UM TEOREMA DE EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO QUASE PERIÓDICA E APLICAÇÕES.

Anizio Perissimotto Junior

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação da Univesidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. ORLANDO FRANCISCO LOPES

CAMPINAS

1976

Não podemos ter esperança de nomear todos os que merecem nossos agradecimentos; podemos, entretanto, indicar, entre os nossos amigos e colegas, os que contribuiram com muito mais do que a obrigação normal da amizade e da boa vontade.

Meu profundo agradecimento ao professor Dr. Orlando Francisco Lopes que não mediu esforços na orientação deste trabalho e me incentivou como amigo.

Minha gratidão também ao professor Doutor Plácido Zoega Tãboas, que me incentivou na graduação, aos professores Luiz Carlos Pavlu e José - Roberto Chiavegatto, amigos de Faculdade que jamais esqueço, aos professores Drs. Mário Tourasse Teixeira, Antonio Conde, Adilson Gonçalves, à Professora Dra. Eurides Alves de Oliveira e a todos os outros que de uma forma ou de outra me auxiliaram.

Aos meus pais o muito obrigado.

Este trabalho dependeu parcialmente de auxilio da CAPES através de bolsa de pós-graduação nos anos de 1972 e 1973.

Ã

Regina

Gustavo

Guilherme

ÍNDICE

SUMÁRIO

O nosso trabalho tem por objetivo dar um teorema que garante a existência de solução quase periódica para sistemas de equações diferenciais com coeficientes quase periódicos e em seguida fazer algumas aplicações.

Com tal pensamento, procuramos no capítulo 1 através de uma sequência de lemas chegar ao teorema 1.B ou teorema de Amerio, teorema este que nos dá condições para a existência de solução quase periódica.

No capítulo 2, capítulo das aplicações, tratamos do circuito RLC acoplado a um Diodo de Esaki, e de equação de oscilações não lineares.

CAPÍTULO I

UM TEOREMA DE EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO QUASE PERIÓDICA

INTRODUÇÃO

Começamos este capítulo dando algumas notações a serem utilizadas. Logo após fazemos um estudo modesto, porém suficiente para o nosso propósito, sobre função quase periódica onde definimos função quase periódica e função quase periódica uniformemente em conjuntos compactos e damos algumas propriedades relevantes para o nosso trabalho.

Com a definição de solução separada, alguns lemas dentre as quais o da dependência contínua (lema 1.b) de / soluções deEquações Diferenciais, enunciamos e demonstramos o teorema 1.B , (teorema de Amerio) que nos dá as condições para a existência de solução quase periódica do sistema $\dot{x}=f(t,x)$ onde $f(t,x)$ é uma função definida em RXA, A aberto do espaço / euclideano real de dimensão n neste último espaço, contínua em (t,x), quase periódica em t, uniformemente para x em conjuntos compactos.

Para finalizar definimos módulo de uma função / $f(t)$ quase periódica, e damos um resultado de comparação entre o módulo da solução do sistema e o módulo de equações diferenciais no caso particular em que $f(t,x)$ é da forma $F(x)+p(t)$, / com $p(t)$ quase periódica.

Esse caso particular cobre todos os casos analizados.

Notação:

R= reta real
E= espaço euclideano real de dimensão n
A= subconjunto aberto de E
S= RXA
C= subconjunto compacto de A
u= sequência de números reais

Definição 1.1

Uma função contínua $f(t)$ com t em R é quase periódica se para cada sequência de números reais w, podemos extrair uma subsequência u de modo que o limite de $f(t+u_n)$ quando $n \to +\infty$ existe uniformemente na reta.

Como exemplos de funções quase periódicas temos as funções periódicas.

Observemos que uma função quase periódica é limitada e uniformemente contínua.

Definição 1.2

Seja $f(t)$ uma função contínua. Definimos como o hull da f, denotado por $H(f)$, como o conjunto de todas as funções $g(t)$ tal que existe uma sequência u de modo que $f(t+u_n)$ converge para $g(t)$, quando $n \to \infty$, uniformemente em R.

Definição 1.3

Uma função contínua $f(t,x)$, (t,x) em S, é quase periódica em t, uniformemente para x em conjuntos compactos, se para todo conjunto compacto C e toda sequência w existe uma - subsequência u de modo que o limite de $f(t+u_n,x)$ quando $n \to \infty$ existe uniformemente em RXC.

Definição 1.4

Seja f(t,x) contínua quase periódica. Definimos o - hull da f , H(f), como o conjunto de todas as funções g(t,x) - tal que existe uma sequência u de modo que $f(t+u_n,x)$ converge para g(t,x) quando $n \to \infty$, uniformemente em RXC.

Se g está em H(f), então H(g)= H(f) e f também está em H(f). Ainda mais se g está em H(f), então g é quase periódica, pois é o limite uniforme de uma sequência de funções quase periódicas.

Lema 1.a

Seja (f_n) uma sequência de funções definidas de R - em E de modo que existe um número M para o qual $|f_n| \leq M$ para - todo n, e dado $\varepsilon > 0$, existe $r(\varepsilon) > 0$ tal que se $|t-s| < r(\varepsilon)$ - então $|f_n(t) - f_n(s)| < \varepsilon$ para todo n. Então existe uma subsequência de (f_n) que converge uniformemente em cada subconjunto compacto de R (em qualquer intervalo finito de R).

Demonstração

Sejam $u_0=(n)$ e $I_n=[-n,n]$. Pelo teorema de Arzelá-Ascoli, existe u_1 , subsequência de u_0 , tal que $(f_{(u_1)_k})$ converge uniformemente em I_1. Indutivamente, escolhendo u_n , existe u_{n+1} , tal que $(f_{(u_{n+1})_k})$ converge uniformemente em I_{n+1} .

Seja $v = \{(u_1)_1, (u_2)_2, \ldots\}$. Então v é uma subsequência de u_n para todo n, além disso (f_{v_n}) converge uniformemente em qualquer comjunto compacto//

Lema 1.b

Suponha (f_n), $n = 1,2,\ldots$, uma sequência de funções definidas e contínuas num aberto B de RXE convergindo para f_0, quando $n \to +\infty$, uniformemente em subconjuntos compactos de B.

Suponha (t_n, x_n) uma sequência de B convergindo para (t_0, x_0), ponto de B, quando $n \to +\infty$.

Seja $y_n(t)$, $n = 0,1,2,\ldots$, solução da equação $\dot{x} = f_n(t,x)$, passando pelo ponto (t_n, x_n).

Se $y_0(t)$ é definida e única em $[a,b]$, então existe n_0 de tal forma que para cada $y_n(t)$, $n \geq n_0$, pode ser definida em $[a,b]$ e converge para $y_0(t)$ uniformemente em $[a,b]$.

Demonstração

Ver {4} página 24, lema 3.1.

Definição 1.5

Dizemos que a família $\{f(t+u_n, x)\}$ é normal em RXC se podemos extrair uma subsequência que converge uniformemente sobre o conjunto RXC.

Lema 1.c

A condição necessária e suficiente para que a função

$f(t,x)$ seja periódica em t, uniformemente para x em C, é que a família $\{f\ (t+s,x)\}$ seja normal em RXC.

Demonstração

Ver {2} página 54 , teorema 2.6

No que se segue consideraremos o sistema

$$\dot{x} = f\ (t,x) \qquad \text{(I)}$$

onde $f: S \to E$ tal que:

i) é contínua em (t,x)

ii) quase periódica em t, uniformemente para x em - conjunto compacto.

iii) unicidade de solução

Consideraremos também o sistema:

$$\dot{x} = g(t,x) \qquad \text{(II)}$$

com g um elemento qualquer do hull da f.

Seja D= RXC, onde C é um conjunto compacto de E.

Definição 1.6

Diz-se que a solução $x(t)$ de (I) é separada em D se um dos casos seguintes ocorre:

i) $x(t)$ é a única solução de (I), cujo gráfico está contido em D;

ii) Se $y(t)$ é outra solução de (I) com gráfico em D, então podemos determinar um número $d=d(x)> 0$ tal que $|x(t)-y(t)| \geq d$ para todo t.

Lema 1.d

Se todas as soluções do sistema (I) com gráfico em D, são separadas nesse conjunto, então o seu número é finito.

Demonstração

Seja X o conjunto das soluções de (I) com gráfico em D e separada em D.

Certamente o conjunto X é uiniformemente limitado, desde que, para todo x em X, x: $R \to C$ contínua e C compacto. Logo $|x(t)| \leq M$ para todo x em X e t em R. Além disso X é equicontínuo. De fato como $\dot{x}(s) = f(s,x(s))$ e se t_1 e t estão em R,

$$x(t_1) - x(t) = \int_t^{t_1} \dot{x}(s)\, ds = \int_t^{t_1} f(s,x(s))\, ds.$$

Assim $|x(t_1) - x(t)| \leq k\, |t_1 - t| < \varepsilon$

Se X for uma família infinita, pelo lema 1.a podemos extrair desse conjunto uma sequência (x_n) que converge uniformemente em qualquer intervalo finito da reta para a função z(t). Pelo lema 1.b , z(t) é solução do sistema (I). Como D é fechado, o gráfico de z(t) está contido em D, mas z(t) não é separada. Esta contradição prova o lema//.

Lema 1.e

Se o sistema (I) tem uma solução x(t) tal que x(t) está em C para todo t, então cada um dos sistemas (II) tem solução com gráfico em D.

Demonstração

Seja g um elemento do hull da f e considere o sistema $\dot{x} = g\ (t,x)$.

Logo existe uma sequência u de modo que $f(t+u_n,x)$ converge, quando $n \to +\infty$, para $g(t,x)$ uniformemente em RXC.

Considere as funções $x_n\ (t) = x\ (t+u_n)$ e o sistema

$$\dot{x}_n = f_n\ (t,x_n) = f(t+u_n,x_n) \qquad (I.1)$$

Então as funções acima definidas são soluções do sistema (I.1). De fato, $\dot{x}_n(t) = \dot{x}(t+u_n) = f(t+u_n,x(t+u_n)) =$

$= f_n(t,x_n(t))$, para todo t.

Ainda mais o gráfico de $x_n(t)$ está contido em D para todo n.

Analogamente ao lema 1.d, podemos ver que $\{x_n(t)\}$ é uma família de funções uniformemente limitada e equicontínua. Pelo lema 1.a, podemos extrair uma subsequência (u_{1n}) de modo que (x_{1n}) convirja uniformemente em qualquer intervalo da reta.

Seja $z(t)$ o limite dessa subsequência quando $n \to +\infty$. Ainda $x_{1n}\ (t)$ é solução de $\dot{x}_{1n} = f_{1n}\ (t,x_{1n})$.

Então pelo lema 1.b, $z(t)$ é solução de $\dot{z} = g(t,z)$ //

Teorema 1.A

Se o sistema (I) tem uma solução $x(t)$ de modo que $x(t)$ está em C para todo $t \geq t_0$, então para cada elemento g do hull da f, o sistema (II) tem uma solução definida para todo - t em R com gráfico em D.

Demonstração

Considere a sequência

$x_n(t) = x(t+n)$, $n = 1,2,\ldots$

Então $x_n(t)$ é solução do sistema $\dot{x}_n = f(t+n,x)$ no intervalo $[t_0 - n, +\infty]$

Essa sequência é uniformemente limitada e equicontínua em qualquer intervalo do tipo $[a,+\infty]$ onde $a \geq t_0 - n$. Pelo lema 1.a existe uma subsequência de números naturais (n_r) tal que a sequência $(x_{n_r}(t))$ converge para $z(t)$ uniformemente em qualquer intervalo finito da reta e pela hipótese sobre $f(t,x)$ segue que a sequência $\{f(t+n_r, x_{n_r})\}$ converge para $h(t,x)$ uniformemente em D.

Por conseguinte, do lema 1.b temos que $z(t)$ é solução do sistema $\dot{z} = h(t,z)$ e $z(t)$ está em C para todo t.

Logo existe um elemento no hull da f satisfazendo as condições do lema 1.e. Portanto, qualquer sistema (II) tem solução definida em R com gráfico em D//

Lema 1.f

Se para cada sistema (II) as soluções com gráfico em D são separadas em D, então existe um número $d>0$, independente de g em H(f), tal que, para qualquer par de soluções separadas em D, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ do sistema (II) temos:

$$|x_1(t) - x_2(t)| \geq d \text{ , } t \text{ em } R.$$

Demonstração

Fixemos uma g do hull da f e consideremos o sistema (II).

Existe o maior número $d > 0$ de modo que duas arbitrárias soluções separadas de (I) em D estão situadas a uma - distância maior ou igual a d.

Seja $x(t)$ uma solução do sistema (I) com gráfico - em D.

Se considerarmos as funções vetoriais $x_n(t) = x(t+u_n)$, podemos, como no lema 1.e, extrair de u uma subsequência (u_{1n}) de modo que $x(t+u_{1n})$ converge para $y_1(t)$, t em R, $n \to +\infty$, e $y_{1n}(t)$ é uma solução do sistema (II) com gráfico - em D.

Sejam $y(t)$ e $z(t)$ duas soluções distintas de (I) separadas em D.

Então:

$$\inf_{t \in R} |y(t+u_n) - z(t+u_n)| = \inf_{s \in R} |y(s) - z(s)| \geq d$$

Da sequência u podemos extrair uma subsequência - (u'_{1n}) tal que $y(t+u'_{1n})$ converge para $x_1(t)$, solução de (II).

De (u'_{1n}) podemos extrair uma subsequência (u_{1n}), de modo que $z(t+u_{1n})$ converge para $x_2(t)$, solução de (II).

Podemos dizer que $\{y(t+u_{1n})\}$ e $\{z(t+u_{1n})\}$ convergem para as soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ do sistema (II) . Para essas soluções temos:

$$\inf_{t \in R} |x_1(t) - x_2(t)| \geq d \qquad (1)$$

Portanto $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções distintas. Consequentementeas soluções distintas de (I) correspondem soluções distintas de (II).

Isto significa que o número de soluções separadas em D de (II) é maior ou igual ao número de soluções separadas similares em D do sistema (I).

Como g está em H(f) e H(g) = H(f) então com raciocínio análogo ao feito acima, agora porém para o sistema $\dot{x}=f(t,x)$

com f em H(g), podemos dizer que o número de soluções separadas em D do sistema (I) é maior ou igual ao número de soluções separadas similares em D do sistema (II).

Em outras palavras, cada sistema (II) tem o mesmo número de soluções separadas em D, isto permite-nos afirmar que o método acima leva-nos à determinação de todas as soluções separadas em D do sistema (II) partindo de (I).

Dai do lema 1.d e de (1), segue o lema//

Teorema 1.B

Se cada um dos sistema (II) tem suas soluções separadas em D, então todas elas são soluções quase periódicas.

Demonstração

Seja x(t) uma solução separada de (I) com gráfico em D. Pelo lema 1.c ., mostrar que x(t) é quase periódica é suficiente mostrar que toda sequência $\{x(t+u_n)\}$ possui uma subsequência convergindo na reta toda.

Se g está em H(f), então g é quase periódica, logo existe uma sequência u tal que $f(t+u_n, x)$ converge para $g(t,x)$, quando $n \to +\infty$, uniformemente para (t,x) em D.

Considere as funções vetoriais $x(t+u_n)$. Como no lema 1.e , podemos afirmar, sem perda de generalidade, que a sequência $\{x(t+u_n)\}$converge para a função z(t), uniformemente em qualquer intervalo finito da reta, cujo gráfico está contido em D e é solução do sistema $\dot{z}=g(t,z)$.

Mostremos que a sequência $\{x(t+u_n)\}$ converge para a função g(t) uniformemente na reta toda.

Sejam $x_1(t)$ e $x_2(t)$ duas soluções do sistema (II) com gráficos em D e separadas em D. Pelo lema 1.f, existe um número real $d>0$ de modo que

$$|x_1(t) - x_2(t)| \geq d \ , \ t \text{ em } R$$

Suponha que a sequência $\{x(t+u_n)\}$ não converge uniformemente para a função $z(t)$ em R.

Denotemos por:

$Y_{n,p}(t) = |x(t+u_n) - x(t+u_p)|$, $n<p$ e tome $I_{n,p}$ como o conjunto dos t de R tal que $Y_{n,p}(t) \leq d$

Nota-se que $Y_{n,p}(t)$ é contínua e que $I_{n,p}$ é fechado.

Da definição de convergência da sequência $\{x(t+u_n)\}$ temos que $Y_{n,p}(0) = |x(u_n) - x(u_p)| \leq d$ se $p > n \geq N$.

Segue daí que se $p > n \geq N$, $t=o$ está em $I_{n,p}$. Logo retirando os $N-1$ primeiros números de $\{x(t+u_n)\}$, podemos admitir que os conjuntos $I_{n,p}$ são não vazios.

Seja $b_{n,p}$ o supremo dos $Y_{n,p}(t)$ para t em $I_{n,p}$. Então $b_{n,p} \leq d$.

Mostremos, caso exista, que o limite de $b_{n,p}$ quando $(n,p) \to +\infty$ é não nulo.

Suponha que seja nulo. Então para cada $0 < \varepsilon < d$, existe $N(\varepsilon)$ de modo que para todo $p> n \geq N(\varepsilon)$ temos que $b_{n,p}<\varepsilon$. POr conseguinte $Y_{n,p}(t)< \varepsilon$ para t em $I_{n,p}$ e $p> n \geq N(\varepsilon)$.

Por definição, $Y_{n,p}(t)> d$ no complementar do conjunto $I_{n,p}$. Desde que $Y_{n,p}(t)$ é contínua em R, teremos $I_{n,p}=R$ isto é, a sequência $\{x(t+u_n)\}$ converge uniformemente na reta toda:contradição, consequentemente o limite superior de $b_{n,p}$ para $(n,p)\to+\infty$ é igual a um certo $2K>0$.

Da definição de limite superior, dado $\varepsilon=(1/2)k$, - existem subsequências (n_r) e (p_r) de modo que

$$b_{n_r,p_r} \geq 2k - (1/2)k = (3/2)k$$

Como $b_{n_r,p_r} = \sup Y_{n_r,p_r}$ (t) com t em I_{n_r,p_r} ,

existe uma subsequência de números reais (t_r) tal que -

$Y_{n_r,p_r}(t_r) \geq k$ e daí $k \leq |x(t_r+u_{n_r}) - x(t_r+u_{p_r})| \leq d$.

Extraiamos das sequências (u_{n_r}), (u_{p_r}) e (t_r) subsequências $(u_{n_{r_s}})$, $(u_{p_{r_s}})$ e (t_{r_s}), respectivamente, de modo que o limite de $x(t_{r_s} + u_{n_{r_s}})$ seja U quando $s\to\infty$ e o de - $x(t_{r_s} + u_{p_{r_s}}$ seja V quando $s\to\infty$ onde U e V são constantes e

$k \leq |U - V| \leq d$.

Considere agora as sequências $\{x(t+t_{r_s} + u_{n_{r_s}})\}$ e $\{x(t+t_{r_s} + u_{p_{r_s}})\}$.

Podemos então extrair subsequências $\{x(t+t_{r_{1s}} +u_{n_{r_{1s}}})\}$ e $\{x(t+t_{r_{1s}} + u_{p_{r_{1s}}})\}$ respectivamente, que convergem em R - (uniformemente em qualquer intervalo finito) para as soluções $z_1(t)$ e $z_2(t)$ de algum sistema (II), isto é

$$\dot{z}_1 = g_1(t,z_1) \quad \text{e}$$
$$\dot{z}_2 = g_2(t,z_2)$$

com g_1 e g_2 em H(f), onde o limite de $f(t+t_{r_{1s}} + u_{n_{r_{1s}}},x)$ é $g_1(t,x)$ e o de $f(t+t_{r_{1s}} + u_{p_{r_{1s}}},x)$ é $g_2(t,x)$ quando $s\to\infty$

Como $z_1(0)$ é o limite de $x(t_{r_{1s}} + u_{n_{r_{1s}}})$ para $s\to\infty$ e $z_2(0)$ é o limite de $x(t_{r_{1s}} + u_{p_{r_{1s}}})$ para $s\to+\infty$ segue que $k \leq |z_1(0) - z_2(0)| \leq d$ (1)

Do fato do limite de $f(t+u_n, x)$ ser $g(t,x)$ uniformemente para (t,x) em D e como $(u_{n_{r_{1s}}})$ e $(u_{p_{r_{1s}}})$ são subsequência de u temos:

$$\lim_{s\to\infty} f(t+ u_{n_{r_{1s}}}, x) = g(t,x) = \lim_{s\to\infty} f(t+ u_{p_{r_{1s}}}, x)$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$,

$$|f(t+ u_{n_{r_{1s}}}, x) - f(t+ u_{p_{r_{1s}}}, x)| \leq$$

$$|f(t+ u_{n_{r_{1s}}}, x) - g(t,x)| + |g(t,x) - f(t+ u_{p_{r_{1s}}}, x)| < (\varepsilon/3)$$

se $s \geq S_1(\varepsilon)$ com (t,x) em D.

Então para $s \geq S(\varepsilon) \geq S_1(\varepsilon)$ temos:

$$|g_1(t,x) - g_2(t,x)| \leq |g_1(t,x) - f(t+t_{r_{1s}} + u_{n_{r_{1s}}}, x)| +$$

$$+|f(t+ t_{r_{1s}} + u_{n_{r_{1s}}}, x) - f(t + t_{r_{1s}} + u_{p_{r_{1s}}}, x)| +$$

$$+|f(t+t_{r_{1s}} + u_{p_{r_{1s}}}, x) - g_2(t,x)| < \varepsilon \text{ para } (t,x) \text{ em D.}$$

Logo $g_1(t,x) = g_2(t,x)$, (t,x) em S desde que D é um subconjunto arbitrário de S.

Consequentemente $z_1(t)$ e $z_2(t)$ são soluções do mesmo sistema (II) com gráfico em D, e então pelo lema 1.f -

$|z_1(t) - z_2(t)| \geq 2\,d$, t em R., o que é incompatível com (1).

Esta contradição mostra-nos que a sequência $\{x(t+u_n)\}$ converge para a função $z(t)$ uniformemente na reta toda. Portanto $x(t)$ é solução quase periódica do sistema (I) (lema 1.c).

Dessa forma mostramos para toda solução $x(t)$, separada em D, do sistema $\dot{x} = g(t,x)$ com g em H(f), pois assim $H(g) = H(f)$ e f está em $H(g)$ //

Corolário 1.B.i

Considere o seguinte sistema

$$\dot{x}_i = F_i \ (t,x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ (t) \ x_j + f_i \ (t) \qquad \text{(III)}$$

onde a_{ij} (t) e $f_i(t)$, $i,j = 1,2,\ldots,n$ são funções quase periódicas de valor real.

Considere todas as sequências u para as quais - $\{a_{ij} \ (t + u_n)\}$ converge uniformemente na reta. Denotemos / por b_{ij} (t), $i,j = 1,2,\ldots,n$ as funções limites das sequências da forma $\{a_{ij} \ (t + u_n)\}$.

Se para cada um dos sistemas da forma

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \ (t) \ x_j \qquad \text{(IV)}$$

não possui outra solução limitada em R exceto a trivial, então qualquer solução limitada de (I) é quase periódica.

Demonstração

Certamente $F_i(t,x)$, $i=1,2,\ldots,n$, são funções quase periódicas em t, uniformemente para x em subconjuntos compactos.

Observe que se o sistema (III) tiver solução limitada, ela deverá ser única. Senão vejamos, caso existam duas soluções limitadas de (III), a diferença delas será uma solução do sistema

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j$$

Como b_{ij} está no hull da $a_{ij}(t)$, segue do lema 1.e que o sistema (IV) tem uma solução limitada, não trivial, o que seria uma contradição.

Considere agora o sistema

$$\dot{x}_i = G_i(t,x) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)\, x_j + g_i(t) \qquad \text{(V)}$$

onde $g_i(t)$ é um elemento do hull da $f_i(t)$.

Assim G_i está em $H(F_i)$. De fato, existe uma sequência u tal que $\{a_{ij}(t+u_n)\}$ converge para $b_{ij}(t)$ e $\{f_i(t+u_n)\}$ - converge para $g_i(t)$ quando $n\to\infty$ uniformemente na reta.

Então

$$\lim_{n\to\infty} F_i(t+u_n, x) = \sum_{j=1}^{n} \lim_{n\to\infty} a_{ij}(t+u_n)\, x_j + \lim_{n\to\infty} f_i(t+u_n) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)\, x_j + g_i(t) = G_i(t,x), \text{ uniformemente em } RXC.$$

Logo, se o sistema (III) tem solução limitada , do lema 1.e , segue que (V) tem solução limitada da hipótese que tal solução é única, isto é, separada (em conjuntos da forma D=RXK , K é uma esfera suficientemente grande de E).

Portanto, cada um dos sistemas (V) tem suas soluções separadas em D e do teorema 1.B segue o corolário//

<u>Corolário 1.B (ii)</u>

Considere o sistema

$$\dot{x} = A\,x + f(t)$$

com A matriz constante nxn e f(t) função quase periódica.

Assuma que A não possui autovalor imaginário puro.

Então o sistema acima tem solução quase periódica.

De fato, da hipótese, segue que o sistema $\dot{x}=A\,x$ não possui outra solução limitada em R, exceto a trivial.

Raciocínio análogo ao corolário 1.B(i) segue que as soluções limitadas em $(-\infty,+\infty)$ são quase periódicas//

Teorema 1.C

Se f(t) é quase periódica implica que o valor médio

$$M[f] = \lim_{T\to\infty} (1/T) \int_0^{t+T} f(u)\, du$$

existe e independe de t.

Definição 1.6

Se f(t) é quase periódica e λ é real definimos

$$a(\lambda) = M\left[f(\,.\,)e^{-i\lambda}\right] = \lim_{T\to\infty} (1/T)\int_0^T f(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt$$

Teorema 1.D

Se f(t) é quase periódica então o conjunto dos λ para o qual $a(\lambda)$ é não nulo é enumerável.

Demonstração

Provemos primeiramente que para qualquer conjunto finito de números reais $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$, distintos temos:

$$\sum_{j=1}^{N} |a_j|^2 \leq M\left[|f(t)|^2\right] \quad \text{onde } a_j = a(\lambda_j)$$

Note-se que $|f(t)|^2 = < f(t) \, , \overline{f(t)} >$, onde $<;>$ é o produto interno usual de E , logo é uma função quase periódica e podemos calcular o valor médio. Então

$$M \left[\left| f(t) - \sum_{j=1}^{N} a_j \, e^{i\lambda_j t} \right|^2 \right] =$$

$$= M \left[< f(t) - \sum_{j=1}^{N} a_j \, e^{i\lambda_j t} \, , \overline{f(t)} \sum_{j=1}^{N} \overline{a_j} \, e^{-i\lambda_j t} > \right] =$$

$$= M \left[|f(t)|^2 \right] - \sum_{j=1}^{N} < \overline{a_j} \, , M \left[f(t) \, e^{-i\lambda_j t} \right] > -$$

$$- \sum_{j=1}^{N} < a_j , M \left[\overline{f(t)} \, e^{i\lambda_j t} \right] > +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |\overline{a_j}|^2 \, M \left[e^{i(\lambda_k - \lambda_j)t} \right] =$$

$$= M \left[|f(t)|^2 \right] - \sum_{j=1}^{N} |a_j|^2 - \sum_{j=1}^{N} |a_j|^2 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} |a_j|^2$$

desde que $a_j = M \left[f(t) \, e^{-i\lambda_j t} \right]$ e $M \left[e^{i(\lambda_k - \lambda_j)t} \right] = 0$ se $\lambda_k \neq \lambda_j$ e 1 se $\lambda_k = \lambda_j$. Então temos

$$0 \leq M \left[\left| f(t) - \sum_{j=1}^{N} a_j \, e^{i\lambda_j t} \right|^2 \right] = M \left[|f(t)|^2 \right] - \sum_{j=1}^{N} |a_j|^2$$

Como $|f(t)|^2$ é uniformemente limitado, o conjunto dos λ tal que $|a(\lambda)| \geq (1/n)$ deve ser finito ou então con tradiz a desigualdade acima. Segue que o conjunto dos λ para os quais $a(\lambda)$ é não nulo é enumerável//

No que segue designaremos os λ para os quais $a(\lambda)$ é não nulo por $\{\lambda_j\}$ e chama-lo-emos de expoentes de Fourier da f e designaremos os coeficientes de Fourier por $a_j = a(\lambda_j)$.

A série de Fourier da f é definida e designada por

$$f(t) \sim \sum_{j=1}^{\infty} a_j \; e^{i\lambda_j t}$$

Definição 1.7

Suponha $\{\lambda_n\}$ um conjunto qualquer de números reais. O módulo do conjunto $\{\lambda_n\}$, modulo$\{\lambda\}$, é o conjunto de todos os números reais que são combinações lineares de elementos de $\{\lambda_n\}$ com coeficientes inteiros.

Definição 1.8

O conjunto $\{v_j\}$ de números reais é linearmente independente (sobre os racionais) se $\sum_{j=1}^{N} r_j \; v_j = 0$ para qualquer N, r_j racional, então $r_j = 0$.

Definição 1.9

Se $\{\lambda_j\}$ é um conjunto qualquer de números reais, dizemos que $\{v_j\}$ é uma base (racional) para $\{\lambda_j\}$ se as seguintes condições estão satisfeitas:

i) $\{v_j\}$ é linearmente independente

ii) cada λ em $\{\lambda_j\}$ é uma combinação linear finita de $\{v_j\}$ com coeficientes racionais.

Se acontecer de cada λ puder ser representado como uma conbinação linear finita de elementos de $\{v_j\}$ com coeficientes inteiros, então dizemos que $\{v_j\}$ é uma base integral para $\{\lambda_j\}$.

Definição 1.10

Se f(t) é quase periódica com expoente de Fourier $\{\lambda_j\}$, o modulo da f, mod $[f]$ é definido comomod $\{\lambda_j\}$.

Se mod $[f]$ tem base integral finita, então f é chamada de quasi-periódica.

Teor ema 1.E

Suponha f e g funções quase periódicas. Se para - cada sequência de números reais u para a qual $f(t+u_n)$ con- / verge uniformemente em R implica que $g(t+u_n)$ converge uniformemente, então o módulo da g está contido no módulo da f.

Demonstração

(J.Favard, Fonctions presque-periodíques, Gauthier-Villars, Paris,1933 - página 81).

Teorema 1.F

Considere o sistema

$$\dot{x} = F(x) + p(t) \qquad \text{(IX)}$$

onde $p(t)$ é uma função quase periódica. Assuma que qualquer que seja o sistema

$$\dot{x} = F(x) + q(t) \qquad (X)$$

com q no hull da p tenha uma única solução limitada em $(-\infty,+\infty)$.

Se $x(t)$ é a tal solução de (IX) então o módulo de $x(t)$ está contido no módulo d $p(t)$.

Além disso se $p(t)$ é quasi-periódica, então $x(t)$ também é quasi-periódica.

Demonstração

Da hipótese segue que cada um do sistema (X) tem uma única solução separada em D. Pelo teorema 1.B, essas soluções são quase periódicas.

Em particular, $x(t)$ é a única solução quase periódica de (IX) com gráfico em D.

Seja u uma sequência de números reais tal que / $p(t+u_n)$ converge uniformemente em R para uma função $q(t)$.

Como $x(t)$ é quaseperiódica, o conjunto $\{x(t+u_n)\}$ tem fecho compacto no espaço das funções contínuas e limitadas na reta com a norma do sup. Portanto, para mostrar que a sequência $\{x(t+u_n)\}$converge uniformemente na reta toda, basta mostrar que existe uma função $z(t)$ tal que toda subsequência $\{x(t+u_{1n})\}$/ que converge na reta, converge para $z(t)$.

Seja então $z(t)$ a única solução quase periódica de

$$\dot{x} = F(x) + q(t)$$

Suponhamos agora que $\{x(t+u_{1n})\}$ converge na reta para uma certa função $y(t)$.

Mostremos que $z(t)=y(t)$.

Como $p(t+u_{1n})$ converge para $q(t)$ uniformemente na reta toda, como no lema 1.e temos que

$$\dot{y} = F(y) + q(t)$$

e portanto pela hipótese $z(t)=y(t)$.

Do teorema 1.E segue que o módulo da $z(t)$ está contido no módulo da $p(t)$.

Se $p(t)$ for quasi-periódica e como o módulo da $x(t)$ está contido no módulo da $p(t)$ segue que $x(t)$ também é / quasi-periódica//

Observemos que no corolário 1.B (ii), qualquer que seja o sistema $\dot{x}= Ax + g(t)$ com $g(t)$ no hull da $f(t)$, tem uma única solução limitada em $(-\infty, +\infty)$.

Assim pelo teorema que acabamos de demonstrar, o módulo de tal solução está contido no módulo da função $f(t)$.

Além disso se supusermos que $f(t)$ é quasi-periódica então a solução também será quasi-periódica.

CAPÍTULO II

APLICAÇÕES

INTRODUÇÃO

Iniciamos dando algumas definições para solução (solução limitada no futuro, solução limitada e solução uniformemente ultimamente limitada) e teorema que garante a existência deste ultimo tipo de solução. Após demos definições de estabilidade para soluções e alguns teoremas sobre estabilidade / e unicidade de solução limitada.

Assim depois de tudo isto feito fomos procurar / condições sobre os parâmetros do sistema

$$\begin{cases} L\,\dfrac{di}{dt} = E(t) - Ri - v \\[2ex] -C\,\dfrac{dv}{dt} = f(v) - i \end{cases}$$

para que o mesmo possua solução quase periódica.

Para finalizar estudamos a existência de solução quase periódica em certa região D do plano e sob certas condi-/ções dos parâmetros da equação:

$\ddot{x} = -f(x)\,\dot{x} - g(x) + kg(t)$ (equação de oscilações não lineares).

Seja o seguinte sistema

$$\dot{x} = f(t,x) \qquad (1)$$

onde $f(t,x)$ é contínua em RXE.

Definição 2.1

Uma solução $x(t,t_0, x_0)$ de (1) é limitada no futuro se existe um número $B>0$ tal que

$|x(t,t_0, x_0)| < B$ para todo $t \geq t_0$.

Definição 2.2

Uma solução $x(t,t_0,x_0)$ de (1) é limitada se existe um número $B>0$ de modo que

$$|x(t,t_0,x_0)| < B \qquad \text{para todo } t.$$

Definição 2.3

As soluções de (1) são uniformemente ultimamente limitadas se existe $M>0$ e dado $r>0$ existem funções $a(r)$ e $T(r)$ de modo que se $|x_0| \leq r$ então

(i) $|x(t,t_0,x_0)| \leq a(r)$ para $t \geq t_0$

(ii) $|x(t,t_0,x_0)| \leq M$ para $t \geq t_0+T(r)$

Definição 2.4

Seja $V: A \to E$ contínua, $A \subset E$ aberto

Define-se

$$\dot{V}\ (t,z) = \limsup_{h\to 0_+} (1/h)\ \left[V(x(t+h;\ t,z)) - V(z)\right]$$

onde $x(t,s,z)$ é solução de (1) passando por (s,z) em RXE.

$\dot{V}_{(1)}\ (t,z)$ é a derivada da função $V(z)$ em relação ao sistema (1) no ponto (t,z).

Teorema 2.A

Supondo que exista uma função $V(x)$, definida em E, e que exista em r_0 satisfazendo:

(i) $V(x) \to +\infty$ quando $|x| \to +\infty$

(ii) $\dot{V}_{(1)}\ (t,x) \leq -c(|x|)$; $c(s)$ contínua e $c(s)>0$ se $s \geq r_0$

Então as soluções de (1) são uniformemente ultimamente limitadas.

Demonstração

Defina as seguintes funções:

$$p(s) = \inf_{|x|=s} V(x)$$

$$q(s) = \sup_{|x|=s} V(x)$$

Desta forma $p(|x|) \leq V(x) \leq q(|x|)$ e pela condição (i), $p(s) \to +\infty$ quando $s \to +\infty$

Defina $a=a(r)$ de modo que se $a>r$ e $a>r_0$, então $p(a) > q(r)$ e $p(b) > q(r)$ se $b \geq a$.

Precisamos mostrar que se $|x_0| \leq r$ então -
$|x(t,t_0,x_0)| \leq a(r)$ para $t \geq t_0$.

Se $r>r_0$, então na região $r \leq |x| \leq a(r)$ temos que
$\dot{V}_{(1)}(t,x) \leq -c(|x|)$.

Se $|x(t,t_0,x_0)| \leq r$ para $t \geq t_0$, então tome $a(r)=r$.
Caso contrario existe t_1, $t_1 \geq t_0$ de modo que $|x(t_1,t_o,x_0)| = r$.
Logo $\dot{V}_{(1)}(t,x)<0$ para $t \geq t_1$.

Ainda mais

$$p(r) \leq V(x(t_1,t_0,x_0)) \leq V(x(t,t_0,x_0)) \leq q(|x(t)|)$$

Portanto $|x(t,t_0,x_0)| \leq a(r)$ para $t \geq t_0$.

Se não vejamos, se existe $t_2 > t_1$ e $|x(t_2,t_0,x_0)| >$
$a(r)$, pela definição $a(r)$ temos que

$$p(|x(t_2,t_0,x_0)|) > q(r)$$

Por outro lado

$$p(|x(t_2,t_0,x_0)|) \leq V(x(t_2,t_0,x_0)) \leq V(x(t_1,t_0,x_0)) \leq q(r).$$

Mostremos agora que existem M e $T(r)$ de modo que
se $|x_0| \leq r$ então $|x(t,t_0,x_0)| \leq M$ para $t \geq t_0+T(r)$.

Considere um $\overline{M}$ tal que $r_0 \leq \overline{M} \leq a(r)$

Defina

$$b(r) = \inf_{\{r_0 \leq s \leq a(r)\}} c(s) \;;$$

$b(r)>0$ pois $c(s)$ é contínua e $c(s)>0$ para $s \geq r_0$

Suponha que se $t_0 \leq t \leq \bar{t}$, então $\overline{M} \leq |x(t,t_0,x_0)| \leq$
$\leq a(r)$. Pela parte acima sabemos da existência do $a(\overline{M})$.

Mostremos que fazendo $M= a(\overline{M})$, resolvemos o problema.

Para $t_0 \leq t \leq \bar{t}$ temos

$$\dot{V}_{(1)}\ (t,x(t)) \leq -\ c\ (|x(t)|\ ) \leq -\ b(r)$$

Integrando obtemos:

$$V(x(t)) \leq V(x_0) - b(r)\ (t-t_0)$$

Considere $d(r) = \inf\limits_{|x| \leq a(r)} V\ (x)$

$$e(r) = \sup_{|x| \leq a(r)} V(x)$$

Decorre então que

$$d(r) \leq V\ (x(t)) \leq e(r) - b(r)\ (t-t_0)$$

Assim $\quad t-t_0 \leq \dfrac{e(r) - d(r)}{b(r)} = T\ (r)$

Portanto $\quad |x(t,t_0,x_0)| \leq M$ para $t \geq t_0 + T(r)$ e $|x_0| < r$ //

Definição 2.5

A solução $x(t)$ de (1) é uniformemente estável se para cada $\varepsilon>0$, existe $r(\varepsilon)> 0$ de modo que se $|x_0 - y_0| < r$ - implica que $|x(t) - y(t)|<\varepsilon$ para $t \geq t_0$ e $y(t)$ solução de (1).

Definição 2.6

A solução $x(t)$ de (1) é uniformemente assintoticamente estável em $(-\infty\ ,+\infty)$ se é uniformemente estável e se existe $M>0$ de modo que para todo $\varepsilon>0$, existe $T(\varepsilon)> 0$ tal que se $|x_0 - y_0|< M$ então $|y(t,t_0,x_0) - x(t)| <\varepsilon$ para $t \geq t_0+T(\varepsilon)$.

Definição 2.7

Uma solução $x(t)$ de (1) é globalmente uniformemente quase assintoticamente estável em $(-\infty;+\infty)$ se para cada $\varepsilon>0$ e $r>0$ existem números $a(r)$, $T(r,\varepsilon)$ de modo que se $|y_0-x_0|\leq$ $\leq r$ então

(i) $|y(t,t_0,x_0) - x(t)| \leq a(r)$ para $t \geq t_0$

(ii) $|y(t,t_0,x_0) - x(t)| \leq \varepsilon$ para $t \geq t_0 + T(r,\varepsilon)$

Teorema 2.B

Suponha, $x\equiv 0$ seja solução e exista uma função $V(x)$ definida em E satisfazendo as seguintes condições:

(i) $V(x) > 0$ para $x \neq 0$,

(ii) $\dot{V}_{(1)}(t,x) \leq -c(|x|)$; $c(s)$ contínua e $c(s)>0$ para s numa vizinhança do zero, $v(0)$.

Então a solução $x(t)\equiv 0$ de (1) é uniformemente assintoticamente estável.

Demonstração

Primeiramente mostremos que $x(t)\equiv 0$ é uma solução uniformemente estável.

Dado $\varepsilon>0$, defina

$l(\varepsilon) = \inf \{V(x) ; |x| = \varepsilon\}$

Então $l(\varepsilon)>0$ pois $V(x)>0$ e $l(\varepsilon) \leq V(x)$ para todo x tal que $|x| = \varepsilon$.

Como $V(0)=0$ e $V(x)$ é contínua, existe $r(\varepsilon)>0$ de modo que se $|x| < r(\varepsilon)$ então $V(x) \leq 1/2$

Precisamos mostrar que se $|x_0| < r(\varepsilon)$ então $|x(t)| < \varepsilon$ para $t \geq t_0$.

Suponha que exista $t_1 \geq t_0$ talque $|x(t_1,t_0,x_0)| = \varepsilon$ se $|x_0| < r(\varepsilon)$.

Por (ii), $V(x(t_1,t_0,x_0))$ e então $l(\varepsilon) \leq V(x(t_1,t_0,x_0)) \leq V(x_0) \leq l(\varepsilon)/2$. Isto é uma contradição e então se $|x_0| < r(\varepsilon)$ segue que

$$|x(t,t_0,x_0)| < \varepsilon \text{ para } t \geq t_0$$

Precisamos agora mostrar que existe M e que dado $\varepsilon > 0$, existe $T(\varepsilon) > 0$ de modo que se $|x_0| < M$, então $|x(t,t_0,x_0)| < \varepsilon$ para $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$.

Dado $\varepsilon > 0$, sem perda de generalidade, podemos supor que a bola de centro zero e raio ε está contida em $v(0)$, pois já sabemos ser uniformemente estável. Decorre também desse fato que existe $r(\varepsilon)$, tal que $|x(t,t_0,x_0)| < \varepsilon$ para $t \geq t_0$ e $|x_0| < r(\varepsilon)$.

Defina

$$b(\varepsilon) = \{\inf c(s) \; ; \; s \in v(0) \, , \; s \geq r(\varepsilon)\};$$

$b(\varepsilon) > 0$ pois $c(s)$ é contínua e $c(s) > 0$ para s em $v(0)$.

Suponha que para $t_0 \leq t \leq \bar{t}$, $|x(t,t_0,x_0)| \geq r(\varepsilon)$ mas $|x(t,t_0,x_0)|$ está em $v(0)$. Então

$$\dot{V}_{(2)}(t,x(t)) \leq -c(|x(t)|) \leq -b(\varepsilon)$$

Assim $V(x(t)) \leq V(x_0) - b(\varepsilon)$

Seja $d(\varepsilon) = \sup\{V(x) \; ; \; |x| \geq r(\varepsilon)\}$

Logo, $0 \leq V(x(t)) \leq d(\varepsilon) - b(\varepsilon)(t-t_0)$ e então

$$\frac{d(\varepsilon)}{b(\varepsilon)} = T(\varepsilon) \geq t - t_0$$

Portanto se $|x_0| < M$ então $|x(t,t_0,x_0)| < \varepsilon$ para $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$ //

Teorema 2.C

Suponha que exista uma função $V(x)$, defina em E satisafazendo as seguintes condições:

(i) $V(x)>0$ se $x \neq 0$

(ii) $V(x)\to+\infty$ quando $|x|\to+\infty$

(iii) $\dot{V}_{(1)}(t,x) \leq - c(x)$; $c(s)$ contínua, $c(s)>0$ se $s\geq 0$

Então a solução $x(t)\equiv 0$ de (1) é globalmente uniformemente quase assintoticamente estável.

Demonstração

Análogo ao teorema 2.A.

Teorema 2.D

Seja $f(t,x)$ função quase periódica em t, uniformemente para x em conjuntos compactos. Se existe uma solução globalmente uniformemente quase assintoticamente estável e limitada em R do sistema $\dot{x} = f(t,x)$, então ela é a única solução limitada em R.

Demonstração

Suponha que existam duas soluções $x(t)$ e $y(t)$ limitadas, $x(t)$ globalmente uniformemente quase assintoticamente estável de $\dot{x} = f(t,x)$.

Existe um número $r>0$ de modo que $|x(t) - y(t)|<r$ para todo t.

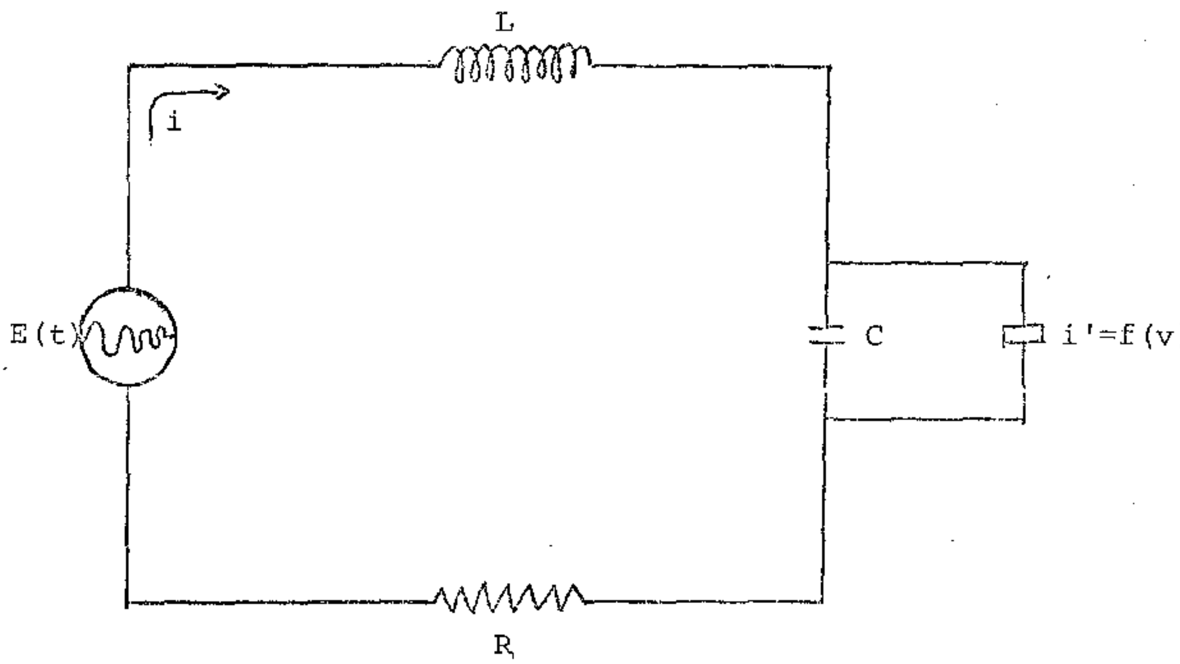
Seja $\varepsilon = |x(t_1) - y(t_1)|>0$

Considere $t_0 = t_1 - T(\varepsilon/2)$.

Como $|y_0 - x_0| < r$ segue que $|y(t_1, t_0, x_0) - x(t_1)| \leq$ $\leq (\varepsilon/2)$ pois $t_1 \geq t_0 + T\ (\varepsilon/2)$. O que é uma contradição//

Exemplo 2.1

Considere o circuito abaixo:



O quadrado neste diagrama simboliza um diogo de Esaki, com função característica f(v), representando o fluxo de corrente como uma função da voltagem v. As leis de - Kirchoff nos dão a relação entre a corrente i e a voltagem v.

$$(2) \quad \begin{cases} L \dfrac{di}{dt} = E(t) - Ri - v \\ \\ -C \dfrac{dv}{dt} = f(v) - i \end{cases}$$

onde R,L,C são constantes positivas, E(t) é contínua positiva e quase periódica. Assim

$$F(t,(i,v)) = ((1/L)\ E(t) - (R/L)\ i - v/L, (1/c)i - (1/c)f(v)),$$

$F: RXR^2 \to R^2$, é uma função contínua, quase periódica em t , uniformemente para (i,v) em subconjuntos compactos de RXR.

De fato, dada uma sequência w, existe uma subsequência u tal que $E(t+u_n)$ converge para H(t) uniformemente / na reta. Seja g(t,(i,v) = (H(t),0). Então $F(t+u_n,(i,v))$ converge para g(t,(i,v)) uniformemente em R cartesiano subconjuntos compactos de RXR.

Considere agora a seguinte função:

$$V(i,v) = (1/2)\ (L\ i^2 + C\ v^2)$$

Então a sua derivada em relação ao sistema (2) - será:

$$\dot{V}_{(2)}\ (t,(i,v)) = -\ R\ i^2 + E(t)i - v\ f(v) =$$

$$= -\left[Ri\ \left(i - \frac{E(t)}{R}\right) + v\ f(v)\right]$$

Supondo que $vf(v) \to +\infty$, quando $|v| \to +\infty$ vem que

$$\dot{V}_{(2)}\ (t,(i,v)) \leq -\ c\ (|(i,v)|), \quad \text{com } |(i,v)| =$$

$$= \max\ \{|i|\ ,\ |v|\}.$$

Portanto,pelo teorema 2.A , vem que as soluções de (2) são uniformemente ultimamente limitadas e pelo teorema 1.A, os sistemas

$$\dot{x} = G\ (t,(i,v)) \qquad (3)$$

com G no hull da F, tem soluções limitadas na reta toda em particular o sistema (2).

Seja z(t) uma solução limitada de (3) em R. Mostremos que tal solução é globalmente uniformemente quase assintoticamente estável se f satisfizer certa propriedade.

Seja $x(t)$ uma outra solução qualquer de (3) e considere a função:

$y(t) = x(t) - z(t)$, onde $z(t)$ é a solução escolhida acima.

É facil ver que tal função é solução do sistema

$$\dot{y} = G(t,y+z(t)) - G(t,z(t)) \qquad (4)$$

Ainda mais $y(t)\equiv 0$ é solução de (4).

Logo, resolver o nosso problema, é equivalente a mostrar que a solução $y(t)\equiv 0$ é globalmente uniformemente quase / assintoticamente estável.

Se $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$ e $z=(z_1,z_2)$ então

$$\dot{y} = G(t,y+z(t)) - G(t,z(t)) =$$
$$=((-R/L)\, y_1 - (1/L)\, y_2 \, , \, (1/C)\, y_1 - (1/C)$$
$$[f\,(y_2 + z_2(t)) - f(z_2(t))])$$

A função:

$$V\,(y_1,y_2) = (1/2)\,(L\, y_1^2 + C\, y_2^2\,)$$

tem derivada

$$\dot{V}_{(4)}\,(t,(y_1,y_2)) = L\, y_1\, \dot{y}_1 + C\, y_2\, \dot{y}_2 =$$
$$= y_1\,(-R\, y_1 - y_2) + y_2\,(y_1 - f(y_2 + z_2(t)) + f(z_2(t))=$$
$$= -\,\{R\, y_1^2 + [f(y_2 + z_2(t)) - f(z_2(t))]\,\, y_2\}$$

Se f é monõtona crescente, então $\dot{V}_{(4)}\,(t,y) \leq - c\,(\,|y|\,)$ e pelo teorema 2.D, a solução $y(t)\equiv 0$ é globalmente uniformemente quase assintoticamente estável.

Pelo teorema 2.D ela é a única solução limitada em $(-\infty,+\infty)$.

Assim $z(t)$ é a única solução limitada de (3) em / $(-\infty,+\infty)$, isto é, separada (em conjunto da forma D=RXK, K é uma esfera suficientemente grande de RXR).

Segue do teorema 1.B que elas são quase periódicas e em particular que o sistema (2) tem solução quase periódica.

Ainda mais o módulo dessa solução está contida no módulo da função E(t). Se supusermos que E(t) é quasi-periódica, então tal solução também o será.

Assim, como conclusão podemos tirar o seguinte teorema:

Considere o sistema:

$$\begin{cases} L \dfrac{di}{dt} = E(t) - Ri - v \\ \\ -C \dfrac{dv}{dt} = f(v) - i \end{cases}$$

onde R,L,C são constantes positivas , E(t) é uma função contínua, positiva e quase periódica.

Se $vf(v) \to +\infty$ quando $|v| \to +\infty$ e se f(v) for monótona crescente então o sistema acima tem uma única solução quase periódica globalmente uniformemente quase assintoticamente / estável.

Equação de Oscilações não Lineares

Considere a equação

$$\ddot{x} = H(t,x,\dot{x}) = -f(x)\,\dot{x} - g(x) + kq(t) \qquad (5)$$

onde $q(t)$ é uma função real quase periódica satisfazendo - $|q(t)| \leq 1$, t em R. e $k>0$ é um parâmetro real. Assuma que / $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas para x en R.

Seja $F(x) = \int_0^x f(y)\,dy$

Considere o sistema diferencial

$$(6) \qquad \begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) + k\,p(t) \end{cases}$$

com $p(t)$ no hull da função $q(t)$.

Se $p(t) = q(t)$ os sistemas (5) e (6) são equivalentes.

Assumiremos nesta parte o seguinte:

(i) existem alguns números positivos a,b,c,d tal que $a>b$, $c<d$, $g(c)=k$, $g(-b)=-k$.

(ii) $\min\{[F(d) - F(c)]\, f(x) + g(-a),\ [F(-b) - F(-a)]\, f(x) - g(d)\} > k$ onde $-a \leq x \leq d$.

(iii) $g(x)$ tem derivada contínua, $g(0)=0$, $0<g'(x)\leq B$ para $x\neq 0$.

(iv) $f(x) \geq r>0$ para x em R.

(v) $B<r^2$.

Considere o domínio D no plano (x,y) limitado pelos seguintes arcos de curva:

$\Gamma_1 : y = F(x) + B_1 \quad ; \quad -a \leq x \leq c$

$\Gamma_2 : y = F(d) \quad ; \quad c \leq x \leq d$

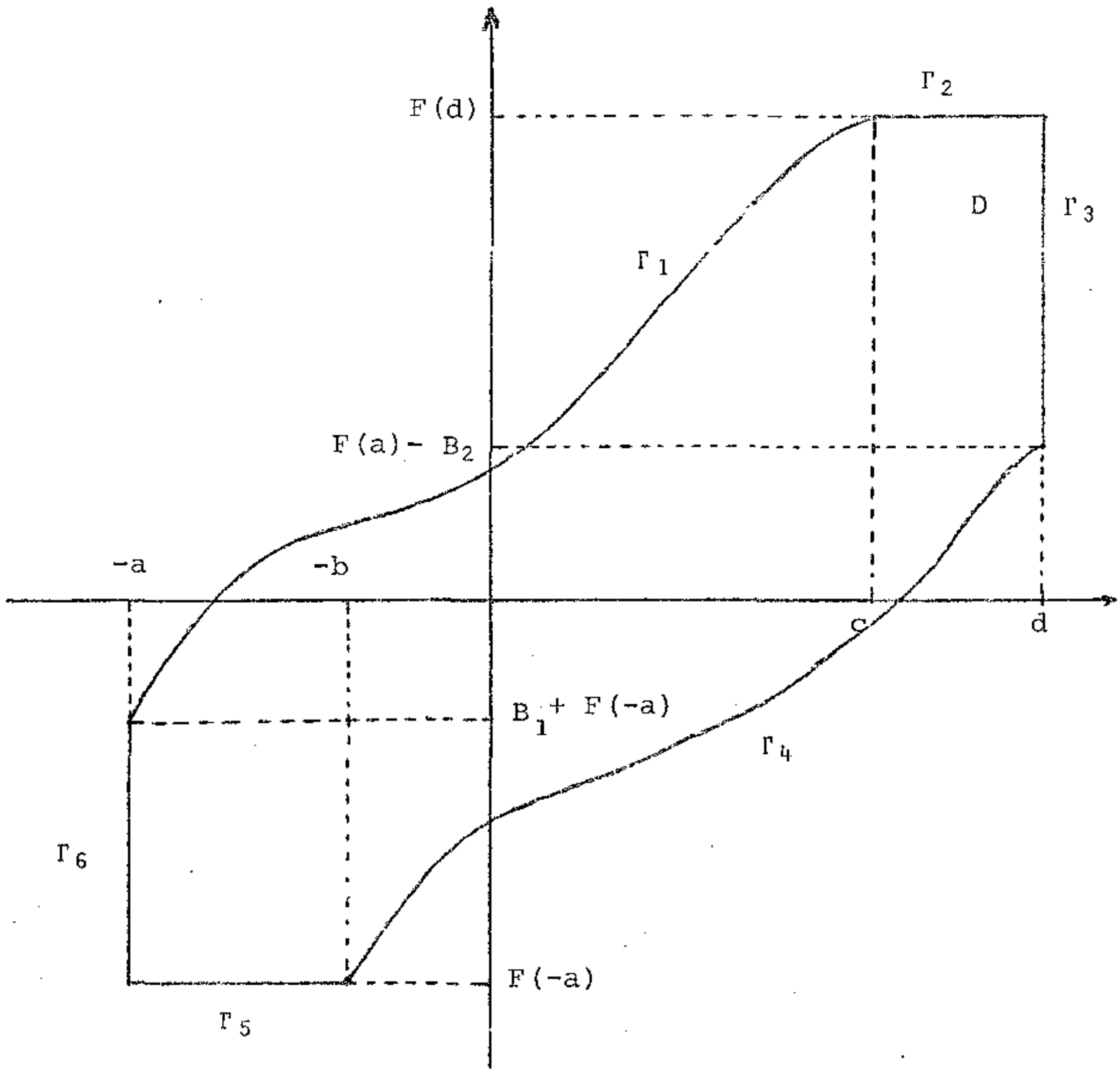
$\Gamma_3 : x = d \quad ; \quad F(d) - B_2 \leq y \leq F(d)$

$\Gamma_4 : y = F(x) - B_2 \quad ; \quad -b \leq x \leq d$

$\Gamma_5 : y = F(-a) \quad ; \quad -a \leq x \leq -d$

$\Gamma_6 : x = -a \quad ; \quad F(-a) \leq y \leq F(-a) + B_1$

Nas formulas acima, $B_1 = F(d) - F(c)$, $B_2 = F(-b) - F(-a)$, o que permite-nos dizer que os seis ãrcos acima formam uma curva de Jordan simples.



Lema 2.a

Seja m(t) uma função contínua na reta tal que

$0 \quad r \leq m(t) \leq M$

Então a equação

$$\dot{z} = z(m(t) - z) \qquad (7)$$

tem uma solução z(t) definida no eixo real de modo que

$r \leq z(t) \leq M$ para todo t

Demonstração

Sejam (t_n) uma sequência de números reais que converge para $-$ e (z_n) uma sequência de números reis tal que $r \leq z_n\ (t) \leq M$

Então as funções

$$z_n(t) = \frac{z_n\ (t) \exp\ (\int_{t_n}^{t} m(s)\ ds)}{1 + z_n\ (t) \int_{t_n}^{t} \exp\ (\int_0^s m(\theta)\ d\theta\ )\ ds},$$

n= 1,2,..., são soluções da equação considerada satisfazendo $r \leq z_n\ (t) \leq M\ ,\ t \geq t_n\ ,\ n= 1,2,\ldots$

Segue que a sequência de soluções $\{z_n\ (t)\}$ é uniformemente limitada e equicontínua em qualquer conjunto do tipo $|t_0,+\infty\ )$. Portanto podemos extrair uma subsequência que converge (uniformemente em qualquer intervalo finito) para a solução z(t) de (7).

Como $r \_ z_n\ (t) \_ M$ então $r \_ z(t) \_ M$ e segue o lema//

Teorema 2.F

Se as condições (i) até (v) estão satisfeitas então a equação (5) tem uma única solução quase periódica cuja derivada é também quase periódica de modo que $(x(t),\dot{x}(t))$ esta em D, t em R.

Demonstração

Decorrerá das seguintes considerações que cada um dos sistemas (6) possui uma única solução quase periódica com gráfico em D.

Mostremos primeiramente que uma solução arbitrária de (6) que passa num ponto de D não pode deixá-lo.

Num ponto arbitrário do arco de curva Γ_1, $(x,F(x)+B_1)$, $-a \leq x \leq c$, a trajetória do sistema (6) tem declividade:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-g(x) + k\,p(t)}{B_1} \leq \frac{-g(-a) + k}{B_1} <$$

$$< \frac{-g(-a) + \min\{B_1 f(x) + g(-a),\ B_2 f(x) - g(d)\}}{B_1} < f(x) = F'(x)$$

e $F'(x)$ é a declividade de Γ_1.

Então a declividade desta trajetória é menor que a de Γ_1 no mesmo ponto arbitrário de Γ_1. Desde que $\dot{x}=y-F(x)=B_1>0$ em Γ_1, a trajetória considerada entra em D quando t cresce.

Num ponto arbitrário de Γ_2, $(x,F(d))$, $c<x<d$, a trajetória do sistema (6) tem declividade:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-g(x) + k\,p(t)}{F(d) - F(x)} < \frac{-g(c) + k}{F(d)-F(x)} = 0$$

A declividade em Γ_2 é $y'=0$

Logo a declividade da trajetória é menor que a de Γ_2.

no mesmo ponto.

Desde que $\dot{x} = F(d) - F(x) > 0$, para $c<x<d$, em Γ_2 , a trajetória entra em D quando t cesce.

No ponto $(c,F(d))$,

$\dot{y} = -g(c) + k\ p(t) = -k + k\ p(t) \leq 0$ e $\dot{x} = F(d)-F(c)= B_1>0$ /

(assim x cresce quando o tempo cresce).

Então a trajetória que passa por este ponto entra em D ou é tangente à reta $y= F(d)$. Notemos que em volta do - ponto $(c,F(d))$ de D e para a reta $x=c$, $\dot{y}$ é negativo. Portanto a trajetória deve entrar em D.

No ponto $(d,F(d))$ temos:

$\dot{y} = -g(d) + k\ p(t) < -g(c) + k\ p(t) \leq 0$

Como resultado, a trajetória que passa por este ponto é tangente à reta $x=d$. Desde que $y<F(x)$ sob a curva $y=F(x)$ isto significa que num ponto de D, abaixo da reta mencionada, $\dot{x} = y- F(x)<0$.

Assim a trajetória deverá entrar em D quando t cresce.

Um argumento semelhante pode ser aplicado para pontos de Γ_3 para os quais $F(d) - B_2 \leq y < F(d)$ desde que nesses pontos $\dot{x}= y-F(x)<o$ (isto é, x decresce com otempo).

De maneira análoga as outras partes da fronteira de D podem ser discutidas como feito acima.

Portanto, toda trajetória que cortar a fronteira de D deve entrar em D e assim para $t \_ t_0$, está trajetória sempre estará em D. Pelo teorema 1.A , cada sistema (6) , tem uma solução definida para t em R de modo que o gráfico está contido em D.

Mostremos que cada sistema (6) tem uma solução com tal propriedade.

Senão vejamos, sejam $(x(t), y(t))$ $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$, t em R, duas soluções distintas de (6) com gráfico em D.

Do teorema de unicidade obtemos: $(x(t)\ ,\ y(t)) \neq (\bar{x}(t),\bar{y}(t))$ para todo t.

Colocando:

$$u(t) = x(t) - \bar{x}(t)\ ,$$
$$v(t) = y(t) - \bar{y}(t)\ ,$$

Obtemos:

$$\dot{u} = v - m\ (\bar{x},u)\ u\ ;$$
$$\dot{v} = -h\ (\bar{x},u)$$

onde

$$m(\bar{x},u) = \begin{cases} \dfrac{F\ (\bar{x}+u) - F(\bar{x})}{u} & ,\ u \neq 0 \\ f(\bar{x}) & ;\ u = o \end{cases}$$

$$h(\bar{x},u) = \begin{cases} \dfrac{g\ (\bar{x}+u) - g(\bar{x})}{u} & ;\ u \neq 0 \\ g'\ (\bar{x}) & \end{cases}$$

Segue imediatamente que $r \leq m(\bar{x},u) \leq M$, sendo M um número tal que $f(\bar{x}(t)) \leq M$, t em R, e $h(\bar{x},u) \geq 0$.

Para $m(t) = m(\bar{x},u)$, a equação (7) tem solução z(t) definida em R tal que $r \leq z(t) \leq M$ (lema 2.a)

Considere a função:

$$V(t) = \{v^2 + (v-zu)\}^{1/2}$$

onde z(t) é a solução especificada acima.

Desde que $(u(t),\ v(t)) \neq (0,0)$ para t em R temos $V>0$ para todo t.

Observe que V é limitada na reta pois u,v e z o são.

Então:

$$\dot{V} = \frac{2\ (z^2 - h)\ uv - z(z^2 - h)\ u^2 - z\ v^2}{\{v^2 + (v - zu)^2\}^{1/2}} =$$

$$= \frac{2\ q\ u\ v - pu^2 - z\ v^2}{\{v^2 + (v - zu)^2\}^{1/2}}$$

onde

$$q = z^2 - h \ ,$$

$$p = z\ (z^2 - h)$$

$$q^2 - pz = -h\ (z^2 - h)$$

Então

$$V\dot{V} = 2\ q\ u\ v - pu^2 - zv^2 =$$

$$= -z\ \left[(v - q/z\ u)^2 + \frac{(pz - q^2)}{z^2}\ u^2\right]$$

Observemos que $pz - q^2 = h(z^2 - h) \geq 0$ pois h é majorado por g' e $z^2 \geq r^2 > B \geq g'$ e a igualdade de sinal só se verifica se e somente se h=0, isto é, $\bar{x}=u=0$. Logo $V\dot{V}<0$.

Como $V>0$, então $\dot{V}<0$ para t. Assim V^2 é uma função de t, limitada e estritamente decrescente. Consequentemente $V^2 \to V_0^2$, $0 \leq V_0 < \infty$ para $t \to -\infty$.

Mas $V^2 \to V_0^2 \neq 0$ quando $t \to -\infty$ implica na existência de uma sequência $(\bar{t})$, $\bar{t} \to -\infty$ tal que $V\dot{V} \to 0$ nessa sequência. Em caso contrário teríamos $V\dot{V} \leq -1 < 0$ para $t \leq t_1$ o que implicaria que $V^2 \to +\infty$ para $t \to -\infty$. De fato, como $V^2 \to V_0^2 \neq 0$ existe um intervalo $(-\infty, t_1)$ tal que $V^2(t) \geq \varepsilon > 0$ para t em $(-\infty, t_1)$ o que implica para (u,v) longe do (0,0) teríamos $V\dot{V} \leq 1 < 0$. Assim para $t \leq t_1$ $V^2(t) = V^2(a) + \int_{t_1}^{t} V(s)\ \dot{V}(s)\ ds \geq V^2(t_1) + 1\ (t_1 - t_1)$ e quando $t \to -\infty$, $V^2 \to +\infty$.

Então:

$$\dot{VV}(\bar{t}) = -z(\bar{t}) \left[\left(v(\bar{t}) - \frac{q(\bar{t})}{z(\bar{t})} u(\bar{t})\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{(p(\bar{t})\, z(\bar{t}) + q(\bar{t})^2)}{z(\bar{t})^2} u(\bar{t})^2 \right] \to 0$$

quando $\bar{t} \to -\infty$.

Logo

$$\left[v(\bar{t}) - \frac{q(\bar{t})}{z(\bar{t})} u(\bar{t})\right] \to 0 \text{ e } p(\bar{t})\, z(\bar{t}) - q(\bar{t})^2 \to 0$$

quando $\bar{t} \to -\infty$ desde que $z(\bar{t}) \geq r > 0$. Mas isso só acontece se e somente se $u(\bar{t}) \to 0$ e $v(\bar{t}) \to 0$ quando $\bar{t} \to -\infty$ ou

$$\left[v(\bar{t}) - \frac{q(\bar{t})}{z(\bar{t})} u(\bar{t})\right] \to 0 \quad \text{e } p(\bar{t})\, z(\bar{t}) - q(\bar{t})^2 = h(\bar{t})\, (z(\bar{t})^2 - $$

$$- h(\bar{t})) \to 0 \quad \text{quando } \bar{t} \to -\infty .$$

Se $u \to 0$ e $v \to 0$, então $V \to 0$ nesta sequência, o que é incompatível com $V^2 \to V_0{}^2 \neq 0$.

Se $h(z^2 - h) \to 0$ nessa sequência, segue que $h \to 0$ desde que $(z^2 - h \geq r^2 - B > 0)$.

Supondo que $u(\bar{t})$ não tende a zero, então existe uma subsequência $(\bar{t}_1)$ onde $u \to u_0 \neq 0$. POdemos assumir, sem perda de generalidade, que nessa subsequência $\bar{x} \to \bar{x}_0$. Porque $h(\bar{x},u)$ é contínua, $h \to h(\bar{x}_0, \bar{u}_0)$ nesta subsequência. Desde que $h \neq 0$ para $u_0 \neq 0$, temos uma contradição. Isto significa que $u(\bar{t}) \to 0$ e desde que $\dot{VV}(\bar{t}) \to 0$ então $v(\bar{t}) \to 0$ e $V(\bar{t}) \to 0$.

Como já vimos isto contradiz o fato de $V^2 \to V_0{}^2 \neq 0$ quando $t \to -\infty$.

Portanto cada sistema (6) tem uma única solução / definida para t em R com gráfico em D, isto é, cada um dos sis̲tema (6) tem uma única solução separada em D.

Pelo teorema 1.B cada sistema (6) tem uma única solução quase periódica com gráfico em D. Em particular, a equação (5) tem uma única solução quase periódica, junto com sua / derivada, de modo que $(x(t), \dot{x}(t))$ está em D, t em R//

BIBLIOGRAFIA

{1} - Amerio L. - Soluzioni quasi-periodiche o limitate, di sistemi differenziali non li neari quasi-periodici - Annali di Matematica pura ed appl. 39 (1955) 97 - 199.

{2} - Corduneanu, C. - Almost periodic functions Interscience - 1968.

{3} - Fink, A.M. - Almost periodic differential equations - Springer - Verlag - (377) 1974

{4} - Hale, J.K. - Ordinary differential equations Wiley - Interscience.

{5} - Yoshizawa, T. - Stability theory by Liapunov's second method - The Mathematical Society of - Japan - 1966.