TEORIA DE INTERPOLAÇÃO

E

TEORIA DE APROXIMAÇÃO

Ulysses Sodré

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática .

Orientador : Prof. Dr. Dicesar Lass Fernandez

CAMPINAS

1977

A G R A D E C I M E N T O S

Quero expressar os meus mais sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. Dicesar Lass Fernandez pela colaboração durante o período dos cursos e pela orientação da Tese de Mestrado .

Agradeço também a :

Meus pais

Malou

Antônio Carlos do Patrocínio

Colegas de República

Fundação Universidade Est.de Londrina

Í N D I C E

I N T R O D U Ç Ã O

A teoria de interpolação, desde seu aparecimento - com os teoremas clássicos de Riesz-Thorin e de Marcinkiewicz esteve sempre ligada às aplicações à Análise Matemática .

São bastante conhecidas as aplicações, principal - mente à Análise Harmônica e às Equações Diferenciais Parciais

Nosso objetivo neste trabalho é desenvolver a Teoria de Interpolação na forma dada por J.L.Lions e J.Peetre e aplicá-la à teoria construtiva das funções .

As principais fontes de inspiração foram Peetre[7] e [9] e sugerimos ao leitor (desde que exista algum) uma comparação deste trabalho com os acima citados .

O aspecto mais interessante aqui desenvolvido foi a utilização de dois teoremas clássicos da teoria de aproximação; os teoremas de Jackson e Bernstein, para caracterizar o espaço de interpolação $(C^o,C^1)_{\theta,\infty}$ e posteriormente proce - der inversamente caracterizando o espaço de interpolação $(L^p,W^{m,p})_{\theta,q}$ e então obter como corolário teoremas dos tipos Jackson e Bernstein .

Faremos agora um resumo do material desenvolvido em cada capítulo .

No primeiro capítulo, começamos definindo espaços intermediários. A seguir introduzimos as normas funcionais K e J e os espaços de Lions-Peetre. Através de vários teoremas mostraremos a identidade desses espaços e consequentemente a equivalência dos métodos K e J de Peetre e ainda dos métodos de médias de Lions-Peetre. A seguir passamos a estudar os teoremas de reiteração que terão importância nos capítulos posteriores. Terminando o capítulo, fazemos a discretização dos espaços de interpolação introduzidos .

No segundo capítulo desenvolvemos uma teoria de aproximação para espaços normados, inspirados em Peetre [7] e [9] . Neste capítulo, fazemos uma conexão entre os espaços de interpolação e um certo espaço de aproximação introduzido com inspiração nas desigualdades de Jackson e Bernstein . Posteriormente introduzimos classes de espaços denotados por $D(\alpha,K)$, $D(\alpha,J)$ e $D(\alpha)$ que verificam certas desigualdades de Jackson e Bernstein generalizadas. Finalizando o capítulo fazemos uma aplicação dos teoremas clássicos de Jackson e Bernstein para caracterizar o espaço de interpolação $(\overset{\circ}{C},\overset{1}{C})_{\theta,\infty}$

No terceiro capítulo, introduzimos os espaços de Sobolev $W^{m,p}$ e os espaços de Sobolev fracionários, de Besov ou de Lipschitz generalizados $Lip(\alpha,m,p,q)(Lip(\theta,1,\infty,\infty)=Lip\theta$ O resultado principal é a caracterização dos espaços de interpolação $(W^{k,p},W^{k+1,p})_{\theta,p}$ utilizando os espaços $Lip(\alpha;m,p,q)$

No quarto capítulo, fazemos inicialmente um breve estudo das funções inteiras de tipo exponencial inspirado em Nikol'skii [5] . A seguir utilizamos seqüências de espaços de funções inteiras de tipo exponencial em L^p para fixar as classes $D(\alpha,K)$, $D(\alpha,J)$ e $D(\alpha)$ e a seguir caracterizamos os espaços de aproximação $L^p(\alpha,q)$, utilizando os resultados dos capítulos I, II e III . Finalizando o capítulo apresentamos os teoremas dos tipos Jackson e Bernstein para espaços L^p .

CAPÍTULO I

TEORIA REAL DE INTERPOLAÇÃO

1.1. Introdução

Apresentaremos neste capítulo uma teoria real de interpolação .

Fazendo algumas hipóteses não muito restritivas - sobre os parâmetros que ocorrem na definição dos espaços de interpolação, vamos poder apresentar as teorias de Lions-Peetre [4] e Peetre [7] (ver também Butzer-Berens [1]) de uma forma unificada .

Começaremos com a linguagem básica da teoria de interpolação. A seguir introduziremos a noção de norma funcional, um conceito que evoluiu a partir das idéias de Gagliardo sobre interpolação (ver Peetre [8]). A descrição do método de construção dos espaços de interpolação será feita no parágrafo seguinte, bem como o estudo de suas principais propriedades. Entretanto, a principal propriedade dos espaços de interpolação introduzidos, a estabilidade, será estudada num parágrafo separado, através do Teorema de Reiteração .

Em vista das aplicações na teoria de aproximação , dedicamos o sexto parágrafo ao problema da discretização dos espaços de interpolação .

1.2. Noções Básicas

Sejam A_o e A_1 espaços de Banach, continuamente imersos num mesmo espaço vetorial topológico de Hausdorff $\mathcal{A}$. O par (A_o,A_1) será denominado um par admissível .

Podemos então considerar os espaços $A_o + A_1$ e $A_o \cap A_1$, respectivamente, a envoltória linear e a interseção dos espaços A_o e A_1 .

Os espaços $A_o + A_1$ e $A_o \cap A_1$ são espaços de Banach sob as normas :

$$||f||_{A_o+A_1} = \inf_{f=f_o+f_1} \{ ||f_o||_{A_o} + ||f_1||_{A_1} \ , \ f_i \in A_i \}$$

$$||f||_{A_o \cap A_1} = \inf \{ ||f||_{A_o} \ , \ ||f||_{A_1} \}$$

e temos

$$A_o \cap A_1 \subset A_i \subset A_o + A_1 \qquad (i=0,1)$$

Utilizaremos aqui o sinal $\subset$ para indicar a continuidade da imersão de um espaço vetorial topológico em outro.

1.2.1. Definição : Um espaço $A \subset \mathcal{A}$ de Banach, é um espaço intermediário entre A_o e A_1 , se satisfizer

$$A_o \cap A_1 \subset A \subset A_o + A_1$$

1.2.2. Exemplo :Sejam $A_o = L^1(R)$, $A_1 = L^\infty(R)$ e $A = L^p(R)$, com $1 < p < \infty$.

Então :

$$L^1 \cap L^\infty \subset L^p \subset L^1 + L^\infty$$

isto é, L^p é um espaço intermediário entre L^1 e L^∞ .

Mostremos primeiramente que $L^p \subset L^1 + L^\infty$.

Seja $f \in L^p(R^n)$. Se definirmos f^λ e f_λ , por :

$$f^\lambda(x) = \begin{cases} |f(x)| & \text{se } |f(x)| \leq \lambda \\ 0 & \text{se } |f(x)| > \lambda \end{cases}$$

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} |f(x)| & \text{se } |f(x)| \geq \lambda \\ 0 & \text{se } |f(x)| < \lambda \end{cases}$$

poderemos escrever

$$f = f^\lambda + f_\lambda$$

É claro que $f \in L^\infty(R^n)$.

Para mostrar que $f \in L^1(R^n)$, observemos que se

$$E_\lambda = \{x \in R^n \ ; \ |f(x)| > \lambda \}$$

então $\mu(E_\lambda) < \infty$, pois :

$$\int_{R^n} |f(x)|^p dx \geq \int_{R^n} |f^\lambda(x)|^p dx \geq \int_E \lambda^p dx = \lambda^p \mu(E_\lambda)$$

e se $\mu(E_\lambda) = \infty$ para algum $\lambda > 0$, então $f \notin L^p(R^n)$.

Pela desigualdade de Holder, temos :

$$\int_{R^n} |f^\lambda(x)| dx = \int_{E_\lambda} |f^\lambda(x)| dx \leq (\mu(E_\lambda))^{\frac{1}{p'}} \cdot ||f^\lambda||_p \leq (\mu(E_\lambda))^{\frac{1}{p'}} ||f||_p \ .$$

Na primeira imersão, temos que se $f \in L^1 \cap L^\infty$, então $f \in L^\infty$,assim existe $M > 0$, tal que $|f(x)| \leq M$ q.t.p. e como $f \in L^1$, temos :

$$\int_{R^n} |f(x)|^p dx = \int_{R^n} |f(x)|^{p-1} |f(x)| \ dx \leq M^{p-1} ||f||_1$$

logo

$$f \in L^p(R^n) \ .$$

1.2.3. <u>Exemplo</u> : Sejam s_0 e s_1 dois números reais positivos com $s_0 < s_1$ e $0 < \theta < 1$. Então

$$s_0 < s = (1-\theta)s_0 + \theta\, s_1 \quad .$$

Para $r \in R$, consideremos o espaço

$$H^r = \{ f \in L^2(R^n) \; ; \; (1+|x|^2)^{r/2} \hat{f}(x) \in L^2(R^n) \} ,$$

munido da norma

$$||f||_{H^r} = ||(1+|x|^2)^{r/2} \hat{f}(x)||_{L^2} \quad .$$

Vamos ter

$$H^{s_1} \subset H^s \subset H^{s_0}$$

Isto implica que H^s é um espaço intermediário entre H^{s_0} e H^{s_1} :

$$H^{s_0} \cap H^{s_1} \subset H^s \subset H^{s_0} + H^{s_1} \quad .$$

Para estes espaços, vale o seguinte teorema de interpolação : Suponhamos que T seja uma aplicação linear sobre H^r , tal que

$$T(H^r) \subset H^{s_0} \cap H^{s_1}$$

e

$$||Tf||_{H^{s_i}} \leq M_i \, ||f||_{H^r} \qquad (i=0,1)$$

então :

$$||Tf||_{H^s} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} ||f||_{H^r}$$

Com efeito, pela desigualdade de Holder,segue

$$||Tf||_{H^s} \leq ||Tf||_{H^{s_0}}^{1-\theta} ||Tf||_{H^{s_1}}^{\theta}$$

$$\leq M_0^{1-\theta} ||f||_{H^r}^{1-\theta} M_1^{\theta} ||f||_{H^r}^{\theta}$$

$$= M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} ||f||_{H^r}$$

A restrição que o espaço de partida H^r seja o mesmo, não pode ser levantada sem uma elaboração considerável, o que justifica o desenvolvimento de uma teoria geral de interpolação .

Sejam (A_o,A_1) e (B_o,B_1) dois pares admissíveis em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente . Denotamos por $L(\mathcal{A},\mathcal{B})$ o espaço de todas as transformações lineares de $A_o + A_1$ em $B_o + B_1$, tal que se tivermos $T \in L(\mathcal{A},\mathcal{B})$ e $f_i \in A_i$, então :

$$Tf_i \in B_i \qquad (i=0,1)$$

e

$$||Tf_i||_{A_i} \leq M_i ||f_i||_{A_i} \qquad (i=0,1)$$

isto é, a restrição de T ao espaço A_i é uma transformação linear limitada de A_i em B_i, com norma M_i .

1.2.4. <u>Definição</u> : Sejam A e B dois espaços intermediários entre A_o e A_1 , e, B_o e B_1, respectivamente. Dizemos que A e B têm a propriedade de interpolação, se para cada $T \varepsilon L(\mathcal{A},\mathcal{B})$, a restrição de T sobre A é uma transformação linear limitada de A em B .

A partir desta definição, apresenta-se o seguinte problema : Dado o par admissível (A_o,A_1) $((B_o,B_1)$ respect.) elaborar métodos de construção de espaços intermediários A (B,respect.) de modo que os espaços construidos A e B gozem da propriedade de interpolação .

1.3. <u>Normas Funcionais</u>

Seguindo Oklander [6], consideremos um espaço de Banach A munido da norma $||.||_A$ e t um número real positivo. Então, o espaço tA representa o mesmo espaço A, porém agora munido com a norma $t||.||_A$.

Seja agora (A_o,A_1) um par admissível. Então para todo número real positivo t , o par (A_o,tA_1) também será um par admissível e podemos considerar os espaços

$$A_o + tA_1 \qquad e \qquad A_o \cap tA_1 \quad .$$

Estes espaços, são espaços de Banach quando munidos das normas :

$$||f||_{A_o+tA_1} = \inf_{f=f_o+f_1}\{||f_o||_{A_o} + t||f_1||_{A_1} \ , \ f_i \in A_i\}$$

$$||f||_{A_o\cap tA_1} = \max\{||f||_{A_o} \ , \ t||f||_{A_1}\}$$

respectivamente .

Com esta motivação e seguindo Peetre [7] vamos introduzir as seguintes normas funcionais :

$$t \in (0,\infty) \longrightarrow K(t,f) = K(t,f,A_o,A_1) \quad (f \in A_o+A_1)$$

$$t \in (0,\infty) \longrightarrow J(t,f) = J(t,f,A_o,A_1) \quad (f \in A_o\cap A_1)$$

definidas, respectivamente por :

1.3.0(1) $K(t,f)=\inf_{f=f_o+f_1}\{||f_o||_{A_o} + t||f_1||_{A_1} , \ f_i \in A_i\}(f\in A_o+A_1)$

1.3.0(2) $J(t,f)=\max\{||f||_{A_o} \ , \ t||f||_{A_1}\} \qquad (f\in A_o\cap A_1)$

Observemos que dado um par admissível (A_o,A_1) e cada t real positivo fixo , $K(t,f)$ e $J(t,f)$ são normas sobre $A_o + A_1$ e $A_o \cap A_1$ equivalentes a $||.||_{A_o+A_1}$ e $||.||_{A_o\cap A_1}$, respectivamente .

Não é difícil verificar que :

1) $J(t,f)$ é uma função contínua, monótona crescente e convexa sobre $(0,\infty)$, para todo $f \in A_o \cap A_1$.

2) $K(t,f)$ é uma função contínua, monótona crescente e côncava sobre $(0,\infty)$, para todo $f \in A_o + A_1$.

1.3.1. <u>Proposição</u> : Seja $f \in A_o \cap A_1$ e $0 < t,s < \infty$. Então

1.3.1(1) $K(t,f) \leq \min(1,\frac{t}{s})\, J(s,f)$

<u>Demonstração</u> : Segue imediatamente das definições das normas funcionais $K(t,f)$ e $J(t,f)$.

Fundamental e menos trivial é a seguinte espécie - de recíproca da proposição anterior .

1.3.2. <u>Lema</u> : Seja $f \in A_o + A_1$ tal que

1.3.2(1) $K(t,f) \leq C(f)\, t^{\theta}$

onde $C(f)$ é uma constante dependente de f e $0 < \theta < 1$.

Nestas condições, existe uma função fortemante mensurável

1.3.2(2) $u:(0,\infty) \longrightarrow u=u(t) \in A_o \cap A_1$

tal que

1.3.2(3) $f = \int_0^{\infty} u(t)\, d_* t$ (em $A_o + A_1$)

e

1.3.2(4) $J(t,u(t)) \leq 4e\, K(t,f)$

<u>Demonstração</u> : Pela definição de $K(t,f)$,temos que

para cada n natural, existem $f_{on}=f_{on}(t)$ e $f_{1n}=f_{1n}(t)$, pertencentes respectivamente a A_o e A_1, tal que $f = f_{on} + f_{1n}$.

Assim, por 1.3.2(1) ,

$$f_{on} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$f_{1n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Pondo, para $e^n \leq t < e^{n+1}$

$$u(t) = u_n = f_{on+1} - f_{on} = f_{1n} - f_{1n+1}$$

Assim ,

$$J(t,u(t)) \leq \max\{||f_{on}||_{A_o}+||f_{on+1}||_{A_o}, t||f_{1n}||_{A_1}+t||f_{1n+1}||_{A_1}\}$$

$$\leq (||f_{on}||_{A_o}+t||f_{1n}||_{A_1})+(||f_{1n+1}||_{A_o}+t||f_{1n+1}||_{A_1})$$

$$\leq 2e\ K(e^n,f) + 2\ K(e^{n+1},f)$$

Mas como K(t,f) é monótona crescente, então

$$K(e^{n+1},f) \leq e\ K(e^n,f)$$

assim

$$J(t,u(t)) \leq 4e\ K(e^n,f) \leq 4e\ K(t,f) .$$

1.4. Espaços de Interpolação

Seja A um espaço de Banach. Denotaremos por $L^p_*(A)$ com $1 \leq p \leq \infty$, o espaço das funções $f:(0,\infty) \longrightarrow A$, fortemente mensuráveis com relação à medida $d_*t = dt/t$, munido da norma

$$||f||_{L^p_*(A)} = \left(\int_0^\infty ||f(t)||^p \, d_*t \right)^{1/p}$$

com as modificações habituais quando $p = \infty$. Quando $A = R$ usaremos simplesmente a notação L^p_* .

1.4.1. Teorema : São equivalentes as afirmações :

(a) Existe uma função (†) $u=u(t)$ em $(0,\infty)$, com valores em $A_o \cap A_1$, tal que :

$$f = \int_0^\infty u(t) \, d_*t \quad \text{e} \quad t^{-\theta} J(t,u(t)) \in L^p_*$$

(b) Existe uma função $u=u(t)$ com valores em $A_o \cap A_1$, tal que:

$$f = \int_0^\infty u(t) \, d_*t \quad \text{e} \quad t^{i-\theta} u(t) \in L^p_*(A_i) \qquad (i=0,1)$$

(c) Existem duas funções $f_o=f_o(t)$ e $f_1=f_1(t)$ em $(0,\infty)$ com valores em A_o e A_1, respectivamente , tal que :

$$f(t) = f_o(t) + f_1(t) \quad \text{e} \quad t^{i-\theta} f_i(t) \in L^p_*(A_i) \qquad (i=0,1)$$

(d) A função $t^{-\theta} K(t,f) \in L^p_*$

(†) As funções vetoriais consideradas serão sempre fortemente mensuráveis .

<u>Demonstração</u> : (a) $\Longrightarrow$ (b) Seja $u = u(t)$ uma função definida em $(0,\infty)$, com valores em $A_o \cap A_1$, tal que:

$$f = \int_o^\infty u(t)\, d_*t$$

e

$$t^{-\theta} \; J(t,u(t)) \;\; \varepsilon \;\; L^p{}_* \quad .$$

Como

$$t^{i-\theta} \; ||u(t)||_{A_i} \leq t^{-\theta} \max\{||u(t)||_{A_o}, t||u(t)||_{A_1}\}$$

então

$$t^{i-\theta} u(t) \;\; \varepsilon \;\; L^p{}_*(A_i) \qquad (i=0,1)$$

(b) $\Longrightarrow$ (c) Seja f tal que

$$f = \int_o^\infty u(t)\, d_*t$$

e

$$t^{i-\theta} \; u(t) \;\; \varepsilon \;\; L^p{}_*(A_i) \qquad (i=0,1)$$

Fazendo

$$f = 1 * u = \int_o^\infty u(t)\, d_*t$$

($*$ = convolução entre $1 = 1(x)$ e $u = u(t)$)

e decompondo

$$1 = \chi_{(0,1)} + \chi_{(1,\infty)}$$

temos

$$f = (\chi_{(0,1)} + \chi_{(1,\infty)}) * u$$

$$= \chi_{(0,1)} * u + \chi_{(1,\infty)} * u$$

Se tomarmos

$$v_o = \chi_{(0,1)} * u$$

e

$$v_1 = \chi_{(1,\infty)} * u$$

então

$$f = v_o(t) + v_1(t)$$

e além disso

$$t^{-\theta} v_o = (t^{-\theta} \chi_{(0,1)}) * (t^{-\theta} u) \quad \varepsilon \quad L^p_*(A_o)$$

e

$$t^{1-\theta} v_1 = (t^{1-\theta} \chi_{(1,\infty)}) * (t^{1-\theta} u) \quad \varepsilon \quad L^p_*(A_1) \quad .$$

(c) $\Longrightarrow$ (d) Sejam $f_o(t)$ e $f_1(t)$ funções mensuráveis com valores em A_o e A_1 , respectivamente, tal que :

$$t^{i-\theta} f_i(t) \in L^p_*(A_i) \qquad (i=0,1)$$

e

$$f = f_o(t) + f_1(t) \quad ,$$

então

$$t^{-\theta} K(t,f) \leq t^{-\theta}\left[||f_o(t)||_{A_o}+||f_1(t)||_{A_1}\right]$$

assim

$$t^{-\theta} K(t,f) \in L^p{}_* .$$

(d) $\Longrightarrow$ (a) Seja $t^{-\theta} K(t,f) \in L^p{}_*$. Como $K(t,f)$ é monótona crescente em t , $0 < t < \infty$, temos que :

$$K(t,f) \left(\int_0^\infty s^{-\theta p} d_* s\right)^{1/p} \leq \left(\int_0^\infty (s^{-\theta}K(s,f))^p d_* s\right)^{1/p}$$

então

$$K(t,f) \leq (p\theta)^{1/p} t^{\theta} ||f||_{L^p{}_*}$$

e pelo lema fundamental 1.3.2., existe uma função $u=u(t)$ em $A_o \cap A_1$, tal que

$$f = \int_0^\infty u(t)\, d_* t$$

e

$$J(t,u(t)) \leq 4e\, K(t,f)$$

assim

$$t^{-\theta} J(t,u(t)) \leq 4e\, t^{-\theta} K(t,f) ,$$

donde

$$||t^{-\theta} J(t,u(t))||_{L^p{}_*} \leq 4e\, ||t^{-\theta}K(t,f)||_{L^p{}_*}$$

e

$$||f||_{\theta,p,J} \leq 4e\, ||t^{-\theta} K(t,f)||_{L^p{}_*}$$

o que conclui a demonstração do teorema .

1.4.2. <u>Definição</u> : Sejam θ e p números reais , $0 < \theta < 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Denotaremos por $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ o espaço das funções $f \in A_o + A_1$, satisfazendo a qualquer das condições equivalentes do teorema 1.4.1.

Usaremos as notações $(A_o,A_1)_{\theta,p,K}$ ou $(A_o,A_1)_{\theta,p,J}$, quando estivermos definindo os espaços $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ utilizando as normas funcionais $K(t,f)$ ou $J(t,f)$, respectivamente .

1.4.3. <u>Proposição</u> : Os espaços $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ são espaços de Banach intermediários entre A_o e A_1, sob qualquer das normas equivalentes :

1.4.3(1) $||f||_{\theta,p} = \inf\{||t^{-\theta}J(t,u(t))||_{L^p_*};\ \}$

1.4.3(2) $||f||_{\theta,p} = \inf\{||t^{-\theta}u(t)||_{L^p_*(A_o)}+||t^{1-\theta}u(t)||_{L^p_*(A_1)}\}$

1.4.3(3) $||f||_{\theta,p} = \inf\{||t^{-\theta}f_o(t)||_{L^p_*(A_o)}+||t^{1-\theta}f_1(t)||_{L^p_*(A_1)}\}$

1.4.3(4) $||f||_{\theta,p} = ||t^{-\theta}\ K(t,f)||_{L^p_*}$

<u>Demonstração</u> : A equivalência das normas é um escólio da proposição anterior .

A demonstração que $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ são espaços de Banach intermediários entre A_o e A_1 é feita a seguir .

Os espaços $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ são espaços vetoriais normados sob qualquer das normas equivalentes,para $0<\theta<1$ e $1\leq p\leq\infty$.

Mostremos que $(A_o,A_1)_{\theta,p,K}$ é completo .

O espaço $(A_o,A_1)_{\theta,p,K}$ será completo, se e somente se qualquer sequência $\{f_n\}_o^\infty$ absolutamente somável for somável em $(A_o,A_1)_{\theta,p,K}$.

Seja $\{f_n\}_o^\infty$ qualquer sequência absolutamente somável em $(A_o,A_1)_{\theta,p,K}$, então

$$\sum_1^\infty K(t,f_n) < \infty \qquad\qquad 0 < t < \infty$$

Como $A_o + A_1$ é um espaço completo, existe um único $f_o \in A_o + A_1$, tal que

$$f_n \longrightarrow f_o \quad , \text{ quando } n \longrightarrow \infty \quad .$$

Além disso,

$$K(t,f_o) \leq \sum_1^\infty K(t,f_n)$$

assim

$$f_o \in (A_o,A_1)_{\theta,p,K}$$

e

$$\|f_o - \sum_1^N f_n\|_{\theta,p,K} \longrightarrow 0 \text{ , quando } N \longrightarrow \infty$$

então

$$\{f_n\}_o^\infty \text{ é somável para } f_o$$

Provemos agora que $(A_o,A_1)_{\theta,q,K} \subset A_o + A_1$.

Para cada $f \in (A_o,A_1)_{\theta,q,K}$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$,

$$||t^{-\theta} \min(1,t)||_{L^q_*} \, ||f||_{A_o+A_1} \leq ||f||_{\theta,q,K} \leq ||t^{-\theta}K(t,f)||_{L^q_*}$$

então

$$||f||_{A_o+A_1} \leq \frac{||f||_{\theta,q,K}}{||t^{-\theta}\min(1,t)||_{L^q_*}}$$

Além disso, para cada $f \in A_o \cap A_1$ e com $s = 1$ em 1.3.1(1), vem :

$$K(t,f) \leq \min(1,t) \; ||f||_{A_o \cap A_1}$$

Então

$$||f||_{\theta,q,K} \leq (||t^{-\theta}\min(1,t)||_{L^q_*}) \; ||f||_{A_o \cap A_1}$$

assim

$$A_o \cap A_1 \subset (A_o,A_1)_{\theta,q,K} \subset A_o + A_1 ,$$

desse modo , concluimos que $(A_o,A_1)_{\theta,q,K}$ é um espaço intermediário de Banach entre A_o e A_1 .

1.4.4. Teorema : $(A_o,A_1)_{\theta,p} \subset (A_o,A_1)_{\theta,q}$ se $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

Em particular,

$$(A_o,A_1)_{\theta,q,K} \subset (A_o,A_1)_{\theta,\infty,K}$$

e

$$t^{-\theta} K(t,f) \leq C(\theta,q) \, ||f||_{\theta,q,K}$$

onde $C(\theta,q)$ é uma constante positiva que independe de f .

1.5. Teoremas de Reiteração

1.5.1. Definição : Seja $0 \leq \theta \leq 1$. Dizemos que um espaço intermediário A, de A_o e A_1 , pertence à classe :

(i) $K(\theta,A_o,A_1) \Longleftrightarrow K(t,f) \leq C_1 \, t^{\theta} \, ||f||_A \quad f \in A$

(ii) $J(\theta,A_o,A_1) \Longleftrightarrow ||f||_A \leq C_2 \, t^{-\theta} J(t,f) \quad f \in A_o \cap A_1$

(iii) $H(\theta,A_o,A_1) \Longleftrightarrow$ pertence simultaneamente às classes $K(\theta,A_o,A_1)$ e $J(\theta,A_o,A_1)$.

1.5.2. Proposição : Um espaço intermediário A , de A_o e A_1 , pertence à classe :

(i) $K(\theta, A_o, A_1) \iff A \subset (A_o, A_1)_{\theta,\infty}$

(ii) $J(\theta, A_o, A_1) \iff (A_o, A_1)_{\theta,1} \subset A$

(iii) $H(\theta, A_o, A_1) \iff (A_o, A_1)_{\theta,1} \subset A \subset (A_o, A_1)_{\theta,\infty}$.

Demonstração : Prova de (i)

Por definição , $A \in K(\theta, A_o, A_1)$, se e somente se, existe uma constante C_1 positiva tal que para $0 < t < \infty$,

$$t^{-\theta} K(t,f) \leq C_1 \; ||f||_A \qquad (f \in A)$$

ou seja

$$A \subset (A_o, A_1)_{\theta,\infty,K} \; .$$

Prova de(ii)

Suponhamos que $(A_o, A_1)_{\theta,1,J} \subset A$ e façamos

$$G_n(s) = \begin{cases} n & \text{se } t\, e^{-1/n} \leq s < t \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

com $t \in (0,\infty)$ e para cada n natural .

Assim, para cada $f \in A_o \cap A_1$ e $u_n = u_n(s) = G_n(s).f$ temos

$$f = \int_0^\infty u_n(s) \; d_* s$$

então

$$||f||_{\theta,1,J} \leq \int_0^\infty s^{-\theta} J(s,u_n(s))d_*s = n \int_0^\infty G_n(s).s^{-\theta} J(s,f)d_*s$$

e quando $n \longrightarrow \infty$, segue que

$$||f||_{\theta,1,J} \leq t^{-\theta} J(t,f) .$$

Por outro lado, pela hipótese , existe uma constante positiva C_2 tal que

$$||f||_A \leq C_2 ||f||_{\theta,1,J}$$

com $f \in A_o \cap A_1$, implicando o resultado .

Seja $f \in (A_o,A_1)_{\theta,1,J}$ e suponhamos que $A \in J(\theta,A_o,A_1)$

Pela definição de $J(\theta,A_o,A_1)$, temos :

$$||f||_A \leq \int_0^\infty ||u(t)||_A \, d_*t$$

assim

$$||f||_A \leq C_2 \int_0^\infty t^{-\theta} J(t,u(t)) \, d_*t$$

para todo $u = u(t)$, tal que $f = \int_0^\infty u(t) \, d_*t$, e então

$$||f||_A \leq C_2 ||f||_{\theta,1,J}$$

ou seja

$$(A_o,A_1)_{\theta,1,J} \subset A .$$

Sejam $A_{\theta'}$ e $A_{\theta''}$ dois espaços intermediários de A_o e A_1 ,e, $0 < \alpha,\theta < 1$.

Veremos agora, algumas conexões entre os espaços - intermediários $(A_{\theta'},A_{\theta''})_{\alpha,q,K'}$ e $(A_o,A_1)_{\theta,q,K}$; entre os espaços $(A_{\theta'},A_{\theta''})_{\alpha,q,J'}$ e $(A_o,A_1)_{\theta,q,J}$ e também entre os espaços $(A_{\theta'},A_{\theta''})_{\alpha,q}$ e $(A_o,A_1)_{\theta,q}$, sob algumas hipóteses - muito gerais a respeito de $A_{\theta'}$ e $A_{\theta''}$.

1.5.3. <u>Proposição</u> : Sejam $A_{\theta'}$ e $A_{\theta''}$ espaços intermediários - de A_o e A_1, com $0 \leq \theta' < \theta'' \leq 1$, pertencentes respectivamente às classes $K(\theta',A_o,A_1)$ e $K(\theta'',A_o,A_1)$. Então temos

$$(A_{\theta'},A_{\theta''})_{\alpha,q,K'} \subset (A_o,A_1)_{\theta,q,K}$$

desde que $0 < \alpha < 1$, $\theta = (1-\alpha)\theta' + \alpha\theta''$ e $1 \leq q \leq \infty$.

<u>Demonstração</u> : Se $f \in (A_{\theta'},A_{\theta''})_{,q,K'}$, então f possui uma representação da forma $f = f_{\theta'} + f_{\theta''}$ e, por hipótese :

$$\begin{aligned} K(t,f) &\leq K(t,f_{\theta'}) + K(t,f_{\theta''}) \\ &\leq C_{\theta'}\, t^{\theta'}||f_{\theta'}||_{A_{\theta'}} + C_{\theta''}\, t^{\theta''}||f_{\theta''}||_{A_{\theta''}} \\ &\leq C_{\theta'}\, t^{\theta'} \;K'(\frac{C_{\theta''}\, t^{\theta''-\theta'}}{C_{\theta'}},f) \end{aligned}$$

e consequentemente, para $\theta = (1-\alpha)\theta' + \alpha\theta''$, temos :

$$||t^{-\theta}K(t,f)||_{L^q_*} \leq C_{\theta'} \, ||t^{-(\theta''-\theta')} \, K'(\frac{C_{\theta''}}{C_{\theta'}} t^{\theta''-\theta'},f)||_{L^q_*}$$

$$\leq \frac{C_{\theta'}^{1-\alpha} \, C_{\theta''}^{\alpha}}{(\theta''-\theta')^{1/q}} \, ||s^{-\alpha} \, K'(s,f)||_{L^q_*}$$

Desse modo ,

$$||f||_{\theta,q,K} \leq \frac{C_{\theta'}^{1-\alpha} \, C_{\theta''}^{\alpha}}{(\theta''-\theta')^{1/q}} \, ||f||_{\alpha,q,K'}$$

onde $f \in (A_{\theta'},A_{\theta''})_{\alpha,q,K'}$.

1.5.4. Proposição : Sejam $A_{\theta'}$ e $A_{\theta''}$ espaços intermediários de A_o e A_1 , com $0 \leq \theta' < \theta'' \leq 1$, pertencentes respectivamente às classes $J(\theta',A_o,A_1)$ e $J(\theta'',A_o,A_1)$. Então temos

$$(A_o,A_1)_{\theta,q,J} \subset (A_{\theta'},A_{\theta''})_{\alpha,q,J}$$

desde que $0 < \alpha < 1$, $\theta = (1-\alpha)\theta' + \alpha\theta''$ e $1 \leq q \leq \infty$.

Demonstração : Se $f \in (A_o,A_1)_{\theta,q,J}$, existe uma função $u=u(s)$ em $A_o \cap A_1$, tal que :

$$f = \int_0^\infty u(s) \, d_*s$$

com $u(s) \in L^1_*(A_o+A_1)$ e $s^{-\theta} J(s,u(s)) \in L^q_*$,

assim, $u=u(s)$ é fortemente mensurável em $A_{\theta'} \cap A_{\theta''}$, então por hipótese :

$$J'(s,u(s)) = \max \{||u(s)||_{A_{\theta'}} , s||u(s)||_{A_{\theta''}}\}$$

e

$$J'(s,u(s)) \leq \max \{C_{\theta'}s^{-\theta'} J(s,u(s)); C_{\theta''}s^{-\theta''} J(s,u(s)) \}$$

$$= C_{\theta'} \bar{s}^{\theta'} \max \{(1, \frac{C_{\theta''}}{C_{\theta'}} s^{-(\theta''-\theta')} s\, J(s,u(s)) \}$$

onde $C_{\theta'}$ e $C_{\theta''}$ são constantes positivas .

Se tomarmos $t^{\theta''-\theta'} = \dfrac{C_{\theta''}}{C_{\theta'}} s$,

então

$$J'(s,u(s)) \leq C_{\theta'} \left(\frac{C_{\theta''}}{C_{\theta'}} s\right)^{-\theta'/(\theta''-\theta')} J\left(\left(\frac{C_{\theta''}}{C_{\theta'}}\right)^{\frac{1}{\theta''-\theta'}} ,u(s)\right)$$

para quase todo s .

Então ,

$$||s^{-\alpha}J'(s,u(s))||_{L^q_*} \leq C_{\theta'}^{1-\alpha} C_{\theta''}^{\alpha} ||\left(\frac{C_{\theta''}}{C_{\theta'}}\right)^{\frac{-\theta'}{\theta''-\theta'}} J\left(\left(\frac{C_{\theta''}}{C_{\theta'}}s\right)^{\frac{1}{\theta''-\theta'}}, u(s)\right)||$$

e

$$||s^{-\alpha}J'(s,u(s))||_{L^q_*} \leq C_{\theta'}^{1-\alpha} C_{\theta''}^{\alpha}(\theta''-\theta')^{\frac{1}{q}} ||s^{-\theta}J(s,u(\frac{C_{\theta'}}{C_{\theta''}}s^{\theta''-\theta'}))||$$

portanto

$$||f||_{A_{\theta'}+A_{\theta''}} \leq \int_0^\infty ||u(s)||_{A_{\theta'}+A_{\theta''}} \, d_* s$$

$$\leq \int_0^\infty \min(1,\frac{t}{s}) \, J'(s,u(s)) \, d_* s$$

então

$$||f||_{A_{\theta'}+A_{\theta''}} \leq ||s^{\alpha} \min(1,\frac{1}{s})||_{L^{q'}_*} \, ||s^{-\alpha} J(s,u(s))||_{L^{q}_*}$$

e $f \in (A_{\theta'}, A_{\theta''})_{\alpha,q,J'}$.

Finalmente concluimos :

$$\frac{f}{\theta''-\theta'} = \frac{1}{\theta''-\theta'} \int_0^\infty u(s) \, d_* s$$

$$= \int_0^\infty u(\frac{C_{\theta'}}{C_{\theta''}} s^{\theta''-\theta'}) \, d_* s$$

e

$$||f||_{\alpha,q,J'} \leq \frac{C_{\theta'}^{1-\alpha} \; C_{\theta''}^{\alpha}}{(\theta''-\theta')^{1-(1/q)}} \; ||f||_{\theta,q,J}$$

com $f \in (A_o,A_1)_{\theta,q,J}$, onde $\theta = (1-\alpha)\theta' + \alpha\theta''$.

As duas últimas proposições fornecem condições para a demonstração do Teorema de Reiteração(ou Teorema de Estabilidade) :

1.5.5. <u>Teorema</u> : Se os espaços intermediários $A_{\theta'}$ e $A_{\theta''}$,de A_o e A_1 , com $0 \leq \theta' < \theta'' \leq 1$, pertencem respectivamente às classes $H(\theta',A_o,A_1)$ e $H(\theta'',A_o,A_1)$, então para $\theta=(1-\alpha)\theta'+ \alpha\theta''$ com $0 < \alpha < 1$ e $1 \leq q \leq \infty$, temos :

$$(A_{\theta'},A_{\theta''})_{\alpha,q} = (A_o,A_1)_{\theta,q}$$

e as normas desses espaços são equivalentes .

<u>Demonstração</u> : Segue de 1.5.3 e 1.5.4 e a equivalência das normas segue das definições .

1.6. Discretização de espaços intermediários

Seja A um espaço de Banach. Denotamos por $\ell^p(A)$, $1 \leq p \leq \infty$, o espaço das sequências $\{f_n\}_n$ em A tal que as sequências $\{||f_n||_A\} \in \ell^p$. Munimos o espaço $\ell^p(A)$ com a norma

$$||\{f_n\}||_{\ell^p(A)} = \{||f_n||_A\}_{\ell^p} \quad ,$$

com as modificações habituais quando $p = \infty$.

Seja (A_o,A_1) um par admissível e consideremos uma sequência $\{u_n\}$ em $A_o \bigcap A_1$, tal que

$$\{e^{n(i-\theta)}\ u_n\} \in \ \ell^p(A_i) \qquad (i=0,1)$$

então

$$\sum_{\infty}^{\infty} ||u_n||_{A_o+A_1} \quad < \quad \infty \quad .$$

Com efeito,

$$||u_n||_{A_o+A_1} \leq \min(1,e^{-n})\ \max\{||u_n||_{A_o},e^n||u_n||_{A_1}\} \ ,$$

assim

$$||u_n||_{A_o+A_1} \leq e^{n\theta}\min(1,e^{-n})\ \max\{||e^{-n\theta}u_n||_{A_o},||e^{(1-\theta)n}u_n||_{A_1}$$

$$\leq e^{n\theta}\min(1,e^{-n})||e^{-n\theta}u_n||_{A_o}+e^{n\theta}\min(1,e^{-n})||e^{n(1-\theta)}u_n||$$

Somando e aplicando a desigualdade de Holder, vem :

$$\sum_{-\infty}^{\infty} ||u_n||_{A_o+A_1} \leq \sum_{-\infty}^{\infty} \{e^{n\theta}\min(1,e^{-n})\} \, ||e^{-n\theta}u_n||_{A_o} +$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \{e^{n\theta}\min(1,e^{-n})\} \, ||e^{n(1-\theta)}u_n||_{A_1}$$

$$\leq ||\{e^{n\theta}\min(1,e^{-n})\}||_{\ell^{p'}} \{||e^{n\theta}u_n||_{\ell^p(A_o)} + ||e^{n(1-\theta)}u_n||_{\ell^p(A_1)}\}$$

Como

$$||\{e^{n\theta}\min(1,e^{-n})\}||_{\ell^{p'}} < \infty$$

segue o resultado desejado .

1.6.1. Proposição : São equivalentes as afirmações :

Dado $f \in A_o + A_1$,

(a) Existe uma função $t \longrightarrow u(t) \in A_o \cap A_1$, tal que

$$f = \int_0^{\infty} u(t) \, d_* t$$

e

$$t^{-\theta} J(t,u(t)) \in L^p_*$$

(b) Existe uma sequência $\{u_n\}$ em $A_o \cap A_1$, tal que :

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} u_n$$

e

$$\{e^{n(i-\theta)}u_n\} \in \ell^p(A_i) \qquad (i=0,1)$$

Demonstração : (a) $\Longrightarrow$ (b)   Seja u=u(t) tal que

$$f = \int_0^\infty u(t)\, d_* t \quad e \quad t^{-\theta} J(t,u(t)) \in L^p_*$$

Se definirmos

$$u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} u(t)\, d_* t \qquad (e^n \leq t < e^{n+1})$$

então

$$||e^{n(i-\theta)} u_n||^p_{A_i} \leq \max(1, e^{p(\theta-i)}) \int_{e^n}^{e^{n+1}} ||t^{i-\theta} u(t)||^p_{A_i} d_* t$$

assim

$$\sum_{-\infty}^{\infty} ||e^{n(i-\theta)} u_n||^p_{A_i} \leq \max(1, e^{p(\theta-i)}) \int_0^\infty ||t^{i-\theta} u(t)||^p_{A_i}\, d_* t$$

e

$$\{e^{n(i-\theta)}\, u_n\} \in \ell^p(A_i) \qquad (i=0,1)$$

Portanto ,

$$u_n = \sum_{\infty}^{\infty} \int_{e^n}^{e^{n+1}} u(t)\, d_* t = \int_0^\infty u(t)\, d_* t = f \quad .$$

(b) $\Longrightarrow$ (a)   Seja $f \in A_o + A_1$,tal que :

$$f = \sum_{\infty}^{\infty} u_n \quad e \quad \{e^{n(i-\theta)} u_n\} \in \ell^p(A_i) \qquad (i=0,1)$$

Se definirmos

$$u(t) = u_n \qquad (e^n \leq t < e^{n+1})$$

então

$$\int_0^\infty ||t^{i-\theta}u(t)||^p_{A_i} \; d_*t \leq \max(1,e^{p(\theta-i)}) \; ||\{e^{n(i-\theta)}u_n\}||^p_{A_i}$$

assim

$$t^{i-\theta}\, u(t) \quad \varepsilon \quad L^p_*(A_i) \qquad\qquad (i=0,1)$$

e pelo teorema 1.4.1, concluimos que

$$t^{-\theta}\, J(t,u(t)) \quad \varepsilon \quad L^p_*$$

Além disso

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} u_n = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{e^n}^{e^{n+1}} u(t)\, d_*t = \int_0^\infty u(t)\, d_*t$$

1.6.2. <u>Proposição</u> : Se $f \; \varepsilon \; (A_o,A_1)_{\theta,q,J}$, então

$$e^{-q\theta} \sum_{-\infty}^{\infty} (e^{-n\theta}\, J(e^n,u_n))^q \leq ||f||^q_{\theta,q,J}$$

e

$$||f||^q_{\theta,q,J} \leq e^q \sum_{-\infty}^{\infty} (e^{-n\theta}\, J(e^n,u_n))^q ,$$

onde $f = \sum_{-\infty}^{\infty} u_n$.

<u>Demonstração</u> : Pela proposição 1.6.1,se $f\varepsilon(A_o,A_1)_{\theta,q,J}$

existe uma sequência $\{u_n\}$ em $A_o \cap A_1$, tal que :

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} u_n \quad \text{e} \quad \{e^{n(i-\theta)}u_n\} \; \varepsilon \; \ell^p(A_i) \qquad (i=0,1)$$

assim, se tomarmos :

$$u(t) = u_n \qquad (e^n \leq t < e^{n+1})$$

e usarmos o fato que $J(t,u(t))$ é monótona crescente, então

$$J(t,u(t)) \leq J(e^{n+1},u_n) \leq e\, J(e^n,u_n) \quad .$$

Além disso ,

$$\int_0^\infty (t^{-\theta} J(t,u(t)))^q d_*t = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{e^n}^{e^{n+1}} (t^{-\theta} J(t,u(t)))^q \, d_*t$$

$$\leq \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{e^n}^{e^{n+1}} (t^{-\theta}\, e\, J(e^n,u_n))^q \, d_*t$$

$$\leq \sum_{-\infty}^{\infty} e^q \, (J(e^n,u_n))^q \int_{e^n}^{e^{n+1}} t^{-q\theta} \, d_*t$$

$$\leq e^q \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-nq\theta} \, (J(e^n,u_n))^q \quad .$$

Por outro lado , como

$$J(e^n,u_n) \leq \int_{e^n}^{e^{n+1}} J(e^n,u(t)) \, d_*t \leq \int_{e^n}^{e^{n+1}} J(t,u(t)) \, d_*t \; ,$$

então

$$e^{-q\theta} \sum_{-\infty}^{\infty} (e^{-n\theta} J(e^n,u_n))^q = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-(n+1)q\theta} \, (J(e^n,u_n))^q$$

$$\leq \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-(n+1)q\theta} \left(\int_{e^n}^{e^{n+1}} J(e^n,u(t)) d_*t \right)^q$$

$$\leq \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{e^n}^{e^{n+1}} (e^{-(n+1)\theta} \; J(e^n,u(t))^q \; d_*t$$

$$\leq \int_0^{\infty} (t^{-\theta} \; J(t,u(t)))^q \; d_*t \; = \; ||f||^q_{\theta,q,J} \; ,$$

o que demonstra a proposição .

Um resultado equivalente quanto à natureza da proposição anterior é obtido diretamente como segue .

1.6.3. <u>Proposição</u> : Se $f \; \varepsilon \; (A_o,A_1)_{\theta,q,K}$, então

$$(1-e^{-q\theta}) \; (\sum_{-\infty}^{\infty} \; (e^{-n\theta} \; K(e^n,f))^q) \leq \; ||f||^q_{\theta,q,K}$$

e

$$||f||^q_{\theta,q,K} \leq \; e^q \; (\sum_{-\infty}^{\infty} \; (e^{-n\theta} \; K(e^n,f))^q \;)$$

<u>Demonstração</u> : Temos que

$$(1-e^{q\theta}) \sum_{-\infty}^{\infty} (e^{-n\theta}K(e^n,f))^q = \sum_{-\infty}^{\infty} (K(e^n,f)^q \; (e^{-q\theta n} - e^{-(n+1)q\theta})$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} (K(e^n,f)^q \int_{e^n}^{e^{n+1}} t^{-q\theta} \; d_*t$$

$$\leq \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{e^n}^{e^{n+1}} \; (t^{\theta}K(t,f))^q \; d_*t$$

$$= \int_0^{\infty} (t^{-\theta}K(t,f))^q \; d_*t \; = \; ||f||^q_{\theta,q,K} \; .$$

Por outro lado, pela monotonicidade de $K(t,f)$, temos

$$\begin{aligned}
||f||^q_{\theta,q,K} &= \int_0^\infty (t^{-\theta}K(t,f))^q \, d_*t \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{e^n}^{e^{n+1}} (t^{-\theta}K(t,f))^q \, d_*t \\
&\leq \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{e^n}^{e^{n+1}} t^{-q\theta} (K(e^{n+1},f))^q \, d_*t \\
&\leq \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{e^n}^{e^{n+1}} e^q \, t^{-q\theta} (K(e^n,f))^q \, d_*t \\
&\leq e^q \sum_{-\infty}^{\infty} (K(e^n,f))^q \int_{e^n}^{e^{n+1}} t^{-q\theta} \, d_*t \\
&\leq e^q \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-nq\theta} (K(e^n,f))^q \\
&\leq e^q \sum_{-\infty}^{\infty} ((e^{-n\theta} K(e^n,f))^q)
\end{aligned}$$

concluindo o resultado desejado .

Para concluir este parágrafo, vamos introduzir uma análise mais detalhada da discretização dos espaços do tipo K .

Seja (A_o,A_1) um par admissível e consideremos as sequências $\{f_{on}\}$ e $\{f_{1n}\}$, respectivamente em A_o e A_1 , tais que , para todo inteiro n :

$$f = f_{on} + f_{1n} \qquad \text{e} \qquad \{e^{n(i-\theta)} f_{in}\} \in \ell^p(A_i) \qquad (i=0,1)$$

1.6.4. Proposição : São equivalantes as seguintes afirmações:

(a) Dado $f \in A_o + A_1$, $t^{-\theta}K(t,f) \in L^p_*$

(b) Existem sequências $\{f_{on}\}$ e $\{f_{1n}\}$ em A_o e A_1, respectivamente, tal que para todo n inteiro

$$f = f_{on} + f_{1n}$$

e

$$\{e^{n(i-\theta)} f_{in}\} \in \ell^p(A_i) \qquad (i=0,1)$$

Demonstração : (a) $\Longrightarrow$ (b) Seja f tal que

$$t^{-\theta}K(t,f) \in L^p_*$$

Pelo teorema 1.4.1 , existem duas funções

$$f_o = f_o(t) \quad e \quad f_1 = f_1(t) \qquad (0< t < \infty)$$

tal que

$$f = f_o + f_1 \quad e \quad t^{i-\theta} f_i(t) \in L^p_*(A_i) \qquad (i=0,1)$$

Se definirmos, para $e^n \leq t < e^{n+1}$,

$$f_i(t) = f_{in} \qquad (i=0,1)$$

então

$$\{t^{i-\theta} f_{in}\} \in \ell^p(A_i) \qquad (i=0,1)$$

além disso

$$f = f_{on} + f_{1n} \quad .$$

(b) $\Longrightarrow$ (a) Se existirem sequências $\{f_{on}\}$ e $\{f_{1n}\}$ em A_o e A_1, respectivamente, tal que para todo n inteiro tenhamos

$$f = f_{on} + f_{1n} = \text{cte.}$$

e

$$\{e^{n(i-\theta)} f_{in}\} \in \ell^p(A_i) \qquad (i=0,1)$$

então, para $e^n \leq t < e^{n+1}$, poderemos definir

$$f_{in}(t) = f_{in} \qquad (i=0,1)$$

Desta forma, vamos ter :

$$||f_{in}||^p_{A_i} \leq C^p \int_{e^n}^{e^{n+1}} (||f_i(t)||^p_{A_i} + ||f_1'(t)||^p_{A_i})\, d_*t \quad ,$$

onde C é uma constante que independe de p e n .

Além disso,

$$||e^{n(i-\theta)} f_{in}||^p_{A_i} \leq C^p \max(1, e^{p(\theta-i)}) \int_{e^n}^{e^{n+1}} (||t^{i-\theta} f_i(t)||^p_{A_i} + \\ + ||t^{i-\theta} f_1'(t)||^p_{A_i})\, d_*t$$

e como

$$\{e^{n(i-\theta)} f_{in}\} \in \ell^p(A_i) \quad ,$$

e

$$||t^{i-\theta} f_i'|| _{L^p(A_i)} \leq C_1 \, ||t^{i-\theta} f_i|| _{L^p(A_i)}$$

assim

$$||e^{n(i-\theta)}f_{in}||_{\ell^p(A_i)} \leq C_2(\max(1,e^{p(\theta-i)})^{1/p} \cdot$$

$$(||t^{i-\theta}f_i||_{L^p(A_i)}+||t^{i-\theta}f_i'||_{L^p(A_i)},$$

então

$$||e^{n(i-\theta)}f_{in}||_{\ell^p(A_i)} \leq C_3\ ||e^{n(i-\theta)}f_i||_{L^p(A_i)} \quad ,$$

desse modo

$$\{t^{i-\theta}\ f_{in}\} \in L^p(A_i) \qquad (i=0,1)$$

e pelo teorema 1.4.1 , concluimos que

$$t^{-\theta}\ K(t,f) \in L^p_* \ .$$

CAPÍTULO II

UMA TEORIA DE APROXIMAÇÃO

2.1. Introdução

O objetivo deste capítulo é desenvolver uma teoria de aproximação para espaços normados. Esta teoria de aproximação será inspirada nas desigualdades clássicas de Jackson e Bernstein e na teoria de interpolação desenvolvida no capítulo anterior .

Vamos definir aqui um espaço de aproximação e o principal resultado mostrará que este coincidirá com um espaço de interpolação .

Terminaremos o capítulo, caracterizando um espaço de interpolação, usando a teoria de Aproximação .

2.2. Os espaços $A(\alpha,q,K)$ e $A(\alpha,q,J)$

Seja A um espaço de Banach e consideremos uma sequência crescente de subespaços tais que :

$$\{0\} = W_o \subset W_1 \ldots \subset W_n \subset W_{n+1} \subset \ldots \subset A$$

Para todo $a \in A$, introduzimos

$$E_n(a) = \inf\{ \ ||a-w|| \ ; \ w \in W_n \ \}$$

onde $n = 0,1,2, \ldots$

Segue imediatamente que

$$||a||_A = E_o(a) \geq E_1(a) \geq \ldots \geq E_n(a) \geq E_{n+1}(a) \geq \ldots$$

2.2.1. Definição : Seja $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência crescente de subespaços de A, $0 < \alpha < \infty, 1 \leq q \leq \infty$. Denotamos por $A(\alpha,q,K)$ o subespaço dos $a \in A$, tal que :

$$\{e^{n\alpha} \; E_n(a)\} \in \ell^q \; .$$

2.2.2. Proposição : O espaço $A(\alpha,q,K)$ é um espaço de Banach quando munido da norma :

$$||a||_{\alpha,q,K} = ||\{e^{n\alpha} \; E_n(a)\}||_{\ell^q} \; .$$

Da definição do espaço $A(\alpha,q,K)$ e de sua norma segue a desigualdade da proposição seguinte, que denominaremos Desigualdade de Jackson .

2.2.3. Proposição : Seja $a \in A(\alpha,q,K)$. Então :

$$E_n(a) \leq e^{-n\alpha} ||a||_{\alpha,q,K} \; .$$

Observemos que a desigualdade de Jackson implica :

$$E_n(a) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Isto nos permite então, denominar os espaços do tipo $A(\alpha,q,K)$ de espaços de aproximação .

2.2.4. <u>Definição</u> : Seja $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência crescente de subespaços de A, $0<\alpha<\infty$, $1\leq q\leq\infty$ .Denotamos por $A(\alpha,q,J)$ o subespaço dos elementos $a \in A$, para os quais existe uma sequência $\{w_n\}$, com $w_n \in W_n$ tal que

2.2.4(1) $a = \sum_0^\infty w_n$

e

2.2.4(2) $\{e^{n\alpha}\, w_n\} \in \ell^q(A)$

2.2.5. <u>Proposição</u> : O espaço $A(\alpha,q,J)$ é um espaço de Banach quando munido da norma :

$$||a||_{\alpha,q,J} = \inf\{||e^{n\alpha}\, w_n||\}_{\ell^q} ; a = \sum_0^\infty w_n \}$$

Novamente, temos outra desigualdade, que denominaremos Desigualdade de Bernstein, que teve origem na definição de $A(\alpha,q,J)$ e de sua norma .

2.2.6. <u>Proposição</u> : Seja $a \in W_n$. Então :

$$||a||_{\alpha,q,J} \leq e^{n\alpha}\, ||a||_A$$

<u>Demonstração</u> : Como $a \in W_n$, então $a \in A(\alpha,q,J)$.

Desse modo, podemos garantir que :

$$||a||_{\alpha,q,J} \leq ||e^{n\alpha}\ a||_{\ell^q}$$

Vale a seguinte relação de inclusão entre os espaços $A(\alpha,q,K)$ e $A(\alpha,q,J)$:

2.2.7. <u>Proposição</u> : $A(\alpha,q,K) \subset A(\alpha,q,J)$ e

$$||a||_{\alpha,q,J} \leq 2\ ||a||_{\alpha,q,K} \ .$$

<u>Demonstração</u> : Seja $a \in A(\alpha,q,K)$. Assim,para cada $n=0,1,2,\ldots$ e $\varepsilon > 0$, existe $w_n' \in W_n$ tal que

$$||a-w_n'||_A \leq (1+\varepsilon)\ E_n(a)$$

e desse modo

$$w_n' \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

Tomemos então

$$w_n = w_n' - w_{n-1}' \qquad \text{para } n > 0$$

e

$$w_o = 0$$

assim

$$w_n \in W_n$$

e

$$\sum_{o}^{\infty} w_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{o}^{N} w_n = \lim_{N\to\infty} w_N' = a \ .$$

Além disso

$$\begin{aligned}||w_n||_A &= ||w'_n - w'_{n-1}||_A \\ &\leq ||w'_n - a||_A + ||w'_{n-1} - a||_A \\ &\leq (1+\varepsilon)\, E_n(a) + (1+\varepsilon)\, E_{n-1}(a) \\ &\leq 2\,(1+\varepsilon)\, E_n(a)\end{aligned}$$

assim

$$||e^{n\alpha}\, w_n||_A \leq 2(1+\varepsilon)\, E_n(a)\, e^{n\alpha}$$

então

$$||a||_{\alpha,q,J} \leq 2\, ||a||_{\alpha,q,K} .$$

Esta última proposição leva a conjecturar sobre uma recíproca e sobre a identidade dos espaços $A(\alpha,q,K)$ e $A(\alpha,q,J)$.

Isto irá ocorrer dentro de algumas hipóteses adicionais e será tratado no próximo parágrafo .

2.3. Aproximação e Interpolação

Vamos demonstrar neste parágrafo que os espaços de aproximação, coincidem sob algumas hipóteses, com certos espaços de interpolação . Para isso vamos introduzir três classes de espaços ligados às desigualdades de Jackson e de Bernstein, inspiradas na teoria de interpolação .

Como antes, consideremos uma sequência $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ de subespaços de um espaço normado A , tal que :

$$\{0\} = W_o \subset W_1 \subset \ldots \subset W_n \subset W_{n+1} \subset \ldots \subset A \quad .$$

2.3.1. Definição : Seja F um subespaço de A. Dizemos que:

2.3.1(1) $F \in D(\alpha,K) \Longleftrightarrow E_n(a) \leq C\ e^{-n\alpha}\ ||a||_F \quad , \quad a \in F$

2.3.1(2) $F \in D(\alpha,J) \Longleftrightarrow ||a||_F \leq C\ e^{n\alpha} ||a||_A \quad , \quad a \in W_n$

2.3.1(3) $F \in D(\alpha) \Longleftrightarrow F \in D(\alpha,K) \cap D(\alpha,J)$.

Analogamente ao que foi feito na teoria de interpolação,passaremos a estudar uma caracterização dessas classes

2.3.2. Proposição : Seja $F \subset A$. Então :

2.3.2(1) $F \in D(\alpha,K) \Longleftrightarrow F \subset A(\alpha,\infty,K)$

2.3.2(2) $F \in D(\alpha,J) \Longleftrightarrow A(\alpha,1,J) \subset F$

2.3.2(3) $F \in D(\alpha) \Longleftrightarrow A(\alpha,1,J) \subset F \subset A(\alpha,\infty,K)$

Demonstração : Prova de 2.3.2(1)

Seja $F \varepsilon D(\alpha,K)$. Da definição de $D(\alpha,K)$, temos :

$$E_n(a) \leq C\, e^{-n\alpha}\, ||a||_F \qquad n=0,1,2,...$$

então

$$\sup \{e^{n\alpha} E_n(a)\} \leq C\, ||a||_F$$

e pela definição do espaço $A(\alpha,\infty,K)$, vem que :

$$||a||_{\alpha,q,K} \leq C\, ||a||_F \ .$$

Reciprocamente, se $a \varepsilon F$, então $a \varepsilon A(\alpha,\infty,K)$ e pela desigualdade de Jackson, temos :

$$E_n(a) \leq e^{-n\alpha} ||a||_{\alpha,\infty,K} \qquad n=0,1,2,...$$

Como por hipótese, $||a||_{\alpha,\infty,K} \leq C\, ||a||_F$, segue então que

$$E_n(a) \leq C\, e^{-n\alpha} ||a||_F \ ,$$

ou equivalentemente,

$$F \varepsilon D(\alpha,K) \ .$$

Prova de 2.3.2(2)

Se $F \varepsilon D(\alpha,J)$, então por definição, temos :

2.3.2(4) $\quad ||w_n||_F \leq C\, e^{n\alpha}\, ||w_n||_A \qquad$ com $w_n \varepsilon W_n$.

Seja $a \in A(\alpha,1,J)$ e $w_n \in W_n$, $n=0,1,\ldots$, tal que

$a = \sum_0^\infty w_n$.

Então, usando 2.3.2(4) , segue que :

$$\begin{aligned} ||a||_F &= ||\sum_0^\infty w_n||_F \\ &\le \sum_0^\infty ||w_n||_F \\ &\le C\, e^n\, ||w_n||_A . \end{aligned}$$

Como a representação $a = \sum_0^\infty w_n$, foi tomada arbitrária, segue :

$$\begin{aligned} ||a||_F &\le C \inf \{ \sum_0^\infty ||e^n w_n||_A ;\ a = \sum_0^\infty w_n \} \\ &= C\, ||a||_{\alpha,1,J} , \end{aligned}$$

o que implica que

$$A(\alpha,1,J) \subset F .$$

Reciprocamente, se $A(\alpha,1,J) \subset F$, então existe $C>0$, tal que :

$$||a||_F \le C\, ||a||_{\alpha,1,J}$$

para todo $a \in A(\alpha,1,J)$.

Em particular, se $a \in W_n$ e tomando a desigualdade de Bernstein , temos :

$$||a||_{\alpha,1,J} \leq e^{n\alpha}||a||_A \quad .$$

Portanto ,

$$||a||_F \leq C\, e^{n\alpha}||a||_A \, ,$$

ou equivalentemente ,

$$F \in D(\alpha,J) \, .$$

<u>Prova de 2.3.2(3)</u>

Segue das demonstrações de 2.3.2(1) e 2.3.2(2) .

2.3.3. <u>Proposição</u> : Sejam $F_i \in D(\alpha_i,K)$, $i=0,1$, $0 < \theta < 1$ e $\alpha = (1-\theta)\alpha_o + \theta\,\alpha_1$. Então :

$$(F_o,F_1)_{\theta,q,K} \subset A(\alpha,q,K) \quad .$$

Além disso :

$$||a||_{\alpha,q,K} \leq C \; ||a||_{\theta,q,K} \text{ , para algum } C > 0 \, .$$

<u>Demonstração</u> : Seja $a \in (F_o,F_1)_{\theta,q,K}$. Assim , para cada decomposição da forma $a = a_o + a_1$, com $a_i \in F_i$, vem :

$$E_n(a) \leq E_n(a_o) + E_n(a_1)$$

$$\leq C_o\, e^{-n\alpha}\, ||a_o||_{F_o} + C_1\, e^{-n\alpha}\, ||a_1||_{F_1}$$

assim

$$E_n(a) \leq \max(C_o,C_1)e^{-n\alpha} \left(||a_o||_{F_o} + e^{-n(\alpha_1-\alpha_o)}||a_1||_{F_1}\right)$$

$$= \max(C_o,C_1)\ e^{-n\alpha}\ \ K(e^{-n(\alpha_1-\alpha_0)},\ a)$$

mas como $\alpha - \alpha_0 = \theta(\alpha_1-\alpha_0)$, então :

$$e^{n\alpha}\ E_n(a) \leq \max(C_o,C_1)\ e^{n\theta(\alpha_1-\alpha_0)}K(e^{-n(\alpha_1-\alpha_0)},a) \ .$$

Tomando $C' = \max(C_o,C_1)$, vem :

$$||a||_{\alpha,q,K} = ||\{e^{n\alpha}\ E_n(a)\}||_{\ell^q}$$

$$\leq C'\ \left(\sum_{0}^{\infty} (e^{n\theta(\alpha_1-\alpha_0)}K(e^{-n(\alpha_1-\alpha_0)},a))^q\right)^{1/q}$$

$$= C'\ \left(\sum_{\infty}^{0} (e^{-n\theta(\alpha_1-\alpha_0)}K(e^{n(\alpha_1-\alpha_0)},a))^q\right)^{1/q}$$

$$\leq C'\ \left(\sum_{\infty}^{\infty} (e^{-n\theta(\alpha_1-\alpha_0)}K(e^{n(\alpha_1-\alpha_0)},\ a))^q\right)^{1/q}$$

$$= C'\ \left(\int_0^{\infty} (t^{-\theta(\alpha_1-\alpha_0)}\ K(t^{\alpha_1-\alpha_0},a))^q\ \ d_*t\right)^{1/q}$$

$$\leq (C'/(\alpha_1-\alpha_0))\ \left(\int_0^{\infty} (s^{-\theta}K(s,a))^q\ d_*s\right)^{1/q}$$

$$\leq \frac{C'}{\alpha_1-\alpha_0}\ \left(\sum_{\infty}^{\infty} (e^{-n\theta}\ K(e^n,a))^q\right)^{1/q}$$

$$,\qquad = C''\ \ ||a||_{\theta,q,K}$$

onde $C'' = C'/(\alpha_1-\alpha_0)$, concluindo o resultado desejado .

2.3.4. Proposição : Sejam $F_i \in D(\alpha_i,J)$, $i=0,1$, $0 < \theta < 1$ e $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, então :

$$A(\alpha,q,J) \subset (F_o,F_1)_{\theta,q,J}$$

Além disso :

$$||a||_{\theta,q,J} \leq C\ ||a||_{\alpha,q,J}\ ,\ \text{para algum } C > 0\ .$$

Demonstração : Seja $a \in A(\alpha,q,J)$ e $a = \sum\limits_{0}^{\infty} w_n$.

Tomemos $u_n = w_{-n}$ se $n \leq 0$ e $u_n = 0$ se $n > 0$, assim :

$$a = \sum_{\infty}^{\infty} u_n \quad (= \sum_{0}^{\infty} w_n = \sum_{\infty}^{0} w_{-n}) \ .$$

Além disso,

$$J(e^{n(\alpha_1-\alpha_0)},w_{-n}) = \max(||w_{-n}||_{F_o},\ e^{n(\alpha_1-\alpha_0)}||w_{-n}||_{F_1})$$

$$= e^{-n\alpha_0}\ \max(||e^{n\alpha_0}w_{-n}||_{F_o},||e^{n\alpha_1}w_{-n}||_{F_1})$$

$$\leq e^{-n\alpha_0}\ (C_o||w_{-n}||_A,\ C_1||w_{-n}||_A)$$

$$\leq e^{-n\alpha_0}\ \max(C_o,C_1)\ ||w_{-n}||_A\ ,$$

e multiplicando ambos os termos por $e^{-n\alpha_0(\alpha_1-\alpha_0)}$, vem :

$$e^{-n\alpha_0(\alpha_1-\alpha_0)}J(e^{n(\alpha_1-\alpha_0)},u_n) \leq e^{-n\theta(\alpha_1-\alpha_0)}e^{-n\alpha_0}C'\ ||w_{-n}||_A\ ,$$

onde $C' = \max\ (C_o,C_1)$.

Então :

$$\bar{e}^{\theta n(\alpha_1-\alpha_0)} J(e^{n(\alpha_1-\alpha_0)}, u_n) \leq C\ e^{-n\alpha}\ ||w_{-n}||_A\ ,$$

assim sendo

$$(e^{-n\theta(\alpha_1-\alpha_0)}\ J(e^{n(\alpha_1-\alpha_0)},\ u_n) \leq C^q \sum_{\infty}^{\infty} \{e^{-n\alpha}||w_{-n}||\}_A^q$$

$$= C^q \sum_{0}^{\infty}\ (e^{-n\alpha}\ ||w_{-n}||_A)^q\ .$$

Se definirmos

$$u(t^{\alpha_1-\alpha_0}) = u_n \qquad\qquad (e^n \leq t < e^{n+1})$$

então

$$||a||^q_{\theta,q,J} = \int_0^\infty (s^{-\theta}\ J(s,u(s))^q\ d_* s$$

$$= (\alpha_1-\alpha_0) \int_0^\infty (t^{-\theta(\alpha_1-\alpha_0)}\ J(t^{\alpha_1-\alpha_0}, u^{\alpha_1-\alpha_0})))^q\ d_* t$$

$$= (\alpha_1-\alpha_0) \sum_{\infty}^{\infty} \int_{e^n}^{e^{n+1}} (t^{-\theta(\alpha_1-\alpha_0)} J(t^{\alpha_1-\alpha_0}, u(t^{\alpha_1-\alpha_0})))^q d_* t$$

$$= (\alpha_1-\alpha_0) \sum_{\infty}^{\infty} \int_{e^n}^{e^{n+1}} (t^{-\theta(\alpha_1-\alpha_0)} J(t^{\alpha_1-\alpha_0}, u_n))^q\ \ d_* t$$

$$\leq (\alpha_1-\alpha_0) \sum_{\infty}^{\infty} J(e^{(n+1)(\alpha_1-\alpha_0)}, u_n)^q \int_{e^n}^{e^{n+1}} t^{-\theta q(\alpha_1-\alpha_0)}\ d_* t$$

$$= e^{q(\alpha_1-\alpha_0)} \left(\frac{1-e^{-q\theta(\alpha_1-\alpha_0)}}{q\theta}\right) \sum_{\infty}^{\infty} (e^{-n\theta(\alpha_1-\alpha_0)} J(e^{n(\alpha_1-\alpha_0)}, u_n$$

$$\leq e^{q(\alpha_1-\alpha_0)}(\alpha_1-\alpha_0)\sum_{\infty}^{\infty}(e^{-n\theta(\alpha_1-\alpha_0)}J(e^{n(\alpha_1-\alpha_0)},u_n))^q$$

e se tomarmos $C^q = e^{q(\alpha_1-\alpha_0)}(\alpha_1-\alpha_0)$, vem :

$$||a||_{\theta,q,J} \leq C\,||a||_{\alpha,q,J} \;.$$

2.3.5. <u>Proposição</u> : Sejam $F_i \in D(\alpha_i)$, $i=0,1$, $0 < \theta < 1$ e $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, então :

2.3.5(1) $(F_o,F_1)_{\theta,q,K} \subset (F_o,F_1)_{\theta,q,J}$

2.3.5(2) $(F_o,F_1)_{\theta,q} = A(\alpha,q,K) = A(\alpha,q,J)$

<u>Demonstração</u> : Segue das proposições 2.3.3 ,2.3.4 e das definições dos espaços $(F_o,F_1)_{\theta,q,K}$ e $(F_o,F_1)_{\theta,q,J}$.

OBS.:Quando $A(\alpha,q,K)=A(\alpha,q,J)$ escrevemos simplesmente $A(\alpha,q)$

Para concluir este capítulo, faremos uma aplicação da situação acima, caracterizando um espaço de interpolaççāo através dos espaços de aproximação .

2.3.6. <u>Exemplo</u> : Consideremos $A_o = C(T)$, o espaço de Banach das funções contínuas e periódicas de período 2π,munido da norma :

$$||f||_\infty = \sup\{\,|f(x)|,\ 0 \leq x \leq 2\pi\,\}$$

e $A_1 = C^1(T)$ o subespaço das funções continuamente diferen -

ciáveis , munido da norma

$$||f||_\infty^1 = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$$

O espaço A_1 é também um espaço de Banach .

Se $f \in A_o$, definimos o módulo de continuidade de f, por :

$$\omega(t,f) = \sup_{|h|\leq t} \{|f(x+h)-f(x)|\}$$

Introduzimos então o espaço Lip θ, como o subespaço de A_o , tal que :

$$\{f\}_\theta = \sup_{t>0} \{\omega(t,f)/t^\theta\} < \infty$$

O espaço Lip θ é um espaço de Banach quando munido da norma

$$||f||_\theta = ||f||_\infty + \{f\}_\theta$$

Observemos inicialmente que

$$C^1(T) \subset \text{Lip}\ \theta \subset C(T)$$

isto é,Lip θ é um espaço intermediário entre $C(T)$ e $C^1(T)$.

Vamos demonstrar que

$$(C(T),C^1(T))_{\theta,\infty} = \text{Lip } \theta \qquad (0<\theta<1)$$

usando a Proposição 2.3.5 . Para isso, consideremos o espaço W_n , como o espaço gerado por sen kx e cos kx :

$$W_n = [\text{sen } kx \ , \ \cos kx \ ; \ k=0,1,\dots,n]$$

e também os espaços de aproximação assoaciados $A(\theta,\infty,K)$ e $A(\theta,\infty,J)$.

A demonstração de tudo o que segue neste exemplo é baseada em teoremas clássicos de Jackson e Bernstein sobre a melhor aproximação com polinômios trigonométricos. Vamos enunciar estes teoremas cujas demonstrações podem ser encontradas, por exemplo, no livro de Butzer-Nessel [2] .

<u>Teorema de Jackson</u> : Se $f \in C(T)$,então para cada $n \in N$, temos :

$$E_n(f) \leq 36 \ \ \omega(n^{-1},f) \ .$$

<u>Prova</u> : Ver 2.2.1,[2]

<u>Teorema de Bernstein</u> : Se p_n é um polinômio de grau n,então:

$$||p_n'||_\infty \leq 2n \ ||p_n||_\infty$$

<u>Prova</u> : Ver 2.3.1,[2]

<u>Teorema</u> : Se, para algum α , $0 < \alpha < 1$, $f \in C(T)$, existe um $w \in W_n$ tal que

$$E_n(f) = O(n^{-\alpha}) \qquad (n \longrightarrow \infty)$$

então

$$\omega(t,f) = O(t^{\alpha}) \qquad (0 < \alpha < 1)$$

<u>Prova</u> : Ver 2.3.3, [2]

<u>Teorema</u> : Seja $f \in C(T)$.

(i) Para $0 < \alpha < 1$, $E_n(f)=O(n^{-\alpha}) \Longleftrightarrow f \in \mathrm{Lip}\ \alpha$

(ii) $E_n(f)=O(n^{-1}) \Longleftrightarrow f \in \mathrm{Lip}\ 1$

<u>Prova</u> : Ver 2.4.1 , [2]

Vamos demonstrar inicialmente que

$$\mathrm{Lip}\ \theta = A(\theta,\infty,K) \quad .$$

Mostremos primeiramente que $A(\theta,\infty,K) \subset \mathrm{Lip}\ \theta$.

Se $f \in A(\theta,\infty,K)$, então por 2.2.1 , temos :

$$E_n(f) \leq C\ e^{-n\theta}\ ||f||_{\theta,\infty,K}$$

assim

$$E_n(f) \leq C\ n^{-\theta}\ ||f||_{\theta,\infty,K}$$

e pela desigualdade de Bernstein, temos :

$$\omega(t, f/||f||) \leq C\, t^{\theta} \qquad \forall\, f \neq 0$$

assim

$$\omega(t,f) \leq C\, t^{\theta}\, ||f||_{\theta,\infty,K} \qquad \forall\, f$$

desse modo

$$\omega(t,f) = O(t^{\theta})$$

o que é equivalente a dizer que

$$f \in \mathrm{Lip}\ \theta$$

Reciprocamente, mostraremos que Lip $\theta \subset A(\theta,\infty,K)$.

Se $f \in \mathrm{Lip}\ \theta$, então $\{f\}_{\theta} < \infty$ e f é contínua,assim pela desigualdade de Jackson , vem

$$E_n(f) \leq 36 \quad \omega(n^{-1},f)$$

então

$$E_n(f) \leq (36\, n^{\theta}) \left(\frac{\omega(n^{-1},f)}{n^{\theta}}\right)$$

assim

$$e^{n\theta} E_n(f) \leq 36\, \omega(n^{-1},f) / n^{\theta}$$

$$\leq 36 \sup \{\omega(t,f) / t^{\theta}\}$$

$$= 36 \quad \{f\}_{\theta}$$

e

$$e^{n\theta} E_n(f) < \infty$$

assim

$$\{e^{n\theta} E_n(f)\} \in \ell^\infty$$

então

$$f \in A(\theta,\infty,K) .$$

Concluimos assim que

$$\text{Lip}\ \theta = A(\theta,\infty,K) .$$

Vamos agora demonstrar que

$$C(T) \in D(0) = D(0,K) \cap D(0,J)$$

e

$$C^1(T) \in D(1) = D(1,K) \cap D(1,J)$$

Mostremos que $C(T) \in D(0,K)$.

Pela definição 2.3.1(1), temos que :

$$F \in D(0,K) \iff E_n(f) \leq C\ ||f||_F \quad \forall f \in F .$$

Pelo teorema de Jackson, temos que se $f \in C(T)$, então

$$E_n(f) \leq 36 \quad \omega(n^{-1},f)$$

assim

$$E_n(f) \leq 72\ ||f||_\infty$$

o que é equivalente a dizer que $C(T) \in D(0,K)$.

Mostremos que $C(T) \in D(0,J)$

A demonstração é trivial e segue da definição 2.3.

Mostremos agora que $C^1(T) \in D(1,K)$

Pela definição 2.3.1 , temos que :

$$F \in D(1,K) \Longleftrightarrow E_n(f) \leq C\, e^{-n}\, ||f||_F$$

Como Lip $1 \subset A(1,\infty)$, temos que :

$$E_n(f) \leq e^{-n}\, ||f||_{1,\infty}$$

$$\leq e^{-n}\, ||f||_{\text{Lip } 1}$$

$$\leq e^{-n}\, (\, ||f||_\infty + \sup \{\omega(t,f)/t\}\,)$$

e pela desigualdade do valor médio , temos

$$E_n(f) \leq e^{-n}\, (\, ||f||_\infty + ||f'||_\infty\,)$$

assim

$$E_n(f) \leq C\, e^{-n}\, ||f||^1_\infty$$

Mostremos agora que $C^1(T) \in D(1,J)$, o que é equi - valente a garantir que :

$$||f||^1_\infty \leq C\, e^n\, ||f||_\infty \quad .$$

Temos que

$$||f||_{\infty}^{1} = ||f||_{\infty} + ||f'||_{\infty}$$

mas, pela desigualdade de Bernstein, vem

$$||f'||_{\infty} \leq 2n \; ||f||_{\infty}$$

onde n é o grau do polinômio f, assim :

$$||f||_{\infty}^{1} \leq (1+2n) \; ||f||_{\infty}$$

$$\leq 2 \; e^{n} \; ||f||_{\infty}$$

concluindo que $C^1(T) \in D(1)$.

CAPÍTULO III

INTERPOLAÇÃO DE ESPAÇOS DE SOBOLEV

Neste capítulo, estudaremos a caracterização de espaços de interpolação entre espaços de Sobolev. Inicialmente introduziremos as noções de derivada fraca e de espaços de Sobolev. Apresentaremos então os espaços de Sobolev fracionários ou espaços de Lipschitz generalizados que permitirão caracterizar os espaços de interpolação entre espaços de Sobolev.

3.1. Espaços de Sobolev

Denotaremos por $L^1_{loc}(R^n)$ o espaço das funções localmente integráveis no R^n. $C^\infty_c(R^n)$ será o espaço da funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto no R^n.

Seja $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ uma n-pla de inteiros não negativos. Assim, para

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$$

façamos

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Vamos introduzir a noção de derivada fraca para uma função localmente integrável .

Se $\psi \in C_c^\infty(R^n)$, a derivada de ordem $|\alpha|$ está bem definida no sentido clássico .

3.1.1. <u>Definição</u> : Sejam $f, g_\alpha \in L^1_{loc}(R^n)$. Diremos que g_α é a derivada fraca de ordem α da função f e escreveremos

$$g_\alpha = D^\alpha f$$

se

$$\int_{R^n} g_\alpha(x)\psi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{R^n} f(x)\psi^{(\alpha)}(x)dx$$

para toda $\psi \in C_c^\infty(R^n)$.

Quando n = 1, pode-se demonstrar (usando o teorema de Lebesgue que caracteriza as funções absolutamente contínuas como as primitivas de funções integráveis) que neste caso a derivada fraca coincide com a derivada no sentido clássico (de Lebesgue) .

Quando n > 1 , a situação já é completamente diferente. Por exemplo : Existem funções $f \in L^1_{loc}(R^2)$ tal que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

mas as derivadas fracas $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ não existem. Basta tomar

$$f(x,y) = g(x) + h(y)$$

onde g e h são funções não absolutamente contínuas .

Os espaços de Sobolev são espaços funcionais cujas funções apresentam maior regularidade .

3.1.2. Definição : Uma função $f \in L^p(R^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, pertence ao espaço de Sobolev $W^{m,p}(R^n)$ se possue derivadas fracas $D^\alpha f$ pertencentes a $L^p(R^n)$ para todo α tal que $|\alpha| \leq m$.

Vale a seguinte proposição :

3.1.3. Proposição : O espaço de Sobolev $W^{m,p}(R^n)$ é um espaço de Banach, quando munido da norma :

$$||f||_{m,p} = \sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha f||_{L^p}$$

Usando técnicas de regularização, temos também :

3.1.4. Proposição : O espaço $C_c(R^n)$ é denso em $W^{m,p}(R^n)$.

As funções de $W^{m,p}(R^n)$ apresentam uma certa regularidade : São funções contínuas . Para demonstrar este fato, vamos necessitar da seguinte proposição :

3.1.5. Proposição : Seja $f \in L^p(R^n)$. As seguintes condições são equivalentes :

3.1.5(1) $f \in W^{m,p}(R^n)$

3.1.5(2) $(1 + |x|^2)^{m/2} \hat{f} \in L^p(R^n)$.

Além disso

$$||f||_{m,p} = ||(1 + |x|^2)^{m/2} \hat{f}||_{L^p}$$

Demonstração : (Faremos para p = 2 e para o caso - mais geral, ver Calderón [3]) .

Pelo teorema de Plancherel, temos :

$$\sum_{|\alpha|\leq m} ||D^\alpha f||_2^2 = \sum_{|\alpha|\leq m} ||\widehat{D^\alpha f}||_2^2$$

$$= \sum_{|\alpha|\leq m} ||x^\alpha \hat{f}||_2^2$$

$$= \int (\sum_{|\alpha|\leq m} |x^\alpha|^2)\ |\hat{f}(x)|^2 dx$$

Por outro lado,existem constantes positivas A e B, tal que

$$A(\sum_{|\alpha|\leq m} |x^\alpha|^2) \leq (1 + |x|^2)^m \leq B\ (\sum_{|\alpha|\leq m} |x^\alpha|^2)$$

portanto

$$A||f||_{2,m} \leq ||(1+|x|^2)^{m/2}\hat{f}||_{L^2} \leq B||f||_{2,m} \quad .$$

3.1.6. Proposição : Se f ε $W^{m,p}(R^n)$, $1 \leq p \leq \infty$,então f é uma função contínua .

Demonstração : Como f ε $W^{m,p}(R^n)$,então pela proposição anterior, temos :

$$g(t) = (1 + |t|^2)^{m/2}\ \hat{f}(t) \in L^p(R^n)$$

e pela desigualdade de Holder

$$\hat{f}(t) = g(t)\ (1 + |t|^2)^{-m/2} \in L^1(R^n)$$

pois

$$(1 + |t|^2)^{-m/2} \in L^{p'}(R^n)$$

Mais ainda,

$$(1 + |t|^2)^{-m/2} \in L^q(R^n)$$

para $1 < q \leq \infty$ e em particular se $p > 2$, temos na desigualdade generalizada de Holder , que para $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$, temos :

$$\hat{f} \in L^2(R^n)$$

Se $1 < p \leq 2$, pelo Teorema de Hausdorff-Young :

$$\hat{f} \in L^{p'}(R^n) \quad .$$

Como $\hat{f} \in L^1 \cap L^{p'}$, então $\hat{f} \in L^2(R^n)$, ou seja

$$\hat{f} \in L^1 \cap L^2$$

donde

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} \hat{f}(t)\, e^{itx} dt$$

implicando assim o resultado .

3.2. Interpolação de espaços de Sobolev

Vamos agora caracterizar o espaço de interpolação

$$(L^p, W^{m,p})_{s/m,q} = \mathrm{Lip}(s,m,p,q) \qquad (0 < s < m)$$

Para isso, introduziremos os espaços de Lipschitz generalizados . Estes espaços são também conhecidos como espaços de Besov ou espaços de Sobolev fracionários .

Seja T_h , $h \in R^n$, o operador de translação definido sobre o espaço $L^p(R^n)$, por

$$T_h f(x) = f(x+h) \quad .$$

Consideremos

$$\Delta_h^m f(x) = (T_h - I)^m f(x) = \sum_{o}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x+jh)$$

a diferença de ordem m da função f, e, para $t > 0$,

$$\omega_m(t,f,p) = \sup\{ \| \Delta_h^m f(x) \|_{L^p} ;\ 0 < |h| \le t \}$$

o módulo de continuidade de ordem m .

3.2.1. <u>Proposição</u> : Sejam $f \in L^p(R^n)$ e $K(t,f) = K(t,f,L^p,W^{m,p})$ Então existem constantes positivas A e B tais que

$$A\, K(t,f) \le \omega_m(t^{1/m},f) + \min(1,t) \|f\|_p \le B\, K(t,f) \ .$$

Demonstração : Suponhamos inicialmente que $t \geq 1$.

Como

$$W^{m,p} \subset L^p$$

temos que

$$K(t,f) \leq ||f||_p$$

portanto

$$K(t,f) \leq \omega_m(t^{1/m},f) + \min(1,t)||f||_p \quad .$$

Por outro lado, se $f = f_o + f_1$, com $f_o \in L^p$ e $f_1 \in W^{m,p}$, vem que :

$$\min(1,t)||f||_p \leq ||f_o||_p + t||f_1||_p$$

$$\leq ||f_o||_p + t||f_1||_{m,p}$$

donde

$$\min(1,t)||f||_p \leq K(t,f)$$

e como

$$\omega_m(t^{1/m},f) \leq 2^m||f||_p$$

$$\leq 2^m \min(1,t)||f||_p$$

e vamos ter

$$\omega_m(t^{1/m},f) + \min(1,t)||f||_p \leq (1+2^m)\ K(t,f)$$

ou seja, a equivalência está demonstrada para $t \geq 1$.

Suponhamos agora que $t < 1$. Faremos a demonstração somente no caso de uma variável. O caso de várias variáveis segue fazendo as devidas modificações, com os cálculos devidamente complicados .

Temos inicialmente que

$$\Delta^m_{t^{1/m}} f(x) = \int_0^{t^{1/m}} \cdots \int_0^{t^{1/m}} f^{(m)}(x+s_1+\ldots+s_m)ds_1\ldots ds_m$$

e portanto

$$\omega_m(t^{1/m},f) \leq t\left|\left|\frac{d^m}{dx^m}f\right|\right|_p .$$

Agora, se $f = f_o + f_1$, com $f_o \in L^p$ e $f_1 \in W^{m,p}$, segue que

$$\omega_m(t^{1/m},f) \leq \omega_m(t^{1/m},f_o) + \omega_m(t^{1/m},f_1)$$

$$\leq 2^m (||f_o||_p + t||f_1||_{m,p})$$

donde

$$\omega_m(t^{1/m},f) \leq 2^m K(t,f) .$$

Novamente, se $f = f_o + f_1$, com $f_o \in L^p$ e $f_1 \in W^{m,p}$, vem

$$\omega_m(t^{1/m},f) + \min(1,t)||f||_p \leq 2^m K(t,f)+||f_o||_p+ t||f_1||_{m,p}$$

e finalmente

$$\omega_m(t^{1/m},f) + \min(1,t)||f||_p \leq (1+2^m) K(t,f) .$$

Reciprocamente, dada $f \in L^p(R)$, façamos

$$f_o = (-1)^m \int_o^1 \chi_m(\gamma)\, \Delta_{\gamma t^{1/m}}^m f \, d\gamma$$

e

$$f_1 = \int_o^1 \chi_m(\gamma) \left[1-(-1)^m \Delta_{\gamma t^{1/m}}^m f\right] d\gamma$$

onde $j \leq \gamma m < j+1 \qquad (j = 0,1,\ldots,m-1)$ e

$$\chi_m(\gamma) = \frac{m^m}{m!} \sum_o (-1)^k \binom{m}{k} \left(\gamma-\frac{k}{m}\right)^{m-1}$$

assim por um cálculo de rotina, temos que

$$\int_o^1 \chi_m(\gamma)\, d\gamma = 1$$

Não é difícil ver que o par f_o, f_1 fornece uma decomposição da função f, isto é ,

$$f = f_o + f_1$$

e que valem as seguintes desigualdades :

$$||f_i||_p \leq 2^m ||f||_p \qquad (i=0,1)$$

$$||f_o||_p \leq C''\, \omega(t^{1/m},f)$$

$$t\left|\left|\frac{d^k}{dx^k} f_1\right|\right|_p \leq C''\, \omega(t^{1/k},f) \leq C''\, \omega(t^{1/m},f)$$

onde $k = 1,2,\ldots, m$.

Como $t < 1$, vamos ter :

$$K(t,f) \leq ||f_o||_p + t||f_1||_{m,p}$$

$$\leq C\,(||f_o||_p + t||f_1||_p + t\sum_1^m ||\frac{d^k}{dx^k}f||_p\,)$$

$$\leq C\,(\omega(t^{1/m}, f) + 2t^m||f||_p + C''\,\omega(t^{1/m},f))$$

$$\leq M\,(\,\omega(t^{1/m},f) + \min(1,t)||f||_p\,)$$

concluindo assim a demonstração do teorema .

Façamos, para $0 < \alpha < m$:

$$(L^p, W^{m,p})_{\alpha/m,q} = Lip(\alpha,m,p,q) .$$

Da proposição 3.2.1, segue então a seguinte :

3.2.2. <u>Proposição</u> : Se $0 < \alpha < m$ e $1 \leq p,q \leq \infty$. Então :

3.2.2(1) $f \in Lip(\alpha,m,p,q)$

se e somente se

3.2.2(2) $t^{-\alpha}\,\omega_m(t,f) \in L^q_*$

e as normas

3.2.2(3) $||f||_{\alpha,m,q,K} = ||t^{-\alpha/m}\,K(t,f,L^p,W^{m,p})||_{L^q_*}$

3.2.2(4) $||f||_{\alpha,m,p,q} = ||f||_p + ||t^{-\alpha}\,\omega_m(t,f)||_{L^q_*}$

são equivalentes .

Quando $q = \infty$, escreveremos :

$$(L^p, W^{m,p})_{\alpha/m,\infty} = Lip_p \alpha$$

ou quando $p = q = \infty$, simplesmente escreveremos :

$$(L^\infty, W^{m,\infty})_{\alpha/m,\infty} = Lip\ \alpha$$

o que é válido, tendo em vista a proposição anterior,que permite também, chamar os espaços de Sobolev fracionários $Lip(\alpha,m,p,q)$ de espaços de Lipschitz generalizados .

Vamos agora fazer um estudo de reiteração da interpolação dos espaços de Sobolev que terá uma importante aplicação no capítulo seguinte .

3.2.3. Proposição : Os espaços $W^{k,p}(R^n)$, $k=1,2,\ldots,m$;pertencem à classe $K(k/m, L^p, W^{m,p})$.

Demonstração : Se $k = m$ e f $W^{m,p}(R^n)$, é claro então que

$$K(t,f,L^p,W^{m,p}) \leq t\,||f||_{m,p}$$

ou seja, pela definição 1.5.1(i)

$$W^{m,p}(R^n) \in K(1,L^p,W^{m,p})$$

Agora, para $k=1,2,\ldots,m-1$, suponhamos inicialmente que $n = 1$.

Se $f \in W^{k,p}$, temos :

$$||\Delta_s^k f||_p \leq 2^k || f||_p \leq 2^k ||f||_{k,p}$$

e

$$||\Delta_s^k f||_p \leq 2^k s^k ||D^k f||_p \leq 2^k s^k ||f||_{k,p}$$

pois

$$\Delta_s^k f(x) = \int_0^s \dots \int_0^s f^{(k)}(x+t_1+\dots+t_k)dt_1\dots dt_k$$

portanto

$$||\Delta_s^k f||_p \leq 2^k \min(1,s^k) ||f||_{k,p}$$

Agora temos :

$$\begin{aligned} ||\Delta_s^m f||_p &= ||\Delta_s^{m-k}\Delta_s^k f||_p \\ &\leq 2^{m-k} ||\Delta_s^k f||_p \\ &\leq 2^{m-k} 2^k \min(1,s^k) ||f||_{k,p} \\ &= 2^m \min(1,s^k) ||f||_{k,p} \end{aligned}$$

ou ainda

$$\omega_m(t,f) \leq 2^m \min(1,t^m) ||f||_{k,p}$$

assim

$$\begin{aligned} ||t^{-k} \omega_m(t,f)||_{L_*^\infty} &\leq 2^m ||t^{-k}\min(1,t^m)||_{L_*^\infty}||f||_{k,p} \\ &= 2^m ||f||_{k,p} \end{aligned}$$

ou seja

$$W^{k,p} \subset (L^p, W^{m,p})_{k/m,\infty,K}$$

e segue então pela proposição 1.5.2., que

$$W^{k,p} \in K(k/m, L^p, W^{m,p})$$

O caso geral, $n > 1$, segue com alguns cálculos adicionais considerando-se a seguinte fórmula :

$$\Delta_h^m f(x) = m! \int_0^s ds_m \int_0^{s_m} ds_{m-1} \ldots \int_0^{s_3} ds_2 \int^{s_2} (\sigma_1 D_1 + \ldots + \sigma_n D_n)^m f(x + s_m + \ldots + s_1)\sigma ds_1$$

onde $s = |h|$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $|\sigma| = 1$ e $h = s\sigma$.

3.2.4. <u>Lema</u> : Seja $f \in W^{m,p}(R^n), |\alpha| \leq k$ e $0 < k < m$.

Então

$$||D^\alpha f||_p \leq D \max (t^{-k/m} ||f||_p, t^{1-k/m} ||f||_{m,p})$$

<u>Demonstração</u> : Para $n = 1$.

Seja T_h o operador de translação em $L^p(R)$ e consideremos as funções vetoriais

$$\lambda \longmapsto T_{(j\lambda t^{1/m})} f \in L^p(R)$$

onde $\lambda \in R$ e $j = 1, 2, \ldots, m$.

Aplicando a fórmula de Taylor às funções consideradas acima, vem :

$$3.2.4(1)\quad f(x+t^{1/m}j) = \sum_{\ell=0}^{m-1} \sum_{|\alpha|=\ell} D^{\alpha}f(x)j^{\alpha} \frac{t^{\frac{\ell}{m}}}{\ell!} +$$

$$+ t \int_{0}^{1} \frac{(1-\lambda)^{m-1}}{(m-1)!} \Big(\sum_{|\beta|=m} D^{\beta}f(x+\lambda t^{\frac{1}{m}}j)j^{\beta}\Big)d\lambda$$

onde $0 < \lambda < 1$.

Como

$$\det (j^{\alpha}) \neq 0$$

$j=1,\dots,m$, $\alpha = 0,\dots,m-1$, existem escalares A_j tal que para um determinado α^{o} , tenhamos :

$$\sum_{j=1} j^{\ell} A_j = \begin{cases} \ell! & \text{se } \ell = \alpha^{o} \\ 0 & \text{se } \ell \neq \alpha^{o} \end{cases}$$

Agora multiplicando 3.2.4(1) por A_j e somando teremos :

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j f(x+t^{\frac{1}{m}}j) = D^{\alpha o}f(x)t^{\frac{\ell}{m}} +$$

$$+t \sum_{j=1}^{m} j^{m}\alpha_j \int_{o}^{1}\frac{(1-\lambda)^{m-1}}{(m-1)!}\Big(\sum D^{\beta}f(x+\lambda t^{\frac{1}{m}}j\Big)d\lambda$$

donde

$$D^{\alpha_o}f(x) = t^{-\ell/m}||f||_p \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \; f(x+t^{\frac{1}{m}}j)\right) -$$

$$t^{1-\ell/m}\sum_{j=1}^{m} j^m \alpha_j \int_o^1 \frac{(1-\ )^{m-1}}{(m-1)!}\left(\sum D^\beta f(x+\lambda t^{\frac{1}{m}}j\right) \; d\lambda$$

assim

$$||D^{\alpha^o} f||_p \leq t^{-\ell/m}||f||_p \left(\sum_{j=1}^{m}|\alpha_j|\right) + t^{1-\ell/m}||D^\beta f||_p \left(\sum_{j=1}^{m}||j^m\alpha_j||\right)$$

então , existe uma constante positiva D , tal que

$$||D^{\alpha o}f||_p \leq D \max \left(t^{-\ell/m}||f||_p , t^{1-\ell/m}||f||_{m,p}\right)$$

Para $n > 1$.

Consideremos agora T_h o operador de translação em $L^p(R^n)$ e as funções vetoriais

$$\lambda \longrightarrow T(\lambda t^{\frac{1}{m}}j)f \quad \varepsilon \quad L^p(R^n)$$

onde $j=(j_1,j_2,\ldots,j_n)$ com $j_i=1,2,\ldots,m$ para $i=1,2,\ldots,n$.

Pela fórmula de Taylor , temos :

$$3.2.4(2) \quad f(x+t^{1/m}j) = \sum_{\ell=0}^{m-1} \sum_{|\alpha|=\ell} D^\alpha f(x) \; j^\alpha \; \frac{t^{\ell/m}}{\ell!} +$$

$$+ \; t \int_o^1 \frac{(1-\lambda\ )^{m-1}}{(m-1)!}\left(\sum_{|\beta|=m} D^\beta f(x+\lambda t^{\frac{1}{m}}j) \; j^\beta \ \right) d\lambda$$

onde $0 < \lambda < 1$.

Assim, como no caso anterior, dado $\alpha o=(\alpha_1^o,\alpha_2^o,\ldots,\alpha_n^o)$ existem para cada $i=1,2,\ldots,n$, A_{j_i} , $j_i=1,2,\ldots,m$ tais que

$$\sum_{j_i} j_i^{\sigma} . A_{j_i} = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma = \alpha_i^o \\ 0 & \text{se } \sigma \neq \alpha_i^o \end{cases}$$

e multiplicando 3.2.4(2) por $A_{j_1},\ldots,A_{j_n}$ e tomando a soma múltipla sobre $(j_1,\ldots,j_n)$, teremos

$$\sum_{j_1}\sum_{j_2}\cdots\sum_{j_n} A_{j_1}A_{j_2}\ldots A_{j_n} f(x+t^{\frac{1}{m}}j) = D^{\alpha^o} f(x)\, t^{\ell/m} +$$

$$+\, t . \sum_{j_1}\sum_{j_2}\cdots\sum_{j_n} A_{j_1}\ldots A_{j_n}\, j_1^m \ldots j_n^m \int_0^1 \frac{(1-\lambda)^{m-1}}{(m-1)!}\Big(\sum_{|\beta|=m} D^{\beta} f(x+\lambda t^{\frac{1}{m}} j) j^{\beta}\Big) d\lambda$$

Explicitando $D^{\alpha^o} f(x)$ e tomando a norma p, vem :

$$||D^{\alpha^o} f||_p \leq D \max\, (t^{-k/m}||f||_p, t^{1-k/m}||f||_{m,p}) ,$$

que é o resultado desejado .

3.2.5. <u>Proposição</u> : Os espaços $W^{k,p}(R^n)$,$k=1,2,\ldots,m$, pertencem à classe $J(k/m, L^p, W^{m,p})$.

<u>Demonstração</u> : Seja $f \in W^{m,p}(R^n)$. Então , se $k=1,2,\ldots,m-1$, pelo lema anterior

$$||D^\alpha f||_p \leq D \max (t^{-k/m}||f||_p, t^{1-1/m}||f||_{m,p})$$

$$= D\, t^{-k/m} \max (||f||_p, t||f||_{m,p})$$

$$= D\, t^{-k/m} J(t,f,L^p,W^{m,p}) ,$$

portanto, existe $C = C(k)$ tal que

$$||f||_{k,p} \leq C\, D\, t^{-k/m} J(t,f,L^p,W^{m,p})$$

Para completar a demonstração, observemos que

$$||f||_{m,p} \leq t^{-1} J(t,f,L^p,W^{m,p})$$

ou seja

$$W^{m,p} \in J(1,L^p,W^{m,p}) .$$

Segue imediatamente das proposições 3.2.3 e 3.2.5. a seguinte proposição :

3.2.7. <u>Teorema</u> : Se $k=1,2,\ldots,m-1$ e $0 < \theta < 1$, então

$$(W^{k,p},W^{k+1,p})_{\theta,q} = (L^p,W^{m,p})_{\frac{k+\theta}{m},q} = Lip(k+\theta,m,p,q)$$

<u>Demonstração</u> : Segue da proposição 3.2.6 e do Teorema de reiteração .

3.2.8. <u>Proposição</u> : Se $f \in Lip(\alpha,m,p,q)$, $\alpha<m$, $\alpha=k+\theta$, $k=0,1,$ $2,3,\ldots,m-1$ e $0 < \theta < 1$, então

3.2.8(1) $f \in W^{k,p}$

e

3.2.8(2) $D^{\beta}f \in Lip(\theta,1,p,q)$ $(|\beta|=k)$

<u>Demonstração</u> : Se $f \in Lip(k+\theta,m,p,q)$, então pela proposição anterior

$$f \in (W^{k,p},W^{k+1,p})_{\theta,q} \qquad W^{k,p}$$

Agora, se $|\alpha|=k$, para $f=f_o+f_1$, com $f_o \in L^p$ e $f_1 \in W^{m,p}$ e, $|h| \leq t$,teremos :

$$\begin{aligned} ||\Delta_h D^{\alpha}f||_p &= ||\Delta_h D^{\alpha}(f_o+f_1)||_p \\ &\leq ||\Delta_h D^{\alpha}f_o||_p + ||\Delta_h D^{\alpha}f_1||_p \\ &\leq 2\ ||D^{\alpha}f_o||_p + t\sum_{|\beta|=m} ||D^{\alpha}f_1||_p \\ &\leq 2\ (\ ||f_o||_{m-1,p} + t||f_1||_{m,p}\ ) \end{aligned}$$

donde

$$||\Delta_h D^{\alpha}f||_p \leq 2\ K(t,f,W^{m-1,p},W^{m,p}) \ ,$$

portanto

$$\omega(t,D^{\alpha}f) \leq 2\ K(t,f,W^{m-1,p},W^{m,p})$$

ou seja

$$D^{\alpha}f \in Lip(\theta,1,p,q) \ .$$

CAPÍTULO IV

APROXIMAÇÃO EM ESPAÇOS DE SOBOLEV

4.1. Introdução

A teoria de aproximação, mais exatamente os teoremas de Jackson e Bernstein, foram usados no capítulo II para caracterizar um espaço de interpolação :

$$(C(T),C^1(T))_{\theta,\infty} = \mathrm{Lip}\ \theta$$

Neste capítulo faremos uma aplicação inversa. Utilizaremos a teoria de interpolação para obter teoremas de aproximação dos tipos Jackson e Bernstein .

Inicialmente introduziremos a noção de função inteira de tipo exponencial. Estas funções possuem propriedades análogas às dos polinômios trigonométricos, no entanto , estes servem para aproximar funções periódicas e as funções inteiras de tipo exponencial são úteis para aproximar funções não periódicas sobre R^n .

4.2. <u>Funções Inteiras de Tipo Exponencial</u>

4.2.1. <u>Definição</u> : Seja $\tau \geq 0$. A função

$$g = g_\tau(z) = g_\tau(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

é chamada uma função inteira de tipo exponencial ,se são satisfeitas as seguintes propriedades :

i) g é uma função inteira em cada uma de suas coordenadas, isto é

$$g(z) = \sum_{\substack{k_j \geq 0 \\ j=1,\ldots,n}} a_{k_1} \ldots a_{k_n} z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$$

ii) Para cada $\varepsilon>0$, existe um $A_\varepsilon>0$ tal que para todo complexo $z_k = x_k + i\, y_k$ ($k=1,\ldots,n$)

$$|g(z)| < A_\varepsilon \exp(\tau+\varepsilon) \sum_{j=1}^{n} |z_j|$$

é satisfeita .

Denotaremos por

$$I^{\tau,p} = I^{\tau,p}(R^n)$$

o subespaço das funções $f \in L^p(R^n)$ tais que existe uma função inteira g, do tipo exponencial τ , tal que

$$g\Big|_{R^n} = f \qquad \text{q.t.p.}$$

As seguintes propriedades são facilmente verificadas :

$$I^{0,p}(R^n) = \{0\} \quad ;$$

se $\tau' \leq \tau''$, então

$$I^{\tau',p} \subset I^{\tau'',p}$$

Estabeleceremos agora um resultado sobre a transformada de Fourier de uma função em $I^{\tau,p}(R^n)$.

Considerando as funções $f \in L^p(R^n)$ como distribuições temperadas podemos tomar sua transformada de Fourier $\hat{f}$ e a transformada de Fourier inversa $\tilde{f}$ no sentido de distribuições :

$$<\hat{f},\psi> = <f,\hat{\psi}> \quad \text{e} \quad <\tilde{f},\psi> = <f,\tilde{\psi}>$$

para toda função ψ pertencente ao espaço $S(R^n)$ das funções rapidamente decrescentes no infinito .

4.2.2. <u>Lema</u> : Se $F \in I^{\sigma,1}$ então $\hat{F}(x)$ é uma função contínua que se anula fora de $\Delta(\sigma)=\{x \; ; \; |x_j|<\sigma, j=1,\ldots,n\}$

<u>Demonstração</u> : Definamos inicialmente a transformada de Borel $f(z,\theta)$ de uma função holomorfa $F(z)$, como :

$$f(z,\theta) = \int_0^{\infty(\theta)} F(\zeta)\, e^{-\zeta z}\, d\zeta$$

tomada ao longo de $\zeta = \rho e^{-i\theta}$, $0 \leq \rho < \infty$.

Como $F \in I^{\sigma,1}(R)$, então $f(z,\theta)$ converge uniformemente e absolutamente no interior de qualquer região $\Delta(\theta)-\{0\}$ cuja fronteira é tangente a $|z| = \sigma$, nos pontos $\zeta e^{i\theta}$,logo,podemos escrever :

$$f(z) = f(z,\theta) \qquad (z \in \Delta(\theta))$$

Se tomarmos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, respectivamente teremos

$$f(x+iy) = \int_0^\infty F(\zeta)\, e^{-\zeta(x+iy)}\, d\zeta \qquad (x \geq 0)$$

e

$$f(x+iy) = -\int_{-\infty}^0 F(\zeta)\, e^{-\zeta(x+iy)}\, d\zeta \qquad (x \leq 0)$$

Para cada $\varepsilon > 0$, segue

$$f(\varepsilon+iy)-f(-\varepsilon+iy) = \int_{-\infty}^\infty F(\zeta)\, e^{-i\zeta y}\, e^{-\varepsilon|\zeta|} d\zeta$$

e passando ao limite, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$, vem

$$\int_{-\infty}^\infty F(\zeta)\, e^{-i\zeta y}\, d\zeta = 0 \qquad (|y| > \sigma)$$

Agora, se $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$, $\sigma_i \geq 0$ e $F \in I^{\sigma,1}(R^n)$, então $\hat{F}(x)$ é contínua sobre R^n, desde que $F(u)=F(u_1,\ldots,u_n)$ é uma função inteira de tipo exponencial σ_j em u_j no espaço $L^1(R)$ para quase todo $u'=(u_1,\ldots,u_{j-1},u_{j+1},\ldots,u_n)$, assim para um determinado u' , temos :

$$\int F(u_j,u') \, e^{-ix_j u_j} \, du_j = 0 \qquad (|x_j| > \sigma_j)$$

então

$$\hat{F}(x) = 0 \qquad (|x_j| > \sigma_j)$$

logo

$$\hat{F}(x) = 0 \qquad \text{se} \quad x \notin \Delta(\sigma) .$$

4,2.3. Proposição : Se $f \in I^{\sigma,p}$ $(1 \leq p \leq \infty)$, então

$\tilde{f}$ tem suporte sobre $\Delta(\sigma)$.

Demonstração : Seja $\psi \in C_c^\infty(R^n)$ tal que $\text{supp}(\psi)$ $\Delta(1)$ $\psi(x) \geq 0$ e $\int \psi(x)dx = 1$. Consideremos

$$\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\psi(x/\varepsilon)$$

definida sobre $\Delta(\varepsilon)$, com as propriedades :

i) $\psi_\varepsilon(x) \in C_c^\infty$

ii) $\psi_\varepsilon(x) \geq 0$, $x \in R^n$

iii) $\text{supp}(\psi_\varepsilon) \subset \overline{\Delta(\varepsilon)}$

iv) $\int_{\Delta(\varepsilon)} \psi_\varepsilon(x) \, dx = 1$

Teremos, evidentemente que ψ_ε é $S(R^n)$ e tem suporte compacto .

Fazendo

$$\Phi_\varepsilon(x) = (2\pi)^{n/2} \, \hat{\psi}_\varepsilon(x)$$

para $f \in L^p$, vamos ter

$$\Phi_\varepsilon f \xrightarrow[\varepsilon \longrightarrow 0]{L^p} f$$

Por outro lado, como $\Phi_\varepsilon \in S(R^n) \subset L^{p'}$, vem que

$$\Phi_\varepsilon f \in L^1 .$$

Como Φ_ε é a restrição ao R^n de

$$\int \psi(t)e^{-i\varepsilon(t.z)}\,dt$$

que é uma função inteira de tipo exponencial ε, segue, usando a hipótese de que f é do tipo exponencial σ, que

$$\Phi_\varepsilon f \in I^{\sigma,\varepsilon} .$$

Agora, pelo lema anterior, $\widehat{\Phi_\varepsilon f}$ é uma função contínua com suporte em $\Delta(\sigma+\varepsilon)$, e, então se $\psi \in S$; $\psi \equiv 0$ sobre $\Delta(\sigma+\varepsilon)$, teremos

$$\langle \widehat{\Phi_\varepsilon f},\psi\rangle = 0$$

e tomando os limites quando $\varepsilon \longrightarrow 0$, vem

$$\langle \hat{f}, \psi\rangle = 0$$

concluindo assim que $\hat{f}$ tem suporte sobre $\Delta(\sigma+\varepsilon)$.

4.3. Caracterização do Espaço de Aproximação

Seja $\tau>0$, fixo, e consideremos a seguinte sequência de espaços

$$\{0\} = I^{0,p} \subset I^{\tau,p} \subset \ldots \subset I^{k\tau,p} \subset I^{(k+1)\tau,p} \subset \ldots \subset L^p$$

Tem sentido portanto, para o caso L^p, definir as classes $D(\alpha,K)$, $D(\alpha,J)$ e $D(\alpha)$ em relação a essa sequência (ver a definição 2.3.1). Em tudo que segue, estará implícito que a sequência aproximante será a sequência

$$\{I^{k\tau,p}\ ;\ k=0,1,2,\ldots.\}$$

4.3.1. Proposição : O espaço $W^{m,p}(R^n)$ é de classe $D(\alpha,J)$, para $\alpha=m\tau$; isto é ,

4.3.1(1) $\|f\|_{m,p} \leq C\, e^{k\alpha}\|f\|_p$

para toda $f \in I^{k\tau,p}(R^n)$.

Demonstração : Para demonstrar 4.3.1(1) é óbvio que basta demonstrar que para todo $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ com $|\beta|\leq m$, temos

4.3.1(2) $\|D^\beta f\|_p \leq \tilde{C}\, e^{k\alpha}\|f\|_p$.

Esta desigualdade é por sua vez consequência de:

4.3.1(3) $\|D^\beta f\|_p \leq \tilde{C}\|f\|_p$

para toda $f \in I^{1,p}(R^n)$.

Com efeito, se definirmos

$$f(x) = g(e^{-n\tau}x)$$

e tomarmos a derivada de ordem β , $|\beta| \leq m$, teremos :

$$D^\beta f(x) = e^{-\beta n\tau}\, D^\beta g(e^{-n\tau}x)$$

onde $g \in I^{n\tau,p}$.

Passemos então a demonstrar 4.3.1(3) .

Seja $f \in I^{1,p}(R^n)$. Então pela proposição 4.2.3 a transformada de Fourier $\hat{f}$ tem seu suporte contido no cubo - $\Delta(\varepsilon)$. Se $\psi \in C_c^\infty(R^n)$ é uma função constante e igual a 1, em uma vizinhança de $\Delta(\varepsilon)$, vamos ter

$$\hat{f} = \psi\, \hat{f}$$

assim

$$\hat{f} = \tilde{\psi} * f$$

e portanto

$$f = \tilde{\psi} * f$$

Por outro lado , vamos ter

$$D^\beta f = D^\beta(\tilde{\psi} * f)$$

$$= (D^\beta \tilde{\psi}) * f$$

e como ψ é fixa e $D^\beta\tilde{\psi} \in S(R^n)$, então pela desigualdade de Young

$$||D^\beta f||_p \leq ||D^\beta \tilde{\psi}||_1 \; ||f||_p \quad .$$

Finalmente, como ψ foi tomada fixa e independente da função f , fazendo $\tilde{C} = ||D^\beta \tilde{\psi}||_1$, segue a desigualdade 4.3.1(3) .

4.3.2. <u>Proposição</u> : O espaço $W^{m,p}(R^n)$ é de classe $D(\alpha,K)$, para $\alpha = m\tau$; isto é, para toda $f \in W^{m,p}(R^n)$ temos

4.3.2(1) $$E_k(f) \leq C\, e^{-k\alpha} ||f||_{m,p} \quad .$$

<u>Demonstração</u> : Para demonstrar 4.3.2(1) é sufi - ciente mostrar que dada $f \in L^p$, existe $w \in I^{k\tau,p}$, tal que

4.3.2(2) $$||f-w||_p \leq C\, e^{-k\alpha} ||f||_{m,p}$$

que obviamente segue de

4.3.2(3) $$||f-w||_p \leq \tilde{C}\, e^{-k\alpha} ||D^\beta f||_p \qquad (|\beta| \leq m)$$

que por sua vez, segue de

4.3.2(4) $$||f-w||_p \leq \tilde{C}\; ||D^\beta f||_p$$

onde agora $f \in I^{1,p}$ e ainda $|\beta| \leq m$.

Demonstremos 4.3.2(4) .

Seja $\hat{\rho} \in C_c(R^n)$, se anulando fora de $|\zeta| \leq 1$ e sendo igual a 1 em $|\zeta| \leq 1/2$. Se definirmos w pela fórmula

$$\hat{w} = \hat{\rho}\ \hat{f}$$

teremos, em virtude disso

$$\hat{f}(\zeta) - \hat{w}(\zeta) = (1 - \hat{\rho}(\zeta))\ \hat{f}(\zeta)$$

$$= \frac{1 - \hat{\rho}(\zeta)}{(i\zeta)^{\beta}}\ (i\zeta)^{\beta}\ \hat{f}$$

assim

$$\widehat{f - w} = \widehat{(\widetilde{1 - \hat{\rho}})} * D^{\beta} f$$

logo

$$f - w = (\widetilde{1 - \hat{\rho}}) * D^{\beta} f$$

Como $\widetilde{1 - \hat{\rho}}$ ε L^1 e $D^{\beta} f \ \varepsilon\ L^p$, pela desigualdade de Young, vem que

$$||f-w||_p \leq ||\widetilde{1 - \hat{\rho}}||_1 \ ||D^{\beta} f||_p$$

Como ρ é fixa, podemos tomar

$$\tilde{C} = ||\widetilde{1 - \hat{\rho}}||_1 \quad ,$$

assim

$$||f-w||_p \leq \tilde{C}\ ||D^{\beta} f||_p \ .$$

A conclusão segue analogamente à proposição 4.3.1.

As proposições 4.3.1 e 4.3.2 resumem-se no seguinte corolário .

4.3.3. Proposição : O espaço $W^{m,p}(R^n)$ é de classe $D(\alpha)$ para $\alpha=m\tau$; em relação à sequência $\{I^{k\tau,p}\}_{k=0}^{\infty}$.

Podemos, agora, enunciar nosso principal resultado : a caracterização do espaço de aproximação $L^p(\alpha,q)$.

4.3.4. Teorema : Para $k=1,2,\dots,m-1$, $0 < \theta < 1$ e $\tau>0$, vamos ter

$$L^p((k+\theta)\tau,q) = Lip(k+\theta,m,p,q)$$

Demonstração : Pela proposição 4.3.3 para $k=1,\dots,m-1$, vamos ter que $W^{k,p} \in D(k\tau)$. Agora, pela proposição 2.3.5

$$(W^{k,p},W^{k+1,p})_{\theta,q} = L^p((k+\theta)\tau,q)$$

Por outro lado, pelo teorema 3.2.7 , temos :

$$(W^{k,p},W^{k+1,p})_{\theta,q} = Lip(k+\theta,m,p,q)$$

donde o resultado desejado .

4.4. Teoremas dos tipos Jackson e Bernstein

Como consequência imediata dos resultados do parágrafo anterior, podemos obter teoremas de melhor aproximação dos tipos dos teoremas de Jackson e Bernstein .

4.4.1. Teorema de Jackson : Se $f \in Lip(\alpha,m,p,q)$, então

$$E_k(f) = O(e^{-k\alpha}) .$$

Demonstração :Como $\alpha<m$, então pode ser escrito na forma $k+\theta$, com $0 < \theta < 1$ e $1 \leq k \leq m-1$ -.

Pelo teorema 4.3.4

$$Lip(\alpha,m,p,q) = L^p(\alpha,q)$$

Agora, pela proposição 2.2.3("desigualdade de Jackson") , vamos ter

$$E_k(f) \leq e^{-k\alpha}||f||_{\alpha ,q,K}$$

donde o resultado desejado .

4.4.2. Teorema de Bernstein : Seja $f \in L^p(R^n)$ tal que

$$E_k(f) = O(e^{-k\alpha})$$

Então

$$f \in Lip(\alpha,m,p,q) \quad .$$

Demonstração : Como $\alpha<m$, podemos tomar $\alpha=k+\theta$,para $0 < \theta < 1$ e $1 \leq k \leq m-1$, então por 2.2.1(1) , temos

$$f \in L^p(\alpha,q,K)$$

e pela proposição 2.2.7 , vem que

$$f \in L^p(\alpha,q,J) ,$$

desse modo

$$f \in L^p(\alpha,q)$$

e pelo teorema 4.3.4, segue imediatamente que

$$f \in Lip(\alpha,m,p,q) .$$

B I B L I O G R A F I A

[1] - BUTZER,P.L.-H.BERENS - Semi-Groups os Operators and Approximation, Springer-Verlag, 1967, Berlin

[2] - BUTZER,P.L.-R.J.NESSEL - Fourier Analysis and Approximation- 1º vol, Academic Press, 1971

[3] - CALDERÕN,A.P. - Intermediate Spaces and Interpolation(Conference on Functional Analysis,Warsaw,1960), Studia Math.(Ser.Specjalna), Zeszyt 1,31-34, 1963

[4] - LIONS,J.L.-J.PEETRE - Sur une classe d'espaces d'interpolation, Inst.Hautes Études Sci.Publ.Math.19,5-68,1964

[5] - NIKOL'SKII,S.M. - Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems,Springer, 1975

[6] - OKLANDER,E.T. - Interpolacion, Espacios de Lorentz y Teorema de Marcinkiewicz, Cursos y seminarios, Fascículo 20, Universidad de Buenos Aires, 1965 .

[7] - PEETRE,J. - Espaces Intermédiaires et la Théorie Construtive des fonctions, C.R.Acad.Sci.Paris 256 , 54-55, 1963 .

[8] - PEETRE,J. - Sur le nombre de paramètres dans la définition de certains espaces d'interpolation, Ricerche Mat 12, 248-261 , 1963 .

[9] - PEETRE,J. - A theory of Interpolation of Normed Spaces, Notas de Matemática nº 39, IMPA, 1968 .