UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Dissertação de Mestrado

Produto de Medidas e Tópicos em Representações g-ádicas de Números Reais

Daniel Marinho Pellegrino

4 de Fevereiro de 1998

Produto de Medidas e Tópicos em Representações g-ádicas de Números Reais

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida pelo Sr. *Daniel Marinho Pellegrino* e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 4 de fevereiro de 1998.

Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em *Matemática*.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Pellegrino, Daniel Marinho

P364p Produto de medidas e tópicos em representações g-ádicas de números reais / Daniel Marinho Pellegrino -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1998.

Orientador : Mário Carvalho de Matos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Probabilidades. 2. Números normais. 3. Lei dos grandes numeros. 4. Teoria da medida. I. Matos, Mário Carvalho. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 04 de fevereiro de 1998

pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

____

Prof (a). Dr (a). MÁRIO CARVALHO DE MATOS

____

Prof (a). Dr (a). ARY OROZIMBO CHIACCHIO

____

Prof (a). Dr (a). MARIA SUELI MARCONI ROVERSI

Agradecimentos

Agradeço

- ao Prof. Mário Matos por toda paciência, dedicação, amizade e orientação.
- à minha mãe, pelo incentivo e compreensão.
- à Luciana Béart, que por tanto tempo me suportou e inspirou.
- ao Helder Rodrigues, ao Prof. Paulo Ruffino, e ao Paschoal Falconi Júnior, pelas sugestões .
- à Neusa Perin e ao Clóvis Perin Filho, por toda ajuda e apoio.
- à Ximena Mujica, pela digitação competente.
- aos meus companheiros de república, Diogo, Edson, Eduardo, Escobar e Júnior.
- à Elisângela de Campos, à Érika Chioca, à Luciane Marostegan, ao Cláudio A. Buzzi, ao Marcelo M. dos Santos, ao Ryuichi Fukuoka, ao Maurício Fronza e ao Marcelo Anzanello pela amizade e disponibilidade irrestrita.
- aos amigos da UFPB, e, em especial, ao Aldo Maciel, ao Carlos Alberto Bandeira Braga, e ao Rodrigo Leone.
- a todos os amigos do "predinho", que apesar de serem enumeráveis, são difíceis de enumerar.

"Aquele algo, por vezes claro... e por vezes vago ..que é... a matemática."
Imre Lakatos, 1922-1974

Dedico este trabalho à minha mãe

Conteúdo

Introdução

O presente texto tem o objetivo de introduzir conceitos de Teoria das Probabilidades (sob o ponto de vista da Teoria da Medida) e algumas aplicações em Teoria dos Números.

O primeiro Capítulo expõe de forma rápida os pré-requisitos de Teoria da Medida que são utilizados por todo o texto. Os capítulos 2,3,4,5 e 7 contém conceitos e resultados de Teoria das Probabilidades, que tentamos desenvolver de forma detalhada, sem pular etapas.

O capítulo 2 foi inspirado em [1] e nas notas de aula do Curso de Análise Real, ministrado pelo Prof. Mário Matos. Os Capítulos 3,4,5 e 7 foram baseados em [17], [11] e principalmente em [2].

O Capítulo 8 contém alguns resultados de Teoria dos Números envolvendo decomposições g-ádicas, e uma aplicação da Teoria da Lei Forte dos Grandes Números em Números Normais. Também nos preocupamos em citar resultados interessantes sobre normalidade de números e levar ao leitor algumas das várias questões abertas dessa área.

O Capítulo 6 surgiu um pouco por acaso. Apesar de não ser essencial para os Capítulos 7 e 8, suas proposições tornaram algumas contas do Capítulo 8 mais claras e - sob meu ponto de vista - mais elegantes. A idéia do Capítulo 6 surgiu a partir de algumas questões interessantes que apareceram durante nossos seminários com o Prof. Mário Matos. Intuitivamente, cada número real em [0,1], na escala g, pode ser pensado como uma seqüência infinita de algarismos (cada algarismo é um elemento de $\{0,\ldots,g-1\}$). Além disso, podemos definir naturalmente uma σ-álgebra em $\{0,\ldots,g-1\}^{\mathbf{N}}$[1] e uma medida nesta σ-álgebra, a saber a σ-álgebra produto infinito das σ-álgebras $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\{0,\ldots,g-1\})$ e a medida produto infinito das medidas μ, definidas por $\mu(A) = \frac{\#A}{g}$, $A \in \mathcal{A}$. Torna-se natural perguntar se, fixada uma escala g, até que ponto poderíamos "interpretar" o intervalo [0,1] (com a medida de Lebesgue nos Borelianos) como $\{0,\ldots,g-1\}^{\mathbf{N}}$ com a σ-álgebra e a medida definidas anteriormente. Conseguimos provar que realmente a aplicação que leva $(a_1,a_2,\ldots)$ na decomposição g-ádica $\sum_{j=1}^{\infty} a_j.g^{-j}$ tem propriedades fortíssimas (veja Teorema 6.8). Por isso, achamos que seria bom reunir estes resultados em um Capítulo. Também nos motivou a escrever o Capítulo 6 o fato de não termos encontrado literatura alguma com estas contas feitas. Posteriormente, encontramos algo parecido em [13], página 159, onde há uma indicação de que é possível, na escala 2, "caracterizar" a medida de Lebesgue nos Borelianos de [0,1] como uma medida produto infinito $\bar{\mu}$ em uma σ-álgebra $\bar{S}$ em um subespaço $\bar{X}$ de $X = \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ pela aplicação

$$\begin{array}{ccc} \bar{X} & \longrightarrow & [0,1] \\ (a_1,a_2,\ldots) & \mapsto & \sum_{j=1}^{\infty} a_j.2^{-j} \end{array} \tag{1}$$

onde

- $\bar{S} = \{\bar{X} \cap A; A \in S\}$, com S sendo a σ-ágebra produto infinito das σ-álgebras $\mathcal{P}(\{0,1\})$ e $\bar{X} = X - \bar{E}$, com $\bar{E}$ sendo o conjunto dos pontos $(a_1,a_2,\ldots)$ tais que $a_i = 0$ para apenas um conjunto finito de índices i.

- $\bar{\mu} = \nu|_{\bar{S}}$ onde ν é a medida produto infinito das medidas μ em $\mathcal{P}(\{0,1\})$, definidas por $\mu(A) = \frac{\#A}{2}$.

[1] A notação $\Omega^{\mathbf{N}}$ significa $\Omega \times \Omega \times \ldots$

O leitor deve notar que na caracterização indicada por [13] há claramente a preocupação em tornar (1) bijetiva (por isso foi considerado o conjunto $\bar{X}$ no lugar de X). Nós não tivemos tal preocupação, como pode ser visto no Capítulo 6.

Capítulo 1

Conceitos e Resultados Básicos de Teoria da Medida

Neste capítulo estabeleceremos notações, definições e resultados básicos que serão usados no texto e que esperamos serem de certa forma familiares ao leitor. Consideraremos o conteúdo deste Capítulo como pré-requisito, e por isso não nos preocuparemos com demonstrações.

1.1 Notações e esclarecimentos

- Alguns autores fazem distinção entre os termos função e aplicação. Nós, entretanto, vamos considerá-las como sinônimos.
- Em todo este texto Ω será um conjunto não vazio.
- Usaremos a notação $\mathcal{P}(\Omega)$ ou 2^{Ω} para o conjunto de todos os subconjuntos de Ω.
- Se $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $f : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é uma função qualquer, f_+ e f_- serão definidas por[1]

$$\begin{array}{rccl} f_+ : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{ (ou } \bar{\mathbb{R}}) \\ & \omega & \mapsto & \sup\{f(\omega), 0\} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} f_- : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{ (ou } \bar{\mathbb{R}}) \\ & \omega & \mapsto & -\inf\{f(\omega), 0\} \end{array}$$

  Podemos ver que

$$f = f_+ - f_-$$
$$|f| = f_+ + f_-$$

- Neste texto, $\sum_{j=m}^{n} \alpha_j$, com $m > n$, será interpretado como zero.
- Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma família de subconjuntos de Ω, e $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ e $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ usaremos a notação $A_n \uparrow_n A$, e quando não houver possibilidades de confusão, usaremos simplesmente $A_n \uparrow A$.

  Se $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma família de subconjuntos de Ω, e $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$ e $B = \cap_{j=1}^{\infty} B_j$ usaremos a notação $B_n \downarrow_n B$, e quando não houver possibilidades de confusão, usaremos simplesmente $B_n \downarrow B$.
- Algumas vezes usaremos o termo ***função numérica*** para denotar funções com contradomínio $\bar{\mathbb{R}}$. No caso de o contradomínio ser $\mathbb{R}$, usaremos o termo ***função real***.

[1] Se o leitor não está familiarizado com $\bar{\mathbb{R}}$ e com sua topologia, recomendamos [1]

- Se f e g forem funções de Ω em $\mathbb{R}$ (ou $\bar{\mathbb{R}}$), a notação $f > g$ (ou $f \geq g$) significará que $f(\omega) > g(\omega)$ (ou $f(\omega) \geq g(\omega)$) para todo $\omega \in \Omega$.
- Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de funções $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$(ou $\bar{\mathbb{R}}$) tais que $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ e $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in \Omega$, em algumas situações, usaremos a notação $f_n \uparrow f$.
- Se $A \subset \Omega_1$, a função $1_A : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$\begin{array}{cccc} 1_A: & \Omega_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A \\ 0, & \text{se } \omega \notin A \end{cases} \end{array}$$

- Se Ω é um conjunto finito, $\#\Omega$ denotará o número de elementos do conjunto Ω.
- A função Sinal é definida por

$$\begin{array}{cccc} Sinal: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \{-1,0,1\} \\ & w & \mapsto & \begin{cases} 0, & \text{se } w = 0 \\ 1, & \text{se } w > 0 \\ -1, & \text{se } w < 0 \end{cases} \end{array}$$

1.2 Definições $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ é uma *álgebra de subconjuntos de* Ω se valem:

i) $\Omega \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Muitas vezes diremos apenas que $\mathcal{A}$ é uma *álgebra*.
$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ é uma *σ-álgebra de subconjuntos de* Ω se $\mathcal{A}$ for uma álgebra e se valer a seguinte propriedade:

iv) $(A_j \in \mathcal{A})(\forall\, j \in \mathbb{N}) \Rightarrow \cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$

Quando não houver possibilidade de dúvidas, diremos apenas que $\mathcal{A}$ é uma *σ-álgebra*.
Um conjunto $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ é um *Sistema de Dynkin de subconjuntos de* Ω se valem:

1) $\Omega \in \mathcal{D}$

2) $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$

3) Se A_j estão em $\mathcal{D}$ para todo j em $\mathbb{N}$, e se os A_j são mutuamente disjuntos, então $\cup_{j=1}^{\infty} A_j$ está em $\mathcal{D}$.

Em geral diremos apenas que $\mathcal{D}$ é um *Sistema de Dynkin*.
Um conjunto $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ é uma *classe monótona de subconjuntos de* Ω se sempre que $A_n \in \mathcal{C}$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ e $A_n \uparrow A$ ou $A_n \downarrow A$ tivermos $A \in \mathcal{C}$. Às vezes diremos simplesmente que $\mathcal{C}$ é uma *classe monótona*.

1.3 Definição $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ é $\cap$-*estável* se sempre que A, B pertencerem a $\mathcal{A}$ tivermos $A \cap B$ pertencente a $\mathcal{A}$.

1.4 Teorema Um Sistema de Dynkin $\mathcal{D}$ é uma σ-álgebra se e somente se $\mathcal{D}$ é $\cap$-estável.

1.5 Definições e Comentários O leitor deve perceber que uma interseção arbitrária de σ-álgebras de subconjuntos de Ω é ainda uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω. Da mesma forma, uma interseção arbitrária de Sistemas de Dynkin de subconjuntos de Ω é ainda um Sistema de Dynkin de subconjuntos de Ω. Por isso, dado um conjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ é possível falarmos na *σ-álgebra $\sigma(\mathcal{F})$ gerada por $\mathcal{F}$*, e no *Sistema de Dynkin $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ gerado por $\mathcal{F}$*. Para isso, basta definirmos $\sigma(\mathcal{F})$ como a interseção de todas as σ-álgebras de subconjuntos de Ω que contém $\mathcal{F}$, e definirmos $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ como a interseção de todos os Sistemas de Dynkin de subconjuntos de Ω que contém $\mathcal{F}$.

1.6 Teorema Para cada $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $\cap$-estável, temos $\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})$.

1.7 Definição Um conjunto Ω, munido de uma σ-álgebra $\mathcal{U}$, é denotado por $(\Omega, \mathcal{U})$ e denominado *espaço mensurável*.

Quando Ω é um subconjunto de $\mathbb{R}$, a menos que seja mencionado algo em contrário, admitiremos $\mathcal{U}$ como sendo a σ-álgebra gerada pelos abertos da topologia natural de Ω (induzida pela topologia natural de $\mathbb{R}$). Analogamente, se Ω é subconjunto de $\bar{\mathbb{R}}$, a menos que se diga algo em contrário, $\mathcal{U}$ será a σ-álgebra gerada pelos abertos da topologia natural de Ω (induzida pela topologia natural de $\bar{\mathbb{R}}$). Nos casos mencionados $\mathcal{U}$ será denotado respectivamente $\mathcal{B}$ e $\bar{\mathcal{B}}$ (ou $\mathcal{B}(\Omega)$ e $\bar{\mathcal{B}}(\Omega)$) e será chamado de *$\sigma$-álgebra de Borel*. Os elementos de $\mathcal{B}$ (ou $\bar{\mathcal{B}}$) são geralmente chamados de *Borelianos*.

1.8 Definição Uma função $f : (\Omega_1, \mathcal{U}_1) \longrightarrow (\Omega_2, \mathcal{U}_2)$ é $\mathcal{U}_1$-$\mathcal{U}_2$ *mensurável* se $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}_1$ para todo $A \in \mathcal{U}_2$. Quando não houver possibilidades de dúvidas, diremos apenas que f é *mensurável*.

1.9 Proposição Uma função $f : (\Omega_1, \mathcal{U}_1) \longrightarrow (\Omega_2, \mathcal{U}_2)$, onde $\mathcal{U}_2 = \sigma(\mathcal{F}_2)$, isto é, $\mathcal{F}_2$ é um gerador da σ-álgebra $\mathcal{U}_2$, é mensurável se e somente se

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{U}_1 \qquad (\forall\, A \in \mathcal{F}_2).$$

1.10 Proposição Se f_1 e f_2 são funções numéricas mensuráveis de $(\Omega, \mathcal{U})$ em $(\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})$, então:

i) $f_1.f_2$ é mensurável.

ii) Se $f_1 + f_2$ e $f_1 - f_2$ estão bem definidas, temos $f_1 + f_2$ e $f_1 - f_2$ mensuráveis, respectivamente.

iii) $\sup\{f_1, f_2\}$ e $\inf\{f_1, f_2\}$ são mensuráveis.

1.11 Proposição Se $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ é uma aplicação arbitrária, e $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega_2)$ então

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{F})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})).$$

1.12 Proposição Se $f : (\Omega_1, \mathcal{U}_1) \longrightarrow (\Omega_2, \mathcal{U}_2)$ e $g : (\Omega_2, \mathcal{U}_2) \longrightarrow (\Omega_3, \mathcal{U}_3)$ são mensuráveis, então $g \circ f : (\Omega_1, \mathcal{U}_1) \longrightarrow (\Omega_3, \mathcal{U}_3)$ é mensurável.

1.13 Proposição Se $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de funções numéricas mensuráveis

$$f_n : (\Omega, \mathcal{U}) \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}}) \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, pontualmente, então f é mensurável.

1.14 Proposição Se $f : (\Omega, \mathcal{U}) \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})$ é mensurável, então f_+, f_- e $|f|$ são mensuráveis.

O leitor deve se convencer que se $f : (\Omega, \mathcal{U}) \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})$ é mensurável, e $-\infty < f(\omega) < \infty$ para todo $\omega \in \Omega$ então

$$\begin{array}{rccc} g: & (\Omega, \mathcal{U}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \\ & \omega & \mapsto & f(\omega) \end{array}$$

é mensurável. Reciprocamente, se $h : (\Omega, \mathcal{U}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ é mensurável, então

$$\begin{array}{rccc} s: & (\Omega, \mathcal{U}) & \longrightarrow & (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}}) \\ & \omega & \mapsto & h(\omega) \end{array}$$

é mensurável.

1.15 Definições Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra (ou σ-álgebra) de subconjuntos de Ω. Uma aplicação $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ com $\mu(\mathcal{A}) \subset]-\infty, +\infty]$ ou $\mu(\mathcal{A}) \subset [-\infty, +\infty[$ é uma *medida finitamente aditiva* em $\mathcal{A}$ se, para qualquer família finita $(A_j)_{j=1}^n$ de elementos de $\mathcal{A}$, mutuamente disjuntos, tivermos

$$\mu\left(\cup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j).$$

A função $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ com $\mu(\mathcal{A}) \subset]-\infty, +\infty]$ ou $\mu(\mathcal{A}) \subset [-\infty, +\infty[$ é uma *medida σ-aditiva* em $\mathcal{A}$ se para cada $(A_j)_{j=1}^\infty$ em $\mathcal{A}$, mutuamente disjuntos, tais que $\cup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{A}$ tivermos

$$\mu\left(\cup_{j=1}^\infty A_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j).$$

Podemos ver que toda medida σ-aditiva é finitamente aditiva.

Sempre que $\mu(\mathcal{A}) \subset [0, \infty]$, acrescentamos o adjetivo *positivo* às respectivas definições . O termo *medida* será às vezes usado no lugar de medida σ-aditiva positiva. Uma medida μ, definida em uma álgebra (ou σ-álgebra) $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω para a qual existe $(B_j)_{j=1}^\infty$ em $\mathcal{A}$, com $\cup_{j=1}^\infty B_j = \Omega$ e $\mu(B_j) < \infty$ para todo $j \in \mathbb{N}$, é denominada *medida σ-finita*.

Uma medida μ, definida numa σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω, tal que $\mu(\Omega) = 1$, é uma *medida de probabilidades*.

1.16 Teorema Seja μ uma medida numa σ-álgebra $\mathcal{U}$.

i) Se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{U}$ e $A_n \uparrow A$ então, $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

ii) Se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{U}$ e $A_n \downarrow A$ e $\mu(A_1) < \infty$ então, $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

1.17 Definição Um conjunto Ω munido de uma σ-álgebra $\mathcal{U}$ e de uma medida μ (σ-aditiva, positiva) é denotado por $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ e denominado *espaço medido*. Se a medida μ for uma medida de probabilidades, o terno $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ será denominado *espaço de probabilidades*.

1.18 Definição Se $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ é um espaço medido e uma determinada propriedade vale para todo ω em Ω, exceto para ω em um conjunto de medida (μ) nula, dizemos que tal propriedade vale em *quase toda a parte para* μ ou μ-*qtp*.

1.19 Teorema Seja μ uma medida finitamente aditiva em uma álgebra $\mathcal{A}$. Então:

i) Se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, $A = \cup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$ e $A_n \uparrow A$ sempre implicar que $\lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$, segue que μ é medida σ-aditiva em $\mathcal{A}$.

ii) Se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ e $A_n \downarrow \emptyset$ sempre implicar que $\lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(A_n) = 0$, segue que μ é medida σ-aditiva em $\mathcal{A}$.

1.20 Teorema da Classe Monótona Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de subconjuntos de Ω e $\mathcal{C}$ uma classe monótona de subconjuntos de Ω, tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$. Então $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}$.

1.21 Teorema da Extensão de Carathéodory Seja μ uma medida σ-finita em uma álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω. Então existe uma única medida $\bar{\mu} : \sigma(\mathcal{A}) \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ tal que $\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$. Dizemos que $\bar{\mu}$ é uma extensão da medida μ.

1.22 Definição Uma função $\varphi : (\Omega, \mathcal{U}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ é uma *função elementar* se ela é não negativa, mensurável e $Im\varphi$ é um conjunto finito.

1.23 Definição Seja $\varphi : (\Omega, \mathfrak{U}, \mu) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ uma função elementar. Definimos a *μ-integral de φ (sobre Ω)* como

$$\int_\Omega \varphi d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

onde $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$.

Esta definição é consistente pois pode-se provar que se

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j 1_{B_j}$$

então

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j).$$

1.24 Teorema Para toda função numérica mensurável, $f : (\Omega, \mathfrak{U}, \mu) \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathfrak{B}})$, não negativa, existe uma seqüência crescente $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ de funções elementares tais que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n = f,$$

pontualmente.

1.25 Definição Se f é uma função numérica mensurável não negativa, $f : (\Omega, \mathfrak{U}, \mu) \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathfrak{B}})$ e $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência crescente de funções elementares tais que $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$ (que existe pelo Teorema 1.24) então definimos a *μ-integral de f (sobre Ω)* como

$$\int_\Omega f d\mu := \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega \varphi_n d\mu.$$

Pode-se mostrar que esta definição é consistente, ou seja, não depende da particular escolha da seqüência $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$

1.26 Definição Se $f : (\Omega, \mathfrak{U}, \mu) \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathfrak{B}})$ é uma função numérica mensurável, e $\int_\Omega f_+ d\mu < \infty$ ou $\int_\Omega f_- d\mu < \infty$, a *$\mu$-integral de f (sobre Ω)* é definida por

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f_+ d\mu - \int_\Omega f_- d\mu$$

Devemos perceber que a definição 1.26 estende as definições 1.23 e 1.25.

1.27 Definição Uma função numérica mensurável $f : (\Omega, \mathfrak{U}, \mu) \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathfrak{B}})$ é *μ-integrável* se $\int_\Omega f_+ d\mu < \infty$ e $\int_\Omega f_- d\mu < \infty$.

1.28 Definição Uma função numérica mensurável $f : (\Omega, \mathfrak{U}, \mu) \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathfrak{B}})$ é *μ-quase-integrável* se $\int_\Omega f_+ d\mu < \infty$ ou $\int_\Omega f_- d\mu < \infty$. Neste caso é comum dizermos que a *μ-integral de f existe*

É claro que se f é μ-integrável, então f é μ-quase-integrável.

1.29 Definição Se $f : (\Omega, \mathfrak{U}, \mu) \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathfrak{B}})$ é uma função numérica mensurável e $A \in \mathfrak{U}$ definimos $\int_A f d\mu$ como

$$\int_A f d\mu := \int_\Omega f.1_A d\mu$$

Às vezes serão usadas outras notações para a integral $\int_A f d\mu$, como

$$\int_A f(\omega) d\mu \quad \text{ou} \quad \int_A f(\omega) d\mu(\omega)$$

1.30 Teorema da Convergência Monótona Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de funções mensuráveis

$$f_n : (\Omega, \mathfrak{U}, \mu) \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathfrak{B}}) \quad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

tais que $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ e $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$. Então f é mensurável e

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

1.31 Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue Sejam $(f_n)_{n=1}^{\infty}, f$ funções numéricas de $(\Omega, \mathfrak{U}, \mu)$ em $(\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathfrak{B}})$, mensuráveis, tais que $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$ μ-qtp. Suponhamos ainda que existe $g : (\Omega, \mathfrak{U}, \mu) \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathfrak{B}})$ μ-integrável tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então f é μ-integrável e

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

Na proposição a seguir enunciaremos algumas propriedades importantes da integral. Todas as funções citadas na proposição serão supostas mensuráveis de $(\Omega, \mathfrak{U}, \mu)$ em $(\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathfrak{B}})$.

1.32 Proposição

i) Se f é μ-quase integrável e $c \in \mathbb{R}$, então $c.f$ é μ-quase integrável e $\int_\Omega cf d\mu = c \int_\Omega f d\mu$.

ii) Se $\int_\Omega f d\mu$ existe, então $|\int_\Omega f d\mu| \leq \int_\Omega |f| d\mu$.

iii) Se $\int_\Omega f d\mu$ existe e $A \in \mathfrak{U}$ então $\int_A f d\mu$ existe, e se $\int_\Omega f d\mu$ é finito então $\int_A f d\mu$ é finito.

iv) Se $f \geq 0$ e $f(\omega) > 0$ para todo $\omega \in A$, com $A \in \mathfrak{U}$ e $\mu(A) > 0$ então $\int_\Omega f d\mu > 0$.

v) Se $f \geq g$ e $\int_\Omega g d\mu$ existe e é maior que $-\infty$, então $\int_\Omega f d\mu$ existe e $\int_\Omega f d\mu \geq \int_\Omega g d\mu$.

vi) Se $f \geq g$ e $\int_\Omega f d\mu$ existe e é menor que $+\infty$, então $\int_\Omega g d\mu$ existe e $\int_\Omega f d\mu \geq \int_\Omega g d\mu$

vii) f é μ-integrável se e somente se $|f|$ é μ-integrável

1.33 Teorema (Desigualdade de Minkowski) Dadas f e g funções numéricas mensuráveis

$$f, g : (\Omega, \mathfrak{U}, \mu) \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathfrak{B}})$$

tais que $f + g$ está bem definida, e dado p, $1 \leq p < \infty$, temos

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

1.34 Teorema (Desigualdade de Hölder) Dadas f e g funções numéricas mensuráveis

$$f, g : (\Omega, \mathfrak{U}, \mu) \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathfrak{B}})$$

e dados p e q reais tais que $1 < p < \infty$ e

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

temos

$$\int_\Omega |f.g| d\mu \leq \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_\Omega |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

Capítulo 2

Produto Finito de Medidas

2.1 Definições Sejam $(\Omega_j, \mathfrak{F}_j)$ espaços mensuráveis, $j = 1, \ldots, n$. Seja $\Omega = \prod_{i=1}^n \Omega_i$. Um subconjunto A de Ω é um *retângulo* se $A = A_1 \times \ldots \times A_n$, com A_j em $\mathfrak{F}_j$ para todo $j = 1, \ldots, n$. A σ-álgebra gerada por todos os retângulos de Ω é denominada *σ-álgebra produto das σ-álgebras* $\mathfrak{F}_j$, e é denotada por $\mathfrak{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{F}_n$, ou $\otimes_{i=1}^n \mathfrak{F}_i$.

2.2 Teorema Sejam $(\Omega_i, \mathcal{U}_i)$ espaços mensuráveis, para $i = 1, \ldots, n$. Suponha que para cada i, $\mathcal{U}_i = \sigma(\mathcal{A}_i)$ e que existe uma seqüência de eventos $(A_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{A}_i$, tal que $A_{i,k} \uparrow_k \Omega_i$. Então

$$\mathcal{U}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{U}_n = \sigma(A_1 \times \ldots \times A_n;\ A_i \in \mathcal{A}_i,\ i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

Demonstração: Basta mostrarmos que, se $\mathcal{U}$ é uma σ-álgebra qualquer em $\prod_{j=1}^n \Omega_j$, então cada $proj_i : (\prod_{j=1}^n \Omega_j, \mathcal{U}) \longrightarrow (\Omega_i, \mathcal{U}_i)$ é $\mathcal{U}$-$\mathcal{U}_i$ mensurável se e somente se $A_1 \times \ldots \times A_n \in \mathcal{U}$ para $A_i \in \mathcal{A}_i$ arbitrários.

Com efeito, se isto for provado, concluímos que a menor σ-álgebra que torna todas as $proj_i$ mensuráveis é aquela gerada por $\prod_{i=1}^n A_i$, com $A_i \in \mathcal{A}_i$, e portanto segue (1).

Suponhamos, primeiramente, que cada $proj_i$ é $\mathcal{U}$-$\mathcal{U}_i$ mensurável. Portanto, se $A_i \in \mathcal{A}_i$ para cada i, temos

$$A_1 \times \ldots \times A_n = proj_1^{-1}(A_1) \cap \ldots \cap proj_n^{-1}(A_n) \in \mathcal{U}.$$

Reciprocamente, suponhamos que $\prod_{i=1}^n A_i \in \mathcal{U}$ para todo A_j em $\mathcal{A}_j$. Seja $C_{i_0} \in \mathcal{A}_{i_0}$ onde $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Para todo $k \in \mathbb{N}$ definamos

$$B_k := A_{1,k} \times \ldots \times A_{i_0-1,k} \times C_{i_0} \times A_{i_0+1,k} \times \ldots \times A_{n,k} \in \mathcal{U}.$$

Temos que

$$B_k \uparrow_k \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{i_0-1} \times C_{i_0} \times \Omega_{i_0+1} \times \ldots \times \Omega_n.$$

Portanto

$$\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{i_0-1} \times C_{i_0} \times \Omega_{i_0+1} \times \ldots \times \Omega_n \in \mathcal{U}$$

e como

$$proj_{i_0}^{-1}(C_{i_0}) = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{i_0-1} \times C_{i_0} \times \Omega_{i_0+1} \times \ldots \times \Omega_n$$

segue pela Proposição 1.9 que $proj_{i_0}$ é $\mathcal{U} - \mathcal{U}_{i_0}$ mensurável. Como i_0 é arbitrário, podemos concluir que cada $proj_i$ é $\mathcal{U}$-$\mathcal{U}_i$ mensurável.

$\square$

2.3 Teorema do Produto de Medidas Seja $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ espaço medido, com μ_1 σ-finita em $\mathcal{F}_1$. Seja Ω_2 um conjunto com uma σ-álgebra $\mathcal{F}_2$. Suponha que para cada ω_1 em Ω_1 tenhamos uma medida $\mu(\omega_1, .)$ em $\mathcal{F}_2$. Suponha ainda que a função

$$\omega_1 \in \Omega_1 \mapsto \mu(\omega_1, B) \in \bar{\mathbb{R}} \tag{2}$$

é mensurável para cada B em $\mathcal{F}_2$, fixo. Além disso, suponha que $\mu(\omega_1, .)$ é ***uniformemente σ-finita***, isto é, $\mu(\omega_1, .)$ é positiva para todo ω_1 em Ω_1, e existem B_j em $\mathcal{F}_2$ tais que $\Omega_2 = \cup_{j=1}^{\infty} B_j$ com $\mu(\omega_1, B_j) \leq k_j < \infty$ para todo ω_1 em Ω_1 e todo j em $\mathbb{N}$, com k_j real. (Note que os B_j e k_j não dependem do particular ω_1 em Ω_1).

Então existe uma única medida $\mu : \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ tal que

$$\mu(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} \mu(\omega_1, A_2) d\mu_1(\omega_1) \qquad (\forall\ A_j \in \mathcal{F}_j)(j = 1, 2) \tag{3}$$

Temos ainda que μ é dada por

$$\mu(C) = \int_{\Omega_1} \mu(\omega_1, C(\omega_1)) d\mu_1(\omega_1) \qquad (\forall\ C \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$$

onde

$$C(\omega_1) := \{\omega_2 \in \Omega_2; (\omega_1, \omega_2) \in C\}$$

é denominada ***secção de C em ω_1***. Além disso, μ é σ-finita e será medida de probabilidades se $\mu(\omega_1, .)$ e μ_1 forem todas medidas de probabilidades.

Usaremos as notações $\Omega = \prod_{i=1}^{2} \Omega_i$ e $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$.

Demonstração:

1º Caso Suponhamos $\mu(\omega_1, .)$ finita para cada ω_1 em Ω_1.

Se $C \in \mathcal{F}$ então $C(\omega_1) \in \mathcal{F}_2$ para todo $\omega_1 \in \Omega_1$. De fato,

$$\mathcal{C} := \{C \in \mathcal{F}; C(\omega_1) \in \mathcal{F}_2\}$$

é σ-álgebra pois $\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathcal{C}$,

$$(\cup_{n=1}^{\infty} C_n)(\omega_1) = \cup_{n=1}^{\infty}(C_n(\omega_1)) \qquad \text{e} \qquad C^c(\omega_1) = (C(\omega_1))^c$$

Com efeito,

i)

$$\begin{aligned}
(\cup_{n=1}^{\infty} C_n)(\omega_1) &= \{\omega_2 \in \Omega_2; (\omega_1, \omega_2) \in \cup_{n=1}^{\infty} C_n\} \\
&= \{\omega_2 \in \Omega_2; \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \text{ com } (\omega_1, \omega_2) \in C_{n_0}\} \\
&= \cup_{n=1}^{\infty}\{\omega_2 \in \Omega_2; (\omega_1, \omega_2) \in C_n\} \\
&= \cup_{n=1}^{\infty}(C_n(\omega_1))
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
C^c(\omega_1) &= \{\omega_2 \in \Omega_2; (\omega_1, \omega_2) \in C^c\} \\
&= \{\omega_2 \in \Omega_2; (\omega_1, \omega_2) \notin C\} \\
&= \Omega_2 \setminus \{\omega_2 \in \Omega_2; (\omega_1, \omega_2) \in C\} \\
&= \Omega_2 \setminus C(\omega_1) = (C(\omega_1))^c
\end{aligned}$$

Além disso, se $A \in \mathcal{F}_1$ e $B \in \mathcal{F}_2$, então

$$(A \times B)(\omega_1) = \begin{cases} B, & \text{se } \omega_1 \in A \\ \emptyset, & \text{se } \omega_1 \notin A \end{cases}$$

Logo, $\mathcal{C}$ contém os retângulos, e portanto $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$. Mas, pela definição de $\mathcal{C}$, temos $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ e por conseguinte $\mathcal{C} = \mathcal{F}$. Vamos mostrar que se $C \in \mathcal{F}$ então a função

$$\omega_1 \in \Omega_1 \mapsto \mu(\omega_1, C(\omega_1))$$

é mensurável.

Seja

$$\mathcal{D} = \{C \in \mathcal{F}; \omega_1 \in \Omega_1 \mapsto \mu(\omega_1, C(\omega_1)) \text{ é mensurável}\}.$$

Se $C = A \times B$ é um retângulo, então

$$\mu(\omega_1, C(\omega_1)) = \begin{cases} \mu(\omega_1, B), & \text{se } \omega_1 \in A \\ \mu(\omega_1, \emptyset\,), & \text{se } \omega_1 \notin A \end{cases}$$

Logo, $\mu(\omega_1, C(\omega_1)) = \mu(\omega_1, B).1_A(\omega_1)$.

Mas 1_A é mensurável, $\omega_1 \mapsto \mu(\omega_1, B)$ é mensurável por (2), e portanto a função $\omega_1 \mapsto \mu(\omega_1, C(\omega_1))$ é mensurável quando C é retângulo. Logo os retângulos estão em $\mathcal{D}$.

Se $C_i = A_i \times B_i$, $i = 1, \ldots, n$ são retângulos mutuamente disjuntos então $C_i(\omega_1)$ são claramente mutuamente disjuntos, e

$$\mu(\omega_1, (\cup_{i=1}^n C_i)(\omega_1)) = \mu(\omega_1, \cup_{i=1}^n C_i(\omega_1)) = \sum_{i=1}^n \mu(\omega_1, C_i(\omega_1))$$

Logo,

$$\omega_1 \mapsto \mu(\omega_1, (\cup_{i=1}^n C_i)(\omega_1))$$

é mensurável, e $\cup_{i=1}^n C_i$ pertence a $\mathcal{D}$. Portanto $\mathcal{D}$ contém a álgebra $\mathcal{F}_0$ das uniões finitas de retângulos mutuamente dinjuntos.

Vamos mostrar que $\mathcal{D}$ é classe monótona. Neste caso, pelo Teorema da Classe Monótona teremos $\mathcal{D} \supset \sigma(\mathcal{F}_0) = \mathcal{F}$, e teremos ainda, da definição de $\mathcal{D}$, que $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$.

Logo, teremos $\mathcal{D} = \mathcal{F}$, isto é, $\omega_1 \in \Omega_1 \mapsto \mu(\omega_1, C(\omega_1))$ é mensurável para todo $C \in \mathcal{F}$.

Resta-nos mostrar que $\mathcal{D}$ é classe monótona.

Sejam $(C_n)_{n=1}^\infty$ em $\mathcal{D}$, $C_n \uparrow C$. Então, por **i**), temos

$$C_n(\omega_1) \uparrow C(\omega_1) \quad (\forall\, \omega_1 \in \Omega_1)$$

Logo, pelo Teorema 1.16,

$$\mu(\omega_1, C(\omega_1)) = \lim_{n \to \infty} \mu(\omega_1, C_n(\omega_1)) \qquad (\forall\, \omega_1 \in \Omega_1)$$

e $\mu(\omega_1, C(\omega_1))$ é então mensurável, pois é limite de funções mensuráveis. Então $C \in \mathcal{D}$.

Sejam $(D_n)_{n=1}^\infty$ em $\mathcal{D}$, $D_n \downarrow D$. Então

$$D_n(\omega_1) \downarrow D(\omega_1) \qquad (\forall\, \omega_1 \in \Omega_1)$$

pois

$$\begin{aligned}
\cap_{n=1}^{\infty}(D_n(\omega_1)) &= \{\omega_2 \in \Omega_2; \omega_2 \in D_n(\omega_1)\ (\forall\, n \in \mathbb{N})\} \\
&= \{\omega_2 \in \Omega_2; (\omega_1, \omega_2) \in D_n\ (\forall\, n \in \mathbb{N})\} \\
&= \{\omega_2 \in \Omega_2; (\omega_1, \omega_2) \in \cap_{n=1}^{\infty} D_n\} \\
&= (\cap_{n=1}^{\infty} D_n)(\omega_1) = D(\omega_1)
\end{aligned}$$

Logo, como $\mu(\omega_1, .)$ é finita, temos pelo Teorema 1.16,

$$\mu(\omega_1, D(\omega_1)) = \lim_{n\mapsto\infty} \mu(\omega_1, D_n(\omega_1)) \qquad (\forall\, \omega_1 \in \Omega_1)$$

e $\mu(\omega_1, D(\omega_1))$ é então mensurável, como limite de funções mensuráveis. Então $D \in \mathcal{D}$,e $\mathcal{D}$ é classe monótona.

Definamos

$$\mu(F) = \int_{\Omega_1} \mu(\omega_1, F(\omega_1)) d\mu_1(\omega_1), \quad (F \in \mathcal{F}) \tag{4}$$

Vamos provar que μ é medida em $\mathcal{F}$.

Sejam $F_1, F_2, \ldots$ mutuamente disjuntos em $\mathcal{F}$. Então

$$\begin{aligned}
\mu(\cup_{n=1}^{\infty} F_n) &= \int_{\Omega_1} \mu(\omega_1, \cup_{n=1}^{\infty} F_n(\omega_1)) d\mu_1(\omega_1) \\
&= \int_{\Omega_1} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\omega_1, F_n(\omega_1)) d\mu_1(\omega_1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_1} \mu(\omega_1, F_n(\omega_1)) d\mu_1(\omega_1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n)
\end{aligned}$$

onde a troca da ordem dos símbolos de integral e de soma se deve ao Teorema da Convergência Monótona.

Logo, μ é medida (positiva).

Notemos que se $A_1 \times A_2$ é um retângulo em $\mathcal{F}$ temos

$$\mu(A_1 \times A_2) = \int_{\Omega_1} \mu(\omega_1, A_2) 1_{A_1}(\omega_1) d\mu_1(\omega_1) = \int_{A_1} \mu(\omega_1, A_2) d\mu_1(\omega_1)$$

e vale (3).

<u>**2º Caso**</u> Suponhamos que $\mu(\omega_1, .)_{\omega_1 \in \Omega_1}$ é uniformemente σ-finita.

Podemos então encontrar conjuntos $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ mutuamente disjuntos em $\mathcal{F}_2$ tais que

$$\Omega_2 = \cup_{n=1}^{\infty} B_n \qquad \text{e} \qquad \mu(\omega_1, B_n) \le k_n < \infty$$

para quaisquer ω_1 em Ω_1, n natural, com k_n real para todo n.

Sejam

$$\begin{array}{rccc}
\nu_n(\omega_1, .): & \mathcal{F}_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& B & \mapsto & \mu(\omega_1, B \cap B_n)
\end{array} \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

Notemos que a imagem de $\nu_n(\omega_1,.)$ toma realmente apenas valores reais, e pelo 1º Caso podemos definir

$$\begin{array}{rccc} \nu_n: & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & C & \mapsto & \int_{\Omega_1} \nu_n(\omega_1, C(\omega_1)) d\mu_1(\omega_1) \end{array} \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

e portanto

$$\nu_n(C) = \int_{\Omega_1} \mu(\omega_1, C(\omega_1) \cap B_n) d\mu_1(\omega_1)$$

com ν_n sendo medida e

$$\nu_n(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} \mu(\omega_1, A_2 \cap B_n) d\mu_1(\omega_1)$$

Definamos

$$\begin{array}{rccc} \mu: & \mathcal{F} & \longrightarrow & \bar{\mathbb{R}} \\ & C & \mapsto & \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n(C) \end{array}$$

Então μ é medida e

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \times A_2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n(A_1 \times A_2) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_1} \mu(\omega_1, A_2 \cap B_n) d\mu_1(\omega_1) \\ &= \int_{A_1} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\omega_1, A_2 \cap B_n) d\mu_1(\omega_1) \\ &= \int_{A_1} \mu(\omega_1, \cup_{n=1}^{\infty}(A_2 \cap B_n)) d\mu_1(\omega_1) \\ &= \int_{A_1} \mu(\omega_1, A_2) d\mu_1(\omega_1) \quad (\forall\, A_i \in \mathcal{F}_i,\ i = 1, 2). \end{aligned}$$

onde, novamente, foi usado o Teorema da Convergência Monótona na terceira igualdade. De modo análogo, temos:

$$\mu(C) = \int_{\Omega_1} \mu(\omega_1, C(\omega_1)) d\mu_1(\omega_1) \quad (\forall\, C \in \mathcal{F})$$

Notemos que μ é σ-finita. De fato, como μ_1 é σ-finita, temos

$$\Omega_1 = \cup_{n=1}^{\infty} C_n, \text{ com } \mu_1(C_n) < \infty \quad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

Logo

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \cup_{n,m=1}^{\infty}(C_n \times B_m)$$

e

$$\begin{aligned} \mu(C_n \times B_m) &= \int_{C_n} \mu(\omega_1, B_m) d\mu_1(\omega_1) \\ &\leq \int_{C_n} k_m d\mu_1(\omega_1) \\ &= k_m \mu_1(C_n) < \infty \end{aligned}$$

para todo m e n naturais.

Finalmente, se μ_1 e $\mu(\omega_1, .)$ são todas medidas de probabilidade temos

$$\begin{aligned} \mu(\Omega_1 \times \Omega_2) &= \int_{\Omega_1} \mu(\omega_1, \Omega_2) d\mu_1(\omega_1) \\ &= \int_{\Omega_1} 1.d\mu_1(\omega_1) \\ &= \mu_1(\Omega_1) = 1 \end{aligned}$$

Resta-nos provar a unicidade de μ.

Se $\bar{\mu}$ é medida em $\mathfrak{F}$ tal que

$$\bar{\mu}(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} \mu(\omega_1, A_2) d\mu_1(\omega_1) \quad (\forall\ A_i \in \mathfrak{F}_i,\ i = 1, 2)$$

então $\bar{\mu} = \mu$ na álgebra $\mathfrak{F}_0$ de todas as uniões finitas de retângulos . Mas μ é σ-finita em $\mathfrak{F}_0$. Logo, pelo Teorema de Extensão de Carathéodory, temos que μ e $\bar{\mu}$ coincidem em $\sigma(\mathfrak{F}_0) = \mathfrak{F}$.

□

2.4 Corolário (Teorema da Medida Produto (Clássico)) Sejam(Ω_j, F_j, μ_j) espaços medidos e μ_j σ-finita em $\mathfrak{F}_j$, $j = 1, 2$. Se $\Omega = \prod_{i=1}^{2} \Omega_i$ e $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2$, a função

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \mathfrak{F} & \longrightarrow & \bar{\mathbb{R}} \\ & F & \mapsto & \int_{\Omega_1} \mu_2(F(\omega_1)) d\mu_1(\omega_1) \end{array}$$

é a única medida sobre $\mathfrak{F}$ tal que

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1).\mu_2(A_2) \quad (\forall\ A_j \in \mathfrak{F}_j,\ j = 1, 2).$$

Além disso μ é σ-finita sobre $\mathfrak{F}$ e será medida de probabilidades se μ_1 e μ_2 o forem. Temos ainda que

$$\mu(F) = \int_{\Omega_1} \mu_2(F(\omega_1)) d\mu_1(\omega_1) = \int_{\Omega_2} \mu_1(F(\omega_2)) d\mu_2(\omega_2) \quad (\forall\ F \in \mathfrak{F}).$$

Demonstração: Basta fazermos $\mu(\omega_1, .) = \mu_2$ para cada ω_1 em Ω_1. Neste caso o Teorema anterior nos garante que existe uma única medida $\mu : \mathfrak{F} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ tal que

$$\mu(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} \mu_2(A_2) d\mu_1(\omega_1) \quad (\forall\ A_j \in \mathfrak{F}_j,\ j = 1, 2) \tag{5}$$

a saber,

$$\mu(F) = \int_{\Omega_1} \mu_2(F(\omega_1)) d\mu_1(\omega_1) \quad (\forall\ F \in \mathfrak{F}). \tag{6}$$

Notemos que (5) nos dá

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1).\mu_2(A_2) \quad (\forall\ A_j \in \mathfrak{F}_j,\ j = 1, 2).$$

Pela unicidade de μ_1 e trocando μ_1 e μ_2 de posição temos

$$\mu(F) = \int_{\Omega_1} \mu_2(F(\omega_1)) d\mu_1(\omega_1) = \int_{\Omega_2} \mu_1(F(\omega_2)) d\mu_2(\omega_2)$$

É comum usarmos a notação $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$.

□

2.5 Observação No Corolário anterior, se considerarmos o caso especial $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$ e $\mu_1 = \mu_2$ =medida de Lebesgue, então como pelo Teorema 2.2 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$[1], temos que $\mu_1 \otimes \mu_2$ coincide com a medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ nos retângulos $A \times B$ onde A e B são intervalos. Logo, pelo Teorema da Extensão de Carathéodory, elas coincidem em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

2.6 Teorema de Fubini Sob as hipóteses e notações do Teorema 2.3, seja $f : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ mensurável.

a) Se f é não negativa, então $\int_{\Omega_2} f(\omega_1, .) d\mu(\omega_1, .)$ existe, define uma função mensurável em relação a $\mathcal{F}_1$, e

$$\int_\Omega f d\mu = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1, .) d\mu(\omega_1, .) \right) d\mu_1(\omega_1)$$

b) Se $\int_\Omega f d\mu$ existe (respectivamente é finita) então $\int_{\Omega_2} f(\omega_1, .) d\mu(\omega_1, .)$ existe (respectivamente é finita) para $\omega_1 \in \Omega_1$ qtp-μ_1. Além disso, a função

$$\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(\omega_1, .) d\mu(\omega_1, .)$$

é mensurável se ela for definida como zero nos pontos onde a integral não existe. Nestas circunstâncias,

$$\int_\Omega f d\mu = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1, .) d\mu(\omega_1, .) \right) d\mu_1(\omega_1)$$

Demonstração:

a) Para cada ω_1 em Ω_1 temos que $f(\omega_1, .) : (\Omega_2, \mathcal{F}_2) \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ é mensurável. De fato, se $B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ temos

$$\begin{aligned} f(\omega_1, .)^{-1}(B) &= \{\omega_2 \in \Omega_2; f(\omega_1, \omega_2) \in B\} \\ &= \{\omega_2 \in \Omega_2; (\omega_1, \omega_2) \in f^{-1}(B)\} \\ &= f^{-1}(B)(\omega_1) \in \mathcal{F}_2 \end{aligned}$$

pois a secção de um elemento de $\mathcal{F}$ é um elemento de $\mathcal{F}_2$.

Portanto, como f é não negativa, temos que $\int_{\Omega_2} f(\omega_1, .) d\mu(\omega_1, .)$ existe. Para $C \in \mathcal{F}$ temos

$$\int_{\Omega_2} 1_C(\omega_1, .) d\mu(\omega_1, .) = \int_{\Omega_2} 1_{C(\omega_1)} d\mu(\omega_1, .) = \mu(\omega_1, C(\omega_1)) \tag{7}$$

Logo, a aplicação

$$\omega_1 \in \Omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} 1_C(\omega_1, .) d\mu(\omega_1, .) \in \bar{\mathbb{R}}$$

é mensurável (pois $\omega_1 \mapsto \mu(\omega_1, C(\omega_1))$ é mensurável).

Além disso, por (7) temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega 1_C d\mu &= \mu(C) \\ &= \int_{\Omega_1} \mu(\omega_1, C(\omega_1)) d\mu_1(\omega_1) \\ &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} 1_C(\omega_1, .) d\mu(\omega_1, .) \right) d\mu_1(\omega_1) \end{aligned}$$

[1] $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ denota a σ-álgebra gerada pelos abertos da topologia natural de $\mathbb{R}^2$.

Se f é uma função elementar (não negativa), ou seja,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{C_j}, \ (\alpha_j \geq 0)(\forall\, j = 1, \ldots, n)(C_j \cap C_k = \emptyset \ , \ j \neq k)$$

então a aplicação

$$\omega_1 \in \Omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(\omega_1, .) d\mu(\omega_1, .)$$

é mensurável pois

$$\int_{\Omega_2} f(\omega_1, .) d\mu(\omega_1, .) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_{\Omega_2} 1_{C_j}(\omega_1, .) d\mu(\omega_1, .).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} f d\mu &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_{\Omega} 1_{C_j} d\mu \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} 1_{C_j}(\omega_1, .) d\mu(\omega_1, .) \right) d\mu_1(\omega_1) \\
&= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1, .) d\mu(\omega_1, .) \right) d\mu_1(\omega_1) \qquad (8)
\end{aligned}$$

Se $f : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ é mensurável e não negativa, existem pelo Teorema 1.24 $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ elementares tais que $0 \leq \varphi_n \uparrow f$.Por (8) e pelo Teorema de Convergência Monótona, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} f d\mu &= \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} \varphi_n d\mu \\
&= \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} \varphi_n(\omega_1, .) d\mu(\omega_1, .) \right) d\mu_1(\omega_1) \qquad (9)
\end{aligned}$$

Mas $\varphi_n(\omega_1, .) \uparrow f(\omega_1, .)$. Logo, pelo Teorema de Convergência Monótona, temos

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega_2} \varphi_n(\omega_1, .) d\mu(\omega_1, .) = \int_{\Omega_2} f(\omega_1, .) d\mu(\omega_1, .) \qquad (10)$$

Temos ainda que $\int_{\Omega_2} \varphi_n(\omega_1, .) d\mu(\omega_1, .) \uparrow \int_{\Omega_2} f(\omega_1, .) d\mu(\omega_1, .)$.
Logo, mais uma vez pelo Teorema da Convergência Monótona, temos

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} \varphi_n(\omega_1, .) d\mu(\omega_1, .) \right) d\mu_1(\omega_1) = \int_{\Omega_1} \left(\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega_2} \varphi_n(\omega_1, .) d\mu(\omega_1, .) \right) d\mu_1(\omega_1) \qquad (11)$$

Portanto, de (9), (10), (11) segue o resultado.

b) Suponhamos que $\int_{\Omega} f d\mu$ existe. Então $\int_{\Omega} f_+ d\mu < \infty$ ou $\int_{\Omega} f_- d\mu < \infty$.
Suponhamos $\int_{\Omega} f_- d\mu < \infty$. De a) segue que

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f_-(\omega_1, .) d\mu(\omega_1, .) \right) d\mu_1(\omega_1) = \int_{\Omega} f_- d\mu < \infty.$$

Logo a aplicação

$$\omega_1 \in \Omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f_-(\omega_1,.)d\mu(\omega_1,.)$$

é μ_1-integrável. Portanto esta aplicação é finita μ_1-qtp. Então, a menos de um conjunto A em $\mathcal{F}_1$ de medida $\mu_1(A) = 0$, temos

$$\int_{\Omega_2} f(\omega_1,.)d\mu(\omega_1,.) = \int_{\Omega_2} f_+(\omega_1,.)d\mu(\omega_1,.) - \int_{\Omega_2} f_-(\omega_1,.)d\mu(\omega_1,.)$$

Para os pontos ω_1 em A, definimos a integral acima como zero [2]. Logo,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1,.)d\mu(\omega_1,.)\right)d\mu_1(\omega_1) = \\
&= \int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2} f_+(\omega_1,.)d\mu(\omega_1,.) - \int_{\Omega_2} f_-(\omega_1,.)d\mu(\omega_1,.)\right]d\mu_1(\omega_1) \\
&= \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f_+(\omega_1,.)d\mu(\omega_1,.)\right)d\mu_1(\omega_1) - \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f_-(\omega_1,.)d\mu(\omega_1,.)\right)d\mu_1(\omega_1) \\
&= \int_\Omega f_+ d\mu - \int_\Omega f_- d\mu = \int_\Omega f d\mu
\end{aligned}$$

O caso $\int_\Omega f d\mu$ finito é análogo.

$\square$

2.7 Teorema de Fubini (Clássico) Sejam $\Omega = \prod_{i=1}^{2} \Omega_i$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ e $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$, onde $(\Omega_j, \mathcal{F}_j, \mu_j)$, $j = 1, 2$, são espaços medidos com medidas σ-finitas. Se $f : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é mensurável e $\int_\Omega f d\mu$ existe, então

$$\int_\Omega f d\mu = \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1,.)d\mu_2\right)d\mu_1(\omega_1) = \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f(.,\omega_2)d\mu_1\right)d\mu_2(\omega_2) \tag{12}$$

Demonstração: Basta fazermos

$$\mu(\omega_1,.) = \mu_2 \qquad (\forall\ \omega_1 \in \Omega_1)$$

em 2.6. Por simetria, também vale a segunda igualdade. $\square$

Os Teoremas da Medida Produto e o Teorema de Fubini podem ser estendidos para mais de duas medidas, como veremos a seguir.

2.8 Teorema Sejam
i) $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$ espaços mensuráveis
ii) μ_1 medida σ-finita sobre $\mathcal{F}_1$
iii) $\mu(\omega_1, \dots \omega_j, .)$ medidas sobre $\mathcal{F}_{j+1}$ tais que as aplicações

$$(\omega_1, \dots \omega_j) \mapsto \mu((\omega_1, \dots \omega_j, B)$$

[2]Devemos ter este cuidado pois para pontos de A poderia ocorrer $\infty = \int_{\Omega_2} f_+(\omega_1,.)d\mu(\omega_1,.) = \int_{\Omega_2} f_-(\omega_1,.)d\mu(\omega_1,.)$ e teríamos uma expressão sem sentido.

são $\mathcal{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_j$-mensuráveis para cada $B \in \mathcal{F}_{j+1}$ e $j \in \{1, \ldots, n-1\}$

iv) $\mu(\omega_1, \ldots \omega_j, .)$ uniformemente σ-finita sobre $\mathcal{F}_{j+1}$ para cada $j \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Então

a) Existe uma única medida μ sobre $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_n$ tal que para cada retângulo $A_1 \times \ldots \times A_n$ em $\mathcal{F}$ vale

$$\mu(A_1 \times \ldots \times A_n) =$$

$$\int_{A_1} \left[\int_{A_2} \cdots \left[\int_{A_{n-1}} \left[\int_{A_n} d\mu(\omega_1, \ldots w_{n-1}, .) \right] d\mu(\omega_1, \ldots w_{n-2}, .) \right] \cdots \right] d\mu(\omega_1, .) \Bigg] d\mu_1$$

Neste caso μ é σ-finita sobre $\mathcal{F}$ e será uma medida de probabilidades se μ_1 e as $\mu(\omega_1, \ldots \omega_j, .)$ também forem medidas de probabilidades.

b) Se $f : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$, não-negativa for $\mathcal{F}$-mensurável, onde $\Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$, então

$$\int_\Omega f d\mu =$$

$$\int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} \cdots \left[\int_{\Omega_{n-1}} \left[\int_{\Omega_n} f(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, .) d\mu(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, .) \right] d\mu(\omega_1, \ldots, \omega_{n-2}, .) \right] \cdots \right] d\mu(\omega_1, .) \Bigg] d\mu_1$$

c) Se $\int_\Omega f d\mu$ existe (respectivamente, é finita), então vale a igualdade do item b) no sentido que, para cada $j = n-1, n-2, \ldots$, a integral com respeito a $\mu(\omega_1, \ldots, \omega_j, .)$ existe (respectivamente é finita), exceto num subconjunto de $\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_j$ de medida λ_j nula (onde λ_j é definido como em (13)). Nesses conjuntos de medida nula, definimos as respectivas integrais como zero.

Demonstração: Os Teoremas anteriores nos garantem que o Teorema vale para $n = 2$. Vamos demonstrar o resultado por indução. Suporemos primeiramente, que a) e b) valem para $n-1$ fatores, e provaremos que valem para n fatores. Logo, por hipótese, existe uma única medida λ_{n-1} sobre $\mathcal{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_{n-1}$, σ-finita e tal que

$$\lambda_{n-1}(A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) = \int_{A_1} \left[\int_{A_2} \cdots \left[\int_{A_{n-1}} d\mu(\omega_1, \ldots, \omega_{n-2}, .) \right] \cdots \right] d\mu(\omega_1, .) \Bigg] d\mu_1{}^3 \quad (13)$$

para todo A_j em $\mathcal{F}_j$, $j = 1, \ldots, n-1$.

Pelo caso $n = 2$ existe uma única medida [4]

$$\mu : (\mathcal{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_{n-1}) \otimes \mathcal{F}_n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

tal que

$$\mu(A \times A_n) = \int_A \mu(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, A_n) d\lambda_{n-1}(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$$

ou ainda

$$\mu(A \times A_n) = \int_{\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{n-1}} 1_A(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}) \mu(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, A_n) d\lambda_{n-1}(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}) \quad (14)$$

Se A for da forma $A = A_1 \times \ldots \times A_{n-1} \in \mathcal{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_{n-1}$, então

$$1_A(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}) = 1_{A_1}(\omega_1) \ldots 1_{A_{n-1}}(\omega_{n-1}) \quad (15)$$

Logo, de (14),(15) e da hipótese de indução em b) temos

[3] O leitor deve notar que $\int_{A_{n-1}} d\mu(\omega_1, \ldots, \omega_{n-2}, .) = \mu(\omega_1, \ldots, \omega_{n-2}, A_{n-1})$

[4] Também deve ser observado que $\mathcal{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_n = (\mathcal{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_{n-1}) \otimes \mathcal{F}_n$.Este resultado se deve ao Teorema 2.2

$$\begin{aligned}
&\mu(A_1 \times \ldots \times A_n) = \\
&= \int_{\Omega_1\times\ldots\times\Omega_{n-1}} \prod_{j=1}^{n-1} 1_{A_j}(\omega_j)\mu(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1},A_n)d\lambda_{n-1}(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}) \\
&= \int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2}\cdots\left[\int_{\Omega_{n-1}}\prod_{j=1}^{n-1} 1_{A_j}(\omega_j)\mu(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1},A_n)d\mu(\omega_1,\ldots,\omega_{n-2},.)\right]\cdots\right]d\mu(\omega_1,.)\Bigg]d\mu_1 \\
&= \int_{A_1}\left[\int_{A_2}\cdots\left[\int_{A_{n-1}}\mu(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1},A_n)d\mu(\omega_1,\ldots,\omega_{n-2},.)\right]\cdots\right]d\mu(\omega_1,.)\Bigg]d\mu_1 \\
&= \int_{A_1}\left[\int_{A_2}\cdots\left[\int_{A_{n-1}}\left[\int_{A_n}d\mu(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1},.)\right]d\mu(\omega_1,\ldots,\omega_{n-2},.)\right]\cdots\right]d\mu(\omega_1,.)\Bigg]d\mu_1
\end{aligned}$$

Portanto tal medida μ existe sobre $\mathcal{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_n$, mas devemos perceber que a unicidade afirmada em a) ainda não foi demonstrada.

Para mostrar a unicidade de μ vamos mostrar que ela é σ-finita sobre a álgebra das uniões finitas de retângulos mutuamente disjuntos, pois neste caso o Teorema da Extensão de Carathéodory nos garante a unicidade.

Temos

$$\Omega_j = \cup_{k=1}^{\infty} A_{jk},\ j = 1,\ldots,n,\ \text{com } \mu(\omega_1,\ldots,\omega_{j-1},A_{jk}) \leq \alpha_{jk} < \infty \quad \text{e } \mu_1(A_{1k}) \leq \alpha_{1k} < \infty,$$

para todo

$$(\omega_1,\ldots,\omega_{j-1}) \in \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{j-1},\ (j = 2,\ldots n).$$

Então

$$\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n = \cup_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty}(A_{1i_1} \times A_{2i_2} \times \ldots \times A_{ni_n})$$

com

$$\begin{aligned}
&\mu(A_{1i_1} \times \ldots \times A_{ni_n}) = \\
&= \int_{A_{1i_1}}\left[\int_{A_{2i_2}}\cdots\left[\int_{A_{(n-1)i_{n-1}}}\mu(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1},A_{ni_n})d\mu(\omega_1,\ldots,\omega_{n-2},.)\right]\cdots\right]d\mu(\omega_1,.)\Bigg]d\mu_1 \\
&\leq \alpha_{1i_1}\ldots\alpha_{ni_n} < \infty
\end{aligned}$$

e segue o resultado a).

Para demonstrar b) notemos que μ construída acima é única e é determinada por λ_{n-1} e $\mu(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1},.)$. Pelo caso $n = 2$, e pelo Teorema 2.6a) temos

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega_1\times\ldots\times\Omega_{n-1}}\left(\int_{\Omega_n} f(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1},.)d\mu(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1},.)\right)d\lambda_{n-1}(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1})$$

Pela hipótese de indução temos

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2}\cdots\left(\int_{\Omega_n} f(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1},.)d\mu(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1},.)\right)\cdots\right)d\mu(\omega_1,.)\Bigg)d\mu_1.$$

Demonstração de c)

Suponhamos que c) vale para $n-1$ fatores e provemos que vale para n fatores.

Suponhamos que $\int_\Omega f d\mu$ existe. Então

$$\int_\Omega f_+ d\mu < \infty \qquad \text{ou} \qquad \int_\Omega f_- d\mu < \infty.$$

Admitamos, sem perda de generalidade, que $\int_\Omega f_- d\mu < \infty$. Do caso $n = 2$ segue que

$$\int_{\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{n-1}} \left(\int_{\Omega_n} f_-(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, .) d\mu(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, .) \right) d\lambda_{n-1}(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}) =$$

$$= \int_\Omega f_- d\mu < \infty$$

Portanto a aplicação

$$(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}) \in \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{n-1} \mapsto \int_{\Omega_n} f_-(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, .) d\mu(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, .)$$

é λ_{n-1}-integrável, e, por conseguinte, é finita λ_{n-1}-qtp. Então, a menos de um conjunto A em $\mathcal{F}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_{n-1}$ de medida nula, temos

$$\int_{\Omega_n} f(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, .) d\mu(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, .) =$$
$$= \int_{\Omega_n} f_+(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, .) d\mu(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, .) - \int_{\Omega_n} f_-(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, .) d\mu(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, .)$$

Para os pontos de A definimos a integral como zero.
Logo,

$$\int_{\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{n-1}} \left(\int_{\Omega_n} f(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, .) d\mu(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, .) \right) d\lambda_{n-1}(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$$
$$= \int_{\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{n-1}} \left(\int_{\Omega_n} f_+(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, .) d\mu(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, .) \right) d\lambda_{n-1}(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$$
$$- \int_{\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{n-1}} \left(\int_{\Omega_n} f_-(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, .) d\mu(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, .) \right) d\lambda_{n-1}(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$$
$$= \int_\Omega f_+ d\mu - \int_\Omega f_- d\mu = \int_\Omega f d\mu$$

Portanto segue o resultado se utilizarmos a hipótese de indução.

□

Temos dois Corolários imediatos dos resultados anteriores, a saber:

2.9 Corolário Sejam $(\Omega_j, \mathcal{F}_j, \mu_j)$ espaços medidos e μ_j medidas σ-finitas, $j = 1, \ldots, n$. Se $\Omega = \prod_{i=1}^n \Omega_i$ e $\mathcal{F} = \otimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i$, existe uma única medida sobre $\mathcal{F}$ tal que, para cada retângulo $A_1 \times \ldots \times A_n$ em $\mathcal{F}$, vale

$$\mu(A_1 \times \ldots \times A_n) = \mu_1(A_1) \ldots \mu_n(A_n)$$

Além disso, μ é σ-finita e será medida de probabilidades se $\mu_1, \ldots, \mu_n$ forem medidas de probabilidades. Usaremos a notação $\mu = \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$, ou $\mu = \otimes_{i=1}^n \mu_i$, e denominaremos μ de medida produto.

2.10 Corolário Sejam $(\Omega_j, \mathcal{F}_j, \mu_j)$ espaços medidos, μ_j medidas σ-finitas, $j = 1, \ldots, n$ e $\Omega = \prod_{i=1}^n \Omega_i$, $\mathcal{F} = \otimes_{i=1}^n \mathcal{F}_i$.

i) Se $f : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é $\mathcal{F}$-mensurável, não negativa, então

$$\int_\Omega f d\mu = \int_{\Omega_1} \cdots \left(\int_{\Omega_n} f(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, .) d\mu_n \right) \ldots d\mu_1$$

ii) Se $f : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é $\mathcal{F}$-mensurável e tal que $\int_\Omega f d\mu$ existe (respectivamente, é finita) então

$$\int_\Omega f d\mu = \int_{\Omega_1} \cdots \left(\int_{\Omega_n} f(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, .) d\mu_n \right) \ldots d\mu_1$$

no mesmo sentido de 2.8 (c).

Capítulo 3

Variáveis Aleatórias

3.1 Definição Sejam $(\Omega, \mathfrak{U}, P)$ um espaço de probabilidades e $(\Omega', \mathfrak{U}')$ um espaço mensurável. Uma função mensurável $X : (\Omega, \mathfrak{U}, P) \longrightarrow (\Omega', \mathfrak{U}')$ é denominada $(\Omega', \mathfrak{U}')$-*variável aleatória*, ou simplesmente, *variável aleatória*.

Se $\Omega' = \mathbb{R}$ e $\mathfrak{U}' = \mathfrak{B}$, dizemos que X é uma *variável aleatória real*. Se $\Omega' = \bar{\mathbb{R}}$ e $\mathfrak{U}' = \bar{\mathfrak{B}}$, dizemos que X é uma *variável aleatória numérica*.

3.2 Definição Seja $X : (\Omega, \mathfrak{U}, P) \longrightarrow (\Omega', \mathfrak{U}')$ uma variável aleatória. Então a função

$$\begin{array}{rccc} P_X : & \mathfrak{U}' & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \mapsto & P_X(A) = P(X^{-1}(A)) \end{array}$$

é uma medida de probabilidade em $(\Omega', \mathfrak{U}')$ (verifique!) e é denominada *distribuição em X (com respeito a P)*. A medida P_X é às vezes denotada por $X(P)$.

3.3 Definição Uma família de variáveis aleatórias reais $(X_i)_{i \in I}$,

$$X_i : (\Omega, \mathfrak{U}, P) \longrightarrow (\Omega', \mathfrak{U}') \qquad (\forall\, i \in I)$$

é *identicamente distribuída* se $P_{X_i} = P_{X_j}$ para todos i, j em I.

3.4 Definição Seja $X : (\Omega, \mathfrak{U}, P) \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathfrak{B}})$ variável aleatória numérica. Se X é pelo menos quase-integrável, então

$$E_P(X) := \int_\Omega X dP$$

é denominada *esperança de X*. Quando não houver possibilidades de dúvidas, escreveremos $E(X)$ em lugar de $E_P(X)$.

3.5 Teorema Seja $f' : (\Omega', \mathfrak{U}') \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ uma função mensurável, não negativa, e seja $X : (\Omega, \mathfrak{U}, P) \longrightarrow (\Omega', \mathfrak{U}')$ uma variável aleatória. Então

$$\int_{\Omega'} f' dP_X = \int_\Omega f' \circ X dP \tag{1}$$

Demonstração: Como f' e X são mensuráveis, temos $f' \circ X$ mensurável. Além disso, como f' é não negativa, temos $f' \circ X$ não negativa. Portanto a integral no lado direito de (1) pertence a $\bar{\mathbb{R}}$.

Primeiramente, suponhamos f' função elementar, isto é,

$$f' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i'} \quad (\alpha_i \in \mathbb{R}_+,\ A_i' \in \mathfrak{U}',\ i = 1 \ldots, n.)$$

Então

$$f' \circ X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}, \qquad (A_i = X^{-1}(A_i'))$$

Como por definição

$$P_X(A_i') = P(X^{-1}(A_i')) = P(A_i) \qquad (\forall\, i = 1, \ldots n),$$

temos que (1) é válida, pois

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} f' dP_X &= \int_{\Omega'} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i'} dP_X \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_X(A_i') \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(A_i) \\
&= \int_{\Omega} f' \circ X dP
\end{aligned}$$

Se f' é não negativa, mensurável, escolhemos, pelo Teorema 1.24 $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ elementares, tais que $0 \leq u_n \uparrow f'$.

Logo,

$$\int_{\Omega'} f' dP_X = \sup_n \int_{\Omega'} u_n dP_X = \sup_n \int_{\Omega} u_n \circ X dP \tag{2}$$

Mas, $u_n \circ X \uparrow f' \circ X$

Portanto,

$$\sup_n \int_{\Omega} u_n \circ X dP_X = \int_{\Omega} f' \circ X dP \tag{3}$$

pelo Teorema da Convergência Monótona. Logo, de (2) e (3) temos:

$$\int_{\Omega'} f' dP_X = \int_{\Omega} f' \circ X dP$$

□

3.6 Corolário (Teorema da Transformação para Integrais) Sejam $f' : (\Omega', \mathfrak{U}') \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathfrak{B}})$ uma aplicação mensurável e $X : (\Omega, \mathfrak{U}, P) \longrightarrow (\Omega', \mathfrak{U}')$ uma variável aleatória. Então f' é P_X-integrável (P_X-quase-integrável) se e somente se $f' \circ X$ é P-integrável (P-quase-integrável). Além disso, nessas circunstâncias,

$$\int_{\Omega'} f' dP_X = \int_{\Omega} f' \circ X dP$$

Demonstração: Sabemos que $f' = f'_+ - f'_-$ com $f'_+ \geq 0$, $f'_- \geq 0$, a saber

$$f'_+ = \sup\{f', 0\} \qquad \text{e} \qquad f'_- = -\inf\{f', 0\}$$

Pelo Teorema anterior segue

$$\int_{\Omega'} f'_+ dP_X = \int_{\Omega} f'_+ \circ X dP \quad \text{e} \quad \int_{\Omega'} f'_- dP_X = \int_{\Omega} f'_- \circ X dP$$

É fácil ver que

$$(f' \circ X)_+ = f'_+ \circ X \quad \text{e} \quad (f' \circ X)_- = f'_- \circ X$$

Portanto,

$$\int_{\Omega'} f'_+ dP_X = \int_\Omega f'_+ \circ X dP = \int_\Omega (f' \circ X)_+ dP$$
$$\int_{\Omega'} f'_- dP_X = \int_\Omega f'_- \circ X dP = \int_\Omega (f' \circ X)_- dP$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} f' dP_X &= \int_{\Omega'} f'_+ dP_X - \int_{\Omega'} f'_- dP_X \\ &= \int_\Omega (f' \circ X)_+ dP - \int_\Omega (f' \circ X)_- dP \\ &= \int_\Omega f' \circ X dP \end{aligned}$$

□

3.7 Observações

- Pelo Teorema 3.5 e Corolário 3.6 temos que se $X : (\Omega, \mathcal{U}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ é uma variável aleatória e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável, pelo menos P_X-quase-integrável (pensando em $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ como variável aleatória), então:

$$\begin{aligned} E_{P_X}(f) &= \int_{\mathbb{R}} f dP_X \\ &= \int_\Omega f \circ X dP \\ &= E_P(f \circ X) \end{aligned}$$

- Se $X : (\Omega, \mathcal{U}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ é uma variável aleatória, pelo menos P-quase-integrável, segue do Corolário 3.6 que

$$E_P(X) = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x)$$

3.8 Definição Seja $X : (\Omega, \mathcal{U}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ variável aleatória integrável. Dizemos que

$$V(X) = E([X - E(X)]^2)$$

é a *variância de* X.

Veja que

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_\Omega (X - E(X))^2 dP \\ &= \int_\Omega X^2 - 2XE(X) + E(X)^2 dP \\ &= \int_\Omega X^2 dP - 2E(X) \int_\Omega X dP + \int_\Omega E(X)^2 dP \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 P(\Omega) \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

3.9 Teorema Seja $X : (\Omega, \mathcal{U}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ variável aleatória. Então X é quadrado integrável se e somente se X é integrável e $V(X) < \infty$.

Observação: Uma função $f : (\Omega, \mathcal{U}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita ser quadrado integrável se $\int_\Omega |f|^2 d\mu < \infty$. O conjunto de todas as funções $f : (\Omega, \mathcal{U}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ quadrado integráveis é um espaço vetorial, devido à Desigualdade de Minkowski. Denotamos tal espaço vetorial por $\mathcal{L}^2(\mu)$.

Para demonstrar o Teorema, demonstraremos antes o seguinte Lema:

3.10 Lema Seja $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ um espaço medido, com medida finita μ, e seja f uma função mensurável numérica, definida em Ω. Se $1 \leq p' \leq p < \infty$ então

$$\left(\int_\Omega |f|^{p'} d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}}$$

Como conseqüência, temos

$$\int_\Omega |f|^p d\mu < \infty \Rightarrow \int_\Omega |f|^{p'} d\mu < \infty$$

Demonstração: Se $p = p'$, a demonstração é imediata. Suponhamos, portanto, $p' < p$. Temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f|^{p'} d\mu &= \int_\Omega |f|^{p'}.1 d\mu \\ &\leq \left[\int_\Omega (|f|^{p'})^r d\mu\right]^{\frac{1}{r}} . \left[\int_\Omega |1|^s d\mu\right]^{\frac{1}{s}} \end{aligned} \tag{4}$$

onde $r = \frac{p}{p'} > 1$ e s é tal que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ e a desigualdade em (4) é aplicação da Desigualdade de Hölder.

Logo,

$$\int_\Omega |f|^{p'} d\mu \leq \left[\int_\Omega (|f|^{p'})^{\frac{p}{p'}} d\mu\right]^{\frac{p'}{p}} .(\mu(\Omega))^{1-\frac{p'}{p}}$$

e portanto

$$\left(\int_\Omega |f|^{p'} d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left[\left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{p'}{p}}\right]^{\frac{1}{p'}} . \left[(\mu(\Omega))^{1-\frac{p'}{p}}\right]^{\frac{1}{p'}}$$

e finalmente

$$\left(\int_\Omega |f|^{p'} d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} .(\mu(\Omega))^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}}$$

□

Demonstração do Teorema: Se X é quadrado integrável, então, pelo Lema anterior, temos que $\int_\Omega |X| dP < \infty$. Portanto

$$\int_\Omega X_+ + X_- dP < \infty, \quad \int_\Omega X_+ dP < \infty \quad \text{e} \quad \int_\Omega X_- dP < \infty$$

Logo, X é integrável. Além disso

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 < \infty.$$

Reciprocamente, se X é integrável e $V(X) < \infty$ temos

$$\int_\Omega (X - E(X))^2 dP = V(X) < \infty$$

e $X - E(X)$ é quadrado integrável. Logo,

$$X = (X - E(X)) + E(X) \in \mathcal{L}^2(P)$$

pois $E(X) \in \mathcal{L}^2(P)$. $\square$

Capítulo 4

Independência

4.1 Definição Seja $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ um espaço de probabilidades. Uma família $(A_i)_{i\in I}$ de eventos de $\mathcal{U}$ é dita *independente* (relativa a P) se, para todo subconjunto finito não vazio $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I$, tivermos

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_n})$$

4.2 Definição Seja $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ um espaço de probabilidades. Seja $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ uma família de conjuntos $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{U}$. Esta família é dita *independente* (relativa a P) se, para todo subconjunto finito não vazio $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I$ e para toda escolha de eventos $A_{i_\nu} \subset \mathcal{F}_{i_\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, valer

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_n})$$

Notemos que, se cada $\mathcal{F}_i$ for igual a $\{A_i\}$, então as definições 4.1 e 4.2 são equivalentes. O leitor deve perceber que, se $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ é uma família de conjuntos $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{U}$, independente, e se $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ é tal que $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{F}_i$ para todo i em I, então a família $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ também é independente. Outro resultado imediato é que uma família $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ é independente se, e somente se, cada subfamília finita for independente.

4.3 Teorema Sejam $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ um espaço de probabilidades e $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ uma família independente de subconjuntos $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{U}$. Então a família $(\mathcal{D}(\mathcal{F}_i))_{i\in I}$ é independente.

Demonstração: Como $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ é independente se, e somente se, cada subfamília finita de $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ é independente, podemos admitir, sem perda de generalidade, que I é finito.

Seja i_0 fixo, arbitrário, em I, e seja

$$\mathcal{D}_{i_0} := \{E \in \mathcal{U}; (\mathcal{A}_i)_{i\in I} \text{ é independente}\}$$

onde

$$\mathcal{A}_i := \begin{cases} \mathcal{F}_i & , \ se\ i \neq i_0 \\ \{E\} & , \ se\ i = i_0 \end{cases}$$

para todo $i \in I$. Mostraremos que $\mathcal{D}_{i_0}$ é um sistema de Dynkin. Notemos que:

i) $\Omega \in \mathcal{D}_{i_0}$ pois, para qualquer escolha de índices $\{i_1, \ldots, i_n\} \in I \setminus \{i_0\}$ e qualquer escolha de eventos A_{i_ν} em $\mathcal{F}_{i_\nu}$, temos:

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n} \cap \Omega) = P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}) = \prod_{j=1}^{n} P(A_{i_j}) = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_n}).P(\Omega)$$

ii) Se E, F pertencem a $\mathcal{D}_{i_0}$ e $F \subset E$ então $E \setminus F$ está em $\mathcal{D}_{i_0}$.

De fato, para qualquer escolha de índices $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I \setminus \{i_0\}$ e qualquer escolha de eventos A_{i_ν} em $\mathcal{F}_{i_\nu}$, temos

$$\begin{aligned} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n} \cap (E \setminus F)) &= P((A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n} \cap E) \setminus (A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n} \cap F)) \\ &= P((A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n} \cap E)) - P((A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n} \cap F)) \\ &= P(E). \textstyle\prod_{j=1}^n P(A_{i_j}) - P(F). \prod_{j=1}^n P(A_{i_j}) \\ &= (P(E) - P(F)). \textstyle\prod_{j=1}^n P(A_{i_j}) \\ &= P(E \setminus F).P(A_{i_1}). \ldots .P(A_{i_n}) \end{aligned}$$

iii) Se $F \in \mathcal{D}_{i_0}$ então $F^c \in \mathcal{D}_{i_0}$. Com efeito, basta tomar $E = \Omega$ em ii).

iv) Sejam $(E_j)_{j=1}^{\infty}$ eventos dois a dois disjuntos em $\mathcal{D}_{i_0}$. Então $\cup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{D}_{i_0}$.

De fato, para qualquer escolha de índices $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I \setminus \{i_0\}$, e qualquer escolha de eventos A_{i_ν} em $\mathcal{F}_{i_\nu}$ temos:

$$\begin{aligned} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n} \cap (\cup_{j=1}^{\infty} E_j)) &= P(\cup_{j=1}^{\infty} (A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n} \cap E_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n} \cap E_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} P(A_{i_1}). \ldots .P(A_{i_n}).P(E_j) \\ &= P(A_{i_1}). \ldots .P(A_{i_n}).P(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{D}_{i_0}$ é sistema de Dynkin.

De acordo com a construção de $\mathcal{D}_{i_0}$, temos que a família $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$, com

$$\mathcal{B}_i = \begin{cases} \mathcal{F}_i, & \text{se } i \neq i_0 \\ \mathcal{D}_{i_0}, & \text{se } i = i_0 \end{cases}$$

é independente.

Como $\mathcal{D}(\mathcal{F}_{i_0}) \subset \mathcal{D}_{i_0}$ (pois $\mathcal{D}_{i_0}$ é sistema de Dynkin e contém $\mathcal{F}_{i_0}$), temos que $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ é independente, com

$$\mathcal{C}_i = \begin{cases} \mathcal{F}_i, & \text{se } i \neq i_0 \\ \mathcal{D}(\mathcal{F}_{i_0}), & \text{se } i = i_0 \end{cases}$$

Fazendo i_0 variar em I e usando o mesmo argumento um número finito de vezes, temos que $(\mathcal{D}(\mathcal{F}_i))_{i \in I}$ é independente.

□

4.4 Corolário Seja $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ um espaço de probabilidades. Seja $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ uma família independente de conjuntos, $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{U}$, tais que $\mathcal{F}_i$ é $\cap$-estável para cada $i \in I$. Então a família $(\sigma(\mathcal{F}_i))_{i \in I}$ é independente.

Demonstração: Imediata, pois pelo teorema 1.6, como $\mathcal{F}_i$ é $\cap$-estável, temos $\mathcal{D}(\mathcal{F}_i) = \sigma(\mathcal{F}_i)$, e pelo teorema anterior, $(\mathcal{D}(\mathcal{F}_i))_{i \in I}$ é independente. □

4.5 Corolário Seja $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ um espaço de probabilidades. Seja $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ uma família independente de conjuntos, $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{U}$, e seja $(I_j)_{j \in J}$ tal que $\cup_{j \in J} I_j = I$ com os I_j mutuamente disjuntos. Então, se $\mathcal{U}_j = \sigma(\cup_{i \in I_j} \mathcal{F}_i)$, a família $(\mathcal{U}_j)_{j \in J}$ é independente.

Demonstração: Para cada $j \in J$ seja

$$\mathcal{F}'_j = \left\{ \begin{array}{c} E_{i_1} \cap \ldots \cap E_{i_n} : \{i_1, \ldots i_n\} \text{ é subconjunto finito, arbitrário, de } I_j \text{ e} \\ E_{i_k} \text{ são elementos arbitrários de } \mathcal{F}_{i_k} \end{array} \right\}$$

Vamos mostrar que $(\mathcal{F}'_j)_{j \in J}$ é independente.
Sejam $j_1, \ldots, j_n \in J$ e $A_{j_1}, \ldots, A_{j_n}$ em $\mathcal{F}'_{j_1}, \ldots, \mathcal{F}'_{j_n}$ respectivamente. Então

$$A_{j_1} = E_{i_{11}} \cap \ldots \cap E_{i_{1r_1}}, \quad A_{j_2} = E_{i_{21}} \cap \ldots \cap E_{i_{2r_2}}, \quad \ldots, \quad A_{j_n} = E_{i_{n1}} \cap \ldots \cap E_{i_{nr_n}}$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_n}) &= P((E_{i_{11}} \cap \ldots \cap E_{i_{1r_1}}) \cap (E_{i_{21}} \cap \ldots \cap E_{i_{2r_2}}) \cap \ldots \cap (E_{i_{n1}} \cap \ldots \cap E_{i_{nr_n}})) \\ &= P(E_{i_{11}}) \ldots . P(E_{i_{1r_1}}).P(E_{i_{21}}) \ldots . P(E_{i_{2r_2}}) \ldots P(E_{i_{n1}}) \ldots . P(E_{i_{nr_n}}) \\ &= P(A_{j_1}) \ldots . P(A_{j_n}) \end{aligned}$$

Além disso, cada $(\mathcal{F}'_j)_{j \in J}$ é $\cap$-estável, pois cada $\mathcal{F}_i$ é $\cap$-estável. Portanto, pelo Corolário anterior, $(\sigma(\mathcal{F}'_j))_{j \in J}$ é independente. Mas $\sigma(\mathcal{F}'_j) = \mathcal{U}_j$, e portanto segue o resultado.

□

4.6 Definição Seja $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ um espaço de probabilidades. Seja $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de σ-álgebras $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}$ e seja

$$\mathcal{T}_n := \sigma(\cup_{m=n}^{\infty} \mathcal{U}_m)$$

A *σ-álgebra de eventos terminais* da seqüência $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a σ-álgebra $\mathcal{T}_\infty$ definida por

$$\mathcal{T}_\infty := \cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n$$

4.7 Teorema (Lei Zero-Um de Kolmogorov) Seja $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ um espaço de probabilidades e seja $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência independente de σ-álgebras $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}$. Então, para todo evento A pertencente à σ-álgebra de eventos terminais da seqüência $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, temos $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.

Demonstração: Seja $A \in \mathcal{T}_\infty$ e seja

$$\mathcal{D} = \{D \in \mathcal{U};\ P(A \cap D) = P(A).P(D)\}$$

Basta mostrarmos que $A \in \mathcal{D}$. Com efeito, neste caso

$$P(A) = P(A \cap A) = P(A).P(A)$$

e portanto $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.
Notemos que $\mathcal{D}$ é um sistema de Dynkin. De fato,

i) $\Omega \in \mathcal{D}$ pois $P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A).P(\Omega)$

ii) Se $E, F \in \mathcal{D}$, $F \subset E$, então

$$\begin{aligned} P(A \cap (E \setminus F)) &= P((A \cap E) \setminus (A \cap F)) \\ &= P(A \cap E) - P(A \cap F) \\ &= P(A).P(E) - P(A).P(F) \\ &= P(A).[P(E) - P(F)] \\ &= P(A).P(E \setminus F) \end{aligned}$$

e portanto $E \setminus F \in \mathcal{D}$. Logo, se $D \in \mathcal{D}$, temos $D^c \in \mathcal{D}$.

iii) Se $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ são elementos de $\mathcal{D}$ dois a dois disjuntos, então

$$\begin{aligned} P(A \cap \cup_{n=1}^{\infty} D_n) &= P(\cup_{n=1}^{\infty}(A \cap D_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap D_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A).P(D_n) \\ &= P(A).\sum_{n=1}^{\infty} P(D_n) \\ &= P(A).P(\cup_{n=1}^{\infty} D_n) \end{aligned}$$

e conseqüentemente $\cup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}$.

Logo, $\mathcal{D}$ é sistema de Dynkin.

Pelo Corolário 4.5, as duas σ-álgebras (para n fixo, arbitrário)

$$\mathcal{I}_{n+1} = \sigma(\cup_{m=n+1}^{\infty} \mathcal{U}_m) \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_n = \sigma(\mathcal{U}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_n)$$

são independentes. Logo, para todo D em $\mathcal{R}_n$,

$$P(A \cap D) = P(A).P(D)$$

pois, como A pertence a $\mathcal{I}_\infty$, temos que A pertence a $\mathcal{I}_{n+1}$. Portanto $\mathcal{R}_n \subset \mathcal{D}$, e

$$\mathcal{R}_0 := \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_n \subset \mathcal{D} \tag{1}$$

Note que a seqüência $(\mathcal{R}_n)_{n=1}^{\infty}$ é obviamente crescente. Logo, se E, F pertencem a $\mathcal{R}_0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que E, F pertencem a $\mathcal{R}_{n_0}$. Portanto $E \cap F$ pertence a $\mathcal{R}_{n_0}$ e, com maior razão, $E \cap F$ pertence a $\mathcal{R}_0$, e $\mathcal{R}_0$ é $\cap$-estável. Logo, pelo teorema 1.6, temos

$$\sigma(\mathcal{R}_0) = \mathcal{D}(\mathcal{R}_0) \tag{2}$$

Como $\mathcal{D}$ é sistema de Dynkin, a equação (1) nos fornece

$$\mathcal{D}(\mathcal{R}_0) \subset \mathcal{D} \tag{3}$$

e de (2) e (3) temos

$$\sigma(\mathcal{R}_0) \subset \mathcal{D} \tag{4}$$

Como cada $\mathcal{U}_n$ está contido em $\mathcal{R}_0$, então cada $\mathcal{I}_n$ está contido em $\sigma(\mathcal{R}_0)$, e

$$\mathcal{I}_\infty \subset \sigma(\mathcal{R}_0). \tag{5}$$

Logo, de (4) e (5) segue que $\mathcal{I}_\infty \subset \mathcal{D}$, e $A \in \mathcal{D}$.

□

4.8 Definição Seja $(\Omega, \mathcal{U})$ um espaço mensurável. Seja ainda $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de elementos de $\mathcal{U}$. O conjunto

$$A = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=n}^{\infty} A_m = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots) \cap (A_2 \cup A_3 \cup \ldots) \cap (A_3 \cup A_4 \cup \ldots) \cap \ldots$$

é denominado ***limite superior*** da seqüência $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ e é denotado por $\limsup_{n\to\infty} A_n$.

É fácil ver que $\limsup_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega\,;\ \omega \in A_i$ para infinitos índices i $\}$.

4.9 Corolário Seja $(\Omega, \mathfrak{U}, P)$ um espaço de probabilidades e seja $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de eventos independentes em $\mathfrak{U}$. Então $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$ ou 1.

Demonstração: Sejam $\mathfrak{U}_n = \sigma(\{A_n\})$. Pelo Corolário 4.4 temos que a seqüência $(\mathfrak{U}_n)_{n=1}^{\infty}$ é independente. Sejam ainda $\mathfrak{J}_n$ conforme a notação de 4.6 e $Q_n := \cup_{m=n}^{\infty} A_m$.

Fixe n_0 em $\mathbb{N}$. É claro que

$$Q_{n_0}, Q_{n_0+1}, \ldots \in \mathfrak{J}_{n_0}$$

Logo,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=n}^{\infty} A_m = \cap_{n=n_0}^{\infty} \cup_{m=n}^{\infty} A_m = \cap_{n=n_0}^{\infty} Q_n \in \mathfrak{J}_{n_0}.$$

Como n_0 é arbitrário, temos

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathfrak{J}_n \qquad (\forall\ n \in \mathbb{N})$$

ou ainda

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathfrak{J}_\infty$$

e pela Lei Zero-Um de Kolmogorov segue o resultado.

□

4.10 Lema Seja $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ uma seqüência de eventos num espaço de probabilidades $(\Omega, \mathfrak{U}, P)$, tal que $P(A_k) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então $P(\cap_{k=1}^{\infty} A_k) = 1$.

Demonstração: Basta vermos que

$$\begin{aligned} P(\cap_{k=1}^{\infty} A_k) &= P((\cup_{k=1}^{\infty} A_k^c)^c) \\ &= 1 - P(\cup_{k=1}^{\infty} A_k^c) \\ &\geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k^c) \\ &= 1 - [\sum_{k=1}^{\infty} (1 - P(A_k))] \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} (1 - 1) = 1 \end{aligned}$$

□

4.11 Teorema (Lema de Borel-Cantelli) Seja $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de eventos em um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathfrak{U}, P)$ e seja $A = \limsup_{n\to\infty} A_n$. Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \quad \Rightarrow \quad P(A) = 0 \tag{6}$$

e, se $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ é independente, temos

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty & \Leftrightarrow \quad P(A) = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty & \Leftrightarrow \quad P(A) = 1 \end{cases} \tag{7}$$

Demonstração: Note que $A \subset \cup_{m=n}^{\infty} A_m$ para todo n em $\mathbb{N}$. Logo,

$$P(A) \leq P(\cup_{m=n}^{\infty} A_m) \leq \sum_{m=n}^{\infty} P(A_m) \qquad (\forall \ n \in \mathbb{N})$$

Como $\sum_{m=1}^{\infty} P(A_m) < \infty$, então, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{m=N_\varepsilon}^{\infty} P(A_m) < \varepsilon$. Logo, $P(A) \leq \varepsilon$, e, como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos $P(A) = 0$ e segue (6).

Para provarmos (7), basta provarmos que, se $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, então $P(A) = 1$, pois o restante será conseqüência imediata deste resultado e de (6).

Vamos provar então que $P(A) = 1$ quando $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$. Para isto, será suficiente mostrarmos que $P(\cup_{k=n}^{\infty} A_k) = 1$ para todo n em $\mathbb{N}$, devido ao lema 4.10.

Seja,para cada n, $B_n = \cup_{k=n}^{\infty} A_k$. Logo, $\cup_{k=n}^{n+m} A_k$ está contido em B_n para todo m, e

$$B_n^c \subset (\cup_{k=n}^{n+m} A_k)^c = \cap_{k=n}^{n+m} A_k^c \tag{8}$$

Então, para todo m, temos

$$1 - P(B_n) = P(B_n^c) \leq P(\cap_{k=n}^{n+m} A_k^c) = \prod_{k=n}^{n+m} P(A_k^c) = \prod_{k=n}^{n+m} (1 - P(A_k)) \tag{9}$$

onde a desigualdade se deve a (8) e a penúltima igualdade é conseqüência da independência dos eventos (Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é independente, então $(\sigma(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é independente e $(A_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ também).

Note que se $0 \leq x \leq 1$, então $1 - x \leq e^{-x}$, pois se $x = 1$ é trivial, e se $0 < x < 1$ temos

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots \geq 1 - x$$

Então, para todo m,

$$1 - P(B_n) \leq \prod_{k=n}^{n+m} (1 - P(A_k)) \leq \prod_{k=n}^{n+m} e^{-P(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{n+m} P(A_k)}$$

Portanto, fazendo $m \to \infty$, temos $1 - P(B_n) \leq 0$ e portanto $P(B_n) = 1$

□

4.12 Corolário Se uma seqüência $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de eventos em um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ tem uma subseqüência independente $(A_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_{n_k}) = \infty$ então $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.

Demonstração: Basta percebermos que $\limsup_{k\to\infty} A_{n_k} \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$.

□

4.13 Definições Sejam Ω um conjunto, $(\Omega_i, \mathcal{U}_i)_{i\in I}$ uma família de espaços mensuráveis e $T_i : \Omega \to \Omega_i$ aplicações, com $i \in I$. A σ-álgebra $\mathcal{U} = \sigma(\cup_{i\in I} T_i^{-1}(\mathcal{U}_i))$ é claramente a menor σ-álgebra com respeito à qual cada T_i é $\mathcal{U} - \mathcal{U}_i$ mensurável. Denotaremos esta σ-álgebra por $\sigma(T_i; i \in I)$ e a denominaremos *σ-álgebra gerada pelas aplicações T_i*.

Se $I = \{1, \ldots, n\}$ denotaremos tal σ-álgebra por $\sigma(T_1, \ldots, T_n)$. Para $n = 1$ é óbvio que $\sigma(T_1) = T_1^{-1}(\mathcal{U}_1)$.

Uma família $(X_i)_{i\in I}$ de variáveis aleatórias

$$X_i : (\Omega, \mathcal{U}, P) \longrightarrow (\Omega_i, \mathcal{U}_i) \qquad (\forall \ i \in I)$$

é ***independente*** se a família $(\sigma(X_i))_{i\in I}$ é independente.

4.14 Teorema Seja $(X_i)_{i=1}^n$ uma família finita de variáveis aleatórias

$$X_i : (\Omega, \mathcal{U}, P) \longrightarrow (\Omega_i, \mathcal{U}_i) \qquad (\forall\, i = 1, \ldots, n)$$

e seja $\mathcal{R}_i$ $\cap$-estável com $\Omega_i \in \mathcal{R}_i$ e $\sigma(\mathcal{R}_i) = \mathcal{U}_i$ para todo i. A família $(X_i)_{i=1}^n$ é independente se e somente se

$$P(\cap_{i=1}^n X_i^{-1}(R_i)) = \prod_{i=1}^n P(X_i^{-1}(R_i)) \qquad (\forall\, R_i \in \mathcal{R}_i) \tag{10}$$

Demonstração: Seja $\mathcal{C}_i := \{X_i^{-1}(R_i);\ R_i \in \mathcal{R}_i\}$. Temos

$$\sigma(X_i) = X_i^{-1}(\mathcal{U}_i) = X_i^{-1}(\sigma(\mathcal{R}_i)) = \sigma(X_i^{-1}(\mathcal{R}_i)) = \sigma(\mathcal{C}_i) \tag{11}$$

onde a terceira igualdade se deve à Proposição 1.11.

Note que cada $\mathcal{C}_i$ é $\cap$-estável e contém Ω, pois

i) $$\begin{aligned} A, B \in \mathcal{C}_i &\Rightarrow (\exists\, R_i, S_i \in \mathcal{R}_i)(A = X_i^{-1}(R_i), B = X_i^{-1}(S_i)) \\ &\Rightarrow A \cap B = X_i^{-1}(R_i \cap S_i) \\ &\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}_i \end{aligned}$$

ii) $\Omega \in \mathcal{C}_i$ pois $\Omega = X_i^{-1}(\Omega_i)$.

Seja $I = \{1, \ldots, n\}$.

Por (11), pelo fato de cada $\mathcal{C}_i$ ser $\cap$-estável e pelo Corolário 4.4, concluímos que $(\sigma(X_i))_{i\in I}$ é independente se, e somente se, $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ é independente.Basta mostrarmos que $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ é independente se, e somente se, vale (10). Vamos provar que

$$P(\cap_{i=1}^n X_i^{-1}(R_i)) = \prod_{i=1}^n P(X_i^{-1}(R_i))\ (\forall\, R_i \in \mathcal{R}_i) \ \Rightarrow (\mathcal{C}_i)_{i=1}^n \text{ é independente}$$

pois a implicação recíproca é imediata.

Sejam $X_{r_1}^{-1}(R_{r_1}), \ldots, X_{r_k}^{-1}(R_{r_k})$ em $\mathcal{C}_{r_1}, \ldots, \mathcal{C}_{r_k}$ respectivamente. Então, em $I \setminus \{r_1, \ldots, r_k\}$, escolhemos $\Omega = X_i^{-1}(\Omega_i)$ e

$$\begin{aligned} P(\cap_{j=1}^k X_{r_j}^{-1}(R_{r_j})) &= P((\cap_{j=1}^k X_{r_j}^{-1}(R_{r_j})) \cap (\cap_{j\in I\setminus\{r_1,\ldots,r_k\}} \Omega)) \\ &= \left[\prod_{j=1}^k P(\cap_{j=1}^k X_{r_j}^{-1}(R_{r_j}))\right] \cdot \left[\prod_{j\in I\setminus\{r_1,\ldots,r_k\}} P(\Omega)\right] \\ &= \prod_{j=1}^k P(\cap_{j=1}^k X_{r_j}^{-1}(R_{r_j})) \end{aligned}$$

e portanto $(\mathcal{C}_i)_{i=1}^n$ é independente.

□

4.15 Teorema Seja $(X_i)_{i\in I}$ uma família independente de variáveis aleatórias

$$X_i : (\Omega, \mathcal{U}, P) \longrightarrow (\Omega_i, \mathcal{U}_i) \qquad (\forall\, i \in I)$$

e sejam

$$Y_i : (\Omega_i, \mathcal{U}_i) \longrightarrow (\Omega_i', \mathcal{U}_i') \qquad (\forall\, i \in I)$$

aplicações mensuráveis. Então $(Y_i \circ X_i)_{i\in I}$ é independente.

Demonstração: Basta vermos que

$$\begin{aligned}\sigma(Y_i \circ X_i) &= \{(Y_i \circ X_i)^{-1}(A') : A' \in \mathfrak{U}_i'\} \\ &= \{X_i^{-1}(Y_i^{-1}(A') : A' \in \mathfrak{U}_i')\} \\ &\subset \{X_i^{-1}(B) : B \in \mathfrak{U}_i\} = \sigma(X_i)\end{aligned}$$

□

4.16 Definição Dadas as variáveis aleatórias

$$X_i : (\Omega, \mathfrak{U}, P) \longrightarrow (\Omega_i, \mathfrak{U}_i) \quad (\forall\, i = 1, \ldots, n)$$

definimos

$$Y = X_1 \otimes \ldots \otimes X_n : (\Omega, \mathfrak{U}, P) \longrightarrow (\textstyle\prod_{i=1}^n \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathfrak{U}_i)$$

por

$$Y(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

Notemos que Y é uma variável aleatória, pois se $A_1 \times \ldots \times A_n$ é um retângulo em $\bigotimes_{i=1}^n \mathfrak{U}_i$, temos

$$Y^{-1}(A_1 \times \ldots \times A_n) = X_1^{-1}(A_1) \cap \ldots \cap X_n^{-1}(A_n) \in \mathfrak{U}.$$

Denotaremos a distribuição de Y por

$$P_Y = P_{X_1 \otimes \ldots \otimes X_n}$$

e denominaremos P_Y de ***distribuição conjunta*** de $X_1, \ldots, X_n$.

4.17 Teorema Sejam as variáveis aleatórias

$$X_i : (\Omega, \mathfrak{U}, P) \longrightarrow (\Omega_i, \mathfrak{U}_i) \quad (\forall\, i = 1, \ldots, n).$$

Temos que $(X_i)_{i=1}^n$ é independente se e somente se

$$P_{X_1 \otimes \ldots \otimes X_n} = P_{X_1} \otimes \ldots \otimes P_{X_n}$$

Demonstração: Temos que se $A_1 \times \ldots \times A_n$ é um retângulo qualquer em $\bigotimes_{i=1}^n \mathfrak{U}_i$ então

$$P_Y(A_1 \times \ldots \times A_n) = P(Y^{-1}(A_1 \times \ldots \times A_n)) = P(\cap_{i=1}^n X_i^{-1}(A_i)) \tag{12}$$

Além disso, pelo Corolário 2.9, temos

$$P_Y = P_{X_1} \otimes \ldots \otimes P_{X_n} \Leftrightarrow P_Y(A_1 \times \ldots \times A_n) = P_{X_1}(A_1) \ldots P_{X_n}(A_n) \tag{13}$$

Logo, de (12) (13)

$$P_Y = P_{X_1} \otimes \ldots \otimes P_{X_n} \Leftrightarrow P(\cap_{i=1}^n X_i^{-1}(A_i)) = \prod_{i=1}^n P(X_i^{-1}(A_i)) \quad (\forall\, A_i \in \mathfrak{U}_i; i = 1, \ldots, n)$$

e, pelo Teorema 4.14 (com $\mathcal{R}_i = \mathfrak{U}_i$), segue o resultado.

□

4.18 Teorema Dadas as variáveis aleatórias reais independentes

$$X_i : (\Omega, \mathfrak{U}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \quad (\forall\, i = 1, \ldots, n),$$

então

i) Se todos X_i são não negativos ou se todos X_i são integráveis, então $E(\prod_{i=1}^n X_i) = \prod_{i=1}^n E(X_i)$.

ii) Se $\prod_{i=1}^n X_i$ é integrável e nenhum X_i se anula quase sempre, então cada X_i é integrável.

Demonstração:

i) Sejam

$$\begin{array}{rcccl} Y = X_1 \otimes \ldots \otimes X_n : & (\Omega, \mathcal{U}, P) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}) \\ & \omega & \mapsto & (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcccl} f : & (\mathbb{R}^n, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \\ & (\omega_1, \ldots, \omega_n) & \mapsto & |\omega_1 . \ldots . \omega_n| \end{array}$$

Temos que f e Y são mensuráveis e $f \circ Y$ é mensurável, não negativa. Temos ainda

$$\begin{aligned} E(|\prod_{i=1}^n X_i|) &= \int_\Omega f \circ Y dP \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f dP_Y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\omega_1 . \ldots . \omega_n| d(P_{X_1} \otimes \ldots \otimes P_{X_n}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \ldots \left[\int_{\mathbb{R}} |\omega_1 . \ldots . \omega_n| dP_{X_n}(\omega_n)\right] \ldots dP_{X_1}(\omega_1) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |\omega_1| dP_{X_1}(\omega_1)\right) \ldots \left(\int_{\mathbb{R}} |\omega_n| dP_{X_n}(\omega_n)\right) = \prod_{i=1}^n E(|X_i|) \end{aligned} \tag{14}$$

onde na segunda, terceira e quarta igualdades foram usados respectivamente o Teorema das Transformações para integrais, o Teorema 4.17 e o Corolário 2.10 (Teorema de Fubini Clássico para n fatores).

Então se cada X_i é não negativa, (14) nos fornece o resultado. Se cada X_i é integrável então cada $|X_i|$ é integrável, e (14) nos diz que $|X_1 \ldots X_n|$ é integrável, e portanto $X_1 \ldots X_n$ é integrável, e então podemos fazer o mesmo procedimento com $f'(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \omega_1 . \ldots . \omega_n$ no lugar de f, obtendo o resultado. □

ii) Se $\prod_{i=1}^n X_i$ é integrável temos

$$\infty > E(|\prod_{i=1}^n X_i|) = E(\prod_{i=1}^n |X_i|) = \prod_{i=1}^n E(|X_i|) \tag{15}$$

Como nenhuma X_i é quase sempre zero, temos $E(|X_i|) > 0$ para todo i (por 1.32(iv)) e conseqüentemente por (15) temos $E(|X_i|) < \infty$ para todo i. Logo cada X_i é integrável. □

4.19 Definição Duas variáveis aleatórias reais integráveis X e Y,

$$X, Y : (\Omega, \mathcal{U}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$

são ditas *não correlacionadas* se $E(X.Y) = E(X).E(Y)$

O teorema anterior nos garante que duas variáveis aleatórias reais integráveis independentes são não correlacionadas.

4.20 Teorema (Igualdade de Bienaymé) Sejam

$$X_i : (\Omega, \mathcal{U}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \qquad (\forall\, i = 1, \ldots, n)$$

variáveis aleatórias reais, integráveis, duas a duas não correlacionadas. Então

$$V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

Demonstração: Como $V(X) = V(X - E(X))$ para toda variável aleatória real X, e como $\sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X_i)) = \sum_{i=1}^{n}(X_i) - E(\sum_{i=1}^{n} X_i)$, basta provarmos que:

$$V\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X_i))\right) = \sum_{i=1}^{\infty} V(X_i - E(X_i))$$

Além disso, é fácil ver que as variáveis aleatórias $Y_i = X_i - E(X_i)$, com $i = 1, \ldots, n$ são ainda duas a duas não correlacionadas, pois

$$\begin{aligned}
E(Y_i.Y_j) &= E((X_i - E(X_i)).(X_j - E(X_j))) \\
&= E(X_i.X_j - X_i.E(X_j) - X_j.E(X_i)) + E(X_i).E(X_j)) \\
&= E(X_i.X_j) - E(X_i).E(X_j) - E(X_j).E(X_i) + E(X_i).E(X_j) \\
&= 0 \\
&= E(X_i - E(X_i)).E(X_j - E(X_j)) \\
&= E(Y_i).E(Y_j)
\end{aligned}$$

Vamos dividir a demonstração em dois casos:

1º **Caso:** $S := \sum_{i=1}^{n} Y_i$ é quadrado integrável.

Então

$$S^2 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} Y_i.Y_j + \sum_{j=1}^{n} Y_j^2$$

e

$$\begin{aligned}
V(\sum_{i=1}^{n} Y_i) &= V(S) = E(S^2) - E(S)^2 = E(S^2) \\
&= E(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} Y_i.Y_j + \sum_{i=1}^{n} Y_i^2) \\
&= E(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(E(Y_i^2) - E(Y_i)^2) = \sum_{i=1}^{n} V(Y_i)
\end{aligned}$$

2º **Caso:** $S := \sum_{i=1}^{n} Y_i$ não é quadrado integrável.

Então $V(S) = E(S^2) - E(S)^2 = E(S^2) = \infty$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\infty &= \sqrt{V(S)} \\
&= \sqrt{E(S^2)} \\
&= \left(\int_\Omega S^2 dP\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_\Omega |\sum_{i=1}^{n} Y_i|^2 dP\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega |Y_i|^2 dP\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{V(Y_i)}
\end{aligned}
$$

onde a desigualdade é conseqüência da Desigualdade de Minkowski.
Portanto $V(Y_i) = \infty$ para algum $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, e segue o resultado.

$\square$

Capítulo 5

Produto Infinito de Medidas

5.1 Definição Seja $I \neq \emptyset$ um conjunto de índices e seja $(\Omega_i, \mathcal{U}_i, P_i)$ um espaço de probabilidades, para cada $i \in I$. Para todo $K \subset I$ definimos

$$\Omega_K := \prod_{i \in K} \Omega_i = \{(\omega_i)_{i \in K}; \omega_i \in \Omega_i\}^1$$

Os elementos de Ω_K serão denotados por ω_K. Para cada $J \subset K$, a aplicação

$$proj_J^K : \Omega_K \longrightarrow \Omega_J \tag{1}$$

será a projeção natural de Ω_K em Ω_J.

- Se $K = I$ em (1) usaremos a notação $proj_J$.
- Se $J = \{i\}$ em (1) usaremos a notação $proj_i^K$.
- Se $J = \{i\}$ e $K = I$ em (1) usaremos a notação $proj_i$.

Notemos que se $J \subset K \subset L \subset I$, então

$$proj_J^L = proj_J^K \circ proj_K^L \tag{2}$$

De fato,

$$\begin{aligned} proj_J^K(proj_K^L(\omega_i)_{i \in L}) &= proj_J^K(\omega_i)_{i \in K} \\ &= (\omega_i)_{i \in J} \\ &= proj_J^L((\omega_i)_{i \in L}) \end{aligned}$$

Seja $\mathcal{F} = \mathcal{F}(I)$ o conjunto de todos os subconjuntos finitos não vazios de I. Para todo $J \in \mathcal{F}$, definimos

$$\mathcal{U}_J := \bigotimes_{i \in J} \mathcal{U}_i \quad \text{e} \quad P_J := \bigotimes_{i \in J} P_i \tag{3}$$

A *σ-álgebra produto* das σ-álgebras $\mathcal{U}_i$, para $i \in I$, que denotaremos por $\mathcal{U}_0 = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{U}_i$, é a menor σ-álgebra em $\Omega = \prod_{i \in I} \Omega_i$ para a qual cada aplicação projeção $proj_i$ é $\mathcal{U}_0 - \mathcal{U}_i$ mensurável, $i \in I$. Temos então que

$$\mathcal{U}_0 = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{U}_i = \sigma(proj_i, i \in I)$$

Devemos notar que se I é finito, esta definição coincide com a definição 2.1. Como a teoria de produto finito de medidas já foi desenvolvida no Capítulo 2, neste capítulo, I será sempre um conjunto infinito de índices.

Todas as notações de 5.1 serão mantidas até o fim do capítulo.

[1] Mais rigorosamente $\Omega_K = \{\omega_K : K \longrightarrow \cup_{i \in K} \Omega_K; \omega_K(i) \in \Omega_i\ (\forall\, i \in K)\}$.

5.2 Proposição $\mathcal{U}_0 = \sigma(proj_J; J \in \mathfrak{F})$, onde está subentendido que a σ-álgebra de subconjuntos de Ω_J é $\mathcal{U}_J = \bigotimes_{i\in J} \mathcal{U}_i$.

Demonstração: Devemos mostrar que $\sigma(proj_i; i \in I) = \sigma(proj_J; J \in \mathfrak{F})$. Basta mostrarmos que $\sigma(proj_J; J \in \mathfrak{F}) \subset \sigma(proj_i; i \in I)$ pois a outra inclusão é imediata.

Sejam $\Omega = \prod_{i\in I} \Omega_i$, $J = \{j_1, \ldots, j_n\}$ e $proj_J : \Omega \longrightarrow \Omega_{j_1} \times \ldots \times \Omega_{j_n}$

Temos que

$$\begin{array}{rccc} proj_J : & (\Omega, \mathcal{U}_0) & \longrightarrow & (\prod_{i=1}^{n} \Omega_{j_i}, \bigotimes_{i\in J} \mathcal{U}_i) \\ & \omega & \mapsto & (proj_{j_1}(\omega), \ldots, proj_{j_n}(\omega)) \end{array}$$

Seja $A_1 \times \ldots \times A_n$ um retângulo qualquer em $\bigotimes_{i\in J} \mathcal{U}_i$. Temos

$$proj_J^{-1}(A_1 \times \ldots \times A_n) = proj_{j_1}^{-1}(A_1) \cap \ldots \cap proj_{j_n}^{-1}(A_n) \in \mathcal{U}_0$$

pois cada $proj_{j_i}$ é $\mathcal{U}_0 - \mathcal{U}_{j_i}$ mensurável. Portanto, pelo Teorema 1.9, $proj_J$ é $\mathcal{U}_0 - \bigotimes_{i\in J} \mathcal{U}_i$ mensurável e o resultado segue.

□

5.3 Proposição Se $J, K \in \mathfrak{F}$ e $J \subset K$ então $proj_J^K : (\Omega_K, \bigotimes_{i\in K} \mathcal{U}_i) \longrightarrow (\Omega_J, \bigotimes_{i\in J} \mathcal{U}_i)$ é mensurável.

Demonstração: Seja $\prod_{i\in J} A_i$ um retângulo em $\bigotimes_{i\in J} \mathcal{U}_i$. Temos

$$(proj_J^K)^{-1}(\prod_{i\in J} A_i) = \prod_{i\in K} A_i'$$

onde $A_i' = A_i$ se $i \in J$ e $A_i' = \Omega_i$ se $i \in K \setminus J$. Portanto

$$\prod_{i\in K} A_i' \in \bigotimes_{i\in K} \mathcal{U}_i$$

e $proj_J^K$ é mensurável. □

Nas circunstâncias da proposição anterior temos que

$$proj_J^K : (\Omega_K, \bigotimes_{i\in K} \mathcal{U}_i, P_K) \longrightarrow (\Omega_J, \bigotimes_{i\in J} \mathcal{U}_i)$$

é uma variável aleatória.

5.4 Proposição Se $J, K \in \mathfrak{F}$ e $J \subset K$ então $proj_J^K(P_K) = P_J$, isto é, a distribuição da variável aleatória $proj_J^K$ é a medida P_J.

Demonstração: Seja $\prod_{i\in J} A_i$ um retângulo em $\bigotimes_{i\in J} \mathcal{U}_i$. Temos

$$\begin{aligned} proj_J^K(P_K)(\prod_{i\in J} A_i) &= P_K((proj_J^K)^{-1}(\prod_{i\in J} A_i)) \\ &= P_K(\prod_{i\in K} A_i') \\ &= \prod_{i\in K} P_i(A_i') \\ &= \prod_{i\in J} P_i(A_i) \\ &= P_J(\prod_{i\in J} A_i) \end{aligned}$$

onde $A_i' = A_i$ se $i \in J$ e $A_i' = \Omega_i$ se $i \in K \setminus J$.

Pelo Corolário 2.9 concluímos que $proj_J^K(P_K) = P_J$. □

Seguindo ainda as notações de 5.1, definiremos para cada $J \in \mathfrak{F}$,

$$\mathcal{C}_J = proj_J^{-1}(\mathcal{U}_J).$$

$\mathcal{C}_J$ é claramente uma σ-álgebra, e é denominada *σ-álgebra dos J-cilindros.*

5.5 Proposição Se $J, K \in \mathfrak{F}$ e $J \subset K$ então $\mathcal{C}_J \subset \mathcal{C}_K$.

Demonstração: Como $proj_J^K$ é mensurável,

$$(proj_J^K)^{-1}(\mathcal{U}_J) \subset \mathcal{U}_K \tag{4}$$

Temos ainda, por (2)

$$proj_J = proj_J^K \circ proj_K$$

Logo,

$$proj_J^{-1}(\mathcal{U}_J) = proj_K^{-1}((proj_J^K)^{-1}(\mathcal{U}_J)) \subset \mathcal{C}_K$$

onde a última inclusão se deve a (4).

□

O conjunto $\mathcal{C} := \cup_{J \in \mathfrak{F}} \mathcal{C}_J$ é o conjunto de todos os possíveis J-cilindros e a proposição seguinte mostra que $\mathcal{C}$ é uma álgebra.

5.6 Proposição $\mathcal{C}$ é álgebra.

Demonstração: Basta vermos que

i) Se $Z_1, Z_2 \in \mathcal{C}$ então $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{C}$.

De fato, existem $J_1, J_2 \in \mathfrak{F}$ tais que $Z_1 \in \mathcal{C}_{J_1}$ e $Z_2 \in \mathcal{C}_{J_2}$. Logo, pela Proposição 5.5, $Z_1 \in \mathcal{C}_{J_1 \cup J_2}$ e $Z_2 \in \mathcal{C}_{J_1 \cup J_2}$. Portanto $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{C}_{J_1 \cup J_2}$, e a fortiori, $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{C}$.

ii) $\Omega = \prod_{i \in I} \Omega_i \in \mathcal{C}$.

Claro, pois $\Omega \in \mathcal{C}_J$ para todo $J \in \mathfrak{F}$ (pois cada $\mathcal{C}_J$ é σ-álgebra em Ω).

iii) Se $Z \in \mathcal{C}$ então $Z^c \in \mathcal{C}$.

Com efeito, se $Z \in \mathcal{C}$ então existe $J \in \mathfrak{F}$ tal que $Z \in \mathcal{C}_J$. Logo $Z^c \in \mathcal{C}_J$ e por conseguinte $Z^c \in \mathcal{C}$.

□

5.7 Objetivo Nós queremos definir em $\mathcal{U}_0$ uma medida de probabilidades P tal que

$$P(proj_J^{-1}(\prod_{i \in J} A_i)) = \prod_{i \in J} P_i(A_i) \qquad (\forall\, J \in \mathfrak{F})(\forall\, A_i \in \mathcal{U}_i)$$

isto é, queremos que

$$proj_J(P) = P_J \qquad (\forall\, J \in \mathfrak{F})$$

Vamos definir a aplicação $P_0 : \mathcal{C} \longrightarrow [0,1]$ por

$$P_0(proj_J^{-1}(A)) = P_J(A) \qquad (\forall\, J \in \mathfrak{F})(\forall\, A \in \mathcal{U}_J).$$

Primeiramente devemos provar que tal definição é consistente, isto é, se

$$Z = proj_J^{-1}(A) = proj_K^{-1}(B), \quad \text{com} \quad J, K \in \mathcal{F} \;\text{ e }\; A \in \mathfrak{U}_J, B \in \mathfrak{U}_K \tag{5}$$

então

$$P_J(A) = P_K(B).$$

Suponhamos então que vale (5). Vamos considerar dois casos

<u>**1º Caso:**</u> $J \subset K$

Por (2) temos $proj_J = proj_J^K \circ proj_K$. Logo,

$$proj_J^{-1}(A) = proj_K^{-1}((proj_J^K)^{-1}(A))$$

e então

$$proj_K^{-1}(B) = proj_K^{-1}((proj_J^K)^{-1}(A))$$

Logo, como toda projeção é sobrejetiva, segue

$$B = (proj_J^K)^{-1}(A) \tag{6}$$

Pela Proposição 5.4 temos

$$proj_J^K(P_K)(A) = P_J(A)$$

e por conseguinte

$$P_K(proj_J^K)^{-1}(A)) = P_J(A). \tag{7}$$

De (6) e (7) segue

$$P_K(B) = P_J(A).$$

<u>**2º Caso:**</u> J e K arbitrários em $\mathcal{F}$.

Seja $L = J \cup K$. Como $J \subset L$ e $K \subset L$, existe $C \in \mathfrak{U}_L$ tal que

$$proj_L^{-1}(C) = proj_J^{-1}(A) = proj_K^{-1}(B).^2$$

Logo, pelo 1º Caso,

$$\begin{cases} P_L(C) &= P_J(A) \\ P_L(C) &= P_K(B) \end{cases}$$

e então

$$P_J(A) = P_K(B).$$

Concluímos que a definição de P_0 é consistente. A próxima proposição garante que P_0 é σ-aditiva.

5.8 Proposição P_0 é σ-aditiva.

Demonstração: Vamos mostrar inicialmente que P_0 é uma medida finitamente aditiva. Temos

$$P_0(\emptyset) = P_0(proj_J^{-1}(\emptyset)) = P_J(\emptyset) = 0$$

Além disso, se $Y, Z \in \mathcal{C}$ e são disjuntos, existe $K \in \mathcal{F}$ tal que

$$Y = proj_K^{-1}(A), \quad Z = proj_K^{-1}(B)$$

[2] De fato, como $J \subset L$ temos $\mathcal{C}_J \subset \mathcal{C}_L$ e portanto $proj_J^{-1}(A) \in \mathcal{C}_L$. Por conseguinte existe $C \in \mathfrak{U}_L$ tal que $proj_L^{-1}(C) = proj_J^{-1}(A)$.

com $A, B \in \mathfrak{U}_K$. Como Y e Z são disjuntos e como a projeção é sobrejetiva, temos A e B disjuntos. Logo,

$$Y \cup Z = proj_K^{-1}(A) \cup proj_K^{-1}(B) = proj_K^{-1}(A \cup B)$$

e

$$\begin{aligned} P_0(Y \cup Z) &= P_0(proj_K^{-1}(A \cup B)) \\ &= P_K(A \cup B) \\ &= P_K(A) + P_K(B) \\ &= P_0(Y) + P_0(Z). \end{aligned}$$

Portanto é finitamente aditiva.

Para cada $Z \in \mathfrak{C}$, $J \in \mathfrak{F}$ e $\omega_J \in \Omega_J$ definamos

$$Z^{\omega_J} = \{\omega \in \Omega; (\omega_J, proj_{I \setminus J}(\omega)) \in Z\}$$

Vamos mostrar que Z^{ω_J} é um cilindro e que

$$P_0(Z) = \int_{\Omega_J} P_0(Z^{\omega_J}) dP_J(\omega_J)$$

De fato, como $Z \in \mathfrak{C}$, existem $K \in \mathfrak{F}$, $K \supsetneq J$ e $A \in \mathfrak{U}_K$ tais que

$$Z = proj_K^{-1}(A) \tag{8}$$

Logo

$$P_0(Z) = P_0(proj_K^{-1}(A)) = P_K(A).$$

Seja

$$A_{\omega_J} = \{\omega' \in \Omega_{K \setminus J}; (\omega_J, \omega') \in A\}$$

a secção de A em ω_J. Como

$$\Omega_K = \Omega_J \times \Omega_{K \setminus J} \quad \text{e} \quad \mathfrak{U}_K = \mathfrak{U}_J \otimes \mathfrak{U}_{K \setminus J}, \tag{9}$$

onde a segunda igualdade se deve ao Teorema 2.2, temos pela demonstração do Teorema 2.3 que

$$A_{\omega_J} \in \mathfrak{U}_{K \setminus J} \tag{10}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \omega \in Z^{\omega_J} &\Leftrightarrow (\omega_J, proj_{I \setminus J}(\omega)) \in Z \\ &\Leftrightarrow proj_K(\omega_J, proj_{I \setminus J}(\omega)) \in A \\ &\Leftrightarrow (\omega_J, proj_{K \setminus J}(\omega)) \in A \\ &\Leftrightarrow proj_{K \setminus J}(\omega) \in A_{\omega_J} \\ &\Leftrightarrow \omega \in proj_{K \setminus J}^{-1}(A_{\omega_J}) \end{aligned}$$

Portanto

$$Z^{\omega_J} = proj_{K \setminus J}^{-1}(A_{\omega_J}) \tag{11}$$

e Z^{ω_J} é um $K \setminus J$ cilindro por (10) e (11).

Temos de (8)

$$P_0(Z) = P_K(A) = \int_{\Omega_J} P_{K \setminus J}(A_{\omega_J}) dP_J(\omega_J), \tag{12}$$

onde a segunda igualdade é devida a (9), ao fato de $P_K = P_{K \setminus J} \otimes P_J$, e ao Teorema da Medida Produto na forma Clássica.

Por (11) temos

$$P_0(Z^{\omega_J}) = P_0(proj_{K\setminus J}^{-1}(A_{\omega_J})) = P_{K\setminus J}(A_{\omega_J}) \tag{13}$$

e de (12) e (13) segue que

$$P_0(Z) = \int_{\Omega_J} P_0(Z^{\omega_J})dP_J(\omega_J) \tag{14}$$

Pelo Teorema 1.19(ii), como P_0 é finitamente aditiva, para provarmos que P_0 é σ-aditiva, basta provarmos que

$$Z_n \in \mathcal{C}(\forall\, n \in \mathbb{N}), Z_n \downarrow \emptyset \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} P_0(Z_n) = 0 \tag{15}$$

Para provarmos (15) é suficiente mostrarmos que, se $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência decrescente de cilindros com $\lim_{n\to\infty} P_0(Z_n) \neq 0$, então $\cap_{n=1}^{\infty} Z_n \neq \emptyset$ [3].

Seja $\alpha = \inf P_0(Z_n) = \lim_{n\to\infty} P_0(Z_n) > 0$.

Temos $Z_n = proj_{J_n}^{-1}(A_n), J_n \in \mathcal{F},\ A_n \in \mathcal{U}_{J_n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{C}_J \subset \mathcal{C}_K$ para todo $J \subset K$, podemos sempre escolher $J_1 \subsetneq J_2 \subsetneq \ldots$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rccc} f_{n(J_1)}: & \Omega_{J_1} & \longrightarrow & [0,1] \\ & \omega_{J_1} & \mapsto & P_o(Z_n^{\omega_{J_1}}) \end{array} \tag{16}$$

é mensurável, pois, por (11),

$$Z_n^{\omega_{J_1}} = proj_{J_n\setminus J_1}^{-1}(A_{n_{\omega_{J_1}}}) \quad \text{e} \quad P_0(Z_n^{\omega_{J_1}}) = P_{J_n\setminus J_1}(A_{n_{\omega_{J_1}}})$$

e $P_{J_n\setminus J_1}(A_{n_{\omega_{J_1}}})$ é mensurável em relação a $\mathcal{U}_{J_1}$, pela demonstração do Teorema do Produto de Medidas (2.3).

Seja, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} Q_n &= \{\omega_{J_1} \in \Omega_{J_1}; P_0(Z_n^{\omega_{J_1}}) \geq \frac{\alpha}{2}\} \\ &= f_{n(J_1)}^{-1}([\frac{\alpha}{2}, +\infty[) \in \mathcal{U}_{J_1} \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} \alpha &\leq P_0(Z_n) \\ &= \int_{\Omega_{J_1}} P_0(Z_n^{\omega_{J_1}})dP_{J_1}(\omega_{J_1}) \\ &= \int_{\Omega_{J_1}\setminus Q_n} P_0(Z_n^{\omega_{J_1}})dP_{J_1}(\omega_{J_1}) + \int_{Q_n} P_0(Z_n^{\omega_{J_1}})dP_{J_1}(\omega_{J_1}) \\ &\leq \frac{\alpha}{2}.P_{J_1}(\Omega_{J_1}\setminus Q_n) + 1.P_{J_1}(Q_n) \\ &\leq \frac{\alpha}{2} + P_{J_1}(Q_n) \end{aligned}$$

Logo,

$$P_{J_1}(Q_n) \geq \frac{\alpha}{2} \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}) \tag{17}$$

Como $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ é decrescente, temos $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ decrescente. Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$Z_{n+1} \subset Z_n \Rightarrow Z_{n+1}^{\omega_{J_1}} \subset Z_n^{\omega_{J_1}} \tag{18}$$

[3] Como Z_n é uma seqüência decrescente de cilindros, temos que $(P_0(Z_n))_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência decrescente de números reais positivos.Portanto negar que $\lim P_0(Z_n) = 0$ é afirmar que $\lim P_0(Z_n) \neq 0$, pois não é possível que o limite não exista.

e

$$P_o(Z_{n+1}^{\omega_{J_1}}) \geq \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P_0(Z_n^{\omega_{J_1}}) \geq \frac{\alpha}{2}.$$

Portanto

$$\omega_{J_1} \in Q_{n+1} \Rightarrow \omega_{J_1} \in Q_n$$

e

$$Q_{n+1} \subset Q_n.$$

P_{J_1} é medida (de probabilidades). Se tivéssemos $Q_n \downarrow \emptyset$ então teríamos $\lim_{n\to\infty} P_{J_1}(Q_n) = 0$ (absurdo por (17)). Logo, $\cap_{n=1}^{\infty} Q_n \neq \emptyset$.

Seja $\bar{\omega}_{J_1} \in \cap_{n=1}^{\infty} Q_n$. Então, pela Definição de Q_n, temos

$$P_0(Z_n^{\bar{\omega}_{J_1}}) \geq \frac{\alpha}{2} > 0 \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}) \tag{19}$$

Definamos

$$Q_n' = \{\omega_{J_2\setminus J_1} \in \Omega_{J_2\setminus J_1}; P_0((Z_n^{\bar{\omega}_{J_1}})^{\omega_{J_2\setminus J_1}}) \geq \frac{\alpha}{2^2}\}$$

Procedendo analogamente a (16), temos que $Q_n' \in \mathfrak{U}_{J_2\setminus J_1}$ e

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{2} &\leq P_0(Z_n^{\bar{\omega}_{J_1}}) \\
&= \int_{\Omega_{J_2\setminus J_1}} P_0((Z_n^{\bar{\omega}_{J_1}})^{\omega_{J_2\setminus J_1}}) dP_{J_2\setminus J_1}(\omega_{J_2\setminus J_1}) \\
&= \int_{(\Omega_{J_2\setminus J_1})\setminus Q_n'} P_0((Z_n^{\bar{\omega}_{J_1}})^{\omega_{J_2\setminus J_1}}) dP_{J_2\setminus J_1}(\omega_{J_2\setminus J_1}) + \int_{Q_n'} P_0((Z_n^{\bar{\omega}_{J_1}})^{\omega_{J_2\setminus J_1}}) dP_{J_2\setminus J_1}(\omega_{J_2\setminus J_1}) \\
&\leq \frac{\alpha}{4}.P_{J_2\setminus J_1}(\Omega_{J_2\setminus J_1} \setminus Q_n') + 1.P_{J_2\setminus J_1}(Q_n') \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Portanto

$$P_{J_2\setminus J_1}(Q_n') \geq \frac{\alpha}{2} \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}) \tag{20}$$

Em (18) vemos que $(Z_n^{\bar{\omega}_{J_1}})_{n=1}^{\infty}$ é decrescente. Logo, Q_n' é decrescente, e se fosse $Q_n' \downarrow \emptyset$ teríamos $\lim_{n\to\infty} P_{J_2\setminus J_1}(Q_n') = 0$ (absurdo por (20)). Portanto $\cap_{n=1}^{\infty} Q_n' \neq \emptyset$, e por conseguinte existe $\bar{\omega}_{J_2\setminus J_1} \in \cap_{n=1}^{\infty} Q_n'$, com

$$P_0((Z_n^{\bar{\omega}_{J_1}})^{\bar{\omega}_{J_2\setminus J_1}}) \geq \frac{\alpha}{4} \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}) \tag{21}$$

Seja $\bar{\omega}_{J_2} = (\bar{\omega}_{J_1}, \bar{\omega}_{J_2\setminus J_1}) \in \Omega_{J_2}$. Temos

$$(Z_n^{\bar{\omega}_{J_1}})^{\bar{\omega}_{J_2\setminus J_1}} = Z_n^{\bar{\omega}_{J_2}}. \tag{22}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
Z_n^{\bar{\omega}_{J_2}} &= \{\omega \in \Omega; (\bar{\omega}_{J_2}, proj_{I\setminus J_2}(\omega)) \in Z_n\} \\
&= \{\omega \in \Omega; (\bar{\omega}_{J_1}, \bar{\omega}_{J_2\setminus J_1}, proj_{I\setminus J_2}(\omega)) \in Z_n\} \\
&= (Z_n^{\bar{\omega}_{J_1}})^{\bar{\omega}_{J_2\setminus J_1}}
\end{aligned}$$

Logo, de (21) e (22) segue

$$P_0(Z_n^{\bar{\omega}_{J_2}}) \geq \frac{\alpha}{4} \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

e

$$proj_{J_1}^{J_2}(\bar{\omega}_{J_2}) = \bar{\omega}_{J_1}$$

Por indução temos que, para todo $k \in \mathbb{N}$, existem $\bar{\omega}_{J_k} \in \Omega_{J_k}$ e $\bar{\omega}_{J_{k+1}} \in \Omega_{J_{k+1}}$ tais que

$$P_0(Z_n^{\bar{\omega}_{J_k}}) \geq \frac{\alpha}{2^k} > 0 \quad \text{e} \quad proj_{J_k}^{J_{k+1}}(\bar{\omega}_{J_{k+1}}) = \bar{\omega}_{J_k} \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

Logo existe $\omega_0 \in \Omega$, com $proj_{J_k}(\omega_0) = \bar{\omega}_{J_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como

$$P_0(Z_n^{\bar{\omega}_{J_k}}) \geq \frac{\alpha}{2^k} \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})(\forall\, k \in \mathbb{N})$$

temos, em particular, $Z_n^{\bar{\omega}_{J_n}} \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo existem $\tilde{\omega}_n \in \Omega$ tais que

$$(\bar{\omega}_{J_n}, proj_{I \setminus J_n}(\tilde{\omega}_n)) \in Z_n \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}) \tag{23}$$

Temos

$$Z_n = proj_{J_n}^{-1}(A_n) = \{\omega \in \Omega; proj_{J_n}(\omega) \in A_n\} \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}) \tag{24}$$

Mas de (23) e (24)

$$proj_{J_n}((\bar{\omega}_{J_n}, proj_{I \setminus J_n}(\tilde{\omega}_n)) \in A_n \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}) \tag{25}$$

ou ainda

$$\bar{\omega}_{J_n} \in A_n \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

Por (24)

$$\omega_0 \in Z_n \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}),$$

isto é

$$\cap_{n=1}^{\infty} Z_n \neq \emptyset$$

□

Podemos agora, enunciar o seguinte Teorema.

5.9 Teorema Na σ-álgebra $\mathcal{U}_0 = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{U}_i$ existe exatamente uma medida P tal que, para cada $J \in \mathcal{F}$,

$$proj_J(P) = P_J.$$

Isto é, existe exatamente uma medida P tal que, para cada $J \in \mathcal{F}$, a distribuição de cada variável aleatória

$$proj_J : (\prod_{i \in I} \Omega_i, \mathcal{U}_0, P) \longrightarrow (\Omega_J, \mathcal{U}_J)$$

é a medida produto P_J.

Demonstração: A Proposição 5.8 garante que $P_0 : \mathcal{C} \to [0,1]$ é uma medida σ-aditiva na álgebra $\mathcal{C}$.

Além disso

$$P_0(proj_J^{-1}(A)) = P_J(A) \qquad (\forall\, J \in \mathcal{F})(\forall\, A \in \mathcal{U}_J)$$

Pelo Teorema da Extensão de Carathéodory, existe uma única medida P em $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{U}_0$ que estende P_0. Como P estende P_0 temos

$$P(proj_J^{-1}(A)) = P_J(A) \qquad (\forall\, J \in \mathcal{F})(\forall\, A \in \mathcal{U}_J)$$

e P é claramente medida de probabilidades, como extensão de uma medida de probabilidades.

□

A medida P é denominada ***medida produto*** das medidas P_i.

Capítulo 6

Uma Caracterização Topologicamente Independente da Medida de Lebesgue em $[0,1]$

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidades, onde $\Omega = \{0, 1, \ldots, g-1\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $P(A) = \frac{\# A}{g}$ para todo $A \in \mathcal{A}$, onde $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ é fixo.

Sejam $\Omega^{\mathbb{N}} = \Omega \times \Omega \times \ldots$, $\mathcal{D} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i$, com $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}$ para todo i, e μ a medida produto em $\mathcal{D}$.

Definimos

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & (\Omega^{\mathbb{N}}, \mathcal{D}, \mu) & \longrightarrow & ([0,1], \mathcal{B}) \\ & x = (x_j)_{j=1}^{\infty} & \mapsto & \Psi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j . g^{-j} \end{array} \tag{1}$$

Notemos que Ψ relaciona de modo natural um elemento de $\Omega^{\mathbb{N}}$ com um número real de $[0,1]$. Vamos mostrar que há uma forte relação entre as σ-álgebras $\mathcal{D}$ em $\Omega^{\mathbb{N}}$ e $\mathcal{B}$ em $[0, 1]$, e também entre a medida produto μ e a medida de Lebesgue λ. Mais especificamente, mostraremos que:

(i) $\Psi(\mathcal{D}) = \sigma(\Psi(\mathcal{C})) = \mathcal{B}$, onde $\mathcal{C} = \{\Omega \times \Omega \times \ldots \times \overset{\text{n-ésima}}{A} \times \Omega \times \ldots ; \; n \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{A}\}$.

(ii) Ψ é uma variável aleatória e sua distribuição é a medida de Lebesgue, isto é, se $A \in \mathcal{B}$, então $\mu(\Psi^{-1}(A)) = \lambda(A)$.

(iii) Para todo $B \subset \Omega^{\mathbb{N}}$ tal que $\Psi(B) = A \in \mathcal{B}$ temos $B \in \mathcal{D}$ e $\mu(\Psi^{-1}(A)) = \mu(B)$. Logo, por (ii) temos $\lambda(A) = \mu(B)$.

Para tornar a demonstração mais intuitiva, nos restringiremos ao caso $g = 10$. O leitor perceberá que não há diferença alguma entre este caso e os casos $g \neq 10$. Portanto, nas demonstrações a seguir, sempre que usarmos a notação $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, estará implícito que $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 10^{-j}$, $a_j \in \Omega = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Às vezes usaremos também a notação $x = 0, (a_1)(a_2)(a_3) \ldots$ em algumas situações, para evitar confusões. Além disso, quando nos referirmos à função Ψ, estaremos tratando da função em (1) com $g = 10$. Todas as notações do começo deste capítulo serão mantidas até seu fim.

6.1 Proposição A aplicação

$$\begin{array}{rcl} \bar{\Psi} : (\Omega^{\mathbb{N}}, \mathcal{D}, \mu) & \longrightarrow & ([0,1], \sigma(\Psi(\mathcal{C}))) \\ x = (x_j)_{j=1}^{\infty} & \mapsto & \bar{\Psi}(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} x_j 10^{-j} \end{array}$$

é uma variável aleatória[1].

Demonstração: Como resultados auxiliares veremos seis afirmações . Antes, perceba que $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{C})$ pela definição da σ-ágebra produto.

AFIRMAÇÃO 1 Qualquer "ponto" $p = \{(a_i)_{i=1}^{\infty}\}$ pertence a $\mathcal{D}$.
De fato
$$p = \{(a_i)_{i=1}^{\infty}\} = \cap_{i=1}^{\infty}(\Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega \times \{a_i\} \times \Omega \times \ldots) \in \mathcal{D}$$

AFIRMAÇÃO 2 Qualquer conjunto A enumerável ou finito, isto é,
$$A = \cup_{j\in \mathbb{N}}\{(a_{ij})_{i=1}^{\infty}\} \qquad \text{ou } A = \cup_{j=1}^{n}\{(a_{ij})_{i=1}^{\infty}\}$$
pertence a $\mathcal{D}$. Além disso, $\mu(A) = 0$.

Com efeito, a primeira parte da afirmação é conseqüência imediata da Afirmação 1 e do fato de $\mathcal{D}$ ser σ-álgebra. Também é fácil ver que $\mu(A) = 0$ pois, se $p = \{(a_i)_{i=1}^{\infty}\}$, então
$$p = (\{a_1\} \times \Omega \times \Omega \times \ldots) \cap (\{a_1\} \times \{a_2\} \times \ \Omega \times \Omega \times \ldots) \cap (\{a_1\} \times \{a_2\} \times \{a_3\} \times \Omega \times \Omega \times \ldots) \cap \ldots$$
e
$$\mu(p) = \lim_{n\to\infty} \mu(\{a_1\} \times \ldots \times \{a_n\} \times \Omega \times \Omega \times \ldots) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$$
Logo, $\mu(A) = 0$ pela σ-aditividade.

AFIRMAÇÃO 3 Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação qualquer, onde X e Y são conjuntos quaisquer. Seja $B \subset X$. Então $f^{-1}(f(B)) = B \cup D_1$, onde
$$D_1 = \{a \in X \setminus B; \exists\, b \in B, f(a) = f(b)\}.$$

De fato, é claro que $B \cup D_1 \subset f^{-1}(f(B))$. Reciprocamente, se $x \in f^{-1}(f(B))$ e $x \notin B$, então existe $y \in B$ tal que $f(y) = f(x)$ e portanto $x \in D_1$. Logo, $f^{-1}(f(B)) \subset B \cup D_1$.
O leitor deve perceber ainda que o conjunto D definido por
$$D = \{a \in X; \exists\, b \in X, b \neq a, f(a) = f(b)\}$$
é tal que $D_1 \subset D$.

AFIRMAÇÃO 4 Se
$$D = \{a \in \Omega^{\mathbf{N}}; \exists\, b \in \Omega^{\mathbf{N}}, b \neq a, \bar{\Psi}(b) = \bar{\Psi}(a)\},$$
então $D = \bar{\Psi}^{-1}(C)$, com
$$C = \{x \in]0,1[; \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ com } x = \sum_{j=1}^{n} x_j.10^{-j},\ x_j \in \{0,\ldots,9\} (\forall\, j = 1,\ldots,n)\}$$

Demonstração da afirmação 4: Seja $a \in \Omega^{\mathbf{N}}$, $a \in D$. Então existe $b \in \Omega^{\mathbf{N}}$, com $b \neq a$ e $\bar{\Psi}(b) = \bar{\Psi}(a)$. Vamos mostrar que $a, b \in \bar{\Psi}^{-1}(C)$.

Temos $a = (a_j)_{j=1}^{\infty}$ e $b = (b_j)_{j=1}^{\infty}$. Como $a \neq b$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $a_j \neq b_j$. Seja j_0 o menor desses índices j. Sem perda de generalidade podemos supor $b_{j_0} > a_{j_0}$. Temos
$$\begin{cases} \bar{\Psi}(a) &= 0, a_1 a_2 \ldots a_{j_0} a_{j_0+1} \ldots \\ \bar{\Psi}(b) &= 0, b_1 b_2 \ldots b_{j_0} b_{j_0+1} \ldots \end{cases}$$

[1] Note que a priori Ψ e $\bar{\Psi}$ só diferem pela σ-ágebra do contra-domínio. Veremos posteriormente que $\mathcal{B} = (\sigma(\Psi(\mathcal{C})))$ e conseqüentemente Ψ e $\bar{\Psi}$ serão rigorosamente iguais.

com $a_i = b_i$ para todo $i = 1, \ldots, j_0 - 1$.

Notemos que

$$\bar{\Psi}(a) = \bar{\Psi}(b) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{10^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{10^j}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{a_j}{10^j} = \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{b_j}{10^j}$$
$$\Leftrightarrow \frac{b_{j_0} - a_{j_0}}{10^{j_0}} = \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{a_j - b_j}{10^j} \tag{2}$$

Logo, se $\bar{\Psi}(a) = \bar{\Psi}(b)$, temos

$$\frac{b_{j_0} - a_{j_0}}{10^{j_0}} = \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{a_j - b_j}{10^j} \leq \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{9}{10^j} = \frac{1}{10^{j_0}} \tag{3}$$

e

$$b_{j_0} = a_{j_0} + 1 \tag{4}$$

Portanto de (2),(3) e (4), temos que, se $\bar{\Psi}(a) = \bar{\Psi}(b)$, então

$$\begin{aligned} \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{9}{10^j} &= \frac{1}{10^{j_0}} \\ &= \frac{b_{j_0} - a_{j_0}}{10^{j_0}} \\ &= \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{a_j - b_j}{10^j} \end{aligned}$$

e por conseguinte

$$\sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{9 - (a_j - b_j)}{10^j} = 0.$$

Portanto, $9 - (a_j - b_j) = 0$ para todo $j > j_0$, ou seja, $a_j = 9$ e $b_j = 0$ para todo $j > j_0$. Logo,

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(a) &= 0,(a_1)\ldots(a_{j_0})(9)(9)\ldots \\ &= 0,(a_1)\ldots(a_{j_0}+1) \end{aligned}$$

e

$$a \in \bar{\Psi}^{-1}(\{0,(a_1)\ldots(a_{j_0}+1)\}) \subset \bar{\Psi}^{-1}(C).$$

Logo $D \subset \bar{\Psi}^{-1}(C)$.

Reciprocamente, se $a \in \bar{\Psi}^{-1}(C)$, então $a \in \bar{\Psi}^{-1}(\{0, x_1 \ldots x_n\})$, $x_n \neq 0$. Logo,

$$\bar{\Psi}(a) = 0, x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Se $a = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ tome $b = (x_1, x_2, \ldots, x_n - 1, 9, 9, \ldots)$ para obter $\bar{\Psi}(a) = \bar{\Psi}(b)$.
Se $a \neq (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ tome $b = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ para ter $\bar{\Psi}(a) = \bar{\Psi}(b)$.
Logo, $a \in D$. Portanto $\bar{\Psi}^{-1}(C) \subset D$ e segue que $D = \bar{\Psi}^{-1}(C)$.

$\square$

Seguindo a notação da afirmação 4, temos:

AFIRMAÇÃO 5 Se $a \in D$ então existe um único $b \in \Omega^{\mathbf{N}}$, com $b \neq a$, tal que $\bar{\Psi}(b) = \bar{\Psi}(a)$ (Em outras palavras, se um número real em $]0,1[$ tem duas decomposições decimais distintas, elas são as únicas possíveis).

Demonstração: Suponha $a \neq b$, $a, b \in \Omega^{\mathbf{N}}$ tais que $\bar{\Psi}(b) = \bar{\Psi}(a)$. Seja $c \in \Omega^{\mathbf{N}}$ tal que $\bar{\Psi}(c) = \bar{\Psi}(a) = \bar{\Psi}(b)$. Seja n o menor índice tal que $a_n \neq b_n$ e suponha $b_n > a_n$. Sabemos, da demonstração da afirmação 4, que

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, 9, 9, \ldots), \qquad a_n \neq 9,$$

$$b = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1, 0, 0, \ldots)$$

Se $c \neq a$, seja j_0 o menor índice tal que $c_{j_0} \neq a_{j_0}$

<u>1º Caso</u>: $c_{j_0} > a_{j_0}$

Então, pela demonstração da afirmação 4, temos

$$c = (a_1, a_2, \ldots, a_{j_0 - 1}, a_{j_0} + 1, 0, 0, \ldots)$$

Como $\bar{\Psi}(c) = \bar{\Psi}(a)$ temos

$$0,(a_1)(a_2)\ldots(a_{j_0-1})(a_{j_0}+1) = 0,(a_1)(a_2)\ldots(a_n)(9)(9)\ldots$$

Vamos mostrar que $n = j_0$, isto é, $c = b$. De fato,

$$\frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_{j_0-1}}{10^{j_0-1}} + \frac{a_{j_0}+1}{10^{j_0}} = \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n+1}{10^n}$$

e se $j_0 \neq n$, por exemplo, $j_0 < n$, temos

$$\frac{a_{j_0}+1}{10^{j_0}} = \frac{a_{j_0}}{10^{j_0}} + \frac{a_{j_0+1}}{10^{j_0+1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n+1}{10^n}$$

e

$$\frac{1}{10^{j_0}} = \frac{a_{j_0+1}}{10^{j_0+1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n+1}{10^n} < \frac{1}{10^{j_0}} \quad (\text{ absurdo})$$

Logo $j_0 = n$ e portanto $c = b$.

<u>2º Caso</u>: $c_{j_0} < a_{j_0}$

Então, pela demonstração da afirmação 4, temos

$$c = (a_1, a_2, \ldots, a_{j_0-1}, a_{j_0} - 1, 9, 9, \ldots)$$

Como $\bar{\Psi}(c) = \bar{\Psi}(a)$ temos

$$0,(a_1)\ldots(a_{j_0-1})(a_{j_0}-1)(9)(9)\ldots = 0,(a_1)\ldots(a_{n-1})(a_n+1)$$

ou ainda

$$0,(a_1)\ldots(a_{j_0-1})(a_{j_0}) = 0,(a_1)\ldots(a_{n-1})(a_n+1)$$

o que é impossível, pois

- Se $j_0 < n$, então $\frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_{j_0}}{10^{j_0}} = \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_{j_0}}{10^{j_0}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n+1}{10^n}$ (absurdo)
- Se $j_0 = n$, então $\frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} = \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n+1}{10^n}$ (absurdo)
- Se $j_0 > n$, então $\frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n}{10^n} + \ldots + \frac{a_{j_0}}{10^{j_0}} = \frac{a_1}{10} + \ldots + + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n+1}{10^n}$

e

$$\frac{1}{10^n} = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \ldots + \frac{a_{j_0}}{10^{j_0}} < \frac{1}{10^n} \quad \text{(absurdo)}$$

Logo, o segundo caso não ocorre, e então, se $c \neq a$ é tal que $\bar{\Psi}(c) = \bar{\Psi}(a) = \bar{\Psi}(b)$, temos $c = b$. Isso demonstra a afirmação.

□

Agora, estamos aptos a concluir que $\bar{\Psi}$ é variável aleatória. Seja $A \in \Psi(\mathcal{C})$. Então $A = \Psi(\Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega \times B \times \Omega \times \ldots) = \bar{\Psi}(\Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega \times B \times \Omega \times \ldots)$. Logo, pela afirmação 3, temos:

$$\bar{\Psi}^{-1}(A) = (\Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega \times B \times \Omega \times \ldots) \cup D_1 \tag{5}$$

com

$$D_1 = \left\{ \begin{array}{ll} (a_j)_{j=1}^{\infty} \notin (\Omega \times \ldots \times \Omega \times B \times \Omega \times \ldots); & \exists\, (b_j)_{j=1}^{\infty} \in (\Omega \times \ldots \times \Omega \times B \times \Omega \times \ldots) \\ & \text{tal que } \bar{\Psi}((a_j)_{j=1}^{\infty}) = \bar{\Psi}((b_j)_{j=1}^{\infty}) \end{array} \right\}$$

Com a notação da afirmação 4, temos $D_1 \subset D = \bar{\Psi}^{-1}(C)$,onde C é obviamente enumerável. Como a afirmação 5 nos diz que a imagem inversa de cada elemento de C tem exatamente dois elementos, concluímos que D é enumerável, e,com maior razão, D_1 é enumerável. Logo, pela afirmação 2, temos:

AFIRMAÇÃO 6 $D \in \mathcal{D}$, D é enumerável, e para todo $D' \subset D$ temos $D' \in \mathcal{D}$ e $\mu(D') = \mu(D) = 0$.

Logo, da afirmação 6 e de (5), $\bar{\Psi}^{-1}(A) \in \mathcal{D}$ e por conseguinte $\bar{\Psi}$ é mensurável (por 1.9).

□

Neste capítulo as letras C e D sempre designarão os respectivos conjuntos definidos na afirmação 4, e $D_1, D_2, \ldots$ serão subconjuntos de D.

6.2 Proposição $\sigma(\Psi(\mathcal{C})) = \mathcal{B}$.

Demonstração: Lembremos que $\mathcal{B} = \sigma([a,b], a < b,\ a, b \in [0,1])$. Como resultados auxiliares seguem as duas afirmações a seguir:

AFIRMAÇÃO 7 Se $B_k = (\Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega \times \overset{k-\text{ésima}}{A_k} \times \Omega \times \ldots)$ então $\Psi(\cap_{k=1}^n B_k) = \cap_{k=1}^n \Psi(B_k)$.

De fato,

$$\begin{aligned} \Psi(\cap_{k=1}^n B_k) &= \Psi(A_1 \times \ldots \times A_n \times \Omega \times \Omega \ldots) = \\ &= \{x \in [0,1]; x = 0, x_1 x_2 \ldots,\ \text{com } x_j \in A_j, j = 1, \ldots, n\} \\ &= \{x \in [0,1]; x = 0, y_1 y_2 \ldots,\ \text{com } y_1 \in A_1\} \cap \ldots \cap \{x \in [0,1]; x = 0, y_1 y_2 \ldots,\ \text{com } y_n \in A_n\} \\ &= \cap_{k=1}^n \Psi(B_k). \end{aligned}$$

Observe que em geral $\Psi(A \cap B) \neq \Psi(A) \cap \Psi(B)$. Com efeito, se $A = \{(0,9,9,9,9,\ldots)\}$ e $B = \{(1,0,0,\ldots)\}$ temos $\Psi(A \cap B) = \emptyset$ e $\Psi(A) \cap \Psi(B) = \{10^{-1}\}$.

AFIRMAÇÃO 8 Se $\mathcal{C}' = \{\Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega \times \overset{n-\text{ésima}}{\{a\}} \times \Omega \times \ldots; n \in \mathbb{N}, a \in \Omega\}$ então $\sigma(\Psi(\mathcal{C}')) = \sigma(\Psi(\mathcal{C}))$.

Com efeito, é claro que $\sigma(\Psi(\mathcal{C}')) \subset \sigma(\Psi(\mathcal{C}))$. Além disso,

$$\begin{aligned} B \in \Psi(\mathcal{C}) \Rightarrow B &= \Psi(\Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega \times A \times \Omega \times \ldots) \\ &= \cup_{a \in A}(\Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega \times \{a\} \times \Omega \times \ldots) \in \sigma(\Psi(\mathcal{C}')), \end{aligned}$$

e então $\Psi(\mathcal{C}) \subset \sigma(\Psi(\mathcal{C}'))$ e finalmente $\sigma(\Psi(\mathcal{C})) \subset \sigma(\Psi(\mathcal{C}'))$, completando a demonstração da afirmação.

Para a demonstração da proposição 6.2 e em demonstrações futuras, usaremos as seguintes notações , onde novamente $\Omega = \{0, \ldots, 9\}$ e $\alpha, \beta \in \Omega$:

$$
\begin{array}{ll}
\{>\alpha\} = \{x \in \Omega; x > \alpha\} & \{>\alpha, <\beta\} = \{x \in \Omega; x > \alpha \text{ e } x < \beta\} \\
\{<\alpha\} = \{x \in \Omega; x < \alpha\} & \{\geq\alpha, \leq\beta\} = \{x \in \Omega; x \geq \alpha \text{ e } x \leq \beta\} \\
\{\geq\alpha\} = \{x \in \Omega; x \geq \alpha\} & \{\geq\alpha, <\beta\} = \{x \in \Omega; x \geq \alpha \text{ e } x < \beta\} \\
\{\leq\alpha\} = \{x \in \Omega; x \leq \alpha\} & \{>\alpha, \leq\beta\} = \{x \in \Omega; x > \alpha \text{ e } x \leq \beta\}
\end{array}
$$

Sejam $a = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 10^{-j}$ e $b = \sum_{j=1}^{\infty} b_j 10^{-j}$, $(a_j, b_j \in \Omega), (\forall\, j \in \mathbb{N})$

Notemos que

$$[a, b] = \cap_{n=n_0+1}^{\infty} [0, a_1 \ldots a_{n_0} \ldots a_n 000 \ldots,\quad 0, b_1 \ldots b_{n_0} \ldots b_n 999 \ldots]$$

onde n_0 é o menor índice tal que $a_{n_0} \neq b_{n_0}$.

Vamos mostrar que

$$[0, a_1 \ldots a_{n_0} \ldots a_n 000 \ldots,\quad 0, b_1 \ldots b_{n_0} \ldots b_n 999 \ldots] \in \sigma(\Psi(\mathcal{C}))$$

para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, n_0\}$.

De fato,

$$
\begin{aligned}
&[0, a_1 \ldots a_{n_0} \ldots a_n 000 \ldots,\quad 0, b_1 \ldots b_{n_0} \ldots b_n 999 \ldots] = \\
&= \Psi(\{a_1\} \times \{a_2\} \times \ldots \times \{a_{n_0-1}\} \times \{> a_{n_0}, < b_{n_0}\} \times \Omega \times \ldots) \\
&\quad \cup \Psi(\cup_{k=n_0+1}^{n} (\{a_1\} \times \{a_2\} \times \ldots \times \{a_{k-1}\} \times \{> a_k\} \times \Omega \times \ldots) \\
&\quad \cup \Psi(\{a_1\} \times \{a_2\} \times \ldots \times \{a_n\} \times \Omega \times \ldots) \\
&\quad \cup \Psi(\cup_{k=n_0+1}^{n} (\{b_1\} \times \{b_2\} \times \ldots \times \{b_{k-1}\} \times \{< b_k\} \times \Omega \ldots) \\
&\quad \cup \Psi(\{b_1\} \times \{b_2\} \times \ldots \times \{b_n\} \times \Omega \times \Omega \times \ldots)
\end{aligned}
$$

e cada $\Psi(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k \times \Omega \times \Omega \times \ldots)$ pertence a $\sigma(\Psi(\mathcal{C}))$.Para vermos isso,observe que

$$
\begin{aligned}
&(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k \times \Omega \times \Omega \times \ldots) = \\
&= (A_1 \times \Omega \times \Omega \times \ldots) \cap (\Omega \times A_2 \times \Omega \times \ldots) \cap \ldots \cap (\Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega \times A_k \times \Omega \times \Omega \times \ldots).
\end{aligned}
$$

Se definirmos

$$B_j := (\Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega \times \overset{j-\text{ésima}}{A_j} \times \Omega \times \Omega \times \ldots) \qquad (\forall\, j \in \{1, \ldots, n\}),$$

então

$$
\begin{aligned}
\Psi(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times \Omega \times \ldots) &= \Psi(\cap_{j=1}^{k} B_j) \\
&= \cap_{j=1}^{k} \Psi(B_j) \in \sigma(\Psi(\mathcal{C})).
\end{aligned}
$$

Logo, $[a, b]$ é interseção enumerável de uniões finitas de elementos de $\sigma(\Psi(\mathcal{C}))$, e conseqüentemente pertence a $\sigma(\Psi(\mathcal{C}))$.Portanto $\mathcal{B} \subset \sigma(\Psi(\mathcal{C}))$.

Resta-nos provar que $\sigma(\Psi(\mathcal{C})) \subset \mathcal{B}$. Pela afirmação 8 basta provar que $\sigma(\Psi(\mathcal{C}')) \subset \mathcal{B}$.

Seja $A \in \Psi(\mathcal{C}')$. Logo, $A = \Psi(B)$, $B = (\Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega \times \overset{n-\text{ésima}}{\{c\}} \times \Omega \ldots)$

Então

$$A = \cup_{\substack{\alpha_j \in \{0,\dots,9\} \\ j=1,\dots,n-1}} [0,(\alpha_1)\dots(\alpha_{n-1})(c), \quad 0,(\alpha_1)\dots(\alpha_{n-1})(c)(9)(9)(9)\dots]$$

ou seja, A é união finita de intervalos. Logo, $A \in \mathcal{B}$.

Portanto $\Psi(\mathcal{C}') \subset \mathcal{B}$ e $\sigma(\Psi(\mathcal{C}')) \subset \mathcal{B}$, completando a demonstração da proposição 6.2.

Concluímos que $\sigma(\Psi(\mathcal{C})) = \mathcal{B}$ e $\Psi = \bar{\Psi}$.

□

6.3 Proposição $\Psi(\mathcal{D})$ é σ-álgebra.

Demonstração: Primeiro vemos que $[0,1] \in \Psi(\mathcal{D})$ pois (devido à sobrejetividade de Ψ) $[0,1] = \Psi(\Omega^{\mathbb{N}})$. Além disso, se $\Psi(A_n) \in \Psi(\mathcal{D})$ com $A_n \in \mathcal{D}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\cup_{n=1}^{\infty} \Psi(A_n) \in \Psi(\mathcal{D})$ pois

$$\cup_{n=1}^{\infty} \Psi(A_n) = \Psi(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \in \Psi(\mathcal{D})$$

Resta-nos provar que

$$\Psi(A) \in \Psi(\mathcal{D}) \text{ com } A \in \mathcal{D} \Rightarrow \Psi(A)^c \in \Psi(\mathcal{D})$$

Seja D como na afirmação 4. Já vimos que $D \in \mathcal{D}$. Então temos

$$y \in \Psi(A)^c \Leftrightarrow y \notin \Psi(A) \Rightarrow \exists\, x \notin A; y = \Psi(x) \Rightarrow y \in \Psi(A^c)$$

Logo,

$$\Psi(A)^c \subset \Psi(A^c) \tag{6}$$

Vamos mostrar que

$$\Psi(A^c) \subset \Psi(A)^c \cup \Psi(D)$$

De fato,

$$\begin{aligned} &y \in \Psi(A^c) \Rightarrow \exists\, x \in A^c,\ y = \Psi(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} y \in \Psi(D), & \text{se existe } x' \in A \text{ tal que } \Psi(x') = y \\ y \in \Psi(A)^c, & \text{se não existe } x' \in A \text{ tal que } \Psi(x') = y, \end{cases} \end{aligned} \tag{7}$$

Logo, $\Psi(A^c) \subset \Psi(A)^c \cup \Psi(D)$.

Portanto de (6) e de (7) temos

$$\Psi(A)^c \subset \Psi(A^c) \subset \Psi(A)^c \cup \Psi(D)$$

e então

$$\Psi(A^c) = \Psi(A)^c \cup \Psi(D_2) \quad (\exists\, D_2 \subset D)^2 \tag{8}$$

Pela afirmação 6, $D_2 \in \mathcal{D}$. Além disso, note que que D_2 pode ser escolhido de modo que $\Psi(D_2) \cap \Psi(A)^c = \emptyset$. Então

$$\Psi(A)^c = \Psi(A^c) \setminus \Psi(D_2) \tag{9}$$

Para concluir que $\Psi(A)^c \in \Psi(\mathcal{D})$ consideramos a seguinte afirmação:

AFIRMAÇÃO 9 Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função qualquer e $A \subset X$, $B \subset X$. Então $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus f^{-1}(f(B)))$.

[2] Basta tomar $D_2 = \{x \in D, \Psi(x) \notin \Psi(A)^c \text{ e } \Psi(x) \in \Psi(A^c)\}$

De fato, se $y \in f(A \setminus f^{-1}(f(B)))$ então $y = f(x)$ com $x \in A \setminus f^{-1}(f(B))$. Assim, $x \in A$ e $f(x) \notin f(B)$. Logo, $f(x) \in f(A)$ e $f(x) \notin f(B)$. Portanto $y = f(x) \in f(A) \setminus f(B)$ e $f(A \setminus f^{-1}(f(B))) \subset f(A) \setminus f(B)$.

Reciprocamente, se $y \in f(A) \setminus f(B)$ então $y = f(x_0)$, $x_0 \in A$ e $y \notin f(B)$. Logo, $y = f(x_0)$, $x_0 \in A$ e $f(x_0) \notin f(B)$, donde $y = f(x_0)$, $x_0 \in A$ e $x_0 \notin f^{-1}(f(B))$. Portanto $y \in f(A \setminus f^{-1}(f(B)))$, isto é, $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus f^{-1}(f(B)))$.

Voltando à proposição 6.3 temos, por (9) e pela afirmação 9, que

$$\Psi(A)^c = \Psi(A^c) \setminus \Psi(D_2) = \Psi(A^c \setminus \Psi^{-1}(\Psi(D_2)))$$

Mas, $A^c \in \mathcal{D}$ e $\Psi^{-1}(\Psi(D_2)) = D_2 \cup D_3$ para $D_3 = \{a \in \Omega^{\mathbb{N}} \setminus D_2; \exists\, b \in D_2$ tal que $\Psi(a) = \Psi(b)\}$, devido à afirmação 3. Além disso, $D_3 \subset D$ e pela afirmação 6 temos $D_3 \in \mathcal{D}$. Logo, $A^c \setminus \Psi^{-1}(\Psi(D_2)) \in \mathcal{D}$ e $\Psi(A)^c \in \Psi(\mathcal{D})$. Portanto $\Psi(\mathcal{D})$ é σ-álgebra.

□

6.4 Proposição $\mathcal{R} = \{A \in \mathcal{D}; \Psi(A) \in \sigma(\Psi(\mathcal{C}))\}$ é σ-álgebra.

Demonstração: Basta observarmos que

i) $A \in \mathcal{R} \Rightarrow A^c \in \mathcal{R}$

De fato,

$$A \in \mathcal{R} \Rightarrow \Psi(A) \in \sigma(\Psi(\mathcal{C})) \Rightarrow \Psi(A)^c \in \sigma(\Psi(\mathcal{C})),$$

e por (8) existe $D_2 \subset D$ tal que $\Psi(A^c) = \Psi(A)^c \cup \Psi(D_2)$. Como D_2 é (no máximo) enumerável temos que $\Psi(D_2)$ é (no máximo) enumerável. Logo, $\Psi(D_2) \in \mathcal{B} = \sigma(\Psi(\mathcal{C}))$. Portanto $\Psi(A^c) \in \sigma(\Psi(\mathcal{C}))$ e por conseguinte $A^c \in \mathcal{R}$.

ii) $(A_n \in \mathcal{R})(\forall\, n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty}(A_n) \in \mathcal{R}$.

Claro, pois $\Psi(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \cup_{n=1}^{\infty} \Psi(A_n) \in \sigma(\Psi(\mathcal{C}))$

iii) $\Omega^{\mathbb{N}} \in \mathcal{R}$ pois $\Psi(\Omega^{\mathbb{N}}) = [0,1] \in \sigma(\Psi(\mathcal{C}))$.

□

6.5 Proposição $\Psi(\mathcal{D}) = \sigma(\Psi(\mathcal{C}))$

Demonstração: É claro que $\sigma(\Psi(\mathcal{C})) \subset \Psi(\mathcal{D})$. Como $\mathcal{R}$ é σ-álgebra e $\mathcal{C} \subset \mathcal{R}$ temos $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{R}$, isto é, $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}$. Logo, pela definição de $\mathcal{R}$, temos $\Psi(\mathcal{D}) \subset \sigma(\Psi(\mathcal{C}))$, e segue o resultado. □

6.6 Proposição A distribuição da variável aleatória Ψ é a medida de Lebesgue.

Demonstração: Seja $\bar{\mu}$ a distribuição da variável aleatória Ψ e seja λ a medida de Lebesgue em $\mathcal{B}$. Para mostrarmos que $\bar{\mu}$ e λ coincidem em $\mathcal{B}$, basta mostrarmos que elas coincidem nos intervalos de $[0,1]$ pois neste caso coincidirão na álgebra $\mathcal{U}$ das uniões finitas de intervalos disjuntos, e pelo Teorema da Extensão de Carathéodory, coincidirão em $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{U})$.

Notemos ainda que

$$J = \{x \in [0,1]; \exists\, m \in \mathbb{N} \text{ tal que } x = \sum_{j=1}^{m} x_j.10^j, \text{ com } 0 \le x_j \le 9 \quad (\forall\, j = 1, \ldots, m)\}$$

é denso em $[0,1]$. Logo, é suficiente mostrarmos que $\bar{\mu}$ e λ coincidem nos intervalos $[a,b]$ de $[0,1]$ com $a, b \in J$.

Seja então $I = [0,a_1a_2\dots a_n,\quad 0,b_1b_2\dots b_n]$[3].
Seja n_0 o menor índice tal que $a_{n_0} \neq b_{n_0}$. Então

$$\lambda(I) = (b_{n_0} - a_{n_0})10^{-n_0} + (b_{n_0+1} - a_{n_0+1})10^{-(n_0+1)} + \dots + (b_n - a_n)10^{-n}$$

Notemos que $\Psi(A) = I$, onde

$$\begin{aligned} A \;=\; & (\{a_1\}\times\{a_2\}\times\dots\times\{a_{n_0-1}\}\times\{> a_{n_0}, < b_{n_0}\}\times\Omega\times\dots) \\ & \cup(\cup_{k=n_0+1}^{n}(\{a_1\}\times\{a_2\}\times\dots\times\{a_{k-1}\}\times\{> a_k\}\times\Omega\times\dots) \\ & \cup(\{a_1\}\times\{a_2\}\times\dots\times\{a_n\}\times\Omega\times\dots) \\ & \cup(\cup_{k=n_0+1}^{n}(\{b_1\}\times\{b_2\}\times\dots\times\{b_{k-1}\}\times\{< b_k\}\times\Omega\dots) \\ & \cup(\{b_1\}\times\{b_2\}\times\dots\times\{b_n\}\times\{0\}\times\{0\}\times\dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \frac{1}{10^{n_0}}(b_{n_0} - a_{n_0} - 1) + \sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{1}{10^k}(9 - a_k) + \frac{1}{10^n} + \sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{b_k}{10^k} + 0 \\ &= -\frac{1}{10^{n_0}} + \sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{1}{10^k}(9 - a_k) + \frac{1}{10^n} + \sum_{k=n_0}^{n}\frac{b_k}{10^k} - \frac{a_{n_0}}{10^{n_0}} \\ &= -\frac{1}{10^{n_0}} + \frac{1}{10^n} + \sum_{k=n_0}^{n}\frac{(b_k - a_k)}{10^k} + \sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{9}{10^k} \\ &= \lambda(I) - \frac{1}{10^{n_0}} + \frac{1}{10^n} + \frac{\frac{9}{10^{n_0+1}}[(\frac{1}{10})^{n-n_0} - 1]}{\frac{1}{10} - 1} \\ &= \lambda(I) - \frac{1}{10^{n_0}} + \frac{1}{10^n} + (\frac{9}{10^{n_0+1}}.\frac{10}{-9}.\frac{1}{10^{n-n_0}}) - (\frac{9}{10^{n_0+1}}.\frac{10}{-9}) \\ &= \lambda(I) - \frac{1}{10^{n_0}} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{n_0}} = \lambda(I) \end{aligned}$$

Das afirmações 3 e 6, existe $D_4 \subset D$ com

$$\bar{\mu}(I) = \mu(\Psi^{-1}(I)) = \mu(A \cup D_4) \quad \text{e} \quad \mu(D_4) = 0.$$

Logo $\mu(A \cup D_4) = \mu(A)$ e $\bar{\mu}(I) = \mu(A) = \lambda(I)$

6.7 Proposição Se $B \subset \Omega^{\mathbf{N}}$ é tal que $\Psi(B) = A \in \mathcal{B}$, então $B \in \mathcal{D}$, e $\lambda(A) = \mu(\Psi^{-1}(A)) = \mu(B)$.

Demonstração: Sabemos pelas afirmações 3 e 6 que existe $D' \subset D$ tal que $\Psi^{-1}(A) = B \cup D'$, onde B e D' são disjuntos. Logo

$$B = \Psi^{-1}(A) \setminus D'$$

e portanto $B \in \mathcal{D}$ pois $\Psi^{-1}(A) \in \mathcal{D}$ e $D' \in \mathcal{D}$. Além disso,

$$\lambda(A) = \mu(\Psi^{-1}(A)) = \mu(B \cup D') = \mu(B).$$

□

Como conseqüência de todos os resultados anteriores podemos enunciar o seguinte Teorema.

[3]Observe que se fosse $I = [0,a_1a_2\dots a_m,\quad 0,b_1b_2\dots b_n]$ com, por exemplo, $n > m$, ainda assim poderíamos tomar $I = [0,a_1a_2\dots a_n,\quad 0,b_1b_2\dots b_n]$, bastando para isso definir $a_{m+1} = \dots = a_n = 0$.

6.8 Teorema A aplicação Ψ é uma variável aleatória, $\Psi(\mathcal{D}) = \sigma(\Psi(\mathcal{C})) = \mathcal{B}$, a distribuição de Ψ é a medida de Lebesgue λ, e se $A = \Psi(B) \in \Psi(\mathcal{D})$, então $B \in \mathcal{D}$ e $\lambda(A) = \mu(B)$.

$\square$

Capítulo 7

Lei Forte dos Grandes Números

7.1 Definição Uma seqüência $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variáveis aleatórias

$$X_i : (\Omega, \mathfrak{U}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \qquad (\forall\, i \in \mathbb{N})$$

reais, integráveis, obedece à *Lei Forte dos Grandes Números* se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X_i)) = 0 \qquad (P - qtp)$$

isto é, se

$$P(\{\omega \in \Omega; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(X_i(\omega) - E(X_i)) = 0\}) = 1^1$$

Neste capítulo encontraremos condições suficientes para que uma determinada seqüência de variáveis aleatórias obedeça à *Lei Forte dos Grandes Números.*

O Teorema final deste Capítulo, devido a A. N. Kolmogorov, estabelece que variáveis aleatórias $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$X_i : (\Omega, \mathfrak{U}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \qquad (\forall\, i \in \mathbb{N})$$

integráveis, reais, independentes e identicamente distribuídas, obedecem à Lei Forte dos Grandes Números. Em geral, como veremos no Teorema 7.3, se a seqüência $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não for necessariamente identicamente distribuída, temos que

$$P(\{\omega \in \Omega; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(X_i(\omega) - E(X_i)) = 0\}) = 0 \text{ ou } 1.$$

No Capítulo 8 utilizaremos o Teorema 7.8 para obter resultados interessantes de Teoria de Números.

7.2 Teorema Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência independente de variáveis aleatórias $X_n : (\Omega, \mathfrak{U}, P) \longrightarrow (\Omega_n, \mathfrak{U}_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, para todo $A \in \cap_{n=1}^{\infty}\sigma(X_m; m \geq n)$, ou $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.

Demonstração: Como $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $\mathfrak{F}_n = \sigma(X_n)$, é uma família independente, então, pelo Teorema 4.7, segue que, para todo A em $\cap_{n=1}^{\infty}\sigma(\cup_{m=n}^{\infty}\mathfrak{F}_m)$, vale $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$. Mas $\sigma(\cup_{m=n}^{\infty}\mathfrak{F}_m) = \sigma(X_m; m \geq n)$ e o resultado segue. $\square$

[1] Note que $A = \{\omega \in \Omega; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(X_i(\omega) - E(X_i)) = 0\} \in \mathfrak{U}$ pois $f(\omega) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(X_i(\omega) - E(X_i))$ é limite de funções mensuráveis e portanto é mensurável. Além disso, $A = f^{-1}(\{0\})$.

7.3 Teorema Para uma seqüência independente de variáveis aleatórias reais integráveis

$$X_n : (\Omega, \mathcal{U}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

tem-se

$$P(\{\omega \in \Omega;\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(X_i(\omega) - E(X_i)) = 0\}) = 0 \text{ ou } 1.$$

Demonstração: Como para todo n a aplicação

$$\begin{array}{rccc} f_n: & (\mathbb{R}, \mathcal{B}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \\ & x & \mapsto & x - E(X_n) \end{array}$$

é mensurável, temos pelo Teorema 4.15, que $(X_n - E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é ainda uma seqüência independente de variáveis aleatórias.

Definamos

$$Y_n = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(X_i(\omega) - E(X_i)) \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

e

$$\begin{aligned} A &= \{\omega \in \Omega;\ \lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) = 0\} \\ &= (\limsup_{n\to\infty} Y_n)^{-1}(\{0\}) \cap (\liminf_{n\to\infty} Y_n)^{-1}(\{0\}) \end{aligned}$$

Logo, $A \in \mathcal{U}$ pois $\sup_{k\geq n} Y_k$ e $\inf_{k\geq n} Y_k$ são mensuráveis e portanto $\limsup_{n\to\infty} Y_n$ e $\liminf_{n\to\infty} Y_n$ são mensuráveis.

Temos, para cada m, $1 \leq m \leq n$,

$$Y_n = \frac{1}{n}.\sum_{i=m}^{n}(X_i(\omega) - E(X_i)) + \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{m-1}(X_i(\omega) - E(X_i))$$

Portanto

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) = 0 &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\sum_{i=m}^{n}(X_i(\omega) - E(X_i)) + \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{m-1}(X_i(\omega) - E(X_i)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\sum_{i=m}^{n}(X_i(\omega) - E(X_i)) = 0 \end{aligned}$$

Logo, para cada m, $1 \leq m \leq n$,

$$\begin{aligned} \omega_0 \in A &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} Y_n(\omega_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\sum_{i=m}^{n}(X_i(\omega_0) - E(X_i)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |\frac{1}{n}.\sum_{i=m}^{n}(X_i(\omega_0) - E(X_i))| = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{dado } k,\ \exists\ N \geq m \text{ tal que } \sup_{n\geq N} |\frac{1}{n}.\sum_{i=m}^{n}(X_i(\omega_0) - E(X_i))| \leq \frac{1}{k} \\ &\Leftrightarrow \text{dado } k, \omega_0 \in \cup_{N=m}^{\infty}\{\omega \in \Omega;\ \sup_{n\geq N} |\frac{1}{n}.\sum_{i=m}^{n}(X_i(\omega) - E(X_i))| \leq \frac{1}{k}\} \\ &\Leftrightarrow \omega_0 \in \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{N=m}^{\infty} \underbrace{\{\omega \in \Omega;\ \sup_{n\geq N} |\frac{1}{n}.\sum_{i=m}^{n}(X_i(\omega) - E(X_i))| \leq \frac{1}{k}\}}_{A_{kNm}} \end{aligned}$$

Portanto

$$A = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{N=m}^{\infty} A_{kNm}$$

com $A_{kNm} \in \sigma(X_n, n \geq m)$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Logo

$$A \in \cap_{m=1}^{\infty} \sigma(X_n, n \geq m)$$

e pelo Teorema 7.2 segue que $P(A) = 0$ ou 1.

□

7.4 Lema (Frank) Dada uma seqüência finita de variáveis aleatórias reais integráveis

$$Z_i : (\Omega, \mathcal{U}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \qquad (\forall\, i = 1, \ldots, n)$$

e $Z_n \geq 0$, então, para todo $\varepsilon > 0$,

$$P(\{\omega \in \Omega;\ \sup_{1 \leq i \leq n} Z_i(\omega) \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} . \sum_{i=1}^{n} \int_{B_i} Z_i(\omega) - Z_{i-1}(\omega) dP$$

onde $Z_0 = 0$ e $B_i = \{\omega \in \Omega;\ Z_0(\omega) < \varepsilon\} \cap \ldots \cap \{\omega \in \Omega;\ Z_{i-1}(\omega) < \varepsilon\}$, quando $i = 1, \ldots, n$.

Demonstração:

Sejam $A_i = \{\omega \in \Omega; Z_i(\omega) \geq \varepsilon\}, i = 0, \ldots, n$.[2] Note que $A_0 = \emptyset$, $B_i = A_0^c \cap \ldots \cap A_{i-1}^c$ e $B_i^c = A_0 \cup \ldots \cup A_{i-1}$ $(\forall\, i = 1, \ldots, n)$.

Seja $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Então $A = \{\omega \in \Omega; \sup_{1 \leq i \leq n} Z_i(\omega) \geq \varepsilon\}$. Para provar o Teorema, basta mostrarmos que:

$$1_A(\omega) \leq \frac{1}{\varepsilon} . \sum_{i=1}^{n} (Z_i(\omega) - Z_{i-1}(\omega)).1_{B_i}(\omega) \tag{1}$$

pois neste caso

$$\int_{\Omega} 1_A(\omega) dP \leq \frac{1}{\varepsilon} . \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\Omega} Z_i(\omega) - Z_{i-1}(\omega) \right) 1_{B_i}(\omega) dP$$

e

$$P(A) \leq \frac{1}{\varepsilon} . \sum_{i=1}^{n} \int_{B_i} Z_i(\omega) - Z_{i-1}(\omega) dP.$$

Provaremos, portanto, a desigualdade (1). Consideraremos dois casos:

1º **Caso:** $\omega \in A$

Existe um menor índice $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\omega \in A_j$. Logo, $\omega \notin A_1, \ldots, \omega \notin A_{j-1}$, $\omega \in B_j = B_1 \cap \ldots \cap B_j$ e $\omega \notin B_{j+1} \cup \ldots \cup B_n$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} (Z_i(\omega) - Z_{i-1}(\omega))\, 1_{B_i}(\omega) = \sum_{i=1}^{j} Z_i(\omega) - Z_{i-1}(\omega) = Z_j(\omega) \geq \varepsilon$$

Como $\omega \in A$, temos $1_A(\omega) = 1$, isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} (Z_i(\omega) - Z_{i-1}(\omega))\, 1_{B_i}(\omega) \geq \varepsilon 1_A(\omega),$$

e segue (1).

[2] É fácil ver que para $i = 1, \ldots, n$ os conjuntos A_i, B_i pertencem a $\mathcal{U}$ pela mensurabilidade de cada Z_j.

2º **Caso:** $\omega \notin A$.

Temos $\omega \in A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c$ e $\omega \in B_1 \cap \ldots \cap B_n$. Logo,

$$1_A(\omega) = 0 \leq \frac{1}{\varepsilon}.Z_n(\omega) = \frac{1}{\varepsilon}.\sum_{i=1}^{n}(Z_i(\omega) - Z_{i-1}(\omega)).1_{B_i}(\omega),$$

e segue (1).

□

7.5 Teorema (Hájek-Rényi) Dadas as variáveis aleatórias

$$X_i : (\Omega, \mathfrak{U}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \qquad (\forall\, i = 1, \ldots, n)$$

independentes, integráveis e reais e dados $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ números reais tais que $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \ldots \geq \gamma_n \geq 0$, sejam

$$T_i := (X_1 - E(X_1)) + \ldots + (X_i - E(X_i)) \qquad (\forall\, i = 1, \ldots, n).$$

Então, para quaisquer $m = 1, \ldots, n$ e $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\{\omega \in \Omega;\ \sup_{m \leq i \leq n} \gamma_i.|T_i(\omega)| \geq \varepsilon\}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}.\left(\gamma_m^2.\sum_{j=1}^{m} V(X_j) + \sum_{j=m+1}^{n} \gamma_j^2.V(X_j)\right)$$

Demonstração: Consideremos $Y_i = X_i - E(X_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e $S_i = \sum_{j=1}^{i} Y_j$.

Como $V(X_i - E(X_i)) = V(X_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$, basta que provemos

$$P(\{\omega \in \Omega;\ \sup_{m \leq i \leq n} \gamma_i.|S_i(\omega)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}.(\gamma_m^2 \sum_{j=1}^{m} V(Y_j) + \sum_{j=m+1}^{n} \gamma_j^2.V(Y_j))$$

Podemos assumir todas as variâncias finitas, pois no caso contrário o resultado é imediato. Temos ainda que $E(Y_i) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Fixemos m, $m \in \{1, \ldots, n\}$ e definamos

$$Z_i = \gamma_{m+i-1}^2.S_{m+i-1}^2 \qquad (\forall\, i = 1 \ldots, n - m + 1) \;\text{ e }\; Z_0 = 0$$

Notemos que as variáveis aleatórias $Y_1, \ldots, Y_n$ são independentes, pois $\sigma(Y_i) = \sigma(X_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Temos que cada Z_i é integrável. De fato,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega Z_i dP &= \int_\Omega \gamma_{m+i-1}^2 S_{m+i-1}^2 dP \\
&= \gamma_{m+i-1}^2 \int_\Omega (\sum_{j=1}^{m+i-1} Y_j)^2 dP \\
&= \gamma_{m+i-1}^2 \int_\Omega \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{m+i-1} Y_k.Y_l + \sum_{k=1}^{m+i-1} Y_k^2 dP \\
&= \gamma_{m+i-1}^2 \left[\sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{m+i-1} E(Y_k)E(Y_l) + \sum_{k=1}^{m+i-1} E(Y_k^2)\right] \\
&= \gamma_{m+i-1}^2 \sum_{k=1}^{m+i-1} E(Y_k^2) < \infty
\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade foi usado o Teorema 4.18 e na desigualdade final foi usado o fato da variância de cada Y_k ser finita.

Definamos

$$A_i = \{\omega \in \Omega: Z_i(\omega) \geq \varepsilon\}, \qquad (\forall\, i = 0, \dots, n-m-1)$$
$$B_i = A_0^c \cup \dots \cup A_{i-1}^c, \qquad (\forall\, i = 1, \dots, n-m+1)$$

Então

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} (Z_1(\omega) - Z_0(\omega))dP &= \int_{B_1} Z_1(\omega)dP \\
&= \gamma_m^2 \int_\Omega S_m^2(\omega)dP \\
&= \gamma_m^2 . V(S_m) \\
&= \gamma_m^2 . \sum_{j=1}^{m} V(Y_j) \qquad (2)
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a igualdade de Bienaymé.

Para $i = 2, \dots, n-m+1$, temos

$$\begin{aligned}
S_{m+i-1}^2 &= (S_{m+i-2} + Y_{m+i-1})^2 \\
&= S_{m+i-2}^2 + Y_{m+i-1}^2 + 2S_{m+i-2}.Y_{m+i-1}
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
&\int_{B_i} Z_i(\omega) - Z_{i-1}(\omega)dP = \int_{B_i} \gamma_{m+i-1}^2 . S_{m+i-1}^2 - \gamma_{m+i-2}^2 . S_{m+i-2}^2 dP \\
&= \int_{B_i} \gamma_{m+i-1}^2 . (S_{m+i-2}^2 + Y_{m+i-1}^2 + 2S_{m+i-2}.Y_{m+i-1}) - \gamma_{m+i-2}^2 . S_{m+i-2}^2 dP \\
&= \int_{B_i} (\gamma_{m+i-1}^2 - \gamma_{m+i-2}^2) S_{m+i-2}^2 dP + \int_{B_i} \gamma_{m+i-1}^2 Y_{m+i-1}^2 dP + \\
&\quad \int_{B_i} 2\gamma_{m+i-1}^2 S_{m+i-2}.Y_{m+i-1} dP \qquad (3)
\end{aligned}$$

Notemos que 1_{B_i} e S_{m+i-2} são $\sigma(Y_1, \dots, Y_{m+i-2})$-mensuráveis pois apenas $Y_1, \dots, Y_{m+i-2}$ são empregadas em suas definições. De fato

$$B_i = \{\omega \in \Omega: Z_0(\omega) < \varepsilon\} \cap \dots \cap \{\omega \in \Omega: Z_{i-1}(\omega) < \varepsilon\} \in \sigma(Y_1, \dots, Y_{m+i-2})$$

pois $Z_0 = 0$, $Z_1 = \gamma_m^2 . (Y_1 + \dots + Y_m)^2, \dots, Z_{i-1} = \gamma_{m+i-2}^2 (Y_1 + \dots + Y_{m+i-2})^2$.

É claro que Y_{m+i-1} é $\sigma(Y_{m+i-1})$-mensurável. Como $Y_1, \dots, Y_{m+i-1}$ são independentes, então $\sigma(Y_1), \dots, \sigma(Y_{m+i-1})$ são independentes, e pelo Corolário 4.5 temos $\sigma(Y_1, \dots, Y_{m+i-2})$ e $\sigma(Y_{m+i-1})$ independentes[3]. Como claramente $\sigma(1_{B_i} . S_{m+i-2}) \subset \sigma(Y_1, \dots, Y_{m+i-2})$, temos que $\sigma(1_{B_i} . S_{m+i-2})$ e $\sigma(Y_{m+i-1})$ são independentes. Portanto $1_{B_i} . S_{m+i-2}$ e Y_{m+i-1} são variáveis aleatórias independentes. Logo, pelo Teorema 4.18:

$$\int_\Omega (1_{B_i} S_{m+i-2}).Y_{m+i-1} dP = \left(\int_\Omega 1_{B_i} S_{m+i-2} dP\right) . \left(\int_\Omega Y_{m+i-1} dP\right) = 0$$

e portanto

$$\int_{B_i} S_{m+i-2}.Y_{m+i-1} dP = 0 \qquad (\forall\, i = 2, \dots, n-m+1) \qquad (4)$$

[3] A rigor, o Corolário 4.5 nos diz que $\sigma(\sigma(Y_1) \cup \dots \cup \sigma(Y_{m+i-2}))$ e $\sigma(Y_{m+i-1})$ são independentes. Entretanto, é fácil ver que $\sigma(\sigma(Y_1) \cup \dots \cup \sigma(Y_{m+i-2})) = \sigma(Y_1, \dots, Y_{m+i-2})$.

Então de (3) e (4) temos

$$
\begin{aligned}
&\int_{B_i} (Z_i(\omega) - Z_{i-1}(\omega))dP = \\
&= \int_{B_i} (\gamma_{m+i-1}^2 - \gamma_{m+i-2}^2) S_{m+i-2}^2 dP + \int_{B_i} \gamma_{m+i-1}^2 Y_{m+i-1}^2 dP \\
&\leq \int_{B_i} \gamma_{m+i-1}^2 Y_{m+i-1}^2 dP \\
&\leq \gamma_{m+i-1}^2 . V(Y_{m+i-1}) \qquad (\forall\, i = 2, \ldots, n-m+1) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

onde a primeira desigualdade se deve ao fato de $\gamma_i \geq \gamma_j$ se $i < j$.

Logo

$$
\begin{aligned}
P(\{\omega \in \Omega: \sup_{m\leq i\leq n} \gamma_i |S_i(\omega)| \geq \varepsilon\}) &= P(\{\omega \in \Omega: \sup_{1\leq i\leq n-m+1} \sqrt{Z_i(\omega)} \geq \varepsilon\}) \\
&= P(\{\omega \in \Omega: \sup_{1\leq i\leq n-m+1} Z_i(\omega) \geq \varepsilon^2\}) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \sum_{i=1}^{n-m+1} \int_{B_i} (Z_i(\omega) - Z_{i-1}(\omega))dP \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\int_{B_1} Z_1(\omega) - Z_0(\omega) dP + \sum_{i=2}^{n-m+1} \int_{B_i} Z_i(\omega) - Z_{i-1}(\omega) dP \right) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2} (\gamma_m^2 \cdot \sum_{j=1}^{m} V(Y_j) + \sum_{i=2}^{n-m+1} \gamma_{m+i-1}^2 . V(Y_{m+i-1})) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} (\gamma_m^2 \cdot \sum_{j=1}^{m} V(Y_j) + \sum_{j=m+1}^{n} \gamma_j^2 V(Y_j))
\end{aligned}
$$

onde a primeira e segunda desigualdades se devem ao Lema 7.4 e a (5), respectivamente. □

O Lema 7.6 será usado para a demonstrações do Teorema 7.7. O leitor perceberá que o Lema é enunciado num contexto um pouco mais geral do que será necessário no Teorema 7.7. pois no Lema a medida μ não é necessariamente medida de probabilidades.

7.6 Lema Se μ é medida finita em $(\Omega, \mathcal{U})$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de funções mensuráveis reais

$$f_n : (\Omega, \mathcal{U}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

então

$$\mu(\{\omega \in \Omega: \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = 0\}) = \mu(\Omega) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(\{\omega \in \Omega: \sup_{m\geq n} |f_m(\omega)| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad (\forall\, \varepsilon > 0) \qquad (6)$$

Demonstração: Definamos

$$A_n^\varepsilon := \{\omega \in \Omega: \sup_{m\geq n} |f_m(\omega)| \geq \varepsilon\} \qquad (\forall\, \varepsilon > 0)(\forall\, n \in \mathbb{N})$$

e

$$A := \{\omega \in \Omega: \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = 0\}$$

É claro que

$$
\begin{aligned}
&A_1^\varepsilon \supset A_2^\varepsilon \supset A_3^\varepsilon \supset \ldots && (7) \\
&A_n^{\varepsilon_1} \subset A_n^{\varepsilon_2} \subset A_n^{\varepsilon_3} \subset \ldots \quad , \text{ se } \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3 \geq \ldots && (8)
\end{aligned}
$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\omega \in A \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}) \text{ tal que } \sup_{n \geq N_\varepsilon} |f_n(\omega)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \omega \in \cap_{\varepsilon>0} \cup_{N=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega;\ \sup_{n\geq N} |f_n(\omega)| < \varepsilon\} \\ &\Leftrightarrow \quad \omega \in \cap_{\varepsilon>0} \cup_{N=1}^{\infty} (A_N^\varepsilon)^c.\end{aligned}$$

Portanto $A = \cap_{\varepsilon>0} \cup_{N=1}^{\infty} (A_N^\varepsilon)^c$, ou ainda, $A^c = \cup_{\varepsilon>0} \cap_{N=1}^{\infty} A_N^\varepsilon$. Então $\cap_{N=1}^{\infty} A_N^\varepsilon \subset A^c$ para todo $\varepsilon > 0$. Logo

$$\lim_{N\to\infty} \mu(A_N^\varepsilon) = \mu(\cap_{N=1}^{\infty} A_N^\varepsilon) \leq \mu(A^c) \qquad (\forall\, \varepsilon > 0) \tag{9}$$

onde na primeira igualdade foi usado (7).

Suponhamos $\mu(\{\omega \in \Omega; \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = 0\}) = \mu(\Omega)$. Então $\mu(A) = \mu(\Omega)$ e $\mu(A^c) = 0$ e de (9) segue

$$\lim_{N\to\infty} \mu(A_N^\varepsilon) = 0 \qquad (\forall\, \varepsilon > 0).$$

Reciprocamente, suponhamos que $\lim_{n\to\infty} \mu(\{\omega \in \Omega; \sup_{m\geq n} |f_m(\omega)| \geq \varepsilon\}) = 0$ para todo $\varepsilon > 0$. Então, em particular, $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n^{\frac{1}{k}}) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Temos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k_\varepsilon} < \varepsilon$ e portanto de (8) segue que $A_n^\varepsilon \subset A_n^{\frac{1}{k_\varepsilon}}$. Logo

$$A^c = \bigcup_{\varepsilon>0} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^\varepsilon \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\frac{1}{k}} \subset \bigcup_{\varepsilon>0} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^\varepsilon = A^c \tag{10}$$

Portanto de (8) e (9) temos $\cap_{n=1}^{\infty} A_n^{\frac{1}{k}} \uparrow_k A^c$,

$$\mu(A^c) = \lim_{k\to\infty} \mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n^{\frac{1}{k}}) = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mu(A_n^{\frac{1}{k}}) = 0,$$

e conseqüentemente $\mu(A) = \mu(\Omega)$. □

7.7 Teorema (Kolmogorov) Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de variáveis aleatórias

$$X_i : (\Omega, \mathcal{U}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \qquad (\forall\, i \in \mathbb{N})$$

independentes, integráveis, reais. Se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V(X_n)}{n^2} < \infty$, então$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obedece à Lei Forte dos Grandes Números.

Demonstração: Definamos

$$Y_j = \frac{1}{j} \cdot \sum_{k=1}^{j} (X_k - E(X_k)),\ V_j = V(X_j) \text{ e } \gamma_j = \frac{1}{j}, \qquad (\forall\, j \in \mathbb{N}).$$

Pelo Teorema 7.5 (aplicado às variáveis aleatórias X_j, e às constantes γ_j) temos, para cada $m \leq n$ e para todo $\varepsilon > 0$:

$$P(\{\omega \in \Omega;\ \sup_{m\leq i\leq n} |Y_i(\omega)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{1}{m^2} \cdot \sum_{j=1}^{m} V_j + \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{j^2} \cdot V_j \right).$$

Temos que $\{\omega \in \Omega; \sup_{m\leq i\leq n} |Y_i(\omega)| \geq \varepsilon\} \uparrow_n \{\omega \in \Omega; \sup_{i\geq m} |Y_i(\omega)| \geq \varepsilon\}$. Logo

$$\begin{aligned} P(\{\omega \in \Omega; \sup_{i\geq m} |Y_i(\omega)| \geq \varepsilon\}) &= \lim_{n\to\infty} P(\{\omega \in \Omega; \sup_{m\leq i\leq n} |Y_i(\omega)| \geq \varepsilon\}) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varepsilon^2}(\frac{1}{m^2}.\sum_{j=1}^{m} V_j + \sum_{j=m+1}^{n} \frac{V_j}{j^2}) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}(\frac{1}{m^2}.\sum_{j=1}^{m} V_j + \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{V_j}{j^2}) \end{aligned} \tag{11}$$

Para todo $M \leq m$ temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{m^2}.\sum_{j=1}^{m} V_j + \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{V_j}{j^2}\right) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{m^2}.\sum_{j=1}^{M} V_j + \sum_{j=M+1}^{m} \frac{V_j}{j^2} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{V_j}{j^2}\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{m^2}.\sum_{j=1}^{M} V_j + \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{V_j}{j^2}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

De (11) e (12) temos

$$P(\{\omega \in \Omega; \sup_{i\geq m} |Y_i(\omega)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}(\frac{1}{m^2}.\sum_{j=1}^{M} V_j + \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{V_j}{j^2}) \qquad (\forall\, M \leq m)(\forall\, \varepsilon > 0) \tag{13}$$

Como $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m^2}.\sum_{j=1}^{M} V_j = 0$[4] e como por hipótese $\lim_{M\to\infty} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{V_j}{j^2} = 0$, temos

$$\lim_{m\to\infty} P(\{\omega \in \Omega; \sup_{i\geq m} |Y_i(\omega)| \geq \varepsilon\}) \leq 0 \qquad (\forall\, \varepsilon > 0) \tag{14}$$

se fizermos respectivamente $m \to \infty$ e $M \to \infty$ em (13). Como P é uma medida positiva temos de (14):

$$\lim_{m\to\infty} P(\{\omega \in \Omega; \sup_{i\geq m} |Y_i(\omega)| \geq \varepsilon\}) = 0 \qquad (\forall\, \varepsilon > 0) \tag{15}$$

Então pelo Lema 7.6, (15) é equivalente a

$$P(\{\omega \in \Omega; \lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) = 0\}) = 1$$

isto é,

$$P(\{\omega \in \Omega; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k(\omega) - E(X_k)) = 0\}) = 1.$$

□

7.8 Teorema (Kolmogorov) Toda seqüência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$X_n : (\Omega, \mathfrak{U}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

integráveis, independentes, reais e identicamente distribuídas obedece à Lei Forte dos Grandes Números.

[4]Com efeito, como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n}{n^2} < \infty$ e como V_n é sempre não negativa, temos $V_n < \infty$ para todo n, e portanto $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m^2}.\sum_{j=1}^{M} V_j = 0$.

Demonstração: Seja μ a distribuição dos X_n, isto é, $P_{X_n} = \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definamos

$$I_n :=]-n, n[, \qquad H_n := \{x \in \mathbb{R}: n-1 \le |x| < n\},$$

$$\begin{array}{rccc} f_n: & (\mathbb{R}, \mathcal{B}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \\ & x & \mapsto & x.1_{I_n}(x) \end{array}$$

Notemos que as f_n são mensuráveis. Logo, pelo Teorema 4.15 temos que $(Y_n := f_n \circ X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência independente de variáveis aleatórias. Temos que cada Y_n é quadrado integrável, pois

$$\begin{aligned} \int_\Omega Y_n^2(\omega)dP &= \int_\Omega X_n^2(\omega)(1_{I_n}(X_n(\omega)))^2 dP \\ &= \int_{A_n} X_n^2(\omega)dP \\ &\le \int_{A_n} n^2 dP \\ &\le n^2.P(A_n) < \infty \end{aligned}$$

onde $A_n = \{\omega \in \Omega: X_n(\omega) \in I_n\}$.

Como cada Y_n é quadrado integrável, temos pelo Lema 3.10 que cada Y_n é integrável. Temos ainda

$$\begin{aligned} V(Y_n) &\le E(Y_n^2) \\ &= E(f_n^2 \circ X_n) \\ &= \int_\Omega f_n^2 \circ X_n dP \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_n^2 d\mu \\ &= \int_{I_n} x^2 d\mu \\ &= \sum_{j=1}^{n} \int_{H_j} x^2 d\mu, \end{aligned} \tag{16}$$

onde na terceira igualdade foi usado o Corolário 3.6 e na última igualdade usamos o fato de $I_n = \cup_{j=1}^n H_j$.

De (16):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V(Y_n)}{n^2} &\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} \int_{H_j} x^2 d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^2} \int_{H_j} x^2 d\mu \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{H_j} x^2 d\mu \right) \end{aligned} \tag{17}$$

Mas

$$\sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{j^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(j+n)(j+n+1)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{j^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{j+n} - \frac{1}{j+n+1}\right) \\
&= \frac{1}{j^2} + \frac{1}{j} \leq \frac{2}{j}. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

De (17) e (18) temos:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V(Y_n)}{n^2} &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{j} \int_{H_j} x^2 d\mu \\
&= 2\sum_{j=1}^{\infty} \int_{H_j} \frac{x^2}{j} d\mu \\
&= 2\sum_{j=1}^{\infty} \int_{H_j} |x||\frac{x}{j}| d\mu \\
&\leq 2\sum_{j=1}^{\infty} \int_{H_j} |x|.1 d\mu \\
&= 2\int_{\mathbb{R}} |x| d\mu \\
&= 2.E(|X_n|) < \infty,
\end{aligned}
$$

onde na segunda desigualdade foi usado que $|x| < j$ em H_j.

Logo, pelo Teorema 7.7, $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ obedece à Lei Forte dos Grandes Números. Então, existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $P(A) = 1$ e

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(Y_i(\omega) - E(Y_i)) = 0 \qquad (\forall\ \omega \in A).
$$

Seja $B = \{\omega \in \Omega: X_n(\omega) \neq Y_n(\omega)$ para no máximo um número finito de índices $n\}$.

AFIRMAÇÃO 1 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i(\omega) - E(Y_i)) = 0 \qquad (\forall\ \omega \in A \cap B)$

Demonstração Seja $\omega_0 \in A \cap B$, e B_{ω_0} o conjunto finito de todos os índices i tais que $X_i(\omega_0) \neq Y_i(\omega_0)$. Então,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i(\omega_0) - E(Y_i)) = \qquad (19) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{\substack{i=1 \\ i\notin B_{\omega_0}}}^{n}(X_i(\omega_0) - E(Y_i)) + \frac{1}{n}\sum_{\substack{i=1 \\ i\in B_{\omega_0}}}^{n}(X_i(\omega_0) - E(Y_i))\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{\substack{i=1 \\ i\notin B_{\omega_0}}}^{n}(Y_i(\omega_0) - E(Y_i)) + \frac{1}{n}\sum_{\substack{i=1 \\ i\in B_{\omega_0}}}^{n}(X_i(\omega_0) - E(Y_i))\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\substack{i=1 \\ i\notin B_{\omega_0}}}^{n}(Y_i(\omega_0) - E(Y_i)) \qquad (20)
\end{aligned}
$$

pois, como B_{ω_0} é finito, temos $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\substack{i=1 \\ i\notin B_{\omega_0}}}^{n}(X_i(\omega_0) - E(Y_i)) = 0$. Ainda pelo fato de B_{ω_0} ser finito, temos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\sum_{\substack{i=1\\ i\in B_{\omega_C}}}^{n}(Y_i(\omega_0)-E(Y_i))=0 \tag{21}$$

Então, de (20) e (21) segue

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(X_i(\omega_0)-E(Y_i)) = \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\sum_{\substack{i=1\\ i\notin B_{\omega_0}}}^{n}(Y_i(\omega_0)-E(Y_i)) + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\sum_{\substack{i=1\\ i\in B_{\omega_0}}}^{n}(Y_i(\omega_0)-E(Y_i)) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}(Y_i(\omega_0)-E(Y_i)) = 0,
\end{aligned}$$

o que demonstra a afirmação. □

Sejam $C_n = \{\omega\in\Omega; X_n(\omega)\neq Y_n(\omega)\}$ e $C=\limsup C_n = \{\omega\in\Omega; \omega\in C_n$ para infinitos índices $n\}$. Notemos que $B=\Omega\setminus C$.

AFIRMAÇÃO 2 $P(C)=0$ e $P(B)=1$.

Demonstração Basta mostrarmos que $P(C)=0$. Para isso, pelo Lema de Borel Cantelli, basta mostrarmos que $\sum_{n=1}^{\infty}P(C_n)$ converge.

Notemos que $X_n(\omega)=Y_n(\omega)$ se e somente se $X_n(\omega)\in I_n$. Com efeito, é claro que, se $X_n(\omega)\in I_n$, então $X_n(\omega)=Y_n(\omega)$, pois $Y_n(\omega)=(f_n\circ X_n)(\omega)$, com $f_n(\omega)=\omega.1_{I_n}(\omega)$. Reciprocamente, se fosse $X_n(\omega)=Y_n(\omega)$ e $X_n(\omega)\notin I_n$ então teríamos $|X_n(\omega)|>n$ e $Y_n(\omega)=0$ (absurdo).

Temos

$$\begin{aligned}
C_n &= \{\omega\in\Omega; X_n(\omega)\neq Y_n(\omega)\}\\
&= \{\omega\in\Omega; X_n(\omega)\notin I_n\}\\
&= \{\omega\in\Omega; |X_n(\omega)|\geq n\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
P(C_n) &= P(X_n^{-1}((-\infty,-n]\cup[n,+\infty)))\\
&= \mu((-\infty,-n]\cup[n,+\infty))\\
&= \sum_{j=n+1}^{\infty}\mu(H_j).
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}P(C_n) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty}\mu(H_j)\\
&= \sum_{j=2}^{\infty}(j-1)\mu(H_j)\\
&= \sum_{j=2}^{\infty}\int_{H_j}(j-1)d\mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le \sum_{j=2}^{\infty} \int_{H_j} |x| d\mu \\
&\le \int_{\mathbf{R}} |x| d\mu \\
&= E(|X_n|) < \infty
\end{aligned}$$

onde na primeira desigualdade foi usado que $|x| \geq j-1$ em H_j.

Portanto $\sum_{n=1}^{\infty} P(C_n)$ converge e, pelo Lema de Borel Cantelli, $P(C) = 0$, e então $P(B) = 1$, o que finaliza a demonstração da afirmação 2. □

Como $P(A) = 1$ e $P(B) = 1$, temos $P(A \cap B) = 1$ e, da afirmação 1, concluímos que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i(\omega) - E(Y_i)) = 0 \qquad (P - qtp) \tag{22}$$

Temos $E(X_i) = \int_\Omega X_i dP = \int_{\mathbf{R}} x d\mu$ ($\forall\, i \in \mathbb{N}$). Seja $\alpha = E(X_i)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \int_{\mathbf{R}} x d\mu \\
&= \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbf{R}} f_n d\mu \\
&= \lim_{n \to \infty} E_\mu(f_n) \\
&= \lim_{n \to \infty} E_P(f_n \circ X_n) \\
&= \lim_{n \to \infty} E_P(Y_n),
\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade é conseqüência do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue pois $|f_n(x)| \leq |x|$, $|x|$ é μ-integrável ($\int_{\mathbf{R}} |x| d\mu = E(|X_n|) < \infty$) e $f_n(x) \to x$.

Portanto

$$\lim_{n \to \infty} E(Y_n) = \alpha, \qquad \text{ou ainda} \qquad \lim_{n \to \infty} (E(Y_n) - \alpha) = 0. \tag{23}$$

AFIRMAÇÃO 3 Se $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma seqüência de números reais tais que $\lim_{n \to \infty} x_j = 0$, então $\lim_{j \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j = 0$.

Demonstração da afirmação: Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ implica $|x_n| < \varepsilon$.
Logo,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \right| &\leq \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j| + \sum_{j=N+1}^{n} |x_j| \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} |x_j| + \frac{1}{n} \sum_{j=N+1}^{n} |x_j| \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} |x_j| + \frac{1}{n}(n-N)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Mas, existe $N_1 > N$, $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{N} |x_j| < \varepsilon$ para todo $n > N_1$. Então

$$
\begin{aligned}
\left| \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{j=1}^{n} x_j \right| &< \varepsilon + \frac{1}{n}(n-N)\varepsilon \\
&\leq \varepsilon + \frac{1}{n} n\varepsilon \\
&= 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

para todo $n > N_1$. Portanto $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = 0$, e está provada a afirmação 3.

De (23) e da afirmação 3 temos que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(E(Y_i) - \alpha) = 0$. Então,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i(\omega) - E(X_i)) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i(\omega) - E(Y_i) + E(Y_i) - E(X_i)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i(\omega) - E(Y_i)) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(E(Y_i) - \alpha)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i(\omega) - E(Y_i)) = 0 \qquad (P - qtp),
\end{aligned}
$$

onde a última igualdade $(P - qtp)$ vem de (22). □

Capítulo 8

Números Normais

8.1 Definições e Comentários Neste capítulo g sempre será um número natural maior que 1. Seja ω um número real não negativo [1]. Definimos $[\omega]$ como o maior natural que é menor ou igual a ω. Sabemos que todo número real não negativo ω pode ser expandido sob a forma:

$$\omega = [\omega] + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.g^{-n}$$

onde $0 \leq a_n \leq g-1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tal expansão pode não ser única, mas no máximo pode ser feita em dois modos distintos. Sabemos ainda que, se exigirmos $a_n < g-1$ para uma infinidade de índices n, temos sempre a unicidade da expansão . Quando tal exigência for satisfeita, diremos que tal expansão é a *expansão g-ádica principal de* ω. Quando não houver dúvidas quanto ao valor de g, diremos apenas que tal expansão é a *expansão principal de* ω. Se ω estiver escrito com sua espansão g-ádica principal, escreveremos $\omega = \omega_g^{(p)}$. Se nada for mencionado, denotaremos a expansão g-ádica de ω por $\omega = \omega_g$.

Diremos que $(b_i)_{i=1}^k$, ou $b_1, \ldots, b_k$, com $k \in \mathbb{N}$ fixo, e $b_i \in \{0, \ldots, g-1\}$ para todo $i = 1, \ldots, k$, é uma ***seqüência finita de algarismos na escala*** g. Quando não houver possibilidade de dúvidas diremos apenas ***seqüência finita de algarismos***, abreviada por $(SFA)_g$.

Seja $(b_i)_{i=1}^k$ uma $(SFA)_g$. Se ω puder ser escrito como

$$\omega = [\omega] + \sum_{j=1}^{\infty} a_j.g^{-j}, \quad 0 \leq a_j \leq g-1 \quad (\forall\, j \in \mathbb{N}),$$

com $a_{j_n} = b_1, a_{j_n+1} = b_2, \ldots, a_{j_n+k-1} = b_k$ para uma infinidade de índices j_n, diremos que *tal* $(SFA)_g$ *ocorre em infinitas posições desta expansão* e escreveremos $(b_i)_{i=1}^k \in \omega_g$.

Se ω for tal que

$$\omega_g^{(p)} = [\omega] + \sum_{j=1}^{\infty} a_j.g^{-j},$$

com $a_{j_n} = b_1, a_{j_n+1} = b_2, \ldots, a_{j_n+k-1} = b_k$ para uma infinidade de índices j_n, diremos que *tal* $(SFA)_g$ *ocorre em infinitas posições da expansão principal de* ω, e escreveremos $(b_i)_{i=1}^k \in \omega_g^{(p)}$.

O leitor deve notar que segundo nossas definições:

$$(b_i)_{i=1}^k \in \omega_g^{(p)} \Rightarrow (b_i)_{i=1}^k \in \omega_g,$$

mas a implicação inversa não vale em geral. Por exemplo:

[1] Neste capítulo muitas vezes nos restringiremos aos números reais não negativos. e às vezes até mesmo ao intervalo $[0, 1]$. Entretanto, como ficará claro ao leitor, tudo poderá ser estendido a toda a reta.

Sejam $\omega = 1$, $(b_i)_{i=1}^3 = (9,9,9)$, e $g = 10$.
Como $\omega = 1 = 0,99999\ldots$, temos $(b_i)_{i=1}^3 \in \omega_{10}$ e $(b_i)_{i=1}^3 \notin \omega_{10}^{(p)}$, pois $\omega_{10}^{(p)} = 1,000\ldots$.
Seja

$$G^g = \{\omega \in [0,1]; (b_i)_{i=1}^k \in \omega_g^{(p)}, k \in \mathbb{N}, b_i \in \{0,\ldots,g-1\}\}$$

isto é, G^g é o conjunto de todos os números reais em $[0,1]$ tais que qualquer $(SFA)_g$ ocorre em infinitas posições de sua expansão g-ádica principal.

Notemos que $G^g \neq \emptyset$ pois, por exemplo, para $g = 3$,

$$\omega_3^{(p)} = 0,0.1.2.00.01.02.10.11.12.20.21.22.000.001.002.010\ldots \in G^g$$

onde os pontos só foram colocados para facilitar a compreensão da lei de formação do número.

Algumas perguntas naturais são:

i) G^g é Boreliano?

ii) Qual a medida de Lebesgue de G^g?

Essas perguntas são respondidas facilmente em livros de Teoria de Números (veja [14]), mas achamos interessante resolvê-las usando argumentos de probabilidade. Além disso, é interessante olhar tais resultados sob um ponto de vista probabilístico, já que posteriormente refinaremos tais resultados com a noção de números normais, onde usaremos a teoria envolvendo a Lei Forte dos Grandes Números.

Seja $(\Omega_g, \mathcal{A}_g, P_g)$ espaço de probabilidades, com $\Omega_g = \{0,\ldots,g-1\}$, $\mathcal{A}_g = \mathcal{P}(\Omega_g) = 2^{\Omega_g}$ e $P_g(A) = \frac{\#A}{g}$. Este é o mesmo espaço de probabilidades definido no Capítulo 6, só que agora estamos usando as notações indexadas por g para facilitar notações futuras. Definamos também $\Omega_g^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{D}_g$ e μ_g da mesma forma que no Capítulo 6 (agora com a notação indexada por g). Definamos ainda a variável aleatória [2]

$$\begin{array}{rccc} \Psi_g: & (\Omega_g^{\mathbb{N}}, \mathcal{D}_g, \mu_g) & \longrightarrow & ([0,1], \mathcal{B}) \\ & (x_j)_{j=1}^{\infty} & \mapsto & \omega_g = \sum_{j=1}^{\infty} x_j . g^{-j} \end{array}$$

Para cada $(SFA)_g$, $(b_i)_{i=1}^k$, $b_i \in \{0,\ldots,g-1\}$ $(\forall\, i \in \{1,\ldots,k\})$, e para todo $j \in \mathbb{N}$ definimos

$$A^g_{(j)b_1\ldots b_k} := \{\omega \in \Omega_g^{\mathbb{N}}; \omega = (\omega_n)_{n=1}^{\infty}, \omega_j = b_1, \ldots, \omega_{j+k-1} = b_k\}.$$

Notemos que

$$A^g_{(j)b_1\ldots b_k} = (\Omega_g \times \ldots \Omega_g \times \overbrace{\{b_1\}}^{j-\acute{e}sima} \times \ldots \times \{b_k\} \times \Omega_g \times \ldots) \in \mathcal{D}_g$$

É claro que

$$A^g_{(2k)b_1\ldots b_k}, A^g_{(4k)b_1\ldots b_k}, A^g_{(6k)b_1\ldots b_k}, \ldots$$

são independentes e

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_g(A^g_{(2ik)b_1\ldots b_k}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{g^k} = \infty.$$

Logo, pelo Corolário 4.12 do Lema de Borel-Cantelli, temos que

$$\mu_g(\limsup_{i\to\infty} A^g_{(i)b_1\ldots b_k}) = 1. \tag{1}$$

Mas

$$\limsup_{i\to\infty} A^g_{(i)b_1\ldots b_k} = \{\omega \in \Omega^{\mathbb{N}}; \omega \in A^g_{(i)b_1\ldots b_k} \text{ para infinitos índices } i\}.$$

[2] Em todo este capítulo, estas notações e definições serão mantidas.

Usaremos a notação $A^g_{b_1\ldots b_k}$ para denotar $\limsup_{i\to\infty} A^g_{(i)b_1\ldots b_k}$. Seja

$$\bar{B}^g_{b_1\ldots b_k} := \{\omega \in [0,1]; (b_i)_{i=1}^k \in \omega_g\}. \tag{2}$$

É claro que

$$\Psi_g(A^g_{b_1\ldots b_k}) = \bar{B}^g_{b_1\ldots b_k} \tag{3}$$

Logo,

$$\bar{B}^g_{b_1\ldots b_k} \in \mathcal{B}$$

pois $\Psi_g(\mathcal{D}_g) = \mathcal{B}$ (Capítulo 6). Além disso, ainda pelos resultados do Capítulo 6, temos:

$$\lambda(\bar{B}^g_{b_1\ldots b_k}) = \mu_g(A^g_{b_1\ldots b_k}) \tag{4}$$

e portanto, de (4) e (1), temos

$$\lambda(\bar{B}^g_{b_1\ldots b_k}) = 1 \tag{5}$$

Seja

$$B^g_{b_1\ldots b_k} = \{\omega \in [0,1]; (b_i)_{i=1}^k \in \omega_g^{(p)}\}. \tag{6}$$

Temos

$$B^g_{b_1\ldots b_k} \subset \bar{B}^g_{b_1\ldots b_k} \subset B^g_{b_1\ldots b_k} \cup D^g \tag{7}$$

onde D^g é o conjunto dos números em $[0,1]$ que têm duas decomposições g-ádicas.

Vimos no Capítulo 6 que D^g é enumerável (naquela ocasião usamos a notação D e fizemos as contas para $g = 10$. Entretanto, é fácil ver que as contas para outros valores de g são rigorosamente análogas). Portanto D^g é Boreliano e tem medida de Lebesgue nula. Portanto, de (5) e (7) temos

$$\lambda(B^g_{b_1\ldots b_k}) = \lambda(\bar{B}^g_{b_1\ldots b_k}) = 1 \tag{8}$$

Agora, notemos que

$$G^g = \cap_{k=1}^{\infty} \cap_{b_1,\ldots,b_k \in \Omega_g} B^g_{b_1\ldots b_k} \tag{9}$$

e G^g é Boreliano. Logo, por (9) e (8) e pelo Lema 4.10, temos

$$\lambda(G^g) = 1 \tag{10}$$

Demonstramos assim a seguinte proposição:

8.2 Proposição G^g é Boreliano e quase todos os números em $[0,1]$ (no sentido da medida de Lebesgue) estão em G^g.

Podemos fortalecer um pouco a Proposição 8.2. Seja

$$G = \cap_{g=2}^{\infty} G^g \tag{11}$$

isto é, G é o conjunto dos números em $[0,1]$ tais que dado $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, qualquer $(SFA)_g$ ocorre em infinitas posições de sua expansão g-ádica principal.

Temos de (11) , (10) e do Lema 4.10 que $\lambda(G) = 1$. Portanto vale a seguinte proposição:

8.3 Proposição G é Boreliano e quase todos os números em $[0,1]$ (no sentido da medida de Lebesgue) estão em G.

Devemos perceber que se estendermos naturalmente as definições de G e G^g para toda a reta, então as Proposições 8.2 e 8.3 terão sua validade em toda a reta $\mathbb{R}$ e não apenas em $[0,1]$. De fato,

$$\mathbb{R} = \cup_{n=-\infty}^{\infty} [n-1, n] \tag{12}$$

e se definirmos para cada $n \in \mathbb{N}$ as funções $\Psi_{g,n}$ abaixo

- Se $n \geq 1$

$$\begin{array}{rccc} \Psi_{g,n}: & (\Omega_g^{\mathbb{N}}, \mathcal{D}_g, \mu_g) & \longrightarrow & ([n-1, n], \mathcal{B}) \\ & (\omega_j)_{j=1}^{\infty} & \mapsto & (n-1) + \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j . g^{-j} \end{array}$$

- Se $n < 1$

$$\begin{array}{rccc} \Psi_{g,n}: & (\Omega_g^{\mathbb{N}}, \mathcal{D}_g, \mu_g) & \longrightarrow & ([n-1, n], \mathcal{B}) \\ & (\omega_j)_{j=1}^{\infty} & \mapsto & n - \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j . g^{-j} \end{array}$$

obteremos os mesmos resultados para cada $[n-1, n]$. Por (12), concluímos que os resultados serão válidos em $\mathbb{R}$. Por isso, o fato de trabalhar em $[0, 1]$ não restringe nossos resultados.

Apesar de quase todos os números em $[0, 1]$ pertencerem a G não nos parece fácil dar algum exemplo explícito de um número que esteja em tal conjunto. Entretanto, dado g, podemos construir uma família relativamente "grande" de exemplos de números em G^g. Com efeito, observe a seguinte proposição:

8.4 Proposição Seja $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ fixo. Seja $f :]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ estritamente crescente a partir de algum ponto, contínua, com primeira derivada contínua, tal que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$. Além disso, supoê-se que dado $M > 0$, existe $x_M \in]0, +\infty[$ tal que

$$x > x_M \Rightarrow \frac{f(x)}{f'(x+\theta)} > M \qquad (\forall\, \theta \in [0, 1]).^3$$

Então[4] $\omega_g = 0, [f(1)_g][f(2)_g] \ldots$ é tal que $\omega_g \in G^g$.

Demonstração: Seja $x_1 \in]0, +\infty[$ tal que f é estritamente crescente para todo $x > x_1$. Seja $b_1 \ldots b_k$ uma $(SFA)_g$ arbitrária. Sem perda de generalidade, podemos supor $b_1 \neq 0$. Tome $M = g^{k+1}$.

Então, existe x_M, $x_M > x_1$ tal que

$$x > x_M \Rightarrow \frac{f(x)}{f'(x+\theta)} > M \qquad (\forall\, \theta \in [0, 1])$$

Logo

$$f(x) > g^{k+1} . f'(x+\theta) \qquad (\forall\, x > x_M)(\forall\, \theta \in [0, 1]) \tag{13}$$

Seja $b_1 \ldots b_k \overbrace{00\ldots0}^{r\ zeros}$ com zeros suficientes para que $b_1 \ldots b_k \overbrace{00\ldots0}^{r\ zeros} > f(x_M)$. Seja $x_3 > x_M$ tal que $f(x_3) = b_1 \ldots b_k \overbrace{00\ldots0}^{r\ zeros} = b_1 . g^{r+k-1} + b_2 . g^{r+k-2} + \ldots + b_k . g^r$. Se $x_3 \in \mathbb{N}$, a $(SFA)_g$ $b_1 \ldots b_k$ aparece em $[f(x_3)_g]$ e portanto ocorre em pelo menos uma posição de ω_g. Se $x_3 \notin \mathbb{N}$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta_1 \in [0, 1]$ tal que

$$f(x_3 + 1) = f(x_3) + f'(x_3 + \theta_1) \tag{14}$$

Logo de (13) e (14):

$$\begin{aligned} f(x_3 + 1) &< f(x_3) + \frac{f(x_3)}{g^{k+1}} \\ &= (b_1 . g^{r+k-1} + \ldots + b_k . g^r) + (b_1 . g^{r-2} + \ldots + b_k . g^{r-k-1}) \end{aligned}$$

Seja l o inteiro tal que $x_3 < l < x_3 + 1$. Então $f(x_3) < f(l) < f(x_3 + 1)$, ou ainda,

$$b_1 . g^{r+k-1} + \ldots + b_k . g^r < f(l) < (b_1 . g^{r+k-1} + \ldots + b_k . g^r) + (b_1 . g^{r-2} + \ldots + b_k . g^{r-k-1})$$

[3] É impotante perceber que o valor x_M depende exclusivamente de M, e não depende de θ.

[4] A notação $[\alpha_g]$, onde $\alpha \in]0, +\infty[$ designará o menor inteiro (escrito na base g) menor ou igual a α.

Logo

$$f(l) = b_1.g^{r+k-1} + \ldots + b_k.g^r + \sum_{j=2}^{\infty} c_j.g^{r-j}, \qquad c_j \in \{0, 1, \ldots, g-1\}.$$

Portanto, a $(SFA)_g$ $b_1 \ldots b_k$ aparece em $[f(l)_g]$, isto é, a $(SFA)_g$ dada ocorre em pelo menos uma posição de ω_g. Logo, qualquer $(SFA)_g$ dada ocorre em pelo menos uma posição de ω_g.

Entretanto, nós queremos mostrar que qualquer $(SFA)_g$ ocorre em infinitas posições de ω_g. A seguinte afirmação conclui a demonstração.

AFIRMAÇÃO 1 Seja $\omega \in]0,1[$. Se qualquer $(SFA)_g$ ocorre em pelo menos uma posição de $\omega_g^{(p)}$ então qualquer $(SFA)_g$ ocorre em infinitas posições de $\omega_g^{(p)}$, isto é, $\omega \in G^g$.

Com efeito, sejam $\omega_g^{(p)} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j.g^{-j}$ e $(d_i)_{i=1}^{k}$ uma $(SFA)_g$. Então existe j_1 tal que

$$a_{j_1} = d_1, \ldots, a_{j_1+k-1} = d_k$$

Consideremos a nova $(SFA)_g$ $(c_i)_{i=1}^{j_1+k}$ dada por

$$c_1 = 0, \ldots, c_{j_1} = 0, c_{j_1+1} = d_1, \ldots, c_{j_1+k} = d_k$$

Então, existe $\bar{j}_2$ tal que

$$a_{\bar{j}_2} = c_1, \ldots, a_{\bar{j}_2+j_1+k-1} = c_{j_1+k}$$

Em particular, é claro que existe $j_2 > j_1$ (a saber $j_2 = \bar{j}_2 + j_1$) tal que

$$a_{j_2} = d_1, \ldots, a_{j_2+k-1} = d_k.$$

Procedendo dessa forma encontramos uma infinidade de índices j_n com $j_1 < j_2 < j_3 < \ldots$ tais que $a_{j_n} = d_1, \ldots, a_{j_n+k-1} = d_k$, e assim está demonstrada a afirmação. □

Observação: Notemos que nas condições da proposição, o número ω_g sempre está em sua decomposição g-ádica principal pois como ele tem qualquer $(SFA)_g$ em sua expansão, concluímos que ele não pode ser escrito como $\omega_g = \sum_{j=1}^{n} a_j.g^{-j}$, $a_j \in \{0, \ldots, g-1\}$, isto é, ele não tem duas expansões g-ádicas possíveis.

Seguem dois corolários da Proposição 8.4, cujas demonstrações são simples e serão omitidas.

8.5 Corolário Sejam $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e $p :]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ um polinômio de grau maior que 0. Então

$$\omega_g = 0, [p(1)_g][p(2)_g] \ldots$$

tem qualquer $(SFA)_g$ em infinitas posições de sua expansão g-ádica, isto é, $\omega_g \in G^g$.

Por exemplo, se $g = 10$ e $p(x) = x^2 + \frac{1}{2}x$, então $\omega_{10} = 0,15101827\ldots$ pertence a G^{10}.

8.6 Corolário Sejam $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $f :]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ definida por $f(x) = a^{\sqrt{x}}$. Então

$$\omega_g = 0, [f(1)_g][f(2)_g] \ldots$$

tem qualquer $(SFA)_g$ em infinitas posições de sua expansão g-ádica, isto é, $\omega_g \in G^g$.

8.7 Definição Um número real ω não negativo é ***simplesmente normal na base g*** se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_{n,g}^{b}(\omega) = \frac{1}{g} \qquad (\forall\, b \in \{0, 1, \ldots, g-1\})$$

onde $\omega = \omega_g^{(p)} = [\omega] + \sum_{j=1}^{\infty} a_j.g^{-j}$ e $S_{n,g}^{b}(\omega)$ designa a quantidade de índices i, com $1 \leq i \leq n$ tais que $a_i = b$.

Um número real negativo ω é ***simplesmente normal na base g*** se $|\omega|$ o for.

8.8 Exemplo $\omega = \omega_{10} = 0,012345678901234567890123456789\ldots$ é simplesmente normal na base 10. Note que

$$\omega = \omega_{10^{10}} = 0,(123456789)(123456789)\ldots$$

não é simplesmente normal na base 10^{10}. Mais ainda, $\omega_{10^{10}} \notin G^{10^{10}}$.

8.9 Definição Um número real não negativo ω é *normal na base g* se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_{n,g}^{b_1\ldots b_k}(\omega) = \frac{1}{g^k}$$

para todo $k \geq 1$ e para todo $b_i \in \{0,\ldots,g-1\}$, $i = 1,\ldots,k$, onde $\omega = \omega_g^{(p)} = [\omega] + \sum_{j=1}^{\infty} a_j g^{-j}$ e $S_{n,g}^{b_1\ldots b_k}(\omega)$ designa a quantidade de índices i, $1 \leq i \leq n-k+1$ para os quais $a_{i+j-1} = b_j$ para todo j, $1 \leq j \leq k$.

Um número real negativo é *normal na base g* se $|\omega|$ o for. É importante entender a interpretação da definição de número normal. Um número normal na base g é um número que não "privilegia" nenhuma seqüência de algarismos (na base g) em especial. A idéia é compreender que há g^k possíveis seqüências de k algarismos, e um número normal na base g é aquele cuja freqüência de cada seqüência com k algarismos em sua expansão g-ádica principal é g^{-k}.

8.10 Exemplos e Comentários

- Em [7] está demonstrado que

  $$\omega_{10} = 0,12345678910111213\ldots$$

  é normal na base 10.

- Em [8] prova-se que

  $$\omega'_{10} = 0,1235711131719\ldots$$

  é normal na base 10, isto é, o número cuja decimal é formada pela justaposição dos números primos é normal na base 10.

- Em [9] há uma demonstração de que se $f :]0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$ é um polinômio de grau maior que 1, com coeficientes inteiros, então

  $$f_{10} = 0, f(1)f(2)\ldots$$

  é normal na base 10. A título de informação, todo número f_{10} definido acima é transcendente ([10]).

- Não se sabe, por exemplo, se $\pi, e, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ são normais em alguma base g.Não nos consta que se saiba sequer se algum desses números está em G^g para algum g.[5] Parece muito difícil (até mesmo impossível) verificar normalidade de números que não sejam construídos *ad hoc*.

8.11 Definição Um número real é ***absolutamente normal*** se ele é normal na base g para todo $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

8.12 Observação O leitor deve perceber que as definições 8.9 e 8.11 intuitivamente "refinam" as definições de G^g e G pois claramente todo número em $[0,1]$ que seja normal na base g será um elemento de G^g. Além disso, é óbvio que todo número em $[0,1]$ absolutamente normal será um

[5] Deve ficar claro que estamos considerando a extensão da definição de G^g para toda a reta.

elemento de G. Também é fácil ver que G^g é diferente do conjunto dos números normais na base g. De fato

$$\omega_{10} = 0,10200300040000\ldots 17\underbrace{0\ldots0}_{17zeros}18\underbrace{0\ldots0}_{18zeros}$$

pertence a G^{10} mas não é normal na base 10.

Entretanto, não me parece ser fácil verificar se o conjunto dos números absolutamente normais em $[0,1]$ está estritamente contido em G.

8.13 Teorema Seja $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Quase todos os números reais (no sentido da medida de Lebesgue) são simplesmente normais na base g.

Demonstração: É claro que basta nos restringirmos ao intervalo $[0,1[$. Seja $r \in \{0,\ldots,g-1\}$. Seja, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rccl} X_n^r: & ([0,1[,\mathcal{B},\lambda) & \longrightarrow & (\mathbb{R},\mathcal{B}) \\ & \omega & \mapsto & \begin{cases} 1, & \text{se } \omega_n = r \\ 0, & \text{se } \omega_n \neq r, \end{cases} \end{array}$$

onde $\omega = \omega_g^{(p)} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n.g^{-n}$.

Temos, para cada $A \in \mathcal{B}$:

$$(X_n^r)^{-1}(A) = \begin{cases} (X_n^r)^{-1}(\{1\}), & \text{se } 0 \notin A \text{ e } 1 \in A \\ (X_n^r)^{-1}(\{0\}), & \text{se } 0 \in A \text{ e } 1 \notin A \\ (X_n^r)^{-1}(\emptyset), & \text{se } 0 \notin A \text{ e } 1 \notin A \\ (X_n^r)^{-1}(\{0,1\}), & \text{se } 0 \in A \text{ e } 1 \in A \end{cases}$$

Mas

$$\begin{aligned} A_n^r &:= (X_n^r)^{-1}(\{1\}) \\ &= \{\omega \in [0,1[; \omega_g^{(p)} = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j.g^{-j}, \omega_n = r\} \\ &= \Psi_g((\Omega_g \times \ldots \times \Omega_g \times \overbrace{\{r\}}^{n-\acute{e}sima} \times \Omega_g \times \ldots) \setminus (\Omega_g \times \ldots \times \Omega_g \times \overbrace{\{r\}}^{n-\acute{e}sima} \times \{g-1\} \times \{g-1\} \times \ldots)). \end{aligned}$$

Logo $A_n^r \in \mathcal{B}$, pois $\Psi_g(\mathcal{D}_g) = \mathcal{B}$, e

$$\lambda(A_n^r) = \mu_g((\Omega_g \times \ldots \times \Omega_g \times \{r\} \times \Omega_g \times \ldots) \setminus (\Omega_g \times \ldots \times \Omega_g \times \{r\} \times \{g-1\} \times \{g-1\} \times \ldots)) = \frac{1}{g}$$

Como $(X_n^r)^{-1}(\{0\}) = (A_n^r)^c$, $(X_n^r)^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $(X_n^r)^{-1}(\{0,1\}) = [0,1[$ e como $A_n^r \in \mathcal{B}$, temos que os X_n^r são mensuráveis. Logo, $(X_n^r)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de variáveis aleatórias reais. Vamos provar que esta seqüência é independente, integrável e identicamente distribuída.

Para provarmos a independência, devemos provar que $(\sigma(X_n^r))_{n\in\mathbb{N}}$ é independente. Com efeito, os $(A_n^r)_{n\in\mathbb{N}}$ são independentes pois, se $n_1,\ldots,n_t$ são naturais dois a dois distintos,

$$\begin{aligned} \lambda(A_{n_1}^r \cap \ldots \cap A_{n_t}^r) &= \lambda(\{\omega \in [0,1[; \omega_g^{(p)} = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j.g^{-j}, \omega_i = r \ (\forall\, i = n_1,\ldots,n_t)\}) \\ &= \mu_g((\Omega_g \times \ldots \times \Omega_g \times \overbrace{\{r\}}^{n_1-\acute{e}sima} \times \Omega_g \times \ldots \times \Omega_g \times \overbrace{\{r\}}^{n_t-\acute{e}sima} \times \Omega_g \times \ldots) \setminus \\ &\quad (\Omega_g \times \ldots \times \Omega_g \times \overbrace{\{r\}}^{n_1-\acute{e}sima} \times \Omega_g \times \ldots \times \overbrace{\{r\}}^{n_t-\acute{e}sima} \times \{g-1\} \times \{g-1\} \times \ldots)) \\ &= \frac{1}{g^t} = \prod_{j=1}^{t} \lambda(A_{n_j}^r) \end{aligned}$$

Logo, pelo Corolário 4.4, temos $(\sigma(A_n^r))_{n\in\mathbb{N}}$ independente. Como $\sigma(X_n^r) = \sigma(A_n^r)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $(X_n^r)_{n\in\mathbb{N}}$ é independente.

Agora vamos provar que $(X_n^r)_{n\in\mathbb{N}}$ é identicamente distribuída. De fato, se $A \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned}
\lambda_{X_n^r}(A) &= \lambda((X_n^r)^{-1}(A)) \\
&= \begin{cases} \lambda(A_n^r), & \text{se } 0 \notin A \text{ e } 1 \in A \\ \lambda((A_n^r)^c), & \text{se } 0 \in A \text{ e } 1 \notin A \\ \lambda(\emptyset), & \text{se } 0 \notin A \text{ e } 1 \notin A \\ \lambda([0,1[), & \text{se } 0 \in A \text{ e } 1 \in A \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{g}, & \text{se } 0 \notin A \text{ e } 1 \in A \\ \frac{g-1}{g}, & \text{se } 0 \in A \text{ e } 1 \notin A \\ 0, & \text{se } 0 \notin A \text{ e } 1 \notin A \\ 1, & \text{se } 0 \in A \text{ e } 1 \in A \end{cases}
\end{aligned}$$

Logo, $\lambda_{X_i^r} = \lambda_{X_j^r}$ $(\forall\, i,j \in \mathbb{N})$, isto é, $(X_n^r)_{n\in\mathbb{N}}$ é identicamente distribuída.

Resta-nos provar que cada X_n^r é integrável. Mas, isso é claro, pois

$$\begin{aligned}
E(X_n^r) &= \int_{[0,1[} X_n^r d\lambda \\
&= \lambda((X_n^r)^{-1}(\{1\})) \\
&= \lambda(A_n^r) \\
&= \frac{1}{g}
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 7.8,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^r(\omega) = \frac{1}{g} \qquad (\lambda - qtp)$$

Mas é claro que

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^r(\omega) = S_{n,g}^r(\omega)$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_{n,g}^r(\omega) = \frac{1}{g} \qquad (\lambda - qtp)$$

Seja $M_g^r = \{\omega \in [0,1[: \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_{n,g}^r(\omega) = \frac{1}{g}\}$. Então, $\lambda(M_g^r) = 1$. O conjunto dos números simplesmente normais em [0,1[na escala g é

$$P_g = \cap_{r\in\{0,\dots,g-1\}} M_g^r$$

e, pelo Lema 4.10, temos $\lambda(P_g) = 1$. A extensão do resultado de $[0,1[$ para $\mathbb{R}$ é imediata.

□

8.14 Teorema Seja $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Quase todos os números reais (no sentido da medida de Lebesgue) são normais na escala g. Mais ainda, quase todos os números reais são absolutamente normais.

Demonstração: Seja r_1r_2 uma $(SFA)_g$ com dois algarismos. Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $Y_{(1)n}^{r_1r_2}$ e $Y_{(2)n}^{r_1r_2}$ aplicações de $([0,1[, \mathcal{B}, \lambda)$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ tais que

$$Y_{(1)n}^{r_1r_2}(\omega) = X_{2n-1}^{r_1}(\omega).X_{2n}^{r_2}(\omega)$$

$$Y_{(2)n}^{r_1r_2}(\omega) = X_{2n}^{r_1}(\omega).X_{2n+1}^{r_2}(\omega)$$

É claro que $Y_{(1)n}^{r_1r_2}$ e $Y_{(2)n}^{r_1r_2}$ são mensuráveis, pois são produto de aplicações mensuráveis. Vamos mostrar que $(Y_{(1)n}^{r_1r_2})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de variáveis aleatórias reais, integráveis, identicamente distribuídas e independentes.

Seja

$$\begin{aligned}
A_{(1)n}^{r_1r_2} &:= (Y_{(1)n}^{r_1r_2})^{-1}(\{1\}) \\
&= \{\omega \in [0,1[; \omega_g^{(p)} = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j.g^{-j}, \omega_{2n-1} = r_1, \omega_{2n} = r_2\} \\
&= \Psi_g((\Omega_g \times \ldots \times \Omega_g \times \overbrace{\{r_1\}}^{2n-1-\acute{e}sima} \times \{r_2\} \times \Omega_g \times \ldots) \setminus (\Omega_g \times \ldots \times \Omega_g \times \overbrace{\{r_1\}}^{2n-1-\acute{e}sima} \times \{r_2\} \times \{g-1\} \times \ldots)).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\lambda(A_{(1)n}^{r_1r_2}) &= \mu_g((\Omega_g \times \ldots \times \Omega_g \times \overbrace{\{r_1\}}^{2n-1-\acute{e}sima} \times \{r_2\} \times \Omega_g \times \ldots) \setminus \\
&\quad (\Omega_g \times \ldots \times \Omega_g \times \overbrace{\{r_1\}}^{2n-1-\acute{e}sima} \times \{r_2\} \times \{g-1\} \times \ldots)) \\
&= \frac{1}{g^2}.
\end{aligned}$$

Seja $A \in \mathcal{B}$. Então

$$\begin{aligned}
\lambda_{Y_{(1)n}^{r_1r_2}}(A) &= \lambda((Y_{(1)n}^{r_1r_2})^{-1}(A)) \\
&= \begin{cases} \lambda(A_{(1)n}^{r_1r_2}), & \text{se } 0 \notin A \text{ e } 1 \in A \\ \lambda((A_{(1)n}^{r_1r_2})^c), & \text{se } 0 \in A \text{ e } 1 \notin A \\ \lambda(\emptyset), & \text{se } 0 \notin A \text{ e } 1 \notin A \\ \lambda([0,1[), & \text{se } 0 \in A \text{ e } 1 \in A \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{g^2}, & \text{se } 0 \notin A \text{ e } 1 \in A \\ 1 - \frac{1}{g^2}, & \text{se } 0 \in A \text{ e } 1 \notin A \\ 0, & \text{se } 0 \notin A \text{ e } 1 \notin A \\ 1, & \text{se } 0 \in A \text{ e } 1 \in A \end{cases}
\end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e portanto $(Y_{(1)n}^{r_1r_2})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de variáveis aleatórias identicamente distribuídas.

Temos ainda

$$\begin{aligned}
E(Y_{(1)n}^{r_1r_2}) &= \int_{[0,1[} Y_{(1)n}^{r_1r_2} d\lambda \\
&= \lambda((Y_{(1)n}^{r_1r_2})^{-1}(1)) \\
&= \frac{1}{g^2}
\end{aligned}$$

Se $n_1, \ldots, n_t$ são naturais distintos,

$$\begin{aligned}
&\lambda(A_{(1)n_1}^{r_1r_2} \cap \ldots \cap A_{(1)n_t}^{r_1r_2}) = \\
&= \lambda(\{\omega \in [0,1[; \omega_g^{(p)} = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j.g^{-j}, \omega_{2i-1} = r_1, \omega_{2i} = r_2, i = n_1, \ldots, n_t\})
\end{aligned}$$

$$= \mu_g((\Omega_g \times \ldots \times \Omega_g \times \overbrace{\{r_1\}}^{2n_1-1\text{ésima}} \times \{r_2\} \times \Omega_g \times \ldots \times \Omega_g \times \overbrace{\{r_1\}}^{2n_t-1\text{ésima}} \times \{r_2\} \times \Omega_g \times \ldots) \setminus$$

$$(\Omega_g \times \ldots \times \Omega_g \times \overbrace{\{r_1\}}^{2n_1-1\text{ésima}} \times \{r_2\} \times \Omega_g \times \ldots \times \Omega_g \times \overbrace{\{r_1\}}^{2n_t-1\text{ésima}} \times \{r_2\} \times \{g-1\} \times \{g-1\} \times \ldots))$$

$$= (\frac{1}{g^2})^t$$

$$= \prod_{i=1}^{t} \lambda(A^{r_1r_2}_{(1)n_i})$$

Logo, $(A^{r_1r_2}_{(1)n})_{n\in\mathbb{N}}$ é independente, e pelo Corolário 4.4 $(\sigma(A^{r_1r_2}_{(1)n}))_{n\in\mathbb{N}}$ é independente. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $\sigma(Y^{r_1r_2}_{(1)n}) = \sigma(A^{r_1r_2}_{(1)n})$ temos que $(Y^{r_1r_2}_{(1)n})_{n\in\mathbb{N}}$ é independente.

Portanto, pelo Teorema 7.8

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y^{r_1r_2}_{(1)i}(\omega) = \frac{1}{g^2} \qquad (\lambda - qtp) \tag{15}$$

Fazendo o mesmo que foi feito para $Y^{r_1r_2}_{(1)n}$ em $Y^{r_1r_2}_{(2)n}$, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y^{r_1r_2}_{(2)i}(\omega) = \frac{1}{g^2} \qquad (\lambda - qtp) \tag{16}$$

Então de (15) e (16),

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} S^{r_1r_2}_{2n,g}(\omega) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}(\sum_{i=1}^{n} Y^{r_1r_2}_{(1)i}(\omega) + \sum_{i=1}^{n} Y^{r_1r_2}_{(2)i}(\omega) + c_2(n)) \\
&= \frac{1}{2}(2.\frac{1}{g^2}) \\
&= \frac{1}{g^2} \qquad (\lambda - qtp) \qquad (17)
\end{aligned}$$

onde $c_2(n) = 0$ ou -1. Além disso,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} . S^{r_1r_2}_{2n+1,g}(\omega) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}(\sum_{i=1}^{n} Y^{r_1r_2}_{(1)i}(\omega) + \sum_{i=1}^{n} Y^{r_1r_2}_{(2)i}(\omega)) \\
&= \frac{1}{2}.(2.\frac{1}{g^2}) \\
&= \frac{1}{g^2} \qquad (\lambda - qtp) \qquad (18)
\end{aligned}$$

Logo de (17) e (18),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S^{r_1r_2}_{n,g}(\omega) = \frac{1}{g^2} \qquad (\lambda - qtp) \tag{19}$$

O caso geral, onde temos uma seqüência finita de algarismos $r_1, \ldots, r_k$, é análogo. Definimos

$$Y^{r_1\ldots r_k}_{(1)n}(\omega) = X^{r_1}_{kn-(k-1)}(\omega).X^{r_2}_{kn-(k-2)}(\omega).\ldots.X^{r_k}_{kn}(\omega)$$

$$Y^{r_1\ldots r_k}_{(2)n}(\omega) = X^{r_1}_{kn-(k-2)}(\omega).X^{r_2}_{kn-(k-3)}(\omega).\ldots.X^{r_k}_{kn+1}(\omega)$$

$$\vdots$$

$$Y_{(k)n}^{r_1\ldots r_k}(\omega) = X_{kn}^{r_1}(\omega).X_{kn+1}^{r_2}(\omega).\ldots.X_{kn+(k-1)}^{r_k}(\omega),$$

provamos que cada $(Y_{(1)n}^{r_1\ldots r_k})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de variáveis aleatórias reais, integráveis, identicamente distribuídas e independentes, e aplicamos o Teorema 7.8.

Logo, qualquer que seja $g \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ e qualquer que seja a $(SFA)_g$ $r_1\ldots r_k$ temos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_{n,g}^{r_1\ldots r_k}(\omega) = \frac{1}{g^k} \qquad (\lambda - qtp)$$

Dado $g \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $k \in \mathbb{N}$ e $r_1\ldots r_k$ uma $(SFA)_g$, definimos

$$N_g^{r_1\ldots r_k} = \{\omega \in [0,1[;\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_{n,g}^{r_1\ldots r_k}(\omega) = g^{-k}\}.$$

Seja N o conjunto dos números absolutamente normais em $[0,1[$. Como

$$N = \bigcap_{g=2}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{r_1\ldots r_k\in\{0,\ldots,g-1\}} N_g^{r_1,\ldots,r_k}$$

e como a medida de Lebesgue de cada $N_g^{r_1\ldots r_k}$ é 1, temos, pelo Lema 4.10, que $\lambda(N) = 1$, isto é, quase todos os números em $[0,1[$ são absolutamente normais. A fortiori, dado $g \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, quase todos os números em $[0,1[$ são normais na escala g. A extensão destes resultados para toda a reta é imediata. □

8.15 Observação Os Teoremas 8.13 e 8.14 também podiam ter sido demonstrados via Teorema 7.7, pois é fácil ver que todas as variáveis aleatórias envolvidas nas demonstrações satisfazem as hipóteses do Teorema 7.7. Não são poucas as alternativas para se demonstrar os Teoremas 8.13 e 8.14. Em particular, um resultado envolvendo Teoria Ergódica nos permite demonstrar, de forma elegante, estes Teoremas.O leitor interessado pode procurar a Proposição 1.4 da página 14 de [6].Com esta proposição, fica possível, de forma relativamente simples, demonstrar nossos resultados sobre normalidade de números, via Teoria Ergódica. Outra leitura útil nessa área é o livro [12], de Paul Halmos.

8.16 Observação Os conceitos de normalidade de números foram introduzidos por M. Émile Borel em 1909 [4]. Ele demonstrou (usando métodos diferentes daqueles que usamos) que quase todos os números reais (no sentido da medida de Lebesgue) são absolutamente normais. Apesar disso, segundo ele, " ... no estado atual da ciência (1909), a determinação efetiva de um número absolutamente normal parece um problema dos mais difíceis". Apesar de passado quase um século, nos parece que este ainda é um problema dos mais difíceis. Talvez pelo fato de o conjunto dos números normais (absolutamente normais) ser tão "grande", Borel afirma em [5]: "... nós devemos ter como extremamente provável que todos os números de definições simples, com exceção dos números racionais, sejam números normais." Entretanto, não é impossível, por exemplo, que todos os números algébricos não sejam absolutamente normais.

Estudos estatísticos com tentativas de verificar a " tendência de normalidade" em algumas bases para, por exemplo, $\sqrt{n}$ $(n = 2,3,5)$ e para o número transcendental "e" na base 10, podem ser encontrados em [3] e [22] respectivamente. Entretanto, tais trabalhos concluíram, no máximo, que não há evidência imediata de que estes números não sejam normais nas bases referidas. Além disso, calcular milhares de casas decimais de um número irracional não nos diz nada sobre seu comportamento global.

A título de informação, listaremos dois (entre tantos) resultados importantes envolvendo normalidade de números.

- Para $r, s \in \mathbb{N}$, dizemos que $r \sim s$ se existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $r^n = s^m$, e dizemos que $r \not\sim s$ caso contrário. Em [20] prova-se que se $r \sim s$, então todo número normal na base r é normal na base s. Além disso, se $r \not\sim s$, o conjunto dos números reais que são normais na base r e não são sequer simplesmente normais na base s tem a cardinalidade de $\mathbb{R}$.

- Pillai [18] mostrou que α é um número normal na base g se, e somente se, α é simplesmente normal em todas as bases $g, g^2, g^3, \ldots$.

  Com esta caracterização dos números normais, o Teorema 8.14 se torna um Corolário imediato do Teorema 8.13. Preferimos, entretanto, demonstrar diretamente o Teorema 8.14, sem nos valermos de tal caracterização.

Bibliografia

[1] Ash, R.: Measure Integration and Functional Analysis, Academic Press (1972), New York and London.

[2] Bauer, H.: Probability Theory and Elements of Measure Theory, Second English Edition, Academic Press (1981), London.

[3] Beyer, W. A., Metropolis, N., and Neerdgaard, J. R.: Statistical study of digits of some square roots of integers in various bases, Math. Comp. 24, 455-473 (1970)

[4] Borel,M. E.: Les probabilités dénomerables et leurs applications arithmetiques, Rend. Circ. Mat. Palermo 27, (1909)

[5] Borel,M. E.: Probability and Certainly, Walker, New York, (1963)

[6] Brown, James R.: Ergodic Theory and Topological Dynamics, Academic Press (1976)

[7] Champernowne, D.G.: The construction of decimals normal in the scale of ten, J. London Math. Soc., 8, 254-260 (1933)

[8] Copeland A. H., and Erdös, P.: Note on normal numbers, Bull. Amer. Math. Soc. 52, 857-860 (1946)

[9] Davenport, H., and Erdös, P.: Note on normal decimals, Canad. J. Math. 4, 58-63 (1952)

[10] Gelfond, A. O.: Transcendental & Algebraic Numbers, Dover Publications, Inc. New York (1960)

[11] James, B.R.: Probabilidade. Um Curso em Nível Intermediário, Segunda Edição, IMPA (1996)

[12] Halmos, P.R: Lectures on Ergodic Theory, Mathematical Society of Japan,(1956)

[13] Halmos, P.R.: Measure Theory, Springer-Verlag New York Inc. (1974)

[14] Hardy, G.H., and Wright, E.M.: An Introduction to the Theory of Numbers, Fourth Edition, Oxford University Press, London (1975)

[15] Kuipers, I., and Niederreiter, H.: Uniform Distribution of Sequences, Jonh Wiley & Sons, (1974), New York, London, Sydney and Toronto.

[16] Lebesgue, H.: Sur certaines démonstrations d'existence, Bull. Soc. Math. France, 45, 132-144 (1917)

[17] Nachbin, L.: A Profile to Probability, Editora da UNICAMP (1987)

[18] Pillai, S. S.: On normal numbers, Proc. Indian Acad. Sci, Sect. A, 12, 179-184 (1940)

[19] Rényi, A.: Foundations of Probability, Holden -Day Inc. (1970)

[20] Schmidt, W.M.: On normal numbers, Pacific J. Math. 10, 661-672 (1960)

[21] Sierpiński, W.: Démonstration élémentaire du théoréme de M. Borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'un tel nombre, Bull. Soc. Math. France 45, 125-132 (1917)

[22] Stoneham, R.G.: A study of 60,000 digits of the transcendental 'e', Amer. Math. Monthly 72, 483-500 (1965)