# Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática


---

**Tese de Doutorado**

# Tipos de Holomorfia em Espaços de Banach

por


**Ariosvaldo Marques Jatobá** †

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

**Orientador: Prof. Dr. Jorge Túlio Mujica Ascui**



†Este trabalho contou com o apoio financeiro do CNPq

# Tipos de Holomorfia em Espaços de Banach

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Ariosvaldo Marques Jatobá** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 23 de outubro de 2008.

**Prof. Dr:. Jorge Túlio Mujica Ascui**

Banca examinadora:

Prof. Dr. Jorge Túlio Mujica Ascui

Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos

Prof. Dr. Geraldo Márcio de A. Botelho

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Prof. Dr. Erhan Çaliskan

Tese, apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
**Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a 2115**

Jatobá, Ariosvaldo Marques
J318t Tipos de holomorfia em espaços de Banach / Ariosvaldo Marques Jatobá -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

Orientador : Jorge Túlio Mujica Ascui
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Banach, Espaços de. 2. Funções holomorfas. 3. Operadores de convolução. 4. Transformada de Borel. I. Ascui, Jorge Túlio Mujica . II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Holomorphy types on a Banach spaces.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Banach spaces. 2. Holomorphic functions. 3. Convolution operators. 4. Borel transform.

Área de concentração: Análise funcional

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora:

Prof. Dr. Jorge Túlio Mujica Ascui (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho (UFU)
Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino (UFPB)
Prof. Dr. Enhan Çaliskan (Universidade de Istambul)

Data da defesa: 23/10/2008

Programa de pós-graduação: Doutorado em Matemática

**Tese de Doutorado defendida em 23 de outubro de 2008 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof. (a). Dr (a). JORGE TÚLIO MUJICA ASCUI**

**Prof. (a). Dr (a). MÁRIO CARVALHO DE MATOS**

**Prof. (a). Dr (a). GERALDO MÁRCIO DE AZEVEDO BOTELHO**

Daniel M. Pellegrino

**Prof. (a). Dr (a). DANIEL MARINHO PELLEGRINO**

**Prof. (a) Dr. (a) ERHAN ÇALISKAN**

*Aos meus familiares e à*
*minha esposa Vanessa*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado esta oportunidade e me guiado nesta tese.

Ao meu orientador, Jorge Mujica , por toda ajuda que me concedeu com seu extenso conhecimento matemático.

Aos meus pais, Antônio e Almery, por tudo que fizeram por mim e pelo apoio que me deram durante toda minha vida.

À minha esposa Vanessa, pelo apoio,compreensão, dedicação e amor. Sou grato também aos seus familiares.

Aos meus irmãos José Lito, Jozélia, Joel, José André, Toinho, Vanderval, Gilberto, Girlaide, e Oraide pelo incentivo.

Aos meus sobrinhos Shirlly, Ilton, Tatiele, Andréa, Joice, Sabrina, Clara, Larissa, Samuel e Yago pela alegria, carinho e amor que sempre me deram.

Aos amigos Alan, Alonso, Carlinhos, Claiton, Daniela, Douvânio, Fabio, Jeninho, José Antônio, Leonardo, Nandão, Neiton, Po Lin, Rafael, Ricardo, Weber e Ximena. Em especial aos amigos Marcelo e Vinícius que me acompanharam durante os anos de graduação, mestrado e doutorado. Aos demais amigos de curso, tanto do IMECC/UNICAMP quanto da FAMAT/UFU, dentre tantos outros que permanecerão em minha memória.

Aos professores do IMECC/UNICAMP e aos professores da FAMAT/UFU, em especial aos professores Geraldo Botelho e Mário Matos.

Aos funcionários do IMECC, em especial Edinaldo, Tânia e Cidinha.

Agradeço também aos professores do ensino fundamental e médio que acabei não mencionando, mas que de certa forma contribuíram para essa tese de doutorado e fizeram parte do meu aprendizado durante minha vida.

Aos membros da banca examinadora da minha tese de doutorado, pelas contribuições para esta versão final.

Ao CNPq pelo apoio financeiro indispensável.

# ABSTRACT

In this work we introduce and study functions of Θ-holomorphy type of bounded type. In particular we obtain a duality result via the Borel transform and we prove existence and approximation results for convolution equations. The results we prove generalize previous results of this type due to C. Gupta [21], M. Matos [28] and X. Mujica [32]. We study the relationships among the space $\mathcal{H}_b(E;F)$ of entire mappings of bounded type, the space $\mathcal{H}_{Nb}(E;F)$ of entire mappings of nuclear bounded type, the space $\mathcal{H}_{PIb}(E;F)$ of entire mappings of Pietsch integral bounded type, and the space $\mathcal{H}_{GIb}(E;F)$ of entire mappings of Grothendieck integral bounded type. We extend to the case of entire mappings several results due to R. Alencar [2] and R. Cilia and J. Gutiérrez [10] in the case of homogeneous polynomials.

# RESUMO

Neste trabalho introduzimos e estudamos os espaços das funções inteiras $\Theta$-holomorfas de tipo limitado. Em particular obtemos resultados de dualidade via a transformada de Borel e provamos resultados de existência e aproximação para equações de convolução. Os resultados provados generalizam resultados anteriores deste tipo devido a C. Gupta [21], M. Matos [28] e X. Mujica [32]. Nós estudamos as relações entre o espaço $\mathcal{H}_b(E;F)$ das funções inteiras de tipo limitado, o espaço $\mathcal{H}_{Nb}(E;F)$ das funções inteiras nucleares de tipo limitado, o espaço $\mathcal{H}_{PIb}(E;F)$ das funções inteiras Pietsch-integrais de tipo limitado, e o espaço $\mathcal{H}_{GIb}(E;F)$ das funções inteiras Grothendieck-integrais de tipo limitado. Estendemos para o caso de funções inteiras resultados de R. Alencar [2] e R. Cilia e J. Gutiérrez [10] no caso de polinômios homogêneos.

# LISTA DE SÍMBOLOS

- $\mathbb{N}$ — O conjunto dos números naturais 1,2,...
- $\mathbb{N}_0$ — $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\mathbb{C}$ — O conjunto dos números complexos
- $\mathbb{K}$ — $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- $E$, $F$ — Denotarão espaços de Banach complexos
- $E'$ — O dual topológico do espaço de Banach $E$
- $c_0$ — O espaço das seqüências de escalares que convergem para zero
- $\ell_\infty(E)$ — O espaço das seqüências limitadas de $E$
- $\|\cdot\|_\infty$ — A norma dos espaços $c_0$ e $\ell_\infty$
- $\mathcal{L}(E;F)$ — O espaço dos operadores lineares contínuos de $E$ em $F$
- $\mathcal{L}_N(E;F)$ — o espaço dos operadores nucleares de $E$ em $F$
- $\mathcal{L}_{PI}(E;F)$ — o espaço dos operadores Pietsch-integrais de $E$ em $F$
- $\mathcal{L}_{GI}(E;F)$ — o espaço dos operadores Grothendieck-integrais de $E$ em $F$
- $\mathcal{P}(^m E;F)$ — O espaço dos polinômios $m-$homogêneos contínuos de $E$ em $F$

- $\mathcal{P}_f(^m E; F)$ O espaço dos polinômios $m-$homogêneos contínuos de tipo finito de $E$ em $F$
- $\mathcal{P}_A(^m E; F)$ O espaço dos polinômios $m-$homogêneos contínuos aproximáveis de $E$ em $F$
- $\mathcal{P}_N(^m E; F)$ O espaço dos polinômios $m-$homogêneos contínuos nucleares de $E$ em $F$
- $\mathcal{P}_{PI}(^m E; F)$ O espaço dos polinômios $m-$homogêneos contínuos Pietsch-integrais de $E$ em $F$
- $\mathcal{P}_{GI}(^m E; F)$ O espaço dos polinômios $m-$homogêneos contínuos Grothendieck-integrais de $E$ em $F$
- $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ O espaço das aplicações $m$-lineares contínuas de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em $F$
- $Exp_{\Theta'}(E')$ O espaço das funções $\Theta'$-tipo exponencial
- $\mathcal{H}(E; F)$ O espaço das funções inteiras de $E$ em $F$
- $\mathcal{H}_{\Theta b}(E; F)$ O espaço das funções inteiras $\Theta$-holomorfas de tipo limitado de $E$ em $F$
- $\mathcal{H}_{Nb}(E; F)$ O espaço das funções inteiras nucleares de tipo limitado de $E$ em $F$
- $\mathcal{H}_{PIb}(E; F)$ O espaço das funções inteiras Pietsch-integrais de tipo limitado de $E$ em $F$
- $\mathcal{H}_{GIb}(E; F)$ O espaço das funções inteiras Grothendieck-integrais de tipo limitado de $E$ em $F$ $\mathcal{H}_{GIb}(E; F)$
- $\mathcal{A}_\Theta$ O conjunto dos Operadores de convolução sobre $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$

# CONTEÚDO

# INTRODUÇÃO

A área do conhecimento matemático na qual este trabalho se insere é a Análise Funcional.

Em 1966, C. Gupta, em sua tese de doutorado, orientada por L. Nachbin e defendida na Universidade de Rochester, provou resultados sobre existência e aproximação de soluções para equações de convolução para os espaços $\mathcal{H}_{Nb}(E)$ das funções inteiras nucleares de tipo limitado. Em seguida, em 1967, L. Nachbin e C. Gupta estenderam esses resultados para espaços de funções inteiras nucleares, não necessariamente de tipo limitado. Tais resultados podem ser encontrados em [21]. M. Matos [28] obteve resultados desse tipo para os espaços $\mathcal{H}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(E)$ das funções inteiras $(s;(r,q))$-quase-nucleares de tipo limitado. X. Mujica [32] obteve resultados sobre os operadores de convolução e a transformada Borel para os espaços $\mathcal{H}_{\sigma(p),b}(E)$ das funções inteiras $\sigma(p)$-nucleares de tipo limitado. No presente trabalho mostramos que todos estes casos podem ser generalizadas usando tipos de holomorfia. Como de costume, a transformada de Borel é usada para obter resultados de dualidade. Além disso, caracterizamos os operadores de convolução dos espaços $\mathcal{H}_{\Theta,b}(E)$ das funções $\theta$-holomorfas de tipo limitado, e obtemos resultados de existência e aproximação para equações de convolução.

Em 1955, A. Grothendieck introduziu os operadores integrais entre espaços de Banach ( num contexto mais geral de espaços localmente convexos ), os quais chamamos de Grothendieck-integrais. A. Pietsch apresentou uma outra definição de operadores integrais, que nós chamaremos de operadores Pietsch-integrais. Ambas as noções têm sido profundamente estudadas e aplicadas por vários autores na teoria de espaços de Banach. Em 1971,

S. Dineen [14] definiu polinômios homogêneos integrais com valores escalares. Em 1985, R. Alencar [1] estendeu a definição de operadores Pietsch integrais para aplicações multilineares e polinômios homogêneos com valores vetoriais, e a noção tem sido estudada por diversos autores, desde então. Em 2002, R. Cilia, M. D'Anna e J. Gutiérrez [8] estenderam a definição dada por A. Pietsch de formas multilineares integrais para aplicações multilineares e polinômios homogêneos. Mais recentemente em 2003, I. Villanueva [35] introduziu uma generalização dos operadores Grothendieck-integrais como o modelo introduzido por R. Alencar. De [8] e [35] é fácil ver que ambas as noções de aplicações multilineares integrais são equivalentes e que as duas definições de normas integrais coincidem. Como C. Gupta [21] introduziu os espaços das funções inteiras de tipo limitado $\mathcal{H}_b(E;F)$ e as funções inteiras nucleares de tipo limitado $\mathcal{H}_{Nb}(E;F)$, as quais foram estudadas por muitos autores. Neste trabalho nós introduzimos os espaços $\mathcal{H}_{PIb}(E;F)$ das funções inteiras Pietsch-integrais de tipo limitado e o espaço $\mathcal{H}_{GIb}(E;F)$ das funções inteiras Grothendieck-integrais de tipo limitado, e estudamos as relações entre estes espaços.

Entre outros resultados, mostramos que dada uma função $f \in \mathcal{H}_{GIb}(E;F)$ e operadores fracamente compactos $S \in \mathcal{L}(F;Y)$ e $T \in \mathcal{L}(X;E)$, então $S \circ f \in \mathcal{H}_{PIb}(E;Y)$ e $J_F \circ f \circ T \in \mathcal{H}_{Nb}(X;F'')$, onde $J_F\colon F \to F''$ é mergulho natural. Uma versão polinomial deste resultado foi obtida por R. Cilia e J. Gutiérrez [10].

No principal resultado deste trabalho mostramos que se $f \in \mathcal{H}_{Nb}(E;F)$, então existem um espaço de Banach separável e reflexivo $R$, um operador compacto $T \in \mathcal{L}(E;R)$ e uma função $g \in \mathcal{H}_{Nb}(R;F)$ tais que $f = g \circ T$. Reciprocamente mostramos que dado um espaço de Banach $Z$, um operador fracamente compacto $T \in \mathcal{L}(E;Z)$ e uma função $g \in \mathcal{H}_{PIb}(Z;F)$, então a função $f = g \circ T \in \mathcal{H}_{Nb}(E;F)$. Este é o conteúdo do Teorema 5.2.2. Uma versão polinomial deste resultado foi obtida por R. Cilia e J. Gutiérrez em [10].

# Organização da Tese

O presente trabalho está organizado da seguinte maneira:

- No Capítulo 1 apresentamos os espaços de polinômios e aplicações multilineares nucleares, os espaços de polinômios e aplicações multilineares Pietsch-integrais e os espaços de polinômios e aplicações multilineares Grothendieck-integrais. Além disso, enunciamos resultados de relação entre os polinômios nucleares ( Pietsch-integrais e Grothendieck-integrais) e aplicações multilineares simétricas nucleares ( Pietsch-integrais e Grothendieck-integrais ). Neste capítulo apresentamos também os conceitos de linearização associada a um dado polinômio e uma aplicação multilinear, e alguns resultados envolvendo-os, pois esses conceitos são necessários. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [1], [2], [8] e [35] para a teoria de polinômios e aplicações multilineares, e [13] para o teoria de espaços de Banach com a propriedade Radon-Nikodým e operadores nucleares e integrais.

- No Capítulo 2 definimos os espaços de funções inteiras $\Theta$-holomorfas de tipo limitado, que são generalizações dos espaços definidos por C. Gupta em [21], M. Matos em [28] e X. Mujica em [32]. Munimos tais espaços com famílias de seminormas que os tornam espaços de Fréchet. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [21], [28] e [32].

- No Capítulo 3 introduzimos os conceitos de $\pi_1$-tipo de holomorfia e as transformadas de Fourier-Borel e provamos os isomorfismos algébrico das transformadas de Fourier-Borel, nos casos em que são possíveis.

  As principais referências utilizadas neste capítulo foram [17, 18], [21], [28], [32] e [33].

- No Capítulo 4 introduzimos os conceitos de $\pi_2$-tipo de holomorfia e definimos os operadores de convolução sobre os espaços de funções inteiras $\Theta$-holomorfas de tipo limitado. Também introduzimos o conceito de uma coleção de funções holomorfas de $U$ em $\mathbb{C}$ ser *fechada para divisão*, mais especificamente:

  Na seção 4.1 introduzimos os conceitos de $\pi_2$-tipo de holomorfia e definimos os operadores de convolução sobre os espaços de funções $\Theta$-holomorfas inteiras de tipo limitado e os caracterizamos.

  Na seção 4.2 introduzimos o conceito de uma coleção de funções holomorfas de $U$ em $\mathbb{C}$ ser *fechada para divisão*, que é uma condição necessária para provarmos teoremas de divisão envolvendo a transformada de Fourier-Borel. Provamos teoremas de existência e aproximação de soluções para equações de convolução. Tais teoremas são consequência dos teoremas de divisão.

  As principais referências utilizadas neste capítulo foram [17, 18], [21], [28], [32] e [33].

- No Capítulo 5 estudamos as relações entre o espaço $\mathcal{H}_b(E;F)$ das funções inteiras de tipo limitado, o espaço $\mathcal{H}_{Nb}(E;F)$ das funções inteiras nucleares de tipo limitado, o espaço $\mathcal{H}_{PIb}(E;F)$ das funções inteiras Pietsch-integrais de tipo limitado, e o espaço $\mathcal{H}_{GIb}(E;F)$ das funções inteiras Grothendieck-integrais de tipo limitado. Estendemos para o caso de funções inteiras resultados de Alencar [2] e Cilia e Gutiérrez [10] no caso de polinômios $m$-homogêneos.

# CAPÍTULO 1

# PRELIMINARES

O intuito deste capítulo é familiarizar o leitor com as principais definições e resultados que serão usados ao longo da tese. Primeiramente vamos apresentar as principais notações e definições básicas necessárias para o desenvolvimento da tese.

## 1.1 Notações e Definições Básicas

Se $E$ é um espaço de Banach. $\ell_\infty(E)$ denota o espaço vetorial de todas as seqüências limitadas $(x_m) \subset E$. $\ell_\infty(E)$ é um espaço de Banach sob a norma

$$\|(x_m)\| = \sup_m \|x_m\|.$$

$c_0(E)$ denota o espaço vetorial de todas as seqüências $(x_m) \subset E$ que tendem a zero. $c_0(E)$ é um subespaço fechado de $\ell_\infty(E)$, e portanto um espaço de Banach. Quando $E = \mathbb{K}$, escrevemos $\ell_\infty$ em lugar de $\ell_\infty(\mathbb{K})$, e $c_0$ em lugar de $c_0(\mathbb{K})$.

Sabemos que $c_0$ é espaço de Banach separável. Uma demonstração análoga prova que $c_0(E)$ é um espaço de Banach separável sempre que $E$ é for separável.

**Definição 1.1.1.** Um espaço de Banach $E$ tem a *propriedade da aproximação $\lambda$-limitada* se para todo subconjunto compacto $K$ e $\varepsilon > 0$, existe um operador linear contínuo de tipo finito $T\colon E \to E$ tal que $\|T\| \leq \lambda$ e $\|x - T(x)\| \leq \varepsilon$, para todo $x \in K$.

**Observação 1.1.2.** Vários espaços de Banach têm a propriedade da aproximação $\lambda$-limitada. Apenas para motivação, vamos citar alguns exemplos: Os espaços $\ell_p$, para $1 \leq p < +\infty$, o espaço $c_0$ e o espaço $C(K)$ das funções contínuas definidas num espaço topológico compacto têm a propriedade da aproximação 1-limitada. Mais geralmente, todo espaço de Banach com uma base de Schauder tem a propriedade da aproximação 1-limitada.

**Definição 1.1.3.** Seja $(\Omega, \Sigma, \mu)$ um espaço de medida finita. Um espaço de Banach $F$ tem a propriedade de Radon-Nikodým com respeito a $(\Omega, \Sigma, \mu)$ se para cada medida vetorial $\mu$-contínua $G : \Sigma \to F$ de variação limitada existe $g \in L_1(\mu, F)$ tal que

$$G(A) = \int_A g \, d\mu, \quad \text{para todo} \quad A \in \Sigma.$$

Um espaço de Banach $F$ tem a propriedade de Radon-Nikodým se $F$ tem a propriedade de Radon-Nikodým com respeito a todo espaço de medida finita.

Para a teoria sobre os espaços de Banach com a propriedade Radon-Nikodým veja o livro [13, p. 61], onde podemos encontrar o seguinte Corolário obtido por Phillips.

**Corolário 1.1.4.** [*Phillips*]. *Espaços de Banach reflexivos tem a propriedade de Radon-Nikodým.*

**Observação 1.1.5.** O espaço de Banach $c_0$ não têm a propriedade de Radon-Nikodým, veja [13, p. 76].

## 1.2 Polinômios Aproximáveis e Nucleares

Nesta seção vamos apresentar importantes definições relativas a aplicações multilineares e polinômios homogêneos, que serão utilizadas ao longo de todo o trabalho. Apresentaremos também alguns resultados que serão de grande importância nas demonstrações dos próximos capítulos. Nesta seção introduzimos os polinômios homogêneos com valores vetoriais nucleares e apresentamos alguns resultados obtidos por R. Alencar em [1, 2] . Se $E$ e $F$ são espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$, denotamos por $\mathcal{P}\left({}^{m}E; F\right)$ o espaço de Banach de todos os polinômios $m$-homogêneos contínuos de $E$ em $F$, com a norma

$$\|P\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\|,$$

para todo $P \in \mathcal{P}\left({}^mE; F\right)$. Se $F = \mathbb{K}$, denotamos $\mathcal{P}\left({}^mE; \mathbb{K}\right) = \mathcal{P}\left({}^mE\right)$. Para $m = 0$ definimos $\mathcal{P}\left({}^0E; F\right) = F$. Denotamos por $\mathcal{P}_f({}^mE; F)$ o espaço dos polinômios $m$-homogêneos contínuos de tipo finito.

Dizemos que um $P \in \mathcal{P}\left({}^mE; F\right)$ é *aproximável* se existe uma sequência $P_j \in \mathcal{P}_f\left({}^mE; F\right)$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} \|P - P_j\| = 0.$$

Denotamos por $\mathcal{P}_A\left({}^mE; F\right)$ o espaço dos polinômios homogêneos contínuos aproximáveis. Assim

$$\mathcal{P}_A\left({}^mE; F\right) = \overline{\mathcal{P}_f\left({}^mE; F\right)}.$$

Em S. Dineen [14] estes polinômios são chamados de *tipo compacto*, mas em livros recentes são chamados de polinômios aproximáveis. Veja S. Dineen $[15, p.85]$.

Seja $\Sigma_m$ o conjunto de todas as permutações de $\{1, \ldots, m\}$. Denotamos por $\mathcal{L}({}^mE; F)$ o espaço de Banach de todas as aplicações $m$-lineares contínuas de $E^m$ em $F$, com a norma

$$\|A\| = \sup_{\|x_i\|\leq 1} \|A(x_1, \ldots, x_m)\|.$$

Dizemos que $A \in \mathcal{L}({}^mE; F)$ é *aplicação m-linear simétrica* se

$$A(x_1, \ldots, x_m) = A(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(m)}),$$

para todos $\sigma \in \Sigma_m$ e $x_1, \ldots, x_m \in E$. Escrevemos $x^m := (x, \overset{(m\ vezes)}{\cdots}, x)$. Denotamos por $\mathcal{L}^s({}^mE; F)$ o espaço de todas as aplicações $m$-lineares simétricas contínuas de $E \times \overset{(m)}{\cdots} \times E$ em $F$. Para cada $A \in \mathcal{L}({}^mE; F)$ seja $\hat{A} \in \mathcal{P}({}^mE; F)$ definido por $\hat{A}(x) = Ax^m$ para cada $x \in E$. Temos os seguintes resultados:

**Teorema 1.2.1.** Seja $A \in \mathcal{L}^s({}^mE; F)$. Então para todos $x_o, x_1, \ldots, x_m \in E$, temos a fórmula de polarização:

$$A(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ 1\leq j\leq m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m A(x_o + \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_m x_m)^m.$$

*Demonstração.* Ver J. Mujica [29, Teorema 1.10]. □

**Teorema 1.2.2.** Para cada $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$ existe uma única aplicação $m$-linear $\check{P} \in \mathcal{L}^s(^mE;F)$ tal que $P(x) = \check{P}x^m$ para cada $x \in E$. E valem as desigualdades

$$\|P\| \leq \|\check{P}\| \leq \frac{m^m}{m!}\|P\|.$$

*Demonstração.* Ver J. Mujica [29, Teorema 2.2]. □

**Definição 1.2.3.** Uma aplicação $A \in \mathcal{L}(^mE;F)$ é dita nuclear se existem seqüências limitadas $(x'_{ji})_{i=1}^{\infty} \subset E'$ $(1 \leq j \leq m)$ e $(y_i)_{i=1}^{\infty} \subset F$ com

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x'_{1i}\| \cdots \|x'_{mi}\| \|y_i\| < \infty \tag{1.1}$$

tais que

$$A(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^{\infty} x'_{1i}(x_1) \cdots x'_{mi}(x_m) y_i \quad (x_j \in E, 1 \leq j \leq m). \tag{1.2}$$

Denotamos por $\mathcal{L}_N(^mE;F)$ o espaço de Banach de todas as aplicações $m$-lineares nucleares $A \in \mathcal{L}(^mE;F)$ dotado da norma nuclear

$$\|A\|_N := \inf \sum_{i=1}^{\infty} \|x'_{1i}\| \cdots \|x'_{mi}\| \|y_i\|,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas seqüências $(x'_{ji})_{i=1}^{\infty} \subset E'$ $(1 \leq j \leq m)$ e $(y_i)_{i=1}^{\infty} \subset F$ satisfazendo (1.1) e (1.2).

Similarmente definimos um polinômio $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$ como sendo nuclear se podemos escrever $P$ na forma

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x'_i(x)^m y_i \tag{1.3}$$

onde $(x'_i)_{i=1}^{\infty} \subset E'$ e $(y_i)_{i=1}^{\infty} \subset F$ são seqüências limitadas tais que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x'_i\|^m \|y_i\| < \infty. \tag{1.4}$$

Denotamos por $\mathcal{P}_N(^mE;F)$ o espaço de Banach de todos os polinômios $m$-homogêneos nucleares de $E$ em $F$, dotado da norma nuclear

$$\|P\|_N := \inf \sum_{i=1}^{\infty} \|x'_i\|^m \|y_i\|,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as seqüências $(x_i')_{i=1}^{\infty} \subset E'$ e $(y_i)_{i=1}^{\infty} \subset F$ que satisfazem (1.3) e (1.4). Denotamos por $\mathcal{L}_N(E;F)$ o espaço de todos os operadores nucleares de $E$ em $F$. Quando $m = 0$ definimos $\mathcal{P}_N(^0E;F) = F$.

Temos também uma importante relação entre $P \in \mathcal{P}_N(^mE;F)$ e $\check{P} \in \mathcal{L}_N^s(^mE;F)$.

**Proposição 1.2.4.** Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$ é nuclear se e somente se a aplicação $m$-linear $\check{P} \in \mathcal{L}^s(^mE;F)$ é nuclear. Neste caso temos $\|\check{P}\|_N \leq \|P\|_N \leq \frac{m^m}{m!}\|\check{P}\|_N$.

*Demonstração.* Ver R. Alencar [2, Proposição 2] . □

## 1.3 Polinômios Integrais

Nesta seção apresentamos definições e resultados sobre as aplicações $m$-lineares e polinômios integrais introduzidos por R. Cilia e J. Gutiérrez em [8] e I. Villanueva em [35]. Também apresentamos resultados sobre as aplicações $m$-lineares e polinômios Pietsch-integrais com valores vetoriais obtidos por R. Alencar em [1, 2].

R. Alencar em [1, 2] introduziu a seguinte definição de aplicações $m$-lineares e polinômios Pietsch-integrais envolvendo medidas a valores vetoriais:

**Definição 1.3.1.** Uma aplicação $A \in \mathcal{L}(^mE;F)$ é dita Pietsch-integral se existe uma medida vetorial de Borel $G$ regular a valores em $F$, de variação limitada, no produto $B_{E'}^m = B_{E'} \times \overset{m}{\cdots} \times B_{E'}$ dotado com a topologia fraca-estrela, tal que

$$A(x_1, \ldots, x_m) = \int_{B_{E'}^m} x_1'(x_1) \cdots x_m'(x_m) \, dG(x_1', \ldots, x_m') \tag{1.5}$$

para todo $(x_1, \ldots, x_m) \in E \times \overset{m}{\cdots} \times E$.

Denotamos por $\mathcal{L}_{PI}(^mE;F)$ o espaço de Banach de todas as aplicações $m$-lineares Pietsch-integrais $A \in \mathcal{L}(^mE;F)$, dotado da norma Pietsch-integral

$$\|A\|_{PI} := \inf |G|(B_{E'}^m)$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as medidas vetoriais $G$ satisfazendo (1.5). $|G|$ é variação de $G$.

Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$ é dito Pietsch-integral se $P$ pode ser escrito da forma

$$P(x) = \int_{B_{E'}} [x'(x)]^m \, dG(x') \qquad \text{para todo } x \in E, \tag{1.6}$$

onde $G$ é uma medida vetorial de Borel regular a valores em $F$, de variação limitada, definida na $B_{E'}$ com a topologia fraca-estrela.

Denotamos por $\mathcal{P}_{PI}(^m E; F)$ o espaço de Banach de todas os polinômios Pietsch-integrais dotado com a norma Pietsch-integral

$$\|P\|_{PI} = \inf |G|(B_{E'}),$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as medidas vetoriais $G$ satisfazendo (1.6). Denotamos por $\mathcal{L}_{PI}(E; F)$ o espaço de todos os operadores Pietsch-integrais de $E$ em $F$. Quando $m = 0$ definimos $\mathcal{P}_{PI}(^0 E; F) = F$.

**Proposição 1.3.2.** Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ é Pietsch-integral se e somente se a aplicação $m$-linear $\check{P} \in \mathcal{L}^s(^m E; F)$ é Pietsch-integral. Neste caso temos $\|\check{P}\|_{PI} \leq \|P\|_{PI} \leq \frac{m^m}{m!}\|\check{P}\|_{PI}$.

*Demonstração.* Ver R. Alencar [2, Proposição 2]. □

Seguindo I. Villanueva [35] vamos definir aplicações multilineares e polinômios homogêneos Grothendieck-integrais usando medidas vetoriais.

**Definição 1.3.3.** Uma aplicação $A \in \mathcal{L}(^m E; F)$ é dita ser Grothendieck-integral se existe uma medida vetorial de Borel $G$ regular de variação limitada a valores em $F''$ no produto $B_{E'}^m = B_{E'} \times \overset{m}{\cdots} \times B_{E'}$ dotado com a topologia fraca-estrela, tal que

$$A(x_1, \dots, x_m) = \int_{B_{E'}^m} x_1'(x_1) \cdots x_m'(x_m) \, dG(x_1', \dots, x_m') \tag{1.7}$$

para todo $(x_1, \dots, x_m) \in E \times \overset{m}{\cdots} \times E$.

Denotamos por $\mathcal{L}_{GI}(^m E; F)$ o espaço de Banach de todas as aplicações Grothendieck-integrais de $E$ em $F$, dotado da norma

$$\|A\|_{GI} := \inf |G|(B_{E'}^m)$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as medidas vetoriais $G$ satisfazendo (1.7).

Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ é dito Grothendieck-integral se $P$ pode ser escrito na forma

$$P(x) = \int_{B_{E'}} [x'(x)]^m \, dG(x') \qquad \text{para todo } x \in E, \tag{1.8}$$

onde $G$ é uma medida vetorial de Borel regular a valores em $F''$, de variação limitada, definida na $B_{E'}$ com a topologia fraca-estrela.

Denotamos por $\mathcal{P}_{GI}(^mE;F)$ o espaço de Banach de todas os polinômios Grothendieck-integrais de $E$ em $F$, dotado com a norma

$$\|P\|_{GI} = \inf |G|(B_{E'}),$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as medidas vetoriais $G$ satisfazendo (1.8). Denotamos por $\mathcal{L}_{GI}(E;F)$ o espaço de todos os operadores Grothendieck-integrais de $E$ em $F$. Quando $m = 0$ definimos $\mathcal{P}_{GI}(^0E;F) = F$.

**Observação 1.3.4.** Claramente, como no caso linear, cada aplicação $m$-linear Pietsch-integral [ Definição 1.3.1 ] é Grothendieck-integral, e $\|A\|_{GI} \leq \|A\|_{PI}$; além disso, se $F$ é complementado no seu bidual, então, a classe das aplicações Grothendieck-integrais e Pietsch-integrais são idênticas com normas idênticas.

**Proposição 1.3.5.** Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$ é Grothendieck-integral se e somente se a aplicação $m$-linear $\check{P} \in \mathcal{L}^s(^mE;F)$ é Grothendieck-integral. Neste caso temos

$$\|\check{P}\|_{GI} \leq \|P\|_{GI} \leq \frac{m^m}{m!}\|\check{P}\|_{GI}.$$

*Demonstração.* Ver [8, Proposição 2.4]. □

Usaremos a notação $\bigotimes^m E := E\otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes E$ para o $m$-produto tensorial de $E$, $\bigotimes_\varepsilon^m E := E\otimes_\varepsilon \overset{(m)}{\cdots} \otimes_\varepsilon E$ para o $m$-produto tensorial injetivo de $E$, e $\bigotimes_\pi^m E$ para o $m$-produto tensorial projetivo de $E$. $\bigotimes_s^m E := E\otimes_s \overset{(m)}{\cdots} \otimes_s E$ denota o $m$-produto tensorial simétrico de $E$, isto é o conjunto de todos os elementos $u \in \bigotimes^m E$ da forma

$$u = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x_j \quad (n \in \mathbb{N},\ \lambda_j \in \mathbb{K},\ x_j \in E,\ 1 \leq j \leq n).$$

$\bigotimes_{\varepsilon,s}^m E$ denota a aderência de $\bigotimes_s^m E$ em $\bigotimes_\varepsilon^m E$. Analogamente $\bigotimes_{\pi,s}^m E$ é a aderência de $\bigotimes_s^m E$ em $\bigotimes_\pi^m E$. Para a teoria de produto tensorial indicamos [13] e [20].

Se $A \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_m;F)$, denotamos por $L_A$ a linearização de $T$, que é o operador linear $L_A : E_1 \otimes \cdots \otimes E_m \to F$ dado por

$$L_A\left(\sum_{j=1}^{n} x_{1j} \otimes \cdots \otimes x_{mj}\right) := \sum_{j=1}^{n} A(x_{1j},\ldots,x_{mj})$$

para todo $x_{kj} \in E_k$ $(1 \leq k \leq m\ ,\ 1 \leq j \leq n)$.

**Proposição 1.3.6.** Dada $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$, as seguintes condições são equivalentes:

$(a)$ $A$ é Grothendieck-integral.

$(b)$ Existe uma constante $C \geq 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e toda família $(x_{ji})_{i=1}^n \subset E$ $(1 \leq j \leq m)$ e $(y_i')_{i=1}^n \subset F'$ temos

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \langle A(x_{1i}, \ldots, x_{mi}), y_i' \rangle \right| \leq C \sup_{\substack{x_j' \in B_{E'} \\ 1 \leq j \leq m}} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_1'(x_{1i}) \cdots x_m'(x_{mi}) y_i' \right\|_{F'}. \tag{1.9}$$

Temos que

$$\|A\|_{GI} = \inf C$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as constantes $C \geq 0$ que satisfazem (1.9).

$(c)$ $L_A \colon E_1 \otimes_\varepsilon \cdots \otimes_\varepsilon E_m \to F$ está bem definido e é um operador Grothendieck-integral. Neste caso $\|A\|_{GI} = \|L_A\|_{GI}$.

*Demonstração.* Ver I. Villanueva [35, Proposição 2.6] e R. Cilia e J. Gutiérrez [8, Proposição 2.2]. □

Seja $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$, denotamos por $L_P$ a linearização de $P$, que é um operador linear $L_P : \bigotimes_s^m E \to F$ dado por

$$L_P \left( \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i)$$

para todo $\lambda_i \in \mathbb{K},\ x_i \in E$ $(1 \leq i \leq n)$.

**Proposição 1.3.7.** Dado $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$, as seguintes condições são equivalentes:

$(a)$ $P$ é Grothendieck-integral.

$(b)$ Existe uma constante $C \geq 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ e toda família $(x_i)_{i=1}^n \subset E$ e $(y_i')_{i=1}^n \subset F'$ temos

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \langle P(x_i), y_i' \rangle \right| \leq C \sup_{x' \in B_{E'}} \left\| \sum_{i=1}^{n} [x'(x_i)]^m y_i' \right\|_{F'}. \tag{1.10}$$

Temos que

$$\|P\|_{GI} = \inf C$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as constantes $C \geq 0$ que satisfazem (1.10).

$(c)$ $L_P : \bigotimes_{\varepsilon,s}^m E \to F$ está bem definido e é um operador Grothendieck-integral. Neste caso $\|L_P\|_{GI} \leq \|P\|_{GI} \leq \frac{m^m}{m!}\|L_P\|_{GI}$.

O resultado $(a) \Leftrightarrow (c)$ continua verdadeiro se trocarmos **Grothendieck-integral** por **Pietsch-integral**.

*Demonstração.* Ver I. Villanueva [35, Corolário 2.8] e R. Cilia e J. Gutiérrez [8, Proposição 2.5]. □

Na verdade R. Cilia e J. Gutiérrez [8] usaram a condição $(b)$ da Proposição 1.3.6 para definir aplicações multilineares Grothendieck-integrais, e a condição $(b)$ da Proposição 1.3.7 para definir polinômios homogêneos Grothendieck-integrais. No nosso trabalho preferimos adotar a definição de I. Villanueva [35] por sua analogia com a definição de S. Dineen [14] e R. Alencar [1, 2] de aplicações multilineares e polinômios homogêneos Pietsch-integrais.

# CAPÍTULO 2

# TIPOS DE HOLOMORFIA E FUNÇÕES INTEIRAS DE TIPO LIMITADO

Neste capítulo motivados pela definição de tipo de holomorfia definida por L. Nachbin [33] e por resultados de C. Gupta [21], introduzimos e estudamos o subespaço vetorial $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ de $\mathcal{H}(E;F)$ de todas as funções inteiras $\Theta$-holomorfas de tipo limitado de $E$ em $F$.

Nas seção 2.2 provamos que as classes $\mathcal{P}_A(^mE;F)$, $\mathcal{P}_N(^mE;F)$, $\mathcal{P}_{PI}(^mE;F)$ e $\mathcal{P}_{GI}(^mE;F)$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$, são tipos de holomorfia no sentido de L. Nachbin [33]. E também introduzimos as funções inteiras $\Theta$-holomorfas de tipo limitado de $E$ em $F$.

Na Seção 2.4 munimos o espaço $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ das funções inteiras $\Theta$-holomorfas de tipo limitado com uma família de seminormas e em seguida mostramos que este espaço é de Fréchet.

## 2.1 Funções Holomorfas

**Definição 2.1.1.** Sejam $E$, $F$ espaços de Banach complexos e $U$ um subconjunto aberto de $E$. Uma função $f\colon U \to F$ é dita *holomorfa* em $U$ se para cada $a \in U$ existem uma bola

$B(a;r) \subset U$ e uma seqüência de polinômios $P_m \in \mathcal{P}(^mE;F)$ tais que

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a)$$

uniformemente para $x \in B(a;r)$.

Denotamos por $\mathcal{H}(U;F)$ o espaço vetorial de todas as funções holomorfas de $U$ em $F$. Quando $F = \mathbb{C}$ então escrevemos $\mathcal{H}(U;\mathbb{C}) = \mathcal{H}(U)$. A seqüência $(P_m)_{m=0}^{\infty}$ é determinada de maneira única por $f$ e $a$ (ver[29]). Se $P_m \in \mathcal{P}(^mE;F)$ é o polinômio correspondente a $A_m \in \mathcal{L}^s(^mE;F)$ por $P_m = \hat{A}_m$ para cada $m \in \mathbb{N}_0$, fixemos as notações

$$d^m f(a) = m!A_m \qquad \text{e} \qquad \hat{d}^m f(a) = m!P_m$$

de modo a obter as aplicações diferenciais

$$d^m f\colon a \in U \to d^m f(a) \in \mathcal{L}^s(^mE;F) \qquad \text{e} \qquad \hat{d}^m f\colon a \in U \to \hat{d}^m f(a) \in \mathcal{P}(^mE;F)$$

e os operadores diferenciais

$$d^m\colon f \in \mathcal{H}(U;F) \to d^m f \in \mathcal{H}(U;\mathcal{L}^s(^mE;F))$$

e

$$\hat{d}^m\colon f \in \mathcal{H}(U;F) \to \hat{d}^m f \in \mathcal{H}(U;\mathcal{P}(^mE;F))$$

de ordens $m = 0, 1, 2, \ldots$

**Definição 2.1.2.** Uma aplicação $f\colon E \to F$ é dita uma função *inteira* se $f$ é holomorfa em todo $E$. Denotamos o espaço vetorial de todas as funções inteiras de $E$ em $F$ por $\mathcal{H}(E;F)$.

**Exemplo 2.1.3.** $\mathcal{P}(^mE;F) \subset \mathcal{H}(E;F)$.

*Demonstração.* Seja $\check{P} \in \mathcal{L}^s(^mE;F)$ tal que $P(x) = \check{P}(x, \overset{m}{\ldots}, x)$ para cada $x \in E$. Dados $a$, $x \in E$, pelo Formula do Binômio de Newton temos que

$$P(x) = \check{P}(x, \ldots, x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} \check{P}(a, \overset{(m-k)}{\ldots}, a, x-a, \overset{(k)}{\ldots}, x-a)\ .$$

Então $P$ é holomorfa em $E$ e

$$\frac{1}{k!}\hat{d}^k P(a)(t) = \frac{m!}{k!(m-k)!}\check{P}(a, \overset{(m-k)}{\ldots}, a, t, \overset{(k)}{\ldots}, t) \text{ se } \quad k \leq m$$
$$\frac{1}{k!}\hat{d}^k P(a)(t) = 0 \qquad \text{se } k > m.$$

□

## 2.2 Tipos de Holomorfia

O conceito de tipo de holomorfia $\Theta$ de $E$ em $F$ foi introduzido por L. Nachbin em [33, §9].

**Definição 2.2.1.** Um *tipo de holomorfia* $\Theta$ de $E$ em $F$ é uma seqüência de espaços de Banach $(\mathcal{P}_\Theta(^mE;F), \|\cdot\|_\Theta)_{m=0}^\infty$ para a qual são válidas as seguintes afirmações:

(1) Cada $\mathcal{P}_\Theta(^mE;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^mE;F)$.

(2) $\mathcal{P}_\Theta(^0E;F)$ coincide com $\mathcal{P}(^0E;F) = F$ como um espaço vetorial normado.

(3) Existe um número real $\sigma \geq 1$ tal que, dados $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}_0$, $k \leq m$, $a \in E$, e $P \in \mathcal{P}_\Theta(^mE;F)$, temos que
$$\hat{d}^k P(a) \in \mathcal{P}_\Theta(^kE;F),$$
$$\|\frac{1}{k!}\hat{d}^k P(a)\|_\Theta \leq \sigma^m \cdot \|P\|_\Theta \cdot \|a\|^{m-k}.$$

Temos do Exemplo 2.1.3 e da condição (3) que para cada $P \in \mathcal{P}_\Theta(^mE;F)$ e $k \leq m$ temos que $\widehat{\check{P}a^{m-k}} = \frac{(m-k)!}{m!}\hat{d}^k P(a) \in \mathcal{P}_\Theta(^kE;F)$ e
$$\|\widehat{\check{P}a^{m-k}}\|_\Theta \leq \frac{\sigma^m (m-k)!k!}{m!}\|P\|_\Theta \cdot \|a\|^{m-k}.$$

É claro que a seqüência $(\mathcal{P}(^mE;F))_{m=0}^\infty$ é um tipo de holomorfia. Agora veremos que as seqüências $(\mathcal{P}_A(^mE;F))_{m=0}^\infty$, $(\mathcal{P}_N(^mE;F))_{m=0}^\infty$, $(\mathcal{P}_{PI}(^mE;F))_{m=0}^\infty$ e $(\mathcal{P}_{GI}(^mE;F))_{m=0}^\infty$ também são tipos de holomorfia. Faremos uma observação antes.

**Observação 2.2.2.**
$$\begin{aligned} 2^{m+j} = (1+1)^{m+j} &= \sum_{k=1}^{m+j} \frac{(m+j)!}{k!(m+j-k)!} 1^{m+j-k} \cdot 1^k \\ &\geq \frac{(m+j)!}{k!(m+j-k)!} \end{aligned}$$

*e, se $k = j$, tem-se*
$$2^{m+k} \geq \frac{(m+k)!}{k!m!}. \tag{2.1}$$

*Se $j = 0$, tem-se*
$$2^m \geq \frac{m!}{k!(m-k)!}. \tag{2.2}$$

**Exemplo 2.2.3.** A seqüência $(\mathcal{P}_A(^mE;F), \|\cdot\|)_{m=0}^\infty$ é um tipo de holomorfia de $E$ em $F$. Além disso,

$$\|\frac{1}{k!}\hat{d}^k P(a)\| \leq (2e)^m \cdot \|P\| \cdot \|a\|^{m-k}$$

para todo $a \in E$, $k \leq m$ e $P \in \mathcal{P}_A(^mE;F)$.

**Exemplo 2.2.4.** A seqüência $(\mathcal{P}_N(^mE;F), \|\cdot\|_N)_{m=0}^\infty$ é um tipo de holomorfia de $E$ em $F$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|\frac{1}{k!}\hat{d}^k P(a)\|_N &\leq \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \|P\|_N \cdot \|a\|^{m-k} \\ &\leq 2^m \cdot \|P\|_N \cdot \|a\|^{m-k} \end{aligned}$$

para todo $a \in E$, $k \leq m$ e $P \in \mathcal{P}_N(^mE;F)$.

*Demonstração.* É claro que $\mathcal{P}_N(^mE;F)$ para cada $m \in \mathbb{N}_0$ é um espaço de Banach e (1) e (2) da Definição 2.2.1 seguem facilmente.

(3) Sejam $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}_0$, $k \leq m$, $a \in E$, e $P \in \mathcal{P}_N(^mE;F)$. Dado $\varepsilon > 0$, como $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$ é um polinômio nuclear então podemos escrever na forma

$$P(x) = \sum_{i=1}^\infty x_i'(x)^m y_i \quad \text{para todo } x \in E, \tag{2.3}$$

onde $(x_i')_{i=1}^\infty \subset E'$ e $(y_i)_{i=1}^\infty \subset F$ são seqüências limitadas tais que

$$\sum_{i=1}^\infty \|x_i'\|^m \|y_i\| \leq \|P\|_N + \varepsilon. \tag{2.4}$$

Seja $\check{P} \in \mathcal{L}^s(^mE;F)$ tal que $P(x) = \check{P}(x, \overset{m}{\ldots}, x)$ para cada $x \in E$. Então pela fórmula de polarização e usando (2.3), temos que

$$\begin{aligned} \check{P}(x_1, \ldots, x_m) &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ 1 \leq j \leq m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m P(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m) \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ 1 \leq j \leq m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m \sum_{i=1}^\infty x_i'(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)^m y_i \\ &= \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ 1 \leq j \leq m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m x_i'(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)^m y_i \\ &= \sum_{i=1}^\infty x_i'(x_1) \cdots x_i'(x_m) y_i \qquad \text{para todo } x_1, \ldots, x_m \in E. \end{aligned}$$

Pelo Exemplo 2.1.3, se $k \leq m$ temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k!}\hat{d}^k P(a)(t) &= \frac{m!}{k!(m-k)!}\check{P}(a, \overset{(m-k)}{\ldots}, a, t, \overset{(k)}{\ldots}, t) \\
&= \frac{m!}{k!(m-k)!}\sum_{i=1}^{\infty}[x_i'(a)]^{m-k} \cdot [x_i'(t)]^k \cdot y_i \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}[x_i'(t)]^k \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot [x_i'(a)]^{m-k} \cdot y_i.
\end{aligned}$$

Logo, para cada $a \in E$ e $k \leq m$, $\hat{d}^k P(a) \in \mathcal{P}_N({}^k E; F)$ e

$$\begin{aligned}
\|\frac{1}{k!}\hat{d}^k P(a)\|_N &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\|x_i'\|^k \cdot \|\frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot [x_i'(a)]^{m-k} \cdot y_i\| \\
\text{por (2.4)} &\leq \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot (\|P\|_N + \varepsilon) \cdot \|a\|^{m-k} \\
\text{por (2.2)} &\leq 2^m \cdot (\|P\|_N + \varepsilon) \cdot \|a\|^{m-k}.
\end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.2.5.** A seqüência $(\mathcal{P}_{PI}({}^m E; F), \|\cdot\|_{PI})_{m=0}^{\infty}$ é um tipo de holomorfia de $E$ em $F$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\|\frac{1}{k!}\hat{d}^k P(a)\|_{PI} &\leq \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \|P\|_{PI} \cdot \|a\|^{m-k} \\
&\leq 2^m \cdot \|P\|_{PI} \cdot \|a\|^{m-k}
\end{aligned}$$

para todo $a \in E$, $k \leq m$ e $P \in \mathcal{P}_{PI}({}^m E; F)$.

*Demonstração.* É claro que $\mathcal{P}_{PI}({}^m E; F)$ para cada $m \in \mathbb{N}_0$ é um espaço de Banach (1) e (2) da Definição 2.2.1 seguem naturalmente.

(3) Sejam $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}_0$, $k \leq m$, $a \in E$, e $P \in \mathcal{P}_{PI}({}^m E; F)$. Dado, $\delta > 0$ como $P \in \mathcal{P}({}^m E; F)$ é um polinômio Pietsch-integral, então podemos escrevê-lo sob a forma

$$P(x) = \int_{B_{E'}} [x'(x)]^m \, dG(x') \qquad \text{para todo } x \in E,$$

onde $G$ é uma medida vetorial de Borel regular a valores em $F$, de variação limitada, definida na $B_{E'}$ com a topologia fraca-estrela, com $|G|(B_{E'}) \leq \|P\|_{PI} + \delta$. Seja $\check{P} \in \mathcal{L}^s({}^m E; F)$ tal que $P(x) = \check{P}(x, \overset{m}{\ldots}, x)$ para cada $x \in E$. Assim, pela fórmula de polarização,

$$\check{P}(x_1, \ldots, x_m) = \int_{B_{E'}} x'(x_1) \ldots x'(x_m) \, dG(x') \qquad x_1, \ldots, x_m \in E.$$

E, pelo Exemplo 2.1.3, se $k \leq m$ e $a \neq 0$ temos que

$$\begin{aligned}
\hat{d}^k P(a)(t) &= \frac{m!}{(m-k)!} \check{P}(a, \overset{(m-k)}{\ldots}, a, t, \overset{(k)}{\ldots}, t) \\
&= \frac{m!}{(m-k)!} \int_{B_{E'}} [x'(a)]^{m-k} \cdot [x'(t)]^k \, dG(x').
\end{aligned}$$

Seja $R_a \colon \bigotimes_{\varepsilon,s}^k E \to C(B_{E'})$ dado por $R_a(x \otimes \ldots \otimes x) = (\hat{x})_a^k$, onde

$$(\hat{x})_a^k(x') = \frac{m!}{(m-k)!} \cdot [x'(a)]^{m-k} \cdot [x'(x)]^k \text{ para } \ x' \in B_{E'}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\|R_a\| &= \sup_{\|u\|_\varepsilon \leq 1} \|R_a(u)\|_{C(B_{E'})} \\
&= \sup_{\|u\|_\varepsilon \leq 1} \sup_{x' \in B_{E'}} |R_a(u)(x')| \\
&= \frac{m!}{(m-k)!} \sup_{\|u\|_\varepsilon \leq 1} \sup_{x' \in B_{E'}} \left\{ \left| \sum_{i=1}^{j} \lambda_i [x'(a)]^{m-k} \cdot [x'(x_i)]^k \right| \right\} \\
&\leq \frac{m!}{(m-k)!} \cdot \|a\|^{m-k}, \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

onde $u = \sum_{i=1}^{j} \lambda_i x_i \otimes \ldots \otimes x_i$. Defina $V \colon C(B_{E'}) \to F$ por

$$V(f) = \int_{B_{E'}} f \, dG.$$

Então por [13, Teorema VI 3.3 e VI 3.12], $V$ é Pietsch-integral com

$$\|V\|_{PI} = |G|(B_{E'}). \qquad (2.6)$$

Se $L_{\hat{d}^k P(a)}$ é a linearização de $\hat{d}^k P(a)$, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_{\varepsilon,s}^k E \arrow[rr, "L_{\hat{d}^k P(a)}"] \arrow[dr, "R_a"'] & & F \\
& C(B_{E'}) \arrow[ur, "V"'] &
\end{tikzcd}$$

Esta fatoração mostra que $L_{\hat{d}^k P(a)}$ é Pietsch-integral, com

$$\begin{aligned}
\|L_{\hat{d}^k P(a)}\|_{PI} &= \|V \circ R_a\|_{PI} \leq \|V\|_{PI} \cdot \|R_a\| \\
\text{Por (2.5) e (2.6)} \quad &\leq |G|(B_{E'}) \cdot \frac{m!}{(m-k)!} \cdot \|a\|^{m-k} \\
&\leq (\|P\|_{PI} + \delta) \cdot \frac{m!}{(m-k)!} \cdot \|a\|^{m-k}.
\end{aligned}$$

Por [5, Proposição 2.10], temos que $\hat{d}^k P(a) \in \mathcal{P}_{PI}({}^kE;F)$ para cada $a \in E$ e $k = 0, 1, \ldots,\ k \leq m$, com

$$\begin{aligned}
\|\frac{1}{k!}\hat{d}^k P(a)\|_{PI} &= \|\frac{1}{k!}L_{\hat{d}^k P(a)}\|_{PI} \\
&\leq \frac{m!}{k!(m-k)!}\cdot(\|P\|_{PI}+\delta)\cdot\|a\|^{m-k} \\
\text{por (2.2)} &\leq 2^m\cdot(\|P\|_{PI}+\delta)\cdot\|a\|^{m-k}.
\end{aligned}$$

$\square$

**Exemplo 2.2.6.** A seqüência $(\mathcal{P}_{GI}({}^mE;F), \|\cdot\|_{GI})_{m=0}^{\infty}$ é um tipo de holomorfia de $E$ em $F$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\|\frac{1}{k!}\hat{d}^k P(a)\|_{GI} &\leq \frac{m!}{k!(m-k)!}\cdot e^m\cdot\|P\|_{GI}\|a\|^{m-k} \\
&\leq (2e)^m\cdot\|P\|_{GI}\cdot\|a\|^{m-k}
\end{aligned}$$

para todo $a \in E$, $k \leq m$ e $P \in \mathcal{P}_{GI}({}^mE;F)$.

*Demonstração.* (3) Sejam $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}_0$, $k \leq m$, $a \in E$, e $P \in \mathcal{P}_{GI}({}^mE;F)$. Queremos provar $\hat{d}^k P(a) \in \mathcal{P}_{GI}({}^kE;F)$. Pela Proposição 1.3.7 provar que $\hat{d}^k P(a) \in \mathcal{P}_{GI}({}^kE;F)$ é equivalente a existir uma constante $C \geq 0$ tal que para cada $j \in \mathbb{N}$ e toda família $(x_i)_{i=1}^j \subset E$ e $(y_i')_{i=1}^j \subset F'$ temos

$$\left|\sum_{i=1}^{j}\left\langle\frac{1}{k!}\hat{d}^k P(a)(x_i), y_i'\right\rangle\right| \leq C\sup_{x'\in B_E'}\left\|\sum_{i=1}^{j}[x'(x_i)]^k y_i'\right\|_{F'}.$$

Como $P \in \mathcal{P}_{GI}({}^mE;F)$ temos que $\check{P} \in \mathcal{L}_{GI}({}^mE;F)$. Utilizando o Exemplo 2.1.3 e a Proposição 1.3.6, temos

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{j}\left\langle\frac{1}{k!}\hat{d}^k P(a)(x_i), y_i'\right\rangle\right| &= \left|\sum_{i=1}^{j}\left\langle\frac{m!}{k!(m-k)!}\check{P}(a,\overset{(m-k)}{\ldots},a,x_i,\overset{(k)}{\ldots},x_i), y_i'\right\rangle\right| \\
&= \frac{m!}{k!(m-k)!}\left|\sum_{i=1}^{j}\left\langle\check{P}(a,\overset{(m-k)}{\ldots},a,x_i,\overset{(k)}{\ldots},x_i), y_i'\right\rangle\right| \\
&\leq 2^m\cdot\|\check{P}\|_{GI}\sup_{\substack{x_r'\in B_{E'}\\ 1\leq r\leq m}}\left\|\sum_{i=1}^{j}x_1'(a)\cdots x_{m-k}'(a)x_{m-k+1}'(x_i)\cdots x_m'(x_i)\cdot y_i'\right\|_{F'}.
\end{aligned}$$

O supremo acima é a norma usual da seguinte aplicação $m$-linear simétrica

$$(x'_1, \ldots, x'_m) \in E' \times \overset{(m)}{\cdots} \times E' \mapsto \sum_{i=1}^{j} x'_1(a) \ldots x'_{m-k}(a) \cdot x'_{m-k+1}(x_i) \cdots x'_m(x_i) y'_i \in F'.$$

Considerando o polinômio associado a aplicação acima e utilizando o Teorema 1.2.2 e [29, Exercício I.2.G], temos que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{j} \left\langle \frac{1}{k!} \check{d}^k P(a)(x_i), y'_i \right\rangle \right| &\leq 2^m \cdot \|\check{P}\|_{GI} \sup_{\substack{x'_r \in B_{E'} \\ 1 \leq r \leq m}} \left\| \sum_{i=1}^{j} x'_1(a) \cdots x'_{m-k}(a) x'_{m-k+1}(x_i) \cdots x'_m(x_i) \cdot y'_i \right\|_{F'} \\ &\leq 2^m \cdot \|P\|_{GI} \cdot \frac{m^m}{m!} \sup_{x' \in B_{E'}} \left\| \sum_{i=1}^{j} [x'(a)]^{m-k} \cdot [x'(x_i)]^k y'_i \right\|_{F'} \\ &\leq (2e)^m \cdot \|P\|_{GI} \cdot \|a\|^{m-k} \sup_{x' \in B'_E} \left\| \sum_{i=1}^{j} [x'(x_i)]^k y'_i \right\|_{F'}. \end{aligned}$$

Portanto pela Proposição 1.3.7, temos que $\hat{d}^k P(a) \in \mathcal{P}_{GI}({}^k E; F)$ para cada $a \in E$ e $k = 0, 1, \ldots,\ k \leq m$ e

$$\| \frac{1}{k!} \hat{d}^k P(a) \|_{GI} \leq (2e)^m \cdot \|P\|_{GI} \cdot \|a\|^{m-k}.$$

□

## 2.3 Funções Inteiras Θ-Holomorfas de Tipo Limitado

Em [33, §9], o autor demonstrou a seguinte proposição.

**Proposição 2.3.1.** Seja $(\mathcal{P}_\Theta({}^m E; F))_{m=0}^\infty$ um tipo de holomorfia de $E$ em $F$. A aplicação inclusão

$$\mathcal{P}_\Theta({}^m E; F) \subset \mathcal{P}({}^m E; F)$$

é contínua para cada $m \in \mathbb{N}_0$, e

$$\|P\| \leq \sigma^m \|P\|_\Theta.$$

**Definição 2.3.2.** Uma função inteira $f \in \mathcal{H}(E; F)$ é de tipo limitado se leva conjuntos limitados de $E$ em conjuntos limitados de $F$. Vamos indicar por $\mathcal{H}_b(E; F)$ a classe de tais aplicações.

**Observação 2.3.3.** Pode-se mostrar que $f \in \mathcal{H}_b(E;F)$ se, e somente se,

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(0)\|\right)^{\frac{1}{m}} = 0.$$

Motivados por esta observação introduzimos a seguinte definição.

**Definição 2.3.4.** Seja $(\mathcal{P}_\Theta({}^mE;F))_{m=0}^\infty$ um tipo de holomorfia de $E$ em $F$. Seja $f : E \to F$ uma função *inteira*, com série de Taylor em volta da origem dada por $f(x) = \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!}\hat{d}^m f(0)(x)$. Então $f$ é dita uma função inteira Θ-*holomorfa de tipo limitado* de $E$ em $F$ se

(*i*) $\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(0) \in \mathcal{P}_\Theta({}^mE;F)$ para todo $m = 0, 1 \ldots,$

(*ii*) $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(0)\|_\Theta\right)^{\frac{1}{m}} = 0.$

Denotamos por $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ o subespaço vetorial de $\mathcal{H}(E;F)$ de todas as funções inteiras Θ-holomorfas de tipo limitado de $E$ em $F$.

**Exemplo 2.3.5.** A seqüência de polinômios $m$-homogêneos com a norma usual $(\mathcal{P}({}^mE;F))_{m=0}^\infty$ é um tipo de holomorfia de $E$ em $F$. Denotaremos por $\mathcal{H}_{\|\cdot\|b}(E;F)$ o espaço das funções $\|\cdot\|$-holomorfas de tipo limitado de $E$ e $F$. Pela observação 2.3.3, temos que $\mathcal{H}_{\|\cdot\|b}(E;F) = \mathcal{H}_b(E;F)$. Pela Proposição 2.3.1, temos que $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F) \subset \mathcal{H}_b(E;F)$ para todo tipo de holomorfia Θ de $E$ em $F$.

**Exemplo 2.3.6.** Pelos Exemplos 2.2.3 e 2.2.4, temos que as seqüências $(\mathcal{P}_A({}^mE;F), \|\cdot\|)_{m=0}^\infty$ e $(\mathcal{P}_N({}^mE;F), \|\cdot\|_N)_{m=0}^\infty$ são tipos de holomorfia de $E$ em $F$. Denotaremos por $\mathcal{H}_{Ab}(E;F)$ e $\mathcal{H}_{Nb}(E;F)$ os subespaços de todas das funções inteiras aproximáveis e nucleares de tipo limitado de $E$ em $F$, respectivamente. O espaço $\mathcal{H}_{Nb}(E;F)$ foi introduzido por C. Gupta e L. Nachbin ( veja [21, Definição 4.6] ).

**Exemplo 2.3.7.** Pelos Exemplos 2.2.5 e 2.2.6, temos que as seqüências $(\mathcal{P}_{PI}({}^mE;F), \|\cdot\|_{PI})_{m=0}^\infty$ e $(\mathcal{P}_{GI}({}^mE;F), \|\cdot\|_{GI})_{m=0}^\infty$ são tipos de holomorfia de $E$ em $F$. Denotaremos por $\mathcal{H}_{PIb}(E;F)$ e $\mathcal{H}_{GIb}(E;F)$ os subespaços de todas as funções inteiras Pietsch-integrais e Grothendieck-integrais de tipo limitado de $E$ em $F$, respectivamente.

**Proposição 2.3.8.** Sejam $f \in \mathcal{H}(E;F)$, $S \in \mathcal{L}(F;Y)$ e $T \in \mathcal{L}(X;E)$. Se $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$, então $S \circ f \circ T \in \mathcal{H}_{\Theta b}(X;Y)$, onde $\Theta$ é $N$ ou $PI$ ou $GI$.

*Demonstração.* Como $\hat{d}^m f(0) \in \mathcal{P}_\Theta(^m E;F)$ $m \in \mathbb{N}$, temos que

$$\hat{d}^m (S \circ f \circ T)(0) = S \circ \hat{d}^m f(0) \circ T \in \mathcal{P}_\Theta(^m X;Y)$$

Além disso,

$$\|S \circ \hat{d}^m f(0) \circ T\|_\Theta \leq \|S\| \cdot \|\hat{d}^m f(0)\|_\Theta \cdot \|T\|^m.$$

Portanto $S \circ f \circ T \in \mathcal{H}_{\Theta b}(X;Y)$. □

**Proposição 2.3.9.** Se $(\mathcal{P}_\Theta(^m E;F))_{m=0}^\infty$ é um tipo de holomorfia de $E$ em $F$, então $\mathcal{P}_\Theta(^m E;F) \subset \mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$. Em particular, $\mathcal{P}_N(^m E;F) \subset \mathcal{H}_{Nb}(E;F)$, $\mathcal{P}_{PI}(^m E;F) \subset \mathcal{H}_{PIb}(E;F)$ e $\mathcal{P}_{GI}(^m E;F) \subset \mathcal{H}_{GIb}(E;F)$.

*Demonstração.* Seja $P \in \mathcal{P}_\Theta(^m E;F)$. Usando a condição (1) da Definição 2.2.1 e o Exemplo 2.1.3, temos que

$$P \in \mathcal{P}_\Theta(^m E;F) \subset \mathcal{P}(^m E;F) \subset \mathcal{H}(E;F),$$

bem como

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{d}^k P(0)(x)$$

com

$$\frac{1}{k!}\hat{d}^k P(0)(t) = \frac{m!}{k!(m-k)!} \check{P}(0, \overset{(m-k)}{\ldots}, 0, t, \overset{(k)}{\ldots}, t) = 0 \quad \text{se} \qquad k \neq m$$
$$\frac{1}{k!}\hat{d}^k P(0)(t) = P(t) \quad \text{se} \;\; k = m.$$

Portanto, $\hat{d}^k P(0) \in \mathcal{P}_\Theta(^k E;F)$ para todo $k$. E facilmente temos que

$$\lim_{k \to \infty} \left( \frac{1}{k!} \|\hat{d}^k P(0)\|_\Theta \right)^{\frac{1}{k}} = 0.$$

Portanto $P \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$.

□

A seguir enunciamos um resultado cuja demonstração pode ser vista em [29].

**Teorema 2.3.10.** [*29*, *Teorema I* 7.17]. Se $f \in \mathcal{H}(E;F)$, então $\frac{1}{m!}\hat{d}^m f \in \mathcal{H}(E;\mathcal{P}(^mE;F))$ e $\frac{1}{k!}\hat{d}^k\left(\frac{1}{m!}\hat{d}^m f\right)(a) = \frac{1}{m!}\hat{d}^m\left(\frac{1}{(m+k)!}\hat{d}^{m+k}f(a)\right)$ para todos $m,k \in \mathbb{N}_0$ e $a \in E$. Assim a série de Taylor para $\frac{1}{m!}\hat{d}^m f$ em volta da origem, no ponto $a$, é dada por

$$\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(a) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\hat{d}^m\left(\frac{1}{(m+k)!}\hat{d}^{m+k}f(0)\right)(a).$$

**Proposição 2.3.11.** Seja $f\colon E \to F$ uma função inteira. Então $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ se, e somente se,

(*i*) $\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(a) \in \mathcal{P}_\Theta(^mE;F)$ para todo $a \in E$ e $m \in \mathbb{N}_0$.

(*ii*) $\lim_{m\to\infty}\left(\|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(a)\|_\Theta\right)^{\frac{1}{m}} = 0$ para todo $a \in E$.

*Demonstração.* Obviamente (*i*) e (*ii*) são condições suficientes para $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$. Reciprocamente, dados $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ e $a \neq 0 \in E$, escolha $\varepsilon > 0$ com $\varepsilon \cdot \|a\| < 1$. Temos que $\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(0) \in \mathcal{P}_\Theta(^mE;F)$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$, bem como $\lim_{m\to\infty}(\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(0)\|_\Theta)^{\frac{1}{m}} = 0$. Seja $\sigma \geq 1$ da condição (3) da Definição 2.2.1. Como $\lim_{m\to\infty}(\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(0)\|_\Theta)^{\frac{1}{m}} = 0$, existe um $m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que

$$\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(0)\|_\Theta \leq \left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^m$$

para todo $m \geq m_0(\varepsilon)$.

Seja $C(\varepsilon) = \max\left\{\{\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(0)\|_\Theta \cdot \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^m \ \ / \ m < m_0(\varepsilon)\} \cup \{1\}\right\}$. Portanto

$$\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(0)\|_\Theta \leq C(\varepsilon)\cdot\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^m \tag{2.7}$$

para todo $m \in \mathbb{N}_0$. Mostremos (*i*). Seja $m \in \mathbb{N}_0$. Pelo Teorema 2.3.10, temos que

$$\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(a) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\hat{d}^m\left(\frac{1}{(m+k)!}\hat{d}^{m+k}f(0)\right)(a).$$

Como, por hipótese, $\frac{1}{(m+k)!}\hat{d}^{m+k}f(0) \in \mathcal{P}_\Theta(^{m+k}E;F)$ para todo $k$ usando a condição (3) da Definição 2.2.1, tem-se

$$\frac{1}{m!}\hat{d}^m\left(\frac{1}{(m+k)!}\hat{d}^{m+k}f(0)\right)(a) \in \mathcal{P}_\Theta(^mE;F),$$

bem como

$$\|\frac{1}{m!}\hat{d}^m\left(\frac{1}{(m+k)!}\hat{d}^{m+k}f(0)\right)(a)\|_\Theta \leq \sigma^{m+k}\cdot\|\frac{1}{(m+k)!}\hat{d}^{m+k}f(0)\|_\Theta\cdot\|a\|^k. \tag{2.8}$$

Agora temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(a)\|_\Theta &= \|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\hat{d}^m\left(\frac{1}{(m+k)!}\hat{d}^{m+k}f(0)\right)(a)\|_\Theta \\
\text{Por (2.8)} &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\sigma^{m+k}\cdot\|\frac{1}{(m+k)!}\hat{d}^{m+k}f(0)\|_\Theta\cdot\|a\|^k \\
\text{Por (2.7)} &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\sigma^{m+k}\cdot C(\varepsilon)\cdot\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^{m+k}\cdot\|a\|^k \\
&= C(\varepsilon)\cdot\frac{\varepsilon^m}{1-\varepsilon\cdot\|a\|}
\end{aligned}$$

onde $\varepsilon$ é tão pequeno que $\varepsilon\cdot\|a\| < 1$.

Isto então mostra que

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(a)\|_\Theta\right)^{\frac{1}{m}} \leq \lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt[m]{C(\varepsilon)}\cdot\varepsilon}{\sqrt[m]{1-\varepsilon\cdot\|a\|}} = \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ temos que $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(a)\|_\Theta\right)^{\frac{1}{m}} = 0$. Portanto isto prova $(i)$ e $(ii)$. □

## 2.4 Topologia no Espaço das Funções Inteiras Θ-Holomorfas de Tipo Limitado

No espaço $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ das funções inteiras Θ-holomorfas de tipo limitado, consideremos a seguinte família de seminormas:

$$f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E;F) \to \|f\|_{\Theta,\,\rho} = \sum_{m=o}^{\infty}\frac{\rho^m}{m!}\|\hat{d}^m f(0)\|_\Theta, \tag{2.9}$$

para cada $\rho > 0$.

A série acima converge para cada $\rho > 0$, pois

$$\lim_{m\to\infty}\left(\tfrac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(0)\|_\Theta\right)^{\frac{1}{m}} = 0.$$

$$f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E;F) \to \|f\|'_{\Theta,\,\rho} = \sum_{m=o}^{\infty}\frac{\rho^m}{m!}\sup_{\|a\|\leq\rho}\|\hat{d}^m f(a)\|_\Theta < \infty, \tag{2.10}$$

para cada $\rho > 0$.

Temos que

$$\sup_{\|a\|\leq\rho} \frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(a)\|_\Theta \leq \frac{C\cdot\varepsilon^m}{1-\varepsilon\rho} \tag{2.11}$$

para cada $m$ e $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon\rho < 1$, (isto segue facilmente da prova da Proposição 2.3.11), para $\rho > 0$. Isto garante a convergência da série acima.

**Proposição 2.4.1.** As famílias de seminormas, $\|f\|_{PI,\,\rho}$ e $\|f\|'_{PI,\,\rho}$ para $f \in \mathcal{H}_{PIb}(E;F)$ são equivalentes em $\mathcal{H}_{PIb}(E;F)$. Análogos para $\mathcal{H}_{GIb}(E;F)$ e $\mathcal{H}_{Nb}(E;F)$.

*Demonstração.* Claramente $\|f\|_{PI,\,\rho} \leq \|f\|'_{PI,\,\rho}$ para cada $f \in \mathcal{H}_{PIb}(E;F)$ e $\rho \geq 0$. Além disso para cada $f \in \mathcal{H}_{PIb}(E;F)$ tendo $f(a) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\hat{d}^m f(0)(a)$ uniformemente para $a \in \{a \in E/\|a\| \leq \rho\}$, temos do Exemplo 2.2.5 e do Teorema 2.3.10, que

$$\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(a)\|_{PI} \leq \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(m+j)!}{j!m!}\cdot\|\frac{1}{(m+j)!}\hat{d}^{m+j}f(0)\|_{PI}\cdot\|a\|^j.$$

Então

$$\begin{aligned}
\|f\|'_{PI,\,\rho} &= \sum_{m=o}^{\infty}\rho^m \sup_{\|a\|\leq\rho}\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(a)\|_{PI} \\
&\leq \sum_{m=o}^{\infty}\sum_{j=o}^{\infty}\rho^m\cdot\frac{(m+j)!}{j!m!}\|\frac{1}{(m+j)!}\hat{d}^{m+j}f(0)\|_{PI}\cdot\rho^j \\
&= \sum_{m=o}^{\infty}\sum_{j=o}^{\infty}\rho^{m+j}\cdot\frac{(m+j)!}{j!m!}\|\frac{1}{(m+j)!}\hat{d}^{m+j}f(0)\|_{PI} \\
&= \sum_{m=o}^{\infty}\sum_{j=m}^{\infty}\rho^{j}\cdot\frac{j!}{m!(j-m)!}\frac{1}{j!}\|\hat{d}^{j}f(0)\|_{PI} \\
&= \sum_{j=o}^{\infty}\sum_{m=0}^{j}\rho^{j}\cdot\frac{j!}{m!(j-m)!}\cdot\frac{1}{j!}\|\hat{d}^{j}f(0)\|_{PI} \\
\text{Pela observação 2.2.2} &= \sum_{j=o}^{\infty}(2\rho)^j\cdot\frac{1}{j!}\|\hat{d}^{j}f(0)\|_{PI} = \|f\|_{PI,\,2\rho}.
\end{aligned}$$

Então $\|f\|_{PI,\,\rho} \leq \|f\|'_{PI,\,\rho} \leq \|f\|_{PI,\,2\rho}$ para cada $f \in \mathcal{H}_{PIb}(E;F)$ e $\rho \geq 0$. □

**Definição 2.4.2.** Dotamos $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ com a topologia $\tau_\Theta$ gerada pela família de seminormas (2.9). Nos casos $\mathcal{H}_{Nb}(E;F)$, $\mathcal{H}_{PIb}(E;F)$ e $\mathcal{H}_{GIb}(E;F)$ por uma das equivalentes famílias de seminormas (2.9) e (2.10) descritas acima. Obviamente o espaço topológico gerada por qualquer uma das famílias de seminormas é um espaço localmente convexo de Hausdorff. Denotamos por $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ o espaço vetorial localmente convexo obtido desta maneira.

**Proposição 2.4.3.** $[\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F),\tau_\Theta]$ é um espaço de Fréchet. Em particular, $[\mathcal{H}_{Nb}(E;F),\tau_N]$, $[\mathcal{H}_{PIb}(E;F),\tau_{PI}]$ e $[\mathcal{H}_{GIb}(E;F),\tau_{GI}]$ são espaços de Fréchet.

*Demonstração.* Para ser um espaço de Fréchet, deve ser um espaço localmente convexo metrizável e completo. Como a topologia gerada pelas seminormas $\|f\|_{\Theta,\,\rho}$ é localmente convexa, falta apenas mostrar que é metrizável e completo.

Devemos mostrar que $[\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F),\tau_\Theta]$ é metrizável. Por um resultado para espaços vetoriais topológicos, um espaço localmente convexo de Hausdorff é metrizável se, e somente se, existe uma seqüência de seminormas que define a topologia ( ver [30, página 38 12.2] ) . Mas a família enumerável de seminormas

$$\mathcal{F}=\{\|f\|_{\Theta,\,n}\ /\ n=1,2,\ldots\}$$

claramente define a topologia $\tau_\Theta$ em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$, então falta somente mostrar que $[\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F),\tau_\Theta]$ é completo. Seja $(f_k)_{k=1}^\infty$ uma seqüência de Cauchy em $[\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F),\tau_\Theta]$. Logo, dados $\varepsilon>0$ e $\rho\geq 1$, existe $k_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}\|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f_k(0)-\frac{1}{m!}\hat{d}^m f_j(0)\|_\Theta &\leq \rho^m\|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f_k(0)-\frac{1}{m!}\hat{d}^m f_j(0)\|_\Theta\\ &\leq \|f_k-f_j\|_{\Theta,\rho}\\ &< \frac{\varepsilon}{4}\end{aligned}\tag{2.12}$$

para cada $m\in\mathbb{N}$ e $k,\ j\ \geq k_0(\varepsilon)$. Logo para cada $m$, $(\frac{1}{m!}\hat{d}^m f_k(0))_{k=1}^\infty$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{P}_\Theta(^mE;F)$ que é um espaço de Banach. Logo, existe $P_m\in\mathcal{P}_\Theta(^mE;F)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{m!}\hat{d}^m f_k(0)=P_m,$$

em $\mathcal{P}_\Theta(^mE;F)$. Para cada $\rho>0$ existe $0\leq M_\rho<\infty$ tal que $\|f_k\|_{\Theta,\,\rho}\leq M_\rho$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Segue que $\|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f_k(0)\|_\Theta\leq\frac{M_\rho}{\rho^m}$ para todos $k$ e $m$.

Agora

$$\begin{aligned}\|P_m\|_\Theta &\leq \|P_m-\frac{1}{m!}\hat{d}^m f_k(0)\|_\Theta+\|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f_k(0)\|_\Theta\\ &\leq \|P_m-\frac{1}{m!}\hat{d}^m f_k(0)\|_\Theta+\frac{M_\rho}{\rho^m}.\end{aligned}$$

Fazendo $k \to \infty$ temos que $\|P_m\|_\Theta \leq \frac{M_\rho}{\rho^m}$ para cada $m = 0, 1, \ldots$, o que implica que

$$\lim_{m\to\infty} \|P_m\|_\Theta^{\frac{1}{m}} \leq \frac{1}{\rho},$$

para cada $\rho > 0$. Fazendo $\rho \to \infty$, temos que

$$\lim_{m\to\infty} \|P_m\|_\Theta^{\frac{1}{m}} = 0.$$

Portanto

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)$$

está em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ pela Definição 2.3.4. Agora resta mostrar que $f_k \to f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ na topologia $\tau_\Theta$ de $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$. Fixados $\varepsilon > 0$ e $\rho > 0$, tendo que $\sum_{m=0}^{\infty} \rho^m \|P_m\|_\Theta < \infty$ e

$$\sum_{m=0}^{\infty} \rho^m \|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f_j(0))\|_\Theta \leq \sum_{m=0}^{\infty} M_{\rho_1} (\frac{\rho}{\rho_1})^m < \infty$$

quando $0 < \rho < \rho_1$, então temos que existe um $n > 0$ tal que

$$\sum_{m=n}^{\infty} \rho^m \|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f_j(0)\|_\Theta < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.13}$$

para cada $j = 1, 2, \ldots$ e

$$\sum_{m=n}^{\infty} \rho^m \|P_m\|_\Theta < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.14}$$

Como $\lim_{j\to\infty} \frac{1}{m!}\hat{d}^m f_j(0) = P_m$, para $j$ grande o suficiente temos

$$\sum_{m=0}^{n-1} \rho^m \|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f_j(0) - P_m\|_\Theta < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.15}$$

Logo, escolhendo $j$, $k$ e $n$ adequados, temos que existe $K(\varepsilon, \rho)$ tal que

$$\begin{aligned}
\|f_k - f\|_{\Theta,\rho} &\leq \|f_k - f_j\|_{\Theta,\rho} + \|f_j - f\|_{\Theta,\rho} \\
\text{(por 2.12)} \quad &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \|\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}\hat{d}^m f_j(0) - \sum_{m=1}^{\infty} P_m\|_{\Theta,\rho} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{m=1}^{n-1} \rho^m \|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f_j(0) - P_m\|_\Theta + \sum_{m=n}^{\infty} \rho^m \|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f_j(0) - P_m\|_\Theta \\
\text{(por 2.15)} \quad &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{m=n}^{\infty} \rho^m \|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f_j(0)\|_\Theta + \sum_{m=n}^{\infty} \rho^m \|P_m\|_\Theta \\
\text{(por 2.13 e 2.14)} \quad &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

para todo $k \geq K(\varepsilon, \rho)$. Então $f_k \to f$ em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$. Isto conclui a demonstração. □

# CAPÍTULO 3

# TIPOS DE HOLOMORFIA E A TRANSFORMADA DE BOREL

Neste capítulo introduzimos os conceitos de $\pi_1$-tipo de holomorfia e Transformada de Borel. A introdução de tais conceitos e o desenvolvimento da teoria de equações de convolução, foi um trabalho em conjunto com V. Fávaro, baseado nos trabalhos de S. Dinnen [14] , V. Fávaro [17, 18], C. Gupta [21], B. Malgrange [24] , A. Martineau [25], M. Matos [28], X. Mujica [32], L. Nachbin [33].

Quando $F = \mathbb{C}$, denotamos $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;\mathbb{C})$ por $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$. Para um $\pi_1$-tipo de holomorfia, caracterizamos o espaço dual de $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ usando a transformada de Borel.

## 3.1 $\pi_1$-Tipo de Holomorfia

**Definição 3.1.1.** Seja $f \in \mathcal{H}(E;F)$. *O polinômio de Taylor* $\tau_{n,f,a}(x)$ de ordem $n$ de $f$ em $a$ para cada $x \in E$ é definido por

$$\tau_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(a)(x-a).$$

O seguinte lema prova que o polinômio de Taylor de ordem $n$ na origem de $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ converge para $f$ na topologia do espaço $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$.

**Lema 3.1.2.** Seja $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ e seja $\tau_{n,f,0}$ o polinômio de Taylor de ordem $n$ de $f$ na origem. Então para cada $\rho > 0$, temos

$$\|f - \tau_{n,f,0}\|_{\Theta,\rho} \to 0 \qquad \text{quando } n \to \infty.$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \|f - \tau_{n,f,0}\|_{\Theta,\rho} &= \|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(0)\|_{\Theta,\rho} \\ &= \|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(0)\|_{\Theta,\rho} \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!}\|\hat{d}^k f(0)\|_{\Theta}. \end{aligned}$$

Como $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$, temos que

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k!}\|\hat{d}^k f(0)\|_{\Theta}\right)^{\frac{1}{k}} = 0.$$

Segue então que

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\rho^k}{k!}\|\hat{d}^k f(0)\|_{\Theta}\right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \rho \left(\frac{1}{k!}\|\hat{d}^k f(0)\|_{\Theta}\right)^{\frac{1}{k}} = 0.$$

Portanto pelo teste da raiz a série seguinte converge:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!}\|\hat{d}^k f(0)\|_{\Theta}$$

e assim

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!}\|\hat{d}^k f(0)\|_{\Theta} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Agora definiremos um $\pi_1$-tipo de holomorfia.

**Definição 3.1.3.** Seja $(\mathcal{P}_{\Theta}(^m E;F))_{m=0}^{\infty}$ um tipo de holomorfia de $E$ em $F$. Um $\Theta$-tipo de holomorfia é dito ser um $\pi_1$-tipo de holomorfia se

(1) Para todos $\phi \in E'$, $b \in F$ e $m \in \mathbb{N}_0$, $\phi^m b \in \mathcal{P}_{\Theta}(^m E;F)$ e $\|\phi^m b\|_{\Theta} = \|\phi\|^m \|b\|$.

(2) Para cada $m$, $\mathcal{P}_f(^m E;F)$ é denso em $(\mathcal{P}_{\Theta}(^m E;F), \|\cdot\|_{\Theta})$.

**Exemplo 3.1.4.**

(a) C. Gupta em [21], M. Matos em [28] e X. Mujica em [32] provaram que as seqüências de espaços de polinômios nucleares, polinômios $(s;(r,q))$-quase-nucleares e polinômios $\sigma(p)$-nucleares, de $E$ em $F$, respectivamente, satisfazem as condições (1) e (2) da Definição 3.1.3. Portanto, cada uma destas seqüências é um $\pi_1$-tipo de holomorfia de $E$ em $F$.

(b) Certamente a seqüência dos polinômios aproximáveis $\left(\mathcal{P}_A\left({}^mE;F\right), \|\cdot\|\right)_{m=0}^{\infty}$ é um tipo de holomorfia de tipo $\pi_1$. Veja [[14] p. 243, Exemplo 2]. Neste artigo S. Dineen introduz os polinômios integrais e prova que

$$\mathcal{P}_A({}^mE)' = \mathcal{P}_I({}^mE').$$

Veja [14, p 273, Lema 9].

(c) Mais geralmente, seja $(\mathcal{P}_\Theta({}^mE;F))_{m=0}^{\infty}$ um tipo de holomorfia de $E$ em $F$ satisfazendo (1) da Definição 3.1.3. Se denotarmos a aderência de $\mathcal{P}_f({}^mE;F)$ para a topologia de $\mathcal{P}_\Theta({}^mE;F)$ por $\overline{\mathcal{P}_f({}^mE;F)}^{\Theta}$, então a seqüência $\left(\overline{\mathcal{P}_f({}^mE;F)}^{\Theta}\right)_{m=0}^{\infty}$ é um $\pi_1$-tipo de holomorfia.

**Proposição 3.1.5.** Para cada $\pi_1$-tipo de holomorfia $\Theta$ de $E$ em $F$, $\mathcal{P}_N({}^mE;F)$ está contido em $\mathcal{P}_\Theta({}^mE;F)$, e a aplicação inclusão é contínua.

*Demonstração.* Se $P \in \mathcal{P}_N({}^mE;F)$, então dado $\varepsilon > 0$ existe uma representação

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} x_i'^m \otimes y_i \tag{3.1}$$

onde $(x_i')_{i=1}^{\infty} \subset E'$ e $(y_i)_{i=1}^{\infty} \subset F$ são seqüências limitadas tais que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i'\|^m \|y_i\| < (1+\varepsilon)\|P\|_N. \tag{3.2}$$

Defina $S_n = \sum_{i=1}^{n} \|x_i'\|^m \|y_i\|$, logo de (3.2) $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de Cauchy. Agora seja $P_n = \sum_{i=1}^{n} x_i'^m \otimes y_i$. Seja $\varepsilon > 0$ dado acima, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > j \geq n_0$, temos que

$$\begin{aligned} \|P_n - P_j\|_\Theta &= \|\sum_{i=j+1}^{n} x_i'^m \otimes y_i\|_\Theta \\ &\leq \sum_{i=j+1}^{n} \|x_i'^m \otimes y_i\|_\Theta \\ \text{Pela Definição 3.1.3} &= \sum_{i=j+1}^{n} \|x_i'\|^m \cdot \|y_i\| \\ \text{Por } (S_n) \text{ ser de Cauchy} &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto $P_n = \sum_{i=1}^n x_i'^m \otimes y_i$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{P}_\Theta(^mE;F)$, o qual é um espaço de Banach. Logo existe um $Q \in \mathcal{P}_\Theta(^mE;F)$ tal que $\|S_n - Q\|_\Theta$ converge para 0 quando $n$ tende ao infinito. Logo da Proposição 2.3.1, temos que

$$\|S_n - Q\| \leq \sigma^m \cdot \|S_n - Q\|_\Theta.$$

E assim $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{i=1}^\infty x_i'(x)^m y_i = Q(x)$ ou seja $Q(x) = P(x)$ para todo $x \in E$. Segue de (3.2) que $\|P\|_\Theta \leq \|P\|_N$. □

O seguinte resultado segue facilmente da Proposição anterior.

**Corolário 3.1.6.** Para cada $\pi_1$-tipo de holomorfia $\Theta$ de $E$ em $F$, $\mathcal{H}_{Nb}(E;F)$ está contido em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$, e a aplicação inclusão é contínua.

**Proposição 3.1.7.** Se $\Theta$ é um $\pi_1$-tipo de holomorfia, então o subespaço vetorial $S$ de $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ gerado por $\{e^\phi b : \phi \in E',\ b \in F\}$ é denso em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$.

*Demonstração.* Mostremos que $e^\phi \cdot b \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ para todos $\phi \in E'$, $b \in F$. Como

$$e^\phi \cdot b = \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!}\phi^m \cdot b$$

é claro que $e^\phi \cdot b \in \mathcal{H}(E;F)$. Como $\frac{\phi^m}{m!} \cdot b \in \mathcal{P}_\Theta(^mE;F)$ para todo $m = 0, 1, 2, \ldots$ e, pela condição (1) da Definição 3.1.3, segue

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m!}\|\phi^m\cdot b\|_\Theta\right)^{\frac{1}{m}} &= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m!}\|\phi^m\cdot b\|\right)^{\frac{1}{m}}\\
&= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m!}\|\phi\|^m\cdot \|b\|\right)^{\frac{1}{m}}\\
&= \|\phi\|\cdot\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\|b\|^{\frac{1}{m}}}{\sqrt[m]{m!}}\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto $e^\phi\cdot b\in\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ para todos $\phi\in E'$, $b\in F$. Note que $\{e^\phi\cdot b:\phi\in E'\ ,\ b\in F\}\subset\mathcal{H}_{Nb}(E;F)\subset\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$, pois $\|\phi^m b\|_N=\|\phi\|^m\|b\|$.

Seja $\bar{S}$ a aderência de $S$ na topologia $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$. Se $f\in\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$, então

$$f=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\hat{d}^k f(0).$$

Então, pelo Lema 3.1.2, se cada $\frac{1}{k!}\hat{d}^k f(0)\in\bar{S}$, então $f\in\bar{S}$. Portanto basta mostrar que $\mathcal{P}_\Theta({}^mE;F)\subseteq\bar{S}$, para cada $m=0,1,2,\ldots$ Para provar que $\mathcal{P}_\Theta({}^mE;F)\subseteq\bar{S}$, basta mostrar que $\mathcal{P}_f({}^mE;F)\subseteq\bar{S}$, para cada $m=0,1,2,\ldots$. De fato: seja $P\in\mathcal{P}_\Theta({}^mE;F)$, então segue de (2) da Definição 3.1.3, que existe uma seqüência $(P_j)_{j=1}^{\infty}\subset\mathcal{P}_f({}^mE;F)$ tal que

$$\|P-P_j\|_\Theta\to 0,\quad \text{quando }\ j \text{ tende a } \infty.$$

Para cada $\rho>0$, como $P_j,P\in\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ para cada $j$, temos que

$$\|P-P_j\|_{\Theta,\rho}=\frac{\rho^m}{m!}\cdot\|P-P_j\|_\Theta\to 0\quad\text{quando }\ j \text{ tende a } \infty.$$

Logo $P\in\overline{\mathcal{P}_f({}^mE;F)}^{\tau_\Theta}\subseteq\bar{S}$, ou seja, $\mathcal{P}_\Theta({}^mE;F)\subseteq\bar{S}$. Para provar que $\mathcal{P}_f({}^mE;F)\subseteq\bar{S}$, basta mostrar que $\phi^n\cdot b\in\bar{S}$, para todos $n=0,1,2,\ldots$, $\phi\in E'$ e $b\in F$. Vamos fazer isto por indução sobre $n$. É claro que

$$e^\phi\cdot b=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\phi^n\cdot b$$

para todos $\phi\in E'$ e $b\in F$ no sentido de $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$. Logo,

$$e^{\lambda\phi}\cdot b=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n\phi^n\cdot b}{n!}$$

para todos $\lambda \in \mathbb{C}$, $\phi \in E'$ e $b \in F$ no sentido de $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$.

Logo para $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, temos

$$\lim_{|\lambda|\to 0} \left\| \frac{e^{\lambda\phi}\cdot b - b}{\lambda} - \phi \cdot b \right\|_{\Theta,\rho} = \lim_{|\lambda|\to 0} |\lambda| \cdot \left\| \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda^{j-2} \phi^j \cdot b \right\|_{\Theta,\rho} \tag{3.3}$$

Como

$$\left\| \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda^{j-2} \phi^j \cdot b \right\|_{\Theta,\rho} = \sum_{j=2}^{\infty} \rho^j |\lambda|^{j-2} \| \frac{\phi^j \cdot b}{j!} \|_\Theta \leq \sum_{j=2}^{\infty} \rho^j \| \frac{\phi^j \cdot b}{j!} \|_\Theta = \left\| \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\phi^j \cdot b}{j!} \right\|_{\Theta,\rho} < \infty$$

para $|\lambda| \leq 1$, segue de (3.3) que

$$\lim_{|\lambda|\to 0} \left\| \frac{e^{\lambda\phi}\cdot b - b}{\lambda} - \phi \cdot b \right\|_{\Theta,\rho} \leq \lim_{|\lambda|\to 0} |\lambda| \cdot \left\| \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda^{j-2} \phi^j \cdot b \right\|_{\Theta,\rho} = 0.$$

Logo, $\phi \cdot b \in \bar{S}$. Suponhamos que $\phi^j \cdot b \in \bar{S}$ para todo $j \leq n-1$. Então

$$\lim_{|\lambda|\to 0} \left\| \frac{1}{\lambda^{n-1}} \left( e^{\lambda\phi} \cdot b - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \lambda^j \phi^j \cdot b \right) - \frac{\phi^n \cdot b}{n!} \right\|_{\Theta,\rho} = \lim_{|\lambda|\to 0} |\lambda| \cdot \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda^{j-n} \phi^j \cdot b \right\|_{\Theta,\rho} \tag{3.4}$$

Como

$$\left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda^{j-n} \phi^j \cdot b \right\|_{\Theta,\rho} \leq \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\phi^j \cdot b}{j!} \right\|_{\Theta,\rho} < \infty$$

para $|\lambda|$ suficientemente pequeno, segue de (3.4) que

$$\lim_{|\lambda|\to 0} \left\| \frac{1}{\lambda^{n-1}} \left( e^{\lambda\phi} \cdot b - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \lambda^j \phi^j \cdot b \right) - \frac{\phi^n \cdot b}{n!} \right\|_{\Theta,\rho} = 0.$$

Logo $\phi^n \cdot b \in \bar{S}$ para todos $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\phi \in E'$ e $b \in F$. □

## 3.2 O Dual de $\mathcal{P}_\Theta({}^m E; F)$

Suponhamos que $\Theta$ é um $\pi_1$-tipo de holomorfia de $E$ em $F$. Então podemos definir a *transformada de Borel*

$$\mathcal{B}_\Theta \colon\ [\mathcal{P}_\Theta({}^m E; F)]' \to \mathcal{P}({}^m E'; F')$$

dada por $\mathcal{B}_\Theta T(\phi)(y) = T(\phi^m y)$, para todo $T \in [\mathcal{P}_\Theta({}^m E; F)]'$, $\phi \in E'$ e $y \in F$. É claro que $\mathcal{B}_\Theta$ está bem definida e é linear. Por (1) da Definição 3.1.3, temos que $\mathcal{B}_\Theta$ é contínua e $\|\mathcal{B}_\Theta T\| \leq$

$\|T\|$ e usando a condição (2) da Definição 3.1.3, obtemos que $\mathcal{B}_\Theta$ é injetora. Denotamos por $\mathcal{P}_{\Theta'}(^mE';F')$ a imagem de $\mathcal{B}_\Theta$ em $\mathcal{P}(^mE';F')$ e definimos a norma em $\mathcal{P}_{\Theta'}(^mE';F')$ por $\|\mathcal{B}_\Theta T\|_{\Theta'} = \|T\|$.

Então $\left([\mathcal{P}_\Theta(^mE;F)]'\ , \|\cdot\|\right)$ é isometricamente isomorfo a $(\mathcal{P}_{\Theta'}(^mE';F'),\ \|\cdot\|_{\Theta'})$.

Agora temos um interessante resultado envolvendo a transformada de Borel.

**Proposição 3.2.1.** Seja $(\mathcal{P}_\Theta(^mE;F))_{m=0}^\infty$ um $\pi_1$-tipo de holomorfia de $E$ em $F$. Se a transformada de Borel

$$\mathcal{B}_\Theta\colon \left([\mathcal{P}_\Theta(^mE;F)]'\ , \|\cdot\|\right) \to (\mathcal{P}(^mE';F'),\ \|\cdot\|)$$

é um isomorfismo topológico sobre sua imagem, então $\mathcal{P}_N(^mE;F) = \mathcal{P}_\Theta(^mE;F)$ como conjuntos e a aplicação identidade $\mathcal{P}_N(^mE;F) \to \mathcal{P}_\Theta(^mE;F)$ é um isomorfismo topológico. (Estamos considerando a norma usual em $\mathcal{P}(^mE';F')$).

*Demonstração.* Seja $\Phi_\Theta = i_\Theta \circ \Phi_N$, onde $i_\Theta$ denota a inclusão $\mathcal{P}_N\left(^mE;F\right) \hookrightarrow \mathcal{P}_\Theta\left(^mE;F\right)$ e $\Phi_N\colon \otimes_{\pi,s}^m E' \otimes_\pi F \longrightarrow \mathcal{P}_N\left(^mE;F\right)$ é dada por $\Phi_N\left((x' \otimes \ldots \otimes x') \otimes y\right) = x'\left(\cdot\right)^m y$. Temos que a transformada de Borel $\mathcal{B}_\Theta$ é a transposta de $\Phi_\Theta$. Como $\mathcal{B}_\Theta$ é um isomorfismo topológico, segue de [31, página 50, Teorema 12.4], que $\Phi_\Theta$ é sobrejetora. Portanto $i_\Theta$ é sobrejetora e o resultado segue. □

**Definição 3.2.2.** Seja $\Theta$ um $\pi_1$-tipo de holomorfia. Se $T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$ definimos a *transformada de Borel* de $T$ denotada por $\mathcal{B}T$, como a função definida em $E'$ dada por

$$\mathcal{B}T(\phi) = T(e^\phi) \in \mathbb{C}, \ \text{ para todo } \ \phi \in E'.$$

$T(e^\phi)$ está bem definida pois, $e^\phi \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ para cada $\phi \in E'$.

**Definição 3.2.3.** Se $(\mathcal{P}_\Theta(^mE))_{m=0}^\infty$ um $\pi_1$-tipo de holomorfia de $E$ em $\mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{H}(E')$, então $f$ é dita ser de $\Theta'$-*tipo exponencial* se:

$(i)$ $\hat{d}^m f(0) \in \mathcal{P}_{\Theta'}(^mE')$ para cada $m = 0, 1, 2 \ldots$.

$(ii)$ existirem constantes $C \geq 0$, $\rho \geq 0$ tais que

$$\|\hat{d}^m f(0)\|_{\Theta'} \leq C \cdot \rho^m, \ \text{para todo } \ m = 0, 1, 2 \ldots$$

Denotaremos o conjunto de tais funções por $Exp_{\Theta'}(E')$.

**Proposição 3.2.4.** Seja $\Theta$ um $\pi_1$-tipo de holomorfia. Se $T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E), \tau_\Theta]'$, então $\mathcal{B}T \in Exp_{\Theta'}(E')$, e a aplicação

$$\mathcal{B}\colon [\mathcal{H}_{\Theta b}(E), \tau_\Theta]' \to Exp_{\Theta'}(E')$$

é um isomorfismo algébrico.

*Demonstração.* $\vdash$ $\mathcal{B}$ está bem definida:

Sejam $T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E), \tau_\Theta]'$ e $\phi \in E'$, então

$$\mathcal{B}T(\phi) = T(e^\phi) = T\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\phi^m\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} T(\phi^m).$$

Como $\mathcal{P}_\Theta(^m E) \subset \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, podemos considerar a restrição $T_m = T|\mathcal{P}_\Theta(^m E)$ e $T_m \in [\mathcal{P}_\Theta(^m E)]'$. Como

$$((\mathcal{P}_\Theta(^m E))' \,, \|\cdot\|) \cong (\mathcal{P}_{\Theta'}(^m E'),\ \|\cdot\|_{\Theta'}),$$

para cada $T_m \in [\mathcal{P}_\Theta(^m E)]'$ existe um único polinômio $P'_m \in \mathcal{P}_{\Theta'}(^m E')$ tal que

$$T_m(\phi^m) = P'_m(\phi), \quad \|T_m\| = \|P'_m\|_{\Theta'}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Como $T$ é contínua, existem $C \geq 0$ e $\rho \geq 0$ tais que para cada $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ tem-se

$$|T(f)| \leq C \cdot \|f\|_{\Theta,\rho}.$$

Em particular, para cada $Q_m \in \mathcal{P}_\Theta(^m E)$, temos

$$|T_m(Q_m)| = |T(Q_m)| \leq C \cdot \|Q_m\|_{\Theta,\rho} = C \cdot \rho^m \|Q_m\|_\Theta.$$

Assim

$$\|P'_m\|_{\Theta'} = \|T_m\| = \sup_{\|Q_m\|_\Theta \leq 1} |T_m(Q_m)| \leq C \cdot \rho^m, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Portanto $\|P'_m\|_{\Theta'} \leq C \cdot \rho^m$ e $P'_m \in \mathcal{P}_{\Theta'}(^m E')$ para todo $m = 0, 1, 2, \ldots$ Como

$$\mathcal{B}T(\phi) = T(e^\phi) = T\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\phi^m\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} T(\phi^m) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} P'_m(\phi),$$

segue que $\mathcal{B}T \in Exp_{\Theta'}(E')$.

$\vdash$ $\mathcal{B}$ é injetora:

Como $\mathcal{B}$ é linear, basta ver que $\mathcal{B}T = 0$ implica que $T = 0$. Se $\mathcal{B}T = 0$ então para cada $\phi \in E'$, temos que

$$\mathcal{B}T(\phi) = T(e^{\phi}) = 0.$$

Se $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, como pela Proposição 3.1.7, $\overline{\{e^{\phi} : \phi \in E'\}}^{\tau_\Theta} = \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ , existe uma seqüência $(e^{\phi_n})_{n=1}^{\infty}$ que converge para $f$. Como $T$ é contínua

$$T(f) = \lim_{n\to\infty} T(e^{\phi_n}) = 0.$$

Portanto $T \equiv 0$ e $\mathcal{B}$ é injetora.

$\vdash$ $\mathcal{B}$ é sobrejetora.

Seja $H \in Exp_{\Theta'}(E')$. Então $H(\phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} P'_m(\phi)$ onde $P'_m \in \mathcal{P}_{\Theta'}(^mE')$ e

$$\|P'_m\|_{\Theta'} \leq C \cdot \rho^m, \text{ para todo } m = 0, 1, 2 \ldots$$

Como $P'_m \in \mathcal{P}_{\Theta'}(^mE')$, existe um único funcional $H_m \in [\mathcal{P}_{\Theta}(^mE)]'$ tal que

$$H_m(\phi^m) = P'_m(\phi), \text{ para cada } \phi \in E' \text{ e } \|H_m\| = \|P'_m\|_{\Theta'} \ m = 0, 1, 2, \ldots$$

Para cada $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, com $f = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m$ fixo, seja

$$T(f) \colon = \sum_{m=0}^{\infty} H_m(Q_m).$$

Então

$$\begin{aligned} |T(f)| = \left|\sum_{m=0}^{\infty} H_m(Q_m)\right| &\leq \sum_{m=0}^{\infty} |H_m(Q_m)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \|H_m\| \cdot \|Q_m\|_{\Theta} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \|P'_m\|_{\Theta'} \cdot \|Q_m\|_{\Theta} \\ &\leq C \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m \|Q_m\|_{\Theta} \\ &= C \cdot \|f\|_{\Theta,\rho}. \end{aligned}$$

Então para cada $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, $T(f)$ está bem definida e $|T(f)| \leq C \cdot \|f\|_{\Theta,\rho}$ para cada $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$. Então $T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$ e

$$\mathcal{B}T(\phi) = T(e^{\phi}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} H_m(\phi^m) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} P'_m(\phi) = H(\phi)$$

para cada $\phi \in E'$. Logo, dado $H \in Exp_{\Theta'}(E')$, encontramos $T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$ tal que $\mathcal{B}T = H$. $\square$

**Exemplo 3.2.5.**

(a) C. Gupta provou em [21] que se $E'$ tem a propriedade de aproximação $\lambda$-limitada, então a transformada de Borel $\mathcal{B}_N$ é um isomorfismo isométrico entre $[\mathcal{P}_N\left(^m E; F\right)]'$ e $\mathcal{P}\left(^m E'; F'\right)$.

(b) M. Matos provou em [28] que se $E'$ tem a propriedade de aproximação $\lambda$-limitada, então a transformada de Borel $\mathcal{B}_{\widetilde{N},(s;(r,q))}$ é um isomorfismo isométrico entre $\left[\mathcal{P}_{\widetilde{N},(s;(r,q))}\left(^m E\right)\right]'$ e $\mathcal{P}_{(s',m(r';q'))}\left(^m E'\right)$, onde $\mathcal{P}_{\widetilde{N},(s;(r,q))}\left(^m E\right)$ denota o espaço de todos os polinômios $m$-homogêneos $(s;(r,q))$-quase-nucleares em $E$ e $\mathcal{P}_{(s',m(r';q'))}\left(^m E'\right)$ denota o espaço de todos os polinômios $m$-homogêneos $(s', m\,(r'; q'))$-somantes em $E'$.

(c) X. Mujica provou em [32] que se $E'$ tem a propriedade de aproximação $\lambda$-limitada e $F$ é reflexivo, então a transformada de Borel $\mathcal{B}_{\sigma(p)}$ é um isomorfismo isométrico entre $\left[\mathcal{P}_{\sigma(p)}\left(^m E; F\right)\right]'$ e $\mathcal{P}_{\tau(p)}\left(^m E'; F'\right)$, onde $\mathcal{P}_{\sigma(p)}\left(^m E; F\right)$ denota o espaço de todos os polinômios $m$-homogêneos $\sigma(p)$-nucleares de $E$ em $F$, e $\mathcal{P}_{\tau(p)}\left(^m E'; F'\right)$ denota o espaço de todos os os polinômios $m$-homogêneos $\tau(p)$-somantes de $E'$ em $F'$. Em particular, o resultado segue quando $F$ é igual a $\mathbb{C}$.

A Proposição 3.2.4 foi obtida em todos os casos nas correspondentes referências.

Para mais detalhes sobre os índices $s, r, q, s', r', q'$ e $p$, veja as correspondentes referências.

# CAPÍTULO 4

# TIPOS DE HOLOMORFIA E OPERADORES DE CONVOLUÇÃO

Neste capítulo introduzimos os conceitos de $\pi_2$-tipo de holomorfia e definimos os operadores de convolução sobre os espaços de funções inteiras $\Theta$-holomorfas de tipo limitado. Também introduzimos o conceito de uma coleção de funções holomorfas de $U$ em $\mathbb{C}$ ser *fechada para divisão*, o qual é uma condição necessária para provarmos teoremas de divisão envolvendo a transformada de Fourier-Borel. E finalmente provamos teoremas de existência e aproximação de soluções para equações de convolução.

## 4.1 $\pi_2$-Tipo de Holomorfia

Antes de definirmos $\pi_2$-Tipo de Holomorfia e os operadores de convolução, vamos provar um resultado necessário para o desenvolvimento da teoria

**Proposição 4.1.1.** *Sejam $a \in E$ e $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$. Então:*

*(i)* $\hat{d}^m f(\cdot)(a) \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ *e*

$$\hat{d}^m f(x)(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{m+k} f(0) x^k}\ (a)$$

*no sentido de $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ para cada $m = 0, 1, 2, \ldots$*

*(ii)*

$$(\tau_a f)(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(x)(a)$$

*no sentido de* $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, *onde* $\tau_a x = x + a$, $(\tau_a f)(x) = f(\tau_a x) = f(x+a)$.

*Demonstração.* (*i*) Se $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, então a série de Taylor em volta de 0 em $x$, é

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(0)(x)$$

com $\hat{d}^m f(0) \in \mathcal{P}_\Theta({}^m E)$, bem como

$$\lim_{m\to\infty} \left( \frac{1}{m!} \|\hat{d}^m f(0)\|_\Theta \right)^{\frac{1}{m}} = 0. \tag{4.1}$$

Temos pelo Teorema 2.3.10 e pela fórmula integral de Cauchy que

$$\hat{d}^m f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{d}^m \left[ \frac{1}{(m+k)!} \hat{d}^{m+k} f(0) \right] (x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{m+k} f(0) x^k} .$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\hat{d}^m f(x)(a) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{m+k} f(0) x^k} (a) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d^{m+k} f(0) x^k a^m \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d^{m+k} f(0) a^m x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{m+k} f(0) a^m} (x) \\
&= \hat{d}^m f(a)(x). \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Como $\hat{d}^m f(0) \in \mathcal{P}_\Theta({}^m E)$ para todo $m$, pela condição (3) da Definição 2.2.1, temos que

$$\widehat{d^{m+k} f(0) a^m} \in \mathcal{P}_\Theta({}^k E)$$

e

$$\| \widehat{d^{m+k} f(0) a^m} \|_\Theta \leq \frac{\sigma^{m+k} m! k!}{(m+k)!} \cdot \|\hat{d}^{m+k} f(0)\|_\Theta \cdot \|a\|^m \tag{4.3}$$

e então

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\left(\|\frac{1}{k!}\ \widehat{d^{m+k}f(0)a^m}\ \|_\Theta\right)^{\frac{1}{k}} &\leq \lim_{k\to\infty}\left(m!\sigma^{m+k}\cdot\|\frac{1}{(m+k)!}\hat{d}^{m+k}f(0)\|_\Theta\cdot\|a\|^m\right)^{\frac{1}{k}}\\
&= \sigma\lim_{k\to\infty}\left((\sigma\|a\|)^m\cdot m!\cdot\|\frac{1}{(m+k)!}\hat{d}^{m+k}f(0)\|_\Theta\right)^{\frac{1}{k}}\\
&= \sigma\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt[k]{(\sigma\|a\|)^m\cdot m!}\right)\cdot\lim_{k\to\infty}\left(\|\frac{1}{(m+k)!}\hat{d}^{m+k}f(0)\|_\Theta\right)^{\frac{1}{k}}\\
\text{Por (4.1)}\quad &= 0.
\end{aligned}
$$

para cada $m = 0, 1, 2, \ldots$. Temos que $\hat{d}^m f(\cdot)(a) \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$. Falta mostrar que

$$
\hat{d}^m f(\cdot)(a) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\ \widehat{d^{m+k}f(0)(\cdot)^k}\ (a)
$$

no sentido de $(\mathcal{H}_{\Theta b}(E), \tau_\Theta)$. Considere $\rho > 0$ então temos que

$$
\begin{aligned}
\left\|\hat{d}^m f(\cdot)(a) - \sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{k!}\left[\widehat{d^{m+k}f(0)(\cdot)^k}\right](a)\right\|_{\Theta,\rho} &= \left\|\sum_{k=\nu+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\ \widehat{d^{m+k}f(0)(\cdot)^k}\ (a)\right\|_{\Theta,\rho}\\
&= \left\|\sum_{k=\nu+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\ \widehat{d^{m+k}f(0)(a)^m}\ (\cdot)\right\|_{\Theta,\rho}\\
&= \sum_{k=\nu+1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}\|\ \widehat{d^{m+k}f(0)(a)^m}\ \|_\Theta\\
\text{Por (4.3)}\quad &\leq \sum_{k=\nu+1}^{\infty}\sigma^{m+k}m!\rho^k\cdot\|\frac{1}{(m+k)!}\hat{d}^{m+k}f(0)\|_\Theta\cdot\|a\|^m\\
&= \frac{m!\|a\|^m}{\rho^m}\sum_{k=\nu+1}^{\infty}\frac{(\rho\sigma)^{m+k}}{(m+k)!}\|\hat{d}^{m+k}f(0)\|_\Theta\\
&= \frac{\|a\|^m m!}{\rho^m}\left\|\sum_{k=\nu+1}^{\infty}\frac{1}{(m+k)!}\hat{d}^{m+k}f(0)\right\|_{\Theta,\rho\cdot\sigma}
\end{aligned}
$$

que converge a 0 quando $\nu$ tende a infinito, pois $f \in (\mathcal{H}_{\Theta b}(E), \tau_\Theta)$.

$(ii)$ Dado $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$. A série de Taylor de $(\tau_a f)(x)$ em volta de 0 é:

$$\begin{aligned}
(\tau_a f)(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{d}^m \tau_a f(0)(x) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(0+a))(x) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(a)(x) \\
\text{Por (4.2)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{m+k} f(0) a^m}\ (x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \widehat{d^{m+k} f(0) a^m}\ (x). \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Como $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ pela Proposição 2.3.11, temos que $(\tau_a f) \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$. Assim para $\rho > 0$ temos que

$$\begin{aligned}
\left\| \tau_a f - \sum_{m=0}^{\eta} \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(\cdot)(a) \right\|_{\Theta,\rho} &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{d}^k (\tau_a f)(0)(\cdot) - \sum_{m=0}^{\eta} \frac{1}{m!} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{m+k} f(0) a^m}\ (\cdot) \right] \right\|_{\Theta,\rho} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \left\| \hat{d}^k f(a)(\cdot) - \sum_{m=0}^{\eta} \frac{1}{m!} \widehat{d^{m+k} f(0) a^m} \right\|_{\Theta} \\
\text{Por (4.2)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \left\| \sum_{m=\eta+1}^{\infty} \frac{1}{m!} \widehat{d^{m+k} f(0) a^m} \right\|_{\Theta} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \sum_{m=\eta+1}^{\infty} \frac{1}{k! m!} \left\| \widehat{d^{m+k} f(0) a^m} \right\|_{\Theta} \\
\text{Por (4.3)} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=\eta+1}^{\infty} \frac{\rho^k \sigma^{m+k}}{(m+k)!} \| \hat{d}^{m+k} f(0) \|_{\Theta} \cdot \|a\|^m.
\end{aligned}$$

Agora como $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, tem-se que

$$\lim_{m \to \infty} \left( \frac{1}{m!} \| \hat{d}^m f(0) \|_{\Theta} \right)^{\frac{1}{m}} = 0,$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $C(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left( \frac{1}{m!} \| \hat{d}^m f(0) \|_{\Theta} \right) \leq C(\varepsilon) \cdot \varepsilon^m$$

para todo $m = 0, 1, 2, \ldots$. Escolhendo $\varepsilon > 0$ e que $\sigma\varepsilon\rho < 1$ e $\|a\|\sigma\varepsilon < 1$, segue que

$$\begin{aligned} \left\| \tau_a f - \sum_{m=0}^{\eta} \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(\cdot)(a) \right\|_{\Theta,\rho} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=\eta+1}^{\infty} \rho^k \sigma^{m+k} \cdot \|a\|^m C(\varepsilon) \cdot \varepsilon^{m+k} \\ &= C(\varepsilon) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} (\sigma\varepsilon\rho)^k \right) \left( \sum_{m=\eta+1}^{\infty} (\|a\|\sigma\varepsilon)^m \right) \end{aligned}$$

que tende a 0 quando $\eta$ tende a infinito. $\square$

**Definição 4.1.2.** Uma aplicação $\mathcal{O} \colon \mathcal{H}_{\Theta b}(E) \to \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ é chamada *operador de convolução* sobre $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ se:

(1) $\mathcal{O}$ é linear;

(2) $\mathcal{O}$ é contínua;

(3) $\mathcal{O}$ é invariante sob translações, no sentido de que para cada $a \in E$, $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$,

$$\mathcal{O}(\tau_a f) = \tau_a(\mathcal{O} f).$$

Temos da Proposição 4.1.1 que $\tau_a f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ quando $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$. Chame de $\mathcal{A}_\Theta$ o conjunto dos operadores de convolução sobre $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, o qual é uma álgebra com unidade, sob a composição de operadores como multiplicação e as operações usuais de espaço vetorial.

**Definição 4.1.3.** Se $T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E), \tau_\Theta]'$, então existem $C > 0$ e $\rho > 0$ tais que

$$|T(f)| \leq C \|f\|_{\Theta,\rho}, \tag{4.5}$$

para cada $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$. Para cada $P \in \mathcal{P}_\Theta(^m E)$ com $A \in \mathcal{L}^s(^m E)$ tal que $P = \hat{A}$, definimos o polinômio

$$\begin{aligned} T\left(\widehat{A(\cdot)^k}\right) : E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ y &\longmapsto T\left(A(\cdot)^k y^{m-k}\right) \end{aligned}$$

pertencente a $\mathcal{P}(^{m-k}E)$ para cada $k \leq m$.

Note que $A(\cdot)^k y^{m-k} = \frac{(m-k)!}{m!} \hat{d}^k P(\cdot)(y)$ e, pela Proposição 4.1.1, pertence a $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ sempre que $P \in \mathcal{P}_\Theta(^m E)$ com $k \leq m$.

**Definição 4.1.4.** Seja $(\mathcal{P}_\Theta(^mE))_{m=0}^\infty$ um tipo de holomorfia de $E$ em $\mathbb{C}$. O tipo de holomorfia $\Theta$ é dito ser um $\pi_2$-tipo de holomorfia se $T(\widehat{A(\cdot)^k}) \in \mathcal{P}_\Theta(^{m-k}E)$ e

$$\|T(\widehat{A(\cdot)^k})\|_\Theta \leq C\rho^k\|P\|_\Theta$$

para cada $k \leq m$, $T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$ e $P \in \mathcal{P}_\Theta(^mE)$, onde $C$ e $\rho$ são os de (4.5).

**Problema aberto:** Sob quais condições em $E$ o espaço dos polinômios homogêneos contínuos aproximáveis, $\mathcal{P}_A(^mE) = \overline{\mathcal{P}_f(^mE)}$, é $\pi_2$-tipo holomorfia? Observe que: pela definição dos $\mathcal{P}_A(^mE)$, basta provar a definição para os polinômios do tipo finito. Seja $P = \sum_{j=1}^n \varphi_j^m \in \mathcal{P}_f(^mE)$, onde $P = \hat{A}$, $A \in \mathcal{L}_f^s(^mE)$. Então

$$T(\widehat{A(\cdot)^k})(y) = \sum_{j=1}^n T(\varphi_j^k)\varphi_j^{m-k}(y),$$

assim

$$T(\widehat{A(\cdot)^k}) = \sum_{j=1}^n T(\varphi_j^k)\varphi_j^{m-k} \in \mathcal{P}_f(^{m-k}E) \subset \mathcal{P}_A\left(^{m-k}E\right).$$

Como $\varphi_j^k \in \mathcal{P}_f(^kE) \subset \mathcal{H}_{Ab}(E)$,

$$|T(\varphi_j^k)| \leq C\|\varphi_j^k\|_{A\rho} \leq C\cdot\rho^k\|\varphi_j\|^k$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|T(\widehat{A(\cdot)^k})\| &= \|\sum_{j=1}^n T(\varphi_j^k)\varphi_j^{m-k}\| \\
&\leq \sum_{j=1}^n |T(\varphi_j^k)|\cdot\|\varphi_j^{m-k}\| \\
&\leq \sum_{j=1}^n C\cdot\rho^k\|\varphi_j\|^k\cdot\|\varphi_j\|^{m-k} \\
&= C\cdot\rho^k\sum_{j=1}^n \|\varphi_j\|^m \\
&\leq C\cdot\rho^k\|P\|_{Nf},
\end{aligned}$$

sendo $\|P\|_{Nf} = \inf\left\{\sum_{j=1}^n \|\varphi_j\|^m\right\}$, onde ínfimo é tomado sobre todas representações finitas de $P$. Sabemos que se $E'$ tem a propriedade de aproximação limitada, então $\|P\|_{Nf} = \|P\|_N$, para cada $P \in \mathcal{P}_f\left({}^m E\right)$. Então se $E'$ tem a propriedade de aproximação limitada e $\|P\| = \|P\|_N$ para cada $P \in \mathcal{P}_f\left({}^m E\right)$ então $\mathcal{P}_A\left({}^m E\right)$ é $\pi_2$-tipo holomorfia. Porém neste caso o espaço $\mathcal{P}_A\left({}^m E\right) = \mathcal{P}_N({}^m E)$.

**Teorema 4.1.5.** Seja $(\mathcal{P}_\Theta({}^m E))_{m=0}^\infty$ um $\pi_2$-tipo de holomorfia. Seja $T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$. Então, $(T * f)(x) := T(\tau_x f)$, $x \in E$ define uma função $T * f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ para cada $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$. Além disso, a aplicação $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E) \mapsto T * f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ é um operador de convolução.

*Demonstração.* Queremos mostrar que $(T * f) \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, ou seja $(T * f)$ está bem definida. Pela Proposição 4.1.1, temos que para cada $x \in E$,

$$(T * f)(x) := T(\tau_x f) = T\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(x)\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T(\widehat{d^{k+m} f(0)(\cdot)^k})(x). \tag{4.6}$$

Agora, como $(\mathcal{P}_\Theta({}^m E))_{m=0}^\infty$ é um $\pi_2$-tipo de holomorfia, segue que $T(\widehat{d^{k+m} f(0)(\cdot)^k}) \in \mathcal{P}_\Theta({}^m E)$ para cada $m$ e existem $\rho, C > O$ tais que $|T\left(f\right)| \leq C\left\|f\right\|_{\Theta,\rho}$, para cada $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ e

$$\|T(\widehat{d^{k+m} f(0)(\cdot)^k})\|_\Theta \leq C\rho^k \|\hat{d}^{m+k} f(0)\|_\Theta. \tag{4.7}$$

Seja $\rho_0 > \rho$, então

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T\left(\widehat{d^{k+m} f(0)(\cdot)^k}\right)\right\|_\Theta &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|T\left(\widehat{d^{k+m} f(0)(\cdot)^k}\right)\|_\Theta \\
\text{(por 4.7)} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} C\rho^k \|\hat{d}^{m+k} f(0)\|_\Theta \\
\text{(por } \rho < \rho_0\text{)} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} C\rho_0^k \|\hat{d}^{m+k} f(0)\|_\Theta \\
&\leq C\frac{m!}{\rho_0^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!m!} \rho_0^{m+k} \|\hat{d}^{m+k} f(0)\|_\Theta \\
\text{Por (2.1)} &\leq C\frac{m!}{\rho_0^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{m+k}}{(m+k)!} \rho_0^{m+k} \|\hat{d}^{m+k} f(0)\|_\Theta \\
&= C\frac{m!}{\rho_0^m} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(2\rho_0)^k}{k!} \|\hat{d}^k f(0)\|_\Theta \\
&= C\frac{m!}{\rho_0^m} \left\|\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{d}^k f(0)\right\|_{\Theta, 2\rho_0} \\
&\leq C\frac{m!}{\rho_0^m} \|f\|_{\Theta, 2\rho_0} < \infty.
\end{aligned}$$

Logo, a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T \left( \widehat{d^{k+m} f(0)(\cdot)^k} \right)$$

converge para um polinômio $P_m \in \mathcal{P}_\Theta(^m E)$ e temos que

$$\|P_m\|_\Theta \leq C \frac{m!}{\rho_0^m} \|f\|_{\Theta, 2\rho_0} \tag{4.8}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \lim_{m \to \infty} \left( \frac{1}{m!} \|P_m\|_\Theta \right)^{\frac{1}{m}} &\leq \lim_{m \to \infty} \left( \frac{1}{m!} C \frac{m!}{\rho_0^m} \|f\|_{\Theta, 2\rho_0} \right)^{\frac{1}{m}} \\ &\leq \frac{1}{\rho_0} \lim_{m \to \infty} (C \|f\|_{\Theta, 2\rho_0})^{\frac{1}{m}} \\ &= \frac{1}{\rho_0}. \end{aligned}$$

Como isto vale para cada $\rho_0 > \rho$, fazendo $\rho_0 \to \infty$ tem-se que

$$\lim_{m \to \infty} \left( \frac{1}{m!} \|P_m\|_\Theta \right)^{\frac{1}{m}} = 0.$$

Segue de (4.6) que

$$(T * f) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} P_m \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E).$$

(1) $T*$ é linear, pois dadas $f,\ g \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que

$$T * (f + \lambda g)(x) = T(\tau_x(f + \lambda g)),$$

para cada $x \in E$. Então

$$\tau_x(f + \lambda g)(y) = (f + \lambda g)(y + x) = f(y + x) + \lambda g(y + x) = \tau_x f(y) + \lambda \tau_x g(y),$$

para todo $y \in E$, e Conseqüentemente

$$\tau_x(f + \lambda g) = \tau_x f + \lambda \tau_x g.$$

Assim

$$\begin{aligned} T * (f + \lambda g)(x) &= T(\tau_x(f + \lambda g)) = T(\tau_x f + \lambda \tau_x g) \\ &= T(\tau_x f) + \lambda T(\tau_x g) = T * f(x) + \lambda T * g(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in E$. Logo,

$$T * (f + \lambda g) = T * f + \lambda T * g$$

e, portanto, $T*$ é linear.

(2) Para provar que a aplicação

$$f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E) \to T * f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$$

é contínua, sejam $\rho_1 > 0$ e $\rho_0 = \rho_1 + \rho > \rho$. Então, da linearidade e da definição de $\|\cdot\|_{\Theta,\rho_1}$, temos

$$\begin{aligned}
\|T * f\|_{\Theta,\rho_1} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho_1^m}{m!} \|P_m\|_{\Theta} \\
\text{por (4.8)} &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho_1^m}{m!} \frac{Cm!}{(\rho_1+\rho)^m} \|f\|_{\Theta,2(\rho_1+\rho)} \\
&\leq C \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho_1^m}{(\rho_1+\rho)^m} \right) \|f\|_{\Theta,2(\rho_1+\rho)} \\
\left(\frac{\rho_1}{(\rho_1+\rho)} < 1 \text{ e existe } C_1 < \infty \text{ tal que}\right) &\leq C_1 \|f\|_{\Theta,2(\rho_1+\rho)}.
\end{aligned}$$

logo, $T*$ é contínua.

(3) Para mostrar que $T*$ é invariante sob translações, sejam $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ e $a, x \in E$, então temos

$$\begin{aligned}
(T * \tau_a f)(x) &= T(\tau_x \circ \tau_a f) \\
&= T(\tau_{x+a} f) \\
&= (T * f)(x + a) \\
&= \tau_a (T * f)(x).
\end{aligned}$$

Portanto $T * \tau_a f = \tau_a (T * f)$ para cada $a \in E$. □

**Teorema 4.1.6.** Seja $(\mathcal{P}_{\Theta}(^m E))_{m=0}^{\infty}$ um $\pi_2$-tipo de holomorfia. Considere a seguinte aplicação

$$\begin{aligned}
\gamma_\theta \quad : \quad & \mathcal{A}_{\Theta} \to [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]' \\
& \mathcal{O} \mapsto \gamma_\theta(\mathcal{O}) \colon \mathcal{H}_{\Theta b}(E) \to \quad \mathbb{K} \\
& \qquad\qquad f \quad \mapsto \quad \gamma_\theta(\mathcal{O})(f) := (\mathcal{O} f)(0).
\end{aligned}$$

A aplicação $\gamma_\theta$ é linear e bijetiva de $\mathcal{A}_{\Theta}$ em $[\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$.

*Demonstração.* Considere a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_\theta \quad : \quad & [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]' \to \mathcal{A}_\Theta \\ & T \mapsto \bar{\gamma}_\theta(T) \cong \mathcal{O} \colon \mathcal{H}_{\Theta b}(E) \to \quad \mathcal{H}_{\Theta b}(E) \\ & \qquad\qquad\qquad f \ \ \mapsto \ \ \bar{\gamma}_\theta T(f) = \mathcal{O}(f) := T * f, \end{aligned}$$

onde $T * f(x) := T(\tau_x f) \in \mathbb{K}$ para cada $x \in E$. Pelo Teorema 4.1.5, $\bar{\gamma}_\theta T$ é um operador de convolução para cada $T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$. Para, $T,\ S \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$\bar{\gamma}_\theta(T + \lambda S)(f) = (T + \lambda S) * f,$$

para toda $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ e

$$(T + \lambda S) * f(x) = (T + \lambda S)(\tau_x f) = T(\tau_x f) + \lambda S(\tau_x f) = T * f(x) + \lambda(S * f)(x),$$

para todo $x \in E$. Logo,

$$\bar{\gamma}_\theta(T + \lambda S) = \bar{\gamma}_\theta(T) + \lambda \bar{\gamma}_\theta(S),$$

o que implica que $\bar{\gamma}_\theta$ é linear.

Agora considere $\mathcal{O} \in \mathcal{A}_\Theta$, a composição $\bar{\gamma}_\theta \circ \gamma_\theta$ e $x \in E$:

$$\begin{aligned} \{[\bar{\gamma}_\theta \circ \gamma_\theta(\mathcal{O})](f)\}(x) &= \{[\bar{\gamma}_\theta(\gamma_\theta \mathcal{O})](f)\}(x) \\ \text{(pela definição de } \bar{\gamma}_\theta) &= [\gamma_\theta \mathcal{O} * f](x) \\ \text{(pela definição de } T * f) &= (\gamma_\theta \mathcal{O})(\tau_x f) \\ \text{(pela definição de } \gamma_\theta \mathcal{O}) &= [\mathcal{O}(\tau_x f)](0) \\ (\mathcal{O} \text{ é invariante sob transalção}) &= \tau_x(\mathcal{O} f)(0) \\ &= \mathcal{O} f(0 + x) \\ &= \mathcal{O} f(x). \end{aligned}$$

Logo, $\bar{\gamma}_\theta \circ \gamma_\theta$ é a identidade em $\mathcal{A}_\Theta$. Considere agora $T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$ e $\gamma_\theta \circ \bar{\gamma}_\theta$:

$$\begin{aligned} [\gamma_\theta \circ \bar{\gamma}_\theta(T)](f) &= \gamma_\theta[\bar{\gamma}_\theta(T)](f) \\ \text{(pela definição de } \gamma_\theta) &= [\bar{\gamma}_\theta(T)]f(0) \\ \text{(pela definição de } \bar{\gamma}_\theta) &= (T * f)(0) \\ &= T(\tau_0 f) \\ &= T(f). \end{aligned}$$

Logo, $\gamma_\theta \circ \bar{\gamma}_\theta$ é a identidade em $[\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$. Com isso tem-se que $\gamma_\theta$ é bijetiva, e a linearidade é clara. $\square$

**Definição 4.1.7.** Seja $(\mathcal{P}_\Theta(^m E))_{m=0}^\infty$ um $\pi_2$-tipo de holomorfia. Dados $T_1,\ T_2 \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$, definimos o *produto de convolução* ou simplesmente a *convolução* de $T_1$ e $T_2$ em $[\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$ por

$$T_1 * T_2 := \gamma_\theta(\mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2) \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]',$$

onde $\mathcal{O}_1 = T_1*$ e $\mathcal{O}_2 = T_2*$.

Considere as álgebras com unidades $(\mathcal{A}_\Theta,\ +,\ \cdot,\ \circ)$ e $([\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]',\ +,\ \cdot,\ *)$. Então $\gamma_\theta$ preserva o produto. De fato, observe que

$$\gamma_\theta(\mathcal{O}_1)(f) = \gamma_\theta(T_1*)f = (T_1 * f)(0) = T_1(f)$$

para toda $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, portanto $\gamma_\theta(T_1*) = T_1$. Assim

$$\begin{aligned} \gamma_\theta(\mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2)(f) &= (\mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2(f))(0) \\ &= (T_1 * (T_2 * f))(0) \\ &= T_1(T_2 * f) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\gamma_\theta \mathcal{O}_1) * (\gamma_\theta \mathcal{O}_2)(f) &= \gamma_\theta \left[(\gamma_\theta(T_1*)*) \circ (\gamma_\theta(T_2*)*)\right](f) \\ &= \left[(\gamma_\theta(T_1*)*) \circ (\gamma_\theta(T_2*)*)(f)\right](0) \\ &= \gamma_\theta(T_1*)[\gamma_\theta(T_2*) * f] \\ &= T_1(T_2 * f), \end{aligned}$$

para toda $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$. Logo

$$\gamma_\theta(\mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2) = \gamma_\theta(\mathcal{O}_1) * \gamma_\theta(\mathcal{O}_2).$$

Além disso, o produto de convolução é associativo e o espaço tem um elemento neutro $\delta \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$, dado por $\delta(f) = f(0)$. De fato, como $1_{\mathcal{A}_\Theta} = id_{[\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]}$ é a unidade em $\mathcal{A}_\Theta$, temos

$$\delta(f) = \gamma_\theta 1_{\mathcal{A}_\Theta}(f) = 1_{\mathcal{A}_\Theta} f(0) = f(0).$$

para cada $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$.

Agora, para $T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$ e $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, temos que

$$\begin{aligned} (T * \delta)(f) &= \gamma_\theta((T*) \circ (\delta*))(f) \\ &= ((T*) \circ (\delta*)(f))(0) \\ &= (T * (\delta * f))(0) = T(\delta * f) = T(f), \end{aligned}$$

e essa última igualdade é valida pois

$$(\delta * f)(x) = \delta(\tau_x f) = \tau_x f(0) = f(x),$$

para todo $x \in E$. Assim $T * \delta = T$ e, por outro lado,

$$\begin{aligned} (\delta * T)(f) &= \gamma_\theta((\delta*) \circ (T*))(f) \\ &= (\delta * (T * f))(0) \\ &= \delta(T * f) = T * f(0) \\ &= T(f), \end{aligned}$$

logo, $\delta * T = T$.

Assim $([\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]',\ +,\ \cdot,\ *)$ com elemento unidade $\delta$, dado por $\delta(f) = f(0)$ para cada $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, é chamado *álgebra de convolução.*

**Teorema 4.1.8.** Se $(\mathcal{P}_\Theta(^m E))_{m=0}^\infty$ é um $\pi_1$ e $\pi_2$-tipo de holomorfia, então a aplicação

$$\mathcal{B} \colon [\mathcal{H}_{\Theta b}(E), \tau_\Theta]' \to Exp_{\Theta'}(E')$$

estabelece um isomorfismo de álgebras.

*Demonstração.* Pela Proposição 3.2.4 temos que $\mathcal{B}$ é um isomorfismo algébrico. Resta provar que $\mathcal{B}$ preserva os produtos nas álgebras. Seja $T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$ e $\phi \in E'$, temos que

$$(T * e^\phi)(x) = T(\tau_x e^\phi) = e^{\phi(x)} T(e^\phi)$$

pois $\tau_x e^\phi = e^{\phi(x)} \cdot e^\phi$ para cada $x \in E$. então

$$T * e^\phi = e^\phi \cdot T(e^\phi). \tag{4.9}$$

Então dados $T_1$ e $T_2 \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$,

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{B}(T_1 * T_2)(\phi) & = & (T_1 * T_2)(e^{\phi}) \\
\text{Definição } (T_1 * T_2) & = & \gamma_\theta(T_1 * \circ\, T_2 *)(e^{\phi}) \\
\text{Definição } \gamma_\theta & = & (T_1 * \circ\, T_2 *)(e^{\phi})(0) \\
\text{Definição } T_1 * & = & T_1(\tau_0(T_2 * e^{\phi})) \\
\text{Definição de } \tau & = & T_1(T_2 * (e^{\phi})) \\
\text{Por } (4.9) & = & T_1(e^{\phi} \cdot T_2(e^{\phi})) \\
& = & T_1(e^{\phi}) \cdot T_2(e^{\phi}) \\
& = & \mathcal{B}(T_1)(\phi) \cdot \mathcal{B}(T_2)(\phi)
\end{array}$$

para cada $\phi \in E'$. Então $\mathcal{B}(T_1 * T_2) = \mathcal{B}(T_1)\mathcal{B}(T_2)$. Isto completa o resultado. □

**Exemplo 4.1.9.** C. Gupta em [21], M. Matos em [28] e X. Mujica em [32] provaram que se $E'$ tem a propriedade de aproximação $\lambda$-limitada, então os espaços de polinômios nucleares, polinômios $(s;(r,q))$-quase-nucleares e polinômios $\sigma(p)$-nucleares, de $E$ em $\mathbb{C}$, respectivamente, satisfazem as condições da Definição 4.1.4. Portanto, cada uma destas sequências é um $\pi_2$-tipo de holomorfia de $E$ em $\mathbb{C}$.
Os resultados dos Teoremas 4.1.6 e 4.1.8 foram obtidos nos casos correspondentes nas referências correspondentes.

## 4.2 Teoremas de Existência e Aproximação

Teoremas de divisão para funções inteiras têm uma importância fundamental para demonstração de teoremas de aproximação e existência de soluções para equações de convolução. Para obtermos teoremas de divisão envolvendo a transformada de Borel introduzimos um novo conceito.

**Definição 4.2.1.** Seja $U$ um subconjunto aberto de $E$ e $\mathcal{F}(U)$ uma coleção de funções holomorfas de $U$ em $\mathbb{C}$. Dizemos que $\mathcal{F}(U)$ é *fechada para divisão* se, para cada $f$ e $g$ em $\mathcal{F}(U)$, com $g \neq 0$ e $h = f/g$ uma função holomorfa em $U$, nós temos $h$ em $\mathcal{F}(U)$.
A notação quociente $h = f/g$ é o mesmo que $f(x) = h(x) \cdot g(x)$, para todo $x \in U$.

Não é fácil provar os resultados de divisão no sentido da Definição 4.2.1 para o espaço das funções inteiras de tipo exponencial. Alguns exemplos foram obtidos por C. Gupta em [21] e por M. Matos em [28] para os espaços $Exp(E)$ and $Exp_{(s,m(r;q))}(E)$, respectivamente.

O seguinte resultado foi provado por Gupta em [21].

**Lema 4.2.2.** Seja $U$ um subconjunto aberto e conexo de $E$. Sejam $f$ e $g$ funções holomorfas em $U$, com $g$ não identicamente nula, tal que, para qualquer subespaço afim $S$ de $E$ de dimensão 1, e para qualquer componente conexa $S'$ de $S \cap U$ na qual $g$ não é identicamente nula, a restrição $f|_{S'}$ é divisível por $g|_{S'}$, com o quociente sendo holomorfo em $S'$. Então $f$ é divisível por $g$ com o quociente sendo holomorfo em $U$.

**Teorema 4.2.3.** Seja $(\mathcal{P}_\Theta(^mE))_{m=0}^\infty$ um $\pi_1$ e $\pi_2$ tipo de holomorfia. Se $Exp_{\Theta'}(E')$ é fechado para divisão e $T_1, T_2 \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$ são tais que $T_2 \neq 0$ e $T_1 (P \exp \phi) = 0$ sempre que $T_2 * P \exp \phi = 0$ com $\phi \in E'$ e $P \in \mathcal{P}_\Theta (^mE)$, $m \in \mathbb{N}_0$, então $\mathcal{B}T_1$ é divisível por $\mathcal{B}T_2$ com o quociente sendo um elemento de $Exp_{\Theta'}(E')$.

*Demonstração.* Seja $S$ um subespaço afim de $E'$ de dimensão 1. Então é claro que $S$ é da forma $\{\phi_1 + t\phi_2; t \in \mathbb{C}\}$, onde $\phi_1, \phi_2 \in E'$ são fixados. Suponhamos que $t_0$ é um zero de ordem $k$ de

$$g_2(t) = \mathcal{B}(T_2)(\phi_1 + t\phi_2) = T_2(\exp(\phi_1 + t\phi_2)).$$

Então temos

$$T_2\left(\phi_2^j \exp(\phi_1 + t_0\phi_2)\right) = 0,$$

para cada $j < k$. De fato, temos que

$$g_2(t) = T_2(\exp(\phi_1 + t\phi_2)) = (t - t_0)^k \Phi(t),$$

onde $\Phi(t_0) \neq 0$. Logo, toda derivada de ordem $j < k$ de $g_2$ é nula quando avaliada em $t_0$. Além disso, $g_2 = T_2 \circ \Psi$, onde $\Psi(t) = \exp(\phi_1 + t\phi_2)$, então aplicando a regra da cadeia temos

$$0 = d(g_2)(t_0) = d(T_2 \circ \Psi)(t_0) = d(T_2)(\Psi(t_0)) \circ d(\Psi)(t_0) = T_2 \circ d(\Psi)(t_0) = T_2(\phi_2 \exp(\phi_1 + t_0\phi_2)).$$

Aplicando sucessivas vezes, temos que para todo $j < k$,

$$T_2(\phi_2^j \exp(\phi_1 + t_0\phi_2)) = d^j(g_2)(t_0) = 0.$$

Agora, para $x, y \in E$, temos

$$(T_2 * \phi_2^j \exp(\phi_1 + t_0\phi_2))(x) = T_2(\tau_x(\phi_2^j \exp(\phi_1 + t_0\phi_2)))$$

e

$$\tau_x(\phi_2^j \exp(\phi_1 + t_0\phi_2))(y) = \phi_2^j \exp(\phi_1 + t_0\phi_2)(y + x) = (\phi_2(y + x))^j e^{(\phi_1(y+x)+t_0\phi_2(y+x))}$$

Mas,

$$(\phi_2(y + x))^j = (\phi_2(y) + \phi_2(x))^j = \sum_{m=0}^{j} \binom{j}{m} (\phi_2(y))^m (\phi_2(x))^{j-m},$$

logo

$$\tau_x(\phi_2^j \exp(\phi_1 + t_0\phi_2))(y) = \sum_{m=0}^{j} \binom{j}{m} (\phi_2(y))^m (\phi_2(x))^{j-m} e^{\phi_1(y)+t_0\phi_2(y)} e^{\phi_1(x)+t_0\phi_2(x)}.$$

Então

$$\begin{aligned} T_2(\tau_x(\phi_2^j \exp(\phi_1 + t_0\phi_2))) &= T_2\left(\sum_{m=0}^{j} \binom{j}{m} (\phi_2(x))^{j-m} e^{\phi_1(x)+t_0\phi_2(x)} \phi_2^m e^{\phi_1+t_0\phi_2}\right) \\ &= \sum_{m=0}^{j} \binom{j}{m} (\phi_2(x))^{j-m} e^{\phi_1(x)+t_0\phi_2(x)} T_2(\phi_2^m \exp(\phi_1 + t_0\phi_2)), \end{aligned}$$

e, portanto

$$T_2 * \phi_2^j \exp(\phi_1 + t_0\phi_2) = \sum_{m=0}^{j} \binom{j}{m} \phi_2^{j-m} \exp(\phi_1 + t_0\phi_2)\, T_2(\phi_2^m \exp(\phi_1 + t_0\phi_2)) = 0,$$

para cada $j < k$. Assim segue da hipótese que $T_1\left(\phi_2^j \exp(\phi_1 + t_0\phi_2)\right) = 0$, para todo $j < k$, e isto implica que $t_0$ é um zero de ordem pelo menos $k$ de $g_1(t) = \mathcal{B}T_1(\phi_1 + t\phi_2) = T_1(\exp(\phi_1 + t\phi_2))$. Portanto $\mathcal{B}T_1|_S$ é divisível por $\mathcal{B}T_2|_S$ e o quociente é holomorfo em $S$. Como $S$ é conexo, pelo Lema 4.2.2 temos que $\mathcal{B}T_1$ é divisível por $\mathcal{B}T_2$ e o quociente é inteiro em $E'$. Portanto segue da Definição 4.2.1 que o quociente pertence a $Exp_{\Theta'}(E')$. □

**Teorema 4.2.4.** Se $(\mathcal{P}_\Theta(^mE))_{m=0}^\infty$ é um $\pi_1$ e $\pi_2$ tipo de holomorfia, $Exp_{\Theta'}(E')$ é fechado para divisão e $\mathcal{O}$ pertence a $\mathcal{A}_\Theta$, então o subespaço vetorial de $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, gerado pelas soluções exponenciais polinomiais da equação homogênea $\mathcal{O} = 0$, é denso no subespaço fechado de todas soluções da equação homogênea, isto é, o subespaço vetorial de $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ gerado por

$$\mathcal{L} = \{P \exp\varphi; P \in \mathcal{P}_\Theta(^mE), m \in \mathbb{N}_0, \varphi \in E', \mathcal{O}(P\exp\varphi) = 0\}$$

é denso em

$$\ker \mathcal{O} = \{f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E); \mathcal{O}f = 0\}.$$

*Demonstração.* Se $\mathcal{O}$ é igual a 0, o resultado segue da Proposição 3.1.7 pois, nesse caso $\ker \mathcal{O} = \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$. Suponha que $\mathcal{O}$ é diferente de 0. Pelo Teorema 4.1.6, existe $T$ in $[\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$, $T$ diferente de 0, tal que $\mathcal{O} = T *$. Agora suponha que $X$ em $[\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$ é tal que $X|_{\mathcal{L}} = 0$. Então pelo Teorema 4.2.3, existe $h$ em $Exp_{\Theta'}(E')$ tal que $\mathcal{B}(X) = h \cdot \mathcal{B}(T)$. Pelo Teorema 4.1.8, existe $S$ em $[\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$ tal que $h = \mathcal{B}(S)$ e $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(S) \cdot \mathcal{B}(T) = \mathcal{B}(S * T)$. Portanto $X = S * T$ e para toda $f \in ker\mathcal{O}$, temos que $X * f = S * (T * f) = 0$ e $X(f) = (X * f)(0) = 0$. Assim mostramos que todo $X$ in $[\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$ que se anula no subespaço vetorial de $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ gerador por $\mathcal{L}$ se anula em $\ker \mathcal{O}$. Portanto, como conseqüência do Teorema de Hahn Banach, temos que o subespaço gerado por $\mathcal{L}$, denotado por $\mathcal{J}$, é denso no $\ker \mathcal{O}$, pois caso contrário existiria $f_0 \in \ker \mathcal{O} \backslash \bar{\mathcal{J}}$ e pelo Teorema de Hahn Banach existiria $X \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$ tal que $X(f_0) \neq 0$ e $X|_{\mathcal{J}} = 0$. □

**Teorema 4.2.5.** Se $(\mathcal{P}_{\Theta}(^m E))_{m=0}^{\infty}$ é um $\pi_1$ e $\pi_2$ tipo de holomorfia, $Exp_{\Theta'}(E')$ é fechado para divisão e $\mathcal{O}$ pertence a $\mathcal{A}_{\Theta}$, então sua aplicação transposta $\mathcal{O}^t$ tem as seguintes propriedades:

*(i)* $\mathcal{O}^t\left([\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'\right)$ é o ortogonal a $\ker \mathcal{O}$ em $[\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$.

*(ii)* $\mathcal{O}^t\left([\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'\right)$ é fechado para a topologia fraca-estrela em $[\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$ definida por $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$.

*Demonstração.* Se $\mathcal{O}$ é igual a 0, o resultado é claro. Seja $\mathcal{O}$ diferente de 0 e $T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$ tal que $\mathcal{O} = T *$. Para cada $X \in \mathcal{O}^t\left([\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'\right)$ existe $S \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$ satisfazendo $X = \mathcal{O}^t(S)$. Como, para cada $f \in \ker \mathcal{O}$ temos $X(f) = \mathcal{O}^t(S)(f) = S(\mathcal{O}f) = 0$, então $\mathcal{O}^t\left([\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'\right)$ está contido no ortogonal a $\ker \mathcal{O}$. Por outro lado, se $X$ pertence ao ortogonal a $\ker \mathcal{O}$, vamos provar que $X = S * T$, para algum $S$ no domínio de $\mathcal{O}^t$. Temos que $X(f) = 0$ para toda $f \in \ker \mathcal{O}$. Como $\mathcal{O} \neq 0$, temos que $T \neq 0$ e além disso, se $T * P \exp \phi = 0$ então $\mathcal{O}(P \exp \phi) = 0$, daí $P \exp \phi \in \ker \mathcal{O}$ e, portanto, $X(P \exp \phi) = 0$. Então pelo Teorema 4.2.3 existe $h \in Exp_{\Theta'}(E')$ tal que $\mathcal{B}(X) = h \cdot \mathcal{B}(T)$ e pelo Teorema 4.1.8 existe $S \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$ tal que $h = \mathcal{B}(S)$ e portanto $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(S) \cdot \mathcal{B}(T) = \mathcal{B}(S * T)$. Portanto $X = S * T$ e para cada $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, temos que

$$\begin{aligned} X(f) = (S * T)(f) &= ((S * T) * f)(0) = (S * (T * f))(0) \\ &= S(T * f) = S(\mathcal{O}f) = \mathcal{O}^t(S)(f), \end{aligned}$$

e isso implica que $X = \mathcal{O}^t(S)$ e portanto $X$ pertence a $\mathcal{O}^t\left([\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'\right)$. Portanto $(i)$ está provado.
Agora note que o ortogonal a $\ker \mathcal{O}$ é igual

$$\{T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]' ; T(f) = 0, \forall f \in \ker \mathcal{O}\} = \bigcap_{f \in \ker \mathcal{O}} \left\{T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]' ;\ T(f) = 0\right\}.$$

Agora, para cada $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, $\left\{T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]' ;\ T(f) = 0\right\}$ é fechado na topologia fraca-estrela em $[\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$. De fato, se $(A_i)_{i\in I}$ é uma rede em

$$\{T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'; T(f) = 0\},$$

convergindo para $A$ para a topologia fraca-estrela, então $A_i(g)$ converge para $A(g)$, para toda $g \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$. Em particular, para cada $f \in \ker \mathcal{O}$, $A_i(f)$ converge para $A(f)$ e como $A_i(f) = 0$, para todo $i \in I$, segue que $A(f) = 0$. Logo, $A \in \{T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'; T(f) = 0\}$ e, assim $\{T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'; T(f) = 0\}$ é fechado para a topologia fraca estrela. Portanto, $(ii)$ está provado. □

Enunciaremos e provaremos o teorema de existência de soluções para equações de convolução, mas para isto precisamos do seguinte resultado. Veja ([22], página 308).

**Lema 4.2.6.** Se $E$ e $F$ são espaços de Fréchet e $u\colon E \longrightarrow F$ é uma aplicação linear e contínua, então as seguintes condições são equivalentes:

$(a)$ $u(E) = F$;

$(b)$ $u^t\colon F' \longrightarrow E'$ é injetora e $u^t(F')$ é fechado para topologia fraca-estrela de $E'$ definida por $E$.

**Teorema 4.2.7.** Se $(\mathcal{P}_\Theta(^mE))_{m=0}^\infty$ é um $\pi_1$ e $\pi_2$ tipo de holomorfia, $Exp_{\Theta'}(E')$ é fechado para divisão e $\mathcal{O}$ é um operador de convolução não nulo, então $\mathcal{O}(\mathcal{H}_{\Theta b}(E)) = \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$.

*Demonstração.* Pela Proposição 2.4.3, $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ é um espaço de Fréchet. Pelo Lema 4.2.6 $(b)$ e pelo Teorema 4.2.5 $(ii)$, para mostrar a sobrejetividade de $\mathcal{O}$, basta provar que $\mathcal{O}^t$ é injetora. Temos que $\mathcal{O} = T*$ para algum $T$ in $[\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$, então para todo $S \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$ e $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ temos que $(\mathcal{O}^t S)(f) = S(\mathcal{O} f) = S(T * f) = (S * T)(f)$. Logo $\mathcal{O}^t S = S * T$ e se $\mathcal{O}^t S = 0$, então $S * T = 0$ e $\mathcal{B}(S * T) = 0$. Como $\mathcal{O} = T* \neq 0$, segue que $\mathcal{B}T \neq 0$ e como $\mathcal{B}(S * T) = \mathcal{B}S \cdot \mathcal{B}T$, temos que $\mathcal{B}S = 0$. Portanto $S = 0$ e isto implica que $\mathcal{O}^t$ é injetora. □

**Exemplo 4.2.8.** Se $E'$ tem a propriedade de aproximação $\lambda$-limitada, então os tipos de holomorfia $(\mathcal{P}_N(^mE))_{m=0}^{\infty}$, $\left(\mathcal{P}_{\tilde{N},(s;(r,q))}(^mE)\right)_{m=0}^{\infty}$ e $\left(\mathcal{P}_{\sigma(p)}(^mE)\right)_{m=0}^{\infty}$ são $\pi_1$ e $\pi_2$-tipos de holomorfia, e os espaços $Exp(E')$ e $Exp_{(s',m(r';q'))}(E')$ são fechados para divisão. Em particular obtemos os Teoremas 4.2.3, 4.2.4 e 4.2.7 para os casos de C. Gupta [21] e M. Matos [28].

**Problemas em aberto**:

(1) O espaço $Exp_{\tau_{(p)}}(E)$ de X. Mujica [32] é fechado para divisão? Se sim, os resultados de aproximação e existência (Teoremas 4.2.4 e 4.2.7) são verdadeiros para equações de convolução em $\mathcal{H}_{\sigma(p)}(^mE)$.

(2) É possível obter um "algoritmo"deste tipo para funções holomorfas de um dado tipo (não necessariamente limitado) e uma dada ordem? Se for possível, tais resultados generalizariam resultados obtidos por V. Fávaro [17, 18], A. Martineau [25] e M. Matos [26, 27].

# CAPÍTULO 5

# FATORAÇÃO DE FUNÇÕES INTEIRAS NUCLEARES DE TIPO LIMITADO

## 5.1 Funções Inteiras Nucleares, Pietsch-Integrais e Grothendieck-Integrais de Tipo Limitado

Neste capítulo, continuamos o estudo sobre a caracterização da propriedade de Radon-Nikodým em termos de classes de aplicações holomorfas de tipo limitado. Estudamos as relações entre o espaço $\mathcal{H}_b(E;F)$ das funções inteiras de tipo limitado, o espaço $\mathcal{H}_{Nb}(E;F)$ das funções inteiras nucleares de tipo limitado, o espaço $\mathcal{H}_{PIb}(E;F)$ das funções inteiras Pietsch-integrais de tipo limitado, e o espaço $\mathcal{H}_{GIb}(E;F)$ das funções inteiras Grothendieck-integrais de tipo limitado. Estendemos para o caso de funções inteiras resultados de R. Alencar [2] e R. Cilia e R. Gutiérrez [10] no caso de polinômios $m$-homogêneos.

Como sempre, temos as inclusões contínuas $\mathcal{P}_N(^mE;F) \subset \mathcal{P}_{PI}(^mE;F) \subset \mathcal{P}_{GI}(^mE;F)$, com $\|P\|_{GI} \leq \|P\|_{PI} \leq \|P\|_N$, assim temos que $\mathcal{H}_{Nb}(E;F) \subset \mathcal{H}_{PIb}(E;F) \subset \mathcal{H}_{GIb}(E;F)$ e as inclusões são contínuas. Veremos resultados sobre as condições em $E$ que garantem as inclusões opostas.

A seguinte proposição estende os resultados de R. Alencar [1, 2].

**Proposição 5.1.1.** Seja $E$ um espaço de Banach. Então as seguintes condições são equivalentes.

$(i)$ $E'$ tem a propriedade de Radon-Nikodým.

$(ii)$ Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{P}_N(^mE;F) = \mathcal{P}_{PI}(^mE;F)$ para todo espaço de Banach $F$.

$(iii)$ Para cada $m \in \mathbb{N}$ e cada espaço de Banach F tem-se que $\mathcal{P}_N(^mE;F) = \mathcal{P}_{PI}(^mE;F)$, com

$$\|P\|_{PI} \leq \|P\|_N \leq \frac{m^m}{m!}\|P\|_{PI}.$$

$(iv)$ $\mathcal{H}_{Nb}(E;F) = \mathcal{H}_{PIb}(E;F)$, para cada espaço de Banach $F$. Neste caso os espaços $\mathcal{H}_{Nb}(E;F)$ e $\mathcal{H}_{PIb}(E;F)$ são topologicamente isomorfos, para cada espaço de Banach $F$.

$(v)$ $\mathcal{L}_N(E;F) = \mathcal{L}_{PI}(E;F)$, para cada espaço de Banach $F$.

*Demonstração.* $(i) \Rightarrow (iii)$. Veja R. Alencar [2, Proposição 1].

$(ii) \Rightarrow (iii)$ é claro.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Veja G. Botelho e D. Pellegrino [4, Teorema 3].

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Seja $F$ uma espaço de Banach. Como sempre, temos $\mathcal{H}_{Nb}(E;F) \subset \mathcal{H}_{PIb}(E;F)$. Mostremos a inclusão oposta. Seja $f = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\hat{d}^m f(0) \in \mathcal{H}_{PIb}(E;F)$, com $P_m = \frac{1}{m!}\hat{d}^m f(0) \in \mathcal{P}_{PI}(^mE;F)$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$ e $\lim_{m\to\infty}(\|P_m\|_{PI})^{\frac{1}{m}} = 0$.

Como $P_m \in \mathcal{P}_{PI}(^mE;F)$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$, então por $(ii)$, temos que $P_m \in \mathcal{P}_N(^mE;F)$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$. Além disso $\|P_m\|_N \leq \frac{m^m}{m!}\|P_m\|_{PI}$. Logo

$$(\|P_m\|_N)^{\frac{1}{m}} \leq \left(\frac{m^m}{m!}\|P_m\|_{PI}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{m}{\sqrt[m]{m!}}\|P_m\|_{PI}^{\frac{1}{m}} \leq e \cdot \|P_m\|_{PI}^{\frac{1}{m}} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto $f \in \mathcal{H}_{Nb}(E;F)$. Segue das desigualdades anteriores que os espaços $\mathcal{H}_{Nb}(E;F)$ e $\mathcal{H}_{PIb}(E;F)$ são topologicamente isomorfos.

$(iv) \Rightarrow (v)$. Seja $T \in \mathcal{L}_{PI}(E;F)$. Da Proposição 2.3.9 segue que, $T \in \mathcal{L}_{PI}(E;F) \subset \mathcal{H}_{PIb}(E;F) = \mathcal{H}_{Nb}(E;F)$. Assim $T \in \mathcal{H}_{Nb}(E;F)$. Portanto $T \in \mathcal{L}_N(E;F)$.

$(v) \Leftrightarrow (i)$. Veja Alencar [1, Teorema 1.3]. Neste caso aplicação identidade de $\mathcal{L}_N(E;F)$ em $\mathcal{L}_{PI}(E;F)$ é uma isometria. $\square$

**Observação 5.1.2.** D. Carando, em [7, Teorema 1.4], provou que se $E'$ tem a propriedade de Radon-Nikodým, então para cada espaço de Banach $F$, os espaços $\mathcal{P}_N({}^mE;F)$ e $\mathcal{P}_{PI}({}^mE;F)$ são isométricos. Assim a condição $(iii)$ poderia ser trocada por esta.

A seguinte proposição estende resultado de R. Cilia e J. Gutiérrez [10, Teorema 3].

**Proposição 5.1.3.** Suponhamos que $E'$ tem a propriedade de aproximação. Então as seguintes condições são equivalentes.

$(i)$ $E'$ tem a propriedade de Radon-Nikodým.

$(ii)$ Para cada $m \in \mathbb{N}$ e cada espaço de Banach $F$ tem-se que $\mathcal{P}_N({}^mE;F) = \mathcal{P}_{GI}({}^mE;F)$, com

$$\|P\|_{GI} \leq \|P\|_N \leq \frac{m^m}{m!}\|P\|_{GI}.$$

$(iii)$ $\mathcal{H}_{Nb}(E;F) = \mathcal{H}_{GIb}(E;F)$, para cada espaço de Banach $F$. Neste caso os espaços topológicos $\mathcal{H}_{Nb}(E;F)$ e $\mathcal{H}_{GIb}(E;F)$ são topologicamente isomorfos, para cada espaço de Banach $F$.

$(iv)$ $\mathcal{L}_N(E;F) = \mathcal{L}_{GI}(E;F)$ para cada espaço de Banach $F$.

*Demonstração.* $(i) \Rightarrow (ii)$. Veja R. Cilia e J. Gutiérrez [10, Teorema 3].

$(ii) \Rightarrow (iii)$ e $(iii) \Rightarrow (iv)$ Análogos à Proposição 5.1.1.

$(i) \Leftrightarrow (iv)$. Veja [13, Teorema VIII.4.6].

□

**Observação 5.1.4.** D. Carando, em [6, Corolário 3], provou que se $E'$ tem a propriedade de Radon-Nikodým e propriedade de aproximação, então para cada espaço de Banach $F$, os espaços $\mathcal{P}_N({}^mE;F)$ e $\mathcal{P}_{GI}({}^mE;F)$ são isométricos. Assim a condição $(ii)$ poderia ser trocada por esta.

A seguinte proposição foi provada por R. Cilia e Gutiérrez em [10, Proposição 5]. Daremos uma outra demonstração desta proposição, pois as estimativas obtidas na demonstração serão chave fundamental na prova da próxima proposição.

**Proposição 5.1.5.** Sejam $P \in \mathcal{P}_{GI}({}^mE;F)$, $S \in \mathcal{L}(F;Y)$ e $T \in \mathcal{L}(X;E)$ operadores fracamente compactos. Então

$(a)$ $S \circ P \in \mathcal{P}_{PI}(^mE; Y)$. Além disso, existe $C = C(S) > 0$ tal que

$$\|S \circ P\|_{PI} \leq C \cdot \|P\|_{GI}.$$

$(b)$ $J_F \circ P \circ T \in \mathcal{P}_N(^mX; F'')$. Além disso, existe $C = C(T) > 0$ tal que

$$\|J_F \circ P \circ T\|_N \leq C^m \cdot \|P\|_{GI}.$$

*Demonstração.* $(a)$. Como $S$ é fracamente compacto, existem um espaço de Banach reflexivo $R$, operadores $A \in \mathcal{L}(F; R)$ e $B \in \mathcal{L}(R; Y)$ tais que $S = B \circ A$ ver [23]. Como $P$ é Grothendieck-integral $A \circ P \in \mathcal{P}_{GI}(^mE; R)$. Como $R = R''$, segue que $A \circ P \in \mathcal{P}_{PI}(^mE; R)$ e $\|A \circ P\|_{PI} = \|A \circ P\|_{GI} \leq \|A\| \cdot \|P\|_{GI}$. Assim $S \circ P = B \circ A \circ P$ é Pietsch-integral e

$$\|S \circ P\|_{PI} = \|B \circ A \circ P\|_{PI} \leq \|B\| \cdot \|A \circ P\|_{PI} \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|P\|_{GI}.$$

Tomando $C = \|B\| \cdot \|A\|$, temos

$$\|S \circ P\|_{PI} \leq C \cdot \|P\|_{GI}.$$

$(b)$. Como $T$ é fracamente compacto, existem um espaço de Banach reflexivo $R$ e operadores $A \in \mathcal{L}(X; R)$ e $B \in \mathcal{L}(R; E)$ tais que $T = B \circ A$. Como $P$ é Grothendieck-integral, temos que $J_F \circ P \circ B \in \mathcal{P}_{GI}(^mR; F'')$. Como $F''$ é complementado em seu bidual, temos que $J_F \circ P \circ B$ é Pietsch-integral. Como $R$ é um espaço reflexivo, temos pelo Corolário 1.1.4 que $R'$ tem a propriedade de Radon-Nikodým. Portanto pela Proposição 5.1.1 temos que $J_F \circ P \circ B$ é um polinômio nuclear , com

$$\|J_F \circ P \circ B\|_N \leq e^m \cdot \|J_F \circ P \circ B\|_{PI}. \tag{5.1}$$

Portanto $J_F \circ P \circ T = J_F \circ P \circ B \circ A$ é nuclear, com

$$\begin{aligned}
\|J_F \circ P \circ T\|_N &\leq \|J_F \circ P \circ B\|_N \cdot \|A\|^m \quad \text{Por (5.1)} \\
&\leq \|J_F \circ P \circ B\|_{PI} \cdot e^m \cdot \|A\|^m \quad \text{(por [35] p. 60)} \\
&= \|J_F \circ P \circ B\|_{GI} \cdot e^m \cdot \|A\|^m \\
&\leq \|P \circ B\|_{GI} \cdot e^m \cdot \|A\|^m \\
&\leq e^m \cdot \|B\|^m \cdot \|A\|^m \cdot \|P\|_{GI}.
\end{aligned}$$

Tomando $C = e \cdot \|B\| \cdot \|A\|$, temos que

$$\|J_F \circ P \circ T\|_N \leq C^m \cdot \|P\|_{GI}.$$

$\square$

Na seguinte proposição, estendemos o resultado acima para o caso de funções inteiras de tipo limitado.

**Proposição 5.1.6.** Seja $f \in \mathcal{H}_{GIb}(E;F)$, e sejam $S \in \mathcal{L}(F;Y)$, $T \in \mathcal{L}(X;E)$ operadores fracamente compactos. Então

$(a)$ $S \circ f \in \mathcal{H}_{PIb}(E;Y)$.

$(b)$ $J_F \circ f \circ T \in \mathcal{H}_{Nb}(X;F'')$.

*Demonstração.* Seja $f = \sum_{m=0}^{\infty} P_m \in \mathcal{H}_{GIb}(E;F)$, com $P_m = \frac{1}{m!}\hat{d}^m f(0) \in \mathcal{P}_{GI}(^m E;F)$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$ e $\lim_{m\to\infty} \|P_m\|_{GI}^{\frac{1}{m}} = 0$.

$(a)$. Como $S$ é fracamente compacto e $P_m \in \mathcal{P}_{GI}(^m E;F)$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$, segue da Proposição 5.1.5 $(a)$ que $S \circ P_m \in \mathcal{P}_{PI}(^m E;Y)$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$ e existe $C(S) > 0$ tal que

$$\|S \circ P_m\|_{PI} \leq C(S) \cdot \|P_m\|_{GI}.$$

Assim

$$\lim_{m\to\infty} (\|S \circ P_m\|_{PI})^{\frac{1}{m}} \leq \lim_{m\to\infty} C(S)^{\frac{1}{m}} \cdot (\|P_m\|_{GI})^{\frac{1}{m}} = 0.$$

Portanto $S \circ f \in \mathcal{H}_{PIb}(E;Y)$.

$(b)$. Como $T$ é fracamente compacto e $P_m \in \mathcal{P}_{GI}(^m E;F)$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$, segue então da Proposição 5.1.5$(b)$ que $J_F \circ P_m \circ T \in \mathcal{P}_N(^m X;F'')$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$ e existe $C(T) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} (\|J_F \circ P_m \circ T\|_N)^{\frac{1}{m}} &\leq \lim_{m\to\infty} [C(T)^m \cdot \|P_m\|_{GI}]^{\frac{1}{m}} \\
&= C(T) \cdot \lim_{m\to\infty} \|P_m\|_{GI}^{\frac{1}{m}} = 0.
\end{aligned}$$

Portanto $J_F \circ f \circ T \in \mathcal{H}_{Nb}(X;F'')$. $\square$

## 5.2 Teorema de Fatoração

Agora chegamos ao resultado principal deste capítulo. Uma função $f \in \mathcal{H}_b(E;F)$ pertence a $\mathcal{H}_{Nb}(E;F)$ se e somente se existem um espaço de Banach $Z$, e um operador fracamente compacto $T \in \mathcal{L}(E;Z)$ e uma função $g \in \mathcal{H}_{PIb}(Z;F)$ tais que $f = g \circ T$. Uma versão polinomial deste resultado foi obtida por R. Cilia e J. Gutiérrez [10].

Para provar o resultado principal do capítulo, provaremos o seguinte lema cuja prova é uma adaptação do Lema 8.6.4 do livro de Pietsch [34].

**Lema 5.2.1.** Seja $(\lambda_j) \in \ell_1$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $(\rho_j) \in c_0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^{-2}|\lambda_j| \leq (1+\varepsilon)\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|$$

e $1 \geq \rho_1 \geq \rho_2 \geq \ldots > 0$.

*Demonstração.* Note que

$$\sigma_k = \sum_{j=k}^{\infty}|\lambda_j| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\ . \tag{5.2}$$

Vamos construir $(\rho_j) \in c_0$ com $1 \geq \rho_1 \geq \rho_2 \geq \ldots \geq \rho_j \geq \ldots > 0$ e satisfazendo

$$\sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^{-2}|\lambda_j| < (1+\varepsilon)\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|. \tag{5.3}$$

Se existe $n = \max\{k \in \mathbb{N} : \sigma_k > 0\}$, definamos

$$\rho_j = \begin{cases} (1+\varepsilon)^{\frac{-1}{2}}, & j \leq n; \\ (1+j\varepsilon)^{\frac{-1}{2}}, & j > n. \end{cases}$$

Note que para $j > n$

$$|\lambda_j| \leq \sigma_j = 0.$$

Então

$$\sum_{j=1}^{\infty}[\rho_j]^{-2}|\lambda_j| \quad = \quad \sum_{j=1}^{n}(1+\varepsilon)|\lambda_j|$$

Para o caso em que $\sigma_k > 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$, tendo que $\sigma_k \to 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$(\sigma_{n+1})^{\frac{1}{2}} \leq \min\left\{\frac{\varepsilon\sigma_1}{2}, 1\right\}. \tag{5.4}$$

Fixe um $n$ satisfazendo (5.4), e seja

$$\rho_j = \begin{cases} 1, & j \leq n; \\ (\sigma_j)^{\frac{1}{4}}, & j > n. \end{cases}$$

Como $\sigma_j \longrightarrow 0$, então $\rho_j \longrightarrow 0$ e $(\rho_j) \in c_0$. Além disso, $1 \geq \rho_1 \geq \ldots \geq \rho_j \geq \ldots > 0$. Note que $\sigma_k = \sum_{j=k}^{\infty} |\lambda_j| \geq \sum_{j=k}^{M+1} |\lambda_j| \geq \sum_{j=k+1}^{M+1} |\lambda_j|$ para cada $k \leq M+1 \in \mathbb{N}$. Isto implica que:

$$[\sigma_k]^{\frac{1}{2}} \geq \left( \sum_{j=k}^{M+1} |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{2}} \geq \left( \sum_{j=k+1}^{M+1} |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.5}$$

Segue para cada $M > n$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{M} \rho_k^{-2} |\lambda_k| &= \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| + \sum_{k=n+1}^{M} \rho_k^{-2} |\lambda_k| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| + \sum_{k=n+1}^{M} \rho_k^{-2} \left[ \left( \left( \sum_{j=k}^{M+1} |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{4}} \right)^4 - \left( \left( \sum_{j=k+1}^{M+1} |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{4}} \right)^4 \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| + \sum_{k=n+1}^{M} ([\sigma_k]^{\frac{1}{4}})^{-2} \cdot \\
&\quad \left[ \left( \left( \sum_{j=k}^{M+1} |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 + \left( \left( \sum_{j=k+1}^{M+1} |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \right] \\
&\quad \left[ \left( \left( \sum_{j=k}^{M+1} |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 - \left( \left( \sum_{j=k+1}^{M+1} |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| + \sum_{k=n+1}^{M} ([\sigma_k]^{\frac{-1}{2}}) \cdot \\
&\quad \left[ \left( \sum_{j=k}^{M+1} |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{j=k+1}^{M+1} |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&\quad \left[ \left( \sum_{j=k}^{M+1} |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{2}} - \left( \sum_{j=k+1}^{M+1} |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{2}} \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{(Por 5.5)} \quad &\leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| + \sum_{k=n+1}^{M} 2 \left[ \left( \sum_{j=k}^{M+1} |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{2}} - \left( \sum_{j=k+1}^{M+1} |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| + 2 \Bigg\{ \left[ \left( \sum_{j=n+1}^{M+1} |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{2}} - \left( \sum_{j=(n+1)+1}^{M+1} |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{2}} \right] + \\
&+ \left[ \left( \sum_{j=n+2}^{M+1} |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{2}} - \ldots - \left( \sum_{j=(M-1)+1}^{M+1} |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{2}} \right] + \\
&+ \left[ \left( \sum_{j=M}^{M+1} |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{2}} - \left( \sum_{j=M+1}^{M+1} |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{2}} \right] \Bigg\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| + 2 \left\{ \left[ \left( \sum_{j=n+1}^{M+1} |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{2}} - \left( \sum_{j=M+1}^{M+1} |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| + 2 \left( \sum_{j=n+1}^{M+1} |\lambda_j| \right)^{\frac{1}{2}} \\
\text{(Por 5.5)} \quad &\leq \sigma_1 + 2(\sigma_{n+1})^{\frac{1}{2}} \\
\text{(Por 5.4)} \quad &\leq \sigma_1 + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sigma_1 \\
&= (1+\varepsilon)\sigma_1 = (1+\varepsilon) \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|.
\end{aligned}
$$

como queríamos mostrar. □

**Teorema 5.2.2.** Dada $f \in \mathcal{H}(E;F)$ , as seguintes condições são equivalentes:

$(i)$ $f \in \mathcal{H}_{Nb}(E;F)$.

$(ii)$ $f$ admite uma fatoração da forma

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "T"'] & & F \\
& Z \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

onde $Z$ é espaço de Banach, $g \in \mathcal{H}_{Nb}(Z;F)$ e $T \in \mathcal{L}(E;Z)$ é um operador compacto.

$(iii)$ $f$ admite uma fatoração da forma

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "T"'] & & F \\ & R \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

onde $R$ é um espaço de Banach separável e reflexivo, $g \in \mathcal{H}_{Nb}(R; F)$ e $T \in \mathcal{L}(E; R)$ é um operador compacto.

$(iv)$ $f$ admite uma fatoração da forma

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "T"'] & & F \\ & Z \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

onde $Z$ é um espaço de Banach, $g \in \mathcal{H}_{PIb}(Z; F)$ e $T \in \mathcal{L}(E; Z)$ é um operador fracamente compacto.

*Demonstração.* $(i) \Rightarrow (ii)$. Seja $f \in \mathcal{H}_{Nb}(E; F)$. Considere $f = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(0)$ com

$(a)$ $\frac{1}{m!} \hat{d}^m f(0) \in \mathcal{P}_N({}^m E; F)$ para todo $m = 1 \ldots,$

$(b)$ $\lim_{m \to \infty} (\frac{1}{m!} \|\hat{d}^m f(0)\|_N)^{\frac{1}{m}} = 0.$

Seja $\varepsilon > 0$. Como $P_m = \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(0)$ é um polinômio nuclear, para cada $m \in \mathbb{N}$ escolhemos uma representação nuclear

$$P_m(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{(m)} [a_j^{(m)}(x)]^m y_j^{(m)} \qquad (x \in E),$$

onde $(a_j^{(m)})_{j=1}^{\infty} \subset E'$, $(y_j^{(m)})_{j=1}^{\infty} \subset F$ com $\|a_j^{(m)}\| = 1 = \|y_j^{(m)}\|$ para cada $j, m \in \mathbb{N}$ e $(\lambda_j^{(m)})_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j^{(m)}| < (1 + \varepsilon) \|P_m\|_N.$$

Pelo Lema 5.2.1, para cada $m$ escolhemos $(\rho_j^{(m)}) \in c_0$ com $1 \geq \rho_1^{(m)} \geq \rho_2^{(m)} \geq \ldots \geq \rho_j^{(m)} \geq \ldots > 0$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} [\rho_j^{(m)}]^{-2} |\lambda_j^{(m)}| < (1 + \varepsilon)^2 \|P_m\|_N. \tag{5.6}$$

Agora, para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos

$$\omega_j^{(m)} \colon = [\rho_j^{(m)}]^{\frac{2}{m}}, \text{ para cada } j \in \mathbb{N}. \tag{5.7}$$

Como $\rho_j^{(m)} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$, então $\omega_j^{(m)} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Além disso, $|\omega_j^{(m)}| \leq 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, pois $|\rho_j^{(m)}| \leq 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Agora, para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos o operador $u_m \colon E \to c_0$ por

$$u_m(x) \colon = \left(\omega_j^{(m)} a_j^{(m)}(x)\right)_{j=1}^{\infty}.$$

Vejamos que $u_m$ está bem definido. Para cada $x \in E$, temos que

$$0 \leq |\omega_j^{(m)} a_j^{(m)}(x)| = |\omega_j^{(m)}| \cdot |a_j^{(m)}(x)| \leq |\omega_j^{(m)}| \cdot \|a_j^{(m)}\| \cdot \|x\| \leq |\omega_j^{(m)}| \cdot \|x\|.$$

Fazendo $j$ tender a infinito temos que $\omega_j^{(m)} a_j^{(m)}(x) \to 0$, pois $\omega_j^{(m)} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$. É claro que $u_m$ é linear para cada $m$. Então temos que $u_m \in \mathcal{L}(E; c_0)$ , pois para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\|u_m\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|u_m(x)\|_\infty \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} \| \left(\omega_j^{(m)} a_j^{(m)}(x)\right)_{j=1}^{\infty} \|_\infty \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} \sup_j |\omega_j^{(m)}| \left|a_j^{(m)}(x)\right| \\
(\text{Por } |\omega_j^{(m)}| \leq 1 \text{ para todo } j \in \mathbb{N}) \quad &\leq \sup_j \sup_{\|x\|\leq 1} \left|a_j^{(m)}(x)\right| \\
&= \sup_j \|a_j^{(m)}\| = 1.
\end{aligned}$$

Mostremos que $u_m$ é compacto para cada $m$. Considere

$$u_m^k(x) \colon = (\omega_1^{(m)} a_1^{(m)}(x), \ldots, \omega_k^{(m)} a_k^{(m)}(x), 0, 0, \ldots).$$

Então

$$\begin{aligned}
\|(u_m - u_m^k)(x)\|_\infty &= \|(\omega_j^{(m)} a_j^{(m)}(x))_{j=k+1}^{\infty}\|_\infty \\
&= \sup_{j\geq k+1} |\omega_j^{(m)} a_j^{(m)}(x)| \\
&= \sup_{j\geq k+1} |\omega_j^{(m)}| \cdot |a_j^{(m)}(x)| \\
&\leq \sup_{j\geq k+1} |\omega_j^{(m)}| \cdot \|a_j^{(m)}\| \cdot \|(x)\| \\
&= \left(\sup_{j\geq k+1} |\omega_j^{(m)}|\right) \cdot \|x\|
\end{aligned}$$

que converge para zero, quando $k$ tende a infinito, pois $\omega_j^{(m)} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$, mostrando que $u_m$ é limite de operadores de posto finito. Portanto $u_m$ é compacto para cada $m \in \mathbb{N}$.

Considere a seguinte seqüência $(\beta_m)_{m=1}^{\infty} = (\|P_m\|_N^{\frac{1}{2m}})_{m=1}^{\infty}$. Temos por hipótese que $\beta_m \to 0$, logo temos que $(\beta_m)_{m=1}^{\infty}$ é limitada, ou seja $|\beta_m| \leq C$ para todo $m$. Seja $T\colon E \to c_0(c_0)$ o operador definido por

$$T(x) \colon = (\beta_m u_m(x))_{m=1}^{\infty} \quad \text{para cada} \quad x \in E.$$

Vejamos que $T$ está bem definido. Seja $x \in E$. Logo

$$\begin{aligned} \|\beta_m u_m(x) - (0,0,0,0,\ldots)\|_\infty &= \|\beta_m u_m(x)\|_\infty \\ &\leq |\beta_m| \cdot \|u_m\| \cdot \|x\| \\ &\leq |\beta_m| \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

Como $\beta_m \to 0$, temos que $\beta_m u_m(x) \to 0$ em $c_0$. Portanto $T$ está bem definido. E temos que

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| \\ &= \sup_{\|x\|\leq 1} \sup_m \|\beta_m u_m(x)\|_\infty \\ &= \sup_m |\beta_m| \sup_{\|x\|\leq 1} \|u_m(x)\|_\infty \\ &\leq C \sup_m \|u_m\| \\ (\text{Por } \|u_m\| \leq 1 \text{ para todo } m) \quad &\leq C < \infty. \end{aligned}$$

Então $T \in \mathcal{L}(E; c_0(c_0))$.

Seja $i_m\colon c_0 \to c_0(c_0)$ a inclusão natural para cada $m \in \mathbb{N}$, definida por

$$i_m\left((\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\right) \colon = ((0),(0),\ldots,\overset{(m)}{(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}},(0),(0),\ldots) \text{ para cada } (\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0.$$

Então $i_m \circ u_m\colon E \to c_0(c_0)$ é um operador compacto. Assim, definindo para cada $k \in \mathbb{N}$ e $x \in E$,

$$\begin{aligned} T_k(x) \quad &\colon = \quad (\beta_1 u_1(x),\ldots,\beta_k u_k(x),(0),(0),\ldots) \\ &= \quad \sum_{j=1}^{k} \beta_j \cdot i_j \circ u_j(x). \end{aligned}$$

Temos que $T_k$ é um operador compacto para cada $k \in \mathbb{N}$ e

$$\begin{aligned} \|(T - T_k)(x)\| &= \| \left(\beta_m u_m(x)\right)_{m=k+1}^{\infty} \| \\ &= \sup_{m \geq k+1} \|\beta_m u_m(x)\|_\infty \\ &\leq \sup_{m \geq k+1} |\beta_m| \|u_m\| \|x\| \\ &\leq \left( \sup_{m \geq k+1} |\beta_m| \right) \|x\|. \end{aligned}$$

Como $\beta_m \to 0$, temos que $T_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} T$ e conseqüentemente $T$ é um operador compacto.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja

$$\alpha_m = \frac{1}{\|P_m\|_N^{\frac{1}{2}}}.$$

Sejam $\pi_m \colon c_0(c_0) \to c_0$ e $p_j \colon c_0 \to \mathbb{C}$ as projeções canônicas. Se definimos para cada $m \in \mathbb{N}$, $Q_m \colon c_0 \to F$ por

$$Q_m = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_m [\rho_j^{(m)}]^{-2} \lambda_j^{(m)} \cdot [p_j(\cdot)]^m \cdot y_j^{(m)},$$

então $Q_m \in \mathcal{P}_N({}^m c_0; F)$ e

$$\begin{aligned} \|Q_m\|_N &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|p_j\|^m \alpha_m \cdot [\rho_j^{(m)}]^{-2} \cdot |\lambda_j^{(m)}| \cdot \|y_j^{(m)}\| \\ &= \alpha_m \sum_{j=1}^{\infty} [\rho_j^{(m)}]^{-2} \cdot |\lambda_j^{(m)}| \\ \text{(Por } 5.6) \quad &\leq \alpha_m (1+\varepsilon)^2 \|P_m\|_N \\ \text{(Pela definição de } \alpha_m \text{ para cada } m \in \mathbb{N}) \quad &= (1+\varepsilon)^2 \|P_m\|_N^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Se definimos $g \colon c_0(c_0) \to F$ por $g = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m \circ \pi_m$, então $Q_m \circ \pi_m \in \mathcal{P}_N({}^m c_0(c_0); F)$ e

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} (\|Q_m \circ \pi_m\|_N)^{\frac{1}{m}} &\leq \lim_{m\to\infty} (\|Q_m\|_N \|\pi_m\|^m)^{\frac{1}{m}} \\ &\leq \lim_{m\to\infty} (\|Q_m\|_N)^{\frac{1}{m}} \\ &\leq \lim_{m\to\infty} [(1+\varepsilon)^2]^{\frac{1}{m}} (\|P_m\|_N)^{\frac{1}{2m}} = 0. \end{aligned}$$

Portanto $g \in \mathcal{H}_{Nb}(c_0(c_0); F)$. Mais ainda

$$\begin{aligned}
g \circ T(x) &= g((\beta_m u_m(x))_{m=1}^{\infty}) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} Q_m \circ \pi_m((\beta_m u_m(x))_{m=1}^{\infty}) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(\beta_m u_m(x)) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_m [\rho_j^{(m)}]^{-2} \lambda_j^{(m)} \cdot [p_j(\beta_m u_m(x))]^m \cdot y_j^{(m)} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_m [\rho_j^{(m)}]^{-2} \lambda_j^{(m)} \cdot (\beta_m)^m \left[ p_j \left( \left( \omega_j^{(m)} a_j^{(m)}(x) \right)_{j=1}^{\infty} \right) \right]^m \cdot y_j^{(m)} \\
\text{(Por } \alpha_m \cdot (\beta_m)^m = 1) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [\rho_j^{(m)}]^{-2} \cdot (\omega_j^{(m)})^m \cdot \lambda_j^{(m)} [a_j^{(m)}(x)]^m \cdot y_j^{(m)} \\
\text{(Por } [\rho_j^{(m)}]^{-2} \cdot (\omega_j^{(m)})^m = 1) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{(m)} [a_j^{(m)}(x)]^m \cdot y_j^{(m)} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} P_m(x) = f(x).
\end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Como $T\colon E \to Z$ é um operador compacto, então existem um espaço de Banach reflexivo $R$ e operadores compactos $A\colon E \to R$ e $B\colon R \to Z$ tais que $T = B \circ A$: (ver Figiel [19, Corolário 3.3]). Como $\overline{A(B_E)}$ é espaço métrico compacto, então $\overline{A(B_E)}$ é separável. Portanto $R_1 = \overline{A(E)}$ é subespaço separável e reflexivo de $R$ e $(iii)$ segue.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Claro.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Seja $f$ como em $(iv)$. Como $T\colon E \to Z$ é um operador fracamente compacto, então existem um espaço de Banach reflexivo $R$ e operadores $A \in \mathcal{L}(E; R)$ e $B \in \mathcal{L}(R; Z)$ tais que $T = B \circ A$. Como $g \in \mathcal{H}_{PIb}(Z; F)$, temos que $g \circ B : R \to F$ é Pietsch-integral. Como $R$ é um espaço de Banach reflexivo, temos que $R'$ tem a propriedade de Radon-Nykodým. Então segue da Proposição 5.1.1 que $g \circ B$ é nuclear. É fácil ver que $f = g \circ T = g \circ B \circ A : E \to F$ é nuclear. $\square$

**Problema aberto**:

Em [14, Definição 1.2], S. Dineen definiu que uma função $f \in \mathcal{H}(E)$ é dita inteira nuclear em $\xi \in E$ se:

$(a)$ $\hat{d}^m f(\xi) \in \mathcal{P}_N({}^m E)$ para $m = 0, 1, 2 \ldots$

$(b)$ Existem números reais $C_1 \geq 0$, $C_2 \geq 0$ tais que

$$\|\hat{d}^m f(\xi)\|_N \leq C_1 \cdot {C_2}^m \quad \text{para } m = 0, 1, 2 \ldots$$

$f \in \mathcal{H}(E)$ é dita inteira nuclear se $f$ é inteira nuclear em todo ponto de $E$. O espaço das funções inteiras nucleares é denotado por $\mathcal{H}_N(E)$. Temos que $\mathcal{H}_{Nb}(E) \subset \mathcal{H}_N(E)$. Neste artigo [ [14], Exemplo 4.9 ] S. Dineen prova que essas classes não coincidem. Se definimos de maneira análoga o espaço das funções inteiras Pietsch-integrais, o análogo do Teorema 5.2.2 é verdadeiro? A dificuldade está na demonstração da implicação $(i) \Rightarrow (ii)$.

# BIBLIOGRAFIA


[1] R. Alencar, *Multilinear mappings of nuclear and integral type*, Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985), 33-38.

[2] R. Alencar, *On reflexivity and basis for $\mathcal{P}(^mE)$*, Proc. Roy. Irish Acad. **85A** (1985), 131-138.

[3] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*. Varsóvia, 1932.

[4] G. Botelho, D. Pellegrino, *A note on polynomial characterizations of Asplund spaces*, Proyecciones **24** (2005), 13-20.

[5] D. Carando, S. Lassalle, *$E'$ and its relation with vector-valued functions on $E$*, Ark. Mat. **42** (2004), 283-300.

[6] D. Carando, S. Lassalle, *Extension of vector-valued integral polynomials*, J. Math. Anal. Appl. **307** (2005), 77-85.

[7] D. Carando, V. Dimant, *Duality in spaces of nuclear and integral polynomials* J. Math. Anal. Appl. **241** (2000), 107-121 .

[8] R.Cilia, M. D'anna, J. Gutiérrez, *Polynomial characterization of $\mathcal{L}_\infty$-spaces*. J. Math. Anal. Appl. **275** (2002), 900-912.

[9] R.Cilia, M. D'anna, J. Gutiérrez, *Polynomials on Banach spaces whose duals are isomorphic to $\ell_1(\Gamma)$*.

[10] R.Cilia, J. Gutiérrez, *Nuclear and integral polynomials*. J. Aust. Math. Soc. **76** (2004), 269-280.

[11] W. Davis,T. Figiel, W. Johnson, A. Pelczynski. *Factoring weakly compact operators.* J. Funct. Anal., **17** (1974), 311-327.

[12] A Defant and K. Floret, *Tensor norms and operator Ideals*, Math. Studies 176 North-Holland, Amsterdam, 1993.

[13] J. Diestel and J.J. Uhl, *Vector Measures*, Math. Surveys 15, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1977.

[14] S. Dineen, *Holomorphy types on a Banach space*, Studia Math. **39**, 1971, $241 - 288$.

[15] S. Dineen, *Complexy Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer, London, 1999.

[16] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators - Part I: General Theory.* Wiley Classics Library, Wiley-Interscience, 1988.

[17] V.V. Fávaro, *The Fourier-Borel transform between spaces of entire functions of a given type and order*. Port. Math. **65**, 2008, $285 - 309$.

[18] V.V. Fávaro, *Convolution equations on spaces of quasi-nuclear functions of a given type and order*. Preprint.

[19] T. Figiel, *Factorization of compact operators and applications to the approximation problem*, Studia Math. **45** (1973), 191-210.

[20] K. Floret, *Natural Norms on Symmetric Tensor Produts of Normed Spaces,* Note Mat. **17** (1997), 153-188

[21] C. P. Gupta, *Convolution Operators and Holomorphic Mappings on a Banach Space*, Département de Mathématiques - Université de Sherbrooke 1969.

[22] J. Horváth, *Topological Vector Spaces and Distribuitions.* Addison-Wesley, 1966.

[23] A. M. Jatobá, *Fatoração de operadores fracamente compactos entre espaços de Banach.* Disertação de mestrado, IMECC-UNICAMP, 2005.

[24] B. Malgrange, *Existence et approximation des équations aux dérivées partielles et des équations des convolutions*. Annales de l'Institute Fourier (Grenoble)VI, 1955/56, $271-355$.

[25] A. Martineau, *Équations différentielles d'ordre infini*, Bull. Soc. Math. France **95**, 1967, $109-154$.

[26] M. C. Matos, *On the Fourier-Borel transformation and spaces of entire functions in a normed space*, in: Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory II (G. I. Zapata, ed.), pp. 139-170. North-Holland Math. Studies, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[27] M. C. Matos, *On convolution operators in spaces of entire functions of a given type and order*, in: Complex Analysis, Functional Analysis and Approximation Theory (J. Mujica, ed.), pp. 129-171. North-Holland Math. Studies **125**, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[28] M. C. Matos, *Absolutely Summing Mappings, Nuclear Mappings and Convolution Equations*, IMECC-UNICAMP, 2007.

Web: http://www.ime.unicamp.br/rel_pesq/2007/rp03-07.html

[29] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*, Math. Studies, **120**, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[30] J. Mujica, *Notas de Aula de Espaços Vetoriais Topológicos*, IMECC-UNICAMP, 2004.

[31] J. Mujica, *Notas de Espaços de Banach*, IMECC-UNICAMP, 2006.

[32] X. Mujica, *Aplicações $\tau(p;q)$-somantes e $\sigma(p)$-nucleares*. Tese, Universidade Estadual de Campinas, 2006.

[33] L. Nachbin, *Topology on Spaces of Holomorphic Mappings*, Springer, New York, 1969.

[34] A. Pietsch, *Operator Ideals*, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[35] I. Villanueva, *Integral mappings between Banach spaces*. J. Math. Anal. Appl. **279** (2003), $56-70$.

# ÍNDICE REMISSIVO