

ALGUNS RESULTADOS
DE MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES
PARA EQUAÇÕES ELÍTICAS
QUASILINEARES

ALGUNS RESULTADOS DE MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA EQUAÇÕES ELÍTICAS QUASILINEARES

Este exemplar corresponde à redação final da
tese devidamente corrigida e defendida pelo
Sr. "Pedro Eduardo Ubilla López" e, $\pi/5$
aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 29 de abril de 1992



Prof. Dr. "Djairo Guedes de Figueiredo" $\pi/10$
(Orientador)

Tese apresentada ao Instituto de Ma-
temática, Estatística e Ciência da Com-
putação, UNICAMP, como requisito parcial
para obtenção do Título de DOUTOR EM
CIÊNCIA.

A minha esposa Verônica
A meus filhos Natalia e Pedrito
A meus pais e toda minha família

Agradecimentos

Ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, pelas facilidades dadas para o desenvolvimento deste trabalho.

A meu orientador, Sr. Djairo Figueiredo, pelas suas excelentes sugestões e comentários.

Aos Professores, Orlando Lopes e Francesco Mercuri, pelo seu constante apoio.

Aos Professores Hildebrando M. Rodrigues, Francesco Mercuri, José Valdo A. Gonçalves e Arnaldo S. Nascimento que gentilmente aceitaram fazer parte da Comissão Julgadora.

A Srta. Leila Mara Plá Sanches por seu trabalho de datilografia.

ÍNDICE

Introdução	1
 I. Multiplicidade de Soluções em Equações Elíticas Quasilineares.	
1.- Coletânea de resultados conhecidos	10
2.- A condição de Palais-Smale	12
3.- Demonstrações dos Teoremas 0.1, 0.2 e 0.3	19
4.- Exemplos	24
 II. Multiplicidade de Soluções em Equações Diferenciais Ordinárias.	
1.- Relação da Energia	28
2.- Demonstrações dos Teoremas 0.4, 0.5 e 0.6	33
3.- Exemplos	39
 Bibliografia	42

§0. Introdução

Neste trabalho usamos técnicas variacionais para obter existência e multiplicidade de soluções do seguinte problema de Dirichlet quasilinear

$$(P) \quad \begin{cases} -\operatorname{div} (a(|\nabla u|^p) |\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado regular de $\mathbb{R}^N$, $p > 1$ e as funções a e f satisfazem certas propriedades que serão explicitadas posteriormente. O método variacional consiste em considerar o funcional de Euler-Lagrange associado ao Problema (P)

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} A(|\nabla u|^p) - \int_{\Omega} F(u), \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

onde $A(t) = \int_0^t a(\sigma) d\sigma$ e $F(t) = \int_0^t f(\sigma) d\sigma$.

E aí é simples verificar que os pontos críticos do funcional I são as soluções fracas do problema (P). Consequentemente devemos aplicar resultados da teoria de pontos críticos, como a teoria de Ljusternik-Schnirelman e a teoria de Morse.

Estudamos também o problema de contorno (P) no caso de equações diferenciais ordinárias, ou seja, quando $N = 1$. Aqui determinamos a relação da energia associado ao Problema (P) isto é,

$$(RE) \quad a(|u'(x)|^p) |u'(x)|^p - \frac{1}{p} A(|u'(x)|^p) = a(|u'(0)|^p) |u'(0)|^p - \frac{1}{p} A(|u'(0)|^p) - F(u(x)).$$

Esta relação (RE) nos permite determinar implicitamente as soluções fracas do Problema (P).

O operador diferencial que aparece no Problema (P) é um modelo típico de operador elítico quasilinear, o qual intervém no estudo dos fluidos não Newtonianos, ver [11]. Um caso especial de dito operador é o chamado p -Laplaciano que corresponde ao caso $a(t) = 1$, para cada t . Explicitamente

$$\Delta_p u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

que coincide com o Laplaciano usual quando $p = 2$.

Antes de apresentarmos os resultados obtidos, estabelecemos as seguintes notações que serão utilizadas ao longo deste trabalho.

Para cada $q \in [1, +\infty)$, $\|\cdot\|_{L^q}$ designa a norma usual de $L^q(\Omega)$ e q' é o conjugado de q , isto é, $q' = q/(q-1)$ se $1 < q < +\infty$, $q' = 1$ se $q = +\infty$ e $q' = +\infty$ se $q = 1$.

Para cada $p \geq 1$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ é definido como o completamento de $\mathcal{D}(\Omega)$ com a norma

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} = \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p}.$$

$(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W_0^{1,p}})$ é um espaço de Banach uniformemente convexo para cada $1 < p < +\infty$. Denotamos o espaço de Hilbert $W_0^{1,2}(\Omega)$ por $H_0^1(\Omega)$. A seguinte inclusão

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

é compacta para cada $q \in [1, p^*)$, onde

$$p^* = \begin{cases} +\infty & \text{se } p \geq N \\ \frac{Np}{N-p} & \text{se } p < N \end{cases}$$

Além disso, a inclusão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ é compacta se $N < p$ e a injeção $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ é contínua se $N > p$.

O p -Laplaciano $\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow (W_0^{1,p}(\Omega))' =: W^{-1,p'}(\Omega)$ é definido por

$$\Delta_p u =: \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \quad \text{se } u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

isto é,

$$\langle -\Delta_p u, v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Consideremos o seguinte problema de autovalores para $p > 1$

$$(PA) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

É conhecido que o conjunto dos autovalores associados ao Problema (PA) é fe-

chado em $\mathbb{R}$, e o primeiro autovalor $\lambda_1(p)$ é simples, isolado e verifica (ver [3, 4])

$$\lambda_1(p) =: \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \left\{ \frac{\|u\|_{W_0^{1,p}}^p}{\|u\|_{L^p}^p} \right\}.$$

Em geral, quando $p \neq 2$ e $N \neq 1$, o problema de multiplicidade ou isolamento dos autovalores do Problema (PA) é aberto ainda. Quando Ω é uma bola de $\mathbb{R}^N$ existem resultados parciais (ver [3]).

Quando $p = 2$, o Problema (PA) é o conhecido problema de autovalores para o Laplaciano usual, e sabemos que os autovalores neste caso são uma seqüência $\{\lambda_k(2)\}_{k \in \mathbb{N}}$ satisfazendo

$$0 < \lambda_k(2) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

Quando $N = 1$, $\Omega = (0, 1)$ e $p > 1$, Problema (PA) foi resolvido (ver [18]) e seus autovalores são uma seqüência $\{\lambda_k(p)\}_{k \in \mathbb{N}}$ verificando

$$0 < \lambda_k(p) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

$$\lambda_k(p) = k^p \lambda_1(p) = k^p (p-1) \left[2 \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^p)^{1/p}} \right]^p.$$

Agora apresentamos os resultados principais que obtivemos neste trabalho no **caso de equações diferenciais parciais** relativos ao Problema (P). Começamos notando que para que $I : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido anteriormente seja um funcional de classe C^1 , as funções a e f devem satisfazer as seguintes propriedades:

$$(0.1) \quad a \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$$

$$(0.2) \quad |a(t^p)t^{p-1}| \leq \alpha_1 + \alpha_2|t|^{p-1}, \quad \forall t > 0$$

onde α_1 e α_2 são constantes não negativas.

$$(0.3) \quad f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$(0.4) \quad |f(t)| \leq a_1 + a_2|t|^s, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

onde a_1 e a_2 são constantes não negativas e o expoente s satisfaz $s + 1 < p^*$ se $N \geq p$. Sem restrição sobre a função f se $N < p$.

Assim $I' : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ é bem definido e é dado por:

$$I'(u)v = \int_{\Omega} a(|\nabla u|^p) |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Omega} f(u)v, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Observe que u é solução fraca do Problema (P) se e somente se

$$I'(u)v = 0, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Consideremos as seguintes propriedades sobre a função a , além de (0.1)

(0.5) $a(|t|^p)|t|^{p-2}t$ é uma função estritamente crescente quando t cresce e

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} a(t^p)t^{p-1} = 0$$

$$(0.6) \quad b_1 \leq \liminf_{t \rightarrow +\infty} a(t) \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} a(t) \leq b_2$$

onde b_1 e b_2 são constantes positivas.

Observe que (0.2) é uma consequência dessas propriedades. Consideramos também as seguintes condições sobre a função f , além de (0.3):

(0.7) Existem constantes não negativas a_1 e a_2 tal que

$$|f(t)| \leq a_1 + a_2|t|^s, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

onde $s \geq 0$ e $s + 1 < p^*$.

Observe que a condição (0.7) implica a condição (0.4).

(0.8) Existem $\theta \in (0, \frac{1}{p})$ e $t_0 \geq 0$ tais que,

$$\theta t f(t) \geq F(t) > 0, \quad \forall |t| \geq t_0.$$

(0.9) f é uma função ímpar.

Teorema 0.1. Suponha que a função a satisfaz (0.1), (0.5) e (0.6) e que a não linearidade f verifica (0.3), (0.7), (0.8) e (0.9). Assuma também que $p \geq 2$ e $\theta b_2 < \frac{b_1}{p}$. Então, o Problema (P) possui uma seqüência não limitada de soluções fracas.

Teorema 0.2. Suponha que a função a satisfaz (0.1), (0.5) e que a função f satisfaz (0.3), (0.4) e assuma $p \geq 2$. Além disso, são assumidas as seguintes condições:

(0.10) Existem constantes $c_1, c_2 > 0$ e $b_1, b_2 > 0$ tais que, para cada $t > 0$

$$c_1 + b_1 t^{p-2} \leq t^{p-2} a(t^p) \leq c_2 + b_2 t^{p-2}.$$

$$(0.11) \quad \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \sup \frac{pF(t)}{|t|^p} < (\delta_2(p)c_1 + b_1)\lambda_1(p).$$

$$(0.12) \quad (c_2 + \delta_2(p)b_2)\lambda_i(2) < \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} < (c_1 + \delta_2(p)b_1)\lambda_{i+1}(2)$$

onde $\delta_2(p) = 1$ se $p = 2$ e $\delta_2(p) = 0$ se $p \neq 2$. Então, o Problema (P) possui no mínimo duas soluções fracas não triviais.

Teorema 0.3. Suponha que a função a satisfaz (0.1), (0.5) e que a função f satisfaz (0.3), (0.4), (0.8). Além disso, são assumidas as seguintes condições:

(0.13) Existem constantes $q \in (1, p]$, $c_1, c_2, b_1, b_2 > 0$, tais que, para cada $t > 0$

$$c_1 + b_1 t^{p-q} \leq t^{p-q} a(t^p) \leq c_2 + b_2 |t|^{p-q}.$$

$$(0.14) \quad \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{|t|^{q-2}t} < (c_1 + \delta_q(p)b_1)\lambda_1(q)$$

onde $\delta_q(p) = 1$ se $p = q$ e $\delta_q(p) = 0$ se $p \neq q$. Então, o Problema (P) tem no mínimo uma solução fraca não trivial.

Recentemente, N. Hirano [14], usando a teoria de grau para aplicações de classe $(S)_+$ estabeleceu um resultado para a existência de duas soluções fracas não triviais do Problema (P) colocando hipóteses equivalentes às do nosso Teorema 0.2 sobre a função a . Mas sobre a função f considerou um crescimento assintoticamente linear no $+\infty$, isto é,

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \sup \frac{f(t)}{t} < \lambda_1(2)b_1.$$

Assim nosso Teorema 0.2 contém o resultado em [14] como um caso particular.

Por outro lado, K. C. Chang [9] estabeleceu um resultado para a existência de duas soluções fracas não triviais do problema,

$$\begin{cases} -c \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \Delta u = f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde f satisfaz (0.3), (0.4) e $\lambda_i(2) < f'(0) < \lambda_{i+1}(2)$. Ele assume também o seguinte:

Existem constantes k_1, k_2 tal que,

$$F(t) \leq k_1 |t|^p + k_2, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

onde

$$k_1 < \frac{c}{p} \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \left\{ \frac{\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p}{\int_{\Omega} |u|^p} \right\}.$$

Usando o mesmo método empregado na prova do Teorema 0.2 podemos estabelecer este resultado. Mas notemos que a prova da condição (PS) requer os argumentos utilizados por K. C. Chang em [9].

Algumas aplicações de nossos Teoremas 0.1, 0.2 e 0.3 podem ser achadas na última seção do capítulo I deste trabalho.

Agora apresentamos nossos principais resultados de multiplicidade de soluções relativos ao Problema (P) no **caso de Equações Diferenciais ordinárias**. Neste caso, a formulação fraca do problema é,

$$(0.15) \quad \begin{cases} \int_0^1 a(|u'|^p) |u'|^{p-2} u' v' = \int_0^1 f(u) v, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(I) \\ u \in W_0^{1,p}(I), \end{cases}$$

onde $I = (0, 1)$. Relembremos que uma função u satisfazendo (0.15) é chamada solução fraca do Problema (P) .

Consideremos as seguintes propriedades sobre a função a

$$(0.16) \quad a(|t|^p) |t|^{p-2} t \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \text{e}$$

$$(a(|t|^p)|t|^{p-2}t)' > 0, \quad \forall t \neq 0.$$

(0.17) Existem $c > 0$ e $1 < q \leq p$ tais que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{p-q} a(t^p) = c$$

$$(0.18) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = b$$

onde b é uma constante positiva.

Teorema 0.4. Suponha que a função a satisfaz (0.16), (0.17), (0.18) e que a função f verifica (0.3), (0.8), (0.9). Então, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada inteiro $k \geq k_0$, existe pelo menos um par de soluções fracas do Problema (P) de classe C^1 em $\bar{I}$

$$\{u_k, -u_k\}$$

tais que u_k possui $k - 1$ zeros no intervalo $I = (0, 1)$

Teorema 0.5. Suponha que a função a satisfaz (0.16), (0.17), (0.18) e que a função f verifica (0.3), (0.9). Assuma também as seguintes propriedades:

$$(0.19) \quad c\lambda_i(q) < \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{|t|^{q-2}t} < c\lambda_{i+1}(q),$$

$$(0.20) \quad b\lambda_k(p) < \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{|t|^{p-2}t} < b\lambda_{k+1}(p),$$

onde b e c são as constantes de (0.17) e (0.18).

$$(0.21) \quad tf(t) > 0, \quad \forall t \neq 0.$$

Então, o Problema (P) possui no mínimo $m = |k - i|$ pares de soluções fracas não triviais de classe C^1 em $\bar{I}$

$$\{u_\ell, -u_\ell\}_{\ell=0, \dots, m-1}$$

tais que u_ℓ possui $\max\{k, i\} - \ell - 1$ zeros no intervalo $I = (0, 1)$.

Se nos Teoremas 0.4 e 0.5 se assume que $1 < q \leq 2$, então, as soluções fracas obtidas são soluções clássicas. Isto é consequência simples do seguinte resultado de Regularidade.

Consideremos o seguinte problema

$$(0.22) \quad \begin{cases} -(a(|u'|^p) |u'|^{p-2} u')' = h & \text{em } I \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

onde $h \in C(\bar{I}, \mathbb{R})$ e a função a satisfaz (0.16).

Teorema 0.6. (i) As soluções fracas de (0.22) são funções de classe C^1 em $\bar{I}$.

(ii) Se $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{p-2} a(t^p) \neq 0$ então as soluções fracas de (0.22) são funções de classe C^2 em $\bar{I}$, ou seja são soluções clássicas.

Algumas aplicações de nossos Teoremas 0.4, 0.5 e 0.6 podem-se encontrar na última seção do Capítulo II.

Observe que os Teoremas 0.1 e 0.2 são resultados de multiplicidade de soluções do problema (P) onde $p \geq 2$. Note que no caso 1-dimensional usando a relação de energia tratamos esses problemas para cada $p > 1$, obtendo informação sobre o comportamento das soluções (ver Teoremas 0.4 e 0.5). Além disso, observe que usando o conhecimento dos autovalores do p -Laplaciano em dimensão um, foi possível colocar hipóteses sobre a não linearidade f relativas ao cruzamento de autovalores do q -Laplaciano (resp. p -Laplaciano) na origem (resp. no infinito), como mostram as propriedades (0.19) e (0.20).

A forma que atacaremos o Problema (P) no caso 1-dimensional é inspirada em vários artigos, como por exemplo, M. Guedda and L. Veron [13], M. Otani [18, 20], M. del Pino, M. Elgueta, and R. Manásevich [21, 22] entre outros, e consiste em associar à equação a Relação de Energia (RE), e a partir daí, usar técnicas de Equações Diferenciais Ordinárias, para obter resultados de multiplicidade de soluções. Especificamente eles estudam o Problema:

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2} u')' = f(x, u) & \text{em } I \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

ou seja, uma versão não necessariamente autônoma do Problema (P) onde

$$a(t) \equiv 1.$$

Conteúdo dos Capítulos: No capítulo I usamos o método variacional para estudar existência e multiplicidade de soluções do Problema (P) . Começamos

apresentando uma coletânea de resultados conhecidos que serão utilizados nesse capítulo. Logo após, estudamos a condição (PS) do funcional de Euler-Lagrange associado ao Problema (P) e mostramos um contraexemplo. Daí fazemos detalhadamente as demonstrações dos Teoremas 0.1, 0.2 e 0.3. Finalmente, apresentamos algumas aplicações.

No capítulo II usamos a relação da energia para estudar existência e multiplicidade de soluções do Problema (P) no caso 1-dimensional. Na primeira seção determinamos a relação de energia e provamos que as soluções obtidas a partir de dita relação são efetivamente as soluções fracas do Problema (P) . Logo após fazemos detalhadamente as provas dos Teoremas 0.4, 0.5 e 0.6. Finalmente mostramos alguns exemplos.

CAPÍTULO I

MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES EM EQUAÇÕES ELÍTICAS QUASILINEARES

§1. Coletânea de resultados conhecidos

Nesta seção apresentamos alguns resultados conhecidos que foram utilizados em nosso trabalho.

Seja E um espaço de Banach real e $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 . Dizemos que o funcional I satisfaz à **Condição de Palais - Smale**, que denotamos por (PS) , se, para cada $c \in \mathbb{R}$, o funcional I satisfaz $(PS)_c$, isto é, para cada seqüência $\{u_n\}_n \subset E$ tal que

$$(1.1) \quad \begin{cases} I(u_n) \rightarrow c \\ I'(u_n) \rightarrow 0 \end{cases}$$

existe uma subseqüência convergente em E .

Os dois teoremas seguintes proveem da teoria de Ljusternik-Schnirelman e podem ser achados em P. Rabinowitz [23]. Dado $r > 0$, denotemos $B_r =: \{u \in E : \|u\|_E < r\}$.

Teorema 1.1. Seja E um espaço de Banach real, $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. Suponha que I é um funcional par, limitado inferiormente e que satisfaz à condição (PS) . Além disso, $I(0) = 0$ e supomos que existe um conjunto $K \subset E$ tal que K é homeomorfo a S^{k-1} por uma aplicação ímpar.

Se $\sup_K I < 0$, então I possui k pares diferentes de pontos críticos.

Teorema 1.2. Seja E um espaço de Banach real de dimensão infinita e seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional par, satisfazendo (PS) e $I(0) = 0$. Se $E = W \oplus H$, onde H é de dimensão finita e I verifica

(1.2) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que

$$I|_{\partial B_\rho \cap W} \geq \alpha, \quad e$$

(1.3) para cada subespaço de dimensão finita $\tilde{E} \subset E$, existe $R = R(\tilde{E})$ tal que

$$I \leq 0 \quad \text{em} \quad \tilde{E} \setminus B_{R(\tilde{E})}.$$

Então, I possui uma seqüência não limitada de valores críticos.

Agora apresentamos o conhecido Lema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz [2].

Teorema 1.3. Seja E um espaço de Banach real e I um funcional de classe C^1 satisfazendo a condição (PS) . Seja S um subconjunto fechado que desconecta E . Sejam $x_0, x_1 \in E$ pertencendo à componentes conexas diferentes de $E \setminus S$. Suponha que são verificadas as seguintes propriedades

$$(1.4) \quad \inf_S I \geq b \quad \text{e} \quad \max\{I(x_0), I(x_1)\} < b.$$

Seja

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1]; E) : \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1\}.$$

Então

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} I(\gamma(t))$$

é um valor crítico. Isto é, existe $x_0 \in E$ tal que

$$I(x_0) = c \quad \text{e} \quad I'(x_0) = 0.$$

Outro resultado importante que utilizamos neste trabalho é o Teorema dos Três Pontos Críticos [16, 17].

Teorema 1.4. Seja E um espaço de Banach real e seja I um funcional de classe C^1 limitado inferiormente satisfazendo a condição (PS) . Suponha que $E = W \oplus H$ onde H é um subespaço de dimensão finita e que o funcional I possui um linking local perto da origem, ou seja, existe um $\rho > 0$ tal que

$$(1.5) \quad I(w) > c = I(0), \forall w \in B_\rho \cap W \setminus \{0\}$$

$$(1.6) \quad I(h) \leq c, \forall h \in B_\rho \cap H.$$

Então, o funcional I possui no mínimo três pontos críticos.

§2. A condição de Palais-Smale

Nesta seção estudamos a condição de Palais-Smale para o funcional I associado ao problema (P) . Também apresentamos um contraexemplo que mostra que a condição (0.5) é essencial para obter a condição (PS) do funcional I .

Seja $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e definamos o funcional $J : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$(2.1) \quad J(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} A(|\nabla u|^p)$$

onde $A(t) = \int_0^t a(\sigma) d\sigma$. Suponha que existem constantes $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ tais que

$$(2.2) \quad |a(t^p)t^{p-1}| \leq \alpha_1 + \alpha_2|t|^{p-1}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

e existem constantes $\beta_1, \beta_2 > 0$ tais que

$$(2.3) \quad A(|t|^p) \geq \beta_1|t|^p - \beta_2, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Observe que as propriedades (2.2) e (2.3) podem ser obtidas como consequência das condições (0.5) e (0.6).

Lema 2.1. Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(t) = A(|t|^p)$, suponha que h é estritamente convexa e se verifica (2.2) e (2.3). Então o funcional J é de classe C^1 e J' pertence à classe $(S)_+$. Isto é, para cada sequência $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$(2.4) \quad \begin{cases} u_n \rightharpoonup u_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \langle J'(u_n), u_n - u \rangle \leq 0 \end{cases}$$

segue-se que $u_n \rightarrow u$ (fortemente).

Prova. Que o funcional J é de classe C^1 é claro a partir de (2.2). A demonstração que $J' \in (S)_+$ pode ser achada em Browder [6, 7] ou em Berger [5]. Eles provam um resultado análogo sob condições mais gerais.

Observação. Nas três proposições seguintes se verificam facilmente as propriedades (0.1)-(0.2), ou seja o funcional I associado ao problema (P) é de classe C^1 .

Proposição 2.1. Suponha que se verificam as hipóteses do Lema 2.1 e que a função f satisfaz (0.3) e (0.4). Então o funcional I associado ao Problema (P) satisfaz à condição (PS) se cada sequência $\{u_n\} \subseteq W_0^{1,p}(\Omega)$, tal que,

$$(2.5) \quad |I(u_n)| \leq C, \quad I'(u_n) \xrightarrow{n} 0$$

sendo C uma constante, é limitada.

Prova. Seja $c \in \mathbb{R}$ e $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tais que

$$(2.6) \quad \begin{cases} I(u_n) \rightarrow c \\ I'(u_n) \rightarrow 0. \end{cases}$$

É suficiente mostrar que $\{u_n\}$ contém uma subsequência que converge na norma de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Como $\{u_n\}$ é limitada, existe uma subsequência $\{u_{n_j}\}$ que converge fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega)$ para algum u_0 .

Por outro lado, a segunda asserção em (2.6) implica que para cada $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\left| \int_{\Omega} a(|\nabla u_{n_j}|^p) |\nabla u_{n_j}|^{p-2} \nabla u_{n_j} \cdot \nabla v - \int_{\Omega} f(u_{n_j})v \right| \leq \varepsilon_{n_j} \|v\|_{W_0^{1,p}}$$

onde $\varepsilon_{n_j} \rightarrow 0$. Tomando $v = u_{n_j} - u_0$, e passando ao limite obtemos que

$$\int_{\Omega} a(|\nabla u_{n_j}|^p) |\nabla u_{n_j}|^{p-2} \nabla u_{n_j} \cdot \nabla (u_{n_j} - u_0) \rightarrow 0.$$

isto é,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle J'(u_{n_j}), u_{n_j} - u_0 \rangle = 0.$$

Assim, usando o Lema 2.1, temos que

$$u_{n_j} \rightarrow u_0 \quad (\text{fortemente}) \quad \text{em } W_0^{1,p}(\Omega). \quad \square$$

Proposição 2.2. Suponha que a função a satisfaz (0.1), (0.5), (0.6) e que a função f verifica (0.3), (0.4) e (0.11). Então o funcional I satisfaz à condição (PS).

Prova. Usando a propriedade (0.6) e a segunda asserção em (0.5) sobre a função a , bem como a condição (0.11) sobre a função F , temos que, existem constantes

$\xi_1 \leq 1$ e $\lambda < \lambda_1 b_1$ tais que,

$$(2.7) \quad \begin{cases} A(t) & \geq \xi_1 b_1 t - C_0, \quad \forall t \geq 0 \\ F(t) & \leq \lambda \frac{|t|^p}{p} + C_0 \\ \xi_1 \lambda_1 b_1 & > \lambda \end{cases}$$

onde C_0 é uma constante.

Seja $\{u_n\}$ uma seqüência satisfazendo (2.5). Usando (2.7) temos que,

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} A(|\nabla u_n|^p) - \int_{\Omega} F(u_n) \\ &\geq \frac{\xi_1 b_1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p - \frac{\lambda}{p} \int_{\Omega} |u_n|^p - C_1 \end{aligned}$$

onde C_1 é uma constante. Consequentemente

$$C \geq I(u_n) \geq \frac{1}{p} \left(\xi_1 b_1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \right) \|u_n\|_{W_0^{1,p}}^p - C_1.$$

Assim $\{u_n\}$ é uma seqüência limitada. Usando a Proposição 2.1, a prova da Proposição 2.2 está completa. $\square$

Proposição 2.3. Suponha que a função a satisfaz (0.1), (0.5), (0.6), que a função f verifica (0.3), (0.7), (0.8), e que $b_2 \theta < \frac{b_1}{p}$. Então, o funcional I satisfaz à condição (PS) .

Prova. Seja $\{u_n\}$ uma seqüência satisfazendo (2.5), isto é,

$$\left| \frac{1}{p} \int_{\Omega} A(|\nabla u_n|^p) - \int_{\Omega} F(u_n) \right| \leq C, \quad e$$

$$\left| \int_{\Omega} a(|\nabla u_n|^p) |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla v - \int_{\Omega} f(u_n) v \right| \leq \varepsilon_n \|v\|_{W_0^{1,p}}, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

onde $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Substituindo $v = u_n$ e multiplicando por θ a relação acima, e logo subtraindo da primeira desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p} \int_{\Omega} A(|\nabla u_n|^p) - \theta \int_{\Omega} a(|\nabla u_n|^p) |\nabla u_n|^p + \int_{\Omega} (\theta f(u_n) u_n - F(u_n)) \leq \\ &\leq C + \varepsilon_n \theta \|u_n\|_{W_0^{1,p}}. \end{aligned}$$

Usando (0.6), a segunda asserção em (0.5) e o fato que $b_2\theta < \frac{b_1}{p}$, podemos escolher constantes $\xi_1, \xi_2 > 0, C_0 > 0$ e $t_1 \geq 0$ tais que,

$$(2.8) \quad \begin{cases} A(t) \geq \xi_1 b_1 t - C_0, \quad \forall t \geq 0 \\ a(t) \leq \xi_2 b_2, \quad \forall t \geq t_1 \\ \xi_2 b_2 \theta < \frac{\xi_1 b_1}{p}. \end{cases}$$

Usando as relações em (2.8) e (0.8) se obtém que existe uma constante C_1 tal que,

$$\left(\frac{\xi_1 b_1}{p} - \xi_2 b_2 \theta\right) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p \leq C_1 + \varepsilon_n \theta \|u_n\|_{W_0^{1,p}}.$$

Consequentemente $\{u_n\}$ é limitada. Pela Proposição 2.1 a prova está completa. $\square$

Exemplo. Consideremos a seguinte equação

$$(2.9) \quad \begin{cases} -(|u'|^{p-2} u')' + u'' = \lambda |u|^{p-2} u & \text{em } \Omega = (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

onde $p > 2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observe que o operador diferencial L_p que aparece no primeiro membro da equação anterior se pode escrever do seguinte modo

$$(2.10) \quad L_p u = -(a(|u'|^p) |u'|^{p-2} u')'$$

onde $a(t) = 1 - t^{\frac{2-p}{p}}$, $t > 0$. Notemos que

$$a(|t|^p) |t|^{p-2} t = |t|^{p-2} t - t,$$

ou seja que $a(|t|^p) |t|^{p-2} t$ não é estritamente crescente, contradizendo à condição (0.5).

Consideremos o funcional I_λ associado à equação (2.9)

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{p} \int_0^1 |u'|^p - \frac{1}{2} \int_0^1 u'^2 - \frac{\lambda}{p} \int_0^1 |u|^p.$$

Pergunta: O funcional I_λ satisfaz à condição (PS) ? Resposta: Não.

Para começar nossa análise, estudamos o conjunto

$$C_\lambda = \{c \in \mathbb{R} / I_\lambda \text{ satisfaz } (PS)_c\}.$$

Seja $\{u_n\}_n$ uma seqüência satisfazendo

$$(2.11) \quad \begin{cases} I_\lambda(u_n) \rightarrow c \\ I'_\lambda(u_n) \rightarrow 0. \end{cases}$$

Isto é,

$$(2.12) \quad \begin{cases} c - \varepsilon_n \leq \frac{1}{p} \|u_n\|_{W_0^{1,p}}^p - \frac{1}{2} \|u_n\|_{H_0^1}^2 - \frac{\lambda}{p} \|u_n\|_{L^p}^p \leq c + \varepsilon_n \\ -\varepsilon_n \|v\|_{W_0^{1,p}} \leq \int_0^1 |u'|^{p-2} u' v' - \int_0^1 u' v' - \lambda \int_0^1 |u_n|^{p-2} u_n v \leq \varepsilon_n \|v\|_{W_0^{1,p}} \end{cases}$$

para cada $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

No caso em que $\lambda < \lambda_1(p)$ o funcional I_λ é limitado inferiormente e coercivo, assim $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Agora multiplicando a segunda desigualdade acima por $\frac{1}{p}$, substituindo $v = u_n$, e subtraindo da primeira se obtém,

$$-c + \varepsilon_n - \frac{\varepsilon_n}{p} \|u_n\|_{W_0^{1,p}} \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \|u_n\|_{H_0^1}^2 \leq -c + \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n}{p} \|u_n\|_{W_0^{1,p}}$$

ou seja

$$\|u_n\|_{H_0^1}^2 \rightarrow \frac{-2pc}{p-2}$$

assim $c \leq 0$, o que implica que

$$\mathbb{R}_o^+ \subseteq C_\lambda$$

Afirmção. Para cada $c \in [\inf I_o, 0)$ se tem que I_λ não satisfaz $(PS)_c$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Começemos calculando o ínfimo de I_0

$$\begin{aligned} \inf I_0 &= \inf_{\alpha \geq 0} \inf_{\|u\|_{H_0^1} = \alpha} \left\{ \frac{1}{p} \int_0^1 |u'|^p - \frac{1}{2} \int_0^1 |u'|^2 \right\} \\ &= \inf_{\alpha \geq 0} \inf_{\|u\|_{H_0^1} = 1} \left\{ \frac{\alpha^p}{p} \int_0^1 |u'|^p - \frac{1}{2} \alpha^2 \right\} \\ &= (S_0)^{\frac{-2}{p-2}} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

onde $S_0 = \inf_{\substack{\|u\|_{H_0^1} = 1 \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega)}} \left\{ \int_0^1 |u'|^p \right\}.$

É fácil ver que $S_0 = 1$, assim temos verificado,

$$\inf I_0 = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}.$$

Observe que o infimo é atingido em

$$(2.13) \quad \eta_0(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ -t + 1 & \text{se } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Definamos a seguinte família $\{\eta_\varepsilon\}_{\varepsilon \in [0, 1/2]} \subseteq W_0^{1,p}(\Omega).$

$$(2.14) \quad \eta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in [0, \varepsilon] \\ t - \varepsilon & \text{se } t \in [\varepsilon, 1/2] \\ -t + 1 - \varepsilon & \text{se } t \in [1/2, 1 - \varepsilon] \\ 0 & \text{se } t \in [1 - \varepsilon, 1]. \end{cases}$$

Observe que $\{\eta_\varepsilon\}_{\varepsilon \in [0, 1/2]}$ são pontos críticos de I_0 e

$$\begin{aligned} I_0(\eta_\varepsilon) &= \frac{1}{p} \int_0^1 |\eta'_\varepsilon|^p - \frac{1}{2} \int_0^1 |\eta'_\varepsilon|^2 \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) (1 - 2\varepsilon). \end{aligned}$$

Assim

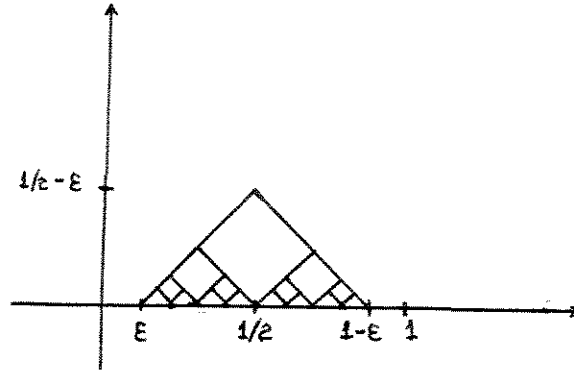
$$\begin{aligned} I_\lambda(\eta_\varepsilon) &= I_0(\eta_\varepsilon) - \lambda \int_0^1 |\eta_\varepsilon|^p \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) (1 - 2\varepsilon) - \lambda \int_0^1 |\eta_\varepsilon|^p \end{aligned}$$

É fácil ver que existe uma sequência $\{\eta_{\varepsilon,n}\}_n$ de pontos críticos de I_0 satisfazendo

para cada $\varepsilon \in [0, 1/2]$

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_0(\eta_\varepsilon) = I_0(\eta_{\varepsilon,n}) \\ I_\lambda(\eta_{\varepsilon,n}) \xrightarrow{n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) (1 - 2\varepsilon) \\ I'_\lambda(\eta_{\varepsilon,n}) \xrightarrow{n} 0 \\ \int_0^1 |\eta'_{\varepsilon,n}|^p = \frac{1}{p}(1 - 2\varepsilon) \\ \int_0^1 |\eta_{\varepsilon,n}|^p \xrightarrow{n} 0. \end{array} \right.$$

A construção da seqüência $\eta_{\varepsilon,n}(t)$ é ilustrada com a seguinte figura.



Consequentemente I_λ não satisfaz $(PS)_c$ para $c \in [\frac{1}{p} - \frac{1}{2}, 0)$.

Do anterior é possível também obter:

$$C_\lambda = \mathbb{R}^+ \cup (-\infty, \inf I_0) \quad \text{para cada } \lambda \leq 0.$$

Observação. Considere o problema

$$(2.16) \quad \begin{cases} -\Delta_p u + \Delta u = f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $N \geq 1$ e f satisfaz $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(0) = 0$ e tem um comportamento do tipo (0.4) então o funcional de Euler-Lagrange associado ao Problema (2.16) é

bem definido e de classe C^1 . Explicitamente

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} F(u)$$

onde $F(t) = \int_0^1 f(\sigma) d\sigma$. Usando as mesmas idéias envolvidas no exemplo anterior é possível também obter intervalos onde o funcional acima não satisfaz à condição (PS).

§3. Demonstrações dos Teoremas 0.1, 0.2 e 0.3

Denotamos por H_k o subespaço de dimensão finita gerado pelas autofunções de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ correspondentes aos autovalores $\lambda_1(2), \dots, \lambda_k(2)$. W_k denota o subespaço de $W_0^{1,p}(\Omega)$ ($p \geq 2$) tal que

$$(3.1) \quad W_0^{1,p}(\Omega) = H_k \oplus W_k.$$

Segue-se das definições de H_k e W_k que

$$(3.2) \quad \|u\|_{H_0^1}^2 \geq \lambda_{k+1}(2) \|u\|_{L^2}^2, \quad \forall u \in W_k$$

$$(3.3) \quad \lambda_k(2) \|u\|_{L^2}^2 \geq \|u\|_{H_0^1}^2, \quad \forall u \in H_k.$$

A prova do Teorema 0.1 usa os dois lemas seguintes. Dado $r > 0$ denotemos $B_r = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega), \|u\|_{W_0^{1,p}} < r\}$.

Lema 3.1. Para cada subespaço de dimensão finita $E \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ existe $R = R(E)$ tal que

$$I \leq 0 \quad \text{em} \quad E \setminus B_R$$

Prova. Usando as propriedades (0.3) e (0.8), temos que existem constantes $k_1 > 0$ e $k_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$(3.4) \quad F(t) \geq k_1 |t|^r + k_2, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

onde $r = \frac{1}{\theta}$.

Por outro lado, usando (0.6) e a segunda asserção em (0.5), temos que existem constantes $\beta_1, \beta_2 > 0$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que

$$(3.5) \quad -c + \beta_1 t \leq A(t) \leq \beta_2 t + c, \quad \forall t \geq 0.$$

Consequentemente, existe uma constante $C \in \mathbb{R}$, tal que

$$(3.6) \quad I(u) \leq \frac{\beta_2}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p - k_1 \int_{\Omega} |u|^r + C, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Como $p < r$ e $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}}$ com $\|\cdot\|_{L^r}$ são normas equivalentes em E , se conclui que existe $R > 0$ tal que,

$$I \leq 0 \quad \text{em} \quad E \setminus B_R. \quad \square$$

Lema 3.2. Existem constantes $\rho, \alpha > 0$ e $k \in N$ tais que

$$I|_{\partial B_\rho \cap W_k} \geq \alpha.$$

Prova. Usando (0.7) e (3.5), temos que

$$(3.7) \quad I(u) \geq \frac{\beta_1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p - C_2 \int_{\Omega} |u|^{s+1} - C_1$$

onde C_1 e C_2 são constantes.

Agora usaremos a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg [12],

$$(3.8) \quad \|u\|_{L^{s+1}} \leq C_3 \|u\|_{L^2}^{1-\alpha} \|u\|_{W_0^{1,p}}^{\alpha}$$

onde $\alpha \in (0, 1)$ é definido como segue

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{s+1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{N} - \frac{1}{p}}.$$

Seja $k \in N$, usando (3.2) e (3.8), obtemos que

$$(3.9) \quad \|u\|_{L^{s+1}} \leq \frac{C_4}{\mu^{1-\alpha}} \|u\|_{W_0^{1,p}}, \quad \forall u \in W_k$$

onde C_4 é uma constante e $\mu = \lambda_{k+1}(2)$. Daí temos que, se $u \in \partial B_\rho \cap W_k$, então

$$(3.10) \quad I(u) \geq \rho^p \left(\frac{\beta_1}{p} - \frac{C}{\mu^{(1-\alpha)(s+1)}} \cdot \rho^{s+1-p} \right) - C_6$$

onde C_5 e C_6 são constantes.

Sem perda da generalidade podemos assumir que $s > p - 1$. Consideremos $\rho = \rho_k$ tal que,

$$(3.11) \quad \frac{\beta_1}{p} - \frac{C_5}{\mu^{(1-\alpha)(s+1)}} \cdot \rho_k^{s+1-p} = \frac{\beta_1}{s+1}.$$

Assim

$$I(u) \geq \frac{\beta_1}{s+1} \rho_k^p - C_6.$$

Observe que $\rho_k \rightarrow +\infty$ quando $k \rightarrow +\infty$, logo podemos escolher $k \in N$ tal que

$$\frac{\beta_1}{s+1} \rho_k^p - C_6 \geq \gamma > 0, \quad \forall u \in \partial B_\rho \cap W_k$$

onde γ é uma constante. A prova do Lema 3.2 está completa. $\square$

Demonstração do Teorema 0.1

Pela Proposição 2.3 o funcional I satisfaz à condição (PS) . Além disso, em virtude dos Lemas 3.1 e 3.2, podemos aplicar o Teorema 1.2 da Seção 1. Daí se segue que o funcional I possui uma seqüência não limitada de valores críticos $c_k = I(u_k)$, $k \in N$ onde u_k é uma solução fraca do Problema (P) .

Afirmção 3.1. $\{u_k\}$ é uma seqüência não limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

De fato, $I'(u_k)u_k = 0$ implica que

$$(3.12) \quad \int_{\Omega} a(|\nabla u_k|^p) |\nabla u_k|^p = \int_{\Omega} f(u_k)u_k$$

e $c_k = I(u_k)$ implica que

$$(3.13) \quad \frac{1}{p} \int_{\Omega} A(|\nabla u_k|^p) - \int_{\Omega} F(u_k) = c_k \rightarrow +\infty$$

multiplicando (3.12) por $\frac{1}{p}$ e subtraindo de (3.13), obtemos

$$(3.14) \quad \frac{1}{p} \int_{\Omega} (A(|\nabla u_k|^p) - a(|\nabla u_k|^p) |\nabla u_k|^p) + \int_{\Omega} (\frac{1}{p} f(u_k)u_k - F(u_k)) = c_k.$$

Por outro lado usando (0.5), temos que

$$(3.15) \quad a(t)t \geq \frac{1}{p} A(t), \quad \forall t > 0.$$

Daí que usando as relações (3.14) e (3.15), se obtém que

$$(1 - \frac{1}{p}) \int_{\Omega} a(|\nabla u_k|^p) |\nabla u_k|^p + \int_{\Omega} (\frac{1}{p} f(u_k) u_k - F(u_k)) \geq c_k.$$

Assim $\{u_k\}$ não é limitada. A prova do Teorema 0.1 está completa.

Agora procedemos à prova do Teorema 0.2. Para isto, precisamos dos seguintes lemas. Suponha $p > 2$ (O caso $p = 2$ é similar).

Lema 3.3. Suponha válidas as hipóteses do Teorema 0.2. Então, o funcional I é limitado inferiormente.

Prova: Usando (0.11) se obtém que existe um $\lambda < \lambda_1(p)b_1$ tal que

$$(3.16) \quad F(t) \leq \lambda \frac{|t|^p}{p} + C, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

onde C é uma constante. Assim usando (0.10) e (0.16) obtemos que para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$I(u) \geq \frac{1}{p} (b_1 - \frac{\lambda}{\lambda_1(p)}) \|u\|_{W_0^{1,p}}^p - C_0 \geq -C_0$$

onde C_0 é uma constante. A prova de Lema 3.3 está completa. $\square$

Lema 3.4. Existe um $\rho > 0$ tal que

- (a) $I(u) \leq 0, \quad \forall u \in B_\rho \cap H_i,$
- (b) $I(u) > 0, \quad \forall u \in B_\rho \cap (W_i \setminus \{0\}).$

Prova: A condição (0.12) implica que existem constantes $d_1, d_2 > 0$ e $\delta_1 > 0$ tais que, para cada $0 < |t| < \delta_1$

$$(3.17) \quad c_2 \lambda_i(2) \frac{t^2}{2} < d_1 \lambda_i(2) \frac{t^2}{2} \leq F(t) \leq d_2 \lambda_{i+1}(2) \frac{t^2}{2} < c_1 \lambda_{i+1}(2) \frac{t^2}{2}.$$

Por outro lado, como as normas $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}}$ e $\|\cdot\|_{L^\infty}$ são equivalentes em H_i , temos que, dado $\delta_1 > 0$, existe $\rho_1 < \delta_1$ tal que, para cada $u \in H_i$

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} < \rho_1 \Rightarrow \|u\|_{L^\infty} < \delta_1.$$

Assim, usando (0.10), (3.3) e (3.17) obtemos que, para cada $u \in H_i \cap B_{\rho_1}$

$$\begin{aligned} I(u) &\leq \frac{c_2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{b_2}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p - d_1 \frac{\lambda_i(2)}{2} \int_{\Omega} u^2 \\ &\leq \frac{1}{2}(c_2 - d_1) \|u\|_{H_0^1}^2 + \frac{b_2}{p} \|u\|_{W_0^{1,p}}^p. \end{aligned}$$

Mas $c_2 - d_1 < 0$ e $p > 2$. Daí se segue que existe $\rho < \rho_1$ tal que

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} < \rho, \quad u \in H_i \Rightarrow I(u) \leq 0.$$

Assim temos provado a parte (a) do Lema 3.4.

Agora provaremos a asserção (b). Usando (0.11) e (3.17) temos que existem constantes $C > 0$, $0 < \beta_1 < 1$ e $p < q < p^*$ tais que

$$(3.18) \quad F(t) \leq d_2 \lambda_{i+1}(2) \frac{t^2}{2} + \beta_1 b_1 \lambda_1(p) \frac{|t|^p}{p} + C|t|^q, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente (3.2), (3.18) e (0.10) implicam que para cada $u \in W_i$

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{c_1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{b_1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p + \\ &\quad - \frac{d_2 \lambda_{i+1}(2)}{2} \int_{\Omega} u^2 - \frac{\beta_1 b_1 \lambda_1(p)}{p} \int_{\Omega} |u|^p - C \int_{\Omega} |u|^q \\ &\geq \frac{1}{2}(c_1 - d_2) \|u\|_{H_0^1}^2 + \frac{b_1}{p} (1 - \beta_1) \|u\|_{W_0^{1,p}}^p - C_0 \|u\|_{W_0^{1,p}}^q \end{aligned}$$

onde C_0 é uma constante. Como $q > p$ e $c_1 > d_2$, temos que existe $\rho > 0$ tal que

$$I(u) > 0; \quad \forall u \in B_{\rho} \cap W_i \setminus \{0\}. \quad \square$$

Demonstração do Teorema 0.2

Pela Proposição 2.2, Lema 3.3 e 3.4 o funcional I satisfaz à condição (PS) , é limitado inferiormente e tem um linking local perto da origem. Assim pelo Teorema 1.4 o funcional I possui no mínimo dois pontos críticos diferentes de zero. A prova do Teorema 0.2 está completa.

Agora provaremos Teorema 0.3. Para isto, precisaremos do seguinte lema. Suponha $p > q$ (O caso $p = q$ é similar).

Lema 3.5. Assuma as hipóteses do Teorema 0.3. Então existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que,

$$(a) \ I(u) > \alpha, \quad \forall \|u\|_{W_0^{1,p}} = \rho.$$

(b) Existe $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\|u_0\|_{W_0^{1,p}} > \rho \quad \text{e} \quad I(u_0) < \alpha.$$

Prova. Usando (0.4) e (0.14) se obtém que existe uma constante $\xi_1 \in (0, 1)$ tal que

$$(3.19) \quad F(t) < \xi_1 C_1 \lambda_1(q) \frac{|t|^q}{q} + C|u|^{s_0}$$

onde $s_0 \in (p, p^*)$ e C é uma constante. Assim (0.13) e (3.19) implicam que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{c_1}{q} \int_{\Omega} |\nabla u|^q + \frac{b_1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p - \frac{\xi_1 C_1 \lambda_1(q)}{q} \int_{\Omega} |u|^q - C \int_{\Omega} |u|^{s_0} \\ &\geq \frac{C_1}{q} (1 - \xi_1) \|u\|_{W_0^{1,q}}^q + \frac{b_1}{p} \|u\|_{W_0^{1,p}}^p - C_0 \|u\|_{W_0^{1,p}}^{s_0} \end{aligned}$$

onde C_0 é uma constante. Assim como $\xi_1 < 1$ e $s_0 > p$ temos que a asserção (a) é verificada. A prova da asserção (b) segue as mesmas idéias usadas no Lema 3.1. $\square$

Demonstração do Teorema 0.3

Por Proposição 2.3 o funcional I satisfaz à condição (PS) e em virtude do Lema 3.5 são verificadas as hipóteses do Teorema 1.3. Consequentemente existe pelo menos uma solução fraca não trivial do Problema (P) .

§4. Exemplos

Nesta seção apresentamos algumas aplicações dos Teoremas 0.1, 0.2 e 0.3.

Exemplo 4.1. Consideremos o problema

$$(4.1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Neste caso $a(t) \equiv 1$ e $p = 2$. Suponha que $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é ímpar e vale a condição de Ambrosetti-Rabinowitz, ou seja a propriedade (0.8), e suponha um crescimento do tipo (0.7). Então, em virtude do Teorema 0.1, o Problema (4.1) tem infinitas soluções fracas. Assim, o Teorema 9.38 de Rabinowitz em [23] está contido no nosso Teorema 0.1.

Exemplo 4.2. Suponha que no Problema (4.1) a função $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(0) = 0$, possui um crescimento do tipo (0.4) e que verifica a condição Ambrosetti-Rabinowitz (0.8) (lembre que $p = 2$).

Se $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} < \lambda_1(2)$, usando Teorema 0.3 se conclui que Problema (4.1) tem no mínimo uma solução fraca não trivial. Consequentemente o Teorema de Ambrosetti-Rabinowitz em [2] está contido em nosso Teorema 0.3.

Exemplo 4.3. Suponha que no Problema (4.1) a função $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(0) = 0$ e possui um crescimento do tipo (0.4) para $p = 2$. Se além disso

$$\lambda_i(2) < \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} < \lambda_{i+1}(2) \quad \text{e}$$

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} 2 \frac{F(t)}{t^2} < \lambda_1(2),$$

em virtude do Teorema 0.2 o Problema (4.1) tem no mínimo duas soluções fracas não triviais.

Observe que o tipo de problema abordado em Exemplo 4.3 pode ser resolvido também usando o método de Iteração Monotónica [1, 9], mas notemos que este método em geral não é aplicável no Problema (P). A dificuldade está por exemplo em obter o princípio do máximo e o estudo da regularidade do operador diferencial que aparece no Problema (P).

Exemplo 4.4. Seja $1 < q < p$ e consideremos o seguinte problema

$$(4.2) \quad \begin{cases} -b\Delta_p u - c\Delta_q u = \lambda|u|^{p-2}u + \mu|u|^{q-2}u + \gamma|u|^{r-2}u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Se $p \geq 2$, $p < r < p^*$, $\gamma > 0$, $b > 0$, $c \geq 0$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ então usando Teorema 0.1 temos que o Problema (4.2) possui um número infinito de soluções fracas que convergem a $+\infty$.

Exemplo 4.5. Suponha que no Problema (4.2) temos $q = 2$, $2 < r < p$, $\lambda < b\lambda_1(p)$, $c\lambda_1(2) < \mu < c\lambda_{i+1}(2)$, $b > 0$, $c > 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}$. Em virtude do Teorema 0.2, o Problema (4.2) tem no mínimo duas soluções fracas não triviais.

Exemplo 4.6. Consideremos o seguinte problema

$$(4.3) \quad \begin{cases} -b\Delta_p u - c\Delta_q u = \lambda|u|^{q-2}u + h(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $p > q > 1$, $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $h(0) = 0$. Suponha que h satisfaz (0.4) e a condição de Ambrosetti-Rabinowitz (0.8). Se

$$\lambda < c\lambda_1(q) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t)}{|t|^{q-2}t} = 0$$

então, em virtude do Teorema (0.3) o Problema (4.3) possui no mínimo uma solução fraca não trivial.

Exemplo 4.7. Consideremos o seguinte problema

$$(4.4) \quad \begin{cases} -\sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left(1 + \frac{1}{(1 + |\nabla u|^p)^p}\right) |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = \lambda|u|^{p-2}u + \mu \sin u + \gamma|u|^{r-2}u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando Teorema 0.1, se $p \geq 2$, $p < r < p^*$, $\gamma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então, o Problema (4.4) possui uma sequência não limitada de soluções fracas.

Exemplo 4.8. Se no Problema (4.4), $p = 2$, $\lambda < \lambda_1(2)$, $2 < r < 2^*$ e $\gamma \leq 0$, e além disso,

$\lambda_i(2) < \frac{\lambda + \mu}{2} < \frac{\lambda_{i+1}(2)}{2}$, então, usando o Teorema 0.2 se conclui que o Problema (4.3) possui no mínimo duas soluções fracas não triviais.

Exemplo 4.9. Chamemos de L_p o operador diferencial que aparece no primeiro membro do Problema (4.4) e consideremos o seguinte problema

$$(4.5) \quad \begin{cases} L_p u = \lambda |u|^{p-2} u + h(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\lambda < \lambda_1(p)$, $p \geq 2$ e $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Além disso, suponha que h satisfaz (0.4) e (0.8).

Se $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t)}{|t|^{p-2}t} = 0$ então usando o Teorema 0.3 se conclui que o Problema (4.5) possui no mínimo uma solução fraca não trivial.

Observações. (i) Suponha que a função f é ímpar e assuma as hipóteses do Teorema 0.2. Então, usando a Proposição 2.2, os Lemas 3.3-3.4 e o Teorema 1.1 se conclui que o Problema (P) possui pelo menos i -pares diferentes de soluções fracas.

(ii) Se assumirmos as hipóteses de Teorema 0.3 com f ímpar, em virtude da Proposição 2.2, Lema 2.2, Lema 3.5 e Teorema 1.2 com $H = \{0\}$, o Problema (P) possui infinitas soluções fracas.

(iii) Observe que se no Problema (P) consideramos $a(t) = t^{\frac{1-p}{p}} b(t)$ tal que $b \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ é estritamente crescente, se podem construir muitos exemplos. Note que em (4.1) tomamos $b(t) = \sqrt{t}$; em (4.2) tomamos $b(t) = bt^{\frac{p-1}{p}} + ct^{\frac{q-1}{p}}$ e em (4.4) tomamos $b(t) = t^{\frac{p-1}{p}} (1 + \frac{1}{(1+t)^p})$.

CAPÍTULO II

MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS.

§1. Relação da Energia

Nesta seção determinamos a relação da energia associado ao Problema (P) e mostramos alguns resultados que serão úteis nas provas dos teoremas 0.4 e 0.5.

Denotemos por

$$L_p u =: (a(|u'|^p) |u'|^{p-2} u')'$$

e suponha que u é solução clássica do Problema (P). Então, para cada $x \in I = (0, 1)$

$$\begin{aligned} - \int_0^x (L_p u) u' &= \int_0^x a(|u'|^p) |u'|^{p-2} u' u'' - \int_0^x (a(|u'|^p) |u'|^{p-2} u' u')' \\ &= \frac{1}{p} A(|u'(x)|^p) - \frac{1}{p} A(|u'(0)|^p) + \\ &\quad - a(|u'(x)|^p) |u'(x)|^p + a(|u'(0)|^p) |u'(0)|^p \end{aligned}$$

onde $A(t) = \int_0^t a(\sigma) d\sigma$.

Por outro lado, para cada $x \in I$

$$\int_0^x f(u) u' = F(u(x)) - F(u(0))$$

onde $F(t) = \int_0^t f(\sigma) d\sigma$. Consequentemente, a função u satisfaz à seguinte relação da energia

$$(1.1) \quad W(u'(x)) = W(u'(0)) - F(u(x))$$

onde a função W é definida por

$$(1.2) \quad W(t) = a(|t|^p) |t|^p - \frac{1}{p} A(|t|^p)$$

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e consideremos o seguinte problema

$$(1.3)_\alpha \quad \begin{cases} W(u'(x)) = W(\alpha) - F(u(x)) \\ u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}). \end{cases}$$

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ denotemos por $S(\alpha)$ o primeiro zero da função $W(\alpha) - F(\cdot)$, em $(0, +\infty)$, quando existe.

Consideremos a seguinte condição sobre a função W

(1.4) Existe um $q > 1$ tal que,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{W(t)}{t^q} < +\infty$$

Suponhamos que a função a satisfaz (0.16), a função W satisfaz (1.4) e que a função f verifica (0.3), (0.9). Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(S(\alpha)) > 0$.

Definamos as seguintes funções:

$$\begin{aligned} W_+ &= W|_{[0, +\infty)} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) \\ W_- &= W|_{(-\infty, 0]} : (-\infty, 0] \rightarrow [0, +\infty). \end{aligned}$$

Observe que $W \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e sua derivada é a seguinte

$$\begin{aligned} (1.5) \quad W'(t) &= (pa'(|t|^p)|t|^p + (p-1)a(|t|^p)) |t|^{p-2}t \\ &= (a(|t|^p)|t|^{p-2}t)'t. \end{aligned}$$

Assim por (1.5), usando (0.16) temos que W_+ é um homeomorfismo de $[0, +\infty)$ em $[0, +\infty)$, e é um difeomorfismo de $(0, +\infty)$ em $(0, +\infty)$ (analogamente com W_-). Assim, podemos considerar o seguinte problema

$$(1.6) \quad u'(x) = R_+(\alpha, u(x)) \quad \text{e} \quad u(0) = 0$$

onde R_+ é definida por $R_+(\alpha, t) = W_+^{-1}(W(\alpha) - F(t))$.

Observe que $R_+(\alpha, \cdot)$ não se anula em $(-S(\alpha), S(\alpha))$. Definamos

$$\Lambda_0(t) = \int_0^t \frac{d\sigma}{R_+(\alpha, \sigma)}, \quad \text{para cada } t \in (-S(\alpha), S(\alpha)).$$

Denotemos $\Lambda_0(S(\alpha)) =: \theta(\alpha)$, que está bem definido, pois a integral $\Lambda_0(S(\alpha))$ é convergente. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{(S(\alpha) - t)^{\frac{1}{q}}}{R_+(\alpha, t)} &\underset{t \rightarrow S(\alpha)}{\sim} \left[\frac{-1}{q(R_+(\alpha, t))^{q-1} \frac{\partial}{\partial t}(R_+(\alpha, t))} \right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[\frac{W'(R_+(\alpha, t))}{qf(t)R_+(\alpha, t)^{q-1}} \right]^{\frac{1}{q}} \\ &\underset{t \rightarrow S(\alpha)}{\sim} \left[\frac{W(R_+(\alpha, t))}{f(t)R_+(\alpha, t)^q} \right]^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Assim usando (1.4) e o fato que $f(S(\alpha)) > 0$, temos que $\theta(\alpha)$ está bem definido. Consequentemente $\Lambda_0 : [-S(\alpha), S(\alpha)] \rightarrow [-\theta(\alpha), \theta(\alpha)]$ é um homeomorfismo tal que

$$\Lambda_0 \in C^1((-S(\alpha), S(\alpha)); \mathbb{R}) \quad \text{e}$$

$$\Lambda_0^{-1} \in C^1((-\theta(\alpha), \theta(\alpha)); \mathbb{R}).$$

Assim temos que,

$$u_0(x) = \Lambda_0^{-1}(x), \quad x \in (-\theta(\alpha), \theta(\alpha))$$

é a única solução de (1.6) em $(-\theta(\alpha), \theta(\alpha))$. Além disso temos que,

$$u'_0(-\theta(\alpha)) = u'_0(\theta(\alpha)) = R_+(\alpha, S(\alpha)) = 0$$

Seja agora

$$R_-(\alpha, t) = W_-^{-1}(W(\alpha) - F(t)) \quad \text{e}$$

consideremos o seguinte problema

$$(1.7) \quad u'(x) = R_-(\alpha, u(x)) \quad \text{e} \quad u(2\theta(\alpha)) = 0$$

$R_-(\alpha, \cdot)$ não se anula em $(-S(\alpha), S(\alpha))$. Como antes, definamos

$$\Lambda_1(t) = \int_0^t \frac{d\sigma}{R_-(\alpha, \sigma)} \quad , \quad t \in [-S(\alpha), S(\alpha)]$$

que é uma integral imprópria convergente. Observe que Λ_1 aplica $[-S(\alpha), S(\alpha)]$ em $[-\theta(\alpha), \theta(\alpha)]$. Daí que

$$u_1(x) = \Lambda_1^{-1}(x - 2\theta(\alpha)) \quad , \quad x \in [\theta(\alpha), 3\theta(\alpha)]$$

é a única solução de (1.7) em $[\theta(\alpha), 3\theta(\alpha)]$. Além disso temos que,

$$u'_1(\theta(\alpha)) = u'_1(3\theta(\alpha)) = 0 \quad \text{e} \quad u_0(\theta(\alpha)) = u_1(\theta(\alpha)) = S(\alpha).$$

Continuando esse processo, construímos um único par de soluções não triviais $\{-u, u\}$ do Problema $(1.3)_\alpha$. Tal que

$$u(2k\theta(\alpha)) = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ou seja, obtivemos a seguinte proposição:

Proposição 1.1. Suponha que a função a satisfaz (0.16), a função W satisfaz (1.4) e que a função f verifica (0.3) e (0.9). Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(S(\alpha)) > 0$. Então o problema $(1.3)_\alpha$ possui um único par de soluções $\{-u, u\}$ tal que

$$(1.8) \quad u(2k\theta(\alpha)) = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Observação 1.1. Observe que os únicos zeros da solução u obtida na Proposição 1.1 são da forma $2k\theta(\alpha)$, onde $k \in \mathbb{Z}$. Além disso u é $4\theta(\alpha)$ -periódica.

Proposição 1.2. Assuma as hipóteses (0.3), (0.9), (0.16) e (1.4).

(a) Seja $\alpha \neq 0$, $f(s(\alpha)) > 0$ e u uma solução do Problema $(1.3)_\alpha$ satisfazendo (1.8) e $u(1) = 0$. Então u é solução fraca do Problema (P) .

(b) Assuma que $tf(t) > 0 \forall t \neq 0$. Se u é solução fraca não trivial do Problema (P) então u é uma solução do Problema $(1.3)_\alpha$ satisfazendo (1.8) com $\alpha = u'(0)$.

Prova. É claro que existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $2k\theta(\alpha) = 1$ e

$$u(0) = u(2\theta(\alpha)) = \dots = u(2k\theta(\alpha)) = 0$$

$$u'(\theta(\alpha)) = u'(3\theta(\alpha)) = \dots = u'((2k-1)\theta(\alpha))$$

além disso

$$u \in C^2(((2i-1)\theta(\alpha), (2i+1)\theta(\alpha)); \mathbb{R}), \quad 1 \leq i \leq k-1,$$

$$u \in C^2((0, \theta(\alpha)); \mathbb{R}) \cap C^2(((2k-1)\theta(\alpha), 1); \mathbb{R}).$$

Seja $v \in W_0^{1,p}(I)$ e denotemos

$$w(x) =: a(|u'(x)|^p)|u'(x)|^{p-2}u'(x).$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_0^1 wv' &= \int_0^{\theta(\alpha)} wv' + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{(2i-1)\theta(\alpha)}^{(2i+1)\theta(\alpha)} wv' + \int_{(2k-1)\theta(\alpha)}^1 wv' \\ &= - \int_0^{\theta(\alpha)} w'v - \sum_{i=1}^{k-1} \int_{(2i-1)\theta(\alpha)}^{(2i+1)\theta(\alpha)} w'v - \int_{(2k-1)\theta(\alpha)}^1 w'v \\ &= \int_0^{\theta(\alpha)} f(u)v + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{(2i-1)\theta(\alpha)}^{(2i+1)\theta(\alpha)} f(u)v + \int_{(2k-1)\theta(\alpha)}^1 f(u)v \\ &= \int_0^1 f(u)v. \end{aligned}$$

Ou seja

$$\int_0^1 a(|u'|^p)|u'|^{p-2}u'v' = \int_0^1 f(u)v, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(I)$$

O que prova a parte (a) da Proposição 1.2. Agora procedemos a provar a parte (b) da Proposição 1.2:

Seja u uma solução fraca não trivial do Problema (P). Em virtude do Teorema 0.6 temos que $u \in C^1(\bar{I})$. Não é difícil verificar que se $u'(0) = 0$ então $u \equiv 0$. Assim $u'(0) = \alpha \neq 0$. Suponhamos que $u'(0) = \alpha > 0$ (o caso $\alpha < 0$ se resolve analogamente) e seja $b > 0$ tal que,

$$u(x) > 0 \quad \text{em } (0, b) \quad \text{e} \quad u(0) = u(b) = 0.$$

Usando a hipótese $tf(t) > 0, \forall t \neq 0$ e a condição (0.16) temos que u é estritamente decrescente no intervalo $(0, b)$ e que

$$-u'(0) = u'(b).$$

Observe que u' possui um único zero x_0 em $(0, b)$. Assim é possível verificar a relação da energia

$$W(u'(x)) = W(\alpha) - F(u(x)) \quad \text{em } (0, b).$$

Consequentemente u é solução das seguintes equações ordinárias

$$(1.9) \quad u'(x) = R_+(\alpha, u(x)) \quad \text{em } [0, x_0] \quad \text{e} \quad u(0) = 0$$

$$(1.10) \quad u'(x) = R_-(\alpha, u(x)) \quad \text{em } [x_0, b] \quad \text{e} \quad u(b) = 0$$

Da própria construção da solução u_α do Problema $(1.3)_\alpha$ na Proposição 1.1 conclui-se que,

$$x_0 = \theta(\alpha), \quad b = 2\theta(\alpha) \quad \text{e} \quad u(x) = u_\alpha(x), \quad \forall x \in [0, 2\theta(\alpha)]$$

Analogamente se verifica que $u(x) = u_\alpha(x), \forall x \in [2\theta(\alpha), 1]$. A prova da Proposição 1.2 está completa.

§2. Demonstrações dos Teoremas 0.4, 0.5 e 0.6

A prova do Teorema 0.4 usa o seguinte lema

Lema 2.1. Assuma as hipóteses do Teorema 0.4 e seja $\theta(\alpha)$ como na seção 1. Então

$$(2.1) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \theta(\alpha) = 0.$$

Prova: Seja $\alpha > 0$. É fácil ver que $\theta(\alpha)$ é bem definido para α suficientemente grande. Além disso vale,

$$\theta(\alpha) = \int_0^1 \frac{S(\alpha)dt}{R_+(\alpha, tS(\alpha))}$$

Observe que usando (0.16) – (0.18), temos que existe $\omega_0 > 0$ tal que

$$(2.2) \quad \begin{cases} W_+^{-1}(t) \geq c_1 t^{\frac{1}{q}}, & 0 \leq t \leq \omega_0 \\ W_+^{-1}(t) \geq c_2 t^{\frac{1}{p}}, & \omega_0 \leq t \end{cases}$$

onde c_1, c_2 são constantes positivas.

Por outro lado, se $t \in [1/2, 1]$ então

$$F(S(\alpha)) - F(tS(\alpha)) = f(\beta(t)S(\alpha))S(\alpha)(1-t)$$

onde $\beta(t) \in [1/2, 1]$. Assim, usando (0.8) temos que existe uma constante α_0 suficientemente grande tal que para cada $(\alpha, t) \in [\alpha_0, +\infty) \times [1/2, 1]$,

$$(2.3) \quad \frac{R_+(\alpha, tS(\alpha))}{S(\alpha)} \geq \frac{W_+^{-1}(C_1 S(\alpha)^{\frac{1}{q}}(1-t))}{S(\alpha)}$$

onde C_1 é uma constante.

Definamos

$$\begin{aligned} M(\omega_0) &= \{(\alpha, t) \in [\alpha_0, +\infty) \times [1/2, 1] / C_1 S(\alpha)^{\frac{1}{q}}(1-t) \leq \omega_0\} \\ N(\omega_0) &= \{(\alpha, t) \in [\alpha_0, +\infty) \times [1/2, 1] / C_1 S(\alpha)^{\frac{1}{q}}(1-t) \geq \omega_0\}. \end{aligned}$$

Assim usando (2.2) e (2.3) temos que,

$$(2.4) \quad \begin{cases} \frac{R_+(\alpha, tS(\alpha))}{S(\alpha)} \geq c_1 C_1^{\frac{1}{q}} S(\alpha)^{\frac{1}{q}-1} (1-t)^{\frac{1}{q}}, & (\alpha, t) \in M(\omega_0) \\ \frac{R_+(\alpha, tS(\alpha))}{S(\alpha)} \geq c_2 C_1^{\frac{1}{p}} S(\alpha)^{\frac{1}{p}-1} (1-t)^{\frac{1}{p}}, & (\alpha, t) \in N(\omega_0) \end{cases}$$

Daí se segue que existe uma constante $C_2 > 0$, tal que,

$$(2.5) \quad \frac{R_+(\alpha, tS(\alpha))}{S(\alpha)} \geq C_2 S(\alpha)^{\frac{1}{p\theta}-1} (1-t)^{\frac{1}{q}}, \quad \forall (\alpha, t) \in [\alpha_0, +\infty) \times [1/2, 1].$$

No caso em que $t \in [0, 1/2]$ e α é suficientemente grande

$$\begin{aligned} F(S(\alpha)) - F(tS(\alpha)) &\geq F(S(\alpha)) - F\left(\frac{1}{2}S(\alpha)\right) \\ &= f(\beta S(\alpha))S(\alpha)\left(1 - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

onde $\beta \in [1/2, 1]$. Assim usando (0.8) e (2.2) temos que existe uma constante $C_3 > 0$ e α_1 suficientemente grande tal que

$$(2.6) \quad \frac{R_+(\alpha, tS(\alpha))}{S(\alpha)} \geq C_3 S(\alpha)^{\frac{1}{p\theta}-1}, \quad \forall (\alpha, t) \in [\alpha_1, +\infty) \times [0, 1/2].$$

Consequentemente, usando (2.5) e (2.6) obtemos que para cada $\alpha > \max\{\alpha_0, \alpha_1\}$

$$\begin{aligned} \theta(\alpha) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{S(\alpha)dt}{R_+(\alpha, tS(\alpha))} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{S(\alpha)dt}{R_+(\alpha, tS(\alpha))} \\ &\leq \frac{1}{2C_3 S(\alpha)^{\frac{1}{p\theta}-1}} + \frac{1}{C_2 S(\alpha)^{\frac{1}{p\theta}-1}} \int_{1/2}^1 \frac{dt}{(1-t)^{\frac{1}{q}}}. \end{aligned}$$

Finalmente, como $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} S(\alpha) = +\infty$, $\theta < \frac{1}{p}$ e $\int_{1/2}^1 \frac{dt}{(1-t)^{\frac{1}{q}}}$ é convergente, a propriedade (2.1) é verificada. A prova do Lema 2.1 está completa. $\square$

Seja t_0 como na condição (0.8) e denotemos

$$\begin{aligned} M_0 &= \max_{t \in [0, t_0]} F(t) \\ \beta_0 &= W_+^{-1}(M_0). \end{aligned}$$

Lema 2.2. Assuma as hipóteses do Teorema 0.4. Então, existe $\alpha_0 \geq \beta_0$ tal que

$$\theta \in C([\alpha_0, +\infty), \mathbb{R})$$

Prova: Omitimos a prova, pois esta, segue as mesmas idéias que usamos no Lema 2.1.

Demonstração do Teorema 0.4

Pelos lemas 2.1 e 2.2 temos que $\theta([\alpha_0, +\infty)) \supseteq (0, \theta(\alpha_0))$. Assim existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k \geq k_0$

$$\frac{1}{2k} \in (0, \theta(\alpha_0)).$$

Usando a Proposição 1.1 (ver (1.8)) e a Proposição 1.2 se conclui que para cada $k \geq k_0$ existe pelo menos uma solução fraca do Problema (P) com $k - 1$ zeros interiores. A prova de Teorema 0.4 está completa.

Agora procedemos a demonstrar o Teorema 0.5. Para isto precisamos dos seguintes Lemas. Denotemos

$$\Gamma_p =: \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{|t|^{p-2}t}$$

$$\gamma_q =: \lim_{|t| \rightarrow 0} \frac{f(t)}{|t|^{q-2}t}$$

Lema 2.3. Assuma as hipóteses do Teorema 0.5. Então

$$(a) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \theta(\alpha) = \left[\frac{b(p-1)}{\Gamma_p} \right]^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^p)^{\frac{1}{p}}}$$

$$(b) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \theta(\alpha) = \left[\frac{c(q-1)}{\gamma_q} \right]^{\frac{1}{q}} \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^q)^{\frac{1}{q}}}$$

Prova. Observe que para cada $t \in (0, 1)$

$$\frac{S(\alpha)}{R_+(\alpha, S(\alpha)t)} = S(\alpha) \cdot [W_+^{-1}(\frac{S(\alpha)^p}{p}(\frac{pF(S(\alpha))}{S(\alpha)^p} - \frac{t^p pF(tS(\alpha))}{t^p S(\alpha)^p}))]^{-1}$$

mas

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} S(\alpha) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{W_+^{-1}(x^p)}{x} = \left[\frac{1}{b} \left(\frac{p}{p-1} \right) \right]^{\frac{1}{p}}$$

Assim,

$$(2.7) \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{S(\alpha)}{R_+(\alpha, S(\alpha)t)} = \left[\frac{b(p-1)}{\Gamma_p} \right] \cdot \frac{1}{(1-t^p)^{\frac{1}{p}}}, \quad \forall t \in (0, 1)$$

Por outro lado, se $t \in [1/2, 1]$ então

$$F(S(\alpha)) - F(tS(\alpha)) = f(\beta(t)S(\alpha))S(\alpha)(1-t).$$

onde $\beta(t) \in [1/2, 1]$. Assim usando (0.20) temos que existe um α_0 suficientemente grande tal que para cada $(\alpha, t) \in [\alpha_0, +\infty) \times [1/2, 1]$

$$(2.8) \quad \frac{R_+(\alpha, tS(\alpha))}{S(\alpha)} \geq \frac{W_+^{-1}(C_1 S(\alpha)^p(1-t))}{S(\alpha)}$$

onde C_1 é uma constante. Assim usando um argumento similar ao Lema 2.1, temos que existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$(2.9) \quad \frac{R_+(\alpha, tS(\alpha))}{S(\alpha)} \geq C_2(1-t)^{\frac{1}{q}}, \quad \forall (\alpha, t) \in [\alpha_0, +\infty) \times [1/2, 1]$$

No caso em que $t \in [0, 1/2]$ e α é suficientemente grande temos que,

$$\begin{aligned} F(S(\alpha)) - F(tS(\alpha)) &\geq F(S(\alpha)) - F\left(\frac{1}{2}S(\alpha)\right) \\ &= f(\beta(\alpha)S(\alpha))S(\alpha) \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

onde $\beta(\alpha) \in [1/2, 1]$. Assim, usando (0.20) e (2.2) existe um $\alpha_1 > \alpha_0$ e uma constante $C_3 > 0$ tais que

$$(2.10) \quad \frac{R_+(\alpha, tS(\alpha))}{S(\alpha)} \geq C_3, \quad \forall (\alpha, t) \in [\alpha_1, +\infty) \times [0, 1/2]$$

Consequentemente, usando (2.7), (2.9) e (2.10) em virtude do Teorema da Convergência Dominada, a prova de asserção (a) no Lema 2.3 está completa. Analogamente se prova a parte (b). $\square$

Lema 2.4. Assuma as hipóteses do Teorema 0.5. Então $\theta : [0, \infty+) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Prova. Como a função f satisfaz a hipótese $f(t)t > 0, \forall t$, implica que a função F é estritamente crescente em $[0, +\infty)$, assim a função $S(\alpha)$ é uma função contínua estritamente crescente em $[0, +\infty)$. Consequentemente usando um argumento

similar ao Lema 2.3 é possível provar que $\theta(\alpha)$ é uma função contínua. $\square$

Demonstração do Teorema 0.5

Suponha que $k > i$. Assim usando (0.20), (0.21) e Lema 2.3, temos que,

$$\frac{1}{2(k+1)} < \theta(+\infty) < \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2(i+1)} < \theta(0) < \frac{1}{2i}$$

Logo, usando Lema 2.4, temos que

$$\frac{1}{2(k-\ell)} \in \theta([0, +\infty)) , \quad \ell = 0, \dots, k - (i+1)$$

Consequentemente, em virtude da Proposição 1.1 e 1.2 o Problema (P) possui no mínimo $k - i$ pares de soluções fracas não triviais, que denotamos por

$$\{u_\ell, -u_\ell\}_{\ell=0, \dots, k-(i+1)}$$

Além disso, u_ℓ possui $k - \ell - 1$ zeros interiores. A prova do Teorema 0.5 está completa.

Demonstração do Teorema 0.6

Suponha que u é solução fraca do Problema (0.22). Isto é

$$\begin{cases} \int_0^1 a(|u'|^p) |u'|^{p-2} u' v' = \int_0^1 h v , \quad \forall v \in W_0^{1,p}(I) \\ u \in W_0^{1,p}(I). \end{cases}$$

Denotemos

$$w(x) = a(|u'(x)|^p) |u'(x)|^{p-2} u'(x).$$

Segue-se da definição de $W^{1,p}(I)$ que $w \in W^{1,p}(I)$ e

$$w' = -h \in C(\bar{I})$$

A propriedade (0.16) implica que a função $a(|t|^p) |t|^{p-2} t$ possui uma inversa $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Assim $u' = b \circ w \in C(\bar{I}, \mathbb{R})$, ou seja $u \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R})$. A prova da parte (i) está completa.

Provemos agora (ii): A propriedade (0.16) e a hipótese $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{p-2} a(t^p) \neq 0$ implicam que a função b definida anteriormente é de classe C^1 . Consequentemente $u' = b \circ w \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R})$, ou seja $u \in C^2(\bar{I}, \mathbb{R})$. A prova está completa. $\square$

Observação 2.1. Seja $k \in \mathbb{N}$ e seja $\theta(\alpha)$ a função associada ao Problema $(1.3)_\alpha$. Assume que existe um único $\alpha_k \in \mathbb{R}$ tal que $2k\theta(\alpha_k) = 1$. Então em virtude das Proposições 1.1 e 1.2 existe um único par de soluções fracas $\{-u, u\}$ do Problema (P) tais que u possui exatamente $k - 1$ zeros no intervalo I . Assim, se além das hipóteses do Teorema 0.4 supusermos que $\theta(\alpha)$ é estritamente decrescente, então as soluções $\{u_k\}_{k \geq k_0}$ que aparecem na conclusão do Teorema 0.4 são as únicas soluções fracas do Problema (P) . Analogamente se além das hipóteses do Teoremas 0.5 supomos que $\theta(\alpha)$ é estritamente monótona, as soluções $\{-u_\ell, u_\ell\}_{\ell=0, \dots, m-1}$ que aparecem na conclusão do Teorema 0.5 são as únicas soluções fracas do Problema (P) .

§3. Exemplos.

Nesta seção apresentamos alguns exemplos relativos à Teoremas 0.4 e 0.5. Denotemos por S o conjunto das soluções fracas não triviais do Problema (P) e por S_k o conjunto

$$S_k =: \{u \in S / u \text{ possui exatamente } k - 1 \text{ zeros em } I\}$$

Exemplo 3.1. No caso em que $a(t) \equiv 1$ e $p > 1$ o Problema (P) é dado por,

$$(3.1) \quad \begin{cases} -(|u'|^{p-2} u')' = f(u) & \text{em } I \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

que corresponde ao conhecido Problema de contorno envolvendo o p -Laplaciano 1-dimensional (ver [13, 18, 21, 22]).

Exemplo 3.2. Consideremos o seguinte problema

$$(3.2) \quad \begin{cases} -(|u'|^{p-2} u')' - (|u'|^{q-2} u')' = \lambda |u|^{p-2} u + \mu |u|^{q-2} u & \text{em } I \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

onde $p > q > 1$, $\lambda_k(p) < \lambda < \lambda_{k+1}(p)$ e $\lambda_i(q) < \mu < \lambda_{i+1}(q)$. Então em virtude do Teorema 0.5 o Problema (3.2) possui no mínimo $m = |k - i|$ pares de soluções fracas não triviais,

$$\{-u_\ell, u_\ell\}_{\ell=0, \dots, m-1} \text{ tais que } u_\ell \in S_{\max\{k, i\} - \ell}$$

Exemplo 3.3. Consideremos o seguinte problema

$$(3.3) \quad \begin{cases} -((1 + \frac{1}{(1+|u'|^p)^p})|u'|^{p-2}u')' = |u|^{r-2}u & \text{em } I \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

onde $r > p > 1$. Então usando o Teorema 0.4, temos que existe um $k_0 \in N$ tal que para cada $k \geq k_0$ existe no mínimo um par de soluções fracas

$$\{-u_k, u_k\} \text{ tais que } u_k \in S_k$$

Exemplo 3.4. Consideremos o seguinte problema

$$(3.4) \quad \begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' - c(|u'|^{q-2}u')' = \lambda|u|^{r-2}u & \text{em } I \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

onde $1 < q < p$, $r > p$ e $c \geq 0$.

Observe que a função W associada ao Problema (3.4) está dada por

$$W(t) = \frac{p-1}{p}|t|^p + \frac{c(q-1)}{q}|t|^q.$$

Denotemos,

$$\Gamma_r(\alpha, t) =: \frac{\lambda S(\alpha)^r}{r}(1 - t^r)$$

$$z(\alpha, t) =: W_+^{-1}(\Gamma_r(\alpha, t)).$$

Assim, para cada $\alpha \geq 0$ e $t \in (0, 1)$ temos que,

$$\begin{aligned} \frac{S(\alpha)}{R_+(\alpha, S(\alpha)t)} &= \frac{S(\alpha)}{W_+^{-1}(F(S(\alpha)) - F(S(\alpha)t))} \\ &= \frac{S(\alpha)}{W_+^{-1}(\Gamma_r(\alpha, t))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{r}{\lambda(1-t^r)} \right)^{\frac{1}{r}} \frac{W(z(\alpha, t))^{\frac{1}{r}}}{z(\alpha, t)} \\
&= \left(\frac{r}{\lambda(1-t^r)} \right)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{p-1}{p} |z(\alpha, t)|^{p-r} + \frac{c(q-1)}{q} |z(\alpha, t)|^{q-r} \right)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

Observe que,

$$S(\alpha) = \left(\frac{r}{\lambda} W(\alpha) \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Logo $S(\alpha)$ é uma função estritamente crescente. Daí, temos que, $z(\alpha, t)$ também é estritamente crescente na variável α . Assim a função $\theta(\alpha)$ é uma função estritamente decrescente. Consequentemente em virtude do Teorema 0.4 e Observação 2.1, temos que

$$S = \{-u_k, u_k\}_{k \geq 1}, \quad \text{onde } u_k \in S_k.$$

Exemplo 3.5. Suponha que no Problema (3.4) se verifica,

$$1 < q < p = r, \quad \lambda_k(p) < \lambda < \lambda_{k+1}(p) \quad \text{e} \quad c \geq 0.$$

Então usando um argumento análogo ao do Exemplo 3.4 temos que $\theta(\alpha)$ é estritamente decrescente. Assim, usando Teorema 0.5 e Observação 2.1, temos que

$$S = \{-u_\ell, u_\ell\}_{\ell=0, \dots, k-1}, \quad \text{onde } u_\ell \in S_{k-\ell}$$

Exemplo 3.6. Suponha que no Problema (3.4) se verifica,

$$1 < r = q < p, \quad c\lambda_i(q) < \lambda < c\lambda_{i+1}(q) \quad \text{e} \quad c > 0.$$

Então $\theta(\alpha)$ é uma função estritamente crescente. Consequentemente em virtude do Teorema 0.5 e Observação 2.1, temos que,

$$S = \{-u_\ell, u_\ell\}_{\ell=0, \dots, i-1}, \quad \text{onde } u_\ell \in S_{i-\ell}.$$

Bibliografia

- [1] Amann, H. Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach space, SIAM Rev. 18 (1976), 620-709.
- [2] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, J. Funct. Anal. 14 (1973) 349-381.
- [3] A. Anane, Étude des Valeurs Propres et de la Résonance pour l' Opérateur p -Laplacien, Tese de Doutorado, Université Libre de Bruxelles, Faculté de Sciences (1987-1988).
- [4] G. Barles, Remarks on uniqueness results of the first eigenvalue of the p -Laplacian, (Preprint).
- [5] M. S. Berger, Nonlinearity and functional analysis, Academic Press, (1977).
- [6] F. Browder, Existence theorems for nonlinear partial differential equations, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 16, Amer. Math. Soc, (1970), 1-60.
- [7] F. Browder, Fixed point theory and nonlinear problems, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, Volume 9, Number 1, July 1983.
- [8] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, Masson (1983).
- [9] K. C. Chang, Infinite dimensional Morse Theory and its applications, Séminaire de Mathématiques Supérieures n^o 97, Les presses de Univ. de Montréal, Montréal, Canada, (1985).
- [10] K. C. Chang, Solutions of asymptotically linear equations via Morse Theory, Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981), 693-712.
- [11] J. I. Diaz, Nonlinear partial differential equations and free boundaries, vol. I, Elliptic equations, Research Notes in Mathematics 106, Pitman Advanced Publishing Program, Boston - London - Melbourne (1985).
- [12] A. Friedman; Partial differential equations, Holt, Rinehart, and Winston, Inc. New York, (1969).
- [13] M. Guedda and L. Veron, Bifurcation phenomena associated to the p -Laplace operator, Trans. Amer. Math. Soc. 310 (1988), 419-431.

- [14] N. Hirano, Multiple solutions for quasilinear elliptic equations, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, Vol 15, N^o 7, p.p. 625-638, (1990).
- [15] M. A. Krasnosel'skii, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, Gostehizdat, (1956) (Russian).
- [16] J. Q. Liu - S. J. Li, Existence theorems of multiple critical points and their applications, *Kexue Tongbao*, 17 (1984), p 1025-1027.
- [17] J. Q. Liu, Morse index of a saddle point, *J. System Science and Math. Sci.* Vol. 2, 1989, 42-49.
- [18] M. Otani, A remark on certain nonlinear elliptic equations, *Proc. Fac. Sci. Tokai Univ.* N^o 19 (1984), 23-28.
- [19] M. Otani, Existence and Non-Existence of Nontrivial solutions of some Non-linear Degenerated Elliptic Equations.
- [20] M. Otani, On certain second order ordinary differential equations associated with Sobolev - Poincaré - type equalities, *Nonlinear Analysis, Th. Meth. and Appl.* 8 (1984), 1255-1270.
- [21] M. del Pino, M. Elgueta and R. Manásevich, A homotopic deformation along p of a Leray-schauder degree result and existence for $(|u'|^{p-2}u')' + f(x, u) = 0$, $u(0) = u(T) = 0$, *J. Diff. Eq.* (1989).
- [22] ———, Sturm's Comparison theorem and a Hartman's type oscillation criterion for $(|u'|^{p-2}u')' + a(t)|u|^{p-2}u = 0$, preprint.
- [23] P. H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, C. B. M. S. Regional Confer. Ser. in Math, n^o 65 Am. Math. Soc., Providence, RI (1986).
- [24] P. Ubilla, *Multiplicity Results for Quasilinear Elliptic Equations*, preprint.