RAFAEL DOS REIS ABREU

SOLUÇÕES GROUND STATE PARA ALGUMAS CLASSES DE PROBLEMAS ELÍPTICOS

CAMPINAS
2013

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

RAFAEL DOS REIS ABREU

SOLUÇÕES GROUND STATE PARA ALGUMAS CLASSES DE PROBLEMAS ELÍPTICOS

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Marcelo da Silva Montenegro

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO RAFAEL DOS REIS ABREU, E ORIENTADA PELO PROF. DR. MARCELO DA SILVA MONTENEGRO.

Assinatura do Orientador

Marcelo da Silva Montenegro

CAMPINAS
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

Ab86s

Abreu, Rafael dos Reis, 1983-
Soluções ground state para algumas classes de problemas elípticos / Rafael dos Reis Abreu. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Marcelo da Silva Montenegro.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais elípticas. 2. Princípios variacionais. 3. Sobolev, Expoente crítico de. I. Montenegro, Marcelo da Silva,1967-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Ground state solutions for some classes of elliptic problems
Palavras-chave em inglês:
Elliptic differential equations
Variational principles
Critical Sobolev exponent
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Marcelo da Silva Montenegro [Orientador]
Ademir Pastor Ferreira
Adilson Eduardo Presoto
Marcelo Martins dos Santos
Olimpio Hiroshi Miyagaki
Data de defesa: 18-09-2013
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 18 de setembro de 2013 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). MARCELO DA SILVA MONTENEGRO

Prof(a). Dr(a). ADEMIR PASTOR FERREIRA

Prof(a). Dr(a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS

Prof(a). Dr(a). ADILSON EDUARDO PRESOTO

Prof(a). Dr(a). OLIMPIO HIROSHI MIYAGAKI

Abstract

In this work, we deal with existence of ground state solutions for some classes of elliptic problems on Euclidean spaces or on exterior domains. In cases where we consider an exterior domain, we consider the Dirichlet boundary condition or the Neumann boundary condition.

Elliptic problems involving unbounded domains naturally have some difficulties, por example, the lack of compactness. When it occurs, in general, the Palais-Smale condition is not valid. To overcome this difficulty and others, we use the Mountain Pass Theorem without Palais-Smale condition, results due to Lions and the Vitali's Theorem.

In our study, we use variational methods exploring techniques to obtain critical points of functionals related to each problem. Nonzero critical points of each functional are solutions of its respective problem.

Keywords: elliptic differential equations, variational principles, critical Sobolev exponent.

Resumo

Neste trabalho, tratamos de resultados de existência de soluções ground state para algumas classes de problemas elípticos sobre espaços euclidianos ou sobre domínios exteriores. Nos casos em que consideramos um domínio exterior, consideramos a condição de fronteira de Dirichlet ou de Neumann.

O fato de se considerar domínios não limitados naturalmente implica em algumas dificuldades como, por exemplo, a falta de compacidade. Quando isso ocorre, em geral, a condição Palais-Smale não é válida. Para contornar esta e outras dificuldades, usamos o Teorema do Passo da Montanha sem condição Palais-Smale, Lema de Lions e Teorema de Vitali.

Em nosso estudo, utilizamos métodos variacionais explorando diversas técnicas para a obtenção de pontos críticos de funcionais associados a cada problema. Pontos críticos não nulos de cada funcional são soluções de seu respectivo problema.

Palavras-chave: equações diferenciais elípticas, princípios variacionais, expoente crítico de Sobolev.

Sumário

Agradecimentos

A Deus, por tudo que me proporcionou para que eu viesse a concluir este trabalho.

Ao meu orientador, o Prof. Marcelo da Silva Montenegro, com quem foi uma imensa honra trabalhar, por ter sido um exemplo de profissional sério e competente, sempre muito prestativo e atencioso, por ter me dado a oportunidade de estudar no exterior e por ter me introduzido ao mundo da pesquisa.

Aos meus pais, Renato da Silva Abreu e Maria Pereira dos Reis Abreu, e ao meu irmão, Daniel dos Reis Abreu, pelo incentivo, pelo afeto, pela torcida e principalmente pelo apoio, em suas diversas formas, sem a qual eu não teria conseguido dar prosseguimento aos estudos.

Ao Prof. Ademir Pastor Ferreira, por ter aceitado participar da comissão julgadora, pelas sugestões apresentadas e por ter fornecido um artigo de Martial Agueh, que ajudou na conclusão do primeiro resultado deste trabalho.

Aos professores Adilson Eduardo Presoto, Marcelo Martins dos Santos e Olimpio Hiroshi Miyagaki, por terem aceitado participar da comissão julgadora e pelas valiosas sugestões apresentadas.

À Cláudia Aline Azevedo dos Santos Mesquita e ao Maicon José Benvenutti, com muita emoção, pelas duas mais intensas amizades que tive durante o curso. Foram muitos os debates, as ajudas, os apoios, os conselhos e os incentivos.

Ao Prof. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo, meu orientador de mestrado e agora amigo, com quem muitas vezes tive a oportunidade de conversar durante esses quatro anos de curso. Sou realmente muito grato por todos os valiosos conselhos que me deu.

Aos funcionários da secretaria do IMECC, Ednaldo, Lívia e Tânia, pelo exemplo de eficiência e competência e por todo o auxílio de quando estive como representante discente.

Aos professores e amigos Antonio Suárez Fernández, Cristian Morales Rodrigo, João Rodrigues dos Santos Júnior e Pedro Marín Rubio, pela ótima recepção do período de quando estive a estudo no exterior.

À Lidiane dos Santos Monteiro Lima, pela grande amizade e por ter assumido, em sua totalidade, os compromissos da representação discente no período de minha qualificação.

Ao Abel Alvarez Bustos e ao Júnior César Alves Soares, dentre outras coisas, por terem ajudado com a formatação deste trabalho.

Aos amigos e colegas Adriana Araujo Cintra, Ailton Ribeiro de Oliveira, Alysson Tobias Ribeiro da Cunha, Amanda Suellen Sena Correa, Ana Paula Cruz de Freitas, Anderson Luis Albuquerque de Araújo, Carlos Frank Lima dos Santos, Débora Aparecida Francisco Albanez, Ígor dos Santos Lima, Leandro Cruvinel Lemes, Leandro da Silva Tavares, Lino Anderson da Silva Grama, Marcelo Silva da Rocha, Matheus Correia dos Santos, Otávio Rafael Mesquita, Paulo Henrique Pereira da Costa, Sérgio Leandro Nascimento Neves, Shyrleny Suely Abreu Cota, Thiago Pinguello de Andrade, Wender José de Souza e demais que esqueci de mencionar, pelo incentivo, pelo apoio e pelos debates que surgiram ao longo do curso.

Aos professores do IMECC-UNICAMP, pela excelência no ensino.

A todos que de alguma forma ajudaram na produção deste trabalho.

À Capes e ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

Notações

Neste texto usamos as seguintes notações:

$\mathbb{R}^N$: Espaço Euclidiano N-dimensional munido da norma $|x|= \left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $x \in \mathbb{R}^N$.
Z: Conjunto dos números inteiros.
$\partial D, \overline{D}$: Fronteira e fecho do conjunto D, respectivamente.
$|D|$: Medida de Lebesgue do conjunto D.
$B_R(x)$: Bola aberta de centro em x e raio R.
$f|_\Omega$: Restrição da função f ao conjunto Ω.
∇u: Gradiente da função u, isto é, $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$.
supp$u$: Suporte da função u.
q.t.p.: Quase todo ponto, isto é, a menos de um conjunto de medida nula.
$\int_\Omega f$: Integral de Lebesgue da função f, isto é, $\int_\Omega f dx$.
$C(\Omega)$: Espaço das funções contínuas definidas em Ω.
$C^k(\Omega)$: Espaço das funções definidas em Ω que possuem todas as derivadas de ordem menor ou igual a k contínuas.
$C_0^\infty(\Omega)$: Conjunto de todas as funções $u \in C^\infty(\Omega)$ tais que supp$u$ está contido compactamente em Ω.
$C([0,1], X)$: Espaço das curvas no espaço de Banach X, ou seja, espaço das funções contínuas $\gamma : [0,1] \to X$.
$L^p(\Omega)$: Espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $\int_\Omega |u|^p < +\infty$, $1 \leq p < +\infty$.
$L^p_{loc}(\Omega)$: Espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $\int_K |u|^p < +\infty$, para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$, $1 \leq p < +\infty$.
$L^\infty(\Omega)$: Espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que existe $C > 0$ satisfazendo $|u(x)| \leq C$ q.t.p. em Ω.
$W^{k,p}(\Omega)$: Espaço de Sobolev das funções em $L^p(\Omega)$ que possuem derivadas fracas de ordem menor ou igual a k pertencentes a $L^p(\Omega)$.
$W_0^{k,p}(\Omega)$: Fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$.
$H^1(\Omega)$: Espaço de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$.
$H^1_{rad}(\Omega)$: Espaço das funções radiais de $H^1(\Omega)$.
$H_0^1(\Omega)$: Fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$.
$D^{1,2}(\Omega)$: Espaço de Sobolev das funções em $L^{2^*}(\Omega)$ que possuem derivadas fracas de primeira ordem pertencentes a $L^2(\Omega)$.
$D^{1,2}_{loc}(\Omega)$: Espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $u|_K \in D^{1,2}(K)$, para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$.

$|u|_p$: Norma em L^p dada por $(\int_\Omega |u|^p)^{\frac{1}{p}}$.
$|u|_\infty$: Norma em $L^\infty(\Omega)$, ou seja, $|u|_\infty = \inf\{C \ : \ |u(x)| \leq C$ q.t.p. em $\Omega\}$.
$||.||$: Norma no espaço $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ ou $D^{1,2}(\Omega)$, dependendo de em qual espaço procuramos solução.
$X \hookrightarrow Y$: Imersão contínua de X em Y, isto é, $X \subset Y$ e a inclusão $i : X \to Y$ é um operador contínuo.
$X \subset\subset Y$: Imersão compacta de X em Y, isto é, $X \subset Y$ e a inclusão $i : X \to Y$ é um operador compacto.
$\to, \rightharpoonup$: Convergência forte e convergência fraca, respectivamente.
$o_n(1)$: Sequência de números reais convergindo para 0 quando $n \to \infty$.
f^+: Parte positiva da função f, isto é, $f^+ = \max\{f, 0\}$.
f^-: Parte negativa da função f, isto é, $f^- = \max\{-f, 0\}$.
C_1, C_2, C_3: Constantes reais positivas possivelmente diferentes.

Introdução

Neste trabalho, tratamos de resultados de existência de soluções ground state para algumas equações elípticas da forma

$$(\mathbf{P}) \qquad \left\{ -\Delta u = h(x,u) \ \text{ em } \ U, \right.$$

com $U \subseteq \mathbb{R}^N$ denotando um espaço euclidiano ou um domínio exterior, $N \geq 2$ e Δ denotando o operador Laplaciano, ou seja,

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Em cada capítulo deste trabalho estudamos algumas variantes do problema (P), onde é assumido um conjunto específico de hipóteses sobre h e U. Nos casos em que U é um domínio exterior, consideramos a condição de fronteira de Dirichlet ou de Neumann.

O problema (P) naturalmente apresenta algumas dificuldades como, por exemplo, a falta de compacidade devido o fato de estarmos considerando um domínio U não limitado. Quando isso ocorre, em geral, a condição Palais-Smale não é válida. Para contornar esta e outras dificuldades, usamos o Teorema do Passo da Montanha sem condição Palais-Smale, Lema de Lions e Teorema de Vitali.

Uma solução do problema (P) com condição de fronteira de Dirichlet é, por definição, uma função $u \in H_0^1(U)\backslash\{0\}$ que satisfaz

$$\int_U \nabla u \nabla v = \int_U h(x,u)v \quad , \quad \forall v \in H_0^1(U). \tag{0.0.1}$$

Se consideramos (P) com condição de fronteira de Neumann ou se $U = \mathbb{R}^N$, soluções de (P) são funções $u \in H^1(U)\backslash\{0\}$ que verificam (0.0.1) no referido espaço.

Em nosso estudo, utilizamos métodos variacionais explorando diversas técnicas para a obtenção de pontos críticos do funcional energia I associado a (P) e definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_U |\nabla u|^2 - \int_U H(x,u),$$

com $H(x,s) = \int_0^s h(x,\tau)d\tau$. Pontos críticos não nulos do funcional I são soluções do problema (P).

Uma solução u de (P) é dita ground state, ou de menor energia, se

$$I(u) = \inf\{I(\omega) \ : \ \omega \text{ é solução de } (P)\}.$$

Uma condição necessária para u ser ponto crítico de I é que $I'(u)u = 0$. Esta condição define a variedade de Nehari

$$N := \{\omega \ : \ I'(\omega)\omega = 0 \ , \ \omega \neq 0\}.$$

É claro que se u é solução de (P) e

$$I(u) = \inf_{\omega \in N} I(\omega),$$

então u é ground state. Se o funcional I satisfaz a geometria do Passo da Montanha e se

$$s \mapsto \frac{h(x,s)}{s}$$

é uma função crescente em $|s|$ para todo $x \in U$, temos que

$$\inf_{\omega \in N} I(\omega) = \inf_{\omega \neq 0} \max_{t \geq 0} I(t\omega) = c,$$

com c denotando o nível minimax do Passo da Montanha do funcional I. Portanto, neste caso, se u é solução de (P) satisfazendo

$$I(u) = c,$$

então u é ground state.

Nos dois primeiros capítulos, estudamos problemas autônomos onde os seus respectivos termos não lineares possuem crescimento crítico.

No Capítulo 1, estudamos (P) com $N \geq 3$ e U sendo o exterior de uma bola de centro em 0 e raio R. Além disso, consideramos

$$h(x,u) := |u|^{q-2}u + |u|^{2^*-2}u - u,$$

com

$$2^* = \frac{2N}{N-2}$$

e $2 < q < 2^*$. Nosso objetivo é provar existência de solução ground state radialmente simétrica para o problema

$$(P_1) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = |u|^{q-2}u + |u|^{2^*-2}u \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \ \text{ sobre } \ \partial B_R(0). \end{cases}$$

Em [10], Benci e Cerami estudaram o problema (P) considerando $N \geq 3$, $h(x,u) = |u|^{\eta-1}u - u$, $1 < \eta < \frac{N+2}{N-2}$ e $U = \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$, com Ω não vazio e limitado. Eles mostraram que (P), com condição de fronteira de Dirichlet, não tem solução ground state. Contudo, Esteban em [17] provou que o mesmo problema, com condição de fronteira de Neumann, tem solução ground state.

Em [4], Alves, Carrião e Medeiros provaram que o resultado obtido em [17] também vale para o operador p-Laplaciano.

Em [3], Alves considerou o problema (P) com $U = \mathbb{R}^2 \backslash \overline{\Omega}$, Ω não vazio e limitado, condição de fronteira de Neumann e $h(x,u) = f(u) - u$, com f tendo crescimento exponencialmente crítico. Ele provou a existência de solução ground state para (P).

Em [5], Alves, Montenegro e Souto estudaram o problema (P) considerando $U = \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ e $h(x,u) = f(u) - u$, f com crescimento crítico. Eles provaram que (P) possui uma solução ground state.

Motivados pelos trabalhos [3] e [4] e seus argumentos, complementamos o estudo feito em [5] e em [17] no sentido de que consideramos o exterior de uma bola e uma não linearidade com crescimento crítico. O fato de se considerar um domínio exterior e um termo não linear com crescimento crítico implicam que algumas estimativas e argumentos explorados em [5] e em [17] não podem ser usados.

O principal resultado do Capítulo 1 é o seguinte:

Teorema 1: *Suponhamos que $N \geq 4$ e $2 < q < 2^*$ ou $N = 3$ e $4 < q < 6$. Então, existe $R_0 > 0$ tal que, para todo $R > R_0$, o problema (P_1) tem solução ground state radialmente simétrica.*

Nosso principal argumento para provar o Teorema 1 é o Teorema do Passo da Montanha sem condição Palais-Smale.

Ressaltamos que a restrição sobre q no caso $N = 3$, no enunciado do Teorema 1, é somente devido ao uso de um resultado provado em [29] para obtermos uma importante estimativa envolvendo o nível do Passo da Montanha. Em [29], Miyagaki usou tal restrição para provar o resultado em questão.

No Capítulo 2, estudamos o problema (P) com $U = \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Além disso, consideramos

$$h(x,u) = g(u),$$

com $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ denotando uma função contínua e ímpar que satisfaz as seguintes hipóteses:

(g.1) $\displaystyle\lim_{s \to 0} \frac{g(s)}{s^{2^*-1}} = 0$;

(g.2) $\displaystyle\lim_{s \to +\infty} \frac{|g(s)|}{|s|^{2^*-1}} = 1$

e

(g.3) Existe $\zeta > 0$ tal que $g(s) > 0$ para $0 < s < \zeta$ e $g(s) \leq 0$ para $s \geq \zeta$.

Neste capítulo, mostramos existência de solução gound state positiva e radialmente simétrica para o problema

$$(P_2) \qquad \begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Além disso, provamos uma caracterização do tipo Passo da Montanha para tais soluções.

É importante ressaltar que, para esta classe de problemas, a condição $g'(0) < 0$ é "quase necessária"no sentido de que se $g'(0) > 0$, então (P_2) não tem solução radialmente simétrica. Mas note que, contudo, $g'(0) > 0$ não é exatamente a negação de $g'(0) < 0$. O único caso restante, essencialmente, é o caso limite com $g'(0) = 0$ conhecido como o caso de "massa zero". Note que ao estudarmos (P_2) com a hipótese (g.1), incluimos a situação em que $g'(0) = 0$.

Em [13], Berestycki e Lions provaram a existência de solução ground state para (P_2) através do problema de minimização

$$\min\left\{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2 : \int_{\mathbb{R}^N} G(u) = 1\right\},$$

com $G(s) = \int_0^s g(\tau)d\tau$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo

(B.L.1) $-\infty < \liminf\limits_{s\to 0} \dfrac{g(s)}{s} \leq \limsup\limits_{s\to 0} \dfrac{g(s)}{s} = -\nu < 0$

e

(B.L.2) $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{|g(s)|}{|s|^{2^*-1}} = 0.$

Além disso, também em [13], os autores resolveram o mesmo problema de minimização supondo que a função g satisfaz

(B.L.) $\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{g(s)}{s^{2^*-1}} = \lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{g(s)}{s^{2^*-1}} = 0.$

Em [22], Jeanjean e Tanaka estabeleceram uma caracterização do tipo Passo da Montanha para as soluções ground state de (P_2) considerando as hipóteses (B.L.1) e (B.L.2). Os autores nada mencionaram a respeito desta caracterização para as soluções ground state de (P_2) sob a hipótese (B.L.).

Em [36], Zhang e Zou estudaram a existência de solução ground state para (P_2) supondo que o termo não linear g satisfaz as hipóteses (B.L.1) e (g.2). Além disso, os autores também provaram uma caracterização do tipo Passo da Montanha para tais soluções.

Pesquisado na literatura o que já havia sido provado com relação ao problema (P_2), complementamos os estudos feitos em [13] e [36] no sentido de que consideramos o caso de "massa zero"e o termo não linear com crescimento crítico, ou seja, supomos que a função g satisfaz as hipóteses (g.1) e (g.2).

Um dos principais resultados do Capítulo 2 é o seguinte:

Teorema 2: *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e ímpar que satisfaz (g.1)-(g.3). Então, o problema (P_2) tem uma solução $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N)$ ground state positiva, radialmente simétrica e descrescente com relação ao raio.*

Para demonstrar o Teorema 2, seguimos ideias parecidas às usadas em [13]; porém, enfatizamos que se consideramos um termo não linear com crescimento crítico, não podemos fazer uso de Lema de Compacidade de Strauss como no referido trabalho.

Note que, neste capítulo, não supomos que

$$s \mapsto \frac{g(s)}{s}$$

é uma função crescente em $|s|$. Isto motiva a investigar se, neste caso, a energia das soluções ground state de (P_2) coincide com o nível minimax do Teorema do Passo da Montanha. Motivados por esta questão, no Capítulo 2 deste trabalho também estabelecemos o seguinte resultado:

Teorema 3: *Sejam $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e ímpar que satisfaz (g.1)-(g.3), $I : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ o funcional energia associado a (P_2) e*

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], D^{1,2}(\mathbb{R}^N)) : \gamma(0) = 0 \ , \ I(\gamma(1)) < 0\}.$$

Então,

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) = \inf\{I(u) : u \text{ é uma solução de } (P_2)\}.$$

Ressaltamos que a demonstração do Teorema 3 segue de argumentos parecidos aos encontrados em [22].

No Capítulo 3, estudamos o problema (P) com $U = \mathbb{R}^2$ e

$$h(x,u) = K(x)f(u) - u,$$

com $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ denotando uma função contínua que satisfaz

(K1) Existe $k_0 > 0$ tal que $K(x) \geq k_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$;

(K2) Existe uma função contínua periódica positiva $K_P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$|K(x) - K_P(x)| \to 0 \text{ quando } |x| \to +\infty;$$

(K3) Para todo $x \in \mathbb{R}^2$ temos $K(x) > K_P(x)$.

Com relação à função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, supomos que satisfaz as seguintes hipóteses:

(f_1) Existe $\beta \geq 1$ tal que $f(s) = o(s^\beta)$ quando $s \to 0$;

(f_2) Existe $\alpha_0 \in (0, 4\pi)$ tal que

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{e^{\alpha . s^2}} = \begin{cases} 0 \ , & \text{se } \alpha > \alpha_0, \\ +\infty \ , & \text{se } \alpha < \alpha_0; \end{cases}$$

(f_3) Existem $\theta > 2$ e $C > 0$ tais que

$$0 < \theta F(s) \leq s f(s) \ , \ \forall s \in \mathbb{R} \backslash \{0\},$$

e

$$F(s) \geq C|s|^\theta \ , \ \forall s \in \mathbb{R},$$

com $F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau$;

(f_4) A função

$$s \mapsto \frac{f(s)}{s}$$

é crescente em $|s|$;

(f_5) Existem constantes $q > 2$ e $\lambda > 0$ tais que

$$f(s) \geq \lambda s^{q-1} \quad , \quad \forall s \geq 0,$$

com

$$\lambda > \left[\frac{\theta(q-2)}{q(\theta-2)}\right]^{\frac{(p-2)}{2}} \frac{C_q^q}{M},$$

sendo

$$M := \min_{x \in \mathbb{R}^2} K_P(x) > 0$$

e

$$C_q := \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^2)\setminus\{0\}} \frac{\left\{\int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{\int_{\mathbb{R}^2} |u|^q\right\}^{\frac{1}{q}}}.$$

Quando a hipótese (f_2) é assumida, dizemos que o termo não linear f tem crescimento exponencialmente crítico.

Neste capítulo, provamos existência de solução ground state para o problema

$$(P_3) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = K(x)f(u) \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^2). \end{cases}$$

Em [12], Berestycki, Gallouët e Kavian consideraram o problema (P_3) com a função $K \equiv 1$ e a função f com crescimento exponencialmente subcrítico e satisfazendo $f(s) = o(s)$ quando $s \to 0$. Eles usaram o método de minimização restrita a uma variedade para obter a existência de solução ground state.

Em [16], Cao estudou (P_3). Ele considerou a função K satisfazendo $K(x) \to K_\infty$ quando $|x| \to +\infty$, para algum $K_\infty \in \mathbb{R}$, e f com crescimento exponencialmente crítico e satisfazendo $f(s) = o(s)$ quando $s \to 0$.

Em [6], Alves, Montenegro e Souto mostraram a existência de solução ground state para a equação

$$\begin{cases} -\Delta u = K(x)f(u) \text{ em } \mathbb{R}^N \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

com $N \geq 3$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua com crescimento crítico e "massa zero", quando a função $K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é contínua, não negativa e assintóticamente periódica e também quando $K \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N)$, para algum $r \geq 1$, é positiva quase sempre em $\mathbb{R}^N$.

Motivados pelo trabalho [6] e seus argumentos, provamos no Capítulo 3 o seguinte resultado:

Teorema 4: *Sejam $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz (K1)-(K3) e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz (f_1)-(f_5). Então, o problema (P_3) tem solução ground state.*

Ressaltamos que após termos concluído a demonstração deste teorema, encontramos em uma de nossas pesquisas o artigo [7], onde os autores já haviam provado o mesmo resultado. Contudo, no Capítulo 4, seguimos na mesma classe de problemas abordada no terceiro capítulo com uma classe de função K diferente e uma singularidade. Estudamos o problema (P) com $U = \mathbb{R}^2$ ou $U = \mathbb{R}^2 \backslash \overline{\Omega}$, com Ω denotando um conjunto não vazio conexo e limitado com fronteira suave, e

$$h(x,u) = K(x)\frac{f(u)}{|x|^a} - u,$$

com

$$0 \leq a < \frac{1}{2}$$

e as funções K e f satisfazendo as hipóteses que listamos a seguir. Provamos existência de solução ground state para o problema

$$(P_4) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = K(x)\dfrac{f(u)}{|x|^a} \quad \text{em} \quad U, \\ u \in H_0^1(U). \end{cases}$$

Diferente do terceiro capítulo, neste supomos que a função $K : U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ satisfaz

(K_1) K é positiva quase sempre em U, ou seja

$$|\{x \in U \ : \ K(x) \leq 0\}| = 0;$$

(K_2) $K \in L^\infty(U)$.

Para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, supomos que

(f_1) Existe $\beta \geq 1$ tal que $f(s) = o(s^\beta)$ quando $s \to 0$;
(f_2) Para todo $\alpha > 0$, vale

$$\lim_{|s| \to +\infty} \frac{f(s)}{e^{\alpha . s^2}} = 0;$$

(f_3) Existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < \theta F(s) \leq s f(s) \quad , \quad \forall s \in \mathbb{R} \backslash \{0\},$$

com $F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau$.

Motivados pelas ideias do artigo [6], provamos no Capítulo 4 o seguinte resultado:
Teorema 5: *Sejam f uma função contínua que satisfaz $(f_1) - (f_3)$ e*

$$\sigma > \frac{2-a}{1-2a}.$$

Suponhamos que a função K satisfaz $(K_1) - (K_2)$ e

(K_3) $K \in L^r(U)$, *para algum* $r > \dfrac{4\sigma}{\sigma(1-2a)+a-2}$.

Então, o problema (P_4) *tem solução. Além disso, se*

(f_4) $s \mapsto \dfrac{f(s)}{s}$ *é uma função crescente em* $|s|$,

então (P_4) *tem solução ground state.*

Para provar o Teorema 5, fazemos uso do Teorema do Passo da Montanha sem condição Palais-Smale, desigualdade do tipo Trudinger-Moser e Teorema de Vitali.

Para a facilidade de leitura deste trabalho, repetimos em seus respectivos capítulos os enunciados dos teoremas desta introdução, bem como os artigos da bibliografia os quais complementamos. Além disso, para dar completude a este trabalho, enunciamos no Apêndice A os resultados usados nesta tese, indicando as referências bibliográficas onde as demonstrações podem ser encontradas.

Capítulo 1

Problema crítico em um exterior de uma bola e com condição de fronteira de Neumann

Neste capítulo, estamos interessados em mostrar existência de solução ground state radialmente simétrica para a seguinte equação elíptica não linear:

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = |u|^{q-2}u + |u|^{2^*-2}u \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \ \text{ sobre } \ \partial B_R(0), \end{cases}$$

com $N \geq 3$, $B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$ denotando uma bola de centro em 0 e raio R, 2^* denotando o expoente crítico de Sobolev, ou seja,

$$2^* = \frac{2N}{N-2}$$

e $2 < q < 2^*$.

Motivados pelos trabalhos [3] e [4] e seus argumentos, neste capítulo complementamos o estudo feito em [5] e em [17] no sentido de que consideramos o exterior de uma bola e uma não linearidade com crescimento crítico. O fato de se considerar um domínio exterior e um termo não linear com crescimento crítico implicam que algumas estimativas e argumentos explorados em [5] e em [17] não podem ser usados.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema 1.1. : *Suponhamos que $N \geq 4$ e $2 < q < 2^*$ ou $N = 3$ e $4 < q < 6$. Então, existe $R_0 > 0$ tal que, para todo $R > R_0$, o problema (P_1) tem solução ground state radialmente simétrica.*

Ressaltamos que a restrição sobre q no caso $N = 3$, no enunciado do Teorema 1.1, é somente devido ao uso de um resultado provado em [29] para obter uma importante estimativa envolvendo o nível do Passo da Montanha. Em [29], Miyagaki usou tal restrição para provar o resultado em questão.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 1.1 introduzimos alguns resultados preliminares e a formulação variacional do problema e mostramos que o funcional energia considerado satisfaz a geometria do Passo da Montanha. Na seção 1.2, introduzimos um problema auxiliar e alguns resultados relacionados ao mesmo. Na seção 1.3, provamos uma desigualdade importante envolvendo os níveis do Passo da Montanha dos funcionais energias associados ao problema (P_1) e ao problema auxiliar e também estabelecemos um resultado de compacidade para o problema (P_1). Na seção 1.4, demonstramos o Teorema 1.1.

1.1 Preliminares

Nesta seção, introduzimos algumas notações, definições, a formulação variacional do problema (P_1) e mostramos que o funcional energia considerado satisfaz a geometria do Passo da Montanha.

Uma solução do problema (P_1) é uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)}) \backslash \{0\}$ que satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)}} (\nabla u \nabla v + uv) = \int_{\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)}} |u|^{q-2} uv + \int_{\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)}} |u|^{2^*-2} uv,$$

para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)})$.

Neste capítulo, denotamos a norma do espaço de Hilbert $H^1(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)})$ por

$$||u|| = \left[\int_{\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)}} (|\nabla u|^2 + |u|^2) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)}), \tag{1.1.1}$$

e por $J : H^1(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)}) \to \mathbb{R}$ denotamos o funcional energia associado ao problema (P_1) e definido por

$$J(u) = \frac{1}{2} ||u||^2 - \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)}} |u|^q - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)}} |u|^{2^*}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)}). \tag{1.1.2}$$

Notemos que as imersões contínuas $H^1(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)})$, com $p \in [2, 2^*]$, garantem que o funcional J está bem definido. Além disso, usando argumentos clássicos encontrados no Apêndice B de [33], justificamos que o funcional $J : H^1(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)}) \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e que

$$J'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)}} (\nabla u \nabla v + uv) - \int_{\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)}} |u|^{q-2} uv - \int_{\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)}} |u|^{2^*-2} uv,$$

para todos $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)})$. Portanto, pontos críticos não nulos de J são soluções do problema (P_1).

Consideremos agora o espaço de Hilbert $X \subset H^1(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)})$ definido por

$$X = H^1_{rad}(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)}),$$

munido da norma induzida de $H^1(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)})$ definida em (1.1.1), e definamos

$$I := J|_X,$$

ou seja, I é a restrição do funcional J ao espaço X. Neste capítulo, essencialmente mostramos a existência de uma função não nula $u \in X$ que é ponto crítico de I e ressaltamos que isto é suficiente pois, devido o Princípio de Criticalidade Simétrica de Palais (ver Apêndice, Teorema A.17), segue que u é ponto crítico não nulo do funcional J.

O primeiro resultado desta seção está relacionado à geometria do funcional I.

Lema 1.1. : *O funcional $I : X \to \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes afirmações:*

(i) Existem constantes $\beta, \rho > 0$ tais que

$$I(u) \geq \beta \quad , \quad \forall u \in X \ , \ ||u|| = \rho;$$

(ii) Existe $e \in X$ tal que

$$||e|| > \rho \quad e \quad I(e) < 0.$$

Demonstração:

Afim de mostrarmos a afirmação (i), notemos que, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_1 = C_1(\varepsilon)$ tal que

$$\frac{1}{q}|s|^q + \frac{1}{2^*}|s|^{2^*} \leq \varepsilon |s|^2 + C_1 |s|^{2^*} \quad , \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$I(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)}} |u|^2 - C_1 \int_{\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)}} |u|^{2^*} \quad , \quad \forall u \in X.$$

Usando imersões contínuas $H^1(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)})$, com $p \in [2, 2^*]$, existem constantes positivas C_2 e C_3 tais que

$$I(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon C_2\right) ||u||^2 - C_3 ||u||^{2^*} \quad , \quad \forall u \in X.$$

Como $2 < 2^*$ temos que, para

$$\varepsilon < \frac{1}{2C_2},$$

existem constantes positivas ρ_0 e β tais que, se $0 < \rho \leq \rho_0$ então

$$I(u) \geq \beta > 0 \quad , \quad \forall u \in X, ||u|| = \rho.$$

Agora, afim de mostrarmos a afirmação (ii), notemos que

$$\frac{1}{q}|s|^q+\frac{1}{2^*}|s|^{2^*}\geq \frac{1}{2^*}|s|^{2^*} \quad , \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{1.1.3}$$

Fixando uma função não nula $u \in X$, obtemos usando (1.1.3) que

$$I(tu) \leq \frac{t^2}{2}||u||^2-\frac{t^{2^*}}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B_R(0)}}|u|^{2^*} \ , \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Sendo $2 < 2^*$, concluímos que

$$I(tu) \to -\infty \ \text{ quando } \ t \to +\infty.$$

Portanto, basta tomar $e = tu$, com $t > 0$ suficientemente grande, para concluir a demonstração.

■

Aplicando uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem condição Palais-Smale (ver Apêndice, Teorema A.15), temos que existe uma sequência (u_n) em X satisfazendo

$$I(u_n) \to c \quad \text{e} \quad I'(u_n) \to 0, \tag{1.1.4}$$

com

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) > 0 \tag{1.1.5}$$

e

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X) \ : \ \gamma(0) = 0 \text{ e } I(\gamma(1)) < 0\}.$$

O próximo resultado está relacionado à sequência Palais-Smale.

Lema 1.2. : *Seja (u_n) uma sequência em X satisfazendo (1.1.4). Então (u_n) é limitada em X.*

Demonstração:

Suponhamos por contradição que (u_n) não seja limitada em X, ou seja, suponhamos que, a menos de subsequência,

$$||u_n||\to +\infty.$$

Do fato de que (u_n) satisfaz (1.1.4) temos

$$|I(u_n)|\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}|I(u_n)|< +\infty \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, considerando $\varepsilon = q$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$-\frac{1}{q}I'(u_n)u_n \leq \frac{1}{q}|I'(u_n)u_n|\leq \frac{1}{q}||I'(u_n)||||u_n||< \frac{1}{q}q||u_n|| \ , \ \forall n > n_0.$$

Portanto,

$$I(u_n) - \frac{1}{q} I'(u_n) u_n < \sup_{n \in \mathbb{N}} |I(u_n)| + ||u_n|| \ , \ \forall n > n_0. \tag{1.1.6}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} I(u_n) &- \frac{1}{q} I'(u_n) u_n \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) ||u_n||^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} |u_n|^{2^*} \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) ||u_n||^2 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Então, de (1.1.6) e (1.1.7), temos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) ||u_n||^2 < \sup_{n \in \mathbb{N}} |I(u_n)| + ||u_n|| \ , \ \forall n > n_0.$$

Daí, para n suficientemente grande, obtemos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) < \frac{\sup_{n \in \mathbb{N}} |I(u_n)|}{||u_n||^2} + \frac{1}{||u_n||^2}$$

e fazendo $n \to \infty$, segue que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right) \leq 0,$$

o que é um absurdo. Portanto, (u_n) é uma sequência limitada em X.

■

Sendo (u_n) uma sequência limitada em X, temos que existem $u \in X$ e uma subsequência de (u_n), a qual ainda denotamos por (u_n), tais que

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ X.$$

Além disso, usando Teorema de Rellich-Kondrachov, obtemos que

$$u_n \to u \ \text{ em } \ L^q_{loc}(\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}) \ , \ \text{para } q \in [1, 2^*),$$

e consequentemente,

$$u_n(x) \to u(x) \ \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}.$$

1.2 O problema auxiliar

Nesta seção, introduzimos um problema auxiliar e estabelecemos alguns resultados relacionados ao mesmo.

Para estudar o problema (P_1), precisamos de alguns resultados relacionados ao problema

$$(P_\infty) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = |u|^{q-2}u + |u|^{2^*-2}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Denotamos por $I_\infty : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ o funcional energia associado ao problema auxiliar (P_∞) definido por

$$I_\infty(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^2+|u|^2\right) - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^q - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\ , \ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{1.2.1}$$

Temos que I_∞ está bem definido, é de classe C^1 e

$$I'_\infty(u)v = \int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u \nabla v + uv) - \int_{\mathbb{R}^N}|u|^{q-2}uv - \int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*-2}uv,$$

para todos $u, v \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Portanto, pontos críticos não nulos de I_∞ são soluções de (P_∞).

Usando argumentos análogos aos usados na demonstração do Lema 1.1, podemos provar o seguinte resultado:

Lema 1.3. : *O funcional $I_\infty : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definido em (1.2.1) satisfaz as seguintes afirmações:*

(i) Existem constantes $\beta, \rho > 0$ tais que

$$I_\infty(u) \geq \beta \quad , \quad \forall u \in X \ , \ ||u|| = \rho;$$

(ii) Existe $e \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$||e|| > \rho \quad e \quad I_\infty(e) < 0.$$

Isto implica que o seguinte valor está bem definido:

$$c_\infty = \inf_{\gamma \in \Gamma_\infty} \max_{t \in [0,1]} I_\infty(\gamma(t)) > 0, \tag{1.2.2}$$

com $\Gamma_\infty := \{\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)) \ : \ \gamma(0) = 0 \ , \ I_\infty(\gamma(1)) < 0\}$.

Agora estamos interessados em obter um resultado de existência de solução para (P_∞). Para não sobrecarregar o texto, definimos

$$f(s) := |s|^{q-2}s + |s|^{2^*-2}s \quad , \quad s \in \mathbb{R}. \tag{1.2.3}$$

Temos que

(f.1) $\lim_{s \to 0} \dfrac{f(s)}{s} = 0;$

(f.2) $\lim_{s \to +\infty} \dfrac{f(s)}{s^{2^*-1}} = 1;$

e

(f.3) $2F(s) \leq f(s)s$ para todo $s \geq 0$, com $F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau$.

No que segue, denotamos por S a melhor constante da imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e, para $p \in [2, 2^*]$, denotamos por C_p a melhor constante da imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$, ou seja,

$$S = \inf_{\substack{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}}} \tag{1.2.4}$$

e

$$C_p = \inf_{\substack{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right)}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p\right)^{\frac{2}{p}}}.$$

Notemos que a função f definida em (1.2.3) também satisfaz a seguinte propriedade:

(f.4) Existem $p \in (2, 2^*)$ e $\lambda = \lambda(p) > 0$ tais que

$$f(s) \geq \lambda s^{p-1} \quad , \quad \forall s \geq 0, \tag{1.2.5}$$

e

$$\lambda > \left[2^{\frac{(2-N)}{2}} S^{-\frac{N}{2}} N \left(\frac{2N}{N-2} \right)^{\frac{(N-2)}{2}} \right]^{\frac{(p-2)}{2}} \left[\frac{p-2}{2p} \right]^{\frac{p-2}{2}} C_p^{\frac{p}{2}}. \tag{1.2.6}$$

De fato, definindo $g_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g_p(s) := s^{q-p} + s^{2^*-p},$$

temos que (1.2.5) equivale a

$$g_p(s) \geq \lambda \ , \ \forall s > 0.$$

Considerando $p \in (q, 2^*)$, obtemos

$$\lim_{s \to 0^+} [g_p(s)] = \lim_{s \to +\infty} [g_p(s)] = +\infty,$$

e sendo g_p contínua, concluimos que g_p possui um ponto de mínimo positivo. Como

$$g'(s) = (q-p)s^{(q-p-1)} + (2^* - p)s^{(2^*-p-1)} \quad , \quad \forall s > 0,$$

temos que

$$s_p = \left(\frac{p-q}{2^* - p} \right)^{\frac{1}{(2^*-q)}}$$

é ponto crítico de g_p e portanto

$$\min_{s>0} g_p(s) = g_p(s_p) = \left[\frac{p-q}{2^*-p} \right]^{\frac{q-p}{2^*-q}} + \left[\frac{p-q}{2^*-p} \right]^{\frac{2^*-p}{2^*-q}} > 0. \tag{1.2.7}$$

Daí, considerando

$$\lambda(p) = g_p(s_p), \tag{1.2.8}$$

temos

$$g_p(s) \geq \lambda(p) \quad , \quad \forall s > 0,$$

e consequentemente, (1.2.5) ocorre.

Agora, afim de mostrarmos (1.2.6), recorremos a um resultado provado por Agueh. Em [2], Agueh mostrou que a função

$$v_\infty(x) := \left(\frac{p}{2\theta} \right)^{\frac{1}{p-2}} \left[\cosh \left(\frac{p-2}{2}.|x| \right) \right]^{-\frac{2}{p-2}} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

com

$$\theta = \left(\frac{p}{2} \right) \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left[\cosh \left(\frac{p-2}{2}.|x| \right) \right]^{-\frac{2p}{p-2}} \right\}^{\frac{p-2}{p}}, \tag{1.2.9}$$

é solução do problema de minimização

$$\min \left\{ E(u) := \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + |u|^2 \right) \ : \ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \ , \ |u|_p = 1 \right\},$$

ou seja, $E(v_\infty) = C_p$. Portanto,

$$\begin{aligned} C_p &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v_\infty|^2 + |v_\infty|^2 \right) \\ &= \left(\frac{p}{2\theta} \right)^{\frac{2}{p-2}} \left(\frac{p}{2} \right)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \left[\operatorname{senh} \left(\frac{p-2}{2}.|x| \right) \right]^2 \left[\cosh \left(\frac{p-2}{2}.|x| \right) \right]^{\frac{-2p}{p-2}} \right\} \\ &\quad + \left(\frac{p}{2\theta} \right)^{\frac{2}{p-2}} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\cosh \left(\frac{p-2}{2}.|x| \right) \right]^{\frac{-4}{p-2}}. \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

Notemos que

$$\frac{e^t}{2} \leq \cosh t \leq e^t \quad , \quad \forall t \geq 0,$$

e consequentemente,

$$e^{-p.|x|} \leq \left[\cosh\left(\frac{p-2}{2}.|x|\right)\right]^{\frac{-2p}{p-2}} \leq \frac{e^{-p.|x|}}{2^{\frac{-2p}{p-2}}} \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^N \tag{1.2.11}$$

e

$$e^{-2.|x|} \leq \left[\cosh\left(\frac{p-2}{2}.|x|\right)\right]^{\frac{-4}{p-2}} \leq \frac{e^{-2.|x|}}{2^{\frac{-4}{p-2}}} \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.2.12}$$

Além disso,

$$\text{senh} t \leq \frac{e^t}{2} \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

e daí,

$$\left[\text{senh}\left(\frac{p-2}{2}.|x|\right)\right]^2 \leq \frac{e^{(p-2).|x|}}{4} \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.2.13}$$

Logo, usando as estimativas (1.2.11), (1.2.12) e (1.2.13) em (1.2.10),

$$\begin{aligned} C_p &\leq \left(\frac{p}{2\theta}\right)^{\frac{2}{p-2}} \left(\frac{p}{2}\right)^2 \frac{1}{4}.2^{\frac{2p}{p-2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-p.|x|} e^{(p-2).|x|} \\ &\quad + \left(\frac{p}{2\theta}\right)^{\frac{2}{p-2}} .2^{\frac{4}{p-2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2.|x|} \\ &= \left(\frac{p}{2\theta}\right)^{\frac{2}{p-2}} \left(\frac{p}{2}\right)^2 \frac{1}{4}.2^{\frac{2p}{p-2}}.\sigma(S^{N-1}).\frac{1}{2^N} \int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{N-1} \\ &\quad + \left(\frac{p}{2\theta}\right)^{\frac{2}{p-2}} .2^{\frac{4}{p-2}}.\sigma(S^{N-1}).\frac{1}{2^N} \int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{N-1}. \end{aligned} \tag{1.2.14}$$

Notemos agora que de (1.2.9) e (1.2.11),

$$\theta \geq \left(\frac{p}{2}\right) \left[\int_{\mathbb{R}^N} e^{-p.|x|}\right]^{\frac{p-2}{p}} = \left(\frac{p}{2}\right) \left[\sigma(S^{N-1})\right]^{\frac{p-2}{2}} \left(\frac{1}{p^N}\right)^{\frac{p-2}{p}} \left[\int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{N-1}dt\right]^{\frac{p-2}{2}},$$

e portanto,

$$\frac{1}{\theta} \leq \left(\frac{2}{p}\right) \left[\sigma(S^{N-1})\right]^{\frac{2-p}{2}} p^{\frac{N.(p-2)}{2}} \left[\int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{N-1}dt\right]^{\frac{2-p}{2}}.$$

Então de (1.2.14),

$$\begin{aligned} C_p &\leq \left[\sigma(S^{N-1})\right]^{-1} p^N \left[\int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{N-1}dt\right]^{-1} \left(\frac{p}{2}\right)^2 \frac{1}{4} 2^{\frac{2p}{p-2}} \sigma(S^{N-1}) \frac{1}{2^N} \int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{N-1}dt \\ &\quad + \left[\sigma(S^{N-1})\right]^{-1} p^N \left[\int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{N-1}dt\right]^{-1} 2^{\frac{4}{p-2}} \sigma(S^{N-1}) \frac{1}{2^N} \int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{N-1}dt \\ &= p^N \left(\frac{p}{2}\right)^2 \frac{1}{4}.2^{\frac{2p}{p-2}}.\frac{1}{2^N} + p^N.2^{\frac{4}{p-2}}.\frac{1}{2^N} \\ &< (2^*)^N.\left(\frac{2^*}{2}\right)^2.\frac{1}{4}.2^{\frac{2.2^*}{q-2}} + (2^*)^N.2^{\frac{4}{q-2}}.\frac{1}{2^N} =: C(N,q) \ , \ \forall p \in (q, 2^*). \end{aligned} \tag{1.2.15}$$

De (1.2.7) e (1.2.8),

$$\lim_{p\to 2^*} \lambda(p) = \lim_{p\to 2^*} g_p(s_p) = +\infty.$$

Portanto, usando (1.2.15), concluímos que para $p \in (q, 2^*)$ suficientemente próximo de 2^*,

$$\begin{aligned} \lambda(p) &> \left[2^{\frac{2-N}{2}}.S^{-\frac{N}{2}}.N.\left(\frac{2N}{N-2}\right)^{\frac{N-2}{2}}\right]^{\frac{2^*-2}{2}} \left[\frac{2^*-2}{2.q}\right]^{\frac{2^*-2}{2}} C(N,q)^{\frac{2^*}{2}} \\ &\geq \left[2^{\frac{2-N}{2}}.S^{-\frac{N}{2}}.N.\left(\frac{2N}{N-2}\right)^{\frac{N-2}{2}}\right]^{\frac{p-2}{2}} \left[\frac{p-2}{2p}\right]^{\frac{p-2}{2}} C_p^{\frac{p}{2}}, \end{aligned}$$

ou seja, (1.2.6) ocorre.

Visto que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida em (1.2.3) satisfaz (f.1), (f.2), (f.3) e (f.4), segue de um resultado provado em [5] que o problema auxiliar (P_∞) tem uma solução ground state positiva e radialmente simétrica.

Sobre o comportamento das soluções de (P_∞), enunciamos o seguinte resultado que pode ser encontrado em [26].

Lema 1.4. : *Toda solução positiva $\bar{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ do problema (P_∞) tem o seguinte comportamento assintótico:*

$$\lim_{|x|\to\infty} \bar{u}(x) = 0,$$
$$C_1 e^{-a|x|} \leq \bar{u}(x) \leq C_2 e^{-b|x|} \quad em \quad \mathbb{R}^N,$$

com $C_1, C_2 > 0$ denotando constantes positivas e $0 < b < 1 < a$. Além disso, dado $\delta > 0$ pequeno, os números a e b podem ser escolhidos na forma $a = 1 + \delta$ e $b = 1 - \delta$.

Um fato importante, que pode ser encontrado em [29], é a existência de uma função $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $v_0 \neq 0$, tal que

$$\max_{t\geq 0} I_\infty(tv_0) < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}},$$

com S definido em (1.2.4). Sendo

$$s \mapsto |s|^{q-2} + |s|^{2^*-2}$$

uma função crescente em $|s|$, temos

$$c_\infty = \inf_{\substack{u\in H^1(\mathbb{R}^N)\\ u\neq 0}} \max_{t\geq 0} I_\infty(tu),$$

e portanto,

$$c_\infty < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}. \tag{1.2.16}$$

1.3 Compacidade

Nesta seção, apresentamos alguns resultados importantes que são úteis para mostrar que o limite fraco da sequência (u_n) que satisfaz (1.1.4) é não nulo. O primeiro deles é uma estimativa envolvendo os níveis do Passo da Montanha dos funcionais associados ao problema (P_1) e (P_∞) e sua demonstração usa argumentos parecidos aos encontrados em [3] e [4].

Proposição 1.1. : *Sejam c definido em (1.1.5) e c_∞ definido em (1.2.2). Então,*

$$0 < c < c_\infty.$$

Demonstração:
Seja $\overline{u}$ uma solução ground state positiva e radialmente simétrica de (P_∞). Definamos $u_n(x) := \overline{u}(x + x_n)$, com $x_n := (0, 0, \ldots, 0, n)$, e seja $\hat{u}_n = u_n|_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}}$. Sendo $\overline{u}$ positiva, temos que $\hat{u}_n$ é positiva para todo $n \in \mathbb{N}$. Como

$$s \mapsto |s|^{q-2} + |s|^{2^*-2}$$

é uma função crescente em $|s|$, temos que

$$c = \inf_{\substack{u \in X \\ u \neq 0}} \max_{t \geq 0} I(tu)$$

e portanto,

$$c \leq \max_{t \geq 0} I(t\hat{u}_n) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pela geometria do funcional I temos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $I(0.\hat{u}_n) = 0$, $I(t\hat{u}_n) > 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno e $I(t\hat{u}_n) < 0$ para $t > 0$ suficientemente grande; logo, existe $\gamma_n > 0$ tal que

$$I(\gamma_n \hat{u}_n) = \max_{t \geq 0} I(t\hat{u}_n).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
c &\leq I(\gamma_n \hat{u}_n) \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} \left(|\gamma_n \nabla \hat{u}_n|^2 + |\gamma_n \hat{u}_n|^2 \right) \\
&\quad - \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} |\gamma_n \hat{u}_n|^q - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} |\gamma_n \hat{u}_n|^{2^*} \\
&= I_\infty(\gamma_n u_n) - \frac{\gamma_n^2}{2} \int_{\overline{B_R(0)}} \left(|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{q} \int_{\overline{B_R(0)}} |\gamma_n u_n|^q + \frac{1}{2^*} \int_{\overline{B_R(0)}} |\gamma_n u_n|^{2^*}.
\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Notemos que $I(\gamma_n \hat{u}_n) = \max_{t\geq 0} I(t\hat{u}_n)$ se, e somente se,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B_R(0)}} \left(|\nabla \hat{u}_n|^2 + |\hat{u}_n|^2\right) = \int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B_R(0)}} \left(\gamma_n^{q-2}\,|\hat{u}_n|^q + \gamma_n^{2^*-2}\,|\hat{u}_n|^{2^*}\right).$$

Usando a definição de u_n, a igualdade acima equivale a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \overline{u}|^2 + |\overline{u}|^2\right)\chi_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B_R(y_n)}} = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\gamma_n^{q-2}\,|\overline{u}|^q + \gamma_n^{2^*-2}\,|\overline{u}|^{2^*}\right)\chi_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B_R(y_n)}}. \tag{1.3.2}$$

Suponhamos por absurdo que a sequência (γ_n) não é limitada. Então ela possui uma subsequência, a qual ainda denotamos por (γ_n), tal que $\gamma_n \to +\infty$. Daí, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e o Lema de Fatou, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \overline{u}|^2 + |\overline{u}|^2\right) &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \overline{u}|^2 + |\overline{u}|^2\right)\chi_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B_R(y_n)}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \left(\gamma_n^{q-2}\,|\overline{u}|^q + \gamma_n^{2^*-2}\,|\overline{u}|^{2^*}\right)\chi_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B_R(y_n)}} \geq +\infty,\end{aligned}$$

o que é um absurdo. Com isto, concluímos que a sequência (γ_n) é limitada e, portanto, tem uma subsequência, a qual ainda denotamos por (γ_n), tal que $\gamma_n \to \gamma_0$, para algum $\gamma_0 \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue de (1.3.2) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \overline{u}|^2 + |\overline{u}|^2\right) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\gamma_0^{q-2}\,|\overline{u}|^q + \gamma_0^{2^*-2}\,|\overline{u}|^{2^*}\right).$$

Por outro lado, sendo $\overline{u}$ solução de (P_∞), vale

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \overline{u}|^2 + |\overline{u}|^2\right) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\overline{u}|^q + |\overline{u}|^{2^*}\right).$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(\gamma_0^{q-2} - 1\right)|\overline{u}|^q + \left(\gamma_0^{2^*-2} - 1\right)|\overline{u}|^{2^*}\right] = 0$$

e sendo $\overline{u}$ não nula, devemos necessariamente ter $\gamma_0 = 1$. Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\gamma_n \nabla u_n|^2 + |\gamma_n u_n|^2\right) &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\gamma_n \nabla \overline{u}|^2 + |\gamma_n \overline{u}|^2\right)\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \overline{u}|^2 + |\overline{u}|^2\right),\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma_n u_n|^q = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma_n \overline{u}|^q = \int_{\mathbb{R}^N} |\overline{u}|^q$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma_n u_n|^{2^*} = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma_n \overline{u}|^{2^*} = \int_{\mathbb{R}^N} |\overline{u}|^{2^*}.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} I_\infty(\gamma_n u_n) = I_\infty(\overline{u}). \tag{1.3.3}$$

Notemos agora que, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $C = C(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\frac{1}{q}|s|^q+\frac{1}{2^*}|s|^{2^*}< \varepsilon|s|^2+C|s|^{2^*} \quad , \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Portanto, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q}\int_{\overline{B_R(0)}}|\gamma_n u_n|^q + \frac{1}{2^*}\int_{\overline{B_R(0)}}|\gamma_n u_n|^{2^*} \quad &< \quad \varepsilon\int_{\overline{B_R(0)}}|\gamma_n u_n|^2 + C\int_{\overline{B_R(0)}}|\gamma_n u_n|^{2^*} \\
&\leq \quad \varepsilon C_1\int_{\overline{B_R(0)}}\left(|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2\right) \\
&\quad\quad +C_2\int_{\overline{B_R(0)}}|u_n|^{2^*} .
\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Então, denotando

$$t_n := \int_{\overline{B_R(0)}}\left(|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2\right)$$

e

$$s_n := C_2\int_{\overline{B_R(0)}}|u_n|^{2^*} ,$$

segue de (1.3.1), (1.3.3) e (1.3.4) que

$$c \leq I_\infty(\overline{u}) - t_n\left(\frac{\gamma_n^2}{2} - \varepsilon C_1\right) + s_n.$$

Notemos que, de

$$\frac{\gamma_n^2}{2} \to \frac{1}{2} \ \text{ quando } n \to \infty,$$

temos

$$\frac{1}{4} < \frac{\gamma_n^2}{2}$$

para n suficientemente grande. Portanto,

$$c \leq I_\infty(\overline{u}) - t_n\left(\frac{1}{4} - \varepsilon C_1\right) + s_n.$$

Logo, considerando $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon C_1 < \frac{1}{4},$$

temos

$$c \leq I_\infty(\overline{u}) - C_3 t_n + s_n,$$

com

$$C_3 = \left(\frac{1}{4} - \varepsilon C_1\right) > 0.$$

Agora notemos que

$$\frac{s_n}{t_n} \to 0 \text{ quando } n \to \infty. \tag{1.3.5}$$

De fato, pelo Lema 1.4 temos que, para $\delta > 0$ pequeno, existem constantes $C_4, C_5 > 0$ tais que

$$t_n = \int_{\overline{B_R(0)}} \left(|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2\right) \geq \int_{\overline{B_R(0)}} |u_n|^2 \geq C_4 e^{-2(1+\delta)n}$$

e

$$s_n = C_2 \int_{\overline{B_R(0)}} |u_n|^{2^*} \leq C_5 e^{-2^*(1-\delta)n}.$$

Portanto,

$$\frac{s_n}{t_n} \leq \frac{C_5}{C_4}.e^{[2(1+\delta)-2^*(1-\delta)]n}.$$

Então, escolhendo δ satisfazendo

$$0 < \delta < \frac{2^* - 2}{2^* + 2},$$

concluímos que (1.3.5) ocorre. Com isto, concluímos que

$$c < I_\infty(\overline{u}) = c_\infty.$$

■

O próximo resultado fornece uma desigualdade de imersão com uma constante que depende do raio da bola $B_R(0)$.

Lema 1.5. : *Para cada $R > 0$, existe uma constante $C(R) > 0$ tal que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} |u|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \leq C(R)||u||,$$

para todo $u \in X$. Além disso, $\lim\limits_{R\to+\infty} C(R) = 0$ e $\lim\limits_{R\to 0} C(R) = +\infty$.

Demonstração:

Por um lema radial (ver Apêndice, Lema A.11), obtemos a existência de uma constante positiva C, que só depende de N, tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} |u|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \leq C||u|| \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} |x|^{\frac{(1-N)N}{N-2}}\right)^{\frac{1}{2^*}},$$

para todo $u \in X$. Consideremos

$$C(R) := C\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B_R(0)}} |x|^{\frac{(1-N)N}{N-2}}\right)^{\frac{1}{2^*}}.$$

Temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B_R(0)}} |x|^{\frac{(1-N)N}{N-2}} dx = \sigma(S^{N-1})\int_R^{+\infty} r^{\frac{2-2N}{N-2}} dr = \frac{N-2}{N}\sigma(S^{N-1})R^{\frac{N}{2-N}},$$

e daí,

$$C(R) = C\left(\frac{N-2}{N}\right)^{\frac{1}{2^*}} \sigma(S^{N-1})^{\frac{1}{2^*}} R^{-\frac{1}{2}}.$$

Portanto, $\lim_{R\to 0} C(R) = +\infty$ e $\lim_{R\to+\infty} C(R) = 0$.

■

Notemos que, com o Lema 1.5, obtemos a existência de $R_0 > 0$ tal que, para todo $R > R_0$, temos $C(R)^{-2} > S$, com S definido em (1.2.4), e consequentemente,

$$||u||^2 \geq C(R)^{-2}\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B_R(0)}} |u|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \geq S\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B_R(0)}} |u|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}}, \ \forall u \in X. \tag{1.3.6}$$

O próximo resultado dá o comportamento das sequências Palais-Smale e sua demonstração foi motivada por argumentos usados para demonstrar o Lema 4 em [8] (ver também o Lema 2.3 de [19]).

Proposição 1.2. (Lema de Compacidade) : *Seja (u_n) uma sequência satisfazendo (1.1.4) tal que $u_n \rightharpoonup 0$ em X. Então a sequência (u_n) satisfaz uma das seguintes afirmações:*
(a) $u_n \to 0$ em X;
(b) Existem $\rho, \eta > 0$ e uma sequência (y_n) em $\mathbb{R}^N$ tais que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{U_{\rho,y_n}} |u_n|^2 \geq \eta,$$

com

$$U_{\rho,y_n} := B_\rho(y_n) \cap (\mathbb{R}^N\setminus\overline{B_R(0)}).$$

Demonstração:

Suponhamos que a afirmação (b) não é satisfeita. Então, existe $\rho > 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{U_{\rho,y}} |u_n|^2\right) = 0.$$

Do Lema de Lions (ver Apêndice, Lema A.7),

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B_R(0)}} |u_n|^q = 0\ ,\ \forall q \in (2, 2^*). \tag{1.3.7}$$

Então, usando o fato de que (u_n) satisfaz (1.1.4), obtemos

$$||u_n||^2 = o_n(1) + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} |u_n|^{2^*}. \tag{1.3.8}$$

Notemos que (1.3.8) implica que $u_n \to 0$ em X. De fato, pelo Lema 1.2 a sequência (u_n) é limitada em X e daí, a menos de subsequência,

$$||u_n||^2 \to l.$$

Então, supondo por absurdo que $u_n \not\to 0$, temos

$$||u_n||^2 \to l > 0.$$

Como (u_n) satisfaz (1.1.4), segue de (1.3.7) e (1.3.8) que

$$\begin{aligned} c + o_n(1) &= I(u_n) = \frac{1}{2}||u_n||^2 - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} |u_n|^{2^*} + o_n(1) \\ &= \frac{1}{2}||u_n||^2 - \frac{1}{2^*}||u_n||^2 + o_n(1) \\ &= \frac{1}{N} l + o_n(1) \end{aligned}$$

e portanto,

$$c = \frac{1}{N} l. \tag{1.3.9}$$

Por outro lado, de (1.3.6), temos

$$\begin{aligned} l + o_n(1) &= ||u_n||^2 \geq C(R)^{-2} \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} |u_n|^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} \\ &\geq S \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} |u_n|^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} = S \left(||u_n||^2 + o_n(1) \right)^{\frac{2}{2^*}} \\ &= S l^{\frac{2}{2^*}} + o_n(1) \end{aligned}$$

e consequentemente,

$$l \geq S l^{\frac{2}{2^*}}.$$

Então, de (1.3.9), segue que

$$c \geq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$$

e isto é um absurdo, pois da Proposição 1.1 e de (1.2.16) temos

$$c < c_\infty < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}.$$

■

1.4 Existência de solução ground state radialmente simétrica

Mostramos agora a existência de solução ground state radialmente simétrica para o problema (P_1).

Demonstração do Teorema 1.1:

Começamos mostrando que o limite fraco u da sequência (u_n) satisfazendo (1.1.4) é ponto crítico do funcional J definido em (1.1.2). De fato, sendo $u_n \rightharpoonup u$ em X temos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} (\nabla u_n \nabla w + u_n w) \to \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} (\nabla u \nabla w + uw) \text{ quando } n \to \infty, \tag{1.4.1}$$

para cada $w \in X$. Além disso, pelo Lema de Brezis-Lieb (ver Apêndice, Lema A.5),

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} |u_n|^{q-2} u_n w \to \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} |u|^{2^*-2} uw \text{ quando } n \to \infty \tag{1.4.2}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} |u_n|^{2^*-2} u_n w \to \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} |u|^{2^*-2} uw \text{ quando } n \to \infty, \tag{1.4.3}$$

para cada $w \in X$. Portanto, de (1.1.4), (1.4.1), (1.4.2) e (1.4.3), para cada $w \in X$, temos

$$\begin{aligned} o_n(1) &= I'(u_n)w \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} (\nabla u_n \nabla w + u_n w) - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} |u_n|^{q-2} u_n w \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} |u_n|^{2^*-2} u_n w \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} (\nabla u \nabla w + uw) - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} |u|^{q-2} uw \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} |u|^{2^*-2} uw + o_n(1) \\ &= I'(u)w + o_n(1). \end{aligned}$$

Concluímos então que, $I'(u)w = 0$ para todo $w \in X$, ou seja, u é ponto crítico de I. Daí, pelo Principio de Criticalidade Simétrica de Palais (ver Apêndice, Teorema A.17), u é ponto crítico de J.

Agora, vamos mostrar que u é não nulo; para isto, suponhamos por contradição que $u \equiv 0$, ou seja,

$$u_n \rightharpoonup 0.$$

Notemos que

$$u_n \not\to 0.$$

De fato, pois caso contrário, se $u_n \to 0$, sendo I um funcional de classe C^1, seguiria que $I(u_n) \to 0$ e isto é um absurdo, pois $I(u_n) \to c$ e $c > 0$. Portanto, pela Proposição 1.2, existem $\rho, \eta > 0$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ tais que

$$\liminf_{n \to \infty} \int_{U_{\rho, y_n}} |u_n|^2 \geq \eta > 0.$$

Notemos agora que a sequência (y_n) é não limitada. De fato, pois caso contrário, se (y_n) fosse limitada, então (y_n) teria uma subsequência, a qual ainda denotamos por (y_n), tal que $y_n \to y$ em $\mathbb{R}^N$, para algum $y \in \mathbb{R}^N$. Portanto, existiria $R > 0$ suficientemente grande tal que $B_\rho(y_n) \subset B_R(y)$ para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Daí,

$$\int_{U_{R,y}} |u_n|^2 \geq \int_{U_{\rho,y_n}} |u_n|^2 \geq \eta > 0, \tag{1.4.4}$$

para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Mas isto não pode ocorrer, pois supondo $u_n \rightharpoonup 0$ em X, segue por imersão compacta que $u_n \to 0$ em $L^2(U_{R,y})$ e isto contradiz (1.4.4). Com isto, concluimos que, passando a uma subsequência se necessário, temos

$$|y_n| \to +\infty.$$

Seja $E : X \to H^1(\mathbb{R}^N)$ o operador extensão satisfazendo

$$||E(u)||_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \xi ||u|| \quad , \quad \forall u \in X.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$w_n(x) := E(u_n)(x + y_n) \ , \ x \in \mathbb{R}^N.$$

Pela definição da sequência (w_n),

$$\int_{U_{\rho,0}} |w_n|^2 = \int_{U_{\rho,y_n}} |E(u_n)|^2 = \int_{U_{\rho,y_n}} |u_n|^2 \geq \eta > 0 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.4.5}$$

Por outro lado,

$$||w_n||_{H^1(\mathbb{R}^N)} = ||E(u_n)||_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \xi ||u_n|| \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e portanto, a sequência (w_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, existem uma subsequência de (w_n), a qual ainda denotamos por (w_n), e $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tais que $w_n \rightharpoonup w$.

Notemos que w é não nulo. De fato, pois caso contrário, se $w_n \rightharpoonup 0$, seguiria por imersão compacta que $w_n \to 0$ em $L^2(U_{\rho,0})$ e isto contradiria (1.4.5).

Afirmamos que

$$I'_\infty(w)w = 0.$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} o_n(1) &= I'(u_n)u_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} \left(|\nabla u_n|^2 + |u_n|^2 \right) - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} |u_n|^q - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} |u_n|^{2^*} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(-y_n)}} \left(|\nabla w_n|^2 + |w_n|^2 \right) - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(-y_n)}} |w_n|^q - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(-y_n)}} |w_n|^{2^*}. \end{aligned}$$

Como $|y_n| \to +\infty$, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(-y_n)}} \left(|\nabla w_n|^2 + |w_n|^2 \right) \to \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w|^2 + |w|^2 \right) \text{ quando } n \to \infty;$$

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(-y_n)}} |w_n|^q \to \int_{\mathbb{R}^N} |w|^q \text{ quando } n \to \infty$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(-y_n)}} |w_n|^{2^*} \to \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{2^*} \text{ quando } n \to \infty.$$

Portanto,

$$o_n(1) = I'_\infty(w)w + o_n(1)$$

e, consequentemente, $I'_\infty(w)w = 0$.

Sendo

$$s \mapsto |s|^{q-2} + |s|^{2^*-2}$$

uma função crescente em $|s|$, temos que

$$c_\infty = \inf \left\{ I_\infty(\omega) \ : \ \omega \in H^1(\mathbb{R}^N) \backslash \{0\} \ , \ I'_\infty(\omega)\omega = 0 \right\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} c_\infty &\leq I_\infty(w) = I_\infty(w) - \frac{1}{2} I'_\infty(w)w \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |w|^q + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{2^*}. \end{aligned}$$

Usando Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} c_\infty &\leq \liminf_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(-y_n)}} |w_n|^q + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(-y_n)}} |w_n|^{2^*} \right] \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left[I(u_n) - \frac{1}{2} I(u_n)u_n \right] \\ &= \liminf_{n\to\infty} I(u_n) = c \end{aligned}$$

e isto contradiz a Proposição 1.1. Como esta contradição foi obtida supondo $u \equiv 0$, concluimos que u é não nulo.

Finalmente, mostramos que u é ground state. Sendo u ponto de crítico de J,

$$\begin{aligned} J(u) &= J(u) - \frac{1}{2} J'(u)u \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} |u|^q + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}. \end{aligned}$$

Como u é limite fraco de uma sequência (u_n) satisfazendo (1.1.4), obtemos usando Lema de Fatou que,

$$\begin{aligned} J(u) &\leq \liminf_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} |u_n|^q + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) \int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R(0)}} |u_n|^{2^*} \right] \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left[I(u_n) - \frac{1}{2} I'(u_n)u_n \right] \\ &= \liminf_{n\to\infty} I(u_n) = c. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$c = \inf \{I(\omega)\ :\ \omega \in X\backslash\{0\}\ ,\ I'(\omega)\omega = 0\}$$

e portanto,

$$c \leq I(u) = J(u).$$

Concluímos então que $J(u) = c$, ou seja, u é ground state.

■

Capítulo 2

Problema crítico com massa zero

Para o estudo do segundo problema deste trabalho, consideramos o espaço de Sobolev

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \ : \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N) \ , \ i = 1, \ldots, N \right\}$$

munido da norma

$$||u|| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Para o leitor interessado em saber um pouco mais a respeito do espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, recomendamos a referência [11].

Neste capítulo, estamos interessados em estudar a seguinte equação elíptica não linear em $\mathbb{R}^N$:

$$(P_2) \qquad \begin{cases} -\Delta u = g(u) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N, \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

com $N \geq 3$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ denotando uma função contínua e ímpar que satisfaz

(g.1) $\displaystyle\lim_{s \to 0} \frac{g(s)}{s^{2^*-1}} = 0;$

(g.2) $\displaystyle\lim_{s \to +\infty} \frac{|g(s)|}{|s|^{2^*-1}} = 1$

e

(g.3) Existe $\zeta > 0$ tal que $g(s) > 0$ para $0 < s < \zeta$ e $g(s) \leq 0$ para $s \geq \zeta$.

Observação 2.1. : *Um exemplo de uma função contínua e ímpar que verifica as hipóteses (g.1)-(g.3) é a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$g(s) = \begin{cases} \tilde{g}(s) \ , \ \textit{se } s \geq 0, \\ -\tilde{g}(-s) \ , \ \textit{se } s < 0, \end{cases}$$

com $\tilde{g} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{g}(s) = \begin{cases} s^{q-1} \ , \ \textit{se} \ \ 0 \leq s < \delta, \\ -\left[\dfrac{\delta^{q-1} + (2\delta)^{2^*-1}}{\delta} \right] s + 2\delta^{q-1} + (2\delta)^{2^*-1} \ , \ \textit{se } \delta \leq s \leq 2\delta, \\ -s^{2^*-1} \ , \ \textit{se} \ \ 2\delta < s, \end{cases}$$

para $\delta > 0$ *fixado e* $q > 2^*$.

Nossos principais propósitos são estabelecer existência de solução ground state para (P_2) e também estabelecer uma caracterização do tipo Passo da Montanha para tais soluções. Lembramos que uma solução ω de (P_2) é, por definição, ground state se

$$I(\omega) = m,$$

com

$$m = \inf\{I(u) \ ; \ u \text{ é solução de } (P_2)\}. \tag{2.0.1}$$

Aqui, estamos denotando por $I : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ o funcional energia associado a (P_2) e definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(u) \quad , \quad u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \tag{2.0.2}$$

com $G(s) = \displaystyle\int_0^s g(\tau)d\tau$.

Motivados pelo trabalho [13], complementamos o estudo feito no referido trabalho no sentido de que consideramos o caso de "massa zero"e o termo não linear com crescimento crítico.

Um dos principais resultados deste capítulo é o seguinte:

Teorema 2.1. : *Seja* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e ímpar que satisfaz (g.1) - (g.3). Então, o problema* (P_2) *tem uma solução ground state positiva, radialmente simétrica e decrescente com relação ao raio.*

Para demonstrar o Teorema 2.1, seguimos ideias parecidas às usadas em [13]; porém, enfatizamos que se consideramos o termo não linear com crescimento crítico, não podemos fazer uso de Lema de Compacidade de Strauss como no referido trabalho.

Note que, neste capítulo, não estamos supondo que

$$s \mapsto \frac{g(s)}{s}$$

é uma função crescente em $|s|$. Isto motiva a investigar se, neste caso, a energia das soluções ground state de (P_2) coincide com nivel minimax do Teorema do Passo da Montanha. Motivados por esta questão, neste capítulo também estabelecemos o seguinte resultado:

Teorema 2.2. : *Sejam* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e ímpar que satisfaz (g.1)-(g.3),* $I : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ *o funcional energia definido em (2.0.2),* m *o valor definido em (2.0.1) e*

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], D^{1,2}(\mathbb{R}^N)) : \gamma(0) = 0 \ , \ I(\gamma(1)) < 0\}.$$

Então,

$$m = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)).$$

Ressaltamos que a demonstração do Teorema 2.2 segue de argumentos parecidos aos encontrados em [22].

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: na seção 2.1, mostramos existência de solução ground state positiva e radialmente simétrica para (P_2). Na seção 2.2, mostramos que o funcional energia associado a (P_2) satisfaz a geometria do Passo da Montanha e que o mínimo das energias das soluções de (P_2) coincide com o nível do Passo da Montanha.

2.1 Existência de solução ground state positiva e radialmente simétrica

Nesta seção, mostramos existência de solução ground state positiva e radialmente simétrica para (P_2); mais especificamente, demonstramos o Teorema 2.1.

Esta seção está organizada da seguinte forma: na primeira subseção, mostramos existência de uma solução de (P_2) que é não negativa, radialmente simétrica e não crescente com relação ao raio. Na subseção 2.1.2, mostramos a regularidade da solução obtida na subseção 2.1.1. Na subseção 2.1.3, mostramos algumas propriedades desta solução. Na subseção 2.1.4, concluímos a demonstração do Teorema 2.1.

2.1.1 Existência de solução

Nesta subseção, demonstramos um resultado de existência de solução para (P_2). Fazemos isto seguindo ideias parecidas às encontradas em [13], usando simetrização de Schwarz, lemas radiais, argumentos de mudança de variável e Teorema dos Multiplicadores de Lagrange. Ressaltamos que, devido estarmos considerando um termo não linear com crescimento crítico, não podemos fazer uso de Lema de Compacidade de Strauss como feito em [13].

Proposição 2.1. : *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e ímpar que satisfaz (g.1)-(g.3). Então, o problema (P_2) tem uma solução $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ que é não negativa q.t.p. $\mathbb{R}^N$, radialmente simétrica e não crescente com relação ao raio.*

Demonstração:

Denotamos por $V : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ o funcional definido por

$$V(\omega) := \int_{\mathbb{R}^N} G(\omega) \quad , \quad \omega \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N),$$

e por S a variedade

$$S := \left\{ \omega \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \ : \ V(\omega) = 1 \right\}. \tag{2.1.1}$$

Primeiramente, mostramos que $S \neq \emptyset$. Para $R > 0$, definamos

$$\omega_R(x) = \begin{cases} \zeta \ , \ \text{se } |x| \leq R, \\ \zeta \left(R + 1 - |x| \right) \ , \ \text{se } |x| \in [R, R+1] \, , \\ 0 \ , \ \text{se } |x| \geq R + 1. \end{cases}$$

Temos que $\omega_R \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\begin{aligned} V(\omega_R) &= \int_{B_{R+1}(0)} G(\omega_R) = \int_{B_R(0)} G(\omega_R) + \int_{B_{R+1}(0)\setminus B_R(0)} G(\omega_R) \\ &\geq G(\zeta)\,|B_R(0)| - \int_{B_{R+1}(0)\setminus B_R(0)} |G(\omega_R)| \\ &\geq G(\zeta)\,|B_R(0)| - \max_{0\leq s\leq \zeta} |G(s)|\,|B_{R+1}(0)\setminus B_R(0)|\,. \end{aligned}$$

De (g.3) temos que $G(\zeta) > 0$; portanto, existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$V(\omega_R) \geq C_1 R^N - C_2 R^{N-1}.$$

Então, para $R > 0$ suficientemente grande, segue da desigualdade acima que $V(\omega_R) > 0$. Logo, introduzindo sobre ω_R uma mudança de variável, a saber,

$$\omega_{R,\sigma}(x) = \omega_R\left(\frac{x}{\sigma}\right)\ ,\ \text{com } \sigma > 0,$$

temos que $V(\omega_{R,\sigma}) = \sigma^N V(\omega_R)$. Então, considerando $\sigma_0 = [V(\omega_R)]^{-\frac{1}{N}} > 0$, obtemos que $V(\omega_{R,\sigma_0}) = 1$. Com isto, concluímos que S é não vazio.

Notemos agora que $V'(\omega) \neq 0$ para todo $\omega \in S$. De fato, $V'(\omega) = 0$ significa que $V'(\omega)v = 0$ para todo $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, o que implica que $g(\omega) = 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Mas isto não pode ocorrer, pois sendo $\omega \in S$, não podemos ter $\omega = 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ porque $V(\omega) = 1$. Além disso, sendo $\omega \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, temos que o conjunto $N := \{x \in \mathbb{R}^N\ ;\ |\omega(x)| < \zeta\}$ tem medida de Lebesgue positiva e, da condição (g.3) e do fato de g ser ímpar, temos $g(\omega(x)) \neq 0$ para $x \in N$.

Denotamos por $T : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ o funcional definido por

$$T(\omega) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega|^2\ \ ,\ \ \omega \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Afim de encontrarmos solução de (P_2), mostramos agora existência de solução para o seguinte problema de minimização:

$$\min\{T(\omega)\ :\ \omega \in S\}\,. \tag{2.1.2}$$

Notemos que $T(\omega) \geq 0$ para todo $\omega \in S$; logo, existe

$$M := \inf\{T(\omega)\ :\ \omega \in S\}$$

e $0 \leq M < +\infty$.

Seja (u_n) uma sequência em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$T(u_n) \to M \ \text{ e }\ V(u_n) = 1.$$

Por resultados de espaços de Sobolev, $(|u_n|)$ é uma sequência em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e

$$T(|u_n|) \to M \ \text{ e }\ V(|u_n|) = 1. \tag{2.1.3}$$

Usando simetrização de Schwarz (ver Apêndice, Teoremas A.9 e A.10) , podemos supor que $(|u_n|)$ é radialmente simétrica e não crescente com relação ao raio.

De (2.1.3), temos que $(|u_n|)$ é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, por imersão contínua, temos que $(|u_n|)$ é limitada em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$.

Sendo $(|u_n|)$ limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, ela tem uma subsequência, a qual ainda denotamos por $(|u_n|)$, tal que $|u_n| \rightharpoonup \bar{u}$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $|u_n| \to \bar{u}$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Notemos que esta última convergência implica que $\bar{u}$ é não negativa q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, radialmente simétrica e não crescente com relação ao raio.

Seja $G_1(s) := \int_0^s g^+(\tau)d\tau$, com g^+ denotando a parte positiva da função g, ou seja, $g^+(s) = \max\{g(s), 0\}$. Notemos que (g.3) implica que

$$\sup_{s\geq 0} g^+(s) < +\infty.$$

Além disso, temos que $G_1(0) = 0$ e, sendo g contínua, também temos que $G_1 \in C^1(\mathbb{R})$. Então, usando resultados de espaços de Sobolev, temos que $(G_1(|u_n|))$ é uma sequência em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ com derivadas fracas

$$\frac{\partial\left[G_1(|u_n|)\right]}{\partial x_i} = g^+(|u_n|)\frac{\partial |u_n|}{\partial x_i}\ ,\ i = 1, \ldots, N.$$

Como

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla G_1(|u_n|)|^2 &= \int_{B_R(0)} \left[\left|\frac{\partial G_1(|u_n|)}{\partial x_1}\right|^2 + \ldots + \left|\frac{\partial G_1(|u_n|)}{\partial x_N}\right|^2\right] \\ &\leq \sup_{s\geq 0} g^+(s) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla |u_n||^2, \end{aligned}$$

temos que $(G_1(|u_n|))$ é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Logo $G_1(|u_n|) \rightharpoonup G_1(\bar{u})$ em $D^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e daí segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_R(0)} G_1(|u_n|) = \int_{B_R(0)} G_1(\bar{u}), \tag{2.1.4}$$

para qualquer $R > 0$ fixado.

Notemos agora que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} G_1(|u_n|) = 0\ ,\ \text{uniformemente em } n. \tag{2.1.5}$$

De fato, da condição (g.1), temos que dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$G_1(s) < \frac{\varepsilon}{2^*}|s|^{2^*} \quad ,\quad \forall |s| < \delta. \tag{2.1.6}$$

Usando Lema Radial (ver Apêndice, Lema A.10), obtemos a existência de uma função $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes hipóteses:

$$\lim_{R\to+\infty} \beta(R) = 0$$

e

$$|u_n(x)| \leq \beta(R)\ ,\ \forall |x| \geq R\ \text{ e uniformemente em } n.$$

Então, para $R > 0$ suficientemente grande, temos

$$|u_n(x)| \leq \beta(R) < \delta\ \ ,\ \ \forall |x| \geq R\ \text{ e uniformemente em } n.$$

Usando (2.1.6),

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} G_1(|u_n|) < \frac{\varepsilon}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |u_n|^{2^*} \leq \varepsilon C$$

uniformemente em n para alguma constante $C > 0$, mostrando (2.1.5).

De (2.1.4) e (2.1.5), concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} G_1(|u_n|) = \int_{\mathbb{R}^N} G_1(\bar{u}).$$

Denotando por g^- a parte negativa de g, ou seja, $g^-(s) := \max\{-g, 0\}$, temos $g = g^+ - g^-$ e daí $G = G_1 - G_2$, com $G_2(s) := \int_0^s g^-(\tau)d\tau$. Então de (2.1.3),

$$1 + \int_{\mathbb{R}^N} G_2(|u_n|) = \int_{\mathbb{R}^N} G_1(|u_n|).$$

Usando Lema de Fatou,

$$1 + \int_{\mathbb{R}^N} G_2(\bar{u}) \leq \int_{\mathbb{R}^N} G_1(\bar{u}),$$

ou seja,

$$1 \leq V(\bar{u}). \tag{2.1.7}$$

Sendo a norma uma função semicontínua inferiormente, o fato de que $|u_n| \rightharpoonup \bar{u}$ implica que

$$T(\bar{u}) \leq \lim_{n\to+\infty} T(|u_n|) = M.$$

Queremos mostrar que $V(\bar{u}) = 1$. Suponhamos por contradição que $V(\bar{u}) > 1$. Definindo

$$\bar{u}_{\sigma_0}(x) := \bar{u}\left(\frac{x}{\sigma_0}\right)\ ,\ \text{com } \sigma_0 = [V(\bar{u})]^{-\frac{1}{N}}\ ,$$

temos que $V(\bar{u}_{\sigma_0}) = {\sigma_0}^N V(\bar{u}) = 1$, com $0 < \sigma_0 < 1$. Além disso, $T(\bar{u}_{\sigma_0}) = {\sigma_0}^{N-2} T(\bar{u}) \leq {\sigma_0}^{N-2} M$. Mas pela definição de M temos que $M \leq T(\bar{u}_{\sigma_0})$; logo, necessariamente devemos ter $M = 0$ e daí $T(\bar{u}) = 0$, que implica que $\bar{u} = 0$ e isto contradiz (2.1.7). Com isto, concluímos que $V(\bar{u}) = 1$ e $T(\bar{u}) = M$, ou seja, $\bar{u}$ é solução do problema de minimização (2.1.2).

Sendo V e T funcionais de classe C^1 sobre $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, segue do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (ver Apêndice, Teorema A.16) que existe um multiplicador de Lagrange θ tal que $T'(\bar{u}) = \theta V'(\bar{u})$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla \bar{u} \nabla w = T'(\bar{u})w = \theta V'(\bar{u})w = \theta \int_{\mathbb{R}^N} g(\bar{u})w \quad , \quad \forall w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Notemos que $\theta > 0$. De fato, se $\theta = 0$ então

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2 = 0. \int_{\mathbb{R}^N} g(\bar{u})\bar{u} = 0,$$

que por sua vez implica que $\bar{u} = 0$ e isto é impossível, pois $V(\bar{u}) = 1$. Suponhamos por contradição que $\theta < 0$. Como $V'(\omega) \neq 0$ para todo $\omega \in S$ e $\bar{u} \in S$, temos que existe $w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que $V'(\bar{u})w > 0$. Sendo

$$V'(\bar{u})w = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{V(\bar{u} + \epsilon w) - V(\bar{u})}{\epsilon},$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno vale

$$0 < V(\bar{u} + \epsilon w) - V(\bar{u})$$

e consequentemente,

$$V(\bar{u}) < V(\bar{u} + \epsilon w). \tag{2.1.8}$$

Por outro lado,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{T(\bar{u} + \epsilon w) - T(\bar{u})}{\epsilon} = T'(\bar{u})w = \theta . V'(\bar{u})w < 0.$$

Então, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, vale

$$T(\bar{u} + \epsilon w) - T(\bar{u}) < 0$$

e portanto,

$$T(\bar{u} + \epsilon w) < T(\bar{u}). \tag{2.1.9}$$

Daí, considerando $v = \bar{u} + \epsilon w$ com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, segue de (2.1.8) e (2.1.9) que $1 = V(\bar{u}) < V(v)$ e $T(v) < T(\bar{u}) = M$. Definindo

$$v_\sigma(x) := v\left(\frac{x}{\sigma}\right) \quad , \quad \text{com} \quad \sigma = [V(v)]^{-\frac{1}{N}} \,,$$

temos $0 < \sigma < 1$, $V(v_\sigma) = 1$ e $T(v_\sigma) = \sigma^{N-2}T(v) < M$, o que é um absurdo pela definição de M. Com isto concluímos que $\theta > 0$.

O que provamos até agora foi a existência de uma função $\bar{u} \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e de um número real $\theta > 0$ tais que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla \bar{u} \nabla w = T'(\bar{u})w = \theta V'(\bar{u})w = \theta \int_{\mathbb{R}^N} g(\bar{u})w \quad , \quad \forall w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \tag{2.1.10}$$

Vamos mostrar a partir disto que existe $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ solução de (P_2), ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla w = \int_{\mathbb{R}^N} g(u)w \quad , \quad \forall w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

De fato, considerando a mudança de variável

$$\bar{u}_{\sigma_1}(x) := \bar{u}\left(\frac{x}{\sigma_1}\right) \quad , \quad \text{com } \sigma_1 = \theta^{\frac{1}{2}},$$

temos $\sigma_1 > 0$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla \bar{u}_{\sigma_1}(x) \nabla w(x) dx = \sigma_1^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \bar{u}(x) \nabla w(x\sigma_1) dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(\bar{u}_{\sigma_1}(x))w(x)dx = \sigma_1^N \int_{\mathbb{R}^N} g(\bar{u}(x))w(x\sigma_1)dx.$$

Sendo $w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, segue de (2.1.10) que

$$\sigma_1^{2-N} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla \bar{u}_{\sigma_1}(x) \nabla w(x) dx = \theta \sigma_1^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} g(\bar{u}_{\sigma_1}(x))w(x)dx,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla \bar{u}_{\sigma_1}(x) \nabla w(x) dx = \frac{\theta}{\sigma_1^2} \int_{\mathbb{R}^N} g(\bar{u}_{\sigma_1}(x))w(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(\bar{u}_{\sigma_1}(x))w(x)dx$$

e portanto $\bar{u}_{\sigma_1} \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é solução de (P_2).

■

2.1.2 Regularidade da solução

Nesta subseção, mostramos que a solução obtida pela Proposição 2.1 é clássica e para isto fazemos uso de um resultado devido a Brezis e Kato provado em [15]. Notemos que a condição (g.3) não é usada na demonstração deste fato.

Proposição 2.2. : *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e ímpar que satisfaz (g.1)-(g.2). Se $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução de (P_2) radialmente simétrica, então $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração:

Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e ímpar que satisfaz (g.1)-(g.2), segue que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|g(s)| \leq C\left(1 + |s|^{2^*-1}\right) \quad , \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{2.1.11}$$

Sendo u solução de (P_2), temos que u é solução da equação

$$-\Delta u = a(x)\,(1 + |u|) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

com

$$a(x) := \frac{g(u(x))}{1 + |u(x)|}.$$

Notemos que, usando (2.1.11),

$$|a| = \frac{|g(u)|}{1+|u|} \leq C\left(\frac{1}{1+|u|} + \frac{|u|^{2^*-1}}{1+|u|}\right) \leq C\left(1 + |u|^{\frac{4}{N-2}}\right).$$

Como $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, temos que $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$; então, notando que

$$2^* = \frac{4}{N-2}.\frac{N}{2},$$

obtemos que $a \in L^{N/2}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, sendo $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, também temos que $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$; portanto, usando um resultado devido a Brezis e Kato (ver Apêndice, Lema A.13), obtemos que $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para qualquer $1 \leq p < +\infty$. Em vista de (2.1.11), temos então que $-\Delta u = g(u) \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para qualquer $1 \leq p < +\infty$; assim, pela Desigualdade de Caldéron-Zygmund (ver Apêndice, Teorema A.13), $u \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para qualquer $1 \leq p < +\infty$ e então, usando Teorema de Imersão de Sobolev (ver Apêndice, Lema A.9), obtemos $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para qualquer $\alpha \in (0,1)$.

Como u é radial e solução forte de (P_2), temos que u satisfaz a equação

$$-u_{rr}(r) - \left(\frac{N-1}{r}\right) u_r(r) = g(u(r)) \quad , \quad r \in (0, +\infty), \tag{2.1.12}$$

e disto segue que u_{rr} é contínua em $(0, +\infty)$. Afim de mostrarmos que u_{rr} também é contínua em $r = 0$, definamos $w(r) := g(u(r))$. Temos que w é contínua em $[0, +\infty)$. Reescrevendo (2.1.12) como

$$-\frac{d}{dr}\left(r^{N-1} u_r(r)\right) = r^{N-1} w(r)$$

e integrando de 0 a r, obtemos

$$r^{N-1} u_r(r) = -\int_0^r s^{N-1} w(s) ds.$$

Fazendo mudança de variável $s = rt$, segue que

$$\frac{u_r(r)}{r} = -\int_0^1 t^{N-1} w(rt)dt.$$

Notemos que

$$\lim_{r\to 0}\int_0^1 t^{N-1} w(rt)dt = \int_0^1 t^{N-1} w(0)dt = \frac{w(0)}{N};$$

portanto, existe $u_{rr}(0)$ e

$$u_{rr}(0) = \lim_{r\to 0}\frac{u_r(r) - u_r(0)}{r} = \lim_{r\to 0}\frac{u_r(r)}{r} = -\frac{w(0)}{N}.$$

Além disso, da equação (2.1.12),

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0} u_{rr}(r) &= (1-N)\lim_{r\to 0}\frac{u_r(r)}{r} - \lim_{r\to 0} w(r)\\ &= w(0) - \frac{w(0)}{N} - w(0)\\ &= -\frac{w(0)}{N},\end{aligned}$$

ou seja, concluímos a continuidade de u_{rr} em $[0,+\infty)$. Logo $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$.

■

2.1.3 Propriedades da solução

Nesta subseção, mostramos algumas propriedades da solução obtida na subseção 2.1.1. Começamos mostrando que esta solução é positiva em todo $\mathbb{R}^N$ e descrescente com relação ao raio e para isto fazemos uso de princípios de máximos.

Proposição 2.3. : *Se $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N)$ é uma solução de (P_2) dada pela Proposição 2.1, então $u(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Além disso, u é decrescente com relação ao raio r, ou seja, $u'(r) < 0$ para todo $r > 0$.*

Demonstração:

Sendo $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N)$ solução de (P_2) dada pela Proposição 2.1, u é não negativa em $\mathbb{R}^N$, radialmente simétrica e não crescente com relação ao raio e portanto

$$0 \le u(x) \le u(0) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Notemos que

$$u(0) > 0. \tag{2.1.13}$$

De fato, pois caso contrário, se $u(0) = 0$, teríamos $u(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e isto contradiz o fato de a solução dada pela Proposição 2.1 ser não trivial.

Suponhamos por contradição que $u(0) > \zeta$, com ζ dado pela condição (g.3), e definamos

$$A := \left\{x \in \mathbb{R}^N \ : \ u(x) > \zeta\right\}.$$

Sendo $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N)$, temos que A é aberto e limitado. Além disso, da condição (g.3),

$$-\Delta u = g(u) < 0 \ \text{ em } \ A;$$

portanto, pelo Princípio do Máximo Fraco (ver Apêndice, Teorema A.11),

$$u(x) \leq \max_{x\in\overline{A}} u(x) = \max_{x\in\partial A} u(x) = \zeta \ \ , \ \ \forall x \in A,$$

o que é um absurdo pela própria definição do conjunto A. Com isto, concluímos que

$$0 \leq u(x) \leq u(0) \leq \zeta \ \ , \ \ \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

e, novamente pela condição (g.3), obtemos

$$-\Delta u = g(u) \geq 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N. \tag{2.1.14}$$

Agora, suponhamos por contradição que existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$, com $|x_0|> 0$, tal que $u(x_0) = 0$. Como u é não negativa em $\mathbb{R}^N$, radialmente simétrica e não crescente com relação ao raio, segue que $u(x) = u(x_0) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ satisfazendo $|x|\geq |x_0|$. Então, para $R > |x_0|$, segue de (2.1.14) que

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) \geq 0 \ \text{ em } \ B_R(0), \\ u = 0 \ \text{ sobre } \ \partial B_R(0), \end{cases}$$

e $u(x_0) = 0$ para $x_0 \in B_R(0)$. Logo, pelo Princípio de Máximo Forte (ver Apêndice, Teorema A.12), obtemos que $u(x) = 0$ para todo $x \in B_R(0)$ e isto contradiz (2.1.13). Com isto, concluímos que $u(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Agora, seja $r > 0$ arbitrário e definamos

$$v(x) = u(x) - \min_{x\in B_r(0)} u(x) \ \ , \ \ x \in B_r(0).$$

De (2.1.14), temos que

$$-\Delta v = -\Delta u = g(u) \geq 0 \ \text{ em } B_r(0).$$

Além disso,

$$v(x) = u(x) - \min_{x\in B_r(0)} u(x) \geq 0 \ \ , \ \ \forall x \in B_r(0).$$

Notemos que, pelo Princípio do Máximo Fraco, para $x_0 \in \partial B_r(0)$ temos

$$v(x_0) = u(x_0) - \min_{x \in B_r(0)} u(x) = 0.$$

Segue então do Lema de Hopf (ver Apêndice, Lema A.12) que

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = \frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0) < 0,$$

com η denotando a normal unitária exterior. Sendo u radialmente simétrica, temos

$$u'(r) = \frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) < 0.$$

Como $r > 0$ foi considerado arbitrariamente, concluimos que $u'(r) < 0$ para todo $r > 0$.

■

O próximo resultado mostra que soluções de (P_2) satisfazem uma identidade provada por Pohozaev em [32]. Esta identidade é de fundamental importância para mostrar que, entre outras coisas, soluções de (P_2) dadas pela Proposição 2.1 são ground state.

A demonstração da dita identidade é feita em [13] e a repetimos aqui para dar completude ao trabalho. Para demonstrá-la, fazemos uso de fórmula de integração por partes e fórmula de coordenadas polares. Além disso, ressaltamos que a condição (g.3) não é usada na demonstração deste resultado.

Proposição 2.4. (Identidade de Pohozaev) : *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e ímpar que satisfaz (g.1)-(g.2). Se $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N)$ é solução de (P_2), então u satisfaz*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 = \frac{2N}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} G(u). \tag{2.1.15}$$

Demonstração:

Multiplicando a equação

$$-\Delta u = g(u) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N$$

por $x.\nabla u$ e integrando sobre $B_R(0)$, com $R > 0$ arbitrário, obtemos

$$\int_{B_R(0)} (-\Delta u)\,(x.\nabla u)\,dx = \int_{B_R(0)} g(u)\,(x.\nabla u)\,dx. \tag{2.1.16}$$

Temos que

$$\int_{B_R(0)} (-\Delta u)\,(x.\nabla u)\,dx \;=\; \int_{B_R(0)} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \sum_{j=1}^{N} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} dx.$$

Usando integração por partes e denotando por $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_N)$ a normal exterior unitária, segue que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_R(0)} (-\Delta u)\,(x.\nabla u)\,dx \\
= &\int_{B_R(0)} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) dx - \int_{\partial B_R(0)} \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}.\eta_i \sum_{j=1}^{N}\left(x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) ds(x) \\
= &\int_{B_R(0)} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}.\delta_{ij}.\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_i}.x_j.\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx - \int_{\partial B_R(0)} \frac{\partial u}{\partial \eta}.\frac{\partial u}{\partial x} ds(x) \\
= &\int_{B_R(0)} \left[|\nabla u|^2 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right) x_j\right] dx - R\int_{\partial B_R(0)} \left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 ds(x) \\
= &\left(1 - \frac{N}{2}\right)\int_{B_R(0)} |\nabla u|^2\,dx + \int_{\partial B_R(0)} \frac{|\nabla u|^2}{2}\,(\eta.x)\,ds(x) \\
&-R\int_{\partial B_R(0)} \left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 ds(x) \\
= &\left(\frac{2-N}{2}\right)\int_{B_R(0)} |\nabla u|^2\,dx + \frac{R}{2}\int_{\partial B_R(0)} |\nabla u|^2\,ds(x) \\
&-R\int_{\partial B_R(0)} \left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 ds(x). \qquad (2.1.17)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int_{B_R(0)} g(u)\,(x.\nabla u)\,dx = \int_{B_R(0)} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\,(G(u))\,x_i dx.$$

Usando integração por partes,

$$\begin{aligned}
\int_{B_R(0)} g(u)\,(x.\nabla u)\,dx &= -N\int_{B_R(0)} G(u)dx + \int_{\partial B_R(0)} G(u)\,(\eta x)\,ds(x) \\
&= -N\int_{B_R(0)} G(u)dx + R\int_{\partial B_R(0)} G(u)ds(x). \qquad (2.1.18)
\end{aligned}$$

Então, de (2.1.16), (2.1.17) e (2.1.18), obtemos

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2-N}{2}\right)\int_{B_R(0)} |\nabla u|^2\,dx + N\int_{B_R(0)} G(u)dx \qquad (2.1.19) \\
= \; &R\int_{\partial B_R(0)} \left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 ds(x) - \frac{R}{2}\int_{\partial B_R(0)} |\nabla u|^2\,ds(x) + R\int_{\partial B_R(0)} G(u)ds(x).
\end{aligned}$$

Vamos agora mostrar que o lado direito da igualdade em (2.1.19) converge para 0 para pelo menos uma sequência adequada (R_n) em $\mathbb{R}$ tal que $R_n \to +\infty$. Temos que

$$\begin{aligned} &\left| R\int_{\partial B_R(0)} \left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 ds(x) - \frac{R}{2}\int_{\partial B_R(0)} |\nabla u|^2 ds(x) + R\int_{\partial B_R(0)} G(u) ds(x)\right| \\ \leq\ & 2R\left[\int_{\partial B_R(0)} \left(|\nabla u|^2 + |G(u)|\right) ds(x)\right]. \end{aligned} \tag{2.1.20}$$

As condições (g.1) e (g.2) implicam que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$|g(s)| \leq C_1 |s|^{2^*-1} \quad , \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

e daí, obtemos a existência de uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$|G(s)| \leq C_2 |s|^{2^*} \quad , \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + |G(u)|\right) dx < +\infty.$$

Usando coordenadas polares (ver Apêndice, Teorema A.2),

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \left[\int_{\partial B_R(0)} \left(|\nabla u|^2 + |G(u)|\right) ds(x)\right] dR \\ &\qquad = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + |G(u)|\right) dx < +\infty. \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

Notemos que (2.1.21) implica

$$\liminf_{R\to+\infty} \left[R\int_{\partial B_R(0)} \left(|\nabla u|^2 + |G(u)|\right) ds(x)\right] = 0. \tag{2.1.22}$$

De fato, pois caso contrário, se

$$\liminf_{R\to+\infty} \left[R\int_{\partial B_R(0)} \left(|\nabla u|^2 + |G(u)|\right) ds(x)\right] = \alpha > 0,$$

teríamos a existência de um número $R_0 > 0$ tal que

$$R\int_{\partial B_R(0)} \left(|\nabla u|^2 + |G(u)|\right) ds(x) > \frac{\alpha}{2} \quad , \quad \forall R > R_0,$$

e daí,

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_{\partial B_R(0)} \left(|\nabla u|^2 + |G(u)|\right) ds(x)\right] dR \geq \frac{\alpha}{2}\int_{R_0}^{+\infty} \frac{1}{R} dR = +\infty,$$

contradizendo (2.1.21).

De (2.1.22), temos que existe uma sequência (R_n) em $\mathbb{R}$ tal que $R_n \to +\infty$ e

$$R_n \int_{\partial B_{R_n}(0)} \left(|\nabla u|^2 + |G(u)|\right) ds(x) \to 0.$$

Então, da desigualdade (2.1.20), temos que o lado direito da equação (2.1.19) converge para 0 se escolhemos $R = R_n$ e consideramos o limite de $n \to \infty$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_{R_n}(0)} |\nabla u|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_{R_n}(0)} G(u)dx = \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx.$$

Então, segue de (2.1.19), escolhendo $R = R_n$ e passando ao limite de $n \to \infty$, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx = \frac{2N}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} G(u)dx.$$

■

Uma consequência interessante da Proposição 2.4 é que podemos caracterizar a energia das soluções de (P_2) em termos de sua norma em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Mais especificamente,

Corolário 2.1. : *Sejam $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e ímpar que satisfaz (g.1)-(g.2) e $I : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ o funcional definido em (2.0.2). Se $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N)$ é solução de (P_2), então*

$$I(u) = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2.$$

Demonstração:

O funcional energia $I : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ associado ao problema (P_2) é definido por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(u) \quad , \quad u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Usando a identidade de Pohozaev (2.1.15), obtemos

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - \frac{N-2}{2N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{N-2}{N}\right] \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \\ &= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2. \end{aligned}$$

■

De posse de tal caracterização das energias das soluções de (P_2) em termos de suas normas, somos capazes agora de mostrar que as soluções de (P_2) dadas pela Proposição 2.1 são ground state.

Proposição 2.5. : *Seja $I : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ o funcional definido em (2.0.2). Se u é uma solução de (P_2) obtida pela Proposição 2.1, então para qualquer solução v de (P_2) temos*

$$0 < I(u) \le I(v).$$

Demonstração:

Se u é uma solução de (P_2) obtido pela Proposição 2.1, então

$$u(x) = \bar{u}\left(\frac{x}{\theta^{\frac{1}{2}}}\right) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

com $\theta > 0$ denotando um multiplicador de Lagrange e $\bar{u}$ denotando uma solução do problema de minimização (2.1.2), ou seja, $\bar{u} \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2 = 2M \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{u}) = 1.$$

Com as relações de mudança de variável entre u e $\bar{u}$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 = \theta^{\frac{N-2}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(u) = \theta^{\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} G(\bar{u}) = \theta^{\frac{N}{2}}.$$

Logo, da identidade de Pohozaev (2.1.15), segue

$$\theta^{\frac{N-2}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 = \frac{2N}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} G(u) = \frac{2N}{N-2}.\theta^{\frac{N}{2}}$$

e portanto,

$$\theta = \frac{N-2}{2N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2.$$

Pelo Corolário 2.1, temos

$$I(u) = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{N}.\theta^{\frac{N-2}{2}}.\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2 \\ &= \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{(N-2)}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2\right]^{\frac{(N-2)}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2 \\ &= \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{(N-2)}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2\right]^{\frac{N}{2}}. \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

Agora, seja v uma solução arbitrária de (P_2). Pela identidade de Pohozaev (2.1.15) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 = \frac{2N}{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} G(v). \tag{2.1.24}$$

Notemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(v) = \frac{N-2}{2N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 > 0.$$

Definindo

$$v_\sigma(x) := v\left(\frac{x}{\sigma}\right) \quad , \quad \text{com} \quad \sigma = \left[\int_{\mathbb{R}^N} G(v)\right]^{-\frac{1}{N}},$$

temos $\sigma > 0$, $v_\sigma \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(v_\sigma) = 1,$$

ou seja, $v_\sigma \in S$ com S definido em (2.1.1).

Queremos agora expressar $I(v)$ em termos de $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\sigma|^2$. Usando a definição de σ e (2.1.24) obtemos

$$\sigma = \left[\frac{N-2}{2N}\right]^{-\frac{1}{N}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2\right]^{-\frac{1}{N}}. \tag{2.1.25}$$

Por outro lado, pelas relações de mudança de variável entre v e v_σ,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\sigma|^2 = \sigma^{N-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2.$$

Então, usando (2.1.25), segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\sigma|^2 &= \left[\frac{N-2}{2N}\right]^{-\frac{(N-2)}{N}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2\right]^{-\frac{(N-2)}{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \\ &= \left[\frac{N-2}{2N}\right]^{-\frac{(N-2)}{N}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2\right]^{\frac{2}{N}} \end{aligned}$$

e portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 = \left[\frac{N-2}{2N}\right]^{\frac{(N-2)}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\sigma|^2\right]^{\frac{N}{2}}.$$

Do Corolário 2.1,

$$I(v) = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2.$$

Daí,

$$I(v) = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 = \frac{1}{N} \left[\frac{N-2}{2N}\right]^{\frac{(N-2)}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\sigma|^2\right]^{\frac{N}{2}}. \tag{2.1.26}$$

Sendo $\bar{u}$ solução do problema de minimização (2.1.2) e $v_\sigma \in S$, temos que

$$0 < \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \bar{u}|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\sigma|^2$$

e daí, usando as expressões (2.1.23) e (2.1.26), concluímos que

$$0 < I(u) \leq I(v).$$

■

A Proposição 2.5 dá uma conclusão tão importante que a colocamos em formato de observação para dá-la maior destaque em meio ao texto.

Observação 2.2. : *Pela Proposição 2.5, concluímos que m definido em (2.0.1) está bem definido. Além disso, se u é uma solução de (P_2) dada pela Proposição 2.1, segue da Proposição 2.5 que*

$$I(u) = m,$$

ou seja, u é ground state.

2.1.4 Conclusão dos resultados

Nesta subseção, concluímos a demonstração do Teorema 2.1.

Demonstração do Teorema 2.1:

Pela Proposição 2.1, temos que existe uma solução $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ de (P) que é não negativa q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, radialmente simétrica e não crescente com relação ao raio. Da Proposição 2.2, segue que $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap C^2(\mathbb{R}^N)$. A Proposição 2.3 implica que u é positiva e decrescente com relação ao raio. Pela Proposição 2.5, concluímos que u é ground state.

■

2.2 Caracterização do tipo Passo da Montanha para soluções ground state

Nesta seção, mostramos que o funcional $I : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definido em (2.0.2) satisfaz a geometria do Passo da Montanha. Isto significa que o nível minimax do Teorema do Passo da Montanha está bem definido. Além disso, mostramos também que este valor coincide com o mínimo das energias das soluções de (P_2); mais especificamente, demonstramos o Teorema 2.2.

Nesta seção, fazemos uso de ideias parecidas às encontradas em [22].

O primeiro resultado desta seção está relacionado à geometria do funcional I e diz basicamente que $0 \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é ponto de mínimo local estrito de I.

Lema 2.1. : *O funcional $I : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definido em (2.0.2) satisfaz as seguintes afirmações:*

(M.1) $I(0) = 0$
e
(M.2) Existem $\beta, \rho_1 > 0$ *tais que*

$$I(u) \geq \beta \quad , \quad \forall u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \ , \ ||u|| = \rho_1$$

e

$$I(u) > 0 \quad , \quad \forall u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \ , \ 0 < ||u|| \leq \rho_1.$$

Demonstração:
(M.1) é imediato pela definição do funcional I em (2.0.2).
As condições (g.1) e (g.2) implicam que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$|g(s)| \leq C_1 \, |s|^{2^*-1} \quad , \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

e daí, obtemos a existência de uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$|G(s)| \leq C_2 \, |s|^{2^*} \quad , \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$I(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - C_2|u|_{2^*}^{2^*} \quad , \quad \forall u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Usando a imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, temos que existe uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - C_3||u||^{2^*} \quad , \quad \forall u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Sendo $2 < 2^*$, existem $\rho_1 > 0$ suficientemente pequeno e $\beta > 0$ tais que

$$I(u) \geq \beta > 0 \quad , \quad \forall \ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \ , \ ||u|| = \rho_1,$$

e

$$I(u) > 0 \quad , \quad \forall \ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \ , \ 0 < ||u|| \leq \rho_1.$$

■

Vamos agora introduzir o funcional de Pohozaev e mostrar que $0 \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ também é um ponto de mínimo local estrito dele.

Lema 2.2. : *Seja* $\psi : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ *o funcional de Pohozaev definido por*

$$\psi(u) = \frac{N-2}{2}||u||^2 - N\int_{\mathbb{R}^N} G(u) \quad , \quad u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \tag{2.2.1}$$

Existe uma constante $\rho_2 > 0$ *tal que*

$$\psi(u) > 0 \quad , \quad \forall u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \ , \ 0 < ||u|| \leq \rho_2.$$

Demonstração:
Existe $C_1 > 0$ tal que

$$|G(s)| \leq C_1 \, |s|^{2^*} \quad , \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\psi(u) = \frac{N-2}{2}||u||^2 - N\int_{\mathbb{R}^N} G(u) \geq \frac{N-2}{2}||u||^2 - NC_1|u|_{2^*}^{2^*} \quad , \quad \forall u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Usando imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos a existência de uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\psi(u) \geq \frac{N-2}{2}||u||^2 - C_2||u||^{2^*} \quad , \quad \forall u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Como $2 < 2^*$, existe uma constante $\rho_2 > 0$ suficientemente pequena tal que

$$\psi(u) > 0 \quad , \quad \forall u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \ , \ 0 < ||u|| \leq \rho_2.$$

■

No que segue nesta seção, denotamos por Γ o conjunto

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], D^{1,2}(\mathbb{R}^N)) \ ; \ \gamma(0) = 0 \ , \ I(\gamma(1)) < 0\}. \tag{2.2.2}$$

No próximo resultado, mostramos que Γ definido desta forma é não vazio. Além disso, o próximo resultado também permite estabelecer uma relação entre m e o nível minimax do Passo da Montanha.

Lema 2.3. : *Sejam m definido em (2.0.1), Γ definido em (2.2.2) e $I : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ o funcional definido em (2.0.2). Existe $\gamma_0 \in \Gamma$ satisfazendo $m = \max_{t\in[0,1]} I(\gamma_0(t))$.*

Demonstração:
Seja u uma solução ground state de (P_2) e definamos $\alpha : [0, +\infty) \to D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ por

$$\alpha(t)(x) = \begin{cases} u\left(\dfrac{x}{t}\right) & \text{se } \ t > 0, \\ 0 \ \text{ se } \ t = 0. \end{cases}$$

Como

$$||\alpha(t)||^2 = t^{N-2}||u||^2 \to 0 \ \text{ quando } \ t \to 0,$$

temos que $\alpha \in C([0, +\infty), D^{1,2}(\mathbb{R}^N))$. Além disso, usando relações de mudança de variável,

$$\begin{aligned} I(\alpha(t)) &= \frac{1}{2}||\alpha(t)||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(\alpha(t)) \\ &= \frac{t^{N-2}}{2}||u||^2 - t^N \int_{\mathbb{R}^N} G(u) \quad , \quad \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

e portanto, $I(\alpha(t)) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$. Logo, existe $L > 0$ suficientemente grande tal que

$$I(\alpha(L)) < 0.$$

Notemos agora que

$$\frac{dI(\alpha(t))}{dt} = \frac{N-2}{2} t^{N-3} ||u||^2 - N t^{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} G(u).$$

Usando a identidade de Pohozaev (2.1.15),

$$\frac{dI(\alpha(t))}{dt} = \frac{N-2}{2} t^{N-3} ||u||^2 - \frac{N-2}{2} t^{N-1} ||u||^2.$$

Logo,

$$\frac{dI(\alpha(t))}{dt} > 0 \quad \text{se} \quad t < 1$$

e

$$\frac{dI(\alpha(t))}{dt} < 0 \quad \text{se} \quad t > 1.$$

Portanto,

$$\max_{t \in [0,+\infty)} I(\alpha(t)) = I(\alpha(1)) = I(u) = m.$$

Definindo $\gamma_0 : [0,1] \to D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ por

$$\gamma_0(t) := \alpha(t.L) \quad , \quad t \in [0,1],$$

segue o resultado.

■

Agora estamos em condições de mostrar a existência de um elemento em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ que está suficientemente afastado da origem e tem energia negativa. Mais especificamente,

Lema 2.4. : *Seja $I : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ o funcional definido em (2.0.2) e $\rho_1 > 0$ dado no Lema 2.1. Existe $e \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$||e|| > \rho_1 \quad e \quad I(e) < 0.$$

Demonstração:
Definamos

$$e := \gamma_0(1),$$

com $\gamma_0 \in C([0,1], D^{1,2}(\mathbb{R}^N))$ denotando a curva encontrada no Lema 2.3. Temos que

$$I(e) = I(\gamma_0(1)) = I(\alpha(L)) < 0.$$

Além disso, pelo Lema 2.1, necessariamente devemos ter

$$||e|| > \rho_1.$$

■

Notemos que o Lema 2.1 e o 2.4 juntos dizem que o funcional $I : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definido em (2.0.2) de fato satisfaz a geometria do Passo da Montanha e portanto está bem definido o valor

$$b := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)), \tag{2.2.3}$$

com Γ definido em (2.2.2).

Definidos m e b, mostramos no próximo resultado uma desigualdade envolvendo esses dois valores.

Corolário 2.2. : *Sejam m o valor definido em (2.0.1) e b o valor definido em (2.2.3). Temos que*

$$b \leq m.$$

Demonstração:

Pelo Lema 2.3, existe $\gamma_0 \in \Gamma$ satisfazendo

$$m = \max_{t \in [0,1]} I(\gamma_0(t)).$$

Então, usando a própria definição de b, concluímos que

$$b = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \leq m.$$

■

Agora estamos interessados em mostrar a desigualdade contrária para concluirmos assim a igualdade. Começamos denotando por $\wp$ a variedade de Pohozaev, ou seja,

$$\wp := \left\{ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \backslash \{0\} \ ; \ \frac{N-2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - N \int_{\mathbb{R}^N} G(u) = 0 \right\}. \tag{2.2.4}$$

Temos que $\wp$ é não vazio, pois a Proposição 2.4 implica que soluções de (P_2) dadas pela Proposição 2.1 pertencem a $\wp$.

O próximo resultado estabelece uma caracterização de m como ínfimo de I sobre a variedade de Pohozaev.

Lema 2.5. : *Sejam m o valor definido em (2.0.1), $\wp$ a variedade de Pohozaev definida em (2.2.4) e $I : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ o funcional definido em (2.0.2). Temos que*

$$m = \inf_{u \in \wp} I(u).$$

Demonstração:
Sejam S a variedade definida em (2.1.1) e $\Phi : S \to \wp$ a função definida por

$$\Phi(u)(x) := u\left(\frac{x}{t_u}\right) \quad , \quad \text{com} \quad t_u = \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{1}{2}} ||u||.$$

Notemos que a função $\Upsilon : \wp \to S$ definida por

$$\Upsilon(u)(x) := u\left(t_u.x\right) \quad , \quad \text{com} \quad t_u = \left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{1}{2}} ||u||,$$

é a inversa de Φ e portanto Φ é bijetora. Daí,

$$\inf_{u\in\wp} I(u) = \inf_{u\in S} I(\Phi(u)).$$

Para $u \in S$, temos

$$\begin{aligned} I(\Phi(u)) &= \frac{1}{2}||\Phi(u)||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(\Phi(u)) \\ &= \frac{1}{2}t_u^{N-2}||u||^2 - t_u^N \int_{\mathbb{R}^N} G(u) \\ &= \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}} ||u||^N. \end{aligned}$$

Logo,

$$\inf_{u\in\wp} I(u) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}} \inf_{u\in S}||u||^N.$$

Seja u_0 uma solução de (P_2) dada pela Proposição 2.1. Na demonstração da Proposição 2.5 verificamos que

$$I(u_0) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}} ||\bar{u}||^N,$$

com $\bar{u}$ denotando uma solução do problema de minimização (2.1.2). Com isto, obtemos que

$$\inf_{u\in\wp} I(u) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-2}{2N}\right)^{\frac{N-2}{2}} ||\bar{u}||^N = I(u_0).$$

Então, como as soluções de (P_2) dadas pela Proposição 2.1 são ground state, concluímos que

$$\inf_{u\in\wp} I(u) = m.$$

■

Vamos agora mostrar que a varidade de Pohozaev é interceptada por todas as curvas de Γ.

Lema 2.6. : *Sejam Γ o conjunto definido em (2.2.2) e $\wp$ a variedade de Pohozaev definida em (2.2.4). Para todo $\gamma \in \Gamma$ tem-se $\gamma([0,1]) \cap \wp \neq \emptyset$.*

Demonstração:
Notemos que o funcional de Pohozaev definido em (2.2.1) satisfaz

$$\begin{aligned}\psi(u) &= N\left(\frac{1}{2}||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(u)\right) - ||u||^2 \\ &= N.I(u) - ||u||^2 \quad , \quad \forall u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).\end{aligned}$$

Então, dado arbitrariamente $\gamma \in \Gamma$, temos

$$\psi(\gamma(1)) = N.I(\gamma(1)) - ||\gamma(1)||^2 \leq N.I(\gamma(1)) < 0.$$

Por outro lado, temos que

$$||\gamma(t)|| \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to 0^+.$$

Logo, para $t > 0$ suficientemente pequeno,

$$||\gamma(t)|| < \rho_2,$$

com ρ_2 dado pelo Lema 2.2. Daí,

$$\psi(\gamma(t)) > 0$$

para $t > 0$ suficientemente pequeno. Portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário (ver Apêndice, Teorema A.14), existe $t_\gamma \in [0,1]$ tal que

$$\psi(\gamma(t_\gamma)) = 0,$$

ou seja, $\gamma(t_\gamma) \in \wp$ e o resultado está provado.

■

Agora estamos em condições de estabelecer uma outra desigualdade entre m e b.

Corolário 2.3. : *Sejam m o valor definido em (2.0.1) e b o valor definido em (2.2.3). Temos que*

$$b \geq m.$$

Demonstração:
Seja Γ definido em (2.2.2). Pelo Lema 2.6 temos que, dado arbitrariamente $\gamma \in \Gamma$, existe $t_\gamma \in [0,1]$ tal que $\gamma(t_\gamma) \in \wp$. Portanto,

$$\inf_{u \in \wp} I(u) \leq I(\gamma(t_\gamma)) \leq \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)).$$

Usando o Lema 2.5,

$$m \leq \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)).$$

Como $\gamma \in \Gamma$ foi dado arbitrariamente, concluímos que

$$m \leq \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) = b.$$

■

Demonstração do Teorema 2.2:

Do Corolário 2.2 e do Corolário 2.3, concluímos que

$$m = b,$$

com m definido em (2.0.1) e b definido em (2.2.3).

■

Capítulo 3

Problema exponencialmente crítico com não linearidade assintoticamente periódica em dimensão 2

Neste capítulo, estamos interessados em mostrar existência de solução ground state para a seguinte equação elíptica não linear:

$$(P_3) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = K(x)f(u) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^2, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^2), \end{cases}$$

com $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ denotando uma função contínua que verifica as seguintes hipóteses:

(K1) Existe $k_0 > 0$ tal que $K(x) \geq k_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$;
(K2) Existe uma função contínua periódica positiva $K_P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$|K(x) - K_P(x)| \to 0 \ \text{ quando } \ |x| \to +\infty;$$

(K3) Para todo $x \in \mathbb{R}^2$ temos $K(x) > K_P(x)$.

Com relação a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, supomos as seguintes hipóteses:

(f_1) Existe $\beta \geq 1$ tal que $f(s) = o(s^\beta)$ quando $s \to 0$;
(f_2) Existe $\alpha_0 \in (0, 4\pi)$ tal que

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{e^{\alpha . s^2}} = \begin{cases} 0 \ , \ \text{ se } \ \alpha > \alpha_0, \\ +\infty \ , \ \text{ se } \ \alpha < \alpha_0; \end{cases}$$

(f_3) Existem $\theta > 2$ e $C > 0$ tais que

$$0 < \theta F(s) \leq s f(s) \ , \ \forall s \in \mathbb{R} \backslash \{0\},$$

e

$$F(s) \geq C|s|^\theta \ , \ \forall s \in \mathbb{R},$$

com $F(s) = \int_0^s f(\tau)d\tau$;
(f_4) A função

$$s \mapsto \frac{f(s)}{s}$$

é crescente em $|s|$;
(f_5) Existem constantes $q > 2$ e $\lambda > 0$ tais que

$$f(s) \geq \lambda s^{q-1} \quad , \quad \forall s \geq 0,$$

com

$$\lambda > \left[\frac{\theta(q-2)}{q(\theta-2)}\right]^{\frac{(p-2)}{2}} \frac{C_q^q}{M},$$

sendo

$$M := \min_{x \in \mathbb{R}^2} K_P(x) > 0$$

e

$$C_q := \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}} \frac{\left\{\int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{\int_{\mathbb{R}^2} |u|^q\right\}^{\frac{1}{q}}}.$$

Observação 3.1. : *Um exemplo típico de uma função que satisfaz as hipóteses (f_1)-(f_5) é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(s) = \left(q|s|^{q-2}s + 2\alpha_0|s|^q s\right) e^{\alpha_0 s^2} \ , \ s \in \mathbb{R},$$

com $q > \beta + 1$ e $0 < \alpha_0 < 4\pi$.

Motivados pelo trabalho [6] e seus argumentos, provamos o seguinte resultado:

Teorema 3.1. : *Sejam $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz (K1)-(K3) e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz (f_1)-(f_5). Então, o problema (P_3) tem solução ground state.*

Ressaltamos que, após termos concluído a demonstração deste teorema, encontramos em uma de nossas pesquisas o artigo [7], onde os autores já haviam provado o mesmo resultado.

Para provar o Teorema 3.1, primeiramente, na seção 3.1, estudamos um problema periódico; a saber, mostramos que o problema correspondente tem solução ground state. Então, de posse desse resultado, na seção 3.2, obtemos uma estimativa importante envolvendo níveis minimax do Passo da Montanha e isto permite mostrar que limites fracos de sequências Palais-Smale do funcional energia associado ao problema (P_3) são não nulos.

3.1 O problema periódico

Nesta seção, mostramos a existência de solução ground state para o seguinte problema:

$$(PP) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = K_P(x)f(u) \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^2), \end{cases}$$

supondo que $K_P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua positiva que satisfaz

(K4) $\quad K_P(x+y) = K_P(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$ e para todo $y \in Z^2$.

Sendo $K_P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua positiva e periódica em $\mathbb{R}^2$, existe $k_1 > 0$ tal que

(K5) $\quad K_P(x) \geq k_1$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

Nesta seção, estamos interessados em mostrar o seguinte resultado:

Teorema 3.2. : *Sejam $K_P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua positiva que satisfaz (K4)-(K5) e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz (f_1)-(f_5). Então, o problema (PP) tem solução ground state.*

Esta seção está organizada da seguinte forma: Na primeira subseção, introduzimos alguns resultados preliminares e a formulação variacional do problema (PP). Além disso, verificamos que o funcional energia associado ao problema periódico satisfaz a geometria do Passo da Montanha e mostramos uma importante estimativa envolvendo seu nível minimax. Na subseção 3.1.2, mostramos algumas propriedades da sequência Palais-Smale obtida do Teorema do Passo da Montanha. Na subseção 3.1.3, demonstramos o Teorema 3.2.

3.1.1 Preliminares

No espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^2)$, consideramos a norma dada por

$$||u|| = \left[\int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla u|^2 + |u|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \quad , \quad u \in H^1(\mathbb{R}^2),$$

e denotamos por $I_P : H^1(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ o funcional energia associado ao problema (PP) definido por

$$I_P(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^2} K_P(x)F(u) \quad , \quad u \in H^1(\mathbb{R}^2). \tag{3.1.1}$$

Pelas condições (f_1) e (f_2) temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C = C(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq \varepsilon\,|s| + C\left(e^{\alpha s^2} - 1\right) \quad , \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

para cada $\alpha > \alpha_0$, com α_0 dado pela condição (f_2), e consequentemente,

$$|F(s)| \leq \frac{\varepsilon}{\beta+1}\,|s|^{\beta+1} + C\,|s|\left(e^{\alpha s^2} - 1\right) \quad , \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Notemos que existem constantes positivas α_1 e C_1 tais que

$$\frac{\varepsilon}{\beta+1}|s|^{\beta+1}+C|s|\left(e^{\alpha s^2}-1\right)\leq C_1\left(e^{\alpha_1 s^2}-1\right)\quad,\quad \forall s\in \mathbb{R}.$$

Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^2}|K_P(x)F(u)|\leq C_1|K_P|_\infty\int_{\mathbb{R}^2}\left(e^{\alpha_1 u^2}-1\right)\quad,\quad \forall u\in H^1(\mathbb{R}^2).$$

Assim, a desigualdade de Trudinger-Moser (ver Apêndice, Lema A.1) garante que o funcional I_P está bem definido.

Um fato importante, que pode ser encontrado em [30], é que para qualquer sequência (u_n) em $H^1(\mathbb{R}^2)$ fortemente convergente, existem uma subsequência (u_{n_k}) e uma função $h\in H^1(\mathbb{R}^2)$ tais que

$$|u_{n_k}(x)|\leq h(x)\ \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2.$$

Com esta informação podemos adaptar as idéias encontradas no Apêndice B de [33] (ver também o apêndice de [13]) ao caso exponencial e assim justificar que o funcional energia I_P é de classe C^1 e que

$$I_P'(u)v=\int_{\mathbb{R}^2}(\nabla u\nabla v+uv)-\int_{\mathbb{R}^2}K_P(x)f(u)v\ ,\ \forall u,v\in H^1(\mathbb{R}^2).$$

Consequentemente, pontos críticos não nulos de I_P são soluções do problema (PP).

O primeiro resultado deste capítulo é uma consequência da desigualdade de Trudinger-Moser e é útil para mostrarmos que o funcional I_P satisfaz a geometria do Passo da Montanha.

Lema 3.1. : *Seja α_0 dado pela condição (f_2). Então, existem constantes $\alpha>\alpha_0$, $t>1$ e $C>0$ tais que*

$$\sup_{||u||\leq 1}\int_{\mathbb{R}^2}\left(e^{\alpha u^2}-1\right)^t\leq C.$$

Demonstração:

Seja $\alpha\in\mathbb{R}$ satisfazendo

$$\alpha_0<\alpha<4\pi.$$

Com esta escolha de α temos

$$1<\frac{4\pi}{\alpha}.$$

Sejam t e β números reais satisfazendo

$$1<t<\beta<\frac{4\pi}{\alpha}.$$

Pelo Lema A.2 no Apêndice, temos que existe uma constante $C_1 > 0$, independente de u, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha u^2} - 1\right)^t \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\beta\alpha u^2} - 1\right) \quad , \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

A escolha de β implica que $\beta\alpha < 4\pi$; portanto, da desigualdade de Trudinger-Moser, existe $C_2 > 0$ tal que

$$\sup_{||u||\leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha u^2} - 1\right)^t \leq C_1 \sup_{||u||\leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\beta\alpha u^2} - 1\right) \leq C_2.$$

■

Uma consequência interessante do Lema 3.1 é o seguinte colorário:

Corolário 3.1. : *Seja (u_n) uma sequência satisfazendo*

$$\limsup_{n\to\infty} ||u_n||^2 < 1.$$

Então, existem $\alpha > \alpha_0$, $t > 1$ e $C > 0$, independente de n, tais que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha u_n^2} - 1\right)^t \leq C \quad , \quad \forall n \geq n_0,$$

para algum n_0 suficientemente grande.

Demonstração:
Se

$$\limsup_{n\to\infty} ||u_n||^2 < 1,$$

então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||u_n|| < 1 \quad , \quad \forall n \geq n_0.$$

Daí, pelo Lema 3.1, existe $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha u_n^2} - 1\right)^t \leq \sup_{||u||\leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha u^2} - 1\right)^t \leq C \quad , \quad \forall n \geq n_0.$$

■

No próximo resultado, mostramos que o funcional I_P verifica a geometria do Passo da Montanha.

Lema 3.2. : *O funcional $I_P : H^1(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ definido em (3.1.1) verifica as seguintes propriedades:*

(i) Existem constantes $\beta, \rho > 0$ tais que

$$I_P(u) \geq \beta \quad , \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^2) \ , \ ||u|| = \rho;$$

(ii) Existe $e \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$||e|| > \rho \quad e \quad I_P(e) < 0.$$

Demonstração:
As condições (f_1) e (f_2) implicam que, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $C_1 = C_1(\varepsilon) > 0$ tal que,

$$|F(s)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|s|^2 + C_1|s|\Big(e^{\alpha s^2} - 1\Big) \quad , \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

para cada $\alpha > \alpha_0$, com α_0 dado pela condição (f_2). Portanto,

$$\begin{aligned} I_P(u) &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^2} K_P(x)|u|^2 - C_1\int_{\mathbb{R}^2}\Big[K_P(x)|u|\Big(e^{\alpha u^2} - 1\Big)\Big] \\ &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\varepsilon}{2}|K_P|_\infty\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2 - C_1|K_P|_\infty\int_{\mathbb{R}^2}\Big[|u|\Big(e^{\alpha u^2} - 1\Big)\Big] \quad , \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.1, existem $t > 1$, suficientemente próximo de 1, e $C > 0$ tais que

$$\int_{\mathbb{R}^2}\Big(e^{\alpha u^2} - 1\Big)^t \leq C \quad , \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^2) \; , \; ||u|| \leq 1.$$

Então, usando desigualdade de Hölder com expoentes t e seu conjugado t' e usando imersão de Sobolev

$$H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^{t'}(\mathbb{R}^2) \quad , \quad 2 \leq t' < +\infty,$$

obtemos constantes positivas C_2, C_3 e C_4 tais que

$$\begin{aligned} I_P(u) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}C_2\right)||u||^2 - C_3||u||^{t'}\left[\int_{\mathbb{R}^2}\Big(e^{\alpha u^2} - 1\Big)^t\right]^{\frac{1}{t}} \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}C_2\right)||u||^2 - C_4||u||^{t'} \quad , \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^2) \; , \; ||u|| \leq 1. \end{aligned}$$

Como $t' > 2$, temos que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existem ρ_0 satisfazendo $0 < \rho_0 < 1$ e $\beta > 0$ tais que, se $0 < \rho \leq \rho_0$, então

$$I_P(u) \geq \beta > 0 \quad , \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^2) \; , \; ||u|| = \rho,$$

mostrando assim o ítem (i).
Agora, afim de mostrarmos o ítem (ii), fixemos $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Pela condição (f_3), temos que

$$\begin{aligned} I_P(tu) &= \frac{t^2}{2}||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^2} K_P(x)F(tu) \\ &\leq \frac{t^2}{2}||u||^2 - C|t|^\theta\int_{\mathbb{R}^2} K_P(x)|u|^\theta. \end{aligned}$$

Sendo $\theta > 2$, concluímos então que

$$I_P(tu) \to -\infty \;\; \text{quando } t \to +\infty.$$

Portanto, é suficiente fixar $e = tu$, com $t > 0$ suficientemente grande, para concluir a demonstração.

■

Aplicando uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem condição Palais-Smale (ver Apêndice, Teorema A.15), obtemos a existência de uma sequência (u_n) em $H^1(\mathbb{R}^2)$ satisfazendo

$$I_P(u_n) \to c_P \quad \text{e} \quad I'_P(u_n) \to 0, \tag{3.1.2}$$

com c_P denotando o nível minimax do Passo da Montanha, ou seja,

$$c_P := \inf_{\gamma \in \Gamma_0} \max_{t \in [0,1]} I_P(\gamma(t)), \tag{3.1.3}$$

com

$$\Gamma_0 = \left\{ \gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^2)) \ ; \ \gamma(0) = 0 \text{ e } I_P(\gamma(1)) < 0 \right\}.$$

O próximo resultado fornece uma importante desigualdade.

Lema 3.3. : *Sejam c_P o valor definido em (3.1.3) e θ dado pela condição (f_3). Temos que*

$$0 < c_P < \frac{(\theta - 2)}{2\theta}.$$

Demonstração:

Pelo Teorema do Passo da Montanha temos $c_P > 0$. Desta forma, é suficiente demonstrar a segunda desigualdade.

Seja $\psi_q \in H^1(\mathbb{R}^2)$ uma função radial positiva tal que

$$C_q = \frac{\left\{ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla \psi_q|^2 + |\psi_q|^2 \right) \right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \psi_q^q \right\}^{\frac{1}{q}}}.$$

Ressaltamos que a existência de tal ψ_q foi provada por Agueh em [2].

Da condição (f_4) temos

$$c_P = \inf_{u \in H^1(\mathbb{R}^2)} \max_{t \geq 0} I_P(tu).$$

Portanto,

$$c_P \leq \max_{t \geq 0} I_P(t\psi_q).$$

Usando (f_5) e a definição de M,

$$\begin{aligned} c_P \quad &\leq \quad \max_{t \geq 0} \left\{ \frac{t^2}{2} ||\psi_q||^2 - \lambda M \frac{t^q}{q} \int_{\mathbb{R}^2} \psi_q^q \right\} = \left(\frac{q-2}{2q} \right) \frac{C_q^{\frac{2q}{q-2}}}{[M\lambda]^{\frac{2}{q-2}}} \\ &< \quad \left(\frac{q-2}{2q} \right) \left(\frac{q(\theta - 2)}{\theta(q-2)} \right) \frac{C_q^{\frac{2q}{q-2}}}{C_q^{\frac{2q}{q-2}}} = \frac{(\theta - 2)}{2\theta}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

■

3.1.2 Propriedades da sequência Palais-Smale

Nesta seção, provamos algumas propriedades da sequência Palais-Smale.

Lema 3.4. : *Seja (u_n) uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^2)$ satisfazendo (3.1.2). Então, (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Demonstração:

Suponhamos por absurdo que a sequência (u_n) não seja limitada, ou seja, suponhamos que, a menos de subsequência,

$$||u_n|| \to +\infty.$$

Como (u_n) satisfaz (3.1.2), temos que

$$|I_P(u_n)| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |I_P(u_n)| < +\infty \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, considerando $\varepsilon = \theta$, θ dado pela condição (f_3), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$-\frac{1}{\theta} I_P(u_n)u_n \leq \frac{1}{\theta} |I_P(u_n)u_n| \leq \frac{1}{\theta} ||I_P(u_n)|| ||u_n|| < \frac{1}{\theta}.\theta ||u_n|| = ||u_n|| \ , \ \forall n > n_0.$$

Portanto,

$$I_P(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_P(u_n)u_n < \sup_{n\in\mathbb{N}} |I_P(u_n)| + ||u_n|| \ , \ \forall n > n_0. \tag{3.1.4}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} & I_P(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_P(u_n)u_n \\ = \ & \frac{1}{2}||u_n||^2 - \int_{\mathbb{R}^2} K_P(x)F(u_n) - \frac{1}{\theta}||u_n||^2 + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^2} K_P(x)f(u_n)u_n \\ = \ & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)||u_n||^2 + \int_{\mathbb{R}^2} \left[K_P(x)\left(\frac{1}{\theta}f(u_n)u_n - F(u_n)\right)\right], \end{aligned}$$

e da condição (f_3),

$$I_P(u_n) - \frac{1}{\theta} I'_P(u_n)u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)||u_n||^2 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.1.5}$$

Então, de (3.1.4) e (3.1.5), temos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)||u_n||^2 < \sup_{n\in\mathbb{N}} |I(u_n)| + ||u_n|| \ , \ \forall n > n_0.$$

Daí, para n suficientemente grande, segue que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) < \frac{\sup_{n\in\mathbb{N}}|I(u_n)|}{||u_n||^2} + \frac{1}{||u_n||}$$

e fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right) \leq 0,$$

o que é um absurdo. Portanto, (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

$\blacksquare$

Sendo (u_n) uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$, temos a existência de uma função $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e uma subsequência de (u_n), a qual ainda denotamos por (u_n), satisfazendo

$$u_n \rightharpoonup u \;\text{ em }\; H^1(\mathbb{R}^2).$$

Além disso, usando Teorema de Rellich-Kondrachov, obtemos que

$$u_n \to u \;\text{ em } L^q_{loc}(\mathbb{R}^2)\;,\; \text{para } q \geq 1,$$

e consequentemente,

$$u_n(x) \to u(x) \;\text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2.$$

Lema 3.5. : *Seja $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^2)$ uma sequência satisfazendo (3.1.2) e $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ seu limite fraco. Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^2} K_P(x) f(u_n)\varphi \to \int_{\mathbb{R}^2} K_P(x) f(u)\varphi \;\; \textit{quando} \;\; n \to \infty,$$

para cada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração:

Seja $\sigma > 1$. Do fato de que (u_n) satisfaz (3.1.2), temos

$$I'_P(u_n)u_n - \sigma I'_P(u_n)u_n = o_n(1),$$

ou seja,

$$(1-\sigma)\,||u_n||^2 + (\sigma - 1)\int_{\mathbb{R}^2} K_P(x) f(u_n)u_n = o_n(1).$$

Portanto,

$$(\sigma - 1)\int_{\mathbb{R}^2} K_P(x) f(u_n)u_n = o_n(1) + (\sigma - 1)\,||u_n||^2$$

e sendo (u_n) uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$, temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} K_P(x) f(u_n)u_n \leq C\;,\; \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.1.6}$$

Observemos que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{f(t)t} = 0.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $R_\epsilon > 0$ tal que

$$|f(t)| < \epsilon f(t)t \ , \ \forall t > R_\epsilon.$$

Deste forma, denotando $[u_n > R_\epsilon] := \Big\{x \in \mathbb{R}^2 \ ; \ u_n(x) > R_\epsilon\Big\}$, segue usando (3.1.6) e o fato de que K_P é positiva em $\mathbb{R}^2$ que

$$\int_{[u_n > R_\epsilon]} K_P(x)|f(u_n)| \leq \epsilon \int_{[u_n > R_\epsilon]} K_P(x) f(u_n) u_n \leq \epsilon C.$$

Da mesma forma, denotando $[u > R_\epsilon] := \Big\{x \in \mathbb{R}^2 \ ; \ u(x) > R_\epsilon\Big\}$, podemos provar que

$$\int_{[u > R_\epsilon]} K_P(x)|f(u)| \leq \epsilon \int_{[u > R_\epsilon]} K_P(x) f(u) u \leq \epsilon C.$$

Dado arbitrariamente $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} K_P(x)|f(u_n) - f(u)||\varphi| &\leq \int_{[u_n \leq R_\epsilon]} K_P(x)|f(u_n) - f(u)||\varphi| \\ &+ \int_{[u_n > R_\epsilon]} K_P(x)|f(u_n)||\varphi| + \int_{[u_n > R_\epsilon]} K_P(x)|f(u)||\varphi|. \end{aligned}$$

Logo, denotando $B := \operatorname{supp}\varphi$ e usando o fato de que $K_P, \varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} K_P(x)|f(u_n) - f(u)||\varphi| &\leq |K_P|_\infty |\varphi|_\infty \int_{[u_n \leq R_\epsilon] \cap B} |f(u_n) - f(u)| \\ &+ 2\epsilon C + |K_P|_\infty |\varphi|_\infty \int_{S_n} |f(u)|, \end{aligned}$$

com $S_n := [u \leq R_\epsilon] \cap [u_n > R_\epsilon] \cap B$. Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{[u_n \leq R_\epsilon] \cap B} |f(u_n) - f(u)| = 0$$

e

$$\lim_{n \to \infty} \int_{S_n} |f(u)| = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^2} K_P(x)|f(u_n) - f(u)||\varphi| = 0$$

e consequentemente,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^2} K_P(x) f(u_n)\varphi = \int_{\mathbb{R}^2} K_P(x) f(u)\varphi.$$

■

O seguinte resultado é muito útil para mostrar que limite fraco de sequências Palais-Smale são não nulos.

Lema 3.6. : *Seja (u_n) uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Então, uma das seguintes afirmações é satisfeita:*

(i) *Existem $R, \eta > 0$ e $\{y_n\} \subset Z^2$ tais que* $\displaystyle\int_{B_R(y_n)} |u_n|^2 \geq \eta$;

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^t \to 0$, *para todo $t > 2$.*

Demonstração:

Suponhamos que a afirmação (i) não é satisfeita. Então, para uma subsequência de (u_n) a qual ainda denotamos por (u_n), temos

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{y\in\mathbb{R}^2} \int_{B_R(y)} |u_n|^2 \right) = 0.$$

Daí, pelo Lema de Lions (ver Apêndice, Lema A.6), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^t \to 0,$$

para todo $t > 2$.

■

3.1.3 Existência de solução ground state

Agora temos os resultados necessários para provar existência de solução ground state para o problema periódico (PP).

Demonstração do Teorema 3.2:

Na primeira parte da demonstração, mostramos a existência de uma outra sequência satisfazendo (3.1.2) e que tem limite fraco não nulo. Se (u_n) satisfaz (3.1.2), então

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) ||u_n||^2 + \int_{\mathbb{R}^2} \left[K_P(x) \left(\frac{1}{\theta} f(u_n) u_n - F(u_n) \right) \right] \right\} \\ = &\lim_{n\to\infty} \left[I_P(u_n) - \frac{1}{\theta} I_P'(u_n) u_n \right] = \lim_{n\to\infty} I_P(u_n) = c_P. \end{aligned}$$

Daí, usando a condição (f_3), segue que

$$\frac{(\theta - 2)}{2\theta} \limsup_{n\to\infty} ||u_n||^2 \leq c_P.$$

Logo, do Lema 3.3, concluimos que

$$\limsup_{n\to\infty} ||u_n||^2 \leq \left(\frac{2\theta}{\theta - 2} \right) c_P < 1 \tag{3.1.7}$$

e portanto, do Corolário 3.1, existem $\alpha > \alpha_0$, $t > 1$ e $C > 0$ tais que a sequência

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha u_n^2} - 1 \right)^t \leq C \quad , \quad \forall n \geq n_0, \tag{3.1.8}$$

para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Sendo (u_n) limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$, segue do Lema 3.6 que uma das seguintes afirmações é satisfeita:

(i) Existem $R, \eta > 0$ e $\{y_n\} \subset Z^2$ tais que $\displaystyle\int_{B_R(y_n)} |u_n|^2 \geq \eta$;

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^t \to 0$, para todo $t > 2$.

Afirmamos que (ii) não é satisfeita. De fato, usando as condições (f_1) e (f_2) temos que, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe uma constante positiva $C = C(\varepsilon)$ tal que

$$|F(s)| \leq \frac{\varepsilon}{\beta+1}|s|^{\beta+1} + C|s|\left(e^{\alpha s^2} - 1\right) \quad , \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

para cada $\alpha > \alpha_0$, com α_0 dado pela condição (f_2). Então, sendo a função K_P limitada em $\mathbb{R}^2$ segue

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |K_P(x) f(u_n) u_n| &\leq \frac{\varepsilon}{\beta+1} \int_{\mathbb{R}^2} |K_P(x)||u_n|^{\beta+1} + C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} |K_P(x)||u_n|\left(e^{\alpha u_n^2} - 1\right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\beta+1} |K_P|_\infty \int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^{\beta+1} + C_\varepsilon |K_P|_\infty \int_{\mathbb{R}^2} |u_n|\left(e^{\alpha u_n^2} - 1\right).
\end{aligned}$$

Usando desigualdade de Hölder com expoentes t e seu conjugado t',

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} |K_P(x) f(u_n) u_n| \\
\leq\ & \frac{\varepsilon}{\beta+1} |K_P|_\infty \int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^{\beta+1} + C_\varepsilon |K_P|_\infty \left\{\int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^t\right\}^{\frac{1}{t}} \left\{\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha u_n^2} - 1\right)^{t'}\right\}^{\frac{1}{t'}}
\end{aligned}$$

Sendo (u_n) uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$, temos por imersão contínua que existe $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^{\beta+1} \leq C \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então, usando também (3.1.8),

$$\int_{\mathbb{R}^2} |K_P(x) f(u_n) u_n| \leq \varepsilon |K_P|_\infty C + C_\varepsilon . |K_P|_\infty C \left\{\int_{\mathbb{R}^2} |u_n|^t\right\}^{\frac{1}{t}} \quad , \quad \forall n \geq n_0.$$

Supondo por absurdo que a afirmação (ii) é satisfeita, segue que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |K_P(x) f(u_n) u_n| \leq \varepsilon |K_P|_\infty C,$$

com $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente. Portanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |K_P(x) f(u_n) u_n| = 0$$

e consequentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} K_P(x) f(u_n) u_n = 0. \tag{3.1.9}$$

Sendo (u_n) uma sequência satisfazendo (3.1.2), temos que $I'_P(u_n)u_n = o_n(1)$. Logo,

$$o_n(1) = I'_P(u_n)u_n = ||u_n||^2 + \int_{\mathbb{R}^2} K_P(x)f(u_n)u_n = ||u_n||^2 + o_n(1)$$

e portanto,

$$||u_n|| \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Sendo $I_P : H^1(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1, temos

$$I_P(u_n) \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Mas isto é um absurdo, pois $I_P(u_n) \to c_P$ e $c_P > 0$. Como o absurdo é obtido supondo que (ii) é satisfeita, segue do Lema 3.6 que a afirmação (i) é satisfeita.

Para $\{y_n\} \subset Z^2$ dado pela afirmação (i), definamos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\tilde{u}_n(x) = u_n(x + y_n) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Temos que

$$\begin{aligned} I_P(\tilde{u}_n) &= \frac{1}{2}||\tilde{u}_n||^2 + \int_{\mathbb{R}^2} K_P(x)F(\tilde{u}_n) \\ &= \frac{1}{2}||u_n||^2 + \int_{\mathbb{R}^2} K_P(x - y_n)F(u_n) \end{aligned}$$

e, para cada $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned} I'_P(\tilde{u}_n)v &= \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla \tilde{u}_n \nabla v + \tilde{u}_n v) + \int_{\mathbb{R}^2} K_P(x)f(\tilde{u}_n)v \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_n v + u_n v) + \int_{\mathbb{R}^2} K_P(x - y_n)f(u_n)v. \end{aligned}$$

Logo, usando a condição (K4),

$$I_P(\tilde{u}_n) = I_P(u_n)$$

e

$$I'_P(\tilde{u}_n)v = I'_P(u_n)v \quad , \quad \text{para cada } v \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

Como (u_n) satisfaz (3.1.2), concluimos que

$$I_P(\tilde{u}_n) \to c_P \quad \text{e} \quad I'_P(\tilde{u}_n) \to 0.$$

Então, pelo Lema 3.4, a sequência $(\tilde{u}_n)$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$ e portanto, existem $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e uma subsequência de $(\tilde{u}_n)$, a qual ainda denotamos por $(\tilde{u}_n)$, tais que $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$. A afirmação (i) dá a existência de $R, \eta > 0$ tais que

$$\int_{B_R(0)} |\tilde{u}_n|^2 = \int_{B_R(y_n)} |u_n|^2 \geq \eta.$$

Sendo a imersão $H^1(B_R(0)) \subset\subset L^2(B_R(0))$ compacta, temos que, a menos de subsequência, $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ em $L^2(B_R(0))$ e portanto

$$\int_{B_R(0)} |\tilde{u}|^2 \geq \eta > 0,$$

ou seja, $\tilde{u}$ é não nulo.

Vamos agora mostrar que $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^2)$ é ponto crítico de I_P. De fato, sendo $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla \tilde{u}_n \nabla w + \tilde{u}_n w) \to \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla \tilde{u} \nabla w + \tilde{u} w) \quad \text{quando} \quad n \to \infty, \tag{3.1.10}$$

para cada $w \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Além disso, pelo Lema 3.5,

$$\int_{\mathbb{R}^2} K_P(x) f(\tilde{u}_n)\varphi \to \int_{\mathbb{R}^2} K_P(x) f(\tilde{u})\varphi \quad \text{quando} \quad n \to \infty, \tag{3.1.11}$$

para cada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Portanto, de (3.1.10) e (3.1.11), para cada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, temos

$$\begin{aligned} o_n(1) &= I'_P(\tilde{u}_n)\varphi = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla \tilde{u}_n \nabla \varphi + \tilde{u}_n \varphi) + \int_{\mathbb{R}^2} K_P(x) f(\tilde{u}_n)\varphi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla \tilde{u} \nabla \varphi + \tilde{u}\varphi) + \int_{\mathbb{R}^2} (K_P(x) f(\tilde{u})\varphi) + o_n(1) \\ &= I'_P(\tilde{u})\varphi + o_n(1), \end{aligned}$$

ou seja, $I'_P(\tilde{u})\varphi = 0$ para cada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Pela densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$, concluímos que $I'_P(\tilde{u})w = 0$, para todo $w \in H^1(\mathbb{R}^2)$, ou seja, $\tilde{u}$ é ponto crítico de I_P.

Agora, para concluir a demonstração do Teorema 3.2, vamos mostrar que $\tilde{u}$ é ground state, ou seja, vamos mostrar que a energia de $\tilde{u}$ coincide com o nível do Passo da Montanha definido em (3.1.3). Temos que

$$\begin{aligned} 2c_P &= \liminf_{n\to\infty} 2I_P(\tilde{u}_n) = \liminf_{n\to\infty} (2I_P(\tilde{u}_n) - I'_P(\tilde{u}_n)\tilde{u}_n) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} K_P(x) \left[f(\tilde{u}_n)\tilde{u}_n - 2F(\tilde{u}_n)\right] \end{aligned}$$

Usando Lema de Fatou,

$$\int_{\mathbb{R}^2} K_P(x) \left[f(\tilde{u})\tilde{u} - 2F(\tilde{u})\right] \leq 2c_P.$$

Como

$$2I_P(\tilde{u}) = 2I_P(\tilde{u}) - I'_P(\tilde{u})\tilde{u} = \int_{\mathbb{R}^2} K_P(x) \left[f(\tilde{u})\tilde{u} - F(\tilde{u})\right],$$

concluimos que $I_P(\tilde{u}) \leq c_P$. Por outro lado, a condição (f_4) implica que

$$c_P = \inf\left\{ I_P(u) \ : \ u \in H^1(\mathbb{R}^2)\backslash\{0\} \text{ e } I'_P(u)u = 0 \right\},$$

de onde segue que $c_P \leq I_P(\tilde{u})$. Portanto, $I_P(\tilde{u}) = c_P$.

■

3.2 O problema assintoticamente periódico

Nesta seção, mostramos que (P_3) tem solução ground state. Daqui até o final deste capítulo, supomos que as condições (K1)-(K3) e (f_1)-(f_5) valem para K e f, respectivamente.

Esta seção está organizada de maneira análoga à seção 3.1; a saber, na subseção 3.2.1 introduzimos a formulação variacional do problema (P_3) e mostramos que o funcional energia associado satisfaz a geometria do Passo da Montanha. Além disso, mostramos uma importante estimativa que permite mostrar que limite fraco de sequências Palais-Smale é não nulo. Na subseção 3.2.2, citamos algumas propriedades da sequência Palais-Smale obtida do Teorema do Passo da Montanha. Na subseção 3.2.3, demonstramos o Teorema 3.1.

3.2.1 Preliminares

Nesta subseção, introduzimos a formulação variacional do problema (P_3) e alguns resultados preliminares envolvendo o funcional energia associado; porém, por sua analogia com o caso periódico, fazemos a demonstração apenas dos resultados que julgamos necessários.

Denotamos por $I : H^1(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ o funcional energia associado ao problema (P_3) definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^2} K(x)F(u) \quad , \quad u \in H^1(\mathbb{R}^2). \tag{3.2.1}$$

Como no caso periódico, a desigualdade de Trudinger-Moser garante que o funcional I está bem definido. Além disso, temos que I é de classe C^1 e

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + uv) - \int_{\mathbb{R}^2} K(x)f(u)v \quad , \quad \forall u, v \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

Portanto, pontos críticos não nulos de I são soluções de (P_3).

Assim como argumentado no Lema 3.2, podemos provar o seguinte resultado:

Lema 3.7. : *O funcional $I : H^1(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ definido em (3.2.1) verifica as seguintes propriedades:*

(i) Existem constantes $\beta, \rho > 0$ tais que

$$I(u) \geq \beta \quad , \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^2) \ , \ ||u|| = \rho;$$

(ii) Existe $e \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$||e|| > \rho \quad e \quad I(e) < 0.$$

Pelo Teorema do Passo da Montanha sem condição Palais-Smale, temos a existência de uma sequência (v_n) em $H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$I(v_n) \to c \ \text{ e } \ I'(v_n) \to 0, \tag{3.2.2}$$

com

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \tag{3.2.3}$$

e

$$\Gamma := \left\{ \gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^2)) \ : \ \gamma(0) = 0 \text{ e } I(\gamma(1)) < 0 \right\}.$$

O próximo resultado estabelece uma relação entre os níveis minimax c_P e c.

Lema 3.8. : *Sejam c_P o valor definido em (3.1.3) e c o valor definido em (3.2.3). Temos que vale a seguinte desigualdade:*

$$c < c_P.$$

Demonstração:

Seja $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^2)$ uma solução ground state do problema periódico (PP). A condição (f_4) implica que

$$c = \inf_{\substack{u \in H^1(\mathbb{R}^2) \\ u \neq 0}} \max_{t \geq 0} I(tu).$$

Portanto,

$$c \leq \max_{t \geq 0} I(t\tilde{u}).$$

Pela geometria do funcional I, temos que $I(0.\tilde{u}) = 0$, $I(t.\tilde{u}) > 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno e $I(t.\tilde{u}) < 0$ para $t > 0$ suficientemente grande. Logo, existe $t_0 > 0$ tal que

$$I(t_0\tilde{u}) = \max_{t \geq 0} I(t\tilde{u}).$$

Então, usando a condição (K3),

$$c \leq I(t_0\tilde{u}) < I_P(t_0\tilde{u}) \leq \max_{t \geq 0} I_P(t\tilde{u}).$$

Sendo $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^2)$ uma solução ground state do problema (PP), temos que

$$\max_{t \geq 0} I_P(t\tilde{u}) = I_P(\tilde{u}) = c_P.$$

Portanto,

$$c < c_P.$$

$\blacksquare$

3.2.2 Propriedades da sequência Palais-Smale

Nesta subseção, falamos a respeito de algumas propriedades da sequência Palais-Smale do funcional energia associado ao problema (P_3). Dada a sua analogia com o caso periódico estudado na seção 3.1, não fazemos a demonstração destes resultados.

O seguinte resultado pode ser provado usando argumentos análogos aos usados na demonstração do Lema 3.4.

Lema 3.9. : *Seja (v_n) uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^2)$ satisfazendo (3.2.2). Então, sequência (v_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Temos então a existência de uma função $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e uma subsequência de (v_n), a qual ainda denotamos por (v_n), satisfazendo

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2).$$

Usando o Teorema de Rellich-Kondrachov,

$$v_n \to v \text{ em } L^q_{loc}(\mathbb{R}^2)\ , \text{ quando } q \geq 1,$$

e consequentemente,

$$v_n(x) \to v(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^2.$$

O seguinte resultado pode ser provado seguindo argumentos análogos ao usados no Lema 3.5.

Lema 3.10. : *Seja (v_n) uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^2)$ satisfazendo (3.2.2) e $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$ seu limite fraco. Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^2} K(x)f(v_n)\varphi \to \int_{\mathbb{R}^2} K(x)f(v)\varphi \quad \textit{quando } n \to \infty,$$

para cada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

3.2.3 Existência de solução ground state

Vamos agora demonstrar a existência de solução ground state para o problema (P_3).

Demonstração do Teorema 3.1:

Notemos que $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$ é ponto crítico de I. De fato, sendo v limite fraco de uma sequência (v_n) satisfazendo (3.2.2), usando o Lema 3.10, obtemos que, para cada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned} o_n(1) &= I'(v_n)\varphi = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla v_n \nabla\varphi + v_n\varphi) + \int_{\mathbb{R}^2} K(x)f(v_n)\varphi \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla v \nabla\varphi + v\varphi) + \int_{\mathbb{R}^2} (K(x)f(v)\varphi) + o_n(1) \\ &= I'(v)\varphi + o_n(1), \end{aligned}$$

ou seja, $I'(v)\varphi = 0$ para cada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Pela densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$, concluimos que $I'(v)w = 0$, para todo $w \in H^1(\mathbb{R}^2)$, ou seja, v é ponto crítico de I.

Vamos agora mostrar que v é não nulo. Suponhamos por contradição que $v \equiv 0$. Das condições (f_1) e (f_2) temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante positiva $C = C(\varepsilon)$ tal que

$$|F(s)| \leq \frac{\varepsilon}{\beta+1}|s|^{\beta+1} + C|s|\left(e^{\alpha s^2} - 1\right) \quad , \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{3.2.4}$$

para cada $\alpha > \alpha_0$, com α_0 dado em (f_2). Portanto,

$$\begin{aligned}
& \int_{B_R(0)} |K(x) - K_P(x)|\,|F(v_n)| \\
\leq \; & \frac{\varepsilon}{\beta+1}\int_{B_R(0)} |K(x) - K_P(x)|\,|v_n|^{\beta+1} \\
& + C\int_{B_R(0)} |K(x) - K_P(x)|\,|v_n|\left(e^{\alpha {v_n}^2} - 1\right) \\
\leq \; & \frac{\varepsilon}{\beta+1}\sup_{x\in B_R(0)} |K(x) - K_P(x)| \int_{B_R(0)} |v_n|^{\beta+1} \\
& + C\sup_{x\in B_R(0)} |K(x) - K_P(x)| \int_{B_R(0)} |v_n|\left(e^{\alpha v_n^2} - 1\right).
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Sendo (v_n) uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^2)$ satisfazendo (3.2.2), usando argumentos análogos ao que fizemos para mostrar (3.1.7), obtemos

$$\limsup_{n\to\infty} ||v_n||^2 \leq \left(\frac{2\theta}{\theta-2}\right)c$$

e usando os lemas 3.8 e 3.3,

$$\limsup_{n\to\infty} ||v_n||^2 < 1.$$

Então, pelo Corolário 3.1, existem $\alpha > \alpha_0$, $t > 1$ e $C > 0$, independente de n, tais que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha v_n^2} - 1\right)^t \leq C \quad , \quad \forall n \geq n_0.$$

para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Usando desigualdade de Hölder com expoentes t e seu conjugado t', existe $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
& C\sup_{x\in B_R(0)} |K(x) - K_P(x)| \int_{B_R(0)} |v_n|\left(e^{\alpha v_n^2} - 1\right) \\
& \quad \leq C\sup_{x\in B_R(0)} |K(x) - K_P(x)| \left\{\int_{B_R(0)} |v_n|^{t'}\right\}^{\frac{1}{t'}} \left\{\int_{B_R(0)} \left(e^{\alpha v_n^2} - 1\right)^t\right\}^{\frac{1}{t}} \\
& \quad \leq C_1\sup_{x\in B_R(0)} |K(x) - K_P(x)| \left\{\int_{B_R(0)} |v_n|^{t'}\right\}^{\frac{1}{t'}} \quad , \quad \forall n \geq n_0.
\end{aligned}$$

Estamos supondo que $v_n \rightharpoonup 0$. Então, usando a imersão compacta $H^1(B_R(0)) \subset\subset L^{t'}(B_R(0))$, concluímos que

$$\left\{\int_{B_R(0)} |v_n|^{t'}\right\}^{\frac{1}{t'}} \to 0$$

e portanto,

$$C \sup_{x \in B_R(0)} |K(x) - K_P(x)| \int_{B_R(0)} |v_n| \left(e^{\alpha v_n^2} - 1 \right) = o_n(1). \tag{3.2.6}$$

Além disso, usando imersão compacta de $H^1(B_R(0)) \subset\subset L^{\beta+1}(B_R(0))$, temos que

$$\frac{\varepsilon}{\beta+1} \sup_{x \in B_R(0)} |K(x) - K_P(x)| \int_{B_R(0)} |v_n|^{\beta+1} = o_n(1). \tag{3.2.7}$$

Então, usando (3.2.6) e (3.2.7), segue de (3.2.5) que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_R(0)} |K(x) - K_P(x)| \, |F(v_n)| = 0. \tag{3.2.8}$$

Por outro lado, de (K2), temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$|K(x) - K_P(x)| < \varepsilon \quad , \quad \forall |x| > R.$$

Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} |K(x) - K_P(x)| \, |F(v_n)| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} |F(v_n)| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} |F(v_n)| \, .$$

Então, usando (3.2.4),

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} |K(x) - K_P(x)| \, |F(v_n)| \leq \frac{\varepsilon^2}{\beta+1} \int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^{\beta+1} + \varepsilon C \int_{\mathbb{R}^2} |v_n| \left(e^{\alpha v_n^2} - 1 \right).$$

Usando desigualdade de Hölder com expoentes t e seu conjugado t' e o Corolário 3.1, temos que existe $C_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} |K(x) - K_P(x)| \, |F(v_n)| \\ &\qquad \leq \frac{\varepsilon^2}{\beta+1} \int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^{\beta+1} + \varepsilon C_2 \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^{t'} \right\}^{\frac{1}{t'}} \quad , \quad \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

Usando as imersões contínuas $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^{\beta+1}(\mathbb{R}^2)$ e $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^{t'}(\mathbb{R}^2)$, sendo (v_n) limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$, temos que existem constantes positivas C_3 e C_4 tais que

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} |K(x) - K_P(x)| \, |F(v_n)| \leq \varepsilon^2 C_3 + \varepsilon C_4 \quad , \quad \forall n \geq n_0.$$

Portanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)} |K(x) - K_P(x)| \, |F(v_n)| \leq \varepsilon^2 C_3 + \varepsilon C_4,$$

com $\varepsilon > 0$ arbitrário. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2\setminus B_R(0)} |K(x) - K_P(x)|\,|F(v_n)| = 0. \tag{3.2.9}$$

De (3.2.8) e (3.2.9) concluímos então que

$$\lim_{n\to\infty} |I(v_n) - I_P(v_n)| = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |K(x) - K_P(x)|\,|F(v_n)| = 0.$$

Analogamente mostra-se que

$$\lim_{n\to\infty} |I'(v_n)v_n - I'_P(v_n)v_n| = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |K(x) - K_P(x)|\,|f(v_n)v_n| = 0.$$

Consequentemente,

$$I_P(v_n) = I(v_n) + I_P(v_n) - I(v_n) = c + o_n(1) \tag{3.2.10}$$

e

$$I'_P(v_n)v_n = I'(v_n)v_n + I'_P(v_n)v_n - I'(v_n)v_n = o_n(1). \tag{3.2.11}$$

Pela geometria do funcional I_P, temos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $I_P(0.v_n) = 0$, $I_P(tv_n) > 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno e $I_P(tv_n) < 0$ para $t > 0$ suficientemente grande. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $s_n > 0$ tal que

$$I_P(s_n v_n) = \max_{t\geq 0} I_P(tv_n), \tag{3.2.12}$$

e daí,

$$I'_P(s_n v_n)v_n = 0. \tag{3.2.13}$$

Afirmamos que a sequência (s_n) obtida satisfaz

$$\limsup_{n\to\infty} s_n \leq 1. \tag{3.2.14}$$

De fato, suponhamos por absurdo que existe uma subsequência de (s_n), a qual ainda denotamos por (s_n), tal que $s_n \geq 1 + \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para algum $\delta > 0$. De (3.2.11) temos

$$||v_n||^2 = \int_{\mathbb{R}^2} K_P(x) f(v_n)v_n + o_n(1).$$

Por outro lado, de (3.2.13),

$$s_n||v_n||^2 = \int_{\mathbb{R}^2} K_P(x) f(s_n v_n)v_n.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^2} K_P(x) \left[\frac{f(s_n v_n)}{s_n v_n} - \frac{f(v_n)}{v_n}\right] v_n^2 = o_n(1).$$

Pela condição (K5), temos que

$$k_1 \int_{\mathbb{R}^2} \left| \left[\frac{f(s_n v_n)}{s_n v_n} - \frac{f(v_n)}{v_n} \right] v_n^2 \right| \leq \int_{\mathbb{R}^2} \left| K_P(x) \left[\frac{f(s_n v_n)}{s_n v_n} - \frac{f(v_n)}{v_n} \right] v_n^2 \right| = o_n(1).$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{f(s_n v_n)}{s_n v_n} - \frac{f(v_n)}{v_n} \right] v_n^2 = o_n(1). \tag{3.2.15}$$

Pelo Lema 3.6, temos que vale uma das seguintes afirmações é satisfeita:

(i) Existem $R, \eta > 0$ e $\{y_n\} \subset Z^2$ tais que $\int_{B_R(y_n)} |v_n|^2 \geq \eta$;

(ii) $\int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^q \to 0$, para todo $q > 2$.

Se a afirmação (ii) é satisfeita, argumentando analogamente ao que foi feito para provar (3.1.9), obtemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} K(x) f(v_n) v_n = 0.$$

Daí, sendo (v_n) uma sequência verificando (3.2.2),

$$o_n(1) = I(v_n)v_n = ||v_n||^2 - \int_{\mathbb{R}^2} K(x) f(v_n) v_n = ||v_n||^2 + o_n(1)$$

e consequentemente, $||v_n|| \to 0$. Como I é um funcional de classe C^1, segue então que $I(v_n) \to 0$ e isto é um absurdo, pois $I(v_n) \to c$ e $c > 0$. Com isto, concluímos que a afirmação (i) é satisfeita.

Para $\{y_n\} \subset Z^2$ dado pela afirmação (i), definamos

$$\tilde{v}_n(x) = v_n(x + y_n).$$

Temos que

$$\int_{B_R(0)} |\tilde{v}_n|^2 = \int_{B_R(y_n)} |v_n|^2 \geq \eta > 0. \tag{3.2.16}$$

Como

$$||\tilde{v}_n|| = ||v_n||,$$

temos que a sequência $(\tilde{v}_n)$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$ e portanto existe $\tilde{v} \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que, a menos de subequência, $\tilde{v}_n \rightharpoonup \tilde{v}$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Usando a imersão compacta $H^1(B_R(0)) \subset\subset L^2(B_R(0))$, segue que $\tilde{v}_n \to \tilde{v}$ em $L^2(B_R(0))$ e, de (3.2.16),

$$\int_{B_R(0)} |\tilde{v}|^2 \geq \eta > 0,$$

que por sua vez implica que $\tilde{v}$ é não nulo.

Pela condição (f_4), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{f((1+\delta)\tilde{v}_n)}{(1+\delta)\tilde{v}_n}-\frac{f(\tilde{v}_n)}{\tilde{v}_n}\right]\tilde{v}_n^2 \leq \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{f(s_n\tilde{v}_n)}{s_n\tilde{v}_n}-\frac{f(\tilde{v}_n)}{\tilde{v}_n}\right]\tilde{v}_n^2 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então, usando Lema de Fatou, a equação (3.2.15) e também a condição (f_4), segue que

$$0 < \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{f((1+\delta)\tilde{v})}{(1+\delta)\tilde{v}}-\frac{f(\tilde{v})}{\tilde{v}}\right]\tilde{v}^2 \leq 0,$$

o que é um absurdo. Com isto, concluímos que (3.2.14) de fato ocorre.

Sendo $s_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos então que (s_n) é limitada e portanto possui uma subsequência, a qual ainda denotamos por (s_n), tal que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s_0$, para algum $s_0 \in [0,1]$. Se $s_0 \in (0,1)$, temos que $s_n < 1$ para n suficientemente grande; portanto, temos de (3.2.15) e da condição (f_4) que

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{f(\tilde{v}_n)}{\tilde{v}_n}-\frac{f(s_n\tilde{v}_n)}{s_n\tilde{v}_n}\right]\tilde{v}_n^2 = o_n(1) \tag{3.2.17}$$

e do Lema de Fatou e da condição (f_4) novamente, segue que

$$0 < \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{f(\tilde{v})}{\tilde{v}}-\frac{f(s_0\tilde{v})}{s_0\tilde{v}}\right]\tilde{v}^2 \leq 0,$$

o que é um absurdo. Se $s_0 = 0$, temos que $s_n\tilde{v}_n(x) \to 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^2$ e da condição (f_1),

$$\frac{f(s_n\tilde{v}_n(x))}{s_n\tilde{v}_n(x)} \to 0 \quad , \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^2.$$

Daí, usando o Lema de Fatou e (3.2.17), temos que

$$0 < \int_{\mathbb{R}^2} f(\tilde{v})\tilde{v} = \int_{\mathbb{R}^2}\frac{f(\tilde{v})}{\tilde{v}}\tilde{v}^2 \leq 0,$$

o que também é um absurdo. Concluímos então com isto que a sequência (s_n) é convergente e

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1.$$

Consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^2} K_P(x)F(s_nv_n) - \int_{\mathbb{R}^2} K_P(x)F(v_n) = o_n(1). \tag{3.2.18}$$

Além disso, sendo a sequência (v_n) limitada, temos também que

$$(s_n^2-1)||v_n||^2 = o_n(1). \tag{3.2.19}$$

Portanto, de (3.2.18) e de (3.2.19), temos que

$$\begin{aligned}
& I_P(s_n v_n) - I_P(v_n) \\
= \;& (s_n^2 - 1)\frac{1}{2}||v_n||^2 + \int_{\mathbb{R}^2} K_P(x)\,[F(v_n) - F(s_n v_n)] \\
= \;& o_n(1).
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Da condição (f_4) segue que

$$c_P = \inf_{\substack{u \in H^1(\mathbb{R}^2) \\ u \neq 0}} \max_{t \geq 0} I_P(tu).$$

Então, de (3.2.12),

$$c_P \leq I_P(s_n v_n) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e usando (3.2.20),

$$c_P \leq I_P(v_n) + o_n(1).$$

Logo, de (3.2.10),

$$c_P \leq c + o_n(1).$$

Então, fazendo $n \to \infty$, concluímos que $c_P \leq c$ e isto contradiz o Lema 3.8. Como obtemos esta contradição supondo $v \equiv 0$, concluímos que $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$ é não nulo.

Agora, para concluir a demonstração do Teorema 3.1, vamos mostrar que v é ground state, ou seja, vamos mostrar que a energia de v coincide com o nível minimax do Teorema do Passo da Montanha definido em (3.2.3). Temos que

$$\begin{aligned}
2c &= \liminf_{n\to\infty} 2I(v_n) = \liminf_{n\to\infty} \left(2I(v_n) - I'(v_n)v_n\right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} K(x)\,[f(v_n)v_n - 2F(v_n)]
\end{aligned}$$

Usando Lema de Fatou,

$$\int_{\mathbb{R}^2} K(x)\,[f(v)v - 2F(v)] \leq 2c.$$

Sendo v ponto crítico de I,

$$2I(v) = 2I(v) - I'(v)v = \int_{\mathbb{R}^2} K(x)\,[f(v)v - F(v)]$$

e portanto, $I(v) \leq c$. Por outro lado, a condição (f_4) implica que

$$c = \inf\left\{ I(u) \ : \ u \in H^1(\mathbb{R}^2)\backslash\{0\} \text{ e } I'(u)u = 0 \right\},$$

de onde segue que $c \leq I(v)$. Logo, $I(v) = c$.

■

Capítulo 4

Problema exponencialmente subcrítico singular em dimensão dois com falta de compacidade

Neste capítulo, seguimos na mesma classe de problemas abordada no Capítulo 3, porém, com uma classe de função K diferente e uma singularidade. O resultado deste capítulo estabelece existência de solução ground state para a seguinte equação elíptica não linear:

$$(P_4) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = K(x)\dfrac{f(u)}{|x|^a} \text{ em } U, \\ u \in H_0^1(U), \end{cases}$$

com $U = \mathbb{R}^2$ ou $U = \mathbb{R}^2 \backslash \overline{\Omega}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ denotando um conjunto não vazio conexo e limitado com fronteira suave, e

$$0 \leq a < \frac{1}{2}. \tag{4.0.1}$$

Com relação a função $K : U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, supomos que satifaz as seguintes hipóteses:

(K_1) K é positiva quase sempre em U, ou seja,

$$|\{x \in U \ : \ K(x) \leq 0\}| = 0;$$

(K_2) $K \in L^\infty(U)$.

Para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, supomos que

(f_1) Existe $\beta \geq 1$ tal que $f(s) = o(s^\beta)$ quando $s \to 0$;
(f_2) Para todo $\alpha > 0$, vale

$$\lim_{|s| \to +\infty} \frac{f(s)}{e^{\alpha . s^2}} = 0;$$

(f_3) Existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < \theta F(s) \leq s f(s) \quad , \quad \forall s \in \mathbb{R} \backslash \{0\},$$

com $F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau$.

Motivados pelas ideias do artigo [6], provamos neste capítulo o seguinte resultado:

Teorema 4.1. : *Sejam f uma função contínua que satisfaz $(f_1) - (f_3)$ e*

$$\sigma > \frac{2-a}{1-2a}. \tag{4.0.2}$$

Suponhamos que a função K satisfaz $(K_1) - (K_2)$ e

(K_3) *$K \in L^r(U)$, para algum $r > \dfrac{4\sigma}{\sigma(1-2a)+a-2}$.*

Então, o problema (P_4) tem solução. Além disso, se

(f_4) *$s \mapsto \dfrac{f(s)}{s}$ é uma função crescente em $|s|$,*

então (P_4) tem solução ground state.

Observação 4.1. : *Um exemplo típico de uma função que satisfaz as hipóteses $(f_1) - (f_4)$ é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(s) = |s|^{q-2} s \quad , \quad s \in \mathbb{R},$$

com $q > \beta + 1$.

Com o propósito de demonstrar o Teorema 4.1, fazemos uso do Teorema do Passo da Montanha sem condição Palais-Smale, de uma versão da Desigualdade de Trudinger-Moser que pode ser encontrada em [1] e do Teorema de Vitali.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: Na primeira seção introduzimos alguns resultados preliminares e a formulação variacional do problema. Além disso, verificamos que o funcional energia associado ao problema (P_4) satisfaz a geometria do Passo da Montanha. Na seção 4.2, mostramos algumas propriedades da sequência Palais-Smale obtida do Teorema do Passo da Montanha sem condição Palais-Smale. Por fim, na seção 4.3, demonstramos o Teorema 4.1.

4.1 Preliminares

No espaço de Sobolev $H_0^1(U)$ consideramos a norma dada por

$$||u|| = \left[\int_U \left(|\nabla u|^2 + |u|^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \ , \ u \in H_0^1(U),$$

e denotamos por $I : H_0^1(U) \to \mathbb{R}$ o funcional energia definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \int_U K(x)\frac{F(u)}{|x|^a}\ ,\ u \in H_0^1(U). \tag{4.1.1}$$

Das condições (f_1) e (f_2), temos que para cada $\varepsilon > 0$ e cada $\alpha > 0$, existe $C = C(\varepsilon, \alpha) > 0$ tal que

$$|F(s)| \leq \frac{\varepsilon}{\beta+1}|s|^{\beta+1} + C|s|^3\Big(e^{\alpha s^2} - 1\Big)\ ,\ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Existem constantes positivas α_1 e C_1 tais que

$$\frac{\varepsilon}{\beta+1}|s|^{\beta+1} + C|s|^3\Big(e^{\alpha s^2} - 1\Big) \leq C_1\left(e^{\alpha_1 s^2} - 1\right)\ ,\ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Daí,

$$\int_U \left|K(x)\frac{F(u)}{|x|^a}\right| \leq C_1|K|_\infty \int_U \frac{\left(e^{\alpha_1 u^2} - 1\right)}{|x|^a}\ ,\ \forall u \in H_0^1(U).$$

Assim, a desigualdade de Trudinger-Moser (ver Apêndice, Lema A.1) garante que o funcional I está bem definido.

Um fato importante, que pode ser encontrado em [30], é que para qualquer sequência (u_n) convergente em $H_0^1(U)$, existem uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) e uma função $v \in H_0^1(U)$ verificando

$$|u_{n_k}(x)| \leq v(x) \text{ q.t.p. em } U.$$

Com esta informação, podemos adaptar as ideias encontradas no apêndice B de [33] (ver também o apêndice de [13]) ao caso exponencial e assim justificar que o funcional I é de classe C^1 e que

$$I'(u)v = \int_U (\nabla u \nabla v + uv) - \int_U K(x)\frac{f(u)v}{|x|^a}\ ,\ \forall u, v \in H_0^1(U).$$

Consequentemente, pontos críticos não nulos de I são soluções do problema (P_4).

O primeiro lema é uma consequência da desigualdade de Trudinger-Moser e é de fundamental importância para mostrarmos algumas convergências envolvendo sequências Palais-Smale.

Lema 4.1. : *Sejam θ o valor dado pela condição (f_3) e (u_n) uma sequência satisfazendo*

$$\limsup_{n\to\infty} ||u_n||^2 \leq \left(\frac{2\theta}{\theta - 2}\right)c,$$

para algum $c > 0$. Então, existem $\alpha > 0$, $t > 1$ e $C > 0$, independentes de n, tais que

$$\int_U \left(\frac{e^{\alpha u_n^2} - 1}{|x|^a}\right)^t \leq C$$

para n suficientemente grande.

Demonstração:

Consideremos

$$\alpha = \frac{4\pi}{\sigma}\left(1-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{\theta-2}{2\theta}\right)\frac{1}{c}, \tag{4.1.2}$$

com a satisfazendo (4.0.1) e σ satisfazendo (4.0.2). Temos que $\alpha > 0$. Além disso, consideremos

$$m := \frac{1}{2}\left(1+\sigma.\frac{2}{2-a}\right)\left(\frac{2\theta}{\theta-2}\right)c.$$

Temos então que

$$\left(\frac{2\theta}{\theta-2}\right)c < m$$

e daí, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||u_n||^2 < m \ , \ \forall n \geq n_0.$$

Como a satisfaz (4.0.1) e σ satisfaz (4.0.2), temos que

$$\frac{4\sigma}{2-a+2\sigma+2\sigma a} > \frac{4}{3}.$$

Seja $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{4}{3} < t < \frac{4\sigma}{2-a+2\sigma+2\sigma a}. \tag{4.1.3}$$

Para t escolhido desta forma, vale

$$\frac{4}{3} < t < \left(1-\frac{at}{2}\right)\frac{4\sigma}{2-a+2\sigma}.$$

Seja $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$t < \beta < \left(1-\frac{at}{2}\right)\frac{4\sigma}{2-a+2\sigma} = \left(1-\frac{at}{2}\right)\frac{4\pi}{\alpha m}$$

Pelo Lema A.2 do Apêndice, existe $C = C(\beta) > 0$ tal que

$$\int_U \frac{\left(e^{\alpha u_n^2}-1\right)^t}{|x|^{at}} \leq C\int_U \frac{\left(e^{\beta\alpha m\left(\frac{u_n}{||u_n||}\right)^2}-1\right)}{|x|^{at}}$$

para cada $n \geq n_0$. Pela escolha de β temos que

$$\beta\alpha m < \left(1-\frac{at}{2}\right)4\pi.$$

Então, pela desigualdade de Trudinger-Moser, existe uma constante $C > 0$, independente de n, tal que

$$\int_U \frac{\left(e^{\alpha u_n^2} - 1\right)^t}{|x|^{at}} \leq C \int_U \frac{\left(e^{\beta\alpha m\left(\frac{u_n}{||u_n||}\right)^2} - 1\right)}{|x|^{at}} \leq C \ , \ \forall n \geq n_0,$$

como queríamos demonstrar.

∎

O próximo resultado é útil para mostrar que o funcional I satisfaz a geometria do Passo da Montanha.

Lema 4.2. : *Existem $\alpha > 0$, $t > 1$ e $C > 0$, independente de u, tais que*

$$\sup_{||u|| \leq 1} \int_U \left(\frac{e^{\alpha u^2} - 1}{|x|^a}\right)^t \leq C.$$

Demonstração:

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$0 < \alpha < \frac{4\pi(2-a)}{2},$$

com a satisfazendo (4.0.1). Com esta escolha de α temos

$$\frac{8\pi}{2\alpha + 4a\pi} > 1.$$

Desta forma, seja $t \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$1 < t < \frac{8\pi}{2\alpha + 4a\pi}.$$

Temos então que

$$t < \left(1 - \frac{at}{2}\right)\frac{4\pi}{\alpha}.$$

Seja $\beta \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$t < \beta < \left(1 - \frac{at}{2}\right)\frac{4\pi}{\alpha}.$$

Pelo Lema A.2 do Apêndice, existe uma constante $C = C(\beta) > 0$, independente de u, tal que

$$\int_U \left(\frac{e^{\alpha u^2} - 1}{|x|^a}\right)^t \leq C \int_U \frac{\left(e^{\beta\alpha u^2} - 1\right)}{|x|^{at}} \quad , \quad \forall u \in H_0^1(U).$$

Concluimos então da desigualdade de Trudinger-Moser que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\sup_{||u|| \leq 1} \int_U \left(\frac{e^{\alpha u^2} - 1}{|x|^a}\right)^t \leq C_1.$$

∎

No próximo lema, mostramos que o funcional I satisfaz a geometria do Passo da Montanha.

Lema 4.3. : *O funcional I definido em (4.1.1) verifica as seguintes propriedades:*

(i) Existem $\eta, \rho > 0$ tais que

$$I(u) \geq \eta \ , \ \forall u \in H_0^1(U) \ , \ ||u|| = \rho;$$

(ii) Existe $e \in H_0^1(U)$ tal que $||e|| > \rho$ e $I(e) < 0$.

Demonstração:
Por (f_1) e (f_2), temos que dado $\epsilon > 0$, existe $C = C(\epsilon) > 0$ tal que, para todo $\alpha > 0$,

$$|F(s)| \leq \frac{\epsilon}{2}|s|^2 + C|s|^3\Big(e^{\alpha s^2} - 1\Big) \ , \ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Se $u \in H_0^1(U)$, então

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\epsilon}{2}\int_U K(x)\frac{|u|^2}{|x|^a} - C\int_U K(x)\frac{|u|^3\Big(e^{\alpha u^2} - 1\Big)}{|x|^a} \\ &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\epsilon}{2}|K|_\infty\int_U \frac{|u|^2}{|x|^a} - C|K|_\infty\int_U \frac{|u|^3\Big(e^{\alpha u^2} - 1\Big)}{|x|^a}. \end{aligned}$$

Se $u \in B_1(0) \subset H_0^1(U)$, segue do Lema 4.2 que existe $t > 1$, suficientemente próximo de 1, tal que

$$\frac{e^{\alpha u^2} - 1}{|x|^a} \in L^t(U)$$

e existe $C > 0$ tal que

$$\int_U \left(\frac{e^{\alpha u^2} - 1}{|x|^a}\right)^t \leq C \ , \ \forall u \in B_1(0).$$

Então, usando desigualdade de Hölder com expoentes t e seu conjugado t' e usando imersão de Sobolev

$$H_0^1(U) \hookrightarrow L^{t'}(U) \ , \ 2 \leq t' < +\infty,$$

obtemos constante positivas C_2, C_3 e C_4 tais que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{\epsilon}{2}C_2||u||^2 - C_3||u||^{t'}\left[\int_U \left(\frac{e^{\alpha u^2} - 1}{|x|^a}\right)^t\right]^{\frac{1}{t}} \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}C_2\right)||u||^2 - C_4||u||^{t'} \ , \ \forall u \in B_1(0). \end{aligned}$$

Como $t' > 2$, temos que, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existem $\beta > 0$ e $0 < \rho_0 < 1$ tais que se $0 < \rho < \rho_0$, então

$$I(u) \geq \beta > 0 \ , \ \text{para } ||u|| = \rho,$$

mostrando o item (i).

Afim de mostrarmos o item (ii), notemos que, por (f_3), existem constantes positivas C e D verificando

$$F(s) \geq C|s|^\theta - D \ , \ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.1.4}$$

Fixando uma função não negativa $\varphi \in C_0^\infty(U)$ e usando (4.1.4), encontramos

$$\begin{aligned} I(t\varphi) &= \frac{t^2}{2}||\varphi||^2 - \int_B K(x)\frac{F(t\varphi)}{|x|^a} \\ &\leq \frac{t^2}{2}||\varphi||^2 - C|t|^\theta \int_B K(x)\frac{|\varphi|^\theta}{|x|^a} + D\int_B K(x)\frac{1}{|x|^a}, \end{aligned}$$

com $B := \operatorname{supp}\varphi$. Como $\theta > 2$, concluimos que $I(t\varphi) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$. Assim, é suficiente fixar $e = t\varphi$, com $t > 0$ suficientemente grande, para concluir a demonstração.

■

Aplicando uma versão do Teorema do Passo Montanha sem condição Palais-Smale (ver Apêndice, Teorema A.15), temos que existe uma sequência $(u_n) \subset H_0^1(U)$ satisfazendo

$$I(u_n) \to c \ \text{ e } \ I'(u_n) \to 0, \tag{4.1.5}$$

com

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) > 0$$

e

$$\Gamma = \left\{\gamma \in C\left([0,1], H_0^1(U)\right) \ : \ \gamma(0) = 0 \text{ e } I(\gamma(1)) < 0\right\}.$$

4.2 Propriedades da sequência Palais-Smale

Nesta seção, mostramos algumas propriedades da sequência Palais-Smale. Como a demonstração da primeira delas segue dos argumentos usados para demonstrar o Lema 1.2 no Capítulo 1 e o Lema 3.4 no Capítulo 3, aqui a omitimos.

Lema 4.4. : *Seja (u_n) uma sequência satisfazendo (4.1.5). Então (u_n) é limitada em $H_0^1(U)$.*

Sendo (u_n) limitada em $H_0^1(U)$, segue que existem $u \in H_0^1(U)$ e uma subsequência de (u_n), o qual ainda denotamos por (u_n), tais que

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ em } \ H_0^1(U).$$

Usando o Teorema de Rellich-Kondrachov, obtemos

$$u_n \to u \ \text{ em } \ L^q_{loc}(U) \ , \ \text{para } q \geq 1,$$

e consequentemente,

$$u_n(x) \to u(x) \ \text{ q.t.p. em } \ U.$$

Lema 4.5. : *Sejam (u_n) uma sequência em $H_0^1(U)$ satisfazendo (4.1.5) e $u \in H_0^1(U)$ seu limite fraco. Então,*

$$\int_U K(x)\frac{f(u_n)\varphi}{|x|^a} \to \int_U K(x)\frac{f(u)\varphi}{|x|^a} \quad quando \quad n \to \infty,$$

para cada $\varphi \in C_0^\infty(U)$.

Demonstração:

Seja $\zeta > 1$. Do fato de que (u_n) satisfaz (4.1.5), temos que

$$(1-\zeta)\,||u_n||^2 + (\zeta - 1)\int_U K(x)\frac{f(u_n)u_n}{|x|^a} = o_n(1)$$

e portanto,

$$(\zeta - 1)\int_U K(x)\frac{f(u_n)u_n}{|x|^a} = o_n(1) + (\zeta-1)\,||u_n||^2.$$

Sendo (u_n) uma sequência limitada em $H_0^1(U)$, temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_U K(x)\frac{f(u_n)u_n}{|x|^a} \leq C\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.2.1}$$

Observemos que

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{f(t)t} = 0.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $R_\epsilon > 0$ tal que

$$|f(t)| < \epsilon f(t)t\ ,\ \forall t > R_\epsilon.$$

Deste modo, denotando $[u_n > R_\epsilon] := \{x \in U\ ;\ u_n(x) > R_\epsilon\}$, segue usando (K_1) e (4.2.1) que

$$\int_{[u_n>R_\epsilon]} K(x)\frac{|f(u_n)|}{|x|^a} \leq \epsilon\int_{[u_n>R_\epsilon]} K(x)\frac{f(u_n)u_n}{|x|^a} \leq \epsilon C.$$

Da mesma forma, denotando $[u > R_\epsilon] := \{x \in U\ ;\ u(x) > R_\epsilon\}$, podemos provar que

$$\int_{[u>R_\epsilon]} K(x)\frac{|f(u)|}{|x|^a} \leq \epsilon\int_{[u>R_\epsilon]} K(x)\frac{f(u)u}{|x|^a} \leq \epsilon C.$$

Dado arbitrariamente $\varphi \in C_0^\infty(U)$, temos que

$$\begin{aligned}\int_U K(x)\frac{|f(u_n)-f(u)|}{|x|^a}|\varphi| &\leq \int_{[u_n\leq R_\epsilon]} K(x)\frac{|f(u_n)-f(u)|}{|x|^a}|\varphi| \\ &+ \int_{[u_n>R_\epsilon]} K(x)\frac{|f(u_n)|}{|x|^a}|\varphi| + \int_{[u_n>R_\epsilon]} K(x)\frac{|f(u)|}{|x|^a}|\varphi|.\end{aligned}$$

Logo, denotando $B := \text{supp}\varphi$ e usando o fato de que $K, \varphi \in L^\infty(U)$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_U K(x)\frac{|f(u_n)-f(u)|}{|x|^a}|\varphi| &\leq |K|_\infty|\varphi|_\infty\int_{[u_n\leq R_\epsilon]\cap B}\frac{|f(u_n)-f(u)|}{|x|^a}\\ &+ 2\epsilon C + |K|_\infty|\varphi|_\infty\int_{S_n}\frac{|f(u)|}{|x|^a},\end{aligned}$$

com $S_n := [u \leq R_\epsilon]\cap[u_n > R_\epsilon]\cap B$. Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue seguem os seguintes limites:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[u_n\leq R_\epsilon]\cap B}\frac{|f(u_n)-f(u)|}{|x|^a} = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_{S_n}\frac{|f(u)|}{|x|^a} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\int_U K(x)\frac{|f(u_n)-f(u)|}{|x|^a}|\varphi| = 0$$

e com isso concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_U K(x)\frac{f(u_n)}{|x|^a}\varphi = \int_U K(x)\frac{f(u)}{|x|^a}\varphi.$$

■

4.3 Existência de solução ground state

Estamos agora em condições de demonstrar a existência de solução ground state para o problema (P_4).

Demonstração do Teorema 4.1:

Começamos mostrando que o limite fraco u da sequência (u_n) satisfazendo (4.1.5) é ponto crítico do funcional I. De fato, sendo $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(U)$ temos

$$\int_U (\nabla u_n \nabla w + u_n w) \to \int_U (\nabla u \nabla w + uw) \quad \text{quando} \quad n \to \infty, \tag{4.3.1}$$

para cada $w \in H_0^1(U)$. Além disso, pelo Lema 4.5, temos para cada $\varphi \in C_0^\infty(U)$ que

$$\int_U K(x)\frac{f(u_n)\varphi}{|x|^a} \to \int_U K(x)\frac{f(u)\varphi}{|x|^a} \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{4.3.2}$$

Portanto, como (u_n) satisfaz (4.1.5), segue de (4.3.1) e (4.3.2) que,

$$\begin{aligned} o_n(1) &= I'(u_n)\varphi = \int_U (\nabla u_n \nabla \varphi + u_n \varphi) - \int_U K(x)\frac{f(u_n)\varphi}{|x|^a} \\ &= \int_U (\nabla u \nabla \varphi + u\varphi) - \int_U \left(K(x)\frac{f(u)\varphi}{|x|^a}\right) + o_n(1) \\ &= I'(u)\varphi + o_n(1), \end{aligned}$$

ou seja, $I'(u)\varphi = 0$. Pela densidade de $C_0^\infty(U)$ em $H_0^1(U)$, obtemos que $I'(u)v = 0$ para todo $v \in H_0^1(U)$, ou seja, u é ponto crítico de I.

Vamos agora mostrar que u é não nulo. Para isto, vamos usar o Teorema de Vitali (ver Apêndice, Teorema A.6) e desigualdade de Trudinger-Moser para mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_U K(x)\frac{f(u_n)u_n}{|x|^a} = \int_U K(x)\frac{f(u)u}{|x|^a}. \tag{4.3.3}$$

De (f_1) e (f_2) temos que, para todo $\varepsilon > 0$ e todo $\alpha > 0$, existem $\delta = \delta(\varepsilon, \alpha) > 0$ e $K = K(\varepsilon, \alpha) > 0$ tais que

$$\begin{cases} |f(s)| < \varepsilon |s|^\beta \ , \ \forall \ |s| < \delta \\ |f(s)| < \varepsilon |s|^3 e^{\alpha s^2} \ , \ \forall \ |s| > K. \end{cases}$$

Daí, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |f(s)s| &\leq \varepsilon|s|^{\beta+1} + \varepsilon|s|^4 e^{\alpha s^2} + \max_{\delta \leq |s| \leq K} |f(s)s| \\ &\leq \varepsilon|s|^{\beta+1} + \varepsilon C|s|^3\left(e^{\alpha s^2} - 1\right) + \max_{\delta \leq |s| \leq K} |f(s)s| \ , \ \forall s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se $A \subset U$ é um conjunto mensurável arbitrário, temos

$$\begin{aligned} \int_A K(x)\frac{|f(u_n)u_n|}{|x|^a} &\leq \varepsilon|K|_\infty \int_U \frac{|u_n|^{\beta+1}}{|x|^a} + \varepsilon C|K|_\infty \int_U |u_n|^3 \frac{\left(e^{\alpha u_n^2} - 1\right)}{|x|^a} \\ &\quad + \max_{\delta \leq |s| \leq K} |f(s)s| \, |A| \, . \end{aligned}$$

Podemos considerar $\alpha > 0$ dado em (4.1.2) e o Lema 4.1 implica que existe $t > 1$ tal que, passando a uma subsequência se necessário,

$$\frac{e^{\alpha u_n^2} - 1}{|x|^a} \in L^t(U) \ , \ \forall n \in \mathbb{N},$$

e existe $C > 0$ tal que

$$\int_U \left(\frac{e^{\alpha u_n^2} - 1}{|x|^a}\right)^t \leq C \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aplicando desigualdade de Hölder com expoentes t e seu conjugado t' e usando imersão contínua, temos que existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$\int_A K(x)\frac{|f(u_n)u_n|}{|x|^a} \leq \varepsilon C_1 + \varepsilon C_2 + \max_{\delta\leq|s|\leq K}|f(s)s|\,|A|\,.$$

Então, se $|A|< \varepsilon$, obtemos que

$$\int_A K(x)\frac{|f(u_n)u_n|}{|x|^a} \leq \varepsilon C_1 + \varepsilon C_2 + \varepsilon.\max_{\delta\leq|s|\leq K}|f(s)s|\,. \tag{4.3.4}$$

Por outro lado, para todo $\varepsilon > 0$ e todo $\alpha > 0$, existe $C = C(\varepsilon, \alpha) > 0$ tal que

$$|f(s)s| \leq \varepsilon|s|^{\beta+1} + C|s|^3\left(e^{\alpha s^2} - 1\right)\ ,\ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Então, para $R > 0$ tal que $\Omega \subset B_R(0)$, temos

$$\begin{aligned}\int_{U\setminus B_R(0)} K(x)\frac{|f(u_n)u_n|}{|x|^a} \quad &\leq \quad \varepsilon|K|_\infty\int_{U\setminus B_R(0)}\frac{|u_n|^{\beta+1}}{|x|^a}\\ &\quad +C\int_{U\setminus B_R(0)} K(x)|u_n|^3\frac{\left(e^{\alpha u_n^2}-1\right)}{|x|^a}.\end{aligned}$$

Considerando $\alpha > 0$ dado em (4.1.2) e aplicando desigualdade de Hölder com expoentes r, com r dado em (K_3), t, com t dado em (4.1.3), e 4 tais que

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{t} + \frac{1}{4} = 1,$$

e usando imersão contínua, temos que existem constantes positivas C_3 e C_4 tais que

$$\int_{U\setminus B_R(0)} K(x)\frac{|f(u_n)u_n|}{|x|^a} \leq \varepsilon C_3 + C_4\left(\int_{U\setminus B_R(0)} K(x)^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

De (K_3) temos que

$$\int_{U\setminus B_R(0)} K(x)^r \to 0 \ \text{ quando } R \to +\infty.$$

Então, para $R > 0$ suficientemente grande,

$$\int_{U\setminus B_R(0)} K(x)\frac{|f(u_n)u_n|}{|x|^a} \leq \varepsilon C_3 + \varepsilon C_4. \tag{4.3.5}$$

Notemos que (4.3.4) e (4.3.5) significam que a sequência

$$\left(K(x)\frac{|f(u_n)u_n|}{|x|^a}\right)$$

é equi-integrável. Portanto, como

$$K(x)\frac{|f(u_n(x))u_n(x)|}{|x|^a} \to K(x)\frac{|f(u(x))u(x)|}{|x|^a} \quad \text{q.t.p. em } U,$$

o Teorema de Vitali implica (4.3.3).

Sendo (u_n) uma sequência satisfazendo (4.1.5), temos

$$o_n(1) = I(u_n)u_n = ||u_n||^2 - \int_U K(x)\frac{f(u_n)u_n}{|x|^a}.$$

Usando (4.3.3),

$$\lim_{n\to\infty}||u_n||^2 = \lim_{n\to\infty}\int_U K(x)\frac{f(u_n)u_n}{|x|^a} = \int_U K(x)\frac{f(u)u}{|x|^a}.$$

Como u é ponto crítico de I, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}||u_n||^2 = \int_U K(x)\frac{f(u)u}{|x|^a} = ||u||^2. \tag{4.3.6}$$

Suponhamos por absurdo que $u \equiv 0$. Então, segue de (4.3.6) que

$$\lim_{n\to\infty}||u_n||^2 = 0$$

e consequentemente,

$$u_n \to 0 \text{ em } H_0^1(U).$$

Sendo I um funcional de classe C^1, obtemos então que

$$I(u_n) \to 0,$$

o que é um absurdo, pois $I(u_n) \to c$ e $c > 0$. Com isto, concluímos que u é não nulo.

Agora, vamos mostrar que u é ground state, ou seja, vamos mostrar que a energia de u coincide com o nível minimax do Teorema do Passo da Montanha. Sendo (u_n) uma sequência satisfazendo (4.1.5), temos que

$$\begin{aligned} 2c &= \liminf_{n\to\infty} 2I(u_n) = \liminf_{n\to\infty}\left(2I(u_n) - I'(u_n)u_n\right) \\ &= \liminf_{n\to\infty}\int_U K(x)\frac{(f(u_n)u_n - 2F(u_n))}{|x|^a}. \end{aligned}$$

Usando Lema de Fatou,

$$2c \geq \int_U K(x)\frac{(f(u)u - 2F(u))}{|x|^a}.$$

Sendo u ponto crítico de I,

$$2I(u) = 2I(u) - I'(u)u = \int_U K(x)\frac{(f(u)u - 2F(u))}{|x|^a}.$$

Portanto, $I(u) \leq c$. Por outro lado, a condição (f_4) implica que

$$c = \inf\left\{I(\omega)\ :\ \omega \in H_0^1(U)\backslash\{0\} \text{ e } I'(\omega)\omega = 0\right\},$$

de onde segue que $c \leq I(u)$. Logo, $I(u) = c$.

$\blacksquare$

Apêndice A

Resultados Gerais

A.1 Desigualdade de Trudinger-Moser

Lema A.1. (Desigualdade de Trudinger-Moser para $\mathbb{R}^2$) *Dado qualquer $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, temos que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\left(e^{\alpha u^2} - 1\right)}{|x|^a} < \infty$$

para cada $\alpha > 0$ e $0 \leq a < 2$. Além disso, se $\alpha \leq \left(1 - \frac{a}{2}\right) 4\pi$, então

$$\sup_{||u|| \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\left(e^{\alpha u^2} - 1\right)}{|x|^a} < \infty.$$

REFERÊNCIA. Adimurthi [1].

A.2 Fatos de Cálculo

Teorema A.1. (Fórmula de integração por partes) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado de classe C^1 e $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. Então*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} . v dx = - \int_\Omega u . \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial \Omega} u v \eta_i ds(x) \quad (i = 1, \ldots, N),$$

com $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_N)$ denotando o campo vetorial normal exterior unitário.

REFERÊNCIA. Evans [18].

Teorema A.2. (Coordenadas polares) *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\partial B_r(x_0)} f ds(x) \right) dr$$

para cada ponto $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

REFERÊNCIA. Evans [18].

Teorema A.3. *Seja f uma função mensurável sobre $\mathbb{R}^N$, não negativa ou integrável, tal que $f(x) = g(|x|)$ para alguma função $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx = \sigma(S^{N-1}) \int_0^{+\infty} g(r)r^{N-1}dr,$$

com $\sigma(S^{N-1})$ denotando a medida $N-1$ dimensional da esfera $S^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ |x|= 1\}$.

REFERÊNCIA. Folland [20].

Teorema A.4. (Desigualdade de Hölder) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $f_1, f_2, \ldots, f_k$ funções tais que*

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

com

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_k} = 1.$$

Então o produto $f = f_1 f_2 \ldots f_k$ pertence a $L^1(\Omega)$ e

$$||f||_{L^1(\Omega)} \leq ||f_1||_{L^{p_1}(\Omega)} ||f_2||_{L^{p_2}(\Omega)} \ldots ||f_k||_{L^{p_k}(\Omega)}$$

REFERÊNCIA. Brezis [14].

Lema A.2. *Sejam $\alpha > 0$ e $q > 1$. Então, para cada $\omega > q$, existe uma constante $C = C(\omega) > 0$ tal que*

$$\left(e^{\alpha s^2} - 1\right)^q \leq C\left(e^{\omega\alpha s^2} - 1\right).$$

Demonstração:

Observe que

$$\frac{(e^{\alpha s^2} - 1)^q}{(e^{\omega\alpha s^2} - 1)} = \frac{(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k s^{2k}}{k!})^q}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\omega\alpha)^k s^{2k}}{k!}} = \frac{s^{2q}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k s^{2(k-1)}}{k!}\right)^q}{s^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\omega\alpha)^k s^{2(k-1)}}{k!}},$$

de onde deduzimos que

$$\lim_{|s|\to 0} \frac{(e^{\alpha s^2} - 1)^q}{(e^{\omega\alpha s^2} - 1)} = 0.$$

Além disso,

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{(e^{\alpha s^2} - 1)^q}{(e^{\omega\alpha s^2} - 1)} = \lim_{|s|\to+\infty} \frac{e^{q\alpha s^2}\left(1 - \frac{1}{e^{\alpha s^2}}\right)^q}{e^{\omega\alpha s^2}\left(1 - \frac{1}{e^{\omega\alpha s^2}}\right)} = 0,$$

provando o lema.

■

A.3 Resultados de Convergência

Lema A.3. (Lema de Fatou) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e (f_n) uma sequência de funções mensuráveis de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R} \cup [-\infty, +\infty]$ tal que*

$$f_n(x) \geq 0 \quad q.t.p. \ \text{em} \ \Omega \quad , \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Então,

$$\int_\Omega \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n dx.$$

REFERÊNCIA. Bartle [9].

Teorema A.5. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$. Suponhamos que*

(a) $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω;
(b) Existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em Ω para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então, $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega f_n dx \to \int_\Omega f dx.$$

REFERÊNCIA. Bartle [9].

Lema A.4. *Sejam (f_n) uma sequência de funções em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tais que $f_n \to f$ em $L^p(\Omega)$. Então, existe uma subsequência (f_{n_j}) de (f_n) tal que*

(a) $f_{n_j}(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω;
(b) Existe $h \in L^p(\Omega)$ tal que $|f_{n_j}(x)| \leq h(x)$ q.t.p. em Ω para todo $j \in \mathbb{N}$.

REFERÊNCIA. Brezis [14].

Lema A.5. (Lema de Brezis-Lieb) *Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, $(f_n) \subset L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ com $1 < p < \infty$. Suponhamos que $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω e que exista $C > 0$ tal que*

$$\int_\Omega |f_n|^p \leq C \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então,

$$\int_\Omega f_n \varphi \to \int_\Omega f \varphi \ , \ \forall \varphi \in L^q(\Omega),$$

com

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

REFERÊNCIA. Kavian [23].

Teorema A.6. (Teorema de Vitali) *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ que converge q.t.p. em Ω para uma função mensurável f. Então, $f_n \to f$ em $L^1(\Omega)$ se, e somente se, (f_n) é equi-integrável.*

REFERÊNCIA. Kavian [23].

Teorema A.7. *Seja E um espaço de Banach reflexivo. Se (u_n) é uma sequência limitada em E, então existem $u \in E$ e uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) tais que $u_{n_k} \rightharpoonup u$.*

REFERÊNCIA. Kreyszig [25].

Lema A.6. (Lema de Lions) *Seja (u_n) uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Suponhamos que exista $R > 0$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{y\in\mathbb{R}^2}\int_{B_R(y)}|u_n|^2dx\right) = 0.$$

Então, $u_n \to 0$ em $L^t(\mathbb{R}^2)$, para todo $2 < t < +\infty$.

REFERÊNCIA. Lions [28].

Lema A.7. (Lema de Lions) *Sejam $N \geq 3$ e (u_n) uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Suponhamos que exista $R > 0$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_R(y)}|u_n|^2dx\right) = 0.$$

Então, $u_n \to 0$ em $L^t(\mathbb{R}^N)$, para todo $2 < t < 2^*$.

REFERÊNCIA. Lions [28].

A.4 Resultados de Imersão

Lema A.8. *Seja $N \geq 3$. Então $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$.*

REFERÊNCIA. Struwe [34].

Lema A.9. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um domínio suave, não necessariamente limitado, $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < +\infty$. Então valem as seguintes afirmações:*

se $kp < N$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para qualquer $q \in \left[p, \frac{Np}{N-kp}\right]$;
se $kp = N$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para qualquer $q \in [p, +\infty)$;
se $N < kp$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Além disso, se m é inteiro e tal que $0 \leq m < k - \frac{N}{p} < m+1$, então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ para qualquer $0 \leq \alpha \leq k - m - \frac{N}{p}$.

REFERÊNCIA. Brezis [14].

Teorema A.8. (Teorema de Rellich-Kondrachov) *Suponhamos* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um dominio limitado de classe* C^1. *Então valem as seguintes afirmações:*

se $p < N$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$ *para qualquer* $q \in [1, p^*)$;
se $p = N$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$ *para qualquer* $q \in [1, +\infty)$;
se $p < N$, *então* $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset C(\overline{\Omega})$.

REFERÊNCIA. Brezis [14].

A.5 Lemas Radiais

Lema A.10. *Seja* $N \geq 3$. *Toda função radial* $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ *é igual q.t.p. em* $\mathbb{R}^N$ *a uma função* U, *contínua para* $x \neq 0$, *tal que*

$$|U(x)| \leq C_N \, |x|^{(2-N)/2} \, ||u||_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} \quad , \quad |x| \geq 1,$$

com C_N *denotando uma constante que depende somente de* N.

REFERÊNCIA. Berestycki e Lions [13].

Lema A.11. *Sejam* $N \geq 2$ *e* $R > 0$. *Toda função radial* $u \in H^1(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)})$ *é igual q.t.p. em* $\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)}$ *a uma função* U, *contínua para* $x \neq 0$, *tal que*

$$|U(x)| \leq C_N \, |x|^{(1-N)/2} \, ||u||_{H^1(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R(0)})},$$

com C_N *denotando uma constante que depende somente de* N.

REFERÊNCIA. Kavian [23].

A.6 Resultados sobre Simetrização de Schwarz

Teorema A.9. *Seja* $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Existe uma função* $f^* \in L^1(\mathbb{R}^N)$, *denominada de função simetrizada de Schwarz de* f, *que é radial e não crescente em relação ao raio e satisfaz*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^N \; ; \; f^*(x) \geq \alpha\right\}\right| = \left|\left\{x \in \mathbb{R}^N \; ; \; |f(x)| \geq \alpha\right\}\right| \quad , \quad \forall \alpha > 0.$$

Além disso, para toda $F \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(f)dx = \int_{\mathbb{R}^N} F(f^*)dx.$$

REFERÊNCIA. Kavian [23].

Teorema A.10. *Sejam* $N \geq 3$ *e* $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. *Então* $u^* \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ *e temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^*|^2 \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx.$$

REFERÊNCIA. Kavian [23].

A.7 Princípios de Máximo

Teorema A.11. (Princípio de Máximo Fraco) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e limitado, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e L um operador diferencial elíptico de segunda ordem da forma*

$$Lu = -\sum_{1=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

com coeficientes a_{ij}, b_i contínuos. Valem as seguintes afirmações:

(i) se $Lu \leq 0$ em Ω, então $\max\limits_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max\limits_{x \in \partial\Omega} u(x)$;
(ii) se $Lu \geq 0$ em Ω, então $\min\limits_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \min\limits_{x \in \partial\Omega} u(x)$.

REFERÊNCIA. Evans [18].

Lema A.12. (Lema de Hopf) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e $c \in L^\infty(\Omega)$. Suponhamos que*

$$\begin{cases} -\Delta u + cu \geq 0 \quad em \quad \Omega, \\ u \geq 0 \quad em \quad \Omega, \end{cases}$$

com u não identicamente nula. Se para algum $x_0 \in \partial\Omega$ temos $u(x_0) = 0$ e Ω satisfaz a condição da bola interior em x_0, então

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) < 0,$$

com η denotando a normal unitária exterior.

REFERÊNCIA. Evans [18]

Teorema A.12. (Princípio de Máximo Forte) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, limitado e conexo, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e L um operador diferencial elíptico de segunda ordem da forma*

$$Lu = -\sum_{1=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

com coeficientes a_{ij}, b_i contínuos. Valem as seguintes afirmações:

(i) se $Lu \leq 0$ em Ω e existe $x_1 \in \Omega$ tal que $u(x_1) = \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$, então u é constante sobre Ω ;
(ii) se $Lu \geq 0$ em Ω e existe $x_2 \in \Omega$ tal que $u(x_2) = \min\limits_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$, então u é constante sobre Ω.

REFERÊNCIA. Evans [18].

A.8 Resultados de Regularidade

Teorema A.13. (Desigualdade de Caldéron-Zygmund) *Seja L um operador diferencial elíptico de segunda ordem da forma*

$$Lu = -\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu$$

com coeficientes a_{ij}, b_i contínuos. Suponhamos que $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ satisfaz $Lu = f$ em Ω com $f \in L^p(\Omega)$, com $1 < p < +\infty$. Então para qualquer $\Omega' \subset\subset \Omega$ temos

$$||u||_{W^{2,p}(\Omega')} \leq C\left(||u||_{L^p(\Omega)} + ||f||_{L^p(\Omega)}\right).$$

Se além disso Ω é de classe $C^{1,1}$ e se existe uma função $u_0 \in W^{2,p}(\Omega)$ tal que $u - u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$, então

$$||u||_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\left(||u||_{L^p(\Omega)} + ||f||_{L^p(\Omega)} + ||u_0||_{W^{2,p}(\Omega)}\right).$$

A constante C pode depender de L, Ω, N, p e, no primeiro caso, de Ω'.

REFERÊNCIA. Gilbarg e Trudinger [21].

Lema A.13. (Lema de Brezis-Kato) *Seja Ω um dominio em $\mathbb{R}^N$ e seja $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Carathéodory tal que para quase todo $x \in \Omega$ vale*

$$|g(x, u)| \leq a(x)\,(1 + |u|)$$

com a função $a \in L^{N/2}_{loc}(\Omega)$. Suponhamos que $u \in H^{1,2}_{loc}(\Omega)$ seja uma solução fraca da equação

$$-\Delta u = g(., u) \quad em \quad \Omega.$$

Então $u \in L^q_{loc}(\Omega)$ para qualquer $q < +\infty$. Se $u \in H^{1,2}_0(\Omega)$ e $a \in L^{N/2}(\Omega)$, então $u \in L^q(\Omega)$ para qualquer $q < +\infty$.

REFERÊNCIA. Brezis e Kato [15].

A.9 Teorema do Valor Intermediário

Teorema A.14. (Teorema do Valor Intermediário) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua com $f(a) \neq f(b)$. Então para todo c entre $f(a)$ e $f(b)$, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = c$.*

REFERÊNCIA. Lima [27].

A.10 Teorema do Passo da Montanha

Teorema A.15. (Teorema do Passo da Montanha sem condição Palais-Smale) *Sejam E um espaço de Banach e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ com $I(0) = 0$. Suponhamos que*

(i) Existem $\eta, \rho > 0$ tais que

$$I(u) \geq \eta \quad , \quad \forall u \in E \ , \ ||u||= \rho;$$

(ii) Existe $e \in E$ tal que $||e||> \rho$ e $I(e) < 0$.

Então existe uma sequência (u_n) em E tal que

$$I(u_n) \to c \quad e \quad I'(u_n) \to 0 \quad quando \quad n \to \infty,$$

com

$$0 < c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], E) \ ; \ \gamma(0) = 0 \ e \ \gamma(1) = e\} .$$

REFERÊNCIA. Willem [35].

A.11 Teorema dos Multiplicadores de Lagrange

Teorema A.16. *Sejam E um espaço de Banach, $\varphi \in C^1(E, \mathbb{R})$ e*

$$K = \{\omega \in E \ ; \ \varphi(\omega) = 0\} .$$

Suponhamos que $\varphi'(\omega) \neq 0$ para todo $\omega \in K$. Se $f \in C^1(E, \mathbb{R})$ e existe $u \in K$ tal que

$$f(u) = \inf_{\omega \in K} f(\omega),$$

então existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $f'(u) = \theta\varphi'(u)$.

REFERÊNCIA. Kesavan [24].

A.12 Princípio de Criticalidade Simétrica de Palais

Teorema A.17. *Sejam H um espaço de Hilbert e G um grupo topológico. Suponhamos que uma ação de G sobre o espaço H seja isométrica e que $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ é invariante pela ação. Se u é ponto crítico de I restrito ao conjunto Fix(G), que é definido por*

$$Fix(G) := \{u \in H \ : \ gu = u \ , \ \forall g \in G\},$$

então u é ponto crítico de I em H.

REFERÊNCIA. Palais [31]

Referências

[1] Adimurthi e Y. Yang. “An interpolation of Hardy inequality and Trudinger–Moser inequality in $\mathbb{R}^N$ and its applications”. Em: *Int. Math. Res. Not. IMRN* 13 (2010), pp. 2394–2426.

[2] M. Agueh. “Gagliardo-Nirenberg inequalities involving the gradient L^2-norm”. Em: *C. R. Acad. Sci. Paris* 346.13 (2008), pp. 757–762.

[3] C. O. Alves. “Multiplicity of solutions for a class of elliptic problem in $\mathbb{R}^2$ with Neumann conditions”. Em: *Journal of Differential Equations* 219.1 (2005), pp. 20–39.

[4] C. O. Alves, P. C. Carrião e E. S. Medeiros. “Multiplicity of solutions for a class of quasilinear problem in exterior domains with Neumann conditions”. Em: *Abstr. Appl. Anal.* 3. 2004, pp. 251–268.

[5] C. O. Alves, M. Montenegro e M. A. S. Souto. “Existence of a ground state solution for a nonlinear scalar field equation with critical growth”. Em: *Calc. Var. Partial Differential Equations* 43.3-4 (2012), pp. 537–554.

[6] C. O. Alves, M. Montenegro e M. A. S. Souto. “Existence of solution for two classes of elliptic problems in $\mathbb{R}^N$ with zero mass”. Em: *J. Differential Equations* 252.10 (2012), pp. 5735–5750.

[7] C. O. Alves, J. M. do Ó e O. H. Miyagaki. “On nonlinear perturbations of a periodic elliptic problem in $\mathbb{R}^2$ involving critical growth”. Em: *Nonlinear Anal.: Theory, Methods & Applications* 56.5 (2004), pp. 781–791.

[8] C. O. Alves, J. M. do Ó e O. H. Miyagaki. “On perturbations of a class of a periodic m-Laplacian equation with critical growth”. Em: *Nonlinear Anal.: Theory, Methods & Applications* 45.7 (2001), pp. 849–863.

[9] R. Bartle. *The elements of integration and Lebesgue measure*. Vol. 92. Wiley. com, 2011.

[10] V. Benci e G. Cerami. “Positive solutions of some nonlinear elliptic problems in exterior domains”. Em: *Arch. Rational Mech. Anal.* 99.4 (1987), pp. 283–300.

[11] A. K. Ben-Naoum, C. Troestler e M. Willem. “Extrema problems with critical Sobolev exponents on unbounded domains”. Em: *Nonlinear Anal.: Theory, Methods & Applications* 26.4 (1996), pp. 823–833.

[12] H. Berestycki, T. Gallouët e O. Kavian. “Equations de champs scalaires euclidiens non linéaires dans le plan”. Em: *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math.* 297 (1983), pp. 307–310.

[13] H. Berestycki e P. L. Lions. “Nonlinear scalar field equations, I existence of a ground state”. Em: *Arch. Rat. Mech. Anal.* 82.4 (1983), pp. 313–346.

[14] H. Brézis. *Análisis funcional: teoría y aplicaciones*. Alianza Editorial, 1984.

[15] H. Brézis e T. Kato. "Remarks on the Schrödinger operator with singular complex potentials." Em: *J. Math. Pures Appl.* 58 (1979), pp. 137–151.

[16] D. M. Cao. "Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in $\mathbb{R}^2$". Em: *Commun. Partial Differential Equations* 17.3-4 (1992), pp. 407–435.

[17] M. J. Esteban. "Nonsymmetric ground state of symmetric variational problems". Em: *Comm. Pure and Appl. Math.* 44.2 (1991), pp. 259–274.

[18] L. C. Evans. *Partial differential equations*. Providence, Rhode Land: American Mathematical Society, 1998.

[19] G. M. Figueiredo. "Existence, multiplicity and concentration of positive solutions for a class of quasilinear problems with critical growth". Em: *Comm. Appl. Nonlinear Anal.* 13.4 (2006), pp. 79–99.

[20] G. B. Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*. Vol. 361. Wiley New York, 1999.

[21] D. Gilbarg e N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer, 2001.

[22] L. Jeanjean e K. Tanaka. "A remark on least energy solutions in $\mathbb{R}^N$". Em: *Proc. Amer. Mathematical Society* 131 (2002), pp. 2399–2408.

[23] O. Kavian. *Introduction à la thèorie des points critiques et applications aux problèms elliptiques*. Vol. 13. Springer, 1993.

[24] S. Kesavan. *Nonlinear functional analysis: a first course*. Hindustan book agency New Delhi, 2004.

[25] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*. Wiley. com, 2007.

[26] G. B. Li e S. S. Yan. "Eigenvalue problems for quasilinear elliptic equations on $\mathbb{R}^N$". Em: *Comm. Partial Differential Equations* 14.8-9 (1989), pp. 1291–1314.

[27] E. L. Lima. *Curso de análise*. Vol. 1. 8. Instituto de matemática pura e aplicada, 1995.

[28] P. L. Lions. "The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 1". Em: *Annales de l'institut Henri Poincaré (C) Analyse non linéaire*. Vol. 1. 2. Gauthier-Villars. 1984, pp. 109–145.

[29] O. H. Miyagaki. "On a class of semilinear elliptic problems in $\mathbb{R}^N$ with critical growth". Em: *Nonlinear Anal.: Theory, Methods & Applications* 29.7 (1997), pp. 773–781.

[30] J. M. do Ó, E. S. Medeiros e U. Severo. "On a quasilinear nonhomogeneous elliptic equation with critical growth in $\mathbb{R}^N$". Em: *J. Differential Equations* 246.4 (2009), pp. 1363–1386.

[31] R. S. Palais. "The principle of symmetric criticality". Em: *Comm. Math. Phys.* 69.1 (1979), pp. 19–30.

[32] S. I. Pohozaev. "Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$". Em: *Sov. Math. Doklady*. Vol. 6. 1965, pp. 1408–1411.

[33] P. H. Rabinowitz. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*. 65. AMS Bookstore, 1986.

[34] M. Struwe. *Variational methods: applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*. Vol. 34. Springer, 2008.

[35] M. Willem. *Minimax theorems*. 24. Springer, 1996.

[36] J. Zhang e W. Zou. "A Berestycki-Lions theorem revisited". Em: *Commun. Contemp. Math.* 14.05 (2012).