



PAULO HENRIQUE PEREIRA DA COSTA

SEMIGRUPOS DEGENERADOS
E FLUXO ESTOCÁSTICO DE APLICAÇÕES MENSURÁVEIS
EM VARIEDADES FOLHEADAS

CAMPINAS
2013



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

PAULO HENRIQUE PEREIRA DA COSTA

**SEMIGRUPOS DEGENERADOS E FLUXO ESTOCÁSTICO DE
APLICAÇÕES MENSURÁVEIS EM VARIEDADES FOLHEADAS**

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica da Universidade Estadual de
Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção
do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE
DEFENDIDA PELO ALUNO PAULO HENRIQUE PEREIRA DA COSTA
E ORIENTADA PELO PROF. DR. PAULO RÉGIS CARON RUFFINO

Assinatura do Orientador

CAMPINAS
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C823s	Costa, Paulo Henrique Pereira da, 1983 - Semigrupos degenerados e fluxo estocástico de aplicações mensuráveis em variedades folheadas / Paulo Henrique Pereira da Costa. - Campinas, SP : [s.n.], 2013. Orientador: Paulo Régis Caron Ruffino. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. 1. Feller, Semigrupos de. 2. Folheações (Matemática). 3. Processo estocástico. 4. Princípio da média. I. Ruffino, Paulo Régis Caron, 1967-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.
-------	---

Informações para a Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Degenerate semigroups and stochastic flows of mappings in foliated manifolds

Palavras-chave em inglês:

Feller semigroups

Foliations (Mathematics)

Stochastic processes

Averaging principle

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora:

Paulo Régis Caron Ruffino [Orientador]

Pedro José Catuogno

Michael Anton Högele

Manuel Stadlbauer

Alberto Masayoshi Faria Ohashi

Data da defesa: 15-08-2013

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 15 de agosto de 2013 e aprovada
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). PAULO REGIS CARON RUFFINO



Prof(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO



Prof(a). Dr(a). MICHAEL ANTON HÖGELE



Prof(a). Dr(a). MANUEL STADLBAUER



Prof(a). Dr(a). ALBERTO MASAYOSHI FARIA OHASHI

Abstract

Let $(M, \mathcal{F})$ be a compact Riemannian foliated manifold. We consider a family of compatible Feller semigroups in $C(M^n)$ associated to laws of the n -point motion. Under some assumptions (Le Jan and Raimond [34]) there exists a stochastic flow of measurable mappings in M . We study the degeneracy of these semigroups such that the flow of mappings is foliated, i.e. each trajectory lays in a single leaf of the foliation a.s, hence creating a geometrical obstruction for coalescence of trajectories in different leaves. As an application, an averaging principle is proved for a first order perturbation transversal to the leaves. Estimates for the rate of convergence are calculated.

Key words: Feller semigroup, n -point motion, foliated space, stochastic flow of mappings, averaging principle.

Resumo

Seja $(M, \mathcal{F})$ uma variedade Riemanniana compacta folheada. Consideramos uma família de semigrupos Feller compatível em $C(M^n)$ associada as leis de um processo Markoviano de n -pontos. Com algumas condições (Le Jan e Raimond [34]) existe um fluxo estocástico de aplicações mensuráveis em M . Estudamos aqui a degenerescência desses semigrupos tais que o fluxo de aplicações seja folheado, ou seja, cada trajetória permanece na folha em que começou q.s. e portanto cria uma obstrução geométrica natural para a coalescência de trajetórias em folhas distintas. Como uma aplicação dessa teoria, um princípio de médias é provado para uma perturbação de primeira ordem transversal as folhas. Estimativas de taxas de convergências também são dadas.

Palavras chaves: semigrupos Feller, processos de n -pontos, espaços folheados, fluxo estocástico de aplicações, princípio de média.

Introdução	1
1 Folheações e semigrupos	6
1.1 Folheações e Teorema de Fröbenius	6
1.2 Exemplos de folheações	9
1.2.1 Folheações induzidas por submersões	9
1.2.2 Folheação de Reeb	10
1.3 Semigrupos	10
1.3.1 Semigrupos Markovianos	11
1.3.2 Semigrupos Feller	12
1.3.3 Exemplos: convolução de medidas de probabilidade	14
1.4 Sistemas Markovianos e teoria ergódica	19
2 Fluxo estocásticos de aplicações mensuráveis	23
2.1 Família compatível de semigrupos	23
2.2 Semigrupos de convolução	25
2.3 LJR-fluxo	26
2.4 Coalescência	28
3 Fluxo folheado e semigrupos degenerados	32
3.1 Semigrupos degenerados	32
3.1.1 Observações úteis (com recíprocas falsas)	33
3.2 Fluxo folheado	38

3.2.1	Exemplo: semigrupo folheado sobre folhas densas	47
3.3	Fluxo coalescente folheado	52
4	Um princípio de médias para o LJR-fluxo	56
4.1	Sistemas de coordenadas folheado	57
4.1.1	Função média sobre as folhas	62
4.1.2	Um princípio de médias	70
4.2	Exemplo:	72
4.2.1	Adicionando uma perturbação de primeira ordem	73

AGRADECIMENTOS

- Agradeço a Deus, em primeiro lugar, por mais esse passo importante na minha trajetória acadêmica. Ele que desde de o início permitiu que eu chegasse até o ponto onde estou.
- Agradeço a minha família pelo suporte, carinho e compreensão. Em especial a minha irmã Verinha, e a minha mãe Tereza.
- Agradeço a meu orientador e amigo Paulo Ruffino por esses 6 anos de trabalho (mestrado e doutorado), pelos bons momentos de discussão, pelas dicas e todas os momentos agradáveis que compartilhamos juntos.
- Agradeço aos Professores Pedro Catuogno e Sebastian Ledesma pelas discussões sobre os mais variados temas durante o período de doutorado. Agradeço a todos os membros da banca, por suas contribuições.
- Agradeço aos companheiros e amigos da salinha 4A (Edinho e Rafael) pelos bons momentos que compartilhamos durante a p tempo.
- Agradeço ao amigo e companheiro de república Tiago e a amiga Dahisy pelas dicas e sugestões de LATEX e também pela a amizade. Agradeço a comunidade do IMECC pela amizade e carinho, em especial aos amigos das aulas de dança pelos ótimos momentos que tive por lá.
- Agradeço ao grupo de pesquisa do Prof. Peter Imkeller (Berlim - Alemanha) pela acolhida durante o tempo que estive visitando o grupo, em especial ao Jan e Michael.

- Agradeço aos funcionários da Secretaria de Pós-Graduação do IMECC/Unicamp - Ednaldo, Livia e Tânia - pelo carinho, atenção e empenho em resolver os problemas.
- Agradeço a CAPES, ao CNPq e ao CsF/CNPq pelo auxílio financeiro o qual permitiu que eu chegasse tão longe.

Muito Obrigado!

O estudo e o entendimento da geometria e da dinâmica em espaços folheados desempenham um papel importante na interseção de muitas áreas. Dentre muitas outras referências contemporâneas, citamos aqui algumas as quais estão mais próximas da abordagem que desenvolvemos ao longo desse trabalho. Nesse sentido, veja por exemplo Candel-Conlon [10], Tondeur [48], Plante [44], Walczak [51]. Em relação a sistemas estocásticos, sua conexão com espaços folheados foi impulsionada pelo artigo escrito por L. Garnet [19]: construção medidas harmônicas introduzindo o movimento Browniano folheado. Desse ponto em diante, surgiram vários trabalhos entrelaçando sistemas estocásticos, semigrupos e folheações, veja por exemplo [11], Candel [9], Kaimanovich [26] entre outros.

Nesse trabalho, estamos interessados, em particular, na construção e no estudo de propriedades de uma certa classe de fluxo estocástico adaptado a uma folheação: a saber, cada trajetória permanece na folha onde foi dada a condição inicial do sistema em análise. Na teoria clássica de equações diferenciais estocásticas (Stratonovich) em variedades diferenciáveis, com campos vetoriais suaves, a existência local de fluxos de difeomorfismos é bastante estudada e vem sendo aplicada em uma grande gama de tópicos na literatura. Citamos aqui Arnold [3], Kunita [32, 33] e Ikeda-Watanabe [24] os quais contêm muitos outros autores que também deram importantes contribuições com respeito as construções desses tipos de fluxos. Cada um deles considera aspectos relevantes diferentes e propriedades diferentes associados aos fluxos e a suas construções. E com isso, deixam um legado de técnicas distintas a se aplicar dependendo do ponto de vista a ser considerado. Em linhas gerais, tais construções seguem, a menos do parâmetro aleatório no espaço de probabilidade Ω , a construção clássica de fluxos determinísticos, começando com a diferenciabilidade

das soluções em relação as condições iniciais, passando pela existência de fluxos locais. E igualmente, se M é compacta então existe globalmente o fluxo de difeomorfismos. Veja, por exemplo, [14, 15, 33]. Estendendo essa teoria clássica para fluxos com regularidade no espaço e continuidade de trajetórias (com respeito ao tempo $t \geq 0$), existem vários trabalhos na literatura: Baxendale [5], Bertoin-Le Gall [7], Chen-Xiang [12], Tsirelson [49] (Capítulo 7 em particular) entre outros.

Todos os tipos clássicos de equações diferenciais estocásticas (EDE) em variedades determinam, naturalmente, um semigrupo Feller, cujos geradores infinitesimais são bem conhecidos para equações de Itô e Stratonovich. Por outro lado, um semigrupo de Feller está, intrinsecamente, associado a uma família de probabilidades de transição $P_t(x, \cdot)$ (Teorema de Representação de Riesz) satisfazendo a condição de Chapman-Kolmogorov (CK). Ou seja, está associado a um processo de Markov. Reciprocamente, uma probabilidade de transição $P_t(x, \cdot)$ satisfazendo CK em um espaço métrico compacto M induz um operador no espaço de funções contínuas $P_t^M : C(M) \rightarrow C(M)$ dado por $P_t^M f(x) = \int f(y) P_t(x, dy)$ que satisfaz a propriedade de semigrupo. Este semigrupo é dito Feller se for contínuo em $t = 0$ e em x . Acerca dessas ideias, investigamos propriedades da degenerescência com respeito a dinâmica gerada pelo fluxo estocástico de aplicações mensuráveis construído por Le Jan-Raimond [34]. Nesse caso pode ocorrer o fenômeno de coalescência, donde resulta a não injetividade do fluxo.

Processo de n -pontos e fluxo de aplicações mensuráveis. O fluxo induzido no espaço produto do espaço de estados (processo de n -pontos) carrega informações adicionais que o fluxo de 1-ponto de uma EDE não contém. Por exemplo, dois movimentos brownianos, apesar de terem as mesmas probabilidades de transição, podem ter expoentes de Lyapunov distintos, veja, entre outros, Baxendale [4]. É bem conhecido também (veja o livro clássico de Kunita [33]) que no caso de sistema estocástico de Itô, o processo de 2-pontos determina os geradores infinitesimais dos processos de n -pontos, com $n \geq 2$. O caso Markoviano geral não se comporta dessa maneira.

A construção clássica do fluxo de difeomorfismo ficou generalizada com a abordagem de Le Jan-Raimond [34], cuja ideia central é partir de uma família de semigrupos Feller agindo nos espaços $C(M^n)$, onde M é um espaço métrico compacto. Com condições adicionais, essas probabilidades de transição ou equivalentemente os semigrupos (correspondentes) geram unicamente em lei um fluxo de aplicações mensuráveis $(\varphi_{s,t} : s \leq t)$, o qual denotamos por LJR-fluxo, com espaço de estados M . Dentre outros aspectos di-

nômicos, a estabilidade aqui é estudada via aproximação das trajetórias em M^2 para a diagonal. Tal fluxo também gera uma família de semigrupos. Todos esse conceitos e resultados aqui pontuados serão explicados de forma mais precisa ao longo desse trabalho, em especial no Capítulo 2. Por ora, apresentamos brevemente as principais ideias envolvidas nessa teoria.

Terminologia. Consideramos, em quase todo trabalho, M como sendo uma variedade Riemanniana compacta. Motivados pelo conceito de subvariedades invariantes por fluxos, procuramos condições sobre uma família de semigrupos Feller as quais implicam que uma certa subvariedade N de M é invariante pelo LJR-fluxo correspondente. Nesse caso, tais semigrupos são ditos N -degenerados, veja a Definição 3.1.5. Com as hipóteses apropriadas, o Teorema 3.2.2 garante que as trajetórias que começam em N nela permanecem para todo tempo $t \geq 0$ q.s.. Suponha que a variedade M seja dotada de uma folheação regular $\mathcal{F}$. Usando a mesma ideia do conceito de invariância para uma subvariedade, uma degenerescência apropriada sobre os semigrupos com respeito as folhas da folheação implica que as trajetórias que começam nas folhas nelas permanecem, veja a Definição 3.2. Dinâmicas em espaços folheados possuem naturalmente um interesse geral (veja por exemplo [38, 44, 50, 51]). Além disso, o comportamento do LJR-fluxo com respeito a folheação introduz, em particular, um obstrução geométrica para a coalescência de pontos em folhas distintas.

A classe de exemplos onde este fenômeno de degenerescência (em espaços folheados) ocorre inclui, classicamente, sistemas dinâmicos estocásticos gerados por uma equação EDE de Stratonovich, onde os campos de vetores pertencem ao espaço tangentes das folhas. Sistemas dinâmicos estocásticos degenerados sobre variedades diferenciáveis também ilustra esse contexto. Mais especificamente, quando a dimensão do espaço da álgebra Lie de Hörmander tem dimensão constante, nesse caso a folheação é determinada pelos campos de vetores da EDE original.

Organização do trabalho. Esta tese está dividida da seguinte forma: no Capítulo 1 introduzimos, para comodidade do leitor, conceitos elementares, definições, alguns resultados e exemplos envolvendo tanto a teoria de semigrupos quanto a teoria de folheações. Esses pontos apresentados são relevantes não somente para que o trabalho fique auto contido, mas também para um entendimento geral das ideias aqui apresentadas. Ao leitor

com alguma experiência em tais tópicos, recomendamos a leitura a partir Capítulo 2 o qual é de fundamental relevância teórica para o entendimento dos demais tópicos desse trabalho. Neste Capítulo, em especial, fazemos um breve resumo das definições e resultados envolvendo a construção do LJR-fluxo (veja [34]). Conceitos relevantes a nossa pesquisa os quais usaremos como ferramenta nos capítulos seguintes. Nos Capítulos 3 e 4 inserimos restrições a teoria apresentada no Capítulo 2 as quais nos permitem dar contribuições acadêmicas originais a área. A seguir, uma breve exposição dos resultados provados nos dois últimos capítulos deste trabalho.

Principais resultados obtidos. Os resultados mais importantes desse trabalho se encontram nos Capítulos 3 e 4 os quais deram origem a [13]. Em resumo, no Capítulo 3 introduzimos as definições de semigrupos N -degenerados e semigrupos $\mathcal{F}$ -folheados. Além disso, consta nesse capítulo a nossa principal contribuição para área: o Teorema do Fluxo Folheado o qual garante a equivalência entre semigrupos folheados em M e o LJR-fluxo folheado com espaço de estados M . O leitor perceberá aqui que o resultado continua sendo verdadeiro em espaços localmente compactos, desde que assumidas condições adicionais, veja também [34]). O fluxo coalescente folheado é tratado no final desse capítulo. Por fim, apresentamos, no Capítulo 4, uma aplicação do contexto desenvolvido no capítulo anterior: um princípio de médias. Supomos que todas as folhas são compactas e investigamos o comportamento efetivo de uma pequena perturbação transversal de ordem ϵ no LJR-fluxo folheado. Essa perturbação “destrói” a estrutura folheada. Por fim, obtemos um princípio de médias para uma perturbação dada por um campo de vetor ϵK , onde K é transversal as folhas. Usamos algumas hipóteses sobre a convergência da média de funções ao longo das trajetórias do sistema perturbado (Hipóteses H1 e H2) as quais são naturais na maioria dos sistemas dinâmicos estocásticos, veja por exemplo [22, 23, 35]. Essencialmente, para um dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, o comportamento transversal, com o tempo reescalado por $\frac{t}{\epsilon}$, é aproximado por uma equação diferencial ordinária no espaço transversal. Mais ainda, o campo vetorial é dado pela média ergódica da componente transversal de K sobre cada folha. Encontramos também taxas de convergências quando ϵ tende a 0. Mais precisamente, com a imposição a seguir, a qual descreve uma importante propriedade da dinâmica examinada, a saber, a condição de degenerescência:

Definição. Seja N uma subvariedade imersa de M . Um semigrupo Feller P_t^M é dito N -degenerado se existe um semigrupo Markoviano P_t^N agindo em $B_b(M)$ tal que para

cada $f \in C(M)$ temos que:

$$P_t^M f(x) = P_t^N f|_N(x),$$

sempre que $x \in N$. Em particular, se $(M, \mathcal{F})$ um espaço folheado um semigrupo Feller P_t^M agindo sobre $B_b(M)$ é dito $\mathcal{F}$ -folheado se P_t^M é $\mathcal{L}$ -degenerado para toda $\mathcal{L} \in \mathcal{F}$.

Provamos que:

Teorema do Fluxo Folheado. Seja $(P_t^{M^n} : n \in \mathbf{N})$ uma família CPD-Feller de semigrupos (Definição 2.1.1).

1. **(Subvariedade invariante)** Seja N uma subvariedade imersa de M . Se P_t^M é N -degenerado então o LJR-fluxo estocástico de aplicações preserva N , isto é, para todo $0 \leq s, t$ e para todo $x \in N$ temos que $\varphi_{s,t}(x) \in N$, $\mathbf{P}$ -q.s..
2. **(Fluxo folheado)** Se P_t^M é $\mathcal{F}$ -folheado então o correspondente LJR-fluxo de aplicações $\varphi_{s,t}$ é um fluxo $\mathcal{F}$ -folheado.

Motivados pelo resultado anterior, assumido hipóteses adicionais (H1, H2, H3 e H4), introduzimos uma noção de semigrupo perturbado e propomos um princípio de média no contexto de semigrupos:

Princípio de Médias. Suponha que o semigrupo folheado não perturbado sobre M satisfazendo condições adicionais acima. Seja $v(t)$ a solução de uma EDO determinística sobre a componente transversal $V \subset \mathbf{R}^n$

$$\frac{dv}{dt} = (\Theta^{d\pi_1(K)}, \dots, \Theta^{d\pi_d(K)})(v(t))$$

com condição inicial $v(0) = \pi(x_0) = 0$. Seja T_0 o tempo no qual $v(t)$ atinge a fronteira de V . Então, para todo $0 < t < T_0$, temos que

$$\left[\mathbf{E} \left(\left| \pi \left(y_{\frac{t}{\epsilon}}^\epsilon \right) - v(t) \right|^p \right) \right]^{\frac{1}{p}} \leq G(\epsilon, t)$$

onde $G(\epsilon, t) \geq 0$ é uma função contínua em $\epsilon, t \geq 0$ e $y_t^\epsilon = \varphi_{0,t}^\epsilon(x_0)$ (veja o Capítulo 4). Além disso, fixado $\epsilon > 0$, $G(\epsilon, \cdot)$ é crescente em t e $G(\epsilon, 0) = G(0, t) = 0$.

CAPÍTULO 1

FOLHEAÇÕES E SEMIGRUPOS

Folheações e semigrupos são objetos matemáticos bastante estudados e interessantes por sua relevância e aplicabilidade numa grande gama de áreas. Citamos, em especial, a teoria de equações diferenciais estocásticas ou determinísticas. Além disso, tais objetos permeiam por todo esse trabalho e são fundamentais ao seu completo entendimento. Assim, nesse capítulo damos uma descrição de tais objetos sem grandes aprofundamentos técnicos e ou teóricos. O objetivo é transmitir as ideias fundamentais que são importantes ao nosso contexto. Ao leitor interessado, na literatura existem muitas referências clássicas tanto para a teoria de folheações como para teoria de semigrupos aplicados a processos de Markov. Aqui, ao falar de folheações estamos nos baseando principalmente em Camacho-Neto [8], Candel-Conlon [10] e também em Morales-Scárdua [37]. Por outro lado, envolvendo semigrupos no contexto que este trabalho foi desenvolvido, citamos Applebaum [1], Kallenberg [31], Kunita [33], Oksandal [39], Ikeda-Watanabe [24] e em especial citamos Revuz-Yor [45] o qual contém a maior parte das ideias apresentadas entre a sessão 1.2 e a sessão 1.3. A relevância dos conceitos abordados nesse capítulo, em relação a este trabalho, fica evidente no Capítulo 3, onde relacionamos as teorias em questão por meio de um novo conceito, isto é, a degenerescência.

1.1 Folheações e Teorema de Fröbenius

Seja M uma variedade $(n + d)$ -dimensional. Uma folheação regular $\mathcal{F}$ d -dimensional M consiste de uma partição de M em subvariedades (classes de equivalência) completas

com a mesma dimensão d . Como uma consequência do Teorema de Fröbenius 1.1.6, isto é equivalente a atribuir a M uma distribuição integrável d -dimensional. Cada uma dessas subvariedades são chamadas de *folhas* da folheação. A seguir, analisamos com mais detalhes os objetos mencionados.

Definição 1.1.1. Seja M uma variedade $(n + d)$ -dimensional de classe C^∞ . A variedade M é chamada C^r -folheada quando existe um atlas maximal d -dimensional $\mathcal{F}$ sobre M de classe C^r satisfazendo as seguintes propriedades:

1. Se $(U, \psi) \in \mathcal{F}$ então $\psi(U) = U_1 \times U_2$, onde $U_1 \subseteq \mathbf{R}^n$ e $U_2 \subseteq \mathbf{R}^d$ são conjuntos abertos.
2. Se (U, ψ) e (V, ϕ) pertencem a $\mathcal{F}$ e $U \cap V \neq \emptyset$ então a aplicação mudança de coordenadas $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$ é da seguinte forma: $\phi \circ \psi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$.

Ainda no mesmo contexto, seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial não nulo. Veja que $\langle X_z \rangle \subseteq T_z M$ gera um subespaço unidimensional para cada $z \in M$. Essa ideia motiva a definição de distribuição, veja a seguir:

Definição 1.1.2. Uma distribuição d -dimensional $\mathbf{D}$ em M , é uma aplicação

$$\mathbf{D} : M \ni z \mapsto \mathbf{D}_z \subset T_z M,$$

a qual associa a cada $z \in M$ um subespaço $\mathbf{D}_z \subset T_z M$ de dimensão d . Dizemos que a distribuição é de classe C^∞ se, para cada $z \in M$, existe uma vizinhança U de z e campos $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$, tais que:

$$\mathbf{D}_z = \langle X_1(z), \dots, X_k(z) \rangle, \quad \forall z \in U.$$

Um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ é tangente a $\mathbf{D}$ quando $X_z \in \mathbf{D}_z, \forall z \in M$. Denotamos por $\mathfrak{X}(\mathbf{D})$ o conjunto dos campos vetoriais tangentes a $\mathbf{D}$.

Seja N uma subvariedade de M no sentido generalizado apresentado em Camacho-Neto [8] e Candel-Conlon [10], isto é, existe uma imersão $\phi : N \rightarrow M$, denotamos nesse caso por (N, ϕ) .

Definição 1.1.3. Seja $\mathbf{D}$ uma distribuição em M . Uma subvariedade conexa (N, ϕ) , com

ϕ injetiva, é dita uma variedade integral de $\mathbf{D}$ se:

$$d\phi_z(T_z N) = \mathbf{D}_{\phi(z)}, \quad \forall z \in N.$$

Com isso, vale que:

Proposição 1.1.4. *Seja $\mathbf{D}$ uma distribuição C^∞ na variedade M . Se por cada ponto em M passa uma variedade integral de $\mathbf{D}$ então, quaisquer que sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{D})$, temos que $[X, Y] \in \mathfrak{X}(\mathbf{D})$.*

Veja que toda folheação $\mathcal{F}$ satisfaz naturalmente proposição acima: dada $\mathcal{F}$ existe uma distribuição intrínseca gerada pelas cartas locais. Mais precisamente, dado $x \in M$ o espaço tangente a folha contendo x é determinado pelas cartas locais. Assim, em cada ponto, ele verifica a Definição 1.1.2 e também vale o resultado anterior. Além disso, a recíproca desse fato é dada pelo Teorema de Fröbenius 1.1.6.

A Proposição 1.1.4 motiva a seguinte definição que faz parte do contexto do próximo teorema.

Definição 1.1.5. *Seja $\mathbf{D}$ uma distribuição C^∞ em M .*

1. $\mathbf{D}$ é dita involutiva se $[X, Y] \in \mathfrak{X}(\mathbf{D})$ sempre que $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{D})$.
2. $\mathbf{D}$ é dita integrável se existe uma folheação $\mathcal{F}$ tal que $\mathbf{D} = T\mathcal{F}$.

Para finalizar essa sessão enunciamos o Teorema de Fröbenius:

Teorema 1.1.6 (Fröbenius). *Uma distribuição $\mathbf{D}$ de classe C^∞ é integrável se, e somente se, é involutiva. Em particular, a folheação tangente a distribuição $\mathbf{D}$ é única.*

Como dito anteriormente, o Teorema de Fröbenius nos dá uma forma de descrever a folheação como uma distribuição involutiva $\mathbf{D} \subseteq T(M)$ de posto d onde $\mathbf{D}$ é um subfibrado fechado com relação a colchete de Lie. Isto significa que $[X, Y] \in \mathfrak{X}(\mathbf{D})$ sempre que $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{D})$. Neste caso, existe uma única folheação $\mathcal{F}$ tal que $\mathbf{D} = T\mathcal{F}$.

Nesse contexto o par $(M, \mathcal{F})$ é dito uma *variedade folheada*. Um outro ponto importante é que cada folha $\mathcal{L}$ possui uma estrutura intrínseca de variedade diferenciável a qual define sua topologia intrínseca, veja por exemplo [8]. Mais ainda, esta topologia τ_{int} , em geral, não coincide com a topologia induzida τ_{ind} . Para visualizar isto, basta pensar no fluxo irracional no toro. No Capítulo 3, falaremos um pouco mais sobre tal fenômeno.

1.2 Exemplos de folheações

Justificaremos, de maneira informal, que toda submersão define naturalmente, nas estruturas adequadas, uma estrutura folheada. Como consequência disso, ganhamos uma classe importante de exemplos.

1.2.1 Folheações induzidas por submersões

Proposição 1.2.1. *Seja $f : M^m \longrightarrow N^n$ uma submersão de classe C^r . Então as curvas de nível $\mathcal{L}_q = f^{-1}(q)$, $q \in N$ são folhas de uma folheação de classe C^r de M .*

Ideia da prova. Com efeito, pela forma local das submersões existe um atlas $\{(U, \phi), (V, \psi)\}$ de M, N respectivamente tais que $\phi(U) = U_1 \times U_2$, onde $U_1 \subseteq \mathbf{R}^n$ e $U_2 \subseteq \mathbf{R}^{m-n}$. Além disso, $\psi \circ f \circ \phi = \pi_2$ (localmente), onde π_2 denota a projeção na segunda coordenada. Assim, basta mostrar que a coleção $\mathcal{F} = \{U, \phi\}$ define uma folheação em M . De fato, sejam $(U, \phi), (U', \phi')$ elementos de $\mathcal{F}$. Então segue que:

$$\begin{aligned}\pi_2 \circ \phi' \circ \phi^{-1} &= \varphi' \circ f \circ \phi'^{-1} \circ \phi' \circ \phi^{-1} = \\ \phi' \circ f \circ \phi^{-1} &= \phi' \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ f \circ \phi^{-1} \\ &= \phi' \circ \phi^{-1} \pi_2.\end{aligned}$$

Daí segue que a mudança de coordenadas satisfaz a condição na definição de folheação, como desejado. □

A seguir comentaremos brevemente exemplos clássicos na literatura os quais ilustram bem a importância do resultado acima.

Exemplo 1.2.2. Um dos casos de folheação mais conhecidos na literatura é o fluxo irracional no toro. Considere $M = \mathbf{R}^2$ e $f(x, y) = y - \theta x$ com $\theta \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ temos que f induz uma folheação no toro (olhando as coordenadas $(x, y) \pmod{1}$) onde as folhas são densas em $\mathbf{T}$. Um fato interessante é que se $\theta \in \mathbf{Q}$ então f induz uma folheação em $\mathbf{T}$ onde as folhas são fechadas (homeomorfas a círculos). Para mais detalhes veja [8, 10, 37]. ◇

Exemplo 1.2.3. Um exemplo importante de variedade folheada é um fibrado (E, B, F) onde E é o fibrado vetorial sobre uma variedade B com fibra F . Aqui a submersão é a projeção canônica $\pi : E \rightarrow B$ de classe C^∞ satisfazendo as seguintes condições: para cada $b \in B$ $\pi^{-1}(b)$ é difeomorfo a F e além disso, para cada $b \in B$ existem uma vizinhança $U \subseteq B$ de b e um difeomorfismo $\xi : \pi^{-1}(b) \rightarrow U \times F$ onde $\pi_1 \circ \xi = \pi$. Assim segue naturalmente que a família $\{\pi^{-1}(b) : b \in B\}$ é uma folheação de classe C^∞ de codimensão igual a $\dim(B)$. Mais ainda, nesse caso todas as folhas são difeomorfas entre si, pois todas são difeomorfas a F .

◇

1.2.2 Folheação de Reeb

Aqui dissertaremos brevemente sobre uma das folheações que podem ser chamadas de folheação de Reeb. Na literatura, existem várias folheações as quais podem receber este nome, veja [8, 10, 37]. Falaremos um pouco sobre uma das primeiras descrições que surgiu. Ela foi construída sobre o cilindro e também sobre a faixa de Möbius, veja a seguir: seja $M = [-1, 1] \times \mathbf{R}$ e considere a folheação $\mathcal{F}$ em M induzida pela seguinte submersão $g : M \rightarrow \mathbf{R}$ dada por $g(x, y) = \alpha(x^2) \exp(y)$, onde α é uma função decrescente C^∞ . Seja $G : M \rightarrow M$ dada por $G(x, y) = (x, y + 2)$. Então M/G é um cilindro e se trocarmos G por F onde $G(x, y) = (-x, y + 2)$ então M/F é a faixa de Möbius. Note que $\mathcal{F}$ induz uma folheação $\bar{\mathcal{F}}$ em M/G e em M/F . Esta é uma folheação de Reeb no cilindro e na faixa de Möbius respectivamente. Para ver detalhes consulte [8, 37].

1.3 Semigrupos

A teoria de semigrupos é ampla e com muitas aplicações. Faremos aqui um breve resumo das principais propriedades relevantes para o nosso contexto baseado, principalmente, em [31, 41, 45]. A grosso modo, a teoria de semigrupos nos ajuda a entender o comportamento macroscópico das partículas. É uma média sobre o espaço das trajetórias. Ficará evidente ao longo dessa sessão a grande relevância de semigrupos no estudo de processos de Markov.

Considere $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ um espaço de probabilidade filtrado padrão e processos com o espaço de estados sendo uma variedade Riemanniana M munida com a σ -álgebra boreliana.

1.3.1 Semigrupos Markovianos

Para viabilizar a existência de processos de Markov associados a uma certa família de probabilidades de transição (Definição 1.3.1), é necessário que a mesma satisfaça a condição de compatibilidade de Chapman-Kolmogorov (1.1). Essa condição é, no seu devido contexto, equivalente a condição de semigrupo, como veremos adiante. Para ver uma caracterização precisa de processos de Markov via probabilidades de transição com uma dada configuração inicial, veja Applebaum [1].

Definição 1.3.1. Uma probabilidade de transição em M é uma aplicação

$$\mu : M \times \text{Borel}(M) \longrightarrow [0, 1]$$

tal que

1. para cada $x \in M$, a aplicação $A \mapsto \mu(x, A)$ é borel mensurável;
2. para cada $A \in \text{Borel}(M)$, a aplicação $x \mapsto \mu(x, A)$ é uma medida de probabilidade.

Em particular μ é um núcleo.

Definição 1.3.2. Uma função de transição em $(M, \text{Borel}(M))$ é uma família de probabilidades de transição (μ_t) tal que vale a equação de Chapman-Kolmogorov, isto é, dados $0 \leq s \leq t$ temos que

$$\mu_{t+s}(x, A) = \int_M \mu_t(y, A) \mu_s(x, dy). \quad (1.1)$$

Veja que na definição acima estamos considerando apenas as funções de transição homogêneas, pois é nesse contexto que esse trabalho é desenvolvido. A definição para o caso geral segue o mesmo padrão, veja por exemplo Revuz-Yor [45]. A partir de uma função de transição (μ_t) , definimos um operador P_t sobre as borelianas limitadas de M , que denotamos aqui por $B_b(M)$, da seguinte forma: dada $f \in B_b(M)$ ponha

$$P_t f(x) = \int_M f(y) \mu_t(x, dy). \quad (1.2)$$

Observe que o operador P_t satisfaz a seguintes propriedades:

1. $P_0 = \text{Id}$.

2. Para cada $s, t \geq 0$ vale que $P_{t+s} = P_t P_s$.

Na literatura a Propriedade 2 acima é conhecida a Propriedade de semigrupo.

Definição 1.3.3. Um operador (P_t) , agindo sobre as borelianas limitadas de M , satisfazendo as propriedades (1) e (2) é chamado de *semigrupo*. Em particular, quando o semigrupo provém de uma função de transição ele é dito um *semigrupo Markoviano*.

Veja que, em certo sentido, a Propriedade 2 de semigrupo é equivalente a equação de Chapman-Kolmogorov (CK). Formalmente, isso acontece quando existe um núcleo tal que o semigrupo possa ser representado de acordo com a Equação (1.2) acima. Esse fato justifica parcialmente a importância do estudo de semigrupos aplicados a processos de Markov. Tecnicamente, considere um operador qualquer que possa ser representado segundo a Equação (1.2), isto é, $P_t f(x) = \int_M f(y) \mu_t(x, dy)$. Então $\mu_t(x, \cdot)$ é um núcleo satisfazendo CK se, e somente se, P_t satisfaz a propriedade de semigrupo.

Com efeito, dado $B \in \text{Borel}(B)$ vale que $P_{s+t} \mathbb{1}_B(x) = \mu_{s+t}(x, B)$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} P_t P_s \mathbb{1}_B(x) &= \int (P_t \mathbb{1}_B)(y) \mu_s(x, dy) \\ &= \int \mu_t(y, B) \mu_s(x, dy). \end{aligned}$$

Portanto CK é equivalente a $P_t P_s \mathbb{1}_B = P_{s+t} \mathbb{1}_B$. Assim, combinando a linearidade da integral com o Teorema da convergência monótona é possível estender o resultado às funções em $B_b(M)$.

1.3.2 Semigrupos Feller

Uma subclasse dos semigrupos Markovianos muito estudada são os semigrupos Feller os quais podem ser vistos como semigrupos Markovianos munidos uma certa continuidade. Na literatura esse tipo de semigrupo é definido sobre a classe de funções contínuas que vão a zero no infinito, isto é, sobre C_0 . Porém pode ser definido sobre as funções contínuas limitadas com os devidos ajustes. Ao longo desse trabalho, consideramos semigrupos Feller agindo sobre C_0 . Tais semigrupos estão associados a propriedade forte dos processos de Markov. Além disso, sempre podem ser representados de acordo com a Expressão (1.2). Esses fatos ilustram parcialmente a importância desses objetos.

Definição 1.3.4. Um operador (P_t) agindo sobre $C_0(M)$ é dito um semigrupo Feller se é um semigrupo Markoviano e além disso satisfaz a seguinte propriedade: dada $f \in C_0(M)$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|P_t f - f\| = 0. \quad (1.3)$$

Dado um semigrupo qualquer (P_t) , agindo sobre $C_0(M)$, satisfazendo a Equação (1.3) é possível mostrar que existe um núcleo (probabilidade de transição) que representa tal operador na forma integral. Esse fato é uma consequência do Teorema de representação de Riesz. Para mais detalhes veja por exemplo Revuz-Yor [45, Cap. 3].

Uma outra caracterização interessante para semigrupos Feller segue abaixo.

Proposição 1.3.5. *Seja (P_t) um semigrupo Feller. Então P_t satisfaz as seguintes condições para cada $t \geq 0$ fixo:*

1. P_t preserva C_0 , isto é, $P_t C_0 \subseteq C_0$;
2. para cada $f \in C_0(M)$ e $x \in M$, $\lim_{t \rightarrow 0} P_t f(x) = f(x)$.

Por outro lado, todo semigrupo satisfazendo as Propriedades (1) e (2) acima é Feller. Ou seja, os Itens (1) e (2) juntos com a Propriedade de semigrupo implicam a Propriedade (1.3). Veja os detalhes em Revuz-Yor [45, Cap. 3] e ou em Kallenberg [31, Cap. 17].

Outra propriedade interessante envolvendo esse tipo de semigrupos é que o processo de Markov associado, chamado *processo Feller*, herda em um certo sentido a regularidade do semigrupo. Tecnicamente, todo processo Feller possui uma modificação *càdlàg*: processos com trajetórias contínuas a direita com limites a esquerda. Além disso, é possível mostrar que essa modificação satisfaz a propriedade forte de Markov com as estruturas adequadas. Veja [31, 45].

Um outro conceito muito estudado nesse contexto é o de gerador infinitesimal, cuja nome é inspirado pela descrição que o mesmo dá aos processos. O gerador infinitesimal “mostra”, a grosso modo, como o processo move ponto a ponto em um infinitésimo intervalo de tempo. A seguir, comentaremos brevemente sobre esse operador, em geral de segunda ordem, associado aos semigrupos Feller.

Gerador infinitesimal. Seja X um processo Feller. Uma função $f \in C_0(M)$ é dita pertencente ao domínio $\mathcal{D}_A$ do gerador infinitesimal de X se o limite abaixo existe em $C_0(M)$

$$A f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (P_t f - f). \quad (1.4)$$

O operador $A : \mathcal{D}_A \rightarrow C_0(M)$ é chamado de gerador infinitesimal de P_t ou do processo X .

Note que a Equação (1.4) diz que $Af = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} P_t f$. Vejamos agora algumas propriedades relacionando o semigrupo com o seu respectivo gerador infinitesimal.

Proposição 1.3.6. *Se $f \in \mathcal{D}_A$, então*

1. $P_t f \in \mathcal{D}_A$ para todo t ;
2. a função $t \mapsto P_t f$ é diferenciável em $C_0(M)$ e

$$\frac{d}{dt} P_t f = A P_t f = P_t A f;$$

3. $P_t f - f = \int_0^t P_s A f ds = \int_0^t A P_s f ds$

Ideia da Prova. Para os Itens (1) e (2): fixe t , seja $f \in C_0(M)$. Pela propriedade de semigrupo segue que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{s} (P_s(P_t f) - P_t f) = \lim_{t \rightarrow 0} P_t \left(\frac{1}{s} (P_s f - f) \right) = P_t A f.$$

Para o Item (3): aplique o Teorema fundamental do cálculo ao Item (2). □

Usando a fórmula de Itô podemos calcular o gerador infinitesimal associado a uma equação diferencial estocástica (EDE). Em outras palavras, ele fica determinado pelos coeficientes da EDE.

Uma importante caracterização de semigrupos é feita via geradores infinitesimais. O teorema de Hille-Yosida fornece condições necessárias e suficientes para que isso seja possível. Existe uma vasta literatura envolvendo esse teorema, deixamos aqui algumas que fazem parte do escopo desse trabalho: Applebaum [1], Kallenberg [31] e Da Prato [41].

1.3.3 Exemplos: convolução de medidas de probabilidade

Uma caracterização dos processos de Lévy é feita via semigrupos de convolução de medidas de probabilidade. A cada semigrupo de convolução de medidas (de probabilidade) existe um processo de Lévy correspondente cuja lei é dada pelo respectivo semigrupo de

convolução. Veremos que tais semigrupos de convolução gera, por sua vez, um semigrupo Feller. Assim, todo processo de Levy é um processo Feller. Em particular, o movimento Browniano é um processo de Lévy. Assim, essas ideias nos fornece exemplos abstratos e também explícitos semigrupos Feller. Para mais detalhes veja Applebaum [1] e ou Revuz-Yor [45].

Exemplo 1.3.7. Considere $M = \mathbf{R}^d$ e o semigrupo gerado por uma família de medidas de probabilidades (v_t) satisfazendo as seguintes condições, a saber, semigrupo de convolução de medidas:

- (a) para todo s, t : $v_s * v_t = v_{s+t}$;
- (b) $v_0 = \delta_0$ e além disso, $\lim_{t \rightarrow 0} v_t = \delta_0$ no sentido fraco, isto é, dada $f \in C_0(M)$, $v_t \rightarrow \delta_0$ se, e somente se,

$$\int f(x) v_t(dx) \rightarrow \int f(x) \delta_0(dx) = f(0).$$

Veja que para cada $x \in \mathbf{R}^d$ e $A \in \text{Borel}(M)$, a relação

$$\mu_t(x, A) = \int \mathbb{1}_A(x + y) v_t(dy)$$

define uma probabilidade de transição. Ou equivalentemente, como vimos acima, o operador correspondente P_t definido por

$$P_t f(x) = \int f(x + y) v_t(dy)$$

tem a propriedade de semigrupo.

De fato, dada f uma função boreliana limitada, segue que:

$$\begin{aligned}
P_{t+s}f(x) &= \int f(x+y)v_t * v_s(dy) \\
&= \int \int f(x+y+z)v_t(dz) \otimes v_s(dy) \\
&= \int \left(\int f(x+y+z)v_t(dz) \right) v_s(dy) \\
&= \int P_t f(x+y)v_s(dy) = P_s P_t f(x).
\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Fubini-Tonelli concluímos que $P_s P_t f(x) = P_t P_s f(x)$. E portanto vale a propriedade de semigrupo. Além disso, usando a Proposição 1.3.5 concluímos que P_t é Feller. Com efeito, dados $f \in C_0(M)$ e $x \in M$, seja (x_n) um sequência em M convergindo a x . Como f é limitada, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada e concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_t f(x_n) = P_t f(x).$$

Portanto $P_t f(x)$ é contínua. Aplicando novamente o Teorema da Convergência Dominada, veja que

$$\begin{aligned}
\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} |P_t f(x)| &\leq \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \int_M |f(x+y)| v_t(dy) \\
&= \int_M \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} |f(x+y)| v_t(dy) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $P_t f(x) \in C_0(M)$, sempre que $f \in C_0(M)$. Mais ainda, sejam $\epsilon > 0$ e $r > 0$. Denotaremos por B_r a bola centrada em zero de raio r . Por definição de semigrupo de convolução de medidas de probabilidade, segue que $P_t \mathbf{1}_{B_r^c} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$. Logo, dado $f \in C_0(M)$ não nula, existe $t_0 > 0$ tal que para cada $0 \leq t < t_0$ vale

$$P_t \mathbf{1}_{B_r^c} \leq \frac{\epsilon}{4\|f\|}. \quad (1.5)$$

Como $f \in C_0(M)$ é uniformemente contínua, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que para cada $y \in B_\delta$, temos que $|f(x+y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Tomando $r = 2$, encontramos um outro t_0

satisfazendo a Equação (1.5). Daí,

$$\begin{aligned}
\|P_t f - f\| &= \sup_{x \in M} |P_t f(x) - f(x)| \\
&\leq \int_M \sup_{x \in M} |f(x+y) - f(x)| \nu_t(dy) \\
&\leq \int_{B_r} \sup_{x \in M} |f(x+y) - f(x)| \nu_t(dy) + \int_{B_r^c} \sup_{x \in M} |f(x+y) - f(x)| \nu_t(dy) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} P_t \mathbf{1}_{B_r} + 2 \|f\| P_t \mathbf{1}_{B_r^c} \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Observe que quando f é identicamente nula, temos que $\|P_t f - f\| = 0$. Assim, concluímos que P_t é um semigrupo Feller.

◇

Note também que se a função de transição associada um processo X é um semigrupo de convolução de medidas (ν_t) então X tem incrementos independentes e a lei de $X_t - X_s$ é dada por ν_{t-s} , veja [45].

Veremos agora um exemplo explícito de semigrupo construído a partir do movimento Browniano padrão (abreviadamente mB) em $\mathbf{R}$. Esse caso é uma particularização do Exemplo 1.3.7.

Exemplo 1.3.8. Seja B o mB padrão em $\mathbf{R}$. A densidade gaussiana (ou núcleo do calor em $\mathbf{R}$) é conhecida como sendo a função

$$g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{2t}\right). \quad (1.6)$$

A partir de B podemos considerar um outro mB começando em um ponto $x \in \mathbf{R}$ qualquer da seguinte forma: $X_t^x = x + B_t$. E para esse mB o semigrupo associado é descrito por $P_t f(x) = \int f(x+y) g_t(y) dy$, onde $f \in B_b(\mathbf{R})$ e seu gerador infinitesimal é dado por $Ah = \frac{1}{2} h''$, se $h \in \mathcal{D}_A$.

De fato, sabemos que $P_t f(x) = \mathbf{E}(f \circ X_t)$ define um semigrupo. Porém gostaríamos de uma expressão explícita para P_t . Com esse intuito, usamos o Teorema da medida induzida

e daí concluímos que para qualquer boreliano A em $\mathbf{R}$

$$P_t \mathbb{1}_A(x) = \mathbf{E}(\mathbb{1}_A \circ X_t^x) = \int_{\mathbf{R}} \mathbb{1}_A(x+y) g_t(y) dy.$$

Assim, por linearidade da integral e pelo Teorema da convergência monótona, mostramos que a relação acima vale para qualquer função boreliana limitada. Consequentemente, o semigrupo Browniano é dado por:

$$P_t f(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x+y) g_t(y) dy, \quad (1.7)$$

onde $f \in B_b(M)$. Esse resultado nos dá uma forma indireta de justificar que $g_t * g_s = g_{t+s}$ e que $\lim_{t \rightarrow 0} \int f(y) g_t(dy) = f(0)$ por meio das propriedades de semigrupo (esses cálculos pode ser feitos diretamente, porém é bem mais trabalhoso). Abusando da terminologia de medida, escrevemos $dv_t = g_t dm$ (linguagem usado no Teorema de Radon-Nikodym, veja por exemplo Folland [17, Cap. 3]), onde m é a medida de Lebesgue em $\mathbf{R}$. Daí podemos concluir que (v_t) é um semigrupo de convolução de medidas de probabilidade, já que $v_{s+t} = v_t * v_s$ e que v_t converge para δ_0 vagamente, quando t converge a zero. Como esperado, já que um mB é um exemplo particular de processo de Levy.

Um fato conhecido é que dado um mB em $\mathbf{R}^d$ seu correspondente gerador infinitesimal é dado pela metade do laplaciano em $\mathbf{R}^d$. Para esse caso em particular se consideramos $u(t, x) = P_t f(x)$ e daí vale que $\partial_t u = \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 u$. De fato, veja que

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(x) = \frac{x^2 - 1}{t \sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{2t}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} g_t(x).$$

Além disso, fazendo uma mudança de variável podemos escrever da seguinte maneira, $u(t, x) = \int f(y) g_t(y - x) dy$. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u &= \int f(y) \frac{\partial}{\partial t} g_t(y - x) dy \\ &= \frac{1}{2} \int f(y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} g_t(y - x) dy \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u. \end{aligned}$$

Quando o mB está em $\mathbf{R}^d$ temos do lado direito o operador Laplaciano. Esse cálculo nos dá explicitamente o gerador infinitesimal para o semigrupo Browniano, pois operador é dado pela derivada do semigrupo em $t = 0$. Assim passando o limite na igualdade acima com t indo para zero, temos por um lado $\lim_{t \rightarrow 0} \partial_t u(t, x) = Af(x)$ e por outro $\lim_{t \rightarrow 0} \partial_{xx}^2 u(t, x) = \frac{1}{2} \Delta f$. Portanto $Af = \frac{1}{2} f''$. De forma análoga, em $\mathbf{R}^d$ temos $Af = \frac{1}{2} \Delta f$. Observe com isso que a densidade do mB também pode ser dada como a solução da equação do calor. Para mais detalhes sobre processos de difusão e geradores infinitesimais, veja [24, 39].

◇

O fato acima está associado a uma caracterização do mB via processos de difusão. Isto é, todo processo de difusão X que tem gerador infinitesimal igual a “metade” do Laplaciano é um mB. Esse fato é de extrema importância do ponto de vista geométrico, já que permite definir um mB em variedades Riemannianas: um processo é um mB em uma variedade se seu gerador de difusão for “metade” do operador Laplace-Beltrami ($\Delta = \operatorname{div} \nabla$). Veja Emery [16], Ikeda-Watanabe [24] e Hsu [30].

1.4 Sistemas Markovianos e teoria ergódica

A teoria ergódica, no sentido mais amplo, estuda a ação de grupos (semigrupos) de operadores associado a um sistema dinâmico estocástico ou não. Nos casos clássicos, os grupos de ação são $\mathbf{Z}$ (dinâmicas em tempo discreto) e $\mathbf{R}$ (dinâmicas em tempo contínuo). A grande relevância da teoria ergódica vem dos teoremas ergódicos, que sob certas condições, permitem comparar a média temporal com a média espacial. Existem na literatura muitos textos clássicos e muitos trabalhos atuais que abordam esse assunto. Dentre eles deixamos aqui como referências os que mais se aproximam da abordagem que usamos neste trabalho como Luc Ray-Bellet [6], L. Garnett [19], Krengel [28] e Da Prato [42]. Apresentamos aqui uma variação do Teorema Ergódico de Birkhoff - o Teorema 1.4.2 - e algumas definições elementares.

Como vimos na Sessão 1.3, uma forma natural de se definir um processo de Markov é via probabilidades de transição. Com essa mesma linguagem, podemos definir o conceito de medida invariante para processos de Markov. Assim, considere P_t um semigrupo Markoviano sobre M (espaço métrico).

Definição 1.4.1. Seja ν uma medida de probabilidade sobre M . Dizemos que ν é invariante por P_t se para cada $f \in B_b(M)$ e para todo $t \geq 0$ vale que

$$\int P_t f(x) d\nu(x) = \int f(x) d\nu(x). \quad (1.8)$$

A medida ν é dita ergódica se para cada $A \in \text{Borel}(M)$ temos que ou $\nu(A) = 0$ ou $\nu(A) = 1$.

A definição acima também se aplica a contextos, mais gerais: se $T : M \rightarrow M$ é um operador mensurável, então basta trocar na Equação 1.8 o termo $P_t f(x)$ por $f(Tx)$, veja mais detalhes em Krengel [28] e Petersen [43].

Veja que a Equação (1.8) implica facilmente que

$$\nu(A) = \int \mu_t(x, A) d\nu(x), \quad (1.9)$$

onde μ_t é a probabilidade de transição associada ao semigrupo Markoviano P_t e $A \in \text{Borel}(M)$. Na verdade, as duas Equações (1.8) e (1.9) são equivalentes. Note também que se a distribuição inicial de um processo de Markov, digamos ρ , é invariante então o processo de Markov, digamos X é estacionário, pois

$$\mathbf{P}(X_t \in A) = \int \nu_t(x, A) d\rho(x) = \rho(A) = \mathbf{P}(X_0 \in A),$$

qualquer que seja $A \in \text{Borel}(M)$.

Um problema interessante abordado por vários autores na literatura consiste em dar condições suficientes e necessárias à existência de medidas invariantes. E então decidir quando elas podem ser ergódicas ou como decompor o espaço em medidas ergódicas. Nessa direção existe o Teorema de Krylov-Bogoliubov o qual diz que num espaço métrico compacto sempre existe pelo menos uma medida invariante, veja por exemplo Petersen [43]. Existem também várias generalizações desse resultado, veja por exemplo [41, 42]. Uma dentre essas generalizações é uma consequência do Teorema de Prokhorov (veja Da Prato [41, Cap. 6]) e diz que se as probabilidades de transição em algum ponto x , isto é, $\mu_t(x, \cdot)$ formam uma família *tight* então existe uma media invariante para o semigrupo P_t . Veja o Capítulo 6 de Da Prato [41] e também o Capítulo 3 de Da Prato [42].

A seguir, apresentamos uma versão do Teorema Ergódico de Birkhoff encontrada na

literatura clássica, veja por exemplo Krengel [28] e Bellet [6]. Para ver a versão clássica desse resultado veja Petersen [43], dentre outros.

Teorema 1.4.2. *Sejam $(M, \text{Borel}(M), \nu)$ um espaço de probabilidade (ou de medida finita) e $T : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável. Se $f \in L^1(\nu)$ então o seguinte limite existe ν -q.s.:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) := \bar{f}(x), \quad (1.10)$$

onde $\bar{f} \in L^1(\nu)$ e $\int \bar{f} d\nu = \int f d\nu$. Além disso, se ν é ergódica $\bar{f}(x) = \int f d\nu$.

Na literatura, existem várias generalizações do Teorema Ergódico de Birkhoff, veja [6, 41, 42]. Ao longo desse texto, faremos referência ao Teorema 1.4.2 como Teorema Ergódico de Birkoff. Apresentamos aqui uma versão em tempo contínuo para o teorema acima a qual pode ser encontrada também em [28].

Seja $\varphi_t : \Omega \times M \rightarrow M$ mensurável, onde Ω é um espaço de probabilidade. Considere f uma função integrável em relação a medida ν . Dado $n \in \mathbb{N}$ veja que as integrais abaixo são bem definidas:

$$\int_0^n f \circ \varphi_t dt = \int_0^1 f \circ \varphi_t dt + \int_1^2 f \circ \varphi_t dt + \dots + \int_{n-1}^n f \circ \varphi_t dt.$$

Reescalando o tempo em cada integral que compõe a soma do lado direito, temos que:

$$\int_0^n f \circ \varphi_t dt = \int_0^1 f \circ \varphi_t dt + \int_0^1 f \circ \varphi_{1+t} dt + \dots + \int_0^1 f \circ \varphi_{n-1+t} dt.$$

Assim, defina

$$F(x) = \int_0^1 f \circ \varphi_t(x) dt.$$

Portanto

$$\int_0^n f \circ \varphi_t dt = \sum_{k=0}^{n-1} F(\varphi_k(x))$$

Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff 1.4.2, concluímos que S_n/n converge quando n tende a infinito. Além disso, considere $\bar{F} = \int_0^1 |f \circ \varphi_t| dt$ e note que $\bar{F} \circ \varphi_{n-1} = \int_{n-1}^n |f \circ \varphi_t| dt$. Seja $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{F} \circ \varphi_k$. Novamente, usando o Teorema Ergódico de Birkhoff, concluímos

que $n^{-1}\bar{F} \circ \varphi_{n-1}$ converge a zero, pois

$$\frac{1}{n}(S_n - S_{n-1}) = \frac{1}{n}\bar{F} \circ \varphi_{n-1},$$

onde o lado esquerdo converge a zero. Finalmente, seja $T > 0$ tal que $n \leq T < n+1$ daí

$$\left| \int_0^T f \circ \varphi_t dt - \int_0^n f \circ \varphi_t dt \right| = \left| \int_n^T f \circ \varphi_t dt \right| \leq \bar{F} \circ \varphi_{n-1}.$$

Assim concluímos que existe o limite

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f \circ \varphi_t(x) dt. \quad (1.11)$$

Além disso, se media é ergódica, concluímos

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f \circ \varphi_t(x) dt = \int_M f(x) d\nu. \quad (1.12)$$

CAPÍTULO 2

FLUXO ESTOCÁSTICOS DE APLICAÇÕES MENSURÁVEIS

Neste capítulo, resumimos as principais definições e resultados apresentados por Le Jan-Raimond [34, sessão1] relevantes ao nosso trabalho. Vamos considerar M uma variedade Riemanniana. A partir do próximo capítulo M estará munida de uma distribuição integrável, em outras palavras, M será uma variedade Riemanianna folheada. Os resultados apresentados nesse capítulo valem para espaços localmente compactos.

Os resultados a seguir são baseados em um sistema consistente de processos de n -pontos (processos Markovianos) associados a semigrupos também em n -pontos. Esses processos podem ser vistos e ou entendidos como processos de n pontos indivisíveis em um fluido sobre M . Grosseiramente, isso significa que as trajetórias não se dividem ou bifurcam. Essa teoria também tem como base uma propriedade de regularidade na diagonal a qual chamamos de “preservar a diagonal”. Fato que determina unicamente (em lei) um fluxo de aplicações mensuráveis em M como veremos adiante. Nos próximos parágrafos deixaremos mais precisa as informações fornecidas acima. Essencialmente, são dadas três definições que são equivalentes, vide Teorema 2.3.2.

2.1 Família compatível de semigrupos

A teoria de Le Jan-Raimond é desenvolvida com base nas propriedades de semigrupos Feller as quais aparecem naturalmente na teoria clássica de fluxos, como em Kunita [32, 33] e em Ikeda-Watanabe [24]. A seguir definimos a propriedade de compatibilidade a qual é intrínseca a semigrupos definidos por fluxos.

Definição 2.1.1. Seja $(P_t^{M^n})_{n \in \mathbf{N}}$ uma família de semigrupos Feller (Markoviano) agindo em $C_0(M^n)$, o espaço das funções contínuas sobre M^n que vão a zero no infinito (espaço das funções mensuráveis limitadas).

1. A família $(P_t^{M^n})$ é chamada *compatível* se para toda $f \in C_0(M^n)$ a qual pode ser escrita em termos de uma quantidade menor de variáveis, isto é, existe uma função $\bar{f} \in C_0(M^k)$, $k \leq n$, com $f(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ vale que

$$P_t^{M^n} f(x_1, \dots, x_n) = P_t^{M^k} \bar{f}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}).$$

2. A família $(P_t^{M^n})$ *preserva a diagonal* no sentido que para toda $f \in C_0(M)$

$$P_t^{M^2} f^{\otimes 2}(x, x) = P_t^M f^2(x),$$

onde P_t^M representa $P_t^{M^1}$.

Vamos abreviar dizendo que uma família de semigrupos $(P_t^{M^n})$ é CPD-Feller se ela satisfaz a Definição 2.1.1 acima, ou seja, é uma família de semigrupos Feller, compatível e preserva a diagonal. Para um dado $n \in \mathbf{N}$, o processo de Markov associado a $P_t^{M^n}$ disparado em um certo ponto $(x_1, \dots, x_n)$, chamado de processo de n -pontos dessa família de semigrupos, e está definido em um conjunto *càdlàg* de trajetórias em M^n , análogo ao que temos no Capítulo 1. Para mais detalhes sobre processos de n -pontos, veja também Kunita [33].

Exemplo 2.1.2. Inspirado pelo semigrupo Browniano dado pela Equação (1.7), podemos definir uma família CPD-Feller de semigrupos da seguinte maneira: dada $f \in C_0(\mathbf{R}^n)$,

$$P_t^{M^n} f(x_1, \dots, x_n) = \int_{\mathbf{R}} f(x_1 + y, \dots, x_n + y) g_t(y) dy,$$

onde g_t é a densidade gaussiana como definido em (1.6).

Com efeito, pelos Exemplos 1.3.7 e 1.3.8 segue que $P_t^{M^n}$ é um semigrupo Feller para cada $n \in \mathbf{N}$. A compatibilidade e o fato de preservar a diagonal são consequências imediatas da expressão de $P_t^{M^n}$.

◇

2.2 Semigrupos de convolução

Seja $(F, \mathcal{E})$ o espaço de aplicações mensuráveis em M dotado com a σ -álgebra gerada pelas seguintes aplicações $\varphi \mapsto \varphi(x)$ para cada $x \in M$. Mais especificamente, $\mathcal{E} = \sigma\left\{\{\varphi \in F : \varphi(x) \in A\}; \text{ para todo } A \in \text{Borel}(M), \text{ e } x \in M\right\}$. Uma medida de probabilidade Q em $(F, \mathcal{E})$ é dita *regular* quando existe uma aplicação mensurável $\Phi : (F, \mathcal{E}) \rightarrow (F, \mathcal{E})$ tal que

$$\begin{aligned} (M \times F, \text{Borel}(M) \times \mathcal{E}) &\longrightarrow (M, \text{Borel}(M)) \\ (x, \varphi) &\longmapsto \Phi(\varphi)(x) \end{aligned}$$

é mensurável para cada $x \in M$ e além disso vale que $\Phi(\varphi)(x) = \varphi(x)$, Q -q.s..

Esse fato é o mesmo que dizer que Φ é uma modificação da identidade sobre o espaço de probabilidade $(F, \mathcal{E}, Q)$, isto é, $\Phi = \text{Id}_F$, Q -q.s.. Para ilustrar essa definição, considere $\varphi_0 \in F$ uma função qualquer fixa. Tome $\Phi = \text{Id}_F$ e $Q = \delta_{\varphi_0}$. Consequentemente, teremos $\Phi(\varphi(x)) = \varphi(x)$, Q -q.s..

Sejam Q_1 e Q_2 duas medidas de probabilidade sobre $(F, \mathcal{E})$. Considere Q_1 é regular. Veja que aplicação abaixo é uma variável aleatória:

$$\begin{aligned} Z : (F^2, \mathcal{E}^{\otimes 2}) &\longrightarrow (F, \mathcal{E}) \\ (\varphi_1, \varphi_2) &\longmapsto \Phi(\varphi_1) \circ \varphi_2. \end{aligned}$$

De fato, considere $B^x = \{\varphi \in F : \varphi(x) \in A\}$ e $A \in \text{Borel}(M)$. É claro que B^x tal que $x \in M$, $A \in \text{Borel}(M)$ gera $\mathcal{E}$ e além disso, as funções

$$\begin{aligned} H_x : F \times F &\longrightarrow F \times M \\ (\varphi_1, \varphi_2) &\longmapsto (\varphi_1, \varphi_2(x)), \\ G : F \times M &\longrightarrow M \\ (\varphi, x) &\longmapsto \Phi(\varphi)(x) \end{aligned}$$

são mensuráveis. Portanto: $G \circ H_x : F \times F \rightarrow M$ é mensurável e $G \circ H_x(\varphi_1, \varphi_2) = \Phi(\varphi_1) \circ \varphi_2(x)$. Daí $Z(\varphi_1, \varphi_2) = \Phi(\varphi_1) \circ \varphi_2$ é mensurável, pois: $Z^{-1}(B^x) = (G \circ H_x)^{-1}(A)$

Nas condições acima o produto $Q_1 * Q_2$ é chamado de *produto de convolução* e repre-

senta a lei da variável aleatória Z em $(F^2, \mathcal{E}^{\otimes 2}, Q_1 \otimes Q_2)$. Nesse mesmo contexto dizemos uma família de medidas probabilidades regulares $(Q_t)_{t \geq 0}$ sobre $(F, \mathcal{E})$ é um *semigrupo de convolução* se para todo $0 \leq s \leq t$ temos que $Q_{s+t} = Q_s * Q_t$. Tudo isso motiva a seguinte definição que impõe uma certa condição regularidade sobre as medidas regulares:

Definição 2.2.1. Considere um semigrupo de convolução $(Q_t)_{t \geq 0}$ constituído de medidas de probabilidades regulares sobre o espaço $(F, \mathcal{E})$, isto é $Q_{s+t} = Q_s * Q_t$ para todo $0 \leq s, t$. Esta família é chamado semigrupo de convolução Feller se para toda $f \in C_0(M)$ temos que:

$$\text{a) } \lim_{t \rightarrow 0} \sup_{x \in M} \int (f \circ \varphi(x) - f(x))^2 Q_t(d\varphi) = 0;$$

$$\text{b) } \text{Para todo } x \in M \text{ e } t \geq 0$$

$$\lim_{y \rightarrow x} \int (f \circ \varphi(y) - f \circ \varphi(x))^2 Q_t(d\varphi) = 0;$$

e

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int (f \circ \varphi(y))^2 Q_t(d\varphi) = 0$$

Note que os Itens (a) e (b) acima estão ligados as propriedades de semigrupo Feller, veja a Equação 2.1. Além disso, veja também que fluxo de difeomorfismos do caso clássico $\varphi_{s,t}(x)$ (como em Kunita [33]) induz um semigrupo de convolução: tome $Q_t = \delta_{\varphi_{0,t}}$, daí (Q_t) é um semigrupo de convolução.

2.3 LJR-fluxo

A terceira e última definição equivalente neste contexto segue abaixo. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ um espaço de probabilidade.

Definição 2.3.1. Uma família de variáveis aleatórias $\varphi = (\varphi_{s,t}, 0 \leq s \leq t)$, $(F, \mathcal{E})$ -valoradas é chamada de *fluxo estocástico de aplicações mensuráveis* se $(x, \omega) \mapsto \varphi_{s,t}(x)$ é mensurável, estacionário, com incrementos independentes, satisfaz a propriedade de cociclo, isto é, para todo $0 \leq s \leq u \leq t$ e $x \in M$, $\mathbf{P}$ -q.s. $\varphi_{s,t} = \varphi_{u,t} \circ \varphi_{s,u}(x)$ e para cada $f \in C_0(M)$ temos que:

$$\text{a) } \lim_{(u,v) \rightarrow (s,t)} \sup_{x \in M} \mathbf{E} [(f \circ \varphi_{u,v}(x) - f \circ \varphi_{s,t}(x))^2] = 0;$$

b) Para todo $x \in M$ e $t \geq 0$

$$\lim_{y \rightarrow x} \mathbf{E} [(f \circ \varphi_{0,t}(y) - f \circ \varphi_{0,t}(x))^2] = 0;$$

e

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \mathbf{E} [(f \circ \varphi_{0,t}(y))^2] = 0.$$

Uma família de variáveis aleatórias $\varphi = (\varphi_{s,t}, 0 \leq s \leq t)$ $(F, \mathcal{E})$ -valoradas é chamada de *fluxo estocástico de aplicações* se existir um fluxo estocástico de aplicações mensuráveis $\varphi' = (\varphi'_{s,t}, 0 \leq s \leq t)$ tal que para todo $x \in M$ e $0 \leq s \leq t$, vale que $\mathbf{P}$ -q.s. $\varphi_{s,t}(x) = \varphi'_{s,t}(x)$.

Veja que as condições acima, em analogia com o que acontece com os semigrupos de convolução, possibilitam definir uma família de semigrupos Feller como se segue

$$P_t^{M^n} f(x) = \mathbf{E} [f \circ \varphi_{0,t}^{\otimes n}(x)].$$

Novamente, considere um fluxo de difeomorfismos (do caso clássico) $\varphi_{s,t}(x)$. Naturalmente, esse fluxo também é um fluxo estocástico de aplicações mensuráveis.

Dado um fluxo estocástico de aplicações $\varphi_{s,t}$, a lei de $\varphi_{0,t}$ determina um semigrupo de convolução Q_t ; o qual por sua vez determina uma família CPD-Feller de semigrupos dada por, para $f \in C_0(M^n)$ e $x \in M^n$

$$P_t^{M^n} f(x) = \int_F f \circ \varphi^{\otimes n}(x) Q_t(d\varphi), \quad (2.1)$$

Veja as Proposições 1.2 e 1.3 em [34, p.1252-1254]. Com efeito as recíprocas também são verdadeiras, desde que as Definições 2.1.1, 2.2.1 e 2.3.1 sejam equivalentes, como pode ser observado no próximo teorema.

Denote por $(\Omega, \mathcal{A})$ o espaço $(\Pi_{s \leq t} F, \bigotimes_{s \leq t} \mathcal{E})$ e por $\varphi_{s,t}$ o processo estocástico canônico $\omega \mapsto \omega(s, t)$.

Teorema 2.3.2 (Le Jan-Raimond). *Uma família CPD-Feller de semigrupos $(P_t^{M^n})$ determina um único semigrupo de convolução Feller de medidas de probabilidades regulares $(Q_t)_{t \geq 0}$ em $(F, \mathcal{E})$ que satisfaz a equação Equação (2.1). Um semigrupo de convolução Feller $(Q_t)_{t \geq 0}$ por sua vez determina uma única medida de probabilidade invariante pelo*

“shift” $\mathbf{P}_Q$ em $(\Omega, \mathcal{A})$ tal que o processo estocástico canônico $(\varphi_{s,t} : s \leq t)$ seja um fluxo estocástico de aplicações cuja lei é Q_{t-s} .

A prova desse resultado consiste em aplicar o teorema de extensão de Kolmogorov nas estruturas apropriadas, veja [34]. Chamaremos o fluxo $\varphi_{s,t}$, dado pelo teorema anterior, de LJR-fluxo, devido a Le Jan-Raimond.

2.4 Coalescência

O trabalho pioneiro no estudo da coalescência foi a tese de doutorado de Arratia [2]. Depois disso, vários outros trabalhos aparecem na literatura discutindo esse fenômeno, veja por exemplo [18] que contém outras referências sobre o assunto.

Um fluxo estocástico de aplicações mensuráveis em M , $(\varphi_{s,t} : s \leq t)$, é dito *fluxo coalescente* se para algum ponto $(x, y) \in M^2$, $T_{x,y} = \inf_t \{t \geq 0 : \varphi_{0,t}(x) = \varphi_{0,t}(y)\}$ é finito com probabilidade positiva e para qualquer $t \geq T_{x,y}$, $\varphi_{0,t}(x) = \varphi_{0,t}(y)$ $\mathbf{P}$ -q.s.. Isso significa que as trajetórias permanecem juntas após colapsarem o que se traduz na perda da injetividade do fluxo. Veja a figura 2.1:

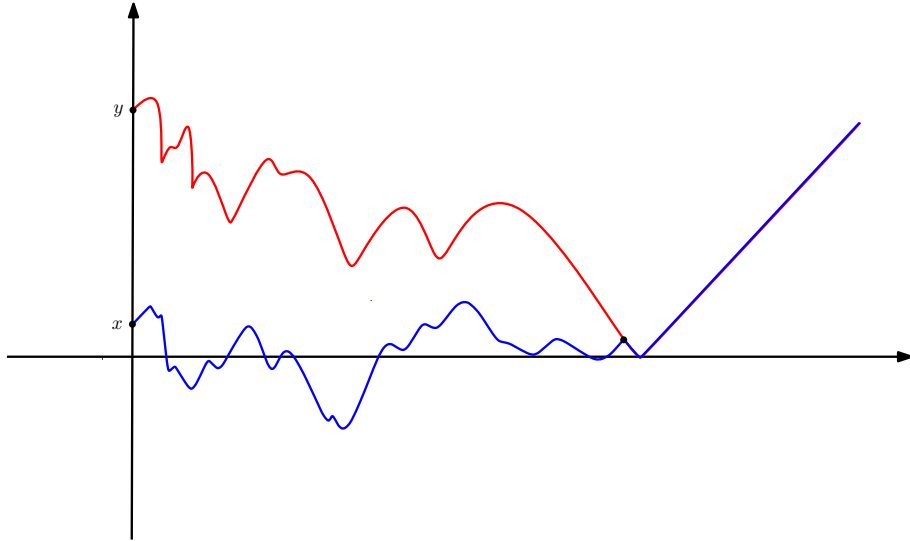


Figura 2.1: Coalescência.

Voltaremos a abordar esse assunto na última sessão do Capítulo 3, onde mostramos, sob condições adicionais, que uma família CPD-Feller de semigrupos constitui uma família

de semigrupos coalescente: uma família de semigrupos é dita coalescente quando o LJR-fluxo associado a ela satisfaz a condição de coalescência acima.

Exemplo: caso discreto. Um exemplo simples que representa a dinâmica de coalescência, para processos de Markov em tempo discreto, pode ser construído da seguinte forma: seja $M = \{1, 2\}$ e considere uma partícula saltando de um ponto para outro. Isso constitui um processo de Markov discreto e a probabilidade de ir de um ponto a outro é uma probabilidade de transição. É possível tornar esse sistema ainda mais interessante, por exemplo se considerarmos o produto de n cópias de M fazendo uma análise similar. Usando a linguagem descrita nessa sessão, podemos obter mais informação sobre a dinâmica em cada ponto.

Considere que M esteja munida com a métrica 0-1 a qual induz em M a topologia discreta segundo a qual todas as funções com domínio M são contínuas. Esse caso nos ajudará compreender o significado natural da coalescência. Seja $F = \{\text{Id}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_\sigma\}$ representando todas as possíveis funções de M para M . Mais precisamente, Id denota a função identidade de M , φ_j fixa $j = 1, 2$ e φ_σ é a permutação de dois elementos. Seja $\mathcal{F}$ a σ -álgebra trivial associada a F .

Por ora, nosso interesse consiste em analisar a dinâmica em 1-ponto e em 2-pontos gerada por F . Agora, introduzimos uma medida de probabilidade em F considerando $Q(\text{Id}) = a$, $Q(\varphi_1) = b$, $Q(\varphi_2) = c$, $Q(\varphi_\sigma) = d$. Naturalmente deve-se ter $a + b + c + d = 1$. A figura 2.2 abaixo ilustra o processo de Markov o qual descrevemos acima:

Observação. Note que nesse caso não é possível determinar a medida Q a partir das probabilidades de transição. Com efeito, considere o seguinte sistema:

$$\left. \begin{aligned} a + b &= p_{11} \\ c + d &= p_{12} \\ a + c &= p_{22} \\ b + d &= p_{21} \end{aligned} \right\}$$

Veja que dado $\epsilon > 0$, podemos considerar $(a - \epsilon) + (b - \epsilon) = a + b$ e fazer o mesmo com as outras equações. Logo Q não é unicamente determinada a partir da matriz de

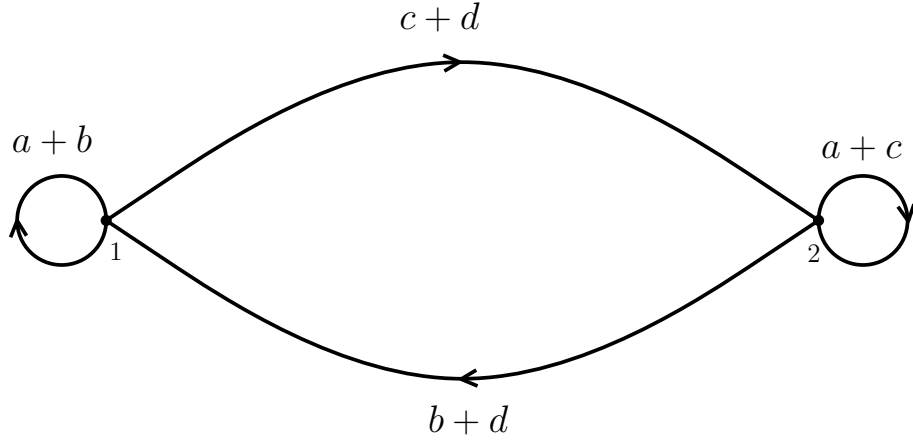


Figura 2.2: Processo de 1-ponto.

probabilidades de transição. Isso significa que mesmo neste caso simples, conhecer apenas $P^{(1)}$ não é suficiente para se determinar completamente a dinâmica de coalescência gerada naturalmente pela media Q . Por outro lado, considerando o sistema em 2-pontos percebemos que a medida Q fica determinada pelas probabilidades de transição, veja a figura 2.3.

Vamos justificar brevemente que neste caso, dadas as probabilidades de transição, conseguimos determinar Q unicamente. Analisando a dinâmica de 2-pontos, por meio de F com as informações acima, podemos escrever: $p_{11,11} = p_{11} = a + b$, $p_{11,22} = p_{12} = c + d$, $p_{21} = p_{22,11} = b + d$, $p_{22,22} = p_{22} = a + c$, $p_{12,11} = p_{21,11} = b$, $p_{12,22} = p_{21,22} = c$. Portanto:

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} p_{11,11} & p_{11,12} & p_{11,21} & p_{11,22} \\ p_{12,11} & p_{12,12} & p_{12,21} & p_{12,22} \\ p_{21,11} & p_{21,12} & p_{21,21} & p_{21,22} \\ p_{22,11} & p_{22,12} & p_{22,21} & p_{22,22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b & 0 & 0 & c + d \\ b & a & d & c \\ b & d & a & c \\ b + d & 0 & 0 & a + c \end{pmatrix}.$$

Veja que dado $P^{(2)}$ como acima, é possível definir uma medida Q sobre F de forma natural considerando todas as funções que agem sobre M . A medida Q será unicamente determinada, para isso basta observar a parte destacada na matriz acima e além disso fica bem definida, pois a cada função podemos associar uma medida explicitamente, isto é, sobre F sabemos como se comporta Q . Além disso, veja pela figura que se uma partícula entra na diagonal, lá ela permanece.

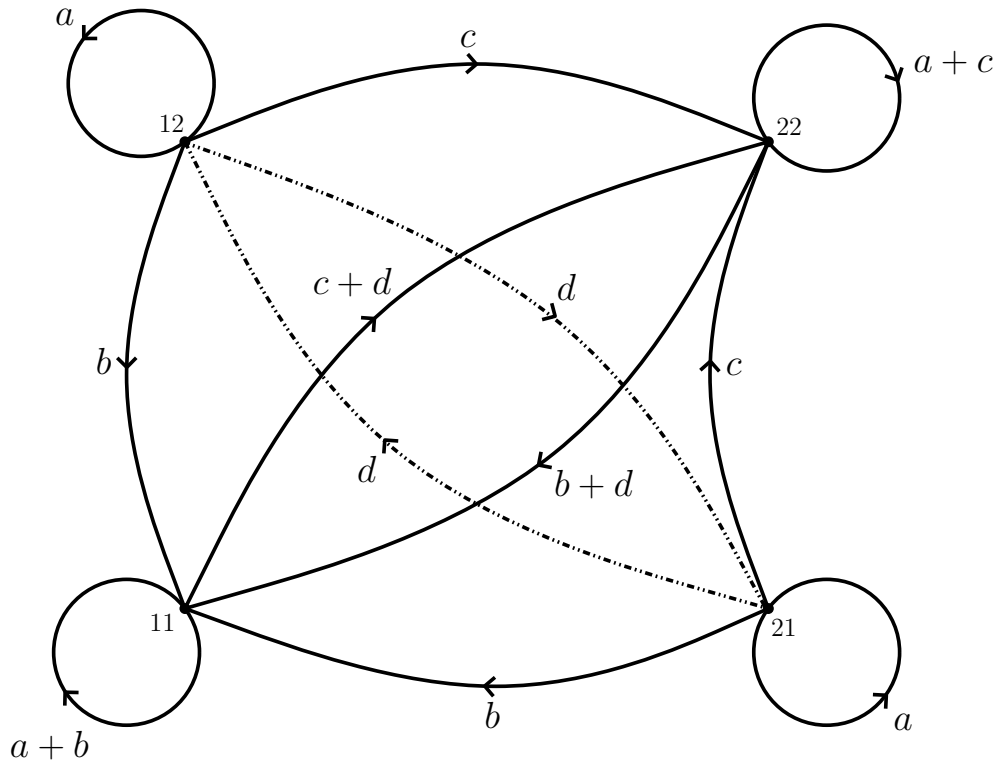


Figura 2.3: Processo de 2-pontos.

Note que se M possuir três pontos, a dinâmica já não será mais determinada por P^2 e sim por P^3 . Para ver exemplos em tempo contínuo veja [34].

CAPÍTULO 3

FLUXO FOLHEADO E SEMIGRUPOS DEGENERADOS

Neste capítulo introduzimos o conceito de degenerescência de semigrupos, investigamos a relação desse conceito com o LJR-fluxo e com a coalescência. Veremos que essa restrição fornece uma certa invariância do fluxo com respeito as subvariedades e as estruturas folheadas, no seu devido contexto. O significado de todos esses termos se tornaram precisos ao longo desse capítulo. Consideramos uma variedade Riemanniana compacta M e N uma subvariedade imersa em M no sentido estendido como considerado em Camacho-Neto [8] e Candel-Conlon [10]. Mais precisamente, dizemos que $N \subseteq M$ é uma subvariedade quando N é a imagem de uma variedade conexa W por uma imersão $i : W \rightarrow M$, em outras palavras $N = i(W)$. Veja que N é dotada de duas topologias: a topologia intrínseca de W denotada por τ_{int} e a topologia induzida de M , τ_{ind} . Em geral a topologia intrínseca é mais fina que a topologia induzida: $\tau_{\text{ind}} \subseteq \tau_{\text{int}}$. Além disso, se i é um mergulho, ou se N é fechado em M ou equivalentemente se i é uma aplicação própria as duas topologias acima coincidem. Mais adiante, a variedade M estará munida de uma folheação regular $\mathcal{F}$. Este tipo de estrutura é usado ao longo desse capítulo e também do próximo.

3.1 Semigrupos degenerados

Introduzimos abaixo o conceito de degenerescência de um semigrupo P_t^M em um semigrupo P_t^N onde o conjunto de funções teste é reduzido ao espaço $C_0(N, \tau_{\text{int}})$. Na maioria das vezes estaremos interessados em semigrupos Feller. A Definição 3.1.5 abaixo se aplica numa classe maior de semigrupos. Observe que se N é uma subvariedade Rie-

manniana completa com respeito a métrica Riemanniana induzida temos, em particular, $C_0(N, \tau_{\text{int}}) = \{f|_N; f \in C(M)\}$ que é equivalente a dizer que N é completa e compacta com relação τ_{int} , ou seja, N é compacta. Mais ainda, nesse caso, temos as equivalências $\tau_{\text{int}} = \tau_{\text{ind}}$ e $C_0(N, \tau_{\text{int}}) = C(N, \tau_{\text{ind}})$. Por outro lado, se N é densa em M temos que $C_0(N, \tau_{\text{int}}) \cap C(N, \tau_{\text{ind}}) = 0$, veja a Proposição 3.1.4.

Um outro fato interessante é que as topologias coincidirem não garante, em geral, que funções contínuas em N sejam sempre estendíveis a contínuas em M . Esse é um problema complexo e não será abordado de forma substancial nesse trabalho. Ao leitor interessado em tais tópicos recomendamos Steenrod [47] o qual disserta sobre a extensão de funções contínuas usando cohomologia: transforma o problema geométrico em um algébrico. Nessa direção, veja também o Teorema de extensão de Tietze em qualquer livro clássico de topologia geral.

A seguir apresentamos algumas propriedades úteis e alguns exemplos ilustrativos com respeito ao conceito as topologias.

3.1.1 Observações úteis (com recíprocas falsas)

A compacidade com respeito a topologia intrínseca implica naturalmente a compacidade com respeito a induzida. No entanto, a recíproca em geral não é verdadeira. O mesmo acontece com relação a uma sequência convergente a um ponto na topologia intrínseca. Isso implica que tal sequência converge para o mesmo ponto na topologia induzida e nada pode se dizer para a recíproca, já que a topologia intrínseca possui mais abertos do que a topologia induzida. Passamos a ver alguns exemplos:

Exemplo 3.1.1. Considere $M = \mathbf{R}$ e $N = (0, 1)$. Como sabemos todo aberto tem a estrutura de variedade induzida. Assim, obviamente a topologia intrínseca de N coincide com a topologia induzida. Defina $f : N \rightarrow \mathbf{R}$ da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)}.$$

Veja que os limites $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, portanto não é possível estender f de forma contínua em nenhum subconjunto de $\mathbf{R}$ que contenha $[0, 1]$.

◇

Exemplo 3.1.2. Consideramos agora um exemplo clássico: sejam $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ dada por $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ e N uma subvariedade de M dada pelo gráfico de f em $M = \mathbf{R}^2$, isto

é $N = \{(x, y) \in M : y = f(x)\}$. Tal subvariedade é, por si só, um conjunto interessante, pois é conexa, conexo por caminhos, possui fecho conexo e não conexo por caminhos. Note que nesse caso, a topologia induzida em N coincide com a topologia intrínseca, no entanto existem funções contínuas em τ_{int} as quais não se estendem a funções contínuas em $\mathbf{R}^2$. Escolha, por exemplo, uma função h satisfazendo a seguinte condição:

$$h\left(x_n, \sin\frac{1}{x_n}\right) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ 1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases},$$

onde $x_n = 2/(\pi + 4n\pi)$. Agora, note que no ponto $(0, 1) \in \mathbf{R}^2$ nenhuma função contínua em $\mathbf{R}^2$ que estende h pode ser definida. De fato, observe que $1 = \sin(\pi/2) = \sin(1/x_n)$ e além disso, x_n converge a zero. Porém, não existe o limite de h em tais pontos, já que a função fica oscilando entre 0 e 1.

Situação análoga acontece com uma curva espiralando em um cilindro e convergindo para um corte circular dele.

◇

A compacidade de N em M , com respeito a topologia induzida, não implica em geral a compacidade de N na topologia intrínseca. Portanto, quando nos referimos neste trabalho a N ser compacta, com vizinhança tubular, estamos considerando N compacta na topologia intrínseca, o que implica na compacidade na topologia induzida. Para exemplificar a situação, consideramos N uma subvariedade compacta de $\mathbf{R}^2$, mas que não é compacta na topologia intrínseca. Veja a abaixo:

Exemplo 3.1.3. Considere as curvas da função $x \mapsto \sin(1/x)$ com $x \neq 0$. Trunque o gráfico nos dois lados e cole uma metade com a outra usando o segmento de reta passando por $\{0\} \times [-1, 1]$. Note que a menos de oscilação temos uma figura do “oito”. Essa curva é compacta em $\mathbf{R}^2$ por ser fechada e limitada, no entanto não é completa como espaço métrico, portanto não pode ser compacto.

◇

Agora provaremos um resultado útil no contexto das topologias.

Proposição 3.1.4. *Seja N uma subvariedade de M no sentido generalizado descrito no início deste capítulo.*

1. A subvariedade N é compacta na topologia intrínseca τ_{int} (W é compacta) e completa na métrica Riemanniana induzida, se, e somente se,

$$C_0(N, \tau_{\text{int}}) = \{f|_N; f \in C(M)\}.$$

2. Se a subvariedade N é densa em M então $C_0(N, \tau_{\text{int}}) \cap C(N, \tau_{\text{ind}}) = \{0\}$.

Demonstração. Para o Item (1) note que por uma lado, nessas condições existe uma ϵ -vizinhança tubular para N a qual denotamos aqui por V_ϵ^N (aberta). Mais precisamente, tal vizinhança é obtida pela aplicação exponencial sobre uma ϵ -vizinhança do fibrado normal de N em M , veja por exemplo Camacho-Neto [8], Kosinski [27, Cap. 3], Oliva [40, Cap. 3] dentre outros. Esse fato implica que N mergulha em M . Assim, temos em particular que τ_{int} coincide com τ_{ind} . Fato equivalente a provar que $i : W \rightarrow M$ é uma aplicação própria. Usando essas informações e o Lema de Urysohn resulta que existe uma função contínua $\phi \in C(M)$ tal que $\phi(x) = 1$ sempre que $x \in N$ e $\phi(y) = 0$ sempre que $x \in V_\epsilon^N$. Seja $\pi : V_\epsilon^N \rightarrow N$ a projeção. Consequentemente, dada $f \in C_0(N, \tau_{\text{int}})$, defina $F(x) = f(\pi(x))\phi(x)$, se $x \in V_\epsilon^N$ e como sendo zero caso contrário. Assim $F \in C(M)$ é tal que $F|_N = f$, como queríamos. Observe ainda que o resultado poderia ter sido obtido diretamente aplicando a forma local das imersões uma quantidade finita de vezes para construir uma ϵ -vizinhança tubular de N . Por compacidade de N , segue que $C_0(N, \tau_{\text{int}}) = C(N, \tau_{\text{int}})$ e portanto temos a primeira parte do Item (1).

Reciprocamente, suponha que $C_0(N, \tau_{\text{int}}) = \{f|_N; f \in C(M)\}$. Vamos mostrar que N é compacto em M e que suas duas topologias τ_{int} e τ_{ind} coincidem. Ou seja, N também é compacto na topologia intrínseca. Para isso, mostraremos que toda sequência (x_n) em N que converge na topologia de M para um ponto x em M ; esse ponto x vai estar em N e a convergência se dá em N na topologia intrínseca também. Com efeito, N é completa, portanto pelo teorema de Hopf-Rinow é completa como espaço métrico. Assim, Suponha (por absurdo) que exista uma tal sequência em que ocorre a convergência em M mas não o mesmo não ocorre em N . Então, existe uma subsequência (x_{n_k}) que em N que fica longe de x com respeito a τ_{int} de N . Vamos mostrar que isso é um absurdo (portanto x_n converge para x na topologia intrínseca também, além disso, por completude, $x \in N$). Se essa subsequência (x_{n_k}) for limitada, então existe uma subsequência que converge para algum outro ponto y em N , diferente de x . Mas convergir em N implica em convergir em M para o mesmo ponto y (como comentamos no início dessa sessão). E isso nos dá um

absurdo porque toda subsequência de x_n converge para x em M . Se essa subsequência (x_{n_k}) não for limitada em N , então existe uma subsequência que vai para infinito em N . Portanto, qualquer $f \in C_0(N, \tau_{\text{int}})$ aplicada a esta subsequência converge a zero. Note que por construção, toda $f \in C(M)$ é tal que $f(x_n)$ converge para $f(x)$. Além disso, suas restrições em N estão em $C_0(N, \tau_{\text{int}})$. Portanto, nesta subsequência a função f converge a zero. Isso implica que $f(x) = 0$ para toda função contínua $f \in C(M)$ o que é um absurdo, pois existem funções $f \in C(M)$ não nulas.

Para o Item (2): dado $x \in N$, seja (x_n) sequência a x em M , no entanto não converge a x em N . Isto é, x_n se aproxima de x com respeito a topologia induzida τ_{ind} e por outro lado fica longe de x com respeito a topologia intrínseca τ_{int} . Seja $f \in C_0(N, \tau_{\text{int}}) \cap C(N, \tau_{\text{ind}})$, assim de um lado dado $\epsilon > 0$ temos que $|f(x_n)| < \epsilon$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Por outro lado, $f(x_n)$ converge a $f(x)$ e portanto $|f(x)| < \epsilon$. Portanto, f tem que ser identicamente nula. $\square$

A ideia geométrica de variedades invariantes por alguns sistemas dinâmicos motivam a seguinte definição.

Definição 3.1.5. Seja N uma subvariedade imersa de M . Um semigrupo Feller P_t^M é dito N -degenerado se existe um semigrupo Markoviano P_t^N agindo em $B_b(N)$ (borelianas limitadas) tal que para cada $f \in C(M)$ temos que:

$$P_t^M f(x) = P_t^N f|_N(x), \quad (3.1)$$

sempre que $x \in N$.

Veja que o conjunto de funções teste é um subconjunto de $C(N, \tau_{\text{ind}})$, portanto o semigrupo Markoviano não necessariamente será único em $C_0(N, \tau_{\text{int}})$. Uma classe natural de exemplos aparece quando se considera dinâmicas (estocásticas ou não) que possuem um atrator e uma subvariedade estável mergulhada.

Definição 3.1.6. Seja $(M, \mathcal{F})$ uma variedade folheada. Um semigrupo Feller P_t^M agindo sobre $C(M)$ é dito $\mathcal{F}$ -folheado se P_t^M é $\mathcal{L}$ -degenerado para toda $\mathcal{L} \in \mathcal{F}$, ou seja existe uma família de semigrupos Markovianos $(P_t^{\mathcal{L}})_{\mathcal{L} \in \mathcal{F}}$ tal que para cada $f \in C(M)$

$$P_t^M f(x) = P_t^{\mathcal{L}_x} f|_{\mathcal{L}_x}(x), \quad (3.2)$$

para todo $x \in M$.

Às vezes, usamos o termo degenerado no lugar de N -degenerado e folheado no lugar de $\mathcal{F}$ -folheado. Nosso maior interesse consiste em estudar propriedades de uma certa família de semigrupo $(P_t^{M^n})$ quando cada elemento desta família for Feller. Veja que o fato do semigrupo P_t^M ser Feller degenerado (folheado), em geral, não garante que seu correspondente em N , P_t^N ($P_t^{\mathcal{L}}$ na folha $\mathcal{L}$) seja Feller. Decidir quando um semigrupo dado é folheado ou não pode ser uma tarefa difícil. Em alguns casos especiais, por exemplo, se as folhas de uma folheação são mergulhadas ou se uma subvariedade N é mergulhada existe uma maneira intrínseca de checar se um dado semigrupo Feller P_t^M em M é degenerado (ou folheado). Com esse propósito, sejam $f \in C(M)$ e N uma subvariedade imersa. Considere o conjunto

$$\mathbf{I}_{f,N} = \{g \in C(M) : g|_N = f|_N\}$$

Por definição, se P_t^N é um semigrupo degenerado então para toda $g \in \mathbf{I}_{f,N}$ temos que

$$P_t^M f(x) = P_t^N f|_N(x) = P_t^N g|_N(x) = P_t^M g(x).$$

Reciprocamente:

Proposição 3.1.7. *Considere um semigrupo Feller P_t^M agindo sobre $C(M)$.*

1. *Suponha que a subvariedade (imersa) N é compacta na topologia intrínseca. O semigrupo P_t^M é degenerado se, e somente se, $P_t^M f(x) = P_t^M g(x)$ para toda $g \in \mathbf{I}_{f,N}$.*
2. *Suponha que cada $\mathcal{L} \in \mathcal{F}$ seja compacta na topologia intrínseca. O semigrupo P_t^M é folheado se, e somente se, $P_t^M f(x) = P_t^M g(x)$ para toda $g \in \mathbf{I}_{f,\mathcal{L}}$.*

Demonstração. Primeiramente, note que o segundo item consiste em aplicar o primeiro item a todas as folhas da folheação. Assim, basta provar o primeiro item é verdadeiro. De fato, precisamos construir um semigrupo agindo em $C(N, \tau_{\text{int}})$ que satisfaça a Equação (3.1). Dada $g \in C_0(N, \tau_{\text{int}})$, Pelo Item (1) da Proposição 3.1.4 existe uma extensão f de g em $C(M)$. Assim, defina

$$P_t^N g(x) = P_t^M f(x),$$

para todo $x \in N$. Considere uma outra extensão de g diferente de f e veja que a nova extensão pertence a $\mathbf{I}_{f,N}$, assim temos que P_t^N é bem definido. Consequentemente, P_t^M é N -degenerado. A recíproca é trivialmente satisfeita pela construção feita acima.

□

Veja que se N é denso em M então para qualquer $f \in C(M)$ o conjunto $\mathbf{I}_{f,N}$ tem apenas um elemento que é a própria f .

3.2 Fluxo folheado

Aqui retornamos a família CPD-Feller de semigrupos $(P_t^{M^n})$ definida na Sessão 2.1. Inicialmente, veja que se $\mathcal{F}$ é uma folheação em M , então os conjuntos da forma $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_1 \times \dots \times \mathcal{L}_n$ são folhas de uma folheação em M^n denotada por $\mathcal{F}^n$, com $\mathcal{L}_j \in \mathcal{F}$, $j = 1, \dots, n$. O resultado principal dessa sessão mostra que para uma dada família CPD-Feller de semigrupos $(P_t^{M^n})$, se $P_t^{M^k}$ é $\mathcal{F}^k$ -folheado para algum $k \in \mathbf{N}$, então $P_t^{M^n}$ é $\mathcal{F}^n$ -folheado para todo $n \in \mathbf{N}$ (quando $n = 1$, escrevemos P_t^M no lugar de $P_t^{M^1}$). Mais ainda, o LJR-fluxo associado é tal que cada trajetória pertence a uma única folha da folheação $\mathcal{F}$, quase sempre. Mais precisamente:

Definição 3.2.1. Um fluxo estocástico de aplicações $\varphi_{s,t}$ em M é dito um fluxo estocástico $\mathcal{F}$ -folheado se para todo $0 \leq s, t$, temos que $\varphi_{s,t}(x) \in \mathcal{L}_x$, $\mathbf{P}$ -q.s..

O próximo resultado mostra que se primeiro nível do semigrupo Feller $P_t^{M^1}$ é $\mathcal{F}$ -folheado então o LJR-fluxo associado de aplicações $\varphi_{s,t}$ também é $\mathcal{F}$ -folheado. E isso implica que para todo $n \in \mathbf{N}$, temos que $P_t^{M^n}$ é também $\mathcal{F}^n$ -folheado. De fato, para cada folha $\bar{\mathcal{L}} \in \mathcal{F}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{\mathcal{L}}$ e $f \in C_0(\bar{\mathcal{L}})$ podemos definir um semigrupo Markoviano como segue

$$P_t^{\bar{\mathcal{L}}} f(x) = \mathbf{E}[f(\varphi_{0,t}(x_1), \dots, \varphi_{0,t}(x_n))] \quad (3.3)$$

Teorema 3.2.2. *Seja $(P_t^{M^n} : n \in \mathbf{N})$ uma família CPD-Feller de semigrupos.*

1. **(Subvariedade invariante)** *Seja N uma subvariedade imersa de M . Se P_t^M é N -degenerado então o LJR-fluxo estocástico de aplicações preserva N , isto é, para todo $0 \leq s, t$ e para todo $x \in N$, temos que $\varphi_{s,t}(x) \in N$, $\mathbf{P}$ -q.s..*
2. **(Fluxo folheado)** *Se P_t^M é $\mathcal{F}$ -folheado então o correspondente LJR-fluxo de aplicações $\varphi_{s,t}$ é um fluxo $\mathcal{F}$ -folheado.*

Demonstração. Primeiramente, provamos o Item (1). Considere uma sequência de compactos com respeito a topologia intrínseca τ_{int} em N tal que $N = \cup_n K_n$ (uma exaustão compacta para N). A ideia da prova consiste em controlar as probabilidades segundo a

qual o processo sai dos conjuntos compactos K_n . Observe que os compactos da topologia intrínseca são compactos na topologia induzida. Além disso, como consequência da forma local das imersões e do segundo axioma da enumerabilidade, N é um conjunto mensurável em M . Assim, para $0 \leq s \leq t$ e $x \in N$ fixados, considere o conjunto mensurável

$$B = \{\omega \in \Omega : \varphi_{s,t}(x, \omega) \in M - N\}.$$

Daí provamos que $\mathbf{P}(B) = 0$ escrevendo $B = \cap_n B_n$ com

$$B_n = \{\omega \in \Omega : \varphi_{s,t}(x, \omega) \in M - K_n\}$$

e mostrando que a $\mathbf{P}(B_n)$ converge a zero quando n tende a infinito. Veja que $M - K_n$ é aberto, portanto existe uma sequência conjuntos fechados $F_{j,n}$ crescentes em j tal que $M - K_n = \cup_j F_{j,n}$. Pelo Lema de Urysohn, para cada par (j, n) existe uma função positiva $f_{j,n} \in C(M)$ tal que $f_{j,n}(x) = 1$, para todo $x \in F_{j,n}$, e é suportada em $M - K_n$. Por hipótese, existe um semigrupo Markoviano P_t^N sobre N satisfazendo a Definição 3.1.5. Mais ainda, este semigrupo possui uma medida probabilidade de transição associada $\mu_{P_t^N}(x, \cdot)$ com suporte em N , veja o Capítulo 1 ou Revuz-Yor [45, Cap. 3]. Portanto, usando o Teorema da Convergência Dominada, temos que para um dado $x \in K_n$ vale:

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{E} [f_{j,n} \circ \varphi_{0,t}(x)] &= \lim_{j \rightarrow \infty} P_t^M f_{j,n}(x) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} P_t^N f_{j,n}|_N(x) \\ &= \int_N \lim_{j \rightarrow \infty} f_{j,n}|_N(y) \mu_{P_t^N}(x, dy) \\ &= \mu_{P_t^N}(x, N - K_n), \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde usamos que $f_{j,n}$ converge pontualmente a função indicadora $\mathbb{1}_{M-K_n}$ quando j tende a infinito. Novamente, aplicando o Teorema da Convergência Dominada e usando o fato

de que as $f_{j,n}$ são não negativas, concluímos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(B_n) &= \int \mathbb{1}_{M-K_n}(\varphi_{0,t}(x)) d\mathbf{P} \\
&= \int \lim_{j \rightarrow \infty} f_{j,n} \circ \varphi_{0,t}(x) d\mathbf{P} \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{E}[f_{j,n} \circ \varphi_{0,t}(x)] \\
&= \mu_{P_t^N}(x, N - K_n).
\end{aligned}$$

Onde o último termo acima converge a zero quando n vai a infinito, pois $\mu_{P_t^N}(x, \cdot)$ é uma medida de Radon. Uma maneira alternativa de se obter esse mesmo resultado é mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{E}[f_{j,n} \circ \varphi_{0,t}(x)] \right) = 0,$$

usando a Equação (3.4) e o fato que $f_{j,n}$ converge pontualmente a função indicadora $\mathbb{1}_{M-N}$ quando j e n tendem, respectivamente, a infinito. Naturalmente, o Item (2) é uma consequência imediata do Item (1), pois basta aplicá-lo em cada folha $\mathcal{L}$ da folheação $\mathcal{F}$.

Por fim, verificamos que de fato $B = \cap_n B_n$. Dado $\omega \in B$, segue que $\varphi_{s,t}(\omega) \in M - N \subseteq M - K_n, \forall n \in \mathbf{N}$, pois $K_n \subset N, \forall n \in \mathbf{N}$. Portanto, $\omega \in B_n$. Isso implica que $\omega \in \cap_n B_n$. Por outro lado, dado $\omega \in \cap_n B_n, \forall n \in \mathbf{N}$, segue que $\varphi_{s,t}(\omega) \in M - K_n, \forall n \in \mathbf{N}$. E isto implica que $\varphi_{s,t}(\omega) \in M - N$. Portanto, $\omega \in B$.

Assim, provamos que $\varphi_{s,t}(x) \in N, \forall t \leq s$. Pois o Teorema 2.3.2 nos diz que

$$P_{t-s}f(x) = \mathbf{E}(f \circ \varphi_{0,t-s}(x)) = \mathbf{E}(f \circ \varphi_{s,t}(x)), \forall s \leq t.$$

□

Observação. Observe que se a subvariedade N for compacta, o processo limite que aparece na demonstração acima ainda pode ser aplicado. Basta escolher todos os conjuntos compactos K_n como sendo a própria subvariedade N para todo $n \in \mathbf{N}$ e daí em diante proceder da mesma forma acima. No entanto, para esse caso especial uma demonstração alternativa, mais simples e direta pode ser dada. Isto é, se N considerada no item (1) do Teorema 3.2.2 acima é compacta (ou fechada), em M , podemos dar uma prova que é puramente funcional em $C(M)$, ou seja, não é necessário utilizar a medida de probabilidade

de transição $\mu_{P_t^N}(x, \cdot)$. Nesse caso, os suportes das medidas $\mu_{P_t^N}(x, \cdot)$ e $\mu_{P_t^M}(x, \cdot)$ coincidem: existe uma sequência crescente de conjuntos fechados F_n tais que $\cup_n F_n = M - N$. Pelo Lema de Urysohn, obtemos que para cada $n \in \mathbf{N}$ existe uma função correspondente $f_n \in C(M)$ não negativa com suporte me $M - N$, tal que $f(x) = 1$ para cada $x \in F_n$. Assim, fixados $0 \leq s \leq t$ e $x \in N$ mostramos que o conjunto mensurável

$$B = \{\omega \in \Omega : \varphi_{s,t}(x, \omega) \in M - N\}$$

tem probabilidade zero. Com efeito, escreva $B = \cup_n D_n$, onde

$$D_n = \{\omega \in \Omega : \varphi_{s,t}(x, \omega) \in F_n\}.$$

Usando o fato de $f_n \geq 0$ para todo natural n , o Teorema 2.3.2 e a definição de semigrupo folheado concluímos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(D_n) &= \int \mathbf{1}_{F_n}(\varphi_{0,t}(x)) d\mathbf{P} \\ &= \int_{D_n} f_n \circ \varphi_{s,t}(x) d\mathbf{P} \\ &\leq \int_{D_n} f_n \circ \varphi_{s,t}(x) d\mathbf{P} + \int_{D_n^c} f_n \circ \varphi_{s,t}(x) d\mathbf{P} = \mathbf{E}(f_n \circ \varphi_{0,t}(x)) \quad (3.5) \\ &= P_t^M f_n(x) = P_t^N f_n|_N(x) = 0. \end{aligned}$$

Onde a última igualdade segue do fato $f_n|_N$ ser identicamente nula, para todo $n \in \mathbf{N}$. Note que a Desigualdade (3.5) pode ser obtida diretamente aplicado-se a desigualdade de Chebyshev.

Por fim, verificamos que $\cup_n D_n = B$. Com efeito, para cada $\omega \in B$, sempre existe algum $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $\varphi_{s,t}(x, \omega) \in F_{n_0}$, portanto $\omega \in D_{n_0}$. Por outro lado, se $\omega \in \cup_n D_n$, segue que $\omega \in D_{n_0}$ para algum $n_0 \in \mathbf{N}$. Consequentemente $\omega \in B$, pois $F_{n_0} \subseteq M - N$.

O resultado a seguir analisa o fato de que a prova do Teorema 3.2.2 independe da escolha de $n = 1$. Por uma questão de simplicidade, supomos que o primeiro nível, isto é, P^M é $\mathcal{F}$ -folheado. Mostramos a seguir que o mesmo resultado vale se trocarmos a hipótese do teorema anterior para $P_t^{M^k}$ é $\mathcal{F}^k$ -folheado, para algum $k \in \mathbf{N}$. Mais ainda ainda, se para algum $k \in \mathbf{N}$ $P_t^{M^k}$ é $\mathcal{F}^k$ -folheado então o mesmo valerá para todo $n \in \mathbf{N}$.

Corolário 3.2.3. *Seja $(P_t^{M^n} : n \in \mathbf{N})$ uma família CPD-Feller de semigrupos agindo em $C(M)$.*

1. **(Subvariedade invariante)** *Se para algum natural $k \in \mathbf{N}$, o semigrupo $P_t^{M^k}$ é N^k -degenerado, então para cada $n \in \mathbf{N}$, $P_t^{M^n}$ é N^n -degenerado.*
2. **(Fluxo folheado)** *Se para algum $k \in \mathbf{N}$, o semigrupo $P_t^{M^k}$ é $\mathcal{F}^k$ -folheado, então para cada $n \in \mathbf{N}$, $P_t^{M^n}$ é folheado na $\mathcal{F}^n$ folheação correspondente em M^n .*

Demonstração. Procedemos provando primeiramente o Item (2). Seja $\varphi_{s,t}$ o LJR-fluxo associado a família CPD-Feller de semigrupos $(P_t^{M^n} : n \in \mathbf{N})$. Suponha que $P_t^{M^k}$ é $\mathcal{F}^k$ -folheado para algum $k \in \mathbf{N}$. Fixe uma folha $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_1 \times \dots \times \mathcal{L}_k \in \mathcal{F}^k$ e um ponto $x = (x_1, \dots, x_k) \in \bar{\mathcal{L}}$. Seguindo a mesma ideia da prova do Teorema 3.2.2 acima, seja K_n uma sequência de compactos com respeito a topologia intrínseca de $\bar{\mathcal{L}}$ tal que $\bar{\mathcal{L}} = \cup_n K_n$. Por abuso de notação escrevemos $\varphi_{0,t}(x) = (\varphi_{0,t}(x_1), \dots, \varphi_{0,t}(x_k))$, e assim, controlamos as probabilidades com segundo a qual cada processo $\varphi_{0,t}(x)$ sai dos compactos K_n . Daí, seguindo os mesmos argumentos da prova do Teorema 3.2.2, temos que $t \geq 0$, $\varphi_{0,t}(x) \in \bar{\mathcal{L}}$, **P**-q.s.. Isto implica que as folhas $\bar{\mathcal{L}}$ são invariantes pelo fluxo $\varphi_{s,t}$, **P**-q.s.. Em particular, se todos as coordenadas do ponto x coincidem, ou seja $x_j = y$, para todo $j = 1, \dots, k$ e também todos as folhas coincidem, isto é, $\mathcal{L}_j = \mathcal{L}$ para todo $j = 1, \dots, k$, segue que $\varphi_{0,t}(y) \in \mathcal{L}$. Em outras palavras, o LJR-fluxo é folheado.

Com isso, para cada $n \geq 1$, dados uma folha (usando a mesma notação) $\bar{\mathcal{L}} \in \mathcal{F}^n$, um ponto $x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{\mathcal{L}}$ e $g \in B_b(\bar{\mathcal{L}})$, defina um semigrupo Markoviano $P_t^{\bar{\mathcal{L}}}$ nas folhas $\bar{\mathcal{L}}$ segundo a seguinte formula

$$P_t^{\bar{\mathcal{L}}} g(x) = \mathbf{E} [g(\varphi_{0,t}(x_1), \dots, \varphi_{0,t}(x_n))].$$

Para uma função $f \in C(M^n)$, usamos o Teorema 2.3.2 e concluímos que

$$\begin{aligned} P_t^{M^n} f &= \mathbf{E} [f(\varphi_{0,t}(x_1), \dots, \varphi_{0,t}(x_n))] \\ &= \mathbf{E} [f|_{\bar{\mathcal{L}}}(\varphi_{0,t}(x_1), \dots, \varphi_{0,t}(x_n))] \\ &= P_t^{\bar{\mathcal{L}}} f|_{\bar{\mathcal{L}}}(x). \end{aligned}$$

Veja que na segunda desigualdade, usamos que folhas são invariantes pelo LJR-fluxo, como provado acima. Assim, concluímos que $P_t^{M^n}$ satisfaz a Definição 3.1.6 para um

semigrupo $\mathcal{F}^n$ -folheado para todo $n \in \mathbf{N}$. Por fim, note que o Item (1) segue de forma completamente análoga. □

O resultado acima, nos diz basta saber que algum nível da família de semigrupos CPD-Feller seja folheado para que todos os demais também sejam. Daí faz sentido falar em uma família CPD-Feller folheada: uma família CPD-Feller de semigrupos é dita folheada, se para algum $n \in \mathbf{N}$, $P_t^{M^n}$ é $\mathcal{F}^n$ -folheado.

O resultado seguinte fornece condições para que sempre exista uma família CPD de semigrupos nas folhas.

Corolário 3.2.4 (Markoviano CPD nas folhas). *Seja $(P_t^{M^n} : n \in \mathbf{N})$ uma família CPD-Feller de semigrupos. Se para algum natural $k \in \mathbf{N}$, $P_t^{M^k}$ é $\mathcal{F}^k$ -folheado, então existe uma família de semigrupos CPD em cada folha $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_1 \times \dots \times \mathcal{L}_n \in \mathcal{F}^n$, qualquer que seja $n \in \mathbf{N}$.*

Demonstração. Com efeito, vimos no Corolário 3.2.3 acima que o LJR-fluxo de estocástico de aplicações preserva as folhas da folheação: $\varphi_{s,t}(z) \in \mathcal{L}$ sempre que $z \in \mathcal{L}$, desde que algum nível $P_t^{M^k}$ seja $\mathcal{F}^k$ -folheado. Fixado $n \in \mathbf{N}$, seja $y = (y_1, \dots, y_n) \in \bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_1 \times \dots \times \mathcal{L}_n$ na folheação correspondente $\mathcal{F}^n$. Por abuso de notação, escrevemos $\varphi_{s,t}(y) = (\varphi_{s,t}(y_1), \dots, \varphi_{s,t}(y_n))$ e veja que $\varphi_{s,t}(y) \in \bar{\mathcal{L}}$ sempre que $y \in \bar{\mathcal{L}}$. Isso mostra que o semigrupo dado pela Equação (3.6) abaixo está bem definido. Para $m \in \mathbf{N}$ fixado, seja $g \in C(\bar{\mathcal{L}}^m)$ (com a topologia intrínseca de $\bar{\mathcal{L}}$) tal que

$$P_t^{\bar{\mathcal{L}}^m} g(x) := \mathbf{E} (g \circ \varphi_{0,t}^{\otimes m}(x)), \quad (3.6)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_m) \in \bar{\mathcal{L}}^m$ e $\varphi_{0,t}^{\otimes m}(x) = (\varphi_{0,t}(x_1), \dots, \varphi_{0,t}(x_m))$. Veja que a propriedade diagonal segue facilmente como vemos abaixo:

$$\begin{aligned} P_t^{\bar{\mathcal{L}}^2} g^{\otimes 2}(x, x) &= \mathbf{E} (g \circ \varphi_{0,t}^{\otimes 2}(x)) = \mathbf{E} [g(\varphi_{0,t}(x)) g(\varphi_{0,t}(x))] \\ &= \mathbf{E} (g^2 \circ \varphi_{0,t}(x)) \\ &= P_t^{\bar{\mathcal{L}}} g^2(x), \end{aligned}$$

com $x \in \bar{\mathcal{L}}$ e $g \in C_0(\bar{\mathcal{L}})$. Por fim, mostramos que a família $(P_t^{\bar{\mathcal{L}}^m} : m \in \mathbf{N})$ é compatível. Seja $g \in B_b(\bar{\mathcal{L}}^m)$ tal que $g(x_1, \dots, x_m) = \bar{g}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$, para alguma $g \in B_b(\bar{\mathcal{L}}^k)$. Então,

segue facilmente que

$$\begin{aligned}
P_t^{\bar{\mathcal{L}}^m} g(x_1, \dots, x_m) &= \mathbf{E}[g(\varphi_{0,t}(x_1), \dots, \varphi_{0,t}(x_m))] \\
&= \mathbf{E}[\bar{g}(\varphi_{0,t}(x_{i_1}), \dots, \varphi_{0,t}(x_{i_k}))] \\
&= P_t^{\bar{\mathcal{L}}^k} \bar{g}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}).
\end{aligned}$$

□

O próximo resultado estabelece condições suficientes para que um semigrupo seja Feller nas folhas.

Corolário 3.2.5 (Feller nas folhas). *Se o fluxo estocástico de aplicações estabelecido pelo Teorema 2.3.2 é tal que $\varphi_{s,t}|_{\mathcal{L}}$ satisfaz as Condições (a) e (b) da Definição 2.3.1 para toda $f \in C_0(\mathcal{L}, \tau_{\text{int}})$ então os semigrupos nas folhas $P_t^{\bar{\mathcal{L}}}$ para $\bar{\mathcal{L}} \in \mathcal{F}^n$ também são Feller para todo $n \in \mathbf{N}$ (o resultado é análogo para fluxos que preservam N).*

Demonstração. Naturalmente, o fluxo define um semigrupo pela seguinte forma:

$$P_t^{\bar{\mathcal{L}}} g(x) = \mathbf{E}(g \circ \phi_{0,t}(x)),$$

onde $\phi_{s,t} = \varphi_{s,t}|_{\mathcal{L}}$. Agora, observe que a Propriedade (a) da Definição 2.3.1 implica a continuidade de $P_t^{\bar{\mathcal{L}}}$ em $t = 0$ e a Propriedade (b) da mesma definição implica que $P_t^{\bar{\mathcal{L}}} g$ é uma função contínua e além disso, $P_t^{\bar{\mathcal{L}}}$ preserva $C_0(\bar{\mathcal{L}})$. Como vimos no Capítulo 1, um semigrupo com tais propriedades é um semigrupo Feller. Alternativamente, o leitor pode aplicar a Equação (2.1) e o Teorema 2.3.2 em cada folha $\bar{\mathcal{L}}$ para obter a mesma conclusão. Veja também [34, Prop. 1.3].

□

Observação. A compacidade das folhas ou a continuidade de $\varphi_{0,t}|_{\mathcal{L}}(x)$ em x e em t com respeito a topologia intrínseca de $\mathcal{L}$ implicam as Condições (a) e (b) da hipótese do Corolário 3.2.5 acima.

A seguir, damos uma caracterização para o LJR-fluxo folheado por meio da família de semigrupos CPD-Feller associada. Mais precisamente, mostramos que o fato do LJR-fluxo $\varphi_{s,t}$ preservar folhas da folheado é equivalente a existir um pelo menos um $k \in \mathbf{N}$ tal que o semigrupo correspondente $P_t^{M^k}$ seja $\mathcal{F}^k$ -folheado. Veja o resultado a seguir:

Corolário 3.2.6. *Seja $(P_t^{M^n} : n \in \mathbf{N})$ uma família CPD-Feller de semigrupos. Então $P_t^{M^k}$ é $\mathcal{F}^k$ -folheado para algum $k \in \mathbf{N}$ se, e somente se, o LJR-fluxo correspondente $\varphi_{s,t}$ é folheado folheado.*

Demonstração. Veja que uma parte da demonstração é uma consequência direta do Teorema 3.2.2 ou de sua versão generalizada, o Corolário 3.2.3. Assim, basta mostrar a recíproca. O Teorema 2.3.2 nos diz que: $\forall n \in \mathbf{N}$

$$P_t^{M^n} f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{E}[f(\varphi_{0,t}(x_1), \dots, \varphi_{0,t}(x_n))],$$

com $f \in C(M^n)$. Por hipótese, o fluxo canônico $\varphi_{s,t}$ preserva as folhas da folheação. Portanto, fixado $n \in \mathbf{N}$ seja $\tilde{\mathcal{L}} \in \mathcal{F}^n$ e defina um semigrupo $P_t^{\tilde{\mathcal{L}}}$ pela Equação 3.6. Mais precisamente,

$$P_t^{\tilde{\mathcal{L}}} g(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{E}[g(\varphi_{0,t}(x_1), \dots, \varphi_{0,t}(x_n))]. \quad (3.7)$$

Consequentemente, mostramos que $P_t^{M^n}$ é $\mathcal{F}^n$ -folheado repetindo o argumento usado na prova do Corolário 3.2.4. □

Seguindo a mesma linha de ideias apresentada no resultado anterior, ainda podemos concluir de forma imediata que $P_t^{M^n}$ ser $\mathcal{F}^n$ -folheado para todo $n \in \mathbf{N}$, ou para algum $n \in \mathbf{N}$ é equivalente a existir um semigrupo Markoviano satisfazendo:

$$P_t^{\mathcal{L}} f|_{\mathcal{L}}(x) = \mathbf{E}[f \circ \varphi_{0,t}(x)],$$

para cada $\mathcal{L} \in \mathcal{F}$ e para cada $x \in \mathcal{L}$, com $f \in C(M)$.

A seguir analisamos a existência intrínseca de um LJR-fluxo sobre cada folha da folheação. Com a mesma terminologia de antes, consideramos M uma variedade Riemanniana compacta. Seja $(P_t^{M^n})$ uma família CPD-Feller de semigrupos sobre M . Denote por $\varphi_{s,t}$ o correspondente LJR-fluxo com espaço de estados M . Agora, introduzimos em M uma folheação $\mathcal{F}$. Suponha que para algum inteiro positivo $k \in \mathbf{N}$, o semigrupo $P_t^{M^k}$ é $\mathcal{F}^k$ -folheado. Além disso, impomos a condição de que os semigrupos $P_t^{\mathcal{L}^n}$ sejam Feller para cada $n \in \mathbf{N}$, onde $\mathcal{L} \in \mathcal{F}$. Note que quando as folhas são compactas podemos estender funções contínuas da topologia intrínseca para topologia induzida. Daí concluímos que os semigrupos sobre as folhas preservam a diagonal. Condições mais gerais para tal fato são dados no Corolário 3.2.3. Veja também que a Definição 2.1.1 é trivialmente satisfeita

quando o semigrupo está associado a um fluxo. Portanto, em cada folha $\mathcal{L}$ existe uma família CPD-Feller de semigrupos satisfazendo as hipótese do Teorema 2.3.2. Em outras palavras, cada folha $\mathcal{L}$ possui um LJR-fluxo intrínseco o qual denotamos por $\psi_{s,t}$ definido sobre o espaço de probabilidade $\Omega^{\mathcal{L}} = \prod_{s \leq t} \mathbf{F}$, onde $\mathbf{F}$ é o espaço das funções mensuráveis de $\mathcal{L}$ em si mesma munida com a σ -álgebra das aplicações mensuráveis em cada ponto. Veja o Capítulo 2.

Com o contexto descrito acima, uma escolha natural de $\psi_{s,t}$ é $\varphi_{s,t}|_{\mathcal{L}}$ ω -q.s., baseado no mesmo espaço de probabilidade Ω como ilustra o Corolário 3.2.7 abaixo.

Corolário 3.2.7. *Seja $\mathcal{L} \in \mathcal{F}$. Se $\psi_{s,t}$ é o LJR-fluxo estocástico de aplicações associado a $P_t^{\mathcal{L}}$. Então o LJR-fluxo $\psi_{s,t}$ na folha $\mathcal{L}$ está associado ao LJR-fluxo $\varphi_{s,t}$ em M segundo a fórmula:*

$$\mathbf{E}^{\Omega^{\mathcal{L}}}(f \circ \psi_{s,t}(x)) = \mathbf{E}^{\Omega}(f \circ \varphi_{s,t}(x)), \quad (3.8)$$

com $x \in \mathcal{L}$ e para toda $f \in C(M)$.

Demonstração. De fato, dada $f \in C(M)$, seja $x \in \mathcal{L}$. Pela definição de semigrupo folheado, pelo Teorema 2.3.2 e pelo Teorema de fluxo folheado 3.2.2 temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\Omega^{\mathcal{L}}}[f \circ \psi_{0,t}(x)] &= P_t^{\mathcal{L}} f|_{\mathcal{L}}(x) \\ &= P_t^M f(x) \\ &= \mathbf{E}^{\Omega}[f \circ \varphi_{0,t}(x)]. \end{aligned}$$

Pela independência dos incrementos (veja a Definição 2.3.1) segue que

$$\mathbf{E}^{\Omega^{\mathcal{L}}}[f \circ \psi_{s,t}(x)] = \mathbf{E}^{\Omega}[f \circ \varphi_{s,t}(x)],$$

para todo $x \in \mathcal{L}$ e para todo $f \in C(M)$. □

O Corolário 3.2.7 acima nos dá unicidade em lei para pontos que estão sobre a folha em questão $\mathcal{L}$. Ainda nesse contexto, o resultado se aplica, por exemplo, quando as funções da topologia intrínseca das folhas são estendíveis a funções da topologia induzida de M .

A seguir, apresentamos um resultado que resume os principais fatos que apresentamos até este ponto:

Teorema 3.2.8. *Seja $(P_t^{M^n} : n \in \mathbf{N})$ uma família CPD-Feller de semigrupos. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) *o semigrupo P_t^M é $\mathcal{F}$ -folheado em M ;*
- (b) *existe um semigrupo Markoviano $P_t^{\mathcal{L}}$ em $\mathcal{L}$, para cada $\mathcal{L} \in \mathcal{F}$, satisfazendo a Equação (3.2);*
- (c) *o LJR-fluxo de aplicações $\varphi_{s,t}$ preserva a folheação: fixada $\mathcal{L} \in \mathcal{F}$, $\varphi_{s,t}(x) \in \mathcal{L}$, $\mathbf{P}$ -q.s., para cada $x \in \mathcal{L}$;*
- (d) *o semigrupo $P_t^{M^n}$ é $\mathcal{F}^n$ -folheado para todo $n \in \mathbf{N}$;*
- (e) *existe algum $k \in \mathbf{N}$ tal que o semigrupo $P_t^{M^k}$ é $\mathcal{F}^k$ -folheado.*

Demonstração. Provamos o resultado acima mostrando que

$$(a) \implies (b) \implies (c) \implies (d) \implies (e) \implies (a).$$

Veja que o Item (b) segue de (a) trivialmente pela Definição 3.1.6 de semigrupo folheado. Supondo que (b) seja verdadeira, temos o Item (c) como uma consequência imediata do Teorema do fluxo folheado 3.2.2. Além disso, se o LJR-fluxo preserva a folheação no sentido descrito no Item (c) enunciado então para um dado natural $n \in \mathbf{N}$ fixado, considere uma folha $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_1 \times \dots \times \mathcal{L}_n$. Agora, defina um semigrupo $P_t^{\tilde{\mathcal{L}}}$ sobre $\tilde{\mathcal{L}}$ pela Equação (3.7). Portanto $P_t^{M^n}$ é $\mathcal{F}^n$ -folheado. Daí, resulta que o Item (d) é uma consequência do Item (c). Em particular, se (d) é verdadeira então (e) também é. Por fim, usamos o Corolário 3.2.3 para mostrar que (e) implica (a).

□

3.2.1 Exemplo: semigrupo folheado sobre folhas densas

Vamos considerar um exemplo canônico: o fluxo irracional sobre o toro plano $T = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. Seja $v = (v_1, v_2)$ um vetor unitário em $\mathbf{R}^2$. Considere uma folheação em T tal que para cada ponto $z_0 = (a, b) \in T$, a folha passando por z_0 seja dada enrolando uma linha (espiralando) na direção do vetor unitário dado v sobre o toro T . Mais precisamente:

$$\mathcal{L}_{z_0} = \{(a + \lambda v_1, b + \lambda v_2) \pmod{1} : \text{para todo } \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

Veja que se $\theta = v_2/v_1$ é racional as folhas são compactas. Seja que θ é irracional, portanto as folhas são densas em T . Observe que neste caso, a folha passando por z_0 tem topologia intrínseca τ_{int} dada pela reta real. Tecnicamente, isso significa a imersão bijetiva

$$\iota : \lambda \in \mathbf{R} \longmapsto (a + \lambda v_1, b + \lambda v_2) \pmod{1} \in (\mathcal{L}_{z_0}, \tau_{\text{int}})$$

é um homeomorfismo.

A família de semigrupos folheada $P_t^{T^n}$ em T^n é descrita pela equação diferencial estocástica (EDE) de Stratonovich:

$$d\varphi_t = v dB_t, \quad (3.9)$$

com condição inicial $\varphi_0 = (a, b) = z_0$, onde B_t é o movimento Browniano padrão e o fluxo $\varphi_t = (a + v_1 B_t, b + v_2 B_t) \pmod{1}$ preserva as folhas da folheação no sentido que cada trajetória a qual começa em uma determinada folha, nela permanece **P**-q.s.. Aqui, a família de semigrupos $P_t^{T^n}$ é dada como se segue: para $f \in C(T^n)$

$$P_t^{T^n} f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{E}[f(\varphi_t(x_1), \dots, \varphi_t(x_n))]$$

Um ponto interessante nesse contexto é que a Equação (3.9) pode ser interpretada sob dois pontos de vista: sobre o toro ou sobre a reta gerada pelo vetor v passando pela condição inicial (a, b) . Apresentamos, em particular, a fórmula explícita para P_t^T .

Para os cálculos a seguir, usaremos o núcleo do calor associado ao movimento Browniano (densidade gaussiana) o qual é dado por: seja $z \in \mathbf{R}$

$$g_t(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{-z^2}{2t}\right). \quad (3.10)$$

Primeiramente, vamos analisar a EDE (3.9) acima vista como uma equação sobre o toro T . Assim, seja $\bar{A}$ um boreliando em T . Daí, segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\bar{A}}(\varphi_t)) &= \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\bar{A}}(a + v_1 B_t, b + v_2 B_t)) \\ &= \mathbf{P}[(a + v_1 B_t, b + v_2 B_t) \in \bar{A}] \\ &= \int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{\bar{A}}(v_1 z + a, v_2 z + b) g_t(z) dz. \end{aligned}$$

Veja que o cálculo acima também pode ser obtido de forma direta aplicando o Teorema

da Medida Induzida. A última igualdade deixa claro que a integral é calculada sobre a reta de coeficiente $\theta = v_2/v_1$ passando pela condição inicial (a, b) . Usando o Teorema da Convergência Monótona, estendemos o resultado para funções contínuas em $C(T)$, ou seja, para funções periódicas em $\mathbf{R}^2$. Mais precisamente, dada $f \in C(\mathbf{R}^2)$ periódica, concluímos que

$$\begin{aligned} P_t^T f(z_0) &= P_t^T f(a, b) = \mathbf{E}(f \circ \varphi_t(a, b)) \\ &= \int f(v_1 z + a, v_2 z + b) g_t(z) dz \\ &= \int f(vz + z_0) g_t(z) dz, \end{aligned} \quad (3.11)$$

qualquer que seja $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

Por outro lado, fixada a condição inicial $(a, b) \pmod{1} \in \mathcal{L}_{z_0}$ sabemos que o fluxo φ_t passando por (a, b) pertence a $\mathcal{L}_{z_0}$. Com B_t sendo o movimento Browniano descrito acima, veja que $\iota(B_t) = \varphi_t$. Portanto, dado $A \in \text{Borel}(\mathcal{L}_{z_0})$ temos o seguinte: fazendo o cálculo diretamente ou usando o Teorema da Medida Induzida,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\mathbb{1}_A(\varphi_t)] &= \mathbf{E}[\mathbb{1}_{\iota^{-1}(A)}(B_t)] = \mathbf{P}(B_t \in \iota^{-1}(A)) \\ &= \int_{\mathbf{R}} \mathbb{1}_A(\iota(z)) g_t(z) dz, \\ &= \int_{\mathbf{R}} \mathbb{1}_A(v_1 z + a, v_2 z + b) g_t(z) dz, \end{aligned}$$

Novamente, veja que a integral é calculada sobre a reta que passa pelo ponto (a, b) e que a expressão acima depende das condições iniciais. Seja $f \in C_0(\mathcal{L}_{z_0})$ (munida com a sua topologia intrínseca). De forma análoga ao caso anterior, concluímos que

$$\begin{aligned} P_t^{\mathcal{L}_{z_0}} f(z_0) &= P_t^{\mathcal{L}_{z_0}} f(a, b) = \int f(v_1 z + a, v_2 z + b) g_t(z) dz \\ &= \int f(vz + z_0) g_t(z) dz.. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Note que as Expressões (3.11) e (3.12) para $P_t^{\mathbf{T}}$ e $P_t^{\mathcal{L}_{z_0}}$ respectivamente coincidem quando a condição inicial $z_0 = (a, b)$ pertencem a folha $\mathcal{L}_{z_0}$. E naturalmente, $P_t^{\mathcal{L}_{z_0}}$ satisfaz a

Definição 3.1.6 de semigrupo folheado para P_t^T .

Usando este exemplo podemos dar uma ideia do processo intrínseco a demonstração do Teorema do fluxo folheado 3.2.2. Mais precisamente, o exemplo nos mostra como usar o processo limite para calcular as probabilidades de saída de certos compactos. Nesse caso, em particular, podemos escolher (por analogia): $\mathcal{L}_{z_0} = \cup_n \iota[-n, n]$, donde

$$\iota[-n, n] = [-v_1 n + a, v_1 n + a] \times [-v_2 n + b, v_2 n + b],$$

já que os intervalos da forma $[-n, n]$ cobrem a reta $\mathbf{R}$. Assim, analisamos as probabilidades do fluxo sair de cada compacto, nesse caso em particular $K_n = [-n, n]$. Portanto, dado $\bar{A}$ um boreliano sobre o toro T , segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\mathbb{1}_{\bar{A}}(\varphi_t)] &= \mathbf{P}(\varphi_t \in \bar{A} \cap \mathcal{L}_{z_0}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\varphi_t \in \bar{A} \cap \bar{K}_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[\mathbb{1}_{\bar{A} \cap \bar{K}_n}(\varphi_t)], \end{aligned}$$

onde $\bar{K}_n = \iota(K_n)$ e $\bar{K}_n \nearrow \mathcal{L}$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\mathbb{1}_{\bar{A} \cap \bar{K}_n}(\varphi_t)] &= \int \mathbb{1}_{\bar{A} \cap \bar{K}_n}(v_1 z + a, v_2 z + b) g_t(z) dz \\ &= \int_{[-n, n]} \mathbb{1}_{\bar{A}} \circ \iota(z) g_t(z) dz \\ &= \int_{-n}^n \mathbb{1}_{\bar{A}} \circ \iota(z) g_t(z) dz. \end{aligned}$$

E isto significa que para $\varphi_0 = z_0 \in \mathcal{L}_{z_0}$ e $f \in C(T)$:

$$\begin{aligned} P_t^T f(a, b) &= \mathbf{E}(f \circ \varphi_t) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f \circ \iota(z) g_t(z) dz. \end{aligned}$$

Nesse exemplo, o semigrupo Markoviano $P_t^{\mathcal{L}_{z_0}}$ agindo sobre $C_0(\mathcal{L}_{z_0})$ é Feller, veja o Corolário 3.2.5. Aqui, as principais diferenças entre P_t^T e $P_t^{\mathcal{L}}$ são:

- a) Observando os procedimentos feitos acima, podemos concluir que o domínio de P_t^T se restringe a funções $\mathbf{Z}^2$ -periódicas sobre $\mathbf{R}^2$. Por outro lado, o domínio de $P_t^{\mathcal{L}}$

se estende a funções contínuas na topologia usual da reta $\mathbf{R}$.

- b) O suporte da probabilidade de transição $\mu_{P_t}(x, \cdot)$ associada a P_t^T é o toro T . Por outro lado, o suporte da probabilidade de transição $\mu_{P_t^{\mathcal{L}}}(x, \cdot)$ é a folha $\mathcal{L}_{z_0}$.

Note que o Item (b) acima se refere ao fenômeno que abordamos ao longo dessa sessão inserido nas Definições de degenerescência 3.1.5 e 3.1.6. Isto é, o suporte das médias associadas ao semigrupo Markoviano nas folhas está concentrado nas folhas mesmo em casos de folhas densas como ocorre no exemplo abordado acima. É essa a propriedade que investigamos na prova do Teorema do fluxo folheado 3.2.2.

◇

Observação. Deixamos aqui, uma outra ideia mais geral para formulação de um exemplo segundo o qual o semigrupo se comporta bem (é Feller) em M , mas o mesmo não ocorre sobre as folhas. Faremos uma descrição local e hipotética. Descrevemos o semigrupo usando a trajetória do ponto $x \in M$. Assumimos que existe uma variedade M dotada de uma folheação unidimensional $\mathcal{F}$ com um sistema de coordenadas folheado satisfazendo o seguinte: em uma vizinhança U de $x \in M$ supomos que a folha $\mathcal{L}$ que contém o ponto x intersecta a vizinhança U uma quantidade infinita enumerável de vezes com placas coplanares. Digamos que com coordenadas transversais racionais na direção de um vetor unitário v . Considere um processo de Lévy X_t em $\mathbf{R}$ com $X_0 \equiv 0$ q.s., X_t pertence ao subconjunto racional $\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}(X_t = 0) = 0$ para todo $t > 0$ e $\mathbf{E}(f(X_t))$ converge a $f(0)$, com t tendendo a zero, para as funções contínuas $f \in C_0(\mathbf{R})$. Tome o semigrupo Feller folheado P_t^M sobre $C(M)$ tal que para pontos em uma vizinhança de x em $\mathcal{L}$ satisfaça

$$P_t^M f(y) = \mathbf{E}[f(y + X_t v)].$$

Considere uma função $h \in C_0(\mathcal{L}, \tau_{\text{int}})$ tal que $h(x) = 1$ e $h(x) = 0$, fora de uma ϵ -vizinhança x na folha $\mathcal{L}$. Usando as trajetórias do ponto x descrita acima temos que $P_0^{\mathcal{L}} h(x) = 1$, no entanto $P_t^{\mathcal{L}} h(x) = 0$ para todo $t > 0$. Portanto $P_t^{\mathcal{L}}$ não pode ser Feller.

A seguir mostramos uma propriedade interessante proveniente dos Teoremas 2.3.2 e 3.2.2. Essa propriedade pode ser entendida e ou vista como uma extensão da propriedade diagonal, veja a Definição 2.1.1.

Considere que $(P_t^{M^n} : n \in \mathbf{N})$ seja uma família de semigrupos CPD-Feller e que para algum natural $k \in \mathbf{N}$, $P_t^{M^k}$ seja $\mathcal{F}^k$ -folheado. Dado $x \in M$ seja $\mathcal{L}$ a folha contendo o ponto x . Nessas circunstâncias, temos:

Corolário 3.2.9. *Sejam $f, g \in C(M)$ tal que $f|_{\mathcal{L}} = g|_{\mathcal{L}}$. Se existe uma sequência y_n convergindo a um certo x sobre a folha $\mathcal{L}$ então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(P_t^M f^2(x) + P_t^M g^2(y_n) - 2 P_t^{M^2} f \otimes g(x, y_n) \right) = 0.$$

Demonstração. Por hipótese, sejam $f, g \in C(M)$ satisfazendo $f|_{\mathcal{L}} = g|_{\mathcal{L}}$. Combinando o Teorema do fluxo folheado 3.2.2, o Teorema 2.3.2 e a Definição 2.3.1 de fluxo estocástico de aplicações, resulta que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[(f \circ \varphi_{0,t}(x) - f \circ \varphi_{0,t}(y_n))^2 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[(f \circ \varphi_{0,t}(x) - g \circ \varphi_{0,t}(y_n))^2 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (P_t^M f^2(x) + P_t^M g^2(y_n) - 2 P_t^{M^2} f \otimes g(x, y_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(P_t^M f^2(x) + P_t^M g^2(y_n) - 2 P_t^{M^2} f \otimes g(x, y_n) \right). \end{aligned}$$

□

3.3 Fluxo coalescente folheado

Nessa sessão consideramos semigrupos folheados coalescentes. Seja $(P_t^{M^n} : n \in \mathbf{N})$ uma família de semigrupos Feller sobre M , onde M está equipada com uma folheação regular $\mathcal{F}$.

Denotamos por $(X_t^{(n)} : n \in \mathbf{N})$, com $X_0^{(n)} = (x_1, \dots, x_n)$ o processo Markoviano em M^n associado as leis de $P_t^{M^n}$ no ponto $(x_1, \dots, x_n)$. Considere a diagonal parcial $\Delta_n = \{x \in M^n : \text{existe um par } i \neq j, \text{ com } x_i = x_j\}$ e os tempos de entrada $T_{\Delta_n} = \inf\{t \geq 0, X_t^{(n)} \in \Delta_n\}$. Com a mesma terminologia desenvolvida em [34] enunciamos o Teorema 3.3.1 provado em [34] o qual usaremos para nossa construção. Mais precisamente, a demonstração do resultado apresentado nessa sessão, a Proposição 3.3.2, envolve parte da demonstração feita no trabalho acima posto como referência. Assim, para comodidade do leitor, reescrevemos aqui partes da demonstração do Teorema 3.3.1 dentro da demonstração da Proposição 3.3.2 em questão.

Teorema 3.3.1 (Le Jan-Raimond). *Existe uma única família compatível de semigrupos Markovianos $(P_t^{M^n, c}, n \geq 1)$ em M tal que se $X^{(n), c}$ é o processo de n pontos associado*

e $T_{\Delta_n}^c = \inf\{t \geq 0, X_t^{(n),c} \in \Delta_n\}$, então:

(a) $(X_t^{(n),c} : t \leq T_{\Delta_n}^c)$ é igual em lei a $(X_t^{(n)} : t \leq T_{\Delta_n})$;

(b) para $t \geq T_{\Delta_n}^c$, temos que $X_t^{(n),c} \in \Delta_n$.

Com uma condição adicional, garantimos que o semigrupo $P_t^{M^n, c}$ é Feller em cada nível $n \in \mathbf{N}$. Com efeito, denote por $P_{(x,y)}^2$ a probabilidade de transição associada a $P_t^{M^2}$ no ponto (x, y) , daí introduzimos:

Hipótese C: para todo $t > 0, \epsilon > 0$ e $x \in M$, suponha que

$$\lim_{y \rightarrow x} P_{(x,y)}^2 [\{T_{\Delta_2} > t\} \cap \{d(X_t^1, X_t^2) > \epsilon\}] = 0,$$

e para algum par $x, y \in M$, $P_{(x,y)}^2[T_{\Delta_2} < \infty] > 0$.

Assim, temos agora um semigrupo coalescente folheado em M :

Proposição 3.3.2. *Seja $(P_t^{M^n} : n \geq 1)$ uma família de semigrupos Feller sobre $(M, \mathcal{F})$ a qual satisfaz a Hipótese C) acima. Então a família de semigrupos coalescentes $(P_t^{M^n, c})$ é uma família CPD-Feller de semigrupos folheados, portanto associada ao fluxo coalescente folheado $\varphi_{s,t}$.*

Demonstração. A primeira parte da demonstração desse resultado corresponde exatamente ao processo construtivo usado para demonstrar o Teorema 3.3.1. Por esse motivo, reescrevemos aqui parte da demonstração do resultado citado. Em resumo, para cada $n \geq 1$, por concatenação de processos de Markov parados quando os mesmos atingem a diagonal parcial (o conjunto Δ_n) com processos começando no ponto correspondente, Le Jan e Raimond [34, Teorema 4.1] constroem explicitamente um processo Markoviano $X_t^{(n),c}$ satisfazendo os itens (a) e (b) do Teorema 3.3.1. Mais precisamente, para $n \geq 1$ considere Π_n o conjunto de todas as partições de $\{1, \dots, n\}$. Se $\pi \in \Pi_n$, denote por $|\pi|$ a quantidade de elementos de π . Agora considere em a seguinte relação de equivalência em Π_n : quando i e j pertencem ao mesmo elemento de π dizemos que eles estão na mesma classe de equivalência. Denotamos esta relação por $i \stackrel{\pi}{\sim} j$. Note que a relação de equivalência definida acima, por sua vez, define em Π_n uma ordem parcial: $\pi' \leq \pi$, se $i \stackrel{\pi}{\sim} j$ implica $i \stackrel{\pi'}{\sim} j$. Observe que essa ideia é natural, pois o que estamos fazendo, a

grosso modo, é escolher uma partição mais fina de $\{1, \dots, n\}$, no caso π' . Considere os conjuntos:

$$E_\pi = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^n : x_i = x_j \text{ se } i \sim^\pi j\},$$

$$\partial E_\pi = \bigcup_{\pi' < \pi} E_{\pi'}.$$

Veja que por definição, o conjunto ∂E_π descreve todos os pontos onde existem coordenadas de M^n tais que $x_i = x_j$, no entanto i e j não estão associados segundo a relação de equivalência dada acima.

Usando indução sobre a quantidade de elementos de uma partição π provamos que existe um processo de Markov X^π em M^n de acordo com o esperado. De fato, considere ι a isometria natural entre E_π e M^π . Se $|\pi| = 1$ escolha $X^\pi = \iota(X^{(1)})$, onde $X^{(1)}$ é o processo de Markov de 1-ponto associado a lei de $P_t^{M^1}$. Agora, suponha que para cada $\pi \in \Pi_n$ tal que $|\pi| \leq k$ temos um processo de Markov definido como desejado. Daí seja $\pi \in \Pi_n$ com $|\pi| = k + 1$. Seja T o tempo de entrada em ∂E_π . Note que para qualquer partição π' mais fina que π temos que $|\pi| < |\pi'|$. Assim, podemos aplicar a hipótese de indução. Com essa ideia em mente, definimos

$$X_t^\pi = \begin{cases} \iota(X_t^{k+1}), & \text{se } t \leq T \\ X_t^{\pi'}, & \text{se } t > T \end{cases},$$

onde X^{k+1} é o processo de Markov de $(k + 1)$ -pontos associado a lei de $P_t^{M^{k+1}}$ e $X^{\pi'}$ correspondente a hipótese de indução com π' sendo a partição mais fina tal que $\iota(X_t^{k+1}) \in E_{\pi'}$. Por fim, tome $X^{(n),c} = X^\pi$, com $\pi = \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$ e considere $P_t^{M^n,c}$ o semigrupo gerado pela lei desse processo.

A segunda parte, a qual omitiremos aqui, corresponde a mostrar que se a Condição C) implica que cada membro da família $(P_t^{M^n,c} \in \mathbf{N})$ é um semigrupo é Feller sendo que $P_t^{M^1,c}$ é Feller por construção, veja o Teorema 4.1 e o Lema 1.11 em [34].

Assim sendo, com respeito a esse resultado a nossa contribuição segue deste ponto em diante: note que, por construção, para $n = 1$, os processos $X^{(1),c}$ e $X^{(1)}$ são iguais em lei (veja o item (a) do Teorema 3.3.1). Portanto $P_t^M = P_t^{M,c}$ para todo $t \geq 0$. Isto implica que $P_t^{M,c}$ é um semigrupo folheado. Com a Hipótese adicional C) concluímos que a família de semigrupos $(P_t^{M^n,c})$ é uma família CPD-Feller de semigrupos. Consequentemente, o

resultado segue pelo Teorema do fluxo folheado 3.2.2.

□

Obstrução geométrica. A Proposição 3.3.2 implica, em particular, que pontos $x, y \in M$ tal que $P_{(x,y)}^2[T_{\Delta_2} < \infty] > 0$, na Hipótese C) devem estar na mesma folha. Com efeito, considerando as hipóteses do Teorema do fluxo folheado 3.2.2 temos que $\varphi_{s,t}(x) \in \mathcal{L}_x$ e $\varphi_{s,t}(y) \in \mathcal{L}_y$. Mais ainda, a interseção $\mathcal{L}_x \cap \mathcal{L}_y$ é não vazia se, e somente se, x e y estão na mesma folha.

O resultado anterior nos diz que sob certas condições é possível construir, de forma intrínseca, uma família de semigrupos coalescente nas folhas que por sua vez está associada a um fluxo o qual tem a propriedade de coalescência. Com efeito, das informações acima resulta que a Condição C) deve estar sobre a folha. E neste caso podemos provar o Teorema 3.3.1 sobre a folha contendo a condição inicial do sistema. Além disso, a prova será exatamente a mesma feita em [34, Teorema 4.1]. Para isso, basta trocar a Hipótese C) pela Hipótese D), onde:

Hipótese D: Para todo $t > 0, \epsilon > 0$ e $x \in \mathcal{L}$, suponha

$$\lim_{y \rightarrow x} P_{(x,y)}^2 [\{T_{\Delta_2} > t\} \cap \{d(X_t^1, X_t^2) > \epsilon\}] = 0,$$

e para algum par $x, y \in \mathcal{L}$, $P_{(x,y)}^2[T_{\Delta_2} < \infty] > 0$,

temos o seguinte resultado:

Corolário 3.3.3 (Semigrupo coalescente nas folhas). *Existe uma única família de semigrupos Markoviano compatível $(P_t^{\mathcal{L}^n, c} : n \in \mathbf{N})$ em $\mathcal{L}^n$ tal que se $X^{(n), c}$ é o processo de n pontos associado e $T_{\Delta_n}^c = \inf\{t \geq 0, X^{(n), c} \in \Delta_n\}$, então:*

- (a) $(X_t^{(n), c}, t \leq T_{\Delta_n}^c)$ é igual em lei a $(X_t^{(n)}, t \leq T_{\Delta_n})$;
- (b) para $t \geq T_{\Delta_n}^c$, temos que $X_t^{(n), c} \in \Delta_n$.

Além disso, supondo que $P_t^{\mathcal{L}^1}$ seja Feller e que valia a Hipótese D) concluímos que tal família de semigrupos é uma família de semigrupos CPD-Feller coalescente.

CAPÍTULO 4

UM PRINCÍPIO DE MÉDIAS PARA O LJR-FLUXO

Neste capítulo aplicamos a técnica de semigrupo folheado e fluxo folheado para obter um princípio de médias associado ao LJR-fluxo. Seja $(M, \mathcal{F})$ uma variedade Riemanniana compacta folheada. Como hipótese adicional, consideramos que as folhas são conjuntos compactos. Inicialmente introduzimos um sistema de coordenadas folheado apropriado, onde as folhas são mapeadas em placas horizontais do espaço Euclidiano, e também um sistema de coordenadas para uma direção a qual é transversal as folhas. Por conveniência, o sistema de coordenadas nas folhas será chamado *horizontal* e na direção transversal às folhas será chamado *vertical*.

Dada uma família CPD-Feller de semigrupos $(P_t^{M^n} : n \in \mathbf{N})$ em $(M, \mathcal{F})$ vamos considerar uma perturbação de primeira ordem de associado ao LJR-fluxo o qual corresponde uma família CPD-Feller de semigrupos $(P_t^{(n), \epsilon})$ não necessariamente folheada. Tecnicamente, denotamos por P_t^ϵ o primeiro nível do semigrupo perturbado e tal perturbação significa que existe um campo vetorial K (genericamente transversal as folhas) sobre M de tal maneira que para cada $f \in C^\infty(M)$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t^\epsilon f - P_t f}{t} = \epsilon K f.$$

Além disso, consideramos que $P_t^\epsilon f(x)$ fica determinado pela restrição de f a uma vizinhança de $\mathcal{L}_x$ para t suficientemente pequeno. Equivalentemente, o suporte da medida de probabilidade associada ao semigrupo Markoviano $P_t^\epsilon f(x)$ está contido numa vizinhança da folha $\mathcal{L}_x$, para $t \geq 0$ suficientemente pequeno. Note que uma perturbação no primeiro

nível determina uma perturbação em todos outros níveis, visto que a família de semigrupos a qual consideramos está associada diretamente ao LJR-fluxo via Teorema 2.3.2.

O principal resultado deste capítulo estabelece um princípio de médias para a dinâmica induzida pela família de semigrupos $(P_t^{(n),\epsilon})$. Em outras palavras, para o fluxo canônico proposto por Le Jan-Raimond (LJR-fluxo) correspondente a tal família. Mais precisamente, quando ϵ converge a zero, a média da componente vertical associada ao LJR-fluxo perturbada $\varphi_{0,t}^\epsilon$ se aproxima numa certa topologia da solução de uma equação diferencial ordinária (EDO) sobre o espaço vertical dada pela média do campo perturbado K em cada folha. Essa média é tomada de acordo com a medida invariante, em cada folha, do sistema original não perturbado gerado pela família de semigrupos $(P_t^{M^n})$.

A linguagem aqui apresentada generaliza para o contexto de semigrupos (com condições adicionais) os resultados apresentados em Hoeghele-Ruffino [22] para difusões de Lévy em espaços folheados, em Gonzales-Ruffino [23] para difusões contínuas e em X.-M.-Li [35] para difusões em estruturas simplética/hamiltonianas. Além disso, essa parte do trabalho nos motiva a investigar a existência de um princípio de médias para processos de Lévy em estruturas simplética/hamiltonianas seguindo as ideias apresentadas em [35]. Assunto o qual não será abordado nesse trabalho.

4.1 Sistemas de coordenadas folheado

Dada uma condição inicial $x_0 \in M$, seja $\mathcal{L}_{x_0}$ a folha passando por x_0 . Suponha, por simplicidade, que as folhas são compactas. Assim, podemos supor sem perda de generalidade que cada folha possui uma vizinhança tubular $U \subset M$ qual é difeomorfa a $\mathcal{L}_{x_0} \times V$, onde V é um aberto conexo em $\mathbf{R}^d$ contendo a origem. Por compacidade de $\mathcal{L}_{x_0}$, existe um número finito de coordenadas locais folheadas $\psi_i : U_i \rightarrow W_i \times V \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^d$, onde W_i e V são conjuntos abertos, digamos com $1 \leq i \leq k$ e $x_0 \in U_1$ tal que:

- 1) $U = \cup_{i=1}^k U_i$;
- 2) a folha $\mathcal{L}_{x_0} = \cup_{i=1}^k \psi^{-1}(W_i \times \{0\})$, isto é, cada U_i é difeomorfo ao produto de um conjunto aberto, com a topologia induzida, na folha $\mathcal{L}_{x_0}$ e da componente vertical V ;
- 3) se um par de pontos $p \in U_i$ e $q \in U_j$ na vizinhança U pertencem a mesma folha,

digamos $\mathcal{L}_{x_0}$, então suas respectivas coordenadas transversais coincidem em V , mais precisamente: $\pi(\psi_i(p)) = \pi(\psi_j(p))$ onde π denota projeção no espaço transversal V ;

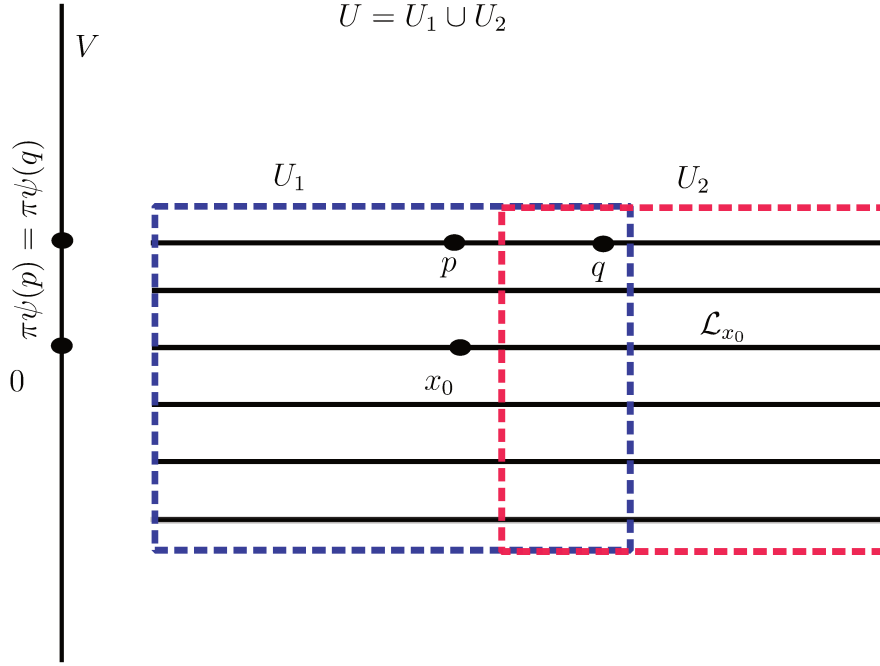


Figura 4.1: coordenadas folheadas.

Veja que para todo $y \in V$ fixado, a seguinte união finita $\cup^k \psi_i^{-1}(W_i \times \{y\})$ é a folha $\mathcal{L}_{\psi_i^{-1}(x,y)}$ para $x \in W_i$. Exemplos desse tipo de coordenadas aparecem de forma natural quando consideramos folheações compactas dadas pela a imagem inversa de submersões: os valores regulares da imagem fornecem um sistema local de coordenadas para o espaço vertical V .

O Item (3) acima permite simplificar a notação. Em certo sentido, podemos omitir o sistema de coordenadas quando estivermos lidando com as coordenadas verticais, ou seja, podemos escrever $\pi : M \rightarrow V$ para denotar $\pi \circ \psi_i$, independentemente do índice. Veja que aqui estamos considerando uma quantidade finita de coordenadas. No espaço Euclideano, escrevemos

$$\pi(\cdot) = (\pi_1(\cdot), \dots, \pi_d(\cdot)) \in V \subset \mathbf{R}^d.$$

Os resultados apresentados a seguir motivam a formulação da Hipótese H1. Essencialmente, temos que em média as trajetórias são diferenciáveis na coordenada vertical. Abaixo usamos a notação Ker para designar núcleo de uma aplicação. Veja como segue.

Lema 4.1.1. *Sejam $f \in C^\infty(M)$ e A o gerador infinitesimal associado ao semigrupo P_t^M . Então $f \in \text{Ker}(A)$ se, e somente se, $P_t^M f \in \text{Ker}(A)$. Em particular, se P_t^M é folheado as funções coordenadas π_j pertencem ao $\text{Ker}(A)$ para todo $j = 1, \dots, n$.*

Demonstração. Com efeito, pelo Item (2) da Proposição 1.3.6 segue que

$$AP_t^M f = P_t^M Af.$$

Daí, a equivalência é óbvia. Por outro lado, note que se uma f contínua em M for f constante nas folhas. Temos que $P_t^M f$ também é constante nas folhas, mais precisamente $P_t^M f = f$. De fato, suponha $f(x) = a$, para todo $x \in \mathcal{L}$. Então temos, por definição de folheado, que $P_t^M f(x) = P_t^{\mathcal{L}} f|_{\mathcal{L}}(x) = a$ para todo $x \in \mathcal{L}$. E isso implica que $Af = 0$. Em particular, as funções coordenadas π_j , com $j = 1, \dots, n$ são constantes nas folhas (por construção). Portanto estão no núcleo de A . □

No contexto desenvolvido ao longo desse trabalho, não temos a fórmula de Itô, assim a resultado abaixo ilustra o melhor que podemos conseguir com essa terminologia.

Proposição 4.1.2. *Seja $f \in C^\infty(M)$. Se $f \in \text{Ker}(A)$ então*

$$\mathbf{E} \left(f \circ \varphi_{0, \frac{t}{\epsilon}}^\epsilon(x) - f \circ \varphi_{0,0}^\epsilon(x) - \int_0^t df K(\varphi_{0, \frac{r}{\epsilon}}^\epsilon) dr \right) = 0, \quad (4.1)$$

onde $\varphi_{s,t}^\epsilon$ é o LJR-fluxo associado a família de semigrupos perturbada.

Demonstração. Seja $f \in C(M)$ tal que $f \in \text{Ker}(A)$. Aplicando o Item (3) da Proposição 1.3.6 concluímos que:

$$P_t^\epsilon f - f = \int_0^t P_r^\epsilon A^\epsilon f dr,$$

Onde A^ϵ é gerador infinitesimal associado ao semigrupo perturbado P_t^ϵ . Usando este fato

e a nossa definição de perturbado seque que

$$\begin{aligned}
P_t^\epsilon f - f &= \int_0^t P_r^\epsilon A^\epsilon f \, dr \\
&= \int_0^t P_r^\epsilon (A + \epsilon K) f \, dr \\
&= \epsilon \int_0^t P_r^\epsilon K f \, dr
\end{aligned}$$

Onde na última igualdade usamos que $Af = 0$. Fazendo uma mudança na escala de t para $\frac{t}{\epsilon}$ obtemos

$$P_{\frac{t}{\epsilon}}^\epsilon f - f = \int_0^t P_{\frac{r}{\epsilon}}^\epsilon K f \, dr.$$

Por fim, aplicamos o Teorema 2.3.2 e concluímos que

$$\mathbf{E} \left(f \circ \varphi_{0, \frac{t}{\epsilon}}^\epsilon(x) - f \circ \varphi_{0,0}^\epsilon(x) \right) = \int_0^t \mathbf{E} \left(K f(\varphi_{0, \frac{r}{\epsilon}}^\epsilon) \right) \, dr.$$

Como f é contínua e M é compacta, podemos usar o Teorema de Fubini-Tonelli para escrever a igualdade acima do seguinte modo:

$$\mathbf{E} \left(f \circ \varphi_{0, \frac{t}{\epsilon}}^\epsilon(x) - f \circ \varphi_{0,0}^\epsilon(x) \right) = \mathbf{E} \left(\int_0^t K f(\varphi_{0, \frac{r}{\epsilon}}^\epsilon) \, dr \right).$$

Ou equivalentemente,

$$\mathbf{E} \left(f \circ \varphi_{0, \frac{t}{\epsilon}}^\epsilon(x) - f \circ \varphi_{0,0}^\epsilon(x) - \int_0^t df K(\varphi_{0, \frac{r}{\epsilon}}^\epsilon) \, dr \right) = 0.$$

Como queríamos. □

Veja que o resultado acima se aplica, em particular, para as coordenadas das projeções π_j , $j = 1, \dots, d$, pois vimos no Lema 4.1.1 que essas coordenadas pertencem ao núcleo de A , desde que o semigrupo em questão seja folheado.

Hipótese sobre o semigrupo perturbado. Vamos considerar o seguinte comportamento para a dinâmica na transversal: denote por $\varphi_{s,t}$ e $\varphi_{s,t}^\epsilon$ os fluxos canônicos (LJR-fluxos) associados as famílias CPD-Feller de semigrupos $(P_t^{M^n})$ e $(P_t^{(n),\epsilon})$ respectivamente.

H1) *Regularidade vertical P-q.s. para o fluxo perturbado:* para todo $j = 1, \dots, d$,

$$\left. \frac{d}{dt} \pi_j(\varphi_{0,t}^\epsilon(x_0)) \right|_{t=0} = \epsilon d\pi_j(K)(x_0).$$

H2) *Limitação fraca na transversal para a perturbação:* denote por $y_t = \varphi_{0,t}(x_0)$ e $y_t^\epsilon = \varphi_{0,t}^\epsilon(x_0)$ as trajetórias dos fluxos associados ao sistema perturbado e não perturbado respectivamente, ambos começando no ponto x_0 . Suponha que exista um único espaço de probabilidade onde os fluxos $\varphi_{s,t}$ e $\varphi_{s,t}^\epsilon$ estão definidos e tais que, para um $p \in [1, \infty)$ e para qualquer que seja $g \in C(M)$, existe uma função positiva $h_1(\epsilon, t) \geq 0$, definida para $\epsilon, t \geq 0$ contínua, $h_1(0, t) = h(\epsilon, 0) = 0$ e além disso satisfaz

$$\left[\mathbf{E} \left(\sup_{0 \leq s < t} |g(y_t) - g(y_t^\epsilon)|^p \right) \right]^{\frac{1}{p}} \leq h_1(\epsilon, \sqrt{\epsilon}t). \quad (4.2)$$

Mostramos na Proposição 4.1.2 que a Hipótese H1 já é satisfeita em média, não apenas para as funções π_j mas para qualquer função que pertença ao núcleo do gerador infinitesimal de A . Além disso, esta hipótese é canonicamente satisfeita para semigrupos gerados por soluções de sistemas equações diferenciais estocásticas folheadas com uma ϵ perturbação e *drift* na direção K . Esse fato pode ser constatado verificando que o núcleo da derivada $d\pi_j$ inclui o espaço tangente às folhas, daí a diferenciabilidade segue pela fórmula de Itô, veja [22] e também [23, p.15].

Para a Hipótese H2 podemos supor sem perda de generalidade que existe uma função $h_1(\epsilon, t)$ crescente em t para um ϵ fixado; de fato, se alguma função h satisfaz (H2), então $h_1(\epsilon, t) = \sup_{0 \leq s \leq t} h(\epsilon, s)$ também satisfaz. Mais ainda, a Hipótese H2 é verdadeira se os semigrupos P_t^M e P_t^ϵ são gerados por uma perturbação de um sistema de equações diferenciais estocásticas folheados: para um sistema estocástico hamiltoniano completamente integrável, veja por exemplo [35]; para difusões em variedade folheadas, veja [23, Lema 2.1]; para difusões de Lévy em espaços folheados veja [22, Prop. 2.1] com $p \geq 2$. Uma outra classe de exemplos que pode ser considerada nesse contexto são campos vetoriais perturbados K quando os mesmos comutam com o gerador infinitesimal A de P_t^M . Veja que neste caso temos que $P_t^\epsilon = P_t^M \circ K_t$, onde K_t representa o fluxo de difeomorfismos locais associado ao campo vetorial K . Assim,

$$h_1(\epsilon, t) = \sqrt{\epsilon} t \sup_{x \in U} |K_x|$$

satisfaz a Inequação (4.2).

4.1.1 Função média sobre as folhas

Um fato conhecido na literatura é que um sistema com dinâmica contínua possui uma medida invariante ergódica sobre espaços compactos, veja por exemplo [28, 41, 42, 43]. Esse é um argumento em comum usado em [22, 23, 35]. Assim, é natural supor que, associado ao sistema em questão, existe uma medida invariante. Isto é, a folha $\mathcal{L}_p$ a qual passa pelo ponto $p \in M$ contém o suporte de uma medida invariante μ_p para o sistema não perturbado de semigrupos $(P_t^{M^n})$, já que as folhas são compactas. Considere que μ_p seja ergódica. Dada uma função diferenciável $g : M \rightarrow \mathbf{R}$, vamos trabalhar com a μ_p -média de g definida sobre cada folha por $\Theta^g : V \subset \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$, isto é, se v é a coordenada vertical do ponto p , com $\psi(p) = (u, v)$, então:

$$\Theta^g(v) = \int_{\mathcal{L}_p} g(x) d\mu_p(x).$$

Simplificando a notação, escrevemos $\pi(p) = v$ para a composição da projeção na segunda coordenada com a carta local $\psi(p) = (u, v)$. Agora, supomos a seguinte hipótese sobre a media Θ^g :

H3) *Regularidade de Θ^g* : para qualquer função Lipschitz contínua g sobre M , sua função média correspondente Θ^g sobre o espaço transversal V , o qual indexa a folha, é também Lipschitz.

Genericamente falando, a Hipótese H3 significa que a medida invariante μ_p para o sistema folheado não perturbado tem uma certa continuidade em p ; isto é, localmente não existe bifurcação da dinâmica folheada horizontal gerada por P_t^M com respeito a variação do parâmetro vertical, veja [23].

Para provar a Proposição 4.1.7, fundamental para a prova do principal resultado deste capítulo, o Teorema 4.1.8, introduzimos agora algumas notações juntamente com alguns cálculos elementares. Desse ponto em diante, usaremos as derivadas de cada componente de $\pi(\cdot) = (\pi_1(\cdot), \dots, \pi_d(\cdot)) \in V \subset \mathbf{R}^d$ afim de calcular suas respectivas médias $\Theta^{d\pi_j(K)}(x)$ em cada folha $\mathcal{L}_x$.

Pela Hipótese H1 as funções $d\pi_j(K)(y_t^\epsilon)$ e $\Theta^{d\pi_j(K)}\pi(y_t^\epsilon)$, para cada $j = 1, 2, \dots, d$, são integráveis em intervalos compactos. Assim podemos reescalonar o tempo e obter a integração no intervalo $[0, t/\epsilon]$ de tal maneira que escolhendo uma partição apropriada deste intervalo estimamos por comparação em cada subintervalo a média do fluxo do sistema original (sobre a folha correspondente) com a média do fluxo do sistema perturbado (sobre o espaço transversal às folhas) usando a Hipótese H2. Tecnicamente, dado ϵ suficientemente pequeno, considere a seguinte partição de $[0, t/\epsilon]$: $t_n = n\Delta t$, para $1 \leq n \leq N - 1$ tal que

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N < \frac{t}{\epsilon},$$

onde $N = N(\epsilon) = \lceil \epsilon^{-1/2} \rceil$. Além disso, todos os incrementos são iguais a Δt e

$$\Delta t = \frac{t}{\sqrt{\epsilon}}.$$

Aqui usamos $[x]$ para designar a parte inteira de x .

Para simplificar a notação, denotamos por $g(x)$ a função $d\pi_j(K)(x)$. Daí, pela integrabilidade da função $g(y_t^\epsilon)$ segue que:

$$\int_0^{\frac{t}{\epsilon}} g(y_r^\epsilon) dr = \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(y_r^\epsilon) dr + \epsilon \int_{t_N}^{\frac{t}{\epsilon}} g(y_r^\epsilon) dr. \quad (4.3)$$

Seja $\varphi_{s,t}$ o LJR-fluxo apresentado no capítulo anterior para o sistema folheado não perturbado associado a família de semigrupos $(P_t^{M^n})$. Em outras palavras, o fluxo tal que cada trajetória permanece na folha onde foi dada a condição inicial do sistema. Seja

$$\delta_j(\epsilon, t) = \int_0^t d\pi_j(K)(y_{\frac{t}{\epsilon}}^\epsilon) - \Theta^{d\pi_j(K)}\pi(y_{\frac{t}{\epsilon}}^\epsilon) dr.$$

A desigualdade triangular junto com o fato de que o LJR-fluxo $\varphi_{s,t}$ preserva as folhas e com a Expressão (4.3) implicam que:

$$|\delta_j(\epsilon, t)| \leq |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|, \quad (4.4)$$

onde

$$\begin{aligned}
A_1 &= \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} [g(y_r^\epsilon) - g(\varphi_{t_n, r}(y_{t_n}^\epsilon))] dr, \\
A_2 &= \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(\varphi_{t_n, \cdot}(y_{t_n}^\epsilon)) dr - \Delta t \Theta^g(\pi(y_{t_n}^\epsilon)) \right], \\
A_3 &= \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon \Delta t \Theta^g(\pi(y_{t_n}^\epsilon)) - \int_0^t \Theta^g(\pi(y_\epsilon^\epsilon)) dr, \\
A_4 &= \epsilon \int_{t_N}^{\frac{t}{\epsilon}} g(y_r^\epsilon) dr.
\end{aligned}$$

Para chegar ao resultado esperado, a Proposição 4.1.7, precisamos provar que cada um dos processos A_1, A_2, A_3 e A_4 definidos acima convergem a zero em intervalos compactos (em média) e fornecer em cada caso a velocidade da convergência (em média). Dessa maneira, a fim de deixar a demonstração da proposição mencionada acima mais clara, a dividimos em quatro partes: Lemas 4.1.3, 4.1.4, 4.1.5 e 4.1.6 e procedemos em cada lema como discriminado acima.

Lema 4.1.3. *O processo A_1 converge a zero em intervalos compactos quando ϵ tende a zero. Mais precisamente, temos a seguinte estimativa para a velocidade de convergência:*

$$\left(\mathbf{E} |A_1|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq t h_1(\epsilon, t),$$

onde a função $h_1(\epsilon, t)$ é dada pela Hipótese H2.

Demonstração. Note que aplicando a desigualdade de Minkowski para integrais no processo A_1 , temos:

$$(\mathbf{E} |A_1|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \left(\mathbf{E} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} |g(y_s^\epsilon) - g(\varphi_{t_n, s}(y_{t_n}^\epsilon))| dr \right]^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Além disso, se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então pela desigualdade de Hölder e por cálculos elementares,

segue que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E} |A_1|^p)^{\frac{1}{p}} &\leq \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \left(\mathbf{E} \left[\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} dr \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} |g(y_s^\epsilon) - g(\varphi_{t_n,s}(y_{t_n}^\epsilon))|^p dr \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \left(\mathbf{E} \left[(\Delta t)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} |g(y_s^\epsilon) - g(\varphi_{t_n,s}(y_{t_n}^\epsilon))|^p dr \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \epsilon (\Delta t)^{\frac{1}{q}} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\mathbf{E} \left[\Delta t \sup_{t_n \leq s \leq t_{n+1}} |g(y_s^\epsilon) - g(\varphi_{t_n,s}(y_{t_n}^\epsilon))|^p \right] \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \epsilon \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left(\mathbf{E} \left[\sup_{t_n \leq s \leq t_{n+1}} |g(y_s^\epsilon) - g(\varphi_{t_n,s}(y_{t_n}^\epsilon))|^p \right] \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

A Hipótese H2 combinada com o fato de que a lei do fluxo $\varphi_{s,t}$ depende apenas da diferença $(t-s)$ implicam que para cada $0 \leq n \leq N-1$ acima, a função g avaliada sobre as trajetórias do sistema perturbado em comparação com a mesma g avaliada sobre as trajetórias do sistema não perturbado satisfaz (ambas trajetórias começando em $y_{t_n}^\epsilon$):

$$\left[\mathbf{E} \left(\sup_{t_n \leq r \leq t_{n+1}} |g(y_s^\epsilon) - g(\varphi_{t_n,r}(y_{t_n}^\epsilon))|^p \right) \right]^{\frac{1}{p}} \leq h_1(\epsilon, \sqrt{\epsilon} \Delta t).$$

Como N é da ordem de $\epsilon^{-1/2}$, segue que

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{E} |A_1|^p \right]^{\frac{1}{p}} &\leq \epsilon \Delta t h_1(\epsilon, \sqrt{\epsilon} \Delta t) \\
&\leq \epsilon \Delta t N h_1(\epsilon, \sqrt{\epsilon} \Delta t) \\
&= h_1(\epsilon, t) t.
\end{aligned}$$

□

Para a demonstração do próximo lema, é necessário assumir uma condição adicional. Na verdade, a convergência do processo A_2 a zero **P**-q.s. é uma consequência do Teorema Ergódico de Birkhoff 1.4.2 como provamos a seguir. Porém, aqui queremos algo ainda mais forte: uma estimativa da taxa de convergência de A_2 no contexto que introduzimos no lema seguinte. É conhecida na literatura que, sob condições especiais, a Lei dos Grandes Números ou Teorema Ergódico possui certa taxa de convergência. Veja por exemplo

Kachurovskii [25] e também Sedalishchev [46] onde pode ser encontrada várias outras referências para tal assunto. Com tal objetivo, impomos a seguinte condição:

H4) *Taxa de convergência para A_2 :* vamos considerar que exista uma função contínua positiva $h_2(\epsilon, t) \geq 0$ definida em $\epsilon, t \geq 0$ e tal que $h_2(0, t) = h_2(\epsilon, 0) = 0$ e além disso satisfaz, com $s \leq t$

$$\left| \frac{1}{s} \int_0^s g(\varphi_{t_n, r}(y_{t_n}^\epsilon)) dr - \Theta^g(\pi(y_{t_n}^\epsilon)) \right| \leq h_2(\epsilon, \sqrt{\epsilon} s). \quad (4.5)$$

Por analogia a descrição feita para a Hipótese H2 podemos supor, sem perda de generalidade, que $h_2(\epsilon, t)$ é crescente em t para ϵ fixado. Por conveniência, antes de dar uma justificativa para a escolha de tal hipótese, passamos a ver a prova do Lema 4.1.4 como uma consequência da Hipótese H4:

Lema 4.1.4. *O processo A_2 na Equação (4.4) converge a zero com a seguinte velocidade de convergência:*

$$\left[\mathbf{E} \sup_{s \leq t} |A_2|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq t h_2(\epsilon, t).$$

Demonstração. Novamente, aplicando a desigualdade de Minkowski para integrais e realizando cálculos elementares, temos que

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{E} |A_2|^p \right]^{\frac{1}{p}} &\leq \epsilon \left[\mathbf{E} \left| \sum_{n=0}^{N-1} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(\varphi_{t_n, r}(y_{t_n}^\epsilon)) dr - \Delta t \Theta^g(\pi(y_{t_n}^\epsilon)) \right] \right|^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \left[\mathbf{E} \left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(\varphi_{t_n, r}(y_{t_n}^\epsilon)) dr - \Delta t \Theta^g(\pi(y_{t_n}^\epsilon)) \right|^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \epsilon \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left[\mathbf{E} \left| \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(\varphi_{t_n, r}(y_{t_n}^\epsilon)) dr - \Theta^g(\pi(y_{t_n}^\epsilon)) \right|^p \right]^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Por construção, para todo $n = 0, \dots, N-1$, os termos entre módulos converge um ao outro quando Δt tende a infinito (Teorema Ergódico ou Lei dos Grandes Números). Além disso, pela Hipótese H4, segue que a esperança do termo entre módulos converge segundo

a mesma taxa (Teorema da Convergência Dominada). E portanto, vale que:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{E} |A_2|^p \right]^{\frac{1}{p}} &\leq \epsilon \Delta t N h_2(\epsilon, \sqrt{\epsilon} \Delta t) \\ &= \epsilon \frac{t}{\sqrt{\epsilon}} \left[\epsilon^{-\frac{1}{2}} \right] h_2(\epsilon, t) \\ &\leq t h_2(\epsilon, t). \end{aligned}$$

□

Agora, voltamos a justificativa para a escolha da Hipótese H4. Note que é possível discretizar o processo definido pela Equação (4.5) da seguinte forma:

$$X_n = \left| \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(\varphi_{t_n, r}(y_{t_n}^\epsilon)) dr - \Theta^g(\pi(y_{t_n}^\epsilon)) \right|,$$

no entanto, não conseguimos aplicar o Teorema Central do Limite (TCL), já que os processos X_n não são identicamente distribuídos, pois $y_{t_n}^\epsilon = \varphi_{0, t_n}^\epsilon(y_0)$ depende do tamanho de t_n para cada n . Assim, apesar do LJR-fluxo se comportar bem (vide Definição 2.3.1) não podemos dizer muito nesse caso. Se fosse possível aplicar o TCL teríamos uma estimativa natural para taxa de convergência cuja ordem é proporcional a $1/\sqrt{N}$, veja também o Teorema de Berry-Esseen em Goldstein [20]. Por outro lado, usando o Teorema de Harris, veja por exemplo [21], temos a convergência em média com taxa exponencial. No entanto, no nosso contexto esse fato não é suficiente. Queremos algo ainda mais forte que é garantido pela hipótese H4: a convergência da norma para zero com essa taxa $h_2(\epsilon, t)$. Veja que, em geral, uma sequência de funções limitadas, convergindo para zero pontualmente, pode ter convergência em média para zero muito rapidamente, sem que esperança do módulo das mesmas convirjam para zero segundo a mesma taxa. Daí a relevância de H4 nesse contexto. Em Xue-Mei Li [35, p.815-815] a autora diz que, para o caso de um sistema hamiltoniano completamente integrável, a taxa de convergência é da ordem de $1/\sqrt{t}$, seguindo em linhas gerais a mesma notação acima. Um outro comentário relevante: mesmo que tal hipótese não seja assumida, ainda podemos fornecer um princípio de médias, porém sem dizer qual é a taxa de convergência, veja o Teorema 4.1.8.

Lema 4.1.5. *O processo A_3 converge a zero quando t ou ϵ tendem a zero. Além disso,*

temos a seguinte velocidade de convergência:

$$\left(\mathbf{E} |A_3|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_3 \sqrt{\epsilon} t^2,$$

para alguma constante positiva C_3 .

Demonstração. Por definição segue que

$$|A_3| = \left| \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon \Delta t \Theta^g(\pi(y_{t_n}^\epsilon)) - \int_0^t \Theta^g(\pi(y_{\frac{s}{\epsilon}}^\epsilon)) ds \right|.$$

Pela a continuidade de $\pi(y_r^\epsilon)$ (veja a Hipótese H1), a convergência a zero neste caso corresponde a existência da integral de Riemann. Assim, considere a partição $s_n = \epsilon t_n$ de $[0, t]$, cuja norma é $\epsilon \Delta t$ e portanto converge a zero quando ϵ tende a zero. Então o primeiro membro de A_3 corresponde a soma de Riemann para a integral no segundo membro de A_3 .

Passamos agora a calcular a taxa de convergência para zero: seja C a constante de Lipschitz para Θ^g . Então:

$$\begin{aligned} |A_3| &\leq \epsilon \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sup_{\epsilon t_n < s \leq \epsilon t_{n+1}} |\Theta^g(\pi(y_{t_n}^\epsilon)) - \Theta^g(\pi(y_{\frac{s}{\epsilon}}^\epsilon))| \\ &\leq \epsilon(\Delta t) C \sum_{n=0}^{N-1} \sup_{\epsilon t_n < s \leq \epsilon t_{n+1}} |\pi(y_{\frac{\epsilon t_n}{\epsilon}}^\epsilon) - \pi(y_{\frac{s}{\epsilon}}^\epsilon)|. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Pela Hipótese H1 temos a seguinte desigualdade a qual independe de ϵ :

$$|\pi(y_{\frac{u}{\epsilon}}^\epsilon) - \pi(y_{\frac{v}{\epsilon}}^\epsilon)| \leq \sup_{x \in U} K(x) |u - v|,$$

quaisquer que sejam $u, v \geq 0$. Combinando isso com a Inequação (4.6) resulta que

$$\begin{aligned} |A_3| &\leq C_3 (\epsilon \Delta t)^2 N \\ &= C_3 \left(\epsilon \frac{t}{\sqrt{\epsilon}} \right)^2 \epsilon^{-\frac{1}{2}} \\ &= C_3 \sqrt{\epsilon} t^2, \end{aligned}$$

para uma constante positiva C_3 .

□

Lema 4.1.6. *O processo A_4 converge a zero com*

$$\left(\mathbf{E} |A_4|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_4 t \sqrt{\epsilon}.$$

Demonstração. Seja

$$C_4 = \sup_{x \in U} |g(x)|.$$

Como g é contínua sobre M compacta, então C_4 está bem definido. Portanto o resultado segue do fato seguinte:

$$\begin{aligned} |A_4| &= \epsilon \left| \int_{t_N}^{\frac{t}{\epsilon}} g(y_r^\epsilon) dr \right| \\ &\leq C_4 \epsilon \Delta t = C_4 t \sqrt{\epsilon}. \end{aligned}$$

□

O lemas anteriores nos permite comparar, sob certas condições, uma certa função g com a sua respectiva média Θ^g . O resultado a seguir deixa o comentário acima mais preciso.

Proposição 4.1.7. *Para todo $j = 1, 2, \dots, d$; $t \geq 0$ e $\epsilon > 0$ seja*

$$\delta_j(\epsilon, t) = \int_0^t d\pi_j(K)(y_{\frac{t}{\epsilon}}^\epsilon) - \Theta^{d\pi_j(K)} \pi(y_{\frac{t}{\epsilon}}^\epsilon) dr.$$

Temos as seguinte estimativas para a média

$$\left(\mathbf{E} |\delta_j(\epsilon, t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sqrt{t} H(\epsilon, t)$$

onde $H(\epsilon, t)$ é contínua em $\epsilon, t \geq 0$ e $H(0, 0) = 0$.

Demonstração. Veja que a Proposição 4.1.7 acima é uma consequência imediata dos Lemas 4.1.3–4.1.6 aplicados a Inequação (4.4). Mais ainda, veja que em todas as estimativas dos lemas temos uma fator $\sqrt{t}$ em comum o que permite determinar $H(\epsilon, t)$ explicitamente

da seguinte maneira: escolha

$$H(\epsilon, t) = \min \left\{ h_1(\epsilon, t)\sqrt{t}, h_2(\epsilon, t)\sqrt{t}, C_3\sqrt{\epsilon t^{\frac{3}{2}}}, C_4\sqrt{\epsilon t} \right\},$$

onde as constantes positivas C_3 e C_4 são dadas pelos lemas anteriores. Além disso, note que $H(\epsilon, t)$ é contínua e converge a zero quando ϵ ou t convergem a zero (veja as Hipóteses H2 e H4).

□

Observação. A Hipótese H2 pode ser trocada para uma classe maior de funções h_1 na Inequação (4.2). De fato, seja $f : \mathbf{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ uma função contínua com $f(0) = 0$,

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} f(\epsilon)^{-1} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon f(\epsilon)^{-1} = 0.$$

Assim a inequação (4.2) da Hipótese H2 pode ser trocada por $h_1(\epsilon, f(\epsilon)t)$. Nesse caso, na prova da Proposição 4.1.7 consideraríamos a partição com incrementos de norma $\Delta t = \frac{t}{f(\epsilon)}$, $N = \lfloor f(\epsilon)^{-1} \rfloor$ e os resultados seguiriam pelos mesmos argumentos usados anteriormente. Como exemplo, para sistemas estocásticos hamiltonianos, usando o sistema de coordenadas de Liouville sobre o toro podemos escolher $f(\epsilon) = \sqrt{\epsilon}$, veja [35]. Para equações estocásticas mais gerais em espaços folheados a função $f(\epsilon) = |\ln \epsilon|^{-\frac{1}{2p}}$ satisfaz a nova Hipótese H2, veja [23]. Portanto a Proposição 4.1.7 também é verdadeira nesses casos. Uma análise similar pode ser feita em relação as funções h_2 da Hipótese H4.

4.1.2 Um princípio de médias

Teorema 4.1.8. *Suponha que o semigrupo folheado não perturbado sobre M satisfaça as Hipóteses H1, H2, H3 e H4 acima. Seja $v(t)$ a solução de uma EDO determinística sobre a componente transversal $V \subset \mathbf{R}^n$*

$$\frac{dv}{dt} = (\Theta^{d\pi_1(K)}, \dots, \Theta^{d\pi_d(K)})(v(t)) \quad (4.7)$$

com condição inicial $v(0) = \pi(x_0) = 0$. Seja T_0 o tempo no qual $v(t)$ atinge a fronteira de V . Então, para todo $0 < t < T_0$, temos que

$$\left[\mathbf{E} \left(\left| \pi \left(y_{\frac{t}{\epsilon}}^\epsilon \right) - v(t) \right|^p \right) \right]^{\frac{1}{p}} \leq G(\epsilon, t),$$

onde $G(\epsilon, t) \geq 0$ é uma função contínua em $\epsilon, t \geq 0$. Além disso, fixado $\epsilon > 0$, $G(\epsilon, \cdot)$ é crescente em t e $G(\epsilon, 0) = G(0, t) = 0$.

Demonstração. Parte substancial da demonstração desse resultado encontra-se nas provas dos Lemas 4.1.3–4.1.6 que implicam a Proposição 4.1.7, resultado fundamental na prova do teorema em questão. Assim, desse ponto em diante basta notar que para cada $j = 1, 2, \dots, d$, pela Hipótese H1 temos

$$\pi_j(y_{\frac{t}{\epsilon}}^{\epsilon}) = \epsilon \int_0^t d\pi_j(K)(y_{\frac{s}{\epsilon}}^{\epsilon}) ds.$$

Reescalando o tempo e usando a Equação (4.7), vale que

$$|\pi_j(y_{\frac{t}{\epsilon}}^{\epsilon}) - v_j(t)| = \left| \int_0^t \left[d\pi_j(K)(y_{\frac{s}{\epsilon}}^{\epsilon}) - \Theta^{d\pi_j(K)}(v(s)) \right] ds \right|.$$

Agora aplicamos a Proposição 4.1.7 à igualdade acima e concluimos que

$$\begin{aligned} \left| \pi_i \left(y_{\frac{t}{\epsilon}}^{\epsilon} \right) - v_i(t) \right| &\leq \int_0^t \left| \Theta^{d\pi_i(K)}(\pi^{\epsilon}(s)) - \Theta^{d\pi_i(K)}(v(s)) \right| ds + |\delta_i(\epsilon, t)| \\ &\leq \alpha_j \int_0^t \left| \pi \left(y_{\frac{s}{\epsilon}}^{\epsilon} \right) - v(s) \right| ds + |\delta_i(\epsilon, t)|, \end{aligned}$$

onde cada α_j é a constante de Lipschitz para a função $\Theta^{d\pi_j(K)}$ correspondente. Somando em j e aplicando o Lema de Gronwall concluimos que, para alguma constante β :

$$\left| \pi_i \left(y_{\frac{t}{\epsilon}}^{\epsilon} \right) - v_i(t) \right| \leq e^{\beta t} \sum_{i=1}^n |\delta_i(\epsilon, t)|.$$

Assim, o resultado segue pela Proposição 4.1.7. Além disso, podemos definir $G(\epsilon, t)$ explicitamente escolhendo

$$G(\epsilon, t) = \sqrt{t} e^{\beta t} H(\epsilon, t).$$

Como queríamos. □

4.2 Exemplo:

Apresentamos aqui um simples exemplo para ilustrar quando o princípio de médias para um semigrupo perturbado vale. Considere $M = \mathbf{R}^3 - \{(0, 0, z) : z \in \mathbf{R}\}$ munida de uma folheação circular horizontal unidimensional, onde cada folha passando por um ponto $p = (x, y, z)$ de M é dada pelo círculo na altura z do ponto correspondente:

$$\mathcal{L}_p = \left\{ (\sqrt{x^2 + y^2} \cos \theta, \sqrt{x^2 + y^2} \sin \theta, z) : \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Para um ponto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$, digamos com $x_0 \geq 0$ considere o sistema de coordenadas locais numa vizinhança de $U = \mathbf{R}^3 - \{(x, 0, z) : x \leq 0; z \in \mathbf{R}\}$ dadas em coordenadas cilíndricas. Portanto, definimos $\psi = (u, v)$ por $\psi : U \subset M \rightarrow (-\pi, \pi) \times \mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{R}$, com $u \in (-\pi, \pi)$ sendo a coordenada angular e $v = (r, z) \in \mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{R}$ tal que $\psi^{-1} : (u, v) \mapsto (r \cos u, r \sin u, z) \in M$. Nesse sistema de coordenadas, as projeções transversais π_1 e π_2 corresponde a coordenada radial r e a coordenada altura z , respectivamente.

Agora considere o semigrupo P_t agindo em $C_0^\infty(M)$ definido como se segue; onde escrevemos um ponto $\varphi(x) = (\theta, r, z)$ e cada $f \in C_0^\infty(M)$ é dada com respeito as coordenadas cilíndricas:

$$P_t f(x) = \frac{f(\theta + t, r, z)(1 + e^{-2t}) + f(\theta + \pi + t, r, z)(1 - e^{-2t})}{2}.$$

A soma nos ângulos são tomadas módulo 2π . Vamos agora verificar que P_t é de fato um semigrupo: dado $f \in C_0^\infty(M)$ temos

- a) $P_0 f(x) = \frac{f(\theta, r, z)(1 + e^0) + f(\theta + \pi, r, z)(1 - e^0)}{2} = f(\theta, r, z);$
- b) $P_t P_s = P_{s+t}$. De fato, sejam $2T_1 = (1 + e^{-2s})P_t f(\theta + s, r, z)$ e $2T_2 = (1 - e^{-2s})P_t f(\theta + s + \pi, r, z)$. Portanto $P_t P_s f(x) = T_1 + T_2$, além disso

$$2T_1 = (1 + e^{-2s})[f(\theta + (s + t), r, z)(1 + e^{-2t}) + f(\theta + (s + t) + \pi, r, z)(1 - e^{-2t})],$$

$$2T_2 = (1 - e^{-2s})[f(\theta + (s + t) + \pi, r, z)(1 + e^{-2t}) + f(\theta + (s + t), r, z)(1 - e^{-2t})].$$

Por fim, concluímos que $P_t P_s f(x) = T_1 + T_2 = P_{s+t} f(x)$. Analogamente, mostramos que $P_s P_t f(x) = P_{s+t} f(x)$. Assim P_t tem a propriedade de semigrupo.

Esse semigrupo corresponde a um fluxo de Lévy em cada folha circular S^1 da folheação o qual possui simultaneamente dois comportamentos comutativos: rotação pura e saltos

tipo Poisson para o ponto antípoda. Com manipulações elementares, calculamos o seu respectivo gerador infinitesimal em coordenadas cilíndricas: $Af(\theta, r, z) = \frac{\partial f}{\partial \theta} + f(\theta + \pi, r, z) - f(\theta, r, z)$. Veja, Applebaum [1] ou Liao [36]. Note que da forma como P_t foi definido, ele é naturalmente um semigrupo folheado sobre M . Além disso, a única medida de probabilidade invariante é a medida de Lebesgue normalizada em cada círculo, portanto a Hipótese H3 é satisfeita.

4.2.1 Adicionando uma perturbação de primeira ordem

Aqui, investigamos o efeito de uma pequena perturbação no semigrupo na direção vertical, de tal maneira que seu respectivo gerador infinitesimal fique perturbado por um campo vetorial de primeira ordem ϵK . As funções $\Theta^{d\pi_1(K)}$ e $\Theta^{d\pi_2(K)}$ são simplesmente as integrais ao longo das componentes radial e vertical de K respectivamente. Na média, o comportamento horizontal de P_t^ϵ é aproximado por $v(t)$ onde $v(t)$ é a solução da EDO $v'(t) = (\Theta^{d\pi_1(K)}(v_t), \Theta^{d\pi_2(K)}(v_t))$ começando em zero. Mais precisamente,

$$P_t^\epsilon |\pi_i(\cdot) - v_i(t)| \leq G(\epsilon, t).$$

Exemplos triviais aparecem quando consideramos um campo vetorial K o qual comuta com o gerador infinitesimal A . Suponha que em coordenadas cilíndricas seja dado por:

$$K(\theta, r, z) = (0, \lambda_0, k_3(z)),$$

onde $k_3 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ é uma função suave com derivadas limitadas. O semigrupo perturbado, neste caso, é dado por

$$P_t^\epsilon f(x) = \frac{f(\eta_t)(1 + e^{-2t}) + f(\bar{\eta}_t)(1 - e^{-2t})}{2}.$$

onde

$$\begin{aligned} \eta(t) &= (\theta + t, r + \epsilon \lambda_0 t, \xi^\epsilon(z, t)), \\ \bar{\eta}_t &= (\theta + \pi + t, r + \epsilon \lambda_0 t, \xi^\epsilon(z, t)), \end{aligned}$$

e $\xi^\epsilon(z, t)$ é a solução real da EDO a seguir

$$\xi^\epsilon(z, t) = z + \int_0^t k_3(\xi^\epsilon(z, s)) ds.$$

Veja que o campo vetorial K comuta com gerador infinitesimal A , portanto as Hipóteses H1 e H2 são satisfeitas.

Neste caso a componente radial $d\pi_1(K) = \lambda_0$ e a componente vertical $d\pi_2(K)(\theta, r, z) = k_3(z)$, portanto suas respectivas médias com respeito a medida de Lebesgue sobre as folhas são $\Theta^{d\pi_1(K)} \equiv \lambda_0$ e $\Theta^{d\pi_2(K)} = k_3(\pi_2(x))$. Consequentemente, as componentes de $v(t)$ do Teorema principal 4.1.8 deste capítulo são dadas por $v(t) = (r_0 + \epsilon t \lambda_0, \xi^\epsilon(z, t))$ para todo $t \geq 0$, se $\lambda_0 \geq 0$, e $0 \leq t < \frac{r_0}{\epsilon |\lambda_0|}$ se $\lambda_0 < 0$. Daí checamos facilmente que

$$P_{\frac{t}{\epsilon}}^\epsilon |\pi_i(\cdot) - v_i(t)| = 0 \leq G(\epsilon, t).$$

◇

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] D. Applebaum – *Lévy processes and stochastic calculus*. Cambridge University Press (2004).
- [2] R. A. Arratia – *Brownian motion on the line*. Ph.D dissertation, Univ. Wisconsin, Madison, (1979).
- [3] L. Arnold – *Random dynamical systems*. Springer-Verlag (1998).
- [4] P. Baxendale – Brownian motions in the diffeomorphism group I. *Compositio Mathematica* 53 (1984), no. 1, 19 - 50.
- [5] P. Baxendale – T. E. Harris's contributions to recurrent Markov processes and stochastic flows. *Ann. Probab.* 39 (2011), no. 2, 417 - 428.
- [6] L. Bellet – Ergodic properties of Markov process. Open Quantum Sysmtems II. *Lect. Notes in Math.* 1881 (2006), 1 - 39.
- [7] J. Bertoin and J. F. Le Gall – Stochastic flows associated to coalescent processes. *Probab. Theory Related Fields* 126 (2003), 261 - 288.
- [8] C. Camacho and A. L. Neto – *Geometric theory of foliations*. Birkhäuser Boston (1985).
- [9] A. Candel – The harmonic measures of Lucy Garnett. *Adv. Math.* 176 (2003), no. 2, 187 - 247.

- [10] A. Candel and L. Conlon – *Foliations I and II*. Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society (1999).
- [11] P. Catuogno, D. Ledesma and P. Ruffino – Harmonic measures in embedded foliated manifolds. Submitted. (2012) ArXiv 1208.0629.
- [12] J. Chen and K. N. Xiang – Natural flow not in Le Jan-Raimond framework. *Stochastics and Dynamics*, 12 (2012), no. 2, 1150014.
- [13] P. H. P. da Costa and P. R. Ruffino – Degenerate semigroups and stochastic flows of mappings in foliated manifolds. Submitted (2013). ArXiv 1306.0123.
- [14] K. D. Elworthy – Geometric aspects of diffusions on manifolds. École d'Été de Probabilités de Saint-Flour, XV –XVII, 1985 - 87. *Lecture Notes Math.* 1362 (1987), 276 - 425.
- [15] K. D. Elworthy – *Stochastic differential equations on manifolds*. Lectures of London Math. Soc. (1982).
- [16] M. Emery – *Stochastic calculus in manifolds*. Springer-Verlag (1989).
- [17] G. B. Folland – *Real Analysis: Modern techniques and their applications*. John Wiley and Sons, INC (1999).
- [18] L. R. G. Fontes, M. Isopi, C. M. Newman and K. Ravishankar – The Brownian web: characterization and convergence. *The Annals of Probability*. (2004) 32, No. 4, 2857 - 2883.
- [19] L. Garnett – Foliation, the ergodic theorem and Brownian motion. *Journal of Functional Analysis* 51 (1983), 285 - 311.
- [20] L. Goldstein – Bounds on the constant in the mean central limit theorem. *The Annals of Probability* 38 (2010), no. 4, 1672 - 1689.
- [21] M. Hairer – *Convergence of Markov processes*. A Minicourse in Mathematics Department, University of Warwick (2010).
- [22] M. Högele and P. R. Ruffino – Averaging along Lévy diffusions in foliated spaces. Preprint, Mathematics Department, Potsdam University 2 (2013) 10. Submitted.

- [23] I. I. G. Gargate, P. R. C. Ruffino – An averaging principle for diffusions in foliated spaces. Submitted (2012) ArXiv 1212.1587.
- [24] N. Ikeda and S. Watanabe – *Stochastic differential equations and diffusion processes*. Kodansha Ltd., Tokyo (1989).
- [25] A. G. Kachurovskii – The rate of convergence in ergodic theorems. *Russian Math. Surveys* 51 (1996), no.4, 653 - 703.
- [26] V. A. Kaimanovich – Brownian motion on foliations: Entropy, invariant measures, mixing. *Functional Analysis and Its Applications* 22 (1988), no. 4, 326 - 328.
- [27] A. A. Kosinski – *Differential manifolds*. Academic Press, INC. (1993).
- [28] U. Krengel – *Ergodic theorems*. Walter de Gruyter, Berlin-New York (1985).
- [29] Y. Kabanov and S. Pergamenschikov – *Two-Scale Stochastic Systems: asymptotic analysis and control*. Springer (2003).
- [30] E. P. Hsul – *Stochastic analysis on manifold*. Graduate studies in mathematics 38. American Mathematical Society (2002).
- [31] O. Kallenberg – *Foundations of modern probability*. Springer-Verlag (2003).
- [32] H. Kunita – Stochastic differential equations and stochastic flows of diffeomorphisms. École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XII-1982, 143 - 303. *Lecture Notes in Math.* 1097 (1984).
- [33] H. Kunita – *Stochastic flows and stochastic differential equations*. Cambridge University Press (1988).
- [34] Y. LeJan and O. Raymond – Flows, coalescence and noise. *The Annals of Probability* 32 (2004), 1247 - 1315.
- [35] Xue-Mei Li – An averaging principle for a completely integrable stochastic Hamiltonian systems. *Nonlinearity* 21 (2008), 803 - 822.
- [36] M. Liao – *Lévy processes in Lie groups*. Cambridge University Press (2004).
- [37] C. Morales, B. Scárdua – *Geometry, dynamics and topology of foliated spaces*. Publicações IMPA (2003).

- [38] I. Moerdijk and J. Mrčun – *Introduction to foliation and Lie groupoids*. Cambridge University Press (2003).
- [39] B. Oksandal – *Stochastic differential equations: An introduction with applications*. Springer-Verlag (2003).
- [40] W. M. Oliva – *Geometric mechanics*. Springer (2000).
- [41] G. Da Prato – *An introduction to infinite-dimensional analysis*. Springer-Verlag (2006).
- [42] G. Da Prato – *Ergodicity for infinite dimensional systems*. Cambridge University press (1996).
- [43] K. Petersen – *Ergodic theory*. Cambridge University Press (1983).
- [44] J. F. Plante – Foliations with measure preserving holonomy. *Annals of Mathematics* 102 (1975), 327 - 361.
- [45] D. Revuz and M. Yor – *Continuous martingales and Brownian motion*. Springer-Verlag (1999).
- [46] V. V. Sedalishchev – Constants in the estimates of the convergence rate in the Birkhoff Ergodic Theorem with continuous time. *Siberian Mathematical Journal* 53 (2012), no. 5, 882 - 888.
- [47] N. E. Steenrod – Cohomology operations, and obstructions to extending continuous function. *Advances in Mathematics* 8 (1972), 371 - 416.
- [48] P. Tondeur – *Foliations on Riemannian manifolds*. Universitext, Springer-Verlag (1988).
- [49] B. Tsirelson – Nonclassical stochastic flows and continuous products. *Probab. Surv.* 1 (2004), 173 - 298.
- [50] D. Ruelle, D. Sullivan – Currents, flows and diffeomorphisms. *Topology* 14 (1975), no. 4, 319 - 327.
- [51] P. Walczak – *Dynamics of foliations, groups and pseudogroups*. Birkhäuser Verlag (2004).

C

càdlàg, [13](#)
 campo vetorial, [7](#)
 Chapman-Kolmogorov, [11](#)
 coalescência, [28](#)

D

densidade gaussiana, [17](#), [24](#)
 distribuição, [7](#)

E

ergódico, [20](#)

F

Família compatível, [24](#)
 Feller nas folhas, [44](#)
 fluxo
 folheado, [38](#)
 irracional, [9](#)
 fluxo coalescente, [54](#)
 Fluxo irracional, [48](#)
 folhas, [7](#)
 folheação, [7](#)
 folheação de Reeb, [10](#)
 LJR-fluxo, [26](#), [28](#), [38](#), [47](#)

G

Gerador infinitesimal, [14](#)
 gerador infinitesimal, [59](#)

M

medida
 invariante, [19](#)
 ergodica, [62](#)
 invariante, [62](#)
 regular, [25](#)

P

Processos
 càdlàg, [24](#)
 preserva diagonal, [24](#)
 Probabilidade de transição, [11](#)
 Processo
 Feller, [13](#)
 Processos
 de Lévy, [15](#)
 produto de convolução, [26](#)

S

Semigrupo, [10](#)
 Semigrupo
 de convolução Feller, [26](#)

- Feller, [13](#)
- Propriedade, [12](#)
 - coalescente, [29](#)
 - de convolução, [26](#)
- Markoviano, [12](#)
- perturbado, [57](#)
- semigrupos
 - degenerados, [33](#)
 - folheados, [33](#)
- subvariedade invariante, [38](#)

T

- taxas de convergencias, [64](#), [67](#), [69](#), [70](#)
- Teorema
 - Ergódico, [20](#)
 - Ergodico, [66](#)
 - Fluxo folheado, [42](#)
 - Krylov-Bogoliubov, [20](#)
 - Prokhorov, [20](#)
 - Subvariedade invariante, [42](#)
- tight, [20](#)

V

- variedade, [7](#)
- variedade folheada, [8](#)
- variedade integral, [8](#)