

**Universidade Estadual de Campinas**

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

---

Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática

## **Isometrias e Similaridades**

por

**Alexandre Pereira Sousa**

Mestrado Profissional em Matemática - Campinas - SP

**Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Claudina Izepe Rodrigues**

## Isometrias e Similaridades

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Alexandre Pereira Sousa** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 30 de setembro de 2008.

  
Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Claudina Izepe Rodrigues

Banca examinadora:

*Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Claudina Izepe Rodrigues*

*Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Simone Maria de Moraes*

*Prof. Dr. Edson Agustini*

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre Profissional em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Sousa, Alexandre Pereira	
So85i	Isometrias e similaridades / Alexandre Pereira Sousa -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.
Orientadora : Claudina Izepe Rodrigues	
Trabalho final (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.	
1. Isometria(Matемática). 2. Similaridade (Geometria). 3. Transformações (Matемática). I. Rodrigues, Claudina Izepe. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.	

Título em inglês: Isometries and similarities

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Isometries (Mathematics). 2. Similarity (Geometry). 3. Transformations (Mathematics).

Área de concentração: Geometria

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Profa. Dra. Claudina Izepe Rodrigues (IMECC-Unicamp)  
Profa. Dra. Simone Maria de Morris (UFV)  
Prof. Dr. Edson Agustini (FAMAT - UFU)

Data da defesa: 30/09/2008

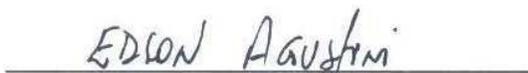
Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática

**Dissertação de Mestrado defendida em 30 de setembro de 2008 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

  
Prof. (a). Dr (a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES

  
Prof. (a). Dr (a). SIMONE MARIA DE MORAES

  
Prof. (a). Dr (a). EDSON AGUSTINI

À minha mãe Cleonice

*Não há estradas reais para chegar  
à Geometria.*

**(Euclides)**

---

# Agradecimentos

---

Gostaria de agradecer a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente com este trabalho. Em especial, a minha orientadora Profa. Claudina Izepe Rodrigues, a quem agradeço pela grande contribuição. Aos professores Anselmo Baganha Raposo, José Ferreira Costa, Sueli Irene Rodrigues Costa, Jose Plínio de Oliveira Santos e Simão Nicolau Stelmastchuk. Aos monitores João Paulo Bressan e Cristiano Torezzan. E colegas Nolmar Melo, Felix Silva Costa e a toda minha família.

---

# Resumo

---

Neste trabalho estudamos isometrias e similaridades no espaço Euclidiano de dimensão três com o objetivo de suas classificações. Apresentamos inicialmente alguns fatos históricos referentes à Geometria, e, a seguir, desenvolvemos um estudo sobre isometrias e similaridades usando ferramentas e conceitos de grupos. Finalmente, sugerimos algumas atividades úteis para uma familiarização e desenvolvimento de habilidades na investigação de simetrias de figuras.

**Palavras-Chave:** Transformações, Similaridades, Isometrias, Simetrias, Grupos.

---

# Abstract

---

The objective of this work is to classify isometries and similarities on three dimensional Euclidean space. We present some historic facts about Geometry followed by a study on isometries and similarities using tools and concepts from groups. We also suggest some helpful activities to develop abilities in the investigation of symmetry groups of figures.

**Keywords:** Transformation, Similarity, Isometry, Symmetry, Group.

---

# Lista de Figuras

---

1.1	Carl Friedrich Gauss . . . . .	8
1.2	Janos Bolyai . . . . .	10
1.3	Nikolai I. Lobatchevsky . . . . .	10
1.4	George F. B. Riemann . . . . .	11
1.5	Felix Christian Klein . . . . .	14
3.1	Planos paralelos . . . . .	32
3.2	Planos coincidentes . . . . .	32
3.3	Planos secantes . . . . .	33
3.4	Reta que passa por dois pontos . . . . .	33
3.5	Ponto, reta e plano . . . . .	34
3.6	Retas perpendiculares . . . . .	34
3.7	Retas paralelas . . . . .	35
3.8	Plano definido por três pontos independentes . . . . .	35
3.9	Planos perpendiculares . . . . .	36
3.10	Planos paralelos . . . . .	36
3.11	Similaridade preserva planos . . . . .	41
3.12	Similaridade preserva retas . . . . .	42
3.13	Similaridade preserva perpendicularismo entre planos . . . . .	42
3.14	Similaridade preserva perpendicularismo entre retas . . . . .	43
3.15	Similaridade preserva paralelismo entre planos . . . . .	43
3.16	Similaridade preserva paralelismo entre retas . . . . .	44
3.17	Similaridade preserva ponto médio . . . . .	44
3.18	Similaridade preserva desigualdade entre comprimentos de segmentos . . . . .	45

3.19	Similaridade preserva segmento . . . . .	46
3.20	Similaridade preserva congruência entre ângulos . . . . .	48
3.21	Retas fixadas ponto a ponto . . . . .	52
3.22	Plano fixado ponto a ponto . . . . .	53
3.23	O espaço fixado ponto a ponto . . . . .	53
3.24	Reflexão com espelho . . . . .	54
3.25	Meia-volta com eixo . . . . .	55
3.26	Inversão de centro $X$ . . . . .	55
3.27	A reflexão é uma involução . . . . .	56
3.28	A meia-volta é uma involução . . . . .	57
3.29	A inversão é uma involução . . . . .	58
3.30	As inversões $p$ e $q$ comutam . . . . .	63
3.31	A meia-volta e a inversão comutam . . . . .	64
3.32	A reflexão e a inversão comutam . . . . .	65
3.33	As meias-voltas $m$ e $n$ comutam . . . . .	66
3.34	A reflexão e meia-volta comutam . . . . .	67
3.35	A reflexão e a meia-volta comutam . . . . .	67
3.36	As reflexões $a$ e $b$ comutam . . . . .	68
3.37	Produto de duas involuções . . . . .	70
3.38	Meia-volta por meio de produto de reflexões . . . . .	71
3.39	Inversão por meio de meias-voltas . . . . .	71
3.40	Reflexão e meias-voltas . . . . .	72
3.41	Ilustração da definição da rotação . . . . .	73
3.42	Ilustração da definição do ângulo entre $A$ e $B$ . . . . .	73
3.43	Ilustração da definição da translação . . . . .	73
3.44	Ilustração da definição da translação de comprimento zero . . . . .	73
3.45	Rotação . . . . .	74
3.46	Translação . . . . .	74
3.47	Deslocamento em parafuso . . . . .	75

---

3.48	Reflexão deslizante . . . . .	76
3.49	Inversão rotatória . . . . .	76
3.50	Composição de translação e reflexão . . . . .	78
3.51	Composição de rotação e translação . . . . .	79
3.52	Composição de rotação e meia-volta . . . . .	79
3.53	Regras da direita e esquerda . . . . .	80
3.54	Reflexão e seus pontos fixos . . . . .	81
3.55	Feixe de planos . . . . .	85
3.56	Rotação de $90^\circ$ . . . . .	90
3.57	Meia-volta m e rotação de $90^\circ$ . . . . .	91
3.58	Translação e rotação de $90^\circ$ . . . . .	92
3.59	Dilatação por meio de dois pontos . . . . .	94
3.60	Dilatação por meio de dois pontos . . . . .	95
3.61	Dilatação central ou existência de translação . . . . .	97
4.1	Algoritmo I . . . . .	100
4.2	Algoritmo II . . . . .	101
4.3	Algoritmo III . . . . .	102
4.4	Simetrias do triângulo equilátero . . . . .	104
4.5	Simetrias do quadrado . . . . .	109
4.6	Simetrias do pentágono . . . . .	114
4.7	Grupo de simetria $D_{12}$ . . . . .	123
4.8	Grupo cíclico $C_{24}$ . . . . .	123
4.9	Motivo . . . . .	124
4.10	Grupo de simetria t . . . . .	124
4.11	Grupo de simetria tg . . . . .	124
4.12	Grupo de simetria tv . . . . .	125
4.13	Grupo de simetria th . . . . .	125
4.14	Grupo de simetria trh . . . . .	125

4.15 Grupo de simetria tr . . . . .	125
4.16 Grupo de simetria trg . . . . .	125
4.17 Pavimentação com grupo de simetria pm . . . . .	126
4.18 Simetria de reflexão do tetraedro . . . . .	128
4.19 Simetrias de reflexão do tetraedro . . . . .	129
4.20 Simetrias de rotação do tetraedro . . . . .	130
4.21 Simetrias de reflexão do tetraedro . . . . .	131
4.22 Simetrias de reflexão rotativa do tetraedro . . . . .	132
4.23 Simetrias de reflexão do cubo . . . . .	135
4.24 Eixos de simetrias de rotação do Cubo . . . . .	136
4.25 Eixos de simetrias de rotação do cubo . . . . .	136
4.26 Eixos de simetrias de rotação do cubo . . . . .	137
4.27 Eixos de simetrias de rotação do cubo . . . . .	137
4.28 Eixo de simetria de rotação do cubo . . . . .	137

---

# Sumário

---

Agradecimentos	ix
Resumo	xi
Abstract	xiii
Lista de Figuras	xviii
Introdução	1
<b>1 Fatos Históricos</b>	<b>3</b>
<b>2 Conceitos Básicos</b>	<b>19</b>
2.1 Conceito de conjuntos . . . . .	19
2.2 Aplicação . . . . .	23
2.3 Grupos . . . . .	25
<b>3 Isometrias e Similaridades</b>	<b>31</b>
3.1 Noções Básicas e Notações . . . . .	31
3.2 Isometrias e Similaridades . . . . .	37
3.3 Involuções em $S$ . . . . .	54
3.4 Classificação das Isometrias . . . . .	72
3.5 Dilatação . . . . .	93
3.6 Classificação das Similaridades . . . . .	97
<b>4 Simetrias de Figuras</b>	<b>99</b>
4.1 Simetrias de Figuras . . . . .	99

4.2 Simetrias no Espaço . . . . .	127
<b>Conclusão</b>	<b>139</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>141</b>

---

# Introdução

---

O objetivo principal deste trabalho é o estudo de isometrias e similaridades no espaço Euclidiano de dimensão três e suas classificações. No Capítulo 1 apresentamos alguns fatos históricos referentes à Geometria. O Capítulo 2 contém conceitos básicos sobre aplicações, grupos e homomorfismos, necessários para o desenvolvimento do Capítulo 3. No Capítulo 3 a ênfase foi dada aos grupos de transformações do espaço Euclidiano de dimensão 3. Definimos similaridades e isometrias, e apresentamos um estudo de propriedades e resultados dessas transformações necessários para obter a classificação das isometrias e similaridades no espaço. No Capítulo 4 apresentamos algumas sugestões de atividades envolvendo a identificação de simetrias de figuras e seus grupos de simetrias. Essa identificação contribui para uma familiarização com as transformações envolvidas e também com as estruturas de grupo inerentes. Apresentamos algoritmos que auxiliam a identificação dos grupos de simetrias. Também, apresentamos exemplos de figuras no espaço, a saber, o tetraedro e o cubo, e suas simetrias. Além do objetivo da classificação das isometrias e similaridades no espaço, também temos como objetivo paralelo desenvolver habilidades em trabalhar com as transformações e grupos de transformações.

# Fatos Históricos

---

---

Neste capítulo apresentamos fatos históricos das Geometrias Euclidiana e Não-Euclidiana. Maiores detalhes nas referências [2] e [6].

O vocábulo Geometria tem origem grega, e significa “medir a terra”. Embora se saiba que povos como, Antigo Egito e Babilônia, contribuíram com as bases deste conhecimento, não se pode assegurar nada sobre a civilização que deu o passo inicial para esse conhecimento. Embora os filósofos e matemáticos Heródoto e Aristóteles, defendem que os fundamentos da Geometria tiveram origem no Antigo Egito, conforme pode ser lido no fragmento a seguir:

[...] Heródoto e Aristóteles não quiseram se arriscar a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas é claro que a geometria que tinham em mente tinha raízes mais antigas. Heródoto mantinha que a geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio. Aristóteles achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lares é que tinha conduzido ao estudo da geometria. Podemos considerar as idéias de Heródoto e Aristóteles como representando duas teorias opostas quanto às origens da matemática, um acreditando que a origem fosse a necessidade prática, outro que a origem estivesse no lazer sacerdotal e ritual. O fato de os geômetras egípcios serem às vezes chamados “estiradores de corda” (ou agrimensores) pode ser tomado como apoio de qualquer das duas teorias, pois cordas eram indubitavelmente usadas tanto para traçar as bases de templos como para realinhar demarcações apagadas de terras.

Não podemos contradizer com segurança nem Heródoto nem Aristóteles quanto à motivação que produziu a matemática, mas é claro que ambos subestimaram a idade do assunto. O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que são partes da geometria elementar [...] (*BOYER*, 2001, pp.4–5).

Sabe-se que o Sulvasutras, (regras de cordas), de origem e data desconhecidos, foi um dos primeiros documentos indianos a tratar da Geometria, sendo um registro histórico que baliza a teoria de um pensamento geométrico elaborado antes da civilização grega. O imperador da Macedônia, Alexandre, denominado o grande, devido aos seus grandes feitos militares, conquistou grande parte do mundo antigo. Foi um dos grandes difusores do conhecimento grego pelo mundo, não excluindo o conhecimento da Geometria. Entretanto, com a morte do imperador, deu-se, então, uma disputa pelo poder entre os generais do exército grego, que culminou, nessa mesma época, no controle de Ptolomeu I sobre a parte egípcia do império recém-fragmentado (*BOYER*, 2001).

Ptolomeu I foi responsável por atrair sábios para o Egito Antigo, em busca de esforços construtivos. Com esse objetivo, uma de suas principais obras, foi construir uma escola, na cidade de Alexandria, conhecida com o nome de Museu. Ptolomeu I preocupa-se também com a busca e a seleção de renomados mestres da época, entre eles, destaca-se a figura de Euclides, um respeitado sábio da época, sobre ele, sabe-se muito pouco. Contudo, pode-se afirmar que viveu a 300 *a.C.* e toda informação que se tem sobre ele é dada pelo historiador Proclus (410 – 485 *a.C.*), autor que viveu mais de 700 anos depois.

Sabe-se que Euclides foi autor de vários textos matemáticos, inclusive o primeiro trabalho considerado como científico da história da humanidade - Os Elementos (*Stoichia*) (*EVES*, 2004).

Grande parte dos livros escritos por Euclides foi perdida. Contudo, um dos mais famosos é sobre Porismas que “podem ter representado uma antiga aproximação à geometria analítica” (*BOYER*, 2001, p.128).

Posteriormente, esse conceito foi contestado por Pappus de Alexandria, que viveu aproximadamente no ano 320 *a.C.* Pappus afirmava que Porismas é algo intermediário entre um teorema, em que alguma coisa é proposta para a demonstração, e um problema em que alguma coisa é proposta para construção. Para outros pensadores, Porisma pode ser compreendida como uma proposição em que é determinada a relação entre quantidades conhecidas e variadas ou indeterminadas, entretanto, esta é a melhor aproximação da idéia de função. E assim foram várias as interpretações do que seria o Porisma de Euclides, mas na verdade não se sabe ao certo do que se tratava esse trabalho.

Atualmente, segundo Boyer (2001), sabe-se que apenas cinco obras sobreviveram, sendo estas: Divisão de Figuras; Os Fenômenos; Os Elementos; Os Dados; e, Óptica.

- Óptica: foi um dos primeiros trabalhos sobre a geometria da visão direta ou perspectiva. Ela era dividida em três partes: Óptica - a geometria da visão; Catóptrica - a geometria dos raios refletidos; e Dióptrica - a geometria dos raios refratados.
- Os fenômenos: seu conteúdo é de geometria esférica, e por essa razão, era usado pelos astrônomos.
- Divisão de figuras: é uma obra que chegou ao conhecimento de todos por ter sido traduzido para o árabe, contém trinta e seis proposições que discriminam a divisão de figuras planas.
- Dados: serviam como guia para analisar problemas sobre Geometria, foram usados como complementos dos seis primeiros livros de “Os Elementos”.
- Os Elementos: escrito por volta do ano 300 *a.C.* é a obra mais conceituada de Euclides, ela introduz toda a matemática elementar, pois reuni grande parte do conhecimento matemático conhecido na época, e até hoje, sendo considerada a mais renomada obra para analisar problemas de geometria. Acrescenta-se, também, a organização como fator essencial que caracterizou a obra como a primeira obra científica da história da humanidade, perdendo apenas para a Bíblia em números de edição. A obra “Os Elementos” não trata unicamente de geometria, sendo dividida em treze livros onde

certamente está inserida a geometria. Mas, além da Geometria, destaca-se a Álgebra e a Aritmética. O Livro I contém uma lista de vinte e três definições, sendo que algumas não definem, isso porque há um capítulo prévio de elementos não definidos em termos dos quais os outros estejam definidos. Como por exemplo; “um ponto é o que não tem partes”, ou que “uma reta é comprimento sem largura” ou ainda “uma superfície é o que tem apenas comprimento e largura” (*EVES*, 2004).

Depois das definições, Euclides apresenta uma lista com cinco postulados e axiomas (*BOYER*, 2001):

- Primeiro Postulado: traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer ponto.
- Segundo Postulado: prolongar uma reta finita continuamente em uma linha reta.
- Terceiro Postulado: descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
- Quarto Postulado: que todos os ângulos retos são iguais.
- Quinto Postulado: que, se uma reta cortando duas retas faz os ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, as duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontravam do lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos.

Destacam-se, ainda, os seguintes os Axiomas:

- Axioma 1: coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
- Axioma 2: se iguais são somados a iguais, os totais são iguais.
- Axioma 3: se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
- Axioma 4: coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma a outra.
- Axioma 5: o todo é maior que a parte.

Compreende-se que “Os Elementos” de Euclides é uma obra formidável. Trata-se do texto mais influente da história da Matemática de todos os tempos. Os Elementos é fonte de inspiração, de pesquisa e de admiração. Nele encontra-se o postulado das paralelas, também conhecido como Quinto Postulado de Euclides.

Sabe-se que este postulado foi tratado por Euclides com imenso cuidado e desconfiança. Havia nele uma polêmica filosófica que não se encontrava nos quatro postulados descritos anteriormente. Afinal de contas, haviam inúmeras divagações, tais como a possibilidade haver duas retas que se encontram ou não. E na hipótese de existir o encontro, em que ponto ocorreria tal encontro.

Contudo, para Euclides duas retas são paralelas se elas nunca se encontram. Todavia, sabe-se da existência de retas que não se encontram e não são paralelas. Também deve-se salientar o alto grau de complexidade deste enunciado, comparado a forma clara como foi enunciado os outros postulados e também o fato de Euclides evitar o uso deste postulado na demonstração de proposições.

Por mais de 2000 anos, os matemáticos conviveram com a suspeita da independência deste postulado. E refletindo um pouco mais, começaram a tratar o quinto postulado como uma proposição que pudesse ser demonstrada a partir dos outros. Dessa forma, durante muitos séculos, surgiram vários enunciados equivalentes ao quinto postulado, o mais aceito foi o de Jonh Playfair (1748 – 1819), no qual o mesmo trazia: *“Dada uma reta qualquer e um ponto fora desta reta, existe uma única reta paralela à reta dada, passando por este ponto”*.

Assim, durante dois milênios, de suspeita e questionamentos da independência deste fabuloso enigma, inúmeras mentes prodigiosas tentaram inutilmente ou infrutiferamente demonstrá-lo usando os postulados anteriores e em toda totalidade das tentativas, das mais simples às mais complexas, mostrava-se que de alguma forma continham dentro da argumentação lógica o próprio desafio, ou seja, a argumentação da demonstração usava a própria tese para se justificar. Entre os que tentaram demonstrar, podemos citar Girolamo Saccheri (1667 – 1733) e Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) que apesar de fracassarem contribuíram com diversos avanços, por exemplo, chegaram à conclusão que sem o postulado das paralelas teremos que a soma dos ângulos internos de um triangulo pode ser menor ou

maior do que  $180^\circ$ . Em outras palavras, a falta ou excesso depende da área do referido triângulo de modo semelhante ao que ocorre em uma esfera, ou ainda depende do tipo da geometria estudada.

Uma das técnicas utilizadas para a demonstração do quinto postulado foi o da prova por contradição que consiste em negar o que se quer provar e com isso concluir um absurdo, o que indica que, o que foi tomado por hipótese é falso o que significa ser verdadeiro o contrário.

No início do século *XVIII*, já fortalecia a suspeita de que o quinto postulado não pudesse ser demonstrado a partir dos outros. Surgia, então, a idéia de considerá-lo independente dos outros quatro e que a partir de sua negação seria possível desenvolver um novo conhecimento de geometria; passaram então a considerar três situações distintas: por um ponto fora de uma reta dada, passa mais de uma reta, apenas uma reta ou nenhuma reta paralela à reta dada. O matemático Carl Friedrich Gauss (1777–1855), maior matemático de sua época, com apenas sete anos de idade já dava fortes sinais de sua genialidade ao mostrar aos seus professores, de forma quase que imediata que a soma dos números inteiros de 1 a 100 era igual a 5050. Ele notou isso representando a soma de 50 pares de números cuja soma dos números de cada par dava sempre como resultado 101, Isto é;  $(1 + 100), (2 + 99), \dots, (51 + 50)$  daí apenas efetuou a multiplicação  $50 \cdot 101 = 5050$ .



Figura 1.1: Carl Friedrich Gauss quer um que publicasse algo sobre uma geometria não-euclidiana, pois o mundo estava sob forte influência da corrente filosófica conhecida por

Gauss, embora ainda tentasse provar o quinto postulado, deu uma grande contribuição para a revelação de uma nova geometria, sendo o primeiro a denominá-la como geometria não-euclidiana. Gauss sabia da possibilidade de desenvolver um novo e fascinante conhecimento. Foi na segunda metade do século *XIX* que começou a desenvolver suas idéias relativas à nova geometria. Contudo, ele não chegou a publicar documento sobre o novo conhecimento, devido à resistência a qual-

Iluminismo, que tinha o alemão Immanuel Kant (1724 – 1804) como um dos maiores representantes, considerado o último grande filósofo dos princípios da era moderna.

O pensamento idealista de Kant influenciou desde o romantismo alemão como também as filosofias idealistas do século *XIX*, como por exemplo, observa-se o papel significativo que desempenhou na filosofia de Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770 – 1831).

O Iluminismo entendia que a geometria euclidiana representava a perfeição, segundo o entendimento filosófico de Kant, a matemática “estar fundamentada na nossa capacidade de intuir”, é fruto da nossa abstração logo estar sujeita às suas formas relativas ao espaço e o tempo, que por sua vez não são realidades metafísicas, nem físicas, isto é, não existem em si e por si, possuem formas e significados percebidos pela capacidade humana de perceber, ou ainda, não procedem da experiência, não são conceitos de coisas reais mais sim intuições.

Nesse contexto, pode-se perceber claramente a resistência daquela época em relação a outra teoria que não abrangesse a geometria euclidiana como base. Um exemplo desse fato é a concepção do conceito de plano, na geometria euclidiana o plano é uma superfície chata e lisa na qual se percebe facilmente e com clareza onde se apóia, isto é, toma-se por base a visão que se tinham em relação ao mundo, tendo-se assim o ponto de partida da Teoria da Física, desenvolvida por Isaac Newton (1643 – 1727). Teoria esta, sob a qual Kant queria construir a sua filosofia. Logo, não é de estranhar o extremo cuidado de Gauss em não querer expor algo que iria de encontro a toda fundamentação científica do período. Mas, cartas escritas para F. A. Taurinos e a Farkas Bolyai (1775 – 1856) mostram claramente que estava à frente do pensamento da época, pois sabia, por exemplo, que a soma dos ângulos de um triângulo sendo menor que dois retos revelaria uma geometria diferente da geometria euclidiana.



Figura 1.2: Janos Bolyai

Janos Bolyai (1802 – 1860), filho de Farkas Bolyai, como seria natural, após estudar com o pai, também desde muito jovem, envolveu-se com o grande problema que se constituiu o quinto postulado, chegando a ser aconselhado pelo pai a deixar de lado.

Em 1820, após várias tentativas de provar o quinto postulado usando a técnica da substituição por uma afirmação que levasse a uma contradição, iniciou a abertura da visão para outro aspecto de natureza muito significativa. Janos, ao negar o quinto postulado, começava a vislumbrar conceitos mais generalizados de uma geometria geral que tinha a geometria euclidiana como caso particular. Janos nunca publicou suas pesquisas, publicando apenas uma parte de suas maravilhosas descobertas como apêndice de uma obra manuscrita de seu pai intitulada *Tentamen juventutem in elementa matheseos purae, elemmentaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi* (BOYER, 2001).



Figura 1.3: Nikolai I. Lobachevsky

Farkas Bolyai, era amigo de Gauss desde a universidade, foi um dos matemáticos que se envolveu com o mistério do quinto postulado e dedicou parte de sua vida tentando demonstrá-lo. Em 1804 enviou carta a Gauss juntamente com um tratado intitulado *Theoria parallelarum*, na qual afirmava convicto que chegara a uma conclusão relativa à demonstração do quinto postulado, o que evidentemente foi contestado por Gauss que lhe apontou os erros cometidos na demonstração.

Um outro personagem desta história é o matemático russo Nikolai Ivanovich Lobatchevsky (1792 – 1856) que também dedicou parte de sua vida tentando demonstrar o quinto postulado, infelizmente sem nenhum sucesso. Mas suas pesquisas levaram-no a observar a sua independência, e que a partir de observações similares às feitas por Janos Bolyai, a negação do quinto postulado, chegou a resultados surpreendentes que seriam a construção das bases da geometria hiperbólica. Tanto Janos

Bolyai como Nikolai I. Lobatchevsky morreram sem alcançar o reconhecimento pelos seus trabalhos efetuados em tempo e espaço diferentes, mas que mesmo assim conseguiram resultados similares e importantes.

As publicações de Janos Bolyai e Nikolai I. Lobatchevsky não convenceram o mundo matemático da existência de geometria não-euclidiana, os mesmos desenvolveram uma série de teoremas a partir da negação do quinto postulado sem encontrar nenhuma contradição.

Um outro ícone da história da matemática é o alemão George Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866) que contribuiu de forma grandiosa para o desenvolvimento da geometria não-euclidiana.



Figura 1.4: George F. B. Riemann

Ao concorrer para a posição de professor assistente da universidade de Gottinger, o professor Riemann precisava ministrar uma palestra que serviria como teste para poder galgar tal posição. Para esta palestra Riemann havia preparado três temas dos quais um deveria ser escolhido pelo departamento. Entre os membros do departamento estava Gauss. Riemann apresentou três temas, dois dos quais, estavam relacionados a problemas que eram comuns aos matemáticos da época e um outro, que era o que estava menos preparado, versava sobre os fundamentos da geometria. Como nessa época a geometria e o seu quinto postulado, exerciam um fascínio e por ser difícil, Gauss escolheu esse tema.

Riemann ministrou a palestra “Sobre as hipóteses subjacentes aos fundamentos da Geometria” que foi considerada brilhante e muito elogiada por Gauss. Atitude essa extremamente rara.

Riemann apresentou uma abordagem sobre geometria não-euclidiana bem diferente da que foi apresentada por Bolyai e Lubachevski. Logicamente que isto impressionou Gauss. Riemann chamava atenção para algo que seria uma falha ou algo não considerado pelos pioneiros Euclides, Saccheri e tantos outros, que seria a sempre admissão de que uma reta

tem que ser infinita e ilimitada. É claro que essa observação é válida para os espaços euclidianos, mas em relação outros espaços não-euclidianos não fazem o menor sentido.

Riemann inovou sobremaneira nessa palestra, inclusive conceituando Variedade Multidimensional (objetos geométricos com múltiplas dimensões).

As investigações de Riemann levaram-no a descobrir a Geometria Elíptica, que tem com caso particular a Geometria Esférica, oposta à Geometria Hiperbólica de Bolyai e Lobachevski. Ao construir a geometria Elíptica, Riemann concebe a existência de um espaço geométrico finito. Isto é, a geometria elíptica é uma geometria não-euclidiana de espaços de curvatura constante positiva e volume finito, utilizando, por exemplo, o modelo de uma esfera, na qual um ponto se desloca sobre ela na mesma direção certamente voltará à posição inicial. Em outras palavras, a reta é finita.

O ponto de partida desta investigação é o mesmo da geometria hiperbólica, isto é, a negação do quinto postulado de Euclides. Bolyai e Lobachevski partiram do ponto de vista que por um ponto fora de uma reta dada passam pelo menos duas retas paralelas a reta.

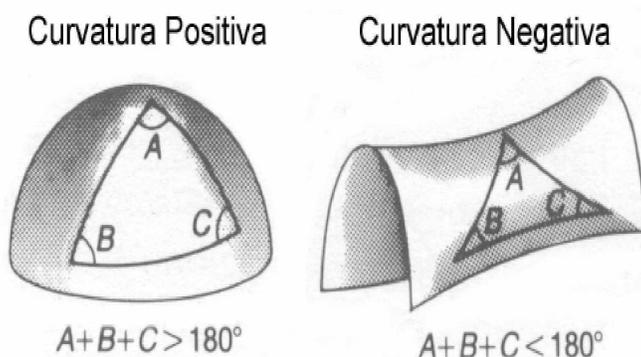
Segundo Riemann, usa-se a hipótese de que por um ponto fora de uma reta dada não passa outra reta paralela, ou ainda, para Bolyai e Lobachevski o plano é um conjunto de hipérbolas, ou uma hiperbolóide, e para Riemann, compreende-se que na geometria esférica, o plano como uma esfera, e uma reta nessa geometria, em vez de linhas retas da geometria euclidiana, são geodésicas. Isto é, são circunferências máximas na esfera. Pense num meridiano, os meridianos se encontram em dois pontos que são os pólos norte e sul ou podemos dizer ainda que são arcos de grandes círculos, logo, a uma reta dada não existe outra reta paralela a ela que seja máxima.

A geometria esférica é uma geometria de curvatura positiva<sup>1</sup>, e, nessa geometria, a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que dois retos, enquanto que a geometria hiperbólica tem a curvatura negativa, e a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que  $180^\circ$ .

Bolyai, Lobachevsky e Riemann criaram universos novos e tinham o universo euclidiano como um caso particular. Mas era necessário organizar esses conhecimentos. Daí surgiu

---

<sup>1</sup>ver [19] e [8]



a necessidade de ser criado um modelo de geometria não-euclidiana. Isto possibilitaria a interpretação de outra geometria através da própria geometria euclidiana.

O primeiro matemático a exibir um modelo desse tipo foi Eugenio Beltrami (1835 – 1900). Outros que igualmente contribuíram, através de modelos euclidianos para as novas geometrias, foram Felix Klein (1849 – 1925) e Jules Henry Poincaré (1854 – 1912) que desenvolveram métodos axiomáticos e a partir desses métodos as geometrias ganharam tanto visibilidade como também credibilidade. Através do método axiomático a geometria se torna consistente e não havia contradições. As provas se apoiavam na Geometria Euclidiana e mostrava claramente a necessidade de provar a própria consistência da Geometria Euclidiana. Com o estudo desenvolvido sobre os postulados de Euclides os matemáticos chegaram à conclusão que esses eram insuficientes para provar os teoremas já conhecidos, e era óbvio que também não poderiam ser usados para os que aparecessem futuramente. Sobre essa análise os estudiosos chegaram à conclusão que os axiomas de Euclides eram incompletos, tinham muitas falhas, pois Euclides ao demonstrar algum teorema não se só prendia à teoria, usava fatos alheios aos postulados.

Já era consenso no mundo matemático, que se teria de organizar a geometria euclidiana. Nesse cenário, vários matemáticos embarcaram nessa aventura. Dentre os matemáticos que buscavam a organização da geometria euclidiana, destaca-se o ilustre matemático David Hilbert (1862 – 1943) que publicou em 1889 a obra “Os fundamentos da geometria” em que apresenta uma construção axiomática (lógico dedutivo) para o entendimento e desenvolvimento da geometria euclidiana (EVES, 2004).



Figura 1.5: Felix Christian Klein

Outra importante contribuição foi de Felix Christian Klein. Ele nasceu em Düsseldorf, Alemanha, em 25 de abril de 1849. Em 1865 ingressou na universidade de Bonn para estudar Matemática e Física. Obteve o grau de Doutor em 1868, sob a supervisão de Julius Plücker e Rudolf Lipschitz ao defender a tese na área de geometria. Assumiu como professor em Göttingen em 1871 e depois, no ano seguinte 1872, após ser indicado professor titular da Faculdade de Filosofia e membro do conselho da universidade de Erlanger, com apenas vinte e três anos de idade. Como era de costume ministrou palestra aos colegas de faculdade e apresentou um trabalho escrito mostrando o seu interesse de pesquisa, obtendo assim lugar em Erlangen onde estabeleceu um programa chamado *Erlangen Programm* (Programa de Erlangen). Após o período que aceitou um lugar em Leipzig, voltou definitivamente para Göttingen, onde desempenhou papel de destaque ao tornar esta universidade no maior centro da atividade de investigação em matemática. Klein pelos muitos feitos recebeu a Medalha de Morgan (1912) e a Medalha Copley da Royal Society (1913). Felix Christian Klein faleceu em 22 de junho de 1925 em Göttingen (*EVES*, 2004).

Contudo, destaca-se que o professor Klein contribuiu em vários ramos da Matemática como teoria das funções e física matemática, era um excelente palestrante e sua organização deixava claro seu interesse pelas questões pedagógicas; mas o seu principal trabalho foi voltado à Geometria.

Em 1871, Klein construiu as bases nas quais as geometria euclidiana e não-euclidiana podiam ser vistas como caso particular de uma superfície projetiva tornando equivalente a consistências das mesmas. No ano seguinte, apresentou o seu *Erlanger Programm* que seria a plataforma do desenvolvimento matemático no século *XX* (*EVES*, 2004).

Klein apresenta a Geometria como o estudo das propriedades de um espaço invariante sob um determinado grupo de transformações, o que logicamente influenciou o desenvolvimento da matemática. Com isso, Klein criou modelos euclidianos para as geometrias

não-euclidianas, facilitando o difícil acesso às Geometrias Hiperbólicas e Elípticas. Pode-se dizer ainda que, com o estudo desenvolvido por Klein a geometria euclidiana é o estudo do grupo das transformações euclidianas, a geometria hiperbólica é o estudo do grupo das transformações hiperbólicas.

O *Erlanger Programm* como ficou conhecido, é tido como a principal contribuição de Klein. Este programa, desenvolvido a partir do estudo em teoria de grupo feito por Felix Klein e Sophus Lie (1842 – 1899), define a geometria de uma forma que codifica todas as geometrias, sejam elas, euclidiana ou não (BOYER, 2001).

Segundo Klein, a aplicação da teoria de grupos na geometria é viabilizada através do conceito de transformação de um conjunto sobre ele mesmo. Isto é, uma correspondência  $1 - 1$  do conjunto nele mesmo.

Observações e notações:

1. Produto de transformações:

Dadas às transformações  $T^1 : S \rightarrow S$  e  $T^2 : S \rightarrow S$ ,  $T^1 T^2 : S \rightarrow S$  é entendido como sendo efetuado primeiro  $T^1$  e depois  $T^2$ .

2. Inversa da transformação  $T$ .

Dada  $T : S \rightarrow S$  tal que  $T(a) = b$  então  $T^{-1}(T(a)) = T^{-1}(b) \Rightarrow a = T^{-1}(b)$ .

3. Transformação idêntica

Dada  $T : S \rightarrow S$  tal que  $T(a) = a$

O Conjunto  $\Gamma$  de transformações de um conjunto  $S$  sobre si mesmo constitui um grupo.

Com isso, Klein dá a sua famosa definição de geometria:

*“Uma geometria é o estudo das propriedades de um conjunto  $S$  que permanecem invariantes quando se submetem os elementos de  $S$  às transformações de algum grupo de transformações  $\Gamma$ ”*. Notação:  $G(S, \Gamma)$

Pode então dizer, segundo Boyer (2001) que:

1. A Geometria Métrica Euclidiana Plana resulta do conjunto  $\Gamma$  de todas as transformações de  $S$  em  $S$ , que abrangem rotações, translações e reflexões em torno de retas, isto é, as isometrias. As rotações, translações e reflexões em torno de retas caracterizam subgrupos, pois quando se multiplicam duas dessas transformações pela inversa de uma delas o resultado sempre está em  $\Gamma$ . Note que, como em  $S$  estão bem definidos e permanecem invariantes em  $\Gamma$  propriedades tais como comprimento, área, congruência, paralelismo, perpendicularismo, semelhança de figuras, colinearidade de pontos e concorrência de retas fazem parte da Geometria Métrica Euclidiana Plana.
2. A Geometria de Semelhança Plana resulta da ampliação de  $\Gamma$  de acrescentar além das rotações, translações e reflexões em torno de retas as transformações homotéticas. Vale observar que nesse grupo propriedades como comprimento, área e congruência não permanecem invariantes, mas paralelismo de retas colinearidade de pontos e concorrência de retas são propriedades que permanecem invariantes, sendo, portanto, objetos de estudo dessa geometria.
3. A Geometria Projetiva é o estudo das propriedades dos pontos de um plano projetivo<sup>2</sup> que permanecem invariantes, quando são submetidos ao grupo de transformações chamadas projetivas. Das propriedades mencionadas nos itens anteriores apenas colinearidade de pontos e concorrência de retas permanecem invariantes.
4. As Geometrias Métrica Não-Euclidianas é o estudo das propriedades dos pontos de um plano não-euclidiano que permanecem invariantes para um grupo de transformações composto pelas isometrias.

Observa-se que para se construir uma geometria, deve-se escolher o elemento fundamental. Como por exemplo, elemento fundamental da geometria pontual é o ponto. Depois se escolhe a variedade ou espaço desses elementos (*plano de pontos, espaço usual de pontos superfície esférica de pontos, plano de retas, feixe de circunferências, etc.*), e finalmente o grupo de transformações ao qual devem se sujeitar os elementos fundamentais.

---

<sup>2</sup>ver [4]

Note, ainda, que certas geometrias contêm outras geometrias, isto é, o grupo de transformações da geometria métrica euclidiana plana é um subgrupo do grupo de transformações da geometria de semelhança plana, desta forma todo teorema que é válido para a última é também válido para a primeira. Constituindo assim uma espécie de seqüência de geometrias encaixantes.

# Conceitos Básicos

Neste capítulo apresentamos conceitos básicos que serão amplamente usados nos capítulos 3 e 4. Maiores detalhes da teoria desenvolvida estão nas referências [5], [7], [18] e [12].

## 2.1 Conceito de conjuntos

Nesta seção estudaremos conceitos, como conjuntos e aplicações que são básicos para o conteúdo deste trabalho. Temos como objetivo desenvolver conceitos relativos à Álgebra e assim combinar ferramentas que serão úteis para o entendimento do nosso trabalho.

Qualquer coleção de objetos, pessoas, etc, são termos que formam um conjunto e são chamados de elementos do **conjunto**. Para simbolizar um conjunto usaremos letras maiúsculas com seus elementos escritos entre chaves e separados por vírgulas.

Exemplo:

O conjunto  $X$  cujos os elementos são  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  e  $x_n$ , é representado por  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

### Relação de pertinência e inclusão

Para relacionar elemento e conjunto usaremos a simbologia usual  $\in$ , lê-se pertence, ou a sua negativa  $\notin$ , lê-se não-pertence. Isto é; se quisermos expressar que um determinado termo  $x$  é elemento do conjunto  $X$  escrevemos  $x \in X$  caso contrário  $x \notin X$ . Da mesma forma se quisermos relacionar um conjunto com outro conjunto, também usaremos a simbologia usual

$\subset$ , que se lê está contido ou sua negativa  $\not\subset$ , não está contido. Ou seja, dado dois conjuntos  $X$  e  $Y$  se os elementos de  $Y$  estiverem entre os elementos de  $X$ , dizemos que  $Y$  é subconjunto de  $X$ , em símbolo  $Y \subset X$ , caso contrário  $Y \not\subset X$ .

**Observação:** As expressões  $Y \subset X$  e  $X \supset Y$  são equivalentes.

**Propriedade 2.1.1.** *A relação de inclusão tem as seguintes propriedades:*

1.  $X \subset X, \forall X$ ;
2.  $X = Y$ , então  $X \subset Y$  e  $Y \subset X, \forall X$  e  $\forall Y$ ;
3. Se  $X \subset Y$  e  $Y \subset Z$ , então  $X \subset Z, \forall X, \forall Y$  e  $\forall Z$ .

**Observações:**

1. O conjunto, que contém todos os elementos, bem como todos os conjuntos do contexto de uma teoria em estudo, é denominado **conjunto universo**. Em nosso estudo, a partir do Capítulo 3, o universo é o conjunto de todos os pontos, e é denotado por  $E$ .
2. O conjunto que não possui elemento algum é denominado **conjunto vazio**, e é denotado por  $\emptyset$ .

Exemplos:

- (a)  $\{x \in \mathbb{N}; 1 < x < 2\} = \emptyset$ .
- (b)  $\{x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$ .

**Afirmção 2.1.1.** *O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto. ( $\emptyset \subset X, \forall X$ ).*

*Demonstração.* Suponhamos por absurdo, que o conjunto vazio não seja subconjunto de um conjunto  $X$  qualquer ( $\emptyset \subset X$ ). Isto indica que existe  $x \in \emptyset$  tal que  $x \notin X$  o que é uma contradição, já que o conjunto vazio por definição não possui elemento. Portanto o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, isto é,  $\emptyset \subset X, \forall X$ . □

**Definição 2.1.1.** Dados dois conjuntos  $X$  e  $Y$  a **interseção** entre  $X$  e  $Y$  é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a  $X$  e pertencem a  $Y$ .

Simbolicamente escrevemos:  $X \cap Y := \{x | x \in X \text{ e } x \in Y\}$ .

**Propriedade 2.1.2.** Propriedades imediatas da interseção. Para quaisquer conjuntos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  temos:

1.  $X \cap \emptyset = \emptyset$  e  $X \cap X = X$ ;
2.  $X \cap Y = Y \cap X$ ;
3.  $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$ .

**Definição 2.1.2.** Dados dois conjuntos  $X$  e  $Y$  a **união** entre  $X$  e  $Y$  é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a  $X$  ou pertencem a  $Y$ .

Simbolicamente escrevemos:  $X \cup Y := \{x | x \in X \text{ ou } x \in Y\}$ .

**Propriedade 2.1.3.** Propriedades imediatas da união. Para quaisquer conjuntos  $X, Y$  e  $Z$  temos:

1.  $X \cup \emptyset = \emptyset$  e  $X \cup X = X$ ;
2.  $X \cup Y = Y \cup X$ ;
3.  $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$ .

**Teorema 2.1.1.** Dados os conjuntos  $X, Y, Z$  e  $W$  com  $X \subset Z$  e  $Y \subset W$ , então  $X \cup Y \subset Z \cup W$ .

*Demonstração.* Supondo  $X \cup Y = \emptyset$  nada temos a mostrar. Então suponhamos que  $X \cup Y \neq \emptyset$ . Seja  $x \in X \cup Y$  implica que  $x \in X$  ou  $x \in Y$ , como por hipótese  $X \subset Z$  e  $Y \subset W$  temos que  $x \in Z$  ou  $x \in W$ . Logo  $x \in Z \cup W$ . Portanto  $X \cup Y \subset Z \cup W$ .  $\square$

**Teorema 2.1.2.** Dados os conjuntos  $X, Y$  e  $Z$  quaisquer, temos:

1.  $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ ;

$$2. X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z).$$

**Definição 2.1.3.** Dados dois conjuntos  $X$  e  $Y$ , o **conjunto diferença**, denotado por  $X \setminus Y$ , é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a  $X$  e não pertencem a  $Y$ .

Simbolicamente escrevemos:  $X \setminus Y := \{x | x \in X \text{ e } x \notin Y\}$ .

**Definição 2.1.4.** Dados dois conjuntos  $X$  e  $Y$ , quando  $Y \subset X$ , a diferença  $X \setminus Y$  denotada por  $C_X^Y$ , é chamada de **complementar de  $Y$  em relação a  $X$** .

Simbolicamente escrevemos:  $C_X^Y = X \setminus Y := \{x | x \in X \text{ e } x \notin Y\}$ .

**Teorema 2.1.3.** Sejam  $Y$  e  $Z$  subconjuntos de  $X$ , então:

$$1. C_X^{Y \cup Z} = C_X^Y \cap C_X^Z;$$

$$2. C_X^{Y \cap Z} = C_X^Y \cup C_X^Z.$$

**Observações:**

1. Para todo conjunto finito  $X$ ,  $\#X$  indica o número de elementos do conjunto  $X$ , por exemplo:

- $\#\emptyset = 0$ ;
- $\#\{a\} = 1$ ;
- $\#\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = n$ .

2. Sendo  $X$  e  $Y$  conjuntos infinitos, a notação  $\#$  indica a cardinalidade do conjunto, isto é,  $\#X = \#Y$  indica que existe uma bijeção entre  $X$  e  $Y$ .

**Proposição 2.1.1.** Se  $X$  e  $Y$  são dois finitos conjuntos disjuntos, então  $\#(X \cup Y) = \#X + \#Y$ .

**Proposição 2.1.2.** Para quaisquer conjuntos finitos  $X$  e  $Y$ , temos  $\#(X \cup Y) = \#X + \#Y - \#(X \cap Y)$ .

**Proposição 2.1.3.** Para quaisquer conjuntos finitos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  temos

$$\#(X \cup Y \cup Z) = \#X + \#Y + \#Z - \#(X \cap Y) - \#(X \cap Z) - \#(Y \cap Z) + \#(X \cap Y \cap Z).$$

**Definição 2.1.5.** Dado um conjunto  $X$  qualquer, o conjunto, denotado por  $P(X)$ , é formado por todos os subconjuntos de  $X$ . Podemos dizer que  $Y \in P(X)$  é equivalente a dizer que  $Y \subset X$ .  $P(X)$  é denominado o **conjunto das partes** de  $X$ .

**Teorema 2.1.4.** Se  $X$  é um conjunto finito com  $n$  elementos, então  $P(X)$  contém  $2^n$  elementos.

*Demonstração.* [18] □

Antes de se iniciar a definição de produto cartesiano convém falar sobre par ordenado, que é dado da seguinte forma: a cada elemento  $x$  de um conjunto  $X$  e a cada elemento  $y$  de um conjunto  $Y$  associamos um terceiro elemento  $(x, y)$  denominado de par ordenado. A igualdade de pares ordenados é dada da seguinte forma:  $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$  e  $b = d$ .

**Definição 2.1.6.** O **produto cartesiano** dos conjuntos  $X$  e  $Y$  é o conjunto formado por todos os pares ordenados  $(x, y)$  tais que  $x \in X$  e  $y \in Y$ , e é denotado por  $X \times Y$ .

*Simbolicamente:*  $X \times Y = \{(x, y); x \in X \text{ e } y \in Y\}$ .

**Definição 2.1.7.** Sejam  $X$  e  $Y$  dois conjuntos e seja  $X \times Y$  o produto cartesiano de  $X$  por  $Y$ . Uma **relação binária** é todo subconjunto  $R$  do produto cartesiano  $X \times Y$ .

## 2.2 Aplicação

**Definição 2.2.1.** Uma **função** ou **aplicação**  $f$  de  $X$  em  $Y$  é uma relação binária entre os conjuntos  $X$  e  $Y$  tal que:

1. todo elemento  $x \in X$  tem um correspondente  $y \in Y$ , definido pela relação binária, ou seja, tem um par  $(x, y)$  pertencente à relação binária, para algum  $y$ ;
2. a cada  $x \in X$ , existe um único elemento correspondente  $y \in Y$ , definido pela relação binária, ou seja, existe um único par  $(x, y)$  pertencente à relação binária.

O único  $y$  definido pela relação binária é denotado por  $f(x)$ , ou seja,  $y = f(x)$ .

Simbolicamente:

$$\begin{array}{l} f: X \longrightarrow Y \\ x \longmapsto f(x) \end{array} .$$

**Definição 2.2.2.** Seja  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação, os conjuntos  $X$  e  $Y$  são denominados **domínio e contra-domínio** de  $f$ , respectivamente, e o subconjunto

$$\{y \in Y; y = f(x) \text{ para algum } x \in X\},$$

denotado por  $I_m(f) = f(X)$ , é denominado **imagem** da função  $f$ .

**Definição 2.2.3.** Seja  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação.

1.  $f$  é dita **injetiva** se para quaisquer  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 \neq x_2$  implicar  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , o que é equivalente a dizer que, para todo  $x_1, x_2 \in X$ ,  $f(x_1) = f(x_2)$  implicar  $x_1 = x_2$ ;
2.  $f$  é dita **sobrejetiva** se, e somente se,  $I_m(f) = Y$ , ou seja, dado  $y \in Y$  existe algum elemento  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ ;
3.  $f$  é dita uma **bijeção**, se é injetiva e sobrejetiva.

**Definição 2.2.4.** Sejam  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow Z$  aplicações. A **composta** de  $g$  e  $f$ , denotada por  $fg$ , é a aplicação  $h: X \rightarrow Z$  tal que, para todo  $x \in X$ ,  $h(x) = (fg)(x) = g(f(x))$ .

**Observação:** Neste trabalho usaremos a notação  $fg$  para indicar a composta de  $g$  e  $f$ , como definida acima. Em geral, textos de cálculo diferencial denotam esta composta por  $g \circ f$ , mas a notação adotada aqui será conveniente para nosso estudo do capítulo 3.

**Teorema 2.2.1.** Se  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  e  $h: X \rightarrow W$  são aplicações, então  $(fg)h = f(gh)$ .

**Teorema 2.2.2.** Se  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  são aplicações injetivas, então  $fg: X \rightarrow Z$  é injetiva.

**Teorema 2.2.3.** *Se  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  são aplicações sobrejetivas, então  $fg : X \rightarrow Z$  é sobrejetiva.*

**Definição 2.2.5.** *Seja  $X$  um conjunto não vazio. A **aplicação identidade** de  $X$  em  $X$  é a aplicação  $I : X \rightarrow X$ , definida por  $I(x) = x$ ,  $\forall x \in X$ .*

**Definição 2.2.6.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação bijetiva. A **aplicação inversa** de  $f$ , indicada por  $f^{-1}$ , é a aplicação bijetiva de  $Y$  em  $X$  definida por  $f^{-1}(y) = x$  se, e somente se,  $f(x) = y$ .*

**Teorema 2.2.4.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma **bijeção** e  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  sua inversa, então  $ff^{-1} = id$  e  $f^{-1}f = id$ .*

Isto completa a apresentação de noções elementares necessárias sobre conjuntos e aplicações.

Na próxima seção vamos falar um pouco da álgebra de grupos que é de importância fundamental para o desenvolvimento do nosso trabalho, o qual terá como base a teoria de grupos de permutações. Desta forma, faremos uma revisão desta teoria. Antes, vamos definir a operação binária.

## 2.3 Grupos

**Definição 2.3.1.** *Uma **operação binária** sobre um conjunto não vazio  $G$  é uma aplicação*

$$* : G \times G \rightarrow G.$$

**Definição 2.3.2.** *Um **grupo**  $G$  é um conjunto não-vazio  $G$  munido de uma operação binária, denotada por  $*$ , tal que:*

1. *Para cada par de elementos  $f, g \in G$  temos  $f * g \in G$ ;*
2. *Para quaisquer que sejam  $f, g$  e  $h$  temos  $(f * g) * h = f * (g * h)$ ;*
3. *Existe  $e \in G$ , denominado elemento neutro, tal que para todo  $f \in G$ , temos  $f * e = e * f = f$ ;*

4. Para quaisquer  $f \in G$  existe um elemento  $g \in G$ , denominado inverso de  $f$ , tal que  $f * g = g * f = e$ .

**Definição 2.3.3.** Se  $G$  é um grupo tal que  $f * g = g * f$  para todo  $f, g \in G$ , dizemos que  $G$  é um grupo **abeliano** ou **comutativo**.

**Lema 2.3.1.** Se  $G$  é um grupo, então:

1. o elemento neutro de  $G$  é único;
2. todo  $f \in G$  tem um único inverso em  $G$ ;
3. para todo  $f \in G$  temos  $(f^{-1})^{-1} = f$ ;
4. para todo  $f, g \in G$  temos  $(f * g)^{-1} = g^{-1} * f^{-1}$ .

*Demonstração.* [10], [5], [18] e [7] □

**Lema 2.3.2.** Sejam  $f$  e  $g$  em um grupo  $G$ . Então as equações  $f * x = g$  e  $y * f = g$  tem soluções únicas para  $x = f^{-1} * g$  e  $y = g * f^{-1}$ , para todo  $f, g \in G$ .

*Demonstração.* [10], [5], [18] e [7] □

**Lema 2.3.3.** Sejam  $f, g$  e  $h$  em um grupo  $G$ . Então são válidas as leis do cancelamento:

$$f * g = f * h \Rightarrow g = h;$$

$$g * f = h * f \Rightarrow g = h.$$

*Demonstração.* [10], [5], [18] e [7] □

**Definição 2.3.4.** Sejam  $G$  um grupo, munido da operação  $*$ , e  $H$  um subconjunto não vazio de  $G$ .  $H$  é um **subgrupo** de  $G$  se, com a operação  $*$ , induzida de  $G$ , valem:

1.  $f, g \in H$ , implica  $f * g \in H$ ;
2.  $H$  é um grupo.

**Observação:** Denotaremos  $f * g$ , simplesmente, por  $fg$ .

**Teorema 2.3.1.** *Sejam  $G$  um grupo e  $H$  um subconjunto não vazio de  $G$ . Então  $H$  é um subgrupo de  $G$  se, e somente se,*

1. *Se  $f, g \in H$ , então  $fg \in H$ ;*
2. *Para todo  $f \in H$  tivermos  $f^{-1} \in H$ .*

**Observação:** Se  $H$  é um subgrupo de  $G$ , denotamos por  $H \leq G$ .

**Teorema 2.3.2.** *Sejam  $G$  um grupo e  $H$  um subconjunto não vazio de  $G$ .  $H$  é um subgrupo de  $G$  se, e somente se, para todo  $f, g \in H$ , então  $fg^{-1} \in H$ .*

*Demonstração.* [10], [5], [18] e [7] □

**Definição 2.3.5.** *Seja  $G$  um grupo e  $X$  um subconjunto não vazio de  $G$ . O **subgrupo** de  $G$  **gerado** por  $X$ , denotado por  $\langle X \rangle$ , é o subgrupo de  $X$  que satisfaz:*

1.  $\langle X \rangle \leq G$ ;
2.  $X \subset \langle X \rangle$ ;
3. *Se  $H \leq G$  tal que  $X \subseteq H$ , então  $\langle X \rangle \subseteq H$ .*

**Definição 2.3.6.** *Seja  $X$  um conjunto não-vazio. Uma **permutação** é uma aplicação bijetiva  $\phi : X \rightarrow X$ .*

**Observação:** O conjunto de todas as permutações de  $X$  é denotado por  $S_X$ . Caso  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ , escrevemos  $S_n$  para representar o conjunto das permutações de  $X$ .

**Teorema 2.3.3.** *Se  $X$  é um conjunto não-vazio, então:*

1. *o conjunto  $S_X$ , com a operação de composição, é um grupo;*
2. *o grupo  $S_X$  é abeliano se, e somente se,  $X$  possui 1 ou 2 elementos;*
3. *se  $X$  é um conjunto finito e  $\#X = n$ , então  $S_n = n!$ ;*

4. se  $\#X > 2$ , então  $S_X$  não é abeliano.

*Demonstração.* [10], [5], [18] e [7] □

**Definição 2.3.7.** Para qualquer conjunto não-vazio,  $X$ , o grupo  $S_X$  é denominado **grupo simétrico** em  $X$ .  $S_n$  é chamado de **grupo simétrico de grau  $n$** .

**Definição 2.3.8.** Seja  $Y$  um subconjunto não-vazio de  $X$ , dizemos que  $Y$  é **globalmente invariante ou globalmente fixo** pela permutação  $\phi$ , de  $X$ , se  $\phi(Y) = Y$ . Se além disso,  $\phi(y) = y$  para todo  $y \in Y$  dizemos que  $Y$  é **invariante ponto a ponto**.

**Notação:** Sejam  $Y$  um subconjunto não-vazio de  $X$  e  $G$  um subgrupo de  $S_X$ . O conjunto de todas as permutações em que  $G$  leva  $Y$  globalmente invariante é denotado por  $[G, Y; gi]$ . Analogamente,  $[G, Y; pi]$  denota o conjunto de permutações em que  $G$  deixa  $Y$  invariante ponto a ponto.

**Teorema 2.3.4.** Sejam  $G$  um grupo e  $Y$  um subconjunto não-vazio de  $G$ . O conjunto  $[G, Y; gi]$  de todas as permutações em que  $G$  leva  $Y$  globalmente invariante e o conjunto  $[G, Y; pi]$  de todas as permutações em que  $G$  leva  $Y$  invariante ponto a ponto, são subgrupos de  $G$ .

*Demonstração.* [10] □

**Definição 2.3.9.** Sejam  $G$  um grupo e  $f, g \in G$ . O elemento  $g^{-1}fg$  de  $G$  é chamado **conjugado** de  $f$  por  $g$ , e o conjunto de todas as conjugações de  $f$ , dado por  $\{g^{-1}fg; g \in G\}$  é chamado de **classe de conjugação** de  $f$  em  $G$  ou **conjugado** de  $f$  em  $G$ .

**Proposição 2.3.1.** Uma permutação,  $f$ , envia  $x$  para  $y$  se, e somente se,  $g^{-1}fg$  leva  $g(x)$  para  $g(y)$ . Se  $Y$  é o conjunto dos pontos fixados a esquerda por  $f$ , então  $g(Y)$  é o conjunto dos pontos fixados a esquerda por  $g^{-1}fg$ .

*Demonstração.* [10] □

**Proposição 2.3.2.** Sejam  $G$  um grupo e  $f, g$  e  $h$  elementos em  $G$ . Valem:

1. O conjugado de  $fg$  por  $h$  é o produto do conjugado de  $f$  por  $h$  e do conjugado de  $g$  por  $h$ , ou seja,  $h^{-1}(fg)h = (h^{-1}fh)(h^{-1}gh)$ ;
2. O conjugado de  $f^{-1}$  por  $h$  é o inverso do conjugado de  $f$  por  $h$ , ou seja,  $h^{-1}f^{-1}h = (h^{-1}fh)^{-1}$ ;
3. O conjugado de  $f$  por  $h$  é  $f$  se, e somente se,  $f$  e  $h$  comutam, ou seja,  $h^{-1}fh = f$  se, e somente se,  $fh = hf$ ;
4. O conjugado por  $h$  do conjugado de  $f$  por  $g$ , é o conjugado de  $f$  por  $gh$ , ou seja,  $h^{-1}(g^{-1}fg)h = (gh)^{-1}f(gh)$ ;
5. Se  $h$  é o conjugado de  $f$  por  $g$ , então  $f$  é o conjugado de  $h$  por  $g^{-1}$ , ou seja, se  $h = g^{-1}fg$  então  $f = ghg^{-1}$ .

*Demonstração.* [10], [5], [18] e [7] □

**Definição 2.3.10.** *Sejam  $G$  um grupo e  $H_1$  e  $H_2$  subgrupos de  $G$ . Dizemos que  $H_1$  e  $H_2$  são **subgrupos conjugados**, se e somente se, existe algum elemento  $g \in G$  tal que  $g^{-1}H_1g = H_2$ , ou seja, se, e somente se,  $\{g^{-1}hg; h \in H_1\} = H_2$  para algum  $g \in G$ .*

**Definição 2.3.11.** *Sejam  $G_1$  e  $G_2$  grupos. Um **homomorfismo** de  $G_1$  em  $G_2$  é a aplicação  $\phi : G_1 \rightarrow G_2$  que preserva a operação, ou seja, para todo  $g_1, g_2 \in G_1$ ,  $\phi(g_1g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$ .*

**Definição 2.3.12.** *Seja  $\phi : G_1 \rightarrow G_2$  um homomorfismo de grupos. O kernel (ou núcleo) de  $\phi$  é o subconjunto  $\{g \in G_1; \phi(g) = e_{G_2}\}$  de  $G_1$ , denotado por  $\ker\phi$ , e a imagem de  $\phi$  é o subconjunto  $\{\phi(g); g \in G_1\}$  de  $G_2$ , denotado por  $I_m(\phi)$ , onde  $e_{G_2}$  denota o elemento neutro de  $G_2$ .*

**Definição 2.3.13.** *Seja  $G$  um grupo com elemento neutro  $e$ , e seja  $g \in G$ . A ordem de  $g$  é o menor inteiro positivo  $n$  tal que  $g^n = g \dots g = e$ , se existe pelo menos um tal inteiro. Se não existe tal inteiro, então a ordem de  $g$  é infinita.*

**Teorema 2.3.5.** *Sejam  $G_1$  e  $G_2$  grupos com elementos neutros  $e_{G_1}$  e  $e_{G_2}$  respectivamente. Seja  $\phi : G_1 \rightarrow G_2$  um homomorfismo de  $G_1$  em  $G_2$ . Valem as seguintes propriedades:*

1.  $\phi$  preserva a identidade, ou seja,  $\phi(e_{G_1}) = e_{G_2}$ ;
2.  $\phi$  preserva a inversa, ou seja,  $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$ , para todo  $g \in G_1$ ;
3.  $\phi$  preserva conjugação, ou seja, se  $f, g$  e  $h$  estão todos em  $G_1$  e  $f$  é conjugada de  $g$  por  $h$ , então  $\phi(f)$  é conjugada de  $\phi(g)$  por  $\phi(h)$  em  $G_2$ ;
4.  $\phi$  preserva subgrupos, ou seja, se  $F$  é um subgrupo de  $G_1$ , então  $\phi(F) = \{\phi(f) ; f \in F\}$  é um subgrupo de  $G_2$ ;
5. Se  $g \in G_1$  e a ordem de  $g$  é finita, então a ordem de  $\phi(g)$  divide a ordem de  $g$ . Se a ordem de  $g$  é infinita, então, dependendo de  $\phi$ , a ordem de  $\phi(g)$  pode ser finita ou infinita.

*Demonstração.* [10], [5], [18] e [7] □

**Definição 2.3.14.** Um homomorfismo de  $\phi : G_1 \rightarrow G_2$  é chamado um **isomorfismo** se, e somente se,  $\phi$  é uma aplicação bijetiva. Neste caso, dizemos que  $G_1$  e  $G_2$  são grupos isomorfos. Simbolicamente, escrevemos  $G_1 \cong G_2$ .

**Definição 2.3.15.** Um isomorfismo de  $\phi : G_1 \rightarrow G_1$  é chamado um **automorfismo**.

**Definição 2.3.16.** Sejam  $G$  e  $H$  grupos.

- Se  $\phi : G \rightarrow H$  é um homomorfismo, dizemos que  $\phi$  é uma **representação** do grupo  $G$ .
- Se  $\phi : G \rightarrow H$  é um isomorfismo, dizemos que  $\phi$  é uma **representação fiel** do grupo  $G$ .

Se  $H = S_X$  para algum conjunto não vazio  $X$ , dizemos que  $\phi$  é uma **representação de permutação** de  $G$ , e  $G$  pode ser visto como operando em  $X$ .

---

# Isometrias e Similaridades

---

Neste capítulo apresentamos notações e conceitos básicos, definimos Similaridades e Isometrias, e desenvolvemos um estudo de propriedades e resultados dessas transformações necessários para obter a classificação delas no espaço, que é nosso principal objetivo. Maiores detalhes da teoria desenvolvida estão nas referências [3], [8], [13], [15], [10] e [19].

## 3.1 Noções Básicas e Notações

Antes de se detalhar isometrias e similaridades, vamos estabelecer notações, do espaço euclidiano tridimensional, importantes para o desenvolvimento do trabalho, e relacionar distintos subconjuntos chamados retas e planos.

Notações:

- Plano: simbolizado pelas letras do conjunto  $\{A, B, C, D\}$ ;
- Reta: simbolizada pelas letras do conjunto  $\{K, L, M, N\}$ ;
- Ponto: é simbolizado pelas letras do conjunto  $\{W, X, Y, Z\}$ ;

Observação: As notações que estabelecemos são convenientes para o estudo que desenvolvemos neste capítulo. As letras minúsculas serão reservadas para denotar transformações, por exemplo, uma reflexão em relação ao plano  $A$ , que será definida mais à frente, será denotada por  $a$ . Dessa forma, quando citarmos a reflexão  $a$ , já estará subentendido reflexão em relação ao plano  $A$ .

**Definição 3.1.1.** *Dois, três, quatro ou mais pontos no espaço euclidiano são chamados **pontos independentes** se eles são distintos, não-colineares ou não-coplanares, respectivamente.*

- Dados dois planos  $A$  e  $B$  no espaço tridimensional podemos ter as seguintes situações:

$A$  e  $B$  são disjuntos, ou seja,  $A \cap B = \emptyset$  ( $A$  e  $B$  são paralelos).

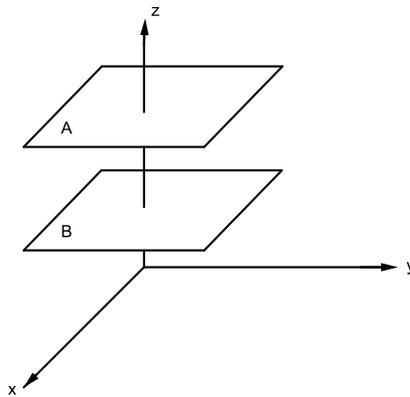


Figura 3.1: Planos paralelos

$A$  e  $B$  são coincidentes, ou seja,  $A \cap B = A = B$ .

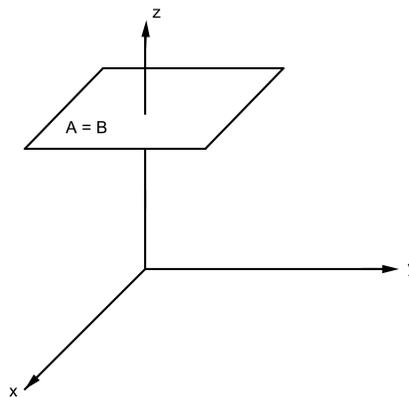


Figura 3.2: Planos coincidentes

$A$  e  $B$  são secantes, ou seja,  $A \cap B = K$ , onde  $K$  é uma reta.

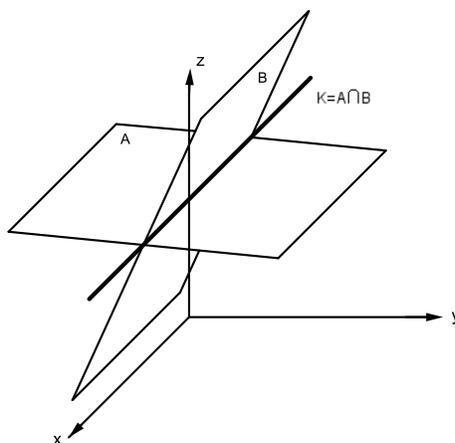


Figura 3.3: Planos secantes

- Reta que passa por dois pontos - Dados dois pontos independentes  $W$  e  $X$ ,  $W + X$  denota a reta que passa pelos pontos  $W$  e  $X$ .

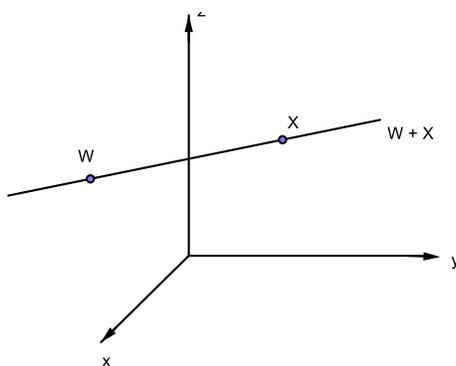


Figura 3.4: Reta que passa por dois pontos

- Segmento e comprimento de reta - Dados dois pontos independentes  $W$  e  $X$ , o segmento de reta consiste dos pontos  $W$  e  $X$ , e de todos os pontos entre  $W$  e  $X$ , e é denotado por  $[W, X]$ . O comprimento deste segmento, a distância entre os pontos  $W$  e  $X$ , é denotado por  $|W, X|$ .

Observação:

Sendo  $X$  um ponto,  $L$  uma reta e  $A$  um plano, escreve-se:

$X \in L$ , se  $X$  pertence à reta  $L$ ;  $X \in A$  se  $X$  pertence ao plano  $A$  e  $L \subset A$ , se  $L$  está contida

no plano  $A$ , isto é, todo ponto de  $L$  pertence ao plano  $A$ .

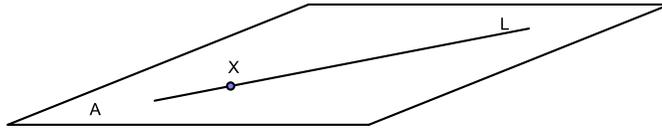


Figura 3.5: Ponto, reta e plano

**Definição 3.1.2.** Duas retas  $K$  e  $L$  são chamadas **perpendiculares**, escrevemos  $K \perp L$ , se concorrem em um ponto  $W$  comum e o ângulo entre elas é reto.

*Geometricamente:*

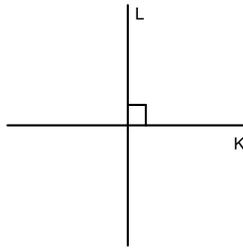


Figura 3.6: Retas perpendiculares

- Retas  $K$  e  $L$  perpendiculares;
- Simbolicamente escrevemos  $K \perp L$ ;
- $K \perp L \Rightarrow K \cap L = W$ , onde  $W$  é um ponto do espaço euclidiano  $E$ ;
- $\angle K, L = 90^\circ$  indica que o ângulo entre as retas  $K$  e  $L$  tem medida igual a  $90^\circ$ .

**Definição 3.1.3.** Duas retas  $K$  e  $L$  são chamadas **paralelas**, escrevemos  $K // L$ , se não possuem ponto em comum, e portanto, a distância<sup>1</sup> entre elas é constante.

*Geometricamente:*

<sup>1</sup>Neste trabalho estamos considerando conhecidos alguns conceitos e resultados do espaço euclidiano tridimensional, como, por exemplo, distância entre retas, planos, etc.

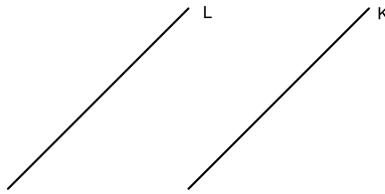


Figura 3.7: Retas paralelas

- Retas  $K$  e  $L$  paralelas;
- Simbolicamente escrevemos  $K//L$ ;
- $K//L \Rightarrow K \cap L = \emptyset$ , onde  $\emptyset$  é o conjunto vazio.
- $K//L$ , o ângulo entre as retas  $K$  e  $L$  é nulo.

Observação:

Dados três pontos independentes,  $W$ ,  $X$  e  $Y$ ,  $W + X + Y$  denota o plano contendo os pontos  $W$ ,  $X$  e  $Y$ .

Geometricamente:

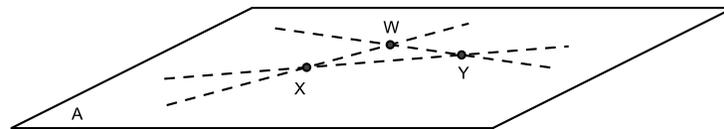


Figura 3.8: Plano definido por três pontos independentes

- $W + X + Y$  indica o plano determinado pelos pontos  $W$ ,  $X$  e  $Y$ .

**Definição 3.1.4.** Dois planos  $A$  e  $B$  são denominados **perpendiculares**, escrevemos  $A \perp B$ , se os planos  $A$  e  $B$  se intersectam formando um ângulo de reto.

- Os planos  $A$  e  $B$  perpendiculares;
- Simbolicamente escrevemos  $A \perp B$ ;

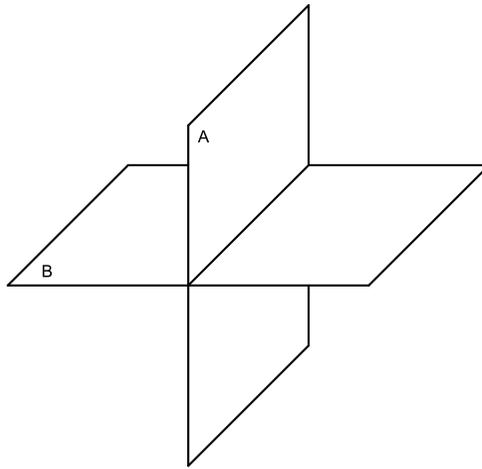


Figura 3.9: Planos perpendiculares

- $A \perp B \Rightarrow A \cap B = K$ , onde  $K$  é uma reta do espaço euclidiano  $E$ ;
- $\angle A, B = 90^\circ$  indica que o ângulo entre a planos  $A$  e  $B$  tem medida igual a  $90^\circ$ .

**Definição 3.1.5.** *Dois planos  $A$  e  $B$  são denominados **paralelos**, escrevemos  $A // B$ , se a interseção entre eles é vazia e, portanto, a distância entre eles é constante.*

Geometricamente:

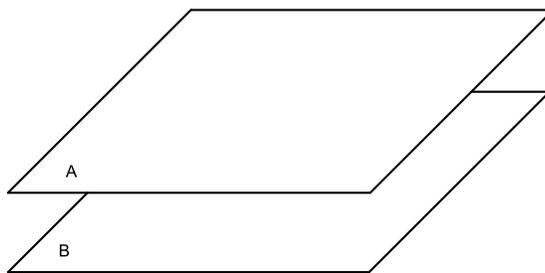


Figura 3.10: Planos paralelos

- Os planos  $A$  e  $B$  paralelos;
- Simbolicamente escrevemos  $A // B$ ;
- $A // B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ ;

- $\angle A, B = 0^\circ$  indica que o ângulo entre os planos  $A$  e  $B$  tem medida igual a zero.

## 3.2 Isometrias e Similaridades

**Definição 3.2.1.** Uma permutação  $\phi$  do espaço euclidiano é chamada de **similaridade**, se para todos os pontos  $W, X, Y$  e  $Z$ ,

$$|W, X| = |Y, Z| \Leftrightarrow |\phi(W), \phi(X)| = |\phi(Y), \phi(Z)|.$$

Em outras palavras, a similaridade é uma permutação que preserva distâncias iguais.

**Definição 3.2.2.** Uma permutação  $\phi$  do espaço euclidiano é chamada de **isometria** se para todos os pontos  $W$  e  $X$ ,

$$|W, X| = |\phi(W), \phi(X)|.$$

Em outras palavras, uma isometria é uma permutação que preserva distâncias.

**Teorema 3.2.1.** O conjunto não-vazio  $S$  das similaridades, com o convencional produto para permutações, é um grupo.

*Demonstração.* Seja  $S$  o conjunto das similaridades do espaço euclidiano  $E^3$ .

1. Mostremos que  $S$  é fechado para a operação de composição<sup>2</sup>.

Dadas as similaridades  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , e os pontos  $W, X, Y$  e  $Z$ , temos:

$$\begin{aligned} |W, X| = |Y, Z| &\Leftrightarrow |\phi_1(W), \phi_1(X)| = |\phi_1(Y), \phi_1(Z)|, \text{ pois } \phi_1 \text{ é similaridade} \\ &\Leftrightarrow |\phi_2(\phi_1(W)), \phi_2(\phi_1(X))| = |\phi_2(\phi_1(Y)), \phi_2(\phi_1(Z))|, \text{ pois } \phi_2 \text{ é similaridade} \\ &\Leftrightarrow |\phi_1\phi_2(W), \phi_1\phi_2(X)| = |\phi_1\phi_2(Y), \phi_1\phi_2(Z)|. \end{aligned}$$

Portanto,  $\phi_1\phi_2$  é uma similaridade.

<sup>2</sup>Lembremos que estamos denotando a composição  $g \circ f$  por  $fg$

2. Como a operação de composição de aplicações é associativa, e as similaridades  $\phi_1, \phi_2$  e  $\phi_3$  são aplicações, temos que  $\phi_1(\phi_2\phi_3) = (\phi_1\phi_2)\phi_3$ . Logo, a composição de similaridades em  $S$  é associativa.
3. Mostremos que  $S$  tem elemento neutro. Consideremos a aplicação  $I : E^3 \rightarrow E^3$ , temos:

$$|I(W), I(X)| = |I(Y), I(Z)| \Leftrightarrow |W, X| = |Y, Z|.$$

Logo,  $I(X) = X$  é similaridade, ou seja,  $S$  tem elemento neutro.

4. Mostremos que para toda  $\phi \in S$  existe  $\phi^{-1}$  similaridade em  $S$ . De fato, dados os pontos  $W, X, Y$  e  $Z$ , sabemos que  $\phi^{-1}(W), \phi^{-1}(X), \phi^{-1}(Y)$  e  $\phi^{-1}(Z)$  estão em  $E^3$ , pois  $\phi$  é bijeção. Assim, temos:

$$\begin{aligned} & |\phi^{-1}(W), \phi^{-1}(X)| = |\phi^{-1}(Y), \phi^{-1}(Z)| \\ \Leftrightarrow & |\phi(\phi^{-1}(W)), \phi(\phi^{-1}(X))| = |\phi(\phi^{-1}(Y)), \phi(\phi^{-1}(Z))|, \text{ pois } \phi \text{ é similaridade} \\ \Leftrightarrow & |\phi^{-1}\phi(W), \phi^{-1}\phi(X)| = |\phi^{-1}\phi(Y), \phi^{-1}\phi(Z)| \\ \Leftrightarrow & |I(W), I(X)| = |I(Y), I(Z)| \\ \Leftrightarrow & |W, X| = |Y, Z|. \end{aligned}$$

Logo,  $\phi^{-1}$  é similaridade.

E, portanto, pelos itens 1, 2, 3 e 4,  $S$  é um grupo. □

**Teorema 3.2.2.** *O conjunto não-vazio  $E$  das isometrias, com o convencional produto para permutações, é um grupo.*

*Demonstração.* Seja  $E$  o conjunto das isometrias do espaço euclidiano  $E^3$ .

1. Mostremos que  $E$  é fechado para a operação de composição.
- Dadas as isometrias  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , e os pontos  $W, X$ , temos:

$$\begin{aligned}
|W, X| &= |\phi_1(W), \phi_1(X)|, \text{ pois } \phi_1 \text{ é isometria} \\
&= |\phi_2(\phi_1(W)), \phi_2(\phi_1(X))|, \text{ pois } \phi_2 \text{ é isometria} \\
&= |\phi_1\phi_2(W), \phi_1\phi_2(X)|.
\end{aligned}$$

Portanto,  $\phi_1\phi_2$  preserva distâncias.

2. Como a operação de composição de aplicações é associativa, e as isometrias  $\phi_1, \phi_2$  e  $\phi_3$  são aplicações, temos que  $\phi_1(\phi_2\phi_3) = (\phi_1\phi_2)\phi_3$ . Logo, a composição de isometrias em  $E$  é associativa.
3. Mostremos que  $E$  tem elemento neutro. Consideremos a aplicação  $I : E^3 \rightarrow E^3$ , temos:

$$|I(W), I(X)| = |W, X|.$$

Logo,  $I(X) = X$  é isometria, ou seja,  $E$  tem elemento neutro.

4. Mostremos que para toda  $\phi$  em  $E$  existe  $\phi^{-1}$  isometria em  $E$ . De fato, dados os pontos  $W$  e  $X$ , sabemos que  $\phi^{-1}(W)$  e  $\phi^{-1}(X)$  estão em  $E^3$ , pois  $\phi$  é bijeção. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
|\phi^{-1}(W), \phi^{-1}(X)| &= |\phi(\phi^{-1}(W)), \phi(\phi^{-1}(X))|, \text{ pois } \phi \text{ é isometria} \\
&= |\phi^{-1}\phi(W), \phi^{-1}\phi(X)| \\
&= |I(W), I(X)| \\
&= |W, X|.
\end{aligned}$$

Logo,  $\phi^{-1}$  é isometria.

Portanto, pelos itens 1, 2, 3 e 4,  $E$ , o conjunto das isometrias, é um grupo. □

**Teorema 3.2.3.** *O conjunto não-vazio  $E$  das isometrias é um subgrupo do conjunto  $S$  das similaridades.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.3.2, temos que provar que dados  $\phi_1, \phi_2 \in E$ ,  $\phi_1\phi_2^{-1}$  é isometria. Para isto, consideremos os pontos  $W$  e  $X$  do espaço euclidiano. Temos,

$$\begin{aligned} |\phi_1\phi_2^{-1}(W), \phi_1\phi_2^{-1}(X)| &= |\phi_2^{-1}(\phi_1(W)), \phi_2^{-1}(\phi_1(X))| \\ &= |\phi_1(W), \phi_1(X)|, \text{ pois } \phi_2^{-1} \text{ é isometria} \\ &= |W, X|, \text{ pois } \phi_1 \text{ é isometria.} \end{aligned}$$

Logo,  $\phi_1\phi_2^{-1}$  é isometria. Portanto,  $E \leq S$ . □

**Teorema 3.2.4.** *Similaridade preserva planos, retas, perpendicularidade, paralelismo, ponto médio, desigualdade entre distâncias e segmento de reta. Ou seja, se  $\phi$  é uma similaridade então valem:*

1. Se  $A$  é um plano, então  $\phi(A)$  é também um plano.
2. Se  $K$  é uma reta, então  $\phi(K)$  é também uma reta.
3. Se  $F$  e  $G$  são planos e  $F$  é perpendicular  $G$ , então  $\phi(F)$  é perpendicular a  $\phi(G)$ .
4. Se  $F$  e  $G$  são retas e  $F$  é perpendicular  $G$ , então  $\phi(F)$  é perpendicular a  $\phi(G)$ .
5. Se  $F$  e  $G$  são planos e  $F$  é paralelo  $G$ , então  $\phi(F)$  é paralelo a  $\phi(G)$ .
6. Se  $F$  e  $G$  são retas e  $F$  é paralelo  $G$ , então  $\phi(F)$  é paralelo a  $\phi(G)$ .
7. Se  $W$  é o ponto médio do segmento  $[X, Y]$ , então  $\phi(W)$  é o ponto médio do segmento  $[\phi(X), \phi(Y)]$ .
8. Se  $|W, X| < |Y, Z|$ , então  $|\phi(W), \phi(X)| < |\phi(Y), \phi(Z)|$ , isto é, preserva desigualdade entre distâncias.
9.  $\phi[X, Y] = [\phi(X), \phi(Y)]$ .

*Demonstração.*

1. Seja  $A$  um plano. Escolhendo os pontos  $Y$  e  $Z$  independentes, de forma que  $A$  seja um plano bissetor a  $[Y, Z]$ . Consideremos  $B$  um plano bissetor de  $[\phi(Y), \phi(Z)]$ . Como  $A$  é bissetor, temos que qualquer ponto  $X \in A$  resulta que  $|X, Y| = |X, Z|$ . Como  $\phi$  é similaridade,  $\phi$  preserva distâncias iguais, então  $|\phi(X), \phi(Y)| = |\phi(X), \phi(Z)|$ . Logo,  $\phi(X) \in B$  e, portanto,  $\phi(A) \subseteq B$ . Como,  $\phi$  é similaridade,  $\phi^{-1}$  é também uma similaridade. Logo,  $\phi^{-1}(B) \subseteq \phi(A)$  implicando que  $B \subseteq \phi(A)$ . Portanto,  $\phi$  preserva plano.

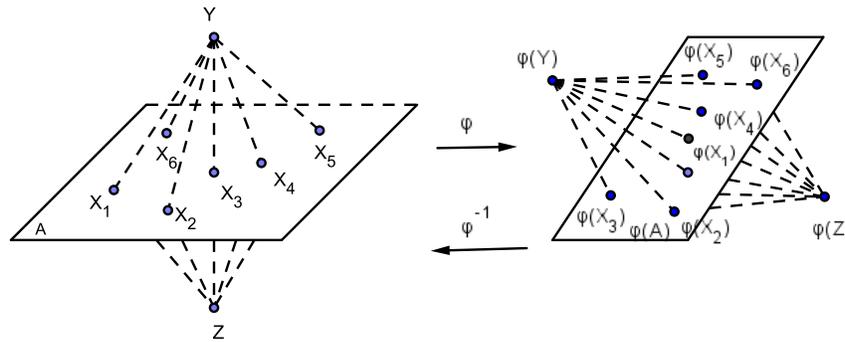


Figura 3.11: Similaridade preserva planos

$$|X_1, Y| = |X_1, Z| \Rightarrow |\phi(X_1), \phi(Y)| = |\phi(X_1), \phi(Z)|$$

$$|X_2, Y| = |X_2, Z| \Rightarrow |\phi(X_2), \phi(Y)| = |\phi(X_2), \phi(Z)|$$

$$\vdots$$

$$|X_n, Y| = |X_n, Z| \Rightarrow |\phi(X_n), \phi(Y)| = |\phi(X_n), \phi(Z)|$$

$$\vdots$$

2. Se  $K$  é uma reta, escolhamos dois planos  $A$  e  $B$ , tais que  $K = A \cap B$ . Como  $\phi$  é similaridade, portanto, bijeção, temos que  $\phi(K) = \phi(A) \cap \phi(B)$  é uma interseção não vazia de dois planos distintos. Conseqüentemente,  $\phi(K)$  é uma reta.
3. Consideremos  $F$  e  $G$  planos e  $F \perp G$ . Então, podemos escolher os pontos  $Y$  e  $Z$  em  $G$  tal que,  $F$  desta maneira, seja um plano bissetor a  $[Y, Z]$  contida em  $G$ . Como na

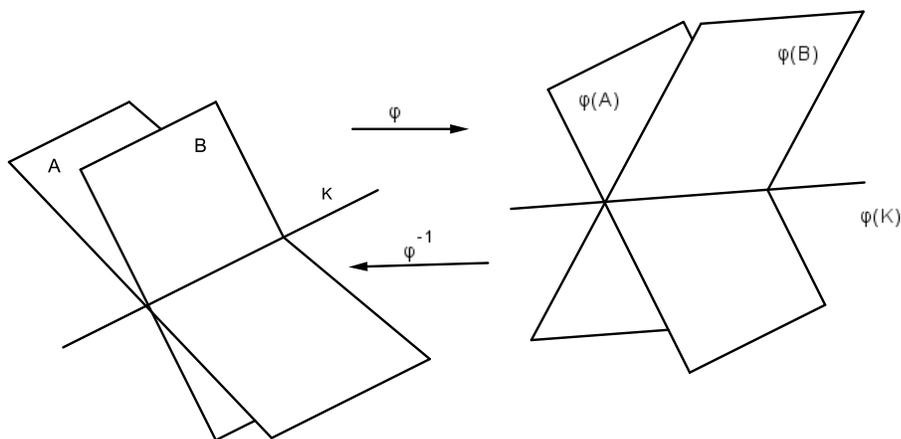


Figura 3.12: Similaridade preserva retas

prova do ítem 1,  $\phi(F)$  é um bissetor de  $[\phi(Y), \phi(Z)]$ , e os pontos de  $\phi(Y)$  e  $\phi(Z)$  estão em  $\phi(G)$  segue que  $\phi(F) \perp \phi(G)$ , portanto,  $\phi$  preserva perpendicularismo entre planos.

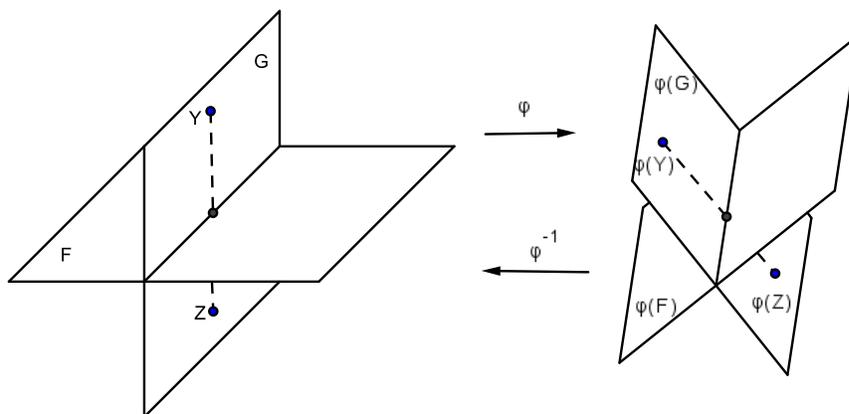


Figura 3.13: Similaridade preserva perpendicularismo entre planos

4. Consideremos  $F$  e  $G$  retas e  $F \perp G$ . Fixando  $F$ , seja  $A$  um plano que contém a reta  $F$  e os pontos  $Y$  e  $Z$  de  $G$  tal que  $A$  é bissetor de  $[Y, Z]$  em seu ponto médio  $X$ . Como na prova do ítem 1  $\phi(A)$  é bissetor de  $[\phi(Y), \phi(Z)]$  e, como os pontos de  $\phi(Y)$  e  $\phi(Z)$  estão em  $\phi(G)$ , segue que  $\phi(F) \perp \phi(G)$ . Portanto,  $\phi$  preserva perpendicularismo entre

retas.

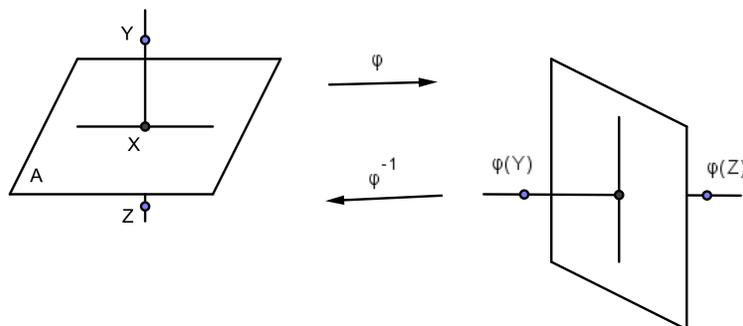


Figura 3.14: Similaridade preserva perpendicularismo entre retas

5. Consideremos  $F$  e  $G$  planos e  $F // G$ . Seja uma reta  $K$  tal que  $F \perp K$  e  $G \perp K$ , pela prova do ítem 3 e, como  $\phi$  preserva perpendicularidade, segue que  $\phi(F) \perp \phi(K)$  e  $\phi(G) \perp \phi(K)$ . Conseqüentemente,  $\phi(F) // \phi(G)$ . Portanto,  $\phi$  preserva paralelismo entre planos.

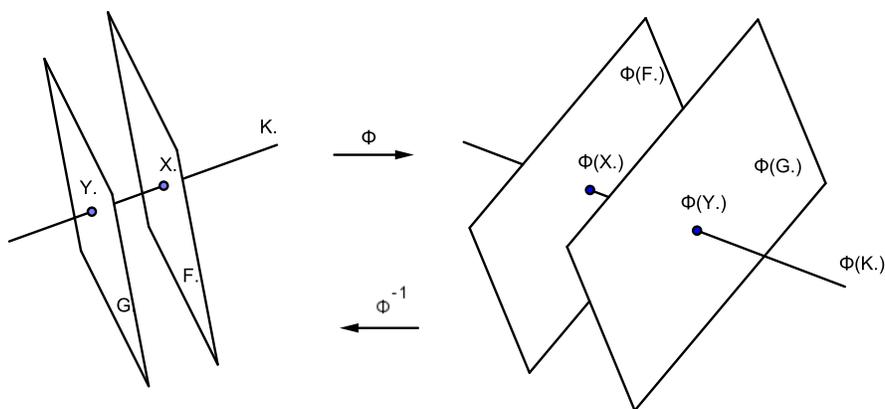


Figura 3.15: Similaridade preserva paralelismo entre planos

6. Consideremos  $F$  e  $G$  retas com  $F // G$ . Seja uma reta  $K$  tal que  $F \perp K$  e  $G \perp K$ . Pela prova do ítem 3 e, como  $\phi$  preserva perpendicularidade, segue que  $\phi(F) \perp \phi(K)$

e  $\phi(G) \perp \phi(K)$ . Conseqüentemente  $\phi(F) \parallel \phi(G)$ . Portanto,  $\phi$  preserva paralelismo entre retas.

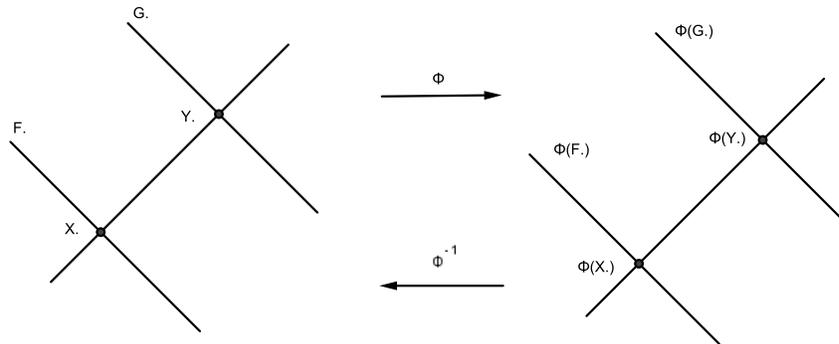


Figura 3.16: Similaridade preserva paralelismo entre retas

7. Sejam  $[X, Y]$  o segmento de reta,  $K = X + Y$  a reta que passa pelos pontos  $X$  e  $Y$ , e  $A$  o plano bissetor de  $[X, Y]$ . O ponto médio de  $[X, Y]$  é dado por  $A \cap K = W$ , onde  $|X, W| = |Y, W|$ . Pelo ítem 1 temos que  $\phi(A)$  é o bissetor de  $[\phi(X), \phi(Y)]$  e pelo ítem 2,  $\phi(K) = \phi(X) + \phi(Y)$ . Conseqüentemente,  $\phi(W) = \phi(A) \cap \phi(K)$  é o ponto médio de  $[\phi(X), \phi(Y)]$ .

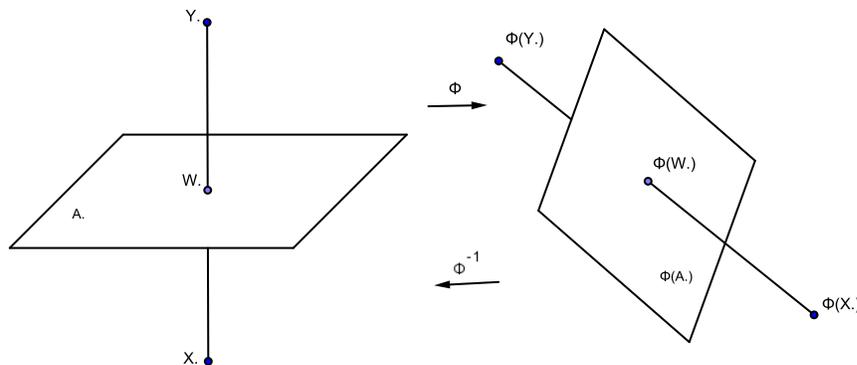


Figura 3.17: Similaridade preserva ponto médio

8. Dados os pontos  $W, X, Y$  e  $Z$  tal que  $|W, X| < |Y, Z|$ , escolhamos um ponto  $Z_1$  tal que  $|W, Z_1| = |Y, Z| = S$ . A distância entre dois pontos é menor que  $S$  se, e somente se, um dos pontos é o ponto médio de alguma corda de uma esfera de raio  $S$  centrada no segundo ponto. Desta forma,  $|W, X| < |Y, Z| = |W, Z_1|$ , isto implica que podemos escolher  $Z_2$  e  $Z_3$  tais que  $|W, Z_1| = |W, Z_2| = |W, Z_3|$  de modo que  $X$  é o ponto médio de  $|Z_2, Z_3|$ . Por definição de similaridade  $|\phi(W), \phi(Z_1)| = |\phi(W), \phi(Z_2)| = |\phi(W), \phi(Z_3)|$  desta forma  $|\phi(W), \phi(X)| < |\phi(W), \phi(Z_1)| = |\phi(Y), \phi(Z)|$ . Portanto,  $\phi$  preserva desigualdade entre distâncias.

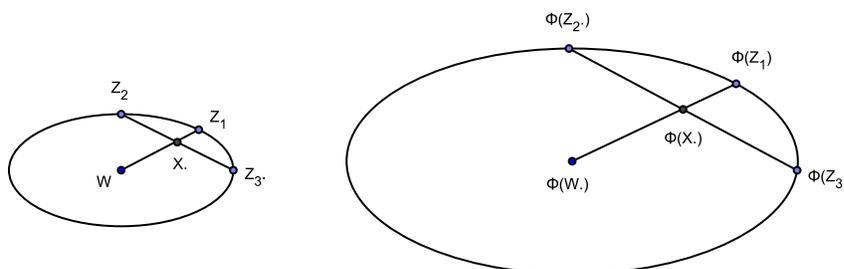


Figura 3.18: Similaridade preserva desigualdade entre comprimentos de segmentos

9. Sejam  $X$  e  $Y$  pontos distintos e  $Z$  o ponto médio de  $[X, Y]$ . Veja que, um ponto  $W$  está entre  $X$  e  $Y$  se, e somente se,  $W$  está em  $X + Y$  e além disso  $|Z, W| < |Z, X|$ . Por similaridade temos que  $\phi(W)$  está na reta  $\phi(X) + \phi(Y)$  e pelo ítem 8,  $|\phi(Z), \phi(W)| < |\phi(Z), \phi(X)|$ . Consequentemente  $\phi(W)$  está entre  $\phi(X)$  e  $\phi(Y)$ . Logo,  $\phi[X, Y] \subseteq [\phi(X), \phi(Y)]$ . Como  $\phi^{-1}$  é também uma similaridade  $\phi[X, Y] \supseteq [\phi(X), \phi(Y)]$ . Logo,  $\phi[X, Y] = [\phi(X), \phi(Y)]$ . Portanto, a imagem de um segmento é um segmento.  $\square$

**Lema 3.2.1.** *Seja  $\phi$  uma similaridade. Para quaisquer  $X$  e  $Y$  pontos distintos e  $\beta$  um número real não-negativo vale:*

$$\text{Se } |X, Y| = \beta|W, Z|, \text{ então } |\phi(X), \phi(Y)| = \beta|\phi(W), \phi(Z)|.$$

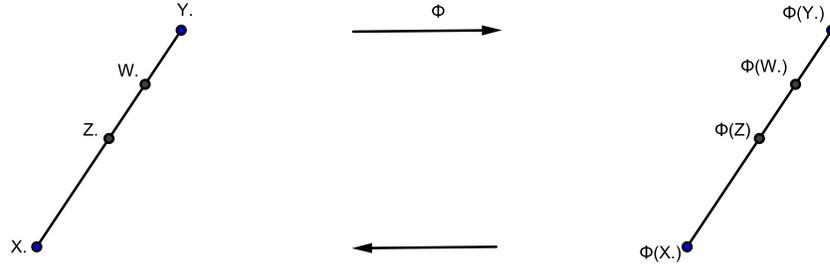


Figura 3.19: Similaridade preserva segmento

*Demonstração.* Queremos mostrar que a implicação ocorre para todo  $\beta$  não-negativo. Para isso vamos mostrar primeiro que vale para os casos em que  $\beta$  é um inteiro não-negativo, depois um racional positivo e finalmente para um real positivo.

Caso 1:

Para mostrar que a implicação vale para  $\beta$  inteiro não-negativo vamos usar indução. Veja o que ocorre para  $\beta = 0$  e  $\beta = 1$ .

- $\beta = 0 \Rightarrow |X, Y| = 0 \Rightarrow X = Y \Rightarrow 0 = |\phi(X), \phi(Y)| = \beta |\phi(W), \phi(Z)|$ .
- $\beta = 1$  temos que  $|X, Y| = |W, Z| \Rightarrow |\phi(X), \phi(Y)| = |\phi(W), \phi(Z)|$ , pois  $\phi$  é uma similaridade, e assim  $|\phi(X), \phi(X)| = \beta |\phi(W), \phi(Z)|$ .

Suponhamos então, que seja verdade para todo par de pontos e para  $\beta = k$  e mostremos que vale para  $\beta = k + 1$ . Sejam  $X, Y, W$  e  $Z$  tais que  $|X, Y| = (k + 1)|W, Z|$ .

Escolhendo um ponto  $Y_1$  tal que  $Y_1 \in [X, Y]$  e  $|X, Y_1| = k |W, Z|$ , temos que  $|Y_1, Y| = |W, Z|$ . Pela hipótese de indução temos que  $|\phi(X), \phi(Y_1)| = k |\phi(W), \phi(Z)|$ , e pelo ítem 9 do Teorema 3.2.4  $\phi(Y_1)$  está entre  $\phi(X)$  e  $\phi(Y)$ . Então  $|\phi(X), \phi(Y)| = |\phi(X), \phi(Y_1)| + |\phi(Y_1), \phi(Y)| = k |\phi(W), \phi(Z)| + |\phi(Y_1), \phi(Y)| = (k + 1) |\phi(W), \phi(Z)|$ . Isto completa a prova por indução e o lema é válido para todo inteiro não-negativo.

Caso 2:

Seja  $\beta$  um racional positivo  $\beta = \frac{m}{n}$ , neste caso, se  $X$  e  $Y$  são dois pontos tais que  $|X, Y| = \beta |W, Z|$  ou  $|X, Y| = \frac{m}{n} |W, Z| \Rightarrow n |X, Y| = m |W, Z|$ . Escolhendo um ponto  $Y_1$  tal que  $n |X, Y| = |X, Y_1| = m |W, Z|$  e aplicando o caso 1 temos,  $n |\phi(X), \phi(Y)| = |\phi(X), \phi(Y_1)| = m |\phi(W), \phi(Z)|$ . Portanto, vale para  $\beta$  é racional.

Caso 3:

Seja  $\beta$  um número real positivo. Assumindo que  $|X, Y| = \beta |W, Z|$  mas que  $|\phi(X), \phi(Y)| = \gamma |\phi(W), \phi(Z)|$  com  $\beta \neq \gamma$ . Escolhamos então um número racional  $\lambda$  entre  $\beta$  e  $\gamma$ , e um ponto  $Y_1$  tal que  $|X, Y_1| = \lambda |W, Z|$ . Note que  $\beta < \lambda < \gamma$  o que implica  $|X, Y_1| = \lambda |W, Z| > \beta |W, Z| = |X, Y|$ . Desta forma encontramos a desigualdade entre  $|X, Y_1|$  e  $|X, Y|$ . Aplicando  $\phi$  temos  $|\phi(X), \phi(Y_1)| = \lambda |\phi(W), \phi(Z)|$ , pois vale pelo Caso 2 e  $|\phi(X), \phi(Y)| = \gamma |\phi(W), \phi(Z)|$ , isto é,  $|\phi(X), \phi(Y_1)| = \lambda |\phi(W), \phi(Z)| < \gamma |\phi(W), \phi(Z)| = |\phi(X), \phi(Y)|$ , e pelo ítem 8 do Teorema 3.2.4 é uma contradição. Portanto, não podemos ter  $\beta \neq \gamma$ .

O que prova o lema. □

**Teorema 3.2.5.** *Uma permutação  $\phi$  do espaço euclidiano é uma similaridade se, e somente se, existe um número positivo  $\alpha$  tal que para quaisquer pontos  $X$  e  $Y$  em  $E$ ,  $|\phi(X), \phi(Y)| = \alpha |X, Y|$ .*

*Demonstração.* Mostremos inicialmente que a permutação  $\phi$ , é uma similaridade. Para isto, tomemos os pontos  $X, Y, W$  e  $Z$  tais que  $|X, Y| = |W, Z|$ . Por hipótese, existe um número positivo  $\alpha$  tal que para todos os pontos  $X$  e  $Y$ , vale  $|\phi(X), \phi(Y)| = \alpha |X, Y|$ . Assim, para os pontos  $X, Y, W$  e  $Z$  tais que  $|X, Y| = |W, Z|$  é claro que:  $\alpha |X, Y| = \alpha |W, Z|$ , mas isto é equivalente a dizer que  $|\phi(X), \phi(Y)| = |\phi(W), \phi(Z)|$ . Portanto,  $\phi$  preserva distância iguais. Logo  $\phi$  é similaridade. Reciprocamente, sendo  $\phi$  uma similaridade, tomemos os pontos  $W$  e  $Z$  quaisquer distintos e consideremos  $\alpha = \frac{|\phi(W), \phi(Z)|}{|W, Z|}$ , isto é,  $\alpha$  é o fator pelo qual o segmento  $[W, Z]$  é dilatado ou contraído. Queremos mostrar que qualquer segmento  $[X, Y]$  é dilatado ou contraído pelo mesmo fator  $\alpha$ . Para quaisquer  $X, Y$  distintos existe um número  $\beta$  positivo tal que  $|X, Y| = \beta |W, Z|$ . Pelo lema anterior temos  $|\phi(X), \phi(Y)| = \beta |\phi(W), \phi(Z)|$ . Assim,  $\frac{|\phi(X), \phi(Y)|}{|X, Y|} = \frac{\beta |\phi(W), \phi(Z)|}{\beta |W, Z|} = \frac{|\phi(W), \phi(Z)|}{|W, Z|} = \alpha$ . Note que, caso  $X = Y$  a afirmação do teorema vale trivialmente. □

**Definição 3.2.3.** Se  $\phi$  é uma similaridade, então a constante positiva  $\alpha$  tal que  $|\phi(X), \phi(Y)| = \alpha |X, Y|$  para todos os pontos  $X$  e  $Y$  é chamado de **fator de similaridade** de  $\phi$ .

**Corolário 3.2.1.** Se  $\phi$  é uma similaridade, então  $\phi$  preserva ângulos, isto é, o ângulo  $XYZ$  é congruente ao ângulo  $\phi(X)\phi(Y)\phi(Z)$ .

*Demonstração.* Sendo  $\phi$  uma similaridade,  $\phi$  possui um fator de similaridade  $\alpha$ . Isto implica que  $|\phi(X), \phi(Y)| = \alpha |X, Y|$ ,  $|\phi(X), \phi(Z)| = \alpha |X, Z|$  e  $|\phi(Y), \phi(Z)| = \alpha |Y, Z|$ , ou seja, os lados correspondentes dos triângulos  $XYZ$  e  $\phi(X), \phi(Y), \phi(Z)$  são proporcionais. Conseqüentemente, estes triângulos são semelhantes e, portanto, os ângulos correspondentes dos triângulos  $XYZ$  e  $\phi(X)\phi(Y)\phi(Z)$  são congruentes.  $\square$

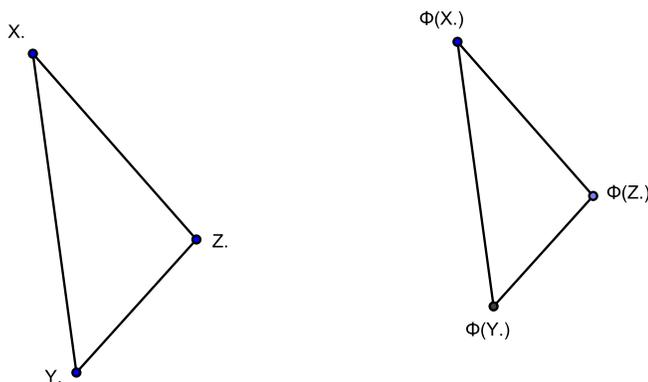


Figura 3.20: Similaridade preserva congruência entre ângulos

**Corolário 3.2.2.** Uma similaridade  $\phi$ , é uma transformação contínua, isto é, se  $X_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  é uma seqüência de pontos convergindo para o ponto  $X$ , então a seqüência  $\phi(X_n)$  converge para  $\phi(X)$ .

*Demonstração.* Sejam  $\phi$  uma similaridade e  $\alpha$  o fator de similaridade de  $\phi$ . Queremos provar que a seqüência de pontos  $\phi(X_n)$  converge para  $\phi(X)$ . Sabemos que, como  $X_n \rightarrow X$ , dado  $\epsilon > 0$  podemos escolher um inteiro positivo  $N$  tal que se  $n > N$ , então  $|X_n, X| < \frac{\epsilon}{\alpha}$ . Pelo fato

de  $\phi$  ser uma similaridade temos que se  $n > N$ , então  $|\phi(X_n), \phi(X)| = \alpha|X_n, X| < \alpha \cdot \frac{\epsilon}{\alpha} = \epsilon$ . Logo,  $|\phi(X_n), \phi(X)| < \epsilon$ , ou seja, dado  $\epsilon > 0$  podemos achar um  $N$  satisfatório e assim concluir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(X_n) = \phi(X)$ .  $\square$

**Teorema 3.2.6.** *A aplicação que atribui para cada similaridade o fator similaridade é um homomorfismo de  $S$  num grupo multiplicativo de números reais positivos, o núcleo deste homomorfismo é  $E$ . Conseqüentemente,  $E$  é um subgrupo normal de  $S$ .*

*Demonstração.* Sejam  $E$  o grupo euclidiano,  $S$  o grupo das similaridades e

$$\begin{aligned} H : S &\longrightarrow \mathbb{R}_*^+ \\ \phi &\longmapsto \alpha \end{aligned},$$

uma aplicação, onde  $\alpha$  é o fator de similaridade de  $\phi$ . Consideremos  $\phi_1, \phi_2 \in S$  e  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  fatores de similaridade de  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , respectivamente, isto é,  $H(\phi_1) = \alpha_1$  e  $H(\phi_2) = \alpha_2$ . Queremos provar que  $H(\phi_1\phi_2) = H(\phi_1)H(\phi_2) = \alpha_1\alpha_2$ , ou seja,  $H$  é um homomorfismo. Veja que:

$$\begin{aligned} |\phi_1\phi_2(X), \phi_1\phi_2(Y)| &= |\phi_2(\phi_1(X)), \phi_2(\phi_1(Y))| \\ &= \alpha_2|\phi_1(X), \phi_1(Y)| \\ &= \alpha_2\alpha_1|X, Y| \\ &= \alpha_1\alpha_2|X, Y|. \end{aligned}$$

Logo,  $H(\phi_1\phi_2) = \alpha_1\alpha_2$  e  $H(\phi_1\phi_2) = H(\phi_1)H(\phi_2)$ . Como  $H$  é um homomorfismo de grupos, o núcleo da aplicação é dado pelo conjunto  $\ker H = \{\phi \in S; H(\phi) = id(\mathbb{R}_*^+) = 1\}$ , onde 1 é o elemento neutro do grupo multiplicativo dos reais positivos. Assim, se  $\phi \in \ker(H)$ , então  $\phi$  é uma isometria. A seguir vamos provar que  $E$ , núcleo da aplicação, é subgrupo normal. Para isso vamos provar as seguintes afirmações:

- $\ker H \leq S$

*Demonstração.* Temos que provar que dadas as similaridades  $\phi_1$  e  $\phi_2$  com  $\phi_1, \phi_2 \in \ker H$  então  $\phi_1, \phi_2^{-1} \in \ker H$ .

De fato,  $H(\phi_1, \phi_2^{-1}) = H(\phi_1)H(\phi_2^{-1}) = 1 \cdot 1 = 1$ .

Logo  $\ker H \leq S$

- $\ker H \supseteq S$

*Demonstração.* Temos que provar que dadas as similaridades  $\phi_1 \in \ker H$  e  $\phi_2 \in S$  então  $\phi_2\phi_1\phi_2^{-1} \in \ker H$ .

De fato,  $H(\phi_2\phi_1\phi_2^{-1}) = H(\phi_2)H(\phi_1)H(\phi_2^{-1}) = H(\phi_2) \cdot 1 \cdot H(\phi_2^{-1}) = H(\phi_2\phi_2^{-1}) = H(1) = 1$ . Logo  $\ker H \supseteq S$ . □

**Definição 3.2.4.** *Sejam  $\phi$  uma similaridade e  $X$  um ponto qualquer.  $X$  é um **ponto fixo** se  $\phi(X) = X$ .*

**Teorema 3.2.7.** *Se  $\phi$  é uma similaridade, mas não é uma isometria, então  $\phi$  tem exatamente um ponto fixo.*

*Demonstração.* Sejam  $\phi$  uma similaridade,  $\alpha$  o fator de similaridade de  $\phi$  e  $X$  e  $Y$  dois pontos quaisquer fixos distintos, isto é,  $\phi(X) = X$  e  $\phi(Y) = Y$ . Assim,  $|\phi(X), \phi(Y)| = \alpha |X, Y| = \alpha |\phi(X), \phi(Y)|$  implicando  $\alpha = 1$  e, portanto,  $\phi$  é uma isometria. Como, por hipótese,  $\phi$  não é uma isometria então  $\alpha \neq 1$ . Assim,  $\phi$  tem no máximo um ponto fixo. Temos ainda que,  $\phi(X) = X$  se, e somente se,  $X = \phi^{-1}(\phi(X)) = \phi^{-1}(X)$ . Portanto,  $\phi$  e  $\phi^{-1}$  possuem os mesmos pontos fixos. Pelo Teorema 3.2.6 como  $\phi$  é uma similaridade

$$\begin{aligned} H : S &\longrightarrow \mathbb{R}_*^+ \\ \phi &\longmapsto \alpha \end{aligned}$$

é um homomorfismo. Logo,  $H(\phi\phi^{-1}) = H(\phi)H(\phi^{-1}) \Leftrightarrow H(id) = \alpha H(\phi^{-1}) \Leftrightarrow H(\phi^{-1}) = \frac{1}{\alpha}$ , ou seja,  $\phi^{-1}$  e  $\phi$  possuem fatores de similaridades recíprocos. Desta forma, podemos assumir sem perda de generalidade  $\alpha < 1$ . Como  $\alpha < 1$ , temos que  $\phi$  é uma contração, isto é, existe uma constante  $\alpha < 1$  tal que  $|\phi(X), \phi(Y)| \leq \alpha |X, Y|$  para todo  $X$  e  $Y$ . Para verificar a existência do ponto fixo vamos escolher um ponto  $X_0$ , e considerar  $X_1 = \phi(X_0), X_2 = \phi(X_1), \dots, X_n = \phi(X_{n-1}), \dots$ . Caso  $X_n = X_{n-1}$ , para algum  $n$ , temos o ponto fixo. Caso

contrário, veremos que a seqüência infinita de pontos possui limite, e este limite é o ponto fixo procurado. Para  $n$  e  $m$  tais que  $n < m$ , temos:

$$\begin{aligned}
 |X_n, X_m| &= |\phi(X_{n-1}), \phi(X_{m-1})| = \\
 &= \alpha |X_{n-1}, X_{m-1}| = \alpha |\phi(X_{n-2}), \phi(X_{m-2})| = \\
 &= \alpha\alpha |X_{n-2}, X_{m-2}| = \alpha^2 |X_{n-2}, X_{m-2}| = \\
 &= \alpha^2 |\phi(X_{n-3}), \phi(X_{m-3})| = \alpha^2\alpha |X_{n-3}, X_{m-3}| = \\
 &= \alpha^3 |X_{n-3}, X_{m-3}| = \dots = \alpha^n |X_0, X_{m-n}|.
 \end{aligned}$$

Desta forma, para quaisquer  $n$  e  $m$  inteiros não negativos com  $n < m$  temos um inteiro  $k$  tal que  $n + k = m$ , então:

$$\begin{aligned}
 |X_n, X_{n+k}| &= \alpha^n |X_0, X_k| \leq \alpha^n \{|X_0, X_1| + |X_1, X_2| + \dots + |X_{k-1}, X_k|\} \\
 &= \alpha^n \{|X_0, X_1| + \alpha |X_0, X_1| + \dots + \alpha^{k-1} |X_{k-1}, X_k|\} \\
 &= \alpha^n |X_0, X_1| \{1 + \alpha + \alpha^2 \dots + \alpha^{k-1}\} \\
 &= \alpha^n |X_0, X_1| \frac{1 - \alpha^k}{1 - \alpha} \leq \frac{\alpha^n |X_0, X_1|}{1 - \alpha}
 \end{aligned}$$

Veja que para  $\alpha < 1$ ,  $|X_n, X_{n+k}| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$  independentemente de  $k$ . Conseqüentemente a seqüência  $X_0, X_1, \dots, X_n$  é uma seqüência de Cauchy e portanto tem um ponto limite  $X$ . Como  $\phi$  é uma transformação contínua, então,  $\phi(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{n+1} = X$ . Portanto,  $X$  é o ponto procurado. Isto completa a prova.  $\square$

**Teorema 3.2.8.** *Se  $\phi$  é uma similaridade, então  $\phi$  é uma isometria se tiver mais de um ponto fixo. Além disso, se  $\phi$  tem dois, três ou quatro pontos fixos independentes, então  $\phi$  fixa ponto a ponto uma reta, um plano ou todo espaço, respectivamente. Em particular, a única similaridade com quatro pontos fixos independentes é a identidade.*

*Demonstração.* Dados os pontos independentes  $X$  e  $Y$  temos por definição que se  $|\phi(X), \phi(Y)| = |X, Y|$ ,  $\phi$  é uma isometria e o fator de similaridade  $\alpha = 1$ . Sendo  $\phi$  uma isometria, fixando os pontos independentes  $X$  e  $Y$ , e se um ponto  $W$  está na reta  $X + Y$ , temos que  $\frac{|\phi(X), \phi(Y)|}{|X, Y|} = \frac{|\phi(X), \phi(W)|}{|X, W|} = \frac{|\phi(Y), \phi(W)|}{|Y, W|} = 1$ . Como  $\phi(X) = X$  e  $\phi(Y) = Y$ , temos

$\frac{|X, \phi(W)|}{|X, W|} = 1$  implicando em  $|X, \phi(W)| = |X, W|$ , e  $\frac{|Y, \phi(W)|}{|Y, W|} = 1$  e  $|Y, \phi(W)| = |Y, W|$ . Temos assim que  $\phi(W)$  está na reta  $X + Y$ , na esfera de centro  $X$  e raio  $|X, W|$  e na esfera de centro  $Y$  e raio  $|Y, W|$ . Logo,  $\phi(W)$  está na interseção e esta interseção é o ponto  $W$  que pertence à reta  $X + Y$ . Logo,  $W = \phi(W)$ , ou seja,  $W$  é ponto fixo. E, portanto, a reta  $X + Y$  é fixa ponto a ponto.

Por outro lado, se  $\phi$  fixa os pontos independentes  $X, Y$  e  $Z$ , pelo que foi visto no parágrafo anterior  $\phi$  torna fixo todos os pontos das retas  $X + Y, X + Z$  e  $Y + Z$ . Em particular os lados do triângulo  $XYZ$ . Além disso, tomando um ponto  $W$  qualquer de  $X + Y + Z$ , existe uma reta que intersecciona os três lados estendidos do triângulo  $XYZ$  que contém  $W$  e pelo menos dois pontos independentes pertencentes aos lados estendidos. Portanto, o plano  $X + Y + Z$  é fixado ponto a ponto.

Supondo agora quatro pontos fixos independentes quaisquer  $X_1, X_2, X_3$  e  $X_4$ , temos que os planos  $X_1 + X_2 + X_3, X_1 + X_2 + X_4, X_1 + X_3 + X_4$  e  $X_2 + X_3 + X_4$  são fixados ponto a ponto pelo caso anterior. Tomando um ponto qualquer  $W$  não pertencente a esses planos, consideremos uma reta intersectando pelo menos dois desses planos em pontos distintos e contendo  $W$ . Assim, de forma análoga ao caso anterior, o espaço é fixado ponto a ponto. Isto é, se  $W$  é um ponto do espaço, então  $W = \phi(W)$ .

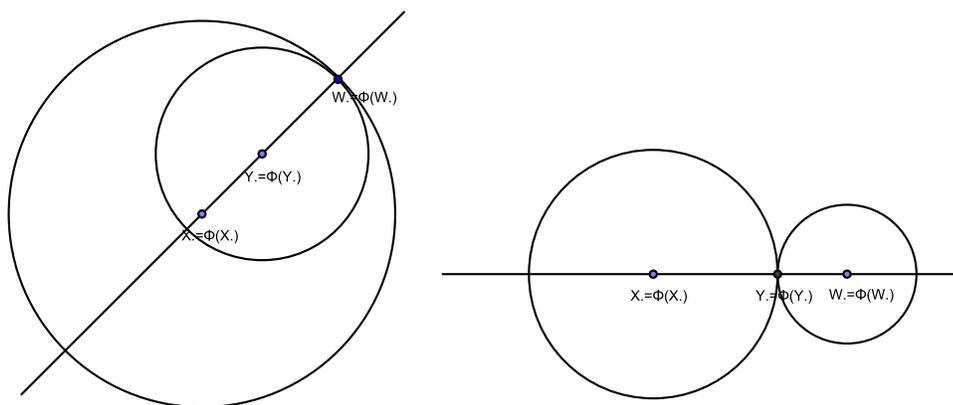


Figura 3.21: Retas fixadas ponto a ponto

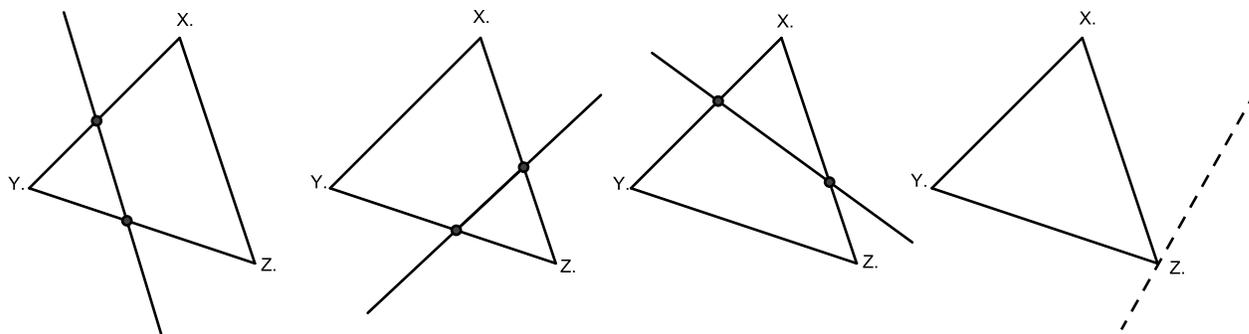


Figura 3.22: Plano fixado ponto a ponto

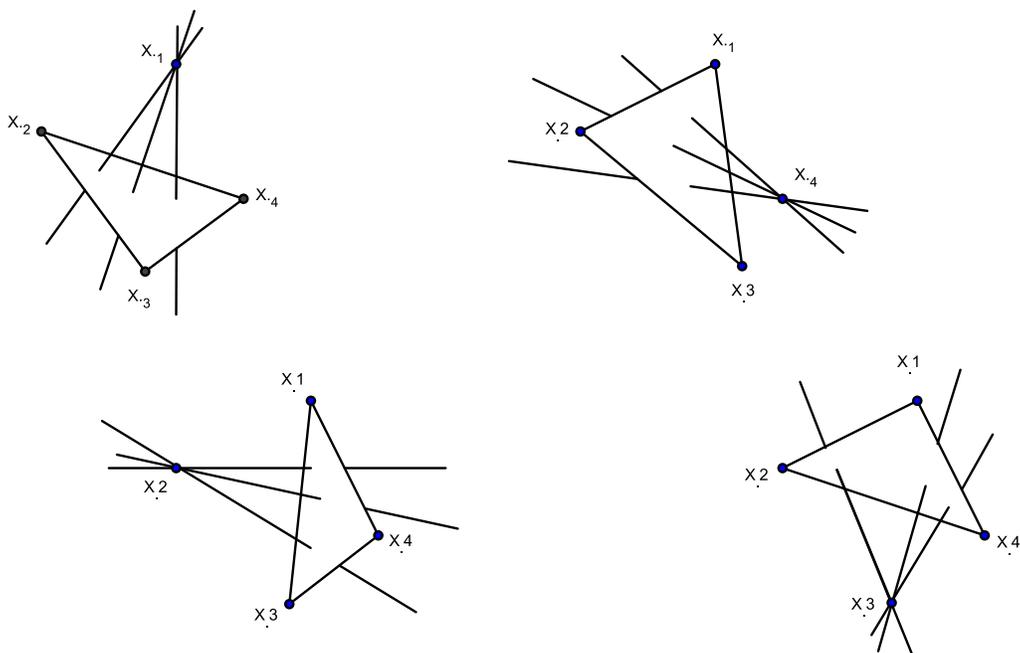


Figura 3.23: O espaço fixado ponto a ponto

### 3.3 Involuções em $S$

**Definição 3.3.1.** Uma *involução* é um elemento de ordem dois em um grupo, isto é, um elemento cujo o inverso é ele mesmo, mas não é a identidade.

Nesta seção vamos mostrar que para cada ponto, reta ou plano existe associado uma involução em  $S$  e que importantes relações geométricas podem ser caracterizadas por relações algébricas entre involuções. Vale ressaltar a importância da relação de conjugação em um grupo. Vamos também ilustrar como conjugar uma involução em  $S$  por uma similaridade e mostrar uma interpretação geométrica.

**Definição 3.3.2.** Sejam  $A$  um plano,  $M$  uma reta e  $X$  um ponto no espaço euclidiano.

- Uma **reflexão com espelho**  $A$  é a transformação  $a$ , tal que,  $a$  deixa fixo todo ponto de  $A$  e envia qualquer ponto  $W$ , não pertencente ao plano  $A$ , para o único ponto  $a(W)$  tal que  $A$  é o bissetor de  $[W, a(W)]$ .

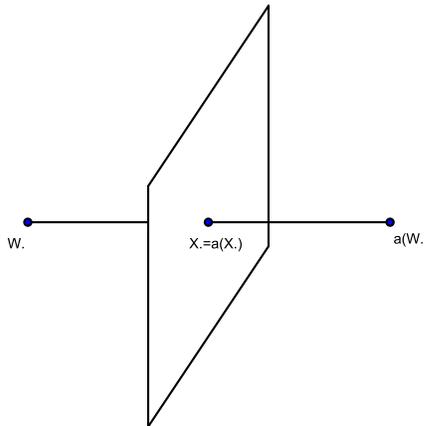


Figura 3.24: Reflexão com espelho

- Uma **meia-volta com eixo**  $M$  é uma transformação  $m$ , tal que,  $m$  deixa fixo todo ponto de  $M$ , e envia qualquer ponto  $W$  não pertencente à reta  $M$ , para o único ponto  $m(W)$  tal que  $M$  contém o ponto médio do segmento  $[W, m(W)]$  e está contido no bissetor de  $[W, m(W)]$ .

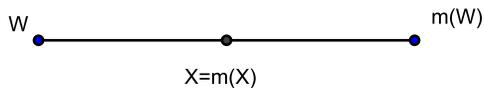
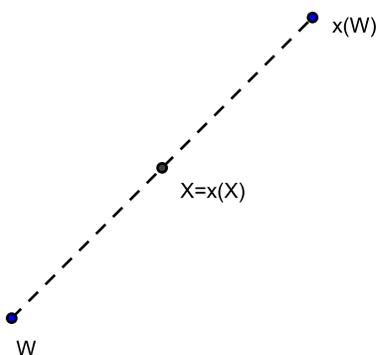


Figura 3.25: Meia-volta com eixo

- Uma **inversão com centro**  $X$  é uma transformação  $x$ , tal que,  $x$  deixa fixo o ponto  $X$ , e envia qualquer ponto  $W$ ,  $W \neq X$ , para o único ponto  $x(W)$  tal que  $X$  é o ponto médio do segmento  $[W, x(W)]$ .

Figura 3.26: Inversão de centro  $X$ 

**Teorema 3.3.1.** 1. Uma reflexão com espelho é uma involução.

2. Uma meia-volta é uma involução.

3. Uma inversão é uma involução.

4. As únicas involuções em  $S$  são as reflexões, meia-voltas e inversões.

*Demonstração.* 1. Sejam  $A$  um plano,  $Y$  e  $Z$  duas retas perpendiculares deste plano com interseção num ponto  $O$ . Consideremos uma reta  $X$  do espaço, perpendicular ao plano  $A$  passando por  $O$ . As retas  $X, Y$  e  $Z$  desta maneira determinam um sistema de coordenadas cartesianas. Seja  $(x, y, z)$  um ponto do espaço e  $A$  o plano  $YZ$ . A reflexão  $a$  com espelho  $A$  envia o ponto  $(x, y, z)$  para o ponto  $(-x, y, z)$ . Queremos provar que  $a$  é uma involução, ou seja,  $a^2(x, y, z) = (x, y, z)$ . De fato,  $a^2(x, y, z) = aa(x, y, z) = a(a(x, y, z)) = a(-x, y, z) = (-(-x), y, z) = (x, y, z)$ . Desta forma  $a$  é um elemento de

ordem dois do grupo  $E$  cujo o inverso é ele próprio e, portanto, a reflexão com espelho é uma involução.

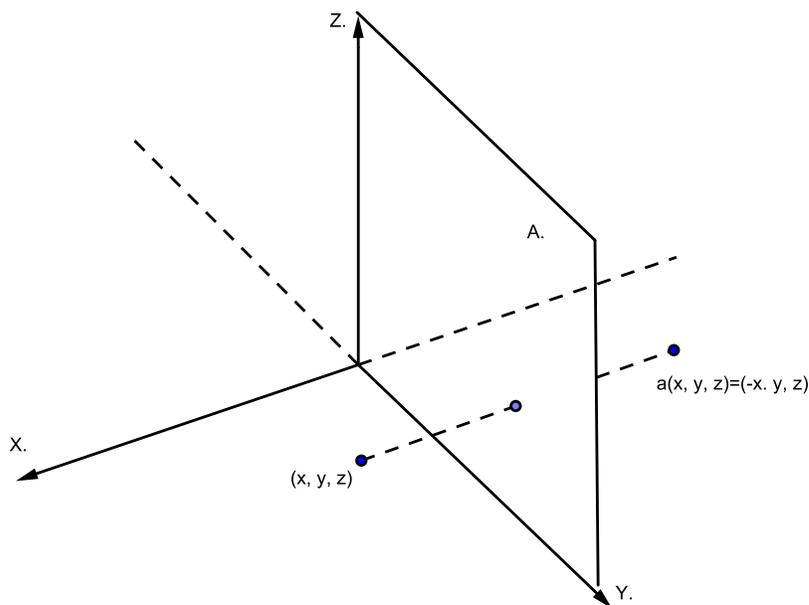


Figura 3.27: A reflexão é uma involução

2. Consideremos três retas do espaço  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  perpendiculares entre si, concorrentes num ponto  $O$  e com  $Z = M$ . Fica assim determinado um sistema de coordenadas cartesianas de eixos  $X, Y$  e  $Z$  com origem no ponto  $O$ . Seja  $(x, y, z)$  um ponto do espaço. A meia-volta  $m$  com eixo fixo  $M$  envia o ponto  $(x, y, z)$  para o ponto  $(-x, -y, z)$ , isto é,  $m(x, y, z) = (-x, -y, z)$ . Queremos provar que  $m$  é uma involução, ou seja,  $m^2(x, y, z) = (x, y, z)$ . De fato,  $m^2(x, y, z) = mm(x, y, z) = m(m(x, y, z)) = m(-x, -y, z) = (-(-x), -(-y), z) = (x, y, z)$ . Desta forma,  $m$  é um elemento de ordem dois do grupo  $E$  cujo o inverso é ele próprio e, portanto, a meia-volta é uma involução.
3. Consideremos três retas do espaço  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  perpendiculares entre si, concorrentes num ponto  $O = W$ . Fica assim determinado um sistema de coordenadas cartesianas de eixos  $X, Y$  e  $Z$  com origem no ponto  $O = W$ . Seja  $(x, y, z)$  um ponto

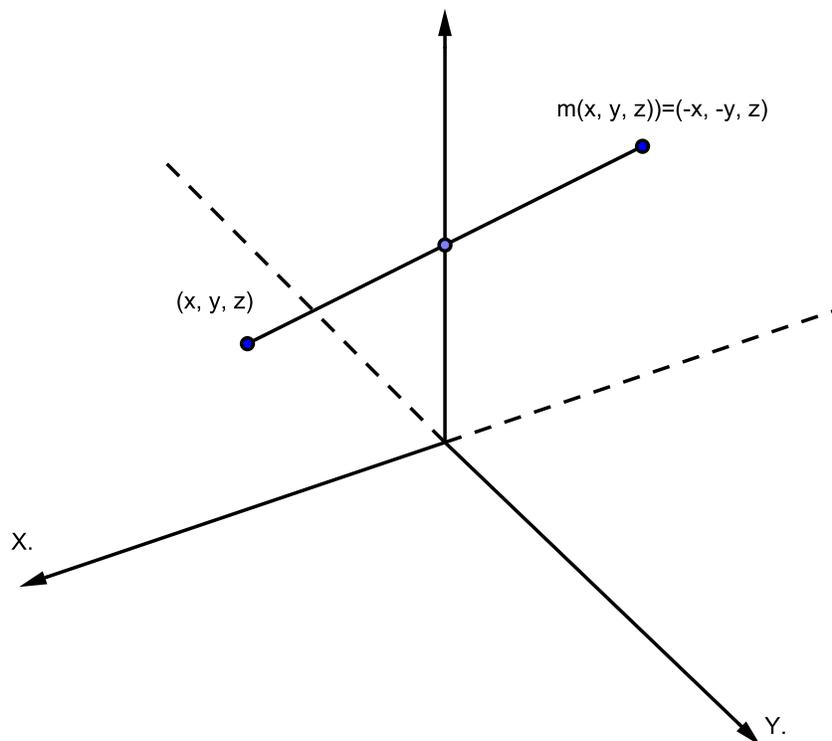


Figura 3.28: A meia-volta é uma involução

espaço. A inversão  $w$  com centro  $W$  envia o ponto  $(x, y, z)$  para o ponto  $(-x, -y, -z)$ , ou seja  $w(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ . Queremos provar que  $w$  é uma involução, ou seja,  $w^2(x, y, z) = (x, y, z)$ . De fato,  $w^2(x, y, z) = ww(x, y, z) = w(w(x, y, z)) = w(-x, -y, -z) = (-(-x), -(-y), -(-z)) = (x, y, z)$ . Desta forma,  $w$  é um elemento de ordem dois do grupo  $E$  cujo o inverso é ele próprio e, portanto, a inversão é uma involução.

4. Suponha que  $\phi$  é uma involução em  $S$ . Como os fatores de similaridade de  $\phi$  e  $\phi^{-1}(= \phi)$  são iguais, digamos  $\alpha$ , com  $\alpha$  constante positiva. Pelo Teorema 3.2.6 temos que  $\alpha^2 = 1$ , logo  $\alpha = 1$ . Assim,  $\phi$  está no núcleo do homomorfismo do Teorema 3.2.6 que é  $E$ , isto é, o grupo das isometrias.

Se  $X$  é um ponto, então  $\phi$  permuta  $X$  e  $\phi(X)$ . Logo,  $\phi$  ou fixa  $X$  ou o ponto médio de  $[X, \phi(X)]$ . Isto implica que  $\phi$  tem no mínimo um ponto fixo. Pelos Teoremas 3.2.8

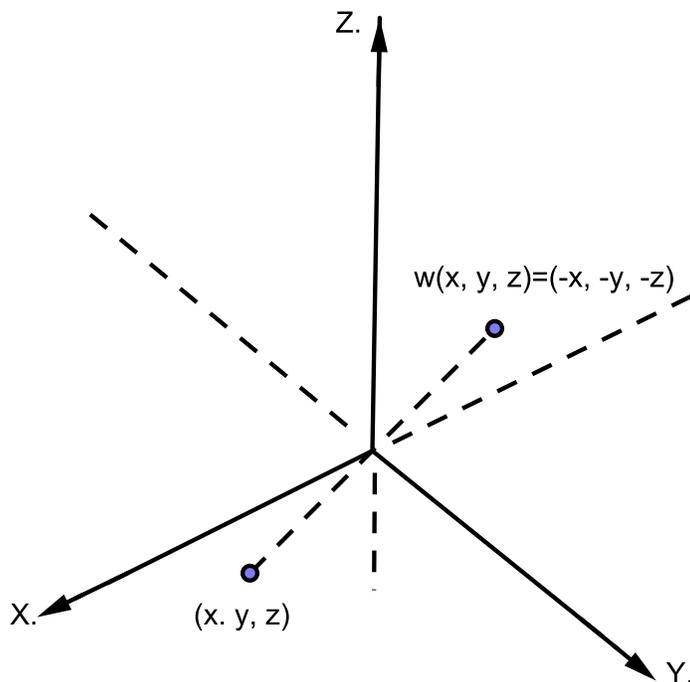


Figura 3.29: A inversão é uma involução

e 3.2.4,  $\phi$  é uma inversão, uma meia-volta ou uma reflexão, dependendo se 1, 2 ou 3 é o número de pontos fixos independentes de  $\phi$ . O que prova o teorema.

□

Para estudar as involuções, adotamos as seguintes convenções:

- Letras maiúsculas para representar ponto, reta e plano.
- Letras minúsculas para representar inversões, meia-volta e reflexões.
- Letras gregas minúsculas para representar similaridade que podem ser ou não involuções.

**Teorema 3.3.2.** *Sejam  $\phi$  uma similaridade,  $x$  uma inversão com centro  $X$ ,  $m$  meia-volta com eixo  $M$ , e  $b$  a reflexão com espelho  $B$ . Denotando por  $\phi^i$  a conjugação, então:*

1.  $\phi^i(x) = \phi^{-1}x\phi$  é a inversão com centro  $\phi(X)$ .
2.  $\phi^i(m) = \phi^{-1}m\phi$  é a inversão com centro  $\phi(M)$ .
3.  $\phi^i(b) = \phi^{-1}b\phi$  é a inversão com centro  $\phi(B)$ .

*Demonstração.* Seja  $S$  o grupo das similaridades. Pelo resultado da Proposição 2.3.1 temos que  $\phi^i(x)$ ,  $\phi^i(m)$  e  $\phi^i(b)$  fixam unicamente  $\phi(X)$ ,  $\phi(M)$  e  $\phi(B)$ , respectivamente. Temos que provar que  $\phi^i : S \rightarrow S$  é um automorfismo de  $S$ , e depois provar que  $\phi^i(x)$ ,  $\phi^i(m)$  e  $\phi^i(b)$  são involuções.

1. Mostremos inicialmente que  $\phi^i$  é um automorfismo. Temos que provar que  $\phi^i$  é um homomorfismo bijetivo, isto é, as seguintes afirmações:

- $\phi^i : S \rightarrow S$  é um homomorfismo.

De fato: Consideremos  $\phi_1, \phi_2 \in S$  desta forma, temos:  $\phi^i(\phi_1) = \phi^{-1}\phi_1\phi$

$$\phi^i(\phi_2) = \phi^{-1}\phi_2\phi$$

$$\phi^i(\phi_1\phi_2) = \phi^{-1}\phi_1\phi_2\phi$$

Então,

$$\begin{aligned} \phi^i(\phi_1)\phi^i(\phi_2) &= (\phi^{-1}\phi_1\phi)(\phi^{-1}\phi_2\phi) \\ &= (\phi^{-1}\phi_1)(\phi\phi^{-1})(\phi_2\phi) = (\phi^{-1}\phi_1)I(\phi_2\phi) \\ &= \phi^{-1}\phi_1\phi_2\phi = \phi^i(\phi_1\phi_2). \end{aligned}$$

Logo,  $\phi^i$  é um homomorfismo.

- $\phi^i : S \rightarrow S$  é injetiva.

De fato:

Sejam  $\phi_1, \phi_2 \in S$  tais que,  $\phi^i(\phi_1) = \phi^i(\phi_2)$ , ou seja,  $\phi^{-1}\phi_1\phi = \phi^{-1}\phi_2\phi$ . Multiplicando a esquerda por  $\phi$  ambos os lados da igualdade temos  $\phi(\phi^{-1}\phi_1\phi) = \phi(\phi^{-1}\phi_2\phi)$  e, usando a associatividade  $((\phi\phi^{-1})\phi_1)\phi = ((\phi\phi^{-1})\phi_2)\phi$ , isto é,  $(I\phi_1)\phi = (I\phi_2)\phi$  de onde vem  $\phi_1\phi = \phi_2\phi$ . Agora, multiplicando a direita por  $\phi$  ambos os lados da igualdade temos  $(\phi_1\phi)\phi^{-1} = (\phi_2\phi)\phi^{-1}$ , usando a associatividade

$\phi_1(\phi\phi^{-1}) = \phi_2(\phi\phi^{-1})$  implica  $\phi_1 I = \phi_2 I$  de onde se conclui  $\phi_1 = \phi_2$ . Logo,  $\phi$  é injetiva.

- $\phi^i : S \rightarrow S$  é uma sobrejeção.

De fato, sendo  $\phi \in S$ , existe  $\phi\phi\phi^{-1}$  tal que  $\phi^{-1}(\phi\phi\phi^{-1})\phi = \phi$ . Logo,  $\phi^i$  é sobrejetiva e, portanto,  $\phi^i$  é um automorfismo.

2.  $\phi^i(x)$ ,  $\phi^i(m)$  e  $\phi^i(b)$  são involuções.

De fato,

- $\phi^i(x)\phi^i(x) = \phi^i(xx) = \phi^i(I) = I$
- $\phi^i(m)\phi^i(m) = \phi^i(mm) = \phi^i(I) = I$
- $\phi^i(b)\phi^i(b) = \phi^i(bb) = \phi^i(I) = I$ .

Logo,  $\phi^i$  é um elemento de ordem dois cujo o inverso é ele próprio, o que caracteriza uma involução.

O que prova o teorema. □

**Teorema 3.3.3** (reafirmação). *Se  $\phi$  é uma similaridade, então as seguintes equivalências são verdadeiras:*

1.  $\phi(X) = Y$  e  $\phi^i(x) = y$  são afirmações equivalentes para pontos e inversões.
2.  $\phi(M) = N$  e  $\phi^i(m) = n$  são afirmações equivalentes para retas e meias-voltas.
3.  $\phi(A) = B$  e  $\phi^i(a) = b$  são afirmações equivalentes para planos e reflexões.

*Demonstração.* Seja  $\phi$  uma similaridade e consideremos:

- $x$  e  $y$  inversões de centros  $X$  e  $Y$ , respectivamente.
- $m$  e  $N$  meias-voltas com eixos  $M$  e  $N$ , respectivamente.
- $a$  e  $b$  reflexões com espelhos  $A$  e  $Y$ , respectivamente.

Sendo assim:

1. Se  $\phi(X) = Y$  então  $\phi^i(x)$  é a inversão de centro  $Y$ , isto é,  $\phi^i(x) = y$ . Por outro lado, se  $\phi^i(x) = y$ , então temos que  $\phi^i(x)$  é a inversão de centro  $Y$ , logo,  $\phi(X) = Y$ .
2. Se  $\phi(M) = N$ , então  $\phi^i(m)$  é a meia-volta de eixo  $N$ , isto é,  $\phi^i(m) = n$ . Por outro lado, se  $\phi^i(m) = n$ , então temos que  $\phi^i(m)$  é a meia-volta de eixo  $N$ , logo,  $\phi(M) = N$ .
3. Se  $\phi(A) = B$  então  $\phi^i(a)$  é a reflexão com espelho  $B$ , isto é,  $\phi^i(a) = b$ . Por outro lado, se  $\phi^i(a) = b$ , então temos que  $\phi^i(a)$  é a reflexão com espelho  $B$ , logo,  $\phi(A) = B$ .

O que prova o teorema. □

**Corolário 3.3.1.** *Nenhuma similaridade não-trivial comuta com toda inversão, nem com toda meia-volta, nem com toda reflexão. Assim, o centro<sup>3</sup> de  $E$  e de  $S$  são ambos  $\{I\}$ .*

*Demonstração.* Sejam  $x$  a inversão de centro  $X$ ,  $m$  a meia-volta com eixo  $M$  e  $b$  a reflexão com espelho  $B$ . Pelo Teorema 3.3.2, uma similaridade  $\phi$  que comuta com toda inversão, com toda meia-volta e com toda reflexão deve satisfazer  $\phi^{-1}x\phi = x$ ,  $\phi^{-1}m\phi = m$  e  $\phi^{-1}b\phi = b$ , respectivamente. Isto é:

- seja

$$\begin{aligned} \phi^i : S &\longrightarrow S \\ x &\longmapsto \phi^i(x) = x \end{aligned}$$

um automorfismo.

Como  $x(X) = X$  e  $\phi^i(x) = x$  temos que  $\phi(X) = X$ ,  $\forall X$  e, portanto,  $\phi$  é trivial.

- seja

$$\begin{aligned} \phi^i : S &\longrightarrow S \\ m &\longmapsto \phi^i(m) = m \end{aligned}$$

um automorfismo.

Como  $m(M) = M$  e  $\phi^i(m) = m$  temos que  $\phi(M) = M$ ,  $\forall M$  e, portanto,  $\phi$  é trivial.

---

<sup>3</sup>Seja  $G$  um grupo. O conjunto  $\{g \in G; xg = gx \text{ para todo } x \in G\}$  é chamado o centro de  $G$ .

- seja

$$\begin{aligned}\phi^i : S &\longrightarrow S \\ b &\longmapsto \phi^i(b) = b\end{aligned}$$

um automorfismo.

Como  $b(B) = B$  e  $\phi^i(b) = b$  temos que  $\phi(B) = B, \forall B, \forall b$  e, portanto,  $\phi$  é trivial.

O que prova o corolário. □

**Teorema 3.3.4.** *Cada uma das seguintes afirmações geométricas sobre pontos  $P$  e  $Q$ , retas  $M$  e  $N$ , e planos  $A$  e  $B$  são equivalentes a seu homólogo algébrico a direita.*

1.  $P = Q \rightarrow p$  e  $q$  comutam.
2.  $P \in M \rightarrow p$  e  $m$  comutam.
3.  $P \in A \rightarrow p$  e  $a$  comutam.
4.  $M \perp N \rightarrow m$  e  $n$  são distintos e comutam.
5.  $M \perp A$  ou  $M \subseteq A \rightarrow m$  e  $a$  comutam.
6.  $A \perp B \rightarrow a$  e  $b$  são distintos e comutam.

*Demonstração.* Consideremos:

- $p$  e  $q$  inversões de centro  $P$  e  $Q$ , respectivamente.
- $m$  e  $n$  meias-voltas com eixos  $M$  e  $N$ , respectivamente.
- $a$  e  $b$  reflexões com espelhos  $A$  e  $B$ , respectivamente.

Sendo assim:

1. Sejam  $X, Y$  e  $Z$  três retas perpendiculares entre si, concorrentes num ponto  $O = X = Y$ . Fica assim determinado um sistema de coordenadas cartesianas de eixos  $X, Y$  e  $Z$  e origem  $O = X = Y$ . Seja  $(x, y, z)$  um ponto do espaço e  $p$  e  $q$  inversões de centro  $P$  e  $Q$  respectivamente, que enviam o ponto  $(x, y, z)$  para  $(-x, -y, -z)$ . Desta forma, temos:

- $pq(x, y, z) = q(p(x, y, z)) = q(-x, -y, -z) = (-(-x), -(-y), -(-z)) = (x, y, z)$
- $qp(x, y, z) = p(q(x, y, z)) = p(-x, -y, -z) = (-(-x), -(-y), -(-z)) = (x, y, z)$ .

Logo,  $pq = qp$ , ou seja,  $p$  e  $q$  comutam.

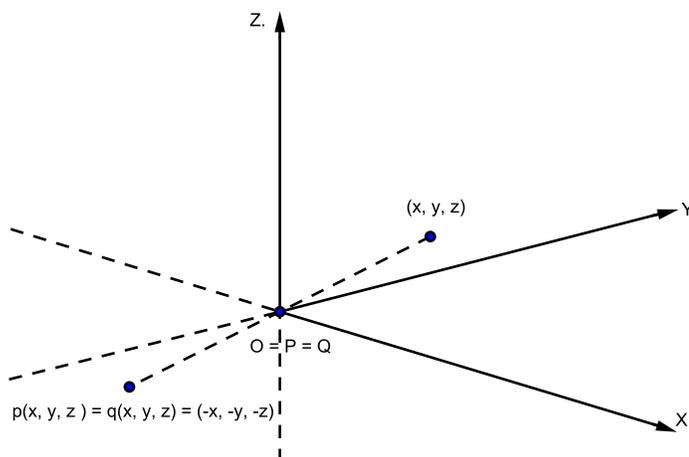


Figura 3.30: As inversões  $p$  e  $q$  comutam

- Sejam  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  três retas perpendiculares entre si, concorrentes num ponto  $O$ . Fica assim determinado um sistema de coordenadas cartesianas de eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  e origem  $O$ . Seja  $m$  a meia-volta de eixo  $M$  igual ao eixo  $x$  e  $p$  a inversão de centro  $P$ , com  $P \in M$ . Seja  $(x, y, z)$  um ponto do espaço, a meia-volta  $m$  e a inversão  $p$  envia o ponto  $(x, y, z)$  para  $(x, -y, -z)$  e  $(x, -y, -z)$ . Queremos provar que  $mp = pm$ , ou seja  $m$  e  $p$  comutam. Desta forma, temos:

- $mp(x, y, z) = p(m(x, y, z)) = p(x, -y, -z) = (x, -(-y), -(-z)) = (x, y, z)$
- $pm(x, y, z) = m(p(x, y, z)) = m(x, -y, -z) = (x, -(-y), -(-z)) = (x, y, z)$ .

Logo,  $mp = pm$ , ou seja,  $m$  e  $p$  comutam.

- Sejam  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  três retas perpendiculares entre si, concorrentes num ponto  $O$ . Fica assim determinado um sistema de coordenadas cartesianas de eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  e origem

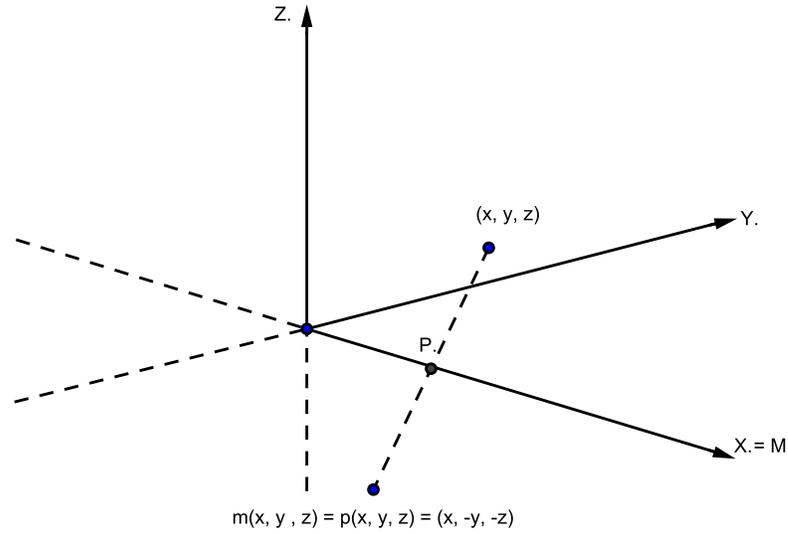


Figura 3.31: A meia-volta e a inversão comutam

$O$ . Seja  $a$  a reflexão com espelho  $A$  igual ao plano  $XZ$  e  $p$  a inversão de centro  $P$ , com  $P \in A$ . Seja  $(x, y, z)$  um ponto do espaço, a reflexão  $a$  e a inversão  $p$  envia o ponto  $(x, y, z)$  para  $(x, -y, z)$  e  $(x, -y, z)$ . Queremos provar que  $ap = pa$ , ou seja  $a$  e  $p$  comutam. Desta forma, temos:

- $ap(x, y, z) = p(a(x, y, z)) = p(x, -y, z) = (x, -(-y), z) = (x, y, z)$
- $pa(x, y, z) = a(p(x, y, z)) = m(x, -y, z) = (x, -(-y), z) = (x, y, z)$ .

Logo,  $mp = pm$ , ou seja,  $a$  e  $p$  comutam.

4. Sejam  $X, Y$  e  $Z$  três retas perpendiculares entre si, concorrentes num ponto  $O$ . Fica assim determinado um sistema de coordenadas cartesianas de eixos  $X, Y$  e  $Z$  e origem  $O$ . Seja  $m$  a meia-volta de eixo  $M$  igual ao eixo  $X$  e  $n$  a meia-volta de eixo  $N$  igual ao eixo  $Y$ , com  $M \perp N$ . Seja  $(x, y, z)$  um ponto do espaço, as meias-voltas  $m$  e  $n$  enviam o ponto  $(x, y, z)$  para  $(x, -y, -z)$  e  $(-x, y, -z)$ , respectivamente. Queremos provar que  $mn = nm$ , ou seja, que  $m$  e  $n$  são distintos e comutam. Desta forma, temos:

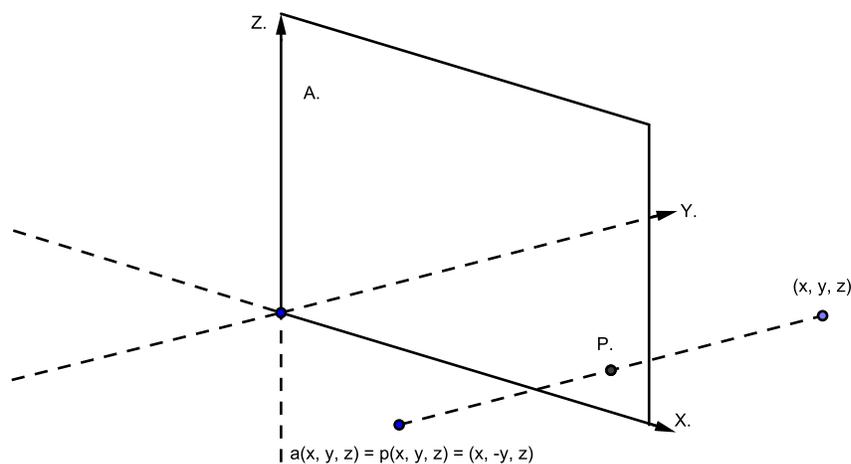


Figura 3.32: A reflexão e a inversão comutam

- $mn(x, y, z) = n(m(x, y, z)) = n(x, -y, -z) = (-x, -y, -(-z)) = (-x, -y, z)$
- $nm(x, y, z) = m(n(x, y, z)) = m(-x, y, -z) = (-x, -y, -(-z)) = (-x, -y, z).$

Logo,  $mn = nm$ , ou seja,  $m$  e  $n$  comutam e, como  $M \perp N$  com  $m(x, y, z) = (x, -y, -z)$  e  $n(x, y, z) = (-x, y, -z)$ , temos que  $m$  e  $n$  são distintas.

5. Sejam  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  três retas perpendiculares entre si, concorrentes num ponto  $O$ . Fica assim determinado um sistema de coordenadas cartesianas de eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  e origem  $O$ . Seja  $m$  a meia-volta de eixo  $M$  igual ao eixo  $X$  e  $a$  a reflexão com espelho  $A$  igual ao plano  $XZ$ , com  $M \perp A$ . Seja  $(x, y, z)$  um ponto do espaço, a reflexão  $a$  envia o ponto  $(x, y, z)$  para  $(x, -y, z)$  e a meia-volta  $m$  envia o ponto  $(x, y, z)$  para  $(-x, y, -z)$ . Queremos provar que  $am = ma$ , ou seja  $a$  e  $m$  comutam. Desta forma, temos:

- $am(x, y, z) = m(a(x, y, z)) = m(x, -y, z) = (-x, -y, -z)$
- $ma(x, y, z) = a(m(x, y, z)) = a(-x, y, -z) = (-x, -y, -z)$

Logo,  $am = ma$ , ou seja,  $a$  e  $m$  comutam.

Agora consideremos  $M \subseteq A$ . A reflexão  $a$  com espelho  $A$  envia o ponto  $(x, y, z)$  para

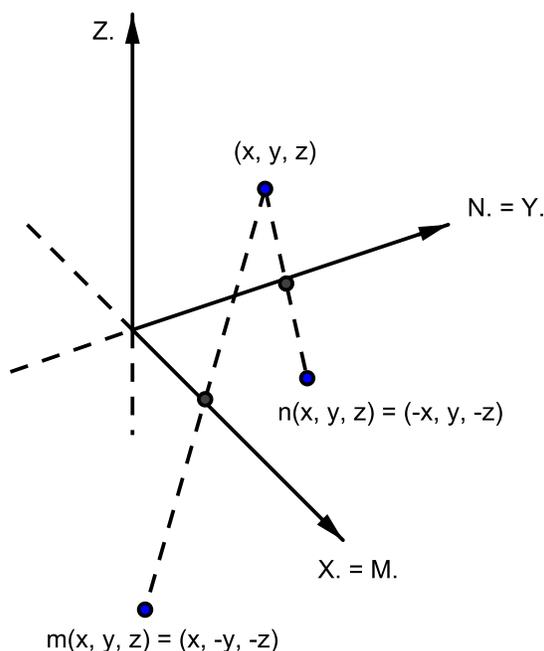


Figura 3.33: As meias-voltas  $m$  e  $n$  comutam

$(x, -y, z)$  e a meia-volta  $m$  de eixo  $M$  envia o ponto  $(x, y, z)$  para  $(x, -y, z)$ . Queremos provar que  $am = ma$ , ou seja  $a$  e  $m$  comutam. Desta forma, temos:

- $am(x, y, z) = m(a(x, y, z)) = m(x, -y, z) = (x, y, z)$
- $ma(x, y, z) = a(m(x, y, z)) = a(x, -y, z) = (x, y, z)$

Logo,  $am = ma$ , ou seja,  $a$  e  $m$  comutam.

6. Sejam  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  três retas perpendiculares entre si, concorrentes num ponto  $O$ . Fica assim determinado um sistema de coordenadas cartesianas de eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  e origem  $O$ . Sejam  $a$  e  $b$  reflexões com espelhos  $A$  o plano  $XZ$  e  $B$  o plano  $YZ$ , respectivamente. Seja  $(x, y, z)$  um ponto do espaço, as reflexões  $a$  e  $b$  enviam o ponto  $(x, y, z)$  para  $(x, -y, z)$  e  $(-x, y, z)$ , respectivamente. Queremos provar que  $ab = ba$ , ou seja  $a$  e  $b$  comutam e são distintos. Desta forma, temos:

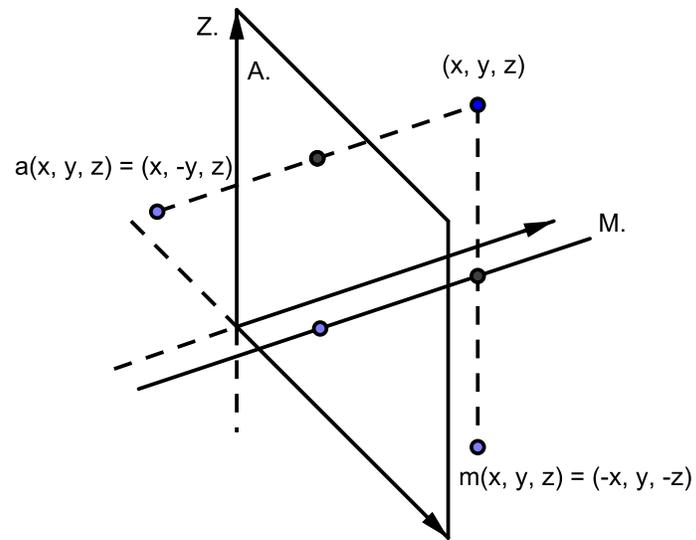


Figura 3.34: A reflexão e meia-volta comutam

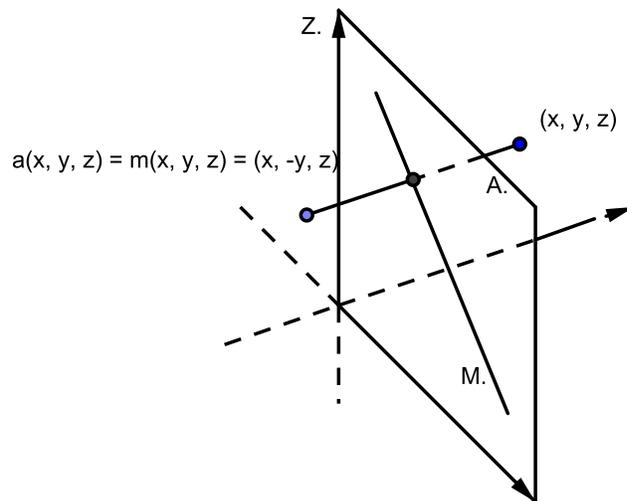


Figura 3.35: A reflexão e a meia-volta comutam

- $ab(x, y, z) = b(a(x, y, z)) = b(x, -y, z) = (-x, -y, z)$

- $ba(x, y, z) = a(b(x, y, z)) = a(-x, y, z) = (-x, -y, z)$

Logo,  $ab = ba$ , ou seja,  $a$  e  $b$  comutam e como  $A \perp B$  com  $a(x, y, z) = (x, -y, z)$  e  $b(x, y, z) = (-x, y, z)$ . Portanto,  $a$  e  $b$  são reflexões distintas.

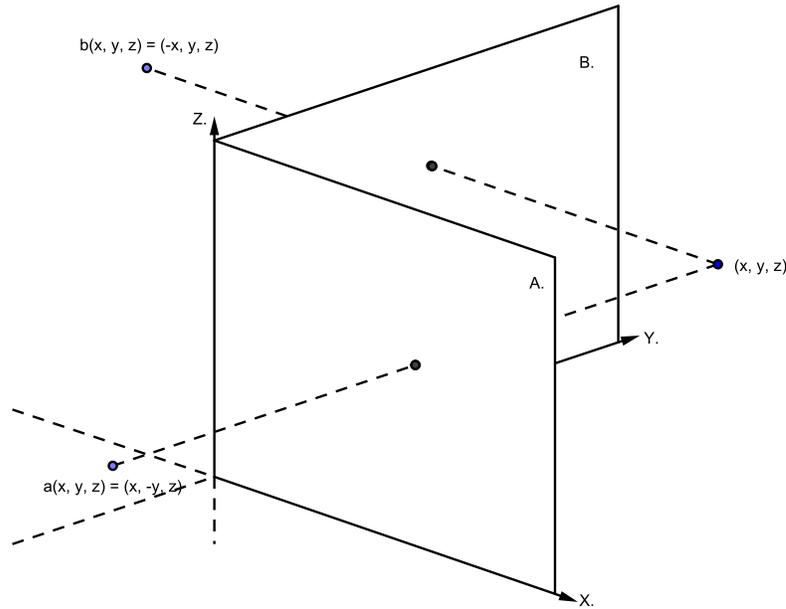


Figura 3.36: As reflexões  $a$  e  $b$  comutam

□

**Teorema 3.3.5.** *Sejam  $A$ ,  $B$ , e  $C$  três planos mutuamente perpendiculares intersectando-se no ponto  $W$ . Seja  $L = B \cap C$ ,  $M = A \cap C$  e  $N = A \cap B$  retas da interseção. Então  $\{I, a, b, c, l, m, n, w\}$  é um grupo abeliano com produto determinado como segue, para retas  $K \in \{L, M, N\}$  e planos  $D \in \{A, B, C\}$ :*

1. *Se  $K \perp D$ , então o produto de quaisquer dois de  $w, k$  e  $d$ , em qualquer ordem, é o terceiro.*
2. *Se  $D_1 \perp D_2$ , então  $d_1 d_2 = d_2 d_1$  é uma meia-volta cujo eixo contém  $D_1 \cap D_2$ .*
3. *Se  $K_1 \perp K_2$ , então  $k_1 k_2 = k_2 k_1$  é uma meia-volta cujo eixo contém  $K_1 \cap K_2$  e é perpendicular a  $K_1$  e  $K_2$ .*

4. Se  $K \subseteq D$ , então  $kd = dk$  é uma reflexão cujo espelho contém  $K$  e é perpendicular a  $D$ .

*Demonstração.* Consideremos os seguintes indicações:

- 1 indica a identidade.
- $a$  indica a reflexão com espelho  $A$ .
- $b$  indica a reflexão com espelho  $B$ .
- $c$  indica a reflexão com espelho  $C$ .
- $l$  indica a meia-volta com eixo  $L$ .
- $m$  indica a meia-volta com eixo  $M$ .
- $n$  indica a meia-volta com eixo  $N$ .
- $w$  indica a inversão de centro  $W$ .

Veja que, se  $K \in \{L, M, N\}$  então  $K = L, M$  ou  $N$ , enquanto que, se  $D \in \{A, B, C\}$  então  $D = A, B$  ou  $C$ . Introduzindo um sistema de coordenadas cartesianas com  $L$  como o eixo  $X$ ,  $M$  como o eixo  $Y$  e  $N$  como o eixo  $Z$ , temos:

1. Sejam  $K = L$  e  $D = A$ . Se  $L \perp A$ , queremos provar que  $wl = a$ ,  $wa = l$  e  $al = w$ . Vejamos cada situação.

Dado um ponto  $X(x, y, z)$ , a meia volta  $l$  com eixo  $L$ , envia  $X(x, y, z)$  para  $l(X) = l(x, y, z) = (x, -y, z)$ , a inversão  $w$  de centro  $W$ , envia  $X = (x, y, z)$  para  $w(X) = w(x, y, z) = (-x, -y, -z)$  e a reflexão  $a$  com espelho  $A$  envia  $X(x, y, z)$  para  $a(X) = a(x, y, z) = (-x, y, z)$ . Temos assim,

- $lw(X) = w(l(X)) = w(x, -y, z) = (-x, -(-y), -(z)) = (-x, y, z) = a$
- $aw(X) = w(a(X)) = w(-x, y, z) = (-(-x), -(y), -(z)) = (x, -y, -z) = l$
- $al(X) = l(a(X)) = l(-x, y, z) = (-x, -(y), -(z)) = (-x, -y, -z) = w$

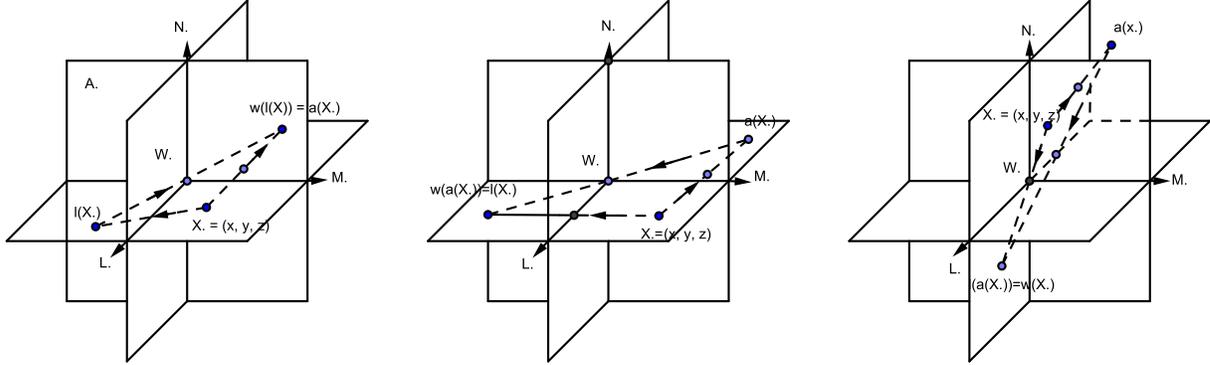


Figura 3.37: Produto de duas involuções

2. Seja  $D_1 \perp D_2$ . Tome  $D_1 = B$  e  $D_2 = C$ . Conseqüentemente,  $d_1 = b$  e  $d_2 = c$  são reflexões com espelhos  $B$  e  $C$ , respectivamente. Vejamos a situação:

Dado um ponto  $X(x, y, z)$ , temos que  $b(X) = b(x, y, z) = (x, -y, z)$  e  $c(X) = c(x, y, z) = (x, y, -z)$ . Sendo assim,

- $bc(X) = c(b(X)) = c(x, -y, z) = (x, -y, -z)$
- $cb(X) = b(c(X)) = b(x, y, -z) = (x, -y, -z)$

Logo,  $bc = cb = (x, -y, -z) = l$  que a meia volta cujo o centro pertence a  $D_1 \cap D_2$  ou  $B \cap C$ .

3. Seja  $K_1 \perp K_2$ . Tome  $K_1 = M$  e  $K_2 = N$ . Nestas condições  $m$  e  $n$  são inversões com eixos  $M$  e  $N$  respectivamente. Dado um ponto  $X = (x, y, z)$  temos que  $m(X) = m(x, y, z) = (-x, y, -z)$  e  $n(X) = n(x, y, z) = (-x, -y, z)$ . Temos assim,

- $mn(X) = n(m(X)) = n(-x, y, -z) = (-(-x), -(-y), -z) = (x, -y, -z)$
- $nm(X) = m(n(X)) = m(-x, -y, z) = (-(-x), (-y), (-z)) = (x, -y, -z)$ .

Logo,  $mn = nm = (x, -y, -z) = l$  que é a meia-volta de eixo  $L$ , cujo o centro contém  $W = L \cap M \cap N$  e, além disso, são mutuamente perpendiculares.

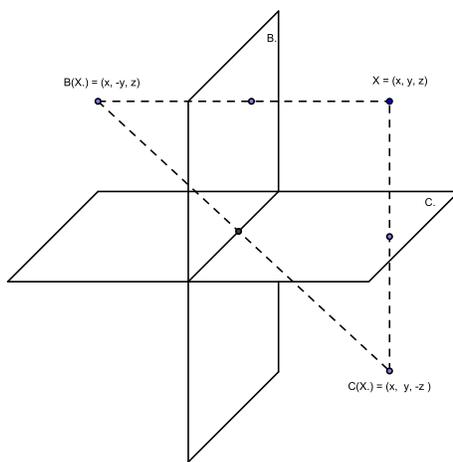


Figura 3.38: Meia-volta por meio de produto de reflexões

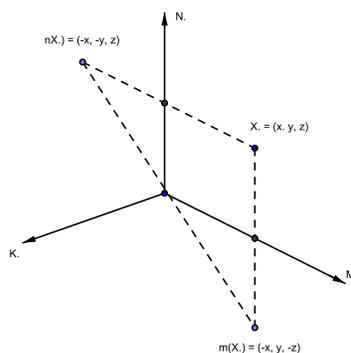


Figura 3.39: Inversão por meio de meias-voltas

4. Seja  $K = M$  e  $D = A$ . Nestas condições,  $a$  é a reflexão com espelho  $A$  e  $m$  é a meia-volta com eixo  $M$ ,  $M \subset A$ . Dado um ponto  $X = (x, y, z)$ , temos que,  $m(X) = m(x, y, z) = (-x, y, -z)$  e  $a(X) = a(x, y, z) = (-x, y, z)$ . Temos assim que:

- $am(X) = m(a(X)) = m(-x, y, z) = (-(-x), y, -(z)) = (x, y, -z)$
- $ma(X) = a(m(X)) = a(-x, y, -z) = (-(-x), y, -z) = (x, y, -z)$ .

Logo,  $am = ma = (x, y, -z) = c$  que é a reflexão com espelho  $C$ .

□

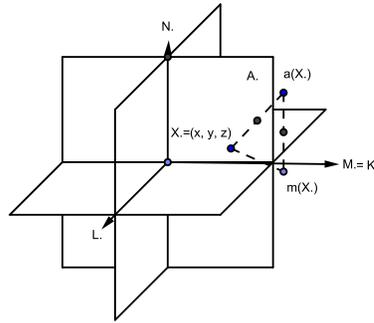


Figura 3.40: Reflexão e meias-voltas

### 3.4 Classificação das Isometrias

Como já é do nosso conhecimento, reflexões, meia-voltas e inversões são isometrias e geram um subgrupo de  $E$ . Nosso objetivo nessa seção é mostrar que, de fato, reflexões, meia-voltas e inversões são isometrias geradoras de  $E$ , e que isometrias podem ser classificadas por alguns tipos distintos que são fáceis de serem visualizados, ou seja, vamos estudar o produto de duas reflexões para entender dois tipos familiares de isometrias, que são a rotação e a translação.

**Definição 3.4.1.** *Sejam  $a$  e  $b$  reflexões cujos os espelhos são  $A$  e  $B$ , respectivamente, então:*

1. *Se  $A$  e  $B$  são planos não-disjuntos, então  $ab$  é chamada uma **rotação**. Se  $A \neq B$  então a reta  $A \cap B$  é chamada **eixo de rotação** e o dobro do ângulo de  $A$  para  $B$  é definido como o **ângulo de rotação**.*
2. *Se  $A$  e  $B$  são paralelos então  $ab$  é chamada uma **translação**. E, se além disso  $A \neq B$ , então a direção perpendicular aos planos  $A$  e  $B$  é considerada a direção da translação, e o dobro da distância entre  $A$  e  $B$  é o **comprimento da translação**.*
3. *Se  $A = B$ , então  $ab = 1$ , onde 1 é considerada uma **translação de comprimento zero** ou uma **rotação com ângulo zero**.*

Noção intuitiva de rotação e translação:

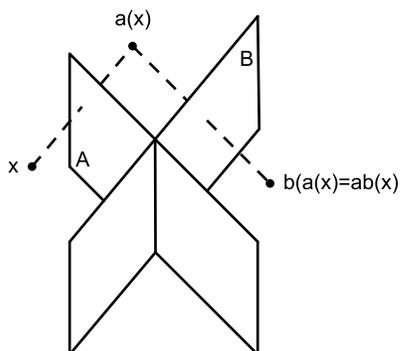


Figura 3.41: Ilustração da definição da rotação

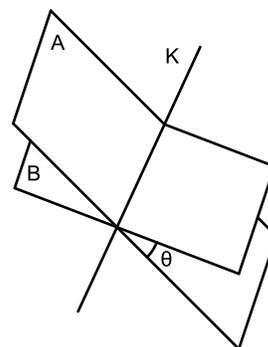


Figura 3.42: Ilustração da definição do ângulo entre  $A$  e  $B$

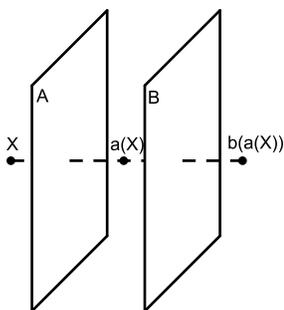


Figura 3.43: Ilustração da definição da translação

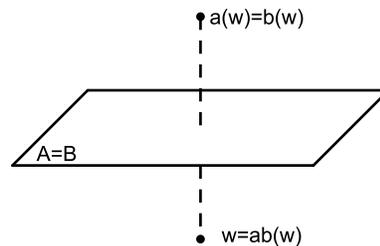


Figura 3.44: Ilustração da definição da translação de comprimento zero

• Rotação:

Vamos assumir que  $K = A \cap B$  e que o ângulo entre  $A$  e  $B$ , de  $A$  para  $B$ , é  $\alpha$ . Introduzindo um sistema de coordenadas cilíndricas com  $K$  como o eixo  $z$ , o plano  $A$  como o plano no qual o ângulo polar é zero, e o plano  $B$  como o plano no qual  $\theta = \alpha$ , observe que:

$$a(r, \theta, z) = (r, -\theta, z),$$

$$b(r, \theta, z) = (r, 2\alpha - \theta, z)$$

e

$$ab(r, \theta, z) = b(a(r, \theta, z)) = b(r, -\theta, z) = (r, 2\alpha - (-\theta), z) = (r, 2\alpha + \theta, z) \quad ba(r, \theta, z) = a(b(r, \theta, z)) = a(r, 2\alpha - \theta, z) = (r, -(2\alpha - \theta), z) = (r, -2\alpha + \theta, z).$$

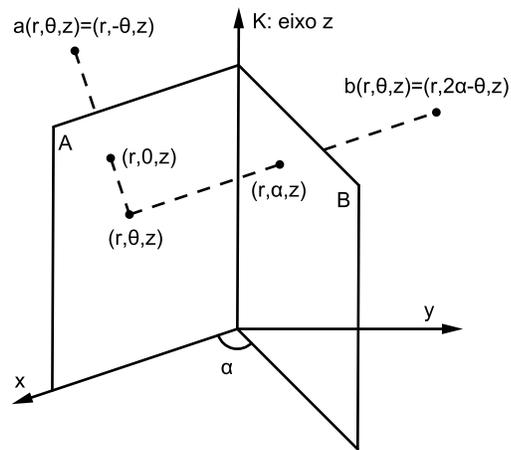


Figura 3.45: Rotação

Temos assim que,  $ab$  é uma rotação por meio do ângulo  $2\alpha$  e  $ba$  é uma rotação por meio do ângulo  $-2\alpha$  implicando  $ab \neq ba$ , se  $\alpha \neq 0^\circ$  ou  $\alpha \neq 90^\circ$ .

- Translação:

Sendo  $A$  e  $B$  planos paralelos, introduzindo um sistema de coordenadas cartesianas na qual  $A$  é o plano  $xz$  e  $B$  é o plano  $y = k$ , observe que:

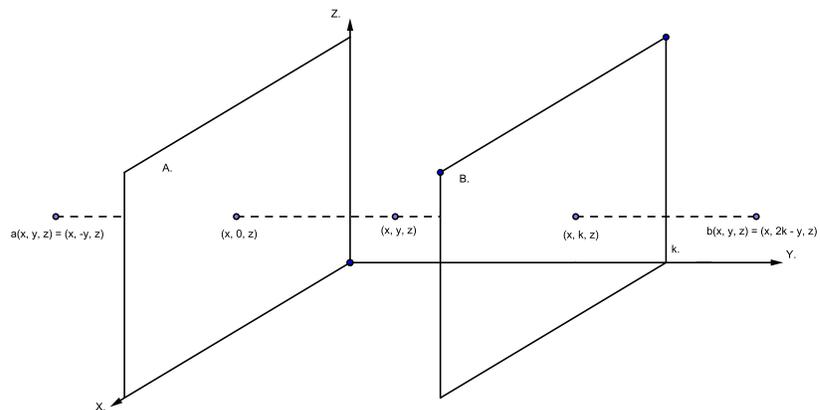


Figura 3.46: Translação

$$a(x, y, z) = (x, -y, z),$$

$$b(x, y, z) = (x, 2k - y, z) \text{ e}$$

$$ab(x, y, z) = b(a(x, y, z)) = b(x, -y, z) = (x, 2k - (-y), z) = (x, 2k + y, z) \quad ba(x, y, z) = a(b(x, y, z)) = a(x, 2k - y, z) = (x, -(2k - y), z) = (x, -2k + y, z).$$

Temos assim que,

$ab$  é uma translação de comprimento  $2k$  unidades ao longo do eixo  $y$  e  $ba$  é uma translação de comprimento  $-2k$  unidades ao longo do eixo  $y$ , implicando que  $ba$  é a translação oposta à translação  $ab$ , se  $k \neq 0$ , isto é,  $(ab)^{-1} = ab$ .

### Produto de translação e rotação

**Definição 3.4.2.** *Sejam  $\tau$  uma translação e  $\rho$  uma rotação tal que  $K$ , o eixo de  $\rho$ , é a direção de  $\tau$ . O produto  $\rho\tau$  é chamado de **deslocamento em parafuso** ou **isometria helicoidal** com eixo  $K$ .*

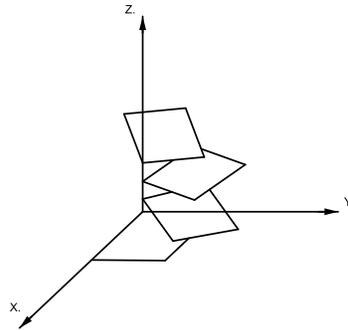


Figura 3.47: Deslocamento em parafuso

- $\rho\tau$  indica deslocamento em parafuso com eixo de rotação  $K$  igual ao eixo  $z$ , no qual  $\tau$  é a translação e  $\rho$  a rotação.
- $\tau$  e  $\rho$  comutam. ou seja,  $\tau\rho = \rho\tau$ .

**Definição 3.4.3.** *Seja  $\tau$  uma translação deixando o plano  $A$  globalmente invariante. O produto  $\tau a$ , onde  $a$  é a reflexão com espelho  $A$ , é chamado **reflexão deslizante**.*

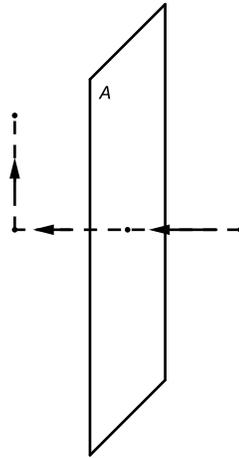


Figura 3.48: Reflexão deslizante

- $\tau a$  indica a reflexão deslizante, na qual  $\tau$  é a translação e  $a$  é a reflexão com espelho  $A$ .
- $\tau$  e  $a$  comutam, ou seja,  $\tau a = a\tau$ .

**Definição 3.4.4.** *Sejam  $\rho$  uma rotação com eixo  $K$  e  $X$  um ponto no eixo  $K$ . O produto  $\rho x$ , onde  $x$  é a inversão de centro  $X$ , é chamado de **inversão rotatória**.*

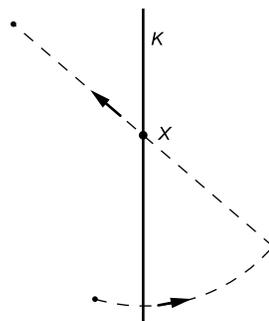


Figura 3.49: Inversão rotatória

- $\rho x$  indica uma inversão rotatória com eixo  $K$  igual ao eixo  $z$  na qual  $\rho$  é a rotação e  $x$  a inversão de centro  $X$ .
- $\rho$  e  $x$  comutam, ou seja,  $\rho x = x\rho$ .

A transformação  $\rho x$  é também chamada **reflexão rotatória** desde que pode ser realizada como o produto da rotação  $\rho k$  e da reflexão  $a$  com espelho  $A$ , plano através de  $X$  perpendicular para  $K$ , isto é,  $\rho x = \rho(ka) = (\rho k)a$ . Observe que, se  $\rho$  é uma rotação e  $x$  uma inversão, então  $\rho x = x\rho$  se, e somente se,  $\rho(X) = X$ , ou seja,  $X$  está no eixo de rotação. No caso em que  $\tau$  é uma translação  $\tau a = a\tau$  se, e somente se,  $\tau(A) = A$ , ou seja,  $A$  é globalmente invariante.

Certas isometrias podem ser vistas de mais de uma forma. Observamos que a identidade pode ser vista como uma translação ou uma rotação e, além disso, pode ser vista como um deslocamento em parafuso degenerado. Analogamente, translações e rotações podem ser entendidas como deslocamentos em parafuso degenerados e as reflexões podem ser entendidas como uma reflexão deslizante ou uma inversão rotatória, isto é, a reflexão é o produto da meia-volta, rotação de  $180^\circ$  sobre uma reta perpendicular ao espelho, seguida pela inversão em relação ao ponto de interseção do plano e a reta. Para este estudo, vamos mostrar que deslocamento em parafuso, reflexão deslizante e inversão rotatória podem ser representadas como o produto de duas involuções.

**Proposição 3.4.1.** *Uma reflexão deslizante, um deslocamento em parafuso ou uma inversão rotatória podem ser representadas como um produto de duas involuções nas quais o primeiro fator é a meia-volta e o segundo é uma inversão, uma meia-volta ou uma reflexão, respectivamente.*

*Demonstração.* 1. Consideremos os planos  $A, B$  e  $C$  assim dispostos:  $B$  e  $C$  paralelos e perpendiculares a  $A$ . Escolha um plano  $D$  tal que  $D \perp A \cap B$ , com  $k = B \cap D$  e  $X = A \cap C \cap D$ . Sejam  $a, b, c$  e  $d$  reflexões com espelhos  $A, B, D$  e  $D$  respectivamente. Seja  $\tau a$  uma reflexão deslizante. Queremos provar que  $\tau a$  pode ser representada como um produto de duas involuções que deixa o plano  $A$  globalmente invariante, onde  $\tau$  é uma translação e  $a$  é a reflexão com espelho  $A$

Como  $B // C$  temos que, dado um ponto  $P$ , a reflexão de  $P$  em relação aos espelhos  $B$  e  $C$  é  $c(b(P)) = bc(P)$ , onde  $bc$  é uma translação. Fazendo  $\tau = bc$  temos que:

$\tau a = ((bc)a)(P) = ((bIc)a)(P) = ((b(dd)c)a)(P) = (bd)(dca)(P) = (kx)(P)$ , onde  $k$  é a meia-volta com eixo  $K$  e  $x$  é a inversão de centro  $X$ . Além disso,  $K$  e  $x$  são involuções.

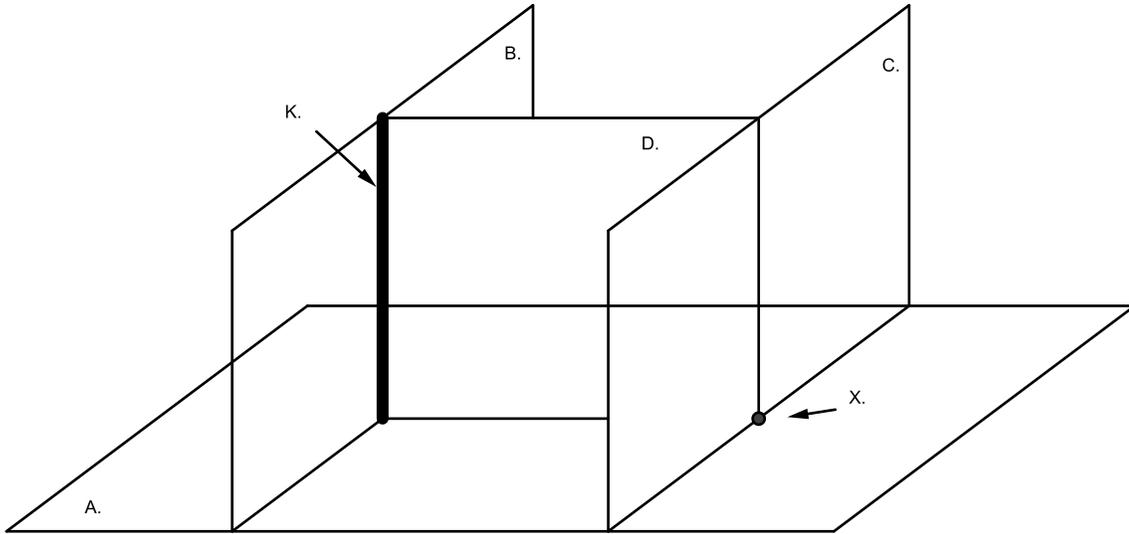


Figura 3.50: Composição de translação e reflexão

2. Consideremos os planos  $A, B, C$  e  $D$  assim dispostos:  $C$  e  $D$  paralelos e perpendiculares a  $A \cap B$ . Sejam  $a, b, c$  e  $d$  reflexões com espelhos  $A, B, C$  e  $D$  respectivamente. Assumindo que  $\rho\tau$  é um deslocamento em parafuso, queremos provar que  $\rho\tau$  pode ser representado como o produto de duas involuções e que desloca ao longo de  $A \cap B$  os planos  $C$  e  $D$ , ambos perpendiculares a  $A \cap B$  com rotação  $\rho$  e translação  $\tau$ .

Como  $C \parallel D$  temos que dado um ponto  $P$  qualquer a reflexão de  $P$  em relação aos planos  $C$  e  $D$  é  $d(c(P)) = cd(P)$ . Fazendo  $\tau = cd$  e considerando  $N = B \cap C$ ,  $M = d(N)$  e  $K = A \cap D$ , e, usando o Teorema 3.3.2,  $d^i(n) = m$ , o que implica  $dnd = m$ , de onde vem que  $nd = dm$ . Sendo assim  $\rho\tau = abcd = a(bc)d = and = km$  onde  $k$  é a meia volta com eixo  $K = A \cap D$  e  $m$  a meia-volta com eixo  $M = d(N)$ .

3. Consideremos os planos  $A, B, C$  e  $D$  assim dispostos:  $B, C$  e  $D$  são mutuamente

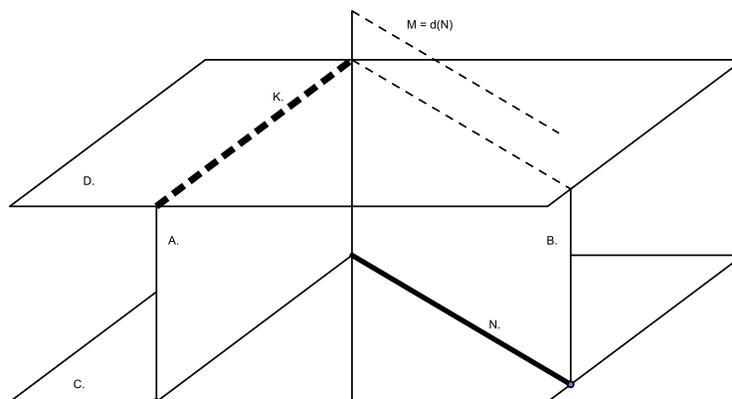


Figura 3.51: Composição de rotação e translação

perpendiculares e  $A$  perpendicular a  $C$  e  $B \cap D \subset A$ . Sejam  $a, b, c$  e  $d$  reflexões com espelhos  $A, B, C$  e  $D$ , respectivamente. Assumindo que  $\rho x$  é uma inversão rotatória, queremos provar que  $\rho x$  pode ser representado como o produto de duas involuções. Assuma que  $\rho = ab$  com o plano  $C$  perpendicular à  $A \cap B$  e  $X = A \cap B \cap C$  e  $K = A \cap B$ .

Assim,  $\rho x = (ab)(bcd) = a(bb)cd = aIcd = acd = kd$ , onde  $k$  é a meia-volta com eixo  $k$  e  $d$  é a reflexão com espelho  $D$ .

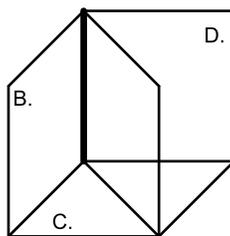


Figura 3.52: Composição de rotação e meia-volta

□

**Definição 3.4.5.** Sejam  $R_1, R_2$  e  $R_3$  três semi-retas, mutuamente perpendiculares, com origem comum no ponto  $W$ . Esta tripla ordenada é chamada positivamente orientada se o sistema de coordenadas tendo  $R_1$  como o eixo- $x$  positivo,  $R_2$  como o eixo- $y$  positivo e  $R_3$

como o eixo- $z$  positivo satisfaz a **regra da mão direita**<sup>4</sup>, caso contrário é negativamente orientada, ou seja, satisfaz a **regra da mão esquerda**.

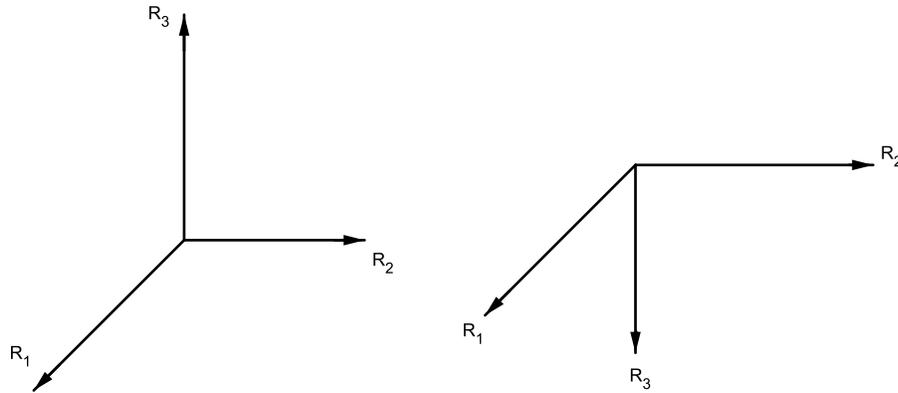


Figura 3.53: Regras da direita e esquerda

**Definição 3.4.6.** Dizemos que  $\phi$  é uma **similaridade direta** se transforma toda tripla ordenada orientada positivamente em tripla ordenada orientada positivamente. Se transforma uma tripla ordenada orientada positivamente em uma orientada negativamente então é chamada **similaridade oposta**.

No próximo teorema vamos mostrar que reflexões geram  $E$ , como também construir as bases para classificar isometrias.

**Teorema 3.4.1.** Se uma isometria tem pelo menos  $k$  pontos independentes fixos,  $k = 0, 1, 2, 3$  ou  $4$ , então pode ser fatorada como o produto de no máximo  $4 - k$  reflexões. Além disso, as reflexões podem ser escolhidas de modo que seus espelhos contenham todos os pontos fixos.

*Demonstração.* Vamos assumir que  $\phi$  é uma isometria e que  $X_1, X_2, \dots, X_k$  são pontos independentes fixados por  $\phi$ , isto é,  $\phi(X_1) = X_1, \phi(X_2) = X_2, \dots, \phi(X_k) = X_k$ , com  $k = 0, 1, 2$  ou  $4$ . Veja que:

<sup>4</sup>ver [19]

1. Se  $k = 4$ , pelo Teorema 3.2.8 temos que  $\phi = id = 1$ .
2. Se  $\phi \neq 1$ , então  $k \leq 3$ . Assim podemos escolher um ponto  $Y$  tal que  $\phi(Y) \neq Y$ . Seja  $a$  a reflexão com espelho  $A$ , e  $A$  um bissetor de  $[Y, \phi(Y)]$ . Desde que  $X_i = \phi(X_i)$  e  $\phi$  preserva distâncias, isto é,  $|X_i, Y| = |X_i, \phi(Y)|$ , temos que os  $X_i$  estão em  $A$ . Segue assim, claramente, que a isometria  $\phi a$  deixa todos os pontos  $X_i$  e o ponto  $Y$  fixos. Pelo Teorema 3.2.8 estes  $k + 1$  pontos são independentes. Continuando o processo no máximo  $4 - k$  vezes, concluímos que  $\phi$  seguida de no máximo  $4 - k$  reflexões é a identidade, isto é,  $\phi$  é o produto, na ordem inversa, destas reflexões.

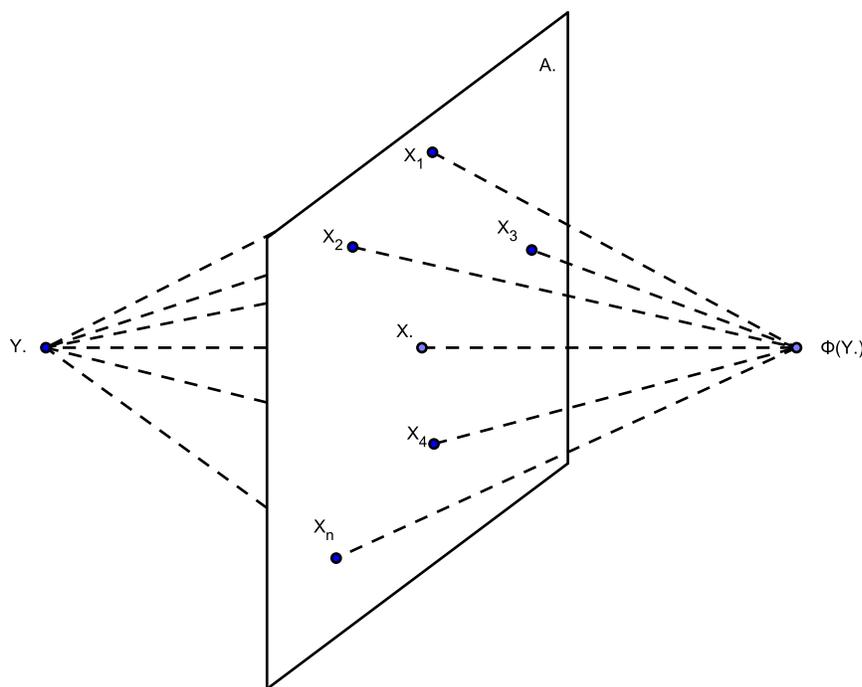


Figura 3.54: Reflexão e seus pontos fixos

□

**Corolário 3.4.1.** *Existe um único homomorfismo de  $E$  sobre um grupo de ordem dois. O núcleo deste homomorfismo consiste de todas isometrias diretas e não inclui qualquer reflexão. Assim, uma isometria é direta se, e somente se, pode ser fatorada como o produto*

de 0, 2 ou 4 reflexões e é oposta se, e somente se, ela pode ser fatorada como o produto de 1 ou 3 reflexões.

*Demonstração.* Seja  $G = \{e, p\}$  um grupo de dois elementos com identidade  $e$ , note que, existe uma única possibilidade para a tabela de multiplicação.

	$e$	$p$
$e$	$e$	$p$
$p$	$p$	$e$

Tabela 3.1: Tabela de produto

O produto de dois elementos de  $G$  é  $p$  se, e somente se, exatamente um dos fatores é  $p$ .

- Existência:

Provaremos que a aplicação  $f$  que envia isometrias diretas para  $e$  e opostas para  $p$  é um homomorfismo  $f : E \rightarrow G$ ,  $E \subseteq S$ . De fato:

1. Se  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são isometrias diretas, então:  $f(\phi_1\phi_2) = e$  pois, pela definição de similaridades opostas e diretas, temos que o produto de duas isometrias é oposta se, e somente se, exatamente um dos fatores é o oposto. Como  $f(\phi_1) = e$  e  $f(\phi_2) = e$ , obtemos  $f(\phi_1\phi_2) = e = ee = f(\phi_1)f(\phi_2)$ .
2. Se  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são isometrias oposta e direta, respectivamente, então:  $f(\phi_1\phi_2) = p = ep = f(\phi_1)f(\phi_2)$ .
3. Se  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são isometrias direta e oposta, respectivamente, então:  $f(\phi_1\phi_2) = p = pe = f(\phi_1)f(\phi_2)$ .
4. Se  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são isometrias opostas, então:  $f(\phi_1\phi_2) = e$ ,  $f(\phi_1) = p$  e  $f(\phi_2) = p$ . Logo,  $f(\phi_1\phi_2) = e = pp = f(\phi_1)f(\phi_2)$ .

Logo,  $f : E \rightarrow G$  é um homomorfismo de  $E$  sobre  $G$ .

- Unicidade:

Assumindo agora que  $g : E \rightarrow G$  é qualquer homomorfismo sobrejetivo, e que  $H$  é o núcleo de  $g$ . O núcleo de  $H$  é distinto de  $E$  pois o homomorfismo  $g$  é sobrejetivo e a ordem de  $G$  é 2.

Considere as reflexões  $a$  e  $b$ , com espelhos  $A$  e  $B$ , respectivamente, e com  $a$  pertencente ao núcleo  $H$  de  $g$ .

Se  $A$  e  $B$  não forem paralelos, considere a rotação  $\rho$  em torno da reta  $K = A \cap B$ , com ângulo igual ao ângulo entre os planos  $A$  e  $B$ , no sentido de  $B$  para  $A$ . Então  $\rho(B) = A$  e  $a = \rho^{-1}b\rho$ .

Se  $A$  e  $B$  forem paralelos, em vez de  $\rho$ , considere a translação  $\tau$  que leva  $B$  em  $A$ , isto é,  $\tau(B) = A$ . Neste caso temos, também,  $a = \tau^{-1}b\tau$ . Assim,

- Se  $A$  e  $B$  não forem paralelos, temos:

Como  $a \in H$ ,

$$e = g(a) = g(\rho^{-1}b\rho) = g(\rho^{-1})g(b)g(\rho) = g(\rho^{-1})g(\rho)g(b) = g(\rho^{-1}\rho)g(b) = g(1)g(b) = eg(b) = g(b).$$

Portanto,  $b \in \ker(g)$ .

- Se  $A$  e  $B$  forem paralelos, de modo análogo, temos  $e = g(a) = g(\tau^{-1}b\tau) = g(b)$  e, também,  $b \in H$ .

Assim, se uma reflexão está no núcleo de  $g$ , isto é, em  $H$ , então todas as reflexões estão em  $H$ . Mas, o grupo  $E$  é gerado pelas reflexões e  $H \neq E$ . Assim, não podemos ter nenhuma reflexão em  $H$ , e, portanto,  $g$  leva todas as reflexões em  $p$ , assim como  $f$ .

Como as reflexões geram  $E$  e  $f$  e  $g$  coincidem nas reflexões, temos que os homomorfismos  $f$  e  $g$  são iguais, isto é,  $f = g$ . □

**Notações:**

- O Grupo das Isometrias que deixam  $X$  invariante é denotado por  $[E, X]$ .

- O Grupo das Isometrias Diretas que deixam  $X$  invariante é denotado por  $[E^+, X]$ .
- O Grupo das Similaridades Diretas é denotado por  $S^+$ .
- O grupo das Isometrias Diretas é denotado por  $S^+ \cap E$ .

**Corolário 3.4.2.** *Uma isometria direta com pelo menos um ponto invariante  $X$ , é uma rotação, cujo eixo contém  $X$ , possivelmente a identidade. Por conseguinte, as rotações com eixo  $X$  formam um grupo, ou seja, o grupo  $[E^+, X]$ . Este grupo não é abeliano.*

*Demonstração.* Seja  $\phi$  uma isometria com pelo menos um ponto invariante  $X$ , isto é,  $\phi \in [E, X]$ . Pelo Teorema 3.4.1,  $\phi \in [E, x]$  é o produto de no máximo três reflexões todas cujos espelhos contém  $X$ , e se além disso,  $\phi$  é direta, então  $\phi$  é 1 ou é o produto de duas reflexões  $a$  e  $b$  com espelhos  $A$  e  $B$ , respectivamente, e  $X \in A \cap B$ . Em outras palavras,  $\phi$  é a identidade ou  $\phi$  é uma rotação com eixo passando por  $X$ .

Se  $m$  e  $n$  são meias-voltas, com eixos  $M$  e  $N$ , distintas e não perpendiculares, com  $X \in M \cap N$  temos então que  $m$  e  $n$  estão em  $[E^+, X]$ . Mas claro, pela Parte 4 do Teorema 3.3.4, temos  $mn \neq nm$ . Assim  $[E^+, X]$  não é abeliano e contém somente rotações com eixo passando por  $X$ . Claro que, qualquer rotação, com  $X$  pertencendo ao eixo, está em  $[E^+, X]$ . Desse modo, concluímos que  $[E^+, X]$  é o conjunto de todas as rotações cujo eixo contém  $X$ .  $\square$

Observações:

- $[E^+, X] \cong O_3^+$ , isto é,  $[E^+, X]$  e  $O_3^+$  são isomorfos, onde  $O_3^+$  é o grupo ortogonal especial das transformações lineares ortogonais que possuem matriz associada de determinante igual a 1.
- Isometrias diretas são também conhecidas como movimento, movimento rígido ou deslocamento.

**Teorema 3.4.2** (Classificação das Isometrias). *Uma isometria direta é uma translação, ou uma rotação, ou um deslocamento em parafuso. Uma isometria oposta é uma reflexão, ou uma reflexão deslizante, ou uma reflexão rotatória.*

Observação: Uma reflexão pode ser vista como uma reflexão deslizante com translação nula, ou então reflexão rotatória com ângulo nulo.

Antes de provar o Teorema 3.4.2 vamos definir feixe de planos e provar os Lemas 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3 e 3.4.4 cujos resultados são necessários para a prova deste teorema.

**Definição 3.4.7.** *Sejam  $A$  e  $B$  planos distintos. O **Feixe de Planos** determinado por  $A$  e  $B$  é o conjunto de todos os planos que são paralelos a ambos, se  $A \parallel B$ , ou o conjunto de todos os planos que contém a reta  $A \cap B$ , se  $A \cap B \neq \emptyset$ .*

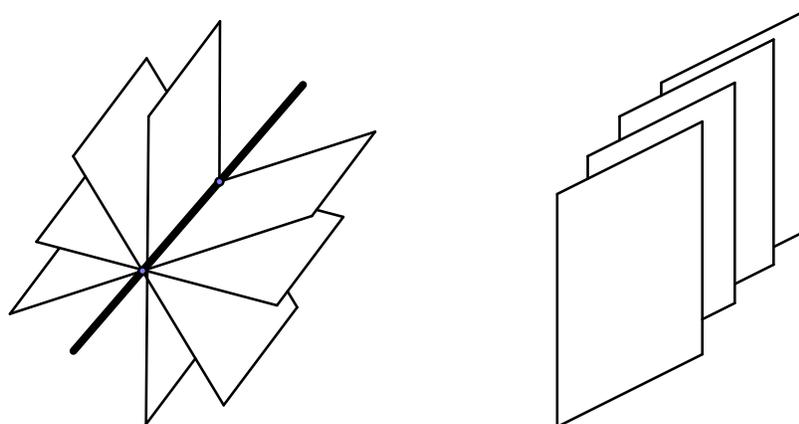


Figura 3.55: Feixe de planos

**Lema 3.4.1.** *O plano  $C$  está no feixe de planos determinados por  $A$  e  $B$ , ( $A \neq B$ ) se, e somente se,  $abc$  é uma reflexão.*

*Demonstração.* 1. Vamos assumir que  $A \cap B \neq \emptyset$ . Sejam  $a, b, d$  e  $c$  reflexões com espelhos  $A, B, C$  e  $D$ , respectivamente. Se  $abc = d$ , multiplicando por  $c$  ambos os lados da igualdade,  $(abc)c = dc$  e aplicando a propriedade associativa  $ab(cc) = dc$ . Como  $c$  é uma involução  $ab(I) = dc$ , implicando  $ab = dc$ , isto é,  $ab$  e  $dc$  são rotações. Sendo  $A \neq B$ , temos  $ab \neq I$ . Como conseqüência, temos que o conjunto dos pontos fixados de  $ab$  está na reta  $A \cap B$ . O mesmo acontece para  $dc$ , conseqüentemente,  $A \cap B = C \cap D$ ,

e por esta razão  $C$  e  $D$  estão no feixe determinado por  $A$  e  $B$ . Reciprocamente, se  $C$  é um plano na família determinada por  $A$  e  $B$ , então podemos escolher um plano  $D$  de tal forma que a direção do ângulo determinado de  $A$  para  $B$  é igual ao ângulo determinado de  $C$  para  $D$ , o que implica que  $ab$  e  $cd$  têm o mesmo ângulo de rotação, ou seja,  $ab = dc$  e, portanto,  $abc = d$ , isto é  $abc$  é uma reflexão.

2. Suponha que  $A // B$ , isto é,  $A \cap B = \emptyset$ . Sejam  $a, b, d$  e  $c$  reflexões com espelhos  $A, B, C$  e  $D$  respectivamente. Se  $abc = d$  multiplicando por  $c$  ambos os lados da igualdade,  $(abc)c = dc$ , e aplicando a propriedade associativa  $ab(cc) = dc$  como  $c$  é uma involução  $ab(1) = dc$  implicando que  $ab = dc$  e, que  $ab$  e  $dc$  são translações. Sendo  $A \neq B$ , temos  $ab \neq 1$ , conseqüentemente  $A \cap B = C \cap D = \emptyset$  e, por esta razão,  $C$  e  $D$  estão no feixe determinado por  $A$  e  $B$ . Reciprocamente, se  $C$  é um plano do feixe determinado por  $A$  e  $B$ , então podemos escolher um plano  $D$  paralelo ao plano  $C$ , cuja distância entre  $C$  e  $D$  é igual a distância entre  $A$  e  $B$ , e a direção de  $A$  para  $B$  é igual a direção de  $C$  para  $D$ . Assim,  $ab = cd$ . Logo,  $abc = d$  isto é,  $abc$  é uma reflexão.

O que completa a prova. □

**Lema 3.4.2.** *Se  $X$  é um ponto e  $\phi$  é uma isometria oposta, então existem planos  $A, B$  e  $C$ , com  $X \in B \cap C$  tal que  $\phi = abc$ .*

*Demonstração.* Consideremos  $a, b$  e  $c$  reflexões com espelhos  $A, B$  e  $C$  respectivamente,  $X$  um ponto qualquer e  $\phi$  uma isometria oposta. Pelo Corolário 3.4.1 temos que  $\phi$  pode ser fatorada como o produto de 1 ou 3 reflexões, isto é,  $\phi = a$  ou  $\phi = abc$ , onde  $a, b$  e  $c$  são reflexões com espelhos  $A, B$  e  $C$ , respectivamente. Vejamos que:

- Se  $\phi = a$ , escolha um plano  $B$  com  $X \in B$ . Então,  $\phi = a = aI = a(bb) = abb$ . Considerando  $c = b$ , temos o resultado.
- Se  $\phi = abc$ , escolha um plano  $C_1$  tal que  $X \in C_1$  e  $C_1$  está no feixe de planos determinado por  $B$  e  $C$ . Pelo Lema 3.4.1,  $bcc_1$  é uma reflexão que denotaremos por  $b_1$ . Assim,  $\phi = abc = abc1 = abc(c_1c_1) = a(bcc_1)c_1 = ab_1c_1$  para alguma reflexão  $b_1$  com espelho  $B_1$ . Escolha agora, um plano  $B_2$  com  $X \in B_2$  e contido no feixe de planos determinado

por  $A$  e  $B_1$ . Usando novamente o Lema 3.4.1,  $ab_1b_2$  é uma reflexão que denotaremos por  $a_1$ . Assim,  $\phi = ab_1c_1 = ab_1Ic_1 = ab_1(b_2b_2)c_1 = (ab_1b_2)(b_2c_1) = a_1b_2c_1$  e  $X \in B_2 \cap C_1$ .

O que completa a prova.  $\square$

**Lema 3.4.3.** *Se  $X$  é um ponto e  $\phi$  é uma isometria oposta, então  $\phi = md$  para alguma meia-volta  $m$  e alguma reflexão  $d$ , cujo espelho contém  $X$ .*

*Demonstração.* Seja  $\phi$  uma isometria oposta e  $X$  um ponto qualquer. Pelo Lema 3.4.2, existem planos  $A, B$  e  $C$  tais que  $X \in B \cap C$  e  $\phi = abc$ . Sejam  $K = B \cap C$ , (ou qualquer reta passando por  $X$  e em  $B \cap C$ , se  $B = C$ ) e  $D$  um plano contendo  $K$  e perpendicular a  $A$ . Assim, pelo Lema 3.4.1,  $\phi = abc = aIbc = a(dd)bc = (ad)(dbc) = add_1$  para alguma reflexão  $d_1$  com espelho  $D_1$  que contém  $K$  e, conseqüentemente, contém  $X$ . Como  $A \perp D$ ,  $m = ad$  é a meia volta de eixo  $M = A \cap D$ . Logo,  $\phi = add_1 = md_1$  e  $X \in D_1$ . O que prova o lema.  $\square$

**Lema 3.4.4.** *Se  $X$  é um ponto e  $\phi$  é uma isometria direta, então  $\phi = mn$  para algumas meias-voltas  $m$  e  $n$  tal que  $X \in N$ .*

*Demonstração.* Sejam  $x$  uma inversão de centro  $X$  e  $\phi$  uma isometria direta. Assim, se  $\phi$  é direta,  $\phi x$  é oposta. Conseqüentemente, pelo Lema 3.4.3  $\phi x = md$  com  $X \in D$ , para alguma meia-volta  $m$  e alguma reflexão  $d$ . Temos assim que  $\phi x = md \Rightarrow (\phi x)x = mdx \Rightarrow \phi I = mn$  onde  $N$  é a reta que passa por  $X$  e perpendicular a  $D$ . O que prova o lema.  $\square$

**Prova do Teorema 3.4.2.** Sejam  $a, b, c$  e  $d$  reflexões com espelhos  $A, B, C$  e  $D$ , respectivamente,  $m$  e  $n$  meias-voltas com eixos  $M$  e  $N$  respectivamente e  $x$  a inversão de centro  $X$ .

1. Seja  $\phi$  uma isometria direta. Pelo Corolário 3.4.1  $\phi$  pode ser fatorada com o produto de 0, 2 ou 4 reflexões, isto é,  $\phi = 1$ ,  $\phi ab$  ou  $\phi abcd$ . Tome  $\phi = ab$ , então temos:
  - se  $A$  é paralelo a  $B$ , temos que  $\phi = ab$  é uma translação.
  - se  $A$  não é paralelo a  $B$ , seja  $K = A \cap B$ , logo  $\phi = ab$  é uma rotação ou um deslocamento em parafuso com eixo  $K$ .

2. Seja  $\phi$  uma isometria oposta. Pelo Corolário 3.4.1  $\phi$  pode ser fatorada como o produto de 1 ou 3 reflexões, isto é,  $\phi = a$  ou  $\phi = abc$ , assim,

- $\phi = a$  temos que  $\phi a = 1$ ,  $A$  contém todos os seus pontos fixos, logo, é uma reflexão deslizante.
- $\phi = abc$  considerando  $\rho = ab$  temos que  $\phi = \rho c$  translada o plano  $C$  em volta do eixo  $K = A \cap B$ , ou seja,  $\phi = abc$  define uma reflexão rotatória.

□

No Teorema 3.3.2 mostramos que conjugando uma inversão, uma meia-volta ou uma reflexão por uma similaridade resulta uma inversão, meia-volta ou uma reflexão, respectivamente. Vamos agora generalizar este resultado e mostrar que  $\phi$  é uma similaridade e  $\theta$  uma isometria de alguns tipos, então conjugando  $\theta$  por  $\phi$  resulta uma isometria  $\phi^i(\theta) = \phi^{-1}\theta\phi$  do mesmo tipo que  $\theta$ .

**Teorema 3.4.3.** *Sejam  $\theta$  uma isometria e  $\phi$  uma similaridade com fator de similaridade  $\alpha$ .*

1. *Se  $\theta$  é um deslocamento em parafuso com eixo  $K$ , então  $\phi^i(\theta) = \phi^{-1}\theta\phi$  é também um deslocamento em parafuso. Além disso, o eixo de  $\phi^i(\theta)$  é  $\phi(K)$ , o ângulo de  $\phi^i(\theta)$  é igual ao de  $\theta$  e o comprimento de  $\phi^i(\theta)$  é  $\alpha$  vezes o comprimento de  $\theta$ .*
2. *Se  $\theta$  é uma inversão rotatória com centro  $X$  e eixo  $L$ , então  $\phi^i(\theta)$  é a inversão rotatória através do mesmo ângulo sobre o eixo  $\phi(L)$  e com centro  $\phi(X)$ .*
3. *Se  $\theta$  é uma reflexão deslizante ao longo da reta  $L$  e com espelho  $A$  ( $L//A$ ) então  $\phi^{-1}\theta\phi$  é uma reflexão deslizante ao longo de  $\phi(L)$  com espelho  $\phi(A)$ .*

*Demonstração.* 1. Sejam  $\phi$  uma similaridade,  $\theta$  um deslocamento em parafuso com eixo  $K$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  reflexões com espelhos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , respectivamente, tais que  $A \cap B = K$ ,  $C \perp K$  e  $D \perp K$  e  $\theta = (ab)(cd)$ , onde  $ab$  é uma rotação e  $cd$  uma translação. Assim,  $\phi^i(\theta) = \phi^i((ab)(cd)) = \phi^{-1}(ab)(cd)\phi = \phi^{-1}(ab)\phi\phi^{-1}(cd)\phi = (\phi^{-1}a\phi)(\phi^{-1}b\phi)(\phi^{-1}c\phi)(\phi^{-1}d\phi) = \phi^i(a)\phi^i(b)\phi^i(c)\phi^i(d)$ , isto é,  $\phi^i(\theta)$  é fatorada como um produto de quatro reflexões. Como  $\phi(A) \cap \phi(B) = \phi(K)$ ,  $\phi(C) \perp \phi(K)$  e  $\phi(D) \perp \phi(K)$

segue que  $\phi^i(\theta)$  é um deslocamento em parafuso na direção  $\phi(K)$ . Além disso, como  $\phi$  leva planos em planos, ângulo em ângulo congruente, a imagem de uma interseção de conjuntos é a interseção das imagens dos conjuntos e leva retas perpendiculares em retas perpendiculares o mesmo acontecendo com planos, interseção e perpendicularidade, ou seja,  $\phi(A) \cap \phi(B) = \phi(K)$ ,  $\phi(C) \perp \phi(K)$ ,  $\phi(D) \perp \phi(K)$ ,  $\angle A, B \cong \angle \phi(A), \phi(B)$  e  $|C, D| = |\phi(C), \phi(D)|$ . Conseqüentemente, o ângulo de  $\phi^i(\theta)$  é o mesmo que  $\theta$ , e seu deslocamento é  $\alpha$  vezes o deslocamento de  $\theta$ .

2. Sejam  $\phi$  uma similaridade,  $\theta$  uma inversão rotatória com eixo  $L$  e de centro  $X$ ,  $X \in L$ . Considere ainda  $a, b, c$  e  $d$  reflexões de espelhos  $A, B, C$  e  $D$ , respectivamente, tal que  $A \cap B = L$ ,  $B \cap D = L$ ,  $B \perp D$ ,  $C$  passando por  $X$ ,  $C \perp B$ ,  $C \perp D$ , então,  $\theta = (ab)(bcd)$  onde  $ab$  é uma rotação e  $bcd$  uma inversão de centro  $X$ ,  $X \in L$ . Assim,  $\phi^i(\theta) = \phi^i((ab)(bcd)) = \phi^{-1}(ab)(bcd)\phi = \phi^{-1}a(bb)cd\phi = \phi^{-1}aIcd\phi = \phi^{-1}acd\phi = (\phi^{-1}a\phi)(\phi^{-1}c\phi)(\phi^{-1}d\phi) = \phi^i(a)\phi^i(c)\phi^i(d)$ , isto é,  $\phi^i(\theta)$  é fatorada como um produto de três reflexões, sendo uma inversão rotatória de centro  $\phi(X)$  e eixo  $\phi(L)$ . Como  $\phi$  é similaridade,  $\phi$  preserva ângulo,  $\phi^i(\theta)$  é a inversão rotatória com mesmo ângulo sobre o eixo  $\phi(L)$  e centro  $\phi(X)$ .
3. Seja  $\theta$  uma reflexão deslizante ao longo da reta  $L$  e com espelho  $A$ . Sejam  $a, b$  e  $c$  reflexões com espelhos  $A, B$  e  $C$ , respectivamente. Assuma  $\theta = (ab)c$  onde  $ab$  é uma translação e  $c$  uma reflexão com espelho  $C$ . Assim,  $\phi^i(\theta) = \phi^i((ab)c) = \phi^{-1}(ab)c\phi = (\phi^{-1}a\phi)(\phi^{-1}b\phi)(\phi^{-1}c\phi) = \phi^i(a)\phi^i(b)\phi^i(c)$ , onde  $\phi^i(a)\phi^i(b)$  é uma translação e  $\phi^i(c)$  é uma reflexão, isto é,  $\phi^i(\theta)$  é fatorada como o produto de três reflexões. Como  $\phi$  é similaridade,  $\phi$  preserva retas e planos. Logo,  $\phi^i(\theta) = \phi^{-1}\theta\phi$  é a reflexão deslizante ao longo do eixo  $\phi(L)$  com espelho  $\phi(A)$ . □

**Corolário 3.4.3.** *Se  $\theta$  é uma rotação através do ângulo  $\beta$ , então a classe de conjugação de  $\theta$  em  $S$  ou em  $E$  consiste de todas rotações através do ângulo  $\beta$ . Se  $\tau$  é a translação de comprimento  $\alpha \neq 0$ , então a classe de conjugação de  $\tau$  em  $E$  consiste de todas translações de comprimento  $\alpha$ , e a classe de conjugação em  $S$  consiste de todas translações não-triviais.*

**Observações:**

1. Seja  $\rho$  uma rotação de  $90^\circ$  sobre a reta  $K$ ,  $X$  um ponto de  $K$ .

Considere um sistema de coordenadas ortogonais com  $K$  o eixo  $z$ , o ponto  $X$  sendo a origem e os eixos  $x, y$  e  $z$  ortogonais.

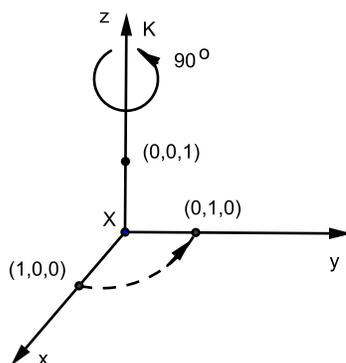


Figura 3.56: Rotação de  $90^\circ$

Sejam:

$x$ : inversão em relação a origem  $X$ .

$\rho$ : rotação de  $90^\circ$ . Sobre  $K$ , e como indicada na figura.

- Para a conjugada  $x^i(\rho)$ , de  $\rho$  pela inversão  $x$  temos:

$$x^i(\rho)(1, 0, 0) = (x^{-1}\rho x)(1, 0, 0) = (\rho x)(-1, 0, 0) = x(0, -1, 0) = (0, 1, 0) = \rho(1, 0, 0).$$

$$x^i(\rho)(0, 1, 0) = (x^{-1}\rho x)(0, 1, 0) = (\rho x)(0, -1, 0) = x(1, 0, 0) = (-1, 0, 0) = \rho(0, 1, 0).$$

$$x^i(\rho)(0, 0, 1) = (x^{-1}\rho x)(0, 0, 1) = (\rho x)(0, 0, -1) = x(0, 0, -1) = (0, 0, 1) = \rho(0, 0, 1).$$

Assim,  $x^i(\rho) = \rho$  e, portanto, a conjugada por  $x$  da rotação  $\rho$  é a rotação  $\rho$ .

- Para a conjugada  $\rho^i(x)$ , de  $x$  pela rotação  $\rho$ , temos:

$$\rho^i(x)(1, 0, 0) = (\rho^{-1}x\rho)(1, 0, 0) = (x\rho)(0, -1, 0) = \rho(0, 1, 0) = (-1, 0, 0).$$

$$\rho^i(x)(0, 1, 0) = (\rho^{-1}x\rho)(0, 1, 0) = (x\rho)(1, 0, 0) = \rho(-1, 0, 0) = (0, -1, 0).$$

$$\rho^i(x)(0, 0, 1) = (\rho^{-1}x\rho)(0, 0, 1) = (x\rho)(0, 0, 1) = \rho(0, 0, -1) = (0, 0, -1).$$

Assim,  $\rho^i(x) = x$  e, portanto, a conjugada por  $\rho$  da inversão  $x$  é a inversão  $x$ .

2. Sendo  $\rho$  uma rotação de  $90^\circ$  sobre a reta  $K$ ,  $X$  um ponto de  $K$  e  $M$  uma reta perpendicular a  $K$ .

Considere um sistema de coordenadas ortogonais com  $K$  o eixo  $z$ ,  $M$  o eixo  $x$ , e o eixo  $y$  de forma que o ponto  $X$  é a origem.

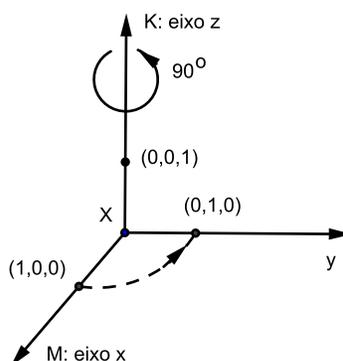


Figura 3.57: Meia-volta  $m$  e rotação de  $90^\circ$

$m$ : meia-volta em relação à  $M$

$\rho$ : rotação de  $90^\circ$  sobre  $K$ , como indicada na figura.

- Para a conjugada  $m^i(\rho)$ , de  $\rho$  pela meia-volta  $m$ , temos:

$$m^i(\rho)(1, 0, 0) = (m^{-1}\rho m)(1, 0, 0) = (\rho m)(1, 0, 0) = m(0, 1, 0) = (0, -1, 0) = \rho^{-1}(1, 0, 0).$$

$$m^i(\rho)(0, 1, 0) = (m^{-1}\rho m)(0, 1, 0) = (\rho m)(0, -1, 0) = m(1, 0, 0) = (1, 0, 0) = \rho^{-1}(0, 1, 0).$$

$$m^i(\rho)(0, 0, 1) = (m^{-1}\rho m)(0, 0, 1) = (\rho m)(0, 0, -1) = m(0, 0, -1) = (0, 0, 1) = \rho^{-1}(0, 0, 1).$$

Assim,  $m^i(\rho) = \rho^{-1}$  e, portanto, a conjugada por  $m$  da rotação  $\rho$  é a rotação  $\rho^{-1}$ .

- Para a conjugada  $\rho^i(m)$ , de  $m$  pela rotação  $\rho$ , temos:

$$\rho^i(m)(1, 0, 0) = (\rho^{-1}m\rho)(1, 0, 0) = (m\rho)(0, -1, 0) = \rho(0, 1, 0) = (-1, 0, 0).$$

$$\rho^i(m)(0, 1, 0) = (\rho^{-1}m\rho)(0, 1, 0) = (m\rho)(1, 0, 0) = \rho(1, 0, 0) = (0, 1, 0).$$

$$\rho^i(m)(0, 0, 1) = (\rho^{-1}m\rho)(0, 0, 1) = (m\rho)(0, 0, 1) = \rho(0, 0, -1) = (0, 0, -1).$$

Logo,  $\rho^i(m)$  é a meia-volta em relação ao eixo  $y$ . (observamos que é uma meia volta, mas diferente de  $m$ , que é a meia-volta em relação ao eixo  $x$ ).

3. A conjugada em  $E$  de uma translação é uma translação.

De fato: Sejam  $\phi \in E$  e  $\tau$  uma translação, então  $\tau = ab$ ,  $a$  e  $b$  reflexões com espelhos  $A$  e  $B$ , respectivamente, e a translação ao longo da reta  $K$ , onde  $K \perp A$  e  $K \perp B$ ,  $(A // B)$   $\phi^i(\tau) = \phi^i(ab) = \phi^i(a)\phi^i(b)$ , com  $\phi^i(a)$  e  $\phi^i(b)$  reflexões com espelhos  $\phi(A)$  e  $\phi(B)$ , respectivamente, e  $\phi(A) // \phi(B)$ ,  $\phi(A) \perp \phi(K)$  e  $\phi(B) \perp \phi(K)$ .

Portanto,  $\phi^i(\tau)$  é uma translação ao longo de  $\phi(K)$ , e a distância de  $\phi(A)$  para  $\phi(B)$  é igual a distância de  $A$  para  $B$ , pois  $\phi \in E$ , isto é, é uma isometria.

Assim,  $\phi^i(\tau)$  é uma translação de mesmo comprimento de  $\tau$  ao longo de  $\phi(K)$ , e na direção de  $\phi(K)$ , e tendo o dobro da distância entre  $\phi(A)$  e  $\phi(B)$ . (Note que este resultado poderia ter concluído pela Parte 3 do teorema anterior).

4. Seja  $\tau$  uma translação de uma unidade na direção do eixo  $y$  positivo e  $\phi = \rho$  uma rotação de  $90^\circ$  em  $z$ , como indicada na figura.

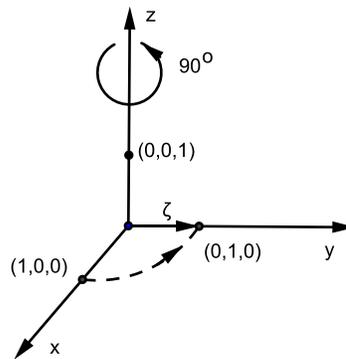


Figura 3.58: Translação e rotação de  $90^\circ$

Para a conjugada  $\phi^i(\tau)$ , de  $\tau$  pela rotação  $\phi = \rho$ , temos:

$$\phi^i(\tau)(1, 0, 0) = (\rho^{-1}\tau\rho)(1, 0, 0) = (\tau\rho)(0, -1, 0) = (\rho)(0, 0, 0) = (0, 0, 0).$$

$$\phi^i(\tau)(0, 1, 0) = (\rho^{-1}\tau\rho)(0, 1, 0) = (\tau\rho)(1, 0, 0) = (\rho)(1, 1, 0) = (-1, 1, 0).$$

$$\phi^i(\tau)(0, 0, 1) = (\rho^{-1}\tau\rho)(0, 0, 1) = (\tau\rho)(0, 0, 1) = (\rho)(0, 1, 1) = (-1, 0, 1).$$

Logo,  $\phi^i(\tau)$  é a translação na direção do eixo  $x$ , que é a imagem do eixo  $y$  pela rotação, e no sentido negativo.

Observação:

O estudo de isometrias no plano euclidiano é análogo ao estudo realizado até aqui. As definições de similaridade e isometria são exatamente as mesmas, exceto que agora vamos considerar permutações de pontos num plano. Existem apenas dois tipos de involuções: meias voltas sobre um ponto e reflexões em uma reta. Mais uma vez rotações e translações são produtos de duas reflexões cujos eixos têm interseção ou são paralelos. O único ponto fixo de rotação não-trivial é o seu centro. Note que, em um plano, reflexões invertem a orientação e a meia-volta preserva, apesar de ambas poderem ser vistas como restrições ao plano de isometrias diretas do espaço. No Capítulo 4 apresentaremos sugestões de atividades que podem contribuir para uma familiarização com as isometrias no plano.

## 3.5 Dilatação

Nesta seção vamos primeiro considerar permutações especiais do espaço que preservam direção e não necessariamente distâncias relativas. Vamos mostrar que estas permutações são conhecidas e são, de fato, as similaridades. Finalmente vamos mostrar que qualquer similaridade é uma isometria ou uma espiral<sup>5</sup>.

**Definição 3.5.1.** *A permutação,  $\phi$ , dos pontos do espaço é chamada de **dilatação** se, e somente se,  $X+Y // \phi(X)+\phi(Y)$  para todos pares de pontos independentes  $X$  e  $Y$ . Consideramos aqui uma reta como sendo paralela a si própria. As dilatações formam um subgrupo do grupo de todas as permutações de espaço. Este grupo é denotado por  $D$ .*

- As únicas isometrias que são também dilatações são as translações e inversões.

---

<sup>5</sup>ver definição na seção 3.6

**Definição 3.5.2.** *Seja  $X$  um ponto e  $\alpha$  um número real não nulo, introduzindo um sistema de coordenadas cartesianas com origem em  $X$ , e definindo a aplicação  $x_\alpha$  como segue: Se  $Y$  é o ponto com coordenadas  $(x, y, z)$ , então  $x_\alpha(Y)$  é o ponto com coordenadas  $(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ . A aplicação  $x_\alpha$  é uma similaridade com fator de similaridade  $|\alpha|$ , e é uma isometria se, e somente se,  $\alpha = \pm 1$ , ( $x_\alpha = 1$  se  $\alpha = 1$  e  $x_\alpha = -1$  se  $\alpha = -1$ ). A aplicação  $x_\alpha$  é chamada de **dilatação central** ou **transformação homotética**, e  $X$  é chamado o centro.*

A definição de  $x_\alpha$  independe da particular escolha do sistema de coordenadas cartesianas, e  $x_\alpha$  pode ser descrito sem a necessidade de um sistema de coordenadas. A dilatação  $x_\alpha$  é direta se  $\alpha > 0$  e oposta  $\alpha < 0$ . No plano  $x_\alpha$  é direta, independentemente do sinal de  $\alpha$ .

**Proposição 3.5.1.** *A dilatação é unicamente determinada pela sua ação em dois pontos.*

*Demonstração.* Vamos assumir que  $\phi$  é uma dilatação, que  $X$  e  $Y$  são pontos independentes e que  $\phi(X)$  e  $\phi(Y)$  são conhecidos. Queremos provar que para qualquer ponto  $Z$ ,  $\phi(Z)$  está determinado.

1. O ponto  $Z$  não pertence à reta  $X + Y$ . Sejam  $K$  e  $M$  retas passando por  $\phi(X)$  e  $\phi(Y)$  paralelas em relação a  $X + Z$  e  $Y + Z$ , respectivamente. Temos assim que  $\phi(Z)$  é o único ponto na intersecção de  $K$  e  $M$ .

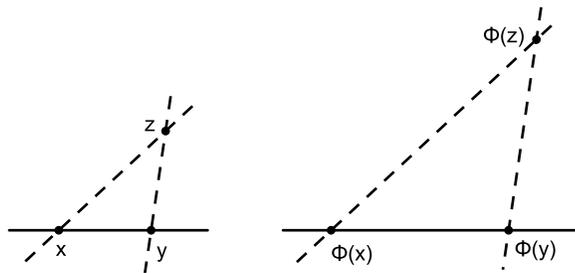


Figura 3.59: Dilatação por meio de dois pontos

2. O ponto  $Z$  pertence à reta  $X + Y$ . Seja  $W$  um ponto qualquer não pertencente à reta  $X + Y$  e, repetindo processo anterior determina-se  $\phi(W)$ . Agora utilizamos a reta  $X + W$  e o ponto  $Z$ , repetindo novamente o processo determinamos  $\phi(Z)$ , temos que  $\phi(Z)$  está na reta  $\phi(X) + \phi(Y)$ .

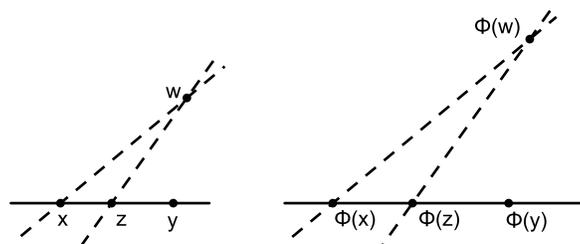


Figura 3.60: Dilatação por meio de dois pontos

□

Observação:

Considerando  $X, Y, X_1$  e  $Y_1$  pontos independentes tais que  $X + Y // X_1 + Y_1$ . Como uma dilatação é completamente determinada por sua ação em dois pontos, então podemos concluir que no máximo poderá existir uma dilatação  $\phi$  com  $\phi(X) = X_1$  e  $\phi(Y) = Y_1$ . No próximo resultado veremos que existe uma dilatação central ou uma translação com  $\phi(X) = X_1$  e  $\phi(Y) = Y_1$ .

**Teorema 3.5.1.** *Se  $X, Y$  e  $X_1, Y_1$  são dois pares de pontos independentes, podendo ocorrer  $X = X_1$  ou  $Y = Y_1$ , tais que  $X + Y // X_1 + Y_1$ , então existe uma dilatação central ou uma translação que leva  $X$  para  $X_1$  e  $Y$  para  $Y_1$ .*

*Demonstração.* Um ponto fixo de uma dilatação central deve estar na reta unindo qualquer outro ponto a sua imagem. Vamos considerar quatro casos:

1. Considere  $X + X_1$  não é paralela a  $Y + Y_1$ . Como  $X + Y // X_1 + Y_1$ , sabemos que  $X, Y, X_1$  e  $Y_1$  são coplanares, conseqüentemente, existe um ponto  $W$  em  $X + X_1$  e  $Y + Y_1$ . Escolha um número não-nulo  $\alpha$  tal que:

$$\alpha = \begin{cases} \frac{|W, X_1|}{|W, X|} & \text{se } W \text{ não está entre } X \text{ e } X_1, \\ \frac{-|W, X_1|}{|W, X|} & \text{se } W \text{ está entre } X \text{ e } X_1. \end{cases}$$

Considerando a dilatação central  $w_\alpha$  que deixa  $W$  fixo e leva  $X$  para  $X_1$ , temos que  $w_\alpha$  é uma dilatação que leva  $Y$  para um ponto da reta que passa por  $X_1$  e paralela

- a  $X + Y$ , isto é, a reta  $X_1 + Y_1$ . Da mesma forma  $w_\alpha$  deve também levar  $Y$  para um ponto em  $Y + W = Y + Y_1$ , pois é uma dilatação central com centro  $W$ . Assim,  $w_\alpha(Y) = Y_1$  e  $w_\alpha$  é a dilatação central que leva  $X$  para  $X_1$  e  $Y$  para  $Y_1$ .
2. Seja  $X = X_1$  ou  $Y = Y_1$ . Caso  $X = X_1$  e  $Y = Y_1$ , temos a identidade 1, que é a translação procurada. Se apenas temos uma igualdade, então podemos assumir que  $Y = Y_1$ . Como  $X + Y // X_1 + Y_1$  e  $Y = Y_1$ , segue que  $Y, X$  e  $X_1$  são colineares. Escolhendo  $\alpha$  como no Caso 1 com  $Y$  substituindo  $W$ , então  $y_\alpha$  é a dilatação central procurada.
  3. Se  $X + X_1 // Y + Y_1$ , mas  $X + X_1 \neq Y + Y_1$  os quatro pontos  $X, X_1, Y, Y_1$  são vértices de um paralelogramo; conseqüentemente a translação leva  $X$  para  $X_1$  e  $Y$  e também  $Y_1$ .
  4. Se  $X + X_1 = Y + Y_1$ , escolha qualquer ponto  $Z$  não pertencente a  $X + X_1$ . Por  $X_1$  e  $Y_1$  construa duas retas paralelas às retas  $X + Z$  e  $Y + Z$ , respectivamente. Seja  $Z_1$ , a interseção dessas retas, e  $\phi$  a translação ou a dilatação central, dadas pelos itens anteriores, que leva  $X$  para  $X_1$  e  $Z$  para  $Z_1$ . Logo,  $\phi$  leva  $Y$  para  $Y_1$ .

Temos assim esgotado as possibilidades para os pontos  $X, Y, X_1$  e  $Y_1$  tais que  $X \neq Y, X_1 \neq Y_1$  e  $X + Y // X_1 + Y_1$ .

Em cada caso encontramos uma translação ou dilatação central que leva  $X$  para  $X_1$  e  $Y$  para  $Y_1$ . O que completa a prova.  $\square$

Dada uma dilatação  $\phi$  podemos considerar a ação de  $\phi$  em dois pontos independentes. Usando o resultado do Teorema 3.5.1, temos que existe uma translação ou uma dilatação central com a mesma ação sobre estes dois pontos. A Proposição 3.5.1, mostra que  $\phi$  é translação ou dilatação central. Assim, temos o seguinte resultado:

**Corolário 3.5.1.** *Toda dilatação é uma translação ou uma dilatação central. Além disso, um produto de dilatações centrais e/ou translações é sempre uma dilatação central ou translação. Em outras palavras,  $D$ , o grupo de dilatações, é o subgrupo de  $S$  consistindo de todas as translações e de todas as dilatações centrais.*

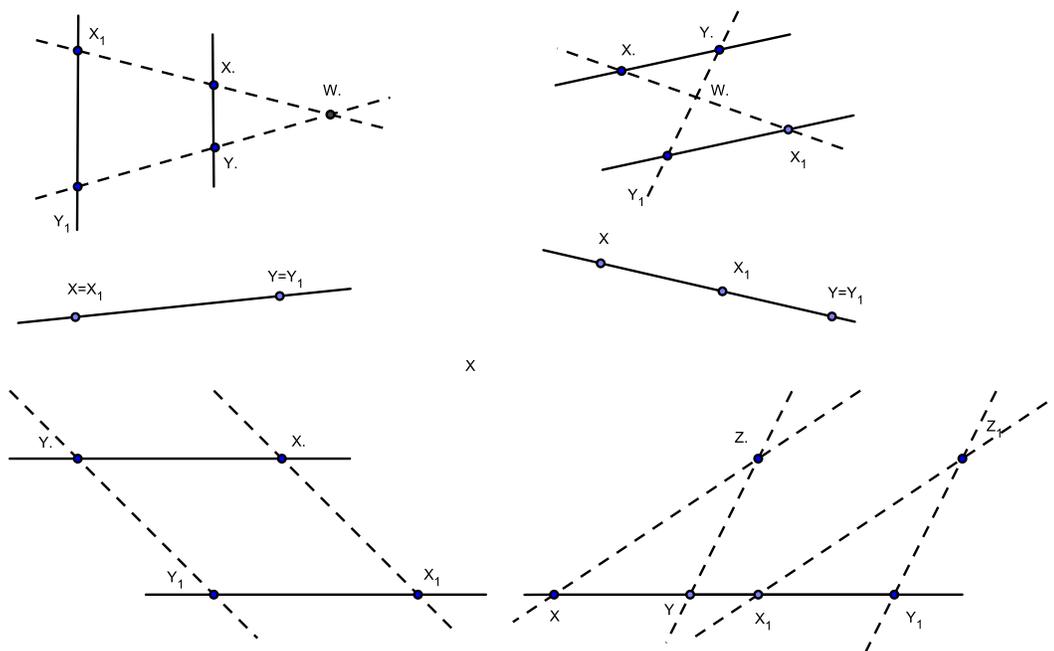


Figura 3.61: Dilatação central ou existência de translação

## 3.6 Classificação das Similaridades

**Definição 3.6.1.** Uma similaridade  $\phi$  é chamada uma **espiral** se, e somente se,  $\phi$  é o produto de uma rotação  $\rho$  e uma dilatação central  $x_\alpha$ , ou seja,  $\phi = \rho x_\alpha$ , onde o eixo da rotação  $\rho$  contém o ponto  $X$ .

**Teorema 3.6.1** (Classificação das Similaridades). Uma similaridade é uma espiral ou uma isometria sem pontos fixos (translação, deslocamento em parafuso, ou reflexão deslizante).

*Demonstração.* Supondo  $\phi$  uma similaridade que não é uma isometria, pelo Teorema 3.2.7,  $\phi$  tem exatamente um ponto fixo  $X$ . Logo,  $\phi$  é uma dilatação de centro  $X$  ou existe uma rotação  $\rho$  e uma dilatação  $x_\alpha$  de centro  $X$  tal que  $\phi = \rho x_\alpha$ , isto é,  $\phi$  é uma espiral. Observe que a dilatação pode ser vista como uma espiral degenerada.

Agora, se  $\phi$  é uma similaridade e também isometria, pode ser oposta ou direta. Pelo Teorema 3.4.2, se for oposta é uma reflexão deslizante, portanto, sem ponto fixo, ou uma reflexão rotatória.

A reflexão rotatória pode ser vista como o produto de uma inversão seguida de uma rotação. Portanto, a similaridade é uma espiral. Se for isometria direta, pelo Corolário 3.4.2, se tiver ponto fixo é uma rotação cujo eixo contém  $X$ . Logo, espiral (degenerada). Caso não tenha ponto fixo é uma translação ou deslocamento em espiral. Isto completa a prova.  $\square$

---

# Simetrias de Figuras

---

Para uma familiarização com isometrias, grupos de simetrias e estruturas de grupos, nesta seção apresentamos, inicialmente, sugestões de algumas atividades envolvendo a identificação de grupos de simetrias de figuras planas. Também, apresentamos exemplos de figuras no espaço, a saber, o tetraedro e o cubo, e suas simetrias. Salientamos que, essas atividades podem ser exploradas em mais aspectos do que os mostrados nesse texto, podendo ser realizadas antes e/ou durante o desenvolvimento dos aspectos teóricos referentes às isometrias no espaço. Mais detalhes consultar as referências [3], [8], [10], [11], [13], e [15].

## 4.1 Simetrias de Figuras

Achamos conveniente iniciar com a identificação de grupos de simetrias de figuras planas, apesar de termos desenvolvido estudo relativo às isometrias no espaço, pois isto contribui para desenvolver habilidades na identificação dos grupos e suas simetrias, e, assim, facilitará identificações de simetrias em figuras no espaço e as estruturas de grupo inerentes. Acreditamos que uma tarefa com estas características contribui também para facilitar a compreensão dos resultados apresentados no capítulo referente às isometrias no espaço.

Começamos com a identificação dos grupos de simetria do triângulo equilátero, o quadrado, e o pentágono, como também grupos de faixas e grupos de pavimentação.

Para identificar algumas simetrias vamos usar os seguintes termos:

- Grupos de faixas, para identificar grupos de simetrias de padrões em faixas infinitas.

Em uma faixa as simetrias possíveis são: translação em uma única direção, meia-volta, reflexão na direção da translação e reflexão em reta perpendicular à reta direção da translação. Existem sete tipos de grupos de faixas (ver [15]).

- Grupos de pavimentações, para identificar grupos de simetrias de ornamentos cobrindo o plano todo. Existem 17 tipos de grupos de pavimentações (ver [15]).

Para essas identificações utilizamos três algoritmos que são os seguintes:

Algoritmo I - Este algoritmo identifica o grupo de simetrias de uma figura limitada, introduz o aluno na identificação baseada em um diagrama (ver [16]).

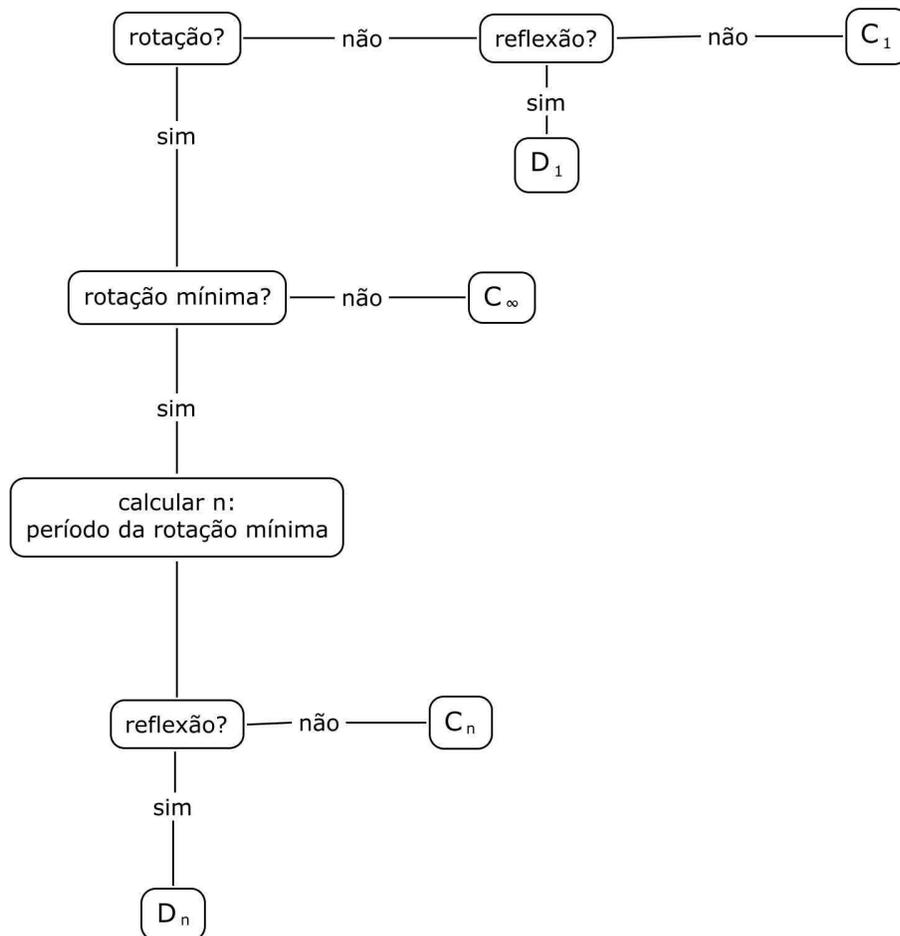


Figura 4.1: Algoritmo I

Algoritmo II - Este algoritmo identifica o grupo de simetrias de um padrão em uma faixa infinita, enfatiza as isometrias que levam um padrão em faixas nele mesmo (ver [16]).

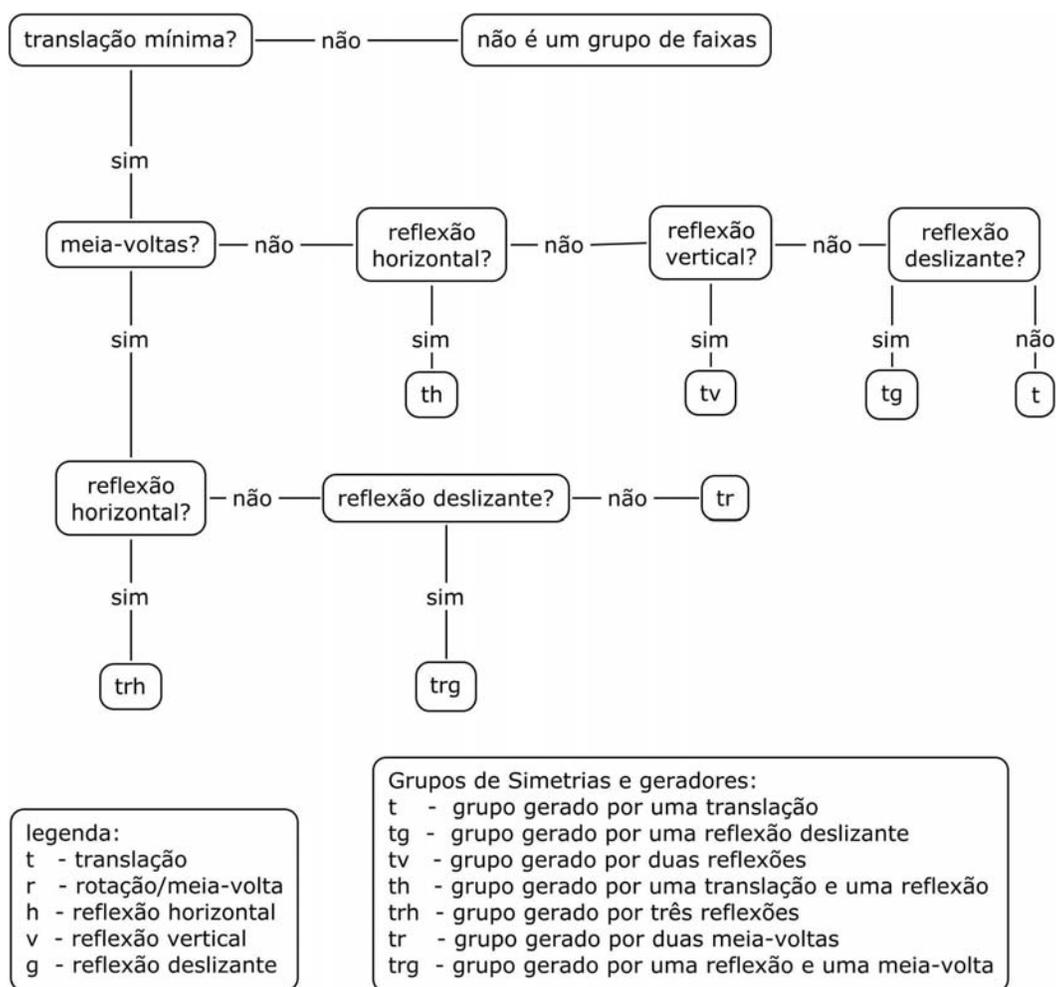


Figura 4.2: Algoritmo II

Algoritmo III - Este algoritmo identifica o grupo de simetrias de um padrão no plano, isto é, indentifica grupos de simetrias de pavimentações (ver [16]).

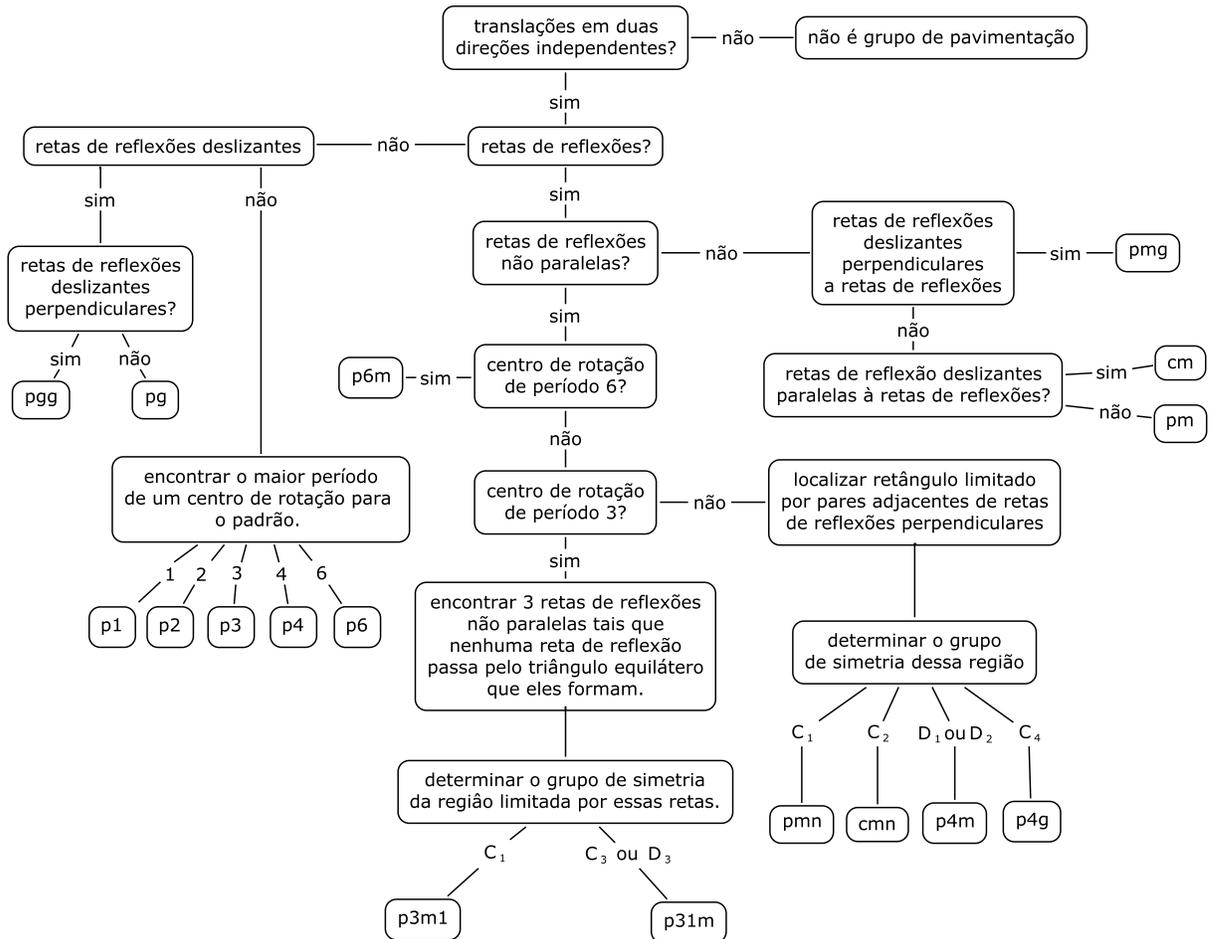


Figura 4.3: Algoritmo III

O algoritmo III é o que tem a notação universal, que é a utilizada pelos cristalógrafos.

São 17 os tipos de padrões para pavimentações. A lista seguinte contém os 17 grupos de cristalografia bi-dimensional, seus respectivos símbolos, assim como geradores para cada um dos grupos:

- $p1$  gerado por duas translações.
- $p2$  gerado por três meias-voltas.

- $pm$  gerado por duas reflexões e uma translação.
- $pg$  gerado por duas reflexões deslizantes paralelas.
- $cm$  gerado por reflexão e uma reflexão deslizante paralela.
- $pmm$  gerado por reflexões dos quatro lados de uma retângulo.
- $pmg$  gerado por uma reflexão e duas meias-voltas.
- $pgg$  gerado por duas reflexões deslizantes perpendiculares.
- $cmm$  gerado por duas reflexões perpendiculares e uma meia-volta.
- $p4$  gerado por uma meia-volta e uma rotação de  $90^\circ$ .
- $p4m$  gerado por reflexões nos três lados de um  $(45^\circ, 45^\circ, 90^\circ)$  triângulo.
- $p4g$  gerado por uma reflexão e uma rotação de  $90^\circ$ .
- $p3$  gerado por duas rotações de  $120^\circ$ .
- $p31m$  gerado por uma reflexão e uma rotação de  $120^\circ$ .
- $p3m1$  gerado por reflexões em três lados de um triângulo equilátero.
- $p6$  gerado por uma meia-volta e uma rotação de  $120^\circ$ .
- $p6m$  gerado por reflexões em três lados de um  $(30^\circ, 60^\circ, 90^\circ)$  triângulo.

Para a identificação sugerimos a seguinte ordem:

1. Se não há retas de reflexão:  $pg$ ,  $ppg$ ,  $p1$ ,  $p2$ ,  $p4$ ,  $p6$ .
2. Se existem retas de reflexão que não são paralelas e não existem centros de rotação de ordem 6 ou 3:  $p6m$ ,  $pmn$ ,  $cmn$ ,  $p4m$  e  $p4g$ .
3. Se existem retas de reflexão que não são paralelas e existem centros de rotação de ordem 6 ou 3:  $p6m$ ,  $p31m$  e  $p3m1$ .

4. se todas as retas de reflexão são paralelas  $pm, cm, cm$ .

### Grupos diedrais ou simetrias de um polígono regular

**Definição 4.1.1.** Chamamos de **grupo diedral de ordem  $n$**  o grupo formado pelas simetrias de um polígono regular de  $n$  lados.

### Simetrias no triângulo equilátero

Utilizando o Algoritmo *I* vemos facilmente que o grupo de simetrias é o grupo diedral de ordem 6, pois tem uma rotação mínima de  $120^\circ$  de período 3 e tem retas de simetrias.

A seguir, descrevemos essas simetrias e seus produtos:

Seja  $XYZ$  um triângulo equilátero. Sejam  $M_1, M_2$  e  $M_3$  pontos médios dos lados  $[Y, Z]$ ,  $[X, Z]$  e  $[X, Y]$ , respectivamente. Sejam  $m_1, m_2$  e  $m_3$  reflexões cujos os eixos são as medianas  $X + M_1, Y + M_2$  e  $Z + M_3$ , respectivamente, e, seja o ponto  $G$  a interseção dessas medianas.

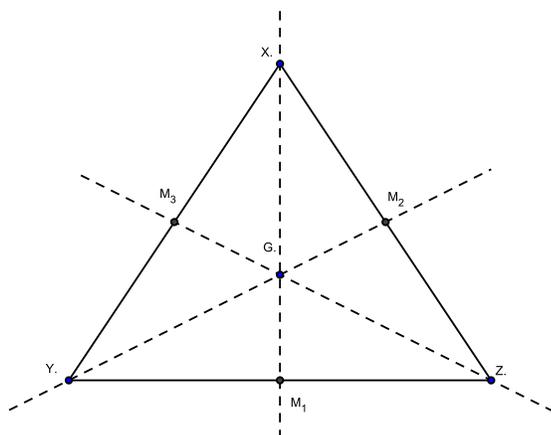


Figura 4.4: Simetrias do triângulo equilátero

A reflexão  $m_1$  de eixo  $X + M_1$  fixa o vértice  $X$  e envia o vértice  $Y$  para o vértice  $Z$  e vice-versa, como também o triângulo  $XYM_1$  para o triângulo  $XZM_1$  e vice-versa. Ou seja, o triângulo equilátero  $XYZ$  é invariante pela reflexão  $m_1$ . Fazendo raciocínio análogo aos eixos  $Y + M_2$  e  $Z + M_3$  concluímos que o triângulo tem apenas três simetrias de reflexão. Essas reflexões podem ser expressas sob a forma de permutação. Isto é:

$$m_1 = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Z & Y \end{pmatrix}, \quad m_2 = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & Y & X \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad m_3 = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & X & Z \end{pmatrix}.$$

Consideremos agora a rotação  $\rho$  de  $120^\circ$ , no sentido anti-horário, em torno do eixo perpendicular ao triângulo  $XYZ$  no ponto  $G$ . A rotação  $\rho$  envia o vértice  $X$  para o vértice  $Y$ , o vértice  $Y$  para o vértice  $Z$  e o vértice  $Z$  para o vértice  $X$ . Seja  $\rho_1 = \rho\rho$ , a rotação que envia  $X$  para  $Z$ ,  $Y$  para  $X$  e  $Z$  para  $Y$ . Note ainda, que a rotação  $\rho_2 = \rho\rho\rho$  de  $360^\circ$  equivale a identidade  $I$ . Essas rotações podem ser expressas sob a forma de permutação. Isto é:

$$\rho = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & X \end{pmatrix}, \quad \rho^2 = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Y & Z \end{pmatrix}.$$

Efetuada a composição entre as reflexões e rotações, obtemos os seguintes resultados:

$$m_1m_1 = m_1(m_1) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Y & Z \end{pmatrix} = I, \quad m_1m_2 = m_2(m_1) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \end{pmatrix} = \rho^2$$

$$m_1m_3 = m_3(m_1) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & X \end{pmatrix} = \rho, \quad m_2m_1 = m_1(m_2) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & X \end{pmatrix} = \rho$$

$$m_2m_2 = m_2(m_2) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Y & Z \end{pmatrix} = I, \quad m_2m_3 = m_3(m_2) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \end{pmatrix} = \rho^2$$

$$m_3m_1 = m_1(m_3) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \end{pmatrix} = \rho^2, \quad m_3m_2 = m_2(m_3) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & X \end{pmatrix} = \rho$$

$$m_3m_3 = m_3(m_3) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Y & Z \end{pmatrix} = I, \quad m_1\rho = \rho(m_1) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & X & Z \end{pmatrix} = m_3$$

$$m_1\rho^2 = \rho^2(m_1) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & Y & X \end{pmatrix} = m_3, \quad m_1I = \rho^3(m_1) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Z & Y \end{pmatrix} = m_1$$

$$m_2\rho = \rho(m_2) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Z & Y \end{pmatrix} = m_1, \quad m_2\rho^2 = \rho^2(m_2) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & X & Z \end{pmatrix} = m_3$$

$$m_2\rho^3 = I(m_2) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & Y & X \end{pmatrix} = m_2, \quad m_3\rho = \rho(m_3) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & Y & X \end{pmatrix} = m_2$$

$$m_3\rho^2 = \rho^2(m_3) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Z & Y \end{pmatrix} = m_1, \quad m_3\rho^3 = \rho^3(m_3) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & X & Z \end{pmatrix} = m_3$$

$$\rho m_1 = m_1(\rho) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & Y & X \end{pmatrix} = m_2, \quad \rho m_2 = m_2(\rho) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & X & Z \end{pmatrix} = m_3$$

$$\rho m_3 = m_3(\rho) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Z & Y \end{pmatrix} = m_1, \quad \rho^2 m_1 = m_1(\rho^2) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & X & Z \end{pmatrix} = m_3$$

$$\rho^2 m_2 = m_2(\rho^2) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Z & Y \end{pmatrix} = m_1, \quad \rho^2 m_3 = m_3(\rho^2) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & Y & X \end{pmatrix} = m_2$$

$$\rho^3 m_1 = m_1(\rho^3) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Z & Y \end{pmatrix} = m_1, \quad \rho^3 m_2 = m_2(\rho^3) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & Y & X \end{pmatrix} = m_2$$

$$\rho^3 m_3 = m_3(\rho^3) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & X & Z \end{pmatrix} = m_3, \quad \rho\rho = \rho(\rho) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \end{pmatrix} = \rho^2$$

$$\rho\rho^2 = \rho^2(\rho) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Y & Z \end{pmatrix} = \rho^3, \quad \rho\rho^3 = \rho^3(\rho) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & Y \end{pmatrix} = \rho$$

$$\rho^2 \rho = \rho(\rho^2) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Y & Z \end{pmatrix} = \rho^3, \quad \rho^2 \rho^2 = \rho^2(\rho^2) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & X \end{pmatrix} = \rho$$

$$\rho^2 \rho^3 = \rho^3(\rho^2) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \end{pmatrix} = \rho^2, \quad \rho^3 \rho = \rho(\rho^3) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & X \end{pmatrix} = \rho$$

$$I \rho^2 = \rho^2(\rho^3) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \end{pmatrix} = \rho^2, \quad I \rho^3 = \rho^3(\rho^3) = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Y & Z \end{pmatrix} = I$$

Os resultados desta composições podem ser vistos na tabela abaixo.

$\circ$	$I$	$\rho$	$\rho^2$	$m_1$	$m_2$	$m_3$
$I$	$I$	$\rho$	$\rho^2$	$m_1$	$m_2$	$m_3$
$\rho$	$\rho$	$\rho^2$	$I$	$m_2$	$m_3$	$m_1$
$\rho^2$	$\rho^2$	$I$	$\rho$	$m_3$	$m_1$	$m_2$
$m_1$	$m_1$	$m_3$	$m_2$	$I$	$\rho^2$	$\rho$
$m_2$	$m_2$	$m_2$	$m_3$	$\rho$	$I$	$\rho^2$
$m_3$	$m_3$	$m_2$	$m_1$	$\rho^2$	$\rho$	$I$

Tabela 4.1: Composição de simetrias de um triângulo equilátero

Concluimos que o grupo de simetria do triângulo equilátero é o grupo

$$D_3 = \{I, \rho, \rho^2, m_1, m_2, m_3\},$$

de ordem  $\#D_3 = 2 \cdot 3 = 6$ . Este grupo não é abeliano, pois  $m_2 = m_1 \rho^2 \neq \rho^2 m_1 = m_3$ .

**Observação:** Seja  $XYZ$  um triângulo isósceles de lados congruentes  $[X, Y]$  e  $[X, Z]$ .

Seja  $m$  a reflexão de espelho  $M = X + M_1$ ,  $M_1$  ponto médio do lado  $[Y, Z]$ . A reflexão  $m$

envia os vértices  $Y$  para  $Z$  e vice-versa, como também o triângulo  $XYM_1$  para o triângulo  $XZM_1$  e vice-versa. Então as únicas simetrias desse triângulo são a identidade e a reflexão  $m$ . Caso tenhamos um triângulo de lados diferentes o seu grupo de simetria, é o grupo trivial.

### Simetrias do Quadrado

Utilizando o Algoritmo  $I$ , concluímos que o grupo de simetrias é um grupo diedral de ordem 8, pois tem uma rotação mínima de  $90^\circ$  de período 4 e tem reta de simetria. A seguir, descrevemos essas simetrias:

Seja  $WXYZ$  um quadrado. Sejam  $M = M_1 + M_2$ , onde  $M_1$  e  $M_2$  são pontos médios de lados opostos e  $N = N_1 + N_2$  mediatrizes e  $D_1 = W + Y$  e  $D_2 = X + Z$  diagonais deste quadrado. consideremos  $m, n, d_1$  e  $d_2$  reflexões com espelhos  $M, N, D_1$  e  $D_2$ , respectivamente. A reflexão  $m$  com espelho  $M$  envia os vértices  $W$  e  $Z$  para os vértices  $X$  e  $Y$ , respectivamente, e vice-versa, como também o meio quadrado  $WM_1M_2Z$  para o meio quadrado  $M_1XYM_2$  e vice-versa, de onde podemos concluir que  $m$  deixa o quadrado globalmente invariante. Analogamente as reflexões  $n, d_1$  e  $d_2$  com espelhos  $N, D_1$  e  $D_2$  são também simetrias de reflexão que deixam o quadrado globalmente invariante. Essas reflexões podem ser expressas sob a forma de permutação. Isto é:

$$m = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & W & Z & Y \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Z & Y & X & W \end{pmatrix}$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & Z & Y & X \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Y & X & W & Z \end{pmatrix}$$

Consideremos agora uma rotação  $\rho$ , no sentido anti-horário, em torno de um eixo perpendicular ao centro do quadrado  $WXYZ$ , o ponto  $O$ . A rotação de  $\rho$  de  $90^\circ$  envia o vértice  $W$  para o vértice  $X$ , o vértice  $X$  para o vértice  $Y$ , o vértice  $Y$  para o vértice  $Z$  e o vértice  $Z$  para o vértice  $W$ . A rotação  $\rho_1$  de  $180^\circ$ , o dobro da rotação de  $90^\circ$ , envia o vértice  $W$  para o vértice  $Y$ , o vértice  $X$  para o vértice  $Z$ , o vértice  $Y$  para o vértice  $W$  e o vértice  $Z$  para o vértice  $X$ , e a  $\rho_2$  de  $270^\circ$ , o triplo da rotação de  $90^\circ$ , envia o vértice  $W$  para o vértice  $Z$ , o

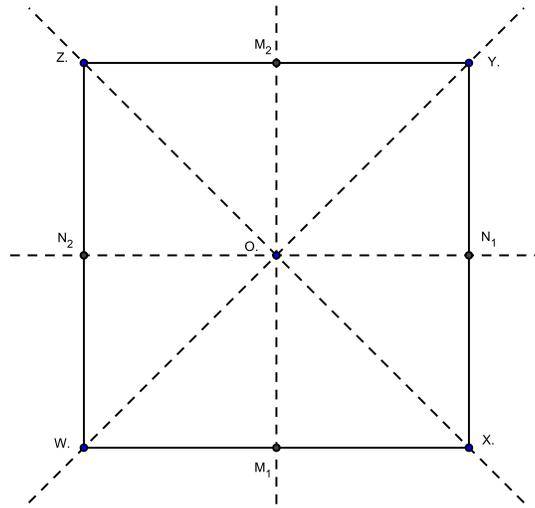


Figura 4.5: Simetrias do quadrado

vértice  $X$  para o vértice  $W$ , o vértice  $Y$  para o vértice  $X$  e o vértice  $Z$  para o vértice  $Y$ .  $\rho$ ,  $\rho_1$  e  $\rho_2$  enviam o quadrado globalmente invariante. Note que,  $\rho$  de  $90^\circ$ , a rotação mínima,  $\rho_1 = \rho\rho = \rho^2$ ,  $\rho_2 = \rho\rho\rho = \rho^3$  e  $\rho_3 = \rho\rho\rho\rho = \rho^4 = I$  que corresponde a uma rotação de  $360^\circ$ .

$$\rho = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & Y & Z & W \end{pmatrix}, \quad \rho^2 = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Y & Z & W & X \end{pmatrix}$$

$$\rho^3 = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Z & W & X & Y \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & X & Y & Z \end{pmatrix}$$

Efetuando a composição entre as reflexões e rotações, obtemos os seguintes resultados:

$$mn = n(m) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Y & Z & W & X \end{pmatrix} = \rho^2, \quad md_1 = d_1(m) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Z & W & X & Y \end{pmatrix} = \rho^3$$

$$md_2 = d_2(m) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & Y & Z & W \end{pmatrix} = \rho^3, \quad m\rho = \rho(m) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Y & X & W & Z \end{pmatrix} = d_2$$

$$m\rho^2 = \rho^2(m) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Z & Y & X & W \end{pmatrix} = n, \quad m\rho^3 = \rho^3(m) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & Z & Y & X \end{pmatrix} = d_1$$

$$mI = I(m) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & W & Z & Y \end{pmatrix} = m, \quad mm = m(m) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & X & Y & Z \end{pmatrix} = I$$

$$nm = m(n) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Y & Z & W & X \end{pmatrix} = \rho^2, \quad nd_1 = d_1(n) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & Y & Z & W \end{pmatrix} = \rho$$

$$nd_2 = d_2(n) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Z & W & X & Y \end{pmatrix} = \rho_3, \quad nn = n(n) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & X & Y & Z \end{pmatrix} = I$$

$$n\rho = \rho(n) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & Z & Y & X \end{pmatrix} = d_1, \quad n\rho^2 = \rho^2(n) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & W & Z & Y \end{pmatrix} = m$$

$$n\rho^3 = \rho^3(n) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Y & X & W & Z \end{pmatrix} = d_2, \quad nI = I(n) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Z & Y & X & W \end{pmatrix} = n$$

$$d_1m = m(d_1) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & Y & Z & W \end{pmatrix} = \rho, \quad d_1n = n(d_1) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Z & W & X & Y \end{pmatrix} = \rho^3$$

$$d_1d_1 = d_1(d_1) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & X & Y & Z \end{pmatrix} = I, \quad d_1d_2 = d_2(d_1) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Y & Z & W & X \end{pmatrix} = \rho^2$$

$$d_1\rho = \rho(d_1) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & W & Z & Y \end{pmatrix} = m, \quad d_1\rho^2 = \rho^2(d_1) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Y & X & W & Z \end{pmatrix} = d_2$$

$$d_1\rho^3 = \rho^3(d_1) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Z & Y & X & W \end{pmatrix} = n, \quad d_1I = I(d_1) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & Z & Y & X \end{pmatrix} = d_1$$

$$d_2m = m(d_2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Z & W & X & Y \end{pmatrix} = \rho^3, \quad d_2n = n(d_2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & Y & Z & W \end{pmatrix} = \rho$$

$$d_2d_1 = d_1(d_2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Y & Z & W & X \end{pmatrix} = \rho^2, \quad d_2d_2 = d_2(d_2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & X & Y & Z \end{pmatrix} = I$$

$$d_2\rho = \rho(d_2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Z & Y & X & W \end{pmatrix} = n, \quad d_2\rho^2 = \rho^2(d_2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & Z & Y & X \end{pmatrix} = d_1$$

$$d_2\rho^3 = \rho^3(d_2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & W & Z & Y \end{pmatrix} = m, \quad d_1I = I(d_1) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Y & X & W & Z \end{pmatrix} = d_2$$

$$\rho m = m(\rho) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & Z & Y & X \end{pmatrix} = d_1, \quad \rho n = n(\rho) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Y & X & W & Z \end{pmatrix} = d_2$$

$$\rho d_1 = d_1(\rho) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Z & Y & X & W \end{pmatrix} = n, \quad \rho d_2 = d_2(\rho) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & W & Z & Y \end{pmatrix} = m$$

$$\rho\rho = \rho(\rho) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Y & Z & W & X \end{pmatrix} = \rho^2, \quad \rho\rho^2 = \rho^2(\rho) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Z & W & X & Y \end{pmatrix} = \rho^3$$

$$\rho\rho^3 = \rho^3(\rho) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & X & Y & Z \end{pmatrix} = I, \quad \rho I = I(\rho) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & Y & Z & W \end{pmatrix} = \rho$$

$$\rho^2m = m(\rho^2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Z & Y & X & W \end{pmatrix} = n, \quad \rho^2n = n(\rho^2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & W & Z & Y \end{pmatrix} = m$$

$$\rho^2 d_1 = d_1(\rho^2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Y & X & W & Z \end{pmatrix} = d_2, \quad \rho^2 d_2 = d_2(\rho^2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & Z & Y & X \end{pmatrix} = d_1$$

$$\rho^2 \rho = \rho(\rho^2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & Z & X & Y \end{pmatrix} = \rho^3, \quad \rho^2 \rho^2 = \rho^2(\rho^2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & X & Y & Z \end{pmatrix} = I$$

$$\rho^2 \rho^3 = \rho^3(\rho^2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & Y & Z & W \end{pmatrix} = \rho, \quad \rho^2 I = I(\rho^2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Y & Z & W & X \end{pmatrix} = \rho^2$$

$$\rho^3 m = m(\rho^3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Y & X & W & Z \end{pmatrix} = d_2, \quad \rho^3 n = n(\rho^3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & Z & Y & X \end{pmatrix} = d_1$$

$$\rho^3 d_1 = d_1(\rho^3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & W & Z & Y \end{pmatrix} = m, \quad \rho^3 d_2 = d_2(\rho^3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Z & Y & X & W \end{pmatrix} = n$$

$$\rho^3 \rho = \rho(\rho^3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & X & Y & Z \end{pmatrix} = I, \quad \rho^3 \rho^2 = \rho^2(\rho^3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & Y & Z & W \end{pmatrix} = \rho$$

$$\rho^3 \rho^3 = \rho^3(\rho^3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Y & Z & W & X \end{pmatrix} = \rho, \quad \rho^3 I = I(\rho^3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Z & W & X & Y \end{pmatrix} = \rho^2$$

$$Im = m(I) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & W & Z & Y \end{pmatrix} = m, \quad In = n(I) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Z & Y & X & W \end{pmatrix} = n$$

$$Id_1 = d_1(I) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & Z & Y & X \end{pmatrix} = d_1, \quad Id_2 = d_2(I) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Y & X & W & Z \end{pmatrix} = d_2$$

$$I\rho = \rho(I) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & Y & Z & W \end{pmatrix} = \rho, \quad I\rho^2 = \rho^2(I) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Y & Z & W & X \end{pmatrix} = \rho^2$$

$$I\rho^3 = \rho^3(I) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Z & W & X & Y \end{pmatrix} = \rho^3, \quad II = I(I) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & X & Y & Z \end{pmatrix} = I$$

$\circ$	$I$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$	$m$	$n$	$d_1$	$d_2$
$I$	$I$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$	$m$	$n$	$d_1$	$d_2$
$\rho$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$	$I$	$d_1$	$d_2$	$n$	$m$
$\rho^2$	$\rho^2$	$\rho^3$	$I$	$\rho$	$n$	$m$	$d_2$	$d_1$
$\rho^3$	$\rho^3$	$I$	$\rho$	$\rho^2$	$d_2$	$d_1$	$m$	$n$
$m$	$m$	$d_2$	$n$	$d_1$	$I$	$\rho^2$	$\rho^3$	$\rho$
$n$	$n$	$d_1$	$m$	$d_2$	$\rho^2$	$I$	$\rho$	$\rho^3$
$d_1$	$d_1$	$m$	$d_2$	$n$	$\rho$	$\rho^3$	$I$	$\rho^2$
$d_2$	$d_2$	$n$	$d_1$	$m$	$\rho^3$	$\rho$	$\rho^2$	$I$

Tabela 4.2: Composição de simetrias do quadrado

**Observação:** Concluimos que o grupo de simetria do quadrado é o grupo

$$D_4 = \{I, \rho, \rho^2, \rho^3, m, n, d_1, d_2\},$$

de ordem  $\#D_4 = 2 \cdot 4 = 8$ , o qual não é abeliano, pois  $d_1 = n\rho \neq \rho n = d_2$ .

### Simetrias de um Pentágono Regular

Utilizando o Algoritmo I, concluímos que o grupo de simetrias é o grupo diedral de ordem 10, pois tem uma rotação mínima de  $72^\circ$  de período 5 e tem reta de simetria.

Seja  $WXYZK$  um pentágono regular. Sejam  $M_1, M_2, M_3, M_4$  e  $M_5$  pontos médios dos segmentos  $[W, X], [X, Y], [Y, Z], [Z, K]$  e  $[K, W]$  respectivamente. Sejam  $r_1, r_2, r_3, r_4$  e  $r_5$  reflexões de eixos  $R_1 = W + M_3, R_2 = X + M_4, R_3 = Y + M_5, R_4 = Z + M_1$  e  $R_5 = Z + M_2$  respectivamente. A reflexão  $r_1$  de eixo  $R_1 = W + M_3$  fixa  $W$  e envia o vértice  $X$  para o vértice  $K$ , o vértice  $Y$  para o vértice  $Z$  e vice-versa. Em conseqüência, a metade  $M_1XYZ$  do pentágono é enviada para a metade  $M_1WKZ$  e vice-versa. Isto é, a reflexão  $r_1$  deixa o pentágono invariante. De forma análoga as reflexões  $r_2, r_3, r_4$  e  $r_5$  de espelhos  $R_2 = X + M_4, R_3 = Y + M_5, R_4 = Z + M_1$  e  $R_5 = Z + M_2$ , respectivamente, deixam o pentágono globalmente invariante. Essas reflexões podem ser expressas sob a forma das seguintes permutações:

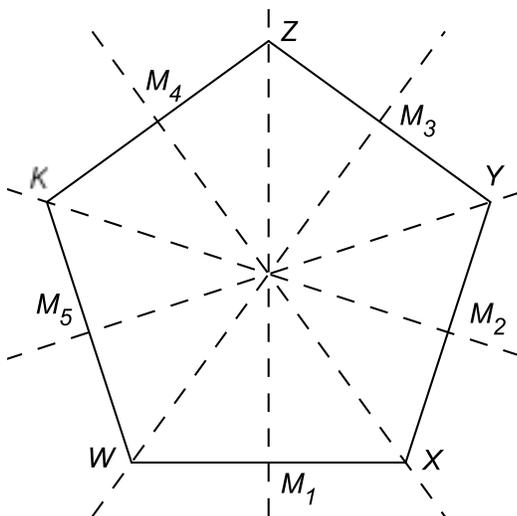


Figura 4.6: Simetrias do pentágono

$$r_1 = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ W & K & Z & Y & X \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Y & X & W & K & Z \end{pmatrix}$$

$$r_3 = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ K & Z & Y & X & W \end{pmatrix}, \quad r_4 = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ X & W & K & Z & Y \end{pmatrix}$$

$$r_5 = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Z & K & Z & Y & X \end{pmatrix}$$

Consideremos agora uma rotação  $\rho$ , no sentido anti-horário, em torno de um eixo  $L$  perpendicular ao pentágono  $WXYZK$  no ponto  $O$  centro deste pentágono. A rotação  $\rho$  de  $72^\circ$ , envia o vértice  $W$  para o vértice  $X$ , o vértice  $X$  para o vértice  $Y$ , o vértice  $Y$  para o vértice  $Z$ , o vértice  $Z$  para o vértice  $K$  e o vértice  $K$  para vértice  $W$ ,  $\rho_1$  de  $144^\circ$ , o dobro da rotação de  $72^\circ$ , envia o vértice  $W$  para o vértice  $Y$ , o vértice  $X$  para o vértice  $Z$ , o vértice  $Y$  para o vértice  $K$ , o vértice  $Z$  para o vértice  $W$  e o vértice  $K$  para o vértice  $X$ ,  $\rho_2$   $216^\circ$ , o triplo da rotação de  $72^\circ$ , envia o vértice  $W$  para o vértice  $Z$ , o vértice  $X$  para o vértice  $K$ , o vértice  $Y$  para vértice  $W$ , o vértice  $Z$  para o vértice  $X$  e o vértice  $K$  para o vértice  $Y$ ,  $\rho_3$  de  $288^\circ$ , o quádruplo da rotação  $72^\circ$ , envia o vértice  $W$  para o vértice  $K$ , o vértice  $X$  para o vértice  $W$ , o vértice  $Y$  para o vértice  $X$ , o vértice  $Z$  para o vértice  $Y$  e o vértice  $K$  para o vértice  $Z$ .  $\rho_4$  de  $360^\circ$ , o quádruplo da rotação  $72^\circ$  é a identidade  $I$ . Note que,  $\rho$  de  $72^\circ$ , a rotação mínima,  $\rho_1 = \rho\rho = \rho^2$ ,  $\rho_2 = \rho\rho\rho = \rho^3$  e  $\rho_3 = \rho\rho\rho\rho = \rho^4$  e  $\rho_4 = \rho^5 = I$ .

Essas rotações podem ser expressas sob a forma das seguintes permutações. Isto é:

$$\rho = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ X & Y & Z & K & W \end{pmatrix}, \quad \rho^2 = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Y & Z & K & W & X \end{pmatrix}$$

$$\rho^3 = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Z & K & W & X & Y \end{pmatrix}, \quad \rho^4 = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ K & W & X & Y & Z \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ W & X & Y & Z & K \end{pmatrix}$$

Efetuada a composição entre as reflexões e rotações associadas ao pentágono regular, temos:

$$r_1 r_1 = r_1(r_1) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ W & X & Y & Z & K \end{pmatrix} = I, \quad r_1 r_2 = r_2(r_1) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Y & Z & K & W & X \end{pmatrix} = \rho^2$$

$$r_1 r_3 = r_3(r_1) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ K & W & X & Y & Z \end{pmatrix} = \rho^4, \quad r_1 r_4 = r_4(r_1) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ X & Y & Z & K & W \end{pmatrix} = \rho$$

$$r_1 r_5 = r_5(r_1) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Z & K & W & X & Y \end{pmatrix} = \rho^3, \quad r_1 \rho = \rho(r_1) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ X & W & K & Z & Y \end{pmatrix} = r_4$$

$$r_1 \rho^2 = \rho^2(r_1) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Y & X & W & K & Z \end{pmatrix} = r_2, \quad r_1 \rho^3 = \rho^3(r_1) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Z & Y & X & W & K \end{pmatrix} = r_5$$

$$r_1 \rho^4 = \rho^4(r_1) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ K & Z & Y & X & W \end{pmatrix} = r_3, \quad r_1 I = I(r_1) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ W & K & Z & Y & X \end{pmatrix} = r_1$$

$$r_2 r_1 = r_1(r_2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Z & K & W & X & Y \end{pmatrix} = \rho^3, \quad r_2 r_2 = r_2(r_2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ W & X & Y & Z & K \end{pmatrix} = I$$

$$r_2 r_3 = r_3(r_2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Y & Z & K & W & X \end{pmatrix} = \rho^2, \quad r_2 r_4 = r_4(r_2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ K & W & X & Y & Z \end{pmatrix} = \rho^4$$

$$r_2 r_5 = r_5(r_2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ X & Y & Z & K & W \end{pmatrix} = \rho, \quad r_2 \rho = \rho(r_2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Z & Y & X & W & K \end{pmatrix} = r_5$$

$$r_2 \rho^2 = \rho^2(r_2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ K & Z & Y & X & W \end{pmatrix} = r_3, \quad r_2 \rho^3 = \rho^3(r_2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ W & K & Z & Y & X \end{pmatrix} = r_1$$

$$r_2 \rho^4 = \rho^4(r_2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ X & W & K & Z & Y \end{pmatrix} = r_4, \quad r_2 I = I(r_2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Y & X & W & K & Z \end{pmatrix} = r_2$$

$$r_3 r_1 = r_1(r_3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ X & Y & Z & K & W \end{pmatrix} = \rho, \quad r_3 r_2 = r_2(r_3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Z & K & W & X & Y \end{pmatrix} = \rho^3$$

$$r_3 r_3 = r_3(r_3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ W & X & Y & Y & K \end{pmatrix} = I, \quad r_3 r_4 = r_4(r_3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Y & Z & K & W & X \end{pmatrix} = \rho^2$$

$$r_3 r_5 = r_5(r_3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ K & W & X & Y & Z \end{pmatrix} = \rho^4, \quad r_3 \rho = \rho(r_3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ W & K & Z & Y & X \end{pmatrix} = r_1$$

$$r_3 \rho^2 = \rho^2(r_3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ X & W & K & Z & Y \end{pmatrix} = r_4, \quad r_3 \rho^3 = \rho^3(r_3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Y & X & W & K & Z \end{pmatrix} = r_2$$

$$r_3 \rho^4 = \rho^4(r_3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Z & Y & X & W & K \end{pmatrix} = r_5, \quad r_3 I = I(r_3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ K & Z & Y & X & W \end{pmatrix} = r_3$$

$$r_4 r_1 = r_1(r_4) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ K & W & X & Y & Z \end{pmatrix} = \rho^4, \quad r_4 r_2 = r_2(r_4) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ X & Y & Z & K & W \end{pmatrix} = \rho$$

$$r_4 r_3 = r_3(r_4) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Z & K & W & X & Y \end{pmatrix} = \rho^3, \quad r_4 r_4 = r_4(r_4) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ W & X & Y & Z & K \end{pmatrix} = I$$

$$r_4 r_5 = r_5(r_4) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Y & Z & K & W & X \end{pmatrix} = \rho^2, \quad r_4 \rho = \rho(r_4) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Y & X & W & K & Z \end{pmatrix} = r_2$$

$$r_4 \rho^2 = \rho^2(r_4) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Z & Y & X & W & K \end{pmatrix} = r_5, \quad r_4 \rho^3 = \rho^3(r_4) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ K & Z & Y & X & W \end{pmatrix} = r_3$$

$$r_4\rho^4 = \rho^4(r_4) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ W & K & Z & Y & X \end{pmatrix} = r_1, \quad r_4I = I(r_4) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ X & W & K & Z & Y \end{pmatrix} = r_4$$

$$r_5r_1 = r_1(r_5) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Y & Z & K & W & X \end{pmatrix} = \rho^2, \quad r_5r_2 = r_2(r_5) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ K & W & X & Y & Z \end{pmatrix} = \rho^4$$

$$r_5r_3 = r_3(r_5) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ X & Y & Z & K & W \end{pmatrix} = \rho, \quad r_5r_4 = r_4(r_5) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Z & K & W & X & Y \end{pmatrix} = \rho^3$$

$$r_5r_5 = r_5(r_5) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ W & X & Y & Z & K \end{pmatrix} = I, \quad r_5\rho = \rho(r_5) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ K & Z & Y & X & W \end{pmatrix} = r_3$$

$$r_5\rho^2 = \rho^2(r_5) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ W & K & Z & Y & X \end{pmatrix} = r_1, \quad r_5\rho^3 = \rho^3(r_5) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ X & W & K & Z & Y \end{pmatrix} = r_4$$

$$r_5\rho^4 = \rho^4(r_5) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Y & X & W & K & Z \end{pmatrix} = r_1, \quad r_5I = I(r_5) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Z & Y & X & W & K \end{pmatrix} = r_5$$

$$\rho r_1 = r_1(\rho) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ K & Z & Y & X & W \end{pmatrix} = r_3, \quad \rho r_2 = r_2(\rho) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ X & W & K & Z & Y \end{pmatrix} = r_4$$

$$\rho r_3 = r_3(\rho) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Z & Y & X & W & K \end{pmatrix} = r_5, \quad \rho r_4 = r_4(\rho) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ W & K & Z & Y & X \end{pmatrix} = r_1$$

$$\rho r_5 = r_5(\rho) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Y & X & W & K & Z \end{pmatrix} = r_2, \quad \rho\rho = \rho(\rho) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Y & Z & K & W & X \end{pmatrix} = \rho^2$$

$$\rho\rho^2 = \rho^2(\rho) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Z & K & W & X & Y \end{pmatrix} = \rho^3, \quad \rho\rho^3 = \rho^3(\rho) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ K & W & X & Y & Z \end{pmatrix} = \rho^4$$

$$\rho^2\rho^4 = \rho^4(\rho^2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ W & X & Y & Z & K \end{pmatrix} = I, \quad \rho I = I(\rho) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ X & Y & Z & K & W \end{pmatrix} = \rho$$

$$\rho^2 r_1 = r_1(\rho^2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Z & Y & X & W & K \end{pmatrix} = r_5, \quad \rho^2 r_2 = r_2(\rho^2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ W & K & Z & Y & X \end{pmatrix} = r_1$$

$$\rho^2 r_3 = r_3(\rho^2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Y & X & W & K & Z \end{pmatrix} = r_2, \quad \rho^2 r_4 = r_4(\rho^2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ K & Z & Y & X & W \end{pmatrix} = r_3$$

$$\rho^2 r_5 = r_5(\rho^2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ X & W & K & Z & Y \end{pmatrix} = r_4, \quad \rho^2 \rho = \rho(\rho^2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Z & K & W & X & Y \end{pmatrix} = \rho^3$$

$$\rho^2 \rho^2 = \rho^2(\rho^2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ K & W & X & Y & Z \end{pmatrix} = \rho^4, \quad \rho^2 \rho^3 = \rho^3(\rho^2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ W & X & Y & Z & K \end{pmatrix} = I$$

$$\rho^2 \rho^4 = \rho^4(\rho^2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ X & Y & Z & K & W \end{pmatrix} = \rho, \quad \rho^2 I = I(\rho^2) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Y & Z & K & W & X \end{pmatrix} = \rho^2$$

$$\rho^3 r_1 = r_1(\rho^3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Y & X & W & K & Z \end{pmatrix} = r_2, \quad \rho^3 r_2 = r_2(\rho^3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ K & Z & Y & X & W \end{pmatrix} = r_3$$

$$\rho^3 r_3 = r_3(\rho^3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ X & W & K & Z & Y \end{pmatrix} = r_4, \quad \rho^3 r_4 = r_4(\rho^3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Z & Y & X & W & K \end{pmatrix} = r_5$$

$$\rho^3 r_5 = r_5(\rho^3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ W & K & Z & Y & X \end{pmatrix} = r_1, \quad \rho^3 \rho = \rho(\rho^3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ K & W & X & Y & Z \end{pmatrix} = \rho^4$$

$$\rho^3 \rho^2 = \rho^2(\rho^3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ W & X & Y & Z & K \end{pmatrix} = I, \quad \rho^3 \rho^3 = \rho^3(\rho^3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ X & Y & Z & K & W \end{pmatrix} = \rho$$

$$\rho^3 \rho^4 = \rho^4(\rho^3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Y & Z & K & W & X \end{pmatrix} = \rho^2, \quad \rho^3 I = I(\rho^3) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Z & K & W & X & Y \end{pmatrix} = \rho^3$$

$$\rho^4 r_1 = r_1(\rho^4) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ X & W & K & Z & Y \end{pmatrix} = r_4, \quad \rho^4 r_2 = r_2(\rho^4) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Z & Y & X & W & K \end{pmatrix} = r_5$$

$$\rho^4 r_3 = r_3(\rho^4) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ W & K & Z & Y & X \end{pmatrix} = r_1, \quad \rho^4 r_4 = r_4(\rho^4) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Y & X & W & K & Z \end{pmatrix} = r_2$$

$$\rho^4 r_5 = r_5(\rho^4) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ K & Z & Y & X & W \end{pmatrix} = r_3, \quad \rho^4 \rho = \rho(\rho^4) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ W & X & Y & Z & K \end{pmatrix} = I$$

$$\rho^4 \rho^2 = \rho^2(\rho^4) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ X & Y & Z & K & W \end{pmatrix} = \rho, \quad \rho^4 \rho^3 = \rho^3(\rho^4) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Y & Z & K & W & X \end{pmatrix} = \rho^2$$

$$\rho^4 \rho^4 = \rho^4(\rho^4) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Z & K & W & X & Y \end{pmatrix} = \rho^3, \quad \rho^4 I = I(\rho^4) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ K & W & X & Y & Z \end{pmatrix} = \rho^4$$

$$I r_1 = r_1(I) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ W & K & Z & Y & X \end{pmatrix} = r_1, \quad I r_2 = r_2(I) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Y & X & W & K & Z \end{pmatrix} = r_2$$

$$Ir_3 = r_3(I) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ K & Z & Y & X & W \end{pmatrix} = r_3, \quad Ir_4 = r_4(I) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ X & W & K & Z & Y \end{pmatrix} = r_4$$

$$Ir_5 = r_5(I) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Z & Y & X & W & K \end{pmatrix} = r_5, \quad I\rho = \rho(I) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ X & Y & Z & K & W \end{pmatrix} = \rho$$

$$I\rho^2 = \rho^2(I) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Y & Z & K & W & X \end{pmatrix} = \rho^2, \quad I\rho^3 = \rho^3(I) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ Z & K & W & X & Y \end{pmatrix} = \rho^3$$

$$I\rho^4 = \rho^4(I) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ K & W & X & Y & Z \end{pmatrix} = \rho^4, \quad II = I(I) = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z & K \\ W & X & Y & Z & K \end{pmatrix} = I$$

$\circ$	$I$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$	$\rho^4$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$
$I$	$I$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$	$\rho^4$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$
$\rho$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$	$\rho^4$	$I$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$r_1$	$r_2$
$\rho^2$	$\rho^2$	$\rho^3$	$\rho^4$	$I$	$\rho$	$r_5$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$
$\rho^3$	$\rho^3$	$\rho^4$	$I$	$\rho$	$\rho^2$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$r_1$
$\rho^4$	$\rho^4$	$I$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$	$r_4$	$r_5$	$r_1$	$r_2$	$r_3$
$r_1$	$r_1$	$r_4$	$r_2$	$r_5$	$r_3$	$I$	$\rho^2$	$\rho^4$	$\rho$	$\rho^3$
$r_2$	$r_2$	$r_5$	$r_3$	$r_1$	$r_4$	$\rho^3$	$I$	$\rho^2$	$\rho^4$	$\rho$
$r_3$	$r_3$	$r_1$	$r_4$	$r_2$	$r_5$	$\rho$	$\rho^3$	$I$	$\rho^2$	$\rho^4$
$r_4$	$r_4$	$r_2$	$r_5$	$r_3$	$r_1$	$\rho^4$	$\rho$	$\rho^3$	$I$	$\rho^2$
$r_5$	$r_5$	$r_3$	$r_1$	$r_4$	$r_2$	$\rho^2$	$\rho^4$	$\rho$	$\rho^3$	$I$

Tabela 4.3: Composição de simetrias do pentágono

### Simetrias de Ornamentos Limitados

Também podemos usar o Algoritmo *I* em ornamentos como a da figura abaixo. Esse ornamento tem uma rotação mínima de  $30^\circ$  e período 12. Portanto, seu grupo de simetria é  $D_{12}$ .

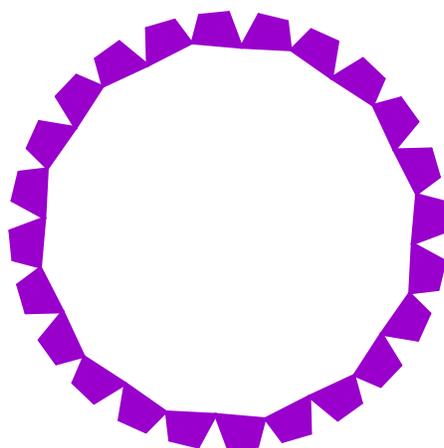


Figura 4.7: Grupo de simetria  $D_{12}$

No ornamento abaixo temos uma rotação mínima de  $15^\circ$  de período 24 e não tem reta de simetria. Portanto, o grupo de simetria é o grupo cíclico  $C_{24}$ .

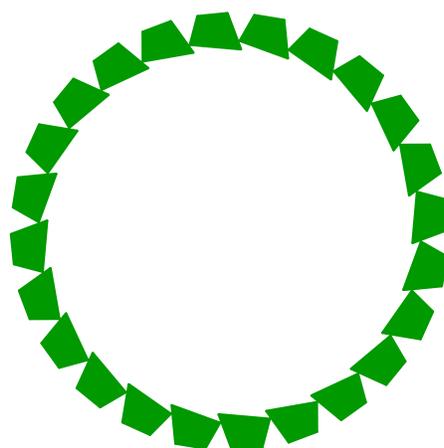


Figura 4.8: Grupo cíclico  $C_{24}$

### Exemplos de grupos de faixas

Usando o Algoritmo *II* podemos identificar os grupos de simetrias das faixas abaixo e também identificar geradores. O algoritmo também pode ser utilizado no sentido inverso para a construção de faixas a partir de um motivo. Isso pode ser feito facilmente utilizando programa computacional, como o programa gratuito Geogebra, que permite importar figuras, tais como fotos, e realizar as operações de simetrias na figura obtendo faixas muito interessantes. As faixas apresentadas nas figuras foram obtidas dessa forma. O programa Geogebra pode ser encontrado em [20].



Figura 4.9: Motivo

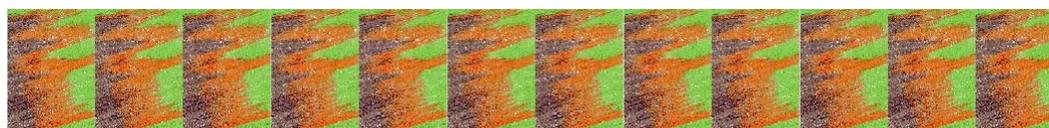


Figura 4.10: Grupo de simetria  $t$

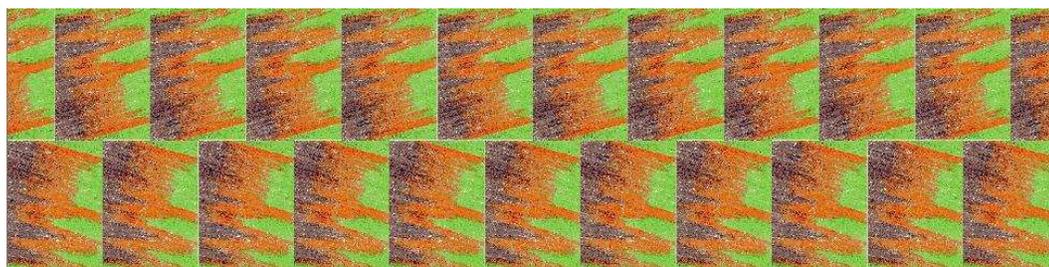


Figura 4.11: Grupo de simetria  $tg$



Figura 4.12: Grupo de simetria tv

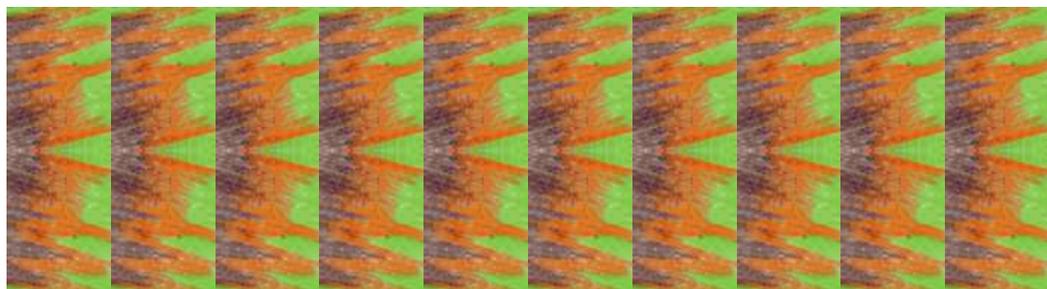


Figura 4.13: Grupo de simetria th

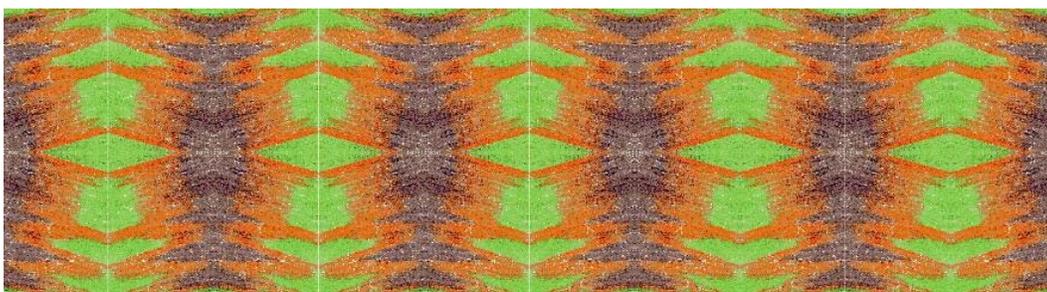


Figura 4.14: Grupo de simetria trh

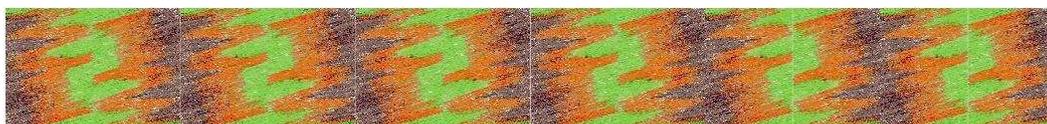


Figura 4.15: Grupo de simetria tr



Figura 4.16: Grupo de simetria trg

**Exemplo de Pavimentação:**

Utilizando o Algoritmo *III* vemos que o grupo de simetrias da pavimentação abaixo é  $pm$ , gerado por 2 reflexões e uma transformação. Aqui também podemos utilizar o algoritmo no sentido inverso para produzir pavimentações, e o programa Geogebra permite construí-lo facilmente. A pavimentação apresentada aqui foi obtida com auxílio do Geogebra. Para mais detalhes de como utilizar este algoritmo ver [16].



Figura 4.17: Pavimentação com grupo de simetria  $pm$

## 4.2 Simetrias no Espaço

Nessa última seção estudamos as simetrias existentes em figuras de três dimensões. Investigamos as simetrias de dois sólidos platônicos, o tetraedro e o cubo.

Nosso objetivo é encontrar as transformações do espaço que enviam ou transformam esses poliedros de forma invariante. Estas transformações são isometrias, e são chamadas de simetrias, movimentos rígidos, ou transformações de simetrias. Ou seja, isometrias que deixam um poliedro na sua própria forma, ocupando o mesmo espaço, ou ainda, um poliedro invariante. Como já sabemos, as isometrias do espaço são as translações, reflexões, rotações, reflexões rotatórias, reflexões deslizantes e deslocamento em parafuso. Nesse estudo vamos excluir as translações e outras isometrias definidas como produtos que envolvam translações, tipo deslocamento em parafuso, e a reflexão deslizante, em razão de que implicam movimento, e vamos determinar as transformações de simetria desses poliedros em relação a rotação, a reflexão rotativa e a inversão central, ou seja, a reflexão rotatória com rotação de ângulo  $180^\circ$ .

Como o conjunto das isometrias é um grupo em relação a operação de composição, as simetrias de poliedros que são isometrias, definem o grupo de simetria do poliedro.

### Simetrias do Tetraedro Regular

Consideremos  $WXYZ$  um tetraedro regular de arestas  $[W, X]$ ,  $[W, Y]$ ,  $[W, Z]$ ,  $[X, Y]$ ,  $[X, Z]$  e  $[Y, Z]$  e faces  $WXY$ ,  $WYZ$ ,  $WXZ$  e  $XYZ$ .

- Simetrias de reflexão do tetraedro.

Seja  $A_1 = W + X + M_1$ , o plano definido pela aresta  $[W, X]$  e  $M_1$  ponto médio da aresta  $[Y, Z]$ .

Como cada face do tetraedro regular é um triângulo equilátero,  $[W, M_1] \subset A_1$  é a altura relativa à aresta  $[Y, Z]$  da face  $WYZ$ . Temos assim que  $A_1$  é bissetor de  $[Y, Z]$  em  $M_1$ . Seja  $a_1$  a reflexão com espelho  $A_1$ .  $a_1$  fixa o segmento  $[X, W]$  e envia o vértice  $Y$  para o

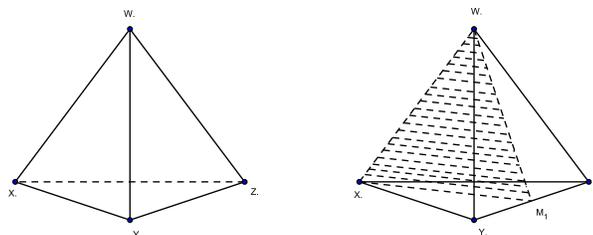


Figura 4.18: Simetria de reflexão do tetraedro

vértice  $Z$  e, vice-versa, os segmentos  $[X, Y]$ ,  $[W, Y]$  e  $[Y, M_1]$  para os segmentos  $[X, Z]$ ,  $[W, Z]$  e  $[M_1, Z]$ , respectivamente e, vice-versa, a face  $WXY$  para a face  $WXZ$  e vice-versa e a meia face  $WYM_1$  para a meia face  $WM_1Z$  e, vice-versa. Logo, a reflexão  $a_1$  com espelho  $A_1$  envia ou transforma o tetraedro  $WXYZ$  globalmente invariante.

Sejam  $M_2, M_3, M_4, M_5$  e  $M_6$  pontos médios das arestas  $[X, Y]$ ,  $[X, Z]$ ,  $[W, X]$ ,  $[W, Y]$  e  $[W, Z]$ , respectivamente. Sejam  $a_2, a_3, a_4, a_5$  e  $a_6$  reflexões com espelhos  $A_2 = W + M_2 + Z$ ,  $A_3 = W + Y + M_3$ ,  $A_4 = M_4 + Y + Z$ ,  $A_5 = X + M_5 + Z$  e  $A_6 = X + Y + M_6$ , respectivamente, de forma análoga as reflexões  $a_2, a_3, a_4, a_5$  e  $a_6$  enviam (ou transformam) o tetraedro globalmente invariante.

Em termos de permutações  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  e  $a_6$  podem ser expressas da seguinte forma:

$$a_1 = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & X & Z & Y \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & Y & X & Z \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & Z & Y & X \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & W & Y & Z \end{pmatrix}$$

$$a_5 = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & X & Z & Y \end{pmatrix}, \quad a_6 = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Z & X & Y & W \end{pmatrix}$$

- Simetrias de rotação do tetraedro

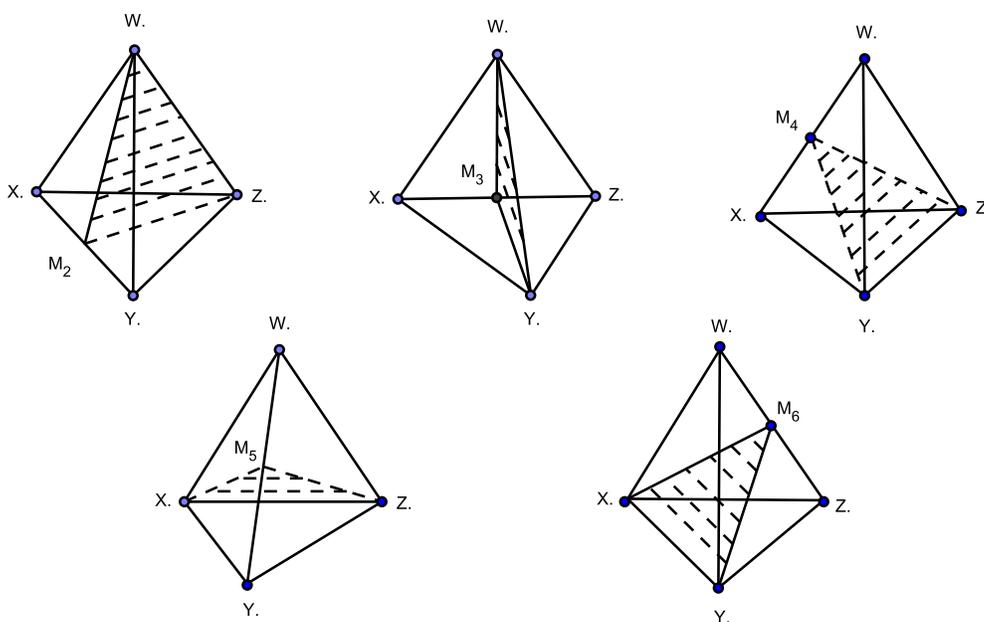


Figura 4.19: Simetrias de reflexão do tetraedro

Seja o tetraedro regular  $WXYZ$ . Seja  $K_1$  um eixo passando pelo ponto  $W$  e pelo centro da face  $XYZ$ . A rotação  $\rho_{k_1}$  de  $120^\circ$  em torno do eixo  $K_1$ , fixa  $W$  e envia o vértice  $X$  para o vértice  $Y$ , o vértice  $Y$  para o vértice  $Z$  e o vértice  $Z$  para o vértice  $X$ . Como consequência  $\rho_{k_1}$  fixa a face  $XYZ$  e envia a face  $WXY$  para a face  $WYZ$ , a face  $WYZ$  para a face  $WXZ$  e face  $WXZ$  para face  $WXY$ . Outra rotação  $\rho_{k_1}^2$  de  $240^\circ$ , o dobro da rotação  $\rho_{k_1}$ , fixa  $W$  e envia o vértice  $X$  para o vértice  $Z$ , o vértice  $Y$  para o vértice  $X$  e o vértice  $Z$  para o vértice  $Y$ , conseqüentemente,  $\rho_{k_1}^2$  fixa a face  $XYZ$  e envia a face  $WXY$  para a face  $WZX$ , a face  $WYZ$  para a face  $WXY$  e face  $WZX$  para face  $WYZ$ . A rotação  $\rho_{k_1}^3$  de  $360^\circ$ , o triplo da rotação  $\rho$ , é a identidade. Desta forma, as rotações  $\rho_{k_1}$ ,  $\rho_{k_1}^2$  e  $\rho_{k_1}^3$  enviam o tetraedro  $WXYZ$  globalmente invariante.

Considerando  $K_2$ ,  $K_3$  e  $K_4$  eixos definidos pelos vértices  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  e os centro das faces  $WYZ$ ,  $WXZ$  e  $WXY$  respectivamente.  $K_2$ ,  $K_3$  e  $K_4$  são chamados eixos de rotações, analogamente,  $\rho_{k_2}$ ,  $\rho_{k_2}^2$  e  $\rho_{k_2}^3$ ,  $\rho_{k_3}$ ,  $\rho_{k_3}^2$  e  $\rho_{k_3}^3$  e  $\rho_{k_4}$ ,  $\rho_{k_4}^2$  e  $\rho_{k_4}^3$  são suas respectivas rotações.

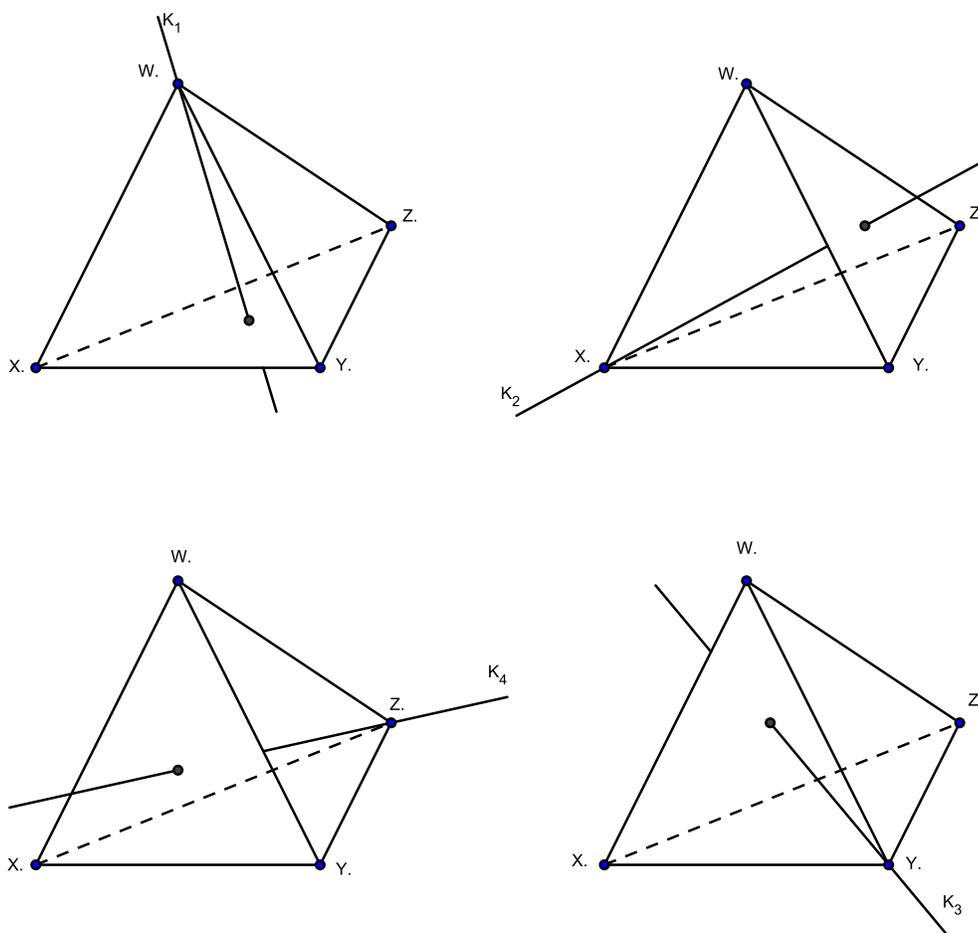


Figura 4.20: Simetrias de rotação do tetraedro

Na forma de permutação, essas rotações são expressas da seguinte forma:

$$\rho_{k_1} = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & Y & Z & X \end{pmatrix}, \quad \rho_{k_1}^2 = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ W & Z & X & Y \end{pmatrix}$$

$$\rho_{k_2} = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Y & X & Z & W \end{pmatrix}, \quad \rho_{k_2}^2 = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Z & X & W & Y \end{pmatrix}$$

$$\rho_{k_3} = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & Z & Y & W \end{pmatrix}, \quad \rho_{k_3}^2 = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Z & W & Y & X \end{pmatrix}$$

$$\rho_{k_4} = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & Y & W & Z \end{pmatrix}, \quad \rho_{k_4}^2 = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Y & W & X & Z \end{pmatrix}$$

$$I = \rho_{(k_1)}^3 = \rho_{(k_2)}^3 = \rho_{(k_3)}^3 = \rho_{(k_4)}^3 = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & Y & W & Z \end{pmatrix}$$

Consideremos os eixos  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  definidos pelos pontos médios das arestas  $[W, Y]$  e  $[X, Z]$ ,  $[X, Y]$  e  $[W, Z]$  e  $[W, X]$  e  $[Y, Z]$ , respectivamente. A rotação  $\rho_{L_1}$  de  $180^\circ$  em torno do eixo  $L_1$ , envia o vértice  $W$  para o vértice  $Y$  e o vértice  $X$  para o vértice  $Z$  e vice-versa, conseqüentemente, envia a face  $WXY$  para a face  $WYZ$  e a face  $WXZ$  para a face  $YXZ$  e, vice-versa, ou seja,  $\rho_{L_1}$  de  $180^\circ$  envia (ou transforma) o tetraedro de forma invariante. Da mesma forma as rotações  $\rho_{L_2}$  e  $\rho_{L_3}$  de  $180^\circ$  em torno eixos  $L_2$  e  $L_3$  envia (ou transforma) o tetraedro de forma invariante. As rotações  $\rho_{(L_1)}^2$ ,  $\rho_{(L_2)}^2$  e  $\rho_{(L_3)}^2$  são a identidade.

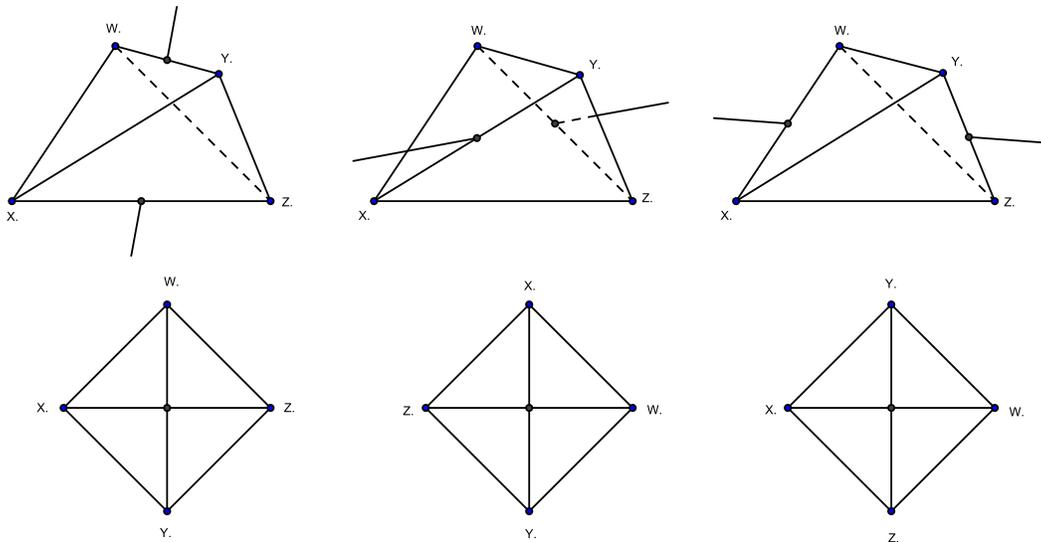


Figura 4.21: Simetrias de reflexão do tetraedro

Na forma de permutação, essas rotações são expressas da seguinte forma:

$$\rho_{L_1} = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Y & Z & W & X \end{pmatrix}, \quad \rho_{L_2} = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Z & Y & X & W \end{pmatrix}, \quad \rho_{L_3} = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & W & Z & Y \end{pmatrix}$$

$$I = \rho_{L_1}^2 = \rho_{L_2}^2 = \rho_{L_3}^2 = \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & Y & W & Z \end{pmatrix}$$

- Simetria de reflexão rotativa

Seja  $H_1$  o plano definido pelos pontos médios das arestas  $[W, X]$ ,  $[W, Z]$ ,  $[Y, Z]$  e  $[X, Y]$ . Seja  $h_1$  a reflexão com espelho  $H_1$ . Note que, a reflexão  $h_1$  claramente não é uma simetria, pois envia o tetraedro  $WXYZ$  para o tetraedro  $h_1(W)h_1(X)h_1(Y)h_1(Z)$  diferente do original. Apenas o ponto médio de  $[W, Y]$  é enviado no ponto médio de  $[X, Z]$  e vice-versa. Logo não existe simetria de inversão central.

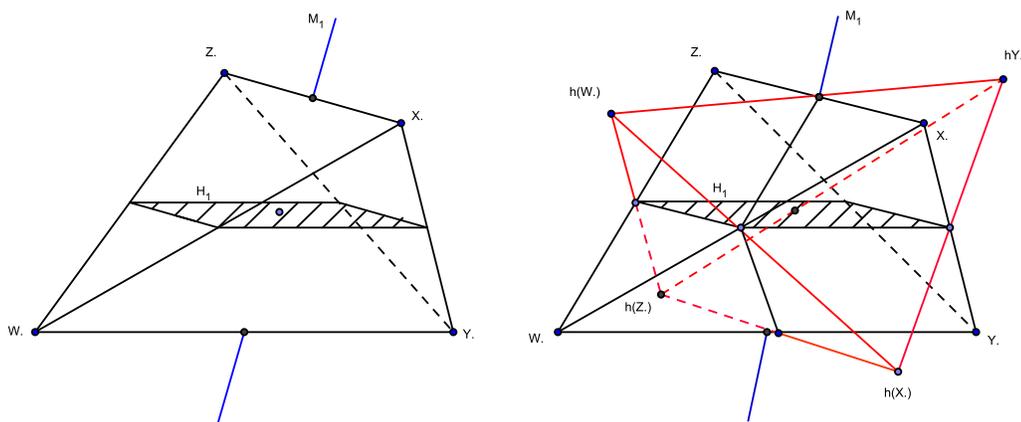


Figura 4.22: Simetrias de reflexão rotativa do tetraedro

Seja  $M_1$  o eixo definido pelos pontos médios de  $[W, Y]$  e  $[X, Z]$ . Observando a figura, uma rotação  $\rho_{M_1}$  de  $90^\circ$  no sentido anti-horário em torno do eixo  $M_1$ , envia o vértice  $h(W)$  para o vértice  $X$ , o vértice  $h(X)$  para o vértice  $Y$ , o vértice  $h(Y)$  para o vértice  $Z$  e o vértice  $h(Z)$  para o vértice  $W$  e a rotação  $\rho_{M_1}^3$  de  $270^\circ$  em torno mesmo eixo envia o vértice  $h(W)$

para o vértice  $Z$ , o vértice  $h(X)$  para o vértice  $W$ , o vértice  $h(Y)$  para o vértice  $X$  e o vértice  $h(Z)$  para o vértice  $Y$ . Desta forma, efetuamos a composição de uma reflexão por uma rotação que define uma reflexão rotativa, que é uma simetria. Analogamente, sejam  $H_2$  e  $H_3$  os planos definidos pelos pontos médios das arestas  $[W, Y]$ ,  $[W, Z]$ ,  $[X, Y]$  e  $[X, Z]$  e  $[W, X]$ ,  $[W, Y]$ ,  $[X, Z]$  e  $[Y, Z]$ , respectivamente. Sejam  $h_2$  e  $h_3$  as reflexões com espelhos  $H_2$  e  $H_3$ . Sejam  $M_2$  e  $M_3$  eixos definidos pelos pontos médios dos segmentos  $[W, X]$  e  $[Y, Z]$ , e  $[W, Z]$  e  $[X, Y]$ , respectivamente. As reflexões  $h_2$  e  $h_3$  enviam o tetraedro  $WXYZ$  para  $h_2(W)h_2(X)h_2(Y)h_2(Z)$  e  $h_3(W)h_3(X)h_3(Y)h_3(Z)$  respectivamente. Efetuando as rotações  $\rho_{M_2}$  e  $\rho_{M_3}$  de  $90^\circ$ , em torno dos eixos  $M_2$  e  $M_3$ , enviam o vértice  $h_2(W)$  para o vértice  $Z$ , o vértice  $h_2(X)$  para o vértice  $Y$ , o vértice  $h_2(Y)$  para o vértice  $W$  e o vértice  $h_2(Z)$  para o vértice  $X$  e envia o vértice  $h_3(W)$  para o vértice  $Y$ , o vértice  $h_3(X)$  para o vértice  $W$ , o vértice  $h_3(Y)$  para o vértice  $Z$  e o vértice  $h_3(Z)$  para o vértice  $X$  e efetuando as rotações  $\rho_{M_2}^3$  e  $\rho_{M_3}^3$  de  $270^\circ$   $h_2(W)$  para o vértice  $Y$ , o vértice  $h_2(X)$  para o vértice  $Z$ , o vértice  $h_2(Y)$  para o vértice  $X$  e o vértice  $h_2(Z)$  para o vértice  $W$  e  $h_3(W)$  para o vértice  $X$ , o vértice  $h_3(X)$  para o vértice  $Z$ , o vértice  $h_3(Y)$  para o vértice  $W$  e o vértice  $h_3(Z)$  para o vértice  $Y$ . Em termos de permutações as simetrias de reflexões rotativas podem ser expressas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \rho_{M_1} &= \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & Y & Z & W \end{pmatrix}, & \rho_{M_1}^3 &= \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Z & W & X & Y \end{pmatrix} \\ \rho_{M_2} &= \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Z & Y & W & X \end{pmatrix}, & \rho_{M_2}^3 &= \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Y & Z & X & W \end{pmatrix} \\ \rho_{M_3} &= \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ Y & W & Z & X \end{pmatrix}, & \rho_{M_3}^2 &= \begin{pmatrix} W & X & Y & Z \\ X & Z & W & Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Concluimos que o grupo de simetria do tetraedro é o grupo  $T = \{I, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \rho_{k_1}, \rho_{k_1}^2, \rho_{k_2}, \rho_{k_2}^2, \rho_{k_3}, \rho_{k_3}^2, \rho_{k_4}, \rho_{k_1}^4, \rho_{L_1}, \rho_{L_2}, \rho_{L_3}, \rho_{M_1}, \rho_{M_1}^3, \rho_{M_2}, \rho_{M_2}^3, \rho_{M_3}, \rho_{M_3}^2\}$ , de ordem  $\#T = 24$ . Este grupo não é um grupo abeliano.

### Simetrias do Cubo

Seja  $W_1X_1Y_1Z_1W_2X_2Y_2Z_2$  um cubo de arestas  $[W_1, X_1]$ ,  $[W_1, Z_1]$ ,  $[X_1Y_1]$ ,  $[Y_1, Z_1]$ ,  $[W_1, W_2]$ ,  $[X_1, X_2]$ ,  $[Y_1, Y_2]$ ,  $[Z_1, Z_2]$ ,  $[W_2, X_2]$ ,  $[W_2, Z_2]$ ,  $[X_2, Y_2]$ , e  $[Y_2, Z_2]$  e de faces  $W_1X_1Y_1Z_1$ ,  $W_2X_2Y_2Z_2$ ,  $W_1X_1W_2X_2$ ,  $W_1Z_1W_2Z_2$ ,  $X_1Y_1X_2Y_2$  e  $Y_1Z_1Y_2Z_2$ . Sejam  $M_1, M_2, M_3, M_4, N_1, N_2, N_3, N_4$  e  $P_1, P_2, P_3, P_4$  pontos médios das arestas  $[W_1, W_2]$ ,  $[X_1, X_2]$ ,  $[Y_1, Y_2]$ ,  $[Z_1, Z_2]$ ,  $[W_1, X_1]$ ,  $[Y_1, Z_1]$ ,  $[W_2, X_2]$ ,  $[Y_2, Z_2]$  e  $[W_1, Z_1]$ ,  $[X_1Y_1]$ ,  $[W_2, Z_2]$ ,  $[X_2, Y_2]$ , respectivamente.

### Simetrias de Reflexão

Sejam os planos:

- $A_1$  definido pelo conjunto de pontos  $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$
- $A_2$  definido pelo conjunto de pontos  $\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$
- $A_3$  definido pelo conjunto de pontos  $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$
- $A_4$  definido pelo conjunto de pontos  $\{W_1, Z_1, X_2, Y_2\}$
- $A_5$  definido pelo conjunto de pontos  $\{X_1, Y_1, W_2, Z_2\}$
- $A_6$  definido pelo conjunto de pontos  $\{W_1, W_2, Y_1, Y_2\}$
- $A_7$  definido pelo conjunto de pontos  $\{X_1, Z_1, X_2, Z_2\}$
- $A_8$  definido pelo conjunto de pontos  $\{W_1, X_1, Y_2, Z_2\}$
- $A_9$  definido pelo conjunto de pontos  $\{Z_1, Y_1, W_2, X_2\}$

As reflexões  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$  de espelhos  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$  e  $A_9$ , ver figura, enviam (ou transformam) o cubo globalmente invariante. Desta forma o cubo possui nove simetrias de reflexões.

### Simetrias de Rotação

Sejam os seguintes eixos:

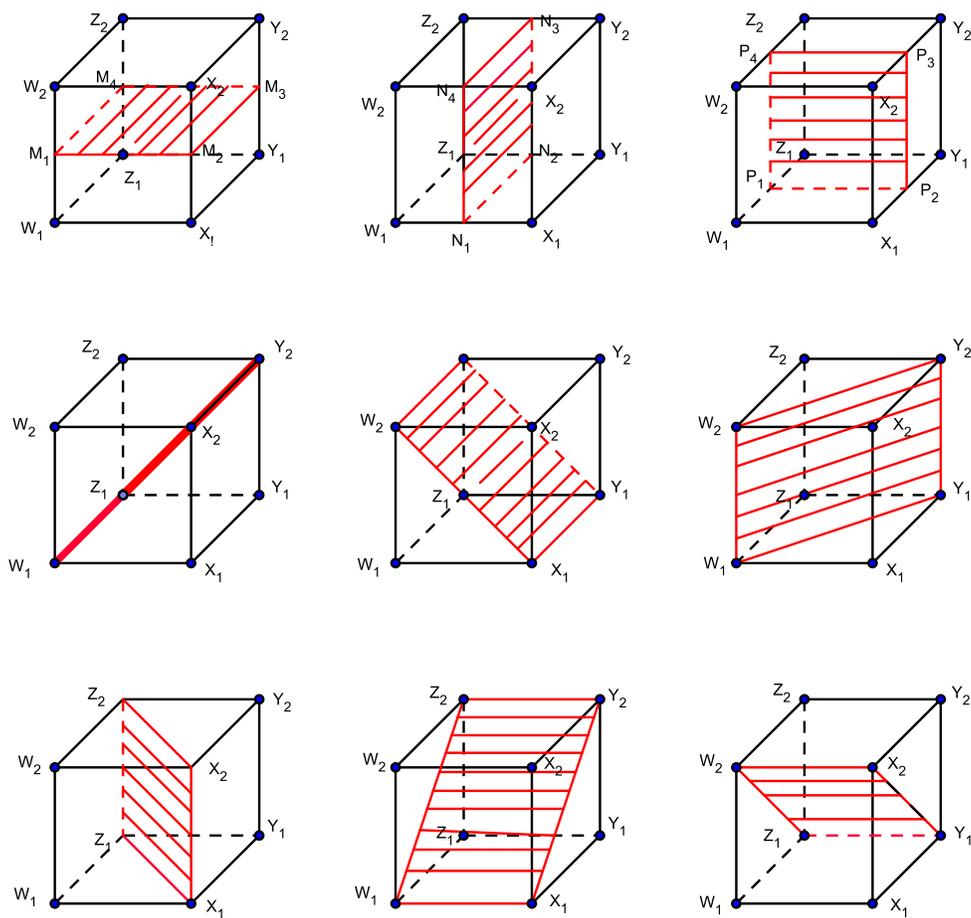


Figura 4.23: Simetrias de reflexão do cubo

- $K_1, K_2$  e  $K_3$  definidos pelos centros das faces  $W_1X_1Y_1Z_1$  e  $W_2X_2Y_2Z_2$ ,  $W_1W_2X_1X_2$  e  $Y_1Y_2Z_1Z_2$ , e  $W_1W_2Y_1Y_2$  e  $X_1X_2Z_1Z_2$  respectivamente. Em torno destes eixos, no sentido anti-horário, temos 3 rotações de  $90^\circ$ , 3 rotações de  $180^\circ$  e 3 rotações de  $270^\circ$ .
- $L_1 = M_1 + M_3$ ,  $L_2 = M_2 + M_4$ ,  $L_3 = N_1 + N_3$ ,  $L_4 = N_2 + N_4$ ,  $L_5 = P_1 + P_3$  e  $L_6 = P_2 + P_4$ , ou seja,  $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6$  são definidos pelos pontos médios de arestas opostas. Em torno destes eixos, no sentido anti-horário, temos 6 rotações de  $180^\circ$ .
- $R_1 = W_1 + Y_2$ ,  $R_2 = X_1 + Z_2$ ,  $R_3 = Y_1 + W_2$  e  $R_4 = Z_1 + X_2$ , ou seja,  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  são definidos pelos vértices opostos do cubo. Em torno destes eixos, no sentido anti-horário, temos 4 rotações de  $120^\circ$  e 4 rotações de  $240^\circ$ .
- a identidade é a rotação de  $360^\circ$  em relação a qualquer um dos eixos citados

As figuras abaixo mostram alguns desses eixos de rotação.

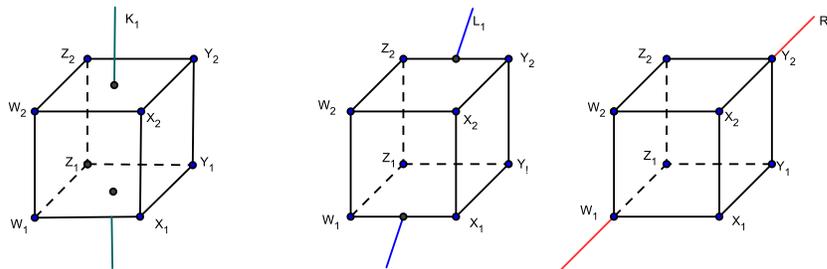


Figura 4.24: Eixos de simetrias de rotação do Cubo

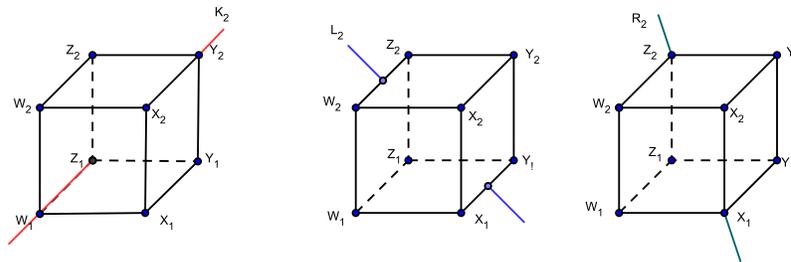


Figura 4.25: Eixos de simetrias de rotação do cubo

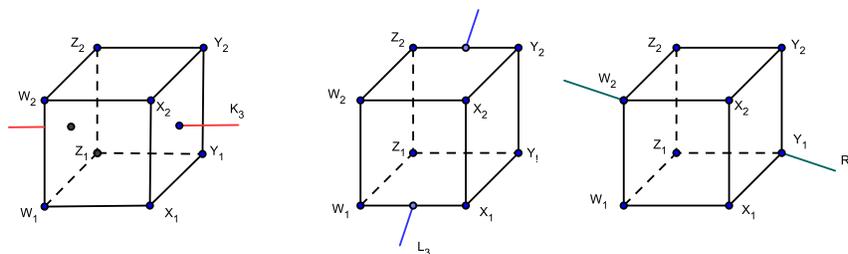


Figura 4.26: Eixos de simetrias de rotação do cubo

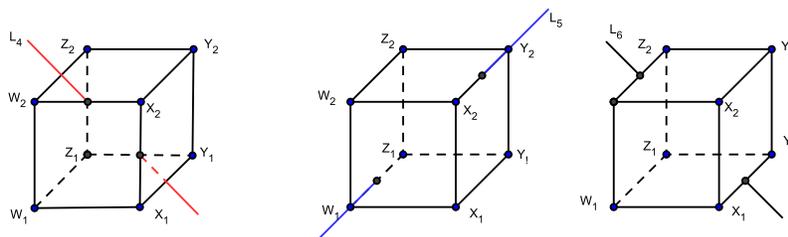


Figura 4.27: Eixos de simetrias de rotação do cubo

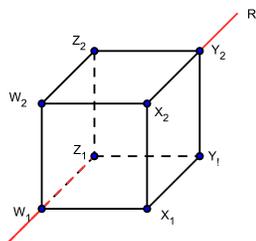


Figura 4.28: Eixo de simetria de rotação do cubo

Desta forma o cubo possui 24 simetrias de rotações.

Além das simetrias descritas até aqui, isto é, as 9 simetrias de reflexão e as 24 simetrias de rotação, o cubo possui ainda as seguintes simetrias: 1 inversão no centro, 6 inversões rotatórias de  $90^\circ$  e 8 inversões rotatórias de  $120^\circ$ , num total de 48 simetrias (ver [10]).

---

## Conclusão

---

O tema isometrias e similaridades proposto neste trabalho, se constituiu num desafio, numa descoberta empolgante. Antes de fazermos este estudo, tínhamos uma breve noção sobre simetria, mas não era do nosso conhecimento o estudo da simetria através dos grupos de transformações. Descobrimos um lado da história da Matemática, inserida por Felix Klein, que sempre é muito atual, afinal, a humanidade tem uma ligação muito grande com o assunto simetria, podemos ver isso claramente nas gravuras antigas como também nas atuais e nas grandes construções. Uma outra satisfação que obtivemos neste trabalho foi a descoberta da ferramenta Geogebra que facilitou a visualização dos desenhos propostos. Enfim, neste trabalho, visamos estimular alunos do ensino médio e da graduação em Matemática para conhecerem e estudarem os grupos de transformações e simetrias.

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Hiperbólica*. Rio de Janeiro: IMPA, 20<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática 24 - 28 julho. 1995.
- [2] BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda. 1993.
- [3] COXETER, H. S. M. *Introduction to Geometry*. 2<sup>a</sup> ed. New York: Jonh Wiley & Sons. 1967.
- [4] COXETER, H. S. M. *The Real Projective Plane*. 2<sup>a</sup> ed. London: Cambridge University Press. 1961.
- [5] DOMINGUES, H. H., IEZZI, G. *Álgebra Moderna*. 4<sup>a</sup> ed. São Paulo: Atual Editora. 2003.
- [6] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da Unicamp. 2004.
- [7] GARCIA, A., LEQUAIN, I. *Álgebra: um curso de introdução*. Rio de Janeiro: Impa. 1988.
- [8] GREENBERG, M. J. *Euclidean and non-Euclidean Geometries: development and history*. New York: W. H. Freeman and Company. 1973.
- [9] LEDERGERBER-RUOFF, E. B. *Isometrias e Ornamentos do Plano Euclidiano*. São Paulo: Atual editora. 1982.
- [10] YALE, P. B. *Geometry and Symmetry*. New York: Dover Publications, Inc. 1968.
- [11] VELOSO, E. *Geometria - Temas Actuais - Materiais para Professores*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional. 1998.
- [12] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA. 1993.

- [13] MACKAY, A. L. *Generalized Structural Geometry*. Acta Cryst. A30:440-447. 1974.
- [14] MARTIN, G. E. *The Foundations of Symmetry and the non-Euclidean Plane*. New York. Heidelberg: Springer-Verlag. 1975.
- [15] MARTIN, G. E. *Transformation Geometry: an introduction to symmetry*. New York: Springer UTM. 1982.
- [16] ROSE, B. L., STAFFORD, R. D. *An Elementary Course in Mathematical Symmetry*. The American Mathematical Monthly. Volume 88, n<sup>o</sup> 1, January 1981, pp. 59 - 64.
- [17] RYAN, P. J. *Euclidean and non-Euclidean Geometry: an analytic approach*. New York: Cambridge Univ. 1986.
- [18] SAMPAIO, J. C. V. *Estruturas Algébricas*. <http://www.dm.ufscar.br/~sampaio/algebra.html>.
- [19] SANTOS, R. J. *Matrizes Vetores e Geometria Analítica*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG. 2006.
- [20] Software Geogebra. <http://www.geogebra.org/cms/>.