abertas de caracteres relativas a q e a c respectivamente.

Demonstração. Recordemos que $Hom(Q, \mathbf{R})$ é grupo abeliano (cuja operação binária é escrita em notação aditiva). Pelo Teorema dado em [18, Theorem 2.31 (i), p. 55], temos o seguinte isomorfismo de grupos abelianos:

$$Hom(Q, \mathbf{R}) = Hom(C \times T, \mathbf{R}) \cong Hom(C, \mathbf{R}) \oplus Hom(T, \mathbf{R}).$$

Daí que $Hom(C, \mathbf{R})$ e $Hom(T, \mathbf{R})$ são subgrupos abelianos de $Hom(Q, \mathbf{R})$. Como C e T são subgrupos F-invariantes, concluímos que $Hom(C, \mathbf{R})$ e $Hom(T, \mathbf{R})$ são também subgrupos F-invariantes pela Proposição 1.16 (p. 23).

Vamos mostrar que F age trivialmente à direita sobre $Hom(C, \mathbf{R})$ através da ação à direita dada pela Proposição 1.16 (p. 23). De fato, dados $u \in Hom(C, \mathbf{R})$ e $c \in C$, $\forall f \in F, u^f(c) = u(c^{f^{-1}}) = u(c)$, pois a ação à direita de F sobre C é trivial. Daí que $u^f = u$. Concluímos, assim, que F age trivialmente sobre $Hom(C, \mathbf{R})$.

Vamos mostrar agora que $Hom(T, \mathbf{R})$ é subgrupo de $Ann_{Hom(Q,\mathbf{R})}(e)$. Dados $t \in T$ e $w \in Hom(T, \mathbf{R})$, usando notação aditiva e multiplicativa,

$$w^e(t) = (\sum_{f \in F} w^f)(t) = \sum_{f \in F} w^f(t) = \sum_{f \in F} w(t^{f^{-1}}) =$$

$$= w(\prod_{f \in F} t^{f^{-1}}) = w(\prod_{f' \in F} t^{f'}) = w(t^e) = w(1_Q) = 0_{\mathbf{R}},$$

onde $f' = f^{-1}$. Daí que, $w^e = 0_{Hom(T,\mathbf{R})}$ e, portanto, $w \in Ann_{Hom(Q,\mathbf{R})}(e)$. Como w foi tomado arbitrário em $Hom(T, \mathbf{R})$, segue que $Hom(T, \mathbf{R}) \subseteq Ann_{Hom(Q,\mathbf{R})}(e)$. Como ainda $Hom(T, \mathbf{R})$ é subgrupo de $Hom(Q, \mathbf{R})$, temos que $Hom(T, \mathbf{R})$ é subgrupo de $Ann_{Hom(Q,\mathbf{R})}(e)$.

Percebamos que, se $dis\Sigma_A^c(Q) = \emptyset$, então $dis\Sigma_A^c(C) = \emptyset$, do contrário, existiria $u \in dis\Sigma_A^c(C)$ e, pela Proposição 2.6 b) (p. 88), existiria $w \in Hom(T, \mathbf{R})$ tal que $[(u, w)] \in dis\Sigma_A^c(Q)$, o que é absurdo, uma vez que estamos supondo que $dis\Sigma_A^c(Q) = \emptyset$.

Suponhamos, então, que $dis\Sigma_A^c(Q) \neq \emptyset$ e que $dis\Sigma_A^c(Q) \subseteq H_q$ para algum $q \in Q$. Logo, $v(q) > 0_{\mathbf{R}}$, para toda classe de equivalência $[v] \in dis\Sigma_A^c(Q)$. Escrevamos $q = (c_0, t_0)$ com $c_0 \in C$ e $t_0 \in T$. Caso $dis\Sigma_A^c(C) = \emptyset$, então $dis\Sigma_A^c(C) \subseteq H_c, \forall c \in C$ e, portanto, temos o resultado. Caso $dis\Sigma_A^c(C) \neq \emptyset$, seja $[u] \in dis\Sigma_A^c(C)$. Pela Proposição 2.6 b) (p. 88), existe $w \in Hom(T, \mathbf{R})$ tal que $[(u, w)] \in dis\Sigma_A^c(Q)$. Agora, pela Proposição 2.8 (p. 90), $dis\Sigma_A^c(Q)$ é um conjunto F-invariante, logo, usando a Observação 2.6 (p. 90),

$$[(u, w)]^f = [(u, w)^f] = [(u^f, w^f)] \overset{(*)}{=} [(u, w^f)] \in dis\Sigma_A^c(Q), \forall f \in F,$$

onde, em $(*)$, usamos que F age trivialmente à direita sobre $Hom(C, \mathbf{R})$. Assim, temos que, $\forall f \in F$,

$$0_{\mathbf{R}} < (u, w^f)(q) = (u, w^f)(c_0, t_0) = u(c_0) + w^f(t_0),$$

aqui $w^f \in Hom(T, \mathbf{R})$, pois $Hom(T, \mathbf{R})$ é um conjunto F-invariante. Agora, se $w^f(t_0) \leq 0_{\mathbf{R}}$ para algum $f \in F \backslash \{1_F\}$, então $u(c_0) > 0_{\mathbf{R}}$, e como $u \in dis\Sigma_A^c(C)$ foi tomado arbitrário, segue que $dis\Sigma_A^c(C) \subseteq H_{c_0}$. Caso contrário, isto é, se $w^f(t_0) > 0_{\mathbf{R}}, \forall f \in F \backslash \{1_F\}$, então

$$0_{\mathbf{R}} \overset{(**)}{=} w^e(t_0) = \sum_{f \in F} w^f(t_0),$$

onde, em $(**)$, usamos que $Hom(T,\mathbf{R}) \subseteq Ann_{Hom(Q,\mathbf{R})}(e)$. Daí que

$$w(t_0) = -\sum_{f\in F\setminus\{1_F\}} w^f(t_0) < 0_{\mathbf{R}}$$

e, portanto, $u(c_0) > 0_{\mathbf{R}}$. Segue assim que $dis\Sigma^c_A(C) \subseteq H_{c_0}$. □

Definição 4.4. *Sejam G um grupo e $\mathcal{X}_G$ o conjunto de subgrupos de G parcialmente ordenado munido da relação $\subseteq$. Dizemos que G é um **grupo noetheriano** se $\mathcal{X}_G$ satisfizer uma (portanto as duas) condições da Proposição 1.42 (p. 69) e dizemos que G é um **grupo artiniano** se $\mathcal{X}_G$ satisfizer uma (portanto as duas) condições entre parênteses da Proposição 1.42 (p. 69).*

Definição 4.5. *Seja G um grupo. Dizemos que G é um **grupo minimax** se G possui uma filtração normal de comprimento finito tal que cada grupo fator é um grupo artiniano, ou um grupo noetheriano.*

Exemplo 4.1. Considerando $\mathbf{Z}$ e $G := \mathbf{Z}[1/p] = \left\{\frac{z}{p^i} : i \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}, z \in \mathbb{Z}\right\}$, onde p é um número primo, como grupos abelianos cuja operação binária seja escrita em notação aditiva. Temos filtração normal

$$0 \lhd \mathbf{Z} \lhd G$$

onde $\mathbf{Z}$ é um grupo noetheriano, mas não artiniano e $G_1 := (\mathbf{Z}[1/p])/\mathbf{Z}$ é um grupo artiniano, mas não noetheriano. Logo, $G = \mathbf{Z}[1/p]$ é um grupo minimax.

Vamos mostrar que G_1 é um grupo artiniano. Para isso mostraremos que os subgrupos de G_1 são $\mathbf{0}$, o próprio G_1, ou da forma

$$\left\langle \frac{1}{p^{z_0}} + \mathbf{Z} \right\rangle \text{ para algum } z_0 \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.1}$$

Portanto, toda cadeia descendente de subgrupos de G_1 é estacionária.

Mostraremos agora, então, que, dado um subgrupo H de G_1 diferente de G_1 e de $\mathbf{0}$, H é da forma em (4.1) (p. 123).

Primeiramente, observe que $\mathbf{Z}[1/p] = \bigcup_{i\geq 0}\left(\frac{\mathbb{Z}}{p^i}\right)$. Sejam $\pi : \mathbf{Z}[1/p] \twoheadrightarrow G_1$ o homomorfismo de grupos projeção canônica e $S := \pi^{-1}(H)$. Temos que $S = S \cap \mathbf{Z}[1/p] = \bigcup_{i\geq 0}(S \cap \left(\frac{\mathbb{Z}}{p^i}\right))$. Definamos $S_i := S\cap\left(\frac{\mathbb{Z}}{p^i}\right)$, onde $i \geq 0$. Daí que, $S = \bigcup_{i\geq 0} S_i$ e, portanto, $H = \pi(S) = \bigcup_{i\geq 1}\pi(S_i)$. Definamos $H_i := \pi(S_i)$, onde $i \geq 1$. Como $\frac{\mathbb{Z}}{p^i}$ é grupo cíclico, temos que S_i também o é, pois é subgrupo de $\frac{\mathbb{Z}}{p^i}$, logo H_i é também grupo cíclico, visto que é imagem homomorfa de S_i. Assim, $H_i = \left\langle \frac{x_i}{p^{\alpha_i}} + \mathbf{Z} \right\rangle$, onde $i \geq 1$, $p \nmid x_i$, $x_i \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$. Pelo Teorema de Bezout,

existem $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ tais que $\beta x_i + \gamma p^{\alpha_i} = 1$. Logo, $\frac{1}{p^{\alpha_i}} = \frac{\beta x_i}{p^{\alpha_i}} + \gamma \in \left\langle \frac{x_i}{p^{\alpha_i}} + \mathbf{Z} \right\rangle = H_i$ e, portanto, $H_i = \left\langle \frac{1}{p^{\alpha_i}} + \mathbf{Z} \right\rangle$. Agora, se $\max\{\alpha_i : i \geq 1\} = \infty$, então $H = \bigcup_{i \geq 1} H_i = G$. Caso contrário, isto é, $\max\{\alpha_i : i \geq 1\} = z_0 \in \mathbb{Z}_+$, então $H = \left\langle \frac{1}{p^{z_0}} + \mathbf{Z} \right\rangle$.

Lema 4.5. *Sejam G um grupo e $H \lhd G$. Se G é grupo noetheriano (artiniano), então H e G/H são grupos noetherianos (artinianos).*

Demonstração. Como todo subgrupo de H é também subgrupo de G, temos que toda cadeia ascendente (descendente) em $\mathcal{X}_H$ é também uma cadeia ascendente (descendente) em $\mathcal{X}_G$ e, portanto, estacionária. Daí que H é grupo noetheriano (artiniano).

Agora, pelo Teorema 1.4 (p. 4) (Teorema de Correspondência para Grupos), todo subgrupo de G/H tem a forma A/H, onde A é subgrupo de G e $H \subseteq A$, concluímos por raciocínio semelhante ao acima que G/H é grupo noetheriano (artiniano). □

4.2 Resultado Principal

Doravante, fixaremos G como sendo um grupo solúvel de tipo FP_∞ e F como sendo um grupo finito agindo à direita sobre G.

Teorema 4.1. *Existe $N \lhd G$ tal que N é subgrupo nilpotente F-invariante e G/N é grupo abeliano-por-finito finitamente gerado.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.2 (p. 114), G é um grupo nilpotente-por-abeliano-por-finito, logo existe $N_0 \lhd G$, N_0 é grupo nilpotente tal que G/N_0 é grupo abeliano-por-finito finitamente gerado. O que queremos é mostrar a existência de um subgrupo normal N de G que possua essas propriedades de N_0 e que ainda seja um conjunto F-invariante.

Pela definição de ação de grupo sobre grupo, segue que $N_0 \cong N_0^f$, como grupos, $\forall f \in F$. Daí que, como N_0 é grupo nilpotente, concluímos que N_0^f também o é. Observemos que, pelo Lema 1.28 (p. 23), obtemos que $N_0^f \lhd G, \forall f \in F$.

Vamos mostrar agora que, $\forall f \in F$, $G/N_0 \cong G/N_0^f$. Dado $f \in F$, seja $\varphi_f^* : G/N_0 \to G/N_0^f$ uma função definida por

$$\varphi_f^*(gN_0) = g^f N_0^f,$$

para toda classe lateral $gN_0 \in G/N_0$. Vamos demonstrar os seguintes itens abaixo.

i) φ_f^* está bem definida:

Sejam $g_1N_0, g_2N_0 \in G/N_0$. Se $g_1N_0 = g_2N_0$, então $g_2^{-1}g_1 \in N_0$, logo $(g_2^{-1}g_1)^f \in N_0^f$, portanto $(g_2^{-1})^f g_1^f = (g_2^f)^{-1} g_1^f \in N_0^f$, daí que $g_1^f N_0^f = g_2^f N_0^f$, isto é, $\varphi_f^*(g_1N_0) = \varphi_f^*(g_2N_0)$.

ii) φ_f^* é sobrejetiva:

Seja $gN_0^f \in G/N_0^f$. Temos que $gN_0^f = (g^{f^{-1}})^f N_0^f = \varphi_f^*(g^{f^{-1}}N_0)$, onde a classe lateral $g^{f^{-1}}N_0 \in G/N_0$, pois $g^{f^{-1}} \in G$, já que G é um conjunto F-invariante.

iii) φ_f^* é injetiva:

Sejam $g_1N_0, g_2N_0 \in G/N_0$. Se $\varphi_f^*(g_1N_0) = \varphi_f^*(g_2N_0)$, então $g_1^f N_0^f = g_2^f N_0^f$, logo $(g_2^f)^{-1}g_1^f \in N_0^f$, portanto $(g_2^{-1}g_1)^f \in N_0^f$, daí que $g_2^{-1}g_1 = ((g_2^{-1}g_1)^f)^{f^{-1}} \in (N_0^f)^{f^{-1}} = N_0$ e, consequentemente, $g_1N_0 = g_2N_0$.

iv) φ_f^* é homomorfismo de grupos:

Sejam $g_1N_0, g_2N_0 \in G/N_0$. Então,

$$\varphi_f^*(g_1N_0 \cdot g_2N_0) = \varphi_f^*(g_1g_2N_0) = (g_1g_2)^f N_0^f = g_1^f g_2^f N_0^f =$$

$$= g_1^f N_0^f \cdot g_2^f N_0^f = \varphi_f^*(g_1N_0)\varphi_f^*(g_2N_0).$$

Segue, assim, que φ_f^* é isomorfismo de grupos, daí que G/N_0^f é também grupo abeliano-por-finito finitamente gerado, $\forall f \in F$.

Temos, então, que $\forall f \in F, N_0^f$ herda as características de N_0, uma vez que $N_0^f \lhd G$, N_0^f é um grupo nilpotente e G/N_0^f é um grupo abeliano-por-finito finitamente gerado. No entanto, N_0^f ainda não é, necessariamente, um conjunto F-invariante. Seja

$$N := \bigcap_{f \in F} N_0^f.$$

Tal intersecção é finita, uma vez que F é um conjunto finito. Como $N_0^f \lhd G, \forall f \in F$, temos, pelo Lema 1.2 (p 4), que $N \lhd G$. Temos também que N é um grupo nilpotente, uma vez que, dado $f \in F$, N é subgrupo de N_0^f e N_0^f é um grupo nilpotente. Além disso, pelo Lema 1.11 (p. 11), segue que G/N é grupo abeliano-por-finito. E, ainda, como G é grupo de tipo FP_∞, temos que G é grupo finitamente gerado pela Proposição 3.9 (p. 108), daí que, pela Proposição 1.18 (p. 24), G/N também é grupo finitamente gerado. E, finalmente, pelo Lema 1.30 (p. 23), temos que N é um conjunto F-invariante. □

Daqui em diante consideraremos N como subgrupo nilpotente, normal em G, F-invariante e G/N grupo abeliano-por-finito finitamente gerado, onde G continua sendo um grupo solúvel de tipo FP_∞ e F um grupo finito agindo à direita sobre G.

Lema 4.6. *Existe $H \lhd G$ tal que $[G : H] < \infty$, H/N é grupo abeliano livre finitamente gerado e H é F-invariante.*

Demonstração. Como G/N é grupo abeliano-por-finito finitamente gerado, existe $H_0 \lhd G$ tal que $H_0/N \lhd G/N, H_0/N$ é grupo abeliano e $(G/N)/(H_0/N) \cong G/H_0$ é grupo finito, isto é,

$$[G : H_0] < \infty.$$

Do fato de G ser grupo finitamente gerado (pela Proposição 3.9 (p. 108), pois G é grupo de tipo FP_∞) e $[G : H_0] < \infty$, segue da Proposição 1.27 (p. 36) que H_0 é grupo finitamente gerado e, daí que, H_0/N é grupo finitamente gerado pela Proposição 1.18 (p. 24). Como H_0/N é também grupo abeliano, temos, pelo Teorema 1.5 (p. 26), que

$$H_0/N \cong \mathbf{Z}^n \oplus K,$$

onde $K = \{x \in H_0/N : |x| < \infty\}$ é um subgrupo finito de H_0/N e $n \in \mathbb{Z}_+$ é o posto livre de torção de H_0/N.

Seja $\pi : H_0 \twoheadrightarrow H_0/N$ o epimorfismo de grupos projeção canônica. Definamos

$$H_1 := \pi^{-1}(\mathbf{Z}^n).$$

Do Teorema 1.4 (p. 4) (Teorema de Correspondência para Grupos),

$$H_1 \text{ é subgrupo de } H_0 \text{ e } N \subseteq H_1 \tag{4.2}$$

e, como H_0/N é grupo abeliano, segue que $\mathbf{Z}^n \lhd H_0/N$ e, portanto, $H_1 \lhd H_0$ pelo Teorema 1.4 (p. 4) (Teorema de Correspondência para Grupos). Temos também, pela Proposição 1.4 (p. 8), que

$$[H_0 : H_1] = [\pi(H_0) : \pi(H_1)] = [\mathbf{Z}^n \oplus K : \mathbf{Z}^n] = |K| < \infty.$$

Assim, como $[G : H_0], [H_0 : H_1] < \infty$, pelo Teorema de Lagrange,

$$[G : H_1] = [G : H_0] \cdot [H_0 : H_1] < \infty. \tag{4.3}$$

Definamos

$$H_2 := \bigcap_{g \in G} g^{-1} H_1 g.$$

Como $N \lhd G$ e por (4.2) (p. 126), segue que $N \subseteq g^{-1}Ng \subseteq g^{-1}H_1g, \forall g \in G$, logo

$$N \subseteq \bigcap_{g \in G} g^{-1} H_1 g = H_2. \tag{4.4}$$

Por (4.3) (p. 126) e pelo Lema 1.5 (p. 5), $H_2 = \bigcap_{t \in T} t^{-1} H_1 t$, onde T é um subconjunto finito de G. Como a conjugação à direita por elementos de G é uma ação à direita de G sobre si mesmo, segue do Lema 1.28 (p. 23) e do Lema 1.29 (p. 23) que, para todo $t \in T$, $t^{-1}H_1t \lhd G$ e $[G : t^{-1}H_1t] < \infty$, respectivamente, e assim, como T é finito, pelos Lemas 1.2 (p. 4) e 1.12 (p. 11), temos, respectivamente, que

$$H_2 \lhd G \quad \text{e} \quad [G : H_2] < \infty.$$

Por outro lado, pelo Teorema 1.4 (p. 4) (Teorema de Correspondência para Grupos), H_2/N é subgrupo de $H_1/N = \mathbf{Z}^n$, logo H_2/N é grupo livre de torção.

Definamos agora

$$H_3 := \bigcap_{f \in F} H_2^f,$$

onde estamos utilizando a ação à direita de F sobre G. Como N é F-invariante, pela Proposição 1.14 (p. 21), temos que, $\forall f \in F, N = N^f$. Por (4.4) (p. 126), temos também $N^f \subseteq H_2^f, \forall f \in F$, segue que

$$N \subseteq \bigcap_{f \in F} H_2^f = H_3.$$

Temos ainda, pelo Lema 1.30 (p. 23), que

$$H_3 \text{ é } F\text{-invariante.}$$

Pelo Lema 1.28 (p. 23) juntamente com o Lema 1.2 (p. 4), temos que

$$H_3 \lhd G.$$

Além disso, como $[G : H_2] < \infty$, pelo Lema 1.29 (p. 23), segue que $[G : H_2^f] < \infty$, portanto, como F é conjunto finito, pelo Lema 1.12 (p. 11), temos que

$$[G : H_3] < \infty.$$

Observemos que $H_1 = \pi^{-1}(\mathbf{Z}^n)$ é grupo livre de torção e abeliano, logo, H_2 também o é, pois H_2 é subgrupo de H_1. Daí que H_2^f tem também essa mesma propriedade, já que $H_2^f \cong H_2$. E, consequentemente, também $H_3 = \bigcap_{f \in F} H_2^f$, o que garante, por fim, que H_3/N é grupo livre de torção e abeliano.

Por outro lado, H_3 é subgrupo de G e $[G : H_3] < \infty$. Como G é grupo finitamente gerado pela Proposição 3.9 (p. 108), segue que H_3 é grupo finitamente gerado e, portanto, H_3/N é grupo finitamente gerado. Assim, H_3/N é grupo abeliano, finitamente gerado e livre de torção, logo $H_3/N \cong \mathbf{Z}^m$, para algum $m \in \mathbb{Z}_+$. Definamos, então,

$$H := H_3.$$

□

Recordemos que G é um grupo solúvel de tipo FP_∞, F é um grupo finito agindo à direita sobre G, N é um subgrupo normal em G, nilpotente, F-invariante e G/N é um grupo abeliano-por-finito finitamente gerado.

Proposição 4.3. *[14, Proposition 3.9, p. 143] Seja C um subgrupo de G tal que $C_{G/N}(F) = C/N$, como na Observação 4.1 (p. 119). Então, C é grupo de tipo FP_∞.*

Demonstração. Consideremos H como sendo o mesmo grupo do Lema 4.6 (p. 125). Como H e N são F-invariantes, pela Proposição 1.17 (p. 24), temos ação à direita de F sobre o grupo H/N definida por $(hN)^f := h^f N$, para toda classe lateral $hN \in H/N$ e $\forall f \in F$. Como também H/N é grupo abeliano finitamente gerado, pela Proposição 4.1 (p. 119),

$$\text{existem } C_1 \leq C_{H/N}(F) \text{ e } T_1 \leq Ann_{H/N}(e) \text{ que são } F\text{-invariantes tais que } (H/N)^{|F|} \leq C_1T_1,$$

onde C_1T_1 é subgrupo de H/N e

$$[C_{H/N}(F) : C_1] < \infty; \tag{4.5}$$

$$[H/N : (H/N)^{|F|}] < \infty; \tag{4.6}$$

$$C_{H/N}(F) \cap T_1 \text{ é grupo finito.} \tag{4.7}$$

Como H/N é grupo livre de torção, por (4.7) (p. 127), concluímos que $C_{H/N}(F) \cap T_1 = \mathbf{1}$, portanto

$$C_1 \cap T_1 = \mathbf{1}.$$

Temos, assim, que C_1T_1 é subgrupo de H/N e $C_1 \cap T_1 = \mathbf{1}$, logo $C_1T_1 = C_1 \times T_1$ (produto direto de grupos).

Seja $\psi : G \twoheadrightarrow G/N$ o epimorfismo de grupos projeção canônica. Logo, $\psi(H) = H/N$. Definamos

$$H_1 := \psi^{-1}(C_1 \times T_1) \leq H,$$
$$T_0 := \psi^{-1}(T_1) \text{ e } C_0 := \psi^{-1}(C_1).$$

Então,

$$H_1/N = C_0/N \times T_0/N.$$

Agora, como F age trivialmente à direita sobre $C_{H/N}(F)$ e $C_0/N = C_1 \subseteq C_{H/N}(F)$, segue que F age trivialmente à direita sobre C_0/N. Lembremos que $T_0/N = T_1$ é F-invariante.

Observemos que H_1/N é grupo abeliano finitamente gerado pela Proposição 1.20 (p. 26), pois H/N é grupo abeliano finitamente gerado e H_1/N é subgrupo de H/N pelo Teorema 1.4 (p. 4) (Teorema de Correspondência para Grupos). Além disso, por (4.6) (p. 127), $[H/N : (H/N)^{|F|}] < \infty$, e, pelo Teorema de Lagrange,

$$[H/N : (H/N)^{|F|}] = [H/N : C_1 \times T_1] \cdot [C_1 \times T_1 : (H/N)^{|F|}],$$

logo $[H/N : C_1 \times T_1] < \infty$. Pela Proposição 1.2 a) (p. 6),

$$[\psi^{-1}(H/N) : \psi^{-1}(C_1 \times T_1)] = [H/N : C_1 \times T_1] < \infty.$$

Mas, $\psi^{-1}(H/N) = H$ e $\psi^{-1}(C_1 \times T_1) = H_1$, portanto

$$[H : H_1] < \infty.$$

Usando que $[G : H] < \infty$, G é grupo de tipo FP_∞ e a Proposição 3.12 (p. 113), temos que H é grupo de tipo FP_∞, daí que, pela Proposição 3.12 (p. 113),

$$H_1 \text{ também é grupo de tipo } FP_\infty.$$

Pela Observação 1.13 (p. 64), temos que N/N' admite estrutura de $\mathbf{Z}(H_1/N)$-módulo à direita e também admite estrutura de $\mathbf{Z}(C_0/N)$-módulo à direita. Assim, usando o Teorema 3.3 (p. 116), para a sequência exata curta de grupos

$$\mathbf{1} \to N \hookrightarrow H_1 \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} H_1/N \to \mathbf{1},$$

segue que $\Sigma^c_{N/N'}(H_1/N)$, e consequentemente $dis\Sigma^c_{N/N'}(H_1/N)$, estão contidos em alguma semiesfera aberta de caracteres de H_1/N, e como temos também os quatro seguintes fatos:

i) $H_1/N = C_0/N \times T_0/N$;

ii) F age trivialmente à direita sobre C_0/N;

iii) T_0/N é F-invariante;

iv) $T_0/N \subseteq Ann_{H_1/N}(\varepsilon)$,

estamos, então, nas hipóteses da Proposição 4.2 (p. 121). Daí que $dis\Sigma^c_{N/N'}(C_0/N)$ está contido em alguma semiesfera aberta de caracteres de C_0/N.

Considerando agora a sequência exata curta de grupos

$$\mathbf{1} \to N \hookrightarrow C_0 \twoheadrightarrow C_0/N \to \mathbf{1},$$

como H_1/N é grupo abeliano finitamente gerado e C_0/N é subgrupo de H_1/N, segue, da Proposição 1.20 (p. 26), que C_0/N é grupo abeliano finitamente gerado. Visto ainda que $dis\Sigma_{N/N'}(C_0/N)$ está contido em alguma semiesfera aberta de caracteres de C_0/N, pelo Teorema 3.3 (p. 116),

$$C_0 \text{ é grupo de tipo } FP_\infty \text{ se } C_0 \text{ for grupo finitamente gerado.} \tag{4.8}$$

Pela Proposição 1.41 (p. 65), C_0 é grupo finitamente gerado se, e somente se, N/N' é finitamente gerado como $\mathbf{Z}(C_0/N)$-módulo à direita via conjugação à direita por elementos de C_0/N'. E, para mostrarmos este último fato, como C_0/N é subgrupo de H_1/N, basta mostrarmos, pelo Teorema 2.1 (p. 90), que

$$N/N' \text{ é } \mathbf{Z}(H_1/N)\text{-módulo à direita finitamente gerado}$$

e

$$S(H_1/N, C_0/N) \subseteq \Sigma_{N/N'}(H_1/N).$$

Vamos mostrar primeiramente que N/N' é $\mathbf{Z}(H_1/N)$-módulo à direita finitamente gerado. Aqui temos a mesma situação da Observação 1.13 (p. 64), sendo $N \leq H_1 \leq G$ e sendo

$$\mathbf{1} \to N/N' \overset{\iota}{\hookrightarrow} H_1/N' \overset{\rho}{\twoheadrightarrow} H_1/N \to \mathbf{1}$$

sequência exata curta de grupos, onde N/N' é grupo abeliano, ι é o homomorfismo de grupos inclusão canônica e ρ está definida por $\rho(h_1N') = h_1N$, para toda classe lateral $h_1N' \in H_1/N'$. Ainda da Observação 1.13 (p. 64), concluímos que o grupo H_1/N age à direita sobre o grupo abeliano N/N' via conjugação à direita por elementos do grupo H_1/N', isto é,

$$(nN')^{h_1N} := (h_1N')^{-1}(nN')(h_1N'), \text{ onde } h_1N = \rho(h_1N'), \tag{4.9}$$

para toda classe lateral $nN' \in N/N'$ e para toda classe lateral $h_1N \in H_1/N$, onde $h_1N' \in H_1/N'$, ou seja, pela Proposição 1.33 (p. 47), N/N' é $\mathbf{Z}(H_1/N)$-módulo à direita via conjugação à direita por elementos de H_1/N' (onde a operação $+$ do $\mathbf{Z}(H_1/N)$-módulo à direita N/N' é a restrição da operação $\cdot$ do grupo H_1/N' sobre N/N', já que consideramos, na sequência exata curta de grupos, N/N' como subgrupo de H_1/N).

Agora, como H_1 é grupo de tipo FP_∞, pela Proposição 3.9 (p. 108), H_1 é grupo finitamente gerado e, da Proposição 1.18 (p. 24), H_1/N' é grupo finitamente gerado.

Além disso, como $[H : H_1] < \infty$, pela Proposição 1.4 (p. 8), temos que $[H/N : H_1/N] < \infty$, logo, como H/N é grupo finitamente gerado, H_1/N também é grupo finitamente gerado

pela Proposição 1.27 (p. 36) e, portanto, como H_1/N ainda é grupo abeliano, concluímos que H_1/N é grupo finitamente apresentável pela Proposição 1.30 (p. 42).

Desta forma, temos epimorfismo de grupos $\rho : H_1/N' \twoheadrightarrow H_1/N$, onde H_1/N' é grupo finitamente gerado e H_1/N é grupo finitamente apresentável. Segue da Proposição 1.31 (p. 42), que existem $s \in \mathbb{Z}_+$ e $n_1N', \ldots, n_sN' \in N/N'$ tais que

$$N/N' = ker(\rho) = \langle (n_1N')^{H_1/N'}, \ldots, (n_sN')^{H_1/N'} \rangle. \tag{4.10}$$

Assim, dado $nN' \in N/N'$, por (4.10) (p. 130) e vendo N/N' como grupo abeliano, podemos escrever $nN' = \prod_{j=1}^{r} \Big((\gamma_j N')^{-1} (n_{i_j} N') (\gamma_j N') \Big)^{\varepsilon_j}$, onde $r \in \mathbb{Z}_+, i_j \in \{1, \ldots, s\}, \gamma_j N' \in H_1/N'$ e $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, logo, por (4.9) (p. 129), $nN' = \prod_{j=1}^{r} \Big((n_{i_j} N')^{\gamma_j N} \Big)^{\varepsilon_j}$. Assim, vendo agora N/N' como $\mathbf{Z}(H_1/N)$-módulo à direita via conjugação à direita por elementos de H_1/N', temos que $nN' = \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j (n_{i_j} N')^{\gamma_j N}$. Como $nN' \in N/N'$ foi tomado arbitrário, segue que N/N' é gerado como $\mathbf{Z}(H_1/N)$-módulo à direita via conjugação à direita pelos elementos $n_1N', \ldots, n_sN' \in H_1/N'$ e, portanto, finitamente gerado.

Vamos mostrar agora que

$$S(H_1/N, C_0/N) \cap \Sigma^c_{N/N'}(H_1/N) = \emptyset.$$

Seja $[w] \in S(H_1/N, C_0/N) \cap \Sigma^c_{N/N'}(H_1/N)$. Então, por um lado, $w(C_0/N) = \mathbf{0}$ e, por outro lado, como $\Sigma^c_{N/N'}(H_1/N)$ está contido em alguma semiesfera aberta de caracteres de H_1/N, digamos um semiesfera aberta H_x, onde $x \in H_1/N$, temos que, para toda classe de equivalência $[v] \in \Sigma^c_{N/N'}(H_1/N)$, $v(x) > 0_{\mathbf{R}}$, daí que

$$w(x) > 0_{\mathbf{R}}.$$

Como $x \in H_1/N = C_0/N \times T_0/N$, podemos escrever $x = x_1x_2$, com $x_1 \in C_0/N$ e $x_2 \in T_0/N$. Podemos escrever também $w = (w_1, w_2)$, onde $w_1 = wj_1 \in Hom(C_0/N, \mathbf{R})$ e $w_2 = wj_2 \in Hom(T_0/N, \mathbf{R})$, sendo $j_1 : C_0/N \to H_1/N$ e $j_2 : T_0/N \to H_1/N$ os homomorfismos de grupos inclusões canônicas, como na Observação 2.5 (p. 88). Da Demonstração da Proposição 4.2 (p. 121), segue que $Hom(C_0/N, \mathbf{R})$ e $Hom(T_0/N, \mathbf{R})$ são grupos abelianos, F age trivialmente à direita sobre $Hom(C_0/N, \mathbf{R})$ (consequentemente $Hom(C_0/N, \mathbf{R})$ é F-invariante), $Hom(T_0/N, \mathbf{R})$ é subgrupo de $Ann_{Hom(H_1/N, \mathbf{R})}(e)$ e $Hom(T_0/N, \mathbf{R})$ é também F-invariante, pois T_0/N é F-invariante. Agora, pela Proposição 2.8 (p. 90), $\Sigma^c_{N/N'}(H_1/N)$ é um conjunto F-invariante, logo

$$[w]^f = [(w_1, w_2)]^f = [(w_1, w_2)^f] = [(w_1^f, w_2^f)] \overset{(*)}{=} [(w_1, w_2^f)] \in \Sigma^c_{N/N'}(H_1/N), \forall f \in F,$$

onde, em $(*)$, usamos que F age trivialmente à direita sobre $Hom(C_0/N, \mathbf{R})$. Assim, temos que,

$$0_{\mathbf{R}} < w^f(x) = (w_1, w_2)^f(x) = (w_1, w_2^f)(x_1x_2) = w_1(x_1) + w_2^f(x_2), \forall f \in F.$$

Aqui $w_2^f \in Hom(T_0/N, \mathbf{R})$, pois $Hom(T_0/N, \mathbf{R})$ é F-invariante. Agora, se $w_2^f(x_2) \leq 0_{\mathbf{R}}$, para algum $f \in F\backslash\{1\}$, então $w_1(x_1) > 0_{\mathbf{R}}$. Caso contrário, isto é, se $w_2^f(x_2) > 0_{\mathbf{R}}, \forall f \in F\backslash\{1\}$, então

$$0_{\mathbf{R}} \overset{(**)}{=} w_2^e(x_2) = \sum_{f\in F} w_2^f(x_2),$$

onde, em $(**)$, usamos que $Hom(T_0/N, \mathbf{R}) \subseteq Ann_{Hom(H_1/N,\mathbf{R})}(e)$. Daí que

$$w_2(x_2) = -\sum_{f\in F\backslash\{1\}} w_2^f(x_2) < 0_{\mathbf{R}}$$

e, portanto, $w_1(x_1) > 0_{\mathbf{R}}$. Assim, de qualquer forma, temos que $w_1(x_1) \neq 0_{\mathbf{R}}$, contradizendo o fato de que $w(C_0/N) = \mathbf{0}$. Portanto, $S(H_1/N, C_0/N) \cap \Sigma^c_{N/N'}(H_1/N) = \emptyset$, o que implica que $S(H_1/N, C_0/N) \subseteq \Sigma_{N/N'}(H_1/N)$. Destarte, N/N' é finitamente gerado como $\mathbf{Z}(C_0/N)$-módulo à direita via conjugação à direita por elementos de C_0/N', consequentemente C_0 é grupo finitamente gerado e, portanto, por (4.8) (p. 129), C_0 é grupo de tipo FP_∞.

Definamos agora $\tilde{C} := \psi^{-1}(C_{H/N}(F))$, isto é, $\tilde{C}/N = C_{H/N}(F)$.

Por (4.5) (p. 127), temos que $[C_{H/N}(F) : C_1] < \infty$, portanto, pela Proposição 1.2 a) (p. 6), $[\psi^{-1}(C_{H/N}(F)) : \psi^{-1}(C_1)] < \infty$ e, assim, $[\tilde{C} : C_0] < \infty$. Desta forma, como C_0 é grupo de tipo FP_∞, pela Proposição 3.12 (p. 113), segue que $\tilde{C}$ é grupo de tipo FP_∞.

Agora, $H/N, C_{G/N}(F)$ são subgrupos de G/N e $[G/N : H/N] = [G : H] < \infty$, segue da Proposição 1.3 (p. 7) que

$$[C_{G/N}(F) : (H/N) \cap C_{G/N}(F)] = [C_{G/N}(F) : C_{H/N}(F)] < \infty.$$

Mas, pela Proposição 1.2 a) (p. 6), temos que

$$[C_{G/N}(F) : C_{H/N}(F)] = [\psi^{-1}(C_{G/N}(F)) : \psi^{-1}(C_{H/N}(F))] = [C : \tilde{C}].$$

Daí que $[C : \tilde{C}] < \infty$ e, pela Proposição 3.12 (p. 113), C é grupo de tipo FP_∞. □

Rercordemos que G é um grupo solúvel de tipo FP_∞ e F é um grupo finito agindo à direita sobre G.

Lema 4.7. *[14, Lemma 3.10, p. 144] Sejam V um subgrupo abeliano, F-invariante, normal em G e C um subgrupo de G tais que $C_{G/V}(F) = C/V$, como na Observação 4.1 (p. 119). Se V é grupo minimax, então o produto de grupos $VC_G(F)$ é subgrupo de C e $[C : VC_G(F)] < \infty$.*

Demonstração. A Demonstração deste Lema é feita em [14, Lemma 3.10, p. 144]. A mesma usa Derivações e Cohomologia de Grupos, que não foram abordados nesta Dissertação. □

Recordemos que G é um grupo solúvel de tipo FP_∞, F é um grupo finito agindo à direita sobre G, N é um subgrupo normal em G, nilpotente, F-invariante e G/N é um grupo abeliano-por-finito finitamente gerado.

Proposição 4.4. *[14, Proposition 3.11, p. 145] Seja C um subgrupo de G tal que $C_{G/N}(F) = C/N$, como na Observação 4.1 (p. 119). Então, o produto $NC_G(F)$ é subgrupo de C e é de tipo FP_∞.*

Demonstração. Antes de mais nada, observemos que, como N é subgrupo F-invariante, pela Proposição 1.17 (p. 24), temos ação à direita de F sobre G/N, dada por $(gN)^f = g^f N, \forall f \in F$ e para toda classe lateral $gN \in G/N$.

Vamos mostrar que $NC_G(F)$ é subgrupo de C. Para isso, como $N \lhd C$, pois $N \lhd G$, e $C_G(F)$ é subgrupo de G pelo Lema 4.3 (p. 118), basta mostrarmos que $C_G(F) \subseteq C$.

Como $C/N = C_{G/N}(F)$, temos que, dado $g \in G$,

$$g \in C \Leftrightarrow \text{ a classe lateral } gN \in C_{G/N}(F). \tag{4.11}$$

Seja $x \in C_G(F)$. Dado $f \in F$, temos que $x^f = x$. Logo, $(xN)^f = x^f N = xN$ e, portanto, $xN \in C_{G/N}(F)$. Daí que, por (4.11) (p. 132), $x \in C$ e, consequentemente, como $x \in C_G(F)$ foi tomado arbitrário, $C_G(F) \subseteq C$.

Agora, pela Proposição 4.3 (p. 127), temos que C é grupo de tipo FP_∞. E, como $NC_G(F)$ é subgrupo de C, segue da Proposição 3.12 (p. 113) que $NC_G(F)$ é grupo de tipo FP_∞ se $[C : NC_G(F)] < \infty$. Nosso objetivo, portanto, é mostrar que $[C : NC_G(F)] < \infty$.

Seja $N = \gamma_1(N) \geq \gamma_2(N) \geq \cdots$ a série central descendente de N. Temos, então, que $\gamma_{i+1}(N) = [\gamma_i(N), N]$ por definição e que $\gamma_i(N) \lhd_{car} N$, com $i \in \mathbb{Z}_+$. Como N é subgrupo nilpotente, existe $s \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\gamma_{s+1}(N) = \mathbf{1}$, isto é, N tem classe de nilpotência igual a s. Definamos

$$V := \gamma_s(N) \neq \mathbf{1}.$$

Então, $V \lhd_{car} N$, e como $N \lhd G$, segue que

$$V \lhd G.$$

Como G é grupo solúvel de tipo FP_∞, segue do Teorema 3.2 (p. 114) que G é grupo construtível. Desse fato podem ser mostrados outros dois seguintes:

i) N/N' é grupo minimax, usando indução sobre o número de passos para se construir G a partir do grupo trivial $\mathbf{1}$, conforme Definição 1.39 (p. 43);

ii) $\bigotimes^s_{\mathbf{Z}} N/N'$ é grupo minimax, usando que o produto tensorial sobre $\mathbf{Z}$ de dois grupos abelianos minimax é grupo minimax e indução sobre o número de fatores no produto tensorial.

Pela Proposição 1.39 (p. 61), existe um único epimorfismo de grupos $\hat{\theta} : \bigotimes^s_{\mathbf{Z}} N/N' \twoheadrightarrow \gamma_s(N)$ definido por

$$\hat{\theta}(n_1 N' \otimes \ldots \otimes n_s N') = [n_1, \ldots, n_s],$$

onde $n_i N' \in N/N'$, com $1 \leq i \leq s$, e $s \in \mathbb{Z}_+$ é a classe de nilpotência de N. Pelo Lema 4.5 (p. 124) e usando o Teorema 1.1 (p. 3) (1º Teorema de isomorfismo para Grupos), segue que $\gamma_s(N) = V$ é grupo minimax.

Como $V \lhd_{car} N$ e a ação à direita de F sobre N é automorfismo de grupos (N é F-invariante), resulta que $V^f \subseteq V$, isto é, V é F-invariante. Por outro lado, $\mathbf{1} = \gamma_{s+1}(N) = [\gamma_s(N), N] = [V, N]$. Em particular, $V' = [V, V] = \mathbf{1}$. Pelo Corolário 1.2 (p. 8), V é grupo abeliano. Assim concluímos que

$$V \text{ é grupo minimax, normal em } G, \text{ abeliano e } F\text{-invariante.}$$

Por outro lado, como $V \lhd_{car} N$ e $V \lhd G$, segue que G/V e N/V são grupos quocientes. Observe, pelo Lema 1.21 (p. 16) que, para $1 \leq i \leq s$, $\gamma_i(N/V) = \gamma_i(N)/V$, logo $\gamma_s(N/V) = \gamma_s(N)/V = V/V = \mathbf{1}$, portanto N/V é grupo nilpotente e a classe de nilpotência de N/V é $s-1$, onde s é a classe de nilpotência de N. Para mostrarmos que $[C : NC_G(F)] < \infty$, procedamos por indução sobre a classe de nilpotência de N.

Se N tem classe de nilpotência $s = 1$, então $\gamma_2(N) = \mathbf{1}$. Daí que $V = \gamma_1(N) = N$. Como V é grupo minimax, normal em G, abeliano e F-invariante, pelo Lema 4.7 (p. 131), segue que

$$[C : NC_G(F)] = [C : VC_G(F)] < \infty.$$

Para o caso de N ter classe de nilpotência $s > 1$, primeiramente façamos as seguintes observações:

i) G/V é grupo solúvel de tipo FP_∞ pelo Teorema 3.4 (p. 116), uma vez que G é grupo solúvel de tipo FP_∞;

ii) N/V é grupo nilpotente, pois N é grupo nilpotente;

iii) F age à direita sobre N/V pela Proposição 1.17 (p. 24), já que N e V são F-invariantes. A ação é dada por $(nV)^f = n^f V, \forall f \in F$ e para toda classe lateral $nV \in N/V$;

iv) N/V é F-invariante, pois N é F-invariante;

v) $N/V \lhd G/V$ pelo Teorema 1.4 (p. 4) (Teorema de Correspondência para Grupos), pois $N \lhd G$;

vi) $(G/V)/(N/V)$ é grupo abeliano-por-finito finitamente gerado, pois $(G/V)/(N/V) \cong G/N$, o qual possui essa propriedade;

vii) $C_{(G/V)/(N/V)}(F) = (C_1/V)/(N/V)$, onde C_1/V é subgrupo de G/V pela Observação 4.1 (p. 119). Pelo Lema 4.4 (p. 119),

$$C_1 = C,$$

uma vez que $C/N = C_{G/N}(F)$. Neste item, vemos que faz sentido considerar o conjunto $C_{(G/V)/(N/V)}(F)$, pois, como V é F-invariante, pela Proposição 1.17 (p. 24), temos que F age à direita sobre G/V, então, como também N/V é F-invariante, pela mesma Proposição 1.17 (p. 24), existe ação à direita de F sobre $(G/V)/(N/V)$. Tal ação é dada por:

$$((gV)(N/V))^f = (gV)^f(N/V) = (g^f V)(N/V),$$

$\forall f \in F$ e para toda classe lateral $(gV)(N/V) \in (G/V)/(N/V)$.

Agora, vamos mostrar que $(N/V)C_{G/V}(F)$ é subgrupo de C_1/V. Para isso, como $N/V \lhd C_1/V$ (pois $N/V \lhd G/V$) e $C_{G/V}(F)$ é subgrupo de G/V, basta mostrarmos que $C_{G/V}(F) \subseteq C_1/V$.

Como $(C_1/V)/(N/V) = C_{(G/V)/(N/V)}(F)$, temos que, dado $gV \in G/V$,

$$gV \in C_1/V \Leftrightarrow \text{ a classe lateral } (gV)(N/V) \in C_{(G/V)/(N/V)}(F). \tag{4.12}$$

Seja $xV \in C_{G/V}(F)$. Dado $f \in F$, temos que $(xV)^f = xV$. Logo, $((xV)(N/V))^f = (xV)^f(N/V) = (xV)(N/V)$ e, portanto, $(xV)(N/V) \in C_{(G/V)/(N/V)}(F)$. Daí que, por (4.12)

(p. 133), $xV \in C_1/V$ e, consequentemente, como $xV \in C_{G/V}(F)$ foi tomado arbitrário, $C_{G/V}(F) \subseteq C_1/V$.

Recordemos que N/V tem classe de nilpotência $s-1$ em G/V, daí que, pelas observações i), ii), iii), iv), v), vi), vii) e pelo fato de $(N/V)C_{G/V}(F)$ ser subgrupo de C_1/V, podemos usar a hipótese de indução para N/V, portanto

$$[C_1/V : (N/V)C_{G/V}(F)] < \infty. \tag{4.13}$$

Como já dito na observação vii) acima, F age à direita sobre G/V, isso mostra que faz sentido considerar o conjunto $C_{G/V}(F)$.

Seja $\pi : G \twoheadrightarrow G/V$ o epimorfismo de grupos projeção canônica. Veja que $\pi^{-1}(C_1/V) = C_1$ e $\pi^{-1}(N/V) = N$. Como $(N/V)C_{G/V}(F)$ é subgrupo de C_1/V, temos, pelo Teorema 1.4 (p. 4) (Teorema de Correspondência para Grupos), que

$$\pi^{-1}((N/V)C_{G/V}(F)) \leq \pi^{-1}(C_1/V) = C_1.$$

Agora, como $N/V \lhd G/V$ e $C_{G/V}(F)$ é subgrupo de G/V, segue, pelo Lema 1.7 (p. 6), que $\pi^{-1}((N/V)C_{G/V}(F)) = \pi^{-1}(N/V)\pi^{-1}(C_{G/V}(F)) = N\pi^{-1}(C_{G/V}(F))$, isto é,

$$N\pi^{-1}(C_{G/V}(F)) = \pi^{-1}((N/V)C_{G/V}(F)) \leq C_1. \tag{4.14}$$

Temos que $\pi^{-1}(C_{G/V}(F))/V = C_{G/V}(F)$. Como V é grupo minimax, normal em G, F-invariante e abeliano, segue, pelo Lema 4.7 (p. 131), que

$$[\pi^{-1}(C_{G/V}(F)) : VC_G(F)] < \infty.$$

Usando o Lema 1.8 (p. 6), temos que

$$[N\pi^{-1}(C_{G/V}(F)) : NVC_G(F)] < \infty.$$

Como $V \subseteq N$, então $NV = N$. Assim,

$$[N\pi^{-1}(C_{G/V}(F)) : NC_G(F)] < \infty. \tag{4.15}$$

Agora, por (4.14) (p. 134) e pela Proposição 1.4 (p. 8),

$$[C_1 : N\pi^{-1}(C_{G/V}(F))] = [C_1 : \pi^{-1}((N/V)C_{G/V}(F))] =$$

$$= [\pi(C_1) : (N/V)C_{G/V}(F)] = [C_1/V : (N/V)C_{G/V}(F)].$$

Por (4.13) (p. 134), $[C_1/V : (N/V)C_{G/V}(F)] < \infty$, logo

$$[C_1 : N\pi^{-1}(C_{G/V}(F))] < \infty. \tag{4.16}$$

E, por (4.15) (p. 134), por (4.16) (p. 134) e pelo Teorema de Lagrange,

$$[C_1 : NC_G(F)] = \underbrace{[C_1 : N\pi^{-1}(C_{G/V}(F))]}_{<\infty} \cdot \underbrace{[N\pi^{-1}(C_{G/V}(F)) : NC_G(F)]}_{<\infty},$$

isto é, $[C_1 : NC_G(F)] < \infty$. E, como $C_1 = C$ pela observação vii) (p. 151), temos que

$$[C : NC_G(F)] < \infty.$$

□

Recordemos que G é um grupo solúvel de tipo FP_∞, F é um grupo finito agindo à direita sobre G, N é um subgrupo normal em G, nilpotente, F-invariante e G/N é um grupo abeliano-por-finito finitamente gerado.

Proposição 4.5. *[14, Lemma 3.12, p. 145] Seja S um subgrupo de G tal que $G = NS$. Então, S é grupo de tipo FP_∞.*

Demonstração. Usando o Lema 1.22 (p. 16), o fato de que N é grupo nilpotente e o fato de que S é subgrupo de G, segue que

$$N \cap S \text{ é grupo nilpotente.}$$

Pelo Lema 1.3 (p. 4), $N \cap S \lhd S$. Assim, $\dfrac{S}{N \cap S}$ é grupo quociente e, pelo Teorema 1.2 (p. 3) (2º Teorema de Isomorfismo para Grupos),

$$G/N = (NS)/N \cong \frac{S}{N \cap S}.$$

Seja, então,

$$\psi : G/N \to \frac{S}{N \cap S}$$

o isomorfismo de grupos dado pelo Teorema 1.2 (p. 3) (2º Teorema de Isomorfismo para Grupos). Considerando H como sendo o mesmo do Lema 4.6 (p. 125), isto é,

$$H \lhd G, \;\; [G : H] < \infty, \;\; H \text{ é } F\text{-invariante e } H/N \text{ é grupo abeliano livre finitamente gerado,}$$

definamos

$$W := \psi(H/N).$$

Segue que

$$W \text{ é também grupo abeliano livre finitamente gerado}$$

e, pelo Teorema 1.4 (p. 4) (Torema de Correspondência para Grupos), temos que

$$W = \frac{W_0}{N \cap S}, \text{ com } N \cap S \lhd W_0 \text{ e } W_0 \lhd S.$$

Seja $s - 1$ a classe de nilpotência de N, isto é, $\gamma_s(N) = \mathbf{1}$. Temos, então, a seguinte filtração de grupos:

$$N \cap S = \gamma_1(N) \cap S \geq \gamma_2(N) \cap S \geq \cdots \geq \gamma_i(N) \cap S \geq \cdots \geq \gamma_s(N) \cap S = \mathbf{1}.$$

Definamos

$$B := \frac{N \cap S}{(N \cap S)'}$$

Seja

$$\pi : N \cap S \twoheadrightarrow \frac{N \cap S}{(N \cap S)'} \text{ o epimorfismo de grupos projeção canônica.}$$

Para todo $i \in \mathbb{Z}_+$, pela Proposição 1.10 (p. 14), temos que $\gamma_i(N) \lhd N$ e $\gamma_{i+1}(N) \lhd \gamma_i(N)$, portanto $\gamma_{i+1}(N) \cap S \lhd \gamma_i(N) \cap S$ pelo Lema 1.4 (p.4). Pelo Teorema 1.4 (p. 4) (Torema de Correspondência para Grupos), resulta que $\pi(\gamma_{i+1}(N) \cap S) \lhd \pi(\gamma_i(N) \cap S)$, daí que $\dfrac{\pi(\gamma_i(N) \cap S)}{\pi(\gamma_{i+1}(N) \cap S)}$ é grupo quociente. Definamos, então,

$$B_i := \frac{\pi(\gamma_i(N) \cap S)}{\pi(\gamma_{i+1}(N) \cap S)}, \text{ com } 1 \leq i \leq s.$$

Observe que, se $i = s$, então $B_s = \dfrac{\pi(\gamma_s(N) \cap S)}{\pi(\gamma_{s+1}(N) \cap S)} = \mathbf{1}$.

Para $1 \leq i \leq s$, pela Proposição 1.2 b) (p. 6), pela Proposição 1.1 a) (p. 5) e observando que $ker(\pi) = (N \cap S)' = \gamma_2(N \cap S)$, temos que

$$B_i = \frac{\pi(\gamma_i(N) \cap S)}{\pi(\gamma_{i+1}(N) \cap S)} \cong \frac{\pi^{-1}(\pi(\gamma_i(N) \cap S))}{\pi^{-1}(\pi(\gamma_{i+1}(N) \cap S))} = \frac{(\gamma_i(N) \cap S)\gamma_2(N \cap S)}{(\gamma_{i+1}(N) \cap S)\gamma_2(N \cap S)},$$

ou seja,

$$B_i \cong \frac{(\gamma_i(N) \cap S)\gamma_2(N \cap S)}{(\gamma_{i+1}(N) \cap S)\gamma_2(N \cap S)} \text{ (isomorfismo de grupos).} \tag{4.17}$$

Recordemos que $[n_1, \cdots, n_i] := [[n_1, \cdots, n_{i-1}], n_i]$, onde $[n_1, n_2] = n_1^{-1} n_2^{-1} n_1 n_2$ e $[n_1] := n_1$, com $i \in \mathbb{Z}_+$. Pelo Lema 1.23 a) (p. 16), $\dfrac{\gamma_i(N)}{\gamma_{i+1}(N)}$ é grupo abeliano e, pela Proposição 1.39 (p. 61), existe um único epimorfismo de grupos abelianos

$$\hat{\theta} : \otimes^i_{\mathbf{Z}} N/N' \twoheadrightarrow \frac{\gamma_i(N)}{\gamma_{i+1}(N)},$$

dado por

$$\hat{\theta}(n_1 N' \otimes \ldots \otimes n_i N') = [n_1, \ldots, n_i]\gamma_{i+1}(N),$$

para todo $n_1 N' \otimes \ldots \otimes n_i N' \in \otimes^i_{\mathbf{Z}} N/N' = \underbrace{N/N' \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} N/N'}_{i \text{ vezes}}$.

Pelo Lema 1.4 (p. 4), temos que $\gamma_i(N) \cap S \lhd N \cap S, \forall i \in \mathbb{Z}_+$. Fixemos $i \in \{1, \ldots, s\}$. Definindo-se

$$G_1 := \gamma_i(N) \cap S, \quad G_2 := \gamma_{i+1}(N) \cap S \quad \text{e} \quad G_3 := \gamma_2(N \cap S),$$

conforme (4.17) (p. 136), segue que $B_i \cong \dfrac{G_1 G_3}{G_2 G_3}$. Então, pelo Lema 1.10 (p. 10),

$$B_i \cong \frac{G_1}{G_2(G_1 \cap G_3)}.$$

Definamos

$$\alpha : \frac{G_1}{G_2} \to \frac{G_1}{G_2(G_1 \cap G_3)}$$

por

$$\alpha(g_1 G_2) = g_1 G_2 (G_1 \cap G_3),$$

para toda classe lateral $g_1G_2 \in \dfrac{G_1}{G_2}$. Como $G_2 \subseteq G_2(G_1 \cap G_3)$, pela Proposição 1.7 (p. 9), segue que α é epimorfismo de grupos. Definamos também o homomorfismo de grupos

$$\varphi : G_1 \to \frac{\gamma_i(N)}{\gamma_{i+1}(N)},$$

dado por $\varphi(x) = x\gamma_{i+1}(N), \forall x \in G_1$, que não é sobrejetivo necessariamente. Observemos que

$$x \in ker(\varphi) \Leftrightarrow x \in G_1 \text{ e } x\gamma_{i+1}(N) = \gamma_{i+1}(N) \Leftrightarrow x \in G_2.$$

Logo $ker(\varphi) = G_2$. Assim, pelo Teorema 1.1 (p. 3) (1º Teorema de Isomorfismo para Grupos),

$$\frac{G_1}{G_2} \cong Im(\varphi) \leq \frac{\gamma_i(N)}{\gamma_{i+1}(N)}.$$

Sejam, então,

$$\varphi_1 : \frac{G_1}{G_2} \to Im(\varphi) \quad \text{o isomorfismo de grupos}$$

dado por tal Teorema e

$$\varphi_2 : Im(\varphi) \hookrightarrow \frac{\gamma_i(N)}{\gamma_{i+1}(N)} \quad \text{o homomorfismo de grupos inclusão canônica.}$$

Por fim, definamos ainda a composição

$$\varphi_3 := \varphi_2\varphi_1,$$

que é monomorfismo de grupos. Temos, então, o seguinte diagrama

$$\otimes^i_{\mathbf{Z}} N/N' \overset{\hat{\theta}}{\twoheadrightarrow} \frac{\gamma_i(N)}{\gamma_{i+1}(N)} \overset{\varphi_3}{\hookleftarrow} \frac{G_1}{G_2} \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} \frac{G_1}{G_2(G_1 \cap G_3)} \overset{\eta}{\to} B_i, \tag{4.18}$$

onde η é isomorfismo de grupos entre $\dfrac{G_1}{G_2(G_1 \cap G_3)}$ e B_i.

Mantenhamos ainda fixo $i \in \{1, \ldots, s\}$. Usando a Proposição 1.6 (p. 9), o Lema 1.23 b) (p. 16) e o fato de $\eta\alpha$ ser epimorfismo de grupos, temos que B_i é grupo abeliano. Recordemos que $\dfrac{\gamma_i(N)}{\gamma_{i+1}(N)}$ também é grupo abeliano. Além disso, também o é $\bigotimes^i_{\mathbf{Z}} N/N'$. Observemos também que $\bigotimes^i_{\mathbf{Z}} N/N', \dfrac{\gamma_i(N)}{\gamma_{i+1}(N)}, \dfrac{\gamma_i(N) \cap S}{\gamma_{i+1}(N) \cap S}$ e B_i são $\mathbf{Z}(G/N)$-módulos à direita e $\hat{\theta}, \varphi_3, \alpha$ e η são $\mathbf{Z}(G/N)$-homomorfismos de $\mathbf{Z}(G/N)$-módulos à direita com G/N agindo diagonalmente à direita sobre $\bigotimes^i_{\mathbf{Z}} N/N'$ conforme Observação 1.14 (p. 68). Como $G/N \cong S/(N \cap S)$ e W é subgrupo de $S/(N \cap S)$, podemos considerar $\bigotimes^i_{\mathbf{Z}} N/N', \dfrac{\gamma_i(N)}{\gamma_{i+1}(N)}, \dfrac{\gamma_i(N) \cap S}{\gamma_{i+1}(N) \cap S}$ e B_i como $\mathbf{Z}W$-módulos e $\hat{\theta}, \varphi_3, \alpha$ e η como $\mathbf{Z}W$-homomorfismos de $\mathbf{Z}W$-módulos pela Proposição 1.34 a) e b) (p. 48) respectivamente.

Vamos mostrar que B_i é seção do $\mathbf{Z}W$-módulo $\bigotimes^i_{\mathbf{Z}} N/N'$. Usando (4.18) (p. 137), pelo Teorema 1.12 (p. 44) (1º Teorema de Isomorfismo para Módulos), $\varphi_3(G_1/G_2) \cong X_i/ker(\hat{\theta})$,

onde X_i é $\mathbf{Z}W$-submódulo de $\bigotimes_{\mathbf{Z}}^{i} N/N'$ tal que $ker(\hat{\theta}) \subseteq X_i$ e $\varphi_3(ker(\alpha)) \cong Y_i/ker(\hat{\theta})$, onde Y_i é $\mathbf{Z}W$-submódulo de $\bigotimes_{\mathbf{Z}}^{i} N/N'$ tal que $ker(\hat{\theta}) \subseteq Y_i$. Como $\varphi_3(ker(\alpha)) \subseteq \varphi_3(G_1/G_2)$, segue, utilizando o isomorfismo do Teorema 1.12 (p. 44) (1º Teorema de Isomorfismo para Módulos), que $Y_i/ker(\hat{\theta}) \subseteq X_i/ker(\hat{\theta})$ e do Teorema 1.15 (p. 45) (Teorema de Correspondência para Módulos) que $Y_i \subseteq X_i$. Agora, como η é isomorfismo de $\mathbf{Z}W$-módulos, pelo Lema 1.16 (p. 12), temos que $ker(\eta\alpha) = ker(\alpha)$, logo, pelo Teorema 1.12 (p. 44) (1º Teorema de Isomorfismo para Módulos), $B_i \cong (G_1/G_2)/ker(\alpha)$. Além disso, como φ_3 é monomorfismo de $\mathbf{Z}W$-módulos, segue que $G_1/G_2 \cong \varphi_3(G_1/G_2)$ e $ker(\alpha) \cong \varphi_3(ker(\alpha))$. Assim, usando o Teorema 1.14 (p. 45) (3º Teorema de Isomorfismo para Módulos) e o Lema 1.36 (p. 45),

$$B_i \cong (G_1/G_2)/ker(\alpha) \cong \varphi_3(G_1/G_2)/\varphi_3(ker(\alpha)) \cong (X_i/ker(\hat{\theta}))/(Y_i/ker(\hat{\theta})) \cong X_i/Y_i.$$

Logo,

$$B_i \cong X_i/Y_i, \text{ com } Y_i, X_i \ \mathbf{Z}W\text{-submódulos de } \otimes_{\mathbf{Z}}^{i} N/N' \text{ e } Y_i \subseteq X_i,$$
$$\text{isto é, } B_i \text{ é seção de } \otimes_{\mathbf{Z}}^{i} N/N'. \tag{4.19}$$

Por outro lado, considerando a sequência exata curta de grupos

$$N/N' \overset{\iota}{\hookrightarrow} H/N' \overset{\rho}{\twoheadrightarrow} H/N,$$

onde ι é o monomorfismo de grupos inclusão canônica, ρ é o epimorfismo de grupos dado por $\rho(hN') = hN$, para toda classe lateral $hN' \in H/N'$ e $ker(\rho) = N/N' = Im(\iota)$, e como N/N' é grupo abeliano, temos que N/N' é $\mathbf{Z}(H/N)$-módulo via conjugação por elementos de H/N' pela Proposição 1.38 (p. 54). Podemos, então, considerar o complementar do invariante geométrico Σ de Bieri-Strebel $\Sigma^c_{N/N'}(H/N)$. Além disso, pela Proposição 1.41 (p. 65), observando que H é grupo de tipo FP_∞, segue que

$$N/N' \text{ é finitamente gerado como } \mathbf{Z}(H/N)\text{-módulo}$$
$$\text{via conjugação por elementos de } H/N'. \tag{4.20}$$

Como $\psi : H/N \to W$ é isomorfismo de grupos, temos que W age à direita sobre N/N' via isomorfismo de grupos ψ, daí que podemos considerar o complementar do invariante Σ de Bieri-Strebel $\Sigma^c_{N/N'}(W)$.

Considerando, então, a sequência exata curta de grupos com homomorfismos de grupos óbvios

$$N \hookrightarrow H \twoheadrightarrow H/N,$$

onde N é subgrupo nilpotente, H é grupo de tipo FP_∞ (logo finitamente gerado pela Proposição 3.9 (p. 108)) e H/N é grupo abeliano, pelo Teorema 3.3 (p. 116),

$$\Sigma^c_{N/N'}(H/N) = dis\Sigma^c_{N/N'}(H/N) \text{ está contido}$$
$$\text{em alguma semiesfera aberta de caracteres de } S(H/N), \tag{4.21}$$

portanto

$$\underbrace{\Sigma^c_{N/N'}(H/N) + \ldots + \Sigma^c_{N/N'}(H/N)}_{i \text{ vezes}} = \underbrace{dis\Sigma^c_{N/N'}(H/N) + \ldots + dis\Sigma^c_{N/N'}(H/N)}_{i \text{ vezes}}$$

com $1 \leq i \leq s$, estão contidos nessa mesma semiesfera aberta de caracteres de $S(H/N)$, uma vez que a soma considerada é a soma convexa. Como H/N e W são grupos abelianos livres finitamente gerados e $H/N \cong W$, por (4.21) (p. 138), pelo Lema 2.4 (p. 87) e pelo Lema 2.5 (p. 87), segue que

$$\Sigma^c_{N/N'}(W) = dis\Sigma^c_{N/N'}(W) \text{ está contido em alguma semiesfera de caracteres de } S(W). \tag{4.22}$$

Temos também que

$$\underbrace{\Sigma^c_{N/N'}(W) + \ldots + \Sigma^c_{N/N'}(W)}_{i \text{ vezes}} = \underbrace{dis\Sigma^c_{N/N'}(W) + \ldots + dis\Sigma^c_{N/N'}(W)}_{i \text{ vezes}},$$

com $1 \leq i \leq s$, estão contidos nessa mesma semiesfera aberta de caracteres de $S(W)$, uma vez que a soma considerada é a soma convexa.

Vamos mostrar agora que B é $\mathbf{Z}W$-módulo finitamente gerado. Por (4.20) (p. 138) e pelo fato de que $H/N \cong W$ como grupos abelianos livres finitamente gerados, temos que N/N' é finitamente gerado como $\mathbf{Z}W$-módulo. Observe que (4.22) (p. 139) implica que, $\forall i \in \{1, \ldots, s\}$, para quaisquer $[v_1], \ldots, [v_i] \in \Sigma^c_{N/N'}(W)$, temos que $\sum_{j=1}^{i} v_j \neq 0$ e, portanto, $\bigotimes^i_{\mathbf{Z}} N/N'$ é finitamente gerado como $\mathbf{Z}W$-módulo via ação diagonal de W pelo Teorema 2.2 (p. 92), $\forall i \in \{1, \ldots, s\}$. Agora, como W é grupo abeliano livre finitamente gerado, pela Proposição 1.51 (p. 77) e pela Proposição 1.50 (p. 77), segue que $\mathbf{Z}W$ é anel noetheriano. Assim, pela Proposição 1.46 (p. 72), $\bigotimes^i_{\mathbf{Z}} N/N'$ é $\mathbf{Z}W$-módulo noetheriano, $\forall i \in \{1, \ldots, s\}$. Por (4.19) (p. 138), temos que $B_i \cong X_i/Y_i$, onde Y_i, X_i são $\mathbf{Z}W$-submódulos de $\bigotimes^i_{\mathbf{Z}} N/N'$ e $1 \leq i \leq s$. Segue da Proposição 1.45 (p. 71) que X_i é $\mathbf{Z}W$-módulo finitamente gerado, e como $Y_i \subseteq X_i$, isto é, Y_i é $\mathbf{Z}W$-submódulo de X_i, da Proposição 1.47 (p. 72), temos que X_i/Y_i é $\mathbf{Z}W$-módulo finitamente gerado e, portanto, B_i é finitamente gerado como $\mathbf{Z}W$-módulo via conjugação por elementos de $W_0/(N \cap S)'$ para $1 \leq i \leq s$. Observe que $B_{s-1} = \dfrac{\pi(\gamma_{s-1}(N) \cap S)}{\pi(\gamma_s(N) \cap S)}$ é finitamente gerado como $\mathbf{Z}W$-módulo, onde $\pi(\gamma_s(N) \cap S)$ é grupo trivial e, portanto, obviamente finitamente gerado como $\mathbf{Z}W$-módulo, logo $\pi(\gamma_{s-1}(N) \cap S)$ é finitamente gerado como $\mathbf{Z}W$-módulo pela Proposição 1.47 (p. 72). Agora, $B_{s-2} = \dfrac{\pi(\gamma_{s-2}(N) \cap S)}{\pi(\gamma_{s-1}(N) \cap S)}$ é finitamente gerado como $\mathbf{Z}W$-módulo, onde $\pi(\gamma_{s-1}(N) \cap S)$ é finitamente gerado como $\mathbf{Z}W$-módulo, logo $\pi(\gamma_{s-2}(N) \cap S)$ é finitamente gerado como $\mathbf{Z}W$-módulo novamente pela Proposição 1.47 (p. 72). Procedendo desta forma temos que $\pi(\gamma_2(N) \cap S)$ é finitamente gerado como $\mathbf{Z}W$-módulo, e como $B_1 = \dfrac{\pi(\gamma_1(N) \cap S)}{\pi(\gamma_2(N) \cap S)} = \dfrac{B}{\pi(\gamma_2(N) \cap S)}$ é finitamente gerado como $\mathbf{Z}W$-módulo, usando mais uma vez a Proposição 1.47 (p. 72), concluímos que B é finitamente gerado como $\mathbf{Z}W$-módulo via conjugação por elementos de $W_0/(N \cap S)'$.

Desta forma, como $N \cap S \lhd W_0, N \cap S$ é grupo nilpotente, $W = \dfrac{W_0}{N \cap S}$ é grupo abeliano finitamente gerado e $B = \dfrac{N \cap S}{(N \cap S)'}$ é finitamente gerado como $\mathbf{Z}W$-módulo, segue da Proposição 1.41 (p. 65) que W_0 é grupo finitamente gerado.

Como W é grupo abeliano finitamente gerado e B é $\mathbf{Z}W$-módulo à direita, podemos considerar o complementar do invariante Σ de Bieri-Strebel $\Sigma^c_B(W)$. Aplicando o Corolário 2.1 (p. 91) para B, segue que

$$\Sigma^c_B(W) = \bigcup_{i=1}^{s} \Sigma^c_{B_i}(W).$$

E, portanto,

$$dis\Sigma^c_B(W) = \bigcup_{i=1}^{s} dis\Sigma^c_{B_i}(W).$$

Agora, $B_i \cong X_i/Y_i$, onde Y_i, X_i são $\mathbf{Z}W$-submódulos de $\bigotimes^i_{\mathbf{Z}} N/N'$, isto é, B_i é seção de $\bigotimes^i_{\mathbf{Z}} N/N'$. Pela Proposição 2.9 (p. 91), $\Sigma^c_{X_i}(W) = \Sigma^c_{Y_i}(W) \cup \Sigma^c_{B_i}(W)$, o que implica que

$$\Sigma^c_{B_i}(W) \subseteq \Sigma^c_{X_i}(W) \subseteq \Sigma^c_{\bigotimes^i_{\mathbf{Z}} N/N'}(W), \text{ com } 1 \leq i \leq s.$$

A Proposição 2.10 (p. 91), por sua vez, para $1 \leq i \leq s$, acarreta que

$$dis\Sigma^c_{B_i}(W) \subseteq dis\Sigma^c_{\bigotimes^i_{\mathbf{Z}} N/N'}(W) \subseteq \underbrace{dis\Sigma^c_{N/N'}(W) + \ldots + dis\Sigma^c_{N/N'}(W)}_{i \text{ vezes}}.$$

Portanto, $dis\Sigma^c_B(W) \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} \underbrace{dis\Sigma^c_{N/N'}(W) + \ldots + dis\Sigma^c_{N/N'}(W)}_{i \text{ vezes}}$, e como

$$dis\Sigma^c_{N/N'}(W) \subseteq dis\Sigma^c_{N/N'}(W) + dis\Sigma^c_{N/N'}(W) \subseteq \ldots \subseteq \underbrace{dis\Sigma^c_{N/N'}(W) + \ldots + dis\Sigma^c_{N/N'}(W)}_{s \text{ vezes}},$$

concluímos que

$$dis\Sigma^c_B(W) \subseteq \underbrace{dis\Sigma^c_{N/N'}(W) + \ldots + dis\Sigma^c_{N/N'}(W)}_{s \text{ vezes}}.$$

Segue assim que

$$dis\Sigma^c_B(W) \text{ está contido em}$$
$$\text{alguma semiesfera aberta de caracteres de } S(W). \tag{4.23}$$

Seja $\pi_0 : S \twoheadrightarrow S/(N \cap S)$ o epimorfismo de grupos projeção canônica. Recordemos que $W = \dfrac{W_0}{N \cap S}$ é grupo abeliano, onde $N \cap S$ é subgrupo de W_0 e $W_0 \lhd S$. Consideremos, então, a sequência de grupos

$$N \cap S \overset{\iota_0}{\hookrightarrow} W_0 \overset{\pi_0}{\twoheadrightarrow} \frac{W_0}{N \cap S} = W,$$

onde ι_0 é o monomorfismo de grupos inclusão canônica. Como $ker(\pi_0) = N \cap S = Im(\iota_0)$ e π_0 é sobrejetivo, segue que tal sequência de grupos é exata curta. Agora, $N \cap S$ é grupo nilpotente, W_0 é grupo finitamente gerado e W é grupo abeliano. Daí que pelo Teorema 3.3 (p. 116) concluímos que W_0 é grupo de tipo FP_∞ se, e somente se, $dis\Sigma^c_B(W)$ estiver contida em uma semiesfera aberta de caracteres de $S(W)$, o que de fato acontece como concluído em (4.23) (p. 140). Assim,

$$W_0 \text{ é grupo de tipo } \mathrm{FP}_\infty.$$

Pelo 3º Teorema de Isomorfismo para Grupos e pela Proposição 1.2 a) (p. 6),

$$[S : W_0] = [\frac{S}{N \cap S} : \frac{W_0}{N \cap S}] = [\psi^{-1}(\frac{S}{N \cap S}) : \psi^{-1}(\frac{W_0}{N \cap S})] =$$

$$= [G/N : H/N] = [G : H] < \infty,$$

e como W_0 é grupo de tipo FP_∞, pela Proposição 3.12 (p. 113), segue que S é grupo de tipo FP_∞. □

Teorema 4.2. *Sejam G um grupo solúvel de tipo FP_∞ e F um grupo finito agindo à direita sobre G. Então, o subgrupo $C_G(F)$ é de tipo FP_∞.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.1 (p. 124), existe um subgrupo N normal em G, nilpotente, F-invariante tal que G/N é um grupo abeliano-por-finito finitamente gerado. Como $NC_G(F)$ é subgrupo de G, segue que $NC_G(F)$ é também grupo solúvel. Além disso, $(NC_G(F))/N$ é subgrupo de G/N, portanto $(NC_G(F))/N$ é grupo abeliano-por-finito finitamente gerado pela Proposição 1.28 (p. 37). Agora, pela Proposição 4.4 (p. 131), $NC_G(F)$ é grupo de tipo FP_∞. Assim, estamos nas hipóteses da Proposição 4.5 (p. 135), onde estamos tomando G desta Proposição como sendo $NC_G(F)$. Segue que $C_G(F)$ é grupo de tipo FP_∞. □

Definição 4.6. *Seja $\mathcal{G}$ um grupo e P uma propriedade qualquer. Dizemos que $\mathcal{G}$ é **virtualmente** P se existe um subgrupo $\mathcal{G}_1$ de $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{G}_1$ possui a propriedade P e $[\mathcal{G} : \mathcal{G}_1] < \infty$.*

Corolário 4.1. *Sejam $\mathcal{G}$ um grupo virtualmente solúvel de tipo FP_∞ e F um grupo finito agindo sobre $\mathcal{G}$. Então, $C_{\mathcal{G}}(F)$ é grupo de tipo FP_∞.*

Demonstração. Como $\mathcal{G}$ é um grupo virtualmente solúvel de tipo FP_∞, existe um subgrupo G de $\mathcal{G}$ tal que G é grupo solúvel de tipo FP_∞ e $[\mathcal{G} : G] < \infty$. Agora, $C_G(F) = C_{\mathcal{G}}(F) \cap G$, daí que, pela Proposição 1.3 (p. 7), $[C_{\mathcal{G}}(F) : C_G(F)] = [C_{\mathcal{G}}(F) : C_{\mathcal{G}}(F) \cap G] < \infty$. Agora $C_G(F)$ é subgrupo de $C_{\mathcal{G}}(F)$, pois $C_G(F) = C_{\mathcal{G}}(F) \cap G$. Usando o Teorema 4.2 (p. 141), temos que $C_G(F)$ é grupo de tipo FP_∞, logo, pela Proposição 3.12 (p. 113), concluímos que $C_{\mathcal{G}}(F)$ é grupo de tipo FP_∞. □

Referências Bibliográficas

[1] M. F. Atiyah, I.G. Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra.* Great Britain: Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[2] G. Baumslag, R. Bieri. *Constructable Solvable Groups.* Mathematische Zeitschirift, 1976. v. 151. p. 249-257.

[3] R. Bieri. *Homological Dimension of Discrete Groups.* 2ª ed.. London: Queen Mary College Mathematics Notes (Queen Mary College), 1981.

[4] R. Bieri, J. R. J. Groves. *Tensor Powers of Modules over Finitely Generated Abelian Groups.* Journal of Algebra, 1985. v. 97. p. 68-78.

[5] R. Bieri, J. R. J. Groves. *The geometry of the set of characters induced by valuations.* Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. [Crelle's Journal], 1984. v. 347. p. 168-195.

[6] R. Bieri, B. Renz. *Valuations on free resolutions and higher geometric invariants of groups.* Commentarii Mathematici Helvetici, 1988. nº 3 v. 63. p. 464-497.

[7] R. Bieri, R. Strebel. *A geometric invariant for nilpotent-by-abelian-by-finite groups.* Journal of Pure Applied Algebra, 1982. v. 25. p. 1-20.

[8] R. Bieri, R. Strebel. *Valuations and Finitely Presented Metabelian Groups.* Proceedings of the London Mathematical Society. Third Series, 1980. nº 3 v. 41. p. 439-464.

[9] K. S. Brown. *Cohomology of Groups.* Ann Arbor, Michigan: Springer, 1982.

[10] D. E. Cohen. *Combinatorial Group Theory: a topological approach.* Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

[11] F. J. Grunewald *et al.* Edited by K. W. Gruenberg and J. E. Roseblade. *Group Theory: Essays for Philip Hall.* East Kilbridge: London Academic Press, 1984.

[12] P. H. Kropholler. *On groups of type FP_∞.* Journal of Pure Applied Algebra, 1993. v. 90. p. 55-67.

[13] J. Lambek. *Lectures on Rings and Modules.* 3ª ed.. United States of America: AMS Chelsea Publishing, 1986.

[14] C. Martinez-Perez, B. E. A. Nucinkis. *Virtually soluble groups of type FP_∞.* Commentarii Mathematici Helvetici. A Journal of the Swiss Mathematical Society, 2010. nº 1 v. 85. p. 135-150.

[15] S. Mckay. *Finite p-groups.* Queen Mary Maths Notes, 2000.

[16] J. J. Rotman. *Advanced Modern Algebra.* 2ª ed.. United States of America: American Mathematical Society, 2010.

[17] J. J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra.* United States of America: Academic Press, 1979.

[18] J. J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra.* 2ª ed.. United States of America: Springer, 2000.

[19] J. J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups.* 4ª ed.. Ann Arbor, Michigan: Springer, 1995.