Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica - IMECC
Departamento de Matemática

*Semigrupos fracamente de Arf e pesos de semigrupos**

Juan Elmer Villanueva Zevallos

`vz_juan@yahoo.com.br`

Tese de Doutorado

Orientador: **Prof. Dr. Fernando Eduardo Torres Orihuela**

15 de dezembro de 2008
Campinas - SP

* Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES e CNPq

Semigrupos fracamente de Arf e pesos de semigrupos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Juan Elmer Villanueva Zevallos** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 15 de dezembro de 2008.

Prof. Dr. **Fernando Torres**
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Eduardo Torres Orihuela IMECC - UNICAMP
Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti IMECC - UNICAMP
Prof. Dr. Antonio José Engler IMECC - UNICAMP
Prof. Dr. Ricardo Alberto Podestá FaMAF - UNC
Prof. Dr. José Gilvan de Oliveira CCE - UFES

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, **UNICAMP**, como requisito parcial para obtenção de Título de **Doutor em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves - CRB8a / 5094

Villanueva Zevallos, Juan Elmer
V712s Semigrupos fracamente de Arf e pesos de semigrupos/Juan Elmer Villanueva Zevallos – Campinas, [S.P.: s.n.], 2008.

Orientador: Fernando Eduardo Torres Orihuela

Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Semigrupos numéricos. 2. Semigrupos de Arf. 3. Semigrupos acute. 4. Pesos de Weierstrass. 5. Recobrimentos duplos de curvas. I. Torres Orihuela, Fernando Eduardo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Near-Arf semigroups and weights of semigroups

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Numerical semigroups. 2. Arf semigroups. 3. Acute semigroups. 4. Weierstrass weights. 5. Double coverings of curves.

Área de concentração: Geometria Algébrica

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Fernando Eduardo Torres Orihuela (IMECC - UNICAMP)
Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti (IMECC - UNICAMP)
Prof. Dr. Antonio José Engler (IMECC - UNICAMP)
Prof. Dr. Ricardo Alberto Podestá (FaMAF - UNC)
Prof. Dr. José Gilvan de Oliveira (CCE - UFES)

Data da defesa: 15/12/2008

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 15 de dezembro de 2008 e aprovada

pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). FERNANDO EDUARDO TORRES ORIHUELA

Prof. (a). Dr (a). PAULO ROBERTO BRUMATTI

Antonio José Engler

Prof. (a). Dr (a). ANTONIO JOSÉ ENGLER

Prof. (a). Dr (a). RICARDO ALBERTO PODESTÁ

José Gilvan de Oliveira

Prof. (a) Dr. (a) JOSÉ GILVAN DE OLIVEIRA

À minha mãe ***Magdalena Zevallos Vda. de Villanueva***,
ao meu pai ***Martiniano Villanueva Avila*** (*in memorian*),
e à minha irmã ***Natalia*** (***Chonita***),

DEDICO

Agradecimentos

Ao meu Deus, pela presença constante em minha vida e por ter me dado saúde, força e esperança nos momentos difíceis desta caminhada.

Ao meu orientador Prof. Dr. Fernando Torres, por sua dedicação, compreensão e amizade que pude contar durante todo o trabalho.

À minha família pelo seu amor, que mesmo à distância sempre me apoiou e acreditou em mim.

Ao Prof. Dr. Abramo Hefez, pelo seu apoio e a confiança depositada.

À banca examinadora por aceitarem o convite. Em particular, ao Prof. Dr. José Gilvan de Oliveira, pelo seu interesse e acompanhamento ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Carlos Munuera, pelo seu apoio e acompanhamento do trabalho.

Aos meus amigos e colegas que me apoiaram e compartilharam bons momentos.

À minha amiga Iris, pela amizade e por nossas longas conversas.

Aos funcionários da Secretaria de Pós-Graduação e da Biblioteca do IMECC que sempre foram bons e compreensivos comigo.

Aos professores da Universidad Nacional Mayor de San Marcos pela aprendizagem durante a graduação.

Ao CNPq e à CAPES, pelo apoio financeiro concedido durante a minha permanência no curso, sem o qual não seria possível a realização do Programa de Doutoramento em Matemática.

Resumo

Os principais tópicos aqui considerados são do tipo aritmético. Introduzimos e estudamos semigrupos que generalizam os chamados semigrupos de Arf. Além de seu interesse particular, eles podem ser usados para esclarecer a estrutura de anéis de semigrupos no sentido de Lipman. Também calculamos os valores exatos dos pesos de semigrupos usando o número de lacunas pares. Isto está relacionado ao recobrimento duplo de curvas e tem interesse no estudo de moduli e constelação de curvas.

Palavras-chave: semigrupos numéricos, semigrupos de Arf, semigrupos fracamente de Arf, semigrupos acute, semigrupos fracamente acute, pesos de semigrupos, pesos de Weierstrass, recobrimentos duplos de curvas.

Abstract

The main topics considered here are of arithmetical type. We introduce and study semigroups that generalize the so-called Arf semigroups. Apart from being interesting by their own, they may be used to clarify the structure of semigroup rings in the sense of Lipman. We also compute the true value of the weights of semigroups by using the number of even gaps. This is related to double covering of curves and is useful to the study of moduli and constellation of curves.

Key-words: numerical semigroups, Arf semigroups, near-Arf semigroups, acute semigroups, near acute semigroups, weights of semigroups, Weierstrass weights, double coverings of curves.

SUMÁRIO

Introdução

Seja $\mathbb{N}_0$ o conjunto de inteiros não negativos. Neste trabalho, estudamos propriedades de semigrupos

$$H = \{0 = m_0 < m_1 < m_2 < \cdots\}$$

de $(\mathbb{N}_0, +)$ cujo complemento em $\mathbb{N}_0$ é finito, motivados pela Teoria de Anéis Locais (Seções 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4), Códigos Corretores de Erros (Seção 2.5) e a Teoria de Pontos de Weierstrass (Capítulo 3).

O número $g := \#(\mathbb{N}_0 \setminus H)$ é chamado *gênero* de H. Se γ é o número de elementos pares do complemento de H em $\mathbb{N}_0$, dizemos que H é um semigrupo γ-*hiperelíptico*.

O Capítulo 1 é dedicado a uma revisão sobre a teoria dos semigrupos, onde aproveitamos para lembrar uma fórmula para o cálculo do gênero de um semigrupo. Em particular, mostramos algumas propriedades dos semigrupos γ-hiperelípticos que serão chaves para o estudo dos capítulos seguintes.

Seja

$$A = \Bbbk[[H]] := \Bbbk[[\{X^m : m \in H\}]]$$

o anel local de semigrupo sobre $\Bbbk$, um corpo algebricamente fechado de característica zero. Tudo indica que Apéry [1] foi o pioneiro em estudar singularidades de A via semigrupos. Arf [3] introduz anéis de semigrupos A (aos quais se refere como canônicos) e os estuda por meio da propriedade

$$m_i + m_j - m_k \in H \quad \text{para todo} \quad i \geq j \geq k \geq 0\,. \tag{$*$}$$

Atualmente os semigrupos satisfazendo $(*)$ são chamados de *Arf*. Lipman [24] generaliza os anéis A estudados por Arf para anéis locais Cohen-Macaulay de dimensão um. O conceito Cohen-Macaulay sobre anéis pode ser visto e.g. [9], [23]. Se $A = \Bbbk[[H]]$ é um anel de semigrupo que é de Arf (na definição de Lipman) então A tem propriedades que dependem da aritmética de H, tais como: *ideais*, *ideais próprios* e do *tipo* de H [4].

No Capítulo 2, introduzimos e estudamos a aritmética de semigrupos que generalizam os semigrupos de Arf no seguinte sentido:

$$m_i - m_{i-1} \geq 2 \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, c - g\,,$$

onde c é o mínimo inteiro tal que $c - 1 \notin H$ e $c + n \in H$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$: um semigrupo com esta propriedade será chamado *fracamente de Arf*. Estes semigrupos contêm propriamente a família de semigrupos de Arf e portanto o respectivo anel $A = \Bbbk[[H]]$ não é de Arf. Propriedades dos semigrupos fracamente de Arf são fortemente influenciadas pela paridade do número de Frobenius ℓ_g. Para um inteiro $k \geq 1$, definamos a família

$$\mathscr{H}_k := \{H : H \text{ é um semigrupo fracamente de Arf de gênero } g \text{ e } \ell_g = 2g - 2k\}\,.$$

Para cada $H \in \mathscr{H}_k$ mostramos que $g(H) \leq \min\{7k - 4, 6k + 3\}$ (Seção 2.3). Isto implica que $\mathscr{H}_k$ é finito. Na Seção 2.4 consideramos $\ell_g = 2g - (2\gamma + 1)$ com $\gamma \geq 0$ um inteiro e suporemos g suficientemente grande respeito de γ. Nestas condições mostramos que todo semigrupo fracamente de Arf é γ-hiperelíptico. Em particular, para $\gamma = 0, 1, 2$ os conceitos de semigrupos de Arf e fracamente de Arf coincidem; isto não é o caso para $\gamma \geq 3$.

A teoria de códigos corretores de erros teve um ponto de inflexão após a construção de Goppa de códigos sobre curvas definidas sobre corpos finitos [15], [16], [32]. Nos referimos a estes códigos como *códigos de Goppa geométricos* (CGG). A dimensão e distância mínima destes estão relacionadas com o Teorema de Riemann-Roch, portanto faz-se necessário o cálculo do gênero de curvas e isto poderia ser difícil para os não especialistas.

Em 1998, Høholdt, van Lint e Pellikaan [17] introduziram uma construção "elementar" de CGG que usa essencialmente Álgebra Linear e Teoria de Semigrupos. Porém, Matsumoto [26] observou que esta construção é equivalente ao estudo de códigos pontuais definidas a seguir.

Seja $\mathcal{X}$ uma curva (projetiva, não singular e geometricamente irredutível) de gênero g sobre $\mathbb{F}_q$, o corpo finito com q elementos. Seja $\{Q, P_1, \ldots, P_n\}$ o conjunto de pontos $\mathbb{F}_q$-racionais de $\mathcal{X}$. Seja $H(Q) = \{0 < m_1 < m_2 < \cdots\}$ o semigrupo de Weierstrass em Q. Se $G = m_i Q$ e $D = P_1 + \cdots + P_n$ obtemos o código $C_i = E_i^{\perp}$, dual de

$$E_i := \{((f(P_1), \ldots, f(P_n)) : f \in \mathcal{L}(m_i Q)\} \subseteq \mathbb{F}_q^n$$

onde $\mathcal{L}(m_i Q)$ denota o espaço de Riemann-Roch associado ao divisor $m_i Q$. Temos duas cotas inferiores para a distância mínima exata $d(C_i)$ de C_i a saber: a de *Goppa*, $d_G(C_i) = m_i - (2g-2)$ e a *cota de ordem* (ou a cota de Feng-Rao) $d_{ORD}(C_i)$ definida na Seção 2.5. Além disso, é conhecido que

$$d(C_i) \geq d_{ORD}(C_i) \geq d_G(C_i)$$

(ver [12]). Para terminar o Capítulo 2, na Seção 2.5 calculamos a cota de ordem para certos semigrupos fracamente de Arf, completando assim cálculos feitos em [5] e [27].

Seja $\mathcal{X}$ uma curva definida sobre um corpo algebricamente fechado de gênero g. Sejam P um ponto de $\mathcal{X}$ e $H(P)$ o semigrupo de Weierstrass em P. O Teorema de Riemann-Roch assegura que este semigrupo tem complemento finito em $\mathbb{N}_0$ (veja por exemplo [11]). Seja γ o número de elementos pares deste complemento. Generalizando o caso de curvas hiperelípticas, as propriedades aritméticas do semigrupo $H(P)$ caracterizam a existência de curvas $\overline{\mathcal{X}}$ de gênero γ recobertas por $\mathcal{X}$ por um morfismo de grau dois sempre que g seja suficientemente grande com respeito a γ [34]. Este resultado pode ser formulado utilizando um invariante que aparentemente é mais simples do que a estrutura de $H(P)$ dada na Proposição 1.2.7. Consideremos o *peso* de um semigrupo arbitrário H de gênero g, a saber

$$w(H) := \frac{1}{2}(3g^2 + g) - \sum_{i=1}^{g} m_i \,.$$

Portanto,

$$\binom{g-2\gamma}{2} \leq w(H) \leq \binom{g-2\gamma}{2} + 2\gamma^2$$

(ver Corolário 3.1.7) e assim, obtém-se a existência de curvas $\overline{\mathcal{X}}$ de gênero γ duplamente recobertas por $\mathcal{X}$ sempre que g for maior que uma cota quadrática em γ

(ver [36]). Em [34], estas questões são formuladas sobre um contexto que depende somente da estrutura aritmética de semigrupos. No Capítulo 3 estamos interessados nos valores exatos de $w(H)$. Nas seções 3.1 e 3.2, obtemos valores exatos de pesos para certos tipos de semigrupos γ-hiperelípticos e, em alguns casos, uma classificação deles. Na Seção 3.3, estudamos os pesos dos semigrupos com multiplicidade $m_1 = 4$ e gênero suficientemente grande respeito do seu número de lacunas pares. Como uma consequência disto, obtemos uma classificação de todos esses semigrupos. Finalizamos o Capítulo 3, com uma apresentação de fórmulas para o cálculo de pesos de semigrupos de multiplicidade $m_1 = 6$ e resolvemos o PROBLEMA 3.1.8 (formulado na Seção 3.1) no caso em que $\gamma = 3$; no caso, $\gamma = 4$ somente obtemos uma resposta parcial. Estes resultados são úteis no estudo de moduli de curvas via pesos de semigrupos [2] e constelação de pontos de Weierstrass [30], [33].

Campinas, 15 de dezembro de 2008.

Notações e Terminologia Básica

Salvo menção contrária, ao longo deste trabalho, usaremos as seguintes notações e definições básicas:

- Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos inteiros.
- Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos inteiros positivos.
- Seja $\mathbb{N}_0$ o conjunto dos inteiros não negativos.
- Seja $\mathbb{F}$ um corpo algebricamente fechado de característica $p \geq 0$ ($\operatorname{char} p \geq 0$).
- Um subconjunto $H \subseteq \mathbb{N}_0$ é chamado um *semigrupo numérico* quando $0 \in H$, H é fechado com respeito à adição e $L(H) := \mathbb{N}_0 \setminus H$ é finito.
- O inteiro $g = g(H) := \#L(H)$ é chamado *gênero* de H.
- Estudaremos semigrupos numéricos tais que $1 \notin H$ e omitiremos o adjetivo numérico; isto é, semigrupos com gênero $g > 0$.
- Os elementos do conjunto $L(H) = \{1 = \ell_1 < \cdots < \ell_g\}$ são chamados *lacunas* de H. O número ℓ_g é chamado o *número de Frobenius de H*. Denotaremos $\ell_0 := -1$.
- Os elementos $0 = m_0 < m_1 < \cdots$ de H são chamados *não lacunas* de H.
- O número m_1 é chamado *multiplicidade* de H.

- Dizemos que H é *hiperelíptico* se $m_1 = 2$, caso contrário é chamado *não hiperelíptico*. Esta definição é motivada pelas chamadas *curvas hiperelípticas*, a saber as curvas que são recobrimento duplo da reta projetiva $\mathbb{P}^1$. De fato, uma curva $\mathcal{X}$ é hiperelíptica se, e somente se, existe $P \in \mathcal{X}$ tal que 2 é um elemento do semigrupo de Weierstrass $H(P)$ em P.

- Para um semigrupo $H = \{0 = m_0 < m_1 < \cdots\}$ de gênero g existe um único elemento $c = c(H) \in H$, chamado o *conductor* de H, tal que $c - 1 \notin H$ e $c + n \in H$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Claramente, $c = m_{c-g}$.

- Dizemos que um semigrupo H de gênero g é *simétrico* se $\ell_g = 2g - 1$. A propriedade de simetria pode ser substituída pelo seguinte: para cada inteiro n, temos
$$n \in H \quad \text{se, e somente se,} \quad \ell_g - n \notin H\,.$$

- Se $n_0, \ldots, n_r$ são elementos de $\mathbb{N}$ tais que $\mathrm{MDC}(n_0, \ldots, n_r) = 1$, então o conjunto
$$H = \langle n_0, \ldots, n_r \rangle := \{a_0 n_0 + \cdots + a_r n_r : \, a_0, \ldots, a_r \in \mathbb{N}_0\}$$
é um semigrupo de $\mathbb{N}_0$, chamado o *semigrupo gerado por* $n_0, \ldots, n_r$. Os elementos $n_0, \ldots, n_r$ são chamados os *geradores* de H.

- Para $H \subseteq \mathbb{N}_0$ e $a \in \mathbb{N}_0$, $aH := \{ah : h \in H\}$.

- Para um número real x, $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x.

- Sejam a e b inteiros com $a \leq b$. Se $a = b$, $[a, b] := \{a\}$ e se $a < b$ $[a, b] := \{a, a + 1, \ldots, b\}$.

CAPÍTULO 1

Preliminares sobre Semigrupos

Neste capítulo, consideramos resultados necessários para o desenvolvimento desta tese. Por conveniência do leitor, escreveremos as demonstrações respectivas (salvo a Proposição 1.2.3).

1.1 Conjunto de Apéry

Definição 1.1.1. Sejam H um semigrupo e $m \in H \setminus \{0\}$. Definimos o *conjunto de Apéry de* H, *com respeito a* m, como sendo

$$\mathrm{Ap}(H,m) := \{h \in H : \, h - m \notin H\} \, .$$

Para cada $i = 0, \ldots, m-1$, seja

$$s_i = s_i(H,m) := \min\{h \in H : \, h \equiv i \pmod{m}\} \, .$$

É claro que $s_i \in \mathrm{Ap}(H,m)$ para todo $i = 0, \ldots, m-1$. Dado $h \in \mathrm{Ap}(H,m)$, existe $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ tal que $h \equiv i \pmod{m}$, e portanto $h \geq s_i$. Pela propriedade de semigrupo e do fato que $h - m \notin H$ segue que $h = s_i$. Logo,

$$\mathrm{Ap}(H,m) = \{s_0, \ldots, s_{m-1}\} \, .$$

Da definição acima, temos as seguintes propriedades:

- $s_i \not\equiv s_j \pmod{m}$, para todo $i, j \in \mathbb{N}_0$ com $0 \leq i < j \leq m-1$.
- $H = \langle m, s_1, \ldots, s_{m-1} \rangle$.

No caso $m = m_1$, o conjunto de Apéry de H com respeito a m_1 é simplesmente chamado *conjunto de Apéry* de H.

Defina $e_i = e_i(H, m)$ pela equação

$$s_i = e_i m + i\,.$$

Seja

$$L_i(H) := \{\ell \in L(H) : \ \ell \equiv i \pmod{m}\}\,.$$

Dado $\ell \in L_i(H)$, pela propriedade de semigrupo segue que $\ell = jm + i$ para algum $j = 0, \ldots, e_i - 1$. Por outro lado, pela minimalidade de s_i temos que $jm + i \in L_i(H)$ para $j = 0, \ldots, e_i - 1$. Logo,

$$L_i(H) = \{jm + i : \ j = 0, \ldots, e_i - 1\}$$

e assim $e_i = \# L_i(H)$. Como $L(H)$ é a união disjunta dos $L_i(H)$'s, segue que o gênero g de H satisfaz

$$g = \sum_{i=1}^{m-1} e_i\,. \tag{1.1}$$

Também são satisfeitas as relações:

$$\begin{cases} e_i + e_j \geq e_{i+j}, & \text{se } i + j < m\,; \\ e_i + e_j \geq e_{i+j-m} - 1, & \text{se } i + j > m\,. \end{cases}$$

Reciprocamente, números $m, e_1, \ldots, e_{m-1}$ que satisfazem as relações acima determinam um semigrupo de gênero $g = e_1 + \cdots + e_{m-1}$.

1.2 Semigrupos γ-hiperelípticos

Os resultados desta seção estão motivados pelo estudo de semigrupos de Weierstrass em pontos ramificados de recobrimentos duplos de curvas [36], [34].

Definição 1.2.1. Seja γ um inteiro não negativo. Um semigrupo H é chamado *γ-hiperelíptico* se possui exatamente γ lacunas pares.

Observe que os semigrupos 0-hiperelípticos são os semigrupos hiperelípticos.

Seja

$$0 = \widetilde{m}_0 < \widetilde{m}_1 < \widetilde{m}_2 < \cdots$$

a sequência crescente de não lacunas pares de H.

Lema 1.2.2. ([36, Lema 2.6]) *Seja H um semigrupo γ-hiperelíptico. Então $\widetilde{m}_{\gamma+i} = 4\gamma + 2i$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Em particular, o conjunto*

$$\overline{H} := \{0\} \cup \left\{ \frac{\widetilde{m}_1}{2}, \ldots, \frac{\widetilde{m}_\gamma}{2} \right\} \cup \{2\gamma + i : i \in \mathbb{N}\}$$

é um semigrupo de gênero γ.

Demonstração. Se $\gamma = 0$ o resultado é claro. Sejam então $\gamma > 0$ e ℓ uma lacuna par de H.
Afirmação: $\ell < \widetilde{m}_\gamma$.
Prova da Afirmação: Suponhamos que exista uma lacuna par ℓ tal que $\ell > \widetilde{m}_\gamma$. Então teríamos as seguintes $\gamma + 1$ lacunas pares:

$$\ell - \widetilde{m}_\gamma < \cdots < \ell - \widetilde{m}_1 < \ell\,.$$

uma contradição. Isto termina a prova da afirmação.

Pela afirmação anterior temos que o número de lacunas pares de H é $\gamma = \widetilde{m}_\gamma/2 - \gamma$. Isto é, $\widetilde{m}_\gamma = 4\gamma$. Logo, $\widetilde{m}_{\gamma+i} = 4\gamma + 2i$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$. □

Proposição 1.2.3. *Seja H um semigrupo numérico de gênero g. Então:*

(1) *H é hiperelíptico se, e somente se,*

$$m_i = 2i \quad para \quad i = 1, \ldots, g\,.$$

(2) *H é não hiperelíptico se, e somente se,*

$$m_i \geq 2i + 1 \quad para \quad i = 1, \ldots, g - 2, \quad m_{g-1} \geq 2g - 2 \quad e \quad m_g = 2g\,.$$

Demonstração. Ver [6], [29, Teorema 1.1]. □

Observação 1.2.4. Seja $\gamma > 0$ um inteiro. Um semigrupo H γ-hiperelíptico de gênero g tem $g - \gamma$ lacunas ímpares em $[1, 2g - 1]$, logo H possui γ não lacunas ímpares em $[1, 2g - 1]$. Doravante a sequência decrescente de tais não lacunas será denotada por

$$u_\gamma < \cdots < u_1\,, \tag{1.2}$$

onde $u_i := u_i(H)$ para $i = 1, \ldots, \gamma$.

Na Seção 2.4 veremos que um semigrupo *fracamente de Arf* de gênero g suficientemente grande e número de Frobenius ímpar satisfaz:

Proposição 1.2.5. *Sejam $\gamma \geq 0$ um inteiro e H um semigrupo de gênero g. Então as seguintes afirmações são equivalentes*:

(1) *H é γ-hiperelíptico*;

(2) *existe um único semigrupo $\overline{H}$ de gênero γ, existem γ inteiros ímpares, digamos $u_\gamma < \cdots < u_1$ com $u_1 \leq 2g-1$ tais que*

$$H = 2\overline{H} \cup \{u_\gamma, \ldots, u_1\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \geq 2g\}.$$

Demonstração. O caso $\gamma = 0$ é claro. Seja agora $\gamma > 0$ e suponhamos que H é um semigrupo γ-hiperelíptico. Consideremos os u_i's como em (1.2). Pelo Lema 1.2.2, tem-se $\widetilde{m}_{\gamma+i} = 4\gamma + 2i$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$; além disso, o conjunto

$$\overline{H} := \{0\} \cup \left\{\frac{\widetilde{m}_1}{2}, \ldots, \frac{\widetilde{m}_\gamma}{2}\right\} \cup \{2\gamma + i : i \in \mathbb{N}\}$$

é um semigrupo de gênero γ.

A recíproca segue do fato que H possui $g - \gamma$ lacunas ímpares. □

Esta proposição motiva a seguinte definição.

Definição 1.2.6. Seja H um semigrupo de gênero g. Dizemos que H é um *recobrimento duplo de um semigrupo* $\overline{H}$ de gênero $\gamma \in \mathbb{N}_0$ se existem inteiros ímpares $u_\gamma < \cdots < u_1$ com $u_1 \leq 2g-1$ tais que

$$H = 2\overline{H} \cup \{u_\gamma, \ldots, u_1\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \geq 2g\}.$$

Proposição 1.2.7. ([34, Lema 0.2], [34, Teorema 2.1]) *Sejam H um semigrupo e $\gamma \in \mathbb{N}_0$. As seguintes afirmações são equivalentes*:

(1) *H é γ-hiperelíptico.*

(2) $\widetilde{m}_{2\gamma+1} = 6\gamma + 2$.

(3) $\widetilde{m}_{2\gamma+1} \leq 6\gamma + 2 < \widetilde{m}_{2\gamma+2}$.

(4) *No intervalo $[2, 4\gamma]$, o semigrupo H possui exatamente γ não lacunas pares e $4\gamma + 2 \in H$.*

Demonstração. Provaremos (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1). O Caso $\gamma = 0$ é claro. Assim, suponhamos que $\gamma > 0$.
(1) $\Rightarrow$ (2) : Pelo Lema 1.2.2, temos que $\widetilde{m}_{\gamma+(\gamma+1)} = 6\gamma + 2$.
(2) $\Rightarrow$ (3) : É claro.
(3) $\Rightarrow$ (4) : Como $\widetilde{m}_{2\gamma+1} \leq 6\gamma + 2 < \widetilde{m}_{2\gamma+2}$, segue que no intervalo $[2, 6\gamma + 2]$ o semigrupo H tem $\gamma = (3\gamma+1)-(2\gamma+1)$ lacunas pares. Usando o mesmo argumento da demonstração do Lema 1.2.2, obtemos que tais lacunas pares estão contidas em $[2, \widetilde{m}_\gamma]$ e que $\widetilde{m}_\gamma = 4\gamma$. Tendo em vista que no intervalo $[\widetilde{m}_\gamma, \widetilde{m}_{2\gamma+1}]$ temos $\gamma+2$ não lacunas pares e $\widetilde{m}_{2\gamma+1} \leq 6\gamma+2$, concluímos que $\widetilde{m}_{\gamma+i} = 4\gamma+2i$ para $i = 0, 1, \ldots, \gamma+1$ (pois existem $\gamma + 2$ números pares em $[4\gamma, 6\gamma + 2]$).
(4) $\Rightarrow$ (1) : Provaremos que $\mathcal{G} := \{4\gamma + 2i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ o qual implicará que γ é o número de lacunas pares de H. Suponhamos que $\mathcal{G} \nsubseteq H$; então existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\ell := 4\gamma+2i \in \mathcal{G}\setminus H$. Seja i o menor elemento com esta propriedade. Pela propriedade de semigrupo temos que $4\gamma + 2i - \widetilde{m}_k$ são lacunas de H, para $k = 1, \ldots, \gamma$. Pela escolha de i temos que $4\gamma + 2i - \widetilde{m}_1 \leq 4\gamma$. Por outro lado, temos que $\widetilde{m}_\gamma \leq 4\gamma$ e $4\gamma + 2 \in H$; logo $4\gamma + 2i - \widetilde{m}_\gamma \geq 2i$ com $i \geq 2$. Assim, temos a sequência

$$4 \leq 4\gamma + 2i - \widetilde{m}_\gamma < \cdots < 4\gamma + 2i - \widetilde{m}_1 \leq 4\gamma\,.$$

Como existem γ lacunas pares em $[2, 4\gamma]$, segue que $2 \in H$ e portanto $\gamma = 0$, uma contradição. $\square$

Lema 1.2.8. ([35, Lema 2.1], [34, Lema 3.1]) *Seja H um semigrupo γ-hiperelíptico de gênero g. Então*

(1) *Se $\widetilde{m}_1 = 4$, então $\widetilde{m}_i = 4i$ para $i = 1, \ldots, \gamma$.*

(2) *Se $\widetilde{m}_1 \geq 6$, então $\widetilde{m}_i \geq 4i + 2$ para $i = 1, \ldots, \gamma - 2$, $\widetilde{m}_{\gamma-1} \geq 4\gamma - 4$, $\widetilde{m}_\gamma = 4\gamma$.*

(3) *$\widetilde{m}_i \leq 2\gamma + 2i$ para cada i.*

(4) *Se $h \in H$ é ímpar, então $h \geq \max\{3, 2g - 4\gamma + 1\}$.*

(5) *$2g - 4i + 1 \leq u_i \leq 2g - 2i + 1$ para $i = 1, \ldots, \gamma$.*

(6) *Se $g \geq 4\gamma$, então $m_i = \widetilde{m}_i$ para $i = 1, \ldots, \gamma$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.2.2, temos que o conjunto

$$\overline{H} := \{0\} \cup \left\{\frac{\widetilde{m}_1}{2}, \ldots, \frac{\widetilde{m}_\gamma}{2}\right\} \cup \{2\gamma + i : \, i \in \mathbb{N}\}$$

é um semigrupo de gênero γ. Agora provemos o resultado.

(1) Se $\widetilde{m}_1 = 4$, segue que $\overline{H}$ é hiperelíptico e portanto $\widetilde{m}_i = 4i$ para $i = 1, \ldots, \gamma$.

(2) Se $\widetilde{m}_1 \geq 6$, pela Proposição 1.2.3 (2) temos que as primeiras não lacunas positivas de $\overline{H}$ satisfazem as seguintes desigualdades:

$$\frac{\widetilde{m}_i}{2} \geq 2i + 1 \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, \gamma - 2, \qquad \frac{\widetilde{m}_{\gamma-1}}{2} \geq 2\gamma - 2, \qquad \frac{\widetilde{m}_\gamma}{2} = 2\gamma\,.$$

(3) Provemos que $\widetilde{m}_i \leq 2\gamma + 2i$ para $i = 1, \ldots, \gamma$. Temos que $\widetilde{m}_\gamma = 4\gamma$. Suponhamos que exista um inteiro i tal que $1 \leq i < \gamma$ e $\widetilde{m}_i \geq 2\gamma + 2i + 2$. Como no intervalo $[2\gamma + 2i + 2, 4\gamma]$ existem $\gamma - i$ números pares, então tal i não pode existir.

(4) Como $h \in H$ é ímpar, temos $h \geq 3$ e a seguinte sequência de $\gamma + 1$ não lacunas ímpares

$$h < h + \widetilde{m}_1 < \cdots < h + \widetilde{m}_\gamma\,.$$

Então, pela Observação 1.2.4 segue $h + \widetilde{m}_\gamma \geq 2g + 1$. O resultado agora segue do Lema 1.2.2.

(5) Já vimos que $u_1 \leq 2g - 1$. Assim, procedendo indutivamente temos que $u_i \leq 2g - 2i + 1$ para $i = 1, \ldots, \gamma$. Provemos a cota inferior dos u_i's, por indução sobre i. Pelo item (4) temos que $u_\gamma \geq 2g - 4\gamma + 1$. Seja i um inteiro tal que $1 < i \leq \gamma$ e $u_i \geq 2g - 4i + 1$. Procedendo por contradição, suponhamos que

$$u_{i-1} < 2g - 4(i-1) + 1 = 2g - 4i + 5\,.$$

Então $u_i = 2g - 4i + 1$ e $u_{i-1} = 2g - 4i + 3$. Como existem $2i - 2$ números ímpares em $[2g - 4i + 5, 2g - 1]$, existe uma lacuna ímpar ℓ de H tal que $\ell > u_{i-1}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\ell - u_{i-1} = 2$, pois $\gamma > 0$. Como $\ell = 2g - 4i + 5$ segue que $I := [\ell - u_{i-1}, \ell - u_\gamma] \subseteq [2, 4\gamma - 2]$. Seja t o número de não lacunas pares de H pertencentes a I. Pela escolha de ℓ temos que $\ell - u_{i-1} < \widetilde{m}_1$. Por outro lado, como $\ell - u_j \in I$ para $j = i - 1, \ldots, \gamma$ temos que

$$\frac{\ell - u_\gamma - (\ell - u_{i-1})}{2} \geq t + [\gamma - (i-1) + 1]\,.$$

Assim, $u_\gamma \leq 2g - 2\gamma - 2i - 2t + 1$. Agora, como $\widetilde{m}_{t+1} \notin I$ segue que $\widetilde{m}_{t+1} + u_\gamma \geq \ell + 2$. Pelo item (3), tem-se $\widetilde{m}_{t+i-1} \leq 2\gamma + 2t + 2i - 2$ e assim $\widetilde{m}_{t+i-1} + u_\gamma \leq 2g - 1$. Portanto,

temos as não lacunas ímpares $\widetilde{m}_{t+1}+u_\gamma,\ldots,\widetilde{m}_{t+i-1}+u_\gamma$ pertencentes a $[\ell+2,2g-1]$. Como $u_{i-1}=\ell-2$, teríamos que H possui $(\gamma-i+2)+(i-1)=\gamma+1$ não lacunas ímpares no intervalo $[2,2g-1]$, uma contradição.
(6) Se h é uma não lacuna ímpar de H, então por (4) temos que $h\geq 4\gamma+1$. O resultado agora segue do Lema 1.2.2 e a Proposição 1.2.7 (4). $\square$

Lema 1.2.9. ([34, Corolário 2.4]) *Sejam H um semigrupo de gênero g e $i\in\mathbb{N}$. Se*

$$d_i := \mathrm{MDC}(m_1,\ldots,m_i)=1 \quad e \quad i\leq g+1\,,$$

então

$$2m_i\geq m_{3i-1}\,.$$

Demonstração. Seja $K_i:=\{0=m_0,m_1,\ldots,m_i\}$. Pela Proposição 1.2.3 (2) temos

$$m_i\geq 2i-1=i+1+(i-2) \quad \text{para} \quad i=1,\ldots,g+1\,.$$

Por outro lado, como $\mathrm{MDC}(m_1,\ldots,m_i)=1$, segue

$$\#(K_i+K_i)\geq 2i+2+(i-2)=3i$$

(ver [13, Teorema 1.10]), onde $K_i+K_i:=\{m_r+m_s\,:\,0\leq r\leq s\leq i\}$. Como $K_i+K_i\subseteq H$ e $0\leq m_r+m_s\leq 2m_i$ para todo $0\leq r\leq s\leq i$, concluímos que $2m_i\geq m_{3i-1}$. $\square$

O resultado chave na Seção 2.4 é o seguinte.

Proposição 1.2.10. ([34, Teorema 2.1]) *Sejam $\gamma\geq 0$ um inteiro e H um semigrupo de gênero $g\geq 6\gamma+4$. Então as seguintes afirmações são equivalentes*:

(1) $m_{2\gamma+1}=6\gamma+2$;

(2) *H é γ-hiperelíptico.*

Demonstração. O caso $\gamma=0$ é claro. Assumamos agora que $\gamma\geq 1$. Seja

$$d:=\mathrm{MDC}(m_1,\ldots,m_{2\gamma+1})\,.$$

AFIRMAÇÃO: $d = 2$.
PROVA DA AFIRMAÇÃO: Suponhamos inicialmente que $d \geq 3$. Então

$$m_{i+1} \geq m_1 + 3i \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, 2\gamma\,.$$

Sendo, $m_{2\gamma+1} = 6\gamma + 2$,

$$6\gamma + 2 = m_{2\gamma+1} \geq m_1 + 6\gamma$$

e assim $m_1 \leq 2$, uma contradição pois $\gamma > 0$. Então $d \leq 2$. Agora suponhamos que $d = 1$. O Lema 1.2.9 implica

$$2(6\gamma + 2) = 2m_{2\gamma+1} \geq m_{3(2\gamma+1)-1} = m_{6\gamma+2}\,.$$

Como $6\gamma+2 \leq g-2$, temos $m_{6\gamma+2} \geq 2(6\gamma+2)+1$ (veja Proposição 1.2.3); e portanto da desigualdade anterior concluímos

$$2(6\gamma + 2) = m_{6\gamma+2} \geq 2(6\gamma + 2) + 1\,,$$

uma contradição. Isto mostra que $d = 2$.

Pela afirmação anterior temos que os m_i's são pares para $i = 1, \ldots, 2\gamma + 1$. Em particular, $\widetilde{m}_{2\gamma+1} = m_{2\gamma+1} = 6\gamma + 2$. Assim, pela Proposição 1.2.7 segue que H é γ-hiperelíptico.

Reciprocamente, se H é um semigrupo γ-hiperelíptico, pela Proposição 1.2.7 $\widetilde{m}_{2\gamma+1} = 6\gamma + 2$. Como o gênero de H é $g \geq 6\gamma + 4 > 4\gamma$, o Lema 1.2.8 (6) implica $m_{2\gamma+1} = 6\gamma + 2$. □

Generalizamos a proposição anterior como segue.

Proposição 1.2.11. ([34, Observação 2.7]) *Sejam $\gamma \geq 0$ um inteiro e H um semigrupo de gênero $g \geq 6\gamma + 4$. Então as seguintes afirmações são equivalentes*:

(1) $m_{2\gamma+1} \leq 6\gamma + 2$;

(2) *H é t-hiperelíptico para algum $t \in \{0, \ldots, \gamma\}$.*

Demonstração. O caso $\gamma = 0$ é claro. Assumamos agora que $\gamma \geq 1$. Analogamente à prova da Proposição 1.2.10 temos que $\widetilde{m}_i = m_i \leq 6\gamma + 2$ para $i = 1, \ldots, 2\gamma + 1$. Em particular, $\widetilde{m}_{2\gamma+1} = m_{2\gamma+1} \leq 6\gamma + 2$. Logo, se t é o número de lacunas pares de H em $[1, 6\gamma + 2]$ segue que $t \in \{0, \ldots, \gamma\}$. Seja ℓ uma lacuna par de H.

AFIRMAÇÃO: $\ell \leq 6\gamma + 2$.
PROVA DA AFIRMAÇÃO: Suponhamos que exista uma lacuna par $\ell > 6\gamma + 2$. Seja ℓ o mínimo com tal propriedade. Então teríamos as seguintes $2\gamma + 1$ lacunas pares:

$$\ell - \widetilde{m}_{2\gamma+1} < \cdots < \ell - \widetilde{m}_1 \, .$$

em $[1, 6\gamma + 2]$, uma contradição. Isto termina a prova da afirmação.

Pela afirmação anterior temos que H é t-hiperelíptico.

Reciprocamente, suponhamos que H seja um semigrupo t-hiperelíptico para algum $t \in \{0, \ldots, \gamma\}$ de gênero $g \geq 6\gamma + 4$ (em particular, $g > 4t$). Pelo Lema 1.2.2 e Lema 1.2.8 (6) segue que $m_{t+i} = 4t + 2i$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Em particular, $m_{2\gamma+1} = 4t + 2(2\gamma + 1 - t) \leq 6\gamma + 2$. $\square$

CAPÍTULO 2

Semigrupos fracamente de Arf

Seja H um semigrupo de gênero g. Sejam

$$0 = m_0 < m_1 < \cdots \qquad \text{e} \qquad 1 = \ell_1 < \cdots < \ell_g \,,$$

respectivamente, as sequências crescentes de não lacunas e lacunas de H. Sejam $c = m_{c-g}$ o condutor de H e $\ell_0 := -1$. Neste capítulo, introduzimos a propriedade fracamente de Arf sobre semigrupos que generaliza a bem conhecida propriedade de Arf.

2.1 Semigrupos de Arf

Definição 2.1.1. Um semigrupo H é chamado de *Arf* se,

$$m_i + m_j - m_k \in H \,,$$

para todo $i, j, k \in \mathbb{N}_0$ com $i \geq j \geq k$.

Observação 2.1.2. Seja c o conductor de H. Se $m_i \geq c$, então para cada j, k com $i \geq j \geq k$, temos $m_i + m_j - m_k \in H$. Assim, para verificar que um semigrupo é de Arf é suficiente considerar o caso $k \leq j \leq i < c - g$.

Uma caracterização da propriedade de Arf é dada na seguinte proposição.

Proposição 2.1.3. ([7, Proposição 1]) *Para um semigrupo H, as seguintes afirmações são equivalentes*:

(1) *H é de Arf*;

(2) *para todo inteiro $i \geq j \geq 0$, $2m_i - m_j \in H$.*

Demonstração. Claramente todo semigrupo de Arf satisfaz (2). Reciprocamente, assumamos (2) e sejam $i, j, k \in \mathbb{N}_0$ tais que $k \leq j \leq i \leq c - g - 1$. Temos que provar que $m = m_i + m_j - m_k \in H$. Isto é claro, se $i = j$ ou $j = k$. Em outro caso, se $k < j < i$, sejam $i_0 := i$, $j_0 := j$, $k_0 := k$ e escrevamos

$$m := m_{i_0} + m_{j_0} - m_{k_0} = (2m_{j_0} - m_{k_0}) + m_{i_0} - m_{j_0}\,.$$

Notemos que $2m_{j_0} - m_{k_0} \in H$ e $2m_{j_0} - m_{k_0} = m_{j_0} + (m_{j_0} - m_{k_0}) > m_{j_0}$. Sejam i_1, j_1, k_1 definidos por

$$\begin{aligned} m_{i_1} &= \max\{2m_{j_0} - m_{k_0}, m_{i_0}\} \\ m_{j_1} &= \min\{2m_{j_0} - m_{k_0}, m_{i_0}\} > m_{j_0} \\ m_{k_1} &= m_{j_0}\,. \end{aligned}$$

Assim, temos $m_{i_1} \geq m_{j_1} > m_{k_1}$ e $m_{i_1}, m_{j_1}, m_{k_1} \in H$. Além disso, $m = m_{i_1} + m_{j_1} - m_{k_1}$, com $i_1 \geq j_1 > k_1 = j_0$ e $i_1 \geq i_0$, $j_1 > j_0$ e $k_1 > k_0$. Se $i_1 = j_1$ então a condição (2) implica que $m \in H$. Em outro caso, repetindo o mesmo raciocínio obtemos três sequências de inteiros $(i_t)_{t\in\mathbb{N}}$, $(j_t)_{t\in\mathbb{N}}$, $(k_t)_{t\in\mathbb{N}}$ tais que

$$m = m_{i_t} + m_{j_t} - m_{k_t}$$

com $i_t \geq j_t > k_t$. Existem duas possibilidades: se existe um índice h tal que $i_h = j_h$, então $m \in H$. Em outro caso, se $i_t > j_t > k_t$ para todo $t \in \mathbb{N}$, então por construção a sequência $(j_t)_{t\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente. Logo, existe um índice h tal que $j_h \geq c - g$, ou seja, $m_{j_h} \geq c$. Como $m_{i_h} > m_{j_h} \geq c$ temos que $m = m_{i_h} + m_{j_h} - m_{k_h} \in H$. □

Corolário 2.1.4. *Se H é um semigrupo de Arf de gênero g, então*

$$m_i - m_{i-1} \geq 2 \quad \textit{para} \quad i = 1, \ldots, c - g\,, \tag{2.1}$$

onde c é o condutor de H.

Demonstração. Se $c = g+1$ o resultado é claro. Seja agora $c \geq g+2$ e suponhamos que existe $i \in \{1, \dots, c-g-1\}$ tal que $m_i - m_{i-1} < 2$. Então $m_i = m_{i-1}+1$. Escolhamos i o maior com esta propriedade; portanto, $m_i + 1$ é uma lacuna de H. Logo, pela Proposição 2.1.3 temos $2m_i - m_{i-1} = m_i + 1 \in H$, o qual é uma contradição. □

O Corolário 2.1.4 é o ponto de partida para a definição dos semigrupos deste capítulo.

Observação 2.1.5. Seja H um semigrupo de gênero g e condutor c. Então, H satisfaz a Equação 2.1 se, e somente se,

$$\ell_i - \ell_{i-1} \leq 2 \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, g\,. \tag{2.2}$$

De fato, suponhamos que H satisfaz a Equação 2.1 e que existe $i \in \{1, \dots, g\}$ tal que $\ell_i - \ell_{i-1} > 2$; logo $i \geq 2$. Então $\ell_i - 2$ e $\ell_i - 1$ são não lacunas de H, isto é, existe um inteiro $k \in \{2, \dots, c-g\}$ tal que $m_k = \ell_i - 1$ e $m_{k-1} = \ell_i - 2$, uma contradição com (2.1). A recíproca é análoga.

Existem outras caracterizações da propriedade de Arf. Por exemplo, Barucci et al. estabelecem quinze equivalências de tal propriedade [4, Teorema I.3.4]. Mais adiante (Proposição 2.1.9) provaremos que a propriedade de Arf é equivalente ao item (xv) do [4, Teorema I.3.4] (esta prova pode ser bem conhecida pelos especialistas; cf. [31]).

Inicialmente, vejamos algumas definições e resultados descritos em [4].

Dados dois conjuntos E e F contidos em $\mathbb{Z}$ e um elemento $z \in \mathbb{Z}$, denotamos

$$E + F := \{e + f : e \in E,\ f \in F\} \quad \text{e} \quad E + z := \{e + z : e \in E\}\,.$$

Definição 2.1.6. Seja H um semigrupo.

(a) Um *ideal relativo* de H é um subconjunto não vazio $E \subseteq \mathbb{Z}$ tal que $E + H \subseteq E$ e $E + h \subseteq H$ para algum $h \in H$.

(b) Um ideal relativo de H que está contido em H é simplesmente chamado um *ideal* de H.

(c) Um *ideal próprio* de H é um ideal de H diferente de H, isto é, um ideal relativo que não contém o zero.

(d) Um ideal relativo E de um semigrupo H é chamado *principal* se existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $E = H + z$; neste caso dizemos que E é um *ideal relativo principal de H gerado por z*.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, defina

$$H(m_i) := \{h \in H : \, h \geq m_i\} .$$

É fácil verificar que este conjunto é um ideal próprio de H.

Se E e F são ideais relativos de H, então

$$E - F := \{z \in \mathbb{Z} : \, F + z \subseteq E\}$$

é também um ideal relativo de H.

Para qualquer ideal relativo E de H, $E - E$ é um semigrupo.

Definição 2.1.7. Dizemos que um ideal E de um semigrupo H é *estável* se E é um ideal principal de $E - E$.

Enunciamos a seguir um resultado que caracteriza os ideais estáveis num semigrupo.

Lema 2.1.8. *Seja E um ideal próprio de um semigrupo H e seja e_1 o menor inteiro pertencente a E. Então as seguintes afirmações são equivalentes*:

(1) *E é estável*;

(1) $E + E = E + e_1$;

(3) *$E + (-e_1)$ é um semigrupo.*

Demonstração. Ver [4, Corolário I.2.3]. □

Proposição 2.1.9. *Para um semigrupo H, as seguintes afirmações são equivalentes*:

(1) *H é de Arf*;

(2) *$H(m_k)$ é um ideal estável para todo $k = 1, \ldots, c - g$.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que H seja um semigrupo de Arf. Seja $k \in \{1, \dots, c-g\}$ e sejam $m_i, m_j \in H(m_k)$ com $i \geq j$. Portanto, $m_i + m_j - m_k \in H$. Assim,

$$m_i + m_j = (m_i + m_j - m_k) + m_k \in H(m_k) + m_k\,.$$

Consequentemente,

$$H(m_k) + H(m_k) \subseteq H(m_k) + m_k \subseteq H(m_k) + H(m_k)\,.$$

Logo, pelo Lema 2.1.8 (2) segue que $H(m_k)$ é um ideal estável.

Reciprocamente, sejam $i, j \in \{0, \dots, c-g\}$ com $i \geq j$. Se $j = 0$ segue que $2m_i - m_j \in H$. Seja então $j > 0$ e suponhamos que $H(m_j)$ é estável. Como $H(m_i) \subseteq H(m_j)$, $2m_i \in H(m_j) + H(m_j) = H(m_j) + m_j$, e portanto

$$2m_i - m_j \in H(m_j) \subseteq H\,.$$

Assim, pela Proposição 2.1.3, H é de Arf. □

2.2 Semigrupos fracamente de Arf

O semigrupo

$$H = \mathbb{N}_0 \setminus \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\} = \{0, 5, 7, 10, 11, 12, 13, \dots\}$$

mostra que a condição (2.2) não caracteriza a propriedade de Arf. De fato, este é um caso particular da seguinte família de semigrupos.

Exemplo 2.2.1 (G. Oliveira)**.** Para o inteiro $g \geq 7$, o conjunto

$$H = \mathbb{N}_0 \setminus \{1, \dots, g-3, g-1, g+1, g+2\} = \{0, g-2, g, g+3, g+4, \dots\}$$

é um semigrupo de gênero g cujas lacunas satisfazem (2.2) que não é de Arf; de fato, $2g - (g-2) = g + 2 \notin H$.

Introduziremos agora o seguinte conceito.

Definição 2.2.2. Um semigrupo H de gênero g é chamado *fracamente de Arf* se

$$m_i - m_{i-1} \geq 2 \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, c-g\,,$$

onde c é o condutor de H (ou equivalentemente se H satisfaz a propriedade (2.2)).

Exemplo 2.2.3. Sejam $\overline{H}$ um semigrupo e a, $R \geq 0$ inteiros. Então o conjunto

$$H := a\overline{H} \cup \{h \in \mathbb{N} : \; h \geq R\}$$

é um semigrupo. Em particular, se $\overline{c}$ é o condutor de $\overline{H}$, $R \geq 2\overline{c}$ e $a = 2$, temos que o semigrupo H pode ser expressado como:

$$H = 2\overline{H} \cup \{h \in \mathbb{N} : \; h \text{ é ímpar}, \; h \geq R\}.$$

Com efeito, dados $m, n \in H$ temos:

- Se $m, n \in a\overline{H}$ então $m = a\overline{h}_1$ e $n = a\overline{h}_2$ para alguns $\overline{h}_1, \overline{h}_2 \in \overline{H}$. Logo, $m + n = a(\overline{h}_1 + \overline{h}_2) \in a\overline{H}$.
- Se $m \notin a\overline{H}$ ou $n \notin a\overline{H}$ então $m + n \geq R$.

Logo, em qualquer caso $m + n \in H$. Portanto, H é um semigrupo.

A seguinte proposição estabelece propriedades a respeito do semigrupo H definido no Exemplo 2.2.3; o item (2) foi provado em [7, Lema 1].

Proposição 2.2.4. *Sejam $\overline{H}$ um semigrupo e $a, R \geq 0$ inteiros. Então o semigrupo*

$$H = a\overline{H} \cup \{h \in \mathbb{N} : \; h \geq R\}$$

satisfaz as seguintes propriedades:

(1) *Se $a \geq 2$, então H é fracamente de Arf. Além disso, se $\overline{H}$ é um semigrupo fracamente de Arf, então a afirmação é também válida para $a = 1$.*

(2) *Se $\overline{H}$ é de Arf, então H é de Arf.*

(3) *Se $a = 2$ e $R \geq 2\overline{c}$, onde $\overline{c}$ é o condutor de $\overline{H}$, então*

$$H \text{ é de Arf} \quad \text{se, e somente se,} \quad \overline{H} \text{ é de Arf}.$$

Demonstração.
(1) Sejam c e g o condutor e o gênero de $H = \{0 = m_0 < m_1 < \cdots\}$, respectivamente. Seja $i \in \{1, \ldots, c - g\}$. Se $i = c - g$, então é claro que $m_i - m_{i-1} \geq 2$. Agora

assumamos que $i < c - g$ então $R \geq c > m_i > m_{i-1}$. Logo, existem não lacunas $\overline{m}_r, \overline{m}_s \in \overline{H}$ tais que $r < s$ e $m_i = a\overline{m}_s,\ m_{i-1} = a\overline{m}_r$. Então, como

$$m_i - m_{i-1} = a(\overline{m}_s - \overline{m}_r) \geq a$$

segue que H é um semigrupo fracamente de Arf.
(2) Sejam c e g o condutor e o gênero de $H = \{0 = m_0 < m_1 < \cdots\}$, respectivamente. Sejam $m_i, m_j, m_k \in H$ com $i \geq j \geq k \geq 0$ três não lacunas menores que o condutor de H. Então $R \geq c > m_i \geq m_j \geq m_k$. Logo, existem $\overline{m}_\alpha, \overline{m}_\beta, \overline{m}_\gamma \in \overline{H}$ tais que $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ e $m_i = a\overline{m}_\alpha$, $m_j = a\overline{m}_\beta$, $m_k = a\overline{m}_\gamma$. Como $\overline{H}$ é um semigrupo de Arf temos

$$m_i + m_j - m_k = a(\overline{m}_\alpha + \overline{m}_\beta - \overline{m}_\gamma) \in a\overline{H},$$

e isto prova o item (2).
(3) Suponhamos inicialmente que H é de Arf. Sejam $\overline{m}_i, \overline{m}_j \in \overline{H}$ com $i \geq j \geq 0$. Como H é de Arf temos que $m := 2(2\overline{m}_i) - 2\overline{m}_j \in H$. Mas m é par e sendo $R \geq 2\overline{c}$ pelo Exemplo 2.2.3 temos $m = 2(2\overline{m}_i - \overline{m}_j) \in 2\overline{H}$ e assim $2\overline{m}_i - \overline{m}_j \in \overline{H}$. A recíproca é um caso particular do item (2). $\square$

Exemplo 2.2.5. Seja $\gamma \geq 0$ um inteiro. Seja $\overline{H}$ um semigrupo de gênero γ e condutor $\overline{c}$. Seja g um inteiro tal que $g \geq \overline{c} + \gamma$. Consideremos o conjunto:

$$H = 2\overline{H} \cup \{n \in \mathbb{N} : \ n \text{ é ímpar}, \ n \geq 2g - 2\gamma + 1\}. \tag{2.3}$$

Este conjunto tem as seguintes propriedades:

(a) H é um semigrupo de gênero g com $\ell_g = 2g - (2\gamma + 1)$;

(b) H é γ-hiperelíptico;

(c) H é fracamente de Arf;

(d) H é de Arf se, e somente se, $\overline{H}$ é de Arf.

Com efeito, os items (c) e (d) seguem da Proposição 2.2.4 (1), (3). Provemos agora os items (a) e (b).
(a) Sejam $0 = \overline{m}_0 < \overline{m}_1 < \cdots < \overline{m}_{\overline{c}-\gamma} = \overline{c}$ as primeiras $\overline{c} - \gamma + 1$ não lacunas de $\overline{H}$. Assim,

$$2\overline{H} = \{0 = \overline{m}_0,\ 2\overline{m}_1, \ldots,\ 2\overline{m}_{\overline{c}-\gamma} = 2\overline{c},\ 2\overline{c} + 2,\ 2\overline{c} + 4, \ldots\}.$$

Como $g \geq \overline{c} + \gamma$ temos $2g - 2\gamma + 1 > 2\overline{c}$. Logo, pelo Exemplo 2.2.3 temos que H é um semigrupo e

$$H = \{0 = \overline{m}_0,\, 2\overline{m}_1, \ldots,\, 2\overline{m}_{\overline{c}-\gamma} = 2\overline{c}, \ldots,\, 2g - 2\gamma\} \cup \{n \in \mathbb{N} :\, n \geq 2g - 2\gamma + 1\}\,.$$

Portanto,

$$g(H) := \#(\mathbb{N}_0 \setminus H) = (2\overline{c} - (\overline{c} - \gamma)) + \frac{(2g - 2\gamma) - 2\overline{c}}{2} = g\,.$$

Por outro lado, é claro que $2g - 2\gamma - 1 \notin H$. Logo, $\ell_g = 2g - 2\gamma - 1$.
(b) Como no intervalo $[2, 2\overline{c}]$ temos $\overline{c}$ elementos pares e $\overline{c} - \gamma$ não lacunas pares segue que H tem γ lacunas pares em $[2, 2\overline{c}]$. Por outro lado, pelo item (a) temos que $2\overline{c} + 2n \in H$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Isto mostra que H tem γ lacunas pares.

Na Seção 2.4, provaremos que qualquer semigrupo fracamente de Arf com ℓ_g ímpar e gênero suficientemente grande com respeito a γ é do tipo (2.3).

No caso simétrico os conceitos de Arf e fracamente de Arf são equivalentes. Mais precisamente vale a proposição seguinte.

Proposição 2.2.6. *Seja H um semigrupo simétrico de gênero g. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *H é de Arf;*

(2) *H é fracamente de Arf;*

(3) *H é hiperelíptico (i.e. $m_1 = 2$).*

Demonstração. É suficiente provar (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).
(2) $\Rightarrow$ (3) : Como H é simétrico, temos que $\ell_{g-1} = \ell_g - m_1$. Logo, pela propriedade (2.2) segue que $m_1 = \ell_g - \ell_{g-1} \leq 2$ e assim $m_1 = 2$.
(3) $\Rightarrow$ (1) : Se $2 \in H$ então a condição (1) segue da Proposição 2.2.4 (2) pois

$$H = 2\mathbb{N}_0 \cup \{n \in \mathbb{N} :\, n \geq 2g\}\,.$$

□

A equivalência (1) $\Leftrightarrow$ (3) da proposição anterior, já foi observado por vários autores; veja e.g. [4, Teorema I.4.2], [7, Proposição 2].

Proposição 2.2.7. *Seja H um semigrupo de gênero g com multiplicidade $m_1 = 3$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(1) *H é de Arf;*

(2) *H é fracamente de Arf;*

(3) $H = \langle 3, \lfloor (3g+2)/2 \rfloor, \lfloor (3g+5)/2 \rfloor \rangle$.

Neste caso, $\ell_g = \lfloor (3g-1)/2 \rfloor$.

Demonstração. É suficiente provar (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).
(2) $\Rightarrow$ (3) : Como H é fracamente de Arf e $m_1 = 3$ por indução temos

$$\ell_i = \lfloor (3i-1)/2 \rfloor, \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, g\,.$$

A afirmação (3) é agora imediata.
(3) $\Rightarrow$ (1) : Pela Proposição 2.2.4 (2) e do fato que

$$H = 3\mathbb{N}_0 \cup \{n \in \mathbb{N} : \, n \geq \lfloor (3g+2)/2 \rfloor\}\,,$$

temos que H é de Arf. $\square$

O seguinte resultado é uma forte restrição sobre a aritmética dos semigrupos fracamente de Arf e generaliza a condição (2) $\Rightarrow$ (3) da Proposição 2.2.6.

Teorema 2.2.8. *Seja $K \in \mathbb{N}$. Seja H um semigrupo fracamente de Arf de gênero g e $L(H) = \{\ell_1 < \cdots < \ell_g\}$ o conjunto de lacunas de H. Se $\ell_g = 2g - K$ e $g \geq 2K - 1$, então*

$$\ell_{g-i} = \ell_{g-i+1} - 2 \quad \textit{para} \quad i = 1, \ldots, g - 2K + 2\,.$$

Demonstração. Suponha que exista $i \in \{1, \ldots, g-2K+2\}$ tal que $\ell_{g-i} = \ell_{g-i+1} - 1$. Escolhemos o menor i com tal propriedade. Seja $I := \ell_{g-i+1} - g + i$. No intervalo $[\ell_{g-i+1}, 2g]$ temos i lacunas e assim $g - I + 1$ não lacunas. Pela escolha de i, segue que m_{I-1} é a maior não lacuna menor que ℓ_{g-i}. Agora, para $j = 1, \ldots, I$, consideremos os pares de lacunas: $(\ell_{g-i} - m_{j-1}, \ell_{g-i+1} - m_{j-1})$. Como $I \leq c - g$, pela Equação 2.1 segue $\ell_{g-i+1} - m_j < \ell_{g-i} - m_{j-1}$ e assim temos a sequência de lacunas

$$\ell_{g-i} - m_{I-1} < \ell_{g-i+1} - m_{I-1} < \cdots < \ell_{g-i} < \ell_{g-i+1}\,,$$

donde

$$g \geq 2(I-1) + (g-(g-i)+1) = 2I + i - 1\,.$$

Tendo em vista que $\ell_{g-i+1} = \ell_g - 2(i-1) = 2g-K-2i+2$ e portanto $I = g-K-i+2$, pela desigualdade acima concluímos que

$$i \geq g - 2K + 3\,,$$

uma contradição e isto prova o resultado. □

Exemplo 2.2.9. O seguinte exemplo mostra que a hipótese sobre o gênero no Teorema 2.2.8 é o melhor possível.

Seja $K \geq 2$ um inteiro. Pela Proposição 2.2.7 o semigrupo $H = \langle 3, 3K-2, 3K-1\rangle$ é de Arf e satisfaz as seguintes propriedades:

- O gênero de H é $g = 2K-2$;
- $\ell_g = 2g - K = 3K-4$ e $\ell_{g-1} = 3K-5$.

Neste caso, $\ell_g - \ell_{g-1} = 1$.

Para um semigrupo H fracamente de Arf, definimos $M = M(H)$ como sendo o maior inteiro tal que

$$\ell_M = M\,. \tag{2.4}$$

Então $m_1 = M+1$. Note que se $M < g$, temos $\ell_{M+1} = M+2$.

Lema 2.2.10. *Sejam H um semigrupo fracamente de Arf de gênero g e M como em* (2.4). *Então para todos inteiros $M \leq i \leq g$,*

$$2i - (2g - \ell_g) \leq \ell_i \leq 2i - M\,.$$

Em particular, $m_1 \leq 2g - \ell_g + 1$ e a igualdade ocorre se, e somente se, $m_1 = g+1$.

Demonstração. Sendo H fracamente de Arf temos que

$$\ell_i - M \leq 2(i-M) \quad \text{e} \quad \ell_g - \ell_i \leq 2(g-i)$$

e o resultado segue. □

Proposição 2.2.11. *Seja $K \in \mathbb{N}$. Seja H um semigrupo fracamente de Arf de gênero g e $L(H) = \{\ell_1 < \cdots < \ell_g\}$ o conjunto de lacunas de H. Seja M como em (2.4). Se $\ell_g = 2g - K$, então $M \leq K$. Além disso,*

$$M = K \quad \textit{se, e somente se,} \quad \ell_i = 2i - M \quad \textit{para} \quad M \leq i \leq g\,.$$

Demonstração. Pelo Lema 2.2.10 segue que $M \leq K$. Suponha $M = K$. Se $g = K$ o resultado é claro. Agora, seja $g \geq K + 1$ então $\ell_{K+1} = K + 2$. Provaremos que $\ell_i = 2i - M$ para $M \leq i \leq g$. Como no intervalo $[K + 2, 2g - K]$ temos $g - K$ lacunas, segue que $\ell_i = 2i - K$ para $i = K + 1, \ldots, g$. A recíproca é clara. □

2.3 Caso: Número de Frobenius par

Nesta seção, pesquisamos propriedades do gênero de semigrupos fracamente de Arf cuja última lacuna $\ell_g = 2g - 2k$ é par.

Teorema 2.3.1. *Sejam $k \geq 1$ um inteiro e H um semigrupo fracamente de Arf de gênero g com $\ell_g = 2g - 2k$. Então*

$$g \leq \min\{7k - 4, 6k + 3\}\,.$$

Demonstração. Suponhamos que $g \geq 4k - 1$. Sendo H fracamente de Arf, pelo Teorema 2.2.8 temos que

$$\ell_{g-i} = \ell_g - 2i \quad \text{e} \quad m_{g-(2k-1+i)} = \ell_{g-i} + 1 \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, g - 4k + 2\,.$$

Em particular, se $i = g - 4k + 2$ obtemos $m_{2k-1} = 6k - 3$. Como m_{2k-1} pertence ao intervalo $[\ell_{4k-2}, \ell_g]$ e sendo os ℓ_i's pares para $i = 4k - 2, \ldots, g$,

$$2(6k - 3) \geq \ell_g + 2 = (2g - 2k) + 2\,.$$

Logo, $g \leq 7k-4$. Por outro lado, suponhamos que $g \geq 6k+4$. Como $m_{2k+1} = 6k+1$, pela Proposição 1.2.11 existe $t \in \{0, \ldots, k\}$ tal que H é t-hiperelíptico, em particular $\{4t+2j : j \in \mathbb{N}_0\} \subseteq H$, uma contradição pois $4t \leq 4k < 6k = \ell_{4k}$. Assim, $g \leq 6k+3$ e isto implica o teorema. □

Do Teorema 2.3.1, segue imediatamente o seguinte resultado.

Corolário 2.3.2. *Seja* $k \geq 1$ *um inteiro. Seja*

$$\mathscr{H}_k := \{H : H \text{ é um semigrupo fracamente de Arf de gênero } g \text{ e } \ell_g = 2g - 2k\}\,.$$

Então $\mathscr{H}_k$ *é finito.*

Pergunta 2.3.3. Quantos elementos possui $\mathscr{H}_k$?

Para um semigrupo fracamente de Arf com $\ell_g = 2g - 2k$, pela Proposição 2.2.11 temos

$$2 \leq M \leq 2k\,, \tag{2.5}$$

onde M é como em (2.4). A seguir mostraremos que nos casos extremos, isto é, $M = 2$ ou $M = 2k$, os conceitos de semigrupos de Arf e fracamente de Arf coincidem.

Proposição 2.3.4. *Sejam* $k \geq 1$ *um inteiro e* H *um semigrupo de gênero* g *com* $\ell_g = 2g - 2k$*. Seja* M *como em* (2.4)*. Se* $M = 2$*, então as seguintes afirmações são equivalentes*:

(1) H *é de Arf*;

(2) H *é fracamente de Arf*;

(3) $g = 4k - 2$ *e* $H = \langle 3, 6k - 2, 6k - 1\rangle$ *ou* $g = 4k - 1$ *e* $H = \langle 3, 6k - 1, 6k + 1\rangle$.

Demonstração. Como $M = 2$ segue que $m_1 = 3$. Logo, pela Proposição 2.2.7 temos (1) $\Leftrightarrow$ (2) e (3) $\Rightarrow$ (1). Também, se H é fracamente de Arf segue da Proposição 2.2.7 que $g \in \{4k - 2, 4k - 1\}$. Além disso,

- se $g = 4k - 2$ então $H = \langle 3, 6k - 2, 6k - 1\rangle$;
- se $g = 4k - 1$ então $H = \langle 3, 6k - 1, 6k + 1\rangle$;

isto é, (2) implica (3). □

Seja $\mathcal{X}$ uma curva (projetiva, não singular e geometricamente irredutível) e P um ponto de $\mathcal{X}$. Denotamos por $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ o corpo de funções racionais de $\mathcal{X}$. O *semigrupo de Weierstrass da curva* $\mathcal{X}$ *em* P é o conjunto

$$H(P) := \{m \in \mathbb{N}_0 : \text{ Existe } f \in \mathcal{K}(\mathcal{X}) \text{ com } \operatorname{div}_\infty(f) = mP\},$$

onde $\operatorname{div}_\infty(f)$ é o divisor dos polos de f. Uma aplicação do Teorema de Riemann-Roch mostra, de fato, que $H(P)$ é um semigrupo.

Definição 2.3.5. Seja H um semigrupo. Dizemos que H se realiza como *semigrupo de Weierstrass*, se existe uma curva $\mathcal{X}$ e um ponto P em $\mathcal{X}$ tal que H é igual ao semigrupo de Weierstrass $H(P)$ em P.

Um problema clássico proposta por Hurwitz é decidir quando um semigrupo é realizável como semigrupo de Weierstrass (c.f. [18]).

Observação 2.3.6. Semigrupos de multiplicidade 3 são semigrupos de Weierstrass [25]. Por exemplo, os semigrupos $H_1 = \langle 3, 6k-2, 6k-1 \rangle$ e $H_2 = \langle 3, 6k-1, 6k+1 \rangle$ (Proposição 2.3.4) se realizam no único ponto no infinito das curvas

$$y^3 = \prod_{i=1}^{2k}(x-a_i) \prod_{j=1}^{2k-1}(x-b_j)^2 \quad \text{e}$$
$$y^3 = \prod_{i=1}^{2k-1}(x-a_i) \prod_{j=1}^{2k+1}(x-b_j)^2,$$

respectivamente; onde os a_i's e b_j's são elementos diferentes num corpo $\mathbb{F}$ com $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 3$. O semigrupo $H = \langle 3, 5, 7 \rangle$ provém da quártica de Klein (c.f. e.g. [7], [5]).

A proposição seguinte, estuda o caso $M = 2k$.

Proposição 2.3.7. *Sejam $k \geq 1$ um inteiro e H um semigrupo de gênero g com $\ell_g = 2g - 2k$. Seja M como em* (2.4). *Se $M = 2k$, então as seguintes afirmações são equivalentes*:

(1) *H é de Arf;*

(2) *H é fracamente de Arf;*

(3) *$H = \mathbb{N}_0 \setminus \{1, \ldots, M-1, \ell_M, \ldots, \ell_g\}$, onde $\ell_i = 2i - M$ para $M \leq i \leq g$;*

(4) *H é $(g-k)$-hiperelíptico.*

Neste caso, $g \leq 3k$.

Demonstração. A equivalência (3) $\Leftrightarrow$ (4) é clara. Pela Proposição 2.2.11 segue que (2) implica (3). Provemos agora (3) $\Rightarrow$ (1). Como

$$m_i = M + (2i-1) \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, g - M,$$

segue que $2m_i - m_j \in H$ para todo i, j com $0 \leq j \leq i < g - M + 1$. Logo, H é um semigrupo de Arf.

Agora como $m_1 = 2k+1$ pertence a $[\ell_{2k}, \ell_g]$ e os ℓ_i's são pares para $i = 2k, \ldots, g$ temos

$$2(2k+1) \geq \ell_g + 2 = (2g - 2k) + 2$$

e isto termina a demonstração da proposição. □

Observação 2.3.8. Dado um semigrupo H, denotemos por $w(H)$ o *peso de* H (vide Seção 3.1). Propriedades sobre pesos implicam a realização de semigrupos como semigrupos de Weierstrass [10], [21]. Aplicamos estas propriedades aos semigrupos da Proposição 2.3.7. Sejam $k \geq 1$ e

$$H = \mathbb{N}_0 \setminus \{1, \ldots, M-1, \ell_M, \ldots, \ell_g\},$$

onde $M = 2k$ e $\ell_i = 2i - M$ para $M \leq i \leq g$. Neste caso,

$$M \leq g \leq \frac{3M}{2} \quad \text{e} \quad w(H) = \frac{(g-M)(g-M+1)}{2}.$$

Temos o seguinte:

- Se $g \in \left[M, M + \left\lfloor \sqrt{M} \right\rfloor\right]$ então $0 \leq w(H) \leq \frac{g}{2}$. Logo, H é um semigrupo de Weierstrass (ver [10]).
- Se $M \geq 6$ (i.e. $k \geq 3$) e $g \in \left[M + \left\lfloor \sqrt{M} \right\rfloor + 1, M + \left\lfloor \frac{1+\sqrt{8M-7}}{2} \right\rfloor\right]$ então $\frac{g}{2} < w(H) \leq g-1$. Como $2m_1 > \ell_g$ segue que H é um semigrupo de Weierstrass (ver [21]).

Em particular, se $M \in \{2, 4, 6, 8\}$ então os semigrupos da Proposição 2.3.7 são de Weierstrass para todo $g \in \left[M, \frac{3M}{2}\right]$.

Observamos acima que se $M \geq 10$ então os semigrupos da Proposição 2.3.7 são de Weierstrass para todo $g \in \left[M, M + \left\lfloor \frac{1+\sqrt{8M-7}}{2} \right\rfloor\right]$.

Pergunta 2.3.9. Sejam H e M como na Proposição 2.3.7. Se

$$M \geq 10 \quad \text{e} \quad g \in \left[M + \left\lfloor \frac{1+\sqrt{8M-7}}{2} \right\rfloor + 1, \frac{3M}{2}\right],$$

então H é um semigrupo de Weierstrass?.

Seja $k > 1$. No caso $M = 2$ ou $M = 2k$ vimos acima que

$$g \leq 4k - 1 < \min\{7k - 4, 6k + 3\}\,.$$

Pergunta 2.3.10. Se $2 < M < 2k$ então $g \leq 4k - 1$?

Observaremos que no Exemplo 2.3.14 (caso k=2) a resposta a esta pergunta é afirmativa.

Observação 2.3.11. Sejam $k \geq 2$ um inteiro e H um semigrupo de gênero g com $\ell_g = 2g - 2k$. Seja M como em (2.4). Se $M = 3$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) H é de Arf;

(2) H é fracamente de Arf;

(3) $g = 3k - 1$ e $H = \langle 4, 4k - 1, 4k + 1, 4k + 2\rangle$;

(4) H é k-hiperelíptico.

É suficiente provar (2) $\Rightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) e (3) $\Rightarrow$ (1). Como $M = 3$ temos $m_1 = 4$. Seja $L' := [1, 2g - 2k] \setminus \{4i : i = 1, \ldots, \frac{2g-2k-2}{4}\}$. Se $\ell \in L'$ é par então $\ell \in L(H)$. De fato, seja $\ell = 4i + 2$ para algum $i \in \mathbb{N}_0$. Se $\ell \in H$ teríamos $\{4i + 2j : j \in \mathbb{N}_0\} \subseteq H$ e assim $\ell_g = 2g - 2k \in H$, uma contradição.
(2) $\Rightarrow$ (3) : Provemos que $L(H) = L'$. É claro que $L(H) \subseteq L'$. Vejamos que $L' \subseteq L(H)$. Seja $\ell \in L'$. Se ℓ é par já vimos que $\ell \in L(H)$. Suponhamos ℓ ímpar.

- Se $\ell \equiv 1 \pmod 4$ então $\ell - 1 \in H$. Como H é fracamente de Arf segue que $\ell \in L(H)$.

- Se $\ell \equiv 3 \pmod 4$ então $\ell + 1 \in H$. Como H é fracamente de Arf segue que $\ell \in L(H)$.

Isto mostra que $L(H) = L'$. Em particular,

$$g = 2g - 2k - \frac{2g - 2k - 2}{4}\,.$$

Logo, $g = 3k - 1$ e $H = \langle 4, 4k - 1, 4k + 1, 4k + 2\rangle$.
(3) $\Rightarrow$ (4) : É claro.

$(4) \Rightarrow (3)$: Sendo $L' \cap 2\mathbb{N} = L(H) \cap 2\mathbb{N}$ segue

$$k = g - k - \frac{2g - 2k - 2}{4}\,.$$

Logo, $g = 3k - 1$ e $L(H) = [1, 4k - 2] \setminus \{4i : i = 1, \ldots, k - 1\}$.
$(3) \Rightarrow (1)$: Pela Proposição 2.2.4 (2) e do fato que

$$H = 4\mathbb{N}_0 \cup \{n \in \mathbb{N} : n \geq 4k - 1\}\,,$$

temos que H é de Arf.

Agora completaremos o Corolário 2.3.2 para um caso particular; calcularemos o número de elementos de $\mathscr{H}_k$ tal que $M = M(H) = 2k$.

Corolário 2.3.12. *Seja $k \geq 1$ um inteiro. Então existem exatamente $k + 1$ semigrupos fracamente de Arf de gênero g com $\ell_g = 2g - 2k$ e $M = 2k$.*

Demonstração. Seja H_g um semigrupo de gênero g com $\ell_g = 2g - 2k$ e $M = 2k$. Pela Proposição 2.3.7 segue que $2k \leq g \leq 3k$ e

$$H_g = \mathbb{N}_0 \setminus \{1, \ldots, 2k - 1, \ell_{2k}, \ldots, \ell_g\}\,,$$

onde $\ell_i = 2i - 2k$ para $i = 2k, \ldots, g$. Isto termina a prova do corolário. □

Exemplo 2.3.13. Seja H um semigrupo de gênero g com $\ell_g = 2g - 2$. Pela Equação (2.5), Proposição 2.3.4 e Proposição 2.3.7, as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) H é de Arf;

(b) H é fracamente de Arf;

(c) $H = \langle 3, 4, 5\rangle$ ou $H = \langle 3, 5, 7\rangle$;

(d) H é 1-hiperelíptico ou H é 2-hiperelíptico.

A equivalência (a) $\Leftrightarrow$ (c) acima, já foi observado por Barucci et. al. [4, Teorema I.4.5]. Veja também Bras-Amorós [5, Proposição 3.12]. Neste caso, observamos que a cota na Pergunta 2.3.10 é a melhor possível. Além disto, observamos que a prova deste exemplo difere drasticamente da dos autores mencionados.

Exemplo 2.3.14. Seja H um semigrupo de gênero g com $\ell_g = 2g - 4$. Se H é fracamente de Arf, de (2.5) segue que $2 \leq M \leq 4$.

- Se $M = 2$ pela Proposição 2.3.4 temos $H = \langle 3, 10, 11 \rangle$ ou $H = \langle 3, 11, 13 \rangle$.
- Se $M = 3$ a Observação 2.3.11 implica que $g = 5$ e $H = \langle 4, 7, 9, 10 \rangle$. Além disso, H é um semigrupo de Arf.
- Se $M = 4$ pela Proposição 2.3.7 temos que $g \in \{4, 5, 6\}$; além disso, é claro que $H = \langle 5, 6, 7, 8, 9 \rangle$ ou $H = \langle 5, 7, 8, 9, 11 \rangle$ ou $H = \langle 5, 7, 9, 11, 13 \rangle$.

Podemos resumir estes cálculos como segue:

(a) H é de Arf;

(b) H é fracamente de Arf;

(c) H é um dos seguintes semigrupos:

$$\langle 5, 6, 7, 8, 9 \rangle,\ \langle 5, 7, 8, 9, 11 \rangle,\ \langle 4, 7, 9, 10 \rangle,\ \langle 5, 7, 9, 11, 13 \rangle,\ \langle 3, 10, 11 \rangle,\ \langle 3, 11, 13 \rangle.$$

Note que $g \leq 7$ e logo a resposta à Pergunta 2.3.10 é afirmativa neste caso.

2.4 Caso: Número de Frobenius ímpar

Seja $H = \{0 = m_0 < m_1 < \cdots\}$ um semigrupo fracamente de Arf de gênero $g > 0$. Nesta seção, a maior lacuna ℓ_g de H será considerada ímpar, digamos $\ell_g = 2g - (2\gamma + 1)$. O principal resultado é:

Teorema 2.4.1. *Sejam $\gamma \geq 0$ um inteiro e H um semigrupo fracamente de Arf de gênero $g \geq 6\gamma + 4$. Suponha $\ell_g = 2g - (2\gamma + 1)$. Então existe um único semigrupo $\overline{H}$ de gênero γ tal que*

$$H = 2\overline{H} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é ímpar}, n \geq 2g - 2\gamma + 1\}.$$

Demonstração. Sendo H fracamente de Arf, pelo Teorema 2.2.8 temos que

$$m_{g-(2\gamma+i)} = 2g - 2\gamma - 2i \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, g - 4\gamma;$$

em particular, se $i = g - 4\gamma - 1$, $m_{2\gamma+1} = 6\gamma + 2$. Agora a prova segue da Proposição 1.2.10, Proposição 1.2.5 e do Exemplo 2.2.3, tendo em vista que $u_\gamma = 2g - 2\gamma + 1$. $\square$

Corolário 2.4.2. *Sejam $\gamma \geq 0$ um inteiro e H um semigrupo de gênero $g \geq 6\gamma + 4$. Então as seguintes afirmações são equivalentes*:

(1) *H é de Arf com $\ell_g = 2g - (2\gamma + 1)$.*

(2) *Existe um único semigrupo $\overline{H}$ de Arf e de gênero γ tal que*

$$H = 2\overline{H} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é ímpar}, n \geq 2g - 2\gamma + 1\} .$$

Demonstração. Segue do Teorema 2.4.1 e Exemplo 2.2.3. □

Corolário 2.4.3. *Sejam $\gamma \geq 0$ um inteiro e $g \geq 6\gamma + 4$. Sejam*

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_{g,\gamma} &:= \textit{Conjunto de semigrupos fracamente de Arf de gênero } g \textit{ com} \\ &\quad\ \ell_g = 2g - (2\gamma + 1) \quad e \\ \mathscr{H}(\gamma) &:= \textit{Conjunto de semigrupos de gênero } \gamma. \end{aligned}$$

Então

$$\#\mathscr{H}_{g,\gamma} = \#\mathscr{H}(\gamma) .$$

Demonstração. Dado $H \in \mathscr{H}_{g,\gamma}$, pelo Teorema 2.4.1 existe uma única representação

$$H = 2\overline{H} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é ímpar}, n \geq 2g - 2\gamma + 1\} .$$

Temos assim definido uma aplicação

$$\begin{array}{cccc} \Psi : & \mathscr{H}_{g,\gamma} & \longrightarrow & \mathscr{H}(\gamma) . \\ & H & \longmapsto & \overline{H} \end{array}$$

É claro que Ψ é injetiva e pelo Exemplo 2.2.5 a aplicação Ψ é sobrejetiva. □

Observação 2.4.4. A cota inferior sobre o gênero no Teorema 2.4.1 é necessária como mostra o seguinte exemplo. Seja $\gamma \geq 1$ um inteiro. Seja $H = \langle 3, 6\gamma+2, 6\gamma+4 \rangle$. Então H é um semigrupo de Arf 2γ-hiperelíptico de gênero $g = 4\gamma + 1$ e $\ell_g = 2g - (2\gamma + 1)$ (cf. Proposição 2.2.7).

Pergunta 2.4.5. É a cota $g \geq 6\gamma + 4$ no Teorema 2.4.1, a melhor possível?.

Seja $\gamma \in \mathbb{N}$. Para um semigrupo fracamente de Arf com $\ell_g = 2g - (2\gamma + 1)$, pela Proposição 2.2.11 temos

$$2 \leq M \leq 2\gamma + 1 , \tag{2.6}$$

onde M é como em (2.4). A seguir mostraremos resultados análogos aos da Proposição 2.3.4 e Proposição 2.3.7.

Proposição 2.4.6. *Sejam $\gamma \geq 1$ um inteiro e H um semigrupo de gênero g com $\ell_g = 2g - (2\gamma + 1)$. Seja M como em (2.4). Se $M = 2$, então as seguintes afirmações são equivalentes*:

(1) *H é de Arf*;

(2) *H é fracamente de Arf*;

(3) *$g = 4\gamma$ e $H = \langle 3, 6\gamma + 1, 6\gamma + 2\rangle$ ou $g = 4\gamma + 1$ e $H = \langle 3, 6\gamma + 2, 6\gamma + 4\rangle$.*

Demonstração. Como $M = 2$ segue que $m_1 = 3$. Logo, pela Proposição 2.2.7 temos (1) $\Leftrightarrow$ (2) e (3) $\Rightarrow$ (1). Também, se H é fracamente de Arf segue da Proposição 2.2.7 que $g \in \{4\gamma, 4\gamma + 1\}$. Além disso,

- se $g = 4\gamma$ então $H = \langle 3, 6\gamma + 1, 6\gamma + 2\rangle$;
- se $g = 4\gamma + 1$ então $H = \langle 3, 6\gamma + 2, 6\gamma + 4\rangle$;

isto é, (2) implica (3). $\square$

Observação 2.4.7. Os semigrupos $H_1 = \langle 3, 6\gamma+1, 6\gamma+2\rangle$ e $H_2 = \langle 3, 6\gamma+2, 6\gamma+4\rangle$ (Proposição 2.4.6) se realizam no único ponto no infinito das curvas

$$y^3 = \prod_{i=1}^{2\gamma+1}(x - a_i)\prod_{j=1}^{2\gamma}(x - b_j)^2 \quad \text{e}$$
$$y^3 = \prod_{i=1}^{2\gamma}(x - a_i)\prod_{j=1}^{2\gamma+2}(x - b_j)^2,$$

respectivamente; onde os a_i's e b_j's são elementos diferentes num corpo $\mathbb{F}$ com char $\mathbb{F} \neq 3$.

Proposição 2.4.8. *Sejam $\gamma \geq 0$ um inteiro e H um semigrupo de gênero g com $\ell_g = 2g - (2\gamma + 1)$. Seja M como em (2.4). Se $M = 2\gamma + 1$, então as seguintes afirmações são equivalentes*:

(1) *H é de Arf*;

(2) *H é fracamente de Arf*;

(3) *$H = \mathbb{N}_0 \setminus \{1, \ldots, M - 1, \ell_M, \ldots, \ell_g\}$, onde $\ell_i = 2i - M$ para $M \leq i \leq g$*;

(4) H *é* γ*-hiperelíptico.*

Demonstração. Pela Proposição 2.2.11 segue que (2) implica (3). Provemos (3) $\Rightarrow$ (4). Como existem γ lacunas pares no intervalos $[1, \ell_M]$ e as lacunas $\ell_i = 2i - M$ para $M + 1 \leq i \leq g$ são ímpares segue que H é γ-hiperelíptico. Pela propriedade (2.2) e definição de M segue (4) $\Rightarrow$ (3). Vejamos agora (3) $\Rightarrow$ (1). Como

$$m_i = M + (2i - 1) \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, g - M,$$

segue que $2m_i - m_j \in H$ para todo i, j com $0 \leq j \leq i < g - M + 1$. Logo, H é um semigrupo de Arf. $\square$

Observação 2.4.9. Vejamos agora se os semigrupos da Proposição 2.4.8 são de Weierstrass. Sejam $\gamma \geq 1$ e

$$H = \mathbb{N}_0 \setminus \{1, \ldots, M - 1, \ell_M, \ldots, \ell_g\},$$

onde $M = 2\gamma + 1$ e $\ell_i = 2i - M$ para $M \leq i \leq g$. Neste caso,

$$g \geq M \quad \text{e} \quad w(H) = \frac{(g - M)(g - M + 1)}{2}.$$

Se $g \in \left[M, M + \left\lfloor \sqrt{M} \right\rfloor\right]$ então $0 \leq w(H) \leq \frac{g}{2}$. Logo, H é um semigrupo de Weierstrass (ver [10]). Se $g \geq M + \left\lfloor \sqrt{M} \right\rfloor + 1$, então H é um semigrupo de Weierstrass?.

Os seguintes exemplos seguem do Corolário 2.4.2.

Exemplo 2.4.10. (Caso: $\gamma = 0$). Seja H um semigrupo simétrico de gênero $g \geq 4$. Como existe um único semigrupo de gênero 0 (o qual é de Arf), as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) H é de Arf;

(b) H é fracamente de Arf;

(c) $2 \in H$.

Exemplo 2.4.11. (Caso: $\gamma = 1$). Seja H um semigrupo de gênero $g \geq 10$ com $\ell_g = 2g - 3$. Existe um único semigrupo de gênero 1, $\overline{H} = \{0, 2, 3, \ldots\}$ (o qual é de Arf); assim as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) H é de Arf;

(b) H é fracamente de Arf;

(c) H é 1-hiperelíptico.

Exemplo 2.4.12. (Caso: $\gamma = 2$). Seja H um semigrupo de gênero $g \geq 16$ com $\ell_g = 2g - 5$. Se H é 2-hiperelíptico então

$$H = 2\overline{H} \cup \{2g-3, 2g-1\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é ímpar}, n \geq 2g+1\},$$

onde $\overline{H}$ é um semigrupo de gênero 2. Como existem exatamente dois semigrupos de gênero 2, $H_1 = \{0, 3, 4, 5, \ldots\}$ e $H_2 = \{0, 2, 4, 5, \ldots\}$ (além disso eles são de Arf), as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) H é de Arf;

(b) H é fracamente de Arf;

(c) H é 2-hiperelíptico.

Estes semigrupos são de Weierstrass (ver [14], [28]).

Observação 2.4.13. As hipóteses sobre g no Exemplo 2.4.10, Exemplo 2.4.11 e Exemplo 2.4.12 podem ser substituídas, respectivamente, por $g \geq 1$ (ver Proposição 2.2.6), $g \geq 6$, $g \geq 10$ (os dois últimos resultados são obtidos por cálculos diretos). Nestes casos, o Corolário 2.4.2 pode-se provar com uma hipótese mais fraca.

Ao contrário dos exemplos anteriores (exemplos 2.4.10, 2.4.11 e 2.4.12), para $\gamma \geq 3$ existem semigrupos fracamente de Arf que não são de Arf cuja última lacuna $\ell_g = 2g - (2\gamma + 1)$.

Exemplo 2.4.14. Sejam $\gamma \geq 3$ e $g \geq 2\gamma + 3$ inteiros. Seja

$$\overline{H} := \mathbb{N}_0 \setminus \{1, 2, \ldots, \gamma - 1, \gamma + 2\}$$

e

$$H = 2\overline{H} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ímpar}, n \geq 2g - 2\gamma + 1\}.$$

Temos que $\overline{H}$ é um semigrupo de gênero γ que não é fracamente de Arf (pois $(\gamma + 2) - (\gamma - 1) = 3$) e H é um semigrupo de gênero g com $\ell_g = 2g - (2\gamma + 1)$ fracamente de Arf mas não é de Arf (veja Exemplo 2.2.5). Note que $\overline{H}$ pode ser substituído por qualquer semigrupo de gênero γ que não satisfaça a propriedade de Arf.

2.5 Sobre a ordem de semigrupos

Seja $\mathcal{X}$ uma curva (projetiva, não singular e geometricamente irredutível) de gênero g sobre $\mathbb{F}_q$, o corpo finito com q elementos. Seja $\{Q, P_1, \ldots, P_n\}$ o conjunto de pontos $\mathbb{F}_q$-racionais de $\mathcal{X}$. Seja $H(Q) = \{0 = m_0 < m_1 < \cdots\}$ o semigrupo de Weierstrass em Q. Se $G = m_iQ$ e $D = P_1 + \cdots + P_n$ obtemos o código $C_i = E_i^{\perp}$, dual de

$$E_i := \{((f(P_1), \ldots, f(P_n)) : f \in \mathcal{L}(m_iQ)\} \subseteq \mathbb{F}_q^n$$

onde $\mathcal{L}(m_iQ)$ denota o espaço de Riemann-Roch associado ao divisor m_iQ. Temos duas cotas inferiores para a distância mínima exata $d(C_i)$ de C_i a saber: a de *Goppa*, $d_G(C_i) = m_i - (2g-2)$ e a *cota de ordem* (ou a cota de Feng-Rao) $d_{ORD}(C_i)$ [12], [17]. Consideraremos os seguintes conjuntos

$$A(\ell+1) = A[m_\ell] := \{(s,t) \in \mathbb{N}_0^2 : m_s + m_t = m_\ell\}, \quad \ell \in \mathbb{N}_0 \tag{2.7}$$

e seus cardinais

$$\nu_\ell := |A(\ell+1)|, \quad \ell \in \mathbb{N}_0\,. \tag{2.8}$$

Seja $(s,t) \in A(\ell+1)$. Pela Equação (2.7), temos $t \in [0,\ell]$. Portanto, a Equação (2.8) implica

$$\nu_\ell = |\{m_\ell - m_0, \ldots, m_\ell - m_\ell\} \cap H|, \quad \ell \in \mathbb{N}_0\,.$$

Assim,

$$d_{ORD}(C_i) = \min\{\nu_j : j \geq i\}$$

e temos

$$d(C_i) \geq d_{ORD}(C_i) \geq d_G(C_i)\,,$$

onde $d(C_i)$ é a distância mínima exata de C_i e $d_G(C_i)$ é a cota Goppa sobre $d(C_i)$. Neste contexto, a definição seguinte é de utilidade.

Definição 2.5.1. Seja H um semigrupo. O *número de ordem* de H é definido como

$$\mathrm{o}(H) := \min\{\ell \in \mathbb{N} : \nu_j \leq \nu_{j+1} \text{ para todo } j \geq \ell\}\,.$$

Nesta seção calculamos o número de ordem para os elementos das seguintes famílias:

$$\mathscr{H}_{g,\gamma} := \text{Conjunto de semigrupos do Corolário 2.4.3 com } g \geq 4\gamma + 2, \tag{2.9}$$

$$\mathscr{F}_1 := \text{Conjunto de semigrupos do Exemplo 2.2.1}, \tag{2.10}$$

$$\mathscr{F}_2 := \text{Conjunto de semigrupos do Exemplo 2.4.14}. \tag{2.11}$$

Usamos os seguintes resultados.

Teorema 2.5.2. ([27, Teorema 2.6]) *Seja H um semigrupo de gênero g e condutor c. O menor inteiro r tal que a sequência $(\nu_\ell)_{\ell \geq r}$ é estritamente crescente é $r = 2c-g-1$.*

Demonstração. Seja $\ell \geq r$, onde $r = 2c - g - 1$. Se $j \in \{0, \ldots, c-g-1\}$, então

$$m_\ell - m_j \geq (2c-1) + (2-c) = c+1$$

e assim $m_\ell - m_j \in H$. Seja agora $j \in \{c-g, \ldots, \ell\}$. Temos

$$m_\ell - m_{c-g} \geq (2c-1) - c = c-1$$

e assim

$$\{m_\ell - m_{c-g}, \ldots, m_\ell - m_\ell\} \supseteq [0, c-1] \supseteq L(H)\,.$$

Portanto, $\nu_\ell = (c-g) + ((\ell - c + g + 1) - g) = \ell - g + 1$. Em particular, $\nu_r = 2(c-g)$. Como $m_{c-g-1} \leq c-2$ segue que $c + m_{c-g-1} \leq m_{2c-g-2} < m_{2c-g-1} = 2c-1$. Logo, pelo [27, Corolário 2.5] tem-se $\nu_{r-1} = \nu_r$. Isto termina a prova do teorema. $\square$

Definição 2.5.3. Dizemos que um semigrupo H é *ordinário* se existe um inteiro não negativo c tal que

$$H := \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N}_0 :\ n \geq c\}\,.$$

Observemos que um semigrupo é ordinário se, e somente se, $c \neq g+1$.

Lembremos agora a propriedade *acute* e *fracamente acute* de semigrupos (cf. [5], [27]). Seja H um semigrupo não ordinário. Então, podemos expressar H, de forma única, como segue:

$$H = \{0\} \cup [c_m, d_m] \cup \cdots \cup [c_1, d_1] \cup [c_0, \infty)\,,$$

onde c_i, d_i são inteiros não negativos tais que $d_{i+1} + 2 \leq c_i \leq d_i$ para $i = 1, \ldots m$ e $d_1 + 2 \leq c$, e $c_{m+1} = d_{m+1} = 0$, $c_0 = c$. Consideremos as seguintes condições:

(I) $c_0 - d_1 \leq c_1 - d_2$;

(II) $c_0 - d_1 \leq d_1 - d_2$;

(III) $2d_1 - c_0 + 1 \notin H$.

Definição 2.5.4. ([5], [27]) Seja H um semigrupo.

(a) Dizemos que H é *acute* se H é ordinário ou satisfaz (I).

(b) Dizemos que H é *fracamente acute* se H é ordinário ou se este satisfaz (II) ou (III).

Observemos que (I) implica (II). Assim, todo semigrupo acute é fracamente acute.

Exemplo 2.5.5. ([5, Proposição 5.9], [27, Exemplo 3.6]) Se H é um semigrupo de Arf então H satisfaz (I), (II) e (III). Isto é, H é acute e é fracamente acute. De fato, se H é ordinário não há nada a provar. Se H não é ordinário e é de Arf, temos que $c_1 = d_1$ e $c_2 = d_2$. Como, $d_1 + c_1 - d_2 \in H$ e segue que $c_1 - d_2 \geq c - d_1$. Assim, H satisfaz (I) e (II). Por outro lado, $c_1 = c - n$ para algum inteiro $n \geq 2$. Como $d_2 - c_1 \leq c_1 - c$ temos $d_2 \leq 2c_1 - c = c - 2n$ e assim $2d_1 - c + 1 = c - 2n + 1 \notin H$.

Para um semigrupo H qualquer, consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \iota : & H & \longrightarrow & \mathbb{N}\,. \\ & m_i & \longmapsto & i+1 \end{array}$$

Em [27], mostra-se que se H é não ordinário então

$$o(H) \leq \min\{\iota(2d_1 + 1),\, \iota(c_0 + c_1 - 1)\}\,. \tag{2.12}$$

Exemplo 2.5.6. ([27, Exemplo 3.4]) Se H é um semigrupo ordinário então $o(H) = 1$.

Exemplo 2.5.7. ([5], [27, Exemplo 3.6]) Se H é um semigrupo de Arf não ordinário então $o(H) = \iota(2d_1 + 1) = 2c - g$.

Agora consideremos a família $\mathscr{F}_1$ definida em (2.10). Mostraremos que qualquer membro de $\mathscr{F}_1$ não é fracamente acute (no sentido das propriedades (II) e (III)).

Lema 2.5.8. *Qualquer $H \in \mathscr{F}_1$ não é fracamente acute.*

Demonstração. Dado $H \in \mathscr{F}_1$, temos

$$H = \{0\} \cup \{g-2\} \cup \{g\} \cup [g+3, \infty)$$

e assim $c_0 = g+3$, $c_1 = d_1 = g$, $c_2 = d_2 = g-2$ e portanto $c_0 - d_1 > d_1 - d_2$ e $2d_1 - c_0 + 1 = g - 2 \in H$; isto é, nem a Propriedade (II) nem a Propriedade (III) são satisfeitas. $\square$

A continuação calcularemos $\mathrm{o}(H)$ para $H \in \mathscr{F}_1$.

Proposição 2.5.9. *Seja $H \in \mathscr{F}_1$ de gênero g. Então*

$$\mathrm{o}(H) = g - 1\,.$$

Demonstração. Como $r = 2c_0 - g - 1 = g + 5$, pelo Teorema 2.5.2, temos que a sequência $(\nu_\ell)_{\ell \geq g+5}$ é estritamente crescente; além disso vimos que

$$\nu_{g+4} = \nu_{g+5} = 2(g+3-g) = 6\,.$$

Agora, consideraremos simplesmente os números ν_ℓ para $\ell \leq g+3$.

Temos

$$m_0 = 0, \quad m_1 = g-2, \quad m_2 = g \quad \text{e} \quad m_\ell = g + \ell \quad \text{para} \quad \ell \geq 3\,.$$

Como $c_0 + m_{c_0-g-1} = 2g+3 = m_{g+3} < 2c_0 - 1$, pelo [27, Corolário 2.5] tem-se

$$\nu_{g+3} = 2(c_0 - g) = 6\,.$$

Seja agora $k \in \{1,2,3\}$ e $i \in [k+2, g+k-2]$ então

$$m_{g+k-1} - m_i = g + k - i - 1 \in [1, g-3] \subseteq L(H)$$

e assim

$$\nu_{g+k-1} = |\{m_{g+k-1} - m_1, \ldots, m_{g+k-1} - m_{k+1}\} \cap H| + 2\,.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\nu_g &= |\{g+2, g\} \cap H| + 2 = 3\,,\\
\nu_{g+1} &= |\{g+3, g+1, g-2\} \cap H| + 2 = 4\,,\\
\nu_{g+2} &= |\{g+4, g+2, g-1, g-2\} \cap H| + 2 = 4
\end{aligned}$$

Agora, seja $s \in \{0,1\}$ e $j \in [3, g-s-2]$ então

$$m_{g-s-1} - m_j = g - s - j - 1 \in [1, g-4-s] \subseteq L(H)$$

e daí

$$\nu_{g-s-1} = |\{m_{g-s-1} - m_1, m_{g-s-1} - m_2\} \cap H| + 2\,.$$

Então

$$\nu_{g-1} = |\{g+1, g-1\} \cap H| + 2 = 2\,,$$
$$\nu_{g-2} = |\{g, g-2\} \cap H| + 2 = 4\,.$$

Isto mostra que $\mathrm{o}(H) = g - 1$. $\square$

Observação 2.5.10. No proposição acima temos um exemplo de uma família de semigrupos que não são fracamente acute. Neste caso, temos que $2d_1 + 1 = m_{g+1}$ e $c_0 + c_1 - 1 = m_{g+2}$, para qualquer $H \in \mathscr{F}_1$ e vemos que a cota superior de (2.12) não é atingida.

Teorema 2.5.11. *Se H um semigrupo não ordinário fracamente acute, então*

$$\mathrm{o}(H) = \min\{\iota(2d_1+1),\, \iota(c + c_1 - 1)\}\,.$$

Demonstração. Veja [27, Teorema 3.11]. $\square$

Proposição 2.5.12. *Sejam $\gamma \geq 0$ um inteiro e H um semigrupo fracamente de Arf de gênero $g \geq 4\gamma + 2$. Suponha $\ell_g = 2g - (2\gamma+1)$. Então H é um semigrupo acute. Além disso,*

$$\mathrm{o}(H) = 3g - 4\gamma - 2 = 2\ell_g - g\,.$$

Demonstração. Sendo H fracamente de Arf e $g \geq 4\gamma + 2$, pelo Teorema 2.2.8 temos que

$$m_{g-(2\gamma+i)} = 2g - 2\gamma - 2i \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, g - 4\gamma\,;$$

em particular,

$$c_1 = d_1 = 2g - 2\gamma - 2 \quad \text{e} \quad c_2 = d_2 = 2g - 2\gamma - 4\,.$$

Logo, $c - d_1 = 2 = c_1 - d_2$, e portanto H é acute. Por outro lado,

$$2d_1 + 1 = 4g - 4\gamma - 3 = c + c_1 - 1\,.$$

Como $m_{g-2\gamma+i} = 2g-2\gamma+i$ para todo $i \geq 0$ temos $m_{3g-4\gamma-3} = 4g-4\gamma-3$; e assim, pelo Teorema 2.5.11 segue o resultado. □

Observemos que o semigrupo H da proposição anterior também satisfaz a propriedade (III) da Definição 2.5.4.

A continuação consideraremos a família $\mathscr{F}_2$ definida em (2.11). Qualquer membro de $\mathscr{F}_2$ tem gênero $g \geq 2\gamma+3$, onde $\gamma \geq 3$ é um inteiro fixo. Mostraremos que se $g = 2\gamma+3$, o semigrupo correspondente é fracamente acute mas não é acute (no sentido da propriedade (I)). Se $g \geq 2\gamma+4$, os semigrupos são acute (além disso, eles satisfazem as condições (I) e (III)).

Lema 2.5.13. *Seja $H \in \mathscr{F}_2$ de gênero g.*

(1) *Se $g = 2\gamma+3$, então H satisfaz a propriedade* (III) *mas não* (II).

(2) *Se $g \geq 2\gamma+4$, então H satisfaz as propriedades* (I) (*e portanto* (II)) *e* (III).

Demonstração.
(1) Temos que

$$H = \{0\} \cup \{2\gamma\} \cup \{2\gamma+2\} \cup [2\gamma+6, \infty) \tag{2.13}$$

e assim $c_0 = 2\gamma+6$, $c_1 = d_1 = 2\gamma+2$, $c_2 = d_2 = 2\gamma$ e daí $2d_1 - c_0 + 1 = 2\gamma - 1 \notin H$ e $c_0 - d_1 > d_1 - d_2$.
(2) Temos que

$$H = \{0\} \cup \{2\gamma\} \cup \{2\gamma+2\} \cup \{2\gamma+6\} \cup \cdots \cup \{2g-2\gamma-2\} \cup [2g-2\gamma, \infty) \tag{2.14}$$

e assim $c_0 = 2g-2\gamma$, $c_1 = d_1 = 2g-2\gamma-2$ e $c_1 - d_2 \geq 2$ e daí $c_0 - d_1 > d_1 - d_2$. Também, $2d_1 - c_0 + 1 = 2g - 2\gamma - 3 \notin H$. Isto mostra o item (2). □

Proposição 2.5.14. *Seja $H \in \mathcal{F}_2$ de gênero g.*

(1) *Se $g = 2\gamma+3$, então* $\mathrm{o}(H) = g = 2\gamma+3$.

(2) *Se $g \geq 2\gamma+4$, então* $\mathrm{o}(H) = 3g - 4\gamma - 2$.

Demonstração.
(1) Pelo Lema 2.5.13 (1) temos que H é fracamente acute. Logo, pelo Teorema 2.5.11, tem-se

$$\mathrm{o}(H) = \min\{\iota(2d_1+1), \iota(c_0+c_1-1)\} = \iota(4\gamma+5)\,.$$

Por outro lado, de (2.13) temos que

$$m_\ell = 2\gamma + \ell + 3 \quad \text{para} \quad \ell \geq 3\,.$$

Assim, $\mathrm{o}(H) = \iota(m_{2\gamma+2}) = 2\gamma + 3$.
(2) Pelo Lema 2.5.13 (2) temos que H é acute. Logo, pelo Teorema 2.5.11, tem-se

$$\mathrm{o}(H) = \min\{\iota(2d_1 + 1),\, \iota(c_0 + c_1 - 1)\} = \iota(4g - 4\gamma - 3)\,.$$

Por outro lado, de (2.14) temos que

$$m_\ell = g + \ell \quad \text{para} \quad \ell \geq g - 2\gamma\,.$$

Assim, $\mathrm{o}(H) = \iota(m_{3g-4\gamma-3}) = 3g - 4\gamma - 2$. □

CAPÍTULO 3

Pesos de Semigrupos

O objetivo deste capítulo é o cálculo exato de pesos de semigrupos em função do número de suas lacunas pares (PROBLEMA 3.1.8). O protótipo dos resultados obtidos é a generalização do fato bem conhecido que um semigrupo H hiperelíptico (i.e. $2 \in H$), de gênero g, é caracterizado pela condição do seu peso ser igual a $\binom{g}{2}$.

Seja γ um inteiro não negativo. Seja $H = \{0 < m_1 < m_2 < \cdots\}$ um semigrupo γ-hiperelíptico de gênero g. Como no Capítulo 1, seja

$$u_\gamma < \cdots < u_1$$

a sequência decrescente de suas não lacunas ímpares no intervalo $[3, 2g-1]$. Assim mesmo, seja

$$0 = \widetilde{m}_0 < \widetilde{m}_1 < \widetilde{m}_2 < \cdots$$

a sequência crescente das não lacunas pares de H.

3.1 Peso de um semigrupo

Definição 3.1.1. Seja H um semigrupo de gênero g. Definimos o *peso* $w(H)$ de H como sendo

$$w(H) := \frac{3g^2 + g}{2} - \sum_{i=1}^{g} m_j \,. \tag{3.1}$$

Sejam $\ell_1 < \cdots < \ell_g$ as g lacunas de H. Como as lacunas e as primeiras g não lacunas positivas de H cobrem o intervalo $[1, 2g]$ (veja Proposição 1.2.3), temos

$$\sum_{i=1}^{g}(\ell_i + m_i) = \sum_{i=1}^{2g} i\,.$$

Portanto, o peso de H pode ser calculado também como:

$$w(H) = \sum_{i=1}^{g}(\ell_i - i)\,;$$

em particular, $0 \leq w(H) \leq \binom{g}{2}$ e $w(H) = \binom{g}{2}$ se, e somente se, H é hiperelíptico. Claramente; $w(H) = 0$ se, e somente se, $H = \{0\} \cup \{g + i : i \in \mathbb{N}\}$.

Os seguintes dois lemas são muito úteis para calcular pesos de semigrupos em função do número de suas lacunas pares. Denotaremos por $\binom{n}{m} = 0$ no caso $n < m$.

Lema 3.1.2. (cf. [37, Corolário 6]) *Se H é um semigrupo γ-hiperelíptico de gênero $g \geq 2\gamma$, então*

$$w(H) = \binom{g-2\gamma}{2} + (2g + 2\gamma + 1)\gamma - \sum_{i=1}^{\gamma}(u_i + \widetilde{m}_i)\,. \tag{3.2}$$

Em particular, $w(H) \equiv \binom{g-2\gamma}{2} \pmod 2$.

Demonstração. Para $g \geq 2\gamma + 1$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{g} m_j &= \sum_{i=1}^{\gamma}(u_i + \widetilde{m}_i) + \sum_{k=\gamma+1}^{g-\gamma} \widetilde{m}_k \\ &= \sum_{i=1}^{\gamma}(u_i + \widetilde{m}_i) + \sum_{k=1}^{g-2\gamma} \widetilde{m}_{\gamma+k}\end{aligned}$$

e como

$$\sum_{j=1}^{g} m_j = \frac{3g^2 + g}{2} - w(H) \quad \text{e} \quad \widetilde{m}_{\gamma+k} = 4\gamma + 2k$$

concluímos que

$$w(H) = \frac{(g-2\gamma)(g-2\gamma-1)}{2} + (2g + 2\gamma + 1)\gamma - \sum_{i=1}^{\gamma}(u_i + \widetilde{m}_i)\,. \tag{3.3}$$

Como a Equação (3.3) também é válida para $g = 2\gamma$, segue a Equação 3.2.

Finalmente, é fácil verificar que $(2g + 2\gamma + 1)\gamma - \sum_{i=1}^{\gamma}(u_i + \widetilde{m}_i)$ é um número par. $\square$

Observação 3.1.3. A cota sobre o gênero g no lema anterior é a melhor possível como mostra o seguinte exemplo. Seja $\gamma \geq 2$ um inteiro e consideremos

$$H = \mathbb{N}_0 \setminus \{1, 2, \ldots, 2\gamma - 2, 2\gamma\} = \{0, 2\gamma - 1, 2\gamma + 1, 2\gamma + 2, \ldots\}.$$

Temos que H é um semigrupo γ-hiperelíptico de gênero $g = 2\gamma - 1$ com peso $w(H) = 1$. Por outro lado, temos

$$\widetilde{m}_i = 2\gamma + 2i, \quad u_i = 4\gamma - 2i - 1, \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, \gamma.$$

Então por (3.2) teríamos $w(H) = 0$, uma contradição.

Corolário 3.1.4. *Sejam $\gamma \geq 0$ um inteiro e H um semigrupo γ-hiperelíptico de gênero $g \geq 2\gamma$ recobrimento duplo de um semigrupo $\overline{H}$. Então*

$$w(H) = \binom{g - 2\gamma}{2} + (2g - \gamma)\gamma - \sum_{i=1}^{\gamma} u_i + 2w(\overline{H}). \tag{3.4}$$

Demonstração. Como $\left\{\frac{\widetilde{m}_1}{2}, \ldots, \frac{\widetilde{m}_\gamma}{2}\right\}$ são as γ primeiras não lacunas positivas de $\overline{H}$, o resultado segue da Equação (3.1) e do Lema 3.1.2. $\square$

Um resultado imediato do corolário anterior é a seguinte proposição.

Proposição 3.1.5. *Sejam H_1 e H_2 dois semigrupos γ-hiperelíptico de gênero $g \geq 2\gamma$ que são recobrimento duplo de um semigrupo $\overline{H}$. Então*

$$w(H_1) = w(H_2) \quad \textit{se, e somente se,} \quad \sum_{i=1}^{\gamma} u_i(H_1) = \sum_{i=1}^{\gamma} u_i(H_2).$$

Para um semigrupo γ-hiperelíptico H de gênero g, utilizaremos as seguintes notações:

- $S(H) := \sum_{i=1}^{\gamma} (u_i + \widetilde{m}_i)$.
- $S_I(H) := \sum_{i=1}^{\gamma} u_i$.
- $S_P(H) := \sum_{i=1}^{\gamma} \widetilde{m}_i$.

Proposição 3.1.6. ([36, Afirmação 2.11]) *Seja $\gamma > 0$ um inteiro. Seja H um semigrupo γ-hiperelíptico de gênero g. Então*

(1) *para $i = 1, \ldots, \gamma$ temos $u_i + \widetilde{m}_i \geq 2g + 1$;*

(2) *$u_1 + m_1 = 2g + 1$ se, e somente se, $m_1 = 4$ e $u_1 = 2g - 3$. Neste caso, $u_i + \widetilde{m}_i = 2g + 1$ para $i = 1, \ldots, \gamma$ e $g \geq 3\gamma$.*

Demonstração.
(1) Suponhamos que $u_i + \widetilde{m}_i \leq 2g - 1$ para algum $i \in \{1, \ldots, \gamma\}$. Como $\gamma > 0$, temos que $i \neq 1$. Então no intervalo $[u_i, 2g - 1]$ teríamos uma sequência de $(i + 1)$ não lacunas ímpares, a saber

$$u_i < u_i + \widetilde{m}_1 < \cdots < u_i + \widetilde{m}_i \,.$$

Como no intervalo $[u_i, 2g-1]$ temos i não lacunas ímpares, obtemos uma contradição.
(2) Suponhamos que $u_1 + m_1 = 2g + 1$. Pelo Lema 1.2.8 (5), temos que $u_1 \geq 2g - 3$. Se $u_1 = 2g - 1$ teríamos que $m_1 = 2$, uma contradição, pois $\gamma > 0$. Logo, $u_1 = 2g - 3$ e portanto $m_1 = 4$.

Suponhamos agora que $m_1 = 4$ e $u_1 = 2g - 3$. Então, H é simétrico e assim $(2g - 1) - \ell \in H$ para todo $\ell \in L(H)$. Como $\widetilde{m}_1 = m_1 = 4$, pelo Lema 1.2.8 (1), temos que $\widetilde{m}_i - 2 = 4i - 2$ são as lacunas pares de H para $i = 1, \ldots, \gamma$. Portanto, $u_i = (2g - 1) - (\widetilde{m}_i - 2)$ para $i = 1, \ldots, \gamma$. Por outro lado, suponhamos que $g < 3\gamma$. Como $u_\gamma = 2g - 4\gamma + 1$ teríamos que $2u_\gamma = 4g - 8\gamma + 2 \leq 4\gamma$, uma contradição. □

Corolário 3.1.7. ([36, Lema 2.12]) *Seja $\gamma > 0$ um inteiro. Seja H um semigrupo γ-hiperelíptico de gênero $g \geq 2\gamma$. Então*

(1) $\binom{g-2\gamma}{2} \leq w(H) \leq \binom{g-2\gamma}{2} + 2\gamma^2$.

(2) *$w(H) = \binom{g-2\gamma}{2} + 2\gamma^2$ se, e somente se, $u_1 = 2g - 3$ e $\widetilde{m}_1 = 4$. Neste caso, $g \geq 3\gamma$ e*

$$H = \langle 4, 4\gamma + 2, 2g - 4\gamma + 1 \rangle \,.$$

(3) *$w(H) = \binom{g-2\gamma}{2}$ se, e somente se, $u_i = 2g - 2i + 1$ e $\widetilde{m}_i = 2\gamma + 2i$ para $i = 1, \ldots, \gamma$.*

Demonstração.
(1) Pela Proposição 3.1.6 (1) temos que

$$S(H) \geq (2g+1)\gamma\,.$$

Por outro lado, pelo Lema 1.2.8, temos que $\widetilde{m}_i \leq 2\gamma + 2i$ e $u_i \leq 2g - 2i + 1$ para $i = 1, \ldots, \gamma$. Assim,

$$S(H) \leq (2g + 2\gamma + 1)\gamma\,.$$

Logo,

$$(2g+1)\gamma \leq S(H) \leq (2g + 2\gamma + 1)\gamma\,.$$

Agora, o resultado segue do Lema 3.1.2.
(2) Se $w(H) = \binom{g-2\gamma}{2} + 2\gamma^2$, pelo Lema 3.1.2, temos que $S(H) = (2g+1)\gamma$. Logo, pela Proposição 3.1.6 (2), segue que $u_1 = 2g - 3$ e $\widetilde{m}_1 = 4$. A recíproca é clara.
(3) Se $w(H) = \binom{g-2\gamma}{2}$, pelo Lema 3.1.2, temos que $S(H) = (2g + 2\gamma + 1)\gamma$. Logo, pelo Lema 1.2.8, segue que $\widetilde{m}_i = 2\gamma + 2i$ e $u_i = 2g - 2i + 1$ para $i = 1, \ldots, \gamma$. A recíproca é clara. $\square$

No corolário anterior, se $\gamma = 0$ teríamos que $w(H) = \binom{g}{2}$, que já tínhamos observado anteriormente.

PROBLEMA 3.1.8. Seja $\gamma \in \mathbb{N}$. Para que valores pares $x \in [0, 2\gamma^2]$, existe um semigrupo γ-hiperelíptico H, de gênero $g \geq 2\gamma$ tal que $w(H) = \binom{g-2\gamma}{2} + x$?.

Exemplo 3.1.9. Pelo Lema 3.1.2, temos que os valores w dos pesos satisfazem $w \equiv \binom{g-2\gamma}{2} \pmod 2$. Em particular:

(1) Se $\gamma = 1$, $g \geq 2$

$$w \in \left\{ \binom{g-2}{2}, \binom{g-2}{2} + 2 \right\};$$

estes casos se realizam como semigrupos de Weierstrass (ver [14]).

(2) Se $\gamma = 2$, $g \geq 4$

$$w \in \left\{ \binom{g-4}{2}, \binom{g-4}{2} + 2, \binom{g-4}{2} + 4, \binom{g-4}{2} + 6, \binom{g-4}{2} + 8 \right\};$$

de fato, não existem semigrupos 2-hiperelípticos com peso $\binom{g-4}{2} + 6$ (veja Proposição 3.1.10); os outros casos se realizam como semigrupos de Weierstrass (ver [14], [28]).

Assim, o Problema 3.1.8 é respondido, no caso $\gamma = 1$ ou $\gamma = 2$. Para $\gamma = 3$ e $g \geq 18$ temos uma resposta exaustiva (veja Exemplo 3.4.3).

Proposição 3.1.10. *Seja H um semigrupo γ-hiperelíptico de gênero $g \geq 2\gamma$. Então*

(1) *Se $\gamma \geq 2$ e $w(H) < \binom{g-2\gamma}{2} + 2\gamma^2$ então $w(H) \leq \binom{g-2\gamma}{2} + 2\gamma^2 - 4$.*

(2) *Se $\widetilde{m}_1 \geq 6$ então $w(H) \leq \binom{g-2\gamma}{2} + 2\gamma^2 - (2\gamma - 4)$.*

(O caso $\widetilde{m}_1 = 4$ será considerado na Seção 3.3).

Demonstração.
(1) Suponhamos que $w(H) = \binom{g-2\gamma}{2} + 2(\gamma^2 - 1)$ então, pelo Lema 3.1.2, teríamos que

$$S(H) = (2g+1)\gamma + 2\,.$$

Como $\gamma \geq 2$, pelo Corolário 3.1.4 (2), temos que $u_1 + \widetilde{m}_1 \geq 2g+3$. Se $u_1 + \widetilde{m}_1 \geq 2g+5$ teríamos que $S(H) \geq (2g+1)\gamma + 4$, uma contradição. Consideremos então o caso que $u_1 + \widetilde{m}_1 = 2g + 3$.
Caso 1: Existe $j \in \{2, \ldots, \gamma\}$ tal que $u_j + \widetilde{m}_j \geq 2g + 3$. Neste caso temos que $S(H) \geq (2g+1)\gamma + 4$, uma contradição.
Caso 2: $u_i + \widetilde{m}_i = 2g + 1$ para todo $i = 2, \ldots, \gamma$.

- Se $u_1 = 2g - 1$ temos que $\widetilde{m}_1 = 4$. Como $u_2 + \widetilde{m}_2 = 2g + 1$ devemos ter que $u_2 \in \{2g-7,\, 2g-5\}$. Logo, se $u_2 = 2g-5$ temos que $\widetilde{m}_2 = 6$ e portanto $\gamma = 1$, uma contradição. Por outro lado, se $u_2 = 2g-7$ temos que $\widetilde{m}_1 + u_2 = 2g-3 \in H$, uma contradição.

- Se $u_1 = 2g - 3$ temos que $\widetilde{m}_1 = 6$. Então, $u_2 = 2g - 7$. Assim $\widetilde{m}_1 + u_2 = 2g - 1 \in H$, uma contradição.

(2) Como $\widetilde{m}_1 \geq 6$, pelo Lema 1.2.8 items (2) e (5), segue que

$$S(H) \geq (2g+3)\gamma - 4\,.$$

O resultado segue agora do Lema 3.1.2. □

De acordo ao item (1) da proposição anterior o item (2) é útil para $\gamma \geq 4$.

A seguir calcularemos o peso de um semigrupo γ-hiperelíptico H, o qual é recobrimento duplo de um semigrupo $\overline{H}$, em função do peso de $\overline{H}$, nos casos extremos em que $u_\gamma = 2g - 4\gamma + 1$ ou $u_\gamma = 2g - 2\gamma + 1$.

Proposição 3.1.11. *Sejam $\gamma \geq 1$ e $g \geq 2\gamma + 1$ inteiros. Seja H um semigrupo γ-hiperelíptico recobrimento duplo de um semigrupo $\overline{H}$ tal que $u_\gamma = 2g - 4\gamma + 1$. Então*

$$w(H) = \binom{g-2\gamma}{2} + 2\gamma + 4w(\overline{H})\,.$$

Demonstração. Como H é γ-hiperelíptico temos que $\widetilde{m}_\gamma = 4\gamma$. Logo,

$$u_\gamma < u_\gamma + \widetilde{m}_1 < \cdots < u_\gamma + \widetilde{m}_{\gamma-1} < 2g+1\,.$$

Assim,

$$u_i = u_\gamma + \widetilde{m}_{\gamma-i} \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, \gamma\,.$$

Portanto, pelo Corolário 3.1.4

$$w(H) = \binom{g-2\gamma}{2} + 3\gamma^2 - \gamma - \sum_{i=1}^{\gamma-1} \widetilde{m}_i + 2w(\overline{H})\,. \tag{3.5}$$

Tendo em vista que H é um recobrimento duplo de $\overline{H}$ tem-se

$$2w(\overline{H}) = 3\gamma^2 - 3\gamma - \sum_{i=1}^{\gamma-1} \widetilde{m}_i\,. \tag{3.6}$$

O resultado agora segue de (3.5) e (3.6). □

Proposição 3.1.12. *Sejam $\gamma \geq 1$ e $g \geq 2\gamma$ inteiros. Seja H um semigrupo γ-hiperelíptico recobrimento duplo de um semigrupo $\overline{H}$ tal que $u_\gamma = 2g - 2\gamma + 1$. Então*

$$w(H) = \binom{g-2\gamma}{2} + 2w(\overline{H})\,.$$

Demonstração. Como H é γ-hiperelíptico e $u_\gamma = 2g - 2\gamma + 1$ temos

$$u_i = 2g - 2i + 1 \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, \gamma\,.$$

Como $S_I(H) = (2g - \gamma)\gamma$, o resultado segue do Corolário 3.1.4 □

3.2 Recobrimento duplo de um semigrupo ordinário

Nesta seção, consideraremos semigrupos H que sejam um recobrimento duplo do semigrupo ordinário de gênero $\gamma > 1$, $\overline{H} = \{0\} \cup \{\gamma + i : i \in \mathbb{N}\}$, em particular teremos que $\widetilde{m}_i = 2\gamma + 2i,\ i = 1, \dots, \gamma$, são as primeiras γ não lacunas pares de H. Assim, se $u_\gamma < \cdots < u_1$ são as γ lacunas ímpares de H em $[1, 2g]$, do Corolário 3.1.4 tem-se

$$w(H) = \binom{g - 2\gamma}{2} + (2g - \gamma)\gamma - \sum_{i=1}^{\gamma} u_i \,. \tag{3.7}$$

Proposição 3.2.1. *Sejam $\gamma \in \mathbb{N}$ e $g \geq 2\gamma$ um inteiro. Seja H um semigrupo γ-hiperelíptico tal que $u_\gamma = 2g - 2\gamma - 1$. Então existe $k \in \{0, \dots, \gamma - 1\}$ tal que*

$$u_i = 2g - 2i + 1 \quad \textit{para} \quad i = 1, \dots, k$$

e

$$u_{k+j} = 2g - 2k - 2j - 1 \quad \textit{para} \quad j = 1, \dots, \gamma - k \,.$$

Em particular, se H é um recobrimento duplo do semigrupo ordinário de gênero γ,

$$w(H) = \binom{g - 2\gamma}{2} + 2(\gamma - k) \,.$$

Demonstração. Temos que $u_1 \in \{2g-3, 2g-1\}$. Se $u_1 = 2g-3$ então, $u_i = 2g-2i-1$ para $i = 1, \dots, \gamma$, pois existem γ ímpares em $[2g - 2\gamma - 1, 2g - 3]$. Neste caso temos $k = 0$. Suponhamos agora que $u_1 = 2g - 1$. Seja k o maior inteiro tal que $u_i = 2g - 2i + 1$ para $i = 1, \dots, k$. Sendo $u_\gamma = 2g - 2\gamma - 1$, segue que $k \leq \gamma - 1$. Logo, $u_{k+1} \leq 2g - 2k - 3$. Como existem $\gamma - k$ ímpares em $[2g - 2\gamma - 1, 2g - 2k - 3]$ temos $u_{k+1} = 2g - 2k - 3$ e assim

$$u_{k+j} = 2g - 2k - 2j - 1, \quad j = 1, \dots, \gamma - k \,.$$

É claro que

$$S(H) = (2g - \gamma)\gamma - 2(\gamma - k) \,.$$

Portanto,

$$w(H) = \binom{g - 2\gamma}{2} + 2(\gamma - k) \,.$$

□

Como consequência da Proposição 3.2.1 segue o seguinte resultado.

Corolário 3.2.2. *Seja $\gamma \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \{1, \dots, \gamma\}$, existe um único semigrupo γ-hiperelíptico H de gênero $g \geq 2\gamma$ com $u_\gamma = 2g - 2\gamma - 1$ recobrimento duplo do semigrupo $\overline{H} = \{0\} \cup \{\gamma + i : i \in \mathbb{N}\}$. Além disso, tem-se*

$$w(H) = \binom{g - 2\gamma}{2} + 2k \,.$$

Proposição 3.2.3. *Seja $\gamma \geq 2$ e $g \geq 2\gamma$ inteiros. Seja H um semigrupo γ-hiperelíptico recobrimento duplo do semigrupo ordinário de gênero γ, tal que $u_\gamma = 2g - 2\gamma - 3$. Então existe $k \in \{1, \ldots, \gamma - 1\}$ tal que*

$$u_i = 2g - 2i + 1 \quad \textit{para} \quad i = 1, \ldots, k,$$

$$u_{k+j} = 2g - 2k - 2j - 1, \quad \textit{para} \quad j = 1, \ldots, \gamma - s - k$$

e

$$u_{\gamma+1-l} = 2g - 2\gamma + 2l - 5 \quad \textit{para} \quad l = 1, \ldots, s$$

para algum $s \in \{1, \ldots, \gamma - k\}$.

Em particular,

$$w(H) = \binom{g - 2\gamma}{2} + 2(\gamma + s - k)\,.$$

Demonstração. Como $u_\gamma = 2g - 2\gamma - 3$ e $\widetilde{m}_1 = 2\gamma + 2$ segue que $u_1 = 2g - 1$. Seja k o maior inteiro tal que $u_i = 2g - 2i + 1$ para $i = 1, \ldots, k$. Sendo $u_\gamma = 2g - 2\gamma - 3$, segue que $k \leq \gamma - 1$. Seja s o maior inteiro tal que $u_{\gamma+1-l} = 2g - 2\gamma + 2l - 5$ para todo $l = 1, \ldots, s$. É claro que $s + k \leq \gamma$ e assim $s \leq \gamma - k$.

Se $s = \gamma - k$ não há mais nada a provar. Suponhamos agora que $s < \gamma - k$. Temos que $u_k = 2g - 2k + 1$ e $u_{\gamma+1-s} = 2g - 2\gamma + 2s - 5$. Pela escolha de k e s tem-se

$$2g - 2\gamma + 2s - 1 \leq u_{\gamma-s} \leq u_{k+1} \leq 2g - 2k - 3\,.$$

Como no intervalo $[2g - 2\gamma + 2s - 1, 2g - 2k - 3]$ temos $\gamma - k - s$ números ímpares segue que esses números são não lacunas. Assim, $u_{k+j} = 2g - 2k - 2j - 1$ para $j = 1, \ldots, \gamma - s - k$; e isto prova o resultado. $\square$

Corolário 3.2.4. *Seja $\gamma \geq 2$ um inteiro. Existem exatamente $\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}$ semigrupos γ-hiperelípticos de gênero $g \geq 2\gamma$ com $u_\gamma = 2g - 2\gamma - 3$ e que são um recobrimento duplo do semigrupo $\overline{H} = \{0\} \cup \{\gamma + i : i \in \mathbb{N}\}$.*

Demonstração. Seja $k \in \{1 \ldots, \gamma - 1\}$. Para cada $s \in \{1, \ldots, \gamma - k\}$, consideremos o semigrupo $H_{k,s}$ que seja um recobrimento duplo do semigrupo $\overline{H} = \{0\} \cup \{\gamma + i : i \in \mathbb{N}\}$ cujos elementos $u_i := u_i(H_{k,s})$'s são dados como segue

$$u_i = 2g - 2i + 1 \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, k,$$

$$u_{k+j} = 2g - 2k - 2j - 1, \quad \text{para} \quad j = 1, \ldots, \gamma - s - k$$

e

$$u_{\gamma+1-l} = 2g - 2\gamma + 2l - 5 \quad \text{para} \quad l = 1, \ldots, s\,.$$

O resultado agora segue da Proposição 1.2.5 e Proposição 3.2.3. $\square$

Como um resultado imediato do corolário anterior temos o seguinte:

Corolário 3.2.5. *Seja $\gamma \geq 2$ e $g \geq 2\gamma$ inteiros. Para cada $k \in \{1, \ldots, 2\gamma - 3\}$, existe um semigrupo γ-hiperelíptico H com $u_\gamma = 2g - 2\gamma - 3$, recobrimento duplo do semigrupo ordinário de gênero γ, tal que*

$$w(H) = \binom{g - 2\gamma}{2} + 2k + 2\,.$$

3.3 Multiplicidade quatro

Nesta seção, estudaremos os semigrupos γ-hiperelípticos de gênero g com multiplicidade $m_1 = 4$ e classificaremos todos eles no caso em que o gênero $g \geq 3\gamma$.

Lema 3.3.1. ([22, Lema 3.6]) *Seja γ um inteiro. Se H é um semigrupo γ-hiperelíptico de gênero g com multiplicidade $m_1 = 4$, então $g \geq 2\gamma$.*

Demonstração. Como $\widetilde{m}_1 = m_1 = 4$ pelo Lema 1.2.8 (1) temos que $\widetilde{m}_i = 4i$. Logo, se $g < 2\gamma$ teríamos que $2g$, $2g + 2 \in [4, 4\gamma]$, uma contradição. $\square$

Teorema 3.3.2. *Seja $\gamma \in \mathbb{N}$. Se H é um semigrupo γ-hiperelíptico de gênero g com multiplicidade $m_1 = 4$, então*

$$w(H) \in \left\{ \binom{g - 2\gamma}{2} + \gamma^2 - \gamma + k^2 - k \,:\, 1 \leq k \leq \gamma + 1 \right\}.$$

Demonstração. Como $\widetilde{m}_1 = 4$ temos que $S_P(H) = 2\gamma^2 + 2\gamma$. Portanto,

$$S(H) \leq (2g + \gamma + 2)\gamma\,.$$

Logo,

$$w(H) \geq \binom{g - 2\gamma}{2} + \gamma^2 - \gamma\,.$$

Seja agora $k \in \{2, \ldots, \gamma\}$ e suponha pelo absurdo que exista um $n \in \{1, \ldots, k - 1\}$ tal que

$$w(H) = \binom{g - 2\gamma}{2} + \gamma^2 - \gamma + k^2 - k + 2n\,.$$

Logo, pela Proposição 3.1.6 (2), segue que $u_1 = 2g - 1$. Seja j o maior índice tal que $u_i = 2g - 2i + 1$ para $i = 1, \ldots, j$. Então, $j < \gamma$ e $u_{j+l} = 2g - 2j - 4l + 1$ para $l = 1, \ldots, \gamma - j$. Portanto,

$$S_I(H) = 2g\gamma - 2\gamma^2 - \gamma + 2\gamma j - j^2 + j\,. \tag{3.8}$$

Sendo $S_P(H) = 2\gamma^2 + 2\gamma$, da hipótese auxiliar segue que

$$S_I(H) = 2g\gamma - \gamma^2 - k^2 + k - 2n\,. \tag{3.9}$$

Assim, de (3.8) e (3.9) temos

$$j^2 - (2g\gamma + 1)j - (\gamma^2 + \gamma - k^2 + k - 2n) = 0\,. \tag{3.10}$$

Como j é um inteiro, o discriminante da Equação (3.10) teria que ser nulo, ou seja, $4k^2 - 4k + 8n - 1 \equiv 0 \pmod 4$, uma contradição. $\square$

Teorema 3.3.3. *Seja $\gamma \in \mathbb{N}$ e $g \geq 3\gamma$ um inteiro. Para todo $k \in \{1, \ldots, \gamma + 1\}$, existe um semigrupo H γ-hiperelíptico de gênero g com multiplicidade $m_1 = 4$ tal que*

$$w(H) = \binom{g - 2\gamma}{2} + \gamma^2 - \gamma + k^2 - k\,.$$

Demonstração. Dado $k \in \{1, \ldots, \gamma + 1\}$, consideremos

$$H_k := \langle 4, 4\gamma + 2, 2g - 2\gamma - 2k + 3, 2g - 2\gamma + 2k + 1\rangle\,. \tag{3.11}$$

Temos que a multiplicidade de H_k é $m_1 = 4$. Logo, $4i \in H_k$ para $i = 1\ldots, \gamma$. Como $g \geq 3\gamma$, temos que $2(2g - 2\gamma - 2k + 3) \geq 4\gamma + 2$. Sendo $2g - 2\gamma - 2k + 3$ o menor ímpar em H_k, segue que H_k possui exatamente γ não lacunas pares em $[2, 4\gamma]$. Também, temos que $4\gamma + 2 \in H_k$. Logo, pela Proposição 1.2.7, segue que H_k é um semigrupo γ-hiperelíptico. Vejamos agora que o gênero de H_k é g. Com efeito, temos que $e_2(H_k) = \gamma$. Também, pondo

$$x := \frac{2g - 2\gamma - 2k + 3}{4} \quad \text{e} \quad y := \frac{2g - 2\gamma + 2k + 1}{4}\,,$$

tem-se

$$e_1(H_k),\, e_3(H_k) \in \{\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor\} \quad \text{e} \quad \lfloor x + y \rfloor = g - \gamma + 1 = x + y\,.$$

Se $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ então $x = \lfloor x \rfloor$ ou $y = \lfloor y \rfloor$ e portanto $y - x = k - 1/2$ é um inteiro, uma contradição. Portanto, $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$. Logo,

$$e_1(H_k) + e_3(H_k) = g - \gamma\,.$$

Assim, pela Equação (1.1), segue que o gênero de H_k é g. Por simples cálculos podemos ver que

$$u_i = 2g-2i+1, \quad 1 \le i \le \gamma-k+1 \quad \text{e} \quad u_{\gamma-k+1+l} = 2g-2\gamma+2k-4l-1, \quad 1 \le l \le k-1.$$

Por outro lado, como $\widetilde{m}_1(H_k) = 4$ temos que $S_P(H_k) = 2\gamma^2 + 2\gamma$. Logo,

$$w(H_k) = \binom{g-2\gamma}{2} + \gamma^2 - \gamma + k^2 - k$$

e isto termina a prova do teorema. □

No seguinte teorema, denotaremos $u_0 := u_\gamma$.

Teorema 3.3.4. *Seja $\gamma \in \mathbb{N}$ e $g \ge 3\gamma$ um inteiro. Seja H um semigrupo γ-hiperelíptico de gênero g com multiplicidade $m_1 = 4$ e $k \in \{1, \ldots, \gamma+1\}$ tal que*

$$w(H) = \binom{g-2\gamma}{2} + \gamma^2 - \gamma + k^2 - k$$

então

$$u_\gamma = 2g - 2\gamma - 2k + 3 \quad e \quad u_{\gamma-k+1} = 2g - 2\gamma + 2k - 1\,.$$

Demonstração. Pelo Corolário 3.1.7 (2), temos que $w(H) = \binom{g-2\gamma}{2} + 2\gamma^2$ se, e somente se, $u_\gamma = 2g - 4\gamma + 1 = u_0$. Isto prova o caso $k = \gamma + 1$.

Se $k \in \{1, \ldots, \gamma\}$, pelo Corolário 3.1.7 (2), segue que $u_1 = 2g - 1$. Seja j o maior índice tal que $u_i = 2g - 2i + 1$ para $i = 1, \ldots, j$. Se $j < \gamma$, tem-se que $u_{j+l} = 2g - 2j - 4l + 1$ para $l = 1, \ldots, \gamma - j$. Pondo $l = 0$, se $j = \gamma$, temos que os elementos ímpares u_i's de H são

$$u_i = 2g - 2i + 1, \quad 1 \le i \le j \quad \text{e} \quad u_{j+l} = 2g - 2j - 4l + 1, \quad 1 \le l \le \gamma - j\,.$$

Portanto, $S_I(H) = 2g\gamma - 2\gamma^2 - \gamma + 2\gamma j - j^2 + j$. Mas pela hipótese tem-se $S_u(H) = 2g\gamma - \gamma^2 - k^2 + k$, desde que $S_P(H) = 2\gamma^2 + 2\gamma$. Assim, temos

$$j^2 - (2g\gamma + 1)j - (\gamma^2 + \gamma - k^2 + k) = 0\,.$$

Portanto, $j = \gamma - k + 1$. □

Como uma consequência dos teoremas 3.3.2, 3.3.3 e 3.3.4, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 3.3.5. *Existem exatamente $\gamma+1$ semigrupos γ-hiperelípticos de gênero $g \geq 3\gamma$ com multiplicidade $m_1 = 4$.*

Demonstração. Seja $\mathscr{H}$ o conjunto de todos os semigrupos γ-hiperelípticos de gênero $g \geq 3\gamma$ com multiplicidade $m_1 = 4$. Para cada $k \in \{1, \ldots, \gamma+1\}$, seja H_k como na Equação (3.11). Assim, temos definido uma aplicação

$$\begin{array}{rccl} \Psi \ : & \{1, \ldots, \gamma+1\} & \longrightarrow & \mathscr{H}. \\ & k & \longmapsto & H_k \end{array}$$

Como a aplicação $k \mapsto k^2 - k$ é injetiva, pelo Teorema 3.3.3, a aplicação Ψ é injetiva. Por outro lado, dado $H \in \mathscr{H}$, pelo Teorema 3.3.2 existe $k \in \{1, \ldots, \gamma+1\}$ tal que

$$w(H) = \binom{g-2\gamma}{2} + \gamma^2 - \gamma + k^2 - k\,.$$

Logo, pelo Teorema 3.3.4, temos que $2g - 2\gamma - 2k + 3$, $2g - 2\gamma + 2k + 1 \in H$. Assim, $H_k \subseteq H$ e portanto Ψ é sobrejetiva. $\square$

A Tabela 3.1 mostra como obter os elementos ímpares u_i's, dos $\gamma+1$ semigrupos γ-hiperelípticos de gênero $g \geq 3\gamma$ com multiplicidade $m_1 = 4$. Além disso, colocamos os valores dos pesos respectivos. Em particular, para $\gamma = 1, 2, 3, 4, 5$ as tabelas 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6 mostram explicitamente esses valores.

Tabela 3.1: Elementos ímpares e pesos de H_k

k	$u_\gamma(H_k)$	$u_{\gamma-1}(H_k)$	$\cdots$	$u_2(H_k)$	$u_1(H_k)$	$w(H_k)$
$\gamma+1$	$2g-4\gamma+1$	$2g-4\gamma+5$	$\cdots$	$2g-7$	$2g-3$	$\binom{g-2\gamma}{2}+2\gamma^2$
γ	$2g-4\gamma+3$	$2g-4\gamma+7$	$\cdots$	$2g-5$	$2g-1$	$\binom{g-2\gamma}{2}+2\gamma^2-2\gamma$
$\gamma-1$	$2g-4\gamma+5$	$2g-4\gamma+9$	$\cdots$	$2g-3$	$2g-1$	$\binom{g-2\gamma}{2}+2\gamma^2-4\gamma+2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
3	$2g-2\gamma-3$	$2g-2\gamma+1$	$\cdots$	$2g-3$	$2g-1$	$\binom{g-2\gamma}{2}+\gamma^2-\gamma+6$
2	$2g-2\gamma-1$	$2g-2\gamma+3$	$\cdots$	$2g-3$	$2g-1$	$\binom{g-2\gamma}{2}+\gamma^2-\gamma+2$
1	$2g-2\gamma+1$	$2g-2\gamma+3$	$\cdots$	$2g-3$	$2g-1$	$\binom{g-2\gamma}{2}+\gamma^2-\gamma$

Tabela 3.2: Semigrupos H_k's 1-hiperelípticos

k	u_1	$w(H_k) - \binom{g-2}{2}$
2	$2g-3$	2
1	$2g-1$	0

Tabela 3.3: Semigrupos H_k's 2-hiperelípticos

k	u_2	u_1	$w(H_k) - \binom{g-4}{2}$
3	$2g-7$	$2g-3$	8
2	$2g-5$	$2g-1$	4
1	$2g-3$	$2g-1$	2

Tabela 3.4: Semigrupos H_k's 3-hiperelípticos

k	u_3	u_2	u_1	$w(H_k) - \binom{g-6}{2}$
4	$2g-11$	$2g-7$	$2g-3$	18
3	$2g-9$	$2g-5$	$2g-1$	12
2	$2g-7$	$2g-3$	$2g-1$	8
1	$2g-5$	$2g-3$	$2g-1$	6

Tabela 3.5: Semigrupos H_k's 4-hiperelípticos

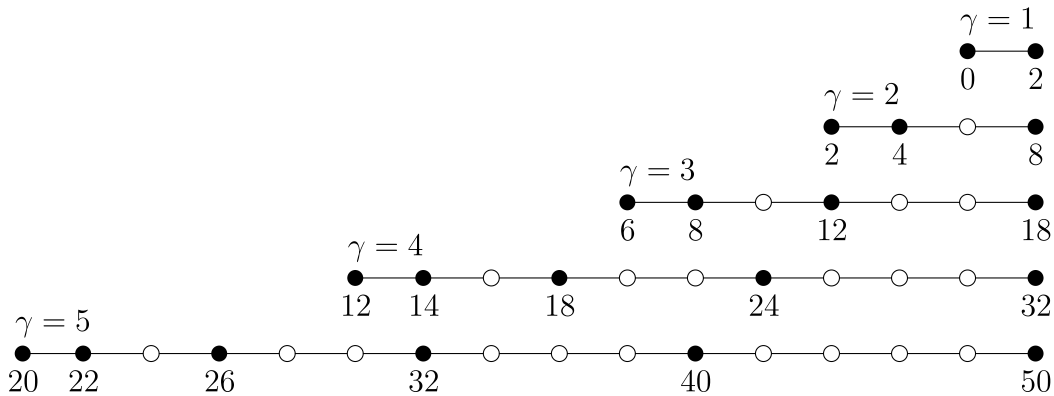
k	u_4	u_3	u_2	u_1	$w(H_k) - \binom{g-8}{2}$
5	$2g-15$	$2g-11$	$2g-7$	$2g-3$	32
4	$2g-13$	$2g-9$	$2g-5$	$2g-1$	24
3	$2g-11$	$2g-7$	$2g-3$	$2g-1$	18
2	$2g-9$	$2g-5$	$2g-3$	$2g-1$	14
1	$2g-7$	$2g-5$	$2g-3$	$2g-1$	12

Tabela 3.6: Semigrupos H_k's 5-hiperelípticos

k	u_5	u_4	u_3	u_2	u_1	$w(H_k) - \binom{g-10}{2}$
6	$2g-19$	$2g-15$	$2g-11$	$2g-7$	$2g-3$	50
5	$2g-17$	$2g-13$	$2g-9$	$2g-5$	$2g-1$	40
4	$2g-15$	$2g-11$	$2g-7$	$2g-3$	$2g-1$	32
3	$2g-13$	$2g-9$	$2g-5$	$2g-3$	$2g-1$	26
2	$2g-11$	$2g-7$	$2g-5$	$2g-3$	$2g-1$	22
1	$2g-9$	$2g-7$	$2g-5$	$2g-3$	$2g-1$	20

A Tabela 3.7 mostra todos os valores possíveis $w(H) - \binom{g-2\gamma}{2}$ de um semigrupo γ-hiperelíptico H de gênero $g \geq 3\gamma$ com multiplicidade $m_1 = 4$, para $\gamma = 1, 2, 3, 4, 5$. Em particular, esta tabela ilustra graficamente o Teorema 3.3.2 e o Teorema 3.3.3. O padrão observado continua valendo para todos os valores de γ.

Tabela 3.7: Sequência de valores $w(H) - \binom{g-2\gamma}{2}$



Como uma aplicação dos pesos podemos provar o seguinte resultado.

Corolário 3.3.6. *Existe um único semigrupo de Arf com multiplicidade $m_1 = 4$, γ-hiperelíptico de gênero $g \geq 3\gamma$, a saber*

$$H = \langle 4, 4\gamma + 2, 2g - 2\gamma + 1, 2g - 2\gamma + 3 \rangle .$$

Demonstração. Utilizaremos as mesmas notações do Teorema 3.3.3. Sendo $H_{\gamma+1}$ simétrico e não hiperelíptico, concluímos que, $H_{\gamma+1}$ não é um semigrupo de Arf. Seja agora $2 \leq k \leq \gamma$. Temos que $u_{\gamma-k+2}(H_k) = 2g - 2\gamma + 2k - 5$. Por outro lado, como $g \geq 3\gamma$ segue que $2g - 2\gamma + 2k - 4 \geq 4\gamma$. Assim, $u_{\gamma-k+2}(H_k)$, $u_{\gamma-k+2}(H_k) + 1 \in H_k$ e portanto concluímos que H_k não é de Arf.

Provemos agora que $H := H_1$ é um semigrupo de Arf. Como $g \geq 3\gamma$ segue que $u_\gamma := u_\gamma(H) = 2g - 2\gamma + 1 \geq 4\gamma + 1$. Logo,

$$H = 2\overline{H} \cup \{n \in \mathbb{N} : \, n \text{ é ímpar}, \, n \geq 2g - 2\gamma + 1\} .$$

onde

$$\overline{H} = \{0\} \cup \left\{ \frac{\widetilde{m}_1(H)}{2}, \ldots, \frac{\widetilde{m}_\gamma(H)}{2} \right\} \cup \{2\gamma + i : \, i \in \mathbb{N}\}.$$

Como $\overline{H}$ é um semigrupo hiperelíptico, pelo Exemplo 2.2.5 (d), segue que H é um semigrupo de Arf. $\square$

Observação 3.3.7. Seja $\gamma \geq 2$ um inteiro. Seja H um semigrupo γ-hiperelíptico de gênero $g \geq 3\gamma$ com multiplicidade $m_1 \geq 4$. Pela Proposição 3.1.10 e Teorema 3.3.2 temos que

$$w(H) = \binom{g-2\gamma}{2} + 2\gamma^2 \quad \text{ou} \quad \binom{g-2\gamma}{2} \leq w(H) \leq \binom{g-2\gamma}{2} + 2\gamma^2 - (2\gamma - 4).$$

3.4 Multiplicidade seis

Nesta seção, estudaremos os pesos dos semigrupos γ-hiperelípticos de gênero g com multiplicidade $m_1 = 6$. A diferença com o caso $m_1 = 4$ está no fato que não obtemos a classificação desses em função de seus pesos, porém obtemos importantes contribuições de pesos exatos para o PROBLEMA 3.1.8.

Proposição 3.4.1. *Sejam $\gamma \in \mathbb{N}$ e H um semigrupo γ-hiperelíptico de gênero $g \geq 2\gamma$ com multiplicidade $m_1 = 6$. Seja $\widetilde{N} := \{6 = \widetilde{m}_1 < \cdots < \widetilde{m}_\gamma = 4\gamma\}$.*

(1) *Se $\gamma \equiv 0 \pmod 3$ então existe $k \in \left\{0, \ldots, \frac{\gamma}{3}\right\}$ tal que*

$$\begin{aligned}\widetilde{N} = &\left\{6i : i = 1, \ldots, \tfrac{2\gamma}{3}\right\} \cup \left\{2\gamma - 4 + 6j + 6k : j = 1, \ldots, \tfrac{\gamma}{3} - k\right\} \cup \\ &\{4\gamma - 2 + 6l - 6k : l = 1, \ldots, k\}.\end{aligned}$$

Em particular,

$$w(H) = \binom{g-2\gamma}{2} - \frac{\gamma(\gamma+2)}{3} + 2(g\gamma + 3k^2 - \gamma k - k) - \sum_{i=1}^{\gamma} u_i\,.$$

(2) *Se $\gamma \equiv 1 \pmod 3$ então existe $k \in \left\{0, \ldots, \frac{\gamma-1}{3}\right\}$ tal que*

$$\begin{aligned}\widetilde{N} = &\left\{6i : i = 1, \ldots, \tfrac{2(\gamma-1)}{3}\right\} \cup \left\{2\gamma - 4 + 6j + 6k : j = 1, \ldots, \tfrac{\gamma+2}{3} - k\right\} \cup \\ &\{4\gamma - 2 + 6l - 6k : l = 1, \ldots, k\}.\end{aligned}$$

Em particular,

$$w(H) = \binom{g-2\gamma}{2} - \frac{\gamma(\gamma+2)}{3} + 2(g\gamma + 3k^2 - \gamma k - k) - \sum_{i=1}^{\gamma} u_i\,.$$

(3) *Se* $\gamma \equiv 2 \pmod 3$ *então existe* $k \in \left\{0, \ldots, \frac{\gamma-2}{3}\right\}$ *tal que*

$$\widetilde{N} = \left\{6i : i = 1, \ldots, \tfrac{2\gamma-1}{3}\right\} \cup \left\{2\gamma - 4 + 6j + 6k : j = 1, \ldots, \tfrac{\gamma+1}{3} - k\right\} \cup \{4\gamma - 4 + 6l - 6k : l = 1, \ldots, k\}.$$

Em particular,

$$w(H) = \binom{g-2\gamma}{2} - \frac{\gamma(\gamma+4)}{3} + 2(g\gamma + 3k^2 - \gamma k + k) - \sum_{i=1}^{\gamma} u_i\,.$$

Demonstração. Como H é um recobrimento duplo do semigrupo

$$\overline{H} = \{0\} \cup \left\{3 = \frac{\widetilde{m}_1}{2}, \ldots, \frac{\widetilde{m}_\gamma}{2} = 2\gamma\right\} \cup \{2\gamma + i : i \in \mathbb{N}\}$$

de multiplicidade $\overline{m}_1 = 3$ e gênero γ, o resultado segue de [19, Lema 6] e Corolário 3.1.4. □

Observação 3.4.2. Fazendo um retrospecto do Corolário 3.2.2 e Corolário 3.2.5 obtemos pesos iguais para semigrupos diferentes. Por exemplo, para todo número par x no intervalo $[4, 2\gamma]$ existem semigrupos diferentes H_1 e H_2, recobrimentos duplos do semigrupo $\overline{H} = \{0\} \cup \{\gamma + i : i \in \mathbb{N}\}$, tais que

$$w(H_1) = \binom{g-2\gamma}{2} + x = w(H_2)\,.$$

Em particular, pela Proposição 3.1.5 tem-se $S_I(H_1) = S_I(H_2)$.

Exemplo 3.4.3. Consideremos o PROBLEMA 3.1.8 para o caso $\gamma = 3$. Seja g um inteiro tal que $g \geq 9$. Pelo Corolário 3.1.7 (1) temos que se H é um semigrupo 3-hiperelíptico com multiplicidade $m_1 \geq 4$ então $w(H) \in \left[\binom{g-6}{2}, \binom{g-6}{2} + 18\right]$.

- Se $m_1 = 4$, pelo Teorema 3.3.3 existem quatro semigrupos H's tais que

$$w(H) - \binom{g-6}{2} \in \{6, 8, 12, 18\}\,.$$

- Se $u_1 = 2g - 11$ e considerando $\overline{H_1} = \mathbb{N}_0 \setminus \{1, 2, 4\}$ e $\overline{H_2} = \mathbb{N}_0 \setminus \{1, 2, 5\}$, pela Proposição 3.1.11 temos que $w - \binom{g-8}{2} \in \{10, 14\}$.

- Se $u_1 = 2g - 7$, pelo Corolário 3.2.2 temos que $w - \binom{g-6}{2} \in \{2, 4, 6\}$.

- Se $u_1 = 2g - 9$, pelo Corolário 3.2.5 temos que $w - \binom{g-6}{2} \in \{4, 6, 8\}$.
- Pelo Corolário 3.1.7, existe um único semigrupo H tal que $w(H) = \binom{g-6}{2}$.

Pela Proposição 3.1.10 não existe nenhum semigrupo H 3-hiperelíptico tal que $w(H) = \binom{g-6}{2} + 16$. Resumindo estes cálculos temos que se H é 3-hiperelíptico então

$$w(H) \in \left\{ \binom{g-6}{2} + 2n : 0 \leq n \leq 9, \; n \neq 8 \right\}$$

(veja Figura 3.1).

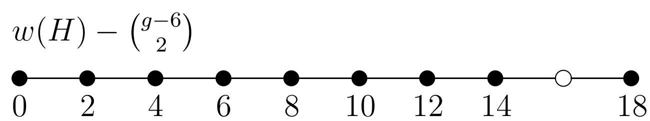


Figura 3.1: Sequência de pesos de um semigrupo H 3-hiperelíptico

Mais ainda, exibimos a seguir alguns semigrupos construídos nos resultados citados anteriormente:

Tabela 3.8: Semigrupos 3-hiperelípticos

H	$w(H)$
$\langle 8, 10, 12, 14, 2g-5, 2g-3, 2g-1, 2g+1 \rangle$	$\binom{g-6}{2}$
$\langle 8, 10, 12, 14, 2g-7, 2g-3, 2g-1 \rangle$	$\binom{g-6}{2} + 2$
$\langle 8, 10, 12, 14, 2g-7, 2g-5, 2g-1 \rangle$	$\binom{g-6}{2} + 4$
$\langle 4, 14, 2g-5, 2g-3 \rangle$	$\binom{g-6}{2} + 6$
$\langle 4, 14, 2g-7, 2g-1 \rangle$	$\binom{g-6}{2} + 8$
$\langle 6, 10, 14, 2g-11 \rangle$	$\binom{g-6}{2} + 10$
$\langle 4, 14, 2g-9, 2g+1 \rangle$	$\binom{g-6}{2} + 12$
$\langle 6, 8, 2g-11 \rangle$	$\binom{g-6}{2} + 14$
$\langle 4, 14, 2g-11 \rangle$	$\binom{g-6}{2} + 18$

É conhecido que os semigrupos de multiplicidade $m_1 = 4$ são realizáveis como semigrupos de Weierstrass. Notemos também que

$$\langle 6, 10, 14, 2g-11 \rangle = 2H_1 + (2g-11)\mathbb{N}_0$$

e

$$\langle 6, 8, 14, 2g-11\rangle = 2H_2 + (2g-11)\mathbb{N}_0$$

e como H_1 e H_2 são semigrupos de Weierstrass, concluímos que $\langle 6, 10, 14, 2g-11\rangle$ e $\langle 6, 8, 2g-11\rangle$ são de Weierstrass (veja [20]). Os outros semigrupos da Tabela 3.8 são de Weierstrass?

Exemplo 3.4.4. Consideremos agora o PROBLEMA 3.1.8 para o caso $\gamma = 4$. Seja g um inteiro tal que $g \geq 12$. Pelo Corolário 3.1.7 (1) temos que se H é um semigrupo 4-hiperelíptico com multiplicidade $m_1 \geq 4$ então $w(H) \in \left[\binom{g-8}{2}, \binom{g-8}{2} + 32\right]$.

- Se $m_1 = 4$, pelo Teorema 3.3.3 existem cinco semigrupos H's tais que
$$w - \binom{g-8}{2} \in \{12, 14, 18, 24, 32\}.$$
- Se $u_1 = 2g-15$ e considerando $\overline{H_1} = \mathbb{N}_0 \setminus \{1,2,3,5\}$, $\overline{H_2} = \mathbb{N}_0 \setminus \{1,2,3,6\}$ e $\overline{H_3} = \mathbb{N}_0 \setminus \{1,2,3,7\}$, pela Proposição 3.1.11 temos que $w - \binom{g-8}{2} \in \{12, 16, 20\}$.
- Se $u_1 = 2g-9$, pelo Corolário 3.2.2 temos que $w - \binom{g-8}{2} \in \{2, 4, 6, 8\}$.
- Se $u_1 = 2g-11$ pelo Corolário 3.2.5 temos que $w - \binom{g-8}{2} \in \{4, 6, 8, 10, 12\}$.
- Pelo Corolário 3.1.7, existe um único semigrupo H tal que $w(H) = \binom{g-8}{2}$.

Pela Proposição 3.1.10 não existe nenhum semigrupo H 4-hiperelíptico tal que $w(H) = \binom{g-8}{2}+30$. Resumindo estes cálculos achamos semigrupos H's 4-hiperelípticos tais que

$$w(H) \in \left\{ \binom{g-8}{2} + 2n : \, 0 \leq n \leq 16, \, n \neq 11, 13, 14, 15 \right\}.$$

Existem semigrupos 4-hiperelípticos tais que $w(H) - \binom{g-8}{2} \in \{22, 26, 28\}$?.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] C. Apéry, *Sur les branches superlinéares des courbes algébriques*, C. R. Acad. Sc. Paris, Vol. **222** (1946), p. 1198–1200.

[2] E. Arbarello, *Weierstrass points and moduli of curves*, Compositio Mathematica, Vol. **29** (1974), p. 325–342.

[3] C. Arf, *Une interpretation algébrique de la suite des ordres de multiplicité dúne branche algébrique*, Proc. London Math. Soc., Vol. **50** (1949), p. 256–287.

[4] V. Barucci, D. E. Dobbs e M. Fontana, *Maximality properties in numerical semigroups and applications to one-dimensional analytically irreducible local domains*, Mem. Amer. Math. Soc. **125** (598) (1997), p. x+78.

[5] M. Bras-Amorós, *Acute semigroups and the order bound on the minimum distance, and the Feng-Rao improvement*, IEEE Trans. Inform. Theory, Vol. **50**, n^o. 6 (2004), p. 1282–1289.

[6] R. O. Buchweitz, "*Über deformation monomialer kurvensingularitäten und Weierstrasspunkte auf Riemannschen flächen*", Thesis, Hannover 1976.

[7] A. Campillo, J. I. Farrán e C. Munuera, *On the parameters of algebraic-geometry codes related to Arf semigroups*, Trans. Inf. Theory IEEE. Vol. **46**, n^o. 7 (2000), p. 2634–2638.

[8] C. Carvalho e F. Torres, *On Numerical Semigroups Related to Coverings of Curves*, Semigroup Forum, Vol. **67** (2003), p. 344–354.

[9] D. Eisenbud, “Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry”, Grad. Texts in Math. **150** Springer-Verlag, 1995.

[10] D. Eisenbud e J. Harris, *Existence, decomposition and limits of certain Weierstrass points*, Invent. Math., Vol. **87** (1987), p. 495–515.

[11] H. M. Farkas e I. Kra, “Riemann Surfaces”, Grad. Texts in Math. **71** (Second Edition) Springer-Verlag, 1992.

[12] G. L. Feng e T. R. N. Rao, *A simple approach for construction of algebraic-geometry codes from affine plane curves*, IEEE Trans. Inform. Theory, Vol. **40** (1994), p. 1003–1012.

[13] G. A. Freiman, “Foundations of a structural theory of set addition”, Translations of Mathematical Monographs **37** AMS, 1973.

[14] A. Garcia, *Weights of Weierstrass points in double coverings of curves of genus one or two*, Manuscripta Math., Vol. **55** (1986), p. 419–432.

[15] V. D. Goppa, Geometry and Codes, Mathematics and its applications **24**, Kluwer, Dordrecht, 1991.

[16] V. D. Goppa, *Codes associated with divisors*, Problems Inform. Transmission, Vol. **13**, (1977), p. 22–26.

[17] T. Høholdt, J. H. van Lint e R. Pellikaan, “Algebraic-Geometry codes”, in W.C. Huffman, V. Pless (Eds.) *Handbook of Coding Theory*. Amsterdam, The Netherlands: North-Holland, 1998, p. 871-961.

[18] A. Hurwitz, *Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich*, Math. Ann., Vol. **41**, (1893), p. 403–442.

[19] T. Kato, *Non-hyperelliptic Weierstrass points of maximal weight*, Math. Ann., Vol. **239** (1979), p. 141–147.

[20] J. Komeda e A. Ohbuchi, *On double coverings of a pointed non-singular curve with any Weierstrass semigroups*, Tsukuba J. Math., Vol. **31**, nº. 1 (2007), p. 205–215.

[21] J. Komeda, *On primitive Schubert indices of genus g and weight $g-1$*, J. Math. Soc. Japan, Vol. **43**, nº. 3 (1991), p. 437–445.

[22] J. Komeda, *On Weierstrass points whose first non-gaps are four*, J. reine angew. Math., Vol. **341** (1983), p. 68–86.

[23] E. Kunz, "Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry", Birkhäuser, 1985.

[24] J. Lipman, *Stable ideal and Arf semigroups*, Amer. J. Math., Vol. **97** (1975), p. 791–813.

[25] C. Maclachlan, *Weierstrass points on compact Riemann surfaces*, J. London Math. Soc., Vol. **3** (1971), p. 722–724.

[26] R. Matsumoto, *Miura's generalization of one-point AG codes in equivalent to Høholdt, van Lint and Pellikaan's*, IEICE Trans. Fundamentals, Vol. **E82-A**, nº. 10 (1999), p. 2007–2010.

[27] C. Munuera e F. Torres, *A note on the order bound on the minimum distance of AG codes and acute semigroups*, Advances in Mathematics of Communications, Vol. **2**, nº. 2 (2008), p. 175–181.

[28] G. Oliveira e F. L. R. Pimentel, *On Weierstrass semigroups of double covering of genus two curves*, Semigroup Forum, Vol. **77** (2008), p. 152–162.

[29] G. Oliveira, *Weierstrass semigroups and the canonical ideal of non-trigonal curves*, Manuscripta Math., Vol. **71** (1991), p. 431–450.

[30] U. Pflaum, *The canonical constellations of k-Weierstrass points*, Manuscripta Math., Vol. **59** (1987), p. 21–34.

[31] J. C. Rosales, P. A. García-Sánchez, J. I. García-García e M. B. Branco *Arf numerical semigroups*, Journal of Algebra, Vol. **276** (2004), p. 3–12.

[32] H. Stichtenoth, "Algebraic Funtion Fields and Codes", Springer-Verlag, New York-Berlin, 1993.

[33] F. Torres, *On the constellations of Weierstrass points*, Arch. Math., Vol. **68** (1997), p. 139–144.

[34] F. Torres, *On γ-hyperelliptic Numerical Semigroups*, Semigroup Forum, Vol. **55** (1997), p. 364–379.

[35] F. Torres, *On certain N-sheeted coverings of curves and numerical semigroups which cannot be realized as Weierstrass semigroups*, Comm. Algebra, Vol. **23**, nº. 11 (1995), p. 4211–4228.

[36] F. Torres, *Weierstrass points and double coverings of curves with applications*: *Symetric numerical semigroups which cannot be realized as Weierstrass semigroups*, Manuscripta Math., Vol. **83** (1994), p. 39–58.

[37] C. Towse, *Weierstrass weights of fixed points of an involution*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. **122** (1997), p. 385–392.