

Programação da Grade de Horário em Escolas de Ensino Fundamental e Médio

Vânia Nobre de Sousa
Departamento de Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP

Orientador: Prof. Antônio Carlos Moretti
Departamento de Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP

Abril, 2006

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Sousa, Vânia Nobre de
So85p Programação da grade de horários em escolas de ensino fundamental e
médio / Vânia Nobre de Sousa -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientador : Antônio Carlos Moretti
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Otimização combinatória. 2. Agendamento de horário. 3. Busca local. 4.
Busca tabu. I. Moretti, Antônio Carlos. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: School timetabling problem

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Combinatorial optimization. 2. Timetabling. 3.
Local search. 4. Tabu search.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Antonio Carlos Moretti (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Aurélio Ribeiro Leite de Oliveira (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Luiz Leduino de Salles Neto (UESC)

Data da defesa: 20/04/2006

PROGRAMAÇÃO DA GRADE DE HORÁRIO EM ESCOLAS
DE ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Vânia Nobre de Sousa** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, **20 de abril de 2006.**

.....
Prof. Dr.: **Antônio Carlos Moretti**
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Antônio Carlos Moretti (IMECC/UNICAMP)

Prof. Dr. Aurélio Ribeiro Leite de Oliveira (IMECC/UNICAMP)

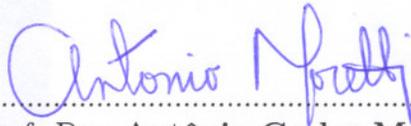
Prof. Dr. Luiz Leduíno de Salles Neto (DCET/UESC)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada.

PROGRAMAÇÃO DA GRADE DE HORÁRIO EM ESCOLAS
DE ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Vânia Nobre de Sousa** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, **20** de **abril** de **2006**.



.....
Prof. Dr.: **Antônio Carlos Moretti**
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Antônio Carlos Moretti (IMECC/UNICAMP)

Prof. Dr. Aurélio Ribeiro Leite de Oliveira (IMECC/UNICAMP)

Prof. Dr. Luiz Leduino de Salles Neto (DCET/UESC)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada.

Dissertação de Mestrado defendida em 20 de abril de 2006 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Antonio Moretti

Prof. (a). Dr (a). ANTONIO CARLOS MORETTI

Aurélio R. L. de Oliveira

Prof. (a). Dr (a). AURÉLIO RIBEIRO LEITE DE OLIVEIRA

Luíz Leduino Salles Neto

Prof. (a). Dr (a). LUIZ LEDUINO DE SALLES NETO

à minha família.

Agradecimentos

A Deus por seu amor e por suas palavras.

Aos meus pais Edvar e Fátima pelo apoio em todos os momentos da minha vida, pela educação e carinho.

Ao meu irmão Vinícius por sua amizade.

Ao professor Moretti pela orientação, conselhos, pela amizade e confiança demonstrada.

A todos os professores e amigos que contribuíram para a minha formação.

Aos funcionários da Escola Estadual Barão Geraldo de Rezende e da Escola Estadual Professor Hilton Federici por fornecerem informações necessárias para este trabalho.

Aos funcionários do IMECC.

À CNPq pelo apoio financeiro.

Sumário

1	Introdução	1
2	Tipos de problemas de grade de horários em instituições educacionais e suas variações	3
2.1	Grade de horário para uma escola de ensino fundamental e médio	4
2.1.1	Problema polinomial simplificado	4
2.1.2	Problema básico de busca	7
2.1.3	Problema de otimização	8
2.1.4	Restrições do problema	10
2.1.5	Variações do problema	12
2.1.6	Abordagens e técnicas de solução de um problema turma-professor	14
2.2	Grade de horários para cursos	17
2.2.1	Problema básico de busca	18
2.2.2	Problema de otimização	19
2.2.3	Restrições do problema	19
2.2.4	Variações do problema	20
2.3	Grade de horários para exames	22
2.3.1	Problema básico de busca	23
2.3.2	Problema de otimização	23
2.3.3	Variações do problema	24
3	Meta-Heurísticas	27
3.1	Busca Tabu	29
3.1.1	Busca Tabu e problema turma-professor	32
3.2	Algoritmo Genético	37
3.2.1	Algoritmo Genético e problema turma-professor	39

4	Apresentação de problemas reais	43
4.1	Problema a ser considerado	43
4.1.1	Escola Estadual Barão Geraldo de Rezende	45
4.1.2	Escola Estadual Professor Hilton Federici	46
4.2	Modelo Matemático (1)	47
4.2.1	Características	47
4.2.2	Restrições	49
4.2.3	Função Objetivo	53
4.3	Modelo Matemático (2)	55
4.3.1	Características	55
4.3.2	Restrições	56
4.3.3	Função Objetivo	59
4.4	Variações dos problemas	60
4.4.1	Turmas que não estão presentes em determinados ho- rários de aula	61
4.4.2	Professores que lecionam mais de uma disciplina para uma mesma turma	61
5	Heurísticas Aplicadas ao PTP	63
5.1	Introdução	63
5.2	Restrições do Problema	64
5.3	Representação de uma Grade de Horário	65
5.4	Estrutura da vizinhança	66
5.4.1	Exploração da vizinhança	67
5.5	Função Objetivo	69
5.6	Solução Inicial	71
5.7	Procedimento Busca Local Aleatória (BLA)	71
5.8	Procedimento Busca Tabu (BT)	72
5.8.1	Lista tabu e critério de aspiração	73
5.9	Procedimento BLA+BT	73
5.10	Heurística para o PTP com professores que lecionam em mais de um turno	74
6	Resultados Computacionais	81
6.1	Problemas considerados nos testes	81
6.2	Resultados da Programação Matemática	82
6.3	Resultados obtidos através de procedimentos heurísticos	84
6.3.1	Utilização da Busca Local Aleatória	85

6.3.2	Solução para a escola Rezende em 2006: vantagens dos métodos baseados em busca local	88
6.3.3	Comparação entre as soluções obtidas manualmente, por programação matemática e por procedimento heurístico	90
7	Conclusões e trabalhos futuros	97

Lista de Tabelas

4.1	Características da Escola Rezende	46
4.2	Características da Escola Hilton Federici	47
6.1	Características dos Casos Gerados.	82
6.2	Melhor solução encontrada em 6 horas de processamento para a Escola Rezende em 2005	83
6.3	Melhor solução encontrada em 6 horas de processamento para a Escola Rezende em 2006	83
6.4	Melhor solução encontrada em 6 horas de processamento para a Escola Hilton Federici em 2005	83
6.5	Parâmetros considerados para testes dos procedimentos heurísticos	85
6.6	Tempo computacional para obtenção da primeira solução viável (em segundos). As colunas “%” apresentam a porcentagem de soluções viáveis encontradas.	86
6.7	Melhor solução obtida para procedimentos heurísticos considerando cada turno das escolas Rezende (em 2005 (R05) e em 2006 (R06)) e Hilton Federici em 2005 (HF05).	88
6.8	Grade de horário manual de uma professora de Matemática do turno da tarde.	89
6.9	Grade de horário obtida pelo procedimento BLA+BT da professora de Matemática M3 do turno da tarde.	90
6.10	Solução antes da aplicação do procedimento BLA+BT	91
6.11	Solução após aplicação do procedimento BLA+BT	92
6.12	Resultados obtidos manualmente, por programação matemática e por procedimento heurístico	93
6.13	Solução manual para turno da tarde da Escola Rezende em 2005.	94
6.14	Melhor solução em 6h de processamento para FM(2) considerando turno da tarde da Escola Rezende em 2005.	95

6.15 Solução obtida por BLA+BT para a Escola Rezende em 2005.	
Valor de função objetivo: 273. Tempo:521.3s	96

Lista de Figuras

3.1	Procedimento de Busca Tabu	31
3.2	Representação de uma grade de horários	33
3.3	Movimentos em uma grade de horários	34
3.4	Grade de horários Q_1	36
3.5	G_A , grafo da turma A	36
3.6	Grade de horários Q'_1	36
3.7	Grafos das turmas j e \bar{j} resultantes do procedimento Intraturmas	37
3.8	Algoritmo Genético	39
3.9	Mutação de ordem $k = 3$	40
3.10	Crossover com $k_1 = 2$	42
3.11	Representação de um indivíduo	42
5.1	Representação de uma grade de horário Q	66
5.2	Movimentos utilizados para pesquisar $N(Q)$	68
5.3	Avaliação parcial de f_2 para um professor p , onde $f_{2_{parcial}}(p) = 2$	69
5.4	Avaliação parcial de f_3 para a aula $(p, 1)$, onde $f_{3_{parcial}}(p, 1) = 3 - N_{max} = 3 - 2 = 1$	70
5.5	Avaliação parcial de f_8 para a aula $(p, 1)$, onde $f_{8_{parcial}}(p, 1) = 1$	70
5.6	Solução inicial construtiva	77
5.7	Procedimento de Busca Local Aleatória (BLA)	78
5.8	Método de Busca Tabu	79
6.1	Tempo computacional (em segundos) para encontrar uma solução viável considerando o número de aulas.	87
6.2	Comportamento das curvas dos procedimentos BT e BLA+BT	89

Capítulo 1

Introdução

A programação da grade de horários em escolas de ensino fundamental e médio, também conhecido como problema turma-professor (PTP), consiste em fixar uma seqüência de agendamentos de aulas envolvendo professores e grupos de estudantes (que possuem um mesmo currículo de disciplinas) em um período pré-determinado (tipicamente uma semana). Esta seqüência de agendamentos deve satisfazer um conjunto de requisitos didáticos, físicos e organizacionais.

Resolver este problema manualmente é uma tarefa difícil e que pode durar dias ou até semanas para sua conclusão, podendo gerar resultados insatisfatórios com relação a diversos requisitos. Muitas vezes, professores reclamam por um mínimo de aulas duplas para algumas disciplinas e, principalmente por uma grade de horário com menos períodos vagos entre uma aula e outra. Além disso, dependendo do número de grupos de estudantes e professores envolvidos no problema, ele se torna manualmente intratável.

Por estes motivos, uma atenção considerável tem sido devotada à solução automática do PTP ao longo dos últimos anos. Começando com o trabalho de Gotlieb [18], muitos trabalhos para a resolução do PTP já foram realizados, por exemplo Shaerf [30], Colorni et al. [8], etc.

Por ser um problema combinatorial NP-completo, isto é, não se conhece algoritmos polinomiais para resolvê-lo na maioria das situações em que se apresenta (Even et al. [14]), a tratabilidade do PTP por técnicas exatas de otimização demanda muito tempo e esforço computacional. Então, muitos procedimentos heurísticos têm sido considerados para se obter uma solução viável que satisfaça a maior parte dos requisitos presentes.

Há uma infinidade de variações do PTP. Isto se deve ao fato de que

diversos países, regiões de um país, ou até mesmo instituições de ensino de uma mesma região adotam critérios educacionais diferenciados entre si. Devido à esta característica, o PTP é um problema de difícil generalização.

No Capítulo 2 apresentamos os tipos de problemas de grade de horários em instituições educacionais encontrados na literatura, bem como suas formulações e variações. Descrevemos no Capítulo 3 algumas heurísticas bem como aplicações ao PTP encontradas na literatura. Apresentamos dois modelos matemáticos para um PTP típico das escolas públicas do Estado de São Paulo no Capítulo 4. No Capítulo 5 descrevemos as heurísticas utilizadas para resolução do PTP. Os resultados computacionais e aplicações reais estão apresentados no Capítulo 6. E, finalmente, no Capítulo 7, apresentamos nossas conclusões e propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Tipos de problemas de grade de horários em instituições educacionais e suas variações

O problema de grade de horários em instituições educacionais consiste em agendar uma seqüência de eventos (normalmente aulas ou exames) os quais envolvem professores e estudantes em um horário pré-fixado, satisfazendo um conjunto de restrições de vários tipos. As restrições encontradas envolvem a sobreposição de eventos que contenham participantes em comum, capacidade das salas, etc.

Um grande número de variações deste problema tem sido proposto na literatura. Estas diferem umas das outras com relação ao tipo de eventos, ao tipo de instituição envolvida (universidade ou escolas de ensino fundamental e médio) e à influência das restrições. De acordo com estas características, os problemas de grade de horário em instituições educacionais são classificados em três tipos principais:

- **Grade de horário para uma escola de ensino fundamental e médio:** conhecido também como Problema Turma-Professor (PTP), consiste na esquematização do horário semanal para todas as turmas de uma escola de modo que nenhum professor ou turma estejam envolvidos em mais de uma aula por horário de aula. Cada professor tem que dar um número determinado de aulas para cada turma e os estudantes têm que estar na escola durante todo o período de aula.
- **Grade de horário para cursos universitários:** esquematização da

grade de horários semanal de um conjunto de cursos universitários, evitando que cursos contendo os mesmos alunos sejam dados no mesmo horário. A disponibilidade de salas e seu tamanho tornam-se fatores importantes, pois no caso anterior, considera-se, geralmente, que as turmas de alunos tenham suas próprias salas. Cada estudante escolhe as disciplinas que irá estudar e, portanto, sua grade de horário.

- **Grade de horário para exames:** esquematização de exames de um conjunto de cursos universitários, impedindo que exames de cursos contendo estudantes em comum sejam aplicados no mesmo horário, mantendo-os distantes entre si o máximo possível.

Nas próximas seções estão descritas algumas formulações matemáticas destes problemas, bem como algumas de suas variações encontradas na literatura.

2.1 Grade de horário para uma escola de ensino fundamental e médio

2.1.1 Problema polinomial simplificado

Inicialmente descrevemos um modelo para o Problema Turma-Professor (PTP) incluindo as principais restrições que aparecem na maioria dos casos reais. Para isto, introduziremos alguns termos que serão utilizados ao longo do texto. Uma *turma* consiste de um conjunto de estudantes que seguem exatamente o mesmo programa de disciplinas. Seja $T = \{t_1, \dots, t_m\}$ um conjunto de turmas e $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ um conjunto de professores. Define-se uma matriz $m \times n$ de aulas requisitadas $R = (r_{ij})$, onde r_{ij} é o número de aulas envolvendo a turma t_i e o professor p_j . Assumimos que todas as aulas têm a mesma duração e a unidade de tempo de uma aula será chamada de *horário de aula*. Dado um conjunto de h horários de aula, o problema consiste em associar cada aula a algum horário de tal modo que nenhum professor (respectivamente turma) esteja envolvido em mais de uma aula por horário. Mais precisamente, definindo $x_{ijk} = 1$ se a turma t_i e o professor p_j são associados ao horário de aula k e $x_{ijk} = 0$ caso contrário, temos o seguinte problema PTP1, formulado por de Werra [11]:

$$\begin{aligned}
\boxed{PTP1} \quad & \text{Encontre} \quad x_{ijk} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, h) \\
& \text{sujeito a} \quad \sum_{k=1}^h x_{ijk} = r_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n) \quad (2.1) \\
& \sum_{j=1}^n x_{ijk} \leq 1 \quad (i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, h) \quad (2.2) \\
& \sum_{i=1}^m x_{ijk} \leq 1 \quad (j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, h) \quad (2.3) \\
& x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, h)
\end{aligned}$$

A restrição 2.1 assegura que cada professor dá o número correto de aulas para cada turma. A restrição 2.2 (restrição 2.3) assegura que cada professor (turma) seja envolvido(a) em no máximo uma aula por horário de aula.

Em de Werra [11] vemos que a esta formulação pode ser associado um multigrafo bipartido $G = (T, P, \hat{R})$. Seus nós são as turmas e os professores. Entre o nó t_i e o p_j tem-se r_{ij} arestas paralelas. Se cada horário corresponde a uma cor, o problema consiste em encontrar uma associação entre as h cores e as arestas de G de tal modo que duas arestas adjacentes não possam ter a mesma cor. Desta forma $x_{ijk} = 1$ se alguma aresta $[t_i, p_j]$ é colorida com a cor k .

Proposição 2.1.1. *Existe uma solução para PTP1, se e somente se,*

$$\sum_{i=1}^m r_{ij} \leq h \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.4)$$

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} \leq h \quad (i = 1, \dots, m) \quad (2.5)$$

Este é o conhecido teorema de König para o problema de coloração de arestas em multigrafos. Esta proposição garante que este problema possui uma solução factível, se e somente se, o número de aulas requeridas do professor j e o número de aulas requeridas para a turma i sejam menores que os horários disponíveis para o agendamento destas.

Para resolver o PTP1, Even et al. [14] desenvolveram uma técnica baseada em encontrar uma seqüência de emparelhamentos máximos nos multigrafos bipartidos resultantes, onde o emparelhamento é um conjunto de arestas que

não contêm nós em comum. Hopcroft e Karp [21] provaram que a complexidade do emparelhamento máximo é de ordem polinomial com respeito ao tamanho do multigrafo.

O problema também pode ser reduzido ao problema de coloração de arestas em grafos como explicado anteriormente (de Werra [11]). Em de Werra considera-se também algumas variações do problema PTP1 as quais ainda podem ser resolvidas por um algoritmo de complexidade polinomial. Ele faz a distinção entre problema de esquematização diário e semanal. No problema diário, cada aula é associada a uma determinada hora de um determinado dia da semana, enquanto que no problema semanal cada aula é atribuída a um determinado dia da semana sem especificação de horário. Neste último, para cada turma t_i (professor p_j) temos um número inteiro positivo a_i (b_j) representando o número máximo de aulas nas quais cada turma t_i (professor p_j) podem estar envolvidas(os) durante cada um dos d dias da semana. A formulação, segundo de Werra [11], se expressa da forma:

$$\boxed{PTP2} \quad \text{Encontre} \quad x_{ijk} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, d)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{k=1}^d x_{ijk} = r_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n) \quad (2.6)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ijk} \leq a_i \quad (i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, d) \quad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ijk} \leq b_j \quad (j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, d) \quad (2.8)$$

$$x_{ijk} \text{ inteiro} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, d)$$

onde x_{ijk} é o número de aulas envolvendo a turma i e o professor j no dia k .

Proposição 2.1.2. *Existe uma solução para PTP2, se e somente se:*

$$\sum_{i=1}^m r_{ij} \leq db_j \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.9)$$

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} \leq da_i \quad (i = 1, \dots, m) \quad (2.10)$$

Com a finalidade de agendar as aulas de forma distribuída durante os dias da semana, de Werra [11] considera a seguinte formulação:

$$\boxed{PTP3} \quad \begin{array}{l} \text{Encontre} \\ \text{sujeito a} \end{array} \quad \begin{array}{l} x_{ijk} \\ \sum_{k=1}^d x_{ijk} = r_{ij} \end{array} \quad \begin{array}{l} (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, d) \\ (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n) \end{array} \quad (2.11)$$

$$\lfloor \sum_{j=1}^n r_{ij}/d \rfloor \leq \sum_{j=1}^n x_{ijk} \leq \lceil \sum_{j=1}^n r_{ij}/d \rceil \quad (i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, d) \quad (2.12)$$

$$\lfloor \sum_{i=1}^m r_{ij}/d \rfloor \leq \sum_{i=1}^m x_{ijk} \leq \lceil \sum_{i=1}^m r_{ij}/d \rceil \quad (j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, d) \quad (2.13)$$

$$\lfloor r_{ij}/d \rfloor \leq x_{ijk} \leq \lceil r_{ij}/d \rceil \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, d)$$

As restrições 2.12 e 2.13 expressam que o agendamento das aulas de todas as turmas e professores deve estar balanceado nos d dias.

Proposição 2.1.3. *Existe uma solução para o problema PTP3 para qualquer d .*

2.1.2 Problema básico de busca

Agora será considerado que professores ou turmas podem não estar disponíveis para algum horário de aula. Por isso, introduziremos o problema turma-professor com indisponibilidades de professores e turmas. Temos duas matrizes binárias $P_{n \times h}$ e $T_{m \times h}$, tais que $p_{ik} = 1$ ($t_{ik} = 1$) se o professor p_i (turma t_j) está disponível no horário de aula k , e $p_{ik} = 0$ ($t_{jk} = 0$) caso contrário. Temos então, a seguinte formulação (Schaerf [31]):

$$\boxed{PTP4} \quad \begin{array}{l} \text{Encontre} \\ \text{sujeito a} \end{array} \quad \begin{array}{l} x_{ijk} \\ \sum_{k=1}^h x_{ijk} = r_{ij} \end{array} \quad \begin{array}{l} (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, h) \\ (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n) \end{array} \quad (2.14)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ijk} \leq t_{ik} \quad (i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, h) \quad (2.15)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ijk} \leq p_{jk} \quad (j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, h) \quad (2.16)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, h)$$

de Werra [11] considerou também restrições devido a pré-agendamentos: uma determinada aula tem que ser obrigatoriamente agendada em um determinado horário. Pré-agendamentos podem ser expressos adicionando um conjunto de restrições do tipo:

$$x_{ijk} \geq p_{ijk} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, h) \quad (2.17)$$

onde $p_{ijk} = 0$ se não existe pré-agendamento e $p_{ijk} = 1$ quando o professor p_j tem que dar aula para a turma t_i no horário k . de Werra também mostrou que indisponibilidades podem ser expressas por turmas artificiais.

Outra restrição pode ser considerada neste problema. Cada turma precisa estar envolvida em pelo menos uma aula por horário de aula. Esta restrição pode ser expressa como abaixo:

$$x_{ijk} \geq d_{ijk} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, h) \quad (2.18)$$

onde $D_{m \times h}$ é uma matriz binária tal que, $d_{ik} = 1$ se a turma i deve necessariamente ser ensinada no horário k e $d_{ik} = 0$ caso contrário.

Restrições como em 4.38 são cruciais para o problema turma-professor, representando uma das maiores diferenças entre este problema e o problema relacionado a universidades. O conjunto de índices k para os quais $d_{ik} = 1$ geralmente abrange todos os horários de aula, dependendo do total requerido para a turma i específica.

O problema PTP4 é NP-completo como mostrado por Even et. al. [14]. Eles também provaram que este problema é polinomial no caso específico em que as turmas estão sempre disponíveis e cada professor está disponível por exatos dois horários.

2.1.3 Problema de otimização

Os problemas PTP1 a PTP4 são problemas de busca, cujas soluções são quaisquer grades que satisfaçam suas restrições. Contudo, em aplicações reais uma grade de horários factível pode ser melhor do que outra. O objetivo é, então, encontrar a melhor entre elas.

Vamos considerar uma partição (C_a, C_b) do conjunto C de restrições do problema considerado (Costa [10]). As restrições incluídas na categoria C_a são chamadas de *essenciais* (“*hard constraints*”) enquanto que as incluídas na categoria C_b são chamadas de *relaxadas* (“*soft constraints*”). Uma grade de horário (ou quadro de horário) Q é dita *aceita* se satisfaz todas as restrições do conjunto C e é *factível* se satisfaz as restrições essenciais. Agora defina $f(Q)$, *função objetivo*, a qual mede a não aceitabilidade da grade de horário Q . Então o problema consiste em encontrar Q^* minimizando o valor de f sobre o conjunto X de todas as grades de horários factíveis, como segue:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(Q) \\ & \text{s.a} && Q \in X \end{aligned} \tag{2.19}$$

Juginger [22] propôs adicionar ao problema básico PTP4 a seguinte função objetivo:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^h d_{ijk} x_{ijk} \tag{2.20}$$

onde um valor alto de d_{ijk} é associado aos horários k onde a aula do professor j para a turma i é menos desejada.

Colorni et al. [8] introduziram uma função objetivo mais complexa, incluindo diversas características da grade de horários. Eles consideraram uma função objetivo que mede o custo geral que representa a “distância” entre a grade de horários considerada e a “ideal”, ou seja, uma grade de horários que satisfaz todas as restrições e os requerimentos didáticos (por exemplo, a distribuição das aulas durante os dias da semana), organizacionais (por exemplo, ter professores disponíveis para substituições) e pessoais (por exemplo, dia preferencial de folga para cada professor). Seja $z(Q)$ o valor da função objetivo da grade de horários Q , então temos:

$$z(Q) = \alpha \cdot \tau + \beta_1 \cdot s_\Delta + \beta_2 \cdot s_\Omega + \beta_3 \cdot s_\Pi \tag{2.21}$$

onde:

- τ é o número de inactibilidades na matriz Q ;

- s_{Δ} mede a insatisfação dos requerimentos didáticos na matriz Q ; este é calculado como $s_{\Delta} = \sum_i \Delta_i \cdot d_i$, onde Δ_i são os pesos relacionados com cada requerimento didático, e d_i é o número de vezes que o i -ésimo requerimento didático não é encontrado na matriz Q ;
- s_{Ω} mede a insatisfação dos requerimentos organizacionais em Q ; é calculado como $s_{\Omega} = \sum_i \Omega_i \cdot o_i$, onde Ω_i são os pesos relacionados com cada requerimento organizacional, e o o_i é o número de vezes que o i -ésimo requerimento organizacional não é encontrado na matriz Q ;
- s_{Π} mede a insatisfação dos requerimentos pessoais na matriz Q ; é calculado como $s_{\Pi} = \sum_{i \in X} \gamma_i \cdot p_i$, $i = 1, \dots, n$, onde p_i , $i = 1, \dots, n$ mede a insatisfação do professor i na matriz Q porque seu requerimento pessoal não foi encontrado e γ_i é o peso relacionado com cada professor;
- $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ são os pesos escolhidos pelo usuário para induzir características na grade de horários através da função objetivo. Geralmente $\alpha \gg \beta_1, \beta_2, \beta_3$.

2.1.4 Restrições do problema

Geralmente, as instituições de ensino possuem características que as diferenciam umas das outras. Isso se deve ao fato de que, dependendo da região (país, estado, etc.) na qual elas se encontram, elas possuem diferentes aspectos físicos, pedagógicos e organizacionais. Até mesmo em uma determinada região requerimentos que são encontrados em uma instituição podem não ser interessantes para outra. Abaixo serão descritas alguns requerimentos que podem ser encontrados na literatura:

1. O número de aulas deve ser exatamente igual ao número requerido para cada par turma/professor;
2. Evitar a atribuição de aulas a horários indesejados;
3. Ter horários suficientes para executar as aulas práticas;

4. Duas aulas envolvendo o mesmo professor ou mesma turma em dois lugares distantes não devem ser agendadas consecutivamente;
5. Não mais do que quatro horas de ensino por dia para cada professor;
6. Não ter o mesmo professor associado à última hora todos os dias;
7. Aulas da mesma disciplina precisam ser agendadas de forma uniforme durante os dias da semana;
8. Evitar que se tenham horários ociosos entre duas aulas na grade de um dia, tanto com relação ao professor quanto com relação à turma;
9. Cada professor quer a grade do seu horário de forma que as aulas estejam concentradas o máximo possível, ou seja, sem “janelas”;
10. No mínimo dois horários de aulas para cada professor, durante um dia;
11. Respeitar o pré-agendamento de certas aulas;
12. Evitar o agendamento de disciplinas que exigem maior atenção dos alunos para os últimos horários de um turno;
13. Duas aulas da mesma matéria (aulas duplas) não devem ser separadas por uma ou mais aulas em diferentes turmas;
14. Ter aulas duplas para professores que as requererem, por causa de aulas práticas;

15. As aulas de uma aula dupla devem ser agendadas no mesmo dia, ou seja, evitando que uma aula seja agendada no último horário do turno de um dia e a outra aula no início do mesmo turno, no próximo dia;
16. Evitar o agendamento de aulas duplas de forma que uma aula seja anterior ao intervalo e outra após o mesmo;
17. Evitar que as turmas tenham algumas seqüências de aulas de certas disciplinas, por exemplo, Inglês e Alemão, Física e Matemática;
18. Algumas salas especiais precisam ser preparadas para serem utilizadas, por exemplo, laboratório de ciências. Por isso, deve-se respeitar o tempo necessário para a preparação destas salas de modo que não pode haver duas aulas consecutivas nelas.

Na prática, uma grade de horários satisfazendo todas os requerimentos do problema pode não existir. Existem requerimentos, como os requerimentos (7) e (10), que são contraditórios. O equilíbrio entre a grade de horários que satisfaça o professor e aquela que satisfaça o aluno deve ser encontrado. Na maioria dos casos, precisamos encontrar a melhor grade de horários possível admitindo que alguns conflitos podem acontecer.

2.1.5 Variações do problema

Muitas variações deste problema são propostas na literatura, tanto quanto as que ocorrem na realidade. Estão listadas abaixo algumas das mais encontradas:

- **Aulas simultâneas**

Grades de horários geralmente incluem algumas aulas que têm que ser ministradas simultaneamente para mais de uma turma. Por exemplo, em algumas instituições a aula de ginástica envolve duas turmas em conjunto. É claro que, se uma aula simultânea é designada para um determinado horário, todas as turmas envolvidas não podem ter outras

aulas neste horário. Este problema é levado em conta em Yoshikawa et al. [38].

- **Professores envolvidos em mais de uma disciplina**

Até agora, temos assumido que uma turma precisa ter um número mínimo de aulas com um conjunto específico de professores. Cooper e Kingston [9], ao invés disso, consideraram o caso em que uma turma deve ter algumas disciplinas específicas, e que diferentes professores podem ensinar uma mesma disciplina (por exemplo, considere dois professores de Ciências tal que, um seja responsável pelas aulas teóricas e outro pelas aulas em laboratório). Além disso, um professor pode ensinar diversas disciplinas (um professor que leciona Física e Matemática, por exemplo). Contudo, eles assumiram que todas as aulas de uma mesma disciplina dadas para uma determinada turma devem ser ministradas pelo mesmo professor. Esta variação também foi considerada por Abraham e Kingston [1] para uma escola italiana.

- **Salas especiais**

A disponibilidade de salas não é considerada no problema básico por causa da afirmação implícita de que cada turma tem uma sala própria. Entretanto, algumas aulas requerem lugares com equipamentos especiais, tais como laboratório de ciências, quadras de esporte e salas de música. O número de salas especiais é limitado, havendo uma restrição adicional de que não mais do que um número dado de aulas que requer uma sala especial possa ser agendado no mesmo horário.

Também existem escolas com uma sala específica para cada disciplina oferecida (Abraham e Kingston [1]). Ao invés dos professores mudarem de sala durante as trocas de aula, são os alunos que devem mover-se de uma sala para outra.

- **Hora do intervalo diferente para determinados conjuntos de turmas**

Algumas escolas têm a hora do intervalo dos alunos que freqüentam as primeiras séries separada da hora do intervalo dos alunos que estão nas séries mais avançadas. Isto ocorre com a finalidade de separar o intervalo das crianças do intervalo dos alunos com maior idade.

- **Disciplinas eletivas**

Existe o caso em que escolas oferecem algumas disciplinas eletivas para cada série (Abraham e Kingston [1]). Por exemplo, pode ser oferecida para a sétima série a escolha entre Francês e Alemão. Alguns alunos podem escolher Francês e outros podem escolher Alemão de forma que satisfaça um número limitado de alunos por sala disponível.

- **Estudantes agrupados por habilidade em disciplina**

Existem escolas onde disciplinas como Matemática são ministradas separando-se os alunos de uma determinada série em grupos, por nível de habilidade (Abraham e Kingston [1]).

2.1.6 Abordagens e técnicas de solução de um problema turma-professor

Neste capítulo descrevemos as técnicas de solução e abordagens encontradas na literatura sobre o problema de grade de horários de uma escola de ensino fundamental e médio.

- **Heurísticas diretas**

Heurísticas diretas geralmente consistem em completar uma grade de horários aula por aula (ou um grupo de aulas de cada vez) enquanto não surjam conflitos. Neste ponto, inicia-se algumas modificações de modo que as demais aulas possam ser agendadas na grade.

Um exemplo típico deste método é descrito por Juginger [22]. Este sistema é baseado em três estágios:

1. Designar as aulas *mais urgentes* aos horários de aula *mais favoráveis* para cada aula;
2. Quando a um horário de aula pode ser alocada somente uma determinada aula, designá-lo a esta aula.
3. Mover as aulas já agendadas para períodos livres de modo que as aulas ainda não agendadas possam ser designadas ao horário de aula vago.

Uma aula é *urgente* quando possui agendamento muito restrito, ou seja, quando o professor e turma têm pouca disponibilidade de horários e muitas aulas. Um horário de aula é “favorável” quando outras poucas aulas podem ser agendadas neste horário, baseando-se na disponibilidade de outros professores e turmas.

- **Redução ao problema de coloração de um grafo**

Definição 2.1.4 (Coloração de um grafo). *Dado um grafo não direcionado $G = (V, E)$, o problema consiste em encontrar uma partição de V em um número mínimo de turmas de cores c_1, c_2, \dots, c_k , onde dois vértices contendo aresta em comum não podem ser coloridos com a mesma cor.*

Neufeld e Tartar [28] propuseram a redução do problema de grade de horários para o problema de coloração de um grafo. Nesta redução, cada aula é associada a um vértice do grafo, havendo uma aresta entre cada par de aulas que não podem ser agendadas ao mesmo tempo. Em particular, aulas que são lecionadas pelo mesmo professor ou aulas que contêm mais de uma turma são unidas. Impossibilidades e pré-assinalamentos são tratados impondo-se alguma restrição externa na coloração de específicos vértices do grafo.

A coloração do grafo resultante pode ser facilmente entendida como a solução do problema da grade de horários. Associa-se um horário de aula a cada cor e, conseqüentemente, agenda-se as aulas nos horários conforme as cores dos vértices.

Além disso, Neufeld e Tartar [28] mostraram que o problema de coloração de grafo com restrições externas pode ser transformado na coloração de um grafo sem restrições.

Esta abordagem também é encontrada em de Werra [12] e Asratian e de Werra [3].

- **Técnica de fluxo em redes**

Ostermann e de Werra [29] reduziram o problema de grade de horários para uma sequência de problemas de fluxo em redes. O modelo de fluxo em redes geral pode ser formulado como segue:

$$\text{minimizar } \sum_{j=1}^m c_j x_j, \quad (2.22)$$

$$\text{sujeito a } Ax = b, \quad (2.23)$$

$$l \leq x \leq u \quad (2.24)$$

onde $A_{n \times m}$ é a matriz de incidência, $b_{n \times 1}$ é o vetor de demanda e $u_{1 \times m}, l_{1 \times m}$ são os vetores de capacidade e limite inferior, respectivamente.

Ostermann e de Werra [29] criaram uma rede de trabalho para cada horário de aula tal que o fluxo identifica as aulas dadas em cada horário. de Werra [11] propôs um método similar criando uma rede de trabalho para cada turma, como explicado abaixo:

Para uma dada turma t_i execute:

1. *introduza um vértice para cada horário k e cada professor p_j ;*
2. *conecte k à p_j se este professor está disponível no horário k e não tenha sido associado a este horário em alguma rede anterior;*
3. *introduza um nó fonte s com arestas (s, k) para todo horário k e um nó sorvedouro p com arestas (p_j, p) para todo professor p_j ;*
4. *as capacidades $u(p_j, p)$ e os limites inferiores $l(p_j, p)$ devem respeitar r_{ij} ;*

5. para todas as outras arestas $u = 1$ e $l = 0$.

A solução da rede, que é inteira devido à propriedade de total unimodularidade da matriz de incidência, dá a associação para todas as aulas de uma dada turma.

A construção da rede de trabalho é repetida para todas as turmas e, eventualmente, resulta em uma grade de horários completa. É claro que, desde que não existam conflitos entre o horário das turmas já agendadas, não pode ser garantido que a solução seja encontrada sempre que ela exista.

- **Meta-heurísticas**

Abramson [2] aplica *Simulated Annealing* para o problema de grade de horário em escola. Ele também considera, como uma extensão, a possibilidade de duas aulas diferentes terem estudantes em comum. A solução é descrita por uma lista de conjuntos de aulas, uma lista para cada horário de aula. Dada uma solução, a escolha da solução vizinha é feita selecionando aleatoriamente uma aula que está agendada em um horário e movendo-a para horários aleatoriamente escolhidos. A função objetivo f (minimizada) é a soma penalizada do número de conflitos entre turmas e entre professores.

As meta-heurísticas Busca Tabu (Costa [10], Schaerf [30]) e Algoritmos Genéticos (Colomi et al. [8], Filho et al. [17]) são apresentadas nas Seções 3.1 e 3.2, respectivamente.

2.2 Grade de horários para cursos

O problema de grade de horários para cursos surge quando uma universidade (ou mesmo uma escola) oferece uma coleção de cursos (cada um consistindo de um número de aulas) e não existe um currículo pré-fixado; cada estudante pode escolher um certo número de cursos. O problema consiste em associar cada aula a algum horário da semana de modo que nenhum estudante tenha mais de uma aula por horário, respeitando um dado número de salas de aula e horários disponíveis. A principal diferença entre este problema e o problema de grade de horários em escolas de ensino fundamental e médio é que, cursos

universitários podem ter estudantes em comum enquanto que no outro os estudantes são separados em conjuntos disjuntos (turmas). Além disso, nos problemas universitários a disponibilidade de salas e suas capacidades são relevantes, mas nas escolas de ensino médio e fundamental, na maior parte dos casos, cada turma tem sua própria sala.

2.2.1 Problema básico de busca

Há várias formulações do problema de grade de horário de cursos universitários. Neste trabalho apresentaremos a formulação proposta por de Werra [11].

Considere q cursos K_1, \dots, K_q e para cada i , o curso K_i consiste de k_i aulas. Considere r currículos S_1, \dots, S_r , que são grupos de cursos que possuem estudantes em comum. Isto significa que os cursos em S_l devem todos ser agendados em tempos diferentes. O número de horários de aula é h e l_k é o número máximo de aulas que devem ser agendadas no horário de aula k (ou seja, o número de salas disponíveis no horário k). A formulação para o Problema de Cursos Universitários (PCU) segue abaixo:

$$\boxed{PCU} \quad \begin{array}{l} \text{Encontre} \quad y_{ik} \quad (i = 1, \dots, q; k = 1, \dots, h) \\ \text{sujeito a} \quad \sum_{k=1}^h y_{ik} = k_i \quad (i = 1, \dots, q) \end{array} \quad (2.25)$$

$$\sum_{i=1}^q y_{ik} \leq l_k \quad (k = 1, \dots, h) \quad (2.26)$$

$$\sum_{i \in S_l} y_{ik} \leq 1 \quad (l = 1, \dots, r; k = 1, \dots, h) \quad (2.27)$$

$$y_{ik} \in \{0, 1\} \quad (i = 1, \dots, q; k = 1, \dots, h)$$

onde, $y_{ik} = 1$ se a aula do curso K_i é agendada no horário k e $y_{ik} = 0$ caso contrário.

Restrições 2.25 impõem que cada curso tenha o número correto de aulas. As 2.26 garantem que não tenha mais aulas do que salas disponíveis em cada horário. Restrições 4.41 evitam que aulas conflitantes sejam agendadas no mesmo horário.

Através de uma redução do PCU para um problema de coloração de grafos, pode-se mostrar que ele é NP-completo.

Uma formulação equivalente ao PCU é baseada numa *matriz de conflitos* ao invés de se usar os currículos. A matriz $C_{q \times q}$ é uma matriz binária tal que $c_{ij} = 1$ se os cursos K_i e K_j têm estudantes em comum e $c_{ij} = 0$ caso contrário.

2.2.2 Problema de otimização

de Werra [11] incluiu no problema PCU a seguinte função objetivo:

$$\text{maximizar } \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^h d_{ik} y_{ik} \quad (2.28)$$

onde d_{ik} é a insatisfação de ter uma aula do curso K_i agendada no horário k .

Tripathy [36] considerou uma matriz de conflitos $C_{q \times q}$ com valores inteiros, tal que c_{ij} representa o número de estudantes que escolheram os cursos K_i e K_j . Deste modo, c_{ij} pode representar também a medida de insatisfação no caso em que uma aula do curso K_i e uma aula do curso K_j são agendadas no mesmo horário, ou seja, quanto mais alunos estiverem envolvidos nestes cursos, maior será a insatisfação de agendá-los no mesmo horário. Tripathy tenta minimizar a insatisfação global que é obtida como a soma de todas as insatisfações. Diversos autores separam as restrições em *essenciais* e *relaxadas*. As restrições essenciais definem o espaço de busca enquanto que as relaxadas são incluídas na função objetivo. Restrições essenciais geralmente incluem restrições de capacidade das salas com relação à quantidade de alunos e restrições referentes à distribuição de aulas durante a semana.

2.2.3 Restrições do problema

Seguem abaixo, algumas restrições freqüentemente encontradas na literatura:

- A esquematização de horários deve ser a mais compacta possível para o estudante. Pode ser que obter uma esquematização compacta para todos os alunos seja infactível, pois mesmo estudantes que deveriam possuir um mesmo quadro de disciplinas podem ter esquematizações de horários diferentes devido às disciplinas eletivas, divisão das turmas

em sub-grupos para aulas de laboratório, etc. Contudo, algumas restrições podem ser consideradas para se alcançar um nível mais satisfatório:

- Deve haver hora de almoço e jantar para todos os alunos, se possível. Esta restrição torna o esquema de horários mais fácil de ser seguido.
- Mudanças de salas de aula devem ser evitadas o máximo possível, pois causam barulho e perturbação.
- Considerar o número de alunos matriculados nos cursos para determinar qual sala de aula deve ser associada a eles, respeitando sua capacidade.

2.2.4 Variações do problema

- **Indisponibilidades e pré-agendamentos**

Pré-agendamentos e indisponibilidades não foram incluídos no PCU, mas podem ser incluídas da mesma maneira que em PTP4. É importante verificarmos que, no caso do problema de esquematização de horários para cursos universitários, o problema é NP-completo mesmo sem considerarmos possíveis indisponibilidades e pré-agendamentos. Logo, acrescentar estas restrições não aumenta sua complexidade como no caso da esquematização de horários para escolas de ensino fundamental e médio.

- **Subproblemas de múltiplas turmas e agrupamento**

Em certas universidades alguns cursos são repetidos mais de uma vez durante a semana. Em particular, alguns cursos que envolvem um grande número de estudantes e pertencem a muitos currículos são divididos em múltiplas turmas. A criação de turmas diferentes para um curso ajuda a reduzir o número de conflitos em uma esquematização de horários. Por exemplo, suponha que o currículo S_1 envolve os cursos K_1 e K_2 e o currículo S_2 envolve os currículos K_1 e K_3 . Suponha também que uma aula de K_2 foi agendada no horário p e uma aula de K_3 em q .

Neste caso, as aulas do curso K_1 não podem ser agendadas nem em p nem em q . Contudo, se o curso K_1 for dividido em duas turmas (uma contendo os alunos que fazem o curso K_2 e outra contendo alunos que fazem o curso K_3), então, uma turma pode ter uma aula agendada em p e outra em q .

Dada uma certa esquematização, o problema de agendar estudantes que possuem um determinado currículo a uma turma específica de um curso com a finalidade de minimizar conflitos é chamada de *subproblema de agrupamento*.

O subproblema de agrupamento é considerado, entre outros, em Laporte e Desroches [25], Aubin e Ferland [4], Hertz [19], Tripathy [36]. Para verificar a formulação matemática deste subproblema, ver (Laporte e Desroches [25]).

- **Horários de aula de diferentes tamanhos**

Até agora consideramos horários de mesma duração. Diversos autores consideraram também aulas de duração diferente.

Na maioria dos casos as aulas são agendadas em um número inteiro de horários. Por exemplo, em Ferland e Roy [16] as aulas podem ser agendadas em dois ou três horários de aula.

Além disso, temos que considerar para cada aula o tempo que ela inicia e sua duração. As restrições 2.26 e 4.41 podem ser substituídas por restrições que levam em consideração o fato de que duas aulas l_i e l_j , começando nos horários p e $q > p$ respectivamente, são conflitantes em $q - p < d_i$, onde d_i é o tamanho da aula l_i .

Hertz [20] trata de uma situação mais geral onde as aulas de um mesmo curso podem ter tamanhos variados.

- **Subproblema de agendamento de salas de aula**

O subproblema de agendamento consiste em associar turmas a salas de aula, dada uma esquematização de horários. Carter e Tovey [5] analisaram em detalhe este problema e deram várias soluções alternativas e suas variações. Eles também mostraram em quais casos o problema é

tratável e em quais ele é NP-completo. Em particular, eles mostraram que o problema torna-se NP-completo quando impomos a restrição de que todas as aulas de um curso devem ser associadas a uma mesma sala, enquanto que o problema é polinomial se considerarmos o agendamento em cada horário independentemente de outro.

Este subproblema pode também ser reduzido ao problema de coloração de nós de um hipergrafo (de Werra [11]). Um hipergrafo $H = (X, E)$ consiste de um conjunto finito de nós X e uma coleção E de arestas E_i ; cada aresta é um subconjunto do conjunto de nós. Se todo E_i contém exatamente 2 nós, temos um grafo. Associe para cada aresta E_i um número inteiro positivo e_i . Uma associação de cores aos nós de H será uma coloração de nós tal que em cada E_i não mais do que e_i nós tenham a mesma cor. Se H é um grafo e $e_i = 1$ para toda aresta E_i , temos o conceito de coloração de nós em um grafo. Agora, assuma que os cursos K_1, \dots, K_r têm que ser ministrados em um tipo de sala específica e que existem s salas deste tipo na escola. Associe um nó para cada aula destes cursos, uma aresta E_1 contendo todos estes nós e considere $e_1 = s$. Procedendo desta forma para todas as restrições similares, obteremos um hipergrafo cuja coloração será solução do subproblema considerado.

2.3 Grade de horários para exames

A grade horária para exames requer o agendamento de um dado número de exames (um para cada curso) dentro de um determinado intervalo de tempo. Este problema é similar ao problema de esquematização de horários de cursos universitários. Mas, é possível distinguir algumas diferenças entre os dois problemas. A esquematização de exames tem as seguintes características:

- Há somente um exame para cada matéria;
- É satisfatório que cada estudante tenha somente um exame por dia;
- O número h de horários pode variar, ao contrário da esquematização de horários de cursos universitários, que é fixo;
- Pode haver mais de um exame por sala.

2.3.1 Problema básico de busca

O problema básico de busca pode ser formulado de forma similar ao problema de cursos universitários.

Considere q cursos K_1, K_2, \dots, K_q e um exame para cada curso K_i . Considere também r grupos de exames S_1, \dots, S_r tal que cada S_l representa os exames que têm estudantes em comum associados a eles. O número de horários é h e l_k é o número máximo de exames que podem ser agendados no horário k (que não é necessariamente o número de salas disponíveis, pois podemos ter mais de um exame por sala). Esta formulação encontra-se em (Schaerf, 1995)[31]:

$$\boxed{PE} \quad \text{Encontre} \quad y_{ik} \quad (i = 1, \dots, q; k = 1, \dots, h)$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{k=1}^h y_{ik} = 1 \quad (i = 1, \dots, q) \quad (2.29)$$

$$\sum_{i=1}^q y_{ik} \leq l_k \quad (k = 1, \dots, h) \quad (2.30)$$

$$\sum_{i \in S_l} y_{ik} \leq 1 \quad (l = 1, \dots, r; k = 1, \dots, h) \quad (2.31)$$

$$y_{ik} \in \{0, 1\} \quad (i = 1, \dots, q; k = 1, \dots, h)$$

onde $y_{ik} = 1$ se o exame do curso K_i é agendado no horário k e $y_{ik} = 0$ caso contrário.

Como o PCU, o problema PE é NP-completo, o que pode ser mostrado através de uma redução deste problema ao problema de coloração em grafos.

2.3.2 Problema de otimização

Na maioria dos casos encontrados na literatura, as restrições relaxadas para o caso do problema de grade de horário para exames são *restrições de segunda ordem*. O sistema deve evitar que estudantes façam dois exames em horários consecutivos. Para alcançar este objetivo, podemos adicionar a seguinte função objetivo ao problema básico de busca PE:

$$\sum_{k=1}^p \sum_{kl=1}^r \sum_{i,j \in S_l} y_{ik} y_{jk+1} \quad (2.32)$$

Esta função contabiliza os exames que pertencem a um mesmo grupo S_l e que são agendados em horários adjacentes. Podemos verificar que o produto $y_{ik} y_{jk+1}$ dá 1 se y_{ik} e y_{jk+1} tomam valor 1.

Muitos autores (por exemplo, Mehta [26]) considera também em sua função objetivo o número de estudantes envolvidos em cada conflito. Em particular, a penalidade do conflito possui uma relação linear com este número.

Em Laporte e Desroches [24], os autores consideram restrições de alta ordem. Ou seja, eles penalizam também o fato de estudantes fazerem dois exames em horários de distância três, quatro ou cinco.

Carter, Laporte e Chinneck [6] generalizaram as restrições acima mencionadas considerando o fato de que um estudante é forçado a tomar x exames em k horários consecutivos. Este sistema considera como também como horários consecutivos o último horário de um dia com o primeiro do dia seguinte, e um horário antes com um horário depois do almoço. A insatisfação de um estudante que tem que fazer exames em horários consecutivos não é sempre a mesma.

2.3.3 Variações do problema

- **Indisponibilidades e pré-agendamentos**

Em problemas reais, indisponibilidades e pré-agendamentos são geralmente levados em conta. Estas restrições podem ser embutidas no modelo exatamente como no problema PTP4.

- **Agendamento de salas**

Exames precisam ser designados a salas baseando-se no número de estudantes que necessitam fazê-los e a capacidade das salas.

Alguns autores (por exemplo, Carter et al. [6]) permitiram somente um exame por sala em um dado horário. Neste caso, o problema de

associar exames às suas respectivas salas pode ser resolvido em tempo polinomial através de uma heurística gulosa.

Se permitimos mais de um exame por sala o problema torna-se NP-completo (Schaerf [31]).

Houve autores, como Laporte e Desroches [24]) que consideraram diferentes tipos de salas, e que alguns exames deveriam ter salas específicas para sua realização. Além disto, alguns exames poderiam ser divididos em duas ou mais salas, no caso em que uma única sala não comporta todos os estudantes.

- **Minimizar intervalo de tempo**

Diferente do problema de grade de horários semanal, no caso dos exames é desejável que estes ocorram no menor intervalo de tempo possível. Neste caso, o número de horários p torna-se parte da função objetivo. Note que se reduzirmos o problema a um problema de coloração em grafos então o problema resultante é minimizar o número de cores a serem utilizadas na coloração.

Capítulo 3

Meta-Heurísticas

Muitos problemas práticos são modelados da seguinte forma: dado um conjunto S de variáveis discretas s (chamadas soluções) e uma função objetivo $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, que associa cada solução $s \in S$ a um valor real $f(s)$, encontre a solução $s^* \in S$, dita ótima, para a qual $f(S)$ é mínima.

Grande parte desses problemas são classificados na literatura como NP-completos, isto é, são problemas para os quais não sabemos da existência de algoritmos que os resolvam em tempo polinomial. Tais problemas são enquadrados como *problemas de otimização combinatória*.

Para citarmos um exemplo bem conhecido, considere Problema do Caixeiro Viajante (PCV). O PCV é descrito por um conjunto de n cidades e uma matriz de distância entre elas e tem o seguinte objetivo: o caixeiro viajante deve sair de uma cidade chamada origem, visitar cada uma das $n - 1$ cidades restantes apenas uma única vez e retornar para a cidade de origem percorrendo a menor distância possível. Em outras palavras, devemos encontrar uma rota fechada (ciclo hamiltoniano) de comprimento mínimo que passe exatamente uma única vez por cada cidade.

A dificuldade da solução do PCV está no número elevado de soluções existentes. Assumindo que a distância de uma cidade i à outra j seja simétrica, isto é, que $d_{ij} = d_{ji}$, o número total de rotas possíveis é $(n - 1)!/2$. Mesmo considerando os rápidos avanços tecnológicos de computadores, uma enumeração completa de todas estas rotas é inconcebível para valores elevados de n . Para mostrarmos a magnitude dos tempos envolvidos para a resolução do PVC por enumeração, para $n = 20$, temos 6×10^{16} rotas possíveis. Desta forma, um computador que avalia uma rota em cerca de 10^{-8} segundos levaria 19 anos para encontrar a melhor rota!

É possível dar uma certa “inteligência” a um método de enumeração utilizando, por exemplo, as técnicas *branch and bound* ou *branch and cut*, de forma a reduzir o número de soluções que devem ser analisadas no espaço de busca. Com isto, pode ser possível resolver problemas de dimensões um pouco mais elevadas. Entretanto, certamente haverá uma dimensão acima da qual o problema se torna intratável computacionalmente.

Portanto, em problemas dessa natureza, o uso de métodos exatos se torna bastante restrito. Por outro lado, na prática, é suficiente encontrarmos uma “boa” solução para o problema, ao invés do ótimo global (encontrado após um considerável esforço computacional). Este é o motivo pelo qual os pesquisadores têm concentrado esforços na utilização de *heurísticas* para solucionar problemas desse nível de complexidade. Definimos heurística como sendo uma técnica que procura boas soluções a um custo computacional razoável, contudo não garantindo a otimalidade global. O desafio é, então, produzir em tempo reduzido soluções tão próximas quanto possível da solução ótima. Muitos esforços têm sido feitos nessa direção e heurísticas muito eficientes foram desenvolvidas para diversos problemas. Entretanto, a maioria destas heurísticas desenvolvidas é muito específica para um problema particular, não sendo eficiente (ou mesmo aplicável) na solução de uma classe mais ampla de problemas.

Somente a partir da década de 1980 intensificaram-se os estudos no sentido de desenvolver procedimentos heurísticos com uma certa estrutura teórica e com caráter mais geral, sem prejudicar a principal característica destes, que é a flexibilidade.

Essa meta tornou-se mais realista a partir da reunião de conceitos das áreas de Otimização e Inteligência Artificial, viabilizando a construção das chamadas melhores estratégias ou dos métodos “inteligentemente flexíveis”, comumente conhecidos como *meta-heurísticas*.

Esses métodos possuem como característica básica estruturas com uma maior rigidez que as encontradas nos métodos clássicos de otimização sem, contudo, emergir em uma flexibilidade caótica.

Contrariamente às heurísticas convencionais, as meta-heurísticas são de caráter geral e têm condições de escapar de ótimos locais.

As meta-heurísticas, assim como os métodos de busca local tradicionais, diferenciam-se entre si basicamente pelas seguintes características:

1. Critério de escolha de uma solução inicial;
2. Definição da vizinhança $N(s)$ de uma solução s ;

3. Critério de seleção de soluções vizinhas de s em $N(s)$;
4. Critério de término do processo.

Dentre os procedimentos enquadrados como meta-heurísticas que surgiram ao longo das últimas décadas, destacam-se: Algoritmos Genéticos (AG's) [27], *Simulated Annealing* (SA) [2], Busca Tabu (BT) [33], etc.

A primeira meta-heurística fundamenta-se em uma analogia com processos naturais, inspirado nos princípios da evolução natural.

O SA explora uma possível analogia com a termodinâmica, enquanto que a BT faz uso de uma memória flexível para tornar o processo de busca mais eficaz.

Apresentaremos nas seguintes seções a descrição mais detalhada de algumas meta-heurísticas que utilizaremos no desenvolvimento do trabalho proposto, bem como suas aplicações em alguns trabalhos encontrados. Na Seção 3.1 descreveremos a Busca Tabu e na Seção 3.2 os Algoritmos Genéticos.

3.1 Busca Tabu

Descrevemos a seguir, de forma resumida, os princípios básicos da Busca Tabu (BT). Referenciamos a Glover e Laguna [33] para maior detalhamento do método.

A Busca Tabu é um procedimento adaptativo, dotado de uma estrutura de memória, que aceita movimentos de piora para escapar de ótimos locais.

Mais especificamente, começando de uma solução inicial s_0 , um algoritmo BT explora, a cada iteração, um subconjunto V da vizinhança $N(s)$ da solução corrente s . O membro s' de V com melhor valor nessa região segundo a função $f(\cdot)$ torna-se a nova solução corrente mesmo que s' seja pior que s , isto é, que $f(s') > f(s)$ para um problema de minimização.

Chama-se um *movimento* a operação através da qual cada solução $s' \in N(s)$ é alcançada de s (Glover e Laguna [33]). O *valor de um movimento* de uma solução s para uma nova solução s' é a melhora ou piora da função objetivo, ou seja, o valor $f(s') - f(s)$.

O critério de escolha do melhor vizinho é utilizado para escapar de um ótimo local. Esta estratégia, entretanto, pode fazer com que o método retorne a soluções geradas anteriormente.

De forma a evitar que isto ocorra, existe uma *lista tabu* T , a qual é uma lista de movimentos proibidos. A lista tabu clássica contém os movimentos

reversos aos últimos $|T|$ movimentos realizados (onde $|T|$ é um parâmetro do método) e funciona como uma fila de tamanho fixo, isto é, quando um novo movimento é adicionado à lista, o mais antigo sai. Assim, na exploração do subconjunto V da vizinhança $N(s)$ da solução corrente s ficam excluídos da busca os vizinhos s' que são obtidos de s por movimentos m que constam na lista tabu.

Por um lado, a lista tabu reduz o risco de ciclagem (uma vez que ela garante o não retorno por $|T|$ iterações a uma solução já visitada anteriormente), mas por outro, também pode proibir movimentos para soluções que ainda não foram visitadas e que podem ser boas. Assim, existe uma *função de aspiração*, que é um mecanismo que retira, sob certas circunstâncias, o *status* tabu de um movimento. Mais precisamente, existe um nível de aspiração $A(v)$ para cada possível valor v da função objetivo; uma solução s' em V pode ser gerada se $f(s') \leq A(f(s))$, mesmo que o movimento m esteja na lista tabu. A função de aspiração A é tal que, para cada valor v da função objetivo, retorna outro valor $A(v)$ que representa o valor que o método aspira ao chegar de v . Considerando uma função objetivo de valores inteiros, um exemplo simples de aplicação desta idéia é considerar $A(f(s)) = f(s^*) - 1$ onde s^* é a melhor solução encontrada até então. Neste caso, aceita-se um movimento tabu se ele conduzir a um vizinho melhor que s^* .

Dois regras são normalmente utilizadas para interromper o procedimento. Pela primeira, pára-se quando é atingido um certo número máximo de iterações sem melhora no valor da melhor solução. Pela segunda, quando o valor da melhor solução chega a um limite inferior conhecido (ou próximo dele). Esse segundo critério evita a execução desnecessária do método quando uma solução ótima é encontrada ou quando uma solução é considerada suficientemente boa.

Os parâmetros principais de controle do método de Busca Tabu são a cardinalidade $|T|$ da lista tabu, a função de aspiração A , a cardinalidade do conjunto V de soluções vizinhas testadas a cada iteração e $BTmax$ o número máximo de iterações sem melhora no valor da melhor solução.

Apresenta-se, pela Figura 3.1, o pseudo-código de um método de Busca Tabu básico. Neste procedimento f_{min} é o valor mínimo conhecido da função f , informação essa que em alguns casos está disponível.

É comum no método de Busca Tabu incluir-se *estratégias de intensificação*, as quais têm por objetivo concentrar a pesquisa em determinadas regiões consideradas promissoras. Uma estratégia típica é retornar às soluções já visitadas para explorar sua vizinhança de forma mais efetiva. Outra estratégia

```

procedimento  $BT((\cdot), N(\cdot), A(\cdot), |V|, f_{min}, |T|, BT_{max}, s)$ 
1   $s^* \leftarrow s;$            {Melhor solução obtida até então}
2   $Iter \leftarrow 0;$        {Contador do número de iterações}
3   $MelhorIter \leftarrow 0;$  {Iteração mais recente que forneceu  $s^*$ }
4   $T \leftarrow \emptyset$     {Lista Tabu}
5  Inicialize a função de aspiração  $A$ ;
6  enquanto  $(f(s) > f_{min}$  e  $Iter - MelhorIter < BT_{max})$  faça
7       $Iter \leftarrow Iter + 1;$ 
8      Seja  $s' \leftarrow s \oplus m$  o melhor elemento de  $V \subset N(s)$  tal que
          o movimento  $m$  não seja tabu ( $m \notin T$ ) ou
           $s'$  atenda a condição de aspiração ( $f(s) < A(f(s))$ );
9       $T \leftarrow T - \{\text{movimento mais antigo}\} + \{\text{movimento que gerou } s'\};$ 
10     Atualize a função de aspiração  $A$ ;
11      $s \leftarrow s';$ 
12     se  $(f(s) < f(s^*))$  então
13          $s^* \leftarrow s;$ 
14          $MelhorIter \leftarrow Iter;$ 
15     fim-se;
16 fim-enquanto;
17  $s \leftarrow s^*;$ 
18 Retorne  $s$ ; fim  $BT$ 

```

Figura 3.1: Procedimento de Busca Tabu

consiste em incorporar características das melhores soluções já encontradas durante o progresso da pesquisa e estimular componentes dessas soluções a tornarem-se parte da solução corrente. Nesse caso, são consideradas livres no procedimento de busca local apenas as componentes não associadas às boas soluções, permanecendo as demais componentes fixas. Um critério de término, tal como número fixo de iterações, é utilizado para encerrar o período de intensificação.

O método de Busca Tabu também podem incluir *estratégias de diversificação*. O objetivo dessas estratégias, que tipicamente utilizam uma memória de longo prazo, é redirecionar a pesquisa para regiões ainda não suficientemente exploradas do espaço de soluções. Estas estratégias procuram, ao contrário das estratégias de intensificação, gerar soluções com características significativamente diferentes daquelas encontradas nas melhores soluções obtidas. A diversificação, em geral, é utilizada somente em algumas situações, como por exemplo, quando dada uma solução s , não existem movimentos m de melhora para ela, indicando que o procedimento já exauriu a análise naquela região. Para escapar dessa região, a idéia é estabelecer uma penalidade $w(s, m)$ para uso desses movimentos. Um número fixo de iterações sem melhora no valor da melhor solução corrente é, em geral, utilizado para acionar estas estratégias.

A Busca Tabu pode incluir *listas tabu dinâmicas*, muitas das quais atualizadas de acordo com o progresso da pesquisa. A grande vantagem de se utilizar uma lista tabu de tamanho dinâmico é que se minimiza a possibilidade de ciclagem.

3.1.1 Busca Tabu e problema turma-professor

Muitos trabalhos trouxeram a aplicação da Busca Tabu para resolução do problema de grade de horários em escolas de ensino fundamental e médio — ou problema turma-professor (PTP) — e obtiveram soluções satisfatórias. Uma destas aplicações encontra-se em Schaerf [30]. Neste trabalho, foi considerada a função objetivo como sendo a soma dos números que representam a quantidade de vezes que foram encontradas determinadas infactibilidades na grade de horários multiplicadas por seus respectivos pesos. A grade foi representada, como pode ser visto na Figura 3.2, como uma matriz de valores inteiros $Q_{n \times h}$, onde cada linha j representa o agendamento semanal do professor j .

Cada entrada q_{ij} pode conter o nome da turma (“1A”, “2A”, ...), horários

Professor	Segunda				Terça				...
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_1	h_2	h_3	h_4	...
P_1	0	3A	3A	<>	0	0	<>	2A	...
P_2	2B	4A	5A	5A	4A	<>	**	--	...
P_3	2e	2d	3D	4B	3A	2A	1A	4A	...
P_4	2E	2D	1D	4C	3C	2B	1B	3B	...

Figura 3.2: Representação de uma grade de horários

nos quais o professor é agendado para estar disponível na escola “<>”, indisponibilidades “--”(quando o professor não está na escola) e “**”(quando o professor está na escola), ou “0”quando o horário está disponível para agendamento.

Um dos movimentos utilizados por Schaerf [30] consiste em trocar dois valores distintos em uma dada linha da matriz (ver Figura 3.3), exceto “--”e “**”. Este movimento, chamado *simples*, foi identificado pela 3-upla $\langle p, h_1, h_2 \rangle$. O segundo movimento, denominado *duplo*, é composto de um movimento simples e um outro movimento que repara a infactibilidade ou uma das infactibilidades criadas pelo primeiro, trocando uma aula que provoca conflito com outra já inserida.

Schaerf [30] considerou grades infactíveis no espaço de busca. Em seu trabalho, a solução inicial é obtida com o agendamento aleatório das aulas de cada professor, respeitando a matriz de requerimentos, ou usando execuções passadas. O método alterna entre uma fase com um tipo de busca local chamada *método aleatório não-ascendente (RNA)* e uma fase com busca tabu (BT). Durante a fase (RNA) o peso utilizado para as infactibilidades na função objetivo são fixos e na fase (BT) os pesos são ajustados dinamicamente conforme a história da busca. A lista tabu utilizada neste trabalho tem tamanho variável e a função de aspiração é dada por $A(f(s)) = f(s^* - 1)$.

Costa [10] considerou dois grupos de restrições: *essenciais* e *relaxadas*, como explicado na Seção 2.1.3. Neste caso, a função objetivo reflete o grau de violação das restrições relaxadas de uma grade de horários Q . Para gerar uma solução inicial, as aulas são ordenadas de acordo com sua disponibilidade, ou seja, primeiro são agendadas as aulas com menor número de horários disponíveis. A vizinhança $N(Q)$ de uma grade de horários Q consiste de todas as grades factíveis que são obtidas de Q ao se alterar o horário de apenas uma aula. Para prevenir ciclagem, duas listas tabu T_1 e T_2 são consideradas.

Grade de horários antes da movimentação

Professor	Segunda				Terça				...
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_1	h_2	h_3	h_4	...
P_1	0	3A	3A	<>	0	0	<>	2A	...
P_2	2B	4A	5A	5A	4A	<>	**	--	...
P_3	2e	2d	3D	4B	3A	2A	1A	4A	...
P_4	2E	2D	1D	4C	3C	2B	1B	3B	...

Movimento simples

Professor	Segunda				Terça				...
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_1	h_2	h_3	h_4	...
P_1	0	3A	3A	<>	0	2A	<>	0	...
P_2	2B	4A	5A	5A	4A	<>	**	--	...
P_3	2e	2d	3D	4B	3A	2A	1A	4A	...
P_4	2E	2D	1D	4C	3C	2B	1B	3B	...

Movimento reparador

Professor	Segunda				Terça				...
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_1	h_2	h_3	h_4	...
P_1	0	3A	3A	<>	0	2A	<>	0	...
P_2	2B	4A	5A	5A	4A	<>	**	--	...
P_3	2e	2d	3D	4B	3A	4A	1A	2A	...
P_4	2E	2D	1D	4C	3C	2B	1B	3B	...

Figura 3.3: Movimentos em uma grade de horários

Sempre que uma aula l é movida de um horário h_1 para um horário h_2 ($h_1 \neq h_2$), l é introduzida em T_1 e o par (l, h_1) em T_2 . Ou seja, durante $|T_1|$ iterações da BT a aula l não pode ter seu horário trocado e durante $|T_2|$ iterações l não pode ter seu horário como sendo h_1 novamente. A lista T_2 só tem sentido se $|T_1| < |T_2|$. Para definir as funções de aspiração, Costa [10] separou a função objetivo em duas partes $g_1(Q)$ e $g_2(Q)$ tal que a classificação tabu de um movimento que gera Q' é cancelado se:

$$\{g_1(Q') < A_1(g_1(Q))\} \text{ ou } \{[g_1(Q') = A_1(g_1(Q))] \text{ e } [g_2(Q') < A_2(g_1(Q))]\}$$

Durante o processo da BT somente aulas que violam as restrições re-

laxadas têm seus horários modificados. Costa [10] introduziu diversidade alterando os pesos de algumas restrições relaxadas mais relevantes.

Em Souza et al. [34] foi utilizada a representação de uma grade horária como sendo uma matriz $Q_{n \times h}$ de valores inteiros, onde $q_{ik} \in \{-1, 0, 1, 2, \dots, m\}$ indica a atividade do professor i no horário de aula k . Os valores positivos representam as turmas, o valor negativo indica que o professor está indisponível, enquanto que o valor nulo representa que o professor não está envolvido em nenhuma atividade de aula. A vizinhança da grade horária Q será constituída de grades Q' , tal que Q' é obtida de Q através da mudança de dois valores distintos, e não-negativos, valores de uma dada linha de Q .

O método proposto neste trabalho, chamado GTS-II, é uma heurística GRASP na qual uma solução inicial é gerada por um procedimento construtivo parcialmente guloso. Um método de BT é implementado para refinamento da solução, utilizando o movimento anteriormente explicado para exploração da vizinhança $N(Q)$. Quando uma grade Q — que não apresenta turmas com mais de um professor e turmas sem aula em algum horário — é encontrada, aplica-se uma técnica de busca local chamada Intraturmas-Interturmas como ilustrada a seguir.

Vamos assumir que uma solução Q_1 com nenhuma infactibilidade é encontrada. Então, o grafo da turma j é definido por $G_j = (V_j, A_j)$, onde V_j é o conjunto de horários de aula reservados para a turma j . A_j é um conjunto de arcos orientados e definido como $A_j = \{(k, \bar{k}) : \text{o professor que ensinará a turma } j \text{ no horário } k \text{ está disponível no horário } \bar{k}, \text{ e se sua aula for transferida de } k \text{ para } \bar{k}, \text{ não viola a condição da turma } j \text{ ter no máximo duas aulas deste professor em um mesmo dia}\}$. A cada arco $(k, \bar{k}) \in G_j$ é associado um custo $\Delta f_i(k, \bar{k}) = f_i(\bar{k}) - f_i(k)$, que leva em conta somente os requerimentos por parte dos professores. Considere o fragmento de uma grade de horários na Figura 3.4, onde P_1, \dots, P_4 representam os professores, h_1, \dots, h_5 horários em um mesmo dia. A, B, C, D representa um conjunto de turmas, $(-)$ representa que o professor está indisponível e células vazias representam horários sem atividade agendada.

A Figura 3.5 representa o grafo G_A da turma A .

Cada horário de aula é representado por um vértice ao qual o respectivo professor é associado. O custo -1 do arco (h_1, h_5) indica que se o professor P_1 transferir sua aula do horário h_1 para o horário h_5 a função objetivo

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	f_i
P_1	A		B	B		1
P_2	B	C		A	A	1
P_3		B	A	C	B	0
P_4	C	A	C	D	-	0

Figura 3.4: Grade de horários Q_1

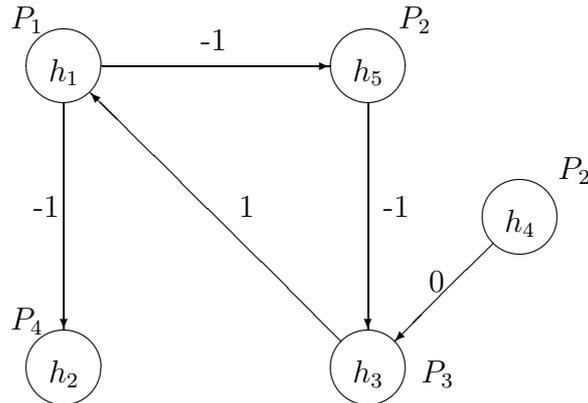


Figura 3.5: G_A , grafo da turma A

será reduzida de 1 unidade. Com a finalidade de encontrar uma grade de horários que apresente um valor menor para a função objetivo, procura-se ciclos de custo negativo, como $C_1 = \{(h_1, h_5), (h_5, h_3), (h_3, h_1)\}$, definindo uma seqüência de movimentos *intraturmas*. Na Figura 3.6 temos a grade Q'_1 , que é resultante da execução dos movimentos do ciclo C_1 .

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	f_i
P_1			B	B	A	0
P_2	B	C	A	A		0
P_3	A	B		C	B	1
P_4	C	A	C	D	-	0

Figura 3.6: Grade de horários Q'_1

Quando não há mais ciclos, repete-se o procedimento para as demais turmas. No final, podem restar alguns arcos com custo negativo. Na Figura 3.7,

há um arco com custo negativo de k para \bar{k} na turma j , ou seja, $\Delta f_i^j(k, \bar{k}) < 0$.

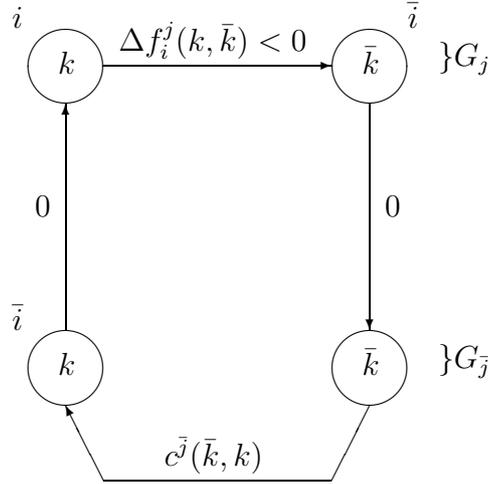


Figura 3.7: Grafos das turmas j e \bar{j} resultantes do procedimento Intraturmas

Esta transferência, entretanto, não pode ocorrer porque o professor \bar{i} , do horário \bar{k} , não está disponível no horário k (neste horário, ele está lecionando para a turma \bar{j}). Seja $c^{\bar{j}}(\bar{k}, k)$ o custo do caminho mais curto de \bar{k} para k em $G_{\bar{j}}$. A existência de um ciclo de custo negativo é verificado se a condição $\Delta f_i^j(k, \bar{k}) + c^{\bar{j}}(\bar{k}, k) < 0$ é satisfeita ao transferir o professor \bar{i} da turma j para a turma \bar{j} no horário de aula \bar{k} . Esta seqüência de arcos define os chamados movimentos *interturmas*.

No trabalho de Souza et al. [35] foi utilizada memória de longo prazo para guiar o procedimento de diversificação da BT. Neste caso, a frequência dos movimentos envolvendo cada professor e turma são avaliados, e, durante o procedimento de diversificação, a seleção dos movimentos prioriza a execução daqueles que foram pouco explorados (que possuem baixa frequência). Cada vez que um movimento é executado, as frequências são atualizadas. Estas frequências são zeradas cada vez que uma solução melhor é encontrada.

3.2 Algoritmo Genético

Trata-se de uma meta-heurística que se fundamenta em uma analogia com os processos naturais de evolução, nos quais, dada uma população, os indivíduos

com características genéticas melhores têm maiores chances de sobrevivência e de produzirem filhos cada vez mais aptos, enquanto indivíduos menos aptos tendem a desaparecer.

No Algoritmo Genético (AG), cada cromossomo (indivíduo da população) está associado a uma solução do problema e cada gene está associado a uma componente da solução. Um mecanismo de reprodução, baseado em processos evolutivos, é aplicado sobre a população com o objetivo de explorar o espaço de busca e encontrar melhores soluções para o problema.

Mais especificamente, um Algoritmo Genético inicia sua busca com uma população $\{s_0^1, s_0^2, \dots, s_0^n\}$, geralmente escolhida aleatoriamente, a qual é chamada população no tempo 0.

O procedimento principal é um laço que cria uma população $\{s_{t+1}^1, s_{t+1}^2, \dots, s_{t+1}^n\}$ no tempo $t + 1$ a partir de uma população do tempo t . Para atingir esse objetivo, os indivíduos da população do tempo t passam por uma fase de reprodução, a qual consiste em selecionar indivíduos para operações de *recombinação* e/ou *mutação*.

Na operação de recombinação, os genes de dois cromossomos-pais são combinados de forma a gerar cromossomos-filhos (normalmente dois), de sorte que para cada cromossomo-filho há um conjunto de genes de cada um dos genes dos cromossomos pais. A operação de mutação consiste em alterar aleatoriamente uma parte dos genes de cada cromossomo (componentes da solução). Ambas as operações são realizadas com uma certa probabilidade. A operação de recombinação é realizada normalmente com uma probabilidade mais elevada (em torno de 80%) e a de mutação com uma baixa probabilidade (de 1 a 2%, em geral).

Gerada a nova população do tempo $t + 1$, define-se a população sobrevivente, isto é, as n soluções que integrarão a nova população. Para definir a população sobrevivente, cada solução é avaliada por uma *função de aptidão* f . Os critérios comumente usados para escolher cromossomos sobreviventes são os seguintes:

- aleatório;
- roleta (onde a chance de sobrevivência de cada cromossomo é proporcional ao seu nível de aptidão);
- misto, ou seja, uma combinação dos dois critérios anteriores.

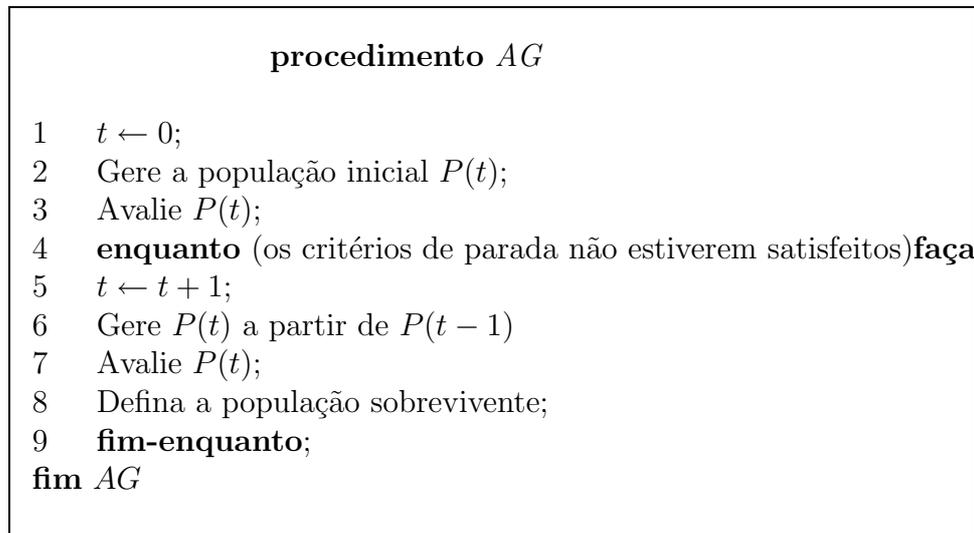


Figura 3.8: Algoritmo Genético

Em qualquer um desses critérios admite-se, portanto, a sobrevivência de indivíduos menos aptos. Isto é feito de forma a tentar-se escapar de ótimos locais.

O método termina, em geral, quando um certo número de populações é gerado ou quando a melhor solução encontrada atinge um certo nível de aptidão ou ainda, quando não há melhora após um certo número de iterações.

Os parâmetros principais de controle do método são: o tamanho n , da população, a probabilidade da operação *crossover* a probabilidade de mutação, o número de gerações e o número de iterações sem melhora.

O pseudocódigo de um Algoritmo Genético básico está descrito na Figura 3.8.

3.2.1 Algoritmo Genético e problema turma-professor

Em Colorni et al. [8] resolveu-se um problema de grade de horários em uma escola italiana através de um Algoritmo Genético (AG). Eles consideraram como população um conjunto de grade de horários (representadas como uma matriz da mesma forma que em Schaerf [30], com alfabeto um pouco diferenciado, cada indivíduo como sendo uma grade de horários e cada horário de aula como sendo um gene. A função objetivo foi relacionada à função

Indivíduo i antes da mutação									
Professor	Segunda				Terça				...
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_1	h_2	h_3	h_4	...
P_1	0	3A	3A	0	0	0	0	2A	...
P_2	2B	4A	5A	5A	4A	0	0	--	...
P_3	2C	2A	3D	4B	3A	2A	1A	4A	...
P_4	2E	2D	1D	4C	3C	2B	1B	3B	...

Indivíduo i depois da mutação									
Professor	Segunda				Terça				...
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_1	h_2	h_3	h_4	...
P_1	0	3A	3A	0	0	0	0	2A	...
P_2	2B	4A	5A	5A	4A	0	0	--	...
P_3	2A	1A	4A	4B	3A	2C	2A	3D	...
P_4	2E	2D	1D	4C	3C	2B	1B	3B	...

Figura 3.9: Mutação de ordem $k = 3$

de adaptação (função “fitness”) através de um procedimento de escalação linear dinâmica da adaptação, ou seja, a cada geração os valores máximo e mínimo obtidos da função objetivo dos indivíduos definem um intervalo no eixo das funções objetivo, o qual é mapeado linearmente num intervalo definido no eixo das funções de adaptação, limitado por duas constantes do sistema $MINFIT$ e $MAXFIT$.

A população inicial é obtida através de agendamento aleatório das aulas, obedecendo a carga didática de cada professor e os horários que possuem pré-agendamentos ou indisponibilidades. Os seguintes operadores foram utilizados:

Reprodução: promove indivíduos com valor de função de adaptação acima da média da população.

Mutação de ordem k : pega k genes contíguos e os troca com outros k genes contíguos em uma mesma linha da matriz $Q_{p \times h}$ (ver Figura 3.9). Não pode ser aplicado se, na operação, estiver envolvido algum horário que tenha uma atividade pré-definida ou alguma indisponibilidade associada e que não pode ter seu horário trocado.

Mutação de dias: este operador troca o agendamento de um dia da

semana com o agendamento de outro dia da semana, em uma mesma linha, obedecendo as mesmas restrições consideradas no operador mutação de ordem k .

Crossover: o objetivo deste operador é recombinar eficientemente partes das soluções, ou seja, dados dois pais, gera-se dois filhos com valores de função de adaptação melhores (ou pelo menos um filho com melhor função de adaptação). Chama-se *função de adaptação local* a parcela da função de adaptação referente a um determinado professor. Escolhidos dois indivíduos da população, R_1 e R_2 , ordena-se as linhas de R_1 em ordem decrescente de função de adaptação local, e suas melhores k_1 linhas constituem um bloco. Então, as $p - k_1$ linhas restantes são tomadas de R_2 para geração do primeiro filho. O segundo filho é gerado com as linhas não utilizadas de R_1 e R_2 como podemos verificar na Figura 3.10.

Em Di Stefano e Tettamanzi [13] um indivíduo em uma população, isto é, uma grade de horário, é representado por um vetor de inteiros, como ilustrado pela Figura 3.11. Cada posição i do vetor representa um gene e indica que a i -ésima aula terá início no horário representado pelo inteiro alocado nesta posição. A função de adaptação foi considerada da forma:

$$f(g) = \frac{1}{1 + \sum_i \alpha_i h_i} + \frac{\gamma}{1 + \sum_i \beta_j s_j}$$

onde $h_i \in \mathbb{R}^+$ é a penalidade associada à violação da i -ésima restrição essencial, com peso $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$, e $s_j \in \mathbb{R}^+$ é a penalidade associada ao grau de violação da j -ésima restrição relaxada, cujo peso relativo é dado por $\beta_j \in \mathbb{R}^+$. Finalmente, $\gamma \in \{0, 1\}$ é 0 quando todas as restrições relaxadas são satisfeitas e 1 caso contrário.

No trabalho de Wilke et al. [37] a representação de um indivíduo, que neste caso é uma grade de horários, foi feita através de uma matriz $Q_{t \times h}$ onde cada linha i da matriz representa a grade de horários para a turma i (gene). A entrada q_{ik} indica o professor que irá ensinar a turma i no horário de aula k .

Indivíduo R_1 com linhas organizadas por ordem decrescente de função de adaptação local

Professor	Segunda				Terça				...	f.a.l.
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_1	h_2	h_3	h_4	...	
P_3	0	3A	3A	0	0	0	0	2A	...	0.75
P_2	2B	4A	5A	5A	4A	0	0	–	...	0.70
P_1	2C	2A	3D	4B	3A	2A	1A	4A	...	0.62
P_4	2E	2D	1D	4C	3C	2B	1B	3B	...	0.51

Indivíduo R_2

Professor	Segunda				Terça				...
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_1	h_2	h_3	h_4	...
P_1	3A	3A	0	0	0	0	0	3B	...
P_2	4A	5A	5A	4A	0	0	0	0	...
P_3	2A	1A	4A	4B	3A	2C	2A	3D	...
P_4	2D	1D	4C	3C	2B	0	2E	–	...

Filho 1

Professor	Segunda				Terça				...
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_1	h_2	h_3	h_4	...
P_1	3A	3A	0	0	0	0	0	3B	...
P_2	2B	4A	5A	5A	4A	0	0	–	...
P_3	0	3A	3A	0	0	0	0	2A	...
P_4	2D	1D	4C	3C	2B	0	2E	–	...

Filho 2

Professor	Segunda				Terça				...
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_1	h_2	h_3	h_4	...
P_1	2C	2A	3D	4B	3A	2A	1A	4A	...
P_2	4A	5A	5A	4A	0	0	0	0	...
P_3	2A	1A	4A	4B	3A	2C	2A	3D	...
P_4	2E	2D	1D	4C	3C	2B	1B	3B	...

Figura 3.10: Crossover com $k_1 = 2$

5	16	2	11	...	35	33	27
---	----	---	----	-----	----	----	----

Figura 3.11: Representação de um indivíduo

Capítulo 4

Apresentação de problemas reais

Neste capítulo estão descritos os problemas reais abordados, bem como duas formulações matemáticas. Na Seção 4.1 apresentamos as características de duas escolas estaduais em Campinas–São Paulo. Os modelos matemáticos foram descritos nas Seções 4.2 e 4.3.

Problemas similares a este são tratados em Souza et al. [35], Souza et al. [34] e em Filho e Lorena [17].

4.1 Problema a ser considerado

Consideramos, como base para nosso trabalho, o problema geralmente encontrado em escolas públicas do Estado de São Paulo. Este problema trata do agendamento semanal do encontro entre professores e turmas. Chamamos este encontro de aula. A grade de horário destas instituições é constituída por $t = 1, \dots, k$ turnos (manhã, tarde, noite), cada turno t com d_t dias de aula por semana (geralmente de segunda à sexta-feira) e cada dia possuindo h_{d_t} horários de aula, o que define um total de $h = d_1 h_{d_1} + \dots + d_t h_{d_t}$ horários de aula por semana em um turno. Como explicado em capítulos anteriores, um horário de aula é a unidade de tempo de uma aula. Há um conjunto P de professores que ensinam um conjunto T de turmas, onde uma turma constitui um conjunto disjunto de alunos que possuem um mesmo currículo de disciplinas. As aulas para uma turma t ocorrem em uma única sala. Desta forma, estas salas são pré-determinadas no início de cada ano pela coorde-

nadoria e, portanto, a associação turma-sala não precisa ser considerada no problema de agendamento das aulas. A associação dos professores às turmas e a carga didática do professor são informadas pela matriz de requerimentos $R_{p \times t}$, onde r_{ij} indica o número de aulas que o professor i tem que lecionar para turma j .

As turmas estão sempre disponíveis em seus turnos de aula — uma turma possui suas aulas em somente um turno — e precisam ter suas grades de horário completamente preenchidas, enquanto que os professores precisam indicar os horários nos quais eles podem ou não lecionar (estão disponíveis ou não).

Os professores podem ministrar aulas em mais de um turno e podem lecionar mais de uma disciplina por turno. Contudo, uma turma t tem todas as aulas de uma determinada disciplina ministradas por um único professor p . Por exemplo, não pode haver mais de um professor lecionando Matemática para uma mesma turma.

As aulas de Educação Física (EF) devem ocorrer em quadras de esporte. As escolas possuem um número limitado NQ de quadras de esporte e, quando há mais de NQ aulas desta disciplina em um determinado horário de aula, estas aulas excedentes são ministradas em sala de aula como aulas teóricas.

Deste modo, este problema deve satisfazer as seguintes restrições essenciais:

1. Cada professor deve dar o número correto de aulas que lhe é requerido;
2. a cada turma deve ser associado somente um professor por horário de aula;
3. a cada professor deve ser associada, no máximo, uma turma por horário de aula, respeitando-se a disponibilidade deste professor;
4. por motivos pedagógicos, deve haver no máximo duas aulas de um mesmo professor para uma mesma turma no período de um dia.

Também deseja-se que a grade de horário apresente as seguintes características não-essenciais:

1. Os dias de aulas do professor p para turma t devem ser alternados, ou seja, se no dia d a turma t tem aula do professor p então o próximo dia não deve ter;

2. evitar “janelas” (aulas vagas entre uma aula dada e outra) na grade de horário dos professores, no período de um dia;
3. ter no máximo NQ professores de Educação Física por horário de aula, onde NQ é o número de quadras de esporte que a escola possui;
4. evitar que duas aulas de uma mesma disciplina para uma turma t no dia d sejam separadas por aulas de outras disciplinas;
5. atender um número mínimo de aulas duplas requeridas pelo professor p para turma t ;
6. tornar a grade dos professores a mais compacta possível, ou seja, fazer com que o professor tenha que comparecer na escola o menor número de dias possível.

Geralmente, nas escolas, a grade de horário é obtida manualmente, pois os softwares conhecidos não possuem muita flexibilidade para atender as restrições necessárias ou, em muitos casos, não permite interatividade para mudanças na solução final obtida. A confecção manual da grade de horário dura vários dias, semanas, ou até meses. Isso ocorre devido à sua complexidade e porque, geralmente, são designados para esse trabalho funcionários que possuem outras ocupações na instituição e não têm tempo livre suficiente para realizá-lo em um período menor. Esse é mais um fator que justifica o uso de métodos computacionais, pois assim é possível a obtenção de uma solução satisfatória em um tempo coerente com as necessidades da instituição.

4.1.1 Escola Estadual Barão Geraldo de Rezende

Situada no distrito de Barão Geraldo, em Campinas-SP, a Escola Estadual Barão Geraldo de Rezende, ou simplesmente Escola Rezende, possuía no ano de 2005 um número total de 45 professores e 27 turmas distribuídas em 3 turnos, conforme mostra Tabela 4.1.

Calculamos o grau de agendamento de um turno θ_{tr} como sendo o número de aulas a serem agendadas sobre o número de alocações disponíveis para o agendamento destas. Havia professores que lecionavam em mais de um turno, porém todas as turmas possuíam suas aulas em um único turno. Nos turnos da manhã e da tarde, as turmas tinham seis aulas por dia e à noite quatro. As aulas aconteciam de segunda à sexta-feira, somando um total de 30 aulas

Escola Rezende				
Turno	Turmas	Professores	Aulas/dia	θ_{tr}
manhã	12	24	6	0.556
tarde	12	24	6	0.529
noite	3	14	4	0.244
Número de quadras de esporte: 2				
Número de dias de aula por semana: 5				

Tabela 4.1: Características da Escola Rezende

por semana para os turnos da manhã e da tarde e 20 para o turno da noite. Como descrevemos anteriormente, o que nos interessa neste problema é a ordem de agendamento das aulas, pois todas possuem um mesmo tempo de duração. Desta forma, saber o tempo de duração das aulas não é relevante para obtenção da solução.

Essa escola possui turmas do 2^o Ciclo do Ensino Fundamental (de quinta à oitava série) e Ensino Médio (de 1^a à 3^a série). O agendamento é feito anualmente, no início de cada ano. A atribuição das aulas aos professores é feita antes do início das aulas. Depois de feita a atribuição, as aulas são agendadas por um funcionário ou um grupo de funcionários. Como estes funcionários possuem trabalhos específicos de suas funções, pouco tempo lhes resta para a programação de horários, que é uma tarefa difícil e requer muita experiência. Dessa forma, a grade de horário leva semanas para ficar pronta.

4.1.2 Escola Estadual Professor Hilton Federici

Situada no distrito de Barão Geraldo, em Campinas-SP, a Escola Estadual Professor Hilton Federici, ou simplesmente Escola Hilton Federici, possuía no ano de 2005 um número total de professores e turmas distribuídas em 3 turnos, conforme mostra a Tabela 4.2.

Também havia professores que lecionavam em mais de um turno, porém, todas as turmas possuíam suas aulas em um único turno. Nos turnos da manhã e da tarde, as turmas tinham seis aulas por dia e quatro de noite. As aulas eram de segunda à sexta-feira, somando um total de 30 aulas por semana para os turnos da manhã e da tarde e 20 para o turno da noite.

Essa escola possui turmas do 2^o Ciclo do Ensino Fundamental (de quinta à oitava série), Ensino Médio (de 1^a à 3^a série) e Supletivo. O agendamento

Escola Hilton Federici				
Turno	Turmas	Professores	Aulas/dia	θ_{tr}
manhã	7	22	6	0.292
tarde	8	19	6	0.400
noite	11	25	4	0.423
Número de quadras de esporte: 1				
Número de dias de aula por semana: 5				

Tabela 4.2: Características da Escola Hilton Federici

é feito no início de cada semestre.

4.2 Modelo Matemático (1)

Nesta seção apresentamos as restrições citadas na Seção 4.1 para dois modelos de programação inteira mista. Para cada um deles descreveremos como foram abordadas as restrições e a função objetivo, bem como os parâmetros utilizados.

4.2.1 Características

Segue abaixo os conjuntos e os parâmetros que foram utilizados para a construção de um modelo matemático que incorporasse todas as características citadas na Seção 4.1 — considerando-se um turno de aula:

P : conjunto de professores.

EF : conjunto de todos os professores de Educação Física.

T : conjunto de turmas que possuem suas aulas em um determinado turno.

H_{tot} : conjunto de todos os horários de aula da semana.

H_{dia} : conjunto de todos os horários de aula de um dia da semana.

NH_d : número de horários de aula por dia em um determinado turno.

D : conjunto de todos os dias de aula por semana.

ND : número de dias de aula por semana.

NQ : número de quadras de esporte.

W_{pdh} : preferência do professor p por horário de aula h do dia d .

R_{pt} : número de aulas que o professor p tem que dar para a turma t .

$DISP_{pdh}$: disponibilidade do professor p no horário de aula h do dia d , onde $DISP_{pdh} = 1$ se o professor está disponível para lecionar e $DISP_{pdh} = 0$ caso contrário.

D_{pt} : número mínimo de aulas duplas do professor p para turma t .

Foram consideradas as seguintes variáveis:

$$x_{ptdh} = \begin{cases} 1 & \text{se o professor } p \text{ dá aula para a turma } t \\ & \text{iniciando no horário de aula } h \text{ do dia } d; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$z_{ptd} = \begin{cases} 1 & \text{se o professor } p \text{ dá aula para turma } t \\ & \text{no dia } d; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$w_{ptdh(h+1)} = \begin{cases} 1 & \text{se o professor } p \text{ dá aula para a turma } t \\ & \text{nos horários de aula } h \text{ e } h + 1 \text{ do } d; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$u_{pd} = \begin{cases} h & \text{se } h \in \{1, \dots, NH_d\} \text{ for o horário da última} \\ & \text{aula do professor } p \text{ no dia } d; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$v_{pd} = \begin{cases} h & \text{se } h \in \{1, \dots, NH_d\} \text{ for o horário} \\ & \text{da primeira aula do professor } p \text{ no dia } d; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$y_{pd} = \begin{cases} 1 & \text{se o professor } p \text{ tem aula agendada no dia } d; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$b1_{pd} = \begin{cases} n & \text{se } n \leq NH_d - 2 \text{ for o número de aulas} \\ & \text{vagas entre duas aulas lecionadas por } p \text{ em } d; \\ 0 & \text{se não houverem aulas vagas.} \end{cases}$$

$$b2_{ptd} = \begin{cases} 1 & \text{se houver mais de uma aula } (p, t) \text{ em } d \text{ que} \\ & \text{e que não são consecutivas;} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$D1_{dh} \geq 0$: número de vezes em que mais de NQ professores de Educação Física são agendados para o mesmo horário de aula h do dia d ;

$D2_{ptd} \geq 0$: número de vezes em que o requerimento de aulas em dias alternados para o par (p, t) não é satisfeito para os dias d e $d + 1$.

$D3_{pt} \geq 0$: número de aulas duplas que faltam para alcançar o número mínimo exigido para o par (p, t) .

4.2.2 Restrições

Mostraremos a seguir como modelamos cada um dos requerimentos considerados na Seção 4.1.

1. Cada professor p deve ministrar um dado número de aulas semanais para uma dada turma t :

$$\forall p \in P, t \in T : \sum_{d=1}^{ND} \sum_{h=1}^{NH_d} x_{ptdh} = R_{pt} \quad (4.1)$$

2. Devemos ter a cada horário de aula h do dia da semana d um único professor p associado a uma turma t :

$$\forall t \in T, d \in D, h \in H_{dia} : \sum_{p \in P} x_{ptdh} \leq 1 \quad (4.2)$$

3. Devemos ter a cada horário de aula h do dia da semana d uma única turma t associada a um professor p :

$$\forall p \in P, d \in D, h \in H_{dia} : \sum_{t \in T} x_{ptdh} \leq DISP_{pdh} \quad (4.3)$$

4. Devem ser agendadas no máximo duas aulas de um mesmo professor p para uma mesma turma t em um dia da semana d :

$$\forall p \in P, t \in T, d \in D : \sum_{h=1}^{NH_d} x_{ptdh} \leq 2 \quad (4.4)$$

5. Para introduzirmos a preferência de se ter no máximo NQ professores de Educação Física (EF) por horário de aula, permitindo que todas as aulas de EF sejam ministradas na quadra de esportes, avaliamos as restrições:

$$\forall d \in D, h \in H_{dia} : \sum_{p \in EF} \sum_{t \in T} x_{ptdh} - NQ \leq D1_{dh} \quad (4.5)$$

6. Para verificarmos se a turma t tem aula do professor p no dia d avaliamos:

$$\forall p \in P, t \in T, d \in D :$$

$$\sum_{h=1}^{NH_d} x_{ptdh} \geq z_{ptd} \quad (4.6)$$

$$\sum_{h=1}^{NH_d} x_{ptdh}/NH_d \leq z_{ptd} \quad (4.7)$$

7. Avaliamos as seguintes restrições para verificarmos quando os dias de ocorrência das aulas (p, t) não são alternados:

$$\forall p \in P, t \in T, d \in 1, \dots, ND - 1 : \quad (4.8)$$

$$z_{ptd} + z_{pt(d+1)} - 1 \leq D2_{ptd}$$

8. Para avaliarmos o número de vezes em que a restrição de se obter um determinado número de aulas duplas para o par (p, t) é violada, verificamos a seguinte restrição não linear:

$$\forall p \in P, t \in T : \quad (4.9)$$

$$D_{pt} - \sum_{d=1}^{ND} \sum_{h=1}^{NH_d-1} x_{ptdh} x_{ptd(h+1)} \leq D3_{pt}$$

Porém, esta restrição pode ser linearizada pelo conjunto de restrições:

$$\forall p \in P, t \in T,$$

$$\forall d \in D, h = 1, \dots, NH_d - 1 :$$

$$x_{ptdh} + x_{ptd(h+1)} - w_{ptdh(h+1)} \leq 1 \quad (4.10)$$

$$x_{ptd(h+1)} - w_{ptdh(h+1)} \geq 0 \quad (4.11)$$

$$x_{ptdh} - w_{ptdh(h+1)} \geq 0 \quad (4.12)$$

$\forall p \in P, t \in T :$

$$D_{pt} - \sum_{d=1}^{ND} \sum_{h=1}^{NH_d-1} w_{ptdh(h+1)} \leq D3_{pt} \quad (4.13)$$

9. Avaliamos o último horário de aula de um professor p no dia d por:

$$\forall p \in P, d \in D, h \in H_{dia} : u_{pd} \geq h \sum_{t \in T} x_{ptdh} \quad (4.14)$$

10. Verificamos se um professor p dá aula em um dia d por:

$$\forall p \in P, d \in D : \quad (4.15)$$

$$\sum_{t \in T} z_{ptd} \geq y_{pd} \quad (4.16)$$

$$\sum_{t \in T} z_{ptd} / NH_d \leq y_{pd}$$

11. O número de aulas vagas entre duas aulas na grade de um professor p é dado por:

$\forall p \in P, d \in D :$

$$b1_{pd} = u_{pd} - v_{pd} + y_{pd} - \sum_{t \in T} \sum_{h=1}^{NH_d} x_{ptdh} \quad (4.17)$$

12. Avaliamos o primeiro horário de aula de um professor p no dia d por:

$\forall p \in P,$

$\forall d \in D, h \in H_{dia} :$

$$v_{pd} \leq (NH_d + 1)y_{pd} - (NH_d + 1 - h) \sum_{t \in T} x_{ptdh} \quad (4.18)$$

13. Podemos verificar se existe duas ou mais aulas para o par (p, t) em d que estão separadas por aulas de outros professores pela restrição não-linear:

$$\begin{aligned} \forall p \in P, t \in T, \\ \forall d \in D : \\ \left(\sum_{h=1}^{NH_d} x_{ptdh} \right) - \sum_{h=1}^{NH_d-1} (x_{ptdh} * x_{ptd(h+1)}) - 1 \leq b_{2ptd} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Mas, como já visto anteriormente, pode ser linearizada pelas restrições (4.10), (4.11), (4.12) em conjunto com:

$$\begin{aligned} \forall p \in P, t \in T, \\ \forall d \in D : \\ \left(\sum_{h=1}^{NH_d} x_{ptdh} \right) - \left(\sum_{h=1}^{NH_d-1} w_{ptdh(h+1)} \right) - 1 \leq b_{2ptd} \end{aligned} \quad (4.20)$$

4.2.3 Função Objetivo

Seja Q uma dada grade de horários cujas características obedecem às restrições descritas na Seção 4.1. A função objetivo pode ser descrita de uma forma hierarquizada como,

$$\text{Min} \sum_{i=1}^7 \alpha_i f_i(Q) \quad (4.21)$$

onde cada parcela f_i é explicada a seguir:

1. Consideramos a preferência dos professores pelos horários de aula disponíveis através da parcela:

$$f_1(Q) = \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} \sum_{d \in D} \sum_{h=1}^{NH_d} W_{pdh} x_{ptdh} \quad (4.22)$$

2. O número de vezes que as preferências expressas em 4.5 são violadas é dado por:

$$f_2(Q) = \sum_{d \in D} \sum_{h \in H} D1_{dh}. \quad (4.23)$$

3. O número de vezes em que o professor p leciona t em dias consecutivos é verificado por:

$$f_3(Q) = \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} \sum_{d \in D} D2_{ptd} \quad (4.24)$$

4. O número de dias que o professor p deve comparecer na escola para lecionar é dado por:

$$f_4(Q) = \sum_{p \in P, d \in D} y_{pd} \quad (4.25)$$

5. A diferença entre o número mínimo de aulas duplas requisitadas e as que realmente foram agendadas é dado por:

$$f_5(Q) = \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} D3_{pt} \quad (4.26)$$

6. O número de aulas vagas entre duas aulas nas grades de cada professor p é dado por:

$$f_6(Q) = \sum_{p \in P} \sum_{d \in D} b1_{pd} \quad (4.27)$$

7. Número de dias em que há mais de uma aula (p, t) agendada em d e não são consecutivas:

$$f_7(Q) = \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} \sum_{d \in D} b2_{ptd} \quad (4.28)$$

4.3 Modelo Matemático (2)

Nesta seção apresentamos as restrições citadas na Seção 4.1 para um modelo de programação linear inteira mista considerando blocos de aulas duplas e unitárias. No modelo (1) consideramos uma variável binária x_{ptdh} que determina se há o agendamento de uma única aula (p, t) no horário de aula h do dia d (aula unitária). Diversas variáveis auxiliares são necessárias para a modelagem dos requisitos (4),(5) e (6).

Desta forma, desenvolvemos uma formulação baseada no agendamento de aulas unitárias e duplas (duas aulas que ocorrem em horários de aula consecutivos, em um mesmo dia). Várias restrições são diretamente satisfeitas admitindo-se somente um agendamento unitário ou um agendamento duplo por dia, como a de se obter um número mínimo de aulas duplas, e a modelagem de outras pode ser verificada com maior facilidade, diminuindo o número de variáveis auxiliares.

4.3.1 Características

Para a construção de um modelo matemático que incorporasse todas as características citadas na Seção 4.1 — considerando-se um turno de aula — foram consideradas as seguintes variáveis:

$$x_{ptdh} = \begin{cases} 1 & \text{se o professor } p \text{ dá aula dupla para a turma } t \\ & \text{iniciando no horário de aula } h \text{ do dia } d; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$y_{ptdh} = \begin{cases} 1 & \text{se o professor } p \text{ dá aula simples (unitária)} \\ & \text{para turma } t \text{ no horário de aula } h \text{ do dia } d; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$u_{pd} = \begin{cases} h & \text{se } h \in \{1, \dots, NH_d\} \text{ for o horário da última} \\ & \text{aula do professor } p \text{ no dia } d; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$v_{pd} = \begin{cases} h & \text{se } h \in \{1, \dots, NH_d\} \text{ for o horário da primeira} \\ & \text{aula do professor } p \text{ no dia } d; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$z_{pd} = \begin{cases} 1 & \text{se o professor } p \text{ tem aula agendada no dia } d; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$b_{pd} = \begin{cases} n & \text{se } n \leq NH_d - 2 \text{ for o número de aulas vagas} \\ & \text{entre duas aulas lecionadas por } p \text{ em } d; \\ 0 & \text{se houverem aulas vagas.} \end{cases}$$

$D1_{dh} \geq 0$: número de vezes em que mais de NQ professores de Educação Física são agendados para o mesmo horário de aula h do dia d ;

$D2_{ptd} \geq 0$: número de vezes em que o requerimento de aulas em dias alternados para o par (p, t) não é satisfeito.

4.3.2 Restrições

Considere o seguinte parâmetro:

$S_{pt} = R_{pt} - 2 * D_{pt}$: número de aulas simples (unitárias).

Mostramos a seguir como modelamos cada um dos requerimentos considerados na Seção 4.1.

1. Cada professor p deve ministrar um dado número de aulas semanais para uma dada turma t :

$$\forall p \in P, t \in T :$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{h=1}^{NH_d-1} x_{ptdh} = D_{pt} \quad (4.29)$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{h=1}^{NH_d} y_{ptdh} = S_{pt} \quad (4.30)$$

2. Devemos ter a cada horário de aula h do dia da semana d um único professor p associado à uma turma t :

$$\forall t \in T, d \in D :$$

$$\sum_{p \in P} x_{ptd1} + \sum_{p \in P} y_{ptd1} \leq 1 \quad (4.31)$$

$$\sum_{p \in P} x_{ptd(h-1)} + \sum_{p \in P} x_{ptdh} + \sum_{p \in P} y_{ptdh} \leq 1, \forall h \in \{2, \dots, NH_d - 1\} \quad (4.32)$$

$$\sum_{p \in P} x_{ptd(NH_d-1)} + \sum_{p \in P} y_{ptd(NH_d)} \leq 1 \quad (4.33)$$

3. Devemos ter a cada horário de aula h do dia da semana d uma única turma t associada a um professor p :

$$\forall p \in P, d \in D : \quad \sum_{t \in T} x_{ptd1} + \sum_{t \in T} y_{ptd1} \leq DISP_{pd1} \quad (4.34)$$

$$\sum_{t \in T} x_{ptd(h-1)} + \sum_{t \in T} x_{ptdh} + \sum_{t \in T} y_{ptdh} \leq DISP_{pdh}, \forall h \in \{2, \dots, NH_d - 1\} \quad (4.35)$$

$$\sum_{t \in T} x_{ptd(NH_d-1)} + \sum_{t \in T} y_{ptd(NH_d)} \leq DISP_{pd(NH_d)} \quad (4.36)$$

4. Devem ser agendadas no máximo duas aulas de um mesmo professor p para uma mesma turma t em um dia da semana d :

$$\forall p \in P, t \in T, d \in D : \quad \sum_{h=1}^{NH_d-1} x_{ptdh} + \sum_{h=1}^{NH_d} y_{ptdh} \leq 1 \quad (4.37)$$

5. Para introduzirmos a preferência de se ter no máximo NQ professores de Educação Física (EF) por horário de aula, permitindo que todas as aulas de EF sejam ministradas na quadra de esportes, avaliamos as restrições:

$$\forall d \in D : \quad \sum_{p \in EF} \sum_{t \in T} x_{ptd1} + \sum_{p \in EF} \sum_{t \in T} y_{ptd1} - NQ \leq D1_{d1} \quad (4.38)$$

$\forall h \in \{2, \dots, NH_d - 1\} :$

$$\sum_{p \in EF} \sum_{t \in T} x_{ptd(h-1)} + \sum_{p \in EF} \sum_{t \in T} x_{ptdh} + \sum_{t \in T} y_{ptdh} - NQ \leq D1_{dh} \quad (4.39)$$

$$\sum_{p \in EF} \sum_{t \in T} x_{ptd(NH_d-1)} + \sum_{p \in EF} \sum_{t \in T} y_{ptd(NH_d)} - NQ \leq D1_{d(NH_d)} \quad (4.40)$$

6. Para satisfazer, o máximo possível, a preferência de se alternar os dias de aula de um mesmo professor p para uma determinada turma t , consideramos:

$\forall p \in P, t \in T, d = 1, \dots, ND - 1 :$

$$\sum_{h=1}^{NH_d-1} x_{ptdh} + \sum_{h=1}^{NH_d} y_{ptdh} + \sum_{h=1}^{NH_d-1} x_{pt(d+1)h} + \sum_{h=1}^{NH_d} y_{pt(d+1)h} - 1 \leq D2_{ptd}, \quad (4.41)$$

onde $D2_{ptd}$ mede o número de vezes que essa preferência é violada. Esta variável é definida como sendo maior ou igual a zero.

7. Avaliamos z_{pd} através das inequações:

$\forall p \in P, d \in D :$

$$\sum_{t \in T} \left\{ \sum_{h=1}^{NH_d-1} x_{ptdh} + \sum_{h=1}^{NH_d} y_{ptdh} \right\} \geq z_{pd} \quad (4.42)$$

$$\sum_{t \in T} \left\{ \sum_{h=1}^{NH_d-1} x_{ptdh} + \sum_{h=1}^{NH_d} y_{ptdh} \right\} / M \geq z_{pd} \quad (4.43)$$

onde M é um número maior ou igual que NH_d .

8. Avaliamos u_{pd} através das inequações:

$\forall p \in P, d \in D, h \in 1, \dots, NH_d - 1 :$

$$u_{pd} \geq (h+1) \sum_{t \in T} x_{ptdh} \quad (4.44)$$

$$\forall p \in P, d \in D, h \in H_{dia} : \quad u_{pd} \geq (h) \sum_{t \in T} y_{ptdh} \quad (4.45)$$

9. Avaliamos v_{pd} através das inequações:

$$\forall p \in P, d \in D, h \in 1, \dots, NH_d - 1 : \quad v_{pd} \leq (NH_d + 1)z_{pd} - (NH_d + 1 - h) \sum_{t \in T} x_{ptdh} \quad (4.46)$$

$$\forall p \in P, d \in D, h \in 1, \dots, NH_d :$$

$$v_{pd} \leq (NH_d + 1)z_{pd} - (NH_d + 1 - h) \sum_{t \in T} y_{ptdh} \quad (4.47)$$

10. O número de aulas vagas entre duas aulas lecionadas para um professor p no dia d é dado por:

$$\forall p \in P, d \in D : \quad b_{pd} = u_{pd} - v_{pd} + z_{pd} - \sum_{t \in T} \left\{ 2 \sum_{h=1}^{NH_d-1} x_{ptdh} + \sum_{h=1}^{NH_d} y_{ptdh} \right\} \quad (4.48)$$

4.3.3 Função Objetivo

Seja Q uma dada grade de horários cujas características obedecem às restrições descritas na Seção 4.3.2. A função objetivo pode ser descrita de uma forma hierarquizada,

$$\text{Min} \sum_{i=1}^5 \alpha_i f_i(Q) \quad (4.49)$$

onde cada parcela f_i é explicada a seguir.

1. Consideramos a preferência dos professores pelos horários de aula disponíveis através da parcela:

$$f_1(Q) = \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} \sum_{d \in D} \sum_{h=1}^{NH_d-1} (W_{pdh} + W_{pd(h+1)}) x_{ptdh} + \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} \sum_{d \in D} \sum_{h=1}^{NH_d} W_{pdh} y_{ptdh} \quad (4.50)$$

2. O número de vezes que as preferências expressas em 4.38 são violadas é dado por:

$$f_2(Q) = \sum_{d \in D} \sum_{h \in H_{dia}} D1_{dh}. \quad (4.51)$$

3. O número de vezes que as preferências expressas em 4.41 são violadas é dado por:

$$f_3(Q) = \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} \sum_{d \in D} D2_{ptd}. \quad (4.52)$$

4. O número total de janelas nas grades de horário dos professores é dado por:

$$f_4(Q) = \sum_{p \in P} \sum_{d \in D} b_{pd}. \quad (4.53)$$

5. A soma do número de dias que cada professor trabalha na instituição é dada por:

$$f_5(Q) = \sum_{p \in P} \sum_{d \in D} z_{pd}. \quad (4.54)$$

4.4 Variações dos problemas

Apresentamos a seguir algumas variações do problema apresentado que podem ser encontradas.

4.4.1 Turmas que não estão presentes em determinados horários de aula

Neste caso, consideramos uma matriz de entradas binárias $C_{NT \times NH_{total}}$ tal que $c_{th} = 1$ se a turma t pode ter aula agendada em h e 0 caso contrário. Dessa forma, substituímos a restrição (2) do modelo (1) por:

$$\forall t \in T, d \in D, h \in H_{dia} : \sum_{p \in P} x_{ptdh} \leq c_{th} \quad (4.55)$$

Devemos proceder da mesma forma ao considerarmos o modelo (2).

4.4.2 Professores que lecionam mais de uma disciplina para uma mesma turma

Considere um professor \bar{p} leciona k disciplinas para uma mesma turma t . Então, associamos uma disciplina ao professor \bar{p} e $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{k-1}$ professores falsos para as demais disciplinas.

Seja $\bar{P} = \{\bar{p}, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{k-1}\}$. Assim sendo, para todas as restrições referentes ao professor \bar{p} , devemos considerar este conjunto de professores.

Capítulo 5

Heurísticas Aplicadas ao PTP

Neste capítulo estão descritas as heurísticas e meta-heurísticas utilizadas para resolução do problema-turma-professor (PTP) abordado.

Na Seção 5.1 justificamos o uso de métodos de busca local para resolver problemas de geração de grade de horário. Introduziremos algumas definições e notações usadas ao longo do capítulo na Seção 5.2. A Seção 5.3 apresenta como uma grade de horário foi representada. Na Seção 5.4 está descrita a estrutura da vizinhança considerada, enquanto que na Seção 5.5 descrevemos como as características de uma grade de horário foram consideradas no cálculo da função objetivo. A Seção 5.6 mostra uma heurística construtiva para obtenção de uma grade horária inicial e as Seções 5.7 e 5.8 apresentam a aplicação de uma busca local que considera vizinhos gerados aleatoriamente (BLR) e a aplicação de uma busca tabu (BT). O procedimento completo aplicado para solução do PTP é descrito na Seção 5.9 e, por fim, a Seção 5.10 mostra uma heurística para solução do PTP com professores que lecionam em mais de um turno, gerando restrições entre os turnos.

5.1 Introdução

A utilização de técnicas heurísticas para tratar problemas de geração de grades de horário é justificada considerando-se que este é um problema combinatorial NP-completo, o qual é resolvido por métodos exatos em um tempo de processamento computacional razoável somente para problemas pequenos.

As técnicas de busca local, por sua vez, iniciam a busca de uma grade de horário inicial Q_0 , permitindo a interação para obtenção de uma solução,

bem como a manutenção de uma grade de horário. Por exemplo, se um professor é substituído por outro, requisitos relacionados com a satisfação de professores devem ser atualizados para o novo professor. Utilizando técnicas de busca local e feitas as alterações necessárias, a grade de horário anterior pode ser utilizada como solução inicial para a obtenção de uma nova solução. Tal processo geralmente obtém uma boa solução para o novo problema em um tempo menor.

Essa capacidade de se poder construir uma grade de horário de forma interativa é amplamente reconhecida pela comunidade científica e pelos usuários como sendo importante para o desenvolvimento de sistemas automatizados de obtenção de grades de horário. Neste aspecto, os métodos de busca local superam outros métodos, tais como os métodos construtivos e as técnicas exatas.

5.2 Restrições do Problema

Inicialmente, é preciso esclarecer alguns termos que serão utilizados nesta e nas próximas seções deste capítulo. Uma *grade de horário* é o agendamento semanal de aulas de um único turno (manhã, tarde ou noite). Uma *aula* é o encontro de um professor p e uma turma t , podendo ser representada pelo par (p, t) . A *grade de horário de um professor p* é o agendamento semanal das aulas que envolvem este professor. A *carga didática de um professor p* é a especificação do número de aulas que devem envolver este professor e cada turma t . Um *horário de aula*, ou simplesmente horário, é o intervalo de tempo de uma aula que, no caso do (PTP) abordado, é o mesmo para todas as aulas.

Visto estes termos, no (PTP) abordado devemos considerar que os seguintes requisitos devem ser satisfeitos (restrições essenciais) para obtermos uma grade de horário viável:

- (a) Cada professor deve dar o número correto de aulas de sua carga didática;
- (b) a cada turma deve ser associado somente um professor por horário de aula;
- (c) a cada professor deve ser associada, no máximo, uma turma por horário de aula, respeitando se este professor está ou não disponível para dar aula neste horário;

- (d) por motivos pedagógicos, deve haver no máximo duas aulas de um mesmo professor para uma mesma turma no período de um dia.

Por outro lado, os seguintes requisitos devem ser satisfeitos o máximo possível (restrições não-essenciais), com o objetivo de diminuir a insatisfação dos professores:

- (e) As aulas de um professor p para uma turma t devem ser agendadas em dias alternados, ou seja, se uma aula (p,t) é agendada no dia d , então não deve haver um novo agendamento desta aula no dia $d + 1$;
- (f) evitar “janelas” (aulas vagas entre uma aula lecionada e outra) na grade de horário dos professores, no período de um dia;
- (g) ter no máximo NQ professores de Educação Física (EF) por horário de aula, onde NQ é o número de quadras de esporte que a escola possui;
- (h) evitar que duas aulas de uma mesma disciplina para uma turma t em um dia d sejam separadas por aulas de outras disciplinas;
- (i) atender um número mínimo de aulas duplas requeridas por um professor p para uma turma t ;
- (j) minimizar o número de dias que o professor p tem que comparecer na escola.

Esta última restrição se deve ao fato de que, geralmente, os professores têm que dar aula em mais de uma escola. Se essa restrição for satisfeita, o professor pode ter maiores oportunidades de organizar seu horário em outras instituições.

5.3 Representação de uma Grade de Horário

Uma grade de horário de professores é representada como uma matriz $Q_{m \times n}$, onde $m = NP$ (número de professores) e $n = NH_{total}$ (número horários de aula total em um turno). Cada linha i desta matriz representa o agendamento semanal do professor i . Cada elemento $q_{ik} \in \{-1, 0, 1, 2, \dots, NT\}$ indica a atividade do professor i no horário de aula k , de forma que q_{ik} igual a:

- 1: se o professor i não pode ter aula agendada no horário de aula k ;
- 0: se o horário de aula estiver disponível para agendamento;
- $j \in \{1, \dots, NT\}$: se o professor i foi agendado para dar aula para a turma j no horário de aula k .

Professor	Segunda				Terça				...
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	...
P_1	0	1	1	2	3	4	4	1	...
P_2	-1	-1	-1	-1	2	3	1	4	...
P_3	6	6	7	8	0	0	2	2	...
P_4	2	2	4	4	0	0	0	3	...

Figura 5.1: Representação de uma grade de horário Q

Os horários de aula são representados pela seqüência $\{h_1, \dots, h_{NH_{total}}\}$. Se tivermos NH_d horários de aula por dia da semana, então representamos a seqüência de horários de aula no primeiro dia por $\{h_1, \dots, h_{NH_d}\}$, no segundo por $\{h_{NH_d+1}, \dots, h_{2NH_d}\}$, e assim até o último dia da semana. Então, a seqüência de horários de um dia d da semana é representada por $\{h_{(d-1)NH_d+1}, \dots, h_{d.NH_d}\}$.

5.4 Estrutura da vizinhança

Um *movimento simples* consiste na troca de dois valores distintos e não negativos de uma dada linha de Q . Tal movimento é identificado por $m = (p, h_i, h_j)$, onde h_i e h_j representam os horários de aula nos quais as atividades q_{ph_i} e q_{ph_j} do professor p serão trocadas, sendo $q_{ph_i} \neq q_{ph_j} \neq -1$. Consideramos $i < j$ para facilitar a aplicação da lista tabu.

Desta forma, a vizinhança $N(Q)$ é composta de todas as grades de horário Q' , factíveis ou não, tal que $Q' = Q \oplus m$. A cardinalidade de $N(Q)$ é majorada por

$$\frac{pNH_{total}(NH_{total} - 1)}{2}.$$

5.4.1 Exploração da vizinhança

Consideremos as seguintes definições:

Definição 5.4.1. *Um horário de aula h possui sobreposição de professores com relação a uma aula (p, t) quando existir um ou mais professores $\bar{p} \neq p$ agendados para ensinar a turma t neste mesmo horário.*

Na Figura 5.2 podemos verificar que o horário de aula h_5 da grade de horário Q possui uma sobreposição de professores com relação à aula $(P_3, 2)$, pois o professor P_2 também está agendado para lecionar a turma 2 neste mesmo horário.

Definição 5.4.2. *Um **movimento simples** consiste na troca de dois valores distintos e não negativos de uma dada linha p da matriz Q , sendo identificado por $m_s = (p, h_i, h_j)$, $i < j$.*

Definição 5.4.3. *Seja h_i um horário de aula que possui sobreposição de professores com relação a uma aula (p, t) . Um movimento simples $m_{r_1} = (p, h_i, h_k)$ para $i < k$ (ou $m_{r_1} = (p, h_k, h_i)$ para $i > k$) é um **movimento reparador-1** se a turma t não estiver envolvida em nenhuma aula agendada em h_k .*

Definição 5.4.4. *Seja h_i um horário de aula que possui sobreposição de professores com relação a uma aula (p, t) . Seja $\bar{P} \subseteq P$ o conjunto que contém estes professores. Um movimento simples $m_{r_2} = (\bar{p}, h_i, h_k)$ para $i < k$ (ou $m_{r_2} = (\bar{p}, h_k, h_i)$ para $i > k$) é considerado um **movimento reparador-2** se $\bar{p} \in \bar{P}$ e a turma t não está envolvida em nenhuma aula agendada em h_k .*

Devido à representação utilizada temos que, ao realizarmos um movimento simples, podemos estar alocando mais de um professor para uma mesma turma em um mesmo horário de aula, violando a restrição de viabilidade (b), como pode ser visto na coluna h_5 com as aulas $(P_2, 2)$ e $(P_3, 2)$ da matriz Q na Figura 5.2. Então, com o objetivo de reparar estas infactibilidades, realizamos os movimentos reparadores. A aplicação destes movimentos nos procedimentos utilizados está descrita com mais detalhes nas Seções 5.6, 5.7 e 5.8.

Grade de horários Q

Professor	Segunda				Terça				...
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	...
P_1	0	1	1	2	3	4	4	1	...
P_2	-1	-1	-1	-1	2	3	8	1	...
P_3	6	6	7	8	2	0	7	8	...
P_4	2	2	4	4	0	0	0	3	...

Movimento simples em Q : $m_s = (P_1, h_2, h_6)$

Professor	Segunda				Terça				...
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	...
P_1	0	4	1	2	3	1	4	1	...
P_2	-1	-1	-1	-1	2	3	8	1	...
P_3	6	6	7	8	2	0	7	8	...
P_4	2	2	4	4	0	0	0	3	...

Movimento reparador-1 em Q : $m_{r_1} = (P_3, h_3, h_5)$ com relação à aula $(P_3, 2)$ em h_5

Professor	Segunda				Terça				...
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	...
P_1	0	1	1	2	3	4	4	1	...
P_2	-1	-1	-1	-1	2	3	8	1	...
P_3	6	6	2	8	7	0	7	8	...
P_4	2	2	4	4	0	0	0	3	...

Movimento reparador-2 em Q : $m_{r_2} = (P_2, h_5, h_8)$ com relação à aula $(P_1, 1)$ em h_8

Professor	Segunda				Terça				...
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	...
P_1	0	1	1	2	3	4	4	1	...
P_2	-1	-1	-1	-1	1	3	8	2	...
P_3	6	6	7	8	2	0	7	8	...
P_4	2	2	4	4	0	0	0	3	...

Figura 5.2: Movimentos utilizados para pesquisar $N(Q)$

5.5 Função Objetivo

A função objetivo f de uma grade de horário é calculada pela soma de componentes que calculam a diferença entre esta grade e a grade de horário que satisfaz todos os requisitos (a)—(j), como visto na Seção 5.2 . Cada componente i é multiplicada por um peso $\alpha_i \in \mathbb{R}, \alpha_i \geq 0$. Assim, a função objetivo de uma grade de horário Q é da forma:

$$f(Q) = \sum_{i=1}^9 \alpha_i f_i(Q) \quad (5.1)$$

Estes pesos refletem a importância de cada uma das componentes de f . Como é um problema de minimização, quanto maior for o valor de α_i , maior a importância do requisito medido pela componente f_i . Desta forma, f possui uma estrutura hierarquizada, onde para as componentes que avaliam as restrições essenciais o peso é muito maior do que para as demais. A seguir, descreveremos como cada uma das componentes consideradas foram avaliadas:

$f_1(Q)$: número de vezes que dois ou mais professores ensinam uma mesma turma em um mesmo horário de aula somado ao número de vezes que uma turma não é lecionada por nenhum professor;

$f_2(Q)$: número de aulas vagas entre uma aula lecionada e outra na grade de horário de um dia dos professores (ver Figura 5.3, aulas vagas em horários h_2 e h_3);

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5
p	2	0	0	6	0

Figura 5.3: Avaliação parcial de f_2 para um professor p , onde $f_{2_{parcial}}(p) = 2$

$f_3(Q)$: excedente de aulas de um professor p para uma turma t em um dia da semana, para todos os professores (em nosso caso, quando excede $N_{max} = 2$ aulas por dia, conforme Figura 5.4);

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5
p	1	1	1	3	4

Figura 5.4: Avaliação parcial de f_3 para a aula $(p, 1)$, onde $f_{3_{parcial}}(p, 1) = 3 - N_{max} = 3 - 2 = 1$

$f_4(Q)$: diferença entre o número de aulas duplas requisitadas do professores para as turmas e as que realmente foram agendadas;

$f_5(Q)$: número de aulas de Educação Física que superam o número de quadras de esporte NQ para cada horário de aula;

$f_6(Q)$: soma das preferências dos professores pelos horários de aula que possuem aula agendada;

$f_7(Q)$: número de vezes em que o requerimento didático de alternar os dias de aula para o par (p, t) não é obedecido;

$f_8(Q)$: número de vezes que há mais de uma aula do professor p para a turma t em um mesmo dia da semana e não são consecutivas, ou seja, há aulas de outras disciplinas separando-as (ver Figura 5.5) ;

	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5
p	1	2	3	1	4

Figura 5.5: Avaliação parcial de f_8 para a aula $(p, 1)$, onde $f_{8_{parcial}}(p, 1) = 1$

$f_9(Q)$: número de dias que o professor tem aula agendada na instituição.

Geralmente, consideramos os pesos relacionados com inviabilidades sendo maiores que os demais. Assim sendo $\alpha_1, \alpha_3 > \alpha_2 \gg \alpha_4, \alpha_5 \dots, \alpha_9$. A componente α_2 é a mais importante das restrições não-essenciais. Os professores ficam insatisfeitos com horários sem atividade entre uma aula e outra porque, geralmente, eles tem que permanecer na escola e não ganham financeiramente por esse tempo.

5.6 Solução Inicial

A solução inicial foi gerada através de um método de agendamento construtivo parcialmente guloso. Primeiramente, determinamos o grau de urgência θ_p de agendamento para cada professor p considerando o número de aulas de sua carga didática pelo número de horários de aula em que este professor e as turmas que devem ser ensinadas por ele estão disponíveis para agendamento. Assim sendo, temos que

$$\theta_p = \frac{\sum_{t \in T} R_{pt}}{N_{disp} + 1}, \quad (5.2)$$

onde R_{pt} é o número de aulas de um professor p para uma turma t e N_{disp} é o número total de alocações (p, h) nas quais as aulas (p, t) podem ser agendadas sem violar a restrição essencial (b). Desta forma, escolhemos o professor p que possui θ_p com maior valor para ter suas aulas agendadas. A cada passo todas as aulas (p, t) envolvendo o professor p escolhido são agendadas e o valor de N_{disp} é atualizado para todos os professores que ainda não foram agendados. Após a escolha do professor, escolhemos aleatoriamente as aulas (p, t) para serem alocadas. Para alocarmos uma aula (p, t) , escolhemos um horário de aula de forma que não haja, a princípio, nenhuma violação às restrições essenciais (b),(d). Caso tal horário não seja encontrado, admitimos violação à restrição (d). Se mesmo assim não conseguirmos alocar esta aula, admitimos violação à restrição (b). Neste último caso, com o objetivo de diminuir a infactibilidade com relação à restrição (b), realizamos o movimento reparador-1 $m_{r_1} = (p, h, h_i)$ (se $h < h_i$) ou $m_{r_1} = (p, h_i, h)$ (se $h_i < h$) onde h_i é um horário de aula ao qual a turma t ainda não foi associada. Se a turma t_i que estava agendada em h_i antes do movimento m_{r_1} já estiver associada a alguma aula (\bar{p}, t_i) em h , realizamos o movimento reparador-2 com relação a esta aula, $m_{r_2} = (\bar{p}, h, h_j)$ (se $h < h_j$), ou $m_{r_2} = (p, h_j, h)$ (se $h_j < h$).

Podemos verificar o pseudo-código deste procedimento na Figura 5.6.

5.7 Procedimento Busca Local Aleatória (BLA)

O procedimento Busca Local Aleatória (BLA) parte de uma solução inicial Q_0 , utilizando a representação detalhada na Seção 5.3, guiando a busca pela função objetivo como na Seção 5.5. A cada iteração, uma vizinhança

construída aleatoriamente $V(Q^*) \subset N(Q^*)$ — onde Q^* é a melhor grade de horário encontrada até o momento — é explorada e, se a melhor solução Q' encontrada nesta vizinhança possuir um valor de função $f(Q') < f(Q^*)$, esta passará a ser a nova solução a ter sua vizinhança pesquisada. Senão, construímos uma nova vizinhança aleatória $V(Q^*)$ e procedemos da mesma forma. O método pára após um determinado número de iterações sem melhora do valor da função objetivo.

Um vizinho aleatório Q' de Q^* é obtido da seguinte forma:

- 1º) Para um professor $p \in P$ escolhemos aleatoriamente um horário de aula $h_i \in \{1, \dots, NH_{total} - 1\}$ e um horário de aula $h_j \in \{(h_i + 1), \dots, NH_{total}\}$, onde $t_i = Q_{ph_i}^*$ e $t_j = Q_{ph_j}^*$;
- 2º) se o movimento simples $m_1 = (p, h_i, h_j)$ estiver definido, realizamos este movimento;
- 3º) se ao realizarmos esse movimento encontramos sobreposição de professores com relação à aula (p, t_j) em h_i , executamos o movimento reparador-2 $m_2 = (\bar{p}, h_j, h_k)$ tal que (\bar{p}, t_k) não está agendada em h_i ;
- 4º) se encontramos sobreposição de professores com relação à aula (p, t_i) em h_j , executamos o movimento reparador-2 $m_3 = (\hat{p}, h_j, h_l)$ tal que (\hat{p}, t_l) não está agendada em h_j .

Movimentos simples e movimentos reparadores-2 foram definidos em 5.4. Ao realizarmos esses quatro passos para todos os professores $p \in P$ obtemos uma vizinhança $V(Q^*)$ constituída de, no máximo, $|P|$ vizinhos.

A Figura 5.7 mostra o pseudo-código deste procedimento.

5.8 Procedimento Busca Tabu (BT)

Para a aplicação da Busca Tabu, utilizamos a representação detalhada na Seção 5.3 e a função objetivo como na Seção 5.5. A vizinhança $V(Q)$ explorada a cada iteração é toda a vizinhança $N(Q)$, a qual é composta de todos os vizinhos de Q gerados através de movimentos simples, como definido na Seção 5.4.

O pseudo-algoritmo encontra-se na Figura 5.8.

5.8.1 Lista tabu e critério de aspiração

Foi utilizada uma lista tabu sistematicamente dinâmica, ou seja, o número de iterações que um movimento m deve permanecer tabu, $I_{tabu}(m)$, é variável e escolhido de forma sistemática. Seja T_{min} e T_{max} os valores mínimo e máximo de $I_{tabu}(m)$, para todo movimento m . Construímos uma seqüência decrescente de números inteiros entre T_{min} e T_{max} ,

$$s = \{s_1, s_1 - \alpha, s_1 - 2\alpha, \dots, s_1 - n\alpha\}$$

onde $s_1 \leq T_{max}$, $s_1 - n\alpha \geq T_{min}$ e $\alpha \in \mathbb{Z}^+$. A seqüência s é utilizada para determinarmos o valor do número de iterações tabu do movimento atual m , sendo repetida ao longo do processo de busca. Se na iteração k for escolhido o elemento s_i , então na iteração $k + 1$ será escolhido s_{i+1} , se este não for o último elemento da seqüência; se s_{i+1} for o último elemento, então a seqüência será repetida novamente e será selecionado o elemento s_1 . Desse modo, os valores menores de $I_{tabu} \in s$ permitem a exploração da vizinhança da solução atual próximo de um ótimo local, intensificando a busca. Por outro lado, os valores maiores podem ajudar a superar ótimos locais, permitindo uma diversificação na busca.

Como a lista tabu pode ser muito restritiva, utilizamos um critério de aspiração que é acionado quando obtemos uma solução Q' melhor do que a melhor solução obtida até o momento Q^* . Assim sendo, mesmo que o movimento m que gerou Q' seja tabu, poderá ser executado se satisfizer este critério.

5.9 Procedimento BLA+BT

Obtida uma solução inicial Q_0 gerada de forma construtiva ou de grades anteriores, a Busca Local Aleatória (BLA) inicia-se e continua até alcançar um número de iterações sem melhora $BLAmax$ ou até alcançar um número máximo de iterações $IterBLAmax$. A partir de então, a Busca Tabu (BT) inicia com a melhor solução obtida pelo BLA e continua até que alcance $BTmax$ iterações sem melhora ou até alcançar um número máximo de iterações $IterBTmax$.

O processo BLA+BT é repetido iniciando sempre da melhor solução obtida pelo ciclo anterior e pára quando esta solução não é melhorada por $CiclosMax$ ciclos sem melhora.

A BLA foi usada por dois objetivos diferentes. O primeiro objetivo consiste em gerar uma solução inicial para a BT. A BLA é um procedimento rápido para melhoria da solução inicial construtiva, gerando uma solução inicial para a BT com poucas ou nenhuma violação às restrições essenciais. Quando a BT parte da solução inicial construtiva consome um tempo computacional maior para alcançar uma solução factível (que não contenha violações das restrições (b) e (d)). O segundo objetivo é o de direcionar a busca para regiões ainda não pesquisadas. Após a BT não conseguir melhorar o valor da função objetivo por um determinado número de iterações, iniciamos a BLA com a melhor solução obtida pela BT. Dessa forma, como a BLA utiliza movimentos reparadores, a solução pode ser melhorada e pode ter sua estrutura modificada de tal modo que a BT reinicie em uma direção diferente.

5.10 Heurística para o PTP com professores que lecionam em mais de um turno

Geralmente, na literatura, encontramos a resolução para um único turno. Mas, em casos práticos, as escolas possuem suas aulas distribuídas em mais de um turno (manhã, tarde e noite). Na maioria das escolas há professores que lecionam em mais de um turno. Assim sendo, surgem requerimentos organizacionais envolvendo os turnos que devem ser observados. Por exemplo, considere um professor p que trabalha nos turnos da manhã e da noite. Se ele trabalhar no último horário de aula da segunda-feira no turno da noite então, é desejável que ele não trabalhe no primeiro horário de aula da terça-feira no turno da manhã. Também temos por lei um limite máximo de aulas por dia para cada professor. Atualmente, este limite é de oito aulas por dia.

Nas seções anteriores, descrevemos uma resolução para o PTP para um único turno. Uma solução para resolver o problema PTP completo seria unir todas as informações dos turnos em uma única matriz Q . Porém, isso aumentaria a complexidade do cálculo da função objetivo e o número de vizinhos analisados a cada iteração do método. Dessa forma, descreveremos nesta seção uma heurística para resolver o problema de agendamento para a grade de horário completa, agendando um turno por vez. Também, o número de professores que lecionam em mais de um turno é pequeno com relação ao número total de professores. Na escola Rezende em 2005, por exemplo, temos

12 professores de 45.

Consideraremos as restrições não-essenciais entre os turnos como segue:

- (1) Se um professor p tem aula agendada no último horário de um dia d da semana no turno da manhã, é desejável que ele não tenha aula agendada no primeiro horário de aula deste mesmo dia no turno da tarde e vice-versa;
- (2) se um professor p tem aula agendada no último horário de um dia d da semana no turno da tarde, é desejável que ele não tenha aula agendada no primeiro horário de aula deste mesmo dia no turno da noite e vice-versa;
- (3) se um professor p tem aula agendada no último horário de um dia d da semana no turno da noite, é desejável que ele não tenha aula agendada no primeiro horário de aula do dia $d+1$ no turno da manhã e vice-versa.

Inicialmente, determinamos qual deve ser a ordem dos turnos a ser seguida para obtenção da grade horária de cada turno. Esta ordenação é feita através do valor θ_{tr} que calcula o grau de urgência de agendamento de um turno tr e é calculado por:

$$\theta_{tr} = \frac{NH_{total}^{tr} \cdot NT_{tr}}{N_{disp}^{tr} + 1},$$

onde N_{disp}^{tr} é o número de alocações (p, h) disponíveis para agendamento das aulas (p, t) . O numerador é o total de aulas a serem agendadas no turno considerado, o qual é calculado pelo número de horários de aula total de um turno tr (NH_{total}^{tr}) vezes o número de turmas NT_{tr} .

Assim, o turno tr com maior θ_{tr} tem maior urgência em ser agendado. Considere que o turno da tarde tenha sido agendado primeiro. Para satisfazer a restrição (1), acrescentamos um valor $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ao valor do elemento w_{ph} da matriz de preferência dos professores pelos horários da manhã $W_{P \times H_{tot}}^m$ se o professor p leciona no turno da manhã e da tarde e se h é o último horário de aula do dia d no turno da manhã de forma que o primeiro horário de aula \bar{h} deste mesmo dia d no turno da tarde tem uma aula (p, t) agendada.

Agindo dessa forma, ao obtermos o agendamento para as aulas da manhã devemos penalizar os primeiros horários de aula do turno da tarde que violarem a restrição (1) e os últimos horários de aula do turno da noite que

violarem(3). Quando obtemos a grade da tarde, temos que penalizar os horários de aula dos turnos da manhã e noite que violarem as restrições (1) e (2) respectivamente. E, ao obtermos o agendamento para o turno da noite, devemos penalizar os horários de aula dos turnos da manhã que violarem a restrição (3) e os horários de aula do turno da tarde que violarem a restrição (2).

Consideraremos o limite máximo de aulas por dia como sendo uma restrição essencial. Dessa forma, consideraremos na função objetivo em (5.1) a soma do número de aulas que excederem este limite. A nova função objetivo é dada por:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{10} \alpha_i f_i(Q) \tag{5.3}$$

onde f_{10} é a componente que mede a violação desta restrição e α_{10} é o peso associado a ela.

```

procedimento Gera_inicial(R, Disp);
1   $Q_0 \leftarrow 0$ ;  $AGENDA \leftarrow \{1..NP\}$ ;
2  enquanto( $AGENDA \neq \{\}$ ) faça
3    para  $\forall p \in P$  faça  $\theta_p \leftarrow (\sum_{t \in T} R_{pt}) / (N_{disp} + 1)$ ;
4    Escolher  $p$  tal que  $\theta_p > \theta_w, \forall w \in AGENDA - \{p\}$ ;
5     $TURMA_p \leftarrow$  conjunto dos  $t$  tais que  $R_{pt} > 0$ ;
6    enquanto ( $TURMA_p \neq \{\}$ ) faça
7      para  $\forall h \in 1..NH_{total}$  faça
8        se o agendamento de  $(p, t)$  em  $h$  não aumentar  $f(Q_0)$  então
9           $Q_0(p, h) \leftarrow t$ ;  $TURMA_p \leftarrow TURMA_p - \{t\}$ ; ir para linha 8;
10       fim-se;
11      fim-para;
12      se  $t$  não foi agendada então
13        para  $\forall h \in 1..NH_{total}$  faça
14          se o agendamento de  $(p, t)$  em  $h$  não aumentar  $f_1(Q_0)$  então
15             $Q_0(p, h) \leftarrow t$ ;  $TURMA_p \leftarrow TURMA_p - \{t\}$ ; ir para linha 6;
16          fim-se
17        fim-para;
18        se  $t$  não foi agendada então
19          para  $\forall h \in 1..NH_{total}$  faça
20            se ( $Q_0(p, h) = 0$ ) então
21               $Q_0(p, h) \leftarrow t$ ;  $TURMA_p \leftarrow TURMA_p - \{t\}$ ;
22               $Q_0 \leftarrow Q_0 \oplus m_{r_1} = (p, h, h_i)$ ;  $\{ m_{r_1}$  movimento reparador-1 com relação
                à aula  $(p, t)$  em  $h\}$ 
23               $t_i \leftarrow Q_0(p, h)$ ;
24              se na coluna  $h$  de  $Q_0$  houver mais de uma  $t_i$  então
25                 $Q_0 \leftarrow Q_0 \oplus m_{r_2} = (\bar{p}, h, h_j)$ , se  $Q_0(\bar{p}, h_j) \notin h_i$ ;
                 $\{ m_{r_2}$  movimento reparador-2 com relação à aula  $(p, t_i)$  em  $h\}$ 
26              fim-se;
27              ir para linha 6;
28            fim-se;
29          fim-para;
30        fim-se;
31      fim-se;
32    fim-enquanto;
33     $AGENDA \leftarrow AGENDA - p$ ;
34  fim-enquanto;
35  fim Gera_inicial;

```

Figura 5.6: Solução inicial construtiva

procedimento $BLA(Q_0, MelhorIter, BLSmax, IterBLSmax)$

```

1   $Q^* \leftarrow Q_0;$            {Melhor solução obtida até o momento}
2   $Q_{atual} \leftarrow Q_0;$     {Solução atual}
3   $Iter \leftarrow 0;$          {Contador do número de iterações}
4   $MelhorIter \leftarrow 0;$     {Iteração mais recente que forneceu  $Q^*$ }
5   $nao\_finaliza \leftarrow true;$  {Booleana que testa critério de parada}
6  enquanto ( $nao\_finaliza$ ) faça
7       $Iter \leftarrow Iter + 1;$ 
8      para  $\forall p \in P$  faça
9           $Q_{viz} \leftarrow Q_{atual} \oplus m_1;$  { $m_1 = (p, h_i, h_j)$  (movimento simples)}
10         se  $f_{1parcial}(p, h_i) > 0$  então
11              $Q_{viz} \leftarrow Q_{viz} \oplus m_2;$  { $m_2 = (\bar{p}, h_i, h_k)$ , movimento reparador-2 tal que
12                  $(\bar{p}, t_k)$  não está agendada em  $h_i$ }
13             fim-se;
14             se  $f_{1parcial}(p, h_j) > 0$  então
15                  $Q_{viz} \leftarrow Q_{viz} \oplus m_3;$  { $m_3 = (\bar{p}, h_j, h_{\bar{k}})$ , movimento reparador-2 tal que
16                      $(\bar{p}, t_{\bar{k}})$  não está agendada em  $h_j$ }
17                 fim-se;
18                 se  $f(Q_{viz}) < f(Q^*)$  então
19                      $Q^* \leftarrow Q_{viz};$ 
20                      $MelhorIter \leftarrow Iter;$ 
21                 fim-se;
22             fim-para;
23             se  $f(Q^*) < f(Q_{atual})$  então
24                  $nao\_melhora \leftarrow 0;$ 
25                  $Q_{atual} \leftarrow Q^*;$ 
26             senão
27                  $nao\_melhora \leftarrow nao\_melhora + 1;$ 
28                 se ( $nao\_melhora \geq BLSmax$ ) então
29                      $finaliza \leftarrow true;$ 
30                 fim-se;
31             fim-se;
32         se ( $Iter \geq IterBLSmax$ ) então
33              $finaliza \leftarrow true;$ 
34         fim-se;
35     fim-enquanto;
36 fim  $BLA;$ 

```

Figura 5.7: Procedimento de Busca Local Aleatória (BLA)

```

procedimentoBT( $Q_0, MelhorIter, BTmax, IterBTmax, T_{min}, T_{max}$ )
1   $Q^* \leftarrow Q_0;$            {Melhor solução obtida até o momento}
2   $Q_{atual} \leftarrow Q_0;$     {Solução atual}
3   $Iter \leftarrow 0;$          {Contador do número de iterações}
4   $MelhorIter \leftarrow 0;$     {Iteração mais recente que forneceu  $Q^*$ }
5   $T \leftarrow \emptyset$       {Lista Tabu}
6  enquanto ( $Iter - MelhorIter < BTmax$ )e( $Iter < IterBTmax$ ) faça
7     $Iter \leftarrow Iter + 1;$ 
8     $Q' \leftarrow Q_{atual} \oplus m;$  {O melhor elemento de  $N(Q_{atual})$  tal que o}
                                     {movimento  $m$  não seja tabu ou  $f(Q') < f(Q^*)$ }
9     $T \leftarrow \{m\};$        {Inserir movimento na lista tabu}
10    $itertabu(m) \leftarrow t;$  {Gerar aleatoriamente n° de iterações tabu  $t$ ,
                                     {onde  $t \in \{T_{min}, \dots, T_{max}\}$  }
11    $Q_{atual} \leftarrow Q';$ 
12   se ( $f(Q_{atual}) < f(Q^*)$ ) então
13      $Q^* \leftarrow Q_{atual};$ 
14      $MelhorIter \leftarrow Iter;$ 
15   fim-se;
16   fim-enquanto;
17   retornar  $Q^*;$ 
fim BT;

```

Figura 5.8: Método de Busca Tabu

Capítulo 6

Resultados Computacionais

Neste capítulo estão descritos testes computacionais que foram realizados com a aplicação das heurísticas apresentadas no Capítulo 5. Também apresentamos resultados obtidos através das formulações matemáticas apresentadas no Capítulo 4.

6.1 Problemas considerados nos testes

Com a finalidade de testar os diversos parâmetros dos procedimentos propostos bem como analisar estes procedimentos, foram gerados 15 casos com número de turmas NT variando de 3 à 45. As características destes casos estão apresentadas na Tabela 6.1.

Para a geração destes casos foi considerado $NQ = 1$ e cinco dias de aula por semana para todas as turmas. O grau de agendamento para cada caso foi mantido entre 0.3 e 0.7, que é o grau de agendamento geralmente encontrado em casos reais. Para gerar cada caso foi considerado que cada turma teria dez disciplinas, cada qual com a seguinte carga horária semanal: quatro aulas de Matemática, quatro de Português, duas de História, duas de Geografia, duas de Educação Física, duas de Educação Artística, três de Biologia, duas de Química, duas de Física e duas de Inglês. Consideramos que as disciplinas com quatro aulas semanais seriam compostas de duas aulas duplas e as de três e duas aulas seriam compostas de uma aula dupla. A matriz de preferência pelos horários de aula foi gerada aleatoriamente, com entradas compostas de valores inteiros entre 0 e 2.

Há muitos problemas de otimização que possuem um conjunto de dados

utilizados por pesquisadores para testar e comparar métodos de resolvê-los. Já para o problema-turma-professor (PTP), apesar de ser um problema clássico de otimização, não encontramos tal conjunto de dados disponível para teste.

Também consideramos o conjunto de dados do ano de 2005 e 2006 da escola Rezende e de 2005 da Hilton Federici, cujas características já foram discutidas na Seção 4.1. Para a escola Rezende, em 2005, foi obtido de cada professor qual a sua preferência pelos horários de aula e em quais horários estariam indisponíveis para agendamento. Já em 2006, conseguimos obter dados somente da grade que já estava feita manualmente. Na escola Hilton Federici haviam aulas simultâneas. Então, resolvemos relaxar esta restrição para mantermos as mesmas características entre as escolas consideradas.

Caso	$ T $	$ P $	aulas
1	3	10	75
3	6	13	150
3	9	23	225
4	12	25	300
5	15	25	375
6	18	35	450
7	21	35	525
8	24	47	600
9	27	50	675
10	30	50	750
11	33	60	825
12	36	63	800
13	39	72	975
14	42	75	1050
15	45	75	1125

Tabela 6.1: Características dos Casos Gerados.

6.2 Resultados da Programação Matemática

Para obtermos resultados através das formulações matemáticas propostas no Capítulo 4, utilizamos o modelador e otimizador XPRESS-MP versão 1.6 [7]

com as funções de pré-processamento e estratégia de corte ativadas.

Os testes foram realizados em um microcomputador Pentium 4, 1.9 GHz, de 384 MB de RAM e com sistema operacional Microsoft Windows XP.

As Tabelas 6.2, 6.3 e 6.4 apresentam os resultados obtidos em seis horas de processamento (sendo interrompido neste período) para os turnos da manhã, tarde e noite das escolas Rezende e Hilton Federici.

Escola Rezende 2005										
	Modelo (1)					Modelo (2)				
	f. obj.	gap(%)	t(h)	variáveis	restrições	f. obj.	gap(%)	t(h)	variáveis	restrições
manhã	1269	1178.4	6	8395	13907	790	614.3	6	5077	4097
tarde	1536	1379.8	6	11270	22703	711	561.3	6	4849	4057
noite	1704	1599.2	6	8426	14171	26	0	0.74	687	1028

Tabela 6.2: Melhor solução encontrada em 6 horas de processamento para a Escola Rezende em 2005

Escola Rezende 2006										
	Modelo (1)					Modelo (2)				
	f. obj.	gap(%)	t(h)	variáveis	restrições	f. obj.	gap(%)	t(h)	variáveis	restrições
manhã	1555	2257.25	6	8422	14035	910	1416.99	6	5330	4385
tarde	480	734.78	6	6326	10944	282	296.681	6	4156	4015
noite	83	291.99	6	2675	4765	51	64.516	6	1480	1859

Tabela 6.3: Melhor solução encontrada em 6 horas de processamento para a Escola Rezende em 2006

Escola Hilton Federici 2005										
	Modelo (1)					Modelo (2)				
	f. obj.	gap(%)	t(h)	variáveis	restrições	f. obj.	gap(%)	t(h)	variáveis	restrições
manhã	537	1030.5	6	5769	10021	142	181.6	6	3384	3294
tarde	446	909.8	6	6546	11033	152	214.5	6	3322	3104
noite	123	121.6	6	4839	8212	61	7.0	6	2303	2907

Tabela 6.4: Melhor solução encontrada em 6 horas de processamento para a Escola Hilton Federici em 2005

Os pesos associados às componentes da função objetivo do modelo (1), como apresentado na Seção 4.2 foram:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_7 = 1, \alpha_6 = 19.$$

Para o modelo (2) consideramos:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5 = 1, \alpha_4 = 19.$$

Para os problemas das duas escolas, como não dispúnhamos do número mínimo de aulas duplas requerido por cada professor em 2005, supomos que as disciplinas compostas de 6 aulas teriam 3 aulas duplas, as compostas de 5 e 4 aulas teriam 2 aulas duplas e as compostas de 2 aulas teriam uma única aula dupla.

Foram encontradas soluções factíveis para todos os turnos das duas escolas e, para o turno da noite da escola Rezende, foi encontrada a solução ótima utilizando o modelo (2).

Com o modelo (2) o número de variáveis e restrições é menor do que o número obtido através do modelo (1). Também podemos verificar que o “gap” das soluções obtidas pelo modelo (2) é sempre menor que o das soluções obtidas através do modelo (1), ou seja, no período de seis horas, através do modelo (2), a distância entre a solução encontrada e a ótima são menores que no modelo (1).

Os resultados das Tabelas 6.2 e 6.4 mostram a dificuldade de se resolver problemas combinatoriais, como o abordado por este trabalho, através de métodos exatos, devido ao tempo de processamento. Por esse motivo, nos aplicamos em desenvolver métodos heurísticos, cujos resultados apresentamos nas próximas seções.

6.3 Resultados obtidos através de procedimentos heurísticos

Nesta seção apresentamos os resultados obtidos através da aplicação dos procedimentos heurísticos descritos no Capítulo 5. A Seção 6.3.1 mostra testes realizados para a verificação da vantagem de se usar a Busca Local Aleatória (BLA) para tornar a busca mais eficiente. Verificamos os resultados obtidos através do procedimento de Busca Local Aleatória associada a Busca Tabu (BLA+BT) para as escolas Rezende e Hilton Federici. E por fim, na Seção 6.3.3 foi feita uma comparação entre os métodos manual, exatos e heurísticos para estas escolas.

6.3.1 Utilização da Busca Local Aleatória

Para verificarmos a vantagem de inserir a Busca Local Aleatória (BLA) composta de movimentos reparadores (ver Seção 5.4) no procedimento de busca junto à Busca Tabu (BT), realizamos testes para comparação da solução obtida através dos procedimentos BT e BLA+BT, bem como o tempo computacional que cada um leva para encontrar uma solução viável. Utilizamos os casos gerados e os casos reais para esta finalidade. Consideramos a Busca Tabu composta de movimentos simples e de uma lista tabu sistematicamente dinâmica cujos parâmetros encontram-se na Tabela 6.5.

BTmax	50
BLAmax	150
Ciclosmax	1
Seqüência para lista tabu:	{18, 16, 14, 12, 10}

Tabela 6.5: Parâmetros considerados para testes dos procedimentos heurísticos

Consideramos que o procedimento reinicia após um número de iterações sem melhora $BTmax$. Também consideramos a solução inicial gerada construtivamente pelo procedimento *Gera_inicial* (Seção 5.6) e um ciclo sem melhora como critério de parada para os testes. Verificamos pouca melhora da solução ao aumentarmos este valor. Os pesos relacionados às componentes da função objetivo 5.1 foram os seguintes:

$$\alpha_1 = 500, \alpha_2 = 19, \alpha_3 = 20, \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_7 = \alpha_8 = \alpha_9 = 1.$$

Desta forma, as componentes que mensuram a inviabilidade de uma grade de horário possui pesos maiores, ou seja, privilegiamos as soluções viáveis. Dentre as soluções viáveis, privilegiamos a Componente 2, que refere-se ao número de “janelas”na grade horária de cada professor. Aulas vagas entre duas aulas são muito indesejadas porque, geralmente, os professores não são remunerados por este tempo sem atividade.

Para cada classe de problemas, consideramos a média de 7 execuções. Classificamos uma classe de problemas pelo número de aulas a serem agendadas. Em cada execução, geramos um caso-teste com as características da Tabela 6.1, variando a matriz de disponibilidade dos professores e a matriz

de preferência dos professores por cada horário de aula. Podemos ver na Tabela 6.6 o tempo computacional para obtermos uma solução viável para os procedimentos BT e BLA+BT.

Como explicamos no capítulo anterior, uma das características da Busca Local Aleatória é encontrar uma solução com poucas inviabilidades para iniciar a Busca Tabu.

Aulas	BLA+BT	%	BT	%
75	0.00	100	0.40	100
150	1.13	100	25.80	100
225	2.86	100	98.40	100
300	13.78	100	275.90	100
375	13.87	100	337.00	86
450	26.87	100	421.10	100
525	38.14	100	1198.80	86
600	72.87	100	1397.50	67
675	81.15	100	1815.30	86
750	137.80	100	2830.80	43
825	186.81	100	3809.20	43
900	245.40	100	4063.5	14
975	207.97	100	4974.4	14
1050	287.15	100	6319.9	29
1125	554.79	100	7412.5	14

Tabela 6.6: Tempo computacional para obtenção da primeira solução viável (em segundos). As colunas “%” apresentam a porcentagem de soluções viáveis encontradas.

Estes resultados mostram esta característica do uso da BLA, pois o tempo para encontrarmos uma solução viável torna-se menor. Também observamos que, a BLA+BT encontrou soluções viáveis para todos os casos enquanto que, utilizando somente a BT, para os casos com maior número de aulas temos um número menor de soluções viáveis encontradas. Isto também comprova o fato de que o uso da BLA após um certo número de iterações da BT sem melhora do valor de função objetivo pode permitir que a BT recomece a busca em uma outra direção. Esta diversificação se dá através dos movimentos reparadores da BLA.

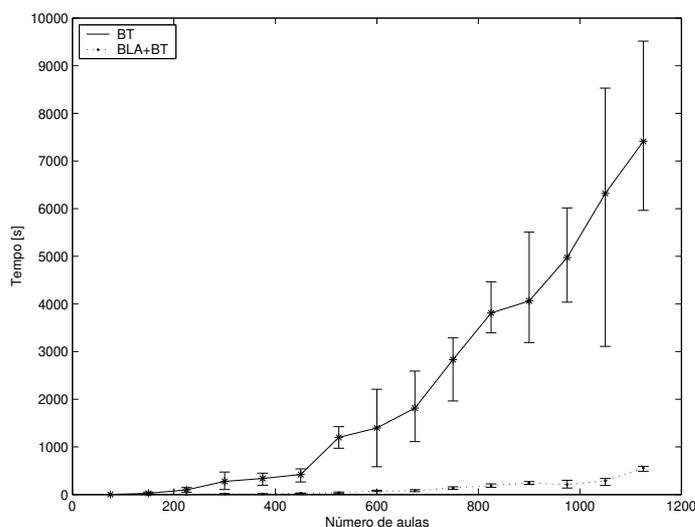


Figura 6.1: Tempo computacional (em segundos) para encontrar uma solução viável considerando o número de aulas.

No gráfico da Figura 6.1 podemos verificar este comportamento com maior facilidade. Neste gráfico, temos o tempo computacional (Tabela 6.6) para encontrarmos uma solução viável para casos de cada classe de problemas considerada. Vemos que o procedimento BLA+BT possui uma curva suave, ou seja, não há variações bruscas de tempo ao aumentarmos o número de aulas a serem agendadas. As barras refletem o melhor e o pior tempo para cada caso.

Para analisarmos a qualidade da melhor solução obtida pelos dois procedimentos, realizamos testes com os casos obtidos das escolas Rezende e Hilton Federici. Os resultados são médias de 5 execuções e podem ser vistos na Tabela 6.7. Para realizarmos estes testes, executamos o procedimento BLA+BT para cada um dos casos e fixamos este mesmo tempo para executarmos o procedimento de Busca Tabu.

Verificamos através da Tabela 6.7 que, para problemas maiores (com maior número de aulas a serem agendadas) o procedimento BLA+BT apresenta melhores soluções. Já para problemas menores os dois procedimentos apresentam soluções próximas.

O comportamento dos procedimentos BT e BLA+BT pode ser visto no gráfico da Figura 6.2.

	BT	BLA+BT	Tempo[s]
R05 _{manhã}	420.2	303.4	571
R05 _{tarde}	364.4	291.8	600
R05 _{noite}	36.4	38	97
R06 _{manhã}	253	199.6	619
R06 _{tarde}	210.2	152.8	518
R06 _{noite}	56.2	55.4	97
HF05 _{manhã}	130.4	107.6	422
HF05 _{tarde}	171.4	141.6	374
HF05 _{noite}	103	101.8	234

Tabela 6.7: Melhor solução obtida para procedimentos heurísticos considerando cada turno das escolas Rezende (em 2005 (R05) e em 2006 (R06)) e Hilton Federici em 2005 (HF05).

Neste gráfico apresentamos as melhores soluções atuais para um determinado caso ao longo do tempo. Este é um comportamento característico das curvas BT e BLA+BT. A BT gera boas soluções de uma forma mais gradual, enquanto que a BLA+BT gera boas soluções no início da busca estabilizando-se de forma mais rápida.

6.3.2 Solução para a escola Rezende em 2006: vantagens dos métodos baseados em busca local

Na Escola Estadual Barão Geraldo de Rezende a grade de horário é feita manualmente, como já foi explicado na Seção 4.1. No ano de 2006 uma funcionária ficou responsável por planejar a grade de horário desse ano. Esta difícil tarefa durou cerca de um mês. Ao longo desse período alguns professores pediram mudanças em seus horários. Como os outros professores já estavam utilizando o planejamento recém-feito, não queriam mais mudanças em suas grades de horário. Desta forma, gerou-se uma grade que possuía poucas chances de movimentações, visto que a maior parte dos professores já estavam com seus horários fixos. O grau de agendamento para os turnos eram: manhã = 0.857143, tarde = 0.869565, noite = 0.806452.

Usamos então o procedimento BLA+BT para tentarmos encontrar uma solução para este problema. Utilizamos a heurística descrita na Seção 5.10,

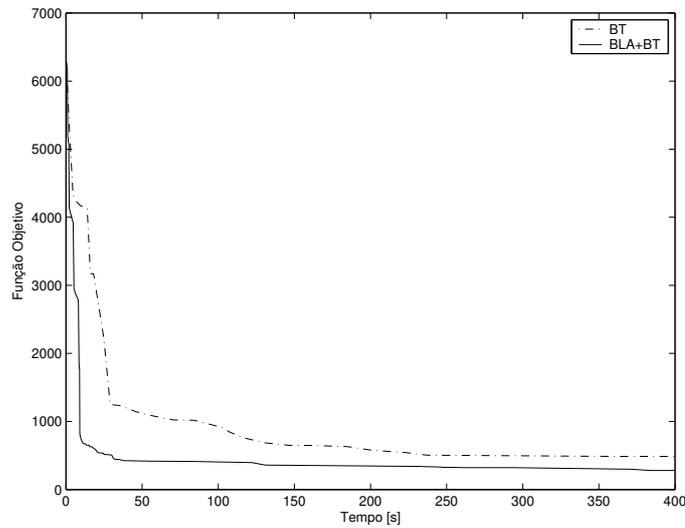


Figura 6.2: Comportamento das curvas dos procedimentos BT e BLA+BT

pois haviam professores que lecionavam em mais de um turno e precisávamos que fosse satisfeito um limite máximo de oito aulas por dia.

Na turma da tarde, uma professora de Matemática (M3) pediu mudança em seu horário. O horário anterior desta professora pode ser visto na Tabela 6.8.

	S	T	Q	Q	S
1	*	7B	-	7C	7C
2	*	7B	-	7C	7B
3	*	7C	-	7A	7A
4	*	7C	-	7B	7A
5	*	7A	-	7B	*
6	*	7A	-	-	-

Tabela 6.8: Grade de horário manual de uma professora de Matemática do turno da tarde.

A professora tinha que transferir as duas últimas aulas de quinta-feira (em negrito na Tabela 6.8) para segunda-feira. Nessa tabela (-) simboliza

os horários de aula que não podiam ter aula agendada e (*) os horários nos quais podia. As grades da manhã e da noite tiveram seus horários de aula fixados, bem como a maioria dos professores do turno da tarde.

Utilizamos a BLA+BT com os parâmetros $BTmax = 1000$, $BLAmax = 20$ e $Ciclosmax = 1$ e utilizamos a grade de horário manual como solução inicial. Após 992.343 segundos obtivemos a grade de horário da Tabela 6.9 para esta professora:

	S	T	Q	Q	S
1	*	7B	-	7C	7C
2	*	7B	-	7C	7B
3	*	7C	-	7A	7A
4	*	7C	-	*	7A
5	7B	7A	-	*	*
6	7B	7A	-	-	-

Tabela 6.9: Grade de horário obtida pelo procedimento BLA+BT da professora de Matemática M3 do turno da tarde.

Esta foi uma solução satisfatória que foi implementada pela escola para o turno da tarde no ano de 2006 e que satisfez as condições impostas pelos professores. Os demais professores não tiveram muitas alterações em seu horário. Somente a ordem de algumas aulas foi alterada ou alguma movimentação para algum horário permitido. Esta é uma vantagem obtida ao utilizarmos métodos de busca local. Dada uma grade de horário já existente, é possível alterá-la para professores que requerem mudanças de horário, usando-a como solução inicial, aproveitando a estrutura original para os demais professores. A grade de horário manual e a grade de horário obtida pela aplicação do procedimento BLA+BT encontram-se na Tabela 6.10 e Tabela 6.11, respectivamente.

6.3.3 Comparação entre as soluções obtidas manualmente, por programação matemática e por procedimento heurístico

Na Tabela 6.12 verifica-se as melhores soluções finais obtidas para os problemas das escolas Rezende e Hilton Federici através do método de programação

	Segunda						Terça						Quarta						Quinta						Sexta					
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
M1	5A	5A	5B	5B	-	-	5B	5B	5A	5A	-	-	5B	5A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
P1	6C	6C	6B	6A	6A	-	6A	6A	6B	6B	6C	6C	-	-	-	-	-	-	6A	6B	6B	6C	6C	-	6A	6C	6A	6B	6B	-
I1	-	-	6C	6B	-	-	8A	8A	6C	5C	5B	5A	6A	6A	6B	5A	5B	5C	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
G1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8A	8A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8A	-	-	-	-	-
H1	-	-	-	-	-	-	5A	5A	5B	*	5C	5C	5A	*	6A	6A	6B	6B	6B	5B	5B	6A	5C	-	-	-	-	-	-	-
I2	7A	7A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
C1	8A	8A	*	*	*	*	*	*	*	*	8A	8A	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	-	8A	*	*	*	*	-
EA	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6C	6C	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6B	6B	6A	6A	-
P2	7B	7B	7A	*	7C	7C	7A	7A	7B	7B	7C	7C	-	-	-	-	-	-	7A	7A	7B	7C	7C	-	7A	7A	7C	7B	7B	-
EF	6B	6A	7B	7A	5C	*	7C	7C	7A	6C	8A	-	-	-	-	-	-	-	7B	5C	6C	5A	7A	-	6A	6A	5A	5B	5B	-
G2	6A	5B	*	5A	5C	6B	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5C	6A	6A	6B	6B	-	5B	5B	5C	5A	5A	-
P3	5B	5C	5C	*	5A	5A	5C	5C	8A	8A	5A	5B	*	*	*	5B	8A	8A	5A	8A	8A	5B	5B	-	5A	5A	5B	5C	5C	-
M2	-	-	-	7A	7A	7B	-	-	-	7A	7B	7B	7B	5C	5C	8A	6C	7A	6C	6C	5C	8A	8A	-	5C	5C	6C	8A	8A	-
M3	*	*	*	*	*	*	7B	7B	7C	7C	7A	7A	-	-	-	-	-	-	7C	7C	7A	7B	7B	-	7C	7B	7A	7A	*	-
H2	-	-	7C	7B	6C	7A	-	-	-	-	-	-	8A	7A	7A	7B	7C	7C	-	-	-	-	-	-	7B	8A	8A	6C	6C	-
G3	*	*	*	*	7B	6C	*	*	*	*	*	*	7C	7C	7B	7A	7A	6C	*	*	*	*	*	-	6C	7C	7B	*	7A	-
C2	5C	6B	6A	-	-	-	6B	6B	5C	5B	6A	6A	5C	5B	5B	6B	5A	5A	5B	5A	5A	5C	6A	-	-	-	-	-	-	-
C3	7C	7C	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7C	7C	-
EA	-	-	8A	7C	*	5B	-	-	-	-	-	-	7A	7B	5A	5C	5C	5B	8A	7B	7C	7A	5A	-	-	-	-	-	-	-
I3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7C	7C	7B	7B	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
P4	-	-	5A	8A	5B	5C	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
M4	-	-	-	6C	6B	6A	6C	6C	6A	6A	6B	6B	6B	6B	6C	6C	6A	6A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabela 6.10: Solução antes da aplicação do procedimento BLA+BT

	Segunda						Terça						Quarta						Quinta						Sexta						
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	
M1	5A	5A	5B	5B	-	-	5B	5B	5A	5A	-	-	5B	5A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
P1	6C	6C	6B	6A	6A	-	6A	6A	6B	6B	6C	6C	-	-	-	-	-	-	6A	6B	6B	6C	6C	-	6A	6C	6A	6B	6B	-	
I1	-	-	6C	6B	-	-	8A	8A	6C	5C	5B	5A	6A	6A	6B	5A	5B	5C	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
G1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8A	8A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8A	-	-	-	-	-	
H1	-	-	-	-	-	-	5A	5A	5B	*	5C	5C	5A	*	6A	6A	6B	6B	6B	5B	5B	6A	5C	-	-	-	-	-	-	-	
I2	7A	7A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
C1	8A	8A	*	*	*	*	*	*	*	*	*	8A	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	-	8A	*	*	*	*	8A	-
EA	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6C	6C	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6B	6B	6A	6A	-	
P2	7B	7B	7A	*	7C	7C	7A	7A	7B	7B	7C	7C	-	-	-	-	-	-	7A	7A	7B	7C	7C	-	7A	7A	7C	7B	7B	-	
EF	6B	6A	7B	5C	8A	8A	7C	7C	7A	6C	8A	-	-	-	-	-	-	-	7B	5C	6C	5A	8A	-	6B	6A	5A	5B	5B	-	
G2	6A	5B	5A	5C	*	6B	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5C	6A	6A	6B	6B	-	5B	5B	5C	5A	5A	-	
P3	5B	5C	5C	*	5A	5A	5C	5C	8A	8A	5A	5B	*	*	*	5B	8A	8A	5A	8A	8A	5B	5B	-	5A	5A	5B	5C	5C	-	
M2	-	-	-	7B	8A	8A	-	-	-	7A	7B	7B	7A	5C	5C	8A	6C	7A	6C	6C	5C	8A	7B	-	5C	5C	6C	8A	7A	-	
M3	*	*	*	*	7B	7B	7B	7B	7C	7C	7A	7A	-	-	-	-	-	-	8A	7A	7A	7B	7C	7C	-	-	-	-	-	-	
H2	-	-	7C	7B	6C	7A	-	-	-	-	-	-	8A	7A	7A	7B	7C	7C	-	-	-	-	-	-	7B	8A	8A	6C	6C	-	
G3	*	*	*	*	7B	6C	*	*	*	*	*	*	7C	7C	7B	7A	7A	6C	*	*	*	*	*	-	6C	7C	7B	*	7A	-	
C2	5C	6B	6A	-	-	-	6B	6B	5C	5B	6A	6A	5C	5B	5B	6B	5A	5A	5B	5A	5A	5C	6A	-	-	-	-	-	-	-	
C3	7C	7C	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7C	7C	-	
EA	-	-	*	7C	7A	5B	-	-	-	-	-	-	8A	7B	5A	5C	5C	5B	8A	7B	7C	7A	5A	-	-	-	-	-	-	-	
I3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7C	7C	7B	7B	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
P4	-	-	8A	5A	5B	5C	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
M4	-	-	-	6C	6B	6A	6C	6C	6A	6A	6B	6B	6B	6B	6C	6C	6A	6A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	

Tabela 6.11: Solução após aplicação do procedimento BLA+BT

matemática (2)– PM(2) – e BLA+BT. A tabela também apresenta a solução manual para a escola Rezende 2005. Como não dispúnhamos da preferência dos professores pelos horários de aula para os outros casos, não pudemos comparar sua solução manual com as demais. Para o procedimento BLA+BT temos a média de 5 execuções e parâmetros $BTmax = 50$, $IterBTmax = 100$, $BLAmax = 150$, $IterBLAmax = 200$, $Ciclosmax = 1$. Com estes parâmetros, observa-se uma média de 3 a 4 ciclos para cada execução do BLA+BT.

	R05 _m	R05 _t	R05 _n	R06 _m	R06 _t	R06 _n	HF _m	HF _t	HF _n
Manual	612	788	79	-	-	-	-	-	-
PM(2)	790	711	26	910	282	51	142	152	61
Tempo(s)	21600	21600	2664	21600	21600	21600	21600	21600	21600
BLA+BT	303.4	291.8	38	199.6	152.8	55.4	107.6	141.6	101.8
Tempo(s)	571	600	97	619	518	97	422	374	234

Tabela 6.12: Resultados obtidos manualmente, por programação matemática e por procedimento heurístico

As soluções por PM(2) foram obtidas em 6 horas de processamento para todos os problemas, exceto para (R05_n), que obteve solução ótima em 2664 segundos.

Os valores de função objetivo obtidos pelo procedimento BLA+BT foram em torno de 50% menores que os manuais. Já com relação à PM(2), temos melhores soluções de BLA+BT para problemas maiores e, para os problemas menores ((R05_n), (R06_n) e (HF_n)) temos soluções com menores valores de função, porém próximas. Mas, devemos observar que as soluções obtidas por BLA+BT demandaram um tempo menor que por PM(2). As tabelas 6.13, 6.14 e 6.15 mostram as soluções obtidas pelos três métodos para o turno da tarde da Escola Rezende em 2005. Observamos que, entre outros requisitos satisfeitos, a solução obtida pelo procedimento BLA+BT (Tabela 6.15) não possui nenhuma “janela” na grade dos professores para este caso.

	Segunda						Terça						Quarta						Quinta						Sexta						
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	
1	*	*	*	*	*	*	4	4	5	*	*	*	4	5	5	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
2	*	*	*	*	*	*	8	10	11	9	*	8	*	*	*	*	*	*	*	*	*	10	11	9	*	*	*	*	*		
3	11	8	9	7	10	*	11	6	*	8	7	*	9	*	11	10	10	*	8	6	9	6	7	11	8	6	7	9	10	*	
4	*	*	*	12	11	10	*	*	*	11	10	12	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
5	1	1	3	2	4	4	3	2	4	*	*	*	1	2	3	*	2	4	*	*	3	1	2	3	1	1	3	4	4	2	
6	-	-	-	-	-	-	7	*	8	*	*	*	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7	*	8	8	*	7	
7	*	*	4	*	7	6	-	-	-	-	-	-	*	3	4	1	6	5	-	-	-	-	-	-	2	2	5	1	7	3	
8	2	3	2	1	1	3	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	2	*	3	1	*	*	*	*	*	*	
9	4	2	1	3	3	1	1	3	2	2	4	4	2	1	1	4	3	3	2	4	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
10	8	9	*	*	*	*	*	1	1	*	*	*	*	*	*	8	*	9	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
11	*	*	*	*	*	*	*	*	*	1	3	6	12	*	*	2	1	8	*	*	*	4	6	8	*	12	*	3	2	4	
12	5	11	10	8	9	8	*	*	*	*	6	2	10	9	2	3	*	1	6	12	7	12	4	*	3	7	4	11	1	5	
13	3	4	6	*	2	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	1	2	1	3	*	4	4	3	1	2	6	6	
14	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	3	1	4	7	12	2	5	8	11	6	9	10	
15	*	*	*	*	*	*	2	5	3	4	1	1	3	4	12	12	4	2	5	3	12	2	1	5	12	4	2	5	3	1	
16	*	*	5	4	*	2	*	*	*	3	2	3	*	6	7	*	5	*	4	7	6	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
17	7	6	7	5	8	5	6	7	7	6	8	5	5	8	6	6	8	7	7	5	8	8	5	6	*	*	*	*	*	*	
18	6	7	8	6	5	12	*	*	6	5	5	7	8	12	*	7	7	6	12	8	5	5	8	7	*	*	6	12	12	8	
19	*	*	*	*	*	11	*	*	*	*	*	*	7	7	*	*	*	*	10	9	*	*	*	*	11	5	10	*	5	9	
20	10	5	12	9	*	*	5	12	9	10	11	10	11	*	9	5	11	12	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
21	-	-	*	10	6	7	9	8	12	7	12	11	6	10	8	11	12	10	-	-	-	-	-	-	6	9	9	7	8	11	
22	9	10	11	11	12	9	12	11	10	12	9	9	*	*	*	*	*	*	11	10	10	11	9	12	9	10	12	10	11	12	
23	12	12	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
24	*	*	*	*	*	*	10	9	*	*	*	*	*	11	10	9	9	11	9	11	11	9	10	10	10	11	*	*	*	*	

Tabela 6.13: Solução manual para turno da tarde da Escola Rezende em 2005.

	Segunda						Terça						Quarta						Quinta						Sexta					
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
1	*	*	*	*	*	*	5	*	*	4	4	*	*	*	*	*	*	4	*	*	*	5	5	*	*	*	*	*	*	
2	*	*	*	*	11	11	*	*	10	10	9	9	*	*	*	*	*	*	*	*	*8	8	*	*	*	*	*	*	*	
3	11	11	*	6	6	*	9	9	*	*	*	*	6	6	8	8	7	7	9	9	11	11	10	10	10	10	7	7	8	8
4	*	*	*	*	*	*	12	12	11	11	10	10	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
5	3	3	*	*	1	1	*	*	3	3	2	2	3	3	1	1	4	4	*	4	4	2	2	*	2	2	4	4	1	1
6	-	-	-	-	-	-	*	*	7	7	8	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8	*	*	*	*	7
7	7	7	*	*	*	*	-	-	-	-	-	-	5	5	2	2	6	6	-	-	-	-	-	-	1	1	3	3	4	4
8	2	2	1	3	*	*	*	*	*	*	*	*	1	1	*	*	*	*	2	*	*	*	*	*	*	*	*	*	3	3
9	4	4	3	1	2	2	2	2	1	1	*	*	*	*	4	4	3	3	3	3	2	4	1	1	*	*	*	*	*	*
10	9	9	*	*	*	*	1	1	*	*	*	*	*	*	*	*8	8	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
11	-	-	-	-	-	-	*	*	*	*	3	3	*	*	*	*	*	*	6	6	1	1	12	12	4	4	8	8	2	2
12	10	10	8	8	5	5	6	6	2	2	12	12	4	4	3	3	9	9	*	*	*	*	*	*	7	7	1	1	11	11
13	1	1	6	*	4	4	4	3	*	*	*	*	*	*	*	*	2	2	1	2	6	6	3	3	*	*	*	*	*	*
14	*	*	5	9	*	*	3	*	8	*	*	4	*	*	*	*	*	*	*	1	*	12	11	2	*	*	*	6	7	10
15	5	5	2	2	3	3	*	4	4	*	1	1	*	*	*	*	1	1	12	12	5	5	4	4	3	3	2	2	12	12
16	*	*	4	4	*	*	*	*	*	*	5	5	2	2	6	6	*	*	7	7	3	3	*	*	*	*	*	*	*	*
17	6	6	7	7	*	*	8	8	5	5	6	6	8	8	7	7	*	*	5	5	8	8	7	7	*	6	6	*	5	5
18	8	8	12	5	*	6	7	7	*	8	*	*	*	7	12	12	5	5	8	8	7	7	6	6	12	12	5	5	6	6
19	*	*	*	*	7	7	*	*	*	*	*	*	10	10	*	*	*	*	11	11	*	*	9	9	5	5	*	*	*	*
20	-	-	-	-	-	-	*	5	12	12	11	11	9	*	5	5	10	*	*	*	12	*	*	11	*	*	10	10	9	9
21	-	-	11	12	8	8	10	10	6	6	7	7	7	9	11	11	12	12	-	-	-	-	-	-	6	8	9	9	10	*
22	12	12	10	10	9	9	11	11	9	9	*	*	12	12	10	10	11	11	10	10	9	9	*	*	11	11	12	12	*	*
23	*	*	*	*	12	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	*	*	*	*	*	*
24	*	*	9	11	10	10	-	-	-	-	-	-	11	11	9	9	*	10	*	*	10	10	*	*	9	9	11	11	*	*

Tabela 6.14: Melhor solução em 6h de processamento para FM(2) considerando turno da tarde da Escola Rezendes em 2005.

	Segunda						Terça						Quarta						Quinta						Sexta						
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	
1	*	*	*	*	*	*	*	*	4	5	*	*	*	*	*	5	5	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	4	4	*	
2	9	9	10	*	*	*	10	*	*	*	*	*	8	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	11	11	8	
3	7	8	11	11	6	7	8	8	7	10	6	*	6	6	10	7	11	11	10	10	9	9	8	*	9	9	*	*	*		
4	12	12	*	*	*	*	*	*	*	*	*	11	*	*	*	*	10	10	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	11	
5	*	4	4	3	3	1	*	*	*	*	2	*	3	3	2	4	4	1	4	1	1	4	2	2	3	3	1	2	2	1	
6	-	-	-	-	-	-	7	7	8	8	*	*	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	*	*	8	7	*	*	
7	4	1	1	2	4	3	-	-	-	-	-	-	*	*	5	5	*	*	-	-	-	-	-	-	2	7	7	6	6	3	
8	2	*	*	*	*	*	*	*	3	1	1	*	*	*	*	*	2	3	3	2	1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
9	1	2	*	*	*	*	*	*	*	*	2	1	4	3	3	2	4	2	2	4	3	1	1	1	1	4	4	3	3	*	
10	*	*	*	*	*	8	*	*	*	*	*	*	*	*	1	1	9	*	*	*	*	*	8	*	*	*	*	*	*	*	
11	*	*	*	8	8	4	*	*	*	*	12	*	2	2	6	*	*	*	*	*	6	3	3	*	*	*	12	1	1	4	
12	3	6	2	5	9	9	1	1	11	11	4	4	12	12	7	6	8	8	*	*	3	2	10	10	7	5	*	*	*	*	
13	6	*	*	*	*	*	4	4	2	2	*	*	4	1	1	2	3	3	*	*	*	*	6	6	*	1	3	*	*	*	
14	*	*	8	10	7	*	3	9	5	4	11	6	*	*	*	*	*	12	1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	2	
15	*	3	3	1	1	*	2	2	1	1	3	3	5	5	4	12	12	*	12	12	5	5	4	4	4	4	2	2	*	*	*
16	*	*	*	4	2	2	6	3	3	*	*	*	*	*	*	*	*	7	4	6	7	*	*	*	*	*	*	*	5	5	
17	*	*	*	*	*	6	*	6	6	7	5	5	7	7	8	8	5	5	6	6	8	8	7	7	8	8	5	5	7	6	
18	8	7	7	6	5	5	*	5	12	6	7	7	*	*	*	*	6	6	8	8	12	12	5	5	12	12	6	8	8	7	
19	10	10	5	*	*	*	9	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	7	7	11	11	9	5	*	*	*	*	*	
20	5	5	12	12	10	10	5	11	*	*	*	*	*	9	9	10	*	*	9	11	11	*	*	*	*	*	*	*	12	*	
21	-	-	6	7	12	12	11	12	9	9	8	8	10	8	11	11	7	7	-	-	-	-	-	-	6	6	10	10	9	*	
22	*	*	*	9	11	11	12	10	10	12	9	9	11	11	12	9	9	*	11	9	10	10	12	12	10	10	11	12	*	*	
23	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	12	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	12
24	11	11	9	*	*	*	*	*	*	*	10	10	9	10	*	*	*	*	*	*	*	*	9	11	11	11	9	9	10	10	

Tabela 6.15: Solução obtida por BLA+BT para a Escola Rezende em 2005. Valor de função objetivo: 273. Tempo:521.3s

Capítulo 7

Conclusões e trabalhos futuros

Estudamos o problema de programação da grade de horário em instituições educacionais, descrevendo as características básicas de cada grupo principal: agendamento de cursos universitários, agendamento de exames em universidades e, principalmente, em escolas de ensino fundamental e médio (EEFM). Descrevemos um problema típico das EEFM públicas do Estado de São Paulo.

Apresentamos duas formulações matemáticas para tratar este problema, desenvolvendo, como contribuição, uma formulação matemática baseada no agendamento de blocos de aulas duplas e unitárias e desenvolvendo a modelagem de diversas restrições encontradas nestas escolas que não são tratadas na literatura. Também apresentamos um procedimento de Busca Tabu composto de uma lista tabu sistematicamente dinâmica e utilizando movimentos simples como em Schaefer, A. [30]. Desenvolvemos um procedimento de Busca Local Aleatória baseada em movimentos reparadores que foi utilizado para acelerar o processo de busca junto à Busca Tabu (procedimento BLA+BT). O procedimento (BLA+BT) mostrou resultados satisfatórios, tanto com relação ao tempo computacional como com relação à qualidade das soluções obtidas. Além disso, mostramos como tratar variações que podem ser encontradas nas EEFM paulistas.

Como contribuição deste trabalho, foi desenvolvida uma heurística que trata os turnos da manhã, tarde e noite de uma instituição considerando as restrições que existem entre eles. Esta heurística foi aplicada para resolver um problema encontrado na grade de horário da Escola Estadual Barão Geraldo de Rezende, em Campinas, no ano de 2006.

Como trabalho futuro, pretendemos aumentar o número de restrições abordadas para abranger um número maior de instituições de ensino. Por

exemplo, restrições que dizem respeito às instituições que possuem mais de uma unidade de ensino e que possuem professores que trabalham em várias destas unidades. Também vislumbramos a necessidade de compararmos estes procedimentos com outros, como por exemplo, Algoritmos Genéticos.

Referências Bibliográficas

- [1] D. J. Abraham and J. H. Kingston. Generalized bipartite edge colouring to solve real instances of the timetabling problem. In E. Burke and De Causmaecker, editors, *PATAT 2002-LNCS 2740*, pages 288–298, 2002.
- [2] D. Abramson. Constructing schools timetables using simulated annealing: sequential and parallel algorithms. *Management Science*, 37(1):98–113, 1991.
- [3] A. Arastian and D. de Werra. A generalized class-teacher model for some timetabling problems. *European Journal of Operational Research*, 143:531–542, 2002.
- [4] J. Aubin and J.A. Ferland. A large scale timetabling problems. *Computers and Operational Research*, 16(1):67–77, 1989.
- [5] M.W. Carter and Tovey C.A. When is the classroom assignment problem hard? *Operations Research*, 40(1S):28–39, 1989.
- [6] M.W. Carter, Laporte G., and J.W. Chinneck. A general examination scheduling system. *Interfaces*, 24(3):109–120, 1994.
- [7] Dash Optimization Co. <http://www.dashoptimization.com>. XPRESS-MP-versão 1.6-2004.
- [8] A. Colorni, M. Dorigo, and V. Maniezzo. Metaheuristics for high school timetabling. *Computational Optimization Applications*, 9:275–298, 1998.
- [9] T.B. Cooper and J.H. Kingston. The solution of real instances of the timetabling problem. *The Computer Journal*, 36(7):645–653, 1993.

- [10] D. Costa. A tabu search algorithm for computing an operational timetable. *European Journal of Operational Research*, 76:98–110, 1994.
- [11] D. de Werra. An introduction to timetabling. *European Journal of Operational Research*, 19:151–162, 1985.
- [12] D. de Werra. The combinatorics of timetabling. *European Journal of Operational Research*, 96:504–513, 1997.
- [13] C. Di Stefano and A. G. B. Tettamanzi. An evolutionary algorithm for solving the school time-tabling problem. In E. J. Boers et al., editor, *Evo Workshop 2001*, pages 452–462, 2001.
- [14] S. Even, A. Itai, and A. Shamir. On the complexity of timetabling and multicommodity flow problems. *SIAM Journal of Computation*, 5(4):691–703, 1976.
- [15] T. A. Feo and M. G. C. Resende. Greedy randomized adaptive search procedures. *Journal of Global Optimization*, 6:109–133, 1995.
- [16] J. A. Ferland and S. Roy. timetabling problem for university as assignment of activity to resources. *Computers and Operational Research*, 12(2):207–218, 1985.
- [17] G.R. Filho and L.A.N. Lorena. A constructive evolutionary approach to school timetabling. In E. J. W. Boers, J. Gottlieb, P. L. Lanzi, R. E. Smith, S. Cagnoni, E. Hart, G. R. Raidl, and H. Tijink, editors, *In Applications of Evolutionary Computing*, volume 2037, pages 130–139. Springer Lecture Notes in Computer Science, 2001.
- [18] C. C. Gotlieb. The construction of class-teacher timetables. In C. M. Popplewell, editor, *IFIP Congress*, volume 62, pages 73–77, North-Holland, 1963. Springer Lecture Notes in Computer Science.
- [19] A. Hertz. Tabu search for large scale timetabling problems. *European Journal of Operational Research*, 54:39–47, 1991.
- [20] A. Hertz. Finding a feasible course schedule using tabu search. *Applied Mathematics*, 35(3):255–270, 1992.
- [21] J.E. Hopcroft and R. Karp. An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matching in bipartite graphs. *SIAM Journal of Computation*, 2:225–231, 1973.

- [22] W. Juginger. Timetabling in germany—a survey. *Interfaces*, 16:66–74, 1986.
- [23] S. Kirkpatrick and D.C. Gellat. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220:671–680, 1983.
- [24] G. Laporte and S. Desroches. Examination timetabling by computer. *Computer and Operatoinal Research*, 11(4):351–360, 1984.
- [25] G. Laporte and S. Desroches. The problem of assigning students to course sections in a large engineering school. *Computers and Operational Research*, 13:387–394, 1986.
- [26] N.K. Mehta. The application of graph coloring method to an examination scheduling problem. *Interfaces*, 11(5):57–64, 1981.
- [27] Z. Michalewicz. *Genetic Algorithms+Data Structures = Evolution Programs*. Springer Verlag, 3 edition, 1996.
- [28] G.A. Neufeld and J. Tartar. Graph coloring conditions for the existence os solutions to the timetable problem. *Communications of the ACM*, 17(8):450–453, 1974.
- [29] R. Ostermann and D. de Werra. Some experiments with a timetabling system. *OR Spektrum*, 3:199–204, 1983.
- [30] A. Schaerf. Tabu search techniques for large high-school timetabling problems. In 13th National Conference of the American Association for Artificial Intelligence (AAAI-96), 1996.
- [31] A. Schaerf. *A survey of automated timetabling*, volume 13(2), pages 87–127. Springer Netherlands, 1999.
- [32] A. Schaerf and M. Schaerf. Local search techniques for high school timetabling. In *Proc. of the 1st Intl. Conf. on the Practice and Theory of Automated Timetabling*, 1995.
- [33] Tabu Search. *Glover, F. and Laguna, M.* Kluver Academic Publishers, Boston Dordrecht London, 1997.

- [34] M. J. F. Souza, L. S. Ochi, and N. Maculan. A grasp-tabu search algorithm for solving school timetabling problems. In M. G. C. Resende and J. P. Souza, editors, *Metaheuristics: Computer Decision-Making*, Boston, 2003. Kluwer Academic Publishers.
- [35] M. J. F. Souza, L. S. Ochi, and H. G. Santos. An efficient tabu search heuristic for the school timetabling problem. In C. C. Ribeiro and S. L. Martins, editors, *WEA 2004-LNCS 3059*, pages 468–481, 2004.
- [36] A. Tripathy. Computerised decision aid for timetabling - a case analysis. *Discrete Applied Mathematics*, 35(3):313–323, 1992.
- [37] P. Wilke, M. Gröbner, and N. Oster. A hybrid genetic algorithm for school timetabling. In R. I. McKay and J. Slaney, editors, *AI 20025-LNAI 2557*, pages 455–464, 2001.
- [38] M. Yoshikawa, K. Kaneko, Y. Nomura, and M. Watanabe. A constraint-based approach to high school timetabling problems: a case study. In *In Proc. of the 12th Nat. Conf. on Artificial Intelligence (AAAI-94)*, pages 1111–1116, 1994.