Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Métodos de Interpolação Real e Espaços de Sobolev e Besov sobre a Esfera S^d

por

Andrielber da Silva Oliveira †

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Sergio Antônio Tozoni

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Métodos de Interpolação Real e Espaços de Sobolev e Besov sobre a Esfera S^d

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Andrielber da Silva Oliveira** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas 28, de Abril o de 2006.

Prof. Dr. Sérgio Antonio Tozoni

Banca examinadora:

Prof. Dr. Sérgio Antonio Tozoni.

Prof. Dr. Dicesar Lass Fernandez.

Prof. Dr. Eduardo Brandani da Silva.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dissertação de Mestrado defendida em 28 de abril de 2006 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). SERGIO ANTONIO TOZONI

Prof. (a). Dr (a). EDUARDO BRANDANI DA SILVA

Prof. (a). Dr (a). DICESAR LASS FERNANDEZ

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Oliveira, Andrielber da Silva

OL4m Métodos de interpolação real e espaços de Sobolev e Besov sobre a esfera S^d / Andrielber da Silva Oliveira -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientador : Sérgio Antonio Tozoni

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Análise harmonica. 2. Análise funcional. 3. Sobolev, Espaços de. 4. Espaços de interpolação . I. Tozoni, Sérgio Antonio. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Real interpolation methods and Sobolev and Besov espaces on the S^d sphere

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Harmonic analysis. 2. Functional analysis. 3. Sobolev spaces. 4. Interpolation spaces.

Área de concentração: Análise

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Sérgio Antonio Tozoni (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Dicesar Lass Fernandez (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Eduardo Brandani da Silva (UEM)

Data da defesa: 28/04/2006

Aos pais e a minha namorada

"No final, tudo dá certo."

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao IMECC pela oportunidade de fazer este trabalho, ao CNPq pela concessão da bolsa, aos professores das disciplinas que cursei, aos professores do Departamento de Matemática da UEL, onde fiz minha graduação em Licenciatura em Matemática, aos membros da banca examinadora e um agradecimento especial ao Prof. Dr. Sérgio A. Tozoni, que foi quem me orientou, pela paciência, dedicação e ajuda.

Também sou muito grato aos amigos e familiares de Londrina e em especial aos meus pais Valcides de Oliveira e Nelci da Silva Oliveira pelo apoio antes e durante este mestrado, além deles sou muito grato aos amigos que fiz no IAPAR, principalmente a todos da Área de Biometria.

Não poderia deixar de agradecer aos amigos que fiz aqui em Campinas, aos amigos do curso, aos amigos de onde morei durante o primeiro ano em Campinas, que chamávamos de Clube dos Nove, aos moradores da pensão do Seu Ruy, onde morei durante os dois últimos anos, em fim, a todos os amigos que fiz em Campinas e principalmente ao Fábio Dadam, uma pessoa ímpar, realmente fantástica, um amigo pra todas as horas.

Agradeço a minha namorada, Graziela, que tenho certeza ser a mulher com quem me casarei, agradeço a ela pelo apoio, carinho, compreensão e companheirismo durante estes nove meses que estamos juntos, que foram, sem dúvida, os melhores que já vivi.

RESUMO

O objetivo da dissertação é realizar um estudo dos espaços de Besov sobre a esfera unitária d-dimensional real S^d.

No primeiro capítulo são estudados espaços de interpolação utilizando dois métodos de interpolação real. Em particular são estudados os Teoremas de Equivalência e de Reiteração para os J-método e K-método.

No segundo capítulo é realizado um estudo rápido sobre análise harmônica na esfera S^d, incluindo um estudo sobre harmônicos esféricos, harmônicos zonais, somas de Cesàro e sobre um teorema de multiplicadores.

O terceiro e último capítulo é o mais importante e nele são aplicados os resultados dos capítulos anteriores. São introduzidos os espaços de Besov, decompondo uma função suave definida sobre a esfera d-dimensional, em uma série de harmônicos esféricos e usando uma seqüência de polinômios zonais que podem ser vistos como uma generalização natural dos polinômios de Vallée Poussin definidos sobre o círculo unitário. O principal resultado estudado diz que todo espaço de Besov pode ser obtido como espaço de interpolação de dois espaços de Sobolev.

ABSTRACT

The purpose of this work is to make a study about Besov's spaces on the unit d-dimensional real sphere S^d.

In the first chapter are studied spaces of interpolation using two real interpolation methods. In particular, are studied The Equivalence Theorem and The Reiteration Theorem for the J-method and the K-method.

In the second chapter it is made a short study about harmonic analysis on the sphere S^d, including a study about spherics harmonics, zonal harmonics, Cesàro sums and about a multiplier theorem.

The third and last chapter is the most important of this work. In this chapter are applied the results of the others chapters. Are introduced the Besov spaces, decomposing a smooth function defined on the d-dimensional sphere, in a series of harmonics spherics and using a sequence o zonal polynomials which can be seen as a natural generalization of the Vallée Poussin polynomials defined on the unit circle. The main result studied says that every Besov's space can be got as a interpolation space of two Sobolev's spaces.

Sumário

Introdução

O objetivo desta dissertação é realizar um estudo de métodos de interpolação real e aplicá-los no estudo dos espaços de Besov sobre a esfera unitária d-dimensional real S^d.

Os espaços de Besov clássicos sobre regiões do espaço euclidiano $\mathbb{R}^d$ foram sistematicamente estudados, por exemplo, nos trabalhos de H. Triebel [11] e de J. Peetre [10], e um estudo destes espaços sobre a esfera S^d pode ser encontrado no trabalho de P. I. Lizorkin e Kr. P. Rustamov [8].

Em [7], A. Kushpel, J. Levesley e S. A. Tozoni estudaram os espaços de Besov sobre espaços homogêneos, em particular sobre a esfera S^d, com o objetivo de obter estimativas para n-larguras de Kolmogorov. Os espaços de Besov foram introduzidos decompondo uma função suave definida sobre a esfera S^d em uma série de harmônicos esféricos e usando uma seqüência $K_n(z)$ de polinômios zonais, os quais podem ser vistos como uma generalização dos polinômios de Vallée Poussin definidos sobre o círculo unitário por

$$V_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{2n} \lambda_k^{(2n)} \cos kt,$$

onde $\lambda_k^{(2n)} = 1$ se $1 \leq k \leq n$ e $\lambda_k^{(2n)} = (2n-k)/n$ se $n < k \leq 2n$. Os polinômios de Vallée Poussin foram utilizados para introduzir os espaços de Besov sobre S^1. O objetivo principal desta dissertação é realizar um estudo detalhado dos resultados sobre espaços de Besov apresentados em [7]. Para tal, foi realizado um estudo cuidadoso sobre espaços de interpolação no Capítulo 1 e um estudo sem muitos detalhes sobre análise harmônica na esfera S^d no Capítulo 2. Um estudo detalhado sobre análise harmônica na esfera S^d pode ser encontrado na dissertação de mestrado de F. M. de Oliveira [9].

No primeiro capítulo são estudados os espaços de interpolação utilizando os J-método e K-método. Na Seção 1.1 é feito um estudo sobre a integral de Bochner utilizada nas seções seguintes. Uma referência para esta seção é o Capítulo III de [4]. Na Seção 1.2 são apresentados os resultados básicos da teoria dos espaços de interpolação, na Seção 1.3 é estudado o Teorema de Equivalência e na Seção 1.4 o Teorema de Reiteração. Os trabalhos [1], [5] e [7] são referências para os resultados destas seções.

O segundo capítulo é dedicado a um estudo rápido sobre análise harmônica na esfera S^d, incluindo um estudo sobre harmônicos esféricos, harmônicos zonais, somas de Cesàro e sobre um teorema de multiplicadores. Um estudo cuidadoso e detalhado sobre este assunto foi feito na dissertação de mestrado de F. M. de Oliveira [9] que é a nossa referência para este capítulo.

O terceiro e último capítulo é o mais importante e nele estão aplicados os resultados dos capítulos anteriores. Na Seção 3.1 são definidos os espaços de Sobolev e de Besov como foram introduzidos em [7]. Esta definição de espaços de Besov pode também ser encontrada em [6]. São definidas indutivamente funções Ψ_j, $1 \leq j \leq d$, onde d é a dimensão da esfera S^d. São estudadas várias propriedades destas funções e é definida, para cada número natural n, uma seqüência numérica $(\lambda_k^n)_{k=0}^n$. Usando estas seqüências são definidas funções zonais K_n que são utilizadas para definir as funções dos espaços de Besov. Na Seção 3.2 são aplicados os resultados da seção anterior e do Capítulo 1 para demostrar o principal resultado estudado nesta dissertação que diz que todo espaço de Besov é espaço de interpolação de dois espaços de Sobolev.

No final desta dissertação é apresentado um apêndice no qual são enunciadas algumas definições e resultados clássicos de teoria da medida e de análise funcional que são utilizados em algum momento no desenvolvimento deste trabalho.

Capítulo 1

Espaços de interpolação

Neste capítulo são estudados os espaços de interpolação definidos pelos J-método e K-método.

Na primeira seção é feito um estudo sobre a integral de Bochner que será utilizado nas seções seguintes. Uma referência para este estudo é o Capítulo III de [4]. Nesta seção $(X, \mathcal{X}, \mu)$ representará um espaço de medida σ-finito e E um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|_E$.

Na segunda seção são apresentados os resultados básicos da teoria dos espaços de interpolação, na seção seguinte é estudado o Teorema de Equivalência e na quarta e última seção o Teorema de Reiteração. Os trabalhos [1], [5] e [7] são as nossas referências para os resultados destas seções.

1.1 A Integral de Bochner

Definição 1.1.1. Dizemos que uma função $f : X \longrightarrow E$ é *simples* se assume apenas um número finito de valores em E, $f(X) = \{a_k : 1 \leq k \leq n\}$, e $A_k = f^{-1}(a_k) \in \mathcal{X}$ para todo $1 \leq k \leq n$. Dizemos que

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k} \tag{1.1}$$

é a *representação padrão de* f.

Definição 1.1.2. Dizemos que uma função $f : X \longrightarrow E$ é $\mathcal{X}$*-fortemente mensurável* se existe uma seqüência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções simples definidas em X tomando valores em E, tais que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_E = 0 \quad q.s. \tag{1.2}$$

Teorema 1.1.3. *(a) Se f, g são funções $\mathcal{X}$-fortemente mensuráveis e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $f + g$ e αf são $\mathcal{X}$-fortemente mensuráveis.*

(b) Se f é limite q.s. de uma seqüência de funções $\mathcal{X}$-fortemente mensuráveis, então f é $\mathcal{X}$-fortemente mensurável.

Observação 1.1.4. Se E for separável, então uma função $f : X \longrightarrow E$ é $\mathcal{X}$-fortemente mensurável se e somente se $f^{-1}(B) \in \mathcal{X}$ para todo boreliano B de E, isto é, f é $\mathcal{X}$-mensurável.

Definição 1.1.5. Dizemos que uma função simples $f : X \longrightarrow E$ é *Bochner-integrável* se a função $x \longmapsto \|f(x)\|_E$ é μ-integrável. Se

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$$

é uma representação padrão de f e $B \in \mathcal{X}$, definimos a *integral de Bochner de f sobre B* por

$$\int_B f d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu (A_k \cap B) . \tag{1.3}$$

Observação 1.1.6. Como

$$\sum_{k=1}^{n} \|a_k\|_E \, \mu (A_k \cap B) = \int_B \|f\|_E \, d\mu < \infty$$

então a integral (1.3) está bem definida, para todo $B \in \mathcal{X}$, e também temos

$$\left\| \int_B f d\mu \right\|_E \leq \int_B \|f\|_E \, d\mu. \tag{1.4}$$

Definição 1.1.7. Dizemos que uma função $f : X \longrightarrow E$ é *Bochner-integrável* se existe uma seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples Bochner-integráveis, tal que

$$f_n \longrightarrow f \text{ q.s. e } \quad \lim_{n \to \infty} \int_X \|f_n - f\|_E \, d\mu = 0. \tag{1.5}$$

Definimos a *integral de Bochner de f sobre $B \in \mathcal{X}$* por

$$\int_B f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_B f_n d\mu. \tag{1.6}$$

Observação 1.1.8. O limite $\lim \int_B f_n d\mu$, quando $n \longrightarrow \infty$, existe e independe da seqüência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ considerada. De fato, se $B \in \mathcal{X}$

$$\left\| \int_B f_n d\mu - \int_B f_m d\mu \right\|_E \leq \int_B \|f_n - f_m\|_E \, d\mu \leq \int_B \|f_n - f\|_E \, d\mu + \int_B \|f_m - f\|_E \, d\mu$$

e como

$$\lim_{n\to\infty}\int_B \|f_n - f\|_E \, d\mu = 0$$

temos que $\left(\int_B f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em E. Portanto essa seqüência converge em E.

Para demonstrar a independência da seqüência, consideremos duas seqüências de funções simples $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Bochner-integráveis convergindo para f q.s., tais que

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \|f_n - f\|_E \, d\mu = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}\int_X \|g_n - f\|_E \, d\mu = 0.$$

Como

$$\left\|\int_B f_n d\mu - \int_B g_n d\mu\right\|_E \leq \int_B \|f_n - f\|_E \, d\mu + \int_B \|g_n - f\|_E \, d\mu,$$

fazendo $n \longrightarrow \infty$ em ambos os membros da desigualdade acima, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_B f_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_B g_n d\mu.$$

Teorema 1.1.9. *Uma função $f : X \longrightarrow E$ $\mathcal{X}$-fortemente mensurável é Bochner-integrável se e somente se a função real $x \longmapsto \|f(x)\|_E$ é μ-integrável, isto é, se e somente se*

$$\int_X \|f\|_E \, d\mu < \infty. \tag{1.7}$$

Teorema 1.1.10. *Se f é Bochner-integrável, então*

$$\left\|\int_X f d\mu\right\|_E \leq \int_X \|f\|_E \, d\mu. \tag{1.8}$$

Teorema 1.1.11. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de funções Bochner-integráveis, tal que*

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_X \|f_n - f_m\|_E \, d\mu = 0. \tag{1.9}$$

Então existe uma função Bochner-integrável f tal que

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \|f_n - f\|_E \, d\mu = 0 \tag{1.10}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu. \tag{1.11}$$

Teorema 1.1.12 (Teorema da Convergência Dominada para integral de Bochner). *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de funções Bochner-integráveis convergindo q.s. para f e seja g*

uma função real μ-integrável tal que $\|f(x)\|_E \leq g(x)$ q.t. $x \in X$. Então f é Bochner-integrável e

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \|f_n - f\|_E \, d\mu = 0. \tag{1.12}$$

Em particular, para todo $B \in \mathcal{X}$,

$$\int_B f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_B f_n d\mu. \tag{1.13}$$

Definição 1.1.13. O espaço $L_E^p = L^p(X,E) = L^p(X,\mathcal{X},\mu;E)$, $0 < p < \infty$, é definido como o conjunto das funções $\mathcal{X}$-fortemente mensuráveis $f : X \longrightarrow E$, tais que

$$\|f\|_{L_E^p} = \left(\int_X \|f(x)\|_E^p \, d\mu \right)^{1/p} < \infty. \tag{1.14}$$

Observação 1.1.14. Quando $1 \leq p < \infty$, $\|\cdot\|_{L_E^p}$ é uma norma sobre $L^p(X,E)$ e $\left(L^p(X,E), \|\cdot\|_{L_E^p}\right)$ é um espaço de Banach. Quando $X = E = \mathbb{R}$ escrevemos $L^p(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p}$.

Definição 1.1.15. O espaço $L^\infty(X,E)$ é definido como o conjunto das funções $\mathcal{X}$-fortemente mensuráveis $f : X \longrightarrow E$, tais que

$$\|f\|_{L_E^\infty} = \inf\left(c : \|f(x)\|_E \leq c \;\text{ q.t. } x \in X\right) < \infty. \tag{1.15}$$

Observação 1.1.16. Temos que $\|\cdot\|_{L_E^\infty}$ é uma norma sobre $L^\infty(X,E)$ e $\left(L^\infty(X,E), \|\cdot\|_{L_E^\infty}\right)$ é um espaço de Banach.

Teorema 1.1.17. *Seja $1 \leq p < \infty$. Então o conjunto formado por todas as funções simples $f \in L^p(X,E)$ é denso em $L^p(X,E)$.*

Definição 1.1.18. Definimos o espaço $\ell^p(E)$, $1 \leq p < \infty$, como sendo o conjunto de todas as seqüências $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $x_n \in E$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\|x\|_{\ell^p(E)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_E^p \right)^{1/p} < \infty. \tag{1.16}$$

Observação 1.1.19. Para $1 \leq p < \infty$, $\|\cdot\|_{\ell^p(E)}$ é uma norma sobre $\ell^p(E)$ e $\left(\ell^p(E), \|\cdot\|_{\ell^p(E)}\right)$ é um espaço de Banach.

1.2 Dois métodos de interpolação real

Definição 1.2.1. Dois espaços complexos de Banach $\left(E_0, \|\cdot\|_{E_0}\right)$ e $\left(E_1, \|\cdot\|_{E_1}\right)$ são chamados um *par de interpolação* $\bar{E} = (E_0, E_1)$ se existe um espaço vetorial topológico de Hausdorff no qual E_0 e E_1 estão continuamente incluídos. Então os seguintes espaços e quantidades estão bem definidos:

$$\begin{aligned}
\Delta(\bar{E}) &= E_0 \cap E_1; && (1.17)\\
\|x\|_{\Delta(\bar{E})} &= \max\left(\|x\|_{E_0}, \|x\|_{E_1}\right); && (1.18)\\
\Sigma(\bar{E}) &= E_0 + E_1 = \{x_0 + x_1 : x_0 \in E_0, x_1 \in E_1\}; && (1.19)\\
\|x\|_{\Sigma(\bar{E})} &= \inf_{x = x_0 + x_1 \in \Sigma(\bar{E})} \left(\|x_0\|_{E_0} + \|x_1\|_{E_1}\right); && (1.20)\\
K(t,x) = K(t,x;\bar{E}) &= \inf_{x = x_0 + x_1 \in \Sigma(\bar{E})} \left(\|x_0\|_{E_0} + t\|x_1\|_{E_1}\right), 0 < t < \infty; && (1.21)\\
J(t,x) = J(t,x;\bar{E}) &= \max\left(\|x\|_{E_0}, t\|x\|_{E_1}\right), 0 < t < \infty, x \in \Delta(\bar{E}). && (1.22)
\end{aligned}$$

Definição 1.2.2. Dizemos que um espaço F é um *espaço intermediário* entre E_0 e E_1 se

$$\Delta(\bar{E}) \subset F \subset \Sigma(\bar{E}).$$

Proposição 1.2.3. *Para $t > 0$, $\|\cdot\|_{\Sigma(\bar{E})}$ e $K(t,\cdot)$ são normas equivalentes sobre $\Sigma(\bar{E})$.*

Demonstração. Primeiramente demonstraremos que $K(t,\cdot)$ é norma sobre $\Sigma(\bar{E})$:

(i) Dado $x \in \Sigma(\bar{E})$, $K(t,x) = \inf_{x = x_0 + x_1 \in \Sigma(\bar{E})} \left(\|x_0\|_{E_0} + t\|x_1\|_{E_1}\right) \geq 0$, pois $\|x_0\|_{E_0} \geq 0$ para todo $x_0 \in E_0$, $\|x_1\|_{E_1} \geq 0$ para todo $x_1 \in E_1$ e $t > 0$, e portanto $\|x_0\|_{E_0} + t\|x_1\|_{E_1} \geq 0$ para qualquer representação $x = x_0 + x_1 \in \Sigma(\bar{E})$.

(ii) Temos que $K(t,x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$. De fato se $x = 0$, então podemos escrever $x = 0 + 0 \in \Sigma(\bar{E})$. Assim $\|0\|_{E_0} + t\|0\|_{E_1} = 0$ e logo $K(t,0) = 0$. Por outro lado se $K(t,x) = 0$, segue por (1.21) que dado $n \in \mathbb{N}$, existem $x_n^0 \in E_0$ e $x_n^1 \in E_1$, tal que $x = x_n^0 + x_n^1$ e $\|x_n^0\|_{E_0} + t\|x_n^1\|_{E_1} < 1/n$. Como

$$\|x_n^0 - x_m^0\|_{E_0} \leq \left\|x_n^0\right\|_{E_0} + \|x_m^0\|_{E_0} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{\min(n,m)},$$

temos que $(x_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em $\left(E_0, \|\cdot\|_{E_0}\right)$. Analogamente $(tx_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüencia de Cauchy em $\left(E_1, \|\cdot\|_{E_1}\right)$. Mas $\left(E_0, \|\cdot\|_{E_0}\right)$ e $\left(E_1, \|\cdot\|_{E_1}\right)$ são espaços de Banach, e portanto existem $x^0 \in E_0$ e $x^1 \in E_1$ tal que $x_n^0 \longrightarrow x^0$ e $x_n^1 \longrightarrow x^1$. Além disso, $x = x_n^0 + x_n^1$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e logo $x = x^0 + x^1$. Portanto, como as normas $\|\cdot\|_{E_0}$ e $\|\cdot\|_{E_1}$ são funções contínuas, segue que

$$0 \leq \left\|x^0\right\|_{E_0} + t\left\|x^1\right\|_{E_1} = \lim_{n\to\infty}\left(\left\|x_n^0\right\|_{E_0} + t\left\|x_n^1\right\|_{E_1}\right) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$

isto é, $x = x^0 + x^1 = 0 + 0 = 0$.

(iii) Sejam $x \in \Sigma(\bar{E})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Se $\lambda = 0$, temos $\lambda K(t,x) = 0 = K(t,0) = K(t,\lambda x)$. Se $\lambda \neq 0$, temos,

$$K(t,\lambda x) = \inf_{\lambda x = y_0 + y_1 \in \Sigma(\bar{E})}(\|y_0\|_{E_0} + t\|y_1\|_{E_1}) = \inf_{x = \lambda^{-1}y_0 + \lambda^{-1}y_1 \in \Sigma(\bar{E})}(\|y_0\|_{E_0} + t\|y_1\|_{E_1}).$$

Para $y_0 \in E_0$ e $y_1 \in E_1$, considere $x_0 = \lambda^{-1}y_0$ e $x_1 = \lambda^{-1}y_1$. Então

$$\begin{aligned} K(t,\lambda x) &= \inf_{x = x_0 + x_1 \in \Sigma(\bar{E})}(\|\lambda x_0\|_{E_0} + t\|\lambda x_1\|_{E_1}) \\ &= |\lambda| \inf_{x = x_0 + x_1 \in \Sigma(\bar{E})}\big(\|x_0\|_{E_0} + t\|x_1\|_{E_1}\big) \\ &= |\lambda| K(t,x). \end{aligned}$$

(iv) Sejam $x, y \in \Sigma(\bar{E})$, e
$A = \big\{\|x_0 + y_0\|_{E_0} + t\|x_1 + y_1\|_{E_1} : x = x_0 + x_1 \in \Sigma(\bar{E}) \text{ e } y = y_0 + y_1 \in \Sigma(\bar{E})\big\}$,
$B = \big\{\|z_0\|_{E_0} + t\|z_1\|_{E_1} : x + y = z_0 + z_1 \in \Sigma(\bar{E})\big\}$.
É fácil ver que $A \subseteq B$ e assim

$$\begin{aligned} K(t,x+y) &= \inf_{x+y = z_0 + z_1 \in \Sigma(\bar{E})}(\|z_0\|_{E_0} + t\|z_1\|_{E_1}) \\ &\leq \inf_{\substack{x = x_0 + x_1 \in \Sigma(\bar{E}) \\ y = y_0 + y_1 \in \Sigma(\bar{E})}}(\|x_0 + y_0\|_{E_0} + t\|x_1 + y_1\|_{E_1}) \\ &\leq \inf_{\substack{x = x_0 + x_1 \in \Sigma(\bar{E}) \\ y = y_0 + y_1 \in \Sigma(\bar{E})}}(\|x_0\|_{E_0} + \|y_0\|_{E_0} + t\|x_1\|_{E_1} + t\|y_1\|_{E_1}) \\ &= \inf_{\substack{x = x_0 + x_1 \in \Sigma(\bar{E}) \\ y = y_0 + y_1 \in \Sigma(\bar{E})}}\big((\|x_0\|_{E_0} + t\|x_1\|_{E_1}) + (\|y_0\|_{E_0} + t\|y_1\|_{E_1})\big) \\ &= \inf_{x = x_0 + x_1 \in \Sigma(\bar{E})}\left(\inf_{y = y_0 + y_1 \in \Sigma(\bar{E})}\big((\|x_0\|_{E_0} + t\|x_1\|_{E_1}) + (\|y_0\|_{E_0} + t\|y_1\|_{E_1})\big)\right) \\ &= \inf_{x = x_0 + x_1 \in \Sigma(\bar{E})}\big((\|x_0\|_{E_0} + t\|x_1\|_{E_1}) + K(t,y)\big) \\ &= K(t,x) + K(t,y). \end{aligned}$$

Portanto, segue por i), ii), iii) e iv) que para todo $t > 0$, $K(t,\cdot)$ é uma norma sobre $\Sigma(\bar{E})$. Em particular, para $t = 1$, temos que $K(1,\cdot) = \|\cdot\|_{\Sigma(\bar{E})}$ é uma norma sobre $\Sigma(\bar{E})$. Agora falta demonstrar que para $t > 0$, $K(t,\cdot)$ e $\|\cdot\|_{\Sigma(\bar{E})}$ são equivalentes.

Para $0 < t < 1$ e $x \in \Sigma(\bar{E})$ temos

$$\|x\|_{\Sigma(\bar{E})} = \inf_{x=x_0+x_1\in\Sigma(\bar{E})} \left(\|x_0\|_{E_0} + \|x_1\|_{E_1}\right) \geq K(t,x)$$

e

$$\begin{aligned} K(t,x) &= \inf_{x=x_0+x_1\in\Sigma(\bar{E})} \left(\|x_0\|_{E_0} + t\,\|x_1\|_{E_1}\right) \\ &\geq \inf_{x=x_0+x_1\in\Sigma(\bar{E})} (t\,\|x_0\|_{E_0} + t\,\|x_1\|_{E_1}) = t\,\|x\|_{\Sigma(\bar{E})}\,. \end{aligned}$$

Para $t \geq 1$ e $x \in \Sigma(\bar{E})$ temos

$$\|x\|_{\Sigma(\bar{E})} = \inf_{x=x_0+x_1\in\Sigma(\bar{E})} \left(\|x_0\|_{E_0} + \|x_1\|_{E_1}\right) \leq K(t,x)$$

e

$$\begin{aligned} K(t,x) &= \inf_{x=x_0+x_1\in\Sigma(\bar{E})} \left(\|x_0\|_{E_0} + t\,\|x_1\|_{E_1}\right) \\ &\leq \inf_{x=x_0+x_1\in\Sigma(\bar{E})} (t\,\|x_0\|_{E_0} + t\,\|x_1\|_{E_1}) = t\,\|x\|_{\Sigma(\bar{E})}\,. \end{aligned}$$

Podemos então concluir que dados $t > 0$ e $x \in \Sigma(\bar{E})$,

$$\min(1,t)\,\|x\|_{\Sigma(\bar{E})} \leq K(t,x) \leq \max(1,t)\,\|x\|_{\Sigma(\bar{E})}\,. \tag{1.23}$$

Proposição 1.2.4. *Para $t > 0$, $\|\cdot\|_{\Delta(\bar{E})}$ e $J(t,\cdot)$ são normas equivalentes sobre $\Delta(\bar{E})$.*

Demonstração. Primeiramente demonstraremos que $J(t,\cdot)$ é norma sobre $\Delta(\bar{E})$:

(i) Dado $x \in \Delta(\bar{E})$, $J(t,x) = \max\left(\|x\|_{E_0}, t\,\|x\|_{E_1}\right) \geq 0$, pois $\|x\|_{E_0} \geq 0$ para todo $x \in E_0$ e $t\,\|x\|_{E_1} \geq 0$ para todo $x \in E_1$.

(ii) Se $x = 0$, então $\|x\|_{E_0} = 0 = t\,\|x\|_{E_1}$ e logo, $J(t,x) = J(t,0) = 0$. Se $J(t,x) = 0$, então $\|x\|_{E_0} \leq 0$ e $t\,\|x\|_{E_1} \leq 0$. Logo, $\|x\|_{E_0} = \|x\|_{E_1} = 0$, ou seja, $x = 0$.

(iii) Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ e $x \in \Delta(\bar{E})$. Então

$$\begin{aligned} J(t,\lambda x) &= \max\left(\|\lambda x\|_{E_0}, t\,\|\lambda x\|_{E_1}\right) = \max(|\lambda|\,\|x\|_{E_0}, t|\lambda|\,\|x\|_{E_1}) \\ &= |\lambda| \max\left(\|x\|_{E_0}, t\,\|x\|_{E_1}\right) = |\lambda| J(t,x). \end{aligned}$$

(iv) Sejam $x, y \in \Delta(\bar{E})$. Então

$$\begin{aligned} J(t, x+y) &= \max\left(\|x+y\|_{E_0}, t\|x+y\|_{E_1}\right) \\ &\leq \max(\|x\|_{E_0} + \|y\|_{E_0}, t\|x\|_{E_1} + t\|y\|_{E_1}) \\ &\leq \max\left(\|x\|_{E_0}, t\|x\|_{E_1}\right) + \max\left(\|y\|_{E_0}, t\|y\|_{E_1}\right) \\ &= J(t,x) + J(t,y). \end{aligned}$$

Portanto, segue por i), ii), iii) e iv) que para todo $t > 0$, $J(t, \cdot)$ é uma norma sobre $\Delta(\bar{E})$. Em particular, para $t = 1$, temos que $J(1, \cdot) = \|\cdot\|_{\Delta(\bar{E})}$ é uma norma sobre $\Delta(\bar{E})$. Agora falta demonstrar que para $t > 0$, $J(t, \cdot)$ e $\|\cdot\|_{\Delta(\bar{E})}$ são equivalentes sobre $\Delta(\bar{E})$.

Para $0 < t < 1$ e $x \in \Delta(\bar{E})$ temos

$$\|x\|_{\Delta(\bar{E})} = \max\left(\|x\|_{E_0}, \|x\|_{E_1}\right) \geq J(t,x)$$

e

$$J(t,x) = \max\left(\|x\|_{E_0}, t\|x\|_{E_1}\right) \geq \max\left(t\|x\|_{E_0}, t\|x\|_{E_1}\right) = t\|x\|_{\Delta(\bar{E})}.$$

Para $t \geq 1$ e $x \in \Delta(\bar{E})$ temos

$$\|x\|_{\Delta(\bar{E})} = \max\left(\|x\|_{E_0}, \|x\|_{E_1}\right) \leq J(t,x)$$

e

$$J(t,x) = \max\left(\|x\|_{E_0}, t\|x\|_{E_1}\right) \leq \max\left(t\|x\|_{E_0}, t\|x\|_{E_1}\right) = t\|x\|_{\Delta(\bar{E})}.$$

Podemos então concluir que dados $t > 0$ e $x \in \Delta(\bar{E})$,

$$\min(1,t)\|x\|_{\Delta(\bar{E})} \leq J(t,x) \leq \max(1,t)\|x\|_{\Delta(\bar{E})}. \tag{1.24}$$

Teorema 1.2.5. *Os espaços* $\left(\Sigma(\bar{E}), \|\cdot\|_{\Sigma(\bar{E})}\right)$ *e* $\left(\Delta(\bar{E}), \|\cdot\|_{\Delta(\bar{E})}\right)$ *são espaços de Banach.*

Demonstração. Primeiramente demonstraremos que $\left(\Delta(\bar{E}), \|\cdot\|_{\Delta(\bar{E})}\right)$ é Banach. Consideremos então uma seqüência de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\Delta(\bar{E})$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para quaisquer $n, m \geq n_0$, $\|x_n - x_m\|_{\Delta(\bar{E})} < \epsilon$. Seque de (1.18) que $\|x_n - x_m\|_{E_0} < \epsilon$ e $\|x_n - x_m\|_{E_1} < \epsilon$ para quaisquer $m, n \geq n_0$ e logo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüencia de Cauchy em E_0 e em E_1. Portanto existem $x^0 \in E_0$ e $x^1 \in E_1$ tais que $x_n \longrightarrow x^0$ em E_0 e $x_n \longrightarrow x^1$ em E_1. Pela Definição 1.2.1 existe um espaço vetorial topológico de Hausdorff E, tal que E_0 e E_1 estão continuamente incluídos em E e logo $x_n \longrightarrow x^0$ em E e $x_n \longrightarrow x^1$ em E. Mas E é Hausdorff, assim $x^0 = x^1$. Tomemos $x = x^0 = x^1 \in \Delta(\bar{E})$. Então dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\|_{E_0} < \epsilon$ e $\|x_n - x\|_{E_1} < \epsilon$ para todo $n \geq N$ e conseqüentemente

$$\|x_n - x\|_{\Delta(\bar{E})} = \max\left(\|x_n - x\|_{E_0}, \|x_n - x\|_{E_1}\right) < \epsilon, \;\; n \geq N \in \mathbb{N}.$$

Assim, $\left(\Delta(\bar{E}), \|\cdot\|_{\Delta(\bar{E})}\right)$ é Banach.

Mostremos agora que $\left(\Sigma(\bar{E}), \|\cdot\|_{\Sigma(\bar{E})}\right)$ também é Banach. Dados $x \in \Sigma(\bar{E})$ e $\epsilon > 0$, por (1.20) existe uma decomposição $x = x^0 + x^1$ tal que

$$\left\|x^0\right\|_{E_0} + \left\|x^1\right\|_{E_1} \leq \|x\|_{\Sigma(\bar{E})} + \epsilon.$$

Em particular, para $\epsilon = \|x\|_{\Sigma(\bar{E})}$, existe uma decomposição $x = x^0 + x^1$ tal que

$$\left\|x^0\right\|_{E_0} + \left\|x^1\right\|_{E_1} \leq 2\, \|x\|_{\Sigma(\bar{E})}.$$

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma(\bar{E})$ tal que, $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{\Sigma(\bar{E})} < \infty$. Então para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar uma decomposição $x_n = x_n^0 + x_n^1$ tal que, $(x_n^0)_{n\in\mathbb{N}} \subset E_0$ e $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}} \subset E_1$ e além disso,

$$\left\|x_n^0\right\|_{E_0} + \left\|x_n^1\right\|_{E_1} \leq 2\|x_n\|_{\Sigma(\bar{E})}.$$

Isto implica que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^0\|_{E_0} < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^1\|_{E_1} < \infty$. Como E_0 e E_1 são de espaços Banach, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^0$ converge em E_0 e $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^1$ converge em E_1. Sejam $x^0 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^0$ e $x^1 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^1$, e tomemos $x = x^0 + x^1 \in \Sigma(\bar{E})$, temos por (1.20) que,

$$\begin{aligned} \left\|x - \sum_{n=1}^{N} x_n\right\|_{\Sigma(\bar{E})} &= \left\|\left(x^0 - \sum_{n=1}^{N} x_n^0\right) + \left(x^1 - \sum_{n=1}^{N} x_n^1\right)\right\|_{\Sigma(\bar{E})} \\ &\leq \left\|x^0 - \sum_{n=1}^{N} x_n^0\right\|_{E_0} + \left\|x^1 - \sum_{n=1}^{N} x_n^1\right\|_{E_1}. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge em $\Sigma(\bar{E})$ para x. Portanto temos que, $\left(\Sigma(\bar{E}), \|\cdot\|_{\Sigma(\bar{E})}\right)$ é Banach.

Corolário 1.2.6. *Os espaços* $\left(\Sigma(\bar{E}), K(t,\cdot)\right)$ *e* $\left(\Delta(\bar{E}), J(t,\cdot)\right)$ *são espaços de Banach, para todo* $t > 0$.

Demonstração. Segue imediatamente das Proposições 1.2.3, 1.2.4 e do Teorema 1.2.5.

Lema 1.2.7. *A função* $t \longmapsto K(t,x)$ *é não negativa, não decrescente e côncava, para qualquer* $x \in \Sigma(\bar{E})$. *Em particular, para quaisquer* $t, s > 0$,

$$\min(1, t/s)K(s,x) \leq K(t,x) \leq \max(1, t/s)K(s,x).$$

Demonstração. Suponhamos que $K(\cdot, x)$ não seja não negativa. Então existe $t_0 > 0$ tal que $K(t_0, x) < 0$, o que contradiz o fato de $K(t_0, \cdot)$ ser uma norma sobre $\Sigma(\bar{E})$. Logo $K(\cdot, x)$ é não negativa.

Sejam $t, s \in (0, \infty)$, tal que $t < s$. Então $t \|x_1\|_{E_1} \leq s \|x_1\|_{E_1}$ para todo $x_1 \in E_1$, e assim $\|x_0\|_{E_0} + t \|x_1\|_{E_1} \leq \|x_0\|_{E_0} + s \|x_1\|_{E_1}$ para todo $x_0 \in E_0$ e $x_1 \in E_1$. Portanto $K(t, x) \leq K(s, x)$, ou seja, $K(\cdot, x)$ é não decrescente.

Consideremos $t_1, t_2 \in (0, \infty)$ e $s \in [0, 1]$. Então

$$\begin{aligned}
(1-s)K(t_1, x) + sK(t_2, x) &= (1-s) \inf_{x = x_0 + x_1 \in \Sigma(\bar{E})} \left(\|x_0\|_{E_0} + t_1 \|x_1\|_{E_1} \right) + \\
&\quad + s \inf_{x = x_0 + x_1 \in \Sigma(\bar{E})} \left(\|x_0\|_{E_0} + t_2 \|x_1\|_{E_1} \right) \\
&= \inf_{x = x_0 + x_1 \in \Sigma(\bar{E})} \left((1-s) \|x_0\|_{E_0} + (1-s)t_1 \|x_1\|_{E_1} \right) + \\
&\quad + \inf_{x = x_0 + x_1 \in \Sigma(\bar{E})} (s \|x_0\|_{E_0} + st_2 \|x_1\|_{E_1}) \\
&\leq \inf_{x = x_0 + x_1 \in \Sigma(\bar{E})} \left(\|x_0\|_{E_0} + (1-s)t_1 \|x_1\|_{E_1} + st_2 \|x_1\|_{E_1} \right) \\
&= \inf_{x = x_0 + x_1 \in \Sigma(\bar{E})} \left(\|x_0\|_{E_0} + ((1-s)t_1 + st_2) \|x_1\|_{E_1} \right) \\
&= K\left((1-s)t_1 + st_2, x \right),
\end{aligned}$$

e portanto $K(\cdot, x)$ é côncava.

Sejam agora, $t, s > 0$. Se $t < s$, como $K(\cdot, x)$ é não decrescente, $K(t, x) \leq K(s, x) = \max(1, t/s)K(s, x)$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
sK(t, x) &= \inf_{x = x_0 + x_1 \in \Sigma(\bar{E})} \left(s \|x_0\|_{E_0} + st \|x_1\|_{E_1} \right) \\
&\geq \inf_{x = x_0 + x_1 \in \Sigma(\bar{E})} \left(t \|x_0\|_{E_0} + ts \|x_1\|_{E_1} \right) \\
&= tK(s, x)
\end{aligned}$$

e portanto, $K(t, x) \geq (t/s)K(s, x) = \min(1, t/s)K(s, x)$. Assim,

$$\min(1, t/s)K(s, x) \leq K(t, x) \leq \max(1, t/s)K(s, x).$$

Se $t \geq s$, $K(t, x) \geq K(s, x) = \min(1, t/s)K(s, x)$. Além disso,

$$\begin{aligned}
sK(t, x) &= \inf_{x = x_0 + x_1 \in \Sigma(\bar{E})} (s \|x_0\|_{E_0} + st \|x_1\|_{E_1}) \\
&\leq \inf_{x = x_0 + x_1 \in \Sigma(\bar{E})} (t \|x_0\|_{E_0} + ts \|x_1\|_{E_1}) \\
&= tK(s, x)
\end{aligned}$$

e portanto $K(t,x) \leq (t/s)K(s,x) = \max(1,t/s)K(s,x)$. Assim

$$\min(1,t/s)K(s,x) \leq K(t,x) \leq \max(1,t/s)K(s,x).$$

Lema 1.2.8. *A função $t \longmapsto J(t,x)$ é não negativa, não decrescente e convexa, para qualquer $x \in \Delta(\bar{E})$. Em particular, para quaisquer $t,s > 0$,*

$$\min(1,t/s)J(s,x) \leq J(t,x) \leq \max(1,t/s)J(s,x)$$

e

$$K(t,x) \leq \min(1,t/s)J(s,x).$$

Demonstração. Dado $x \in \Delta(\bar{E})$, como $\|x\|_{E_0} \geq 0$ e $t\|x\|_{E_1} \geq 0$, temos que $J(t,x) = \max\left(\|x\|_{E_0}, t\|x\|_{E_1}\right) \geq 0$, $t > 0$, ou seja, a função $t \longmapsto J(t,x)$ é não negativa.

Dados $t,s \in (0,\infty)$, $t < s$, temos que

$$J(t,x) = \max\left(\|x\|_{E_0}, t\|x\|_{E_1}\right) \leq \max\left(\|x\|_{E_0}, s\|x\|_{E_1}\right) = J(s,x),$$

ou seja, a função $t \longmapsto J(t,x)$ é não decrescente.

Dados $t_1, t_2 \in (0,\infty)$ e $s \in [0,1]$, temos que,

$$\begin{aligned}
(1-s)J(t_1,x) + sJ(t_2,x) &= (1-s)\max\left(\|x\|_{E_0}, t_1\|x\|_{E_1}\right) + s\max\left(\|x\|_{E_0}, t_2\|x\|_{E_1}\right) \\
&= \max\left((1-s)\|x\|_{E_0}, (1-s)t_1\|x\|_{E_1}\right) + \max(s\|x\|_{E_0}, st_2\|x\|_{E_1}) \\
&\geq \max\left((1-s)\|x\|_{E_0} + s\|x\|_{E_0}, (1-s)t_1\|x\|_{E_1} + st_2\|x\|_{E_1}\right) \\
&= \max\left(\|x\|_{E_0}, ((1-s)t_1 + st_2)\|x\|_{E_1}\right) = J\left((1-s)t_1 + st_2, x\right)
\end{aligned}$$

ou seja, a função $t \longmapsto J(t,x)$ é convexa.

Sejam agora $t,s \in (0,\infty)$. Como $x \in \Delta(\bar{E})$ podemos escrever $x = x + 0 = 0 + x \in \Sigma(\bar{E})$ e assim segue por (1.21) que

$$K(t,x) \leq \|x\|_{E_0} \quad \text{e} \quad K(t,x) \leq t\|x\|_{E_1}. \tag{1.25}$$

Se $t < s$, então $J(t,x) \leq J(s,x) = \max(1,t/s)J(s,x)$, e também

$$\begin{aligned}
\min(1,t/s)J(s,x) &= (t/s)J(s,x) = \max\left((t/s)\|x\|_{E_0}, t\|x\|_{E_1}\right) \\
&\leq \max\left(\|x\|_{E_0}, t\|x\|_{E_1}\right) = J(t,x).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\min(1,t/s)J(s,x) \leq J(t,x) \leq \max(1,t/s)J(s,x).$$

Além disso, por (1.25)

$$\min(1, t/s)J(s, x) = (t/s) \max\left(\|x\|_{E_0}, s\|x\|_{E_1}\right) \geq t\|x\|_{E_1} \geq K(t, x).$$

Se $t \geq s$, então $\min(1, t/s)J(s, x) = J(s, x) \leq J(t, x)$, e também

$$\begin{aligned} sJ(t, x) &= \max(s\|x\|_{E_0}, st\|x\|_{E_1}) \leq \max(t\|x\|_{E_0}, ts\|x\|_{E_1}) \\ &= t\max\left(\|x\|_{E_0}, s\|x\|_{E_1}\right) = tJ(s, x), \end{aligned}$$

ou seja, $J(t, x) \leq (t/s)J(s, x) = \max(1, t/s)J(s, x)$. Portanto,

$$\min(1, t/s)J(s, x) \leq J(t, x) \leq \max(1, t/s)J(s, x).$$

Além disso, por (1.25),

$$\min(1, t/s)J(s, x) = \max\left(\|x\|_{E_0}, s\|x\|_{E_1}\right) \geq \|x\|_{E_0} \geq K(t, x).$$

Definição 1.2.9. Sejam $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$. Para cada função mensurável não negativa $\varphi : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definimos:

$$\Phi_{\theta,q}(\varphi(t)) = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty \left(t^{-\theta}\varphi(t)\right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} & , 1 \leq q < \infty, \\ \operatorname{sup\,ess}_{t>0} \left(t^{-\theta}\varphi(t)\right) & , q = \infty. \end{cases}$$

Observação 1.2.10. Qualquer $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ não decrescente é Borel mensurável. De fato, se f é não decrescente, dado $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que $A_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$ só pode ser uma semi-reta da forma $\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ ou $\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ para algum $a \in \mathbb{R}$, ou A_α é $\mathbb{R}$ ou $\emptyset$. Em particular as funções $t \longmapsto K(t, x)$ e $t \longmapsto J(t, y)$ são mensuráveis para cada $x \in \Sigma(\bar{E})$ e $y \in \Delta(\bar{E})$.

Definição 1.2.11. Para $x \in \Sigma(\bar{E})$ definimos,

$$\|x\|_{\theta,q;K} = \Phi_{\theta,q}(K(t, x)).$$

Lema 1.2.12. *A função $t \longmapsto K(t, x)$ é contínua, para todo $x \in \Sigma(\bar{E})$.*

Demonstração. Vimos no Lema 1.2.7 que $t \longmapsto K(t, x)$ é não decrescente e côncava. Portanto para $t_0 \in (0, \infty)$ e $s \in [0, 1]$, temos que,

$$K(t_0, x) \geq K\left((1-s)\frac{t_0}{2} + st_0, x\right) \geq (1-s)K\left(\frac{t_0}{2}, x\right) + sK(t_0, x)$$

e assim

$$\lim_{\substack{s\to 1\\ s<1}} K(t_0,x) \geq \lim_{\substack{s\to 1\\ s<1}} K\left((1-s)\frac{t_0}{2}+st_0,x\right) \geq \lim_{\substack{s\to 1\\ s<1}}\left((1-s)K\left(\frac{t_0}{2},x\right)+sK(t_0,x)\right).$$

Logo, pelo Teorema do Confronto segue que,

$$\lim_{\substack{s\to 1\\ s<1}} K\left((1-s)\frac{t_0}{2}+st_0,x\right) = K(t_0,x) = K\left(\lim_{\substack{s\to 1\\ s<1}}\left((1-s)\frac{t_0}{2}+st_0\right),x\right).$$

Conseqüentemente $K(\cdot,x)$ é contínua à esquerda em todo ponto $t_0\in(0,\infty)$. Suponhamos agora que $K(\cdot,x)$ não seja contínua. Então existe $t_0\in(0,\infty)$ tal que $K(t_0,x)<\lim_{\substack{t\to t_0\\ t>t_0}}K(t,x)$, pois $K(\cdot,x)$ é contínua a esquerda em t_0 e é não decrescente. Seja $\epsilon=\lim_{\substack{t\to t_0\\ t>t_0}}K(t,x)-K(t_0,x)>0$. Então existe $\delta>0$ tal que se $t_0-\delta\leq t\leq t_0$ então $K(t_0,x)-K(t,x)\leq\epsilon/2$. Assim temos que,

$$\begin{cases} K(t_0,x)-K(t_0-\delta,x)\leq\frac{\epsilon}{2},\\ K(t_0+\delta,x)-K(t_0,x)\geq\epsilon\end{cases}$$

e logo,

$$\begin{cases} \frac{1}{2}K(t_0-\delta,x)\geq\frac{1}{2}K(t_0,x)-\frac{\epsilon}{4},\\ \frac{1}{2}K(t_0+\delta,x)\geq\frac{1}{2}K(t_0,x)+\frac{\epsilon}{2}.\end{cases}$$

Portanto

$$\frac{1}{2}K(t_0-\delta,x)+\frac{1}{2}K(t_0+\delta,x)\geq K(t_0,x)+\frac{\epsilon}{4}>K(t_0,x),$$

o que contradiz o fato de $K(\cdot,x)$ ser côncava. De fato, como $K(\cdot,x)$ côncava, temos que para todo $s\in[0,1]$,

$$K\left((1-s)(t_0-\delta)+s(t_0+\delta),x\right)\geq(1-s)K(t_0-\delta,x)+sK(t_0+\delta,x),$$

e em particular, para $s=1/2$, temos

$$K(t_0,x)\geq\frac{1}{2}K(t_0-\delta,x)+\frac{1}{2}K(t_0+\delta,x).$$

Logo a função $t\longmapsto K(t,x)$ é contínua.

Lema 1.2.13. *A função $x\in\Sigma(\bar{E})\longmapsto\|x\|_{\theta,q;K}$ tem as propriedades de uma norma.*

Demonstração. (i) Dado $x\in\Sigma(\bar{E})$, a função $t\longmapsto K(t,x)$ é contínua e não negativa, e portanto segue imediatamente que:

$$\left(\int_0^\infty\left(t^{-\theta}K(t,x)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}\geq 0,\quad 1\leq q<\infty,$$
$$\sup\mathrm{ess}_{t>0}\left(t^{-\theta}K(t,x)\right)\geq 0,\quad q=\infty.$$

(ii) Novamente pelo fato de que a função $t \longmapsto K(t,x)$ é contínua e não negativa, segue imediatamente que, $x = 0$ se e somente se,

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty \big(t^{-\theta}K(t,x)\big)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} &= 0, \quad 1 \le q < \infty, \\ \sup\operatorname{ess}_{t>0}\big(t^{-\theta}K(t,x)\big) &= 0, \quad q = \infty. \end{aligned}$$

(iii) Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ e $x \in \Sigma(\bar{E})$. Para $1 \le q < \infty$, temos

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|_{\theta,q;K} &= \left(\int_0^\infty \big(t^{-\theta}K(t,\lambda x)\big)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} = \left(\int_0^\infty \big(t^{-\theta}\,|\lambda|\,K(t,x)\big)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\ &= \left(\int_0^\infty |\lambda|^q \,\big(t^{-\theta}K(t,x)\big)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} = \left(|\lambda|^q \int_0^\infty \big(t^{-\theta}K(t,x)\big)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\ &= |\lambda| \left(\int_0^\infty \big(t^{-\theta}K(t,x)\big)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} = |\lambda|\, \|x\|_{\theta,q;K} \end{aligned}$$

e para $q = \infty$ temos

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|_{\theta,q;K} &= \sup\operatorname{ess}_{t>0}\big(t^{-\theta}K(t,\lambda x)\big) = \sup\operatorname{ess}_{t>0}\big(t^{-\theta}|\lambda|K(t,x)\big) \\ &= |\lambda| \sup\operatorname{ess}_{t>0}\big(t^{-\theta}K(t,x)\big) = |\lambda|\,\|x\|_{\theta,q;K}\,. \end{aligned}$$

(iv) Sejam $x, y \in \Sigma(\bar{E})$. Para $1 \le q < \infty$, temos

$$\begin{aligned} \|x+y\|_{\theta,q;K} &= \left(\int_0^\infty \big(t^{-\theta}K(t,x+y)\big)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\ &\le \left(\int_0^\infty \big(t^{-\theta}K(t,x) + t^{-\theta}K(t,y)\big)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\ &\le \left(\int_0^\infty \big(t^{-\theta}K(t,x)\big)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} + \left(\int_0^\infty \big(t^{-\theta}K(t,y)\big)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\ &= \|x\|_{\theta,q;K} + \|y\|_{\theta,q;K}\,, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade acima para o caso de $\|x\|_{\theta,q;K} < \infty$ e $\|y\|_{\theta,q;K} < \infty$, é garantida pela Desigualdade de Minkowiski, e quando $\|x\|_{\theta,q;K} = \infty$ ou $\|y\|_{\theta,q;K} = \infty$, é trivial. Para $q = \infty$, temos

$$\begin{aligned} \|x+y\|_{\theta,q;K} &= \sup\operatorname{ess}_{t>0}\big(t^{-\theta}K(t,x+y)\big) \\ &\le \sup\operatorname{ess}_{t>0}\big(t^{-\theta}K(t,x) + t^{-\theta}K(t,y)\big) \\ &\le \sup\operatorname{ess}_{t>0}\big(t^{-\theta}K(t,x)\big) + \sup\operatorname{ess}_{t>0}\big(t^{-\theta}K(t,y)\big) \\ &= \|x\|_{\theta,q;K} + \|y\|_{\theta,q;K}\,. \end{aligned}$$

Logo a função $x \in \Sigma(\bar{E}) \longmapsto \|x\|_{\theta,q;K}$ tem as propriedades de norma.

Lema 1.2.14. *Para $x \in \Sigma(\bar{E})$ e $s \in (0,+\infty)$, temos que*

$$K(s,x;\bar{E}) \leq C_{\theta,q}\, s^{\theta}\, \|x\|_{\theta,q;K}$$

onde $C_{\theta,q}$ é uma constante positiva que depende somente de θ e q.

Demonstração. Lembremos que pelo Lema 1.2.7, para quaisquer $t, s > 0$ temos,

$$\min(1,t/s)K(s,x) \leq K(t,x).$$

Como $\Phi_{\theta,q}$ é não decrescente, aplicando $\Phi_{\theta,q}$ preservamos a desigualdade acima, isto é,

$$\Phi_{\theta,q}(\min(1,t/s))K(s,x) \leq \|x\|_{\theta,q;K}\,. \tag{1.26}$$

Notemos agora que, se $s>0$, $\varphi(t)$ é mensurável e não negativa, então $\Psi(t)=\varphi(t/s)$ também é mensurável e não negativa. Tomando $u=t/s$ temos que $du=dt/s$ e assim para $1 \leq q < \infty$,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\theta,q}\left(\varphi(t/s)\right) &= \Phi_{\theta,q}\left(\Psi(t)\right) = \left(\int_0^{\infty}\bigl(t^{-\theta}\Psi(t)\bigr)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&= \left(\int_0^{\infty}\bigl(t^{-\theta}\varphi(t/s)\bigr)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} = s^{-\theta}\left(\int_0^{\infty}\bigl((t/s)^{-\theta}\varphi(t/s)\bigr)^q \frac{d(t/s)}{(t/s)}\right)^{1/q} \\
&= s^{-\theta}\Phi_{\theta,q}\left(\varphi(t)\right).
\end{aligned}$$

Para $q=\infty$ também temos que,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\theta,q}\left(\varphi(t/s)\right) &= \Phi_{\theta,q}\left(\Psi(t)\right) = \sup\mathrm{ess}_{t>0}\bigl(t^{-\theta}\Psi(t)\bigr) \\
&= \sup\mathrm{ess}_{t>0}\bigl(t^{-\theta}\varphi(t/s)\bigr) = s^{-\theta}\sup\mathrm{ess}_{t>0}\bigl((t/s)^{-\theta}\varphi(t/s)\bigr) \\
&= s^{-\theta}\sup\mathrm{ess}_{(t/s)>0}\bigl((t/s)^{-\theta}\varphi(t/s)\bigr) \\
&= s^{-\theta}\Phi_{\theta,q}\left(\varphi(t)\right).
\end{aligned}$$

Em particular, para $\varphi(t)=\min(1,t)$ temos

$$\Phi_{\theta,q}\left(\min(1,t/s)\right) = s^{-\theta}\Phi_{\theta,q}\left(\min(1,t)\right). \tag{1.27}$$

Logo, de (1.26) concluímos que,

$$\Phi_{\theta,q}\left(\min(1,t)\right)K(s,x) \leq s^{\theta}\,\|x\|_{\theta,q;K}\,.$$

Então segue o resultado, pois $\Phi_{\theta,q}(\min(1,t))$ é uma constante positiva que só depende de θ e q. De fato, se $1 \leq q < \infty$ temos,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\theta,q}(\min(1,t)) &= \left(\int_0^1 (t^{-\theta}t)^q \frac{dt}{t} + \int_1^\infty t^{-\theta q}\frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&= \left(\int_0^1 t^{q(1-\theta)-1}dt + \int_1^\infty t^{-\theta q-1}dt\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Como $(q(1-\theta)-1) \neq -1$ e $(-\theta q - 1) \neq -1$ segue que,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\theta,q}(\min(1,t)) &= \left(\left.\frac{t^{q(1-\theta)}}{q(1-\theta)}\right|_0^1 + \lim_{N\to\infty}\int_1^N t^{-\theta q-1}dt\right)^{1/q} \\
&= \left(\frac{1}{q(1-\theta)} + \lim_{N\to\infty}\left.\frac{t^{-\theta q}}{-\theta q}\right|_1^N\right)^{1/q} \\
&= \left(\frac{1}{q(1-\theta)} + \lim_{N\to\infty}\left(\frac{N^{-\theta q}}{-\theta q} + \frac{1}{\theta q}\right)\right)^{1/q} \\
&= \left(\frac{1}{q(1-\theta)} + \frac{1}{\theta q}\right)^{1/q} = \frac{1}{(q\theta(1-\theta))^{1/q}}.
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Consideremos agora $q = \infty$. Se $0 < t < 1$, então $t^{-\theta}\min(1,t) = t^{1-\theta} < 1$. Se $t = 1$, então $t^{-\theta}\min(1,t) = 1$. Se $t > 1$, então $t^{-\theta}\min(1,t) = 1/t^\theta < 1$. Logo

$$\Phi_{\theta,q}(\min(1,t)) = \sup\operatorname{ess}_{t>0}\big(t^{-\theta}\min(1,t)\big) = 1.$$

Proposição 1.2.15. *O conjunto*

$$\mathcal{K}_{\theta,q}(\bar{E}) = \{x \in \Sigma(\bar{E}) : \|x\|_{\theta,q;K} < \infty\}$$

é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{\theta,q;K}$.

Demonstração. Segue do Lema 1.2.13 que o conjunto $\mathcal{K}_{\theta,q}(\bar{E})$ é um espaço vetorial normado com a norma $\|\cdot\|_{\theta,q;K}$. Demonstraremos que ele é completo na métrica induzida por esta norma. Para isto, consideremos uma seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}_{\theta,q}(\bar{E})$ tal que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{\theta,q;K} < \infty.$$

Pelo Lema 1.2.14 temos $K(1,x_n) \leq C\|x_n\|_{\theta,q;K}$ e assim

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{\Sigma(\bar{E})} < \infty.$$

Mas pelo Teorema 1.2.5, $\Sigma(\bar{E})$ é Banach, ou seja $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge em $\Sigma(\bar{E})$ para um elemento x. Agora, observemos que,

$$\begin{aligned}\left\|x-\sum_{n=1}^{N} x_n\right\|_{\theta,q;K} &= \Phi_{\theta,q}\left(K\left(t, x-\sum_{n=1}^{N} x_n\right)\right) = \Phi_{\theta,q}\left(K\left(t, \sum_{n>N} x_n\right)\right)\\ &\leq \Phi_{\theta,q}\left(\sum_{n>N} K\left(t, x_n\right)\right) \leq \sum_{n>N} \Phi_{\theta,q}\left(K\left(t, x_n\right)\right)\\ &= \sum_{n>N} \|x_n\|_{\theta,q;K}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|x\|_{\theta,q;K} \leq \left\|x-\sum_{n=1}^{N} x_n\right\|_{\theta,q;K} + \left\|\sum_{n=1}^{N} x_n\right\|_{\theta,q;K} \leq \sum_{n>N} \|x_n\|_{\theta,q;K} + \left\|\sum_{n=1}^{N} x_n\right\|_{\theta,q;K} < \infty.$$

Além disso, dado $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $N \geq N_0$ temos $\sum_{n>N} \|x_n\|_{\theta,q;K} < \epsilon$ e portanto

$$\left\|x-\sum_{n=1}^{N} x_n\right\|_{\theta,q;K} \leq \sum_{n>N} \|x_n\|_{\theta,q;K} < \epsilon.$$

Logo, segue que $x \in \mathcal{K}_{\theta,q}\left(\bar{E}\right)$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge para x em $\mathcal{K}_{\theta,q}\left(\bar{E}\right)$.

Definição 1.2.16. O conjunto $\mathcal{K}_{\theta,q}\left(\bar{E}\right)$ da proposição anterior é chamado *espaço de interpolação do par $\bar{E}$ pelo K-método.*

Teorema 1.2.17. *Sejam (E_0, E_1) e (F_0, F_1) pares de interpolação e T uma aplicação linear de $E_0 + E_1$ em $F_0 + F_1$ tal que $T_j = T\mid_{E_j} \in L\left(E_j, F_j\right)$, com norma $\|T_j\|_{E_j,F_j} = M_j$, $j = 0, 1$. Então, se $0 < \theta < 1$ e $1 \leq q \leq \infty$, $T \in L\left((E_0, E_1)_{\theta,q;K}, (F_0, F_1)_{\theta,q;K}\right)$ e a norma é limitada por $M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$.*

Demonstração. Seja $x \in E_0 + E_1$. Para cada decomposição $x = x_0 + x_1$ corresponde uma decompósição $T(x) = T\left(x_0\right) + T\left(x_1\right)$ e portanto

$$\begin{aligned}K\left(t, T(x)\right) &\leq \left\|T\left(x_0\right)\right\|_{F_0} + t\left\|T\left(x_1\right)\right\|_{F_1}\\ &\leq M_0\left\|x_0\right\|_{E_0} + tM_1\left\|x_1\right\|_{E_1}\\ &= M_0\left(\left\|x_0\right\|_{E_0} + tM_1M_0^{-1}\left\|x_1\right\|_{E_1}\right).\end{aligned}$$

Conseqüentemente

$$K\left(t, T(x)\right) \leq M_0 K\left(tM_1M_0^{-1}, x\right)$$

e

$$\begin{aligned}
\Phi_{\theta,q}\left(K\left(t,T(x)\right)\right) &\leq M_0\Phi_{\theta,q}\left(K\left(tM_1M_0^{-1},x\right)\right)\\
\|T(x)\|_{\bar{F}_{\theta,q;K}} &\leq M_0\left(M_1M_0^{-1}\right)^{\theta}\|x\|_{\bar{E}_{\theta,q;K}}\\
&= M_0M_1^{\theta}M_0^{-\theta}\|x\|_{\bar{E}_{\theta,q;K}}\\
&= M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\|x\|_{\bar{E}_{\theta,q;K}}.
\end{aligned}$$

Notação 1.2.18. Sejam $0<\theta<1$, $1<r<\infty$, $1\leq q\leq\infty$. Denotaremos por $\lambda^{\theta,r,q}$ o espaço de todas as seqüências $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, tal que

$$\|(\alpha_k)\|_{\lambda^{\theta,r,q}}=\begin{cases}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(r^{-k\theta}\left|\alpha_k\right|\right)^q\right)^{1/q} & ,\ 1\leq q<\infty,\\ \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(r^{-k\theta}\left|\alpha_k\right|\right) & ,\ q=\infty.\end{cases}$$

é finito.

Observação 1.2.19. É fácil ver que a função $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in\lambda^{\theta,r,q}\longmapsto\|(\alpha_k)\|_{\lambda^{\theta,r,q}}\in\mathbb{R}$ tem as propriedades de uma norma, sendo que a desigualdade triangular é obtida utilizando a Desigualdade de Minkowiski para series (ver Apêndice) junto com a desigualdade triangular da função módulo. Assim $\left(\lambda^{\theta,r,q},\|\cdot\|_{\lambda^{\theta,r,q}}\right)$ é um espaço vetorial normado.

Lema 1.2.20. *Seja $\bar{E}=(E_0,E_1)$ um par de interpolação e seja $x\in\Sigma(\bar{E})$. Então, $x\in\mathcal{K}_{\theta,q}\left(\bar{E}\right)$ se e somente se $\left(K\left(r^k,x\right)\right)_{k\in\mathbb{Z}}\in\lambda^{\theta,r,q}$. Além disso,*

$$r^{-\theta}\left(\ln r\right)^{1/q}\left\|\left(K\left(r^k,x\right)\right)\right\|_{\lambda^{\theta,r,q}}\leq\|x\|_{\theta,q;K}\leq r\left(\ln r\right)^{1/q}\left\|\left(K\left(r^k,x\right)\right)\right\|_{\lambda^{\theta,r,q}}\tag{1.29}$$

Demonstração. Sejam $r^k\leq t\leq r^{k+1}$ e $1\leq q<\infty$. Pelo Lema 1.2.7 temos,

$$K\left(r^k,x\right)\leq K\left(t,x\right)\leq rK\left(r^k,x\right),$$

e como $r^{-\theta}r^{-k\theta}\leq t^{-\theta}\leq r^{-k\theta}$, segue que

$$\left(r^{-\theta}r^{-k\theta}K\left(r^k,x\right)\right)^q\leq\left(t^{-\theta}K\left(t,x\right)\right)^q\leq\left(rr^{-k\theta}K\left(r^k,x\right)\right)^q.$$

Integrando agora sobre o intervalo $\left[r^k,r^{k+1}\right]$, com respeito a medida dt/t, obtemos

$$r^{-\theta q}\left(\ln r\right)\left(r^{-k\theta}K\left(r^k,x\right)\right)^q\leq\int_{r^k}^{r^{k+1}}\left(t^{-\theta}K\left(t,x\right)\right)^q\frac{dt}{t}\leq r^q\left(\ln r\right)\left(r^{-k\theta}K\left(r^k,x\right)\right)^q$$

e em seguida, fazendo a soma sobre $k \in \mathbb{Z}$ obtemos

$$r^{-\theta q}(\ln r)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(r^{-k\theta}K\left(r^k,x\right)\right)^q \leq \int_0^\infty\left(t^{-\theta}K(t,x)\right)^q\frac{dt}{t} \leq r^q(\ln r)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(r^{-k\theta}K\left(r^k,x\right)\right)^q.$$

Finalmente, elevando a potência $1/q$ obtemos (1.29). Analogamente podemos obter o resultado para $q = \infty$.

Definição 1.2.21. Definimos o *espaço de interpolação do par $\bar{E}$ pelo J-método* como sendo o conjunto $\mathcal{J}_{\theta,q}\left(\bar{E}\right)$, de todo $x \in \Sigma(\bar{E})$ que pode ser representado por

$$x = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}, \tag{1.30}$$

onde u é uma função fortemente mensurável tomando valores em $\Delta(\bar{E})$, e a convergência da integral está sendo considerada em $\Sigma(\bar{E})$ e

$$\Phi_{\theta,q}\left(J\left(t,u\left(t\right)\right)\right) < \infty. \tag{1.31}$$

Observação 1.2.22. Dados $0 < t_1 < t_2 < \infty$, e $u(t)$ fortemente mensurável, tomando valores em $\Delta(\bar{E})$ e tal que vale (1.31), então

$$\left(\int_{t_1}^{t_2}u(t)\frac{dt}{t}\right) \in \Delta(\bar{E}).$$

De fato,

$$\int_{t_1}^{t_2}\|u(t)\|_{\Delta(\bar{E})}\frac{dt}{t} \leq C\left(\int_{t_1}^{t_2}\|u(t)\|_{\Delta(\bar{E})}^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}.$$

Agora, com $0 < \theta < 1$ temos $t_2^{-\theta} \leq t^{-\theta} \leq t_1^{-\theta}$ e assim $1 \leq t_2^{\theta q}t^{-\theta q} \leq (t_2/t_1)^{\theta q}$. Logo pelo Lema 1.2.8

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2}\|u(t)\|_{\Delta(\bar{E})}\frac{dt}{t} &\leq Ct_2^\theta\left(\int_{t_1}^{t_2}\left(t^{-\theta}\|u(t)\|_{\Delta(\bar{E})}\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}\\
&\leq Ct_2^\theta\left(\int_{t_1}^{t_2}\left(t^{-\theta}\max(1,1/t)\,J\left(t,u\left(t\right)\right)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}\\
&\leq Ct_2^\theta\max(1,1/t_1)\left(\int_{t_1}^{t_2}\left(t^{-\theta}J\left(t,u\left(t\right)\right)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}\\
&\leq C'\left(\int_0^\infty\left(t^{-\theta}J\left(t,u\left(t\right)\right)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty,
\end{aligned}$$

ou seja, $\left(\int_{t_1}^{t_2}u(t)\frac{dt}{t}\right) \in \Delta(\bar{E})$.

Definição 1.2.23. Para $x \in \Delta(\bar{E})$ definimos

$$\|x\|_{\theta,q;J} = \inf_u \Phi_{\theta,q}\left(J\left(t, u\left(t\right)\right)\right),$$

onde o ínfimo é tomado sobre toda função $u : (0,\infty) \longrightarrow \Delta(\bar{E})$ fortemente mensurável tal que valem (1.30) e (1.31).

Teorema 1.2.24. *Sejam (E_0, E_1) e (F_0, F_1) pares de interpolação e T uma aplicação linear de $\Sigma(\bar{E})$ em $\Sigma\left(\bar{F}\right)$ tal que $T_j = T\mid_{E_j} \in L\left(E_j, F_j\right)$, com norma $\|T_j\|_{E_j,F_j} = M_j$, $j = 0, 1$. Então, se $0 < \theta < 1$ e $1 \leq q \leq \infty$, $T \in L\left((E_0, E_1)_{\theta,q;J}, (F_0, F_1)_{\theta,q;J}\right)$ e a norma é limitada por $M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$.*

Demonstração. Para $x \in \mathcal{J}_{\theta,q}\left(\bar{E}\right)$, temos, desde que $T : \Sigma(\bar{E}) \longrightarrow \Sigma\left(\bar{F}\right)$ seja linear e limitada, que $T\left(u(t)\right)$ é mensurável,

$$T(x) = T\left(\int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}\right) = \int_0^\infty T\left(u(t)\right)\frac{dt}{t} \quad \left(\text{convergência em } \Sigma\left(\bar{F}\right)\right).$$

Assim, com esta u,

$$\begin{aligned} J\left(t, T\left(u(t)\right)\right) &= \max\left(\left\|T\left(u(t)\right)\right\|_{F_0}, t\left\|T\left(u(t)\right)\right\|_{F_1}\right) \\ &\leq M_0 \max\left(\|u(t)\|_{E_0}, tM_1M_0^{-1}\|u(t)\|_{E_1}\right) \\ &= M_0 J\left(tM_1M_0^{-1}, u(t)\right) \end{aligned}$$

e obtemos, pelas propriedades de $\Phi_{\theta,q}$,

$$\Phi_{\theta,q}\left(J\left(t, T\left(u(t)\right)\right)\right) \leq M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\Phi_{\theta,q}\left(J\left(t, u(t)\right)\right).$$

Tomando o ínfimo sobre u, obtemos

$$\|T(x)\|_{(F_0,F_1)_{\theta,q;J}} \leq M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\|x\|_{(E_0,E_1)_{\theta,q;J}}.$$

Lema 1.2.25. *Seja $\bar{E} = (E_0, E_1)$ um par de interpolação e seja $x \in \Sigma(\bar{E})$. Então, $x \in \mathcal{J}_{\theta,q}\left(\bar{E}\right)$ se e somente se existem $u_k \in \Delta(\bar{E})$, $k \in \mathbb{Z}$, com*

$$x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \quad \left(\text{convergência em } \Sigma(\bar{E})\right) \tag{1.32}$$

tal que $\left(J\left(r^k, u_k\right)\right)_{k\in\mathbb{Z}} \in \lambda^{\theta,r,q}$. Além disso,

$$(\ln r)^{-1+\frac{1}{q}} r^{-\theta} \inf_{(u_k)} \left\|\left(J\left(r^k, u_k\right)\right)\right\|_{\lambda^{\theta,r,q}} \leq \|x\|_{\theta,q;J} \leq r\left(\ln r\right)^{-1+\frac{1}{q}} \inf_{(u_k)} \left\|\left(J\left(r^k, u_k\right)\right)\right\|_{\lambda^{\theta,r,q}}. \tag{1.33}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as seqüências (u_k) satisfazendo (1.32).

Demonstração. Suponhamos que $x \in \mathcal{J}_{\theta,q}\left(\bar{E}\right)$ e seja $x = \int_0^\infty u\left(t\right)\frac{dt}{t}$ uma representação de x tal que $\Phi_{\theta,q}\left(J\left(t,u\left(t\right)\right)\right) < \infty$. Escolhendo $u_k = \int_{r^k}^{r^{k+1}} u\left(t\right)\frac{dt}{t}$, $k \in \mathbb{Z}$, segue da Observação 1.2.22 que cada $u_k \in \Delta(\bar{E})$. É claro que

$$x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k,$$

na norma de $\Sigma(\bar{E})$. De fato, como $\int_0^\infty u\left(t\right)\frac{dt}{t}$ converge para x na norma de $\Sigma(\bar{E})$, então $s_n = \int_{r^{-n}}^{r^{n+1}} u\left(t\right)\frac{dt}{t} \longrightarrow x$ em $\Sigma(\bar{E})$, considerando agora $S_n = \sum_{|k|\leq n} u_k$ a seqüência das soma parciais de u_k vimos que $S_n = s_n$, então $S_n \longrightarrow x$ em $\Sigma(\bar{E})$. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
J\left(r^k, u_k\right) &= \max\left(\left\|\int_{r^k}^{r^{k+1}} u\left(t\right)\frac{dt}{t}\right\|_{E_0}, r^k\left\|\int_{r^k}^{r^{k+1}} u\left(t\right)\frac{dt}{t}\right\|_{E_1}\right)\\
&\leq \max\left(\int_{r^k}^{r^{k+1}} \left\|u\left(t\right)\right\|_{E_0}\frac{dt}{t}, r^k\int_{r^k}^{r^{k+1}} \left\|u\left(t\right)\right\|_{E_1}\frac{dt}{t}\right)\\
&\leq \int_{r^k}^{r^{k+1}} \max\left(\left\|u\left(t\right)\right\|_{E_0}, r^k\left\|u\left(t\right)\right\|_{E_1}\right)\frac{dt}{t}\\
&\leq \int_{r^k}^{r^{k+1}} J\left(r^k, u\left(t\right)\right)\frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Agora, usando o Lema 1.2.8, temos $J\left(r^k, u(t)\right) \leq \max\left(1, r^k/t\right) J\left(t, u(t)\right) = J\left(t, u(t)\right)$ para todo $t \in [r^k, r^{k+1}]$ e logo

$$J\left(r^k, u_k\right) \leq \int_{r^k}^{r^{k+1}} J\left(t, u\left(t\right)\right)\frac{dt}{t}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left(r^{-k\theta} J\left(r^k, u_k\right)\right)^q &\leq \left(r^{-k\theta}\int_{r^k}^{r^{k+1}} J\left(t, u\left(t\right)\right)\frac{dt}{t}\right)^q = \left(r^{\theta} r^{-\theta(k+1)}\int_{r^k}^{r^{k+1}} J\left(t, u\left(t\right)\right)\frac{dt}{t}\right)^q\\
&= r^{\theta q}\left(\int_{r^k}^{r^{k+1}} r^{-\theta(k+1)} J\left(t, u\left(t\right)\right)\frac{dt}{t}\right)^q.
\end{aligned}$$

Portanto, observando que na integral anterior $r^{-\theta(k+1)} \leq t^{-\theta}$, e usando a Desigualdade de Hölder com $p = q/(q-1)$ segue que

$$\begin{aligned}
\left(r^{-k\theta} J\left(r^k, u_k\right)\right)^q &\leq r^{\theta q}\left(\int_{r^k}^{r^{k+1}} t^{-\theta} J\left(t, u\left(t\right)\right) \frac{dt}{t}\right)^q \\
&= r^{\theta q}\left(\int_{r^k}^{r^{k+1}} \left(t^{-\theta} J\left(t, u\left(t\right)\right) \frac{1}{t^{1/q}}\right)\left(\frac{1}{t^{1-1/q}}\right) dt\right)^q \\
&\leq r^{\theta q}\left(\left(\int_{r^k}^{r^{k+1}} \left(t^{-\theta} J\left(t, u\left(t\right)\right) \frac{1}{t^{1/q}}\right)^q dt\right)^{1/q}\left(\int_{r^k}^{r^{k+1}} \left(\frac{1}{t^{1-1/q}}\right)^{q/(q-1)} dt\right)^{1-1/q}\right)^q \\
&= r^{\theta q}\left(\int_{r^k}^{r^{k+1}} \left(t^{-\theta} J\left(t, u\left(t\right)\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)\left(\int_{r^k}^{r^{k+1}} \frac{dt}{t}\right)^{q-1} \\
&= r^{\theta q}\left(\ln r\right)^{q-1} \int_{r^k}^{r^{k+1}} \left(t^{-\theta} J\left(t, u\left(t\right)\right)\right)^q \frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

Portanto, fazendo a soma em $k \in \mathbb{Z}$ e elevando ambos os lados da desigualdade à potência $1/q$ obtemos,

$$\left\|\left(J\left(r^k, u_k\right)\right)\right\|_{\lambda^{\theta,r,q}} \leq \left(\ln r\right)^{1-\frac{1}{q}} r^{\theta} \Phi_{\theta,q}\left(J\left(t, u(t)\right)\right) < \infty$$

e assim $\left(J\left(r^k, u_k\right)\right)_{k\in\mathbb{Z}} \in \lambda^{\theta,r,q}$. Além disso, tomando o ínfimo sobre toda u satisfazendo (1.30), em ambos os lados da desigualdade acima, obtemos

$$\left(\ln r\right)^{-1+\frac{1}{q}} r^{-\theta} \inf_u \left\|\left(J\left(r^k, \int_{r^k}^{r^{k+1}} u\left(t\right) \frac{dt}{t}\right)\right)\right\|_{\lambda^{\theta,r,q}} \leq \|x\|_{\theta,q;J}. \tag{1.34}$$

Reciprocamente, suponhamos que $x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k$ com $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \Delta(\bar{E})$, e que $\left(J\left(r^k, u_k\right)\right) \in \lambda^{\theta,r,q}$. Escolhendo $u(t) = u_k/\ln r,\ r^k \leq t < r^{k+1}$ temos,

$$\begin{aligned}
x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{u_k}{\ln r} \int_{r^k}^{r^{k+1}} \frac{dt}{t}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_{r^k}^{r^{k+1}} \frac{u_k}{\ln r} \frac{dt}{t}\right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_{r^k}^{r^{k+1}} u(t) \frac{dt}{t}\right) = \int_0^{\infty} u(t) \frac{dt}{t},
\end{aligned}$$

onde a convergência ocorre em $\Sigma(\bar{E})$. Se $r^k \leq t < r^{k+1}$ então segue do Lema 1.2.8 que

$$J\left(t, u(t)\right) \leq J\left(r^{k+1}, u(t)\right) \leq \max\left(1, \frac{r^{k+1}}{r^k}\right) J\left(r^k, u(t)\right) = r\left(\ln r\right)^{-1} J\left(r^k, u_k\right)$$

e assim, observando que $t^{-\theta} \leq r^{-k\theta}$ temos

$$\int_{r^k}^{r^{k+1}} \left(t^{-\theta} J\left(t, u(t)\right)\right)^q \frac{dt}{t} \leq r^q \left(\ln r\right)^{-q} J\left(r^k, u_k\right)^q \int_{r^k}^{r^{k+1}} t^{-\theta q} \frac{dt}{t} \leq r^q \left(\ln r\right)^{1-q} \left(r^{-k\theta} J\left(r^k, u_k\right)\right)^q.$$

Portanto, fazendo a soma em $k \in \mathbb{Z}$ e elevando à potência $1/q$, segue que

$$\Phi_{\theta,q}\left(J\left(t,u(t)\right)\right) \leq r\left(\ln r\right)^{-1+\frac{1}{q}} \left\| J\left(r^k,u_k\right)\right\|_{\lambda^{\theta,r,q}} < \infty \tag{1.35}$$

e assim $x \in \mathcal{J}_{\theta,q}\left(\bar{E}\right)$. Além disso, tomando o ínfimo sobre toda seqüência (u_k) satisfazendo (1.32) e tal que $\left(J\left(r^k,u_k\right)\right)_{k\in\mathbb{Z}} \in \lambda^{\theta,r,q}$, em ambos os lados da desigualdade acima obtemos,

$$\|x\|_{\theta,q;J} \leq r\left(\ln r\right)^{-1+\frac{1}{q}} \inf_{(u_k)} \left\|\left(J\left(r^k,u_k\right)\right)\right\|_{\lambda^{\theta,r,q}}. \tag{1.36}$$

Logo, por (1.34) e (1.36) temos (1.33).

Proposição 1.2.26. *Se* $1 \leq q < \infty$ *então* $\Delta(\bar{E})$ *é denso em* $\mathcal{J}_{\theta,q}\left(\bar{E}\right)$.

Demonstração. Seja $x \in \mathcal{J}_{\theta,q}\left(\bar{E}\right)$, então pelo Lema 1.2.25, x pode ser representado por $x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k$ (convergência em $\Sigma(\bar{E})$), onde $u_k \in \Delta(\bar{E})$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ e $\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(r^{-k\theta}J(r^k,u_k)\right)^q\right)^{1/q} < \infty$. Então, $y_N = x - \sum_{|k|\leq N} u_k \in \mathcal{J}_{\theta,q}\left(\bar{E}\right)$ e $y_N = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v_k$ (convergência em $\Sigma(\bar{E})$) onde

$$v_k = \begin{cases} u_k, & |k| > N, \\ 0, & |k| \leq N. \end{cases}$$

Assim pelo Lema 1.2.25 e Proposição 1.2.4 segue que

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{|k|\leq N} u_k \right\|_{\theta,q;J} &= \|y_N\|_{\theta,q;J} \leq C\left\|(v_k)\right\|_{\lambda^{\theta,r,q}} \\ &= C\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(r^{-k\theta}J\left(r^k,v_k\right)\right)^q\right)^{1/q} \\ &= C\left(\sum_{|k|>N}\left(r^{-k\theta}J\left(r^k,u_k\right)\right)^q\right)^{1/q} \end{aligned}$$

e portanto

$$\lim_{N\to\infty}\left\| x - \sum_{|k|\leq N} u_k \right\|_{\theta,q;J} = 0.$$

Observação 1.2.27. O J-método e o K-método são chamados, *métodos de interpolação real.*

1.3 Teorema de Equivalência

Lema 1.3.1 (Lema Fundamental da Teoria de Interpolação). *Suponhamos que*

$$\min(1, 1/t)\, K(t,x) \longrightarrow 0 \quad \textit{com} \quad t \longrightarrow 0 \quad \textit{ou} \quad t \longrightarrow \infty.$$

Então, existe uma representação

$$x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \quad \big(\textit{convergência} \;\; \textit{em} \;\; \Sigma(\bar{E})\big)$$

de x, tal que $J\left(2^k, u_k\right) \leq 4K\left(2^k, x\right)$.

Demonstração. Dado um inteiro k, por (1.21), existe uma decomposição $x = x_k^0 + x_k^1$, tal que

$$\left\|x_k^0\right\|_{E_0} + 2^k \left\|x_k^1\right\|_{E_1} \leq \left(1 + \frac{1}{3}\right) K\left(2^k, x\right). \tag{1.37}$$

Assim, usando a hipótese

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{k\to-\infty} \left\|x_k^0\right\|_{E_0} + \lim_{k\to-\infty} 2^k \left\|x_k^1\right\|_{E_1} &\leq \left(1+\frac{1}{3}\right) \lim_{k\to-\infty} K\left(2^k, x\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{3}\right) \lim_{k\to-\infty} \min\left(1, \frac{1}{2^k}\right) K\left(2^k, x\right) = 0 \end{aligned}$$

e portanto,

$$\lim_{k\to-\infty} \left\|x_k^0\right\|_{E_0} = 0. \tag{1.38}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2^k} \left\|x_k^0\right\|_{E_0} + \lim_{k\to+\infty} \left\|x_k^1\right\|_{E_1} &\leq \left(1+\frac{1}{3}\right) \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2^k} K\left(2^k, x\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{3}\right) \lim_{k\to+\infty} \left(\min\left(1, \frac{1}{2^k}\right) K\left(2^k, x\right)\right) = 0 \end{aligned}$$

e portanto,

$$\lim_{k\to+\infty} \left\|x_k^1\right\|_{E_1} = 0. \tag{1.39}$$

Escolhemos $u_k = x_k^0 - x_{k-1}^0 = x_{k-1}^1 - x_k^1$, assim temos que $u_k \in \Delta(\bar{E})$ e para quaisquer $M, N \in \mathbb{N}$ segue que

$$x - \sum_{k=-N}^{M} u_k = x - x_M^0 + x_{-N-1}^0 = x_{-N-1}^0 + x_M^1.$$

Portanto por (1.20)

$$\left\| x - \sum_{k=-N}^{M} u_k \right\|_{\Sigma(\bar{E})} \leq \left\| x^0_{-N-1} \right\|_{E_0} + \left\| x^1_M \right\|_{E_1} .$$

Fazendo $N \to \infty$ e $M \to \infty$ em ambos os membros da desigualdade acima e usando (1.38) e (1.39), obtemos

$$x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \quad \left(\text{convergência em } \Sigma(\bar{E})\right).$$

Além disso, temos por (1.37) e pelo Lema 1.2.7 que

$$\begin{aligned}
J\left(2^k, u_k\right) &= \max\left(\|u_k\|_{E_0}, 2^k \|u_k\|_{E_1}\right) \\
&\leq \max\left(\left\|x^0_k\right\|_{E_0} + \left\|x^0_{k-1}\right\|_{E_0}, 2^k\left(\left\|x^1_{k-1}\right\|_{E_1} + \left\|x^1_k\right\|_{E_1}\right)\right) \\
&\leq \left(\left\|x^0_k\right\|_{E_0} + 2^k \left\|x^1_k\right\|_{E_1}\right) + \left\|x^0_{k-1}\right\|_{E_0} + 2^k \left\|x^1_{k-1}\right\|_{E_1} \\
&\leq \left(1 + \frac{1}{3}\right) K\left(2^k, x\right) + 2\left\|x^0_{k-1}\right\|_{E_0} + 2^k \left\|x^1_{k-1}\right\|_{E_1} \\
&\leq \left(1 + \frac{1}{3}\right) K\left(2^k, x\right) + 2\left(1 + \frac{1}{3}\right) K\left(2^{k-1}, x\right) \\
&\leq 3\left(1 + \frac{1}{3}\right) K\left(2^k, x\right) = 4K\left(2^k, x\right).
\end{aligned}$$

Corolário 1.3.2. *Seja $x \in \Sigma(\bar{E})$ um elemento que satisfaz*

$$\lim_{t \to 0} K(t, x) = 0 \quad e \quad \lim_{t \to \infty} t^{-1} K(t, x) = 0.$$

Então, existe uma função fortemente mensurável $u = u(t)$, com $u(t) \in \Delta(\bar{E})$, satisfazendo

$$x = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t} \quad \left(\textit{convergência em } \Sigma(\bar{E})\right) \tag{1.40}$$

e para todo $t > 0$, $J(t, u(t)) \leq 8 (\ln 2)^{-1} K(t, x)$.

Demonstração. Sejam $(x^0_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (x^1_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ e $(u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ as seqüências obtidas na demonstração do Lema 1.3.1. Agora, para $2^{k-1} \leq t < 2^k$, definimos

$$u(t) = (\ln 2)^{-1} u_k = (\ln 2)^{-1}\left(x^0_k - x^0_{k-1}\right) = (\ln 2)^{-1}\left(x^1_{k-1} - x^1_k\right). \tag{1.41}$$

É claro que $u = u(t)$ é uma função fortemente mensurável, toma valores em $\Delta(\bar{E})$ e

$$\int_{2^{-N}}^{2^N} u(t) \frac{dt}{t} = \sum_{k=-N+1}^{N} u_k = x - x^0_{-N} - x^1_N.$$

Fazendo $N \longrightarrow \infty$, obtemos (1.40). Mais ainda, se $2^{k-1} \leq t < 2^k$, temos por (1.41), Lema 1.3.1 e Lema 1.2.7 que

$$\begin{aligned} J(t,u(t)) &\leq (\ln 2)^{-1} J\left(2^k, u_k\right) \\ &\leq 4\,(\ln 2)^{-1} K\left(2^k, x\right) \\ &\leq 4\,(\ln 2)^{-1} \max\left(1, \frac{2^k}{2^{k-1}}\right) K\left(2^{k-1}, x\right) \\ &\leq 8\,(\ln 2)^{-1} K\,(t,x)\,. \end{aligned}$$

Lema 1.3.3. *Para $x \in \Delta(\bar{E})$ e $s \in (0,\infty)$, temos que*

$$\|x\|_{\theta,q;J} \leq C_\theta\, s^{-\theta} J(s,x;\bar{E})$$

onde C_θ é uma constante positiva que depende somente de θ.

Demonstração. Sejam $x \in \Delta(\bar{E})$ e $s > 0$. Como $x \in \mathcal{K}_{\theta,q}\left(\bar{E}\right)$, segue pelo Lema 1.2.14 que $\lim_{t\to 0} K(t,x) = 0$ e $\lim_{t\to\infty} t^{-1}K(t,x) = 0$. Então pelo Corolário 1.3.2, existe uma função $u = u(t)$, fortemente mensurável em $\Sigma(\bar{E})$ e tomando valores em $\Delta(\bar{E})$, satisfazendo

$$x = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t} \quad \left(\text{convergência em } \Sigma(\bar{E})\right)$$

e $J\,(t,u(t)) \leq 8\,(\ln 2)^{-1} K\,(t,x)$, para todo $t > 0$. Logo pela Definição 1.2.23, Lema 1.2.8 e por (1.27), temos

$$\begin{aligned} \|x\|_{\theta,q;J} &\leq \Phi_{\theta,q}\left(J\,(t,u(t))\right) \\ &\leq \Phi_{\theta,q}\left(8\,(\ln 2)^{-1} K\,(t,x)\right) \\ &\leq \Phi_{\theta,q}\left(8\,(\ln 2)^{-1} \min\left(1, \frac{t}{s}\right) J(s,x)\right) \\ &\leq 8\,(\ln 2)^{-1}\, \Phi_{\theta,q}\left(\min\left(1, \frac{t}{s}\right)\right) J(s,x) \\ &\leq 8\,(\ln 2)^{-1}\, \Phi_{\theta,q}\left(\min\left(1,t\right)\right) s^{-\theta} J(s,x). \end{aligned} \tag{1.42}$$

Para $0 < \theta < 1$ fixo, sejam $g(q) = \Phi_{\theta,q}\left(\min\left(1,t\right)\right) = 1/\left(q\theta\left(1-\theta\right)\right)^{1/q}$, $1 \leq q < \infty$ e $h(q) = \ln\left(1/\left(q\theta\left(1-\theta\right)\right)^{1/q}\right) = (-1/q)\ln\left(q\theta\left(1-\theta\right)\right)$. Assim $g(q) = e^{h(q)}$ e então estudando o comportamento de $h(q)$ estaremos estudando também o de $g(q)$. Temos que

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dq} &= \frac{1}{q^2}\ln\left(q\theta\left(1-\theta\right)\right) - \frac{1}{q}\frac{\theta\left(1-\theta\right)}{q\theta\left(1-\theta\right)} \\ &= \frac{1}{q^2}\left(\ln\left(q\theta\left(1-\theta\right)\right) - 1\right), \end{aligned}$$

assim $q = e/\left(\theta\left(1-\theta\right)\right)$ é um ponto crítico da função h que é um ponto de mínimo. Estamos interessados nos pontos de máximo de $h(q)$. Temos que

$$\lim_{q\to 1} -\frac{1}{q}\ln\left(q\theta\left(1-\theta\right)\right) = -\ln\left(\theta\left(1-\theta\right)\right) = \ln\frac{1}{\theta\left(1-\theta\right)} > 0,$$

$$\lim_{q\to\infty} -\frac{1}{q}\ln\left(q\theta\left(1-\theta\right)\right) = \lim_{q\to\infty} -\frac{\theta\left(1-\theta\right)}{q\theta\left(1-\theta\right)} = \lim_{q\to\infty} -\frac{1}{q} = 0.$$

Portanto o máximo de $g(q)$ ocorre quando $q = 1$ e assim $g(q) \leq g(1) = 1/\theta\left(1-\theta\right)$. Conseqüentemente, voltando para (1.42) obtemos

$$\|x\|_{\theta,q;J} \leq \frac{8\left(\ln 2\right)^{-1}}{\theta\left(1-\theta\right)} s^{-\theta} J(s,x).$$

Teorema 1.3.4 (Teorema de Equivalência). *Seja $\bar{E} = (E_0, E_1)$ um par de interpolação, e sejam $0 < \theta < 1$ e $1 \leq q \leq \infty$. Então $\mathcal{J}_{\theta,q}\left(\bar{E}\right) = \mathcal{K}_{\theta,q}\left(\bar{E}\right)$ com equivalência de normas.*

Demonstração. Primeiramente, tomemos $x \in \mathcal{J}_{\theta,q}\left(\bar{E}\right)$ e $x = \int_0^\infty u(t)\,dt/t$. Então, por (1.4) e pelo Lema 1.2.8, segue que

$$\begin{aligned} t^{-\theta}K(t,x) &= t^{-\theta}K\left(t, \int_0^\infty u(s)\frac{ds}{s}\right) \leq \int_0^\infty t^{-\theta}K\left(t,u(s)\right)\frac{ds}{s} \\ &\leq \int_0^\infty t^{-\theta}\min\left(1,t/s\right)J\left(s,u(s)\right)\frac{ds}{s} \\ &= \int_0^\infty \left(t/s\right)^{-\theta}\min\left(1,t/s\right)s^{-\theta}J\left(s,u(s)\right)\frac{ds}{s} = f*g(t), \end{aligned}$$

onde $f(s) = s^{-\theta}J\left(s,u(s)\right)$ e $g(s) = s^{-\theta}\min(1,s)$. Assim usando a Desigualdade de Young (ver Apêndice) para $r = q$ e $p = 1$, obtemos

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta}K\left(t,x\right)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q} \leq \left(\int_0^\infty t^{-\theta}\min\left(1,t\right)\frac{dt}{t}\right)\left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta}J\left(t,u(t)\right)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}.$$

Logo, tomando o ínfimo sobre todas as representações $x = \int_0^\infty u(t)\,dt/t$, obtemos por (1.28)

$$\|x\|_{\theta,q;K} \leq \frac{1}{\theta\left(1-\theta\right)}\|x\|_{\theta,q;J}.$$

Agora, pelo Lema 1.2.14, temos

$$K(t,x) \leq C_{\theta,q}\,t^\theta\,\|x\|_{\theta,q;K}$$

para qualquer $x \in \mathcal{K}_{\theta,q}\left(\bar{E}\right)$. Assim segue que $\min\left(1, 1/t\right) K(t,x) \to 0$ quando $t \to 0$ ou $t \to \infty$. Conseqüentemente, o Lema Fundamental da Teoria de Interpolação implica a existência de uma representação $x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k$, tal que

$$J\left(2^k, u_k\right) \leq 4K\left(2^k, x\right).$$

Portanto

$$\left\|\left(J\left(2^k, u_k\right)\right)\right\|_{\lambda^{\theta,2,q}} \leq 4\left\|\left(K\left(2^k, x\right)\right)\right\|_{\lambda^{\theta,2,q}}.$$

Logo, pelos Lemas 1.2.25 e 1.2.20, obtemos

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\theta,q;J} &\leq 2\left(\ln 2\right)^{-1+\frac{1}{q}}\left\|\left(J\left(2^k, u_k\right)\right)\right\|_{\lambda^{\theta,2,q}} \\
&\leq 2\left(\ln 2\right)^{-1+\frac{1}{q}} 4\left\|\left(K\left(2^k, x\right)\right)\right\|_{\lambda^{\theta,2,q}} \\
&= 8\left(\ln 2\right)^{-1}\left(\ln 2\right)^{1/q}\left\|\left(K\left(2^k, x\right)\right)\right\|_{\lambda^{\theta,2,q}} \\
&\leq 8\left(\ln 2\right)^{-1} 2^{\theta}\|x\|_{\theta,q;K} \\
&\leq 16\left(\ln 2\right)^{-1}\|x\|_{\theta,q;K}.
\end{aligned}$$

Corolário 1.3.5. *O conjunto $\mathcal{J}_{\theta,q}\left(\bar{E}\right)$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{\theta,q;J}$.*

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema 1.3.4 e da Proposição 1.2.15.

Corolário 1.3.6. *Se $1 \leq q < \infty$ então $\Delta(\bar{E})$ é denso em $\mathcal{K}_{\theta,q}\left(\bar{E}\right)$.*

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema 1.3.4 e da Proposição 1.2.26.

Notação 1.3.7. De agora em diante não faremos distinção entre $\mathcal{J}_{\theta,q}\left(\bar{E}\right)$ e $\mathcal{K}_{\theta,q}\left(\bar{E}\right)$, e ambos serão denotados por $\bar{E}_{\theta,q} = (E_0, E_1)_{\theta,q}$. As duas normas $\|\cdot\|_{\theta,q;J}$ e $\|\cdot\|_{\theta,q;K}$ serão denotadas por $\|\cdot\|_{(E_0,E_1)_{\theta,q}}$. É claro que $\left((E_0, E_1)_{\theta,q}, \|\cdot\|_{(E_0,E_1)_{\theta,q}}\right)$ é um espaço de Banach e que $\Delta(\bar{E})$ é denso em $(E_0, E_1)_{\theta,q}$.

Observação 1.3.8. Segue dos Teoremas 1.2.17, 1.2.24 e do Teorema da Equivalência que se (E_0, E_1) e (F_0, F_1) são pares de interpolação e T uma aplicação linear de $\Sigma(\bar{E})$ em $\Sigma\left(\bar{F}\right)$ tal que $T_j = T\mid_{E_j} \in L\left(E_j, F_j\right)$, com norma $\|T_j\|_{E_j,F_j} = M_j$, $j = 0, 1$. Então, se $0 < \theta < 1$ e $1 \leq q \leq \infty$, $T \in L\left(\bar{E}_{\theta,q}, \bar{F}_{\theta,q}\right)$ e a norma é limitada por $M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$. Então para $F_0 = F_1 = F$ com $\|\cdot\|_{F_0} = \|\cdot\|_{F_1} = \|\cdot\|_F$ temos

$$\|T\|_{\bar{E}_{\theta,q},F} \leq \left(\|T_0\|_{E_0,F}\right)^{1-\theta}\left(\|T_1\|_{E_1,F}\right)^{\theta}.$$

Proposição 1.3.9. *Os espaços $\bar{E}_{\theta,q}$ são espaços intermediários entre E_0 e E_1.*

Demonstração. Do Lema 1.3.3 segue que

$$\|x\|_{\theta,q;J} \leq C_\theta J(1,x) = \|x\|_{\Delta(\bar{E})}, \quad x \in \Delta(\bar{E}).$$

Do Lema 1.2.14 segue que

$$\|x\|_{\Sigma(\bar{E})} = K(1,x) \leq C\, \|x\|_{\theta,q;K}, \quad x \in \mathcal{K}_{\theta,q}\left(\bar{E}\right).$$

Assim, o resultado segue do Teorema de Equivalência (Teorema 1.3.4).

1.4 O Teorema de Reiteração

Definição 1.4.1. Seja $\bar{E}$ um par de interpolação. Suponhamos que F seja um espaço intermediário com respeito a $\bar{E}$. Então dizemos que:

(a) *F é de classe* $\mathcal{C}_K\left(\theta;\bar{E}\right)$ se $K\left(t,x;\bar{E}\right) \leq Ct^\theta \|x\|_F$, $x \in F$, $t > 0$;

(b) *F é de classe* $\mathcal{C}_J\left(\theta;\bar{E}\right)$ se $\|x\|_F \leq Ct^{-\theta} J\left(t,x;\bar{E}\right)$, $x \in \Delta(\bar{E})$, $t > 0$.

Também dizemos que *F é de classe* $\mathcal{C}\left(\theta;\bar{E}\right) = \mathcal{C}\left(\theta;E_0,E_1\right)$ se F é de classe $\mathcal{C}_K\left(\theta;\bar{E}\right)$ e de classe $\mathcal{C}_J\left(\theta;\bar{E}\right)$.

Observação 1.4.2. Segue da Proposição 1.3.9 e dos Lemas 1.2.14 e 1.3.3 que $\bar{E}_{\theta,q}$ é de classe $\mathcal{C}\left(\theta;\bar{E}\right)$.

As vezes é conveniente escrever a definição anterior de outra forma, com uso explicito de $K\left(t,x\right)$ e $J\left(t,x\right)$. Na verdade é fácil verificar que

(a) F é de classe $\mathcal{C}_K\left(\theta;\bar{E}\right)$ se e somente se para qualquer $t > 0$ existe $x_0 \in E_0$ e $x_1 \in E_1$, tal que $x = x_0 + x_1$ e $\|x_0\|_{E_0} \leq Ct^\theta \|x\|_F$ e $\|x_1\|_{E_1} \leq Ct^{\theta-1} \|x\|_F$.

Também podemos mostrar que

(b) F é de classe $\mathcal{C}_J\left(\theta;\bar{E}\right)$ se e somente se temos $\|x\|_F \leq C\, \|x\|_{E_0}^{1-\theta} \|x\|_{E_1}^{\theta}$.

De fato, se F é de classe $\mathcal{C}_J\left(\theta;\bar{E}\right)$ temos que

$$\|x\|_F \leq C \max\left(t^{-\theta} \|x\|_{E_0}, t^{1-\theta} \|x\|_{E_1}\right), \quad t > 0.$$

Tomando $t = \|x\|_{E_0} / \|x\|_{E_1}$, obtemos

$$\|x\|_F \leq C\, \|x\|_{E_0}^{1-\theta} \|x\|_{E_1}^{\theta}.$$

Reciprocamente se $\|x\|_F \leq C \|x\|_{E_0}^{1-\theta} \|x\|_{E_1}^{\theta}$ temos que

$$\|x\|_F \leq Ct^{-\theta} \|x\|_{E_0}^{1-\theta} \left(t \|x\|_{E_1}\right)^{\theta} \leq Ct^{-\theta} J\left(t, x; \bar{E}\right).$$

Teorema 1.4.3. *Suponha que $0 < \theta < 1$ e seja F um espaço intermediário com respeito a $\bar{E}$. Então*

(a) F é de classe $\mathcal{C}_K\left(\theta; \bar{E}\right)$ se e somente se

$$\Delta(\bar{E}) \subset F \subset \bar{E}_{\theta,\infty};$$

(b) Um espaço de Banach F é de classe $\mathcal{C}_J\left(\theta; \bar{E}\right)$ se e somente se

$$\bar{E}_{\theta,1} \subset F \subset \Sigma(\bar{E}).$$

(c) Um espaço de Banach F é de classe $\mathcal{C}\left(\theta; \bar{E}\right)$ se e somente se

$$\bar{E}_{\theta,1} \subset F \subset \bar{E}_{\theta,\infty}.$$

Demonstração. Pela definição de $\bar{E}_{\theta,\infty}$ temos que $F \subset \bar{E}_{\theta,\infty}$ se e somente se

$$\sup_{t>0} t^{-\theta} K\left(t, x; \bar{E}\right) \leq C \|x\|_F.$$

Isto claramente prova (a). Para provar (b), suponhamos que F seja um espaço de Banach de classe $\mathcal{C}_J\left(\theta; \bar{E}\right)$ e seja $x \in \bar{E}_{\theta,1}$, $x = \sum_k u_k$ com convergência em $\Sigma(\bar{E})$ (ver Lema 1.2.25). Então

$$\|x\|_F \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|u_k\|_F \leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k\theta} J\left(2^k, u_k; \bar{E}\right) \leq C' \|x\|_{\bar{E}_{\theta,1}} < \infty$$

e portanto $x \in F$. Reciprocamente, suponhamos que $\bar{E}_{\theta,1} \subset F$ e sejam $x \in \Delta(\bar{E})$, $t > 0$. Sejam $n \in \mathbb{Z}$ e $1 < r < \infty$ tais que $t = r^n$ e tomemos

$$u_k = \begin{cases} x & \text{se } k = n, \\ 0 & \text{se } k \neq n. \end{cases}$$

Então

$$\|x\|_F \leq C \|x\|_{\bar{E}_{\theta,1}} \leq Cr^{-n\theta} J\left(r^n, x; \bar{E}\right) = Ct^{-\theta} J\left(t, x; \bar{E}\right),$$

o que mostra que F é de classe $\mathcal{C}_J\left(\theta; \bar{E}\right)$. O item (c) é conseqüência imediata de (a) e (b).

Teorema 1.4.4 (Teorema de Reiteração). *Seja* $\bar{E} = (E_0, E_1)$ *e* $\bar{F} = (F_0, F_1)$ *dois pares de interpolação. Suponhamos que* F_i, $i = 0, 1$ *são completos e de classe* $\mathcal{C}\left(\theta_i; \bar{E}\right)$, *onde* $0 < \theta_i < 1$ *e* $\theta_0 \neq \theta_1$. *Tome* $\theta = (1 - \eta)\, \theta_0 + \eta\theta_1$ *com* $0 < \eta < 1$. *Então, para* $1 \leq q \leq \infty$

$$\bar{F}_{\eta,q} = \bar{E}_{\theta,q},$$

com normas equivalentes.

Demonstração. Suponhamos que $x = x_0 + x_1 \in \bar{F}_{\eta,q}$ com $x_i \in F_i$. Como F_i é de classe $\mathcal{C}\left(\theta_i; \bar{E}\right)$, temos que

$$K\left(t, x; \bar{E}\right) \leq K\left(t, x_0; \bar{E}\right) + K\left(t, x_1; \bar{E}\right) \leq C\left(t^{\theta_0} \left\|x_0\right\|_{F_0} + t^{\theta_1} \left\|x_1\right\|_{F_1}\right)$$

e assim segue que

$$K\left(t, x; \bar{E}\right) \leq C t^{\theta_0} K\left(t^{\theta_1 - \theta_0}, x; \bar{F}\right).$$

Aplicando $\Phi_{\theta,q}$ deduzimos que

$$\Phi_{\theta,q}\left(K\left(t, x; \bar{E}\right)\right) \leq C\left(\int_0^\infty \left(t^{-(\theta-\theta_0)} K\left(t^{\theta_1-\theta_0}, x; \bar{F}\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}.$$

Se trocarmos a variável na integral, escrevendo $s = t^{\theta_1 - \theta_0}$ e notando que $\eta = (\theta - \theta_0) / (\theta_1 - \theta_0)$, obtemos

$$\Phi_{\theta,q}\left(K\left(t, x; \bar{E}\right)\right) \leq C\left(\frac{1}{\theta_1 - \theta_0}\right)^{1/q} \Phi_{\eta,q}\left(K\left(s, x; \bar{F}\right)\right).$$

No membro direito, $\Phi_{\eta,q}$ está agindo sobre a variável s. Segue que $\bar{F}_{\eta,q} \subset \bar{E}_{\theta,q}$.

Agora provaremos a inclusão contrária. Suponhamos que $x \in \bar{E}_{\theta,q}$ e escolhamos uma representação $x = \int_0^\infty u\,(t)\, \frac{dt}{t}$ de x em $\Sigma(\bar{E})$. Se $x \in \bar{F}_{\eta,q}$ temos pelo que já vimos até agora que

$$\|x\|^q_{\bar{F}_{\eta,q}} = C' \int_0^\infty \left(t^{-(\theta-\theta_0)} K\left(t^{\theta_1-\theta_0}, x; \bar{F}\right)\right)^q \frac{dt}{t}.$$

Usando a Proposição 1.2.3, (1.8), Lema 1.2.8 e o fato de F_i ser de classe $\mathcal{C}\left(\theta_i; \bar{E}\right)$, obtemos

$$\begin{aligned}
t^{\theta_0} K\left(t^{\theta_1-\theta_0}, x; \bar{F}\right) &\leq \int_0^\infty t^{\theta_0} K\left(t^{\theta_1-\theta_0}, u(s); \bar{F}\right) \frac{ds}{s} \\
&\leq \int_0^\infty t^{\theta_0} \min\left(1, \left(\frac{t}{s}\right)^{\theta_1-\theta_0}\right) J\left(s^{\theta_1-\theta_0}, u(s); \bar{F}\right) \frac{ds}{s} \\
&\leq \int_0^\infty t^{\theta_0} \min\left(1, \left(\frac{t}{s}\right)^{\theta_1-\theta_0}\right) \max\left(\|u(s)\|_{F_0}, s^{\theta_1-\theta_0} \|u(s)\|_{F_1}\right) \frac{ds}{s} \\
&\leq C'' \int_0^\infty \min\left(\left(\frac{t}{s}\right)^{\theta_0}, \left(\frac{t}{s}\right)^{\theta_1}\right) J\left(s, u(s); \bar{E}\right) \frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $s = \nu t$, aplicando $\Phi_{\theta,q}$ e utilizando a Desigualdade Integral de Minkowiski (ver Apêndice) segue que

$$\begin{aligned} \|x\|_{\bar{F}_{\eta,q}} &\leq C'' \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} \int_0^\infty \min\left(\nu^{-\theta_0}, \nu^{-\theta_1}\right) J\left(\nu t, u(\nu t); \bar{E}\right) \frac{d\nu}{\nu} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ &\leq C'' \left(\int_0^\infty \nu^\theta \min\left(\nu^{-\theta_0}, \nu^{-\theta_1}\right) \frac{d\nu}{\nu} \right) \Phi_{\theta,q}\left(J\left(s, u(s); \bar{E}\right)\right). \end{aligned}$$

Como $\int_0^\infty \nu^\theta \min\left(\nu^{-\theta_0}, \nu^{-\theta_1}\right) \frac{d\nu}{\nu} < \infty$, tomando o ínfimo sobre u obtemos o resultado desejado.

Capítulo 2

Análise Harmônica na Esfera S^d

Este capítulo é dedicado a apresentação de definições e alguns resultados sobre análise harmônica na Esfera S^d que serão utilizados no Capítulo 3. Os resultados foram retirados de [9] e por isso omitiremos a maior parte das demonstrações.

Nas três primeiras seções é realizado um estudo sobre harmônicos esféricos, harmônicos zonais e somas de Cesàro. Na quarta seção é estudado um teorema de multiplicadores que foi demonstrado em [2] mas que pode também ser encontrado em [9].

Consideremos duas seqüências numéricas (a_n) e (b_n). De agora em diante, para facilitar a notação, escreveremos $a_n \ll b_n$, se $a_n \leq cb_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \asymp b_n$, se $c_1 b_n \leq a_n \leq c_2 b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e constantes c, c_1 e c_2. Também usaremos a seguinte notação

$$(a)_+ = \begin{cases} a, & \text{se } a > 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

2.1 Harmônicos Esféricos

Definição 2.1.1. Dizemos que uma função $f : \mathbb{R}^{d+1} \longrightarrow \mathbb{C}$ é *homogênea de grau k*, $k \in \mathbb{Z}$, se $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ para qualquer $\lambda > 0$ e $x \in \mathbb{R}^{d+1}$.

Notação 2.1.2. Denotaremos por $\mathcal{P}$ o conjunto de todos os polinômios definidos sobre $\mathbb{R}^{d+1}$ e por $\mathcal{P}_k$ o subconjunto de $\mathcal{P}$ formado pelos polinômios que são homogêneos de grau k.

Teorema 2.1.3. *Para todo $k \geq 0$, $\mathcal{P}_k$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}$ e*

$$d_k = \dim \mathcal{P}_k = \begin{pmatrix} d+k \\ k \end{pmatrix}.$$

Notação 2.1.4. Seja Δ o operador laplaciano em $\mathbb{R}^{d+1}$. Denotaremos por $\mathcal{A}_k$ o subespaço vetorial de $\mathcal{P}_k$ formado pelos polinômios harmônicos e homogêneos de grau k, isto é,

$$\mathcal{A}_k = \{p \in \mathcal{P}_k : \Delta p = 0\}.$$

Notação 2.1.5. Denotaremos por S^d a esfera unitária $\left\{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\right\}$ de $\mathbb{R}^{d+1}$.

Definição 2.1.6. Um *harmônico esférico de grau k* é a restrição à esfera S^d de um elemento de $\mathcal{A}_k$. Denotaremos por $\mathcal{H}_k$ o conjunto dos harmônicos esféricos de grau k.

Teorema 2.1.7. *Temos que* $\dim \mathcal{H}_0 = 1$, $\dim \mathcal{H}_1 = d+1$ *e*

$$\dim \mathcal{H}_k = \begin{pmatrix} d+k \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d+k-2 \\ k-2 \end{pmatrix} = a_k, \quad k \geq 2.$$

Corolário 2.1.8. *A restrição à esfera S^d de qualquer polinômio de $(d+1)$ variáveis é uma soma finita de harmônicos esféricos.*

Corolário 2.1.9. *Toda função contínua sobre S^d pode ser aproximada uniformemente por combinações lineares finitas de harmônicos esféricos.*

Corolário 2.1.10. *O espaço vetorial gerado pela união $\cup_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$ é denso em $L^p\left(S^d\right)$, $1 \leq p < \infty$.*

Notação 2.1.11. Sejam $f, g \in L^2\left(S^d\right)$. Denotaremos por (f, g) o produto interno usual de f por g em $L^2\left(S^d\right)$, isto é,

$$(f, g) = \int_{S^d} f(x)\overline{g(x)} d\sigma(x),$$

onde σ é a medida de Lebesgue em S^d.

Teorema 2.1.12. *Para $k, l \geq 0$, $k \neq l$, temos $\mathcal{H}_k \perp \mathcal{H}_l$ em relação ao produto interno $(\ ,\ )$.*

Notação 2.1.13. Denotaremos $\mathcal{T}_n = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{H}_k$ e $\mathcal{T} = \cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}_n$. Temos que, $\dim \mathcal{T}_n \asymp n^d$.

Corolário 2.1.14. *Se $f \in L^2\left(S^d\right)$, então f admite uma única representação na forma*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y^{(k)}(x),$$

onde a série acima converge para f na norma de $L^2\left(S^d\right)$ e $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$. Além disso

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left\|Y^{(k)}\right\|_2^2.$$

Notação 2.1.15. Denotaremos por $\mathcal{H}$ a envoltória linear do conjunto $\cup_{k=0}^{\infty}\mathcal{H}_k$, isto é, o conjunto de todas as combinações lineares finitas de elementos de $\cup_{k=0}^{\infty}\mathcal{H}_k$.

2.2 Harmônicos Zonais

Definição 2.2.1. Fixemos $x \in S^d$ e consideremos o funcional linear $L_x^{(k)}$ sobre $\mathcal{H}_k$ que a cada elemento $Y \in \mathcal{H}_k$ associa o valor $L_x^{(k)}(Y) = Y(x)$. Como $\mathcal{H}_k$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno $(\ ,\ )$ de $L^2\left(S^d\right)$, existe um único harmônico esférico $Z_x^{(k)} \in \mathcal{H}_k$ tal que

$$Y(x) = L_x^{(k)}(Y) = \left(Y, \overline{Z_x^{(k)}}\right) = \int_{S^d} Y(y) Z_x^{(k)}(y) d\sigma(y),$$

para todo $Y \in \mathcal{H}_k$. Dizemos que $Z_x^{(k)}$ é o *harmônico zonal de grau k e polo x.*

Lema 2.2.2. *(a) Se $\left\{Y_1^{(k)}, ..., Y_{a_k}^{(k)}\right\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_k$, então*

$$Z_x^{(k)}(y) = \sum_{j=1}^{a_k} \overline{Y_j^{(k)}}(x) Y_j^{(k)}(y).$$

(b) $Z_x^{(k)}$ assume somente valores reais e $Z_x^{(k)}(y) = Z_y^{(k)}(x)$.

(c) Se $u \in SO(d+1)$ então $Z_{ux}^{(k)}(uy) = Z_x^{(k)}(y)$.

Corolário 2.2.3. *(a) $Z_x^{(k)}(x) = \dim \mathcal{H}_k = a_k$, para $x \in S^d$.*

(b) $\sum_{j=1}^{a_k} \left|Y_j^{(k)}(x)\right|^2 = a_k$, para $x \in S^d$.

(c) $\left|Z_x^{(k)}(y)\right| \leq a_k$, para $x, y \in S^d$.

Definição 2.2.4. Seja $\lambda > 0$. Os polinômios $P_k^\lambda(t)$, $-1 \leq t \leq 1$, $k \geq 0$, dados por

$$P_k^\lambda(t) = \sum_{l+j=k} a_l a_j \left(t - i\sqrt{1-t^2}\right)^l \left(t + i\sqrt{1-t^2}\right)^j,$$

onde $a_0 = 1$ e

$$a_k = \frac{\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+k-1)}{k!}, \quad k \geq 1,$$

são chamados de *polinômios ultraesféricos ou de Gegenbauer.*

Teorema 2.2.5. *(a)* $\left(1 - 2rt + r^2\right)^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^\lambda(t) r^k$. *A série converge uniformemente para todo* $r \in \mathbb{R}$, $|r| \leq r_0$, *onde* $r_0, t \in \mathbb{R}$, $0 < r_0 < 1$ *e* $|t| \leq 1$ *são fixos.*

(b) $P_0^\lambda(t) = 1$, $|t| \leq 1$.

(c) $\dfrac{d}{dt} P_k^\lambda(t) = 2\lambda P_{k-1}^{\lambda+1}(t)$, $|t| \leq 1$.

(d) $P_k^\lambda(t)$ *é um polinômio de grau* k, $k \geq 0$.

(e) As combinações lineares finitas de P_k^λ, *formam um subconjunto denso no espaço das funções contínuas sobre o intervalo* $[-1, 1]$ *com a métrica da convergência uniforme.*

(f) $P_k^\lambda(-t) = (-1)^k P_k^\lambda(t)$, $|t| \leq 1$, $k \geq 0$.

Teorema 2.2.6. *Sejam* $d \geq 2$, $\lambda = (d-1)/2$ *e* $k \geq 0$. *Então para todo* $x, y \in S^d$ *temos*

$$Z_y^{(k)}(x) = \frac{d + 2k - 1}{d - 1} P_k^\lambda\left(\langle x, y \rangle\right).$$

Corolário 2.2.7. *Os polinômios* $P_k^{(d-1)/2}(t)$, $k \geq 0$ *são mutuamente ortogonais com respeito ao produto interno*

$$[f, g] = \int_{-1}^{1} f(t) g(t) \left(1 - t^2\right)^{(d-2)/2} dt.$$

Corolário 2.2.8. *Os polinômios* $P_k^{(d-1)/2}(t)$, $k \geq 0$ *formam uma base ortogonal para o espaço* $L^2\left([-1, 1], (1-t^2)^{(d-2)/2}\, dt\right)$.

Teorema 2.2.9 (Teorema de Adição). *Se* $\left\{Y_1^{(k)}, ..., Y_{a_k}^{(k)}\right\}$ *é uma base ortonormal de* $\mathcal{H}_k$, $k \geq 0$, *então*

$$\sum_{j=1}^{a_k} \overline{Y_j^{(k)}}(x) Y_j^{(k)}(y) = Z_x^{(k)}(y) = \frac{d + 2k - 1}{d - 1} P_k^{(d-1)/2}(\cos\theta),$$

onde θ *é o ângulo entre* x *e* y.

Notação 2.2.10. Denotamos por $\widetilde{Z}^{(k)}(t)$ a função

$$\widetilde{Z}^{(k)}(t) = \frac{d+2k-1}{d-1} P_k^{(d-1)/2}(t) \tag{2.1}$$

e se $e = e_{d+1} = (0,0,...,0,1)$ é o polo norte de S^d e $f \in L^2\left(S^d\right)$, definimos a convolução $Z_e^{(k)} * f$ por

$$Z_e^{(k)} * f(x) = \widetilde{Z}^{(k)} * f(x) = \int_{S^d} \widetilde{Z}^{(k)}\left(\langle x,y\rangle\right) f(y) d\sigma(y) = \int_{S^d} Z_x^{(k)}(y) f(y) d\sigma(y). \tag{2.2}$$

Teorema 2.2.11. *Seja $f \in L^2\left(S^d\right)$. Então*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_e^{(k)} * f(x) \tag{2.3}$$

onde a série acima converge para f na norma de $L^2\left(S^d\right)$ e $Z_e^{(k)} * f(x) \in \mathcal{H}_k$.

2.3 Somas de Cesàro

Definição 2.3.1. Seja $\delta \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos o *núcleo de Cesàro* S_n^δ por

$$S_n^\delta = \frac{1}{C_n^\delta} \sum_{m=0}^{n} C_{n-m}^\delta \tilde{Z}^{(m)},$$

onde C_n^δ são os *números de Cesàro de ordem n e índice δ* dados por

$$C_n^\delta = \frac{\Gamma(n+\delta+1)}{\Gamma(\delta+1)\Gamma(n+1)}.$$

Observação 2.3.2. Para $m, k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ temos que

$$\frac{k^m}{m!} \leq \frac{(m+k)!}{m!k!} = (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right).....\left(\frac{k}{m}+1\right) \leq 2^m k^m.$$

Ou seja,

$$C_k^m \asymp k^m. \tag{2.4}$$

Lema 2.3.3. *Considere a L^p-norma da soma de Cesàro S_n^δ dada por*

$$\left\|S_n^\delta\right\|_p = \left(\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^{(d-2)/2} \left|S_n^\delta(x)\right|^p dx\right)^{1/p}.$$

(i) Se $0 \leq \delta \leq (d+1)/2$ então existe uma constante $C > 0$ independente de n, tal que

$$\left\|S_n^\delta\right\|_p \leq C \begin{cases} n^{(d-2\delta-1)/2}, & 1 \leq p < (2d)/(d+2\delta+1), \\ n^{(d-2\delta-1)/2} (\ln n)^{(d+2\delta+1)/(2d)}, & p = (2d)/(d+2\delta+1), \\ n^{d(1-1/p)}, & p > (2d)/(d+2\delta+1). \end{cases}$$

(ii) Se $(d+1)/2 \leq \delta \leq d$ então existe uma constante $C > 0$ independente de n, tal que

$$\left\|S_n^\delta\right\|_p \leq C n^{d(1-1/p)}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Corolário 2.3.4. *Temos que*

$$\left\|S_n^\delta\right\|_1 \ll \begin{cases} n^{(d-1)/2-\delta}, & 0 \leq \delta < (d-1)/2, \\ n^{(d-1)/2-\delta} \ln n, & \delta = (d-1)/2, \\ 1, & \delta > (d-1)/2. \end{cases}$$

Definição 2.3.5. Seja $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência numérica. Definimos

$$\Delta^0 \lambda_k = \lambda_k, \quad \Delta^1 \lambda_k = \lambda_k - \lambda_{k+1}$$

e definimos indutivamente

$$\Delta^{n+1} \lambda_k = \Delta^n \lambda_k - \Delta^n \lambda_{k+1}.$$

Proposição 2.3.6. *Para quaisquer $n, k \in \mathbb{N}$ temos que*

$$\Delta^n \lambda_k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \lambda_{k+j}.$$

Demonstração. Vamos fazer por indução sobre n. Temos que

$$\Delta^2 \lambda_k = \lambda_k - 2\lambda_{k+1} + \lambda_{k+2}.$$

Agora, suponhamos que o resultado seja verdadeiro para algum $n \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned} \Delta^{n+1} \lambda_k &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \lambda_{k+j} - \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \lambda_{k+j+1} \\ &= \lambda_k + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \left[\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right] \lambda_{k+j} + (-1)^{n+1} \lambda_{k+n+1} \\ &= \lambda_k + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n+1}{j} \lambda_{k+j} + (-1)^{n+1} \lambda_{k+n+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \binom{n+1}{j} \lambda_{k+j}. \end{aligned}$$

Definição 2.3.7. Seja $f(x)$ uma função contínua sobre $\mathbb{R}$. Definimos,

$$\Delta_h^1 f(x) = f(x) - f(x+h), \quad \Delta_h^{n+1} f(x) = \Delta_h^n f(x) - \Delta_h^n f(x+h).$$

Proposição 2.3.8. *Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ temos que*

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{n!}{j!\,(n-j)!} f(x+jh).$$

Demonstração. É análoga a demonstração da Proposição 2.3.6.

Proposição 2.3.9. *Seja $f(x)$ uma função real definida para $x \geq 0$ e com derivadas até a ordem n. Então*

$$\Delta_h^n f(x) = (-1)^n \int_0^h \cdots \int_0^h f^{(n)}\left(x + t_1 + t_2 + \cdots + t_n\right) dt_1 dt_2 \ldots dt_n \tag{2.5}$$

e

$$\left|\Delta_h^n f(x)\right| \leq h^n \max_{0 \leq t \leq nh} \left| f^{(n)}\left(x+t\right)\right|.$$

Demonstração. Para $n = 1$, (2.5) é verdadeira pelo Teorema Fundamental do Cálculo, pois

$$-\Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x) = \int_0^h f'(x+t)dt.$$

Suponhamos que (2.5) seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$. Vamos demonstrar que (2.5) também é verdadeira para $n+1$. Novamente pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned}
\Delta_h^{n+1} f(x) &= \Delta_h^n f(x) - \Delta_h^n f(x+h) \\
&= (-1)^n \int_0^h \cdots \int_0^h f^{(n)}\left(x + t_1 + t_2 + \cdots + t_n\right) dt_1 dt_2 \ldots dt_n \\
&\quad - (-1)^n \int_0^h \cdots \int_0^h f^{(n)}\left(x + t_1 + t_2 + \cdots + t_n + h\right) dt_1 dt_2 \ldots dt_n \\
&= (-1)^{n+1} \int_0^h \cdots \int_0^h f^{(n+1)}\left(x + t_1 + t_2 + \cdots + t_{n+1}\right) dt_1 dt_2 \ldots dt_{n+1}
\end{aligned}$$

e portanto obtemos (2.5) para $n+1$. Feito isso segue que

$$\begin{aligned}
\left|\Delta_h^n f(x)\right| &\leq \int_0^h \cdots \int_0^h \left| f^{(n)}\left(x + t_1 + t_2 + \cdots + t_n\right)\right| dt_1 dt_2 \ldots dt_n \\
&\leq h^n \max_{0 \leq t \leq nh} \left| f^{(n)}(x+t)\right|.
\end{aligned}$$

Lema 2.3.10 (A transformada de Abel). *Sejam $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ duas seqüências quaisquer e seja $U_k = \sum_{j=0}^{k} u_j$. Então*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = \sum_{k=0}^{n-1} U_k (v_k - v_{k+1}) + U_n v_n.$$

Lema 2.3.11. *Para qualquer seqüência de funções $(Z_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ e quaisquer $N, n \in \mathbb{N}$ temos que*

$$C_n^N S_n^N(x) = \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{k_1} \cdots \sum_{k_N=0}^{k_{N-1}} \sum_{j=0}^{k_N} Z_j(x).$$

Lema 2.3.12. *Para qualquer seqüência de números $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$, qualquer seqüência de funções $(Z_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ e quaisquer $N, n \in \mathbb{N}$ temos que*

$$\sum_{m=0}^{n} \lambda_m Z_m(x) = \sum_{m=0}^{n-N-1} C_m^N S_m^N(x) \Delta^{N+1} \lambda_m + \sum_{m=0}^{N} C_{n-m}^m S_{n-m}^m(x) \Delta^m \lambda_{n-m}.$$

2.4 Teorema de Multiplicadores

Notação 2.4.1. Denotemos a bola unitária de $L^p\left(S^d\right)$ por $U_p = \left\{\varphi \in L^p\left(S^d\right) : \|\varphi\|_p \leq 1\right\}$.

Definição 2.4.2. Seja $\Lambda = (\lambda_k)_{k\geq 0}$ uma seqüência de números complexos e sejam $1 \leq p, q \leq \infty$. Se para toda $\varphi \in L^p\left(S^d\right)$ existe uma função $f = \Lambda\varphi \in L^q$ com expansão formal em harmônicos esféricos

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \widetilde{Z}^{(k)} * \varphi \tag{2.6}$$

tal que

$$\|\Lambda\|_{p,q} = \sup_{\varphi\in U_p} \|\Lambda\varphi\|_q < \infty, \tag{2.7}$$

dizemos que Λ é um *operador multiplicador de tipo-(p,q)* com norma $\|\Lambda\|_{p,q}$.

Teorema 2.4.3 (Teorema de Multiplicadores). *Seja*

$$N = \begin{cases} (d+1)/2; & d = 3, 5, ... \\ (d+2)/2; & d = 2, 4, ... \end{cases}$$

e seja $\Lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de números complexos. Sejam $1 \leq r, p, q \leq \infty$ tal que $1 - 1/r = (1/p - 1/q)_+$. Suponhamos que

$$\lim_{k\to\infty} \left|\Delta^j \lambda_k\right| k^j = 0, \quad 0 \leq j \leq N \tag{2.8}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\Delta^{N+1}\lambda_n\right| n^{N+d(1-1/r)} < \infty. \tag{2.9}$$

Então existe uma constante positiva C tal que

$$\|\Lambda\|_{p,q} \leq |\lambda_0| + C\sum_{n=1}^{\infty} \left|\Delta^{N+1}\lambda_n\right| n^{N+d(1-1/r)}.$$

Além disso, se $\varphi \in L^p\left(S^d\right)$ e

$$t_n\left(\varphi\right) = \lambda_0 C_0 + \left(\sum_{k=1}^{n} C_k^N S_k^N \Delta^{N+1}\lambda_k\right) * \varphi,$$

temos que

$$\left\|\Lambda\varphi - t_n\left(\varphi\right)\right\|_q \leq C \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\Delta^{N+1}\lambda_k\right| k^{N+d(1-1/r)} \left\|\varphi\right\|_p.$$

Observação 2.4.4. Suponhamos que a seqüência $\Lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfaça a condição (2.8) do Teorema de Multiplicadores e que existe uma constante positiva C e $\eta > 1$, tal que

$$\left|\Delta^{N+1}\lambda_k\right| \leq Ck^{-d(1-1/r)-N-\eta}, \quad k \geq 1.$$

Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\Delta^{N+1}\lambda_n\right| n^{N+d(1-1/r)} \leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\eta} < \infty.$$

Portanto, de acordo com o Teorema de Multiplicadores temos que

$$\|\Lambda\|_{p,q} \leq |\lambda_0| + C\sum_{n=1}^{\infty} \left|\Delta^{N+1}\lambda_n\right| n^{N+d(1-1/r)} \leq |\lambda_0| + C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\eta} \leq |\lambda_0| + C\left(1 + \frac{1}{\eta - 1}\right)$$

e se $\varphi \in L^p\left(S^d\right)$,

$$\left\|\Lambda\varphi - t_n\left(\varphi\right)\right\|_q \leq C \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\Delta^{N+1}\lambda_k\right| k^{N+d(1-1/r)} \left\|\varphi\right\|_p \leq C \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-\eta} \left\|\varphi\right\|_p \leq \frac{C}{(\eta - 1)\, n^{\eta-1}} \left\|\varphi\right\|_p.$$

Observação 2.4.5. Consideremos agora a seqüência $\mu_k^{-s} = \left(k\left(k+d-1\right)\right)^{-s/2}$ onde $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$. Denotando $f(k) = \mu_k^{-s}$, pela Proposição 2.3.9 temos que

$$\begin{aligned} \left|\Delta^j \mu_k^{-s}\right| &= \left|\Delta_1^j f(k)\right| \leq \max_{0\leq t\leq j} \left|f^{(j)}\left(k+t\right)\right| \\ &= \max_{k\leq t\leq k+j} \left|f^{(j)}(t)\right| = \max_{k\leq t\leq k+j} C_{s,j} t^{-s-j} \leq C_{s,j} k^{-s-j}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

para $j, k \in \mathbb{N}$. Logo

$$\left|\Delta^j \mu_k^{-s}\right| k^j \leq C_{s,j} k^{-s}$$

e então

$$\lim_{k\to\infty} \left|\Delta^j \mu_k^{-s}\right| k^j = 0, \quad 0 \leq j \leq N, \tag{2.11}$$

isto é, a condição (2.8) do Teorema de Multiplicadores é satisfeita.

Seja $s = \epsilon + d\left(1/p - 1/q\right)_+$, $\epsilon > 0$ e $1 \leq r, p, q \leq \infty$ tal que $1 - 1/r = \left(1/p - 1/q\right)_+$. Temos por (2.10) que

$$\left|\Delta^{N+1} \mu_k^{-s}\right| \leq C_s k^{-d(1-1/r)-N-(1+\epsilon)}.$$

Segue de (2.11) e da Observação 2.4.4 que

$$\left\|\Lambda^{-s}\varphi - t_n\left(\varphi\right)\right\|_q \leq \frac{C}{\epsilon n^\epsilon} \left\|\varphi\right\|_p = \frac{C}{\epsilon} n^{-s+d(1/p-1/q)_+} \left\|\varphi\right\|_p.$$

Logo, para $s > d\left(1/p - 1/q\right)_+$, Λ^{-s} é um operador multiplicador de tipo-(p,q) e para cada $\varphi \in L^p$ e $n \in \mathbb{N}$, existe uma função polinomial $t_n(\varphi) \in \mathcal{T}_n$ tal que

$$\left\|\Lambda^{-s}\varphi - t_n(\varphi)\right\|_q \ll n^{-s+d(1/p-1/q)_+} \left\|\varphi\right\|_p.$$

Capítulo 3

Espaços de Sobolev e Besov

Este é o capítulo mais importante desta dissertação e onde estão aplicados os resultados dos capítulos anteriores. Os resultados aqui apresentados foram demonstrados em [7].

Na primeira seção estão as definições de espaços de Sobolev e de Besov como podem ser encontradas em [7] e [6]. São definidas indutivamente funções Ψ_j, $1 \leq j \leq d$, onde d é a dimensão da esfera S^d. Para definir os espaços de Besov é necessário construir uma seqüência de funções zonais $K_n(z)$ utilizando uma família de seqüências numéricas $(\lambda_k^n)_{k=0}^n$ que por sua vez é construída a partir das funções Ψ_j. A maior parte desta seção é dedicada ao estudo das propriedades destas funções.

Na segunda seção são aplicados os resultados da seção anterior e do Capítulo 1 para demostrar o principal teorema estudado nesta dissertação que diz que todo espaço de Besov é um espaço de interpolação de dois espaços de Sobolev.

3.1 Espaços de Sobolev e Besov

Notação 3.1.1. Para cada $s \in \mathbb{R}$, denotemos $\Lambda^s = (\mu_k^s)_{k\geq 0}$, onde $\mu_k^s = (k\,(k+d-1))^{s/2}$.

Definição 3.1.2. O *espaço de Sobolev* W_p^s, $s > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, é definido como sendo o espaço vetorial

$$W_p^s = \{f \in L^p : \Lambda^s f \in L^p\} \tag{3.1}$$

munido da norma

$$\|f\|_{W_p^s} = \|\Lambda^s f\|_p \,. \tag{3.2}$$

Aqui identificamos funções que diferem por uma constante, isto é, se $f - g = constante$, então $f = g$ em W_p^s. A *classe de Sobolev* $\overline{W}_p^s$, $s > 0$, é definida como sendo a bola unitária de W_p^s, isto é,

$$\overline{W}_p^s = \left\{ f \in W_p^s : \|f\|_{W_p^s} \leq 1 \right\}. \tag{3.3}$$

Observação 3.1.3. Observamos que

$$\overline{W}_p^s = \left\{ c + \Lambda^{-s}\varphi : c \in \mathbb{R}, \varphi \in U_p \right\}.$$

De fato, se $f \in \{c + \Lambda^{-s}\varphi : c \in \mathbb{R}, \varphi \in U_p\}$, então $f = C + \Lambda^{-s}g$, $g \in U_p$. Logo

$$\|f\|_{W_p^s} = \left\|\Lambda^s \left(C + \Lambda^{-s}g\right)\right\|_p = \left\|\Lambda^s \left(\Lambda^{-s}g\right)\right\|_p = \|g\|_p \leq 1,$$

o que implica que $f \in \overline{W}_p^s$. Agora se $f \in \overline{W}_p^s$, então $\Lambda^s f = h \in L^p\left(S^d\right)$ e $\|f\|_{W_p^s} \leq 1$. Assim

$$\Lambda^{-s}\left(\Lambda^s f\right) = f = \Lambda^{-s}h \quad \text{e} \quad \|h\|_p = \|f\|_{W_p^s} \leq 1,$$

o que implica que $f \in \{c + \Lambda^{-s}h : c \in \mathbb{R}, h \in U_p\}$.

Notação 3.1.4. Consideremos as funções Ψ_j, $0 \leq j \leq d$ definidas por

$$\Psi_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases}$$

$$\Psi_j(t) = 2d \int_t^{t+\frac{1}{2d}} \Psi_{j-1}(u)du, \quad 1 \leq j \leq d.$$

Lema 3.1.5. *i) A função Ψ_d é $(d-1)$ vezes continuamente diferenciável e não negativa em $[0, \infty)$;*

ii) $\Psi_d^{(d-1)}$ é Lipschitziana;

iii) $\Psi_d(t) = 1$ para $0 \leq t \leq 1/2$;

iv) $\Psi_d(t) = P_d(t) = \dfrac{(2d)^d}{d!}(1-t)^d$, $\quad 1 - \dfrac{1}{2d} \leq t \leq 1$;

v) Ψ_d é um polinômio de grau d em cada intervalo $[t_j, t_{j-1}]$, $1 \leq j \leq d$, onde $t_j = 1 - \dfrac{j}{2d}$.

Demonstração. (i) Segue diretamente da definição de Ψ_d.

(ii) Vamos mostrar que $\Psi_d^{(d-1)}$ é uma combinação linear finita de funções Lipschitzianas e portanto Lipschitziana.

$$\Psi_d(t) = 2d\int_t^{t+\frac{1}{2d}} \Psi_{d-1}(u)du = 2d\int_0^{t+\frac{1}{2d}} \Psi_{d-1}(u)du - 2d\int_0^t \Psi_{d-1}(u)du.$$

$$\Psi_d'(t) = 2d\,\Psi_{d-1}\left(t+\frac{1}{2d}\right) - 2d\,\Psi_{d-1}(t) = 2d\left(\Psi_{d-1}\left(t+\frac{1}{2d}\right) - \Psi_{d-1}(t)\right).$$

$$\begin{aligned}\Psi_d''(t) &= 2d\left(2d\left(\Psi_{d-2}\left(t+\frac{2}{2d}\right) - \Psi_{d-2}\left(t+\frac{1}{2d}\right)\right) - 2d\left(\Psi_{d-2}\left(t+\frac{1}{2d}\right) - \Psi_{d-2}(t)\right)\right)\\ &= (2d)^2\left(\Psi_{d-2}\left(t+\frac{2}{2d}\right) - 2\Psi_{d-2}\left(t+\frac{1}{2d}\right) + \Psi_{d-2}(t)\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_d'''(t) &= (2d)^3\left(\Psi_{d-3}\left(t+\frac{3}{2d}\right) - \Psi_{d-3}\left(t+\frac{2}{2d}\right) - 2\left(\Psi_{d-3}\left(t+\frac{2}{2d}\right) - \Psi_{d-3}\left(t+\frac{1}{2d}\right)\right)\right)\\ &\quad + (2d)^3\left(\Psi_{d-3}\left(t+\frac{1}{2d}\right) - \Psi_{d-3}(t)\right)\\ &= (2d)^3\left(\Psi_{d-3}\left(t+\frac{3}{2d}\right) - 3\Psi_{d-3}\left(t+\frac{2}{2d}\right) + 3\Psi_{d-3}\left(t+\frac{1}{2d}\right) - \Psi_{d-3}(t)\right).\end{aligned}$$

Prosseguindo com este processo obtemos,

$$\Psi_d^{(d-1)}(t) = (2d)^{d-1}\sum_{j=1}^{d}(-1)^{j-1}\,a_{d,j}\Psi_1\left(t+\frac{d-j}{2d}\right),$$

onde $a_{d,j}$ é o elemento da d-ésima linha e j-ésima coluna do triângulo de Pascal. Assim podemos escrever

$$\Psi_d^{(d-1)}(t) = \sum_{j=1}^{d} c_j\Psi_1\left(t+\frac{d-j}{2d}\right),$$

onde $c_1, ..., c_d$ são constantes dependendo somente de d.

(iii) Suponhamos que para algum $0 \le j < d$, $\Psi_j(s) = 1$ para $0 \le s \le 1 - j/(2d)$. Se $0 \le t \le 1-(j+1)/(2d)$ e $t \le s \le t + 1/(2d)$ então $0 \le s \le 1 - j/(2d)$. Assim temos que

$$\Psi_{j+1}(t) = 2d\int_t^{t+\frac{1}{2d}} \Psi_j(s)ds = 2d\int_t^{t+\frac{1}{2d}} 1\,ds = 1 \quad 0 \le t \le 1 - \frac{j+1}{2d}.$$

Portanto, como $\Psi_0(t) = 1$ para $0 \le t \le 1$, segue por indução que $\Psi_j(t) = 1$ para $0 \le t \le 1 - j/(2d)$ e para $0 \le j \le d$. Em particular $\Psi_d(t) = 1$ para $0 \le t \le 1/2$.

(iv) Suponhamos que para algum $0 \le j < d$, $\Psi_j(s) = 0$ para $s > 1$. Então

$$\Psi_{j+1}(t) = 2d \int_t^{t+\frac{1}{2d}} \Psi_j(s) ds = 0, \quad t > 1.$$

Portanto, como $\Psi_0(t) = 0$ para $t > 1$, segue por indução que $\Psi_j(t) = 0$ para $t > 1$ e $0 \le j \le d$. Suponhamos agora que para algum $0 \le j < d$, $\Psi_j(s) = P_j(s) = ((2d)^j/(j!))(1-s)^j$ para $1 - 1/(2d) \le s \le 1$. Então para $1 - 1/(2d) \le t \le 1$ temos,

$$\begin{aligned}
\Psi_{j+1}(t) &= 2d \int_t^{t+\frac{1}{2d}} \Psi_j(s) ds = 2d \int_t^1 \Psi_j(s) ds \\
&= 2d \int_t^1 \frac{(2d)^j}{j!} (1-s)^j \, ds = \frac{(2d)^{j+1}}{j!} \int_0^{1-t} v^j dv \\
&= \frac{(2d)^{j+1}}{j!} \left[\frac{v^{j+1}}{j+1} \right]_0^{1-t} = \frac{(2d)^{j+1}}{(j+1)!} (1-t)^{j+1} .
\end{aligned}$$

Portanto, como $\Psi_0(t) = 1$ para $1 - 1/(2d) \le t \le 1$, segue por indução que $\Psi_j(t) = P_j(t) = ((2d)^j/(j!))(1-t)^j$ para $1 - 1/(2d) \le t \le 1$ e $0 \le j \le d$. Em particular, para $j = d$ temos

$$\Psi_d(t) = P_d(t) = \frac{(2d)^d}{d!} (1-t)^d, \quad 1 - \frac{1}{2d} \le t \le 1.$$

(v) Vamos mostrar que $\Psi_d^{(d)}$ é constante em cada intervalo $[t_j, t_{j-1}]$, o que implica que Ψ_d é um polinômio de grau d em cada um desses intervalos. De ii) junto com o Teorema Fundamental do Cálculo, segue que

$$\begin{aligned}
\Psi_d^{(d)}(t) &= (2d)^{d-1} \sum_{j=1}^{d} (-1)^{j-1} a_{d,j} \Psi_1' \left(t + \frac{d-j}{2d} \right) \\
&= (2d)^{d-1} \sum_{j=1}^{d} (-1)^{j-1} a_{d,j} 2d \left(\Psi_0 \left(t + \frac{d-j+1}{2d} \right) - \Psi_0 \left(t + \frac{d-j}{2d} \right) \right) \\
&= (2d)^d \left(a_{d,1} \Psi_0 \left(t + \frac{d}{2d} \right) - (a_{d,1} + a_{d,2}) \Psi_0 \left(t + \frac{d-1}{2d} \right) + \cdots + (-1)^{d-1} a_{d,d} \Psi_0(t) \right) \\
&= (2d)^d \sum_{j=1}^{d+1} (-1)^{j-1} a_{d+1,j} \Psi_0 \left(t + \frac{d+1-j}{2d} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{d+1} c_j \Psi_0 \left(t + \frac{d+1-j}{2d} \right),
\end{aligned}$$

onde $c_1, ..., c_{d+1}$ são constantes dependendo somente de d. Então

$$\begin{aligned}\Psi_d^{(d)}(t) &= \left(\sum_{j=1}^{d+1} c_j\right)\chi_{[0,1/2]}(t) + \sum_{k=1}^{d}\left(\sum_{j=d+2-k}^{d+1} c_j\right)\chi_{(t_k,t_{k-1}]}(t) \\ &= a_0\chi_{[0,1/2]}(t) + \sum_{k=1}^{d} a_k\chi_{(t_k,t_{k-1}]}(t),\end{aligned}$$

onde $a_0, ..., a_d$ são constantes dependendo somente de d.

Notação 3.1.6. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere a seqüência $(\lambda_k^n)_{k=o}^n$ dada por

$$\lambda_k^n = \Psi_d\left(\frac{k}{n}\right), \quad 0 \le k \le n. \tag{3.4}$$

Lema 3.1.7. *Para $n \ge 2d^2$ e $0 \le j \le d$,*

$$\left|\Delta^j \lambda_{n-j}^n\right| \le (2d)^{2d} n^{-d}. \tag{3.5}$$

Além disso, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $1 \le k \le n$,

$$\left|\Delta^{d+1}\lambda_k^n\right| \le C_d\, n^{-d}, \tag{3.6}$$

onde C_d é uma constante que depende somente de d.

Demonstração. Para $n \ge 2d^2$ e $0 \le j \le d$, temos

$$\frac{n-j}{n} = 1 - \frac{j}{n} \ge 1 - \frac{d}{n} \ge 1 - \frac{d}{2d^2} = 1 - \frac{1}{2d}.$$

Assim por (3.4) e pelo Lema 3.1.5 (iv),

$$\lambda_{n-j}^n = \Psi_d\left(\frac{n-j}{n}\right) = P_d\left(\frac{n-j}{n}\right).$$

Além disso

$$\Delta^j \lambda_{n-j}^n = \Delta_{\frac{1}{n}}^j P_d\left(\frac{n-j}{n}\right).$$

De fato, segue das Proposições 2.3.8 e 2.3.6 que

$$\begin{aligned}\Delta_{\frac{1}{n}}^j P_d\left(\frac{n-j}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k} P_d\left(\frac{n-j}{n} + \frac{k}{n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k} P_d\left(\frac{n-j+k}{n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k}\lambda_{n-j+k}^n = \Delta^j\lambda_{n-j}^n.\end{aligned}$$

Conseqüentemente, usando a Proposição 2.3.9, temos

$$\begin{aligned}
\left|\Delta^j \lambda^n_{n-j}\right| &= \left|\Delta^j_{\frac{1}{n}} P_d\left(\frac{n-j}{n}\right)\right| \le \left(\frac{1}{n}\right)^j \max_{0\le t\le \frac{j}{n}} \left|P_d^{(j)}\left(t+\frac{n-j}{n}\right)\right| \\
&= n^{-j} \max_{\frac{n-j}{n}\le t\le 1} \left|P_d^{(j)}(t)\right| \le n^{-j}\left|P_d^{(j)}\left(\frac{n-j}{n}\right)\right| \\
&= n^{-j}\frac{(2d)^d}{(d-j)!}\left(\frac{j}{n}\right)^{d-j} = n^{-d}(2d)^d\,\frac{j^{d-j}}{(d-j)!} \\
&\le n^{-d}(2d)^d j^{d-j} \le n^{-d}(2d)^d j^d \\
&\le n^{-d}(2d)^d(2d)^d \le n^{-d}(2d)^{2d},
\end{aligned}$$

provando (3.5). Falta provar (3.6). Para todo $n\in\mathbb{N}$ e $1\le k\le n$, temos

$$\Delta^{d+1}\lambda^n_k = \Delta^d\lambda^n_k - \Delta^d\lambda^n_{k+1}.$$

Como $\Psi_d^{(d)}$ é contínua por partes e logo integrável, podemos usar 2.3.9 e assim

$$\begin{aligned}
\left|\Delta^d\lambda^n_k\right| &= \left|\Delta^d_{\frac{1}{n}}\Psi_d\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\
&= \left|\int_0^{1/n}\cdots\int_0^{1/n}\Psi_d^{(d)}\left(\frac{k}{n}+t_1+\cdots+t_d\right)dt_1dt_2...dt_d\right| \\
&\le C_d\, n^{-d}.
\end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que

$$\left|\Delta^{d+1}\lambda^n_k\right| \le \left|\Delta^d\lambda^n_k\right| + \left|\Delta^d\lambda^n_{k+1}\right| = 2C_d\, n^{-d} = C'_d\, n^{-d}.$$

Definição 3.1.8. Definimos o *polinômio zonal* $K_n(z)$ por

$$K_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^n_k Z_e^{(k)}(z) \tag{3.7}$$

e para $k\ge 0$ escrevemos

$$\varphi_k(z) = K_{2^k}(z) - K_{2^{k-1}}(z),\ k\ge 1;\quad \varphi_0 = Z_e^{(0)}(z). \tag{3.8}$$

Definição 3.1.9. O *espaço de Besov* $B^s_{p,q}$, $s,p,q\in\mathbb{R}$, $s>0$, $1\le p,q\le\infty$, é definido por

$$B^s_{p,q} = \left\{f\in L^p : \|f\|_{B^s_{p,q}} < \infty\right\}, \tag{3.9}$$

onde

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{ks}\left\|\varphi_k * f\right\|_p\right)^q\right)^{1/q}. \tag{3.10}$$

Observação 3.1.10. Assim como nos espaços de Sobolev, identificamos duas funções em $B^s_{p,q}$ que diferem por uma constante. É fácil ver que $B^s_{p,q}$ é um espaço vetorial normado com norma $\|\cdot\|_{B^s_{p,q}}$. A *classe de Besov* $\overline{B}^s_{p,q}$, $s > 0$, é definida como sendo a bola unitária de $B^s_{p,q}$, isto é,

$$\overline{B}^s_{p,q} = \left\{ f \in B^s_{p,q} : \|f\|_{B^s_{p,q}} \leq 1 \right\}. \tag{3.11}$$

3.2 Aplicações

Lema 3.2.1. *Existe uma constante C_d, dependendo somente de d, tal que*

$$\|K_n\|_1 \leq C_d, \quad n \geq 1.$$

Demonstração. Aplicando a transformada de Abel $d+1$ vezes, obtemos (ver Lemas 2.3.10 e 2.3.12)

$$K_n(z) = \sum_{k=0}^{n-d-1} \left(\Delta^{d+1}\lambda_k^n\right) C_k^d S_k^d(z) + \sum_{j=0}^{d} \left(\Delta^j \lambda_{n-j}^n\right) C_{n-j}^j S_{n-j}^j(z)$$

e assim

$$\|K_n\|_1 \leq \sum_{k=0}^{n-d-1} \left|\Delta^{d+1}\lambda_k^n\right| C_k^d \left\|S_k^d\right\|_1 + \sum_{j=0}^{d} \left|\Delta^j \lambda_{n-j}^n\right| C_{n-j}^j \left\|S_{n-j}^j\right\|_1 = \sigma_1 + \sigma_2.$$

Usando o Lema 3.1.7, o Corolário 2.3.4 e (2.4) temos

$$\left|\Delta^j \lambda_{n-j}^n\right| C_{n-j}^j \left\|S_{n-j}^j\right\|_1 \ll \begin{cases} n^{-(d+1)/2}, & 0 \leq j < (d-1)/2, \\ n^{-(d+1)/2} \ln n, & j = (d-1)/2, \\ n^{-d+j}, & (d-1)/2 < j \leq d. \end{cases}$$

Portanto, segue que σ_2 é limitado por uma constante que depende somente de d. Falta demonstrar que σ_1 também é limitado por uma constante dependendo somente de d. Segue de (2.4) e do Corolário 2.3.4 que

$$\sigma_1 \ll \sum_{k=0}^{n-d-1} \left|\Delta^{d+1}\lambda_k^n\right| k^d.$$

Agora, sejam

$$I_k^n = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+d+1}{n}\right], \quad 1 \leq k \leq n,$$

$$t_j = 1 - \frac{j}{2d}, \quad 0 \leq j \leq d \left(\text{descontinuidades de } \Psi_d^{(d+1)}\right),$$

$$E_{n,d} = \{k \in \mathbb{N} : \{t_0, ..., t_d\} \cap I_k^n \neq \emptyset, \quad 1 \leq k \leq n\},$$
$$I_{k,j}^n = \left[\frac{k+j}{n}, \frac{k+j+1}{n}\right), \quad 0 \leq j \leq d-1, \quad I_{k,d}^n = \left[\frac{k+d}{n}, \frac{k+d+1}{n}\right].$$

Então $I_k^n = \bigcup_{j=0}^d I_{k,j}^n$ e a união é disjunta. Agora, observemos que

$$\{t_0, ..., t_d\} \cap I_k^n = \left(\bigcup_{j=0}^d \{t_j\}\right) \cap \left(\bigcup_{j=0}^d I_{k,j}^n\right) = \bigcup_{j=0}^d \bigcup_{l=0}^d \{t_j\} \cap I_{k,l}^n.$$

Então $k \in E_{n,d}$ se e somente se $\{t_j\} \cap I_{k,l}^n \neq \emptyset$ para algum $0 \leq j \leq d$ e algum $0 \leq l \leq d$, ou seja, se e somente se $t_j \in I_k^n$ para algum $0 \leq j \leq d$. Suponhamos então que $t_j \in I_k^n$, ou seja,

$$\frac{k}{n} \leq 1 - \frac{j}{2d} \leq \frac{k}{n} + \frac{d+1}{n}.$$

Então a primeira desigualdade nos diz que

$$k \leq n - \frac{nj}{2d}$$

e a segunda desigualdade nos diz que

$$k \geq n - \frac{nj}{2d} - (d+1).$$

Portanto,

$$n - \frac{nj}{2d} - (d+1) \leq k \leq n - \frac{nj}{2d}.$$

Conseqüentemente, $t_j \in I_k^n$ para no máximo $(d+2)$ valores de de k. Logo

$$\operatorname{card}(E_{n,d}) \leq \sum_{j=0}^d \operatorname{card}(\{k : t_j \in I_k^n\}) = (d+1)(d+2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Suponhamos que $k \notin E_{n,d}$. Então $\{t_0, ..., t_d\} \cap I_k^n = \emptyset$, o que implica que Ψ_d é $(d+1)$ vezes diferenciável em I_k^n e $\Psi_d^{(d+1)}(t) = 0$ para todo $t \in I_k^n$. Assim da Proposição 2.3.9 segue que

$$\left|\Delta^{d+1}\lambda_k^n\right| = \left|\Delta_{\frac{1}{n}}^{d+1}\Psi_d\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq n^{-(d+1)} \max_{\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+d+1}{n}} \left|\Psi_d^{(d+1)}(t)\right| = 0.$$

Portanto

$$\left\{k \in \mathbb{N} : \Delta^{d+1}\lambda_k^n \neq 0, \quad 0 \leq k \leq n\right\} \subset E_{n,d}.$$

Assim por (3.6),

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &\leq C \sum_{k=0}^{n-d-1} \left|\Delta^{d+1}\lambda_k^n\right| k^d \leq C \sum_{k \in E_{n,d}} \left|\Delta^{d+1}\lambda_k^n\right| k^d \\
&\leq C_d \sum_{k \in E_{n,d}} n^{-d} k^d = C_d \sum_{k \in E_{n,d}} \left(\frac{k}{n}\right)^d \leq C_d (d+1)(d+2) \max_{k \in E_{n,d}} \left(\frac{k}{n}\right)^d \\
&= C'_d.
\end{aligned}$$

Teorema 3.2.2 (Desigualdade de Bernstein). *Para todo $s, p \in \mathbb{R}$, $s > 0$, e $1 \leq p \leq \infty$,*

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} \mu_k^s \widetilde{Z}^{(k)} * f \right\|_p \leq C_s m^s \|f\|_p, \quad f \in \mathcal{T}_m,\ m \geq 1.$$

Demonstração. Está demonstrado em [3].

Corolário 3.2.3. *Sejam $s, p \in \mathbb{R}$, $s > 0$, e $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$\|\Lambda^s (\varphi_k * f)\|_p \leq C_s 2^{ks} \|\varphi_k * f\|_p, \quad f \in L^p,\ k \geq 0, \tag{3.12}$$

e

$$\|\varphi_k * f\|_p \leq C_s 2^{-ks} \|\Lambda^s f\|_p, \quad f \in W_p^s,\ k \geq 0. \tag{3.13}$$

Demonstração. Sejam $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, e $k \geq 0$. Temos que $\varphi_k * f \in \mathcal{T}_{2^k}$. Assim, pelo Teorema 3.2.2,

$$\|\Lambda^s (\varphi_k * f)\|_p \leq C_s 2^{ks} \|\varphi_k * f\|_p, \quad f \in L^p,\ k \geq 0.$$

Agora, se $f \in W_p^s$, seja $t_{\frac{n}{2}}$ um polinômio de grau $n/2$ satisfazendo a Observação 2.4.5 para $\varphi = \Lambda^s f$. Então

$$\left\| f - t_{\frac{n}{2}} \right\|_p \ll n^{-s} \|\Lambda^s f\|_p, \tag{3.14}$$

e $K_n * t_{\frac{n}{2}} = t_{\frac{n}{2}}$. De fato, como $K_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^n Z_e^{(k)}$ e $Z_e^{(k)} * t_{\frac{n}{2}} = 0$, $k > n/2$, temos

$$K_n * t_{\frac{n}{2}} = \sum_{k=0}^{n/2} \lambda_k^n \left(Z_e^{(k)} * t_{\frac{n}{2}} \right).$$

Mas se $0 \leq k \leq n/2$ então $0 \leq k/n \leq 1/2$. Assim pelo Lema 3.1.5, $\lambda_k^n = \Psi_d(k/n) = 1$ e logo

$$K_n * t_{\frac{n}{2}} = \sum_{k=0}^{n/2} Z_e^{(k)} * t_{\frac{n}{2}} = t_{\frac{n}{2}}.$$

Portanto, pela Desigualdade de Young, por (3.14) e pelo Lema 3.2.1, temos

$$\begin{aligned}
\|f - K_n * f\|_p &= \left\| f - K_n * f + t_{\frac{n}{2}} - t_{\frac{n}{2}} \right\|_p \\
&= \left\| \left(f - t_{\frac{n}{2}} \right) + t_{\frac{n}{2}} - K_n * f \right\|_p \\
&= \left\| \left(f - t_{\frac{n}{2}} \right) - K_n * \left(f - t_{\frac{n}{2}} \right) \right\|_p \\
&\leq \left\| f - t_{\frac{n}{2}} \right\|_p + \left\| K_n * \left(f - t_{\frac{n}{2}} \right) \right\|_p \\
&\leq \left(1 + \|K_n\|_1 \right) \left\| f - t_{\frac{n}{2}} \right\|_p \\
&\leq C n^{-s} \|\Lambda^s f\|_p.
\end{aligned}$$

Além disso, pela definição de φ_k temos que

$$\varphi_k * f = (K_{2^k} - K_{2^{k-1}}) * f = (f - K_{2^{k-1}} * f) - (f - K_{2^k} * f),$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \|\varphi_k * f\|_p &\leq \|f - K_{2^{k-1}} * f\|_p + \|f - K_{2^k} * f\|_p \\ &\leq C' 2^{-(k-1)s} \|\Lambda^s f\|_p + C'' 2^{-ks} \|\Lambda^s f\|_p \\ &\leq C 2^{-ks} \|\Lambda^s f\|_p . \end{aligned}$$

Observação 3.2.4. Seja $f \in W_p^s$. Temos que $K_1 = \lambda_0^1 Z_e^{(0)} + \lambda_1^1 Z_e^{(1)} = Z_e^{(0)}$, e assim,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \varphi_k * f &= \sum_{k=1}^{n} (K_{2^k} - K_{2^{k-1}}) * f + Z_e^{(0)} * f \\ &= Z_e^{(0)} * f + (K_2 * f - K_1 * f) + (K_4 * f - K_2 * f) + \cdots + (K_{2^n} * f - K_{2^{n-1}} * f) \\ &= Z_e^{(0)} * f - K_1 * f + K_{2^n} * f = K_{2^n} * f. \end{aligned}$$

Como feito na demonstração do Corolário 3.2.3, temos que $K_{2^n} * f$ converge na norma de L^p para f, então

$$f = \lim_{n \to \infty} K_{2^n} * f = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k * f. \tag{3.15}$$

Teorema 3.2.5. *Se $0 < s_0 < s_1$ então*

$$B_{p,q}^{s_1} \subset B_{p,q}^{s_0}, \quad 1 \leq p, q \leq \infty. \tag{3.16}$$

Se $1 \leq q_0 < q_1 \leq \infty$ então

$$B_{p,q_0}^{s} \subset B_{p,q_1}^{s}, \quad s > 0,\ 1 \leq p \leq \infty. \tag{3.17}$$

Mais ainda,

$$B_{p,1}^{s} \subset W_p^s \subset B_{p,\infty}^{s}, \quad s > 0,\ 1 \leq p \leq \infty. \tag{3.18}$$

Se $s_0, s_1 > 0$ e $s_0 \neq s_1$, então

$$\left(W_p^{s_0}, W_p^{s_1}\right)_{\theta,q} = B_{p,q}^{s}, \quad 1 \leq p, q \leq \infty,\ 0 < \theta < 1, \tag{3.19}$$

onde $s = (1-\theta) s_0 + \theta s_1$.

Demonstração. As inclusões (3.16) e (3.17) seguem diretamente da definição de espaço de Besov. De fato, se $f \in B^{s_1}_{p,q}$, então $\|f\|_{B^{s_1}_{p,q}} < \infty$. Logo

$$\|f\|_{B^{s_0}_{p,q}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{ks_0} \|\varphi_k * f\|_p \right)^q \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{ks_1} \|\varphi_k * f\|_p \right)^q \right)^{1/q} = \|f\|_{B^{s_1}_{p,q}} < \infty.$$

Analogamente, se $f \in B^{s}_{p,q_0}$, então $\|f\|_{B^{s}_{p,q_0}} < \infty$. Logo

$$\|f\|_{B^{s}_{p,q_1}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{ks} \|\varphi_k * f\|_p \right)^{q_1} \right)^{1/q_1} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{ks} \|\varphi_k * f\|_p \right)^{q_0} \right)^{1/q_0} = \|f\|_{B^{s}_{p,q_0}} < \infty.$$

Agora de (3.12), temos que se $f \in B^{s}_{p,1}$ então

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\Lambda^s (\varphi_k * f)\|_p \leq C_s \sum_{k=0}^{\infty} 2^{ks} \|\varphi_k * f\|_p = C_s \|f\|_{B^{s}_{p,1}} < \infty$$

e portanto, como L^p é um espaço de Banach, $\sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^s (\varphi_k * f)$ converge em L^p, ou seja, $g_n = \sum_{k=0}^{n} \Lambda^s (\varphi_k * f) \to g = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^s (\varphi_k * f)$. Como $\Lambda^{-s} : L^p \longrightarrow L^p$ é limitado, $\Lambda^{-s} g_n \to \Lambda^{-s} g$ em L^p. Mas pela da Observação 3.2.4 temos que $\Lambda^{-s} g_n = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k * f \to f$ em L^p e logo $f = \Lambda^{-s} g$, ou ainda, $\Lambda^s f = g = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^s (\varphi_k * f)$. Assim

$$\|f\|_{W^s_p} = \|\Lambda^s f\|_p \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\Lambda^s (\varphi_k * f)\|_p \leq C_s \|f\|_{B^{s}_{p,1}}.$$

De (3.13) segue que se $f \in W^s_p$, então

$$\|f\|_{B^{s}_{p,\infty}} = \sup_{k \in \mathbb{N}} 2^{ks} \|\varphi_k * f\|_p \leq C_s \sup_{k \in \mathbb{N}} 2^{ks} 2^{-ks} \|\Lambda^s f\|_p = C_s \|f\|_{W^s_p}.$$

As inclusões em (3.18) seguem das duas desigualdades anteriores.

Agora, provaremos (3.19). Consideremos $0 < s_0 < s_1$. Seja $f \in \left(W^{s_0}_p, W^{s_1}_p \right)_{\theta,q}$, com $f = f_0 + f_1$, $f_0 \in W^{s_0}_p$ e $f_1 \in W^{s_1}_p$. De (3.13) temos que

$$\begin{aligned} \|\varphi_k * f\|_p &\leq \|\varphi_k * f_0\|_p + \|\varphi_k * f_1\|_p \\ &\leq C_0 2^{-ks_0} \|\Lambda^{s_0} f_0\|_p + C_1 2^{-ks_1} \|\Lambda^{s_1} f_1\|_p \\ &\leq C 2^{-ks_0} \left(\|f_0\|_{W^{s_0}_p} + 2^{k(s_0 - s_1)} \|f_1\|_{W^{s_1}_p} \right), \end{aligned}$$

onde $C = \max(C_0, C_1)$, e logo

$$\|\varphi_k * f\|_p \leq C 2^{-ks_0} K\left(2^{k(s_0 - s_1)}, f \right).$$

Assim, tomando $r = 2^{s_1 - s_0}$ e $s = (1-\theta)\, s_0 + \theta s_1$ temos que

$$\begin{aligned} 2^{ks} \|\varphi_k * f\|_p &\leq 2^{ks} C 2^{-ks_0} K\left(2^{k(s_0 - s_1)}, f\right) \\ &= 2^{k((1-\theta)s_0 + \theta s_1)} C 2^{-ks_0} K\left(2^{k(s_0 - s_1)}, f\right) \\ &= C 2^{k((1-\theta)s_0 + \theta s_1 - s_0)} K\left(2^{k(s_0 - s_1)}, f\right) \\ &= C 2^{k\theta(s_1 - s_0)} K\left(2^{k(s_0 - s_1)}, f\right) \\ &= C r^{k\theta} K\left(r^{-k}, f\right), \end{aligned}$$

e portanto

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{ks} \|\varphi_k * f\|_p\right)^q\right)^{1/q} \leq C \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(r^{k\theta} K\left(r^{-k}, f\right)\right)^q\right)^{1/q}.$$

Aplicando o Lema 1.2.20 encontramos

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{ks} \|\varphi_k * f\|_p\right)^q\right)^{1/q} \leq C \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(r^{k\theta} K\left(r^{-k}, f\right)\right)^q\right)^{1/q} \leq C' \|f\|_{\left(W^{s_0}_p, W^{s_1}_p\right)_{\theta,q}}.$$

Reciprocamente, suponhamos que $f \in B^s_{p,q}$, $s = (1-\theta)\, s_0 + \theta s_1$. De (3.12), temos

$$\begin{aligned} J\left(2^{k(s_0 - s_1)}, \varphi_k * f\right) &= \max\left(\|\Lambda^{s_0}(\varphi_k * f)\|_p, 2^{k(s_0 - s_1)} \|\Lambda^{s_1}(\varphi_k * f)\|_p\right) \\ &\leq \max\left(C_{s_0} 2^{ks_0} \|\varphi_k * f\|_p, C_{s_1} 2^{k(s_0 - s_1)} 2^{ks_1} \|\varphi_k * f\|_p\right) \\ &= C_s 2^{ks_0} \|\varphi_k * f\|_p, \end{aligned}$$

onde $C_s = \max(C_{s_0}, C_{s_1})$, e logo

$$2^{k(s - s_0)} J\left(2^{k(s_0 - s_1)}, \varphi_k * f\right) \leq 2^{k(s - s_0)} C_s 2^{ks_0} \|\varphi_k * f\|_p = C_s 2^{ks} \|\varphi_k * f\|_p.$$

Assim, tomando $r = 2^{s_1 - s_0}$, temos $2^{k(s - s_0)} = r^{k\theta}$ e segue que

$$r^{\theta k} J\left(r^{-k}, \varphi_k * f\right) \leq C_s 2^{ks} \|\varphi_k * f\|_p, \quad k \geq 0. \tag{3.20}$$

Consideremos a seqüência $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ definida por

$$u_k = \begin{cases} 0, & k \geq 1, \\ \varphi_{-k} * f, & k \leq 0. \end{cases}$$

Visto que $s_0 < s_1$ temos que $W_p^{s_1} \subset W_p^{s_0}$, e assim $W_p^{s_0} + W_p^{s_1} = W_p^{s_0}$. De (3.12) e da desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|u_k\|_{W_p^{s_0}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \|\Lambda^{s_0}(\varphi_k * f)\|_p \\
&\leq C_{s_0} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{ks_0} \|\varphi_k * f\|_p \\
&= C_{s_0} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\theta(s_0-s_1)} 2^{ks} \|\varphi_k * f\|_p \\
&\leq C_{s_0} \left(\sum_{k=0}^{\infty} r^{-k\theta q'}\right)^{1/q'} \|f\|_{B_{p,q}^s} < \infty,
\end{aligned}$$

onde $1/q + 1/q' = 1$. Portanto concluímos que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k$ converge para $f \in W_p^{s_0}$. Agora por (3.20)

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(r^{-k\theta} J\left(r^k, u_k\right)\right)^q\right)^{1/q} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(r^{k\theta} J\left(r^{-k}, \varphi_k * f\right)\right)^q\right)^{1/q} \\
&\leq C_s \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{ks} \|\varphi_k * f\|_p\right)^q\right)^{1/q} = C_s \|f\|_{B_{p,q}^s}.
\end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 1.2.25, podemos concluir que $f \in \left(W_p^{s_0}, W_p^{s_1}\right)_{\theta,q}$ e que

$$\|f\|_{\left(W_p^{s_0}, W_p^{s_1}\right)_{\theta,q}} \leq C_s \|f\|_{B_{p,q}^s}.$$

Observação 3.2.6. Sejam $s > d(1/p - 1/q)_+$, $1 \leq p, q \leq \infty$ e $n \in \mathbb{N}$. Consideremos o operador I_n, definido por $I_n(f) = f - t_n(\Lambda^s f)$, onde $t_n(\varphi) = G_n * \varphi$ e $G_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\Delta^{N+1} \lambda_k^{-s}\right) C_k^N S_k^N$, $N = (d+1)/2$ se d é ímpar e $N = (d+2)/2$ se d é par. Da Observação 2.4.5 temos que

$$\begin{aligned}
\|I_n\|_{W_p^s, L^q} &= \sup_{f\in\overline{W}_p^s} \|I_n(f)\|_q = \sup_{f\in\overline{W}_p^s} \|f - t_n(\Lambda^s f)\|_q \\
&\leq C_s \sup_{f\in\overline{W}_p^s} n^{-s+d(1/p-1/q)_+} \|\Lambda^s f\|_p \\
&\leq C_s n^{-s+d(1/p-1/q)_+}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Agora consideremos $s, p, r, q \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p, q, r \leq \infty$, e $s > d(1/p - 1/q)_+$. Sejam $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ tal que $s_1 > s > s_0 > d(1/p - 1/q)_+$ e seja $\theta \in (0,1)$ tal que $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$. Assim de

(3.19) temos que $B^s_{p,r} = \left(W^{s_0}_p, W^{s_1}_p\right)_{\theta,r}$. Então da Observação 1.3.8 e de (3.21),

$$\begin{aligned}
\|I_n\|_{B^s_{p,r},L^q} &\leq \left(\|I_n\|_{W^{s_0}_p,L^q}\right)^{1-\theta}\left(\|I_n\|_{W^{s_1}_p,L^q}\right)^{\theta} \\
&\leq C_{s_0}\, n^{\left(-s_0+d(1/p-1/q)_+\right)(1-\theta)} C_{s_1}\, n^{\left(-s_1+d(1/p-1/q)_+\right)\theta} \\
&= \left(C_{s_0}C_{s_1}\right) n^{-s+d(1/p-1/q)_+} \\
&= C_s\, n^{-s+d(1/p-1/q)_+}. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Observação 3.2.7. Consideremos a seqüência de multiplicadores $\dot{\Lambda}^s = (\dot{\mu}^s_k)_{k\geq 0}$, onde $\dot{\mu}^s_k = (1+k\,(k+d-1))^{s/2}$, $s>0$. O espaço de Sobolev também pode ser definido usando $\dot{\Lambda}^s$ ao invés de Λ^s. Definimos

$$\dot{W}^s_p = \left\{f\in L^p : \dot{\Lambda}^s f\in L^p\right\}$$

com a norma

$$\|f\|_{\dot{W}^s_p} = \left\|\dot{\Lambda}^s f\right\|_p .$$

Do Teorema 2.4.3, $\dot{\Lambda}^{-s}$ é limitado de L^p em L^q para $s > d\,(1/p-1/q)_+$. Então a Obsevação 2.4.5 também vale para $\dot{\Lambda}^{-s}$, $s>0$. Desde que a desigualdade de Bernstein vale para a seqüência $\dot{\lambda}^s_k$ (ver [3]), o mesmo é verdade para o Corolário 3.2.3.

Agora, para $s,p,q\in\mathbb{R}$, $s>0$, $1\leq p,q\leq\infty$, e $f\in L^p$, definimos

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = \|f\|_p + \|f\|_{B^s_{p,q}}$$

e

$$\dot{B}^s_{p,q} = \left\{f\in L^p : \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} < \infty\right\}.$$

Neste caso temos que $\|\cdot\|_{\dot{W}^s_p}$ e $\|\cdot\|_{\dot{B}^s_{p,q}}$ são normas em $\dot{W}^s_p$ e $\dot{B}^s_{p,q}$ respectivamente, quando consideramos estes espaços como subespaços de L^p.

O Teorema 3.2.5 vale para os espaços $\dot{W}^s_p$ e $\dot{B}^s_{p,q}$, com pequenas mudanças na demonstração. Na demonstração consideramos a seqüência $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ como na demonstração do Teorema 3.2.5, somente com a alteração $u_1 = Z^{(0)}_e * f$. Necessitamos também das desigualdades

$$C_1\, r^{-1} J\,(r,f) \leq \|f\|_p \leq C_2\, K\,(1,f)\,, \quad 1\leq p\leq\infty,\ f\in L^p.$$

Observação 3.2.8. Espaços de Besov sobre a esfera unitária S^d em $\mathbb{R}^{d+1}$ foram estudados em [8], onde os autores dão uma lista de normas equivalentes para espaços de Besov. Mostraremos que os espaços de Besov considerados em [8] e os espaços $\dot{B}^s_{p,q}$ têm normas equivalentes.

Os espaços de Sobolev considerados em [8] são os espaços $\dot{W}_p^s$ dados na Observação 3.2.7. Denotemos por $\overset{*}{B}{}_{p,q}^s$ os espaços de Besov em [8], $s > 0$, $1 \leq p, q \leq \infty$. A norma de $\overset{*}{B}{}_{p,q}^s$ é definida por

$$\|f\|_{\overset{*}{B}{}_{p,q}^s} = \|f\|_p + \left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{sq-1} K_r\left(\pi/m, f\right)_p^q\right)^{1/p}, \ s < 2r, \ r = 1, 2, ...,$$

onde $K_r\left(\pi/m, f\right)_p$ é dado em termos do K-funcional por

$$K_r\left(\pi/m, f\right)_p = K\left(\pi^{2r} m^{-2r}, f; \left(L^p, \dot{W}_p^{2r}\right)\right).$$

Não é difícil mostrar (ver Lema 1.2.20) que a norma $\|\cdot\|_{\overset{*}{B}{}_{p,q}^s}$ é a norma do espaço de interpolação $\left(L^p, \dot{W}_p^{2r}\right)_{s/2r,q}$, que é, $\overset{*}{B}{}_{p,q}^s = \left(L^p, \dot{W}_p^{2r}\right)_{s/2r,q}$.

Também foi demonstrado em [8] que

$$\overset{*}{B}{}_{p,1}^s \subset \dot{W}_p^s \subset \overset{*}{B}{}_{p,\infty}^s, \quad s > 0, \ 1 \leq p \leq \infty.$$

Pela definição da classe $\mathcal{C}\left(\theta; L^p, \dot{W}_p^{2r}\right)$ dada no Capítulo 2 junto com o Teorema 1.4.3, podemos concluir que

$$\dot{W}_p^s \in \mathcal{C}\left(s/2r; L^p, \dot{W}_p^{2r}\right), \quad 1 \leq p \leq \infty, \ s < 2r.$$

Consideremos agora $s, s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ com $0 < s_0 < s < s_1$, e $s = (1-\eta) s_0 + \eta s_1$, $\eta \in (0,1)$. Então

$$\dot{W}_p^{s_i} \in \mathcal{C}\left(s_i/2r; L^p, \dot{W}_p^{2r}\right), \quad i = 0, 1,$$

e de (3.19)

$$\dot{B}_{p,q}^s = \left(\dot{W}_p^{s_0}, \dot{W}_p^{s_1}\right)_{\eta,q}.$$

Aplicando o Teorema 1.4.4(Teorema de Reiteração) podemos concluir que

$$\dot{B}_{p,q}^s = \left(\dot{W}_p^{s_0}, \dot{W}_p^{s_1}\right)_{\eta,q} = \left(L^p, \dot{W}_p^{2r}\right)_{s/2r,q} = \overset{*}{B}{}_{p,q}^s.$$

Apêndice

Neste apêndice apresentamos algumas definições e resultados clássicos de teoria da medida e de análise funcional que foram utilizados em algum momento no desenvolvimento deste trabalho.

Definição 1. Dizemos que uma família $\mathcal{X}$ de subconjuntos de um conjunto X é uma *σ-álgebra* se

(i) $\emptyset, X$ pertencem a $\mathcal{X}$;

(ii) Se A pertence a $\mathcal{X}$, então o complemento de A em X ($A^c = X \backslash A$) também está em $\mathcal{X}$;

(iii) Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de conjuntos em $\mathcal{X}$, então a união $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ também está em $\mathcal{X}$.

Definição 2. Dizemos que um par ordenado $(X, \mathcal{X})$ é um *espaço mensurável* se $\mathcal{X}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X. Se $A \in \mathcal{X}$, então dizemos que A é *$\mathcal{X}$-mensurável* ou simplesmente *mensurável*, se isto não causar confusão.

Observação 3. Seja $\mathcal{A}$ uma família não vazia de subconjuntos de X. Então existe uma (única) σ-álgebra de X que contém $\mathcal{A}$ e é a menor entre todas as σ-álgebras contendo $\mathcal{A}$. Dizemos que esta menor σ-álgebra é a *σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$*. Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico, é natural introduzir a σ-álgebra gerada por $\mathcal{T}$. Dizemos que esta σ-álgebra é a *σ-álgebra de Borel da topologia $\mathcal{T}$* e denotamos por $\mathbb{B} = \mathbb{B}(X)$. Dizemos que um conjunto B é um *conjunto de Borel* ou simplesmente um *boreliano* se $B \in \mathbb{B}$.

Definição 4. Dizemos que uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é *$\mathcal{X}$-mensurável* se para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{X}$.

Definição 5. Dizemos que uma função, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é *crescente* se, dados $t, s \in \mathbb{R}$ temos $f(t) > f(s)$ sempre que $t > s$, e dizemos que ela é *não decrescente* se $t > s$ implica $f(t) \geq f(s)$. Analogamente podemos definir funções *decrescente* e *não crescente*. Qualquer uma destas funções é chamada de *função monótona*.

Definição 6. Sejam $(X, \mathcal{X})$ e $(Y, \mathcal{Y})$ dois espaços mensuráveis e $f : X \longrightarrow Y$. Dizemos que f é *mensurável* se $f^{-1}(E) \in \mathcal{X}$ para todo $E \in \mathcal{Y}$.

Definição 7. Dizemos que uma função μ definida para os conjuntos da σ-álgebra $\mathcal{X}$ tomando valores nos reais estendidos é uma *medida* se

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) $\mu(E) \geq 0$, para todo $E \in \mathcal{X}$;

(iii) μ é *contavelmente aditiva*, isto é, se $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência *disjunta* de conjuntos de $\mathcal{X}$, isto é, $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(E_n\right).$$

Definição 8. Dizemos que uma medida $\mu : \mathcal{X} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é *finita* se $\mu(E) < \infty$ para todo $E \in \mathcal{X}$. Se existe uma seqüência $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{X}$ tal que $\mu\left(E_n\right) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = X$, dizemos que é *$\sigma$-finita*.

Observação 9. Consideremos $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{X} = \mathbb{B}$. Neste caso, existe uma única medida λ definida em $\mathbb{B}$ que coincide com o comprimento usual dos intervalos, isto é, se E é um intervalo não vazio (a, b), então $\lambda(E) = b - a$. Esta única medida é chamada de *medida de Lebesgue* ou *medida de Borel*. Ela não é uma medida finita, mas é σ-finita.

Definição 10. Dizemos que uma terna $(X, \mathcal{X}, \mu)$ é um *espaço de medida* se X é um conjunto, $\mathcal{X}$ é uma σ-álgebra em X e μ é uma medida definida em $\mathcal{X}$.

Observação 11. Dado um espaço de medida como acima, dizemos que uma certa propriedade (P) vale *μ-quase sempre* em X se existir um $N \in \mathcal{X}$ tal que $\mu(N) = 0$ e a propriedade (P) vale para todo $x \in X \backslash N$. Assim, dizemos que duas funções, f e g, definidas sobre X são μ-quase sempre iguais se existir um $N \in \mathcal{X}$ tal que $\mu(N) = 0$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X \backslash N$. Neste caso usamos a seguinte notação, $f = g$ μ-q.t.p. ou $f = g$ μ-q.s..

Observação 12. Apartir de agora consideraremos espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ é $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definição 13. Se E é um espaço vetorial, então uma função $x \in E \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ é chamada de *norma* se verifica as seguintes propriedades:

i) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$.

ii) $\|x\| = 0$ se e somente se $x = 0$.

iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$.

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in E$.

A desigualdade iv) é chamada de *desigualdade triangular.* O espaço vetorial E, junto com a norma $\|\cdot\|$, é chamado de *espaço normado.* E é chamado de *espaço de Banach* se for completo com relação à métrica natural $d(x, y) = \|x - y\|$.

Definição 14. Sejam E, F espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Dada uma aplicação linear $T : E \to F$, seja $\|T\|_{E,F}$ definido por

$$\|T\|_{E,F} = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|T(x)\|_F \, . \tag{3.23}$$

Dizemos que T é *limitada* se $\|T\|_{E,F} < \infty$.

Proposição 15. *Sejam E, F espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Dada uma aplicação linear $T : E \to F$, as seguintes condições são equivalentes:*

i) T é limitada.

ii) T é uniformemente contínua.

iii) T é contínua.

iv) T é contínua na origem.

Corolário 16. *Sejam E, F espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Seja $T : E \to F$ uma aplicação linear. Então T é contínua se e somente se existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$\|T(x)\|_F \leq c \, \|x\|_E \quad \textit{para todo } x \in E.$$

Corolário 17. *Sejam E, F espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Seja $T : E \to F$ uma aplicação linear. Então T é um homeomorfismo entre E e $T(E)$ se e somente se existem constantes $0 < a \leq b$ tais que*

$$a \left\| x \right\|_E \leq \left\| T(x) \right\|_F \leq b \left\| x \right\|_E \quad \text{para todo } x \in E.$$

Notação 18. Sejam E, F espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Denotaremos por $L_a(E;F)$ o espaço vetorial de todas as aplicações lineares $T : E \to F$. Denotaremos por $L(E;F)$ o subespaço vetorial de todas as $T \in L_a(E;F)$ que são contínuas. O espaço $L_a(E;\mathbb{K})$ é denotado por E^*, e é chamado de *dual algébrico* de E. O espaço $L(E;\mathbb{K})$ é denotado por E', e é chamado de *dual topológico* de E. Os elementos de E^* são usualmente chamados de *funcionais lineares*. Se $T \in L(E;F)$ é bijetiva, e sua inversa é contínua, dizemos que T é um *isomorfismo topológico* entre E e F. Se $T \in L(E;F)$ é bijetiva, e $\left\| T(x) \right\|_F = \left\| x \right\|_E$ para todo $x \in E$, dizemos que T é um *isomorfismo isométrico* entre E e F.

Proposição 19. *A função $T \mapsto \left\| T \right\|_{E,F}$ é uma norma em $L(E;F)$. Se F é um espaço de Banach, então $L(E;F)$ também é um espaço de Banach.*

Definição 20. Para cada $1 \leq p < \infty$, seja ℓ^p o conjunto de todas as seqüências $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{K}$ tais que $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty$.

Teorema 21 (Desigualdade de Hölder para séries). *Sejam $1 < p, q < \infty$, com $(1/p) + (1/q) = 1$, e sejam $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ e $(y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^q$. Então $(x_j y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ e*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q \right)^{1/q}.$$

Teorema 22 (Desigualdade de Minkowski para séries). *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}, (y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^p$. Então $(x_j + y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ e*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p \right)^{1/p}.$$

Observação 23. Se $1 \leq p \leq q < \infty$, então $\ell^p \subset \ell^q$, e a inclusão é contínua.

Notação 24. Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida. Para $1 \leq p < \infty$, denotemos por $L^p(X, \mathcal{X}, \mu)$ o espaço vetorial de todas as funções mensuráveis $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tais que $\int_X |f|^p \, d\mu < \infty$. Para cada $f \in L^p(X, \mathcal{X}, \mu)$, definimos

$$\left\| f \right\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Se $f, g \in L^p(X)$, $f = g$ q.s., f e g serão considerados um mesmo elemento de $L^p(X)$.

Teorema 25 (Desigualdade de Hölder para integrais). *Sejam $1 < p, q < \infty$, com $(1/p) + (1/q) = 1$, e sejam $f \in L^p(X, \mathcal{X}, \mu)$ e $g \in L^q(X, \mathcal{X}, \mu)$. Então $fg \in L^1(X, \mathcal{X}, \mu)$ e*

$$\int_X |fg|\, d\mu \leq \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q\, d\mu\right)^{1/q}.$$

Corolário 26 (Desigualdade de Minkowski para integrais). *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $f, g \in L^p(X, \mathcal{X}, \mu)$. Então $f + g \in L^p(X, \mathcal{X}, \mu)$ e*

$$\left(\int_X |f+g|^p\, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p\, d\mu\right)^{1/p}.$$

Definição 27. (a) Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ em E é dita convergente se a seqüência de somas parciais $s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$ é convergente em E.

(b) Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ em E é dita absolutamente convergente se $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

Proposição 28. *Um espaço normado E é completo se e somente se cada série absolutamente convergente em E é convergente.*

Demonstração. Suponhamos E completo e $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. Se $m < n$, então

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{j=m+1}^{n} x_j \right\| \leq \sum_{j=m+1}^{n} \|x_j\|.$$

Segue que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em E e é portanto convergente.

Suponhamos, agora, que toda série absolutamente convergente em E seja convergente. Para demonstrar que E é completo, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy em E. Então existe uma seqüência estritamente crescente $(n_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\| \leq 2^{-j} \text{ para todo } n, m \geq n_j.$$

Em particular

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\|x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\right\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1$$

e logo a série $\sum_{j=1}^{\infty} \left(x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\right)$ é convergente em E. Como

$$x_{n_1} + \sum_{j=1}^{k} \left(x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\right) = x_{n_{k+1}},$$

concluímos que a seqüência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge em E. Assim $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em E, que admite uma subseqüência convergente. Segue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Notação 29. Denotemos por $L^\infty(X, \mathcal{X}, \mu)$ o espaço vetorial de todas as funções $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ que são *limitadas quase sempre*, ou seja, existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ quase sempre. Para cada $f \in L^\infty(X, \mathcal{X}, \mu)$, definimos

$$\|f\|_\infty = \inf\left(c > 0 : |f(x)| \leq c \text{ quase sempre}\right).$$

Se $f, g \in L^\infty(X)$, $f = g$ q.s., f e g serão considerados um mesmo elemento de $L^\infty(X)$.

Teorema 30 (Teorema de Fisher-Riesz). *Para $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(X, \mathcal{X}, \mu)$ é um espaço de Banach.*

Observação 31. Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida finita e sejam $1 \leq p \leq q < \infty$. Então $L^q(X, \mathcal{X}, \mu) \subset L^p(X, \mathcal{X}, \mu)$ e a inclusão é contínua.

Definição 32. Se E é um espaço vetorial então uma função $(x, y) \in E \times E \longmapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{K}$ é chamada de *produto interno* se verifica as seguintes propriedades:

i) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$;

ii) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;

iii) $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$;

iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$;

v) $\langle x, x \rangle = 0$ se e somente se $x = 0$.

Observação 33. De i), ii) e iii) segue que

i') $\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$;

ii') $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$.

Proposição 34 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Seja E um espaço com produto interno. Então*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

para todo $x, y \in E$.

Proposição 35. *Seja E um espaço com produto interno. Então a função*

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$$

é uma norma em E.

Definição 36. Seja E um espaço com produto interno. Dizemos que E é um *espaço de Hilbert* se ele é completo na norma definida pelo produto interno.

Definição 37. Seja E um espaço com produto interno. Dizemos que $x, y \in E$ são *ortogonais*, e escrevemos $x \perp y$, se $\langle x, y\rangle = 0$.

Teorema 38 (Teorema de representação de Riesz). *Seja E um espaço de Hilbert, e seja $\phi \in E'$. Então existe um único $y_0 \in E$ tal que*

$$\phi(x) = \langle x, y_0\rangle \quad \textit{para todo } x \in E.$$

Definição 39. Seja E um espaço de Banach. Dizemos que uma função, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é *convexa* se, dados $t_1, t_2 \in E$ e $s \in [0, 1]$ temos que $f\big((1-s)t_1 + st_2\big) \leq (1-s)f(t_1) + sf(t_2)$.

Definição 40. Seja E um espaço de Banach. Dizemos que uma função, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é *côncava* se, dados $t_1, t_2 \in E$ e $s \in [0, 1]$ temos que $f\big((1-s)t_1 + st_2\big) \geq (1-s)f(t_1) + sf(t_2)$.

Definição 41. Dizemos que E é um *espaço vetorial topológico* sobre $\mathbb{K}$ se as seguintes condições se verificam:

(a) E é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$;

(b) E é um espaço topológico;

(c) As aplicações $(x, y) \in E \times E \mapsto x + y \in E$ e $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \lambda x \in E$ são contínuas.

É claro que todo espaço normado é um espaço vetorial topológico.

Observação 42. Consideremos o conjunto $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ munido da operação de multiplicação dos números reais e com a topologia usual. Então $\mathbb{R}_+$ é um grupo topológico que tem $d\mu(s) = ds/s$ como medida de Haar, onde ds é a medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$.

Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}_+, \mu)$. O produto de convolução de f por g é definido por

$$f * g(t) = \int_0^\infty f(s)g(t/s)\,\frac{ds}{s}.$$

Se $1 \leq r, p, q \leq \infty$, $1 - 1/r = 1/p - 1/q$ e $f \in L^r(\mathbb{R}_+, \mu)$, $g \in L^p(\mathbb{R}, \mu)$, então temos a Desigualdade de Young

$$\|f * g\|_q \leq \|f\|_r \|g\|_p .$$

Definição 43. Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida. A medida μ é chamada *semifinita* se para todo $E \in \mathcal{X}$ com $\mu(E) = \infty$, existe $F \subset E$, $F \in \mathcal{X}$ tal que $0 < \mu(F) < \infty$.

Teorema 44 (Desigualdade Inversa de Hölder). *Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida semifinita, seja $1 < p < \infty$ e q tal que $1/p + 1/q = 1$. Então se $f \in L^p(X, \mu)$ temos que*

$$\|f\|_p = \sup \left\{ \int_X |f(x)g(x)|\, d\mu(x) : g \in L^q(X) \ e \ \|g\|_q = 1 \right\}.$$

Teorema 45 (Desigualdade Integral de Minkowiski). *Sejam $(X, \mathcal{X}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ dois espaços de medida σ-finitos e seja $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$-mensurável. Se $f \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$, então*

$$\left(\int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \int_Y \left(\int_X (f(x,y))^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y).$$

Demonstração. Para $p = 1$ é o teorema de Tonelli. Suponhamos $1 < p < \infty$ e seja q tal que $1/p + 1/q = 1$. Se $g \in L^q(X, \mu)$ e $\|g\|_q = 1$ então pelo Teorema de Tonelli e por Hölder obtemos

$$\begin{aligned}
\int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) |g(x)|\, d\mu(x) &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, |g(x)|\, d\mu(x) \right) d\nu(y) \\
&\leq \int_Y \left(\int_X (f(x,y))^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} \|g\|_q \, d\nu(y) \\
&= \int_Y \left(\int_X (f(x,y))^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y).
\end{aligned}$$

Portanto segue pela Desigualdade Inversa de Hölder que

$$\left(\int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \int_Y \left(\int_X (f(x,y))^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y).$$

Referências Bibliográficas

[1] J. Bergh e J. Löfstrom, *Interpolation Spaces*, Springer-Verlag, 1976.

[2] B. Bordin, A. K. Kushpel, J. Levesley e S. A. Tozoni, *Estimates of n-widths of Sobolev's classes on compact globally symmetric spaces of rank one*, J. Funct. Anal. **202** (2003), 307–326.

[3] Z. Ditzian, *Fractional derivatives and best approximation*, Acta Math. Hungar. **81** (1998), 323–348.

[4] J. Diestel e J. J. Uhl, *Vector Measures*, Math. Surveys 15, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1977.

[5] D. L. Fernandez, *Métodos de interpolação*, Manuscrito não publicado.

[6] A. K. Kushpel e S. A. Tozoni, *Entropy numbers of Sobolev and Besov classes on homogeneous spaces*, Advances in Analysis, 89–98, World Sci. Publ., Hackensack, NY, 2005.

[7] A. K. Kushpel, J. Levesley e S. A. Tozoni, *Estimates of n-widths of Besov classes on two-point homogeneous manifolds*, Technical Report No. 2002/34, MSC, University of Leicester, 2002. Submetido a publicação.

[8] P. I. Lizorkin e Kh. P. Rustamov, *On some equivalent norms of the Nikol'skii-Besov space on the sphere*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **322** (1992), 228–232; Soviet Math. Dokl. **45** (1992), 58–62.

[9] F. M. de Oliveira, *Análise Harmônica na Esfera Unitária d-dimensional Real*, Dissertação de Mestrado, IMECC/Unicamp, Agosto de 2005.

[10] J. Peetre, *New thoughts on Besov spaces*, Duke University Mathematics Series, Duke University, Durham, 1972.

[11] H. Triebel, *Theory of function spaces*, II. Monographs in Mathematics, **84**, Birkhäuser Verlag, 1992.