Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Teoria de Morse para o problema das geodésicas fechadas em variedades de Finsler

Fausto Marçal de Souza

Tese apresentada para a obtenção do título de Doutor em Matemática

IMECC-UNICAMP
1997

Teoria de Morse para o problema das geodésicas fechadas em variedades de Finsler

Fausto Marçal de Souza

Francesco Mercuri

Prof. Dr. Francesco Mercuri (IMECC-UNICAMP)
Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de DOUTOR em MATEMÁTICA.
Área de Concentração: Geometria e Toplologia

Campinas
IMECC-UNICAMP
1997

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 11 de dezembro de 1997

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). FRANCESCO MERCURI

Prof (a). Dr (a). RENATO HYUDA DE LUNA PEDROSA

Prof (a). Dr (a). ANTONIO CARLOS ASPERTI

Prof (a). Dr (a). LUCAS MONTEIRO CHAVES

Prof (a). Dr (a). YURIKO YAMAMOTO BALDIN

Dedicado

À minha mãe ANA ROSA e às minhas irmãs OLINDA e MARINA

Agradecimentos

Agradeço sinceramente ao Professor Dr. Francesco Mercuri, que sugeriu êste trabalho, pela sua orientação, pelos estímulos, e pelas várias sugestões.

Sou também grato aos colegas do Instituto de Matemática e Estatística da UFG, pelo encorajamento e apoio constante, para realização deste trabalho.

À Universidade Federal de Goiás, à CAPES-PICD, os meus agradecimentos pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho desenvolvemos a Teoria de Morse para funções de baixa diferenciabilidade (de classe C^1), com segunda derivada nos pontos críticos isolados e, possivelmente degenerados.

Aplicamos os resultados obtidos ao problema de geodésicas fechadas de uma métrica de Finsler, os quais permitem usar os argumentos originais do Teorema de Gromoll-Meyer para demonstrar a existência de infinitas geodésicas fechadas não constantes, geometricamente distintas, em variedades Finslerianas compactas, cuja cohomologia (real) não seja uma álgebra gerada por um só elemento.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Um famoso teorema de Gromoll-Meyer garante a existência de infinitas geodésicas fechadas, geometricamente distintas e não constantes, em uma variedade Riemanniana compacta cuja cohomologia (real) não seja uma álgebra em um gerador (isto é, a cohomologia não seja isomorfa à cohomologia de uma esfera ou um espaço projetivo complexo, quaterniônico ou de Cayley). A existência ou não, de infinitas geodésicas fechadas sôbre uma variedade Riemanniana com a cohomologia gerada por um só elemento, é ainda um problema em aberto.

Em 1973 Katock construiu exemplos de métricas Finslerianas sôbre a esfera S^2, arbitrariamente próximas da métrica Riemanniana canônica, que admitem somente duas geodésicas fechadas. Posteriormente Ziller construiu exemplos de métricas Finslerianas nos espaços projetivos complexos, quaterniônico e de Cayley com um número finito de geodésicas fechadas.

É portanto uma questão bastante interessante entender se o teorema de Gromoll-Meyer vale para métricas Finslerianas. De fato isto é o caso, e a primeira demonstração é devida a Mathias. A demonstração de Mathias é baseada sôbre uma teoria de "aproximação de dimensão finita" da teoria de Morse para o problema das geodésicas fechadas, teoria inspirada no tratamento de Milnor do problema das geodésicas ligando dois pontos. Esse tipo de argumento, extremamente elegante e eficaz nos casos acima, usa de maneira essencial a geometria da métrica e nos parece não ser adequado ao estudo de outros problemas variacionais 1-dimensionais mais gerais. A finalidade deste trabalho é estender alguns resultados da teoria dos pontos críticos que permitem usar os argumentos originais de Gromoll-Meyer para demonstrar a existência de infinitas geodésicas fechadas em variedades Finslerianas compactas cuja cohomologia não é gerada por um só elemento. Uma das dificuldades principais é devida ao fato que a energia Finsleriana não é um funcional de classe C^2 (na variedade das curvas fechadas de classe H^1).

Isto é uma peculiaridade das métricas Finslerianas pois a energia é C^2 se, e somente se, a métrica for Riemanniana.

Porém, a energia Finsleriana é duas vezes diferenciável nos pontos críticos e para este tipo de função demonstraremos um "Lema de Morse" em um contexto bastante geral, que além de permitir adaptar os argumentos de Gromoll-Meyer ao nosso caso, terá provavelmente utilidade no tratamento de problemas variacionais mais gerais. O trabalho é organizado da seguinte forma:

— No 1º Capítulo recordaremos os fatos básicos da teoria dos pontos críticos, tendo em vista o problema das geodésicas periódicas dando uma idéia da demonstração do Teorema de Gromoll-Meyer e pondo em evidência os resultados a serem demonstrados para utilizá-los no caso Finsleriano.

— No 2º Capítulo demonstraremos o Lema de Morse generalizado para funções não necessariamente C^2.

— No 3º Capítulo provaremos alguns resultados sobre diferenciabilidade da energia Finsleriana, mostrando que verifica as hipóteses do Lema de Morse demonstrado no Capítulo anterior.

— No 4º Capítulo demonstraremos um teorema do índice para geodésicas fechadas em variedades de Finsler que permite concluir, juntamente com os resultados anteriores, a existência de infinitas geodésicas fechadas não triviais em variedades de Finsler compactas, cuja cohomologia não é gerada por um único elemento.

Fausto Marçal de Souza

CAPITULO I:

Teoria dos pontos críticos
e o problema das geodésicas fechadas

Por teoria dos pontos críticos entende-se um conjunto de resultados que relacionam a topologia de uma variedade diferenciável M com a "estrutura" do conjunto dos pontos críticos de uma função diferenciável $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

A idèia geral atras destes resultados é estudar como varia a topologia do espaço $M^a = \{x \in M : f(x) \leq a\}$ ao variar $a \in \mathbb{R}$.

Obviamente o tipo de informação depende das várias hipóteses feitas sôbre f e/ou M. Antes de discutir os principais resultados vamos fixar algumas hipóteses sôbre f e M que assumiremos constantemente ao longo deste trabalho. Essas são hipóteses essencialmente comuns a todos os resultados deste tipo.

H_1 - M será sempre variedade Riemanniana completa modelada sôbre um espaço de *Hilbert* e de Classe C^k, $k \geq 2$.

H_2 - A função f será sempre de classe pelo menos C^1, limitada inferiormente.

Assumiremos, por simplicidade, que o gradiente de f, ∇f, seja localmente *Lipschitziano*.

H_3 - A função f verifica a seguinte condição de "Compacidade":

(C) Seja $S \subset M$ tal que f é limitada sôbre S e $inf\{\|(\nabla f)(x)\| : x \in S\} = 0$. Então existe $\overline{x} \in \overline{S}$ tal que $(\nabla f)(\overline{x}) = 0$.

Observação: A condição de Compacidade (C) compensa, no caso de variedade de dimensão infinita, a falta de compacidade.

Voltando às idéias básicas da teoria, o primeiro resultado que se demonstra é o seguinte:

1.1. Teorema: *(Lema de deformaçao)*:

Se $\{x \in M : a \leq f(x) \leq b\}$ não contem pontos críticos de f, então M^a e M^b são homeomorfos e M^a é um retrato por deformação forte de M^b.

As mesmas idéias usadas na demonstração do lema de deformação, isto é deformar M^b sôbre M^a ao longo das linhas integrais do campo $-\nabla f$, permitem demonstrar a seguinte generalização.

1.2. Teorema:

Seja $c \in \mathbb{R}$ um valor crítico isolado, $K_c=\{x \in M: f(x)=c, (\nabla f)(x) = 0\}$ e $\mathcal{U}$ uma vizinhança de K_c.

Existe então um $\varepsilon > 0$ e uma deformação forte de $M^{c+\varepsilon}-\mathcal{U}$ sôbre $M^{c-\varepsilon}$.

O Teorema 2 leva naturalmente ao principio do minimax para localização dos valores críticos:

1.3. Teorema (Princípio do minimax):

Seja ϕ uma família de subconjuntos de M invariantes por isotopias (família a 1-parâmetro de difeomorfismos), isto é, se $A \in \phi$ e $\varphi : M \times (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow M$ é uma isotopia, então $\varphi(A,t) \in \phi$, $\forall t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$.

Então

$$C(\phi) = \inf_{A\in\phi} \sup_{x\in A} f(x)$$

é um valor crítico de f.

Aplicando o teorema 3 a famílias oportunas de subconjuntos obtemos o seguinte resultado:

1.4. Teorema *(Lusternik - Schnirelmann)*:

Suponhamos que f verifique H_i, $i = 1,2,3$.

Então existem pelo menos $cat(M)$ pontos críticos de f, onde $cat(M)$ é a categoria de M.

Observaçao: A categoria de um espaço topológico X é o menor inteiro K, eventualmente infinito, tal que X pode ser coberto com K abertos $A_1, \ldots, A_k$, cada um contratil em X.

Trata-se de um invariante topológico estimável em termos da álgebra de cohomologia de X.

Todos os resultados acima são bem conhecidos e uma ótima referência é o 3º capítulo do [P.T.]

Antes de prosseguir com esta "panorâmica" sôbre teoria dos pontos críticos vamos analisar um exemplo motivador do nosso trabalho.

Seja M uma variedade Riemanniana compacta, conexa, e que suporemos isométricamente mergulhada em $\mathbb{R}^N$ e sejam $p,\ q \in M$.

Lembremos que uma função $c : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é de classe H^1 se c for contínua, derivável quase sempre, e tal que

$$\|c\|^2_{H^1} := \int_0^1 \{\|c(t)\|^2 + \|\dot{c}(t)\|^2\}dt < \infty.$$

O espaço das funções de classe H^1 é então um espaço de *Hilbert* $H^1([0,1],\ \mathbb{R}^N)$ em relação ao produto escalar

$$(c,d) = \int_0^1 \{< c(t),\ d(t) > + < \dot{c}(t),\ \dot{d}(t) >\}dt.$$

O conjunto

$$\Omega(p,q,M) = \{c \in H^1([0,1],\ \mathbb{R}^N) : c(0) = p,\ c(1) = q,$$
$$c(t) \in M,\ \forall t \in [0,1]\}$$

é uma subvariedade de $H^1([0,1],\ \mathbb{R}^N)$ e claramente fechada e portanto uma variedade completa.

Temos uma função natural $E : \Omega(p,q,M) \longrightarrow \mathbb{R}$, a ação ou energia Riemanniana, definida por

$$E(c) = \int_0^1 \|\dot{c}(t)\|^2\ dt$$

e é bem conhecido que:

a) $\Omega(p,q,M)$ e E verificam H_1, H_2, H_3 (e claramente $E \geq 0$).

b) Os pontos críticos de E são as geodésicas de M que unem p e q.

Portanto estamos nas hipóteses do Teorema 4. Além disso é também conhecido que a categoria de $\Omega(p,q,M)$ é infinito e portanto obtemos:

1.5. Teorema:

Para cada variedade Riemanniana compacta e conexa M, existem infinitas geodésicas em M que unem dois pontos fixados.

Para uma demonstração de a) e b) indicamos ainda [P.T.].

Outros problemas variacionais mais gerais podem ser atacados com a mesma técnica.

Por exemplo, se $F : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma métrica *Finsleriana* (veja definição 3.8.), F induz uma ação ou energia, que denotaremos ainda por $E : \Omega(p,q,M) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$E(c) = \frac{1}{2} \int_0^1 F^2(\dot{c}(t))\ dt$$

e E é ainda uma função que verifica H_2) e H_3). Uma demonstração destas propriedades acha-se em [*M.*] onde é também observado que as condições valem para uma classe mais ampla de problemas variacionais que permite a presença de uma energia potencial, ou seja de uma função $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$, e o problema variacional é o problema de "energia total mínima", isto é, de achar os pontos críticos do funcional

$$E(c) = \frac{1}{2}\int_0^1 F^2(\dot{c}(t)dt - \int_0^1 u(c(t))dt.$$

Observaçao: Os problemas variacionais do tipo *Finsler* são interessantes por vários motivos entre os quais o uso em Física.

Por exemplo: Dado um corpo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ com índice de refração ν, as trajetórias dos raios de luz em Ω são, pelo princípio de *Fermat*, as geodésicas da métrica νds^2, onde ds^2 é a métrica euclidiana.

Se ν depende somente do ponto (meios isotrópicos) a métrica νds^2 é uma métrica riemanniana. Se ν depende também da direção (meios anisotrópicos), então νds^2 é uma métrica *Finsleriana.*

Outras razões para o interesse destas métricas serão descritos mais adiante.

Uma variação do problema anterior é o problema das geodésicas fechadas.

Dada, como anteriormente, uma variedade *riemanniana* compacta M procuramos as geodésicas periódicas em M.

Este problema pode ser tratado com a mesma estratégia do anterior: Consideramos o círculo unitário $S^1 = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} = \{Z \in \mathbb{C} : Z = e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]\}$ e o espaço $H^1(S^1, \mathbb{R}^N)$ das curvas fechadas em $\mathbb{R}^N$ de classe H^1. O subconjunto

$$\Lambda = \{c \in H^1(S^1, \mathbb{R}^N) : c(t) \in M, \quad \forall t \in S^1\}$$

é uma subvariedade fechada de $H^1(S^1, \mathbb{R}^N)$ portanto uma variedade completa na métrica induzida e os pontos críticos da energia $E(c) = \frac{1}{2}\int_0^1 \|\dot{c}(t)\|^2\, dt$ são as geodésicas periódicas de M.

As condições do Teorema 4 são satisfeitas e portanto temos a menos de uma demonstração que $cat\Lambda = \infty$, neste caso mais complexa:

<u>Pseudo Teorema</u>: Em cada variedade riemanniana compacta existem infinitas geodésicas periódicas.

O resultado enunciado acima é um pseudo teorema por três razões:

1) É claro que todas as curvas constantes são geodésicas periódicas (e são infinitas!)
2) Se $c(t)$ é uma geodésica periódica então $c(t + t_0)$, para t_0 fixo, é também uma geodésica periódica. Geometricamente isso corresponde a uma "rotação" da geodésica periódica.
3) Se $c(t)$ é uma geodésica periódica a curva $c^{(n)}(t) = c(nt)$ é também uma geodésica periódica. Geometricamente isso corresponde a percorrer c, n vezes.

Os problemas 1) e 2) podem ser ainda resolvidos no âmbito da Teoria de *Lusternik - Schnirelmann*. Para evitar as curvas constantes se considera a Teoria "relativa", isto é, uma variação da teoria que relaciona os pontos críticos de E na variedade M, fora da subvariedade $\Lambda^0 = E^{-1}(0)$, com a cohomologia relativa $H^*(\Lambda,\Lambda^0)$. Para evitar as translações do parâmetro t, considera-se o quociente de Λ pela ação natural de S^1 sobre Λ.

E é S^1-invariante e portanto induz uma função no quociente. Este quociente não é na realidade uma variedade pois a ação de S^1 não é "boa", mas ainda, a menos de dificuldades técnicas, é possivel mostrar um teorema de tipo *Lusternik - Schnirelmann* para esta situação.

O problema 3 não pode, porém, ser resolvido a nível da teoria de *Lusternik - Schnirelmann* e requer, para ser tratado, uma teoria mais fina, a teoria de Morse.

A teoria de Morse "clássica" preocupa de estabelecer relações entre a topologia de M e a "estrutura" do conjunto de pontos críticos de f quando estes são não-degenerados. Lembremos algumas definições: seja $\Omega \subseteq \mathbb{H}$ um aberto de um espaço de *Hilbert* $\mathbb{H}$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Seja $\overline{x} \in \Omega$ um ponto crítico de f e suponhamos f duas vezes diferenciável em $\overline{x}$.

A diferencial segunda em $\overline{x}$ é então uma aplicação bilinear simétrica $(d^2f)(\overline{x}) : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ ou equivalentemente uma aplicação linear simétrica $(d^2f)(\overline{x}) : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}^* \cong \mathbb{H}$.

Definiçoes:

Chama-se índice do ponto crítico $\overline{x}$, $\lambda(f,\overline{x})$, a dimensão (possivelmente infinita) de um subespaço maximal de $\mathbb{H}$ sôbre o qual $(d^2f)(\overline{x})$ é definida negativa.

b) Chama-se nulidade do ponto crítico $\overline{x}$, $\nu(f,\overline{x})$, a dimensão do espaço $Ker(d^2f)(\overline{x}) = \{X \in \mathbb{H} : (d^2f)(\overline{x})(X,Y) = 0, \forall Y \in \mathbb{H}\}$.

c) O ponto crítico $\overline{x}$ é dito um ponto crítico não degenerado se $(d^2f)(\overline{x})$ é inversível (com inversa contínua).

Observaçao:

1) Os pontos críticos não degenerados são isolados, pois $(df) : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}^* \cong \mathbb{H}$ tem derivada inversível nos pontos críticos não degenerados.

2) no caso que $dim\ \mathbb{H} < \infty$, $\overline{x}$ é não degenerado se, e somente se, $\nu(f,\overline{x}) = 0$.

A estrutura local de f em uma vizinhança de um ponto crítico não degenerado é descrita pelo *Lema de Morse:*

1.6. Teorema:

Seja f de classe C^2 e $0 \in \Omega \subseteq \mathbb{H}$ um ponto crítico não degenerado de índice $\lambda = \lambda(f,0)$. Existe então uma vizinhança $\mathcal{U}$ de $0 \in \Omega$, uma de composição ortogonal $\mathbb{H} = \mathbb{H}_- \oplus \mathbb{H}_+$, e um difeomorfismo $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ com $\varphi(0) = 0$ e $d\varphi(0) = I_{\mathbb{H}}$ tal que

$$f(\varphi(x)) = f(0) - \|P_- x\|^2 + \|P_+ x\|^2 \text{ onde } P_\pm : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}_\pm$$

são as projeções, e $dim\ \mathbb{H}_- = \lambda$.

Para uma função com um ponto crítico isolado 0, $f(0) = 0$, define-se os grupos de Morse do ponto

$$H_i(0) = H_i(\mathcal{U}^-, \mathcal{U}^- - \{0\})$$

onde $\mathcal{U}$ é uma vizinhança de 0,
$\mathcal{U}^- = \{x \in \mathcal{U} : f(x) \le 0\}$, e $H_i(X,Y)$ é a homologia singular com coeficientes em um corpo fixado $\mathbb{F}$. Também, os números de *Betti* do ponto crítico são definidos por

$$b_i(0) = dim_{\mathbb{F}}\ H_i(0).$$

O lema de deformação (Teoremas 1 e 2) e argumentos padrões de topologia algébrica garantem:

<u>1.7. Teorema</u>:

Se M e f verificarem as condições H_1, H_2, H_3 e $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico isolado de f, com pontos críticos isolados $P_1, P_2, \ldots, P_k$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$H_*(M^{c+\varepsilon}, M^{c-\varepsilon}) = \bigoplus_{i=1}^{k} H_*(P_i).$$

No caso particular que a função seja, a menos de um homeomorfismo, da forma dada pelo teorema 6, um cálculo explicito fornece

$$b_i(0) = \delta_{i\lambda} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq \lambda \\ 1, & \text{se } i = \lambda \end{cases}$$

(em particular $b_i(0) = 0$, $\forall i$, se $\lambda = \infty$). Isto permite concluir:

<u>1.8. Teorema</u>:

Seja $f : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função C^2 que verifica H_1, H_2, H_3. supondo que os pontos críticos sejam não degenerados e denotando por C_λ o número de pontos críticos de índice λ de f. Então $b_\lambda(\Lambda) := dim_{\mathbb{F}}\, H_\lambda(\Lambda) \leq C_\lambda$.

No espírito da discussão anterior queremos observar que o Teorema 8 é "mais fino" que o teorema 4 (*Lusternik - Schnirelmann)*, não somente porque a soma dos números de *Betti* de Λ, $b_k(\Lambda)$, é maior ou igual a categoria de Λ, mas também porque relacionam pontos críticos de um dado índice K, com os números de *Betti* em dimensão K. Na realidade existem versões mais finas ainda do Teorema 8 e ainda [P.T.] é uma ótima referência.

Voltando ao caso do funcional energia de uma variedade riemanniana

$$E(c) = \frac{1}{2} \int_{S^1} \|\dot{c}(t)\|^2 \, dt$$

observamos que não podemos utilizar o teorema 8 na forma acima pois certamente as geodésicas fechadas não são pontos críticos não degenerados. De fato, se $c : \mathbb{R} \longrightarrow M$ é uma geodésica fechada, $c_{t_0}(t) := c(t + t_0)$ é, ao variar $t_0 \in \mathbb{R}$, uma subvariedade de Λ formada por pontos críticos. Esta observação conduz a considerar <u>Variedades Críticas</u>, isto é, subvariedades conexas de uma variedade de *Hilbert* formada por pontos críticos.

<u>Definição</u>: Dizemos que uma variedade crítica $S \subseteq \Lambda$ é não degenerada se para cada $x \in S$, $(d^2f)(x) \mid (T_xS)^{\perp}$ é inversível (com inversa contínua). Neste caso, definimos o índice de f ao longo de S como sendo o índice de $(d^2f)(x) \mid (T_xS)^{\perp}$, se for constante (que é sempre o caso se f for C^2).

No caso do problema das geodésicas fechadas as subvariedades críticas são: a subvariedade das curvas constantes (difeomorfa a M) e as órbitas, pela ação do círculo, de geodésicas periódicas, e estas são naturalmente difeomorfas a círculos.

Como no caso de pontos criticos isolados podemos introduzir os grupos de Morse e os números de *Betti* de uma subvariedade crítica (conexa) K tal que $f(K) = c$

$$H_*(K) := H_*(\mathcal{U}^-, \mathcal{U}^- - K),\ b_i(K) = dim_{\mathbb{F}}\,(H_i(K))$$

onde $\mathcal{U}$ é uma vizinhança de K e $\mathcal{U}^- = \{x \in \mathcal{U} : f(x) \leq c\}$.

No caso de subvariedade criticas não degeneradas, podemos demonstrar usando ainda argumentos padrões de Topologia algébrica o seguinte resultado:

<u>1.9. Teorema</u>:

$$H_i(\mathcal{U}^-, \mathcal{U}^- - K) \cong H_{i-\lambda}(K)$$

onde λ é o índice de f em K.

<u>Observaçao</u>: Se K é um ponto o Teorema 9 se reduz ao Teorema 7.

Neste trabalho desenvolveremos a teoria dos pontos críticos de *Morse* em um espaço de *Hilbert* para funções de baixa diferenciabilidade, cujos pontos críticos (isolados) podem ser degenerados, e nesta teoria provamos o *Lema de Morse* Generalizado.

O *Lema de Morse* clássico para funções com pontos críticos não-degenerados foi extendido por *Palais* [*Pa.*] para espaços de *Hilbert*.

Devido a perda de duas ordens de diferenciabilidade, o método usado por *Palais* é aplicável somente para funções de classe C^3.

Usando o método de *Liapunov-Schimidt* e a abordagem de *Palais*, *D. Gromoll* e *W. Meyer* [*G.M.*1] provaram o *Lema de Morse* Generalizado para o caso de pontos criticos, possivelmente degenerados, quando a segunda derivada da função é uma perturbação compacta da identidade.

Por outro lado *Kuiper* [*Kui.*] e *Cambini* [*Ca.*], independentemente, provaram o *Lema de Morse* para um ponto critico não degenerado de uma função de classe C^2. Este resultado foi extendido para o caso degenerado por *Hofer* [*Ho.*] quando a segunda derivada é uma perturbação compacta da identidade.

J. Mawhin e *M. Willem* [*Ma.*, *Will.*] provaram o *Lema de Morse* Generalizado para funções de classe C^2 com pontos críticos (isolados) possivelmente degenerados e cuja segunda derivada é um operador de *Fredholm*.

F. Mercuri e *G. Palmieri* [*Mer.*, *Pa.*, 3] provaram o *Lema de Morse* para funções com baixa diferenciabilidade, isto é, de classe C^1, com segunda derivada nos pontos críticos não-degenerados.

Neste trabalho provamos o *Lema de Morse* Generalizado para funções de baixa diferenciabilidade, isto é, funções de classe C^1 com pontos criticos isolados possivelmente degenerados, e cuja segunda derivada em cada ponto critico é um operador de *Fredholm*, e o campo gradiente ∇f é fortemente diferenciável nos pontos críticos.

1.10. Teorema: *Lema de Morse Generalizado:*

Seja $\mathbb{H}$ um espaço de *Hilbert*, $\Omega \subset \mathbb{H}$ uma vizinhança aberta de $0 \in \mathbb{H}$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, $f(0) = 0$, satisfazendo:

a) $(\nabla f)(0) = 0$ e $(\nabla f)(x) \neq 0$, $\forall x \in \Omega - \{0\}$ (isto é, 0 é um ponto crítico isolado);

b) ∇f é fortemente diferenciável em 0 e sua diferencial $d(\nabla f)(0) := A : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ é um operador de *Fredholm*.

Então existem uma vizinhança aberta $V \subset \mathbb{H}$ de zero, uma vizinhança aberta em $\mathbb{N} = Ker\ A$, $B \subset \mathbb{N}$ de zero, um homeomorfismo

$$\hbar : V \longrightarrow \mathcal{U} = \hbar(\mathcal{U}) \subset \mathbb{H}$$

$\mathcal{U}$ aberto, $\hbar(0) = 0$ e uma função contínua $g : B \longrightarrow E = \mathbb{N}^{\perp} = ImA$, tais que:

i) $P(\nabla f)(g(y), y) \equiv 0$, onde $P : \mathbb{H} \longrightarrow E$ é a projeção ortogonal e $\mathbb{H} = E \oplus \mathbb{N}$;

ii) $g(0) = 0$, $(dg)(0) = 0$ e g é fortemente diferenciável em 0;

iii) $\tilde{f}(u) = f(\hbar(u)) = \frac{1}{2} < Ax, x > + f(y + g(y))$, onde $x = Pu$, $y = u - Pu$, $< , >$ é o produto escalar de $\mathbb{H}$;

iv) $\hbar$ é diferenciável em 0 e $(d\hbar)(0) = I_{\mathbb{H}}$.

Para uma função f com um ponto crítico isolado 0, $f(0) = 0$, os grupos de *Morse* do ponto são definidos por

$$H_k(0) = H_k(f, 0) := H_k([\mathcal{U} \cap (f < 0)] \cup \{0\}, \mathcal{U} \cap (f < 0))$$

onde $H_k(X, Y)$ significa grupos de homologia singular relativa com coeficientes em um corpo fixado $\mathbb{F}$, $\mathcal{U}$ uma vizinhança aberta de 0, tal que, 0 é o único ponto crítico de f em $\mathcal{U}$ e por notação

$$(f < a) = \{u \in \Omega : f(u) < a\}.$$

Utilizando argumentos padrões de topologia algébrica os grupos de *Morse* do ponto critico isolado 0 podem ser escritos na forma

$$H_k(0) = H_k(f,\ 0) = H_k((f \le 0) \cap \mathcal{U},\ [(f \le 0) - \{0\}] \cap \mathcal{U}).$$

De acordo com a propriedade de excisão dos grupos de homologia singular relativa, os grupos de *Morse* estão bem definidos, isto é, êles não dependem da escolha especial da vizinhança $\mathcal{U}$.

Do *Lema de Morse* Generalizado e usando propriedades da topologia algébrica obtemos como conseqüência o cálculo dos grupos de *Morse* de um ponto crítico isolado, possivelmente degenerado da seguinte maneira:

Denotemos por $u = x + y = x_+ + x_- + y$ um ponto de $\mathbb{H} = \mathbb{H}_+ \oplus \mathbb{H}_- \oplus \mathbb{N}$ decomposição ortogonal de $\mathbb{H}$ em subespaços invariantes por $A = d(\nabla f)(0)$, A definida positiva em $\mathbb{H}_+$, A definida negativa em $\mathbb{H}_-$, $\mathbb{N} = Ker\ A$, e seja B_ε uma bola aberta de centro 0 e raio $\varepsilon>0$, suficientemente pequeno, tal que $B_\varepsilon \subset \mathcal{U}$.

Seja $D = D_+ \oplus D_- \oplus D_o \subset B_\varepsilon \subset \mathbb{H} = \mathbb{H}_+ \oplus \mathbb{H}_- \oplus \mathbb{N}$ a soma direta de 3 discos abertos:

$$D_+ \subset B_\varepsilon \cap \mathbb{H}_+,\ D_- \subset B_\varepsilon \cap \mathbb{H}_-\ D_o \subset B_\varepsilon \cap \mathbb{N},$$

onde D_+ tem centro 0_+, D_- tem centro 0_- e D_o tem centro $0_{\mathbb{N}}$ com $0 = (0_+,\ 0_-,\ 0_{\mathbb{N}})$.

Ao ponto crítico 0 associamos o invariante característico

$$H_k^o(0) = H_k^o(f,0) := H_k([D_o \cap (\tilde{f} < 0)] \cup \{0_{\mathbb{N}}\},\ D_o \cap (\tilde{f} < 0)) =$$
$$= H_k(\tilde{f}|D_o,\ 0_{\mathbb{N}}) = H_k(f_o,\ 0_{\mathbb{N}})$$

onde $f_o = \tilde{f}|D_o$, $f_o(y) = f(y + g(y))$ e $S = h(D_o)$ é uma subvariedade topológica de $\mathbb{H}$ para f em 0, denominada subvariedade característica.

Agora vamos enunciar o teorema que reduz os grupos de *Morse* de um ponto crítico isolado, possivelmente degenerado, para os grupos de *Morse* da função f restrita à subvariedade caracteristica $S = \hbar(D_\circ)$.

1.11. Teorema:

$$H_k(f,0) = H^\circ_{k-\lambda}(f,0),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

($H_k \approx 0$ para $k < 0$), onde $\lambda = dim\ D_-$ é o índice de *Morse* do ponto crítico $0 \in \Omega$ e os grupos $H_k(f,0)$ são finitamente gerados e se anulam para κ suficientemente grande.

Invariantes homológicos associados a uma subvariedade crítica K de $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, possivelmente degenerada:

Suponhamos que $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função definida em uma variedade de *Hilbert* M e $K \subset M$ é uma subvariedade critica, conexa, possivelmente degenerada, satisfazendo as hipóteses H_1, H_2, H_3, já enunciadas no início deste capítulo e com as condições:

(1) K é subvariedade crítica isolada;

(2) f admite segunda derivada $d^2f(x)$ para todo $x \in K$ que depende continuamente de x e o operador auto-adjunto A_x associado à segunda derivada é um operador de *Fredholm*;

(3) na decomposição ortogonal de $H_1(x) = (T_xK)^{\perp} = H^-(x) \oplus H^+(x) \oplus H^\circ(x)$, onde $A_x = d^2f(x)$ é definida positiva em $H^+(x)$, definida negativa em $H^-(x)$, $H^\circ(x) = Ker(A_x|H_1(x))$, e $H^+(x)$, $H^-(x)$, $H^\circ(x)$ mantem preservadas as dimensões quando x varia em K.

(4) o gradiente de f, $gradf(x)$, é fortemente diferenciável nos pontos $x \in K$.

Pela condição (3) temos a decomposição de fibrados

$$H_1(K) = H^-(K) \oplus H^+(K) \oplus H^0(K)$$

onde

$$H^-(K) = \bigcup_{x\in k} H^-(x),\ H^+(K) = \bigcup_{x\in k} H^+(x),\ H^0(K) = \bigcup_{x\in k} H^0(x)$$

e o índice de K é a dimensão da fibra $H^-(x)$ e a nulidade de K é a dimensão da fibra $H^0(x)$.

Sendo K subvariedade compacta de $\tilde{M}$, podemos contornar K por uma vizinhança tubular, suficientemente pequena, da seguinte maneira:

Seja $D_\varepsilon(x) = D_\varepsilon^-(x) \oplus D_\varepsilon^+(x) \oplus D_\varepsilon^0(x) \subset H_1(x) = (T_xK)^\perp = H^-(x) \oplus H^+(x) \oplus H^0(x)$, a soma direta de 3 discos abertos de raios iguais a $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, onde

$D_\varepsilon^-(x) = D_\varepsilon(x) \cap H^-(x)$, $D_\varepsilon^+(x) = D_\varepsilon(x) \cap H^+(x)$, $D_\varepsilon^0(x) = D_\varepsilon(x) \cap H^0(x)$

e tal que $f_x \equiv f|D_\varepsilon(x)$ satisfaz o *Lema de Morse* Generalizado

$$\tilde{f}_x(u) = (f_x \circ \hbar)(u) = \frac{1}{2} < Av,\ v > + f(w + g(u))$$

onde $\hbar : D_\varepsilon(x) \subset H_1(x) \longrightarrow \hbar(D_\varepsilon(x)) \subset H_1(x)$ é homeomorfismo, $w \in D_\varepsilon^0(x)$, $v \in D_\varepsilon^+(x) \oplus D_\varepsilon^-(x) \subset H^+(x) \oplus H^-(x) = (H^0(x))^\perp$, $u = v + w$.

Denotemos por $D_\varepsilon = D_\varepsilon^- \oplus D_\varepsilon^+ \oplus D_\varepsilon^0$ a vizinhança tubular de K, onde $D_\varepsilon^- = \bigcup_{x\in k} D_\varepsilon^-(x)$, $D_\varepsilon^+ = \bigcup_{x\in k} D_\varepsilon^+(x)$, $D_\varepsilon^0 = \bigcup_{x\in k} D_\varepsilon^0(x)$.

Destas construções, à subvariedade critica K de $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ associamos o invariante homológico

$$H_\ell(K) = H_\ell(f,K) := H_\ell([D_\varepsilon \cap (\tilde{f} < 0)] \cup \{k\},\ D_\varepsilon \cap (\tilde{f} < 0))$$

e o invariante homológico

$$H_\ell^0(K) = H_\ell^0(f,\ K) := H_\ell([D_\varepsilon^0 \cap (\tilde{f} < 0)] \cup \{K\},\ D_\varepsilon^0 \cap (\tilde{f} < 0))$$

onde $\tilde{f}(u) = \tilde{f}_x(u)$ para $u \in D_\varepsilon(x)$.

Agora enunciamos o teorema que reduz os grupos de *Morse* de uma subvariedade crítica isolada, possivelmente degenerada, para os grupos de *Morse* da função $\tilde{f}$ restrita ao fibrado D°_{ε}.

1.12. Teorema:

$$H_{\ell}(f, K) = H^{\circ}_{\ell-\lambda}(f, K)$$

onde λ é o índice da subvariedade crítica K.

Neste trabalho pretendemos demonstrar o *Teorema de Gromoll-Meyer* para o funcional energia de *Finsler*

$$E : \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad E(c) = \int_{S^1} F^2(\dot{c}(t))dt$$

onde $F : TM \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma métrica de *Finsler*, $\Lambda M = \{c \in H^1(S^1, \mathbb{R}^N) : c(t) \in M, \forall t \in S^1\}$ é uma variedade de *Hilbert* com o produto escalar

$$< \xi, \eta >_1 = \int_0^1 < \xi(t), \eta(t) > dt + \int_0^1 < \nabla_{\dot{c}} \xi(t), \nabla_{\dot{c}} \eta(t) > dt$$

onde ∇ é a derivada covariante em TM, obtida da conexão de *Levi-Cevita* da variedade *Riemanniana* compacta $(M^n, <,>)$.

Mostraremos que o funcional "energia"

$$E(c) = \int_{S^1} F^2(\dot{c}(t))dt$$

possui várias propriedades que são necessárias para o desenvolvimento da teoria dos pontos críticos (tipo de *Morse*).

As propriedades a demonstrar são as seguintes:

1.13. Teorema:

O funcional energia $E : \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 e a derivada é localmente *Lipschitziana*.

1.14. Teorema:

O funcional $E : \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a condição (C) de compacidade de *Palais-Smale:*

"Seja (c_n), $c_n \in \Lambda M$, uma seqüência de curvas tais que:

(a) $E(c_n) \leq K$, limitada;

(b) $|\nabla E(c_n)|_1 \longrightarrow 0$, onde ∇E denota o gradiente de E. Então (c_n) admite um ponto de acumulação, que é, portanto um ponto crítico de E".

1.15. Teorema:

O funcional energia de *Finsler* $E : \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}$ possue segunda derivada nos pontos críticos e nas curvas regulares.

1.16. Teorema:

A derivada da função energia de *Finsler* $E : \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}$ é fortemente diferenciável nas curvas regulares e em particular nas geodésicas fechadas.

1.17. Teorema:

Seja c um ponto crítico da função energia $E : \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}$, $E(c) = \int_0^1 F^2(\dot{c}(t))dt$, $c \neq$ Const. Então o operador auto-adjunto $A_c : T_c\Lambda M \longrightarrow T_c\Lambda M$ associado à segunda derivada

$$d^2E(c)\ (X,Y) = \langle A_c X,\ Y \rangle_1 = \langle X,\ A_c Y \rangle_1$$

é da forma $A_c = id + K_c$, onde $K_c : (T_c \Lambda M,\ |\circ|_1) \longrightarrow (T_c \Lambda M,\ |\circ|_1)$ é um operador compacto com relação a norma $|\circ|_1$ onde

$$|X|_1^2 = \int_0^1 \langle X,\ X \rangle dt + \int_0^1 \langle \nabla_{\dot{c}} X,\ \nabla_{\dot{c}} X \rangle\ dt,$$

e portanto A_c é um operador de *Fredholm*

Observemos que os pontos criticos do funcional energia de *Finsler* $E : \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}$, $E(c) = \int_{S^1} F^2(\dot{c}(t))dt$ são as geodésicas fechadas, que podem ser degenerados, e de modo análogo ao do funcional energia de uma métrica *Riemanniana*, as geodésicas fechadas de uma métrica de *Finsler* $F : TM \longrightarrow \mathbb{R}^+$ estão distribuidas em subvariedades criticas a saber: a subvariedade das curvas constantes (difeomorfa a M), e as órbitas criticas

$$S^1.c = \{z.c : (z.c)(t) = c(t+r),\ z = e^{2\pi i r} \in S^1,\ 0 \le r \le 1\}$$

pela ação do circulo S^1, formada por geodésicas periódicas. As orbitas criticas $S^1.c$ são difeomorfas a circulos e deixa a energia invariante: $E(c) = E(z.c)$.

Usaremos os resultados anteriores para obter informações sobre invariantes homológicos de órbitas criticas (isoladas) do funcional energia de *Finsler*

$$E : \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R},\ E(c) = \int_{S^1} F^2(\dot{c}(t))dt$$

estudando a energia E em uma vizinhança tubular $D = D(S^1.c)$ de uma orbita crítica $S^1.c$, que é um fibrado de discos normais tal que a ação de S^1 nesse fibrado transforma fibra, de modo equivariante, em outra fibra.

O espaço normal em c de $S^1.c$ é o espaço tangente da fibra D_c em c e $z.D_c = D_{z.c}$, para $z \in S^1$.

Para obtermos os invariantes homológicos de órbitas críticas isoladas necessitamos de alguns conceitos preleminares:

Se $c : \mathbb{R} \longrightarrow M$ é uma geodésica fechada, $c(t+1) = c(t)$, a m-ésima iterada c^m de c é definida por $c^m(t) = c(mt)$, $t \in \mathbb{R}$, $m \geq 1$ natural.

Seja $c \in \Lambda M$ uma F-geodésica fechada de multiplicidade $m \geq 1$ (isto é, $c : [0,1] \longrightarrow M$ é percorrida m vezes).

Denotemos por $T'_c\ \Lambda M =$ o subespaço do espaço tangente $T_c\Lambda M$, de codimensão 1, que é ortogonal a $\dot{c}$.

Da decomposição ortogonal do espaço tangente

$$T_c\Lambda M = T_c^-\Lambda M \oplus T_c^+\Lambda M \oplus T_c^0\Lambda M$$

nos subespaços gerados pelos autovetores de $A = d^2E(c)$ associados aos autovalores < 0, > 0, e $= 0$, respectivamente, temos que

$$T'_c\Lambda M = T_c^-\Lambda M \oplus T_c^+\Lambda M \oplus T_c'^{\,0}\Lambda M$$

onde

$T_c'^{\,0}\Lambda M = T_c^0\Lambda M \cap T'_c\Lambda M$ consiste dos campos de *Jacobi* periódicos ao longo de c que são ortogonais a $\dot{c}$.

O índice de c e a nulidade de c são *dim* $T_c^-\Lambda M$ e *dim* $T_c'^{\,0}\Lambda M$, respectivamente, e a geodésica fechada c pode ser degenerada. A órbita crítica $S^1.c$ pode ser também degenerada.

Consideremos o fibrado normal de $S^1.c$ sôbre S^1, $u = u(S^1.c) : N \longrightarrow S^1$, induzido pelo mergulho

$$z \in S^1 \longrightarrow z^{1/m}.c \in \Lambda M$$

$$z^{1/m}.c(t) = e^{2\pi i r/m}.c(t) = c(t + \frac{r}{m}),$$

onde m é a multiplicidade de c, e $0 \leq r \leq 1$.

Seja $u = u^- \oplus u^+ \oplus u^o$ a decomposição do fibrado normal, determinado pela decomposição na fibra

$$T'_c\Lambda M = T^-_c\Lambda M \oplus T^+_c\Lambda M \oplus T'^{o}_{C}\Lambda M.$$

Considerando em M uma métrica *Riemanniana* $<,>$, temos que o fibrado tangente

$$T\Lambda M \cong H^1(\Lambda M^* TM) = \bigcup_{c \in \Lambda M} H^1(c^* TM)$$

tem de modo natural uma estrutura *Riemanniana* dada por

$$< X, Y >_1 = < X, Y >_0 + < \nabla_{\dot{c}} X, \nabla_{\dot{c}} Y >_0$$

onde $< X, Y >_0 = \int_{S^1} < X(t), Y(t) >_c dt$, para $X, Y \in T_c\Lambda M$.

Utilizando a aplicação exponencial da métrica $<,>$, podemos identificar o espaço total $D = D(S^1.c)$ de um fibrado de discos suficientemente pequenos e normais a $S^1.c$ (que é uma vizinhança tubular de $S^1.c$) com uma vizinhança tubular da seção sero $S^1 \subset N$.

No caso que a F-geodésica fechada c tem multiplicidade m, definimos em D a seguinte métrica *Riemanniana*

$$< X, Y >_m = m^2 < X, Y >_0 + < \nabla_{\dot{\sigma}} X, \nabla_{\dot{\sigma}} Y >_0, \quad X, Y \in T_\sigma \Lambda M.$$

No espaço tangente a cada $X \in D$, a nova métrica $<,>_m$ é equivalente à métrica $<,>_1$; onde o índice e a nulidade de c não são modificados por esta troca de métrica.

Para cada $z \in S^1$, denotemos por D_z a fibra de Du sôbre z e por E_z a restrição da energia de *Finsler* E a D_z : $E_z = E|D_z$.

Com estas construções, obtemos então:

1.18. Teorema *(Lema de Morse generalizado para $E_z = E|D_z$)*:

"Seja c uma geodésica fechada de uma métrica de *Finsler* $F : TM \longrightarrow \mathbb{R}^+$, de nulidade $\ell \geq 0$ e multiplicidade $m \geq 1$.

Seja $u = u^+ \oplus u^- \oplus u^o$ a decomposição do fibrado normal, determinado pela decomposição na fibra $T'_c\Lambda M$:

$$T'_c\Lambda M = T^+_c\Lambda M \oplus T^-_c\Lambda M \oplus T'^o_c\Lambda M.$$

A dimensão da fibra de u^o é ℓ.

Denotemos $u^+ \oplus u^-$ por u^*, isto é, $u = u^* \oplus u^o$, e denotemos por 0_+, 0_-, 0_o e 0_* as seções nulas dos fibrados u^+, u^-, u^o e u_*, respectivamente.

Então, existe um homeomorfismo local Ψ de D e uma seção $Z \in S^1 \longrightarrow P_z \in L(u^*, u^*)$ sendo P_z a projeção ortogonal

$$P_z : X \in D_+ \oplus D_- \longrightarrow P_zX \in D_+$$

tal que para $(X, Y) \in D_* \oplus D_o$ onde $D_* = D_+ \oplus D_-$,

$E_z(X, Y) \equiv (E_z \circ \Psi)(X, Y) = \|P_z(X)\|^2_m - \|(I - P_z)(X)\|^2_m + E_z(g(Y), Y)$

onde $g : D_o \longrightarrow D_*$ é uma função fortemente diferenciável em $0_z \in D_o$, $dg(0_z) = 0$, $g(0_z) = 0$ e o homeomorfismo

$\Psi|D_o : D_o \to \Psi(D_o) \subset D_)(\Psi|D_o)(Y) = g(Y) + Y$, $d(\Psi|D_o)(0_o) = I_N$, $\mathbb{N} = T'^o_c\Lambda M$,

define uma subvariedade topológica $\Psi(D_o) \subset D$, denominada subvariedade característica em c.

1.19. Invariantes homológicos de uma F-geodésica fechada iterada c^m:

Denotamos por $E_z(X, Y)$ a representação local de $E_z = E|D_z$ dada pelo *Lema de Morse* Generalizado:

$$E_z : (D_z(S^1.c^m), 0_z(S^1.c^m)) \longrightarrow (\mathbb{R}, K_m)$$

$$E_z(X, Y) \equiv (E_z \circ \Psi)(X, Y) = \|P_z(X)\|^2_m - \|(I - P_z)(X)\|^2_m + E_z(g(Y), Y)$$

e por $E_{o,z}$ a função dada por $E_{o,z}:(D_{o,z}(S^1.c^m),\ 0_{o,z}(S^1.c^m))\to(\mathbb{R},K_m)$, $E_{o,z}(Y) = E_z(g(Y),\ Y)$, onde $K_m = E(c^m) = m^2E(c)$, $0_z(S^1.c^m)$ denota a origem da fibra $D_z(S^1.c^m)$, $0_{o,z}(S^1.c^m)$ é a origem de $D_{o,z}(S^1.c^m)$.

Os grupos de homologia definidos por

$H_i(E,\ c^m) := H_i([B_{z,\varepsilon}(c^m) \cap (E_z < K_m)] \cup \{0\},\ B_{z,\varepsilon}(c^m) \cap (E_z < K_m))$

$H_i^o(E,c^m) := H_i([D^o_{z,\varepsilon}(c^m) \cap (E_{0,z} < K_m)] \cup \{0\},\ {}_{z,\varepsilon}(c^m) \cap (E_{o,z}<K_m))$

são os invariantes homológicos associados à F-geodésica fechada iterada c^m e $H_i^o(E,\ c^m)$ é o invariante característico, $B_{z,\varepsilon}(c^m)$ é um disco aberto de centro na origem da fibra D_z e raio $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, e $D^o_{z,\varepsilon}(c^m)$ é um pequeno disco aberto em $(D_o)_z$ de mesmo centro que $(D_o)_z$.

Os números $b_i(c^m) = dim\ H_i(E,\ c^m)$ são denominados números típicos, e $b_i^o(c^m) = dim\ H_i^o(E,\ c^m)$ são os números típicos singulares da F-geodésica fechada c^m. Como todas as construções são feitas de modo equivariante pela ação de S^1 em $D(S^1.c^m)$ os grupos de homologia e os números típicos de c^m são independentes da escolha de $z \in S^1$.

1.20. Invariantes homológicos de uma orbita crítica $S^1.c$ do funcional energia de *Finsler* $E : \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}^+$:

Para definirmos os invariantes homológicos de uma órbita crítica $S^1.c$ do funcional energia de *Finsler* $E : \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}$, nós fixamos um certo $m \geq 1$, e escrevemos c, no lugar de c_0^m onde $c_o:[0,1] \longrightarrow M$ é uma F-geodésica fechada percorrida uma só vez. Seja $u(S.c)$ o fibrado normal sôbre S^1 induzido pelo mergulho

$$z \in S^1 \longrightarrow (z\ .\ c_0)^m = z^{1/m}.c_0^m \in \Lambda M$$

e seja

$$u(S^1.c) = u^+(S^1.c) \oplus u^-(S^1.c) \oplus u^\circ(S^1.c)$$

a decomposição ortogonal de acordo com o sinal dos autovalores, introduzidos anteriormente.

Os invariantes homológicos de uma órbita crítica $S^1.c$ são definidos por $H_1(E,\ S^1.c) :=$

$= H_i([B_\varepsilon(S^1.c) \cap (E(S^1.c) < K)] \cup 0(S^1.c),\ B_\varepsilon(S^1.c) \cap (E(S^1.c) < K))$

onde $B_\varepsilon(S^1.c) = \bigcup_{z\in S^1} B_{z,\varepsilon}(z.c)$ é uma vizinhança tubular, que é um fibrado de discos normais, $0(S^1.c)$ denota a seção zero, $E(c) = K$.

O número típico da órbita $S^1.c$ é o número

$$b_i(S^1.c) = dim\ H_i(E,\ S^1.c).$$

O invariante característica $H_i^\circ(E,c)$ de uma F-geodésica fechada c juntamente com o indice $\lambda = dim\ T_c^-\Lambda M$ de c, determina $H_i(E,c)$ completamente pelo teorema do deslocamento

$$H_{i+\lambda}(E,c) = H_i^\circ(E,c).$$

O número típico $b_i(S^1.c)$ da órbita crítica $S^1.c$ e o número típico singular $b_i^\circ(c) = dim\ H_i^\circ(E,c)$ de c estão relacionados pela desigualdade:

$$b_i(S^1.c) \leq 2[b_{i-\lambda}^\circ(c) + b_{i-\lambda-1}^\circ(c)]$$

que é obtida fazendo uso da teoria homológica da ação de grupos finitos e todos os invariantes homológicos são tomados num corpo de característica zero.

1.21. Lema:

Sejam M compacta, e b o único valor crítico da energia de *Finsler* $E : \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}^+$ no intervalo $[b-\delta,\ b+\delta]$ para algum $\delta > 0$.

Supondo que o nível $f^{-1}(b)$ contém somente um número finito de órbitas críticos isolados $S^1.c_1$, $S^1.c_2$, ..., $S^1.c_r$ da ação do grupo S^1 em $\Lambda M = H^1(S^1, M)$.

Então

$$H_*(E \le b + \delta,\ E \le b - \delta) = \bigoplus_{i=1}^{r} H_*(E,\ S^1.c_i).$$

1.22. Desigualdades de Morse:

Sejam $a < b$ valores regulares para a função energia de *Finsler* $E(c) = \int_0^1 F^2(\dot{c}(t)dt$ tal que o conjunto crítico em $E^{-1}[a,b]$ consiste de um número finito de órbitas críticas isoladas $S^1.c_1$, ..., $S^1.c_r$, então valem as desigualdades de *Morse* em termos dos números típicos $b_k(S^1.c_i)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, das órbitas críticas:

$$b_k(\Lambda^b,\ \Lambda^a) \le \sum_{i=1}^{r} b_k(S^1.c_i),$$

onde

$$b_k(\Lambda^b,\ \Lambda^a) = dim\ H_k(\Lambda^b,\ \Lambda^a),$$

$$\Lambda^b = \{e \in \Lambda M : E(e) \le b\},\ \Lambda^a = \{e \in \Lambda M : E(e) \le a\}.$$

Os números típicos de uma F-geodésica periódica satisfazem as seguintes propriedades:

1.23. Teorema:

Seja c uma F-geodésica fechada em ΛM tal que a órbita $S^1.c^m$ é uma subvariedade crítica isolada e que $nul(c) = nul(c^m)$ para algum inteiro positivo m, onde $nul(c)$ = nulidade de c. Então $b_k^o(c) = b_k^o(c^m)$, para todo K.

1.24. Corolário

Seja c uma F-geodésica fechada em ΛM, e suponhamos que todas as órbitas críticas $S^1.c^m$ são isoladas.

Então $b_k^o(c^m)$ é uniformemente limitada, ou seja, $b_k^o(c^m) \leq B$ para quaisquer K, m e para uma certa constante B.

Além disso, existe um número K_0 tal que $b_k^o(c^m) = 0$ para todo $K > K_0$ e todo m. Em particular as nulidades de c^m, $m \geq 1$, possuem somente um número finito de valores.

Com estas propriedades dos números típicos de uma F-geodésica fechada c, estamos em condições de enunciar o lema que será de fundamental importância para provarmos o teorema de *Gromoll-Meyer* para uma métrica de *Finsler* $F : TM \longrightarrow \mathbb{R}^+$, onde M^n é uma variedade diferenciável compacta de dimensão n e simplesmente conexa, pois neste caso os números de *Betti* $b_k(\Lambda M) = dim\ H_k(\Lambda M)$ são finitos, onde os coeficientes de homologia são tomadas num corpo de caracteristica zero.

1.25. Lema:

Seja c uma F-geodésica fechada em ΛM e suponhamos que todas as iteradas c^m, $m = 1, 2, 3, \ldots$, dão origem a órbitas críticas isoladas $S^1.c^m$.

Sejam B e K_0 as constantes obtidas no corolário anterior de modo que $b_k^o(c^m) \leq B$ para quaisquer K, m e $b_k^o(c^m) = 0$ para $K > K_0$, e $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Então os números típicos $b_k(S^1.c^m)$ são uniformemente limitados por $4B$.

Além disso, dada $K > K_0 + 1$, o número de órbitas críticas $S^1.c^m$ tais que $b_k(S^1.c^m) \neq 0$ é limitado por uma constante C que não depende de K, [ver capítulo IV].

1.26. Teorema de *Gromoll-Meyer*

Seja (M^n, F) variedade de *Finsler* compacta, $n \geq 2$, simplesmente conexa.

Supõe que a seqüência $(b_k \Lambda M)$ dos números *Betti* da variedade $\Lambda M = H^1(S^1, M)$, cujos coeficientes de homologia são tomados num corpo de característica zero, possui uma subseqüência $b_{K_n} \Lambda M \to \infty$, $K_n \longrightarrow \infty$.

Então M admite, infinitas geodésicas fechadas não-constantes (geometricamente distintas).

PROVA:

Suponhamos que existe um número finito de geodésicas fechadas não constantes e geometricamente distintas.

Então podemos escolher um número finito de geodésicas fechadas: c_1, c_2, ..., c_r de modo que qualquer outra geodésica fechada não constante em ΛM pertence a alguma órbita crítica $S^1.c_i^m$, $i = 1, 2, \ldots, r$; $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Para facilitar a visualização do problema desenhamos o seguinte quadro onde o retângulo representa o espaço ΛM e dentro do retângulo dispomos em r colunas as órbitas $S^1.c_i^m$ das geodésicas iteradas c_i^m para $i = 1, 2, \ldots, r$ e cada coluna denominamos torre da geodésica c_i.

$$\boxed{\begin{array}{cccc} S^1.c_1^m & S^1.c_2^m & & S^1.c_r^m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S^1.c_1^2 & S^1.c_2^2 & & S^1.c_r^2 \\ S^1.c_1 & S^1.c_1 & & S^1.c_r \end{array}} \quad \Lambda M$$

Como as órbitas críticas $S^1.c_i^m$; $i = 1, 2, \ldots, r$; $m = 1, 2, 3, \ldots.$ são isoladas, $\Lambda^b = \{c \in \Lambda M : E(c) \leq b\}$ contém somente um número finito dessas órtivas para qualquer b.

Sendo os números tipicos $b_k(S^1.c_i^m)$ uniformente limitados para cada i fixado, $1 \leq i \leq r$; e quaisquer K, m, $K=1,2,3, \ldots,$; $m = 1, 2, 3, \ldots,$ seja $B = \max_{i,k,m} b_k(S^1.c_i^m)$ um limite superior para $\{b_k(S^1.c_i^m);\ 1 \leq i \leq r,\ m = 1, 2, 3, \ldots,\ K = 1, 2, 3, \ldots\}$.

Sejam K_0 e C duas constantes naturais tais que para qualquer $K > K_0 + 1$, C é um limite superior para o número de órbitas $S^1.c_i^m$ satisfazendo $b_k(S^1.c_i^m) \neq 0$.

Sejam $a < b$ valores regulares do funcional energia $E : \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}$, $E(c) = \int_0^1 F^2(\dot{c}(t))dt$ cujo conjunto crítico em $E^{-1}[a,b]$ consiste de um número finito de órbitas críticas $S^1.c_1$, $S^1.c_2$, $\ldots$, $S^1.c_S$, após uma reordenação dos índices (inferiores e superiores i, m).

Então pelas desigualdades de *Morse* em termos dos números típicos das órbitas críticas $S^1.c_1$, $\ldots$, $S^1.c_S$:

$$b_k(\Lambda^b, \Lambda^a) \leq \sum_{i=1}^{s} b_k(S^1.c_i)$$

onde $b_k(\Lambda^b, \Lambda^a) = dim\ H_k(\Lambda^b, \Lambda^a)$, $b_k(S^1, c_i) = dim\ H_k(E', S^1.c_i)$, $\Lambda^a = E^{-1}[0,a]$.

Para $K > K_o + 1$ temos que

$$b_k(\Lambda^b, \Lambda^a) \leq \sum_{i=1}^{s} b_k(S^1.c_i) \leq B.C.$$

Seja $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, tal que a variedade das curvas pontuais $M = E^{-1}(0)$ seja um retrato por deformação de $E^{-1}[0,\varepsilon]$. Para isto, basta considerar $\varepsilon > 0$ de modo que o conjunto $E^{-1}[0,\varepsilon]$ não possua nenhuma F-geodésica fechada não-constante.

Para $0 < a < \varepsilon$ vale que

$$b_k(\Lambda^b, \Lambda^a) = b_k(\Lambda^b, \Lambda^o), \text{ onde } \Lambda^o = M = E^{-1}(0).$$

Sendo M de dimensão finita n, um argumento na seqüência exata de homologia do par (Λ^b, Λ^o) mostra que

$$b_k(\Lambda^b, \Lambda^o) = b_k(\Lambda^b), \ \forall K > n + 1$$

pois

$$\longrightarrow 0 = H_k(\Lambda^o) \longrightarrow H_k(\Lambda^b) \longrightarrow H_k(\Lambda^b, \Lambda^o) \longrightarrow H_{k-1}(\Lambda^o) = 0 \longrightarrow$$

quando $K > n + 1$.

Agora escolhemos b valor regular, suficientemente grande, de modo que todas as órbitas criticas $S^1.c_i^m$ com $b_k(S^1.c_i^m)\neq 0$, $K > K_0 + 1$, estejam contidas em Λ^b. Seja d valor regular, $d \geq b$, das desigualdades de *Morse* $b_k(\Lambda^d, \Lambda^b) \leq \sum b_k(S^1.c_i^m)$ para subvariedade críticas cuja energia $b < E(S^1.c_i^m) < d$ segue então que $b_k(\Lambda^d, \Lambda^b)=0$, $K > K_o + 1$, para todos os valores regulares $d \geq b$, e além disso $b_k(\Lambda, \Lambda^b) = 0$, $K > K_o + 1$.

Portanto $b_k(\Lambda) = b_k(\Lambda^b)$, $K > K_o + 1$, e para isto usar a seqüência exata de homologia do par (Λ, Λ^b):

$$\longrightarrow 0 = H_{k+1}(\Lambda,\Lambda^b) \longrightarrow H_k(\Lambda^b) \longrightarrow H_k(\Lambda) \longrightarrow H_k(\Lambda,\Lambda^b) = 0 \longrightarrow H_{k-1}(\Lambda^b) \longrightarrow$$

Combinando estas conclusões com aquelas das desigualdades de *Morse*, obtemos para quase todo K ($K > max\{K_o + 1,\ n + 1\}$; a suficientemente pequeno, b suficientemente grande, $a < b$ valores regulares que

$$b_k(\Lambda M) = b_k(\Lambda^b) = b_k(\Lambda^b,\ M) = b_k(\Lambda^b,\ \Lambda^a) \le B.C$$

contradição com a hipótese do Teorema.

∎

Para encerrar êste capítulo, observemos que até a presente data era duvidosa a possibilidade de extensão da Teoria dos pontos críticos (tipo de *Morse*) em dimensão infinita, para ser aplicada ao funcional energia de *Finsler*

$E : \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $\quad E(c) = \int_0^1 F^2(\dot{c}(t))dt$, conforme comentários de *W. Klingemberg* no livro: *"Lectures on Closed Geodesies, Springer--Verlag Berlin Heidelberg N. Y.* (1978). Porém, esta dificuldade foi contornada com a demonstração do *Lema de Morse* Generalizado para funções de baixa diferenciabilidade, o que permitiu provar o Teorema de *Gromoll-Meyer* para uma variedade de *Finsler* compacta (M, F).

CAPITULO II

2.1. Lema de Morse generalizado para pontos críticos isolados

Seja $\mathbb{H}$ um espaço de *Hilbert*, $\Omega \subset \mathbb{H}$ uma vizinhança aberta de $0 \in \mathbb{H}$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, $f(0) = 0$. Queremos estudar a estrutura de f perto de $0 \in \Omega$ sob as seguintes condições:

i) $(\nabla f)(0) = 0$ e $(\nabla f)(x) \neq 0$, $\forall x \in \Omega - \{0\}$, (isto é, 0 é um ponto crítico isolado).

ii) ∇f é fortemente diferenciável em 0 e sua diferencial

$$d(\nabla f)(0) := A : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$$

é um operador de *Fredholm*.

Observaçao:

a) Se $g : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ é contínua e fortemente diferenciável em $0 \in \mathbb{H}$ e se $(dg)(0)$ é inversível, g é localmente inversível, com inversa local (contínua) e fortemente diferenciável em $g(0)$ (ver apêndice). Êste é o único fato que usaremos sôbre funções fortemente diferenciáveis.

b) Se f é C^2 em uma vizinhança de 0, então ∇f é fortemente diferenciável em zero.

Comecemos com algumas considerações:

Seja $\mathbb{N} = KerA$ e $\mathbb{E} = \mathbb{N}^{\perp} = ImA$ (A é simétrica).

O operador A induz um isomorfismo $A|\mathbb{E} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ e êste determina uma decomposição ortogonal $\mathbb{E}_- \oplus \mathbb{E}_+$ em subespaços A-invariantes tais que $A|\mathbb{E}_-$ é definido negativo e $A|\mathbb{E}_+$ é definido positivo.

Em $\mathbb{E}$ definimos a forma bilinear simétrica $\langle\langle .,. \rangle\rangle : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\langle\langle x,y \rangle\rangle = - \langle Ax_-, y_- \rangle + \langle Ax_+, y_+ \rangle$$

onde $x = x_- + x_+$ e $y = y_- + y_+$ são as decomposições induzidas pela decomposição $\mathbb{E} = \mathbb{E}_- \oplus \mathbb{E}_+$, e $\langle .,. \rangle$ é o produto escalar de $\mathbb{H}$ e cuja norma indicamos por $|.|$.

2.2. Lema:

A forma bilinear $\langle\langle .,. \rangle\rangle$ é um produto escalar em $\mathbb{E}$, equivalente a $\langle .,. \rangle$ (e denotemos por $\|.\|$ a norma de $\langle\langle .,. \rangle\rangle$ em $\mathbb{E}$).

Demonstração: Claramente $\langle\langle .,. \rangle\rangle$ é um produto escalar em $\mathbb{E}$. Em particular

$$|\langle\langle x,y \rangle\rangle| \leq \langle\langle x,x \rangle\rangle^{1/2} \langle\langle y,y \rangle\rangle^{1/2}.$$

Agora, pela continuidade de A, $\langle\langle x,x \rangle\rangle \leq |A| \langle x,x \rangle$.

Queremos uma estimativa oposta.

Observamos que a decomposição $\mathbb{E} = \mathbb{E}_- \oplus \mathbb{E}_+$ é ortogonal em relação a $\langle\langle .,. \rangle\rangle$. Seja $x \in \mathbb{E}_+$. Temos

$$|Ax| = \sup_{|y|=1} |\langle Ax,y \rangle| = \sup_{|y|=1} |\langle\langle x,y \rangle\rangle| \leq \sup_{|y|=1} \left[\langle\langle x,x \rangle\rangle^{1/2} \langle\langle y,y \rangle\rangle^{1/2} \right] \leq$$

$$\leq \sup_{|y| = 1} \left[\langle\langle x, x \rangle\rangle^{1/2} |A|^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2} \right] = |A|^{1/2} \langle\langle x,x \rangle\rangle^{1/2}.$$

Sendo $A|\mathbb{E}$ um homeomorfismo, $\|AZ\| \geq C\|Z\|$, $C > 0$,

$$\langle x,x \rangle^{1/2} \leq C^{-1}|Ax| \leq |A|^{1/2}C^{-1}\langle\!\langle x, x \rangle\!\rangle^{1/2}$$

Analogamente para $x \in \mathbb{E}_-$. A conclusão segue então facilmente. No caso de decomposição ortogonal $\mathbb{H} = \mathbb{E}_- \oplus \mathbb{E}_+ \oplus \mathbb{N}$, temos o produto escalar

$$\langle\!\langle x,y \rangle\!\rangle = -\langle Ax_-,y_- \rangle + \langle Ax_+,y_+ \rangle + \langle x_o,y_o \rangle, \text{ onde}$$

$x = x_- + x_+ + x_o$, $y = y_- + y_+ + y_o$, cuja norma indicamos por $\|x\|^2 = \|x_-\|^2 + \|x_+\|^2 + |x_o|^2$.

Vamos agora provar o resultado principal deste capítulo:

2.3. Teorema (*Lema de Morse Generalizado*):

Nas hipóteses acima *i)* e *ii)* existem uma vizinhança aberta $V \subset \mathbb{H}$ de zero, uma vizinhança aberta em $\mathbb{N}$, $\mathcal{B} \subset \mathbb{N}$ de zero, um homeomorfismo

$$h : V \longrightarrow \mathcal{U} = h(V) \subset \mathbb{H}$$

$\mathcal{U}$ aberto, e uma função contínua $g : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{E}$, tais que:

i) $P(\nabla f)(g(y), y) \equiv 0$, onde $P : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{E}$ é a projeção ortogonal.

ii) $g(0) = 0$, $(dg)(0) = 0$ e g é fortemente diferenciável em 0.

iii) $f(h(u)) = \frac{1}{2}\langle Ax,x \rangle + f(y+g(y))$, onde $x = Pu$, $y = u - Pu$.

iv) h é diferenciável em 0 e $(dh)(0) = I_{\mathbb{H}}$.

Demonstração:

A parte $i)$ é conseqüência do Teorema da função implícita, que vale para o nosso caso já que temos a diferenciabilidade forte de ∇f em 0.

Seja $\varphi : \mathbb{E} \oplus \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{E} \oplus \mathbb{N}$, $\varphi(x,y) = (P(\nabla f)(x,y),\ y)$.

Então φ é fortemente diferenciável em $(0,0)$ e $(d\varphi)(0,0) = (A|E,\ I_{\mathbb{N}})$.

Portanto φ é localmente inversível perto de $(0,0)$ e $\varphi(0,0) = (0,0)$, e φ é um homeomorfismo de um aberto $\mathcal{U}_1$ contendo $(0,0)$ sôbre um aberto $W = \varphi(\mathcal{U}_1)$ contendo $(0,0)$, e o homeomorfismo inverso $\varphi^{-1} : W \longrightarrow \mathcal{U}_1$ é fortemente diferenciável em $(0,0)$. Assim a restrição de φ^{-1} ao conjunto $W \cap \mathbb{N}$ define uma função $\varphi^{-1}|W \cap \mathbb{N} : W \cap \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{U}_1$ que é fortemente diferenciável em $y = 0$.

A equação

$$\varphi^{-1}(0,y) = (g(y),\ y) \iff P(\nabla f)(g(y),\ y) = 0$$

define uma função $g : B \subset \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{E}$, $g(y) = P(\varphi^{-1}(0,y))$, onde $\mathcal{B}$ é um aberto em $\mathbb{N}$ contendo $0 \in \mathbb{N}$, $g(0) = 0 \in \mathbb{E}$, g fortemente diferenciável em $0 \in \mathbb{N}$:

$$(0,y) = \varphi\circ\varphi^{-1}(0,y) = (P(\nabla f)(\varphi^{-1}(0,y)),\ y) = (P(\nabla f)(P\varphi^{-1}(0,y)),y) =$$

$$= (P(\nabla f)(g(y),\ y),\ y);\ \text{portanto } P(\nabla f)(g(y),\ y) \equiv 0,$$

perto de $y = 0$. Além disso, $\varphi(g(y),\ y) = (P(\nabla f)(g(y),\ y),\ y) = (0,y)$.

Derivando $\varphi(g(y),\ y) = (0,y)$ no ponto $y = 0$ temos $(0,\ I_{\mathbb{N}}) = d\varphi(0,0) \circ (dg(0),\ I_{\mathbb{N}})$ e sendo $(d\varphi)(0,0)$ inversível então $(dg)(0) = 0$. E para $r_1 > 0$, suficientemente pequenos, podemos escolher $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{r_1}(0)\cap\mathbb{N}$, onde $\mathcal{B}_{r_1}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{E} \oplus \mathbb{N}: \|x\|^2 + |y|^2 < r_1\}$.

Isto prova *i*) e *ii*).

Vamos demonstrar *iii*).

Definimos $h_1 : \mathbb{E} \oplus \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{E} \oplus \mathbb{N}$, $h_1(x,y) = (x + g(y), y)$.

h_1 é fortemente diferenciável em $(0,0)$ e $dh_1(0,0) = I_{\mathbb{H}}$. Pelo Teorema da função inversa para funções fortemente diferenciáveis, h_1 é um homeomorfismo local de um aberto V_1 da origem $(0,0) \in \mathbb{E} \oplus \mathbb{N}$, $V_1 \subset \mathbb{E} \times \mathfrak{B}$ sôbre o aberto $W_1 = h_1(V_1)$.

E ainda para $r_1 > 0$, suficientemente pequeno, podemos escolher $V_1 = \mathfrak{B}_{r_1}(0)$ tal que $h_1 : \mathfrak{B}_{r_1}(0) \longrightarrow h_1(\mathfrak{B}_{r_1}(0))$ é um homeomorfismo.

Agora vamos provar a existência de r, $0 < r < r_1$ e de um homeomorfismo h_2, $h_2 : \mathfrak{B}_r(0) \subset \mathbb{E} \oplus \mathbb{N} \longrightarrow h_2(\mathfrak{B}_r(0)) \subset \mathbb{E} \oplus \mathbb{N}$ tal que $h_2(0) = 0$ e $f(h_1 \circ h_2(u)) = \frac{1}{2} <Ax, x> + f(y + g(y))$, $u = (x,y) \in \mathbb{E} \oplus \mathbb{N}$.

Procuramos h_2 da forma:

$$h_2(x,y) = (1 + \lambda(x,y))x_+ + (1 - \lambda(x,y))x_- + y =$$
$$= x + \lambda(x,y)(x_+ - x_-) + y \text{ onde } \lambda : \mathbb{E} \oplus \mathbb{N} \longrightarrow [\tfrac{-1}{2}, \tfrac{1}{2}] \subset \mathbb{R}.$$

Seja agora

$$\Psi(u) = \frac{1}{2} < Ax, x > + f(g(y), y); \; \Phi(u) = \Psi(u) - f(x + g(y), y).$$

<u>Afirmaçao</u>: $f(h_1 \circ h_2(u)) = \Psi(u)$ se, e somente se, vale:

$$\circledast \quad \lambda \|x\|^2 + \frac{\lambda}{2}(\|x_+\|^2 - \|x_-\|^2) = \Phi(x + \lambda(x_+ - x_-), y),$$

onde a notação $\|x\|$ é para a norma em $\mathbb{E}$ induzida por « ., . ».

Demonstraçao:

De fato:

$$f(h_1 \circ h_2(u)) = f(x + \lambda(x_+ - x_-) + g(y),\ y) =$$

$$= \Psi(x + \lambda(x_+ - x_-),\ y) - \Phi(x + \lambda(x_+ - x_-),\ y) =$$

$$= \frac{1}{2} < A(x + \lambda(x_+ - x_-),\ x + \lambda(x_+ - x_-) > +$$

$$+ f(g(y),\ y) - \Phi(x + \lambda(x_+ - x_-),\ y) =$$

$$= \frac{1}{2}(\|x_+\|^2 - \|x_-\|^2) + f(g(y),\ y) + \lambda\|x\|^2 + \frac{\lambda^2}{2}(\|x_+\|^2 - \|x_-\|^2)$$

$$- \Phi(x + \lambda(x_+ - x_-),\ y).$$

Agora procuramos $\lambda : \mathbb{E} \oplus \mathbb{N} \longrightarrow [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$ tal que $\otimes$ seja satisfeita.

É claro que se $x = 0$, $\Phi(0,y) = 0$ e portanto $\lambda(0,y) = 0$ é solução de $\otimes$.

Se $x \neq 0$, λ é solução de $\otimes$ se, e somente se, λ é ponto fixo da função $\Gamma(\circ,\ x,y) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Gamma(\lambda,x,y) = \|x\|^{-2}\left[\Phi(x + \lambda(x_+ - x_-),\ y) - \frac{\lambda^2}{2}\left(\|x_+\|^2 - \|x_-\|^2\right)\right].$$

Observemos que Γ é uma função C^1 da variável λ e queremos estimar $\left| \frac{d}{d\lambda} \Gamma(\lambda,x,y)\right|$.

Afirmaçao: Se $|\lambda| \leq \frac{1}{4}$ e $\|x\|$ é suficientemente pequeno, então $\left| \frac{d}{d\lambda} \Gamma(\lambda,x,y)\right| \leq \frac{1}{2}$.

Demonstração:

Observemos que *i*) e *ii*) implicam:

a) $P(\nabla\Phi)(x,y)=\nabla_x\Phi(x,y)=Ax - P\nabla f(x + g(y),\ y) = Ax - \nabla_x f(x + g(y),\ y)$

em particular:

$P(\nabla\Phi)(0,y) = 0, \quad d(P(\nabla\Phi))(0,0) = 0.$

Pela diferenciabilidade forte de $\nabla\Phi$ em $(0,0)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se

$\|u\| < \delta$ tem-se $\|P\nabla\Phi(x,y)\| = \|P\nabla\Phi(x,y) - P\nabla\Phi(0,y)\| \le \varepsilon\|x\|.$

Portanto

$$\frac{d}{d\lambda}\,\Gamma(\lambda,x,y) = \frac{d}{d\lambda}\left\{\|x\|^{-2}\left[\Phi(x + \lambda(x_+ - x_-),\ y) - \frac{\lambda^2}{2}\left(\|x_+\|^2 - \|x_-\|^2\right)\right]\right\} =$$

$$= \|x\|^{-2}\left[< P\nabla\Phi(x + \lambda(x_+ - x_-),\ y),\ (x_+ - x_-) > - \lambda\left(\|x_+\|^2 - \|x_-\|^2\right)\right]$$

e pelo lema

$$\left|\frac{d}{d\lambda}\,\Gamma(\lambda,x,y)\right| \le |\lambda| + |x_+ - x_-| \,.\, \|x\|^{-2} \,.\, |P\nabla\Phi(x + \lambda(x_+ - x_-),\ y)| \le$$

$$\le |\lambda| + \varepsilon\|x\|^{-2}\|x_+ - x_-\| \,.\, \|x + \lambda(x_+ - x_-)\| \le$$

$$\le |\lambda| + \varepsilon\|x\|^{-2} \,.\, \|x\| \,.\, 2\|x\| = |\lambda| + 2\varepsilon$$

onde $\|x\| = \|x_+ - x_-\| = \|x_+ + x_-\|$.

Quando se tem $|\lambda| \le \frac{1}{4}$ e $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, então $\left|\frac{d}{d\lambda}\,\Gamma(\lambda,x,y)\right| \le \frac{1}{2}$.

Observação: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\Phi(x,y)}{\|x\|^2} = 0$. Isto decorre dos seguintes fatos:

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2} < Ax,\ x > + f(y + g(y)) - f(x + y + g(y)),$$

Φ de classe C^1 na variável x, $\Phi(0,y) = 0$,

$$P(\nabla\Phi)(0,y) = (\nabla_x\Phi)(0,y) = 0; \quad d(P(\nabla\Phi))(0,0) = d(\nabla_x\Phi)(0,0) = 0.$$

e pela disigualdade do valor médio

$$|\phi(x,y)| = |\phi(x,y) - \phi(0,y)| \le \|x\| \sup_{0\le t\le 1}\{\|d_x\phi(tx,y)\|\} \le \|\nabla_x\phi(tx,y)\|.\|x\|$$

onde $d_x\phi(tx,y)\bar{x} = \langle A(tx) - \nabla_x f(tx + y + g(y)),\ \bar{x}\rangle = \langle\nabla_x\phi(tx,y),\ \bar{x}\rangle$.

Pela diferenciabilidade forte de $\nabla_x\phi$ em $(0,0)$, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\|(x,y)\| < \delta$ temos

$$\|\nabla_x\phi(tx,y)\| = \|\nabla_x\phi(tx,y) - \nabla_x\phi(0,y)\| \le \varepsilon\|tx\| \le \varepsilon\|x\|.$$

Assim, $|\phi(x,y)| \le \varepsilon\|x\|^2$ e portanto $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\phi(x,y)}{\|x\|^2} = 0.$

Seja agora $x \ne 0$ e $|(x,y)|$ suficientemente pequeno de tal modo que $\displaystyle\frac{|\phi(x,y)|}{\|x\|^2} = n \le \frac{1}{8}$.

Temos então que $\Gamma(\lambda,x,y)$ é uma função que vale $\displaystyle\frac{\phi(x,y)}{\|x\|^2}$ em $\lambda = 0$ e que tem módulo da derivada $\le \frac{1}{2}$ em $[\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}]$, e portanto vale a desigualdade

$$|\Gamma(\lambda,x,y) - \Gamma(\lambda_1,x,y)| \le \frac{1}{2}|\lambda - \lambda_1|,\quad |\lambda| \le \frac{1}{4},\quad |\lambda_1| \le \frac{1}{4}.$$

Fazendo $\lambda_1 = 0$ temos

$$|\Gamma(\lambda,x,y) - \frac{\phi(x,y)}{\|x\|^2}| \le \frac{1}{2}|\lambda| \text{ e portanto} \left|\,|\Gamma(\lambda,x,y)| - \frac{|\phi(x,y)|}{\|x\|^2}\right| \le \frac{1}{2}|\lambda|$$

$$\frac{|\phi(x,y)|}{\|x\|^2} - \frac{1}{2}|\lambda| \le |\Gamma(\lambda,x,y)| \le \frac{|\phi(x,y)|}{\|x\|^2} + \frac{1}{2}|\lambda|.$$

Tomando $\displaystyle|\lambda| \le 2\frac{|\phi(x,y)|}{\|x\|^2}$ temos $0 \le |\Gamma(\lambda,x,y)| \le 2n.$

Portanto $\Gamma(.,x,y)$, $x \ne 0$, aplica o intervalo $[-2n, 2n]$ em si mesmo e é uma contração.

Segue então que $\Gamma(.,x,y)$, $x \neq 0$, tem um único ponto fixo λ em $[-2\pi, 2\pi]$.

Observaçao:

a) A construção de $\lambda = \lambda(x,y)$ mostra que λ é limitada em uma vizinhança de $(0,0)$.

Além disso, ela é contínua nesta vizinhança, excepto nos pontos $(0,y)$, pois podemos aplicar a $\Gamma(.,x,y)$ a mesma demonstração do Teorema da contração uniforme.

Também $\lambda \in \left[\dfrac{-2|\phi(x,y)|}{\|x\|^2}, \dfrac{2|\phi(x,y)|}{\|x\|^2}\right]$,

o que implica que λ é contínua em $(0,0)$.

b) O fato que λ é limitada perto de $(0,0)$ garante que, mesmo não sendo contínua nos pontos $\{(0,y),\ y \neq 0\}$, h_2 é contínua nestes pontos e portanto em toda uma vizinhança de $(0,0)$, pois

$$\|h_2(x,y)-h_2(0,y_0)\| \leq \frac{3}{2}(\|x_+\|^2+\|x_-\|^2+|y-y_0|^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\|(x,y-y_0)\|.$$

A aplicação h_1 é claramente diferenciável em zero e $(dh_1)(0,0) = I_{\mathbb{H}}$.

Vamos mostrar agora que o mesmo acontece com h_2. De fato

$$\|h_2(x,y) - (x + y)\| = \|\lambda(x,y)(x_+ - x_-)\| = 0(\|x + y\|).$$

Em geral, porém, h_2 não é fortemente diferenciável em $(0,0)$ e portanto não podemos garantir a sua inversibilidade local via o teorema da função inversa.

Para mostrar a inversibilidade local de h_2 vamos construir explicitamente uma inversa.

Procuramos uma inversa de h_2 da forma

$$h_3(w,z) = [1 + k(w,z)]^{-1} w_+ + [1 - k(w,z)]^{-1} w_- + Z.$$

onde k é uma função a ser determinada.

<u>Afirmação</u>: $f(h_1(v)) = \Psi(h_3(v))$ se, e somente se, vale:

$$k\|w\|^2 = (\frac{3}{2}k^2 - \frac{k^4}{2})(\|w_+\|^2 - \|w_-\|^2) + (1 - k^2)^2\ \Phi(w,z) \qquad (**)$$

onde $v = (w,z) \in \mathbb{E} \oplus \mathbb{N}$.

<u>Demonstração</u>: $f(h_1(v)) = \Psi(h_3(v)) \iff f(w + z + g(z)) =$

$$= \frac{1}{2} < A[(1+k)^{-1}w_+ + (1-k)^{-1}w_-],\ (1+k)^{-1}w_+ + (1-k)^{-1}w_- > + f(z+g(z)) =$$

$$= \frac{1}{2}(1+k)^{-2} < Aw_+, w_+ > + \frac{1}{2}(1-k)^{-2} < Aw_-, w_- > + f(z+g(z)).$$

Assim temos que

$$2(1 - k^2)^2 f(w+z+g(z)) = (1-k)^2\|w_+\|^2 - (1+k)^2\|w_-\|^2 + $$
$$+ 2(1-k^2)^2 f(z+g(z))$$

$$2(1-k^2)^2 f(w+z+g(z)) = \|w_+\|^2 - \|w_-\|^2 - 2k\|w\|^2 +$$
$$+ k^2(\|w_+\|^2 - \|w_-\|^2) + 2(1-k^2)^2 f(z+g(z))$$

$$k\|w\|^2 = \frac{1}{2}(1+k^2)(\|w_+\|^2 - \|w_-\|^2) + (1-k^2)^2[f(z+g(z)) - f(w+z+g(z))].$$

Somando e subtraindo $\frac{1}{2}(1 - k^2)^2(\|w_+\|^2 - \|w_-\|^2)$ e levando em conta que $\Phi(w,z) = \frac{1}{2} <Aw,w> + f(z+g(z)) - f(w+z+g(z)) =$ $= \frac{1}{2}(\|w_+\|^2 - \|w_-\|^2) + f(z+g(z)) - f(w+z+g(z))$ obtemos

$$k\|w\|^2 = (\frac{3}{2}k^2 - \frac{k^4}{2})(\|w_+\|^2 - \|w_-\|^2) + (1 - k^2)^2\ \Phi(w,z).$$

Agora procuramos $k : \mathbb{E} \oplus \mathbb{N} \longrightarrow [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$ tal que (**) seja satisfeita.

Do fato que $w = 0$, $\Phi(0,z) = 0$ temos que $k(0,z) = 0$ é solução de (**).

Se $w \neq 0$, k é solução de (**) se, e somente se, k é ponto fixo da função $G(.,w,z) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$G(k,w,z) = \|w\|^{-2}\left[\frac{1}{2}(3k^2 - k^4)(\|w_+\|^2 - \|w_-\|^2) + (1 - k^2)^2\, \Phi(w,z)\right].$$

G é uma função C^1 da variável k e queremos estimar $\left|\frac{d}{dk}\, G(k,w,z)\right|$.

<u>Afirmação</u>: se $|k| \leq \frac{1}{22}$ e $\|w\|$ é suficientemente pequeno, então $\left|\frac{d}{dk}\, G(k,w,z)\right| \leq \frac{1}{2}$.

<u>Demonstração</u>:

Derivando G em relação a k temos

$$\frac{d}{dk}\, G(k,w,z) = \|w\|^{-2}\left[(3k - 2k^3)(\|w_+\|^2 - \|w_-\|^2) - 4k(1-k^2)\Phi(w,z)\right].$$

$$\frac{d}{dk}\, G(k,w,z) = (3k - 2k^3)\left[1 - \frac{2\|w_-\|^2}{\|w\|^2}\right] + (4k^3 - 4k)\, \frac{\Phi(w,z)}{\|w\|^2}.$$

Supondo $|k| \leq \frac{1}{2}$ e usando que $\lim\limits_{w \to 0} \frac{\Phi(w,z)}{\|w\|^2} = 0$,

temos:

$$\left|\frac{d}{dk}\, G(k,w,z)\right| \leq \left|3k - 2k^3\right| . \left|1 - \frac{2\|w_-\|^2}{\|w\|^2}\right| + \left|4k^3 - 4k\right| . \frac{|\Phi(w,z)|}{\|w\|^2} \leq$$

$$\leq |3k - 2k^3|.3 + |4k^3 - 4k| \cdot \frac{|\phi(w,z)|}{\|w\|^2} \leq$$

$$\leq 6|k|^3 + 9|k| + (4|k|^3 + 4|k|) \frac{|\phi(w,z)|}{\|w\|^2} \leq$$

$$\leq \frac{3}{2}|k| + 9|k| + 5|k|\varepsilon \leq \frac{21}{2}|k| + \frac{5}{2}\varepsilon \leq \frac{1}{2} \iff$$

$$\iff 0 < 5\varepsilon < 1 - 21|k| \quad \text{onde} \quad \frac{-1}{21} < k < \frac{1}{21}.$$

Tomando $\frac{-1}{22} \leq k \leq \frac{1}{22}$ temos $0 < \varepsilon < \frac{1}{110}$.

Seja agora $w \neq 0$, $|(w,z)|$ suficientemente pequeno de tal modo que $\frac{|\phi(w,z)|}{\|w\|^2} = \alpha < \frac{1}{110}$.

Então $G(k,w,z)$ é uma função que vale $\frac{\phi(w,z)}{\|w\|^2}$ em $k = 0$ e que tem módulo da derivada $\leq \frac{1}{2}$ em $[\frac{-1}{22}, \frac{1}{22}]$ e portanto vale a desigualdade $|G(k,w,z) - G(k_1,w,z)| \leq \frac{1}{2}|k - k_1|$.

Fazendo $k_1 = 0$ temos

$$\left|G(k,w,z) - \frac{\phi(w,z)}{\|w\|^2}\right| \leq \frac{1}{2}|k| \quad \text{e portanto}$$

$$\left||G(k,w,z)| - \frac{|\phi(w,z)|}{\|w\|^2}\right| \leq \frac{1}{2}|k|,$$

$$\frac{|\phi(w,z)|}{\|w\|^2} - \frac{1}{2}|k| \leq |G(k,w,z)| \leq \frac{|\phi(w,z)|}{\|w\|^2} + \frac{1}{2}|k|.$$

Tomando $|k| \leq 2\frac{|\phi(w,z)|}{\|w\|^2}$, temos

$$0 \leq |G(k,w,z)| \leq 2\alpha.$$

Portanto $G(.,w,z)$, $w \neq 0$, aplica o intervalo $[-2\alpha, 2\alpha]$ em si mesmo e é uma contração. Então $G(.,w,z)$ tem um único ponto fixo k em $[-2\alpha, 2\alpha]$, que depende continuamente de (w,z), $w \neq 0$, para todo $(w,z) \in \mathcal{B}_{r_3}(0)$, $w \neq 0$, $r_3 > 0$, onde $\mathcal{B}_{r_3}(0)$ denota uma bola aberta de centro 0 e raio $r_3 > 0$. Também $k \in \left[\frac{-2|\phi(w,z)|}{\|w\|^2}, \frac{2|\phi(w,z)|}{\|w\|^2}\right]$, o que implica que k é contínua em $(0,0)$.

<u>Afirmação</u>: h_3 é contínua em $\mathcal{B}_{r_3}(0)$ e $(d\, h_3)(0,0) = I_{\mathbb{H}}$ onde

$$h_3(w,z) = (1 + k(w,z))^{-1}\, w_+ + (1 - k(w,z))^{-1}\, w_- + z \quad \text{e} \quad k(0,z) = 0.$$

<u>Demonstração</u>: $h_3 : \mathcal{B}_{r_3}(0) \subset \mathbb{H} \longrightarrow h_3(\mathcal{B}_{r_3}(0)) \subset \mathbb{H}$ é contínua nos pontos $(w,z) \in \mathcal{B}_{r_3}(0)$, $w \neq 0$, pois $k = k(w,z)$ é contínua nesses pontos, e $1 + k(w,z) \neq 0$, $1 - k(w,z) \neq 0$ onde $|k(w,z)| \leq \frac{1}{22}$.

Usando o fato que $|k| < \frac{1}{2}$ temos

$$\|h_3(w,z) - h_3(0,z_0)\|^2 = \left\|\frac{w_+}{1 + k(w,z)} + \frac{w_-}{1 - k(w,z)} + z - z_0\right\|^2 =$$

$$= \frac{\|w_+\|^2}{|1 + k(w,z)|^2} + \frac{\|w_-\|^2}{|1 - k(w,z)|^2} + |z - z_0|^2 \leq$$

$$\leq 4\|w_+\|^2 + 4\|w_-\|^2 + 4|z - z_0|^2 = 4\|(w, z-z_0)\|^2$$

Portanto $\|h_3(w,z) - h_3(0, z_0)\| \leq 2\|(w, z-z_0)\|$ e h_3 é contínua nos pontos $(0, z_0) \in \mathcal{B}_{r_3}(0)$.

Vamos mostrar agora que $(d\ h_3)(0,0) = I_{\mathbb{H}}$.

De fato:

$$\|h_3(w,z) - (w+z)\|^2 = \left\|\frac{w_+}{1+k(w,z)} - w_+ + \frac{w_-}{1-k(w,z)} - w_-\right\|^2 =$$

$$= \frac{(k(w,z))^2\|w_+\|^2}{(1+k(w,z))^2} + \frac{(k(w,z))^2\|w_-\|^2}{(1-k(w,z))^2} \leq$$

$$\leq 4(k(w,z))^2\|w_+\|^2 + 4(k(w,z))^2\|w_-\|^2 =$$

$$= 4(k(w,z))^2\|w\|^2 \leq 4(k(w,z))^2\|w+z\|^2.$$

Então $\displaystyle\lim_{(w,z)\to(0,0)} \frac{\|h_3(w,z) - (w+z)\|}{\|w+z\|} = 0.$

<u>Afirmação</u>: h_3 é a função inversa (local) de h_2.

<u>Demonstração</u>:

Para provarmos que h_3 é seguramente a função inversa (local) de h_2, basta provarmos que $\lambda(x,y) = k(w,z)$, pois

$$(h_2 \circ h_3)(w,z) = h_2\left(\frac{w_+}{1+k(w,z)} + \frac{w_-}{1-k(w,z)} + z\right) =$$

$$= \frac{(1+\lambda(x,y))}{1+k(w,z)}\, w_+ + \frac{(1-\lambda(x,y))}{1-k(w,z)}\, w_- + z = w_+ + w_- + z$$

$$\Leftrightarrow \lambda(x,y) = k(w,z).$$

Analogamente, $(h_3 \circ h_2)(x+y) = x + y \Leftrightarrow \lambda(x,y) = k(w,z)$.

Para facilitar os cálculos, usamos a notação $\lambda = \lambda(x,y)$ e $k = k(w,z)$.

Tomemos as equações que definem as contrações $\Gamma(\cdot, x, y)$ e $G(\cdot, w, z)$, $x \neq 0$, $w \neq 0$:

$$\lambda = -\frac{\lambda^2}{2}\left[\frac{\|x_+\|^2 - \|x_-\|^2}{\|x\|^2}\right] + \frac{1}{\|x\|^2}\,\phi(x + \lambda(x_+ - x_-) + y) = \Gamma(\lambda, x, y)$$

$$k = \frac{1}{2}(3k^2 - k^4)\left[\frac{\|w_+\|^2 - \|w_-\|^2}{\|w\|^2}\right] + (1 - k^2)^2\,\frac{\phi(w, z)}{\|w\|^2} = G(k, w, z)$$

e os sistemas que definem h_3 e h_2

$$h_3 \begin{cases} x_+ = \dfrac{w_+}{1 + k} \\ x_- = \dfrac{w_-}{1 - k} \\ y = z \end{cases} \qquad\qquad h_2 \begin{cases} w_+ = (1 + \lambda)x_+ \\ w_- = (1 - \lambda)x_- \\ z = y \end{cases}$$

Observemos que $x \neq 0 \iff w \neq 0$,

$w + z = x + \lambda(x_+ - x_-) + y$, $\|x\|^2 = \|x_+\|^2 + \|x_-\|^2 =$

$$= \frac{\|w_+\|^2}{(1 + k)^2} + \frac{\|w_-\|^2}{(1 - k)^2}.$$

Suponhamos que $w = w_+ + w_- \neq 0$.

No caso $w = 0$ temos $x = 0$ e $\lambda(0, y) = k(0, z) = 0$.

Da equação $\lambda = \Gamma(\lambda, x, y)$, $x \neq 0$, temos

$$\lambda = -\frac{\lambda^2}{2}\left[\frac{(1 - k)^2\|w_+\|^2 - (1 + k)^2\|w_-\|^2}{(1 - k)^2\|w_+\|^2 + (1 + k)^2\|w_-\|^2}\right] + \frac{(1-k)^2(1+k)^2\phi(w, z)}{(1-k)^2\|w_+\|^2 + (1+k)^2\|w_-\|^2}$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda(1-k)^2\|w_+\|^2 + 2\lambda(1+k)^2\|w_-\|^2 =$$

$$= -\lambda^2\Big[(1-k)^2\|w_+\|^2 - (1+k)^2\|w_-\|^2\Big] + 2(1+k)^2(1-k)^2\phi(w+z)$$

$$\lambda(2+\lambda)(1-k)^2\|w_+\|^2 + \lambda(2-\lambda)(1+k)^2\|w_-\|^2 = 2(1-k^2)^2\phi(w,z)$$

dividindo os dois membros por $\|w\|^2 \neq 0$

$$\frac{1}{\|w\|^2}\Big[\lambda(2+\lambda)(1-k)^2\|w_+\|^2 + \lambda(2-\lambda)(1+k)^2\|w_-\|^2\Big] = 2(1-k^2)^2\,\frac{\phi(w,z)}{\|w\|^2}$$

e usando a equação $k = G(k,w,z)$ obtemos

$$\lambda(2+\lambda)(1-k)^2\|w_+\|^2 + \lambda(2-\lambda)(1+k)^2\|w_-\|^2 =$$

$$= 2k\|w\|^2 + (-3k^2+k^4)[\|w_+\|^2 - \|w_-\|^2]$$

$$[\lambda(2+\lambda)(1-k)^2+3k^2-k^4-2k]\|w_+\|^2+[\lambda(2-\lambda)(1+k)^2-3k^2+k^4-2k]\|w_-\|^2 = 0$$

$$(k-1)^2(\lambda+k+2)(\lambda-k)\|w_+\|^2 + (k+1)^2(-k-\lambda+2)(\lambda-k)\|w_-\|^2 = 0$$

$$(\lambda-k)[(k-1)^2(\lambda+k+2)\|w_+\|^2 + (k+1)^2(-k-\lambda+2)\|w_-\|^2] = 0.$$

Usando que $|\lambda| \leq \frac{1}{2}$ e $|k| \leq \frac{1}{22}$ temos que a expressão entre colchetes é estritamente positiva e portanto $\lambda = \lambda(x,y) = k(w,z) = k$, e h_3 é realmente a inversa local de h_2.

Para encerrar a demonstração vamos mostrar a existência de r, $0<r<r_1$, tal que $h_2:\mathscr{B}_r(0) \subset \mathbb{E}\oplus\mathbb{N} \longrightarrow h_2(\mathscr{B}_r(0)) \subset \mathbb{E}\oplus\mathbb{N}$ é um homeomorfismo. Sendo h_2 e $\lambda = \lambda(x,y)$ contínuas em $(0,0)$, com $h_2(0,0) = 0$, $\lambda(0,0) = 0$ e $\|h_2(x,y)\| \leq \frac{3}{2}\|x,y)\|$, podemos escolher r_2, $0 < r_2 < \frac{r_1}{2}$, tal que

$$h_2(\mathscr{B}_{r_2}(0)) \subset \mathscr{B}_{r_1}(0) \quad \text{e} \quad |\lambda(x,y)| \leq \frac{1}{2} \text{ para } (x,y) \in \mathscr{B}_{r_2}(0).$$

Como antes, h_3 e $k = k(w,z)$ são contínuas em $(0,0)$, com $h_3(0,0) = 0$, $k(0,0) = 0$ e $\|h_3(w,z)\| \leq 2\|(w,z)\|$, podemos encontrar r_3, $0 < r_3 < \frac{r_2}{2}$, tal que

$h_3(\mathcal{B}_{r_3}(0)) \subset \mathcal{B}_{r_2}(0)$ e $|k(w,z)| \leq \frac{1}{22}$.

Sendo $|k(w,z)| \leq \frac{1}{22}$ para $(w,z) \in \mathcal{B}_{r_3}(0)$ e $|\lambda(x,y)| \leq \frac{1}{2}$ para $(x,y) \in h_3(\mathcal{B}_{r_3}(0))$, então $h_3 : \mathcal{B}_{r_3}(0) \longrightarrow h_3(\mathcal{B}_{r_3}(0))$ é um homeomorfismo de $\mathcal{B}_{r_3}(0)$ sôbre o aberto $h_3(\mathcal{B}_{r_3}(0))$.

Agora podemos escolher r, $0 < r < r_2$, tal que $\mathcal{B}_r(0) \subset h_3(\mathcal{B}_{r_3}(0))$, e temos que $h_2 : \mathcal{B}_r(0) \longrightarrow h_2(\mathcal{B}_r(0))$ é um homeomorfismo de $\mathcal{B}_r(0)$ sôbre o aberto $h_2(\mathcal{B}_r(0)) \subset \mathcal{B}_{r_1}(0)$.

■

2.4. Cálculo dos grupos de *Morse* de um ponto crítico isolado, possivelmente degenerado:

Seja $\Omega \subset \mathbb{H}$ um conjunto aberto, a origem $0 \in \Omega$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $\nabla f(0) = 0$, e $\nabla f(x) \neq 0$, $\forall x \in \Omega - \{0\}$, uma função satisfazendo as hipoteses do *Lema de Morse generalizado*, então existem uma vizinhança aberta $V \subset \mathbb{H}$ de zero, uma vizinhança aberta em $\mathbb{N} = Ker\ A$, $B \subset \mathbb{N}$ de zero, um homeomorfismo

$$h : \mathcal{U} = h(V) \subset \mathbb{H}$$

e uma função contínua $g : B \longrightarrow \mathbb{E}$, tais que:

i) $P(\nabla f)(g(y), y) \equiv 0$, onde $P : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{E} = \mathbb{N}^{\perp} = Im\ A$ é a projeção ortogonal.

ii) $g(0) = 0$, $(dg)(0) = 0$ e g é fortemente diferenciável em 0.

iii) $\tilde{f}(u) = f(h(u)) = \frac{1}{2} < Ax, x > + f(y + g(y))$, onde $x = Pu$, $y = u - Pu$.

iv) h é diferenciável em 0 e $(dh)(0) = I_{\mathbb{H}}$.

Denotemos por $x_+ + x_- + y$ um ponto de $\mathbb{H} = \mathbb{E}_+ \oplus \mathbb{E}_- \oplus \mathbb{N}$, onde $x = x_+ + x_- \in \mathbb{E} = \mathbb{E}_+ + \mathbb{E}_-$ e $y \in \mathbb{N}$. Seja $\mathcal{B}_\varepsilon$ a bola aberta de centro 0, de raio $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, tal que $\mathcal{B}_\varepsilon \subset V$.

Seja $D = D_+ \oplus D_- \oplus D_0 \subset \mathcal{B}_\varepsilon \subset \mathbb{H} = \mathbb{E}_+ \oplus \mathbb{E}_- \oplus \mathbb{N}$ a soma direta de 3 discos abertos:

$$D_+ \subset \mathcal{B}_\varepsilon \cap \mathbb{E}_+,\ D_- \subset \mathcal{B}_\varepsilon \cap \mathbb{E}_-,\ D_0 \subset \mathcal{B}_\varepsilon \cap \mathbb{N},$$

onde D_+ tem centro 0_+, D_- tem centro 0_- e D_0 tem centro $0_{\mathbb{N}}$, com $0 = (0_+, 0_-, 0_{\mathbb{N}}) \in \mathbb{E}_+ \oplus \mathbb{E}_- \oplus \mathbb{N}$.

Com estas notações e usando argumentos padrões de topologia algébrica valem os seguintes resultados:

i) O par de espaços topológicos

$$\big([(D_- \oplus D_0) \cap (\tilde{f} < 0)] \cup \{0\},\ (D_- \oplus D_0) \cap (\tilde{f} < 0)\big)$$

é um retrato por deformação do par

$$\big([D \cap (\tilde{f} < 0)] \cup \{0\},\ D \cap (\tilde{f} < 0)\big)$$

$$\text{onde } (\tilde{f} < a) := \{p \in D : \tilde{f}(p) < a\}$$

ii) O par $\big([D_- \oplus D_0) \cap (\tilde{f} < 0)] \cup \{0\},\ (D_- \oplus D_0) \cap (\tilde{f} < 0)\big)$ é homologicamente equivalente ao produto

$$\big(D_- \cap (\tilde{f}<0),\ D_- \cap (\tilde{f}<0)\big) \times \big([D_0 \cap (\tilde{f}<0)] \cup \{0\},\ D_0 \cap (\tilde{f}<0)\big)$$

iii) Sendo 0 o único ponto crítico de f em Ω, e como os grupos de homologia são invariantes por homeomorfismos, então valem os isomorfismos $H_k(0) = H_k(f,0) := H_k(f \leq \varepsilon,\ f \leq -\varepsilon) =$

$$= H_k([h(D) \cap (f < 0)] \cup \{0\},\ h(D) \cap (f < 0)) =$$

$$= H_k([D \cap (\tilde{f} < 0)] \cup \{0\},\ D \cap (\tilde{f} < 0)) =$$

$$= H_{k-\lambda}([D_0 \cap (\tilde{f} < 0)] \cup \{0_N\},\ D_0 \cap (\tilde{f} < 0))$$

onde $\lambda = dim\ D_- = \lambda(f,0)$ e sendo o espaço D_0 limitado e contido no espaço vetorial de dimensão finita $\mathbb{N} = Ker\ A$ os grupos $H_{k-\lambda}([D_0 \cap (\tilde{f} < 0)] \cup \{0_N\},\ D_0 \cap (\tilde{f} < 0))$ são finitamente gerados e se anulam para k suficientemente grande.

<u>Observaçao 1)</u>: No caso que o ponto crítico $0 \in \Omega$ é não degenerado, vale o resultado acima, pois $D_0 = \{0_N\}$ e $D_0 \cap (\tilde{f} \leq 0) = \Phi$ (vazio) ou seja

$$H_k(0) = H_k(f,0) := H_k(f \leq \varepsilon,\ f \leq -\varepsilon) = H_k([D \cap (\tilde{f}<0)] \cup \{0\},\ D \cap (\tilde{f}<0)) =$$

$$= H_{k-\lambda}(\{0_N\},\ \Phi) = H_{k-\lambda}(\{0_N\}) = \delta_{k\lambda} G = \begin{cases} G, & k = \lambda \\ 0, & k \neq \lambda \end{cases}$$

onde G é o grupo dos coeficientes da teoria de homologia.

<u>Observaçao 2)</u>: Em virtude da fórmula acima $H_k(0) = H_k(f,0) = H_k(f \leq \varepsilon,\ f \leq -\varepsilon) = 0$ para qualquer k inteiro, $k \notin \{\lambda, \lambda+1, \ldots, \lambda+u\}$ onde $\lambda = dim\ D_-$ e $u = dim\ D_0 < \infty$.

Ao ponto crítico 0 associamos o invariante homológico $H_k^0(0) = H_k^0(f,0) := H_k([D_0 \cap (\tilde{f} < 0)] \cup \{0_N\},\ D_0 \cap (\tilde{f} < 0)) = H_k(\tilde{f}|D_0,\ 0_N) = H_k(f_0, 0_N)$ onde $f_0(y) = f(y + g(y))$, e $H_k^0(0)$ é denominado invariante caracteristico.

No caso que os coeficientes de homologia singular são tomados num corpo $\mathbb{F}$, temos o número de *Betti* $b_k(0) = dim_{\mathbb{F}}\ H_k(0)$ e $b_k^0(0) := dim_{\mathbb{F}}\ H_k^0(0)$ e vale que

$$b_{k+\lambda}(0) = b_k^0(0) \text{ onde } \lambda = dim\ D_- = \lambda(f,0).$$

De $h|D_0 : D_0 \longrightarrow h(D_0) \subset D$, $h(y) = y + g(y)$ e $d(h|D_0)(0_N) = I_N$, $S = h(D_0)$ é uma subvariedade topologica de $\mathbb{H}$ para f em 0 denominada subvariedade caracteristica.

2.5. Desigualdades de Morse:

Sejam $c_1, c_2, \ldots, c_N$ os valores críticos (isolados) de f em $[a,b]$ onde a e b são valores regulares de f, então valem as desigualdades de *Morse*

$$\sum_{\ell=0}^{k} (-1)^{k-\ell} b_\ell(f \le b,\ f \le a) \le \sum_{c_j} \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^{k-\ell} b_\ell(c_j),\ j = 1,2,\ \ldots,\ N$$

$$b_k(f \le b,\ f \le a) \le \sum_{c_j} b_j(c_j),\ j = 1,2,\ \ldots,\ N$$

onde $b_k(f \le b,\ f \le a) = dim_{\mathbb{F}}\ H_k(f \le b,\ f \le a)$ e $b_k(c_j) = $ $= dim_{\mathbb{F}} H_k(f \le c_j + \varepsilon,\ f \le c_j - \varepsilon)$, para $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, tal que c_j é o único valor crítico em $[c_j - \varepsilon,\ c_j + \varepsilon]$.

2.6. Subvariedades críticas possivelmente degeneradas de uma variedade de Hilbert

Dizemos que uma subvariedade conexa K de uma variedade de Hilbert M é crítica para uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 se $df(x) = 0$, $\forall x \in K$. Se f satisfaz a condição de compacidade (C) de Palais-Smale, então K é compacta.

O espaço tangente a M em $x \in K$ admite uma decomposição ortogonal:

$T_xM = T_xK \oplus H_1(x)$, onde $H_1(x) = (T_xK)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_xK.

Supondo f duas vezes diferenciável nos pontos de K, colocamos para todo $x \in K$, $A_x \equiv d^2f(x)$ onde

$$d^2f(x)(X, Y) = \langle A_xX, Y\rangle = \langle x, A_xY\rangle.$$

Como $A_x : T_xM \longrightarrow T_xM$ é um operador auto-adjunto, então $A_x(H_1(x)) \subset H_1(x)$.

Pela definição de subvariedade crítica temos que $T_xK \subset Ker\ A_x$.

Para verificarmos que $T_xK \subset Ker\ A_x$, suponhamos que a subvariedade crítica K é modelada a um espaço de Hilbert Y , então para cada $x \in K$ existe uma vizinhança aberta V de $0 \in Y$, e uma vizinhança aberta W de x em M e um difeomorfismo $\Phi : V \subset Y \longrightarrow W \cap K$ e o espaço tangente de K em x escreve

$$T_xK = \{d\Phi(\Phi^{-1}(x))v : v \in Y\}.$$

Para cada $y \in V \subset Y$ temos $df(\phi(y)) = 0$.

Então,

$$d^2f(\phi(y))d\phi(y)v = 0 \text{ , pora todo } y \in V \text{ e } v \in Y.$$

Em particular, $d^2f(x)d\phi(\phi^{-1}(x))v = 0$ para todo $v \in Y$, então $T_xK \subset Ker\ A_x$.

Definição: Dizemos que K é uma subvariedade crítica não-degenerada se $A_x|H_1(x)$ é um isomorfismo para todo $x \in K$.

No caso contrário dizemos que a subvariedade K é crítica degenerada.

Suponhanos para o restante deste parágrafo, que $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1, duas vezes diferenciável ao longo de uma subvariedade critica possivelmente degenerada K, tal que A_x é um operador de Fredholm que depende contínuamente de x em K , e f satisfaz a condição (C).

Com estas hipóteses sobre f temos que uma subvariedade crítica $K \subset M$ para $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $\dim K = \dim T_x K \leq \dim Ker\ A_x < \infty$.

Se a subvariedade crítica $K \subset M$ é não-degenerada então $T_x K = Ker\ A_x$, para todo $x \in K$, e a nulidade de cada $x \in K$ é igual a dimensão de K, e sendo A_x um operador de Fredholm, o Teorema Espectral implica que $H_1(x) = (T_x K)^{\perp}$ admite uma decomposição ortogonal em soma direta $H_1(x) = H^-(x) \oplus H^+(x)$, tal que $H^-(x)$ e $H^+(x)$ são subespaços invariantes por A_x , A_x definida negativa em $H^-(x)$, A_x definida positiva em $H^+(x)$, e a decomposição depende contínuamente de $x \in K$.

O índice de Morse de uma subvariedade crítica não-degenerada $K \subset M$ é definido como sendo o índice de Morse de $d^2 f(x)$, $x \in K$.

O índice de Morse de um ponto crítico $x \in K$ é o supremo das dimensões dos subespaços vetoriais de $H_1(x)$ nos quais $d^2 f(x)$ é definida negativa. Por continuidade este número é independente de x, pois K é conexa, portanto $H^-(x)$ tem dimensão constante.

No caso de uma subvariedade crítica $K \subset M$, possivelmente degenerada, o subespaço $H_1(x)$ admite uma decomposição ortogonal em soma direta

$$H_1(x) = H^-(x) \oplus H^+(x) \oplus H^0(x)$$

tal que $H^\pm(x)$ e $H^0(x)$ são subespaços invariantes por A_x , A_x é definida positiva em $H^+(x)$, $H^0(x) = Ker(A_x | H_1(x))$ e quando x varia em K pode acontecer que as dimensões de $H^-(x)$ e $H^0(x)=Ker(A_x | H_1(x))$ não sejam preservadas ao longo de K.

A aplicação $A_x \equiv d^2f(x)$ define uma aplicação

$$A : H_1(K) = \bigcup_{x\in K} H_1(x) \longrightarrow H_1(K) = \bigcup_{x\in K} H_1(x).$$

Suponhamos daqui para frente que $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função definida em uma variedade de Hilbert M e $K \subset M$ é uma subvariedade crítica, conexa, possivelmente degenerada, satisfazendo as seguintes hipóteses:

(1) f é de classe C^1 , e $f \equiv 0$ em K.

(2) K é uma subvariedade crítica isolada.

(3) f admite segunda derivada $d^2f(x)$ para todo $x \in K$ que depende contínuamente de x e o operador auto-adjunto A_x associado à segunda derivada é um operador de Fredholm.

(4) Na decomposição ortogonal de $H_1(x) =(T_xK)^\perp = H^-(x)\oplus H^+(x)\oplus H^0(x)$ os subespaços $H^-(x)$, $H^+(x)$, $H^0(x)$ mantém preservadas as dimensões quando x varia em K, isto é, $H^*(x)$ isomorfo a $H^*(y)$, $\forall x$, $y \in K$, onde $* = -$, $+$, 0 .

(5) f satisfaz a condição (C) de compacidade de Palais-Smale.

(6) O gradiente de f, $gradf(x)$, é fortemente diferenciável nos pontos $x \in K$.

Observaçao 1): Pela condição (4) temos a decomposição de fibrados

$$H_1(K) = H^-(K) \oplus H^+(K) \oplus H^0(K)$$

onde

$$H^-(K) = \bigcup_{x\in K} H^-(x) \ , \ H^+(K) = \bigcup_{x\in K} H^+(x), \ H^0(K) = \bigcup_{x\in K} H^0(x).$$

Neste caso o índice de Morse de K é a dimensão da fibra $H^-(x)$ e a nulidade de K é a dimensão da fibra $H^0(x)$.

Observaçao 2): Como o conjunto Fred(H) dos operadores de Fredholm de um espaço de Hilbert H é um conjunto aberto no espaço dos operadores lineares contínuos $\mathcal{L}(H\ ,\ H)$, na topologia uniforme, e o índice $i(A)$ dado por

$$i(A) = dim\ Ker\ A - dim\ Coker\ A$$

é constante nas componentes conexas, temos que

$$i(A_x) = dim\ Ker\ A_x - dim\ Coker\ A_x$$

é constante quando x varia na subvariedade crítica K , possivelmente degenerada.

2.7. Invariantes homológicos associados a uma subvariedade crítica K de $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, possivelmente degenerada.

Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendo as hipóteses (1), (2), (3), (4), (5) e (6) enunciadas anteriormente. Passaremos agora a descrever a maneira como determinar os invariantes homológicos da subvariedade crítica K.

Sendo K subvariedade compacta de M, podemos contornar K por uma vizinhança tubular, suficientemente pequena. Para obtermos essa vizinhança consideramos o fibrado vetorial $\pi : E \longrightarrow K$, onde $E = H_1(K) = \bigcup_{x\in K} H_1(x)$ fibrado normal de K em M, e em seguida uma vizinhança V_δ da seção zero em $H_1(K)$.

Como K é compacta, podemos escolher $\delta > 0$ suficientemente pequeno, tal que, a aplicação exponencial dá um difeomorfismo $\exp: V_\delta \longrightarrow U = \exp(V_\delta) \supset K$, para isto, ver [La.2], Lang, S.: Differential Manifolds.

Agora passamos a fazer uso desta identificação, escrevendo f no lugar de $f\circ\exp$.

V_δ escreve como uma união de discos abertos $V_\delta(x)$ de centro $x \in K$ e raio $\delta > 0$, $V_\delta = \bigcup_{x\in K} V_\delta(x)$, $V_\delta(x) \subset H_1(x)$, e tomemos δ suficientemente pequeno tal que f satisfaz o lema de Morse generalizado em $V_\delta(x)$, $\forall x \in K$.

Seja $D_\varepsilon(x) = D_\varepsilon^+(x) \oplus D_\varepsilon^-(x) \oplus D_\varepsilon^0(x) \subset V_\delta(x) \subset H_1(x) = H^-(x) \oplus H^+(x) \oplus H^0(x)$, a soma direta de 3 discos abertos de raios iguais a ε, $0 < \varepsilon < \delta$, onde

$D_\varepsilon^+(x) = D_\varepsilon(x) \cap H^+(x)$, $D_\varepsilon^-(x) = D_\varepsilon(x) \cap H^-(x)$, $D_\varepsilon^0(x) = D_\varepsilon(x) \cap H^0(x)$.

Denotemos por D_ε^0 o subfibrado de V_δ, $D_\varepsilon^0 = \bigcup_{x\in K} D_\varepsilon^0(x)$, cujas fibras são de dimensão $u = u(K)$ = nulidade de K, e denotemos por D_ε^- o subfibrado de V_δ, $D_\varepsilon^- = \bigcup_{x\in K} D_\varepsilon^-(x)$, cujas fibras são de dimensão $\lambda = \lambda(K)$ = índice de K.

A função $f_x \equiv f|V_\delta(x)$, $V_\delta(x) \subset H_1(x)$, é de classe C^1 e duas vezes diferenciável em $0 \in H_1(x)$ (que corresponde a $x \in K$, pela identificação feita anteriormente), e que tem 0 como ponto crítico de índice λ e nulidade u e f_x satisfaz o lema de Morse Generalizado e seja

$$\tilde{f}_x(u) = (f_x \circ h)(u) = \frac{1}{2}\langle Av , v\rangle + f(w + g(w)) ,$$

onde $h : D_\varepsilon \subset H_1(x) \longrightarrow h(D_\varepsilon) \subset H_1(x)$ é homeomorfismo, $w \in D_\varepsilon^0(x)$, $v \in D_\varepsilon^+(x) \oplus D_\varepsilon^-(x) \subset H^+(x) \oplus H^-(x) = (H^0(x))^{\perp}$.

Da prova da propriedade $b)$ que determina os grupos de Morse, para uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, duas vezes diferenciável em 0, sendo 0 um ponto crítico de índice λ e nulidade u, e $f(0) = 0$, nós obtemos um retrato por deformação R_x do par

$$([D_\varepsilon(x)\cap(\tilde{f}_x<0)]\cup\{0\} , D_\varepsilon(x)\cap(\tilde{f}_x<0))$$

sobre o par

$$([(D_\varepsilon^-(x) \oplus D_\varepsilon^0(x))\cap(\tilde{f}_x<0)]\cup\{0\} , (D_x^-(0) \oplus D_\varepsilon^0(x))\cap(\tilde{f}_x<0)) .$$

Estas retrações determinam um retrato por deformação do par

$$([D_\varepsilon\cap(\tilde{f} <0)]\cup\{K\} , D_\varepsilon\cap(\tilde{f} <0))$$

sobre o par

$$([(D_\varepsilon^- \oplus D_\varepsilon^0)\cap(\tilde{f}<0)]\cup\{K\} , (D_\varepsilon^- \oplus D_\varepsilon^0)\cap(\tilde{f}<0)) ,$$

sendo $D_\varepsilon = \bigcup_{x\in K} D_\varepsilon(x)$, $D_\varepsilon^- = \bigcup_{x\in K} D_\varepsilon^-(x)$ e $D_\varepsilon^0 = \bigcup_{x\in K} D_\varepsilon^0(x)$.

Sendo este último par homologicamente equivalente ao produto

$$((D_\varepsilon^- \cap (\tilde{f}<0) , (D^-\cap (\tilde{f}<0))\times([D_\varepsilon^0\cap(\tilde{f}<0)]\cup\{K\} , D_\varepsilon^0\cap(\tilde{f}<0)).$$

Então temos o isomorfismo dos grupos de homologia:

$$H_{\ell}([(D_{\varepsilon}\cap(\tilde{f}<0)]\cup\{K\}\ ,\ D_{\varepsilon}\cap(\tilde{f}<0)) \approx H_{\ell-\lambda}([D^0_{\varepsilon}\cap(\tilde{f}<0)]\cup\{K\}\ ,\ D^0_{\varepsilon}\cap(\tilde{f}<0))\ ,$$

onde $\lambda = dim\ D^-_{\varepsilon}(x)$, $u = dim\ D^0_{\varepsilon}(x) < \infty$.

À subvariedade crítica K de $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, K possivelmente degenerada, associamos o invariante homológico

$$H_{\ell}(f,K) = H_{\ell}([(D_{\varepsilon}\cap(\tilde{f}<0)]\cup\{K\}\ ,\ D_{\varepsilon}\cap(\tilde{f}<0))$$

e o invariante homológico

$$H^0_{\ell}(f,K) = H_{\ell}([D^0_{\varepsilon}\cap(\tilde{f}<0)]\cup\{K\}\ ,\ D^0_{\varepsilon}\cap(\tilde{f}<0))$$

e pela fórmula acima vale

$$H_{\ell}(f,K) = H^0_{\ell-\lambda}(f,K)\ .$$

Como a subvariedade crítica K é compacta temos que o fibrado $D^0_{\varepsilon} = \bigcup_{x\in K} D^0_{\varepsilon}(x)$ é limitado pois $u = dim\ D^0_{\varepsilon}(x) < \infty$.

Então $H_{\ell}(f,K)$ é finitamente gerado e se anula para l suficientemente grande.

Em particular $H_{\ell}(f,K) = 0$ para $\ell \notin \{\lambda,\ \lambda+1,\ \ldots,\ \lambda+u\}$.

Denotemos por $b_{\ell}(K)$ e por $b^0_{\ell}(K)$, $b_{\ell}(K) = dim\ H_{\ell}(f,K)$, $b^0_{\ell}(K) = dim\ H^0_{\ell}(f,K)$, também denominados números típicos e números típicos singulares, associados à subvariedade crítica K, respectivamente.

2.8. Desigualdades de Morse em termos dos números típicos $b_\ell(K)$ e em termos dos números típicos singulares $b_\ell^0(K)$ associados às subvariedades críticas (isoladas):

Sejam c_1, c_2, ..., c_N os valores críticos (isolados) de f em $[a, b]$, onde a e b são valores regulares de f, então temos as desigualdades de Morse:

Para todo inteiro $q \geq 0$

$$\sum_{\ell=0}^{q} (-1)^{q-\ell} b_\ell(f\leq b \ , \ f\leq a) \leq \sum_{(c_j)} \sum_{\ell=0}^{q} (-1)^{q-\ell} b_\ell(c_j) \ , \ j = 1, 2, \ldots, N$$

$$b_q(f\leq b \ , \ f\leq a) \leq \sum_{(c_j)} b_j(c_j) \ , \ j = 1, 2, \ldots, N$$

onde $b_q(c_j) = dim\ H_q(f\leq c_j+\varepsilon \ , \ f\leq c_j-\varepsilon)$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que c_j é o único valor crítico em $[c_j-\varepsilon \ , \ c_j+\varepsilon]$.

As desigualdades de Morse podem ser escritas em termos de números tipicos $b_q(K)$:

$$\sum_{\ell=0}^{q} (-1)^{q-\ell} b_\ell(f\leq b \ , \ f\leq a) \leq \sum_{K\in\sigma} \sum_{\ell=0}^{q} (-1)^{q-\ell} b_\ell(K)$$

$$b_\ell(f\leq b \ , \ f\leq a) \leq \sum_{K\in\sigma} b_\ell(K) \ ,$$

onde σ = conjunto das subvariedades críticas de f em $f^{-1}[a , b]$.

Pelo teorema do deslocamento que relaciona os números tipicos singulares de cada subvariedade critica, juntamente com o seu índice, as desigualdades de Morse escrevem-se:

$$\sum_{\ell=0}^{q} (-1)^{q-\ell} b_\ell(f\leq b \ , \ f\leq a) \leq \sum_{K\in\sigma} \sum_{\ell=0}^{q} (-1)^{q-\ell} b^0_{\ell-\lambda(K)}(K)$$

$$b_\ell(f\leq b \ , \ f\leq a) \leq \sum_{K\in\sigma} b^0_{q-\lambda(K)}(K)$$

onde $\lambda(K)$ é o índice de f ao longo de K.

CAPÍTULO III

3.1. A variedade das curvas fechadas

Seja M uma variedade *riemanniana* e $S = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ o círculo unitário parametrizado em $[0,1]$. Consideremos

$\Lambda M = \{c : S \longrightarrow M : c$ é contínua, $\dot{c}(t)$ existe para $q.t.$ $t \in S$, $\|\dot{c}(t)\| \in L^2(S^1)\}$

Nesta seção vamos desenvolver uma estrutura de variedade *riemanniana* (modelada em um espaço de *Hilbert*) para ΛM.

Antes de descrever os detalhes vamos dar a idéia da construção: se $c : S \longrightarrow M$ é uma curva fechada C^∞ e $X(t)$ um campo "pequeno" ao longo de c, a curva $c_x(t) = exp_{c(t)}X(t)$ é próxima a c, também toda curva próxima de c é obtida desta maneira pois exp é localmente inversível. Assim as curvas perto de c são descritas por campos "pequenos" ao longo de c que constituem um aberto em um espaço de *Hilbert* oportuno. Pela densidade de $C^\infty(S,M)$ em $C^0(S,M)$, temos um *atlas* em ΛM.

Seja $c \in C^\infty(S,M)$ e consideremos o diagrama "pull back"

$$\begin{array}{ccc} c^*TM & \xrightarrow{c^*_\pi} & TM \\ {\scriptstyle \pi^*_c}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ S & \xrightarrow{c} & M \end{array}$$

A métrica *riemanniana* e a conexão de *Levi Cevita* de M induzem uma métrica e uma conexão em c^*TM que denotaremos por $< , >$ e ∇, respectivamente, e para $\frac{d}{dt}$ usamos a notação clássica $\frac{d}{dt} X = X'$.

Seja $\sum(\pi_c^*)$ o espaço vetorial das seções de π_c^* (não necessariamente contínuas).

Definimos os subespaços

$$H^0(\pi_c^*) = L^2(\pi_c^*) = \{X \in \sum(\pi_c^*) : \|X(t)\| \in L^2(S)\}/\sim$$

onde $\sim$ é a relação que declara equivalentes duas seções que coincidem em quase todos os pontos de S.

$$H^1(\pi_c^*) = \{X \in \sum(\pi_c^*) : X'(t) \text{ existe } q.s. \text{ e } \|X'(t)\| \in L^2(S)\}$$

$$C^0(\pi_c^*) = \{X \in \sum(\pi_c^*) : X \text{ é contínuo}\}.$$

$H^i(\pi_c^*)$, $i = 0,1$, são espaços de *Hilbert* em relação aos produtos internos

$$< X, Y >_0 = \int_S < X(t), Y(t) > dt$$

$$< X, Y >_1 = < X, Y >_0 + < X', Y' >_0$$

e $C^0(\pi_c^*)$ é um espaço de *Banack* em relação a norma $\|X\|_\infty = sup\{\|X(t)\| : t \in S\}$.

O seguinte fato é bem conhecido:

<u>3.2. Proposição</u>:

(a) $H^1(\pi_c^*) \subseteq C^0(\pi_c^*) \subseteq H^0(\pi_c^*)$

(b) $\| \ \|_0 \leq \| \ \|_\infty \leq \sqrt{2} \ \| \ \|_1$

(c) A inclusão $H^1(\pi_c^*) \hookrightarrow C^0(\pi_c^*)$ é compacta (isto é, conjuntos limitados em $H^1(\pi_c^*)$ são relativamente compactos em $C^0(\pi_c^*)$).

Seja $exp : TM \longrightarrow M$ a aplicação exponencial e $Exp : TM \longrightarrow M \times M$, $Exp(v) = (\pi(v), exp\ v)$.

É bem conhecido que Exp é um difeomorfismo de uma vizinhança $\mathcal{U}$ da seção nula de TM sobre uma vizinhança da diagonal $\Delta \subseteq M \times M$.

Seja $\mathcal{U}_c = (c_\pi^*)^{-1}\mathcal{U}$. Então $\mathcal{U}_c$ é uma vizinhança aberta da seção nula em π_c^*. Consideremos

$$H^1(\mathcal{U}_c) = \{X \in H^1(\pi_c^*) \; : \; X(t) \in \mathcal{U}_c, \; \forall t \in S\}.$$

É então claro que $H^1(\mathcal{U}_c)$ é um aberto do espaço de *Hilbert* $H^1(\pi_c^*)$ e definimos a aplicação

$$\tilde{\phi}_c \; : \; H^1(\mathcal{U}_c) \longrightarrow \Lambda M, \; \tilde{\phi}_c(X)(t) = exp(c_\pi^* X(t)).$$

Sendo Exp inversível em $\mathcal{U}$ segue facilmente que $\tilde{\phi}_c$ é 1-1. Além disso, pela densidade de $C^\infty(S,M)$ em $C^0(S,M)$ o conjunto

$$\{\tilde{\phi}_c(H^1(\mathcal{U}_c)) \; : \; c \in C^\infty(S,M)\}$$

é uma cobertura de $\Lambda M (\subseteq C^0(S,M))$.

Temos assim um atlas para ΛM e temos que analizar as mudanças de cartas

$$\tilde{\phi}_{c_1}^{-1} \circ \tilde{\phi}_c \; : \; \Omega \subseteq H^1(\mathcal{U}_c) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}_{c_1}).$$

Para tanto vamos mostrar um resultado de carácter mais geral que utilizaremos também mais adiante. Sejam E, F fibrados vetoriais sobre S, $A \subseteq E$ uma vizinhança da seção nula e $\Phi : A \longrightarrow F$ uma função diferenciável que preserva fibras, isto é, para $\forall t \in S$, $\Phi|A_t$ é diferenciável e $\Phi(A_t) \subset F_t = \pi^{-1}(t)$, onde $A_t = A \cap p^{-1}(t) \neq \Phi$, $p : E \longrightarrow S$ é a projeção do fibrado E, $\pi : F \longrightarrow S$ é a projeção do fibrado F.

$\Phi : A \longrightarrow F$ induz uma aplicação $\tilde{\Phi}$ entre as seções de E (com valores em A) e as seções de F, $\tilde{\Phi}(X)(t) = \Phi(X(t))$.

Seja agora $K : TE \longrightarrow E$ uma conexão.

Então K determina uma decomposição $TE = T^hE \oplus T^vE$ sendo

$$(T^hE)_x = Ker(K|T_xE); \ (T^vE)_x = Ker(dp)_x.$$

A aplicação $(d\Phi)_x : T_xE \longrightarrow T_{\Phi(x)}F$ decompõe-se então

$$(d\Phi)_x = (d_1\Phi)_x + (d_2\Phi)_x$$

nas partes horizontal e vertical, respectivamente, $d_2\Phi$ é portanto de uma vizinhança da seção nula de T^vE em TF. Indutivamente podemos considerar a derivada vertical r-ésima de Φ, que vamos indicar por $d_2^r\Phi$ e denotamos por $(\widetilde{d_2^r\Phi})$ a aplicação induzida por $d_2^r\Phi$ a nível de seções.

Consideremos agora métricas em E e F e assim podemos definir $H^1(\mathcal{U})$, $H^1(E)$, $H^1(F)$ em analogia com o que foi feito acima.

3.3. Proposiçao:

Se Φ é de classe C^k, $k \geq 1$, então

$$\tilde{\Phi}(H^1(\mathcal{U})) \subseteq H^1(F) \quad \text{e} \quad \tilde{\Phi} : H^1(\mathcal{U}) \longrightarrow H^1(F),$$

$\tilde{\Phi}(X)(t) = \Phi(X(t))$, é de classe C^k e $d^r\tilde{\Phi} = (\widetilde{d_2^r\Phi})$.

Demonstraçao:

Seja $\mathcal{U}$ uma vizinhança da seção nula de E. Mostremos primeiramente que $\tilde{\Phi} : H^1(\mathcal{U}) \longrightarrow H^1(F)$ é contínua e que $H^1(\mathcal{U})$ é aberto de $H^1(E)$.

Seja $C^0(\mathcal{U})$ o conjunto das seções contínuas X do fibrado $p : E \longrightarrow S$, com $X(t) \in \mathcal{U}_t$.

Então existe $\rho > 0$ tal que $X \in C^0(\mathcal{U})$,

$$Y \in C^0(E), \ \|X - Y\|_\infty < \rho \ \Rightarrow \ Y(t) \in \mathcal{U}_t, \ \forall t \in S.$$

Então $C^0(\mathcal{U})$ é um aberto de $C^0(E)$.

$H^1(\mathcal{U})$ é a imagem inversa de $C^0(\mathcal{U})$ pela inclusão contínua $H^1(E) \hookrightarrow C^0(E)$ e portanto $H^1(\mathcal{U})$ é aberto.

Para mostrar que $\tilde{\Phi}$ é contínua notemos que $\|Y - X\|_1$ pequeno, implica $\|Y - X\|_\infty$ e $\|\nabla Y - \nabla X\|_0$ também pequenos.

De $\|\tilde{\Phi}(Y) - \tilde{\Phi}(X)\|_0 \leq \|\tilde{\Phi}(Y) - \tilde{\Phi}(X)\|_\infty$ temos que, quando $\|Y - X\|_1 \longrightarrow 0$, também $\|\tilde{\Phi}(Y) - \tilde{\Phi}(X)\|_0 \longrightarrow 0$.

Seja agora $Y'(t) = Y'(t)_h + Y'(t)_v$ a decomposição nas partes horizontal e vertical, respectivamente.

$Y'(t)_v$ é cononicamente identificado com $\nabla Y(t)$. Se $(d\Phi)_{Y(t)} = (d_1\Phi)_{Y(t)} + (d_2\Phi)_{Y(t)}$ denota a decomposição segundo às restrições de $d\Phi$ aos subespaços horizontal e vertical, respectivamente, temos

$$\nabla\tilde{\Phi}(Y)(t) - \nabla\tilde{\Phi}(X)(t) = \nabla\Phi(Y(t)) - \nabla\Phi(X(t)) =$$

$$= (d_2\Phi)_{Y(t)}(\nabla Y(t) - \nabla X(t)) + ((d_2\Phi)_{Y(t)} - (d_2\Phi)_{X(t)}).\nabla X(t),$$

(módulo termos que tendem a zero quando $\|Y - X\|_\infty \longrightarrow 0$), o que mostra que quando $\|Y - X\|_1 \longrightarrow 0$ também $\|\nabla\tilde{\Phi}(Y) - \nabla\tilde{\Phi}(X)\|_0 \longrightarrow 0$.

Assim temos mostrado que $\|X - Y\|_1 \longrightarrow 0$ implica $\|\tilde{\Phi}(Y) - \tilde{\Phi}(X)\|_1 \longrightarrow 0$ e portanto $\tilde{\Phi} : H^1(\mathcal{U}) \longrightarrow H^1(F)$ é contínua.

Mostremos agora que $\tilde{\Phi} : H^1(\mathcal{U}) \longrightarrow H^1(F)$ é continuamente diferenciável com derivada dada por $d\tilde{\Phi} = (\widetilde{d_2\Phi})$ e obsevemos que a diferenciabilidade para ordens superiores é provada da mesma maneira, começando com a aplicação diferenciável que preserva fibras $d_2\Phi : \mathcal{U} \longrightarrow L(E,F)$.

Pelos cálculos acima temos que $\tilde{\Phi}$ é contínua. Pela fórmula de *Taylor*

$$\Phi(Y(t)) - \Phi(X(t)) - (d_2\Phi)_{X(t)}(Y(t) - X(t)) = r(X(t), Y(t)).(Y(t) - X(t)),$$

onde $r(X(t),\ Y(t)) = \int_0^1 (d_2\Phi)_{Y(t)+s(X(t)-Y(t))} ds - (d_2\Phi)_{X(t)},\ 0<s<1,$

é uma aplicação que preserva fibras de algum $\mathcal{U}' \times \mathcal{U}' \subset U \times \mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$ aberto, convexo, no fibrado $L(p,\pi) : L(E,F) \longrightarrow S$.

Considerando a aplicação contínua associada $\tilde{r} : H^1(\mathcal{U}' \times \mathcal{U}') \longrightarrow H^1(L(E,F))$ e $\widetilde{d\Phi} = (\widetilde{d_2\Phi}) : H^1(\mathcal{U}') \longrightarrow H^1(L(E,F))$ temos $\|\tilde{\Phi}(Y) - \tilde{\Phi}(X) - (\widetilde{d_2\Phi})_x(Y - X)\|_1 = \|\tilde{r}(X,Y).(Y - X)\|_1 \leq$ $\leq const\|\tilde{r}(X,Y)\|_1\ \|Y - X\|_1$.

Como $\tilde{r}(X,X)=0$ temos $\|\tilde{r}(X,Y)\|_1 \longrightarrow 0$ quando $\|X-Y\|_1 \longrightarrow 0$, isto é, $(\widetilde{d_2\Phi}) \in H^1(L(H^1(E);\ H^1(F)))$ tem a propriedade de uma diferencial, $\widetilde{d\Phi} = (\widetilde{d_2\Phi})$.

Da mesma maneira pode-se mostrar que $d^r\tilde{\Phi} = (\widetilde{d_2^r\,\Phi})$.

■

<u>3.4. Corolário</u>:

As mudanças de coordenadas

$$\tilde{\Phi}_{c_1}^{-1} \circ \tilde{\Phi}_c : \Omega \subseteq H^1(\mathcal{U}_c) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}_{c_1})$$

são de classe C^∞.

<u>Demonstraçao</u>: $\tilde{\Phi}_{c_1}^{-1} \circ \tilde{\Phi}_c$ é induzida pela aplicação

$$X(t) \longrightarrow (c_{1_\pi}^*)^{-1}\ exp_{c(t)}^{-1}\ (exp_{c(t)}\ c_\pi^*\ X(t)).$$

O Corolário acima garante então que

$$\{(H^1(\mathcal{U}_c),\ \tilde{\Phi}_c) : c \in C^\infty(S,M)\}$$

é um atlas diferenciável (C^∞) para ΛM e isso determina uma topologia e uma estrutura de variedade diferenciável em ΛM.

3.5. Espaço Tangente a ΛM.

Para $i = 0, 1$ definimos:

$$H^i(\Lambda M^* TM) = UH^i(\pi_c^*) \quad e \quad c \in \Lambda M$$

$$p_i : H^i(\Lambda M^* TM) \longrightarrow \Lambda M, \; p_i(c_\pi^* X) = c$$

onde $p_i(c_\pi^* X)(t) = \pi(X(c(t)) = c(t)$, tem uma estrutura de fibrado vetorial (*Hilbert*) sobre ΛM e $p_i : H^1(\Lambda M^* TM) \longrightarrow \Lambda M$ é isomorfo a $T\Lambda M$.

Produziremos uma estrutura local para $H^i(\Lambda M^* TM)$, $i = 0,1$. Para $x \in TM$, $j = 1,2$ definimos

$$(\nabla_j \, exp)(x) : T_{\pi(x)}M \longrightarrow T_{exp(x)}M \text{ por}$$

$$(\nabla_1 \, exp)(x).y = (d \, exp)(x).(d\pi \mid T^h \, TM)^{-1}.y$$

$$(\nabla_2 \, exp)(x).y = (d \, exp)(x).k(x)^{-1}.y$$

onde $k(x) : T_x^v \, TM \longrightarrow T_{\pi(x)}M$ é a identificação canônica. Temos a seguinte interpretação geométrica de $\nabla_j \, exp$, $j = 1, 2$:

$(\nabla_1 \, exp)(x).y$ é o transporte paralelo de y, de p até $expx$ ao longo de $\gamma(t) = exp \, tx$ e;

$(\nabla_2 \, exp)(x).y$ é o valor em $expx$ do único campo de *Jacobi* ao longo de $\gamma(t) = exp \, tx$, que se anula em $t = 0$ e cuja derivada em $t = 0$ é y.

Para $x \in \mathcal{U} \subset TM$, $(\nabla_2 \, exp)(x)$ e $(\nabla_1 \, exp)(x)$ são isomorfismos; e as aplicações onde $i = 0, 1$:

$$\tilde{\phi}_c^i : H^1(\mathcal{U}_c) \times H^i(\pi_c^*) \longrightarrow H^i(\Lambda M^* \, TM)$$

dadas por

$$\tilde{\phi}_c^i(X, Y)(t) = (\nabla_2 \, exp)(c^* X(t)).(c^* Y(t))$$

dão a estrutura solicitada.

3.6. Proposição:

O campo tangente $\partial e(t) = \dot{e}(t)$ ao longo de uma curva $e \in \Lambda M$, é uma seção diferenciável no fibrado $p_0 : H^0(\Lambda M^* TM) \longrightarrow \Lambda M$. Na representação local $H^1(O_c) \times H^0(\pi_c)$ de p_0 sobre $\mathcal{U}_c = exp_c^{-1} H^1(O_c)$, $c \in C^\infty(S,M)$, a parte principal de $\partial_c : H^1(O_c) \longrightarrow H^0(\pi_c^*)$ é dada por

$$\partial_c X(t) := \nabla_{\dot{c}(t)} X(t) + \tilde{\theta}_c(X(t))$$

onde $\tilde{\theta}_c(X)(t) = (c_\pi^*)^{-1} \circ \theta(c_\pi^* X(t)).\partial c(t)$, $X \in H^0(\pi_c^*)$

e $\theta(x) = [\nabla_2 \, exp(x)]^{-1} \circ [\nabla_1 \, exp(x)]$, $x \in TM$.

Demonstração:

Seja $e(t) = exp(c_\pi^* X(t))$, $\partial e(t) = \dot{e}(t) =$

$= dexp(c_\pi^* X(t)).(c_\pi^* X'(t)) = d\, exp(c_\pi^* X(t)).(c_\pi^* X'(t)_h + c_\pi^* X'(t)_v)$

onde temos a decomposição nas componentes horizontal e vertical.

De $dp_1 . c_\pi^* X'(t)_h = \partial c(t)$

$K \, . \, c_\pi^* X'(t)_v = \nabla(c_\pi^* X(t))$

obtemos

$$\partial e(t) = \nabla_1 \, exp(c_\pi^* X(t)).\partial c(t) + \nabla_2 \, exp(c_\pi^* X(t)).\nabla(c_\pi^* X(t)) =$$

$$= \nabla_2 exp(c_\pi^* X(t)) \left[\nabla(c_\pi^* X(t)) + \nabla_2 exp(c_\pi^* X(t))^{-1}.\nabla_1 exp(c_\pi^* X(t)).\partial c(t)\right] =$$

$$= \nabla_2 exp(c_\pi^* X(t) \circ c_\pi^* \, . \left[\nabla_{\dot{c}} X(t) + \tilde{\theta}_c(X(t))\right]$$

que dá a expressão para $\partial_c X(t)$.

■

Enunciamos agora o seguinte teorema que descreve uma estrutura *Riemanniana canônica* em $p_i : H^i(\Lambda M^* TM) \longrightarrow \Lambda M$, $i = 0, 1$.

3.7. Teorema:

O fibrado $p_i : H^i(\Lambda M^* TM) \longrightarrow \Lambda M$, $i = 0, 1$, admite uma (única) métrica *Riemanniana* caracterizada pela seguinte propriedade: Para $c \in C^\infty(S,M)$ a métrica em $p_i^{-1}(c) = H^i(\pi_c^*)$ é dada pelo produto escalar $<\ ,\ >_i$, $i = 0, 1$ onde

$$< X, Y >_0 = \int_S < X(t), Y(t) > dt,$$

$$< X, Y >_1 = < X, Y >_0 + < \nabla_{\dot{c}} X, \nabla_{\dot{c}} Y >_0.$$

Em particular, $T\Lambda M \cong H^1(\Lambda M^* TM)$ admite uma estrutura *Riemanniana* que ainda denotamos por $<\ ,\ >_1$.

3.8. Métrica de Finsler

Definiçao:

Uma variedade de *Finsler* (M,F) é um par constituido de uma variedade diferenciável M de dimensão n, juntamente com uma função contínua $F : TM \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que:

1) $F(x,\dot{x}) \geq 0$ e $F(x,\dot{x}) = 0 \iff \dot{x} = 0$;

2) $F(x,t\dot{x}) = tF(x,\dot{x})$, para todo $t \geq 0$;

3) F é de classe C^∞ em $TM - S_0(TM)$, onde $S_0(TM)$ é a seção nula de TM.

4) $d_f^2\ F^2(V)(Y,Y) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}_j\ \partial \dot{x}_j} y_i y_j$ é uma forma quadrática não degenerada e definida positiva, onde $Y, V \in T_x M$, $V \neq 0$, e d_f^2 denota a segunda derivada na direção da fibra.

A função F^2 é de classe C^1 em TM (e naturalmente de classe C^∞ fora de $S_0(TM)$).

Se a função F^2 é de classe C^2 no fibrado tangente inteiro TM, então por um resultado já conhecido, a métrica de *Finsler* F satisfaz $F^2(W) = < W, W >$ para uma métrica *Riemanniana* $< \, , \, >$ e qualquer W em TM. A função F^2 é também chamada de energia.

3.9. Integral da energia de Finsler

Seja M uma variedade *Riemanniana* compacta e $L = F^2 : TM \longrightarrow \mathbb{R}^+$ a energia de uma métrica de *Finsler* F. A função $L = F^2$ induz uma aplicação $E : \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}$

$$E(c) = \int_S L(\dot{c}(t))\,dt$$

chamada integral da energia ou simplesmente energia.

O funcional energia possue várias propriedades que são necessárias para o desenvolvimento da teoria dos pontos críticos (tipo de *Morse*). As propriedades do funcional $E : \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}$ são as seguintes:

(1) O funcional $E : \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 e a derivada é localmente *Lipschitziana*;

(2) O funcional $E : \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a condição (C) de Compacidade de *Palais-Smale*:

"Seja (c_n), $c_n \in \Lambda M$, uma seqüência de curvas tais que:

(a) $E(c_n) \leq K$, limitada;

(b) $\|\nabla E(c_n)\|_1 \longrightarrow 0$, onde ∇E denota o gradiente de E.

Então (c_n) admite um ponto de acumulação, que é, naturalmente, um ponto crítico de E".

(3) O funcional $E : \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}$ possue segunda derivada nos pontos críticos e a sua derivada (ou o gradiente ∇E) é fortemente diferenciável nos pontos críticos.

Em primeiro lugar descrevemos as provas das propriedades (1) e (2), conforme está no trabalho [*Mer.*] e depois damos a prova da propriedade (3).

3.10. Teorema:

$E: \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 e a derivada é localmente Lipschitziana. (*ver*,[*Mer.*])

Prova:

Seja $c \in C^{\infty}(S,M)$ e $(\Phi_c, H^1(U_c))$ um sistema de coordenadas ao redor de c e $E_c = E \circ \Phi_c$, onde $U_c = (c_{\pi}^*)^{-1}U$, U é aberto contendo a seção zero de TM.

Então E_c é a composta das seguintes aplicações:

$$H^1(U_c) \xrightarrow{I \times \partial_c} H^1(U_c) \times H^0(c^* \; TM) \xrightarrow{\bar{\lambda}_c} L^1(S) \longrightarrow \mathbb{R}$$

onde a última aplicação é a integração e $\bar{\lambda}_c$ é induzida pela aplicação λ_c

$$\lambda_c : U_c \times c^* \; TM \longrightarrow S \times \mathbb{R},$$

$$\lambda_c(x,y) = \left(\pi_c^* \, x, \; L\left((\nabla_2 \; exp)(c_{\pi}^* \; x) \; . \; c_{\pi}^* \; y\right)\right), \text{ sendo } L = F^2.$$

Então é suficiente provar que $\bar{\lambda}_c$ é de classe C^1 e com derivada localmente Lipschitziana.

Notemos que $\bar{\lambda}_c$ está bem definido em todo $H^1(U_c) \times H^0(c^* TM)$. De fato, para $(X,Y) \in H^1(U_c) \times H^0(c^* TM)$

$$\int_S \left(L(\nabla_2 exp(c_\pi^* \ X(t)).c_\pi^* \ Y(t))\right) dt \leq K \int_S \|\nabla_2 \ exp \ c_\pi^* \ X(t)\|^2 \ \|Y(t)\|^2 dt$$

que é limitada já que $\|X(t)\|_\infty$ é pequeno e $Y(t) \in H^0(c^* TM) = L^2(c^* TM)$.

Para todo $t \in S$, consideremos a restrição de λ_c à fibra

$$\lambda_t : (U_c)_t \oplus (c^* TM)_t \longrightarrow \mathbb{R}.$$
$$(x, y) \longrightarrow \lambda_t(x, y)$$

onde x e y denotam a variável no primeiro e no segundo fator, respectivamente.

Neste caso temos o seguinte:

1) λ_t e $\dfrac{\partial \lambda_t}{\partial x}$ são positivamente homogeneas de grau 2 em y;

2) $\dfrac{\partial \lambda_t}{\partial y}$ é positivamente homogenea de grau 1 em y.

Provemos o seguinte lema para funções homogeneas.

3.11. Lema:

Seja f: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ contínua, e de classe C^∞ em $\mathbb{R}^n - \{0\}$, e positivamente homogenea de grau α.

Então para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$:

(a) Se $\alpha = 1$, então existe uma constante $K > 0$ tal que
$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|$.

(b) Se $\alpha = 2$, então existem constantes $N_1 > 0$ e $N_2 > 0$ tais que
$$\|f(x) - f(y)\| \leq N_1\|x - y\|^2 + N_2\|x - y\| \ . \ \| \ y \ \|.$$

(c) Se $\alpha = 0$, f é limitada.

Prova:

(a) De fato, se $tx + (1 - t)y \neq 0$, para todo $t \in [0,1]$, então pelo Teorema da desigualdade do valor médio temos

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \sup_{0\leq t\leq 1} \|f'(tx + (1 - t)y)\| \,.\, \|x - y\|.$$

Sendo $\alpha=1$, temos que $f(sx)=sf(x)$, implica $f'(sx)=f'(x)$, $x \neq 0$, $s > 0$.

Então f' é limitada, para ver isto restringir f' à esfera unitária S^{n-1}, pois $f'\left(\frac{z}{\|z\|}\right) = f'(z)$, $z \neq 0$. Logo $\|f'(z)\| \leq K_1$, para todo $z \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ e portanto $\|f(x)-f(y)\|\leq K_1\|x-y\|$.

Se $x \neq 0$, $y \neq 0$, com $y = tx$, $t < 0$ temos

$$\|x - y\| = \|x - tx\| = (1 - t)\|x\| = \|x\| - t\|x\| = \|x\| + \|y\|$$

e

$$\|f(x) - f(y)\| = \left\|\|x\| \, f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - \|y\| \, f\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| \leq$$

$$\leq \|x\|\left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| + \|y\|\left\| f\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| \leq K_2(\|x\| + \|y\|) = K_2\|x - y\|$$

pois sendo f contínua, $f|S^{n-1}$ é limitada por uma constante $K_2 > 0$.

Se $x = y = 0$, temos $f(0) = 0$ e a desigualdade passa a ser uma igualdade.

Se $x \neq 0$ e $y = 0$, então

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x)\| = \|x\| \left\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq K_2\|x\| = K_2\|x - y\|.$$

Assim, para todo $x,y \in \mathbb{R}^n$, basta considerar $K = max\{K_1,K_2\}$ e portanto $\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|$.

(b) No caso $\alpha = 2$, temos que f' é homogenea de grau 1. Sendo f de classe C^{∞} em $\mathbb{R}^n - \{0\}$ então $f'|S^{n-1}$ é limitada, isto é, existe $M_1>0$ tal que $\|f'(z)\| \leq M_1$, para todo $z \in S^{n-1}$.

Então para todo $z \neq 0$, $M_1 \geq \|f'(\frac{z}{\|z\|})\| = \frac{1}{\|z\|}\|f'(z)\|$, portanto $\|f'(z)\| \leq M_1\|z\|$, $z \neq 0$.

Se $tx + (1 - t)y \neq 0$, para todo $t \in [0,1]$, então pelo Teorema da desigualdade do valor médio temos

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \sup_{0\leq t\leq 1} \|f'(tx + (1 - t)y)\| \, . \, \|x - y\| =$$

$$= \sup_{0\leq t\leq 1} \|f'(y + (x - y)t)\| \, . \, \|x- y\| \leq M_1\|y + (x - y)t\| \, . \, \|x - y\| \leq$$

$$\leq M_1(\|y\| + \|x - y\|) . \|x - y\| = M_1\|x - y\|^2 + M_1\|x - y\| \, . \, \|y\|.$$

Se $x \neq 0$, $y \neq 0$, com $y = tx$, $t < 0$, temos

$$\|x - y\|^2 = \|x - tx\|^2 = (1 - t)^2\|x\|^2 \geq \|x\|^2,$$

e

$$\|x - y\| \, . \, \|y\| = \|x - tx\| \, . \, \|tx\| = (1 - t)(-t)\|x\|^2 =$$

$= t^2\|x\|^2 - t\|x\|^2 = \|y\|^2 - t\|x\|^2$ implica que $\|y\|^2 \leq \|x - y\| \, . \, \|y\|$.

Assim, se $x \neq 0$, $y \neq 0$, com $y = tx$, $t < 0$,

$$\|f(x) - f(y)\| = \|\|x\|^2 f(\frac{x}{\|x\|}) - \|y\|^2 f(\frac{y}{\|y\|})\| \leq$$

$$\leq M_2 [\|x\|^2 + \|y\|^2] \leq M_2 [\|x - y\|^2 + \|x - y\| \, . \, \|y\|],$$

pois $f|S^{n-1}$ é limitada por uma constante $M_2 > 0$.

Se $x = y = 0$, a desigualdade torna uma igualdade.

Se $x \neq 0$ e $y = 0$ temos $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x)\| =$

$$= \|x\|^2 \|f(\frac{x}{\|x\|})\| \leq M_2\|x\|^2 = M_2[\|x - y\|^2 + \|x - y\| \, . \, \|y\|].$$

Então o caso geral está resolvido, e podemos considerar a existência de constantes $N_1 > 0$ e $N_2 > 0$ taís que $\|f(x) - f(y)\| \leq N_1\|x - y\|^2 + N_2\|x - y\| \, . \, \|y\|$, quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(C) Se $\alpha = 0$, então $f(z) = f(\frac{z}{\|z\|})$, $z \neq 0$.

Logo $\|f(z)\| = \|f(\frac{z}{\|z\|})\| \leq M_1$, para todo $z \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ e $\|f(z)\| \leq M$, $\forall z \in \mathbb{R}^n$, onde $M = max\{M_1, \|f(0)\|\}$.

Observaçao:

Observemos que neste lema estamos trabalhando com funções $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ contínuas, positivamente homogeneas para quaisquer $x \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$ de grau α, $f(tx) = t^{\alpha} f(x)$, e de classe C^{∞} em $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

No caso $\alpha = 1$, se tivermos $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^{∞} em todo $\mathbb{R}^n$, $f(tx) = tf(x)$, qualquer $t \in \mathbb{R}$, então f necessariamente será uma transformação linear. Neste caso $f'(tx)x = f(x)$, que para $t = 0$ da $f(x) = f'(0).x$.

No caso $\alpha = 2$, se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^{∞} em todo $\mathbb{R}^n$, $f(tx) = t^2 f(x)$, qualquer $t \in \mathbb{R}$, então f é uma aplicação quadrática, isto é, existe $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ bilinear tal que $f(x) = B(x,x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Neste caso, derivando $f(tx)=t^2 f(x)$ duas vezes com relação a t, temos

$$f'(tx)x = 2tf(x),$$

$$f''(tx)(x,x) = 2f(x),$$

e fazendo $t = 0$,

$$f''(0)(x,x) = 2f(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} f''(0)(x,x).$$

Por exemplo, a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^4}$, satisfaz $f(tx,ty) = t^2 f(x,y)$, mas não é quadrática, pois f não é sequer diferenciável na origem.

<u>$1^{\underline{a}}$) Afirmação:</u> $\tilde{\lambda}_c$ é diferenciável e

$$(d\,\tilde{\lambda}_c)(X,Y)(t) = (d_f\,\lambda_c)(X(t),\ Y(t)),$$

onde d_f denota derivada na fibra.

De fato, seja $(X_1, Y_1) \in H^1(U_c) \times H^0(c^*TM)$ pequeno. Então para algum $s \in [0,1]$,

$$\|\tilde{\lambda}_c(X + X_1,\ Y + Y_1) - \tilde{\lambda}_c(X,Y) - (d_f\lambda_c)(X(t),\ Y(t))(X_1(t), Y_1(t))\|_{L^1} =$$

$$= \int_S \Big\| \Big[(d_f\lambda_c)(x(t)) + sx_1(t),\ y(t) + sy_1(t))$$

$$- (d_f\lambda_c)(X(t),\ Y(t))(X_1(t),\ Y_1(t))\Big]\Big\|\, dt$$

$$\le \int_S \Big\|\frac{\partial\lambda_t}{\partial X}\,(X(t) + sX_1(t),\ Y(t) + sY_1(t)) - \frac{\partial\lambda_t}{\partial X}(X(t),\ Y(t))\Big\| . \|X_1(t)\|\, dt$$

$$+ \int_S \Big\|\frac{\partial\lambda_t}{\partial y}\,(X(t) + sX_1(t),\ Y(t) + sY_1(t)) - \frac{\partial\lambda_t}{\partial y}(X(t),\ Y(t))\Big\| . \|Y_1(t)\|\, dt$$

$$\le \|X_1\|_\infty \int_S \Big\|\frac{\partial\lambda_t}{\partial X}\,(X(t) + sX_1(t),\ Y(t) + sY_1(t)) - \frac{\partial\lambda_t}{\partial X}\,(X(t),\ Y(t))\Big\|\, dt$$

$$+ \|Y_1\|_0\Big(\int \Big\|\frac{\partial\lambda_t}{\partial y}(X(t) + sX_1(t),\ Y(t)+sY_1(t)) - \frac{\partial\lambda_t}{\partial y}(X(t),\ Y(t))\Big\|^2 dt\Big)^{1/2}$$

pelo lema para funções homogeneas

$$\le \|x_1\|_\infty \left\{ \int_S k_1\|x_1(t)\|\, dt + \int_S k_2\|y_1(t)\|\Big[\|y_1(t)\| + \|y(t)\|\Big]\, dt\right\} +$$

$$+ \|y_1\|_0\left\{ \int_S k_3\|x_1(t)\|^2 dt + \int_S k_4\|y_1(t)\|^2 dt\right\}^{1/2} .$$

Então $\tilde{\lambda}_c$ é deferenciável e nossa 1ª afirmação está provada.

Observação: Segue agora a seguinte fórmula

$$(d\tilde{E})(X).(Y) = \int_S (d\tilde{\lambda}_c)(X(t),\ \partial_c X(t)).(Y(t),(\nabla_c Y)(t) + (d\tilde{\theta}_c)(X)(Y))dt.$$

<u>2ª) Afirmaçao</u>: $d\tilde{\lambda}_c$ é localmente Lipschitziana.

Se X_1, $X_2 \in H^1(U_c)$ e se Y_1, $Y_2 \in \bar{H}^0(c^* TM)$ são próximos, então:

$$\|d\tilde{\lambda}_c(X_1,Y_1) - d\tilde{\lambda}_c(X_2,Y_2)\| =$$

$$= sup \left\{\|(d\tilde{\lambda}_c(X_1,Y_1) - d\tilde{\lambda}_c(X_2,Y_2))(Z,W)\|_{L^1} : \|(Z,W)\|_{H^1 \times H^0} = 1\right\} =$$

$$= sup \left\{\int_S \|(d\tilde{\lambda}_t(X_1,Y_1) - d\tilde{\lambda}_t(X_2,Y_2))(Z,W)\|\ dt : \|(Z,W)\|_{H^1 \times H^0} = 1\right\} \leq$$

$$\leq \sup_{\|(Z,W)\|_{H^1 \times H^0} = 1} \left\{\int_S \left\|\frac{\partial\lambda_t}{\partial x}(X_1(t),Y_1(t)) - \frac{\partial\lambda_t}{\partial x}(X_2(t),Y_2(t))\right\|.\|Z\|dt\right.$$

$$\left. + \int_S \left\|\frac{\partial\lambda_t}{\partial y}(X_1(t),Y_1(t)) - \frac{\partial\lambda_t}{\partial y}(X_2(t),Y_2(t))\right\|.\|W\|dt\right\} \leq$$

$$\leq \sup_{\|(Z,W)\|_{H^1 \times H^0} = 1} \|Z\|_\infty \left\{\left(\int k_1\|X_1 - X_2\|\ dt\right) + k_2\int \|Y_1 - Y_2\|[\|Y_1 - Y_2\| + \|Y_1\|]dt\right\}$$

$$+ \sup_{\|(Z,W)\|_{H^1 \times H^0} = 1} \|W\|_0 \left\{\left(\int k_3\|X_1 - X_2\|^2 dt + k_4\int \|Y_1 - Y_2\|^2 dt\right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq A_1\|X_1 - X_2\|_0 + A_2\|Y_1 - Y_0\|_0^2 + A_3\|Y_1 - Y_2\|_0 +$$

$$+ \left(B_1\|X_1 - X_2\|_0^2 + B_2\|Y_1 - Y_2\|_0^2\right)^{1/2} \le$$
$$\le A\|(X_1 - X_2,\ Y_1 - Y_2)\|_{H^1 \times H^0} .$$

■

Antes de provarmos a condição (C) para a função $E\colon \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}$, $E(c) = \int_S F^2(\dot{c})\, dt$, veremos a seguinte proposição:

3.12 - Proposição:

A função $E\colon \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}$ é própria com respeito a topologia da convergência uniforme em ΛM, isto é, se $c_n \in \Lambda M$ e $E(c_n) \le s_0$ (limitada), então $\{c_n\}$ admite uma subseqüência uniformemente convergente no espaço $(\Lambda M, d_\infty)$, onde $d_\infty(c, e) = \sup_{t \in I} d_M(c(t), e(t))$, $c, e \in \Lambda M$ e d_M denota a função distância na variedade Riemanniana $(M^n, <.>)$.

Prova:

Sendo a variedade Riemanniana $(M^n, <.>)$ compacta estão o fibrado tangente unitário

$$T_1 M = \{(p, v) \in TM:\ \ p \in M \ \text{ e } \ v \in T_pM,\ <v, v>_p = 1\}$$

é também compacto, e portanto existem constantes $K_1 > 0$ e $K_2 > 0$ tais que

$$K_1 \le F^2\left(\frac{w}{\|w\|}\right) \le K_2,$$

qualquer $w \in TM$, $w \ne 0$, onde $\|w\|^2 = <w, w>$.

Assim, $K_1\|w\|^2 \le F^2(w) \le K_2\|w\|^2$, qualquer $w \in TM$.

Tomando $\dot{c} = w$ e integrando de 0 a 1:

$$K_1 \int_0^1 \|\dot{c}\|^2 dt \leq E(c) = \int_0^1 F^2(\dot{c})\, dt \leq K_2 \int_0^1 \|\dot{c}\|^2 dt.$$

Sendo d_M a função distancia em $(M^n, <.>)$, temos

$$d_M(c_k(t_0),\ c_k(t_1))^2 \leq \left(\int_{t_0}^{t_1} \|\dot{c}_k(t)\| dt \right)^2 \leq |t_1 - t_0| \int_S \|\dot{c}_k(t)\|^2 dt \leq$$

$$\leq |t_1 - t_0| \cdot \frac{1}{K_1} \int_0^1 F^2(\dot{c})\, dt \leq \frac{s_0}{K_1} |t_1 - t_0|.$$

Então $\{c_n\}$ é uma seqüência equicontinua e sendo $(M^n, <.>)$ compacta, o conjunto $\{c_n(t) : n = 1,2,3,\ldots\} \subset M$, $\forall t \in [0,1]$, é relativamente compacto em (M^n, d_M), e a proposição segue pelo Teorema de Arzela-Ascoli.

■

3.13 - Teorema:

O funcional integral da Energia $E : \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}$, $E(c) = \int_S F^2(\dot{c})\, dt$ satisfaz a condição (C) de *Palais-Smale*. (*ver*, [*Mer.*]).

Prova:

Pela proposição anterior nós podemos assumir que $\{c_n\}$ converge uniformemente para $c_0 \in C^0(S, M)$.

Seja $c \in C^{\infty}(S,M)$ uniformemente próximo de c_0; e podemos supor que todo c_n pertence a uma vizinhança coordenada $\phi_c(H^1(u_c))$.

Seja $X_n = \phi_c^{-1}(c_n)$.

É suficiente provar que

$$\|X_n - X_m\|_1^2 \leq \|X_n - X_m\|_0^2 + \|\tilde{\theta}_c(X_n) - \tilde{\theta}_c(X_m)\|_0^2 + \|\partial_c X_n - \partial_c X_m\|_0^2$$

tende a zero, quando $n,\ m \longrightarrow \infty$.

Mas, $\|X_n - X_m\|_\infty \longrightarrow 0$ implica que

$$\|X_n - X_m\|_0^2 + \|\tilde{\theta}_c(X_n) - \tilde{\theta}_c(X_m)\|_0^2 \longrightarrow 0$$

Então é suficiente provar que $\|\partial_c X_n - \partial_c X_m\|_0^2 \longrightarrow 0$. Além disso, $\|\partial_c X_n\|_0^2 \leq kE_c(X_n) \leq ks_0$ então $\|\partial_c X_n - \partial_c X_m\|_0$ é limitado. Agora

$$(d\,\tilde{E}_c)(X_n)(X_n - X_m) - (d\,\tilde{E}_c)(X_m)(X_n - X_m) =$$

$$= \int_S (d\,\tilde{\lambda}_c)(X_n,\ \partial_c X_n)(0,\ \partial_c X_n - \partial_c X_m)$$

$$- \int_S (d\,\tilde{\lambda}_c)(X_m,\ \partial_c X_m)(0,\ \partial_c X_m - \partial_c X_m)$$

$$+ \int_S (d\tilde{\lambda}_c)(X_n,\partial_c X_n)(X_n - X_m,\ \tilde{\theta}_c(X_m) - \tilde{\theta}_c(X_n) + (d\tilde{\theta}_c)(X_n)(X_n - X_m))$$

$$- \int_S (d\tilde{\lambda}_c)(X_m,\partial_c X_m)(X_n - X_m,\ \tilde{\theta}_c(X_m) - \tilde{\theta}_c(X_n) + (d\tilde{\theta}_c)(X_m)(X_n - X_m))$$

Olhando para a expressão de $d\tilde{\lambda}_c$ vemos que as duas últimas integrais tendem a zero juntamente com $\|X_n - X_m\|_\infty$ e a segunda integral pode ser aproximada, a menos de termos que tendem a zero, com $\|X_n-X_m\|_\infty$, por $\int_S (d\tilde{\lambda}_c)(X_n,\partial_c X_m)(0,\partial_c X_n-\partial_c X_m)$. Alem disso,

$$\int_S (d\tilde{\lambda}_c)(X_m,\partial_c X_n)(0,\partial_c X_n - \partial_c X_m) - \int_S (d\tilde{\lambda}_c)(X_n,\partial_c X_m)(0,\partial_c X_n - \partial_c X_m) =$$

$$= \int_S [(\frac{\partial\tilde{\lambda}_t}{\partial y})(X_n(t),\ \partial_c X_n(t))(\partial_c X_n(t) - \partial_c X_m(t))$$

$$- \frac{\partial\tilde{\lambda}_t}{\partial y}\ (X_n(t),\ \partial_c X_m(t))(\partial_c X_n(t) - \partial_c \bar{X}_m(t))]dt.$$

A menos de uma aproximação uniforme nôs podemos supor $t,\ s \in [0,1]$

$$s\ \partial_c X_n(t) + (1-s)\partial_c X_m(t) \neq 0.$$

Então pelo Teorema do valor medio, a ultima diferença fica sendo

$$\int_S \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y^2}(X_n(t),s\partial_c X_n(t)+(1-s)\partial_c X_m(t)).$$

$$.\ (\partial_c X_n(t)-\partial_c X_m(t))(\partial_c X_n(t)-\partial_c X_m(t))$$

$$\geq \int_S c\|\partial_c X_n(t) - \partial_c X_m(t)\|^2 = c\|\partial_c X_n - \partial_c X_m\|_0^2$$

onde a ultima desigualdade é conseqüência da condição de regularidade sobre $L = F^2$.

■

A função $E: \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}$ induz um campo localmente *Lipschitziano*, o campo gradiente $gradE$ em ΛM, dado por

$$< gradE(c), \, n >_1 = dE(c).n \quad \text{para } c \in \Lambda M, \quad n \in T_c\Lambda M.$$

Nós estamos interessados nos pontos críticos de $E: \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}$. A condição (C) é necessária para estabelecermos um limite inferior para o número de pontos críticos de E em termos de invariantes topológicos de ΛM.

Como $-\ gradE$ é localmente *Lipschitziano*, $-gradE$ é integrável localmente e por cada ponto passa uma única curva integral.

Seja $\varphi_t(c)$ uma curva integral de $-gradE$ inciando em $c \in \Lambda M$ para $t = 0$ e $[0,\beta]$ denotando o inervalo maximal no qual φ_t está definido. Então valem as seguintes propriedades:

1) $\frac{d}{dt} E(\varphi_t(c)) = -\|gradE(\varphi_t(c))\|^2 \leq 0.$

2) Se d_Λ denota a função distância em ΛM, então
$d_\Lambda(\varphi_{t_1}(c), \varphi_{t2}(c))^2 \leq E(c)|t_1 - t_2|.$

3) $\varphi_t(c)$ está definida para todo $t > 0$, isto é, $\beta = \infty$.

4) Se $K = \{c \in \Lambda M : -gradE(c) = 0\}$, então para $a \geq 0$
$K^a = K \cap E^{-1}[0,a]$ é campacto.

5) Para $a \geq 0$ e U uma vizinhança aberta de $K(c) = K \cap E^{-1}(a)$ existe $\varepsilon = \varepsilon(a,U) > 0$ e $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para $c \in E^{-1}[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cap U^c$ nós temos

$$\|-gradE(c)\| \geq \delta.$$

6) Se $a \geq 0$ e $K(a) = \phi$ então existe $\varepsilon > 0$ e $t_0 > 0$ tal que para $t \geq t_0$,

$$\varphi_t\left(E^{-1}[0, a+\varepsilon]\right) \subseteq E^{-1}\left([0, a-\varepsilon]\right).$$

7) Considerando o campo gradiente "normalizado" $\xi_1(c) = -\dfrac{gradE(c)}{\|gradE(c)\|^2}$ em $\Lambda M - K$. Seja $\Psi_t(c)$ a curva integral maximal de ξ_1 iniciando em c. Então $\Psi_t(c)$ está definida em $[o,\beta)$ com $\beta \leq E(c)$. Se $[a,b]$ não contem valores críticos de E, então Ψ_t induz uma isotopia de $E^{-1}[o,b]$ em $E^{-1}[o,a]$.

3.14. Segunda derivada da energia integral em uma subvariedade crítica

Seja M uma variedade compacta Riemanniana e

$$L = F^2 : TM \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

a energia de uma métrica de *Finster* regular: então $L = F^2$ induz uma função E: $\Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}$

$$E(c) = \int_S L(\dot{c}(t))dt$$

denominada energia integral.

Seja $c \in C^\infty(S,M)$ e $(\phi_c, H^1(U_c))$ um sistema de coordenadas em c e $E_c = E \circ \phi_c$.

Então E_c é a composta das seguintes funções:

$$H^1(U_c) \xrightarrow{I \times \partial_c} H^1(U_c) \times H^0(c^*TM) \xrightarrow{\tilde{\lambda}_c} L^1(S) \xrightarrow{\int_s} \mathbb{R}$$

onde $\tilde{\lambda}_c$ é induzida pela função λ_c:

$$\lambda_c : U_c \oplus c^* TM \longrightarrow S \times \mathbb{R}$$

$$\lambda_c(X,Y) = \left(\pi_c^* X,\ L\left((\nabla_2\ exp)(c_\pi^*\ X)\ .\ c_\pi^*\ Y\right)\right)$$

É suficiente mostrar que $\tilde{\lambda}_c$ admite segunda derivada. Notemos que $\tilde{\lambda}_c$ está bem definida em $H^1(U_c) \times H^0(c^* TM)$. De fato, para $(X,Y) \in H^1(U_c) \times H^0(c^*\ TM)$:

$$\int_{S^1} (L(\nabla_2\ exp(c^* X(t))\ .\ c_\pi^*\ Y(t)\, dt \le k_2 \int_{S^1} \|\nabla_2\ exp\ c_\pi^*\ X(t)\|^2 \|Y(t)\|^2 dt$$

é limitada, pois $\|X(t)\|_\infty$ é pequeno e $Y(t) \in H^0(c^*\ TM) = L^2(c^*\ TM)$.

Para todo $t \in S$, consideremos a restrição de λ_c na fibra:

$$\lambda_t : (U_c)_t \oplus (c^*\ TM)_t \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Denotemos por x, y a primeira è segunda variável, respectivamente, temos que:

1) λ_t, $\dfrac{\partial \lambda_t}{\partial x^2}$ são positivamente homogêneas de grau 2 em Y.

2) $\dfrac{\partial \lambda_t}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x\ \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 \lambda_t}{\partial y\ \partial x}$ são positivamente homogêneas de grau 1 em Y.

3) $\dfrac{\partial^2 \lambda_t}{\partial y^2}$ é positivamente homogênea de grau 0 em Y.

Já foi provado em [*Mer.*] que

$$[d\ \tilde{\lambda}_c(X,Y)](X_1,Y_1) = d_f\ \lambda_c(X,Y)(X_1,Y_1) = \frac{\partial \lambda_t}{\partial x}(X,Y)X_1 + \frac{\partial \lambda_t}{\partial y}(X,Y).Y_1$$

3.15. Teorema:

A função energia de *Finsler*

$$E:\Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad E(c) = \int_S F^2(\dot{c})\,dt$$

é duas vezes diferenciável nas curvas regulares, em particular nas geodésicas fechadas.

∎

Prova:

Provemos agora que:

$$[d^2\tilde{\lambda}_c(X,Y)](X_1,Y_1)(X_2,Y_2) = \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x^2}(X,Y)X_1X_2 +$$

$$+ \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x\partial y}(X,Y)Y_1X_2 + \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y\partial x}(X,Y)X_1Y_2 + \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y^2}(X,Y)Y_1Y_2$$

onde (X_1,Y_1), $(X_2,Y_2) \in H^1(U_c) \times H^0(c^* TM)$, pequenos.

Para algum $s \in [0,1]$ temos:

$$\| d_f\lambda_c(X+X_2, Y+Y_2)(X_1,Y_1) - d_f\lambda_c(X,Y)(X_1,Y_1)$$

$$- [d_f^2\lambda_c(X,Y)](X_1,Y_1)(X_2,Y_2)\|_{L^1} =$$

$$= \int \| d_f^2\lambda_c(X + sX_2, Y + sY_2)(X_1,Y_1)(X_2,Y_2) -$$

$$- d_f^2\lambda_c(X,Y)(X_1,Y_1)(X_2,Y_2)\| dt =$$

$$= \int \Big\| \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x^2}(X + sX_2, Y + sY_2)X_1X_2 + \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x\partial y}(X + sX_2, Y + sY_2)Y_1X_2 \; +$$

$$+ \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y\partial x}(X + sX_2, Y + sY_2)X_1X_2 + \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y^2}(X + sX_2, Y + sY_2)Y_1Y_2 \; +$$

$$- \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x^2}(X, Y)X_1X_2 - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x\partial y}(X, Y)Y_1X_2 - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y\partial x}(X, Y)X_1Y_2 - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y^2}(X, Y)Y_1Y_2\Big\| dt =$$

$$= \int \Big\| \left(\frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x^2}(X + sX_2, Y + sY_2)X_1X_2 - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x^2}(X, Y)X_1X_2\right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x\partial y}(X + sX_2, Y + sY_2)Y_1X_2 - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x\partial y}(X, Y)Y_1X_2\right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y\partial x}(X + sX_2, Y + sY_2)X_1Y_2 - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y\partial x}(X, Y)X_1Y_2\right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y^2}(X + sX_2, Y + sY_2)Y_1Y_2 - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y^2}(X, Y)Y_1Y_2\right) \Big\| dt \le$$

$$\le \int \Big\| \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x^2}(X + sX_2, Y + sY_2) - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x^2}(X, Y)\Big\| . \|X_1(t)\| . \|X_2(t)\| dt \; +$$

$$+ \int \Big\| \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x\partial y}(X + sX_2, Y + sY_2) - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x\partial y}(X, Y)\Big\| . \|Y_1(t)\| . \|X_2(t)\| dt \; +$$

$$+ \int \Big\| \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y\partial x}(X + sX_2, Y + sY_2) - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y\partial x}(X, Y)\Big\| . \|X_1(t)\| . \|Y_2(t)\| dt \; +$$

$$+ \int \Big\| \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y^2}(X + sX_2, Y + sY_2) - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y^2}(X, Y)\Big\| . \|Y_1(t)\| . \|Y_2(t)\| dt \le$$

fazendo uso agora de

(a) $\|X_1(t)\| \leq \|X_1\|_\infty$

(b) $\int_a^b f.g \; dt \leq \left(\int_a^b f^2 \; dt \; . \int_a^b g^2 \; dt \right)^{1/2}$

(c) $\|Y_1\|_0^2 = < Y_1, \; Y_1 >_0 = \int_{S^1} \|Y_1(t)\|^2 dt, \; \|Y_1\|_0 = (\int_{S^1} \|Y_1(t)\|^2 \; dt)^{1/2}$

$$\leq \|X_1\|_\infty \left\{ \int \left\| \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x^2}(X + sX_2, Y + sY_2) - \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x^2}(X, Y) \right\|^2 dt . \int \|X_2(t)\|^2 dt \right\}^{1/2} +$$

$$+ \|X_2\|_\infty \left\{ \int \left\| \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x \partial y}(X + sX_2, Y + sY_2) - \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x \partial y}(X, Y) \right\|^2 dt . \int \|Y_1(t)\|^2 dt \right\}^{1/2} +$$

$$+ \|X_1\|_\infty \left\{ \int \left\| \frac{\partial \lambda_t^2}{\partial y \partial x}(X + sX_2, Y + sY_2) - \frac{\partial \lambda_t^2}{\partial y \partial x}(X, Y) \right\|^2 dt . \int \|Y_2(t)\|^2 dt \right\}^{1/2} +$$

$$+ M \left\{ \left(\int \|Y_1(t)\|^2 dt \right) \left(\int \|Y_2(t)\|^2 dt \right) \right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \|X_1\|_\infty \|X_2\|_0 \left\{ \int \left\| \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x^2} (X + sX_2, Y + sY_2) - \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x^2} (X, Y) \right\|^2 dt \right\}^{1/2} +$$

$$+ \|X_2\|_\infty \|Y_1\|_0 \left\{ \int \left\| \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x \partial y} (X + sX_2, Y + sY_2) - \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x \partial y} (X, Y) \right\|^2 dt \right\}^{1/2} +$$

$$+ \|X_1\|_\infty \|Y_2\|_0 \left\{ \int \left\| \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial y \partial x} (X + sX_2, Y + sY_2) - \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial y \partial x} (X, Y) \right\|^2 dt \right\}^{1/2} +$$

$$+ M \cdot \|Y_1\|_0 \cdot \|Y_2\|_0 =$$

$$= \|X_1\|_\infty \|X_2\|_0 \left\{ \int \left\| \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x^2}(X+sX_2, Y+sY_2) - \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x^2}(X, Y+sY_2) + \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x^2}(X, Y+sY_2) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x^2} (X, Y) \right\|^2 dt \right\}^{1/2} +$$

$$+ \|X_2\|_\infty \|Y_1\|_0 \left\{ \int \left\| \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x \partial y}(X+sX_2, Y+sY_2) - \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x \partial y}(X, Y+sY_2) + \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x \partial y}(X, Y+sY_2) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x \partial y} (X, Y) \right\|^2 dt \right\}^{1/2} +$$

$$+ \|X_1\|_\infty \|Y_2\|_0 \left\{ \int \left\| \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial y \partial x}(X+sX_2, Y+sY_2) - \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial y \partial x}(X, Y+sY_2) + \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial y \partial x}(X, Y+sY_2) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial Y \partial x} (X, Y) \right\|^2 dt \right\}^{1/2} +$$

$$+ M \cdot \|Y_1\|_0 \cdot \|Y_2\|_0 \leq$$

Aplicando desigualdade triangular e o lema de funções homogêneas:

$$\leq \|X_1\|_\infty \; \|X_2\|_0 \; \left\{ \int \left[K_1 \|X_2(t)\| dt + K_2 \|Y_2(t)\| \left(\|Y_2(t)\| + \|Y(t)\| \right) \right]^2 dt \right\}^{1/2} +$$

$$+ \|X_2\|_\infty \; \|Y_1\|_0 \; \left\{ \int \left(K_3 \|X_2(t)\| dt + K_4 \|Y_2(t)\| \right)^2 \; dt \right\}^{1/2} +$$

$$+ \|X_1\|_\infty \|Y_2\|_0 \left\{\int (K_5\|X_2(t)\|dt + K_6\|Y_2(t)\|)^2 \, dt\right\}^{1/2} +$$

$$+ M \cdot \|Y_1\|_0 \cdot \|Y_2\|_0 \; .$$

Então λ_c é duas vezes diferenciável nas curvas regulares.

■

3.16 - Teorema:

A derivada da função energia de Finsler

$$E\colon \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad E(c) = \int_S F^2(c^*)\,dt$$

é fortemente diferenciável nas curvas regulares e em particular nas geodésicas fechadas.

Prova:

$$[d^2\tilde{\lambda}_c(A,B)](X_1,Y_1)(X_2,Y_2) = \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x^2}(A,B)X_1X_2 + \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x\partial y}(A,B)Y_1X_2 +$$

$$+ \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y\partial x}(A,B)X_1Y_2 + \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y^2}(A,B)Y_1Y_2 = d_f^2\lambda_c(A,B)(X_1,Y_1)\;(X_2,Y_2)$$

$$\|R(X-W,Y-Z)\|_{L_1} = \|[d_f\lambda_c(X,Y)](X_1,Y_1) - [d_f\lambda_c(W,Z)](X_1,Y_1) -$$

$$-[d_f^2\lambda_c(A,B)](X-W,Y-Z)(X_1,Y_1)\|_{L_1} =$$

$$= \| d_f^2\lambda_c(X+s(X-W), Y+s(Y-Z))(X-W, Y-Z)(X_1, Y_1) -$$

$$- d_f^2\lambda_c(A,B)(X-W, Y-Z)(X_1, Y_1)\|_{L_1} = \| \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x^2}(X+s(X-W), Y+s(Y-Z))(X-W)X_1 +$$

$$+ \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x\partial y}(X+s(X-W), Y+s(Y-Z))(Y-Z)Y_1 + \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y\partial x}(X+s(X-W), Y+s(Y-Z))(X-W)Y_1 +$$

$$+ \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y^2}(X+s(X-W), Y+s(Y-Z))(Y-Z)Y_1 - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x^2}(A,B)(X-W)X_1 - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x\partial y}(A,B)(Y-Z)Y_1 -$$

$$- \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y\partial x}(A,B)(X-W)Y_1 - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y^2}(A,B)(Y-Z)Y_1 \|_{L_1} \leq$$

$$\leq \int_S \| \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x^2}(X+s(X-W), \ Y+s(Y-Z)) - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x^2}(A,B)\| . \|X-W\| . \|Y_1\| \ dt +$$

$$+ \int_S \| \frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial Y}(X+s(X-W), \ Y+s(Y-Z)) - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x\partial Y}(A,B)\| . \|Y-Z\| . \|Y_1\| \ dt +$$

$$+ \int_S \| \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y\partial x}(X+s(X-W), \ Y+s(Y-Z)) - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y\partial x}(A,B)\| . \|Y-W\| . \|Y_1\| \ dt +$$

$$+ \int_S \| \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y^2}(X+s(X-W), \ Y+s(Y-Z)) - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y^2}(A,B)\| . \|Y-Z\| . \|Y_1\| \ dt \leq$$

$$\leq \|Y_1\|_\infty \left\{ \int_S \| \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x^2}(X+s(X-W), Y+s(Y-Z)) - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x^2}(A,B)\|^2 dt . \int_S \|X-W\|^2 dt \right\}^{1/2} +$$

$$+ \|Y_1\|_\infty \left\{ \int_S \| \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x\partial y}(X+s(X-W), Y+s(Y-Z)) - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x\partial y}(A,B)\|^2 dt . \int_S \|Y-Z\|^2 dt \right\}^{1/2} +$$

$$+ \|Y_1\|_\infty \left\{ \int_S \| \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y\partial x}(X+s(X-W), Y+s(Y-Z)) - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial y\partial x}(A,B)\|^2 dt . \int_S \|X-W\|^2 dt \right\}^{1/2} +$$

$$+ \; M \left\{ \int_S \| Y - Z \|^2 dt \right\}^{1/2} \| Y_1 \|_\infty \quad \leq$$

$$\leq \sqrt{2} \| X - W \|_1 \cdot \| Y_1 \|_\infty \left\{ \int_S \left\| \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x^2} (X + s(X-W), Y + s(Y-Z)) - \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x^2}(A,B) \right\|^2 dt \right\}^{1/2} +$$

$$+ \; \| Y - Z \|_0 \cdot \| Y_1 \|_\infty \left\{ \int_S \left\| \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x \partial y} (X + s(X-W), Y + s(Y-Z)) - \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x \partial y}(A,B) \right\|^2 dt \right\}^{1/2} +$$

$$+ \sqrt{2} \| X - W \|_1 \cdot \| Y_1 \|_\infty \left\{ \int_S \left\| \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial y \partial x} (X + s(X-W), Y + s(Y-Z)) - \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_t}{\partial y \partial x}(A,B) \right\|^2 dt \right\}^{1/2} +$$

$$+ \; M \| Y_1 \|_\infty \; . \; \| Y - Z \|_0 \leq$$

$$\leq \sqrt{2} \| Y_1 \|_\infty \cdot \| (X-W, Y-Z) \|_{H^1 \times H^0} \left\{ \int_S \left\| \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x^2} (X + s(X-W), Y + s(Y-Z)) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x^2}(A,B) \right\|^2 dt \right\}^{1/2} +$$

$$+ \quad \| Y_1 \|_\infty \cdot \| (X-W, Y-Z) \|_{H^1 \times H^0} \left\{ \int_S \left\| \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x \partial y} (X + s(X-W), Y + s(Y-Z)) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial x \partial y}(A,B) \right\|^2 dt \right\}^{1/2} +$$

$$+ \sqrt{2} \| Y_1 \|_\infty \cdot \| (X-W, Y-Z) \|_{H^1 \times H^0} \left\{ \int_S \left\| \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial y \partial x} (X + s(X-W), Y + s(Y-Z)) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial^2 \lambda_t}{\partial y \partial x}(A,B) \right\|^2 dt \right\}^{1/2} + \; M \| Y_1 \|_\infty \cdot \| (X-W, \; Y-Z) \|_{H^1 \times H^0} \; .$$

A prova de que a derivada da função energia de *Finsler* $E:\Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}$, $E(c) = \int_S F^2(\dot{c})dt$, é fortemente diferenciável nas curvas regulares e em particular nas geodésicas fechadas, estará concluída se mostrarmos que as expressões

$$\int_S \left\| \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x^2}\big(X+s(X-W),\ Y+s(Y-Z)\big) - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x^2}(A,B)\right\|^2 dt \quad \text{e}$$

$$\int_S \left\| \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x\partial y}\big(X+s(X-W),\ Y+s(Y-Z)\big) - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x\partial y}(A,B)\right\|^2 dt$$

tem limite igual a zero quando $(X,Y) \longrightarrow (A,B)$ e $(W,Z) \longrightarrow (A,B)$.

Por um lado

$$\int_S \left\| \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x^2}\big(X+s(X-W),\ Y+s(Y-Z)\big) - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x^2}(A,B)\right\|^2 dt \leq$$

$$\leq \int_S \left[\left\|\frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x^2}\big(X+s(X-W),\ Y+s(Y-Z)\big) - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x^2}\big(X+s(X-W),\ B\big)\right\| +\right.$$

$$\left. + \left\|\frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x^2}\big(X+s(X-W),\ B\big) - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x^2}(A,B)\right\|\right]^2 dt \leq \int_S \Big[K_1\|(Y-B) + s(Y-Z)\|^2 +$$

$$K_2\|(Y-B)+s(Y-Z)\|.\|B\|+K_3\|(X-A)+s(X-W)\|\Big]^2 dt \leq \int_S \Big[K_1.\big(\|Y-B\|+\|Y-Z\|\big)^2+$$

$$K_2\|B\|.\big(\|Y-B\| + \|Y-Z\|\big) + K_3\big(\|X-A\| + \|X-W\|\big)\Big]^2 dt$$

Por outro lado

$$\int_S \left\| \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x\partial y}\left(X+s(X-W),\ Y+s(Y-Z)\right) - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x\partial y}(A,B)\right\|^2 dt \le$$

$$\int_S \left[\left\| \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x\partial y}\left(X+s(X-W),\ Y+s(Y-Z)\right) - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x\partial y}\left(X+s(X-W),\ B\right)\right\| + \right.$$

$$\left.\left\| \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x\partial y}\left(X+s(X-W),\ B\right)\right\| - \frac{\partial^2\lambda_t}{\partial x\partial y}(A,B)\right\|\right]^2 dt \le$$

$$\le \int_S \left[K_4\|(Y-B) + s(Y-Z)\| + K_5\|(X-A) + s(X-W)\|\right]^2 dt \le$$

$$\le \int_S \left[K_4\left(\|Y-B\| + \|Y-Z\|\right) + K_5\left(\|X-A\| + \|X-W\|\right)\right]^2 dt .$$

∎

CAPITULO IV

4.1. Teoria do Indice

Para desenvolvermos a teoria do índice associado a uma geodésica fechada de uma métrica de *Finsler* $F: TM \longrightarrow \mathbb{R}^+$, onde M é uma variedade diferenciável de dimensão n, M compacta, é necessário descrever a noção de Derivada Absoluta tipo *Cartan* e o *Lema de Ricci*.

Relembremos que uma Variedade de *Finsler* (M,F) é um par constituído de uma Variedade diferenciável M juntamente com uma função contínua $F: TM \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que:

1) $F(x,\dot{x}) \geq 0$ e $F(x,\dot{x}) = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = 0$.

2) $F(x,t\dot{x}) = t\, F(x,\dot{x})$, para todo $t \geq 0$.

3) F é de classe C^∞ em $TM - S_0(TM)$, onde $S_0(TM)$ é a seção nula de TM.

4) $d_f^2 F^2(V)(Y,Y) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}_i \, \partial \dot{x}_j} y_i y_j$ é uma forma quadrática não degenerada e definida positiva, onde $Y, V \in T_x M$, $V \neq 0$, onde d_f^2 denota a segunda derivada na direção da fibra.

A função F^2 é de classe C^1 em TM (e naturalmentte de classe C^∞ fora de $S_0(TM)$).

Definição:

Seja $F: TM \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma métrica de *Finsler*. Para $V, X, Y, \in T_pM$ com $V \neq 0$, onde T_pM denota o espaço tangente a M em p, definimos

$$<X, Y>_V = \frac{1}{2} \overline{X}.\overline{Y}.F^2(V) = \frac{1}{2} d_f^2F^2(V)(X, Y),$$

onde $\overline{X}, \overline{Y}$ são campos locais extensões de X e Y, respectivamente.

$Z.F^2$ é a derivada usual de *Lie* de F^2 sobre o espaço tangente.

Das propriedades da métrica de *Finsler* segue que $<, >_v$ é uma forma bilinear não-degenerada e simétrica; em outras palavras a cada direção $V \neq 0$, $V \in T_pM$ é associado um produto escalar.

No caso *Riemanniano* naturalmente $<, >_v = <, >$ para todo $V \neq 0$.

Definiçao:

Para cada região $G \subset M$, WG indica o espaço dos campos vetoriais diferenciáveis sobre G, $WG^+ \subset WG$ indica o subespaço dos campos vetoriais diferentes de zero em todos os pontos de G, assim denominados campos vetoriais direcionais.

Nós definimos ainda as formas multilineares:

$$<X_1 , \ldots, X_k>_V = \frac{1}{4} \overline{X}_1.\overline{X}_2 \ldots \overline{X}_k\ F^2(V), \quad K \geq 3,$$

$$X_1 , \ldots, X_k \in WG, \quad V \in WG^+$$

No caso $K \geq 3$ estas formas multilineares não são necessariamente simétricas, a não ser no caso em que F é a norma de uma métrica *Riemanniana* (*Ver o próximo lema*).

4.2. Lema:

Seja F a norma de uma métrica *Riemanniana*, isto é, $F = \sqrt{< \, , \, >}$, assim $<X_1 \,,\ldots,\, X_k>_V = 0$ para todo $X_1 \,,\ldots,\, X_k \in WG$, $V \in WG^+$, $K \geq 3$.

Prova:

No caso *Riemanniano* temos $\overline{X}_{k-1}.\overline{X}_k.F^2(V) = d_f^2F^2(V)(X_k, X_{k-1}) = <X_{k-1}, X_k>_V =$ constante para todo $V \neq 0$.

Então $<X_1 \,,\ldots,\, X_k> = \overline{X}_1 \,,\ldots,\, \overline{X}_k \; F^2(V) = 0$, para $K \geq 3$.

■

4.3. Derivada Absoluta *(tipo Cartan)*

Definição:

Seja (M, F) uma Variedade de *Finsler*, $< \, , \, >_V$ o produto escalar definido acima.

A derivada Absoluta *(tipo Cartan)* $D_X^V Y$ em $G \subset M$ é uma aplicação:

$$D\colon WG^{+} \times WG \times WG \longrightarrow WG$$

com as propriedades:

1) Para cada $V \in WG^{+}$, D^{V} é uma conexão afim em WG, isto é,

$$D^{V}_{X}(Y_1 + Y_2) = D^{V}_{X}Y_1 + D^{V}_{X}Y_2\ , \quad D^{V}_{X_1+X_2}Y = D^{V}_{X_1}Y + D^{V}_{X_2}Y,$$

e para cada função $f\colon WG \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável

$$D^{V}_{fX}Y = fD^{V}_{X}Y\ , \qquad D^{V}_{X}(fY) = X(f)Y + fD^{V}_{X}Y$$

2) $D^{V}_{X}Y - D^{V}_{Y}X - [X,Y] = 0$ (Torsão livre)

3) $2<D^{V}_{X}Y,\ Z>_{V} = Y<X,Z>_{V} + X<Y,Z>_{V} - Z<X,Y>_{V} +$

$+ <[X,Y],Z>_{V} + <[Z,Y],X>_{V} + <[Z,X],\ Y>_{V} -$

$- 2<Y,Z,\ D^{V}_{X}V>_{V} - 2<X,Z,\ D^{V}_{Y}V>_{V} + 2<X,Y,\ D^{V}_{Z}V>_{V}.$

A unicidade desta derivada resulta para cada $V \in WG^{+}$ como no caso *Riemanniano*, e para sua existência ver [*Ru.*].

Pelo lema visto acima a definição da derivada Absoluta de *Cartan* no caso *Riemanniano* se reduz à definição da conexão de *Levi-Cevita*. Para estes fatos ver [*Mat.*].

4.4. Lema de Ricci:

$$X < Y,Z >_{V} = < D^{V}_{X}Y,\ Z >_{V} + < Y,\ D^{V}_{X}Z >_{V} + 2< Y,Z,\ D^{V}_{X}V >_{V}.$$

Prova:

A dupla adição de 3) resulta o lema:

$$2< D_X^V Y, Z >_V = Y< X, Z >_V + X< Y, Z >_V - Z< X, Y >_V +$$
$$+ < [X, Y], Z >_V + < [Z, Y], Z >_V + < [Z, X], Y >_V$$
$$- 2< Y, Z, D_X^V V >_V - 2< X, Z, D_Y^V V >_V + 2< X, Y, D_Z^V V >_V$$
$$2 < D_X^V Z, Y >_V = Z < X, Y >_V + X< Z, Y >_V - Y< X, Z >_V +$$
$$+ < [X, Z], Y >_V + < [Y, Z], X >_V + < [Y, X], Z >_V$$
$$- 2< Z, Y, D_X^V V >_V - 2< X, Y, D_Z^V V >_V + 2< X, Z, D_Y^V V >_V.$$

■

4.5. Lema:

Para campos vetoriais $V, V' \in WG^*$ com $V(p) = V'(p)$ e campos vetoriais $X, Y \in WG$ vale $\left(D_X^V Y\right)(p) = \left(D_X^{V'} Y\right)(p)$. Isto é, a derivada de *Cartan* depende em $p \in M$, apenas do vetor direcional $V(p)$, mas não da extensão. Para prova ver [*Ru.*].

4.6. Lema:

Para $X_1, X_2,\ V \in T_p M,\ V \neq 0$ e $a > 0$,

$$\overline{X}_1 . \overline{X}_2 F^2(V) = \overline{X}_1 . \overline{X}_2 F^2(aV), \text{ isto é } < X_1, X_2 >_V = < X_1, X_2 >_{aV}$$

ou seja o produto escalar $< \, , \, >_V$ depende somente da direção V, e não do seu comprimento.

Prova:

$$\overline{X}_2 . F^2(aV) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F^2\left(aV + tX_2\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F^2\left(a\left(V + \frac{t}{a} X_2\right)\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} a^2 F^2\left(V + \frac{t}{a} X_2\right) = \left(\frac{\overline{X}_2}{a}\right) . a^2 F^2(V) = a\, \overline{X}_2 . F^2(V).$$

$$\overline{X}_1.\overline{X}_2.F^2(aV) = \overline{X}_1.a\overline{X}_2F^2(V) = a\overline{X}_2.\overline{X}_1.F^2(V) =$$

$$= a\overline{X}_2 \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F^2(V + tX_1) = a\overline{X}_2.\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} F^2(V + \frac{sX_1}{a}) =$$

$$= a\overline{X}_2.(\frac{\overline{X}_1}{a}).F^2(V) = \overline{X}_2.\overline{X}_1.F^2(V) = \overline{X}_1.\overline{X}_2.F^2(V) \quad \text{onde} \quad s = at.$$

■

<u>4.7. Lema</u>:

$$< X_1, X_2, V >_V = < X_1, V, X_2 >_V = < V, X_1, X_2 >_V = 0.$$

Prova:

$f(a) = \overline{X}_1.\overline{X}_2.F^2(aV)$ é constante pelo lema anterior para $a>0$, estão $f'(a) = 0$ para $a > 0$.

Por outro lado para $a = t + 1$

$$0 = f'(1) = \frac{d}{da}\Big|_{a=1} \overline{X}_1.\overline{X}_2.F^2\ (aV) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \overline{X}_1.\overline{X}_2.F^2\ (V + tV) =$$

$$= \overline{X}_1.\overline{X}_2\ .\ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F^2(V + tV) = \overline{X}_1.\overline{X}_2.V.F^2(V) = 4 < \overline{X}_1, \overline{X}_2, V >_V$$

e por isso

$$\overline{X}_1.\overline{X}_2.V.F^2(V) = \overline{X}_1.V.X_2.F^2(V) = V.\overline{X}_1.\overline{X}_2.F^2(V) = 0.$$

■

Observação:

Se a função $V \longrightarrow F^2(V)$ é de classe C^2 no fibrado tangente inteiro TM, então vale o lema anterior também para $a = 0$, e $V \longrightarrow \overline{X}_1.\overline{X}_2.F^2(V) = < X_1, X_2 >_V$ é constante, isto é, $< \ ,\ >_V$ não depende de V e portanto a métrica de *Finsler* F satisfaz $F^2(W) = \langle W, W \rangle$ para uma métrica *Riemanniana* $\langle\ ,\ \rangle$ e qualquer W em TM.

Definição:

Uma geodésica de uma métrica de *Finsler* $F\colon TM \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma curva $c\colon[a,b] \longrightarrow M$ de classe C^1 que minimiza o funcional $\int_a^b F^2(x,\dot{x})\,dt$, isto é, $c\colon[a,b] \longrightarrow M$ é solução da equação de *Euler*

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} F^2(x,\dot{x})\right] = \frac{\partial}{\partial x_k} F^2(x,\dot{x}) \ , \ k = 1,2,\ldots,n \ .$$

Na próxima seção veremos, usando o cálculo variacional, que uma curva $c\colon[a,b] \longrightarrow M$ é uma F - geodésica se, e só se, para toda variação própria de c, tem-se $\frac{d}{ds}\, E(0) = 0$ onde E é o funcional $E(c) = \int_a^b F^2(x,\dot{x})\,dt$ e $E(s) = \int_a^b F^2(X(t,s))\,dt$ para qualquer variação própria de c

$V\colon[a,b] \times (-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow M$, $V(a,s) = c(a)$, $V(b,s) = c(b)$, $V(t,0) = c(t)$, onde $X(t,s) = \frac{\partial}{\partial t}\, V(t,s)$.

E neste caso temos que $c\colon[a,b] \longrightarrow M$ é uma F-geodésica se, e só se, $D_{\dot{c}}^{\dot{c}}\, \dot{c} = 0$, onde D é a derivada absoluta de *Cartan* associada à métrica de *Finsler* $F\colon TM \longrightarrow \mathbb{R}^+$, e $D_{\dot{c}}^{\dot{c}}\, \dot{c} = 0$ é a equação de *Euler* de c.

4.8. As fórmulas da primeira e segunda Variações da Energia Finsleriana

Definição:

Seja $c:[0,1] \longrightarrow M$ uma curva diferenciável por partes em uma Variedade *Finsleriana* (M,F). Uma variação de c é uma aplicação contínua $V: [0,1] \times (-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow M$ tal que:

a) $V(t,0) = c(t)$, $t \in [0,1]$,

b) Existe uma subdivisão de $[0,1]$ por pontos $0=t_0 < t_1 <\ldots< t_{k+1}=1$, tal que a restrição de V a cada $[t_i, t_{i+1}] \times (-\epsilon,\epsilon)$, $i = 0,1,\ldots,K$ é diferenciável.

Uma variação diz-se própria se

$$V(0,s) = c(0) \quad \text{e} \quad V(1,s) = c(1),$$

para todo $s\in(-\epsilon,\epsilon)$. Se V é diferenciável, a variação diz-se diferenciável.

Para cada t fixado, a curva parametrizada diferenciável $V_t:(-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow M$ é chamada uma curva transversal da variação.

O vetor velocidade de uma curva transversal em $s = 0$, ou seja, $Y(t) = \frac{\partial V}{\partial s}(t,0)$ é um campo vetorial (diferenciável por partes) ao longo de $c(t)$ e é chamado campo variacional de V.

4.9. Formula da primeira Variação da Energia Finsleriana de uma curva.

Sejam $c:[0,1] \longrightarrow M$ uma curva diferenciável por partes e $V:[0,1] \times (-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow M$ uma variação de c. Seja

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k+1} = 1$$

a subdivisão de $[0,1]$ tal que a restrição de V a cada $[t_i, t_{i+1}] \times (-\epsilon,\epsilon)$ seja diferenciável, e $F(\dot{c}(t)) \neq 0$ para $t_i < t < t_{i+1}$ e $F(\dot{c}(t_i^+)) \neq 0$, $F(\dot{c}(t_i^-)) \neq 0$, onde $F(\dot{c}(t_i^+)) = \lim\limits_{\substack{t \to t_i \\ t > t_i}} F(\dot{c}(t))$ e

$$F(\dot{c}(t_i^-)) = \lim_{\substack{t \to t_i \\ t < t_i}} F(\dot{c}(t))$$

Seja $E:(-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ a energia *Finsleriana* de V, isto é, $E(s)=\int_0^1 \frac{1}{2} F^2(X(t,s))dt$ onde $X(t,s)= \frac{\partial}{\partial t}V(t,s)=V_*(\frac{\partial}{\partial t})$, $X(t,0)=\dot{c}(t)$.

Assim $Y(t,s) = \frac{\partial}{\partial s}V(t,s) = V_*(\frac{\partial}{\partial s})$, e $Y(t,0) = Y(t)$ o campo variacional ao longo de $c(t)$.

Derivando em s

$$E(s)=\int_0^1 \frac{1}{2} F^2(X(t,s))dt = \frac{1}{2} \int_0^1 <X(t,s),X(t,s)>_X dt =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} <X(t,s),X(t,s)>_X \, dt$$

$$E'(s) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial}{\partial s}<X,X>_X dt =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} Y<X,X>_X dt = \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[<D_Y^X X,\ X>_X + <X,X,D_Y^X X>_X\right] dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} <D_X^X Y,\ X>_X\ dt,$$

pois $D_Y^X X - D_X^X Y = [X,Y] = 0$ e $<X,X,D_Y^X X>_X = 0.$

$$E'(s) = \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\frac{d}{dt} <Y,X>_X - <Y,D_X^X X>_X - 2 <Y,X,D_X^X X>_X\right] dt$$

$$E'(s) = \sum_{i=0}^{k} <Y,X>_X \Big|_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} - \int_0^1 <Y,D_X^X X>_X dt$$

$$E'(s) = \sum_{i=0}^{k} <Y(t,s),X(t,s)>_X \Big|_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} - \int_0^1 <Y(t,s),D_X^X X(t,s)>_X dt$$

Fazendo $s = 0$ temos $Y(t) = Y(t,0)$ e $X(t,0) = \dot{c}(t)$,

$$E'(0) = \sum_{i=0}^{k} <Y(t),\ \dot{c}(t)>_{\dot{c}} \Big|_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} - \int_0^1 <Y(t),D_{\dot{c}}^{\dot{c}}\ \dot{c}\ (t)>_{\dot{c}}\ dt$$

$$E'(0) = - \int_0^1 <Y(t),D_{\dot{c}}^{\dot{c}}\ \dot{c}\ (t)>_{\dot{c}}\ dt - \sum_{i=1}^{k} <Y(t_i),\ \dot{c}\ (t_i^+) - \dot{c}\ (t_i^-)>_{\dot{c}}$$

$$- <\ Y(0),\ \dot{c}\ (0)\ >_{\dot{c}} + <\ Y(1),\ \dot{c}\ (1)\ >_{\dot{c}}$$

Observação 1):

Quando a curva $c:[0,1] \longrightarrow M$ é regular e a variação V é própria, isto é, $V(0,s)=c(0)$, $V(1,s)=c(1)$ então $Y(1,s)=\frac{\partial}{\partial s}V(1,s)=0$, $Y(0,s) = \frac{\partial}{\partial s}\ V(0,s) = 0$ e

$$E'(s) = -\int_0^1 \langle Y(t,s),\ D_X^X X(t,s)\rangle_X\ dt \text{ e para } s = 0$$

$$E'(0) = -\int_0^1 \langle Y(t,0), D_{\dot{c}}^{\dot{c}}\ \dot{c}\ \rangle_{\dot{c}}\ dt$$

Observação 2):

Se a curva $c:[0,1] \longrightarrow M$ é regular, fechada e $\dot{c}(0)=\dot{c}\ (1)$, e a variação V é constituida de curvas fechadas, isto é, $V(0,s) = V(1,s)$, então $E'(s) = -\int_0^1 \langle Y(t,s),\ D_X^X X(t,s)\rangle_X dt$ e para $s=0$

$$E'(0) = -\int_0^1 \langle Y(t,0),\ D_{\dot{c}}^{\dot{c}}\ \dot{c}\ \ \rangle_{\dot{c}}\ \ dt.$$

<u>Conseqüências</u>:

1) Seja $c:[0,1] \longrightarrow M$ uma curva diferenciável por partes e regular (isto é, em todos os pontos do intervalo $[0,1]$ onde $\dot{c}$ existe, $\dot{c}$ é diferente de zero), então para toda variação própria V de c, temos $E'(0) = 0$ se, e somente se, $D_{\dot{c}}^{\dot{c}}\ \dot{c} = 0$ (isto é, c é uma geodésica).

Prova:

Suponhamos que $D^{\dot{c}}_{\dot{c}}\, \dot{c}=0$. Mostremos primeiramente que c é regular. Seja $X(t,s) = \frac{\partial}{\partial t} V(s,t)$

De $\frac{\partial}{\partial t} F^2(X(t)) = \frac{\partial}{\partial t} \langle X(t,s),\ X(t,s)\rangle_X = 2\langle X, D^X_X X\rangle_X$ para $t_i < t < t_{i+1}$, $i = 0,1,\ldots,k$.

Para $s = 0$ temos

$$\frac{\partial}{\partial t} F^2(X(t,s))\Big|_{s=0} = 2 \langle \dot{c}\ , D^{\dot{c}}_{\dot{c}}\, \dot{c} \rangle_{\dot{c}} = 0,\ t_i < t < t_{i+1},\ i=0,1,\ldots,k.$$

Portanto $F(X(t,0)) = F(\dot{c}) =$ constante $\neq 0$ em cada intervalo (t_i, t_{i+1}). Sendo c contínua, $F(\dot{c}) \neq 0$ em $[0,1]$. Logo c é regular.

Portanto se a variação V é própria, $V(0,s)=0$, $V(1,s)=0$ e todos os termos de

$$E'(0) = -\int_0^1 \langle Y(t),\ D^{\dot{c}}_{\dot{c}}\, \dot{c}\rangle_{\dot{c}}\ dt - \sum_{i=1}^{k} \langle Y(t_i),\ \dot{c}\,(t_i^+) - \dot{c}\,(t_i^-)\rangle_{\dot{c}}$$

$$- \langle\ Y(0),\ \dot{c}\ (0)\ \rangle + \langle\ Y(1),\ \dot{c}\ (1)\ \rangle,$$

são nulos.

Reciprocamente, suponhamos que $E'(0) = 0$, para toda variação própria de c.

Seja $Y(t) = g(t)\, D^{\dot{c}}_{\dot{c}}\, \dot{c}\ (t)$ onde $g:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável por partes com $g(t) > 0$ se $t \neq t_i$ e $g(t_i) = 0$, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ k + 1$, onde $0 = t_0 < t_1 <\ldots< t_{k+1} = 1$. Construindo uma variação V de c tendo $Y(t)$ como campo variacional (tal variação sempre existe, por exemplo, tomar $V(t,s) = \exp_{c(t)}(sY))$, temos

$$0 = E'(0) = -\int_0^1 g(t) < D^{\dot{c}}_{\dot{c}}\, \dot{c},\ D^{\dot{c}}_{\dot{c}}\, \dot{c} >_{\dot{c}}\, dt.$$

Logo $D^{\dot{c}}_{\dot{c}}\, \dot{c} = 0$, para cada intervalo (t_{i-1}, t_i).

Para ver o que acontece nos pontos t_i, consideremos um outro campo variacional $\overline{Y}(t)$ tal que $\overline{Y}(0) = \overline{Y}(1) = 0$ e $Y(t) = 0$ para $t \in (t_i, t_{i+1})$, e $\overline{Y}(t_i) = \dot{c}(t_i^+) - \dot{c}(t_i^-)$, $i \neq 0$ e $i \neq k+1$.

Então

$$0 = E'(0) = -\sum_{i=1}^{k} < \dot{c}(t_i^+) - \dot{c}(t_i^-),\ \dot{c}(t_i^+) - \dot{c}(t_i^-) >_{\dot{c}} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{k} \left| \dot{c}(t_i^+) - \dot{c}(t_i^-) \right|^2$$

ou seja, c é de classe C^1 em cada t_i. Logo $D^{\dot{c}}_{\dot{c}}\, \dot{c}(t_i) = 0$.

■

Obs: $D^{\dot{c}}_{\dot{c}}\, \dot{c} = 0$ é a equação de *Euler* para geodésicas.

2) Seja $c:[0,1] \longrightarrow M$ uma curva fechada diferenciavel por partes e regular (isto é, em todos os pontos do intervalo $[0,1]$ onde $\dot{c}$ existe, $\dot{c}$ é diferente de zero), então para toda variação V de c por curvas fechadas temos $E'(0) = 0$ se, e somente se, $D^{\dot{c}}_{\dot{c}}\, \dot{c} = 0$.

Prova: A prova é analoga ao caso anterior.

■

4.10. Segunda Variação da Energia Finsleriana

Calculemos a segunda Variação da Energia *Finsleriana*. Adotemos a seguinte notação, enquanto não existe confusão, $D^X = D$, $X = X(t,s)$, $Y = Y(t,s)$.

$$E'(s) = \int_0^1 < D^X_Y X,\ X >_X dt = \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} < D^X_Y X,\ X >_X dt.$$

Derivando em s temos:

$$E''(s) = \int_0^1 Y < D^X_Y X,\ X >_X dt$$

$$E''(s) = \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[< D^X_Y D^X_Y X, X >_X + < D^X_Y X, D^X_Y X >_X + 2 < D^X_Y X, X, D^X_Y X >_X \right] dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[< D_Y D_Y X, X >_X + < D_Y X, D_Y X >_X \right] dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[< D_Y D_X Y, X >_X + < D_Y X, D_Y X >_X \right] dt$$

pois $D^X_X Y - D^X_Y X = [X, Y] = 0$ e $< D_Y X,\ X,\ D_Y X >_X = 0$.

Usando que

$$X< D_Y Y, X >_X = < D_X D_Y Y, X >_X + < D_Y Y, D_X X >_X + 2< D_Y Y, X, D_X X >_X$$

$$E''(s) = \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Big[< D_Y D_X Y - D_X D_Y Y, X >_X + X< D_Y Y, X >_X - < D_Y Y, D_X X >_X$$

$$- 2 < D_Y Y, X, D_X X >_X + < D_Y X, D_Y X >_X \Big] dt.$$

$$E''(s) = \sum_{i=0}^{k} <D_Y Y, X>_X \Big|_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} + \int_0^1 \Big[<D_Y Y, D_X Y>_X - <D_Y Y, D_X X>_X - <D_X D_Y Y - D_Y D_X Y, X>_X \Big] dt$$

onde $D_Y Y(t_i^+) = \lim_{\substack{t \to t_i \\ t > t_i}} D_Y Y(t)$ $\qquad D_Y Y(t_{i+1}^-) = \lim_{\substack{t \to t_{i+1} \\ t < t_{i+1}}} D_Y Y(t)$.

Analogamente ao caso *Riemanniano* definimos o tensor de curvatura tipo *Rund* para o campo variacional V, por

$$K^{(V)} : WG \times WG \times WG \longrightarrow WG$$

$$K^{(V)} (X, Y) Z = D_X^V D_Y^V Z - D_Y^V D_X^V Z - D_{[Y \ Y]}^V Z$$

que depende, ao contrário do caso *Riemanniano*, ainda de V.

Então vale:

$$E''(s) = \sum_{i=0}^{k} <D_Y^X Y, X>_X \Big|_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} + \int_0^1 \Big[<D_X^X Y, D_X^X Y>_X - <D_X^X Y, D_X^X X>_X - <K^{(X)} (X, Y) Y, X>_X \Big] dt$$

Seja $c:[0,1] \longrightarrow M$ uma F-geodésica (fechada ou não). No caso de termos um segmento de geodésica as variações $V(t,s)$ consideradas são as próprias, e no caso em que $c:[0,1] \longrightarrow M$ é uma geodésica fechada as variações $V(t,s)$ são constituidas por curvas fechadas. Então temos:

$$E''(0) = \int_0^1 \left[<D^{\dot c}_{\dot c}\ Yt),\ D^{\dot c}_{\dot c}\ Y(t)>_{\dot c} + <K^{(\dot c)}\big(Y(t),\dot c\ (t)\big)Y(t),\dot c\ (t)>_{\dot c} \right] dt +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k} <\ D^{\dot c}_{Y}\ Y(t),\ \dot c(t)\ >_{\dot c} \Bigg|_{t^+_i}^{t^-_{i+1}}$$

$$E''(0) = \int_0^1 \left[<D^{\dot c}_{\dot c}\ Y(t), D^{\dot c}_{\dot c}\ Y(t)>_{\dot c} + <K^{(\dot c)}\big(Y(t),\dot c\ (\bar t)\big)Y(t),\dot c\ (t)>_{\dot c} \right] dt +$$

$$- \sum_{i=0}^{k} <\ D^{\dot c}_{Y}\ Y(t_i),\ \dot c\ (t^+_i) - \dot c\ (t^-_i)>_{\dot c}$$

$$E''(0) = \int_0^1 \left[<D^{\dot c}_{\dot c}\ Y(t), D^{\dot c}_{\dot c}\ Y(t)>_{\dot c} + <K^{(\dot c)}\ \big(Y(t),\dot c\ (t)\big)Y(t),\dot c\ (t)>_{\dot c} \right] dt.$$

No caso em que a curva $c:[0,1] \longrightarrow M$ é uma F-geodésica (fechada ou não) é conveniente escrever a expressão de $E''(0)$ da maneira seguinte:

Como, em cada intervalo onde V é diferenciável, temos

$$\frac{d}{dt} <\ Y(t), D^{\dot c}_{\dot c}\ Y(t)\ >_{\dot c} = <\ Y(t), D^{\dot c}_{\dot c}\ D^{\dot c}_{\dot c}\ Y(t)\ >_{\dot c} + <\ D^{\dot c}_{\dot c}\ Y(t), D^{\dot c}_{\dot c}\ Y(t)\ >_{\dot c} +$$

$$+\ 2<Y(t), D^{\dot c}_{\dot c}\ Y(t), D^{\dot c}_{\dot c}\ c^{\cdot}(t)>_{\dot c} = <Y(t), D^{\dot c}_{\dot c}\ D^{\dot c}_{\dot c}\ Y(t)>_{\dot c} + <D^{\dot c}_{\dot c}\ Y(t), D^{\dot c}_{\dot c}\ Y(t)>_{\dot c}\ .$$

Tomando a F-geodésica $c:[0,1] \longrightarrow M$ e a partição $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} = 1$, podemos escrever:

$$\int_0^1 <Y(t),\ \left(D_{\dot{c}}^{\dot{c}}\right)^2 Y(t) + K^{(\dot{c})}\big(Y(t),\dot{c}(t)\big)\ \dot{c}(t)>_{\dot{c}}\ dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{dt} < Y(t),\ D_{\dot{c}}^{\dot{c}}\ Y(t)>_{\dot{c}}\ dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(<D_{\dot{c}}^{\dot{c}}\ Y(t), D_{\dot{c}}^{\dot{c}}\ Y(t)>_{\dot{c}} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + <K^{(\dot{c})}\big(Y(t),\dot{c}(t)\big)Y(t),\dot{c}(t)>_{\dot{c}}\right)\right]\ dt = \sum_{i=0}^{k} <Y(t), D_{\dot{c}}^{\dot{c}}\ Y(t)>_{\dot{c}}\ \Big|_{t_i}^{t_{i+1}}$$

$$- \int_0^1\left[< D_{\dot{c}}^{\dot{c}}\ Y(t),\ D_{\dot{c}}^{\dot{c}}\ Y(t) >_{\dot{c}} + < K^{(\dot{c})}\big(Y(t),\ \dot{c}(t)\big)Y(t),\dot{c}(t) >_{\dot{c}}\right]dt =$$

$$= - \sum_{i=0}^{k} < Y(t_i),\ D_{\dot{c}}^{\dot{c}}\ Y(t) - D_{\dot{c}}^{\dot{c}}\ Y(t_i^-) >_{\dot{c}} - \int_0^1\left[< D_{\dot{c}}^{\dot{c}}\ Y(t),\ D_{\dot{c}}^{\dot{c}}\ Y(t) >_{\dot{c}} +\right.$$

$$\left. + < K^{(\dot{c})}\big(Y(t),\dot{c}\ (t)\big)Y(t),\dot{c}\ (t)>_{\dot{c}}\right] dt.$$

Agora $E''(0)$ é dada por

$$E''(0) = -\int_0^1 <Y(t),\ \left(D_{\dot{c}}^{\dot{c}}\right)^2 Y(t) + K^{(\dot{c})}\big(Y(t),\dot{c}\ (t)\big)\ Y(t)>_{\dot{c}}\ dt +$$

$$- \sum_{i=0}^{k} < Y(t_i),\ D_{\dot{c}}^{\dot{c}}\ Y(t_i^+) - D_{\dot{c}}^{\dot{c}}\ Y(t_i^-)>_{\dot{c}} +$$

$$+ < Y(1),\ D_{\dot{c}}^{\dot{c}}\ Y(1^-)>_{\dot{c}} - < Y(0),\ D_{\dot{c}}^{\dot{c}}\ Y(0^+)>_{\dot{c}}$$

onde $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} = 1$ são os pontos de descontinuidades de $D_{\dot{c}}^{\dot{c}} Y(t)$.

4.11 - Forma do Indice de uma geodésica fechada de uma Variedade de Finsler (M^n, F) onde M^n é uma Variedade Diferenciável compacta de dimensão n.

Seja $(M, < , >_p)$ uma Variedade Riemanniana compacta de dimensão n é $S = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ o circulo parametrizado entre 0 e 1.

Denotemos por $\Lambda M = H^1(S, M)$ o espaço de curvas fechadas $c: S \longrightarrow M$, absolutamente contínuas na metrica $< , >_p$ e tais que

$$\int_0^1 < \dot{c}\ (t), \dot{c}\ (t) > dt < \infty.$$

ΛM admite neste caso uma estrutura de variedade diferenciável modelada a um espaço de *Hilbert*, e que está associada de modo natural à métrica *Riemanniana* de M.

Denotemos por $T_c \Lambda M$ o espaço tangente à Variedade de *Hilbert* ΛM. $T_c \Lambda M$ é constituido dos campos X, periódicos, absolutamente contínuos na métrica $< , >_p$, ao longo de c, tais que a derivada covariante $\nabla_{\dot{c}} X$ existe em quase toda parte e $\int_0^1 |\nabla_{\dot{c}} X|^2 dt < \infty$.

$T_c \Lambda M$ é um espaço de *Hilbert* com respeito ao produto interno

$$< X, Y >_1 = \int_0^1 < X, Y > dt + \int_0^1 < \nabla_{\dot c} X, \nabla_{\dot c} X > dt$$

e denotemos por $| \ . \ |_1$ a respectiva norma.

Consideremos agora o funcional $E: \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $E(c) = \int_0^1 F^2(\dot c)\, dt$, onde $F: TM \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma métrica de *Finsler* em M e $c: S \longrightarrow M$ é uma F-geodésica fechada não-constante.

A forma do índice de c é definida por

$$I : T_c\Lambda M \times T_c\Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$I(X,Y) = d^2E(c)(X,Y) = \int_0^1 \left[<D^{\dot c}_{\dot c} X, D^{\dot c}_{\dot c} Y>_{\dot c} + <K^{(\dot c)}(X, \dot c\ )\dot c\ , Y>_{\dot c} \right] dt =$$

$$= - \int_0^1 < \left(D^{\dot c}_{\dot c}\right)^2 X + K^{(\dot c)}(X, \dot c\ )\dot c\ , Y>_{\dot c} dt + \sum_{i=1}^{k} <D^{\dot c}_{\dot c} X(t_i^-) - D^{\dot c}_{\dot c} X(t_i^+), Y(t_i)>_{\dot c} dt +$$

$$+ <D^{\dot c}_{\dot c} X(1^+), Y(1)>_{\dot c} - <D^{\dot c}_{\dot c} X(0^+), Y(0)>_{\dot c}$$

onde $< X, Y >_{\dot c} = \frac{1}{2} d_f^2 F^2(\dot c)(X,Y)$,

D é a derivada absoluta de *Cartan* e $K^{(\dot c)}$ é o tensor de curvatura tipo *Rund*.

I é uma forma bilinear simétrica.

Se o campo $X \in T_c\Lambda M$ é diferenciâvel e diferenciavelmente fechado, então a forma do índice escreve:

$$I(X,Y) = d^2E(c)(X,Y) = - \int_0^1 < \left(D^{\dot c}_{\dot c}\ Y\right)^2 X + K^{(\dot c)}(X, \dot c)\dot c\ , Y>_{\dot c} dt.$$

Seja c um ponto crítico (geodésica fechada) não constante da função energia

$$E\colon \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad E(c) = \int_0^1 F^2(\dot{c})\,dt.$$

Da forma do índice $d^2E(c)$ nós obtemos um operador auto-adjunto $A_c\colon T_c\Lambda M \longrightarrow T_c\Lambda M$ dado pela identidade:

$$< A_cX, Y >_{1,\dot{c}} = < X, A_cY >_{1,\dot{c}} = I(X,Y) = d^2E(c)(X,Y),$$

onde $< \, , \, >_{1,\dot{c}}$ denota o produto interno

$$< X, Y >_{1,\dot{c}} = \int_0^1 < X, Y >_{\dot{c}}\, dt + \int_0^1 < D^{\dot{c}}_{\dot{c}} X, D^{\dot{c}}_{\dot{c}} Y >_{\dot{c}}\, dt$$

Seja $c \in C^\infty(S,M)$ uma curva regular, isto é, $\dot{c}\,(t) \neq 0$, $\forall t \in [0,1]$, e consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd} c^*TM \arrow[r, "c^*_\pi"] \arrow[d, "\pi^*_c"'] & TM \arrow[d, "\pi"] \\ S \arrow[r, "c"] & M \end{tikzcd}$$

onde $(\pi^*_c)^{-1}(t) = T_{c(t)}M$ é a fibra em $t \in S$ e $c^*TM = \bigcup_{0 \le t \le 1} T_{c(t)}M$.

Seja $\sum(\pi^*_c)$ o conjunto de todas as seções do fibrado π^*_c e consideremos

$$H^0(c^* TM) = L^2(c^* TM) = \left\{ X \in \sum(\pi_c^*) : \int_0^1 < X, Y >_{\dot{c}} \, dt < \infty \right\}$$

$H^1(c^* TM) = T_c \Lambda M = \{X \in C^0(\pi_c^*) :$ X é absolutamente contínua na métrica de *Finsler* F, $D_{\dot{c}}^{\dot{c}} X$ existe em quase toda parte e $\int_0^1 <D_{\dot{c}}^{\dot{c}} X, D_{\dot{c}}^{\dot{c}} X>_{\dot{c}} dt < \infty \}$.

No caso de uma F-geodésica fechada $c : S \longrightarrow M$, $c \neq$ constante, temos os respectivos produtos intermos:

$$< X, Y >_{0, \dot{c}} = \int_0^1 < X, Y >_{\dot{c}} \, dt, \text{ para } X, Y \in H^0(c^* TM),$$

$$< X, Y >_{1, \dot{c}} = \int_0^1 < X, Y >_{\dot{c}} \, dt + < D_{\dot{c}}^{\dot{c}} X, D_{\dot{c}}^{\dot{c}} Y >_{\dot{c}} \, dt, \text{ para}$$

$X, Y \in H^1(c^* TM) = T_c \Lambda M$

e denotemos por $| \, . \, |_{\infty, \dot{c}}$ a norma supremo em $C^0(c^* TM)$:

$$|X|_{\infty, \dot{c}} = \sup_{t \in S} |X(t)|_{\dot{c}}$$

onde $|X(t)|_{\dot{c}} = < X, X >_{\dot{c}}^{1/2} = \left[\frac{1}{2} \, d_F^2 \, F^2(\dot{c})(X, X) \right]^{1/2}$

4.12. Variedade de Finsler completa e aplicaçao exponencial

Seja (M^n, F) uma Variedade de *Finsler* e consideremos as equações de *Euler* das geodésicas

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

onde $L = F^2$.

As equações de *Euler* determinam um Campo de Vetores W_L no fibrado tangente TM (*Campo de Euler*) que gera um semi-grupo local a 1-parâmetro de difeomorfismos $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ que induz um fluxo "orientado" em TM.

Em particular para $s \geq 0$, temos $\pi\circ\varphi_t(sY) = \pi\circ\varphi_{st}(Y)$, onde $\pi : TM \longrightarrow M$ é a projeção canônica.

Nós dizemos que a Variedade de *Finsler* é completa quando o Campo de *Euler* W_L é um Campo de Vetores Completo.

Se $Y \in TM$ (e Y "pequeno" se (M,F) não é completa) nós definimos a aplicação exponencial:

$$exp_p : TM \longrightarrow M, \quad exp_p(Y) = \pi\circ\varphi_1(Y)$$

para todo $p \in M$, e no caso em que (M,F) não é completa definimos

$$exp_p : \{Y \in T_pM : L(Y) < \in\} \longrightarrow M$$
$$exp_p(Y) = \pi\circ\varphi_1(y)$$

tal que as imagens dos raios em T_pM são as geodesicas para $L = F^2$.

Alem disso exp é de classe C^1 e C^∞ fora da seção nula; e usamos a identificação $T_o(T_pM) \cong T_pM$; $(dexp_p)(0) = id_{TM_p}$.

Para uma curva diferenciável por partes $c:[a,b] \longrightarrow M$ definimos as funções:

$$\tilde{L}_1(c) = \int_a^b F(\dot{c}(t))\ dt$$

$$\tilde{L}_2(c) = \int_a^b F^2(\dot{c}(t))\ dt.$$

Analogamente ao caso *Riemanniano* vale a seguinte

4.13. Proposição:

Para $p \in M$ existem uma vizinhança aberta U_p e $\epsilon>0$ tal que dois pontos quaisquer (em uma dada ordem) em U_p são unidos por uma única geodésica γ tal que

$$\tilde{L}_2(\gamma) = \int_a^b F^2(\dot{\gamma}(t))\ dt < \epsilon, \quad \gamma:[a,b] \longrightarrow M.$$

Alem disso, esta geodésica depende C^1-diferencialmente dos pontos extremos e de modo C^∞ quando estes pontos são distintos.

4.14. "Função distância" $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$.

Nós definimos agora a "função distância" $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$. por $d(p,q) = inf \left\{ \int_a^b F(\dot{c}(t))dt \right\}$, onde c percorre as curvas diferenciáveis por partes unindo p e q, com $c(a) = p$ e $c(b) = q$.

As seguintes propriedades são imediatas

(a) $d(p,q) \geq 0$ e $d(p,q) = 0$ se, e só se, $p = q$.

(b) $d(p,q) + d(q,r) \geq d(p,r)$

(c) d é contínua.

Observemos que d é simétrica se (M,F) é uma Variedade de *Finsler* Simétrica e neste caso d define uma métrica em M que dá a topologia original.

Definição: Seja (M^n,F) uma Variedade de *Finsler*. A distância $d(p,q)$; $p,q \in M$ ê definida por $d(p,q)$ = ínfimo dos comprimentos de todas as curvas γ diferenciáveis por partes contidas em M e unindo p e q, e sendo que γ pode ser de ponto inicial p e final q, ou que γ pode ser de inicial q e final p.

Observemos que com esta definição a função distância é simétrica.

Agora passaremos a construir um importante exemplo de espaço mêtrico, que serâ útil na demonstração do próximo lema. Esse tal espaço será $(c^*TM,\ d)$.

Para construirmos a distância d em $c^*TM = \bigcup_{0\le t\le 1} T_{c(t)}M$, construiremos em primeiro lugar uma métrica de *Finsler* em c^*TM.

Seja $(p,v) = \big(c(t_o),v\big)$ um ponto de c^*TM e consideremos 2 curvas diferenciâveis por (p,v) contidas em c^*TM:

$$s \longrightarrow (c(\alpha(s)),\ v(s)) \qquad \text{e} \qquad s \longrightarrow (c(\beta(s)),\ w(s))$$

onde α e β são funções diferenciáveis, $\alpha,\ \beta\colon [-\epsilon,\epsilon] \longrightarrow [0,1]$, com $\alpha(0) = t_0 = \beta(0)$.

Consideremos os vetores tangentes em $(p,v)=\big(c(t_o),v\big)$:

$$V = \big(\dot c\ (\alpha(0))\alpha'(0),\ v'(0)\big)$$

$$W = \big(\dot c\ (\beta(0))\beta'(0),\ w'(0)\big).$$

E definimos o seguinte produto interno

$$<<V,W>>_{(p,v)} = \alpha'(0)\beta'(0)<\dot{c}\,(t_o),\dot{c}\,(t_o)>_{\dot{c}} + <D^{\alpha'\dot{c}}_{\alpha'\dot{c}}\,v(0),D^{\beta'\dot{c}}_{\beta'\dot{c}}\,w(0)>_{\dot{c}}$$

Para uma curva diferenciável $\gamma:[a,b] \longrightarrow \overset{*}{c}\ TM$, $\gamma(s) = (c(\alpha(s)),\ v(s)$ temos $\gamma'(s) = (\alpha'(s)\dot{c}\ (\alpha(s)),\ v'(s))$

e

$$\|\gamma'(s)\|^2 = \alpha'(s)^2\,|\dot{c}(\alpha(s))|^2_{\dot{c}} + |D^{\alpha'\dot{c}}_{\alpha'\dot{c}}\ v(s)|^2_{\dot{c}}$$

O comprimento de γ é dado por $L(\gamma)=\int_a^b \|\gamma'(s)\|\,ds$.

A função distância d em $c^*TM = \underset{0\leq t\leq 1}{U} T_{c(t)}M$ é agora definida por

$$d((p_1,v_1),\ (p_2,v_2)) = inf\ L\ (\gamma),$$

onde γ percorre todas as curvas diferenciáveis por partes ligando (p_1,v_1) e (p_2,v_2), e quer seja γ com ponto inicial em (p_1,v_1) e final em (P_2,v_2), quer seja γ com ponto inicial (p_2,v_2) e final em (p_1,v_1).

<u>4.15. Lema</u>:

Seja c uma F-geodésica fechada não constante, $c:[0,1] \longrightarrow M$.

As seguintes inclusões são contínuas

$$H^1(c^*TM) \hookrightarrow C^0(c^*TM) \hookrightarrow H^0(c^*TM)$$

e a primeira inclusão é compacta, isto é, a imagem de uma seqüência limitada de $H^1(c^*TM)$ tem fêcho compacto em $C^0(c^*TM)$.

(a) se $X \in C^0(c^*TM)$, então $|X|_{0,\dot{c}} \leq |X|_{\infty,\dot{c}}$,

(b) Se $X \in H^1(c^*TM)$, então $|X|_{\infty,\dot{c}} \leq \sqrt{2}\ |X|_{1,\dot{c}}$.

Prova:

a) $|X|^2_{0,\dot{c}} = \int_2^1 <X(t), X(t)>_{\dot{c}}\ dt = \int_0^1 |X|^2_{\dot{c}}\ dt \leq \int_0^1 max|X(t)|^2_{\dot{c}}\ dt = |X|^2_{\infty,\dot{c}}$

(b) Escolha t_1 de modo que $|X(t)|_{\dot{c}} \leq |X(t_1)|_{\dot{c}}$, para todo t. Então

$$|X|_{\infty,\ \dot{c}} = |X(t)|^2_{\dot{c}} + \int_t^{t_1} \frac{d}{dt}\ |X(t)|^2_{\dot{c}}\ \ dt =$$

$$= |X(t)|^2_{\dot{c}} + 2\int_0^1 <\ X(t),\ D^{\dot{c}}_{\dot{c}}\ \ X(t)\ >_{\dot{c}}\ \ dt \leq$$

$$\leq |X(t)|^2_{\dot{c}} + 2\int_0^1 |X(t)|_{\dot{c}}\ .\ |D^{\dot{c}}_{\dot{c}}\ \ X(t)|_{\dot{c}}\ \ dt \leq$$

$$\leq <\ X, X\ >_{0,\dot{c}} + <\ X, X\ >_{0,\dot{c}} + <\ D^{\dot{c}}_{\dot{c}}\ \ X,\ D^{\dot{c}}_{\dot{c}}\ \ X\ >_{0,\dot{c}} \leq 2|X|_{1,\dot{c}}$$

pois $\frac{d}{dt}\ |X(t)|^2_{\dot{c}} = \frac{d}{dt} <X(t), X(t)>_{\dot{c}} = 2<D^{\dot{c}}_{\dot{c}}\ X, X>_{\dot{c}} + 2<X, X, D^{\dot{c}}_{\dot{c}}\ \ \dot{c}\ >_{\dot{c}} =$
$= 2\ <X, D^{\dot{c}}_{\dot{c}}\ X>_{\dot{c}}$ e $D^{\dot{c}}_{\dot{c}}\ \ \dot{c}\ = 0$, $2ab \leq a^2 + b^2$.

A compacidade da inclusão $H^1(c^*TM) \hookrightarrow C^0(c^*TM)$ segue do Teorema de Arzelá-Ascoli, pois: Dada uma seqüência $\{X_n\} \subset H^1(c^*TM)$, $|X_n|_{1,\dot{c}} < K$, $K > 0$, temos pelo item b) que $|X_n|_{\infty,\dot{c}} \leq \sqrt{2}K$, $n=1,2,3,\ldots$.

Então para cada $t \in [0,1]$ o conjunto

$$A(t) = \{X_n(t) : n = 1,2,3,\ldots\}$$

é relativamente campacto, como subconjunto da bola fechada de raio $\sqrt{2}\, K$ do espaço tangene $T_{c(t)}M$ com norma $|\ .\ |_{\dot{c}}$

A seqüência $\{X_n\} \subset H^1(c^* TM)$ é equicontínua pois: a curva $\gamma(t) = (c(t),\ X_n(t))$ que está contida em $c^*(TN) = \bigcup_{0 \le t \le 1} T_{c(t)}M$ e une os pontos $(c(t_o),\ X_n(t_o))$ e $(c(t),\ X_n(t))$ satisfaz

$$\int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt = \int_0^1 |\dot{c}\ (t)|_{\dot{c}}^2\ dt + \int_0^1 |D^{\dot{c}}_{\dot{c}}\ X_n(t)|_{\dot{c}}^2\ dt \le E(c) + |X_n|_{1,\dot{c}}^2 <$$

$< E(c) + K^2$, e

$$d^2\big((c(t), X_n(t)),\ (c(t_o), X_n(t_o))\big) \le (L(\gamma))^2 = \left(\int_{t_o}^{t} \|\dot{\gamma}(t)\|\ dt\right)^2 \le$$

$$\le \left(\int_{t_o}^{t} 1^2\ dt\right)\left(\int_{t_o}^{t} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt\right) \le (E(c) + K^2)\ |t - t_o|\ .$$

$$d\big((c(t), X_n(t)),\ (c(t_o), X_n(t_o))\big) \le (E(c) + K^2)^{1/2}\ \ |t - t_o|^{1/2}$$

■

4.16. Teorema:

Seja c um ponto crítico da função energia $E\colon \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}$, $E(c) = \int_0^1 F^2(\dot{c})\,dt$ e $c \neq \text{const}$.

O operador auto-adjunto $A_c\colon T_c\Lambda M \longrightarrow T_c\Lambda M$ associado à forma do índice

$$d^2E(c)(X,Y) = \langle A_c X, Y\rangle_{1,\dot{c}} = \langle X, A_c Y\rangle_{1,\dot{c}}$$

é da forma $A_c = id + k_c$, onde $k_c = -\left(id - \left(D^{\dot{c}}_{\dot{c}}\right)^2\right)^{-1} \circ \left(\tilde{K}_c + id\right)$ é um

operador compacto caracterizado pela identidade

$$\langle k_c X, Y\rangle_{1,\dot{c}} = -\int_0^1 \langle (\tilde{K}_c + id)X, Y\rangle_{\dot{c}}\, dt = \langle -(\tilde{K}_c + id)X, Y\rangle_{0,\dot{c}}$$

onde $\tilde{K}_c(X)(t) = K^{(\dot{c})}(X,\dot{c})\dot{c}$

$$\langle X, Y\rangle_{1,\dot{c}} = \int_0^1 \langle X, Y\rangle_{\dot{c}}\, dt + \int_0^1 \langle D^{\dot{c}}_{\dot{c}} X, D^{\dot{c}}_{\dot{c}} Y\rangle_{\dot{c}}\, dt,$$

$k_c\colon (T_c\Lambda M, \;|.|_{1,\dot{c}}) \longrightarrow (T_c\Lambda M, \;|.|_{1,\dot{c}})$

Prova:

É suficiente considerar campos diferenciáveis $X \in T_c\Lambda M$, pois esses elementos são densos em $T_c\Lambda M$.

Temos que $\int_0^1 \langle D^{\dot{c}}_{\dot{c}} X, D^{\dot{c}}_{\dot{c}} Y\rangle_{\dot{c}}\, dt = -\int_0^1 \langle \left(D^{\dot{c}}_{\dot{c}}\right)^2 X, Y\rangle_{\dot{c}}\, dt$

pois,

$$\frac{d}{dt}<D^{\dot c}_{\dot c}X,Y>_{\dot c} = <\left(D^{\dot c}_{\dot c}\right)^2X,Y>_{\dot c} + <D^{\dot c}_{\dot c}X,D^{\dot c}_{\dot c}Y>_{\dot c} + 2<D^{\dot c}_{\dot c}X,Y,D^{\dot c}_{\dot c}\dot c>_{\dot c} =$$

$$= <\left(D^{\dot c}_{\dot c}\right)^2X,Y>_{\dot c} + <D^{\dot c}_{\dot c}X,D^{\dot c}_{\dot c}Y>_{\dot c}$$

Para campos diferenciáveis $X,Y \in T_c\Lambda M$

$$<X,Y>_{1,\dot c} = \int_0^1 <D^{\dot c}_{\dot c}X,D^{\dot c}_{\dot c}Y>_{\dot c} + \int_0^1 <X,Y>_{\dot c}\, dt =$$

$$= -\int_0^1 <\left(D^{\dot c}_{\dot c}\right)^2X,Y>_{\dot c}\, dt + \int_0^1 <X,Y>_{\dot c}\, dt =$$

$$= \int_0^1 <\left(id - \left(D^{\dot c}_{\dot c}\right)^2\right)X,Y>_{\dot c}\, dt = <\left(id - \left(D^{\dot c}_{\dot c}\right)^2\right)X,Y>_{0,\dot c}$$ e portanto vale

$$|X|^2_{1,\dot c} \leq \left|id - \left(D^{\dot c}_{\dot c}\right)^2\right|^2_{0,\dot c} |X|^2_{0,\dot c} \quad \text{e} \quad |X|_{1,\dot c} \leq \text{const}\ |X|_{0,\dot c}$$

Por continuidade, esta relação vale para todo $T_c\Lambda M$. Então para $X,Y \in T_c\Lambda M$

$$I(X,Y) = d^2E(c)(X,Y) = \int_0^1 <D^{\dot c}_{\dot c}, D^{\dot c}_{\dot c}Y>_{\dot c}\, dt - \int_0^1 <K^{(\dot c)}(X,\dot c)\dot c, Y>_{\dot c}\, dt =$$

$$= \int_0^1 <D^{\dot c}_{\dot c}X,D^{\dot c}_{\dot c}Y>_{\dot c}\, dt + \int_0^1 <X,Y>_{\dot c}\, dt - \int_0^1 <K^{(\dot c)}(X,\dot c)\dot c + X, Y>_{\dot c}\, dt =$$

$$= <X,Y>_{1,\dot c} - <\left(id - \left(D^{\dot c}_{\dot c}\right)^2\right)^{-1} \circ \left(K^{(\dot c)}(X,\dot c)\dot c + id\right)(X), Y>_{1,\dot c} =$$

$$= <(id + k_c)X, Y>_{1,\dot c}$$

onde $k_c(X) = -\left(id - \left(D_{\dot c}\right)^2\right)^{-1} \circ \left(\tilde K_c + id\right)$ e

$< k_c \; X, \; Y >_{1,\dot c} = - < (\tilde K_c + id)X, \; Y >_{0,\dot c}$.

A prova de que k_c é compacto é a seguinte:

Consideremos a identidade

$$< k_c X, \; k_c X >_{1,\dot c} = - < \tilde K_c + id)X, \; k_c \tilde X >_{0,\dot c}$$

então

$$|k_c X|^2_{1,\dot c} \le |\tilde K_c + id|_{0,\dot c} \; . \; |k_c X|_{0,\dot c} \; . \; |X|_{0,\dot c} \le$$

$$\le |\tilde K_c + id|_{\infty,\dot c} \; . \; |k_c X|_{\infty,\dot c} \; . \; |X|_{0,\dot c} \le cons \; |k_c X|_{1,\dot c} \; . \; |X|_{0,\dot c}$$

Logo $|k_c X|_{1,\dot c} \le const|X|_{0,\dot c}$. Pelo lema anterior temos que: Se $\{X_n\}$ é uma seqüência limitada em $(T_c\Lambda M, \; |.|_{1,\dot c})$ então $\{X_n\}$ tem um ponto de acumulação em $(H^0(c^* TM), \; |.|_{0,\dot c})$.

Usando o fato que $|k_c X_n|_{1,\dot c} \le const \; |X_n|_{0,\dot c}$, temos que $\{k_c X_n\}$ tem umponto de acumulação em $T_c\Lambda M = H^1(c^* TM)$ munido da norma $|.|_{1,\dot c}$.

■

4.17. Corolário:

O operador auto-adjunto A_c tem somente um número finito de autovalores incluindo 1, ou os autovalores formam um conjunto infinito discreto tendo 1 como ponto de acumulação.

Seja $T_c\Lambda M = T_c^-\Lambda M + T_c^+\Lambda M + T_c^o\Lambda M$ a decomposição F-ortogonal do espaço tangente $T_c\Lambda M$ nos subespaços gerados pelos autovetores de A_c associados aos autovaloreеs < 0, > 0, e $= 0$, respectivamente. Então $dim\ T_c^-\Lambda M$ e $dim\ T_c^o\Lambda M$ são finitos.

Nós chamamos $dim\ T_c^-\Lambda M$ e $dim\ T_c^o\Lambda M-1$ de índice e nulidade de c, respectivamente.

Notação: $ind_\Lambda(c)$ = *indice de* c, $nul_\Lambda(c)$ = *nulidade de* c *no espaço* ΛM.

4.18. Definição:

Seja $c:[0,1] \longrightarrow M$ uma F-geodésica fechada de M. Um campo de vetores X ao longo de c é um campo de Jacobi se satisfaz a equação diferencial

$$\left(D_{\dot{c}}^{\dot{c}}\right)^2 X + K^{(\dot{c})}(X,\dot{c})\dot{c} = 0 \text{ com } X(0) = X(1) \text{ e } D_{\dot{c}}^{\dot{c}} X(0) = D_{\dot{c}}^{\dot{c}} X(1).$$

Os campos de Jacobi X ao longo de uma F-geodésica fechada $c:[0,1] \longrightarrow M$ são os elementos de $T_c^o\Lambda M = Ker\ A_c$.

Na definição de nulidade de uma F-geodésica fechada c tomamos $nul(c)=dim\ T_c^o\Lambda M-1$, porque $\dot{c}$ é um campo de Jacobi e $\dot{c}\in T_c^o\Lambda M$.

4.19. Índice de geodésica fechada iterada

Agora veremos uma importante generalização do índice de uma F-geodésica fechada $c \in \Lambda M$, $c \neq const$. Seja $\rho \in \mathbb{C}$, $|\rho| = 1$. Denotemos por ${}_{\rho}T_{c}\Lambda = {}_{\rho}T_{c}\Lambda M$ o espaço de Hilbert dos H^1 Campos de Vetores $X(t)$ complexos ao longo de c, satisfazendo $X(1) = \rho X(0)$, com o produto escalar:

$$< X,\overline{Y} >_{1,\dot{c}} = \int_0^1 < X,\overline{Y} >_{\dot{c}} dt + \int_0^1 < D^{\dot{c}}_{\dot{c}} X, \overline{D^{\dot{c}}_{\dot{c}} Y} >_{\dot{c}} dt$$

No espaço ${}_{\rho}T_{c}\Lambda$ obtemos a forma do ρ-índice

$$d^2E_{\rho}(c)(X,\overline{Y}) = < X,\overline{Y} >_{1,\dot{c}} - < \left(\tilde{K}_c + id\right)X, \overline{Y} >_{0,\dot{c}}$$

onde $< X, \overline{Y} >_{0,\dot{c}} = \int_0^1 < X, \overline{Y} >_{\dot{c}} dt.$

De maneira análoga a da forma

$$d^2E(c): T_c\Lambda M \times T_c\Lambda M \longrightarrow \mathbb{R},$$

nós obtemos um operador auto-adjunto ${}_{\rho}A_{c}$ associado a forma $d^2E_{\rho}(c)$: ${}_{\rho}T_{c}\Lambda \times {}_{\rho}T_{c}\Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$, que é da forma $id + k_c$, com k_c um operador compacto. Em particular, a dimensão do autoespaço negativo de ${}_{\rho}A_{c}$ e a dimensão do núcleo de ${}_{\rho}A_{c}$ são finitas. Estas dimensões são denominadas de ρ - índice de c, e ρ - nulidade de c.

Aqui assuminos $\rho \neq 1$: Para $\rho = 1$, nós definimos a ρ - nulidade de c, como sendo a dimesão do núcleo de A_c menos um.

Seja c^m a iterada de uma F-geodésica fechada c, isto é, $c^m(t) = c(mt)$.

4.20. Proposiçao:

Seja ρ uma m-ésima raiz primitiva da unidade. Seja $c(t)$, $0 \leq t \leq 1$, uma F-geodésica fechada. Então existe um isonorfismo linear

$$i\colon T_{c^m}\Lambda \longrightarrow \bigoplus_{1\leq \ell \leq m} \rho^{\ell} T_c \Lambda$$

$$X \longrightarrow (X_1 , \ldots , X_m)$$

com $X_\ell(t) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \rho^{\ell(1-j)} X\left(\frac{t+j-1}{m}\right)$.

A aplicação inversa é a composição $\oplus j_\ell$ das aplicações:

$$j_\ell : \rho^{\ell} T_c \Lambda \longrightarrow T_{c^m}\Lambda$$

$$X_\ell(t) \longrightarrow X_\ell(mt)$$

Prova: Facilmente verificamos que $X_\ell \in \rho^{\ell} T_c \Lambda$. A aplicação i é linear. A inversa é dada por

$$(X_1(t) , \ldots , X_m(t)) \longrightarrow \sum_{\ell=1}^{m} X_\ell(mt).$$

Necessariamente, $\sum_{\ell=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m} \rho^{\ell - \ell j} X(t+j-1) = X(t)$,

já que $\sum_{\ell=1}^{m} \rho^{\ell(1-j)} = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq 1, \quad m > 1 \\ m, & \text{se } j = 1. \end{cases}$

■

4.21. Teorema:

Seja c uma F-geodésica fechada e c^m a sua iterada. Então $ind_\Lambda(c^m) = \sum_{\rho^m=1} \rho$-índice (c) e $nul_\Lambda(c^m) = \sum_{\rho^m=1} \rho$-nulidade (c).

Prova:

Escrevemos $X(t) = \sum_k X_k(mt)$ e $Y(t) = \sum_\ell Y_\ell(mt)$, com ρ raiz m-ésima primitiva da unidade, conforme a proposição anterior.

Então:

$$d^2E(c^m)(X,\overline{Y}) = \sum_{k,\ell}\int_0^{1/m}\left(<D^{\dot c}_{\dot c}X_k(mt), D^{\dot c}_{\dot c}Y_\ell(mt)>_{\dot c} - <\tilde{K}_c(X_k(mt)), \overline{Y}_\ell(mt)>_{\dot c}\right)dt \; \mathrm{x}$$

$$\mathrm{x}\;\left[1+\rho^{(K-\ell)}+\ldots+\rho^{(m-1)(K-\ell)}\right] = \sum_k d^2E(c^m)(j_kX_k,\, j_k\overline{Y}_k).$$

Então $d^2E(c^m)$ é soma direta das restrições

$$d^2E(c^m)\,|\,j_k({}_{\rho^k}T_c\Lambda) \quad \text{de} \quad d^2E(c^m)$$

às parcelas da soma direta de $T_{c^m}\Lambda$ conforme a proposição anterior.

■

4.22. Índice de uma F-geodésica iterada.

Seja $c\colon \mathbb{R} \longrightarrow M$ uma F-geodésica tal que $c_o = c|[0,1]$ é uma F-geodésica fechada, isto é, $\dot c(0) = \dot c(1) \neq 0$.

Seja $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ uma partição do intervalo $[0,1]$, suficientemente fina, de modo que não exista pares de pontos conjugados em $c|[t_i, t_{i+1}]$.

Denotemos por J o espaço vetorial dos Campos Contínuos X ao longo de c tais que $X|[t_i + K,\ t_{i+1} + K]$ é um Campo de Jacobi ortogonal a $\dot{c}$ para todo i e todo $K \in \mathbb{Z}$.

Denotemos por $J_{\mathbb{C}}$ a complexificação de J, isto é, $J_{\mathbb{C}} = J \otimes \mathbb{C} = J \oplus iJ$. Para $q \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$ definimos:

$$J_{[q,z]} = \{X \in J_{\mathbb{C}} : X(t+q) = z\, X(t),\quad \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Temos que $J_{[q,z]}$ é um subespaço de $J_{\mathbb{C}}$, de dimensão finita.

Para $q \in \mathbb{N}$ definimos a forma bilinear simetrica

$$H_q(X,Y) = \int_0^q \left(\langle D^{\dot{c}}_{\dot{c}} X,\ D^{\dot{c}}_{\dot{c}} Y \rangle_{\dot{c}} + \langle K^{(\dot{c})}(X,\dot{c})Y,\ \dot{c} \rangle_{\dot{c}} \right) dt.$$

Extendemos $\langle\ ,\ \rangle_{\dot{c}}$ a uma forma Hermitiana e $K^{(\dot{c})}$ a um tensor linearcomplexo de $TM \oplus \mathbb{C}$.

Isto extende H_q a uma forma Hermitiana em $J_{\mathbb{C}}$ que também denotemos por H_q.

É claro que o índice e a nulidade de c_o^q sãoiguais ao índice e a nulidade de

H_q restrita a $\{X \in J : X(t) = X(t + q),\quad \forall t \in \mathbb{R}\}$.

O índice e a nulidade de uma forma bilinear simétrica em um espaço vetorial real não se alteram sob a extensão Hermitiana da forma ao espaço vetorial complexo.

Além disso, $ind(c_o^q)$ e $nul(c_o^q)$ são iguais ao índice e nulidade de H_q em $J_{[q,1]}$.

Notemos que $J_{[1,z]} \subset J_{[q,1]}$ para umaq-ésima raiz z da unidade.

É facil ver que a aplicação canônica

$$\bigoplus_{z^q=1} J_{[1,z]} \longrightarrow J_{[q,1]}$$

é injetiva, e como estes êspaços tem a mesma dimensão então

$$\bigoplus_{z^q=1} J_{[1,z]} = J_{[q,1]}.$$

Se $X \in J_{[1,z_1]}$, $Y \in J_{[1,z_2]}$, onde

z_1 e z_2 são raizes q-ésimas da unidade, então

$$H_q(X,Y) = \left(1 + z_1\overline{z}_2 + \ldots + \left(z_1 z_2\right)^{q-1}\right) H_1(X,Y) =$$

$$= \begin{cases} 0 & , \quad \text{se} \quad z_1 \neq z_2 \\ q\ H_1(X,Y) & , \quad \text{se} \quad z_1 = z_2. \end{cases}$$

Então a soma direta $\bigoplus_{z^q=1} J_{[1,z]} = J_{[q,1]}$ é ortogonal com respeito a forma H .

Denotemos por H_z a restrição de H_1 a $J_{[1,z]}$, isto é

$$H_z = H_1 \mid J_{[1,z]} \times J_{[1,z]}$$

e definimos $I(z) = ind\ H_z$, $N(z) = dim\ Ker\ H_z$, e $I_o(z) = I(z) + N(z)$.

Notemos que $I(1) = ind(c_o)$

$$N(1) = nul(c_o)$$

$$I_o(1) = ind_o(c_o).$$

A derivada P da aplicação $\mathcal{P}$ de Poincaré de c_o é um automorfismo linear de $E \oplus E$, onde E é o complemento F-ortogonal de $\dot{c}_o(0)$ em $T_{c(o)}M$.

Denotemos a complexificação de E por $E_{\mathbb{C}}$ e extendemos P a um automorfismo linear complexo de $E_{\mathbb{C}} \oplus E_{\mathbb{C}}$.

4.23. Teorema (Bott):

i) $ind(c_o^q) = \sum_{z^q=1} I(z)$ e $nul(c_o^q) = \sum_{z^q=1} N(z)$

ii) $N(z) = dim\ Ker(P-z.id)$

iii) I é constante nos pontos em que $N(z) = 0$, $\lim_{\Theta \to \pm 0} I(ze^{i\Theta}) \geq I(z)$ e os saltos

$$S^{\pm}(z) = \lim_{\Theta \to \pm 0} I(ze^{i\Theta}) - I(z)$$

de I em z são não-negativas e limitadas por $N(z)$.

iv) $I(z) = I(\overline{z})$ e $N(z) = N(\overline{z})$.

4.24. Corolário:

Seja c_o uma F-geodésica fechada e hiperbólica (isto é, a aplicação de Poincaré associada não possue autovalores de módulos 1), então $ind\ (c_o^q) = q\ ind(c_o)$.

Prova do Teorema

O caso (i) segue imediatamente do fato que a soma $J_{[q,1]} = \bigoplus_{z^q=1} J_{[1,z]}$ é ortogonal com relação a forma H_z.

(ii) Se $X, Y \in J_{[1,z]}$, então pela fórmula da segunda variação

$$H_z(X,Y) = \sum_{i=1}^{k-1} < D_{\dot{c}}^{\dot{c}} X(t_i^-) - D_{\dot{c}}^{\dot{c}} X(t_i^+),\ Y(t_i) >_{\dot{c}} +$$

$$+ < D_{\dot{c}}^{\dot{c}} X(1^-),\ zY(0) >_{\dot{c}} - < D_{\dot{c}}^{\dot{c}} X(0^+),\ Y(0) >_{\dot{c}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} < D_{\dot{c}}^{\dot{c}} X(t_i^-) - D_{\dot{c}}^{\dot{c}} X(t_i^+) \text{-}>_{\dot{c}}\ ,\ Y(t_i) >_{\dot{c}} +$$

$$+ < \bar{z}\, D_{\dot{c}}^{\dot{c}} X(1^-) - D_{\dot{c}}^{\dot{c}} X(0^+),\ Y(0) >_{\dot{c}}.$$

Se $X \in Ker\ H_z$ nós podemos escolher $Y \in J_{[1,z]}$ de modo que $H_z(X,Y) \neq 0$ se X não é diferenciável.

Se X é diferenciável e

$$\left(X(1),\ D_{\dot{c}}^{\dot{c}} X(1)\right) = z\left(X(0),\ D_{\dot{c}}^{\dot{c}} X(0)\right)$$

que significa

$$\left(X(0),\ D_{\dot{c}}^{\dot{c}} X(0)\right) \in Ker\left(P - z.\, id\right).$$

Reciprocamente, se $(X_o, X'_o) \in Ker(P - z.\ id)$, então o Campo de Jacobi X com $X(0) = X_o$, $D_{\dot{c}}^{\dot{c}} X(0) = X'_o$, pertence a $Ker\ H_z$.

(iii) $X \in J_{[1,z]}$ é determinado de maneira única e pode ser identificado com $X(0), \ldots, X(t_{k-1})$.

H_z é uma família de formas hermitianas que varia continuamente em um espaço fixado.

Então os autovalores variam continuamente com respeito a um produto interno.

Por (ii) o número de autovalores negativos é constante nos intervalos que não contem um autovalor de P, e que dão um salto em um ponto z no máximo igual a multiplicidade de $\underline{O}$ como autovalor de H_z, isto é, por $N(z)$.

(iv) é claro, já que $H_z(\overline{X},\overline{Y}) = \overline{H_{\bar{z}}(X,Y)}$.

■

4.25. Lema:

Seja M uma Variedade Riemanniana modelada a um espaço de Hilbert H real e separável e $F:M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendos as hipóteses (1), (2), (3), (4) do lema de *Morse* generalizado, e seja p um ponto crítico (isolado) de f. Seja $\hat{M} \subset M$ uma subvariedade fechada de Hilbert de M tal que o espaço tangente $T_p\hat{M}$ contêm o espaço nulo do *Hessiano* $A(p)$, isto é, *Kernel* $A(p) \subset T_p\hat{M}$ onde

$$d^2f(p)(u,v) = \langle A(p)u, v\rangle = \langle u,\ A(p)v\rangle.$$

Suponhamos que *grad* $f(q) \in T_q\hat{M}$ para todo $q \in \hat{M}$.

Se $N \subset \hat{M}$ é uma subvariedade suficientemente pequena e característica para $\hat{f} = f|\hat{M}$ em p, então N é também subvariedade característica para f, e

$$H^o(f,p) = H^o(\hat{f},p).$$

Prova:

Pelo lema de *Morse* generalizado existe um homeomorfirmo local $\hat{\Phi}$ de $\hat{M}$ definido em uma vizinhaça aberta $\hat{B} \subset {}_p\hat{M} = \hat{E}_p \oplus T_pN$ ao redor da origem, $\hat{\Phi}(0) = p$, $\hat{\Phi}(\hat{B} \cap T_pN) = N$,

$$\hat{B} \subset T_p\hat{M} = \hat{E}_p \oplus T_pN \xrightarrow{\hat{\Phi}} \hat{\Phi}(\hat{B}) \subset \hat{M} \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

$$(f \circ \hat{\Phi})(x,y) = \|\hat{P}x\|^2 - \|(I - \hat{P})x\|^2 \pm f_o(y).$$

Nós podemos assumir, que o fibrado normal $\upsilon(\hat{M})$ de $\hat{M}$ em M restrito a $\hat{\Phi}(\hat{B})$ é trivial.

Usando a aplicação exponencial de M em $\upsilon(\hat{M})$, podemos extender $\hat{\Phi}$ a um homeomorfismo Ψ de uma vizinhança de N em M definido em alguma vizinhança aberta

$$B \subset T_pM = T_p\hat{M} \times (T_p\hat{M})^{\perp},$$

onde

$$B \subset \hat{B} \times \mathcal{U} \subset T_pM = T_p\hat{M} \times (T_p\hat{M})^{\perp} \xrightarrow{\Psi} \hat{\Phi}(\hat{B}) \times exp_p\mathcal{U} \subset N \subset M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$\Psi = (\hat{\Phi}, exp_p)$.

Considerando a decomposição $T_pM = E \oplus T_pN$, temos que $f \circ \Psi \mid E \oplus \{0\}$ admite $0 = (0,0)$ como ponto crítico não degenerado. Então pelo lema de *Morse* generalizado, existe um homeomorfismo local Φ de T_pM, $\Phi(0) = 0$, tal que

$$(f \circ \Psi \circ \Phi)(x,y) = \|Px\|^2 - \|(I-P)x\|^2 + f_o(y).$$

■

Utilizando o Teorema de Bott obteremos alguns lemas que fornecem estimativas para o índice e a nulidade de uma F-geodésica fechada iterada.

Denotemos por P a derivada da aplicação $\mathcal{P}$ de Poincaré associada a uma F-geodésica fechada c. Os autovalores de P de módulo 1 são denominados pontos de Poincaré. A aplicação P é um automorfismo linear de $E \oplus E$, onde E é o complemento F-ortogonal $\dot{c}(0)$ em $T_{c(0)}M$.

Denotemos a complexificação de E por $E_{\mathbb{C}}$ e extendemos P a um automorfismo linear complexo de $E_{\mathbb{C}} \oplus E_{\mathbb{C}}$.

Então P: $E_{\mathbb{C}} \oplus E_{\mathbb{C}} \longrightarrow E_{\mathbb{C}} \oplus E_{\mathbb{C}}$ é obtido da seguinte maneira: Para $u \oplus v \in E_{\mathbb{C}} \oplus E_{\mathbb{C}}$, seja Y o único Campo de Jacobi complexo satisfazendo

$$Y(0) = u \quad \text{e} \quad D^{\dot{c}}_{\dot{c}}\, Y(0) = v, \quad \text{então} \quad P(u \oplus v) = Y(1) \oplus Y'(1)$$

onde $Y'(t) = D^{\dot{c}}_{\dot{c}}\, Y(t)$.

Pelo Teorema de Bott, parte (ii) temos

$$N(z) = dim_{\mathbb{C}}\, Ker(P - z.id).$$

Então para um número complexo $z \in S^1 \subset \mathbb{C}$, temos $N(z) = 0$, exceto para os pontos de Poincaré, que são no máximo $2n$ pontos onde $dim\ M = n+1$.

Agora nós escrevemos os autovalores de P na forma

$$(z_j, \overline{z}_j) = (e^{2\pi i a_j},\ e^{-2\pi i a_j}),$$

$1 \leq j \leq \ell - 1$, onde $a_o = 0 \leq a_1 < a_2 <\ldots< a_{\ell-1} \leq a_\ell = \frac{1}{2}$.

Aqui nós não excluimos a possibilidade de que $\ell-1 = 0$, isto é, que P não possue autovalor de modulo 1 (P hiperbólica).

Pelo Teorema de Bott, parte (*iii*), temos que o índice $I(z)$ de c, considerado como função em S^1, é constante nas componentes conexas de $S^1 - \{z_j, \overline{z}_j;\ 1 \leq j \leq \ell - 1\}$.

Denotemos por $I_{c,j}$ o valor de $I_c(z)$ para $z = e^{2\pi i a}$, $a_{j-1} < a < a\ a_j$, $1 \leq j \leq \ell - 1$ e definimos

$$\alpha_c = 2 \sum_{j=1}^{\ell} I_{c,j}(a_j - a_{j-1}), \qquad \beta_c = 2 \sum_{j=1}^{\ell} I_{c,j} ,$$

os números a_j, $-a_j$, $1 \leq j \leq \ell - 1$ são denominados expoentes de Poincaré.

Destas considerações nós obtemos a seguinte estimativa para o índice de uma F-geodesica fechada iterada c^m, $m=1,2,\ldots$,de c.

4.26. Lema

Seja c uma F-geodésica fechada. Então o índice $ind(c^m)$ satisfaz

$$m\,\alpha_c - \beta_c . \leq ind(c^m) \leq m\,\alpha_c + \beta_c \text{ ou } ind(c^m) = 0$$

para todo m.

Prova:

Pelo item (iii) do Teorema de Bott $I(z)$ é constante nos pontos em que $N(z) = 0$ e $\lim_{\Theta\to\pm 0} I(ze^{i\Theta}) \geq I(z)$, logo $I(z_j) \leq I(z)$, para z suficientemente próximo de z_j onde $(z_j, \bar{z}_j)$ são os autovalores de P, de módulo 1.

Pelo item (i) do Teorema de Bott,

$$ind(c^m) = \sum_{z^m=1} I(z).$$

Seja $K_{m,j}$ o número das m-ésimas raizes da unidade satisfazendo $a_{j-1} < \frac{\ell}{m} < a_j$, então vale a seguinte estimativa:

$$[m(a_j - a_{j-1}) - 1] \leq K_{m,j} \leq [m(a_j - a_{j-1}) + 1].$$

Então

$$m\alpha_c - \beta_c \leq 2 \sum_{j=1}^{\ell} I_{c,j} \cdot [m(a_j - a_{j-1}) - 1] \leq \sum_{z^m=1} I(z) = ind(c^m) \leq$$

$$\leq 2 \sum_{j=1}^{\ell} I_{c,j} \cdot [m(a_j - a_{j-1}) + 1] \leq m\alpha_c + \beta_c.$$

Aqui usamos o fato que se $I(z_j) \leq I_{c,j}$ ocorre em $\sum I(z)$, $z^m = 1$, isto é, $z_j^m = 1$, então $K_{m,j} = [m(a_j - a_{j-1})]$.

■

4.27. Lema:

Seja c uma F-geodésica fechada e suponhamos que $ind(c^m) > 0$ para algum $m \geq 1$.

Então existem constantes $\alpha > 0$ e $\beta \geq 0$ tais que para quaisquer inteiros m_0, $m_1 \geq 1$

$$ind(c^{m_0+m_1}) \geq ind(c^{m_0}) + m_1\alpha - \beta.$$

Prova:

Da hipótese segue que o número α_c definido por

$$\alpha_c = 2\sum_{j=1}^{\ell} I_{c,j}.(a_j - a_{j-1}) \text{ é } >0,$$

pois no caso contrario $I_{c,j} = 0$, para todo j, e então $I(z) = 0$, para todo z, $|z| = 1$.

Aplicando o lema anterior, temos

$$(m_0 + m_1)\,\alpha_c - \beta_c \leq ind(c^{m_0+m_1}) \leq (m_0+m_1)\alpha_c + \beta_c$$

$$m_0\alpha_c - \beta_c \leq ind(c^{m_0}) \leq m_0\alpha_c + \beta_c$$

Somando membro a membro as desigualdades abaixo:

$$(m_0 + m_1)\alpha_c - \beta_c \leq ind(c^{m_0+m_1})$$

$$ind(c^{m_0}) \leq m_0\,\alpha_c + \beta_c$$

Temos que

$$m_0\alpha_c + m_1\alpha_c - \beta_c + ind(c^{m_0}) \leq ind(c^{m_0+m_1}) + m_0\alpha_c + \beta_c$$

$$m_1\alpha_c - 2\,\beta_c + ind(c^{m_0}) \leq ind(c^{m_0+m_1}).$$

Logo $ind(c^{m_0+m_1}) \geq m_1\alpha - \beta + ind(c^{m_0})$ para $\alpha = \alpha_c$ e $\beta = 2\,\beta_c$.

■

4.28. Lema:

Seja c uma F-geodésica fechada percorrida uma só vez.

(a) $nul(c^m) = 0$ para todo m se, e só se, todos os expoentes de Poincaré são irracionais.

(b) Existe uma seqüência de inteiros positivos

$$m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_s, \text{ com } s \leq 2^n,\ dim\ M = n + 1,$$

e para cada inteiro j com $1 \leq j \leq s$ existe uma seqüência estritamente crescente $\{q_{ji},\ i = 1,2,\ldots\}$ de inteiros positivos tal que os conjuntos $N_j = \{m_j\ q_{ji},\ i = 1,2,\ldots\}$ formam uma partição de $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ e $nul(c^{m_j q_{ji}}) = nul(c^{m_j})$, $1 \leq j \leq s$.

Os pontos de Poincaré contidos em $\{z : z^{m_j q_{ji}} = 1\}$ são extamente os pontos de Poincaré contidos em $\{z : z^{m_j} = 1\}$.

Prova:

(a) Segue do fato que $nul\ (c^m) = \sum_{z^m = 1} N(z)$

onde $z = e^{2\pi i k/m}$, $k = 0,1,2,\ldots,m$ e do fato que: $N(z) = 0$ para todo $z \in s^1$, exceto no máximo nos $2n$ pontos de Poincaré.

Para o caso (b), relembremos que

$$nul(c^m) = \sum_{z^m=1} N(z)$$

e que $N(z)$ = dimensão do autoespaço da derivada P da aplicação de Poincaré, associado a c, para o autovalor z, isto é,

$$N(z) = dim_{\mathbb{C}}(P - z.id).$$

Consideremos aquelas raízes $z = e^{2\pi i a}$, $\bar{z} = e^{-2\pi i a}$ que são autovalores de P, $0 < a \leq \frac{1}{2}$, onde $a = \frac{p}{q}$ é racional, com p e q primos entre si.

Denotemos por D (que pode ser vazio) o conjunto dos denominadores destes a's.

Para cada subconjunto $E \subset D$, seja $m(E)$ o mínimo múltiplo comum de todos os elementos em E.

No caso em que $E = \Phi$, colocamos $m(\Phi) = 1$.

Seja $\{m_1, m_2, \ldots, m_s\}$ o conjunto dos números distintos tais que

$$\{m_1, m_2, \ldots, m_s\} = \{m(E) : E \subset D\} \cup \{1\}.$$

Claramente, $s \leq 2^n$. Nós podemos assumir que $m_1 = 1$.

Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$, nós escolhemos a subseqüência máximal $\{q_{ji} : i = 1, 2, \ldots\}$ de inteiros positivos satisfazendo $m_k \nmid m_j q_{ji}$, para $k \neq j$

Então $nul(c^{m_j q_{ji}}) = nul(c^{m_j})$.

Além disso, todo inteiro positivo m pode ser escrito como $m = m_j q$, com q inteiro positivo, onde j é determinado pela condição de que m_j é o maior divisor de m entre os elementos $m_1, \ldots, m_s$.

■

Observaçao: Uma conseqüência da parte (*a*) deste lema é que $nul(c^m) = 0$, quando os autovalores da aplicação de Poincaré $\mathcal{P}_c$ associada à geodésica fechada c, não são raízes da unidade. Uma conseqüência da parte (b) deste mesmo lema é que as nulidades de c^m, $m \geq 1$, possuem somente um número finito de valores.

4.29. <u>Comportamento das curvas curtas em $\Lambda^{\varepsilon} = \Lambda^{\varepsilon}M$ no caso de uma métrica de Finsler F: $TM \longrightarrow \mathbb{R}^+$.</u>

Seja E: $\Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcional energia associado a uma métrica de *Finsler*

$$F\colon\ TM \longrightarrow \mathbb{R}^+, \text{ onde } E(c) = \int_0^1 F^2(\dot{c})\,dt,$$

M Variedade *Riemanniana* compacta de dimensão n com métrica $\langle\ ,\ \rangle$, e $\Lambda M = H^1(S^1, M)$ é o conjunto das curvas fechadas absolutamente contínuas c: $S^1 = [0,1]/\{0,1\} \longrightarrow M$ tais que $|\dot{c}(t)| \in L^2(S^1)$.

Seja ΛM com a métrica *Riemanniana* $\langle\ ,\ \rangle_1$ dada por

$$\langle X, Y\rangle_1 = \int_0^1 \langle X, Y\rangle dt + \int_0^1 \langle \nabla X, \nabla Y\rangle dt,$$

X, $Y \in T_c\Lambda M$ e ∇ é a conexão *Riemanniana* associada à métrica $\langle\ ,\ \rangle$.

$(\Lambda M, \langle\ ,\ \rangle_1)$ é uma Variedade *Riemanniana* de dimensão infinita (*Variedade de Hilbert*).

Consideremos agora o funcional energia

$$\mathcal{E}: \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\mathcal{E}(c) = \int_0^1 < \dot{c}, \dot{c} > dt$$

associado à métrica *Riemanniana* $< , >$.

Agora enunciaremos e demostraremos um teorema importante que descreve o comportamento das curvas curtas no caso da métrica *Riemanniana* $< , >$. Este teorema está provado no livro "*Lectures on Closed Geodesics*", *W.Klingemberg*, ver [*K.*], e que diz o seguinte:

<u>4.30. Teorema</u>:

1º) Seja *grad* $\mathcal{E}(c)$ o campo gradiente do funcional $\mathcal{E}(c) = \int_0^1 < \dot{c}, \dot{c} > dt$ dado por

$$< grad\ \mathcal{E}(c), X >_1 = d\ \mathcal{E}(c).X, \ \forall X \in T_c\Lambda M.$$

Então existem $\varepsilon > 0$ e $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ tais que

$$|grad\ \mathcal{E}(c)|_1^2 \geq \alpha \ . \ \mathcal{E}(c),$$

para todo

$$c \in \mathcal{E}^{-1}[0,\varepsilon] = \{c \in \Lambda M : \mathcal{E}(c) \leq \varepsilon\} = (\mathcal{E} \leq \varepsilon).$$

2º) Existe $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, tal que para todo $c \in \mathcal{E}^{-1}[0,\varepsilon] = (\mathcal{E} \le \varepsilon)$, a trajetória $\phi_s c$ do campo $-grad\mathcal{E}$ com ponto inicial em c, tem um único ponto limite que pertence a $M = \mathcal{E}^{-1}(0)$ = conjunto das curvas constantes. As trajetórias de $-grad\mathcal{E}$ são de comprimento finitos, e $M = \mathcal{E}^{-1}(0)$ é um retrato por deformação de $\mathcal{E}^{-1}[0,\varepsilon] = (\mathcal{E} \le \varepsilon)$.

Prova:

$$1º)\ \text{De } \mathcal{E}(c) = \int_0^1 < \dot{c}, \dot{c} > dt \quad \text{e} \quad u(c) = \nabla gradE(c) - \dot{c}$$

temos

$$|grad\mathcal{E}(c)|_1^2 = d\mathcal{E}(c).(grad\mathcal{E}(c)) = \int_0^1 < \nabla grad\mathcal{E}(c), \dot{c} > dt =$$

$$= < \nabla grad\ \mathcal{E}(c), \dot{c} >_0 = < u(c) + \dot{c}, \dot{c} >_0 =$$

$$= < \dot{c}, \dot{c} >_0 + < u(c), \dot{c} >_0 = \mathcal{E}(c) + < u(c), \dot{c} >_0 .$$

Agora obteremos a seguinte estimativa:

$$(*) \qquad |< \dot{c}, u(0) >_0| \le \beta \sqrt{\mathcal{E}(c)}\,|grad\ \mathcal{E}(c)|_1$$

para algum $\beta < 4$ e para $\mathcal{E}(c)$ suficientemene pequeno.

Para provarmos (*) nós assumimos primeiramente que M admite coordenadas Euclidianas em uma vizinhança de $c(0) = c(1)$.

De $\nabla u(c) = grad\ \mathcal{E}(c)$ obtemos

$$u(t) = u(0) + \int_0^t grad\ \mathcal{E} \circ c(s)ds.$$

Sejam $grad\ \mathcal{E} \circ c(s) = y(s)$, $\displaystyle\int_0^t y(s)ds = z(t)$.

De $\displaystyle |Z|_\infty = \max_{0\le t\le 1} |z(t)| \le \max_{0\le t\le 1} |y(t)| = |y|_\infty \le 2|y|_1$

e do fato que $c(1) = c(0)$, obtemos:

$$|\langle \dot{c},\ u\rangle_0| = \left| \int_0^1 \langle \dot{c}(t),\ u(0)\rangle dt + \int_0^1 \langle \dot{c}(t),\ z(t)\rangle dt \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 \langle \dot{c}(t),\ z(t)\rangle dt \right| \le \sqrt{\mathcal{E}(c)}\ |z|_\infty \le \sqrt{\mathcal{E}(c)}\,|grad\ E(c)|_1$$

isto é, (*) vale para $\beta = 1$.

No caso geral, em que as coordenadas Euclidianas podem não existirem localmente, observamos que, para $\mathcal{E}(c)$ suficientemente pequeno, a curva c pertence a uma vizinhança suficientimente pequena da origem $c(0)$ em M: o comprimento

$$L(c) = \int_0^1 \langle \dot{c},\ \dot{c}\rangle^{1/2}\ dt \le \sqrt{\mathcal{E}(c)}.$$

Por isso, as coordenadas normais em uma vizinhança de $c(0)$ diferem muito pouco das coordenadas Euclidianas quando $\mathcal{E}(c)$ é escolhido arbitrariamente pequeno. Isto é uniformemente verdadeiro para todo c já que M é compacta.

Então temos provado a estimativa (*).

Usando a desigualdade $2ab \le a^2 + b^2$ obtemos que

$$\sqrt{\mathcal{E}(c)}.\ |grad\ \mathcal{E}(c)|_1 \le |grad\ \mathcal{E}(c)|_1^2 + \frac{\mathcal{E}(c)}{4}\ .$$

Agora fazendo uso da desigualdade $|a + b| \ge |a| - |b|$ temos:

$$|grad\ \mathcal{E}(c)|_1^2 \le \mathcal{E}(c) - |\langle \dot{c},\ u(c)\rangle_0| \ge \mathcal{E}(c) - \beta\sqrt{\mathcal{E}(c)}\,|grad\ \mathcal{E}(c)|_1 \ge$$

$$\ge \mathcal{E}(c) - \beta\left(|grad\ \mathcal{E}(c)|_1^2 + \frac{\mathcal{E}(c)^{-}}{4}\right)$$

Logo

$$(1 + \beta).|gred\ \mathcal{E}(c)|_1^2 \ge \left(1 - \frac{\beta}{4}\right)\mathcal{E}(c)$$

$$|grad\ \mathcal{E}(c)|_1^2 \ge \left(\frac{1 - \frac{\beta}{4}}{1 + \beta}\right).\ \mathcal{E}(c),$$

que é resultado desejado.

$2^{\underline{o}}$) Escolhemos $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, de acordo com o item $1^{\underline{o}}$) e de modo que não existem pontos críticos de $\mathcal{E}$ em $\mathcal{E}^{-1}[0,\varepsilon] - M$. Esta última condição estará satisfeita para todo $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno visto que $\mathcal{E}(c) \le \varepsilon$ implica que

$L(c) = \int_0^1 \langle \dot{c},\ \dot{c}\rangle^{1/2}\, dt \le \sqrt{\mathcal{E}(c)} \le \sqrt{\varepsilon}$, e não existem geodésicas fechadas da variedade compacta $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ de comprimentos arbitrariamente pequenas, ver [*G.K.M.*].

Para $c \in \mathcal{E}^{-1}[0,\varepsilon]$ temos:

$$L(\phi_s c) = \int_0^\infty \left|\frac{d}{ds}\,\phi_s c\right|_1 ds = \int_0^\infty |grand\ \mathcal{E}(c)|_1\ ds =$$

$$= \int_0^\infty |grad\ \mathcal{E}(c)|_1^{-1} .\ |grad\ \mathcal{E}(c)|_1^2\ ds =$$

$$= \int_0^\infty |grad\ \mathcal{E}(c)|_1^{-1}\ .\ \left(-\ \frac{d\ \mathcal{E}}{ds}\ (\phi_s c)\right)\ ds \leq$$

$$\leq \alpha^{-1/2} \int_0^{\mathcal{E}} \mathcal{E}^{-1/2}\ d\ \mathcal{E} = 2\alpha^{-1/2}\ \sqrt{\mathcal{E}(c)},\quad \text{já que}\quad \mathcal{E}(\phi_\infty c) = 0.$$

Deste último resultado temos que o conjunto de todos os pontos limites da trajetoria $\phi_s c$ está contido em $M = \mathcal{E}^{-1}(0)$.

Tal conjunto limite é constituido de um único ponto de $\mathcal{E}^{-1}(0)$, pois se a trajetória $\phi_s c$ possuisse 2 pontos limites em $\mathcal{E}^{-1}(0)$ o comprimento de $\phi_s c$,

$$L(\phi_s c) = \int_0^\infty \left|\frac{d}{ds}\,\phi_s c\right|_1\ ds$$

se tornaria infinito, contradizendo o resultado anterior.

$M = \mathcal{E}^{-1}(0)$ é retrato por deformação de $\mathcal{E}^{-1}[0,\varepsilon]$ e para isto basta tomar a seguinte deformação:

$$f\colon\ \mathcal{E}^{-1}[0,\varepsilon] \times [0,1] \longrightarrow \mathcal{E}^{-1}[0,\varepsilon]$$

dada por

$$f(c,t) = \begin{cases} \phi_{s(t)}(c), & \text{se} \quad c \in \mathcal{E}^{-1}[0,\varepsilon] - \mathcal{E}^{-1}(0) \text{ onde} \\ & \qquad s(t) = tg(\frac{\pi t}{2}),\ 0 \le t \le 1 \\ c, & \text{se} \quad c \in \mathcal{E}^{-1}(0). \end{cases}$$

e f depende continuamente de c e t, ver [K].

■

Para descrevermos o comportamento das curvas curtas em $\Lambda^{\varepsilon} = \Lambda^{\varepsilon}M = \bar{E}^{-1}[0,\varepsilon]$ relativas a uma métrica de *Finsler* $F: TM \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$, nós consideramos a variedade *Riemanniana* compacta de diemensão n $(M^n, < . >)$ munida de um atlas A finito de classe C^{∞}:

$$A = \{(\mathcal{U}_{\ell},\ \phi_{\ell}) : \ell = 1,2,\ldots,p\}$$

e o correspondente atlas

$$TA = \{(T\mathcal{U}_{\ell},\ d\phi_{\ell})\ :\ \ell = 1,2,\ldots,p\}$$

para o fibrado tangente TM.

As representações locais de F e de uma curva diferenciável $\gamma(t) \in \mathcal{U}_{\ell}$ na carta local $(\mathcal{U}_{\ell},\ \phi_{\ell})$ são dada por

$$F_{\ell}(x,\ \dot{x}) = F \circ (d\ \phi_{\ell})^{-1}(x,\ \dot{x}), \quad \ell = 1,2,\ldots,p$$

$$x(t) = \phi_{\ell}\circ\gamma\ , \qquad \ell = 1,2,\ldots,p$$

$$(x(t),\ \dot{x}(t)) = (d\ \phi_{\ell})\ \dot{\gamma}\ , \qquad \ell = 1,2,\ldots,p$$

A função F^2 é de classe C^1 em TM e de classe C^{∞} fora da seção nula $S_0(TM)$.

F^2 é de classe C^2 se, e só se, F é a norma de uma métrica *Riemanniana*.

Agora no próximo teorema obteremos uma estimativa entre os funcionais:

$$E(c) = \int_0^1 F^2(\dot{c})dt \quad \text{e} \quad \mathcal{E}(c) = \int_0^1 < \dot{c}, \dot{c} > dt.$$

4.31. Teorema:

a) Dada uma carta $(\mathcal{U}_\ell, \phi_\ell)$ de A e correspondente carta $(T\mathcal{U}_\ell, d\phi_\ell)$ de TA, consideremos nessas cartas as coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n)$ de M e $(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_m)$ de TM e $\ell = 1, 2, \ldots, p$.

Então a função $F^2 : TM \longrightarrow \mathbb{R}^+$ nessas coordenadas locais vem dada por

$$F_\ell^2(x, \dot{x}) = \sum_{ij} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_\ell^2(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}_i \, . \, \partial \dot{x}_j} \dot{x}_i \, . \, \dot{x}_j, \quad 1 \leq i, \ j \leq n$$

onde

$$g_{ij}^\ell(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_\ell^2(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}_i \ \partial \dot{x}_j}$$

são os coeficientes da métrica de *Finsler* $F : TM \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

b) $K_1 < W, W > \leq F^2(W) \leq K_2 < W, W >$, $\forall W \in TM$ e
$K_1 \mathcal{E}(c) \leq E(c) \leq K_2 \mathcal{E}(c)$, $\forall c \in \Lambda M = H^1(S, M)$, para duas convenientes constantes $K_1 > 0$ e $K_2 > 0$.

c) Para $\forall \varepsilon > 0$, temos que

$$E^{-1}[0, K_1\varepsilon] \subset \mathcal{E}^{-1}[0, \varepsilon]$$

onde K_1 é a constante do item b).

d) Existe $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno tal que $\mathcal{E}^{-1}(0) = M = E^{-1}(0)$ é um retrato por deformação de $E^{-1}[0,\epsilon]$.

Prova:

a) $F_{\ell}^2(x,\dot{x})$ é positivamente homogênea de grau 2 com relação a $\dot{x}$, isto é, $F_{\ell}^2(x,t\dot{x}) = t^2 F_{\ell}^2(x,\dot{x})$, $t > 0$.

Derivando $t^2 F_{\ell}^2(x,\dot{x}) = F_{\ell}^2(x,t\dot{x})$ duas vezes em relação a t, temos:

$$2t\ F_{\ell}^2(x;x) = \sum_i \frac{\partial\ F_{\ell}^2(x,z)}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial t}$$

onde

$$x = \left(x_1,\ldots,x_n\right),\ \dot{x} = \left(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n\right),\ z_i = tx_i,\ 1 \le i \le n.$$

$$2\ F_{\ell}^2(x,\dot{x}) = \sum_{ij} \frac{\partial^2 F_{\ell}^2(x,z)}{\partial z_i\ \partial z_j} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial z_j}{\partial t},\qquad 1 \le i,\ j \le n$$

e fazendo $t = 1$

$$F_{\ell}^2(x,\dot{x}) = \sum_{ij} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_{\ell}^2(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}_i\ \partial \dot{x}_j}\ \dot{x}_i \cdot \dot{x}_j .$$

b) Os coeficientes

$$g_{ij}^{\ell}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_{\ell}^2(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}_i\ \partial \dot{x}_j}$$

são positivamente homogêneos de grau zero com relação a $\dot{x}$, isto é,

$$g^{\ell}_{ij}(x, t\dot{x}) = g^{\ell}_{ij}(x,\dot{x}) \quad \text{para} \quad t > 0.$$

Para $\dot{x} \neq 0$ temos que

$$g^{\ell}\left(x,\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\right) = g^{\ell}(x,\dot{x}), \quad \text{onde} \quad |\dot{x}|^2 = < \dot{x},\dot{x} >.$$

Sendo M compacta, o fibrado tangente unitário

$$T_1M = \{(x,\dot{x}) \in TM : < \dot{x},\dot{x} > = 1 \}$$

da Variedade *Riemanniana* $(M, < . >)$ é também compacto, e os coeficientes $g^{\ell}_{ij}(x,\dot{x})$ são limitados e portanto atingem um máximo e um mínimo em T_1M.

Como a forma quadrática

$$\sum_{ij} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2_{\ell}(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}_i \, \partial \dot{x}_j} w_i \, w_j$$

é definida positiva para

$$(x,\dot{x}) \in TM - S_0(TM) \quad \text{e} \quad W \in TM,$$

e

$$T_1M = \{(x,\dot{x}) \in TM : < \dot{x},\dot{x} > = 1\}$$

é compacto e os coeficientes $g^{\ell}_{ij}(x,\dot{x})$ são limitados, então existem constantes $K_1 > 0$ e $K_2 > 0$, tais que

$$K_1 \leq d^2_f F^2_{\ell}(x,\dot{x})\left(\frac{W}{|W|}, \frac{W}{|W|}\right) \leq K_2$$

$$K_1 |W|^2 \leq \sum_{ij} g_{ij}(x,\dot{x}) \; w_i w_j \leq K_2 |W|^2, \; \ell = 1,2,\dots,p$$

onde $\quad W = \sum_{i=1}^{n} w_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} \quad$ e $\quad |W|^2 = < W, W >$.

Sejam h_{ij}, $1 \le i \le n$ e $1 \le \ell \le p$ os coeficientes da métrica *Riemanniana* $< \ , \ >$ de M na Carta $(\mathcal{U}_\ell, \ \phi_\ell)$, e pela desigualdade acima obtemos

$$K_1 |\dot{x}|^2 = K_1 \sum_{ij} h^{\ell}_{ij}(x) \dot{x}_i \dot{x}_j \le F^2_{\ell}(x, \dot{x}) = \sum_{ij} g^{\ell}_{ij}(\dot{x} \ \dot{x}) \dot{x}_i \dot{x}_j \le$$

$$\le K_2 \sum_{ij} h^{\ell}_{ij}(x) \dot{x}_i \dot{x}_j = K_2 |\dot{x}|^2 \qquad , \quad \ell = 1, \dots, p.$$

Logo

$$K_1 < W, W > \le F^2(W) \le K_2 < W, W >, \ \forall W \in TM.$$

Tomando $c \in \Lambda M$ e $\dot{c} = W$, e integrando ambos os membros da desigualdade anterior obtemos

$$K_1 \mathcal{E}(c) = K_1 \int_0^1 <\dot{c}, \dot{c}> dt \le E(c) = \int_0^1 F^2(\dot{c}) dt \le K_2 \int_0^1 <\dot{c}, \dot{c}> dt = K_2 \mathcal{E}(c)$$

c) Mostremos agora que $E^{-1}[0, K_1 \varepsilon] \subset \mathcal{E}^{-1}[0, \varepsilon]$, $\forall \varepsilon > 0$.

Seja $c \in E^{-1}[0, \ K_1 \varepsilon]$, então $E(c) \le K_1 \varepsilon$.

Logo $\mathcal{E}(c) \le \dfrac{E(c)}{K_1} \le \varepsilon$.

Portanto $c \in \mathcal{E}^{-1}[0, \varepsilon]$.

d) Seja $\delta > 0$, suficientemente pequeno, de modo que $M = \mathcal{E}^{-1}(0)$ seja um retrato por deformação de $\mathcal{E}^{-1}[0,\delta]$.

Pelo item c) temos que:

$$M \subset E^{-1}[0,K_1\delta] \subset \mathcal{E}^{-1}[0,\delta].$$

Logo M é também um retrato por deformação de $E^{-1}[0,\varepsilon]$, onde $\varepsilon = K_1\delta$.

■

4.32. <u>Seja $(M^n, <\ .\ >)$ uma Variedade Riemanniana Compacta de dimensão n e $F:TM \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma métrica de Finsler.</u>

No espaço tangente $T_c\Lambda M$ à Variedade das curvas fechadas de classe H^1, onde $c \in \Lambda M$ é uma F-geodésica fechada não-constante, temos os seguintes produtos intermos associados às métricas *Riemanniana* e *Finsleriana*, $<\ .\ >$ e F, respectivamente:

$$< X,Y >_1 = \int_0^1 < X,Y > dt + \int_0^1 < \nabla_{\dot{c}}X,\ \nabla_{\dot{c}}Y > dt,$$

$$< X,Y >_0 = \int_0^1 < X,Y > dt,$$

$$< X,Y >_{1,\dot{c}} = \int_0^1 < X,Y >_{\dot{c}} dt + \int_0^1 < D^{\dot{c}}_{\dot{c}}X,\ D^{\dot{c}}_{\dot{c}}Y >_{\dot{c}} dt,$$

$$< X,Y >_{0,\dot{c}} = \int_0^1 < X,Y >_{\dot{c}} dt,$$

onde $$< X,Y >_{\dot{c}} = \left[\frac{1}{2}\ d_r^2 F^2(\dot{c})(X,Y)\right]^{1/2},$$

∇ é a conexão *Riemanniana* associada a $< . >$, e D é a derivada absoluta tipo Cartan associada a $F: TM \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$.

Em $T_c\Lambda M$ Consideramos as seguintes normas:

$$|X|_1^2 = |X|_0^2 + |\nabla_{\dot{c}} X|_0^2$$

$$|X|_0^2 = \int_0^1 |X|^2 \, dt, \quad \text{onde} \quad |X|^2 = < X, X >$$

$$|X|_\infty = \sup_{0 \le t \le 1} |X(t)|$$

$$|X|^2_{1,\dot{c}} = |X|^2_{0,\dot{c}} + |D^{\dot{c}}_{\dot{c}} X|^2_{0,\dot{c}}$$

$$|X|^2_{0,\dot{c}} = \int_0^1 |X|^2_{\dot{c}} \, dt, \qquad \text{ond} \quad |X|_{\dot{c}} = \left[\frac{1}{2} \, d_f^2 F^2(\dot{c})(X, X) \right]^{1/2}$$

$$|X|_{\infty,\dot{c}} = \sup_{0 \le t \le 1} |X(t)|_{\dot{c}}$$

$\forall X \in T_c\Lambda M$ satisfaz:

(1) $|X|_0 \le |X|_\infty \le \sqrt{2}\,|X|_1$ e

(2) $|X|_{0,\dot{c}} \le |X|_{\infty,\dot{c}} \le \sqrt{2}\,|X|_{1,\dot{c}}$.

4.33. Teorema:

Seja $(M^n, < . >)$ uma Variedade *Riemanniana compacta* e c uma F-geodésica fechada não-constante.

Então das normas consideradas em $T_c\Lambda M$:

$$|\cdot|_1, \ |\cdot|_0, \ |\cdot|_\infty, \ |\cdot|_{1,\dot{c}}, \ |\cdot|_{0,\dot{c}}, \ |\cdot|_{\infty,\dot{c}}$$

temos que:

$i)$ $|.|_0$ e $|.|_{0,\dot{c}}$ são normas equivalentes em $T_c\Lambda M$;

$ii)$ $|.|_\infty$ e $|.|_{\infty,\dot{c}}$ são normas equivalentes em $T_c\Lambda M$;

$iii)$ $|.|_1$ e $|.|_{1,\dot{c}}$ são normas equivalentes em $T_c\Lambda M$.

Prova:

Na prova do item b) do Teorema anterior temos que existem constantes $K_1 > 0$ e $K_2 > 0$ tais que

$$K_1 < W, W > \leq \sum_{ij} g^{\ell}_{ij}(x, \dot{x}) w_i w_j \leq K_1 < W, W >.$$

Tomando $W = X(t) \in T_c\Lambda M$, $x = c(t)$, $\dot{x} = \dot{c}(t)$ nesta desigualdade e integrando:

$$K_1 \int_0^1 <X(t), X(t)> dt \leq \int_0^1 \sum g^{\ell}_{ij}\big(c(t), \dot{c}(t)\big) X_i(t) X_j(t) \leq K_2 \int_0^1 <X(t), X(t)> dt,$$

$$K_1 |X|_0^2 \leq |X|^2_{0,\dot{c}} \leq K_2 |X|_0^2 ,$$

$$(3) \qquad \sqrt{K_1}\ |X|_0 \leq |X|_{0,\dot{c}} \leq \sqrt{K_2}\ |X|_0$$

Se ainda na desigualdade acima tomarmos $W = X(t) \in T_c\Lambda M$, $x = c(t)$, $\dot{x} = \dot{c}(t)$ e o supremo quando $0 \leq t \leq 1$ obtemos

$$(4) \qquad \sqrt{K_1}\ |X|_\infty \leq |X|_{\infty,\dot{c}} \leq \sqrt{K_2}\ |X|_\infty.$$

Sendo M^n variedade compacta com as métricas *Riemanniana* e *Finsleriana*, $< , >$ e $\widetilde{< , >}$, respectivamente, podemos definir as seguintes métricas no fibrado tangente *TM* da seguinte maneira:

Sejam $t \longrightarrow (p(t),\ v(t))$, $s \longrightarrow (q(s),\ w(s))$ curvas diferenciáveis em TM com $p(0)=q(0)=p$ $v(0)=w(0)=v$ e $V=(p'(0),\ v'(0))$, $W = (q'(0),\ w'(0))$.

Definimos os produtos internos em $T_{(p,v)}TM$ por

$$\ll V,W \gg_{(p,v)} = < v(0),\ w(0) >_p + < \nabla_{p'} v(0),\ \nabla_{p'} w(0) >_p$$

$$\widetilde{\ll V,W \gg}_{(p,v)} = \widetilde{< v(0),\ w(0) >}_p + \widetilde{< D_{p'} v(0),\ D_{p'} w(0) >}_p,$$

onde ∇ é a conexão *Riemanniana* e D é a derivada absoluta de *Cartan*.

As normas induzidas são dadas, respectivamente, por:

$$\| V \|^2 = |v(0)|^2 + |\nabla_{p'} v(0)|^2$$

$$\| V \|^2_{\sim} = |v(0)|^2_{\sim} + |D_{p'} v(0)|^2_{\sim}$$

Escrevemos $\gamma(t) = (p(t),\ v(t)) \in TM$,

$\gamma(0) = (p(0),\ v(0))$ onde $|v(0)| = r$, $|v(0)|_{\sim} = s$,

com $v(0) \neq 0$, temos pela compacidade de M^n que existem constantes $N > 0$, $M > 0$, tais que

$$N|v(0)|_{\sim} \leq |v(0)| \leq M|v(0)|_{\sim} \iff N \leq \frac{r}{s} \leq M.$$

Seja $\alpha(t) = (p(t),\ \frac{v(t)}{r}) \in TM$ e $\alpha(0) = (p(0),\ \frac{v(0)}{r}) \in T_1M$ fibrado unitário tangente da métrica $< \ , \ >$, o qual é compacto, pois M^n é compacta.

Assim $\alpha'(0)=(p'(0), \frac{v'(0)}{r}) \in T_{\alpha(0)}(T_1M)$ e $\frac{\alpha'(0)}{\|\alpha'(0)\|_{\sim}} \in \widetilde{T}_1(T_1M)$

da métrica $\widetilde{< \ , \ >}$, onde $\widetilde{T}_1(T_1M)$ é também compacto.

Logo existem constantes $K_1>0$ e $K_2>0$, $K_1 \leq \frac{\|\alpha'(0)\|_{\sim}}{\|\alpha'(0)\|} \leq K_2$.

De $\|\gamma'(0)\|^2 = |v(0)|^2 + |\nabla_{p'} v(0)|^2 = r^2 + |\nabla^2_{p'} v(0)|^2 =$

$= r^2\|\alpha'(0)\|^2$, temos $\|\gamma'(0)\| = r\|\alpha'(0)\|$.

Analogamente, $\widetilde{\|\gamma'(0)\|} = s\widetilde{\|\alpha'(0)\|}$.

$$\text{Assim, } K_1 \le \frac{\frac{1}{r}\|\gamma'(0)\|}{\frac{1}{s}\widetilde{\|\gamma'(0)\|}} \le K_2 \quad \Rightarrow$$

$$N\ K_1 \le \frac{r}{s}\ K_1 \le \frac{\|\gamma'(0)\|}{\widetilde{\|\gamma'(0)\|}} \le \frac{r}{s}\ K_2 \le M\ K_2 \Rightarrow$$

$$N\ K_1\widetilde{\|\gamma'(0)\|} \le \|\gamma'(0)\| \le M\ K_2\widetilde{\|\gamma'(0)\|}.$$

No caso que $\gamma(0) = (p(0), v(0)) = (p(0), 0)$, $\gamma'(0) = (p'(0), v'(0))$ temos

$$\|\gamma'(0)\| = 0 + |\nabla_{p'} v(0)| = |v'(0)|$$
$$\widetilde{\|\gamma'(0)\|} = 0 + \widetilde{|D_{p'} v(0)|} = \widetilde{|v'(0)|}$$

onde $\nabla_{p'} v(0) = v'(0) = D_{p'} v(0) \in T_p M$.

Portanto $N\widetilde{\|\gamma'(0)\|} \le \|\gamma'(0)\| \le M\widetilde{\|\gamma'(0)\|}$.

Tomando $K = min\{N, NK_1\}$ e $L = max\{M, MK_2\}$ obtemos que: $K\widetilde{\|\gamma'(0)\|} \le \|\gamma'(0)\| \le L\widetilde{\|\gamma'(0)\|}$, assim as normas $\|.\|$ e $\widetilde{\|.\|}$ são equivalentes.

Fazendo $p(t) = c(t)$ e $v(t) = X(t) \in T_c\Lambda M$, onde $c = c(t)$ é uma F-geodésica fechada não constante e integrando os membros da desigualdade

$$K^2\widetilde{\|\gamma'(t)\|}^2 \le \|\gamma'(t)\|^2 \le L^2\widetilde{\|\gamma'(t)\|}^2$$

obtemos

$$K^2 \int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2_{\sim} dt \leq \int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2 dt \leq L^2 \int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2_{\sim} dt \Leftrightarrow$$

$$K^2 < X, X >_{1,\dot{c}} \leq < X, X >_1 \leq L^2 < X, X >_{1,\dot{c}} .$$

Uma conseqüência deste Teorema é o seguinte

4.34. Corolário:

Seja c um ponto crítico da função energia $E: \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}^+$,

$$E(c) = \int_0^1 F^2(\dot{c})dt \quad \text{e} \quad c \neq const.$$

Então o operador auto-adjunto $A_c : T_c\Lambda M \longrightarrow T_c\Lambda M$ associado à forma do índice

$$d^2E(c)(X, Y) = < A_c X, \ Y >_{1,\dot{c}} = < X, \ A_c Y >_{1,\dot{c}}$$

é da forma $A_c = id + k_c$, onde $k_c\colon \left(T_c\Lambda M, \ |.|_1\right) \longrightarrow \left(T_c\Lambda M, \ |.|_1\right)$ é um operador compacto com relação a norma $|.|_1$ onde

$$|X|_1^2 = \int_0^1 < X, X > dt + \int_0^1 < \nabla_{\dot{c}} X, \ \nabla_{\dot{c}} X > dt.$$

4.35. Existência de uma Subvariedade Característica associada a uma geodésica fechada c de uma métrica de Finsler $F:TM \longrightarrow \mathbb{R}^+$

Antes veremos alguns conceitos preliminares.

Seja c uma geodésica fechada de multiplicidade $m \geq 1$, de uma métrica de *Finsler* $F:TM \longrightarrow \mathbb{R}^+$, onde M é uma variedade diferenciável compacta, n-dimensional.

Denotamos por $T'_c\Lambda M$ = o subespaço de $T_c\Lambda M$ de codimensão 1 que é ortogonal a $\dot{c} \in T_c\Lambda M$.

Da decomposição ortogonal do espaço tangente

$$T_c\Lambda M = T_c^-\Lambda M \oplus T_c^+\Lambda M \oplus T_c^0\Lambda M$$

nos subespaços gerados pelos autovetores de A associados aos autovalores < 0, > 0, e $= 0$, respectivamente, onde

$$\langle AX, Y \rangle = \langle X, AY \rangle = d^2E(c)(X,Y),$$

temos que:

$$T'_c\Lambda M = T_c^-\Lambda M \oplus T_c^+\Lambda M \oplus T_c'^{\,0}\Lambda M$$

onde $T_c'^{\,0}\Lambda M = T_c^0\Lambda M \cap T'_c\Lambda M$ consiste dos Campos de Jacobi periódicos ao longo de c que são ortogonais a $\dot{c}$.

O índice de c e a nulidade de c são $dim\ T_c^-\Lambda M$ e $dim\ T_c'^{\,0}\Lambda M$, respectivamente.

Não assumimos aqui que a nulidade de c é zero, isto é, c pode ser degenerada. A órbita $S^1.c$ pode ser também uma subvariedade crítica degenerada; pois neste parágrafo faremos aplicação da Teoria de *Morse* de funções com pouca diferenciabilidade em Variedade de *Hilbert* que tem somente pontos críticos isolados, mas que podem ser degenerados.

Usaremos os resultados dessa teoria para obter informações sobre invariantes homológicos de órbitas críticas isoladas da função energia de *Finsler*

$$E:\Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad E(c) = \int_{S^1} F^2(\dot{c})\,dt, \quad \Lambda M = H^1(S,M)$$

e vamos estudar a energia E em uma vizinhança tubular de uma órbita crítica $S^1.c$, pela ação de S^1.

Seja $u = u(S^1.c)\colon N \longrightarrow S^1$ o fibrado normal de c sobre S^1, induzido pelo mergulho $z \in S^1 \longrightarrow z^{1/m}.c \in \Lambda M$,

$$z^{1/m}.c(t) = e^{2\pi i r/m}.c(t) = c\left(t + \frac{r}{m}\right),$$

onde m é a multiplicidade de c, e $0 \leq r \leq 1$.

Seja $u = u^- \oplus u^+ \oplus u^0$ a decomposição do fibrado normal, determinado pela decomposição na fibra

$$T'_c\Lambda M = T^-_c\Lambda M \oplus T^+_c\Lambda M \oplus T'^0_c\Lambda M$$

Considerando em M uma métrica *Riemanniana* $\langle\ ,\ \rangle$, temos que o fibrado tangente

$$T\Lambda M \cong H^1(\Lambda M^* TM) = \bigcup_{c\in\Lambda M} H^1(c^* TM)$$

tem de modo natural uma estrutura *Riemanniana* dada por

$$\langle X,Y \rangle_1 = \langle X,Y \rangle_0 + \langle \nabla_{\dot{c}} X, \nabla_{\dot{c}} Y \rangle_0$$

onde $\langle X,Y \rangle_0 = \int_{S^1} \langle X(t), Y(t) \rangle_c dt$, para $X, Y \in T_c\Lambda M$.

Utilizando a aplicação exponencial da métrica $< \, , \, >$, podemos identificar o espaço total $D = D(S^1.c)$ de um fibrado de discos suficientemente pequenos e normais a $S^1.c$ (que é uma vizinhança tubular de $S^1.c$) com uma vizinhança tubular aberta da seção zero $s^1 \subset N$.

Nós usamos a aplicação exponencial da métrica $< \, , \, >$, para definirmos a métrica de *Finsler* F e a energia E, induzidas em D.

Para $z \in S^1$, denotamos por D_z a fibra de D_u sobre z e observemos que a ação de S^1 em ΛM transforma as fibras D_z de modo equivariante em outra fibra, isto é, $\alpha \in S^1$, $\alpha . D_z = D_{\alpha . z}$.

A restrição $E|D_z$ da energia de *Finsler* a D_z denotamos por E_z e o campo gradiente de E_z com respeito à métrica *Riemanniana* $< \, , \, >_1$ de $T\Lambda M$ denotamos por $gradE_z$:

$$< gradE_z(\sigma), \; Y >_1 = dE_z(\sigma)Y, \quad Y \in T_\sigma \Lambda M.$$

Para os nossos propósitos é conveniente definir uma nova métrica *Riemanniana* em D. Seja m a multiplicidade da geodésica fechada c da métrica de *Finsler* $F: TM \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

Definimos em D a seguinte modificação da métrica *Riemanniana* $< \, , \, >_1$ de $T\Lambda M$:

$$< X, Y >_m = m^2 < X, Y >_0 + < \nabla^{\dot\sigma}_{\dot\sigma} X, \; \nabla^{\dot\sigma}_{\dot\sigma} Y >_0, \quad X, Y \in T_\sigma \Lambda M$$

No espaço tangente a cada $X \in D$, a nova métrica $< \, , \, >_m$ é equivalente à métrica $< \, , \, >_1$.

O índice e a nulidade de c não são modificados por esta troca de métrica, ver[*K.*].

Denotamos por $grad_m E_z$ o campo gradiente da energia de *Finsler* $E_z : D_z \longrightarrow \mathbb{R}$ com respeito a $\langle\ ,\ \rangle_m$:

$$\langle grad_m\, E_Z,\ X\rangle_m = dE_z(\sigma).X, \quad \forall X \in T_\sigma \Lambda M$$

Para $X \in N$, onde N é o fibrado normal sobre S^1, induzido pelo mergulho $z \in S^1 \longrightarrow z^{1/m}.c \in \Lambda M$, denotamos por $T'_x N \subset T_x N$ o subespaço do espaço tangente, que é tangente à fibra.

Utilizando os conceitos dados anteriormente, podemos então enunciar a seguinte proposição que garante a existência de uma subvariedade característica W_{ca} associada a uma geodésica fechada c da métrica de *Finsler* $F: TM \longrightarrow \mathbb{R}^+$, e de multiplicidade $m \geq 1$.

4.36. Proposição (Lema de Morse Generalizado para $E_z = E|D_z$)

Seja c uma geodésica fechada de uma métrica de *Finsler* $F: TM \longrightarrow \mathbb{R}^+$, de nulidade $\ell \geq 0$ e multiplicidade $m \geq 1$.

Seja $u = u^+ \oplus u^- \oplus u^o$ a decomposição do fibrado normal, determinado pela decomposição da fibra $T'_c \Lambda M$:

$$T'_c \Lambda M = T^+_c \Lambda M \oplus T^-_c \Lambda M \oplus T'^{\,o}_c \Lambda M.$$

A dimensão da fibra de u^o é ℓ.

Denotemos $u^+ \oplus u^-$ por u^*, isto é $u = u^* \oplus u^o$, e denotemos por O_+, O_-, O_o e O_*, as seções nulas dos fibrados u^+, u^-, u^o e u^*, respectivamente.

Então, existe um homeomorfismo local ψ de D e uma seção $z \in S^1 \longrightarrow P_z \in L(u^*, u^*)$ sendo P_z a projeção ortogonal

$$P_z : X \in D_+ \oplus D_- \longrightarrow P_z X \in D_+$$

tal que para

$$(X,Y) \in D_* \oplus D_o \text{ onde } D_* = D_+ \oplus D_-,$$

$$(E_z.\psi)(X,Y) = \|P_z(X)\|_m^2 - \|(I - P_z)(X)\|_m^2 + E_z(g(Y),\ Y)$$

onde $g\colon D_o \longrightarrow D_*$ é uma função fortemente diferenciável em $O_z \in D_o$ e $dg(O_z) = 0$, e o homeomorfismo $\Psi|D_0\colon D_0 \longrightarrow \Psi(D_0) \subset D$, $(\Psi|D_0)(Y) = g(Y) + Y$, $d(\Psi|D_0)(0) = I_N$, $N = T_c^{,o}\Lambda M$, define uma subvariedade topologica $\Psi(D_0) \subset D$, denominada subvariedade caracteritica em c.

Prova:

A prova desta proposição é conseqüência imediata do Lema de *Morse* generalizado:

$$(E_z.\psi)(X,Y) = d_x^2E_z(O_z)(X,X) + E_z(g(Y),Y) =$$
$$= \langle A_z(0,0)X,\ X \rangle_m + E_z(g(Y),\ Y), \text{ onde } (X,Y) \in D_* \oplus D_o$$

onde $A_z(0,0)$ é o operador auto-adjunto representando $d_x^2E_z(O_z)$, relativamente ao produto interno $\langle\ .\ \rangle_m$.

Escrevendo $X = (X^+,\ X^-) \in D_+ \oplus D_-$, temos que

$$\langle A_z(0,0)(X^+ + X^-),\ X^+ + X^- \rangle_m = \langle A_z(0,0)X^+, X^+ \rangle_m + \langle A_z(0,0)X^-, X^- \rangle_m$$

Usando agora a norma dada por

$$\|X\|_m^2 = \langle A_z(0,0)X^+, X^+ \rangle_m - \langle A_z(0,0)X^-, X^- \rangle_m$$

obtemos que

$$(E_z.\psi)(X,Y) = \|P_z(X)\|_m^2 - \|(I - P_z)(X)\|_m^2 + E_z(g(Y),\ Y)$$

onde $P_z : D_+ \oplus D \longrightarrow D_+$, $P_z(X) = P_z(X^+ + X^-) = X^+$

■

4.37. Corolário:

Consideremos as hipóteses da proposição anterior e suponhamos ainda que $S_1.c$ é um conjunto isolado de pontos críticos.

Então $E_z = E|D_z : D_z \longrightarrow \mathbb{R}$ tem $O_z \in D_z$ como ponto crítico isolado

4.38. Invariantes homológicos de órbitas críticas isoladas da função energia de Finsler

$E:\Lambda M = H^1(S^1,M) \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $E(c) = \int_0^1 F^2(\dot{c})dt$.

Utilizaremos nesta seção os resultados da Teoria de *Morse* para funções com pouca diferenciabilidade em Variedades de *Hilbert* que têm somente pontos críticos isolados, mas que podem ser degenerados.

Estes resultados são para obter informações sobre invariantes homológicos de órbitas críticas isoladas da função energia de *Finsler* E em $\Lambda M = H^1(S^1, M)$.

Consideremos em ΛM a ação do grupo S^1,

$$S^1 \approx O_+(2) \subset O(2) = O_+(2) \cup O_-(2),$$

(grupo ortogonal $O(2)$), mesmo que a métrica de *Finsler* $F: TM \longrightarrow \mathbb{R}^+$ seja simétrica (reversível) ou não:

$$S^1 \times T\Lambda M \longrightarrow T\Lambda M$$

$$(z, X(t)) \longrightarrow (z.X)(t) = X(t+r),\ z = e^{2\pi i r},\ 0 \le r \le 1.$$

Seja $c = c(t)$ uma F-geodésica fechada de multiplicidade $m \geq 1$ e denotemos por $T'_c\Lambda M$ o subespaço de $T_c\Lambda M$ de codimensão 1 que é F-ortogonal a $\dot{c} \in T_c\Lambda M$.

Seja a decomposição ortogonal do espaço tangente $T_c\Lambda M = T_c^-\Lambda M \oplus T_c^+\Lambda M \oplus T_c^0\Lambda M$ nos subespaços gerados pelos autovetores correspondentes aos autovalores < 0, >0 e $= 0$, associados ao operador auto-adjunto $A(c)$ onde

$$d^2E(c)(X,Y) = \langle A(c)X, Y \rangle_{\dot{c}} = \langle X, A(c)Y \rangle_{\dot{c}}, \quad X, Y \in T_c\Lambda M,$$

respectivamente.

Da decomposição acima obtemos a seguinte decomposição

$$T'_c\Lambda M = T_c^-\Lambda M \oplus T_c^+\Lambda M \oplus T_c'^{\,0}\Lambda M$$

onde $T_c'^{\,0}\Lambda M = T_c^0\Lambda M \cap T'_c\Lambda M$ consiste dos F-Campos de Jacobi ao longo de c que são F-ortogonais a $\dot{c}$.

Relembremos que $ind(c) = dim\, T_c^-\Lambda M$ e $nul(c) = dim T_c'^{\,0}\Lambda M$, e que não assumiremos $nul(c) = 0$, isto é, c pode ser degenerada.

Seja $u = u(S^1.c): N \longrightarrow S^1$ o fibrado normal de c sobre S^1, induzido pelo mergulho $z \in S^1 \longrightarrow z^{1/m}\, c \in \Lambda M$,

$$z^{1/m}\, c(t) = e^{2\pi i r/m} c(t) = c\left(t + \frac{r}{m}\right),$$

onde m é a multiplicidade de c, e $0 \leq r \leq 1$ e observemos que a subvariedade crítica $S^1.c$ pode ser degenerada.

Seja $u = u^- \oplus u^+ \oplus u^0$ a decomposição do fibrado normal, determindo pela decomposição na fibra:

$$T'_c\Lambda M = T_c^-\Lambda M \oplus T_c^+\Lambda M \oplus T_c'^{\,0}\Lambda M,$$

e usando aplicação exponencial podemos identificar o espaço total $D = D(S^1.c)$ de um fibrado de discos pequenos com uma vizinhança aberta de $S^1 \subset N$.

Seja c uma F-geodésica fechada percorrida uma só vez e assumimos que para todo $m = 1,2,3,\ldots$, as órbitas críticas $S^1.c^m$ são conjuntos isoladas de pontos críticos em ΛM.

Seja $E(c^m) = m^2 E(c) = K_m$.

Para um m fixado, seja $u = u(S^1.c^m)$ o fibrado normal sobre S^1 induzido por

$$z \in S^1 \longrightarrow z^{1/m}.c^m \in \Lambda M$$

e seja $u(S^1.c^m) = u^-(S^1.c^m) \oplus u^+(S^1.c^m) \oplus u^0(S^1.c^m)$ a decomposição de acordo com o sinal dos autovalores introduzidos anteriormente.

Para $z \in S^1$, consideremos a função

$$E_z : (D_z(S^1.c^m),\ O_z(S^1.c^m)) \longrightarrow (\mathbb{R},\ K_m),$$

onde E_z é a restrição de E à fibra $D_z(S^1.c^m)$.

Em $D_z(S^1.c^m)$ consideramos a métrica *Riemanniana* $< \ , \ >_m$:

$$< X,\ Y >_m = m^2 < X,\ Y >_0 + < \nabla_\sigma X,\ \nabla_\sigma Y >_0, \quad X,\ Y \in T_\sigma \Lambda M.$$

Pelo Lema de *Morse* generalizado para $E_z = E|D_z$, temos que existe um homeomorfismo local ψ de D e uma seção

$$z \in S^1 \longrightarrow P_z \in L(u^*,\ u^*)$$

sendo P_z a projeção ortogonal P_z: $X \in D_+ \oplus D_- \longrightarrow P_z(X) \in D_+$ tal que para $(X,Y) \in D_* \oplus D_o$ onde $D_* = D_+ \oplus D_-$,

$$(E_z \circ \psi)(X,Y) = \|P_z(X)\|_m^2 - \|(I - P_z)(X)\|_m^2 + E_z(g(Y),\ Y)$$

onde $g: D_o \longrightarrow D_* = D_+ \oplus D_-$ é uma função fortemente diferenciável em $O_z \in D_o$ e $dg(O_z) = 0$, $g(O_z) = 0$.

Denotemos, por $E_{0,z}$ a função dada por

$$E_{0,z} : (D_{0,z}(S^1.c^m),\ O_{0,z}(S^1.c^m)) \longrightarrow (\mathbb{R},\ K_m)$$

$$E_{0,z}(Y) = E_z(g(Y),\ Y).$$

Como todas as construções são feitas de modo equivariante com respeito a ação de S^1 em $D(S^1, c^m)$, os grupos de homologia e os números típicos são independentes da escolha de $\bar{z} \in S^1$, e denotemos por $b_i(c^m)$ e $b_i^\circ(c^m)$ os números típicos e os números típicos singulares da F-geodésica fechada c^m.

Denotemos por $E_z(X, Y)$ a representação local de $E_z = E|D_z$ dada pelo Lema de *Morse* generalizado, isto é,

$$E_z(X,Y) \equiv (E_z \circ \Psi)\ (X,Y) = \|P_z(X)\|_n^2 - \|(I - P_z)(X)\|_m^2 + E_z(g(Y),Y).$$

Usando esta notação temos:

$$b_i(c^m) = dim\ H_i([B_{z,\varepsilon}(c^m) \cap (E_z < K_m)] \cup \{0\},\ B_{z,\varepsilon}(c^m) \cap (E_z < K_m)),$$

$$b_i^\circ(c^m) = dim\ H_i([D_{z,\varepsilon}^\circ(c^m) \cap (E_z < K_m)] \cup \{0\},\ D_{z,\varepsilon}^\circ(c^m) \cap (E_z < K_m)),$$

onde $B_{z,\varepsilon}(c^m)$ é uma bola aberta de centro na origem da fibra D_z, e raio $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $D_{0,z}(c^m)$ é um pequeno disco aberto contido em $(D_\circ)_z$ de mesmo centro que $(D_\circ)_z$.

4.39. Invariantes homológicos de uma órbita crítica $S^1.c$

Para determinarmos os invariantes homológicos $H_i(E, S^1.c) = H_i([B_\varepsilon(S^1.c) \cap (E(S^1.c) < K)] \cup O(S^1.c),\ B_\varepsilon(S^1.c) \cap (E(S^1.c) < K))$ de uma órbita crítica isolada $S^1.c$ da energia de *Finsler* $E : \Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}^+$, fazemos uso dos resultados da Teoria homológica da ação de grupos finitos. Agora todos os invariantes homológicos são tomados num corpo de característica zero.

O principal teorema que utilizaremos aquí é o seguinte:

"Seja K um G-complexo simplicial regular com grupo G finito. Seja $L \subset K$ um sub-complexo invariante pela ação de G. Se A é um corpo de característica zero, então os seguintes grupos:

$$H_i(K,L;\ A)^G \quad \text{e} \quad H_i(K/G,\ L/G;\ A)$$

são isomorfos, onde $H_i(K,L;\ A)^G$ é constituido pelos elementos de $H_i(K,L;\ A)$ que são fixados pela ação induzida por G em homológia".

Este teorema pode ser encontrado em *Bredon:* Introduction to transformation groups, Teorema 2.4, página 120, ver[Br.].

Consideremos agora o invariante homológico

$$H_i(E,S^1.\mathrm{c})=H_i([B_\varepsilon(S^1.\mathrm{c})\cap(E(S^1.\mathrm{c})<K)]\cup O(S^1.\mathrm{c}),B_\varepsilon(S^1.\mathrm{c})\cap(E(S^1.\mathrm{c})<K)]$$

associado à órbita critica $S^1.\mathrm{c}$, e o invariante homológico

$$H_i(E_z,\ z.\mathrm{c}) = H_i([B_\varepsilon(z.\mathrm{c})\cap(E_z<K)]\cup\{z.\mathrm{c}\},\ B_\varepsilon(z.\mathrm{c})\cap(E_z<K))$$

onde $E_z(z.\mathrm{c}) = K$, $z \in S^1$, e

$$E_z:\ ((D_z(S^1.\mathrm{c}),\ O_z(S^1.\mathrm{c})) \longrightarrow (\mathbb{R},\ K)$$

Em $D_z(S^1.\mathrm{c})$ consideremos a métrica *Riemanniana* $\langle\ ,\ \rangle_m$:

$$\langle X,Y \rangle_m = m^2\langle X,Y \rangle_0 + \langle \nabla_\sigma^{\ \sigma} X,\ \nabla_\sigma^{\ \sigma} Y \rangle_0, \quad X,\ Y \in T_\sigma\Lambda M$$

se a multiplicidade de c for m. Logo pelo Lema de *Morse* generalizado para E_z, temos que existe um homeomorfismo ψ de D e uma seção $z \in S^1 \longrightarrow P_z \in L(u^*,\ u^*)$, sendo P_z a projeção ortogonal

$$P_z:\ X \in D_+ \oplus D_- \longrightarrow P_z(x) \in D_+$$

tal que para $(X,Y) \in D_* \oplus D_o^o$ onde $D_* = D_+ \oplus D_-$,

$$\big(E_z.\psi\big)(X,Y) = \|P_z(x)\|_m^2 - \|\big(I - P_z\big)(x)\|_m^2 + E_z\big(g(Y),\ Y\big)$$

onde $g: D_o \longrightarrow D_* = D_+ \oplus D_-$ é uma função fortemente diferenciável em $O_z \in D_o$ e $dg(O_z) = 0$, $g(O_z) = 0$. Agora passamos a escrever E_z no lugar de $E_z.\psi$.

Denotemos por W_c e W_c^- os conjuntos

$$W_c = [B_\varepsilon(c) \cap (E < K)] \cup \{c\} \qquad W_c^- = B_\varepsilon(c) \cap (E < K)$$

onde $E(c) = K$ e por W e W^- os conjuntos $S^1.W_c$ e $S^1.W_c^-$, respectivamente,

Agora podemos escrever o par

$(W,\ W^-) = \big(S^1 \times W_c,\ S^1 \times W_c^-\big)/_\Gamma = \big((S^1 \times W_c)/_\Gamma\ ,\ (S^1 \times W_c^-)/_\Gamma\big)$, onde Γ denota o grupo de isotropia, que atua no fibrado $S^1 \times W_c$ por transformações de recobrimento.

Então $H_i\big(W,W^-\big) = H_i\big((S^1 \times W_c)/_\Gamma,(S^1 \times W_c^-)/_\Gamma\big)$ é isomorfo a $H_i\big(S^1 \times W_c,\ S^1 \times W_c\big)^\Gamma$, que é constituido pelos elementos de $H_i\big(S^1 \times W_c,\ S^1 \times W_c^-\big)$ que são fixados pela ação induzida de Γ em homológia.

Como Γ atua trivialmente em $H_i\big(S^1\big)$ nós obtemos

$$H_i\big(E,\ S^1.c\big) = H_i\big(W,W^-\big) = H_i\big(S^1 \times W_c\big)/_\Gamma\ ,\ \big(S^1 \times W_c^-\big)/_\Gamma\big) =$$

$$= H_i\big(S^1 \times W_c,\ S^1 \times W_c^-\big)^\Gamma = H_i\big(S^1\big) \otimes H_i\big(W_c,\ W_c^-\big)^\Gamma \subset H_i\big(S^1\big) \otimes H_i(E,c).$$

O invariante $H_i\big(E,S^1.c\big)$ é do tipo finito, assim como $H_i(E,c)$, isto é, H_i é de dimensão finita e $H_i = 0$ para quase todo i. O número $b_i\big(S^1.c\big) = dim\ H_i\big(E,S^1.c\big)$ é chamado número tipico da órbita $S^1.c$.

Agora o invariante característico $H_i^o(E,c)$ juntamente com o índice λ de c determina H_i completamente pelo teorema do deslocamento $H_{i+\lambda}(E,c) = H_i^o(E,c)$.

Este último fato e a relação

$$H_i(E,S^1.c) = H_1(S^1) \otimes H_i(W_c, W_c^-)^\Gamma \subset H_i(S^1) \otimes H_i(E,c),$$

fornece que

$$H_i(E,S^1.c) \subset V_i \oplus V_i \ , \ V_i = H_{i-\lambda}^o(E,c) \oplus H_{i-\lambda-1}^o(E,c)$$

e portanto o número tipico $b_i(S^1.c)$ da órbita crítica $S^1.c$ e o número típico singular $b_i^o(c) = dim\ H_i^o(E,c)$ de c satisfazem a desigualdade

$$b_i(S^1.c) \leq 2[b_{i-\lambda}^o(c) + b_{i-\lambda-1}^o(c)].$$

4.40. Lema:

Sejam M compacta, e b o único valor crítico da energia de *Finsler:* $E:\Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}^+$ no intervalo $[b-\delta,\ b+\delta]$ para algum $\delta > 0$.

Supondo que o nível $f^{-1}(b)$ contem somente um número finito de orbitas críticas isoladas $S^1.c_1,\ S^1.c_2,\ldots,S^1.c_r$ da ação do grupo S^1 em $\Lambda M = H^1(S^1,M)$. Então

$$H_*(E \leq b+\delta,\ E \leq b-\delta) = \sum_{i=1}^{r} H_*(E,\ S^1.c_i)$$

Prova:

ΛM é completo e a condição (C) de campacidade vale para a função energia E pela compacidade de M. Definimos W por

$$W = S^1.W_c \text{ onde } W_c = [B_\varepsilon(c) \cap (E < K)] \cup \{c\},\ \text{e } W^- = S^1.W_c^-$$

onde $W_c^- = B_\varepsilon(c) \cap (E < K)$ com W_c e W_c^- contidos na fibra D_c no ponto crítico isolado c, e $E(c) = K$.

A seguir tomamos uma vizinhança tubular, suficientemente pequena, da seção zero no fibrado normal $\mathcal{N}$ da órbita $S^1.c$, determinada pela decomposição na fibra:

$$T'_c\Lambda M = T_c^-\Lambda M \oplus T_c^+\Lambda M \oplus T'^{\,0}_c\Lambda M$$

e essa vizinhança tubular é levada difeomorficamente em alguma vizinhança V de $S^1.c$ em ΛM, pela aplicação exponencial Exp de ΛM, usando para isto a exponencial de M. A equação

$$H_*\big(E \le b + \delta,\ E \le b - \delta\big) = \sum_{i=1}^{r} H_*\big(E,\ S^1.c_i\big)$$

é agora obtida pelas mesmas técnicas usadas para a obtenção dos grupos críticos

$$H_*\big(f \le d + \delta,\ f \le d - \delta\big) = \sum_{i=1}^{r} H_*\big(f,\ P_i\big),$$

para uma função f com pouca diferenciabilidade, satisfazendo as hipóteses (1),(2),(3),(4) do Lema de *Morse* generalizado, onde d é o único valor crítico em $[d - \delta,\ d + \delta]$ e P_1, P_2, ..., P_r são os pontos críticos de f no nível $f^{-1}(d)$.

■

4.41. Desigualdades de Morse

Sejam $a < b$ valores regulares para a função energia de *Finsler* $E(c) = \int_0^1 F^2(\dot{c})dt$ tal que o conjunto crítico em $E^{-1}[a,b]$ consiste de um número finito de órbitas críticas isoladas $S^1.c_1, \ldots, S^1.c_r$, então nós obtemos as desigualdades de *Morse* em termos dos números típicos $b_k(S^1.c_i)$, $i = 1,2,\ldots, r$, das órbitas críticas:

$$b_k\ (\Lambda^b,\ \Lambda^a) \le \sum_{i=1}^{r}\ b_k(S^1.c_i),\ \text{onde}$$

$$b_k(\Lambda^b, \Lambda^a) = dim\ H_k(\Lambda^b,\ \Lambda^a),$$

$$\Lambda^b = \{e \in \Lambda M : E(e) \le b\},\ \Lambda^a = \{e \in \Lambda M : E(e) \le a\}.$$

A prova das desigualdades de *Morse* em termos dos números típicos $b_k(S^1.c_i)$, segue as mesmas linhas da prova das desigualdades de *Morse* feitas para funções com pouca diferenciabilidade com pontos críticos isolados.

Se $E(c_i) = E(c_1)$ para $1 \le i \le r$, então vale a igualdade $b_k(\Lambda^b,\Lambda^a) = \sum^{r} b_k(S^1.c_i)$ pois $H_k(\Lambda^b,\Lambda^a) = \sum^{r} H_k(E, S^1.c_i)$.

Para o caso geral, sejam $a_1 < a_2 < \ldots < a_s$ os valores críticos da energia E em $[a,b]$.

Sejam $a_o = a$ e $a_{s+1} = b$, e escolhemos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < a_i - a_{i-1}$, $i = 1,2,\ \ldots,\ s+1$.

Então temos uma seqüência crescente de subespaços em $\Lambda = \Lambda M$: $\Lambda^{a_1} \subset \Lambda^{a_1+\varepsilon} \subset \ldots \subset \Lambda^{a_s+\varepsilon} \subset \Lambda^{a_{a+1}}$

Claramente, $H_k(\Lambda^{a_1+\varepsilon}, \Lambda^{a_0}) = H_k(\Lambda^{a_1+\varepsilon}, \Lambda^{a_1-\varepsilon})$

$$H_k(\Lambda^{a_i+\varepsilon}, \Lambda^{a_{i-1}+\varepsilon}) = H_k(\Lambda^{a_i+\varepsilon}, \Lambda^{a_i-\varepsilon}),$$

para $i = 1, 2, \ldots, s$, e

$$H_k(\Lambda^{a_s+\varepsilon}, \Lambda^{a_s+\varepsilon}) = 0.$$

Todos estes espaços vetoriais são de dimensão finita, pois vale a relação

$$H_k(\Lambda^{a_i+\varepsilon}, \Lambda^{a_i-\varepsilon}) = \sum_j \mathscr{H}_k(E, S^1.c_j)$$

e

$$b_k(S^1.c_j) \le 2[b^{\circ}_{k-\lambda(c_j)}(c_j) + b^{\circ}_{k-\lambda(c_j)-1}(c_j)]$$

$$\lambda(c_j) = \text{indice } (c_j), \quad E(c_j) = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Como b_k é função sub-aditiva então valem as desigualdades de *Morse*.

∎

4.42. Números típicos de uma F-geodésica periódica.

Para todo inteiro $m > 0$ introduzimos a aplicação iteração $m:\Lambda M \longrightarrow \Lambda M$, que será uma ferramenta importante para a Teoria de *Morse* em ΛM. Um ponto c em ΛM pode ser considerado como a restrição de uma curva periódica $\tilde{c} : \mathbb{R} \longrightarrow M$ com $\tilde{c}(k + t) = c(t)$ para $k \in \mathbb{Z}$ e $t \in [0,1]$.

As iteradas $\tilde{c}^m$ de $\tilde{c}$, $\tilde{c}^m(t) = \tilde{c}(mt)$, determinam pontos $c^m = \tilde{c}^m |[0,1]$ em ΛM.

Nós também referimos a c^m como a m-ésima iterada de c, $c^m(t) = \tilde{c}(mt)$.

Agora a aplicação iteração

$m : \Lambda M \longrightarrow \Lambda M$ é definida por $m(c) = c^m$,

onde $c^m : [0,1] \longrightarrow M$, $c^m(t) = \tilde{c}(mt)$.

A aplicação energia de *Finsler*

$$E:\Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}.\quad E(c) = \int_0^1 F^2(\dot{c})dt, \text{ satisfaz}$$

$$E(c^m) = \int_0^1 F^2(\dot{c}^m)dt = \int_0^m F^2\big(m\,\dot{\tilde{c}}(s)\big)\,\frac{ds}{m} = \int_0^1 F^2\big(m\,\dot{\tilde{c}}(s)\big)\,ds = m^2E(c),$$

isto é, a aplicação m é equivariante a menos do fator constante m^2.

Além disso, m é um mergulho de Variedades de *Hilbert*.

Mostremos agora que a derivada de m em c, é dada por $dm(c).Y(t) = Y(mt)$, para todo $Y \in T_c\Lambda M$.

Sejam $c \in \Lambda M$ e $Y \in T_c\Lambda M$. Consideremos uma variação $V:[0,1] \times (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow M$, da curva c, satisfazendo $V(t,0) = c(t)$,

$$V(0,s) = V(1,s) \ , \quad \frac{\partial\ V(t,s)}{\partial s} = Y(t,s) \ , \quad Y(t,0) = Y(t).$$

Derivando $m\big(V(t,s)\big)$ com relação a s temos

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big(m\big(V(t,s)\big)\Big) = \frac{\partial}{\partial s}\ V(mt,s) = dm\big(V(t,s)\big).\ \frac{\partial\ V(t,s)}{\partial s}$$

e para s = 0

$$dm(c).Y(t) = Y(mt).$$

Consideremos agora a variedade M com uma métrica *Riemanniana* $\langle\ ,\ \rangle$.

Em ΛM temos a considerar as seguintes métricas *Riemannianas* $\langle\ ,\ \rangle_1$ e $\langle\ ,\ \rangle_m$, onde

$$\langle X,Y \rangle_1 = \int_0^1 \Big(\langle X,Y \rangle_c + \langle \nabla_{\dot c} X,\ \nabla_{\dot c} Y \rangle_c\Big)\, dt$$

$$\langle X,Y \rangle_m = \int_0^1 \Big(m^2\langle X,Y \rangle_c + \langle \nabla_{\dot c} X,\ \nabla_{\dot c} Y \rangle_c\Big)\, dt$$

e ∇ é a conexão *Riemanniana* associada à métrica $\langle\ ,\ \rangle$.

Observemos que a aplicação iteração

$$m\colon \big(\Lambda M,\ \langle\ ,\ \rangle_1\big) \longrightarrow \big(\Lambda M,\ \langle\ ,\ \rangle_m\big)$$

é uma aplicação conforme, pois,

$$m\colon \Lambda M \longrightarrow m(\Lambda M) \subset \Lambda M, \quad c \longrightarrow c^m \quad \text{e para}$$

$X, Y \in T_c\Lambda M$ temos que $dm(c).X(t) = X(mt)$, $dm(c).Y(t) = Y(mt)$,

$$\langle dm(c).X(t),\ dm(c).Y(t) \rangle_m = \langle X(mt),\ Y(mt) \rangle_m =$$

$$= \int_0^1 \left(m^2 \langle X(mt), Y(mt) \rangle_{c^m} + \langle \nabla_{\dot{c}^m(t)} X(mt), \nabla_{\dot{c}^m(t)} Y(mt) \rangle_{c^m}\right) dt =$$

$$= \int_0^m \left(m^2 \langle X(s), Y(s) \rangle_{c(s)} + \langle \nabla_{m\dot{c}(s)} X(s), \nabla_{m\dot{c}(s)} Y(s) \rangle_{c(s)}\right) \frac{ds}{m} =$$

$$= \int_0^1 \left(m^2 \langle X(s), Y(s) \rangle_{c(s)} + m^2 \langle \nabla_{\dot{c}(s)} X(s), \nabla_{\dot{c}(s)} Y(s) \rangle_{c(s)}\right) ds$$

$$= m^2 \langle X(t), Y(t) \rangle_1 \qquad *$$

Denotemos por *grad* $E(c)$ e $grad_m E(c)$ os gradientes da energia *Finsleriana*

$$E(c) = \int_0^1 F^2(\dot{c})\,dt$$

com relação às metricas *Riemannianas* $\langle\ ,\ \rangle_1$ e $\langle\ ,\ \rangle_m$ de ΛM, respectivamente.

Observemos que $grad_m E(c^m) = grad\ E(c^m)$.

A prova de que $grad_m E(c^m) = grad\ E(c^m)$ é a seguinte:

1) $\langle grad\ E(c^m), Y(mt) \rangle_1 = dE(c^m).Y(mt) =$

$= \langle grad_m E(c^m), Y(mt) \rangle_m = m^2 \langle grad_m E(c), Y(t) \rangle_1$, em virtude de $*$.

2) $dE(c^m).Y(mt) = m^2.dE(c).Y(t)$, pois:

de $E(c^m) = m^2 E(c)$ temos $E \circ m = T \circ E$ pelo diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \Lambda M \arrow[r, "m"] \arrow[d, "E"'] & \Lambda M \arrow[d, "E"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "T"] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c \arrow[r, "m"] \arrow[d, "E"'] & c^m \arrow[d, "E"] \\ E(c) \arrow[r, "T"] & E(c^m) = m^2 E(c) \end{tikzcd}$$

Derivando ambos os membros de $E \circ m = T \circ E$, temos

$d(E \circ m)(c).Y = dE(m(c)).dm(c).Y = dE(c^m).Y(mt)$

$d(T \circ E)(c).Y = dT(E(c)).dE(c).Y = T \circ dE(c).Y = m^2.dE(c).Y$

Logo $dE(c^m).Y(mt) = m^2.dE(c).Y.$

De 1) e 2) temos:

$$m^2 < grad_m E(c),\ Y(t) >_1 = < grad_m E(c^m),\ Y(mt) >_m =$$
$$= dE(c^m).Y(mt) = m^2 dE(c).Y = m^2 < gradE(c),\ y(t) >_1 =$$
$$= < gradE(c^m),\ Y(mt) >_m$$

Logo $grad_m E(c^m) = gradE(c^m)$.

Dos resultados obtidos anteriormente temos o seguinte lema:

<u>4.43. Lema</u>:

$gradE$ é tangente a $m(\Lambda M) \subset \Lambda M$ e

$grad_m(E(c^m)) = dm(c).gradE(c) = gradE(c^m)$.

■

Os números típicos $b_k(S^1.c)$ da orbita $S^1.c$ podem ser chamados de números típicos da correspondente geodésica fechada.

Seja c uma F-geodésica fechada em ΛM, o fato principal que consideraremos agora é o estudo da seqüência $b_k(S^1.c^m)$ dos números típicos associados às iteradas c^m de c, com a hipótese de que todas as órbitas $S^1.c$ são subvariedades críticas isoladas pela ação do grupo S^1.

Como as seqüências $ind(c^m)$ dos índices das iteradas c^m já foram estudadas, agora passaremos a considerar as seqüências $b_k^o(c^m)$ dos números típicos singulares associados às iteradas c^m, para obtermos estimativas de $b_k(S^1.c^m)$.

4.44. Teorema:

Seja c uma F-geodésica fechada em ΛM tal que a órbita crítica $S^1.c^m$ é uma subvariedade crítica isolada e que $nul(c) = nul(c^m)$ para algum inteiro positivo m.

Então $b_k^o(c) = b_k^o(c^m)$ para todo k.

Prova:

Consideremos uma vizinhança tubular $\mathfrak{D}=S^1.\mathfrak{D}_c$ da órbita $S^1.c$, que é um fibrado de discos normais, de modo que a ação de S^1 em ΛM transforma cada fibra de modo equivariante em outra fibra.

O espaço normal $\tilde{\mathcal{N}}_c$ de $S^1.c$ é o espaço tangente a fibra $\mathfrak{D}_c$ em c e $\alpha.\mathfrak{D}_c = \mathfrak{D}_{\alpha.c}$ para $\alpha \in S^1$. Como S^1 atua por isometrias, então podemos tomar $\mathfrak{D}$ como a imagem difeormorfa de uma vizinhança tubular, suficientemente pequena, da seção nula no fibrado normal $\tilde{\mathcal{N}}$ de $S^1.c$ pela aplicação exponencial em ΛM.

A fibra de $\tilde{\mathcal{N}}$ em $\alpha.c$ é

$$T'_{\alpha.c}\Lambda M = T^+_{\alpha.c}\Lambda M \oplus T^-_{\alpha.c}\Lambda M \oplus T'^o_{\alpha.c}\Lambda M$$

onde $T'^o_{\alpha.c}\Lambda M = T^o_{\alpha.c}\Lambda M \cap T'_{\alpha.c}\Lambda M$. e $T'_{\alpha.c}\Lambda M$ é o subespaço de $T_{\alpha.c}\Lambda M$ de codimensão 1 que é ortogonal a $\alpha.\dot{c} \in T_{\alpha.c}\Lambda M$ e $T'^o_{\alpha.c}\Lambda M$ é constituido pelos Campos de Jacobi ao longo de $\alpha.c$ e ortogonais a $\alpha.c$.

Consideremos agora o fibrado normal $\mathcal{N}$ de $m\mathfrak{D}$ em ΛM com respeito a métrica $< \, , \, >_m$.

A aplicação exponencial *exp* de ΛM com respeito a ΛM, leva uma vizinhança da seção zero em $\mathcal{N}$ difeormorficamente em uma vizinhança de $m\mathfrak{D}$ em ΛM.

A imagem pela exponencial *exp* de uma conveniente vizinhança da seção zero em $\mathcal{N}|m\mathfrak{D}_c$ será um disco $\mathfrak{D}_c m$ contendo $m\mathfrak{D}_c$ como uma subvariedade.

Para isto observemos também que a aplicação iteração

$$m:(\Lambda M, < \, , \, >_1) \longrightarrow (\Lambda M, < \, , \, >_m)$$

é uma aplicação conforme.

Se $\mathfrak{D}_{c^m}$ tem sido escolhido pequeno, $\mathfrak{D}_m = S^1.\mathfrak{D}_{c^m}$ é um fibrado diferenciâvel de discos normais sobre $S^1.c^m$ com respeito a métrica $< \, , \, >_m$ e com respeito a métrica $< \, , \, >_1$, e além disso $m\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}_m = S^1.\mathfrak{D}_{c^m}$.

A diferencial $dm(c)$ transforma o espaço nulo *Kernel* A_c, onde $d^2E_c(X,Y) = < A_c.X, Y >_1 = < X, A_c.Y >_1$ e $E_c = E|\mathfrak{D}_c$, injetivamente e pela nossa hipótese sobre as nulidades, isomorficamente sobre o espaço nulo *Kernel* A_{c^m}, onde

$$d^2E_{c^m}(X,Y) = < A_{c^m}.X, Y >_1 = < X, A_{c^m}.Y >_1 .$$

Além disso, c^m um ponto crítico isolado de $E_{c^m}|m\mathfrak{D}_c$, pois $S^1.c$ e $S^1.c^m$ são órbitas críticas isolados.

Agora a energia E_{c^m} em $\mathfrak{D}_{c^m}$ e a subvariedade $m\mathfrak{D}_c \subset \mathfrak{D}_{c^m}$ satisfazem as hipóteses do lema 4.33, então obtemos que

$$H^o(E_{c^m}, c^m) = H^o(E_{c^m} | m\mathfrak{D}_c, c^m).$$

Por outro lado $H^o(E_{c^m} | m\mathfrak{D}_c, c^m) = H^o(E|\mathfrak{D}_c, c)$, pois $m:\mathfrak{D}_c \longrightarrow m\,\mathfrak{D}_c$ é um difeormorfismo e $E(\overline{c^m}) = m^2 E(\overline{c})$ para todo $\overline{c}$. E o teorema está demonstrado.

■

4.45. Corolário:

Seja c uma F-geodésica fechada em ΛM, e suponhamos que todas as órbitas críticas $S^1.c^m$ são isoladas. Então $b_k^o(c^m)$ é uniformente limitada, ou seja, $b_k^o(c^m) \leq B$ para todo k, m e para uma certa constante B.

Além disso, existe um número k_o tal que $b_k^o(c^m) = 0$ para todo $k > k_0$ e todo m.

Prova:

Sendo c uma F-geodésica fechada em ΛM, então existe uma seqüência de inteiros positivos m_1, m_2, ..., m_s, com $s \leq 2^n$, $\dim M = n + 1$, e para cada inteiro $1 \leq j \leq s$ existe uma seqüência estritamente crescente $\{q_{ji},\ i = 1,2,\ldots\}$ de inteiros positivos tal que os conjuntos $N_j = \{m_j q_{ji},\ i = 1,2,\ldots\}$ formam uma partição de $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ e $nul(c^{m_j q_{ji}}) = nul(c^{m_j})$, $1 \leq j \leq S$ e portanto os nulidades de c^m, $m \geq 1$, possuem somente um número finito de valores.

Segue do Teorema anterior que os números típicos singulares $b_k^{\circ}(c^{m_j q_{ji}})$ e $b_k^{\circ}(c^{m_j})$ são iguais para cada j, $1 \leq j \leq s$.

Agora tomemos $B = max\{b_k^{\circ}(c^{m_j}),\ 1 \leq j \leq s\}$.

Portanto $b_k^{\circ}(c^m) \leq B$, para todo k, m.

■

Agora nós podemos provar o lema que será de fundamental importância e decisivo para provarmos o Teorema de *Gromoll-Meyer* para uma métrica de *Finsler* $F: TM \longrightarrow \mathbb{R}^+$, onde M é uma variedade diferenciável compacta de dimensão n e simplesmente conexa.

<u>4.46. Lema</u>:

Seja c uma F-geodésica fechada em ΛM e suponhamos que todas as iteradas c^m, $m = 1,2,\ldots$, dão origem a órbitas críticas isoladas $S^1.c^m$. Sejam B e k_o as constantes obtidas no corolário anterior de modo que $b_k^{\circ}(c^m) \leq B$ para quaisquer k,m e $b_k^{\circ}(c^m) = 0$ para $k > k_o$ e $m = 1,2,3,\ldots$.

Então os números típicos $b_k(S^1.c^m)$ são uniformemente limitados por $4B$. Além disso, dado $k > k_o + 1$, o número de orbitas criticas $S^1.c^m$ tais que $b_k(S^1.c^m) \neq 0$ é limitado por uma constante C que não depende de k.

Prova:

$$b_k(S^1.c^m) \le 2\left[b^{\circ}_{k-\lambda(c^m)}(c^m) + b^{\circ}_{k-\lambda(c^m)-1}(c^m)\right] \le 4B.$$

Em primeiro lugar suponhamos que a seqüência dos índices das iteradas $\lambda(c^m) = ind(c^m) = 0$ para $m = 1,2,3,\ldots$. Então pela desigualdade que relaciona os números típicos e os típicos singulares

$$b_k(S^1.c^m) \le 2[\, b^{\circ}_{k-\lambda}(c^m) + b^{\circ}_{k-\lambda-1}(c^m)],$$

onde $\lambda = \lambda(c^m)$, temos que:

$$b_k(S^1.c^m) = 0, \text{ para } k > k_o + 1.$$

Suponhamos agora que o índice de alguma iterada de c seja diferente de zero e seja $m_o > 0$ o menor inteiro tal que $ind(c^{m_o}) > 0$.

Então nós podemos obter uma estimativa para o número de órbitas críticas $S^1.c^m$ satisfazendo

$$b^{\circ}_{k-ind(c^m)}(c^m) + b^{\circ}_{k-ind(c^m)-1}(c^m) \neq 0.$$

Agora $b^{\circ}_k(c^m) = 0$ quando $k > k_o$ ou $k < 0$.

A estimativa que estamos procurando é equivalente a estimar o número de órbitas críticas $S^1.c^m$ que satisfazem a desigualdade:

$$0 < k - 1 - k_o \le ind(c^m) \le k, \quad \text{isto é,}$$

$$k - ind(c^m) < k_o \quad \text{e} \quad k - ind(c^m) - 1 \le k_o.$$

Então existem constantes $\alpha > 0$ e $\beta \ge 0$, tais que,

$$ind(c^{m_o+s}) \ge ind(c^{m_o}) + s\alpha - \beta.$$

Para $s > \frac{\beta}{\alpha}$ temos:

$$k - 1 - k_o \leq ind(c^{m_o}) + s\alpha - \beta \leq ind(c^{m_o+s}) \leq k \leq k_o + ind(c^{m_o}) + 1$$

Logo $\frac{\beta}{\alpha} < s < \frac{k_o + 1 + \beta}{\alpha}$.

Portanto o número de órbitas $S^1.c^m$, satisfazendo $0 < k - 1 - k_o \leq ind(c^m) \leq k$ é limitado pela constante $c = \frac{k_o+1+\beta}{\alpha} + 1$.

■

Obs. 1) Uma outra maneira para encontrar esta estimativa para o número de órbitas $S^1.c^m$ satisfazendo

$0 < k - 1 - k_o \leq ind(c^m) \leq k$, é tomar $s > \frac{k_o + \beta + 1}{\alpha}$.

Então temos que a desigualdade

$$ind(c^{m_o+s}) \geq ind(c^{m_o}) + s\alpha - \beta,$$

passa a ser

$$ind(c^{m_o+s}) \geq ind(c^{m_o}) + s\alpha - \beta > ind(c^{m_o}) + k_o + 1.$$

De $0 < k - 1 - k_o \leq ind(c^m) \leq k$ temos

$$k - ind(c^{m_o+s}) < k - ind(c^{m_o}) - k_o - 1 \leq 0.$$

Logo

$$b^{o}_{k-ind(c^{m_o+s})}(c^{m_o+s}) = b^{o}_{k-ind(c^{m_o+s})}(c^{m_o+s}) = 0.$$

Portanto

$$b_k(S^1.c^{m_o+s}) = 0, \quad \text{para} \quad s > \frac{k_o + \beta + 1}{\alpha}.$$

Então o número de órbitas críticas $S^1.c^m$ satisfazendo $b_k(S^1.c^m) \neq 0$ é limitado por

$$C = \frac{k_o + 1 + \beta}{\alpha} + 1.$$

Obs. 2) Se no lema anterior assumirmos que todas as c^m, $m = 1,2,3,\ldots$, são não-degeneradas, então este lema é trivial, e isto é conseqüência da fórmula:

$$ind(c^{m_o+s}) \geq ind(c^{m_o}) + s\alpha - \beta, \text{ onde } \alpha > 0 \quad e \quad \beta \geq 0,$$

quando $ind(c^m) > 0$ para algum $m_1 \geq 1$, e neste caso $b_k^o(c^m) = 0$, para todo m e $k > 0$, onde

$$b_k^o(c^m) = dim\ H_k^o(E_m,\ c^m)$$

Neste ponto agora não há mais dificuldade para obtermos o Teorema de *Gromoll-Meyer*.

Para formularmos o Teorema de *Gromoll-Meyer* nós denotamos por hipótese *GM* a seguinte propriedade na seqüência $\{b_k\Lambda M\}$ dos números de *Betti* da Variedade $\Lambda M = H^1(S^1, M)$ cujos coeficientes de homologia são tomados num corpo de característica zero, e

$$b_k\Lambda M = dim\ H_k(\Lambda M):$$

Hipótese *GM*: "Se $\{b_k\Lambda N\}$ denota o k-ésimo número de *Betti* de ΛM, então existe uma seqüência $k_n \longrightarrow \infty$ tal que $b_{K_n}\Lambda M \longrightarrow \infty$".

4.47. Teorema de Gromoll-Meyer:

Seja (M^n, F) uma Variedade de *Finsler* compacta simplesmente conexa e suponhamos que a hipótese *GM* é satisfeita. Então M admite infinitas geodésicas fechadas não-constantes (geometricamente distintas).

Prova:

Suponhamos que exista um número finito de geodésicas fechadas não-constantes e geometricamente distintas. Então nós podemos escolher geodésicas fechadas c_1, c_2, ..., c_r, de modo que qualquer geodésica fechada não-constante em ΛM pertence a alguma órbita crítica $S^1.c_i^m$, $i = 1,2, \ldots, r$.

Como as órbitas, críticas $S^1.c_i^m$, $i = 1,2, \ldots, r$ são isoladas, Λ^b contem somente um número finito dessas órbitas para qualquer b, onde

$$\Lambda^b = \{c \in \Lambda M : E(c) \leq b\} \quad \text{e} \quad E(c) = \int_0^1 F^2(\dot{c})\,dt.$$

Sendo os números típicos $b_k(S^1.c_i^m)$ uniformente limitados para cada $i = 1,2, \ldots, r$, tomamos $\hat{B} = \max\limits_{i,k,m} b_k(S^1.c_i^m)$.

Para cada geodésica fechada c_i, escolhemos constantes k_o^i e C_i, de modo que os números típicos singulares $b_k^o(c_i^m)$ satisfaçam $b_k^o(c_i^m) = 0$ para $k > k_o^i$ e $m = 1,2,3, \ldots$ e que o número de órbitas críticas $S^1.c_i^m$ (i fixado) tais que $b_k(S^1.c_i^m) \neq 0$ é limitado por C_i quando $k > k_o^i + 1$.

Sejam $\hat{k}_o = max\ k_o^i$ e $\hat{C} = \sum_{i=1}^{r} C_i$.

Agora para qualquer $k > \hat{k}_o + 1$, a constante $\hat{C}$ é um limite superior para o número de órbitas críticas $S^1.c_i^m$ satisfazendo $b_k(S^1.c_i^m) \neq 0$.

Sejam $a < b$ valores regulares do funcional energia

$$E:\Lambda M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad E(c) = \int_0^1 F^2(\dot{c})dt$$

e cujo conjunto crítico em $E^{-1}[a,b]$ consiste de um número finito de órbitas críticas $S^1.c_1$, $S^1.c_2$,..., $S^1.c_s$ após uma reordenação dos índices. Então nós temos as desigualdades de *Morse*, em termos dos números típicos das órbitas críticas $S^1.c_i$, $i = 1,2, \ldots, s$:

$$b_k(\Lambda^b,\Lambda^a) \leq \sum_{i=1}^{s} b_k(S^1.c_i) \quad , \quad s \leq r$$

onde $b_k(\Lambda^b,\Lambda^a) = dim\ H_k(\Lambda^b,\Lambda^a)$ e $b_k(S^1.c_i) = dim\ H_k(E,S^1.c_i)$

Para $k > k_o + 1$, temos que.

$$b_k(\Lambda^b,\Lambda^a) \leq \sum_{i=1}^{s} b_k(S^1.c_i) \leq \hat{C}.\hat{B}.$$

Considerando em $\Lambda M = H^1(S^1, M)$ os funcionais

$$E(c) = \int_0^1 F^2(\dot{c})dt \quad e \quad \mathcal{E}(c) = \int_0^1 < \dot{c},\dot{c} >dt$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ é a métrica *Riemanianna* de M, temos que existe uma constante $K > 0$ tal que $E(c) \geq K\mathcal{E}(c)$.

Seja $\delta > 0$, suficientemente pequeno, de modo que $M = \mathcal{E}^{-1}(0)$ seja um retrato por deformação de $\mathcal{E}^{-1}[0,\delta]$. Usando a desigualdade $E(c) \geq K\mathcal{E}(c)$, temos que

$$M \subset E^{-1}[0,K\delta] \subset \mathcal{E}^{-1}[0,\delta]$$

e portanto M é um retrato por deformação de $E^{-1}[0,K\delta]$.

Seja $a > 0$, suficientemente pequeno, satisfazendo $0 < a < \min_i\{E(c_i)\} \cup \{K\delta\}$.

Logo $b_k(\Lambda^b,\Lambda^a) = b_k(\Lambda^b,M)$.

Sendo M de dimensão finita n, um argumento na seqüência exata de homologia do par $(\Lambda^b,\Lambda^\circ)$ mostra que $b_k(\Lambda^b,M) = b_k(\Lambda^b)$ para quase todo k. Para ver isto, basta tomar $k > n + 1$ na seqüência exata

$$\longrightarrow H_k(\Lambda^\circ) \longrightarrow H_k(\Lambda^b) \longrightarrow H_k(\Lambda^b,\Lambda^\circ) \longrightarrow H_{k-1}(\Lambda^\circ) \longrightarrow .$$

Agora escolhemos b suficientemente grande de modo que todas as geodésicas c_i^m com

$$b_k(S^1.c_i^m) \neq 0 \quad \text{e} \quad b_{k+1}(S^1.c_i^m) \neq 0$$

estejam contidas em Λ^b.

Então $b_k(\Lambda^d,\Lambda^b) = 0$ e $b_{k+1}(\Lambda^d,\Lambda^b) = 0$ para todos os valores regulares $d \geq b$, e além disso $b_k(\Lambda,\Lambda^b) = 0$ e $b_{k+1}(\Lambda,\Lambda^b) = 0$, e para isto usar a seqüência exata de homologia do terno de espaços $(\Lambda,\ \Lambda^d,\ \Lambda^b)$:

$$\longrightarrow H_{k+1}(\Lambda,\Lambda^d) \longrightarrow H_k(\Lambda^d,\Lambda^b) \longrightarrow H_k(\Lambda,\Lambda^b) \longrightarrow H_k(\Lambda,\Lambda^d) \longrightarrow H_{k-1}(\Lambda^d,\Lambda^b) \longrightarrow$$

Portanto $b_k(\Lambda) = b_k(\Lambda^b)$, onde $\Lambda = \Lambda M$, o que se obtem da seqüência exata do par (Λ, Λ^b):

$$\longrightarrow H_{k+1}(\Lambda,\Lambda^b) \longrightarrow H_k(\Lambda^b) \longrightarrow H_k(\Lambda) \longrightarrow H_k(\Lambda,\Lambda^b) \longrightarrow$$

Combinando estas conclusões com aquela das desigualdades de *Morse* obtemos $b_k(\Lambda) \le \hat{C}.\hat{B}$, para quase todo k, o que contradiz a hipótese do Teorema.

∎

Observaçao: Ver no próximo parágrafo 4.48 que os números de Betti $b_k(\Lambda)$ são finitos quando o corpo de coeficientes de homologia é de caracteristica zero e M é compacta, simplesmente conexa, de dimensão $n \ge 2$ e sem bordo.

4.48. Agora passamos a descrever algumas propriedades referentes aos números de *Betti* $b_k(\Lambda)$ e condições topológicas para que verifique a hipótese (*GM*) do Teorema de *Gramoll-Meyer*, onde $\Lambda = \Lambda M = H^1(S^1, M)$, conforme está em [*G.M.*2].

1º) Seja $(M, \langle , \rangle)$ uma Variedade *Riemanniana* simplesmente conexa, compacta, de dimensão $n \ge 2$ e sem bordo. Então o espaço ΛM é conexo e o tipo de homotopia de $\Lambda = \Lambda M$ depende somente do tipo de homotopia de M.

De fato, a inclusão de $\Lambda = \Lambda M$ no espaço $C^o(S^1, M)$ de todas as aplicações contínuas $S^1 \longrightarrow M$, com a topologia compacto-aberta é uma equivalência homotópica. Os números de *Betti* $b_k(\Lambda)$ são finitos quando o corpo dos coeficientes de homologia é de característica zero. (ver por exemplo [*S.J.P.*]), 2º) Suponhamos sempre que o corpo dos coeficientes de homologia é de característica zero. Observemos que a propriedade da seqüência do números de *Betti* $b_k(\Lambda)$ ser limitada ou não, é um invariante homotópico de M. Exemplos:

i) Seja G um grupo de *Lie* simplesmente conexo e compacto então $\Lambda = G \times \Omega_*$ e $H^*(\Lambda) = H^*(G) \otimes H^*(\Omega_*)$, onde Ω_* é o espaço de laços de M com ponto base fixado.

Como $H^*(\Omega_*)$ é uma álgebra polinomial com número de geradores igual a posto(G), temos que $b_k(\Lambda)$ é ilimitado se, e só se, posto (G) ≥ 2, isto é, $G \neq S_p(1) = S^3$.

Quando M tem o tipo de homotopia de um tal grupo G, a hipótese (GM) é válida.

ii) Para a esfera S^n a cohomologia de $\Lambda = \Lambda M$ é dada por $H^*(\Lambda M) = H^*(S^n) \otimes H^*(\Omega_*)$, $M = S^n$, se n é impar.

O anel $H^*(\Omega_*)$ é bem conhecido:

$dim\ H^k(\Omega_*) = 1$, para $k \equiv 0\ (mod(n-1))$ e

$H^k(\Omega_*) = 0$, no caso contrário.

No caso de esferas de dimensão par tem-se

$$\begin{cases} b_o(\Lambda) = b_{(2i-1)(n-1)}(\Lambda) = b_{(2i-1)(n-1)+1}(\Lambda) = 1, \text{ para } i \geq 1 \\ b_k(\Lambda) = 0, \text{ no caso contrário.} \end{cases}$$

iii) De um modo geral, a hipótese (GM) para os números de *Betti* $b_k(\Lambda)$ é satisfeita quando uma das seguintes propriedades é satisfeita:

a) O menor inteiro $k_o > 0$ com

$b_{k_o}(M) \neq 0$ é impar e $b_{k_o}(M) \geq 2$.

b) $H^*(M)$ é um produto tensorial de pelo menos duas álgebras polinomiais truncadas e possivelmente álgebras exteriores.

Casos especiais de a) e b) são as variedades com a cohomologia de um produto de esferas ou espaços projetivos.

iv) Alguns exemplos de variedades M simplesmente conexas e compactas, cuja seqüência de números de *Betti* $b_k(\Lambda)$ é limitada são as que tem o tipo de homotopia de um espaço simétrico de posto 1 (em particular as esferas), e portanto não se aplica o Teorema de *Gromoll-Meyer*.

Denotemos por $(GM)_\infty$ a hipótese (GM) no caso em que o corpo de característica zero dos coeficientes de homologia é o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais.

Sullivan e *Vigué* [*V.S.*] dão uma completa caracterização das variedades M para as quais a hipótese $(GM)_\infty$ é satisfeita:

"Seja M variedade diferenciável compacta, simplesmente conexa de dimensão n. A hipótese $(GM)_\infty$ está satisfeita se, e só se, o anel de cohomologia racional $H^*(M,\mathbb{Q})$ não é um anel polinomial truncado.

BIBLIOGRAFIA

[*Ar.*] *Artin, E.:* Geometric Algebra, Interscience Publishers Inc., New York, 1957.

[*B. Thr. Z.*] *Ballmann, W., Thorbergsson, G., and Ziller, W.:* Glosed geodesics on positively curved Monifolds. Annals if Mathematics, 116(1982), 213-247.

[*Bess.*] *Bessaga, C.:* Every infinite dimensional Hilbert space is diffeomorphic with its Unit Sphere, Bull. Acad. Pol. Sci, Sér., Math., astr. phys 14(1966), 27-31.

[*Bo..*] *Bott, R.:* Non-degenerate Critical Mamifolds. Ann. of Math. 60(1954), 248-261.

[*Br.*] *Bredon, G.:* Introduction to transformation Groups, Academic Press, 1972.
Bull. Soc. Math. Belg. 37, 1985.
C.R. Acad. Sci. Paris 230, (1950) p. 427-429.

[*Ca.*] *Cambini A., Sul Lemma Di Morse,* Boll. Un. Mat. Ital. (4) 7(1973), 87-93.

[*C. S.*] *Chern, S. S. and Espanier, E.:* The homology structure of Sphere bundles. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 36 (1950) p. 3-27. Comm. Math. Helv. 14(1941), p. 61 - 122.

[*C. M. P.*] *do Carmo, Manfredo P.:* Geometria Riemanniana, Projeto Euclides, Livros Técnicos e Científicos Editora S. A, Río de Janeiro - RJ.

[*Du.*] *Dugundji, J.:* An extension of Tietze's Theorem, Pacific J. Math. 1(1951), 353-367. MR13, 373.

[*Eil., St.*] *Eilenberg, S., Steenrod, N.:* Foundations of Algebraic Topology. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[*G. K. M*] *Gromoll, D., Klingenberg, W., Meyer, W.:* Riemannsche Geometrie im Groβem - Lectures Notes in Mathematics 55, Berlín - Heidelberg - N. York: Springer 1968. 2[ti] Auglage 1975.

[*G. M. 1*] *Gromoll, D. Meyer, W.:* On differentiable functions with isolated critical points. Topology S, 361-369, 1969.

[*G. M. 2*] *Gromoll, D., Meyer, W.:* Periodic geodesics on Compact Riemannian Manifolds. J. Diff. Geom. 3, 493-510(1969).

[*Gy.*] *Gysin, W.:* Zur Homologie theorie der Abbildungen und Faserungen der Manigfaltigkeiten., Comm. Math. Helv. 14(1941), p. 61 - 122.

[*H.*] *Hofer, H.:* The Topological degree at a critical point of Mountain pass type, in "Proceedings of The A. M. S. Summer Insitute in Nonlinear Functional Analysis, Berkeley, 1983, to appear.

[*Ka.*] *Kakutane, S.*, Topological properties of the Unit Sphere of a Hilbert Space, Proc. Imp. Acad. Tokyo 19(1943), 269-271. MR7, 252.

[*K.*] *Klingemberg W.:* Lectures on closed Geodesics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1978).

[*Kui.*] *Kuiper, N. H.:* C^1-equivalente of functions near isolated critical points, in "Symposium on Infinite Dimensional Topology" R. D. Anderson ed., Nanals of Math. Studies 69, Princeton, 1972, 199-218.

[*La. 1*] *Lang, S.:* Algebra, Addison-Wesley Publishing Co.

[*La. 2*] *Lang, S.:* Differential Manifolds. Reading, Mass.: Addison-Weley 1972.

[*Li.*] *Lima, Elon Lages,* Curso de Análise, volume 2, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada-IMPA, CNPq, 1981, Projeto Euclides.

[*Mar. Pro.*] *Marino, A. and Prodi, G.*, La Teoria de Morse Pergli Spazi di Hilbert, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 64, (1968), 43-68. Math. Z. 156, 231-2454(1977).

[*Mat.*] *Matthias, H. H.:* Zwei Verallgemeinerungen eines satzes von Gromoll-Meyer, Bonner Mathematische Schriften 126(1980).

[*Ma. Will.*] *Mawhin, J. and Willem, M.:* On the Generalized Morse Lemma. Bull. Soc. Math. Belg. 37, 1985.

[*Mer., Pa., 1*] *Mercuri, F., and Palmieri, G.:* Morse Theory With low differentiability. Relatório Interno nº 288 - UNICAMP.

[*Mer., Pa., 2*] *Mercuri, F., Palmieri, G.:* "Problems in extending Morse Theory to Banach Spaces", Boll. U. M. I. 12(4), 397-401(1975).

[*Mer., Pa., 3*] *Mercuri, F., and Palmieri, G.:* Morse Theory with low Differentiability. Bulletino U. M. I. (7) 1-B-(1987), 621-631.

[*Mer.*] *Mercuri, F.:* The Critical Points Theory for the closed geodesic problem. Math. Z. 156, 231-2454(1977).

[*Mi.*] *Milnor, J.:* Morse Theory. Ann. Mth. Studies No. 51, Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press 1963.

[*Mo.*] *Morse, M.:* The calculus of Variations in the large, Amer. Math. Soc. Collog. Publ. 18, Providence, R. I.

[*Pa.*] *Palais, R.:* Morse theory on Hilbert Manifords. Topology 2, 299-340 (1963).

[*P. T*] *Palais, Richards.* and Terng, Chuu-lian: Critical point Theory and Submanifold Geometry 1353 Springer-Verlag.

[*Ru.*] *Rund, H.:* The differential geometry of Finsler Spaces, Springer-Verlag, Berlin - Gottingen - Heidelberg, 1959.

[*S., T.*] *Seifert, H. and Threefall:* Variations rechnung im Grossen. Chelsea Publ. Co. 1948.

[*S.,J.P.*] *Serre, J. P.*, Homologie Singuliére des espaces fibrés, Ann. Of Math. 54(1951) 425-505.

[*St.*] *Steenrod, N.:* The Topology of fiber bundles. Princeton University Press, 1951.

[*Th.*] *Thom, R.:* Classes caracteristiques et i-carrés. C. R. Acad. Sci. Paris 230, (1950) p. 427-429.

[*V. S.*] *Vigué-Poirrier, M., Sullivan, D.:* The homology Theory of the closed geodesic problem. J. Diff. Geom. 11, 633-644(1977).

[*Wh.*] *Whitehead:* Elements of homotopy theory, Berlin, Springer, 1978, GTM 61

[*Zi*] Ziller, W: Geometry of The Katok examples. Ergod. Th. And Dynam. Sys. (1982), 3, 135-157. Printed in Great Britaim

FUNÇÕES FORTEMENTE DIFERENCIÁVEIS

Sejam $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ espaços de Banach, $\Omega \subset \mathbb{E}$ um aberto e $f:\Omega \to \mathbb{F}$.

<u>Definição:</u> f é fortemente diferenciável em $x_0 \in \Omega$ se f é diferenciável em x_0 e a função $\tilde{r}(x,y) = f(x) - f(y) - f'(x_0)(x-y)$ satisfaz:

$$\lim_{x,y \to x_0} \frac{\tilde{r}(x,y)}{\|x - y\|} = 0.$$

Em outras palavras, f é fortemente diferenciável em x_0 se, e só se, ela é diferenciável em x_0 e para $\forall\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $r(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ é lipschitziana com constante ε numa bola aberta $\mathcal{B}_\delta(x_0)$ de centro x_0 e raio δ. Em particular, f é lipschitziana com constante $\|f'(x_0)\| + \varepsilon$ em $\mathcal{B}_\delta(x_0)$.

Observemos que se f é diferenciável em todo um aberto Ω que contem x_0, então f é fortemente diferenciável no ponto x_0 se, e somente se, a aplicação derivada

$$f' : \Omega \subset \mathbb{E} \to \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$$

é contínua em x_0.

Assim, se f é C^1 em uma vizinhança de x_0, então f é fortemente diferenciável em x_0.

O conceito de diferenciabilidade forte é mais fraco que o conceito de função de classe C^1, mas suficiente para demonstrar o Teorema da função inversa.

Funções fortemente diferenciáveis em um ponto com derivada inversível no ponto, são localmente inversíveis. Neste caso a diferenciabilidade forte é exigida somente em um ponto. Demonstremos por completo este fato seguindo literalmente a demonstração clássica do Teorema da função inversa.

<u>Teorema</u> (da função inversa).

Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{F}$ contínua e fortemente diferenciável em $x_0 \in \Omega$. Se $f'(x_0)$ é um isomorfismo existe uma vizinhança aberta $\mathcal{U} \subset \Omega$ de x_0 tal que f é homeomorfismo de $\mathcal{U}$ sôbre $f(\mathcal{U}) = V$, V aberto em $\mathbb{F}$, $f^{-1} : V \longrightarrow \mathcal{U}$ é fortemente diferenciável em $f(x_0)$ e $[f^{-1}]'(f(x_0)) = [f'(x_0)]^{-1}$.

<u>Demonstração:</u> Podemos obviamente supor $x_0 = 0$, $f(0) = 0$, $\mathbb{E} = \mathbb{F}$ e, compondo f com $[f'(0)]^{-1}$, supor $f'(0) = I_{\mathbb{E}}$.

Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno de tal modo que $r(x) = f(x) - x$ seja lipschitziana com constante $\varepsilon < \frac{1}{2}$ em $\mathcal{B}_{\delta}(0)$.

Seja $y \in \mathcal{B}_{\frac{\delta}{3}}(0)$ fixado e definimos $\phi : \mathcal{B}_{\frac{2\delta}{3}}(0) \longrightarrow \mathbb{E}$, $\phi(x) = y - r(x)$.

1) $\phi(\mathcal{B}_{\frac{2\delta}{3}}(0)) \subset \mathcal{B}_{\frac{2\delta}{3}}(0)$. De fato, se $\|x\| < \frac{2}{3}\delta$,

$\|\phi(x)\| \leq \|y\| + \|r(x)\| \leq \frac{\delta}{3} + \varepsilon\frac{2}{3}\delta < \frac{2}{3}\delta$.

2) $\phi : \mathcal{B}_{\frac{2\delta}{3}}(0)) \longrightarrow \mathcal{B}_{\frac{2\delta}{3}}(0)$ é uma contração. De fato,

$$\|\phi(x) - \phi(z)\| = \|r(x) - r(z)\| \leq \frac{1}{2}\|x - z\|.$$

3) $f(\mathcal{B}_{\frac{2\delta}{3}}(0)) \supset \mathcal{B}_{\frac{\delta}{3}}(0)$.

De fato, dado y com $\|y\| \leq \frac{1}{3}\delta$, por 2) existe (um único) $\bar{x} \in \mathcal{B}_{\frac{2\delta}{3}}(0)$ tal que $\phi(\bar{x}) = \bar{x}$, isto é, $f(\bar{x}) = y$.

4) $\|f(x) - f(y)\| = \|f'(0)(x - y) + r(x) - r(y)\| =$

$= \|(x - y) + (r(x) - r(y))\| \geq \|x - y\| - \|r(x) - r(y)\|$

$\geq \frac{1}{2}\|x - y\|$.

5) Pondo $\mathcal{U} = \mathcal{B}_{\frac{2\delta}{3}}(0) \cap f^{-1}(\mathcal{B}_{\frac{\delta}{3}}(0))$, $V = \mathcal{B}_{\frac{\delta}{3}}(0)$ temos então que $f:\mathcal{U} \longrightarrow V$ é um homeomorfismo.

6) De 4) temos $\|f^{-1}(y) - y\| \leq 2\|y - f(y)\| = \|r(y)\| \leq 2\varepsilon\|y\|$ portanto f^{-1} é diferenciável em 0 e $(f^{-1}(0))' = I_{\mathbb{E}}$.

7) Temos então $f : \Omega \subset \mathcal{B}_{\frac{2\delta}{3}}(0) \longrightarrow \mathcal{B}_{\frac{\delta}{3}}(0)$ e $f^{-1} : \mathcal{B}_{\frac{\delta}{3}}(0) \longrightarrow \mathcal{B}_{\frac{2\delta}{3}}(0)$.

Escrevemos

$s(w) = f^{-1}(w) - w$. Queremos mostrar $\|s(w_1) - s(w_2)\| \leq 2\varepsilon\|w_1 - w_2\|$, se $w_i \in \mathcal{B}_{\frac{\delta}{3}}(0)$, $i = 1,2$. Temos então:

$$r(f^{-1}(w)) = f(f^{-1}(w)) - f^{-1}(w) = w - [w + s(w)] = -s(w),$$

e

$\|s(w_1) - s(w_2)\| \leq \|r(f^{-1}(w_1)) - r(f^{-1}(w_2))\| \leq \varepsilon\|f^{-1}(w_1) - f^{-1}(w_2)\| \leq$
$\leq 2\varepsilon\|w_1 - w_2\|$ (veja 4)).

Portanto f^{-1} é fortemente diferenciável em 0.