Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATíSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTíFICA

Departamento de Matemática

Alguns Resultados Sobre uma Classe de Equacões Diferenciais Parciais não Lineares

Roberto Carlos Cabrales

Orientador: Prof. Dr. Marko Rojas Medar

Dezembro de 2002

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho apresentamos uma formulação abstrata para alguns tipos importantes de equações diferenciais parciais não lineares estacionárias e de evolución cuja formulação inclui como casos particulares as clássicas equacões de Navier-Stokes e Boussinesq entre outras.

Estabeleceremos resultados de existência global de soluções fracas e existência de soluções com a propriedade de reprodução (noção que generaliza num certo sentido a de periodicidade). Considerando hiṕtesis adicionais para os operadores envolvidos, demonstramos também a unicidade de soluciones fracas.

Nossa principal ferramenta é o método de Galerkin do qual lembramos os pontos essenciais:

1. Formulação fraca do problema a ser estudado. Isto envolve uma escolha adequada dos espaços de funções .

2. Existência da solução do problema fraco. Isto envolve os seguintes aspectos:

   (a) Formulação do problema aproximado e existência, pelo menos, de soluções locais.

   (b) Estimativas a priori: neste ponto, usualmente se obtém a existência global das aproximações num intervalo $[0, T], T > 0$ fixo. Também é necessário demonstrar que as aproximações estão em bolas fixas, i.e., o raio não dependente de k, de certos espaços normados.

(c) Uso das limitações obtidas em b) para obter o candidato a solução .

(d) Fortalecimento das convergências obtidas em c) para o passo ao limite nos térmos não lineares.

(e) Demonstrar que o candidato obtido em c) é de fato solução do problema fraco.

3. Estudo da possível unicidade da solução obtida. Para isto é usual impor mais hipótesis sobre os dados e os operadores envolvidos no problema.

4. Estabilidade da solução em relação aos dados. Isto é importante desde o ponto de vista da análisise numérica.

Um dos pontos mais difíceis no uso do esquema descrito anteriormente é o fortalecimento das convergências. Para conseguir fazer isto, usamos o Lema de Compacidade de Aubin-Lions e teoremas que envolvem derivadas temporais fraccionárias (ver [Lio69], [Tem79]). Estes teoremas podem ser usados no problema abstrato que apresentamos, porém, vamos usar outro de J. Simon e que pode ser aplicado em problemas nos quais os anteriores são inoperantes, por exemplo nas equações dos fluidos não homogêneos (ver [RM95], [Sim90a]).

Para o uso prático do Teorema de J. Simon, apresentamos um Lema (ver Lema 1.6) que aparece em [OTRM96].

A formulação abstrata apresentada é dada em [Tem79] e [aa94], onde os autores obtém resultados similares àqueles apresentados neste trabalho.

O trabalho é organizado como segue. No capítulo 1, apresentamos a notação usada no trabalho, os espaços de funções que consideramos e alguns resultados auxiliáres. No capítulo 2, estudamos o problema estacionário, mostrando existência de soluções fracas e aplicando as ferramentas desenvolvidas para algumas equações concretas. No capítulo 3, estudamos o problema evolutivo, mostrando existência de soluções fracas e aplicando as ferramentas desenvolvidas para algumas equações concretas.

Capítulo 1

Preliminares

Nesta sección vamos fixar as notações que utilizaremos nas próximas seções a apresentaremos alguns resultados sem demonstração . O leitor interessado poderá consultar a literatura indicada.

1.1 Espaços de Funções

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n = 2, 3$ un domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave (en alguns casos será suficiente Lipschitz e em outros $C^{1,1}$).

Consideramos $\mathcal{B}$ um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ e $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert com produto interno $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ e norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

1.1.1 Espaços para o Problema Estacionário

Vamos considerar os clássicos espaços $L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$, dotados com suas normas usuais e que denotaremos por $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$. No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Também vamos considerar os espaços de Sobolev

$$W^{m,q}(\Omega) = \{f \in L^q(\Omega) : \|D^\alpha f\|_{L^q(\Omega)} < \infty,\ |\alpha| \leq m\},$$

onde $m = 0, 1, 2, \ldots,\ 1 \leq q \leq \infty$. Todos estes espaços são dotados com suas normas usuais.

Quando $q = 2$ denotamos $H^m(\Omega)$ no lugar de $W^{m,2}(\Omega)$. Neste caso $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert. Considerando o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ das funções de suporte compacto contido em Ω e classe C^∞, temos que o espaço $H_0^m(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma de $H^m(\Omega)$. Para mais detalhes veja [Ada95] e [MR75].

1.1.2 Espaços para o Problema de Evolução

Seja $T \in (0, \infty)$. Denotaremos por $L^q(0, T; \mathcal{B})$ o espaço de Banach das funções com valores em $\mathcal{B}$ definidas no intervalo $(0, T)$ e que são L^q-integráveis no sentido de Bochner.

Também vamos considerar os espaços de Sobolev

$$W^{m,q}(0, T; \Omega) = \{f \in L^q(D) \,:\, \|D^\alpha f\|_{L^q(\Omega)} < \infty,\ |\alpha| \leq m\},$$

onde $m = 0, 1, 2, \ldots$ e $1 \leq q \leq \infty$ e dotado com sua norma usual.

Quando $q = 2$ denotamos $H^m(0, T; \Omega)$ no lugar de $W^{m,2}(0, T; \Omega)$. Neste caso $W^{m,2}(0, T; \Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$. Os *espaços de Sobolev fracionários* são definidos para $0 < s < 1,\ 1 \leq p \leq \infty$ como

$$W^{s,p}(I; \mathcal{B}) := \{f \in L^2(I; \mathcal{B}) : \|f\|_{W^{s,p}} < \infty\}$$

onde

$$\|f\|_{W^{s,p}} := \left(\int_{I \times I} \left(\frac{\|f(y) - f(x)\|}{|y - x|^s} \right)^p \frac{\mathrm{dy}\,\mathrm{dx}}{|y - x|} \right)^{\frac{1}{p}}$$

para $p < \infty$ e no caso $p = \infty$:

$$\|f\|_{W^{s,\infty}} := \sup_{x,y \in I\, x \neq y} \frac{\|f(y) - f(x)\|_B}{|y-x|^s}.$$

Os espaços $W^{s,p}$ com as normas anteriores são espaços de Banach. Quando $p = 2, W^{s,2}$ é um espaço de Hilbert e coincide com H^s como é definido em [Lio69].

Para qualquer $h > 0$ definimos $I_h := \{t \in I : t + h \in I\}$ e $u_h(\cdot)$ denotará a função

$$u_h(t) = u(t+h) - u(t).$$

Dada $f \in L^p(I;\mathcal{B})$, com p no intervalo $[1,\infty]$, então f, f_h e $f_h + f$ estão bem definidas em I_h.

Consideramos tambiém o *espaço de Nikolskii* de ordem s (com s no intervalo $[0,1]$) e expoente q (com q no intervalo $[1,\infty]$) definido como

$$N^{s,q}(I;B) := \{f \in L^q(I;B) : \|f\|_{\tilde{N}^{s,q}} < \infty\}$$

onde

$$\|f\|_{\tilde{N}^{s,q}} = \sup_{h>0} \frac{1}{h^s} \left(\int_{I_h} \|f_h(t)\|_B^q dt \right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{h>0} \frac{1}{h^s} \|f_h\|_{L^q(0,T;B)}$$

para q no intervalo $[1,\infty)$. Quando $q = \infty$, temos

$$\|f\|_{\tilde{N}^{s,\infty}} = \sup_{h>0} \frac{1}{h^s} \|f_h\|_{L^\infty(0,T;B)}.$$

Pela condição $\|f\|_{\tilde{N}^{s,q}} \leq \infty$, para q no intervalo $[1,\infty]$ equivale a ter

$$\|f_h\|_{L^q(0,T;B)} \leq ch^s \quad \forall h \in I,$$

onde c es una constante positiva.

No é difícil demonstrar que $N^{s,q}(I;B)$ possui estrutura de espaço vetorial para as operações usuais de funções e que si o dotamos da norma

$$\|f\|_{\tilde{N}^{s,q}(I;B)} = \|f\|_{L^q(I;B)} + \|f\|_{\tilde{N}^{s,q}},$$

é um espaço de Banach. Em particular, $N^{s,\infty}(I;\mathcal{B})$ é o espaço das funções Hölder-continuas de expoente s com valores em $\mathcal{B}$.

1.1.3 Espaços para o Problema Periódico

Seja $\tau > 0$ e k um inteiro não negativo. Denotamos por $C^k(\tau;\mathcal{H})$ o espaço das funções definidas em $\mathbb{R}$ com valores em $\mathcal{H}$, que são τ–periódicas e que tem derivadas contínuas até a ordem k. Este espaço é dotado da norma usual

$$\|f\|_{C^k(\tau;\mathcal{H})} := \sup\{\sum_{i=0}^{k} |D_t^i f(t)| : 0 \leq t \leq \tau\}.$$

Denotamos por $H^k(\tau;\mathcal{H}), k = 0,1,2,\dots$ o espaço de Hilbert das funções u definidas em $\mathbb{R}$ com valores em $\mathcal{H}$ que junto a suas derivadas até a ordem k estão no espaço $L^2(\tau;\mathcal{H})$ das funções mensuráveis e τ–periódicas. Este espaço é dotado da norma

$$\|f\|_{L^2(\tau;\mathcal{H})} = \left(\int_0^\tau \|f(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \,\mathrm{dt}\right)^{1/2}.$$

De maneira similar, definimos o espaço de Banach $L^\infty(\tau;\mathcal{H})$ e o espaço $W^{1,\infty}(\tau;\mathcal{H})$ dotados das normas

$$\|f\|_{L^\infty(\tau;\mathcal{H})} = \sup\operatorname{ess}\{\|f(t)\|_{\mathcal{H}} : 0 \leq t \leq \tau\}$$

e

$$\|f\|_{W^{1,\infty}(\tau;\mathcal{H})} = \left(\|f\|_{L^\infty(\tau;\mathcal{H})}^2 + \|D_t f\|_{L^\infty(\tau;\mathcal{H})}^2\right)^{1/2}$$

1.2 Alguns Resultados Auxiliares

1.2.1 Algumas Imersões

Um resultado importante que relaciona os espaços de Sobolev com os espaços de Nikolskii e que é de autoria de J. Simon é o seguinte (ver [Sim90b])

Proposição 1.1 *Sejam s, r e p tais que $0 < r < s < 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$W^{s,p}(I;\mathcal{B}) \hookrightarrow N^{s,p}(I;\mathcal{B}) \hookrightarrow W^{r,p}(I;\mathcal{B}),$$

onde as inmersões são contínuas.

Observação 1.2 *No caso $p = 2$ temos que*

$$W^{s,2}(I;\mathcal{B}) = H^s(I;\mathcal{B}) \hookrightarrow N^{s,2}(I;\mathcal{B}) \hookrightarrow W^{r,2}(I;\mathcal{B}) = H^r(I;\mathcal{B})$$

e assim, se $f \in N^{s,2}(I;\mathcal{B})$ com s no intervalo $(0,1)$, então

$$D_t^r f \in L^2(I;\mathcal{B}) \quad \forall r < s,$$

ou seja, f tem "derivada fraccionária" de ordem r em $L^2(I;\mathcal{B})$.

O seguinte teorema de compacidade é de autoria de J. Simon (veja [Sim87]).

Teorema 1.3 *Sejam $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ espaços de Banach tais que $\mathcal{B}_1 \hookrightarrow \mathcal{B}_2 \hookrightarrow \mathcal{B}_3$ onde a inmersão $\mathcal{B}_2 \hookrightarrow \mathcal{B}_3$ é compacta. Então as seguintes inmersões são compactas:*

1. *$L^q(0,T;\mathcal{B}_1) \cap \{\varphi : \varphi_t \in L^1(0,T;\mathcal{B}_3)\} \hookrightarrow L^q(0,T;\mathcal{B}_2)$ se $1 \leq q \leq \infty$.*

2. *$L^\infty(0,T;\mathcal{B}_1) \cap \{\varphi : \varphi_t \in L^r(0,T;\mathcal{B}_3)\} \hookrightarrow C([0,T];\mathcal{B}_2)$ se $1 < r \leq \infty$.*

3. *Para qualquer função dada $f \in L^1(0,T), k \geq 0$ e $1 < r \leq \infty$*

$$L^\infty(0,T;\mathcal{B}_1) \cap \{\varphi : |\varphi_t|_{\mathcal{B}_3} - f \in L^r(0,T)\} \hookrightarrow C([0,T];\mathcal{B}_2).$$

4. *$L^q(0,T;\mathcal{B}_1) \cap N^{s,q}(0,T;\mathcal{B}_3) \hookrightarrow L^q(0,T;\mathcal{B}_2)$ se $s > 0,\ 1 \leq q \leq \infty$.*

Observação 1.4 *O Lema de compacidade de Aubin-Lions (ver [Lio69]), es un caso particular de 1. Além disso, o Teorema 5.2 em [Lio69] é um caso particular de 4.*

1.2.2 Algumas Desigualdades Integrais

Começamos com o seguinte resultado que é clássico e será de grande utilidade nos argumentos dos capítulos seguintes (ver [Zyg59]).

Lema 1.5 (Hardy-Littlewood) *Seja $a \in (0,\infty)$. Suponhamos que $\tilde{f}$ é integrável sobre $(0,a)$. Para qualquer t no intervalo $(0,a]$ defina*

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \sup_{\zeta} \frac{1}{t-\zeta}\int_{\zeta}^{t} \tilde{f}(s)\,ds \qquad 0 \le \zeta < t, \\ \theta'(t) &= \sup_{\zeta} \frac{1}{\zeta - t}\int_{t}^{\zeta} \tilde{f}(s)\,ds \qquad t < \zeta \le a \end{aligned}$$

e

$$M(t) = \max\{\theta(t), \theta'(t)\}.$$

Então , se $\tilde{f}$ é um elemento do espaço $L^r(0,a)$ com $r > 1$, se verifica que $M(t)$ é um elemento do espaço $L^r(0,a)$ e temos a seguinte estimativa

$$\int_0^a M^r(t)dt \le 2\left(\frac{r}{r-1}\right)^r \int_0^a \tilde{f}^r(t)\,dt.$$

O seguinte Lema é fundamental para obter as limitações nos espaços de Nikolskii e que são necessárias no Lema de compacidade de J. Simon.

Lema 1.6 *Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ espaços de Banach tais que $\mathcal{B}_1 \hookrightarrow \mathcal{B}_2$ sendo a inmersão contínua. Seja w um elemento do espaço $L^2(0,T;\mathcal{B}_1)$ e suponhamos que seja válida a seguinte desigualdade integral*

$$\int_0^{T-h} \|w_h(t)\|_{\mathcal{B}_2}^2\,dt \le \int_0^{T-h} \|w_h(t)\|_{\mathcal{B}_1} \int_t^{t+h} g(\tau)\,d\tau\,dt. \tag{1.1}$$

Então

1. *Se* $g \in L^1(0,T)$ *temos*

$$\|w\|_{N^{\frac{1}{4},2}(0,T;\mathcal{B}_2)} \leq C\|w\|^{1/2}_{L^2(0,T;\mathcal{B}_1)},$$

onde C *é uma constante positiva que somente depende de* $\|g\|_{L^1(0,T)}$.

2. *Se* $g \in L^2(0,T)$ *temos*

$$\|w\|_{N^{\frac{1}{2},2}(0,T;\mathcal{B}_2)} \leq C\|w\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,T;\mathcal{B}_1)}.$$

donde C *é uma constante positiva que somente depende de* $\|g\|_{L^2(0,T)}$.

Un corolário imediato deste Lema é o seguinte:

Corolário 1.7 *Sob as condições do Lema 1.6 temos*

$$D_t^\alpha w \in L^2(0,T;\mathcal{B}_2),$$

com $0 \leq \alpha < 1/4$ *no item 1 e* $0 \leq \alpha < 1/2$ *no item 2.*

Para obter α (item 2 do lema 1.6) nos limites enunciados, é fundamental o uso do Lema de Hardy-Littlewoood como veremos na demonstração .

Demonstração do Lema 1.6.

Item 1. Usando o Teorema de Fubini na integral do lado direito da desigualdade (1.2) obtemos

$$\int_0^{T-h}\int_t^{t+h} g(s)\|w_h(t)\|_{\mathcal{B}_1}\,\mathrm{ds}\,\mathrm{dt} = \int_0^T \int_{\underline{s-h}}^{\overline{s}} g(s)\|w_h(t)\|_{\mathcal{B}_1}\,\mathrm{dt}\,\mathrm{ds},$$

onde

$$\overline{s} = \begin{cases} 0 & s \leq 0, \\ s & 0 \leq s \leq T-h, \\ T-h & s > T-h. \end{cases}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}\int_{\overline{s-h}}^{\overline{s}} \|w_h(t)\|_{\mathcal{B}_1}\,\mathrm{dt} &\leq \left(\int_{\overline{s-h}}^{\overline{s}} 1^2\,\mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\overline{s-h}}^{\overline{s}} \|w_h(t)\|_{\mathcal{B}_1}^2\,\mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq c\sqrt{h}\|w\|_{L^2(0,T;\mathcal{B}_1)}.\end{aligned}$$

Desta forma temos que

$$\begin{aligned}\int_0^{T-h}\int_t^{t+h} g(s)\|w_h(t)\|_{\mathcal{B}_1}\,\mathrm{ds}\,\mathrm{dt} &\leq c\sqrt{h}\|w\|_{L^2(0,T;\mathcal{B}_1)}\int_0^T g(s)\,\mathrm{ds}\\ &\leq \tilde{c}\sqrt{h}\|w\|_{L^2(0,T;\mathcal{B}_1)},\end{aligned}$$

com $\tilde{c} = 2c\|g\|_{L^1(0,T)}$. Temos assim que

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\int_0^{T-h} \|w_h(t)\|_{\mathcal{B}_2}^2\,\mathrm{dt} \leq \tilde{c}\|w\|_{L^2(0,T;\mathcal{B}_1)}$$

e isto implica o item 1 com $c := \sqrt{\tilde{c}}$.

Item 2. Neste caso vamos a estimar da melhor maneira possível a integral do lado direito da desigualdade (1.2).

Temos

$$\begin{aligned}\int_0^{T-h}\int_t^{t+h} g(s)\|w_h(t)\|_{\mathcal{B}_1}\,\mathrm{ds}\,\mathrm{dt} &= h\int_0^{T-h}\left(\|w_h(t)\|_{\mathcal{B}_1}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} g(s)\,\mathrm{ds}\right)\mathrm{dt}\\ &= h\int_0^{T-h}\|w_h(t)\|_{\mathcal{B}_1}\theta(t)\,\mathrm{dt}\end{aligned}$$

onde $\theta(t) = \sup\limits_{h>0}\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_t^{t+h} g(s)ds$.

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz temos

$$\int_0^{T-h}\int_t^{t+h} g(s)\|w_h(t)\|_{\mathcal{B}_1}\,\mathrm{ds}\,\mathrm{dt} \leq h\left(\int_0^{T-h}\|w_h(t)\|_{\mathcal{B}_1}^2\,\mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{T-h}\theta^2(t)\,\mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.2}$$

Aplicando o Lema de Hardy-Littlewood (Lema (1.6)) na segunda integral, com $r = 2, a = T - h$ e $\tilde{f} = g$, temos

$$\int_0^{T-h}\theta^2(t)\,\mathrm{dt} \leq 8\int_0^{T-h} g^2(t)\,\mathrm{dt} \leq 8\|g\|_{L^2(0,T)}^2.$$

Logo, usando a desigualdade (1.1) em (1.2) obtemos

$$\frac{1}{h}\int_0^{T-h} \|w_h(t)\|_{\mathcal{B}_2}^2 \,\mathrm{dt} \leq 2\sqrt{2}\|g\|_{L^2(0,T)} c_1 \|w\|_{L^2(0,T;\mathcal{B}_1)} = c\|w\|_{L^2(0,T;\mathcal{B}_1)}$$

de onde segue-se o resultado desejado no item 2 ■

Observação 1.8 *O argumento do item 1 foi inspirado em J. Simon (veja [Sim90a]), quem o usou nas equações dos fluidos não homogêneos e o argumento do item 2 foi inspirado em Zhang (ver [Zha93]), quem o usou nas equações de Navier-Stokes clássicas.*

1.2.3 Alguns Resultados Adicionais

O seguinte resultado que é uma consequência do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Lema 1.9 (Ponto Fixo) *Suponhamos que o operador $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é contínuo e que existe uma constante positiva γ tal que*

$$(P(y), y)_{\mathcal{H}} > 0 \quad \forall y \text{ tal que } \|y\|_{\mathcal{H}} = \gamma \tag{1.3}$$

então existe um $y \in \mathcal{H}$ tal que

$$\|y\|_{\mathcal{H}} \leq \gamma \quad e \quad P(y) = 0. \tag{1.4}$$

Teorema 1.10 (Caratheodory) *buscar [MR75]*

Capítulo 2

O Problema estacionário

Neste capítulo vamos estudar a existência das soluções fracas do seguinte problema estacionário abstrato

$$\mathbf{A}u + \mathbf{B}(u, u) + \mathbf{B}_1 u - \mathbf{B}_2 u = f. \tag{2.1}$$

Na seguinte seção estabelecemos as hipôteses sobre os operadores $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ e sobre o lado direito f.

2.1 Hipôteses

Como no capítulo anterior, seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável. O produto interno em $\mathcal{H}$ será denotado $(\cdot, \cdot)$ e norma associada por $\|\cdot\|$. O espaço dual de $\mathcal{H}$ será denotado por $\mathcal{H}^{-1}$ e freqüentemente o identificaremos com $\mathcal{H}$. A norma em $\mathcal{H}^{-1}$ será denotada por $|\cdot|_{-1}$.

2.1.1 O Operador A

Neste trabalho vamos supor que $\mathbf{A} : \mathcal{D}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}^{-1}$ é um operador auto-adjunto, positivo. $\mathcal{D}(\mathbf{A})$ denota o domínio do operador $\mathbf{A}$ e este é um subconjunto denso de $\mathcal{H}$ como veremos logo mais.

Além disso, vamos supor que existe o inverso de $\mathbf{A}$, que denotamos por $\mathbf{A}^{-1}$, e que este é um operador linear e compacto.

Isto implica que existe um conjunto ortonormal e enumerável de autofuncões

$$B_{\mathcal{H}} = \{w_m \in \mathcal{H} : m \in \mathbb{N}\} \tag{2.2}$$

que é completo em $\mathcal{H}$ e tais que:

$$\mathbf{A}w_m = \lambda_m w_m \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

onde a sequência de autovalores $\{\lambda_m \in X : m \in \mathbb{N}\}$ é real e tal que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_m \leq \ldots \to \infty.$$

Como $B_{\mathcal{H}}$ é ortonormal e completo em $\mathcal{H}$, para cada $u \in X$ temos:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} c_m w_m \quad \text{onde} \quad c_m = (u, w_m). \tag{2.3}$$

Usando a anterior igualdade, podemos caracterizar o domínio do operador $\mathbf{A}$ como

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}) = \{u = \sum_{m=1}^{\infty} c_m w_m : \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 c_m^2 < \infty\}.$$

Logo, para $u \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$ vale a seguinte igualdade

$$\mathbf{A}u = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m c_m w_m.$$

Seja $\alpha \geq 0$ um número inteiro. Consideramos o operador $\mathbf{A}^\alpha : \mathcal{D}(\mathbf{A}^\alpha) \to \mathcal{H}$ definido no conjunto

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}^\alpha) = \{u = \sum_{k=1}^{\infty} c_m w_m : \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{2\alpha} c_m^2 < \infty\},$$

e que é definido por

$$\mathbf{A}^{\alpha}u := \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{\alpha} c_m w_m \qquad \text{onde} \qquad c_m = (u, w_m).$$

Observamos que o conjunto $\mathcal{H}^{\alpha} := \mathcal{D}(\mathbf{A}^{\alpha/2})$ é um espaço de Hilbert com o produto interno definido por

$$(u, v)_{\alpha} := (\mathbf{A}^{\alpha/2}u, \mathbf{A}^{\alpha/2}v).$$

O espaço dual de $\mathcal{H}^{\alpha}$ é denotado por $\mathcal{H}^{-\alpha}$. Identificando o espaço $\mathcal{H}$ com seu dual, temos que

$$\mathcal{H}^{\alpha} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H}^{-\alpha}$$

onde cada $\hookrightarrow$ denota a injeção canônica e que são contínuas e com imagem densa.

2.1.2 Os Operadores $\mathbf{B}, \mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$

Vamos supor que os operadores $\mathbf{B}, \mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$ satisfazem as seguintes hipôtesis

H1. Para $i = 1, 2$, $\mathbf{B}_i : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ é um operador linear e limitado com extensão contínua $\mathbf{B}_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^{-1}$.

As normas dos operadores $\mathbf{B}$ e $\mathbf{B}_i$ com valores em $\mathcal{H}^{-\alpha}$ são denotadas por $\|\mathbf{B}\|_{\alpha}$ e $\|\mathbf{B}_i\|_{\alpha}$, respectivamente.

H2. $\mathbf{B} : \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1}$ é uma forma bilinear, contínua e limitada, ou seja

$$\|\mathbf{B}(u, v)\|_{\mathcal{H}^{-1}} \leq \|\mathbf{B}\|_1 \|u\|_{\mathcal{H}^1} \|v\|_{\mathcal{H}^1} \quad \forall u, v \in \mathcal{H}^1.$$

H3. Existem extensões contínuas (denotadas também por $\mathbf{B}$)

$$\mathbf{B} : \mathcal{H} \times \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^{-1} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{B} : \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}^{-1}.$$

H4. Denotando como $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\alpha}$ o produto de dualidade entre os espaços $\mathcal{H}^{\alpha}$ e $\mathcal{H}^{-\alpha}$, supomos que $\mathbf{B}$ satisfaz a seguinte hipótese

$$\langle \mathbf{B}(u, v), \omega \rangle_1 + \langle \mathbf{B}(u, \omega), v \rangle_1 = 0 \quad \forall\, u, v, \omega \in \mathcal{H}^1.$$

H5. $\mathbf{B}_1$ satisfaz a seguinte hipôtesis:

$$(\mathbf{B}_1 u, v) + (\mathbf{B}_1 v, u) = 0 \quad \forall u, v \in \mathcal{H}^1.$$

Denotaremos por $\mathbf{B}_0$ o operador não linear definido como

$$\mathbf{B}_0(u, v) := \mathbf{B}(u, v) + \mathbf{B}_1 v + \mathbf{B}_2 u.$$

2.2 Existência e Unicidade

Definição 2.1 (Solução Fraca) *Seja f um elemento do espaço $\mathcal{H}^{-1}$ dado. Um elemento $\mathcal{H}$ no espaço X^1 é uma solução fraca de (2.1), se para todo $v \in \mathcal{H}^1$ se verifica*

$$(u, v)_1 + (\mathbf{B}_0(u, u), v) = (f, v). \tag{2.4}$$

O primeiro resultado que demonstraremos é o seguinte.

Teorema 2.2 (Existência de Soluções Fracas) *Suponhamos que $\|\mathbf{B}_2\|_1 < 1$. Para toda $f \in \mathcal{H}^{-1}$ a ecuacão (2.1) tem pelo menos uma solução fraca.*

Demonstração.

Seja $B_{\mathcal{H}}$ o conjunto em (2.2) e consideremos as aproximações de Galerkin definidas por

$$u_m = \sum_{k=1}^{m} c_{km} w_m, \qquad m \in \mathbb{N},$$

onde os coeficientes c_{km} são números reais determinados de tal forma que u_m é solução fraca do seguinte problema

$$\mathbf{A} u_m + \mathbf{P}_m \mathbf{B}_0(u_m, u_m) = \mathbf{P}_m f,$$

onde $\mathbf{P}_m$ denota a projeção ortogonal associada ao espaço vetorial fechado de dimensão finita $V_m := \langle w_1, \ldots, w_m \rangle$, ou seja, u_m é solução do seguinte sistema de equações

$$(u_m, w_k)_1 + (\mathbf{P}_m \mathbf{B}_0(u_m, u_m), w_k) = (f, w_k) \quad k \in \{1, \ldots, m\}. \tag{2.5}$$

Para cada $u \in V_m$ consideramos o funcional $\Phi_m : V_m \to \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi_m(v) = (u, v)_1 + (\mathbf{P}_m \mathbf{B}_0(u, u), v) - (f, v).$$

Como Φ_m é um funcional linear e contínuo, o Teorema de Riesz-Fréchet nos diz que existe um único elemento $w \in V_m$ tal que para todo elemento v do espaço V_m verifica-se a seguinte igualdade

$$(u, v)_1 + (\mathbf{P}_m \mathbf{B}_0(u, u), v) - (f, v) = (w, v).$$

Isto define o operador $\mathbf{L}_m : V_m \to V_m$ tal que $\mathbf{L}_m v = w$. $\mathbf{L}_m$ satisfaz as hipôtesis do Lema 1.9: a continuidade é uma consequência da continuidade dos operadores $\mathbf{P}_m$ e do operador $\mathbf{B}_0$. Vejamos agora (1.4). Pelas hipôteses **H1-H5** temos que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{L}_m u, u) &= (u, u)_1 + (\mathbf{P}_m \mathbf{B}_0(u, u), u) - (f, u) \\
&= (u, u)_1 - (\mathbf{P}_m \mathbf{B}_2 u, u) - (f, u) \\
&\geq |u|_1^2 - \|\mathbf{B}_2\|_1 |u|_1^2 - |u|_1 |f|_{-1} \\
&= |u|_1 (|u|_1 - \|\mathbf{B}_2\|_1 |u|_1 - |f|_{-1}) > 0
\end{aligned}$$

desde que

$$|u|_1 > \frac{|f|_{-1}}{1 - \|\mathbf{B}_2\|_1} =: \gamma.$$

Pelo Lema 1.9 existe $u_m \in V_m$ tal que

$$\mathbf{L}_m u_m = 0,$$

ou seja, uma solução do sistema (2.5).

Estimativas a priori. Observemos que $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $\mathcal{H}^1$. De fato, multiplicando (2.5) por c_{km} e somando desde $k=1$ até $k=m$ obtemos

$$|u_m|_1^2 + (\mathbf{P}_m\mathbf{B}_0(u_m), u_m) = |u_m|_1^2 - (\mathbf{P}_m\mathbf{B}_2(u_m), u_m) = (f, u_m).$$

Temos então

$$\begin{aligned} |u_m|_1^2 &= (\mathbf{P}_m\mathbf{B}_2(u_m), u_m) + (f, u_m) \\ &\leq \|\mathbf{B}_2\|_1 |u_m|_1^2 + |f|_{-1}|u_m|_1 \end{aligned}$$

daqui tiramos que

$$|u_m|_1 \leq \frac{|f|_{-1}}{1 - \|\mathbf{B}_2\|_1} \tag{2.6}$$

Note que o lado direito é positivo devido à hipótese sobre $\mathbf{B}_2$.

Pela estimativa (2.6) existe uma subsequência u_{k_m} que converge fracamente em $\mathcal{H}^1$. Como a injeção de $\mathcal{H}^1$ em $\mathcal{H}$ é compacta, desta subsequência podemos extrair uma outra subsequência que converge fortemente em $\mathcal{H}$. Denotamos esta subsequência por u_n e seu limite por u.

Passo ao limite. Temos que

$$\begin{aligned} u_n &\to u \quad \text{fortemente em } X, \\ u_n &\to u \quad \text{fracamente em } X^1. \end{aligned}$$

Para o primeiro termo de (2.5) e para todo $m \in \mathbb{N}$ temos que

$$(u_n - u, w_m) \leq |u_n - u|_1 |w_m|_1 \quad \to \quad 0 \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{2.7}$$

Como o operador $\mathbf{B}$ é bilinear, para o segundo termo de (2.5) temos que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B}(u_n,u_n)-\mathbf{B}(u,u),w_m) &\leq |(\mathbf{B}(u_n-u,u_n),w_m)|+|(\mathbf{B}(u,u_n-u),w_m)| \\
&\leq |(\mathbf{B}(u_n-u,u_n)|_{-1}|w_m|_1+|(\mathbf{B}(u,u_n-u)|_{-1}|w_m|_1 \\
&\leq \|\mathbf{B}\|_1\left(|u_n-u|_1|u_n|_1+|u|_1|u_n-u|_1\right)|w_m|_1 \\
&\leq C|u_n-u|_1|u|_1 \\
&\leq C|u_n-u|_1 \to 0 \quad \text{quando } n\to\infty,
\end{aligned}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e onde usamos o fato de que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em X^1. Em resumo, para todo $m \in \mathbb{N}$ temos que

$$(\mathbf{B}(u_n,u_n),w_m) \;\to\; (\mathbf{B}(u,u),w_m) \quad \text{quando} \quad n\to\infty. \tag{2.8}$$

Como os operadores $\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$ são lineares e limitados, para $i=1,2$ temos que

$$(\mathbf{B}_i u_n-\mathbf{B}_i u,w_m) \leq \|\mathbf{B}_i\|_1|u_n-u|_1|w_m|_1 \;\to\; 0 \quad \text{quando} \quad n\to\infty. \tag{2.9}$$

Usando (2.7)-(2.9) e passando ao limite em (2.6) quando $n\to\infty$ obtemos a seguinte igualdade

$$(u,w_m)_1+(B_0(u,u),w_m)=(f,w_m) \quad \forall m\in\mathbb{N}$$

e que é satisfeita por todas as combinações lineares finitas dos elementos de $M_{\mathcal{H}}$. Então

$$(u,v)_1+(B_0(u,u),v)=(f,v) \quad \forall v\in\mathcal{H}^1$$

Assim u é solução fraca de (2.1) ∎

Teorema 2.3 (Unicidade das Soluções Fracas) *Se* $\mathbf{B}_2$ *satisfaz*

$$1-\|\mathbf{B}_2\|_1 > \sqrt{\|\mathbf{B}\|_1|f|_{-1}}$$

então a equação (2.1) *tem uma única solução fraca.*

Demonstração.

Notemos em primeiro lugar que toda solução fraca do problema (2.1) está contida na bola $B_r(0) \subset \mathcal{H}^1$ onde

$$r = \frac{|f|_{-1}}{1 - \|\mathbf{B}_2\|_1}.$$

De fato, tomando $v = u$ em (2.4) temos que

$$|u|_1^2 + (\mathbf{B}_0(u), u) = |u|_1^2 - (\mathbf{B}_2(u), u) = (f, u)$$

e assim

$$|u|_1^2 = (\mathbf{B}_2(u), u) + (f, u) \leq \|\mathbf{B}_2\|_1 |u|_1^2 + |f|_{-1} |u|_1.$$

Então

$$|u|_1 \leq \frac{|f|_{-1}}{1 - \|\mathbf{B}_2\|_1}. \tag{2.10}$$

Sejam agora u_1 e u_2 duas soluções fracas de (2.1). A função $u = u_1 - u_2$ satisfaz a seguinte igualdade:

$$(u, v)_1 + (\mathbf{B}(u_1, u_1) - \mathbf{B}(u_2, u_2), v) + (\mathbf{B}_1 u, v) - (\mathbf{B}_2 u, v) = 0 \qquad \forall v \in \mathcal{H}^1.$$

Considerando $v = u$ na identidade anterior temos que

$$|u|_1^2 + (\mathbf{B}(u, u_1), u) - (\mathbf{B}_2 u, u) = 0 \iff |u|_1^2 = (\mathbf{B}_2 u, u) - (\mathbf{B}(u, u_1), u).$$

Pela estimativa (2.10) temos que

$$\begin{aligned} |u|_1^2 &\leq \|\mathbf{B}_2\|_1 |u|_1^2 + \|\mathbf{B}\|_1 |u_1|_1 |u|_1^2 \\ &= |u|_1^2 (\|\mathbf{B}_2\|_1 + \|\mathbf{B}\|_1 |u_1|_1) \\ &\leq |u|_1^2 (\|\mathbf{B}_2\|_1 + \|\mathbf{B}\|_1 (1 - \|\mathbf{B}_2\|_1)^{-1} |f|_{-1}). \end{aligned}$$

e assim

$$|u|_1^2 ((1 - \|\mathbf{B}_2\|_1)^2 - \|\mathbf{B}\|_1 |f|_{-1}) \leq 0$$

e pela hipôtese temos que $|u|_1^2 = 0$, o que prova o Teorema ■

Capítulo 3

O Problema Evolutivo

Neste capítulo vamos considerar o análogo evolutivo do problema (2.1), i.e., o seguinte problema abstracto:

$$u_t + \mathbf{A}u + \mathbf{B}(u,u) + \mathbf{B}_1 u - \mathbf{B}_2 u = f, \tag{3.1}$$

$$u(0) = u_0. \tag{3.2}$$

onde os operadores $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ são aqueles introduzidos no capítulo 2.

3.1 Existência e Unicidade

Definição 3.1 (Solução Fraca) *Sejam $u_0 \in \mathcal{H}$ e $f \in L^2(0,T;\mathcal{H}^{-1})$ dados. Dizemos que u é uma solução fraca do problema de Cauchy (3.1)-(3.2) se*

$$u \in L^2(0,T;\mathcal{H}^1) \cap L^\infty(0,T;\mathcal{H}),$$

e para todo elemento v no espaço $C^1([0,T];\mathcal{H})\cap C([0,T];\mathcal{H}^1)$, com suporte de v compacto e contido em $[0,T)$, se verifica

$$-\int_0^T (u(t),v'(t))\,dt+\int_0^T (u(t),v(t))_1\,dt+\int_0^T (B_0(u(t),u(t)),v(t))\,dt = \int_0^T (f(t),v(t))\,dt+(u_0,v(0)).$$

Antes de enunciar o primeiro resultado deste capítulo fazemos uma observação em relação à forma bilinear $\mathbf{B}$.

Observação 3.2 *Como $\mathbf{B}$ é uma forma bilinear e contínua, existem operadores lineares $\mathbf{B}^m:\mathcal{H}^1\to\mathcal{H}^{-1}, m\in\mathbb{N}$ tais que*

$$\mathbf{B}(u,v)=\sum_{m=1}^{\infty}(\mathbf{B}^m u,v)w_m.$$

A representação matricial de $\mathbf{B}^m$ na base $B_{\mathcal{H}}$ será denotada como $(\alpha_{ij}^m)_{i,j\in\mathbb{N}}$.

Teorema 3.3 (Existência de Soluções Fracas) *Suponhamos que $\mathbf{B},\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$ satisfazem as hipôtesis **H1-H5**. Se $\|\mathbf{B}_2\|_1<1$ então para todo $u_0\in\mathcal{H}$ e para toda $f\in L^2(0,T;\mathcal{H}^{-1})$ o problema (3.1)-(3.2) possui pelo menos uma solução fraca.*

Demonstração.

Seja $B_{\mathcal{H}}$ o conjunto em (2.2) e consideremos as aproximações de Galerkin definidas para cada $t\in[0,T]$ como

$$u_m(t)=\sum_{i=1}^{m}c_{km}(t)w_m \quad \text{com } m\in\mathbb{N}$$

e onde os coeficientes c_{km} são determinados de tal forma que u_m é solução do seguinte problema de Cauchy

$$(u_m)_t+\mathbf{A}u_m+\mathbf{P}_m\mathbf{B}_0(u_m,u_m) = \mathbf{P}_m f, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{P}_m u_0=u_m(0) = (u_m)_0. \tag{3.4}$$

onde $\mathbf{P}_m$ é a projeção ortogonal associada ao subespaço vetorial fechado de dimensão finita $V_k = \langle w^1, \ldots, w^k \rangle$. Notemos que o problema (3.3)-(3.4) é equivalente ao problema

$$((u_m)_t, v) + (u_m, v)_1 = (f, v) - (\mathbf{B}_0(u_m, u_m), v) \quad \forall v \in V_m \tag{3.5}$$

$$u_m(0) = \mathbf{P}_m u_0. \tag{3.6}$$

A igualdade (3.3) é equivalente ao sistema de equações diferenciais ordinárias da forma

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{dt}} = G(f, g),$$

onde $g = (c_{1m}(t), \ldots, c_{mm}(t))$ e a função $G = (G_1, \ldots, G_m)$ com componentes

$$G_k(f, g) = \lambda_k c_{km}(t) + \sum_{i,j=1}^{k} c_{im}(t)\alpha_{ji}^m c_{jm}(t) + \sum_{i=1}^{m}(\mathbf{B}_1 w_i + \mathbf{B}_2 w_i, w_k)c_{im}(t) + (f(t), w_k).$$

A condição inicial (3.4) é

$$c_{km}(0) = (u_0, w_k) \quad \text{com } k = 1, \ldots, m.$$

A existência local de soluções do problema de Cauchy (3.3)-(3.4) está garantida pelo Teorema de Caratheodory (ver apêndice 2 de [MR75]). A extensão sobre $[0, T]$ é possível devido à estimativa de energía calculada logo mais.

Estimativas a priori. Colocando $v = u_m$ em (3.5) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|u_m|^2 + |u_m|_1^2 &= (f, u_m) - (\mathbf{B}_0(u_m, u_m), u_m) \\
&= (f, u_m) + (\mathbf{B}_2 u_m, u_m) \\
&\leq |\mathbf{B}_2 u_m|_{-1}|u_m|_1 + |f|_{-1}|u_m|_1 \\
&\leq \|\mathbf{B}_2\|_1 |u_m|_1^2 + \frac{\varepsilon}{2}|f|_{-1}^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|u_m|_1^2. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

onde usamos as hipôtesis **H1**, **H3** e **H5**. Escolhendo $\varepsilon := \dfrac{1}{1 - \|\mathbf{B}_2\|_1} > 0$ temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|u_m|^2 + c|u_m|_1^2 \leq \varepsilon |f|_{-1}^2. \tag{3.8}$$

onde

$$c := 2\left(1 - \|\mathbf{B}_2\|_1 - \frac{1}{2\epsilon}\right) = 1 - \|\mathbf{B}_2\|_1 > 0.$$

Integrando de 0 até $t \leq T$ obtém-se

$$\begin{aligned} |u_m(t)|^2 + c\int_0^t |u_m(s)|_1^2 \,\mathrm{ds} &\leq |(u_m)_0|^2 + \varepsilon \int_0^t |f(s)|_{-1}^2 \,\mathrm{ds} \\ &\leq |u_0|^2 + \varepsilon \|f\|^2_{L^2(0,T;\mathcal{H}^{-1})}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

A sequência $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ possui as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} &\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é limitada em } L^\infty(0,T;\mathcal{H}), \\ &\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é limitada em } L^2(0,T;\mathcal{H}^1). \end{aligned}$$

Existe então uma subsecuência de $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, que ainda denotamos por $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, e um elemento u no espaço $L^2(0,T;\mathcal{H}^1) \cap L^\infty(0,T;\mathcal{H})$ tais que se $k \to \infty$ vale

$$u_m \to u \quad \text{fraco}-* \text{ em } L^\infty(0,T;\mathcal{H}), \tag{3.10}$$

$$u_m \to u \quad \text{fracamente em } L^2(0,T;\mathcal{H}^1). \tag{3.11}$$

Demonstremos agora que a sequência $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $N^{s,2}(0,T;\mathcal{H})$ para algúm s no intervalo $[0,1]$. Integrando (3.5) de t até $t+h$ com $t+h \leq T$:

$$\begin{aligned} ((u_m)_h(t), v) &= \int_t^{t+h} (f(s),v) - (\mathbf{B}_0(u_m(s),u_m(s)),v)\,\mathrm{ds} - \int_t^{t+h} (u_m(s),v)_1 \,\mathrm{ds} \\ &\leq \int_t^{t+h} [|f(s)|_{-1} + |u_m(s)|_1]\,|v|_1 \,\mathrm{ds} - \int_t^{t+h} (\mathbf{B}_0(u_m(s),u_m(s)),v)\,\mathrm{ds} \\ &\leq \int_t^{t+h} [|f(s)|_{-1} + |u_m(s)|_1]\,|v|_1 \,\mathrm{ds} + \int_t^{t+h} \|\mathbf{B}_0\|_1 |u_m(s)|_1^2 |v|_1 \,\mathrm{ds} \\ &\leq c|v|_1 \int_t^{t+h} |f(s)|_{-1} + |u_m(s)|_1 + |u_m(s)|_1^2 \,\mathrm{ds}. \end{aligned}$$

Tomando $v := (u_m)_h(t)$, temos

$$|(u_m)_h(t)|^2 \leq c|(u_m)_h(t)|_1 \int_t^{t+h} (|f(s)|_{-1} + |u_m(s)|_1 + |u_m(s)|_1^2)\,\mathrm{ds}.$$

Notemos que a função

$$g(s) := |f(s)|_{-1} + |u_m(s)|_1 + |u_m(s)|_1^2$$

pertence ao espaço $L^1(0,T)$. Pela parte (a) do Lema 1.6 temos que

$$u_m \in N^{\frac{1}{4},2}(0,T;\mathcal{H}) \quad \text{uniformemente em } m.$$

Aplicando o Lema de compacidade de Simon (Teorema 1.3) temos

$$u_m \to u \quad \text{fortemente em} \;\; L^2(0,T;\mathcal{H}). \tag{3.12}$$

Paso ao limite. Seja $r \in C^1([0,T])$ uma função com suporte compacto contido em $[0,T)$. Colocando $v = r(t)w_k$ com $k \leq m$ em (3.5) temos

$$((u_m)_t, w_m)r(t) + (u_m, w_m)_1 r(t) + (\mathbf{B}_0(u_m, u_m), w_m)r(t) = (f(t), w_m)r(t).$$

Integrando de 0 até T

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u_m(t), w_m)r'(t)\,\mathrm{dt} \quad + \quad & \int_0^T (u_m(t), w_m)_1 r(t)\,\mathrm{dt} + \int_0^T (\mathbf{B}_0(u_m(t), u_m(t)), w_m)r(t)\,\mathrm{dt} \\ = \quad & \int_0^T (f(t), w_m)r(t)\,\mathrm{dt} + (u_m(0), w_m)r(0). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Pelas convergências (3.10)-(3.12) quando $k \longrightarrow \infty$ temos

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u_m(t), w_m)r'(t)\,\mathrm{dt} \quad &\longrightarrow \quad -\int_0^T (u(t), w_m)r'(t)\,\mathrm{dt}, \\ \int_0^T ((u_m(t), w_m)r(t)\,\mathrm{dt} \quad &\longrightarrow \quad \int_0^T (u(t), w_m))r(t)\,\mathrm{dt}, \\ (u_m(0), w_m)r(0) = (P_m u_0, w_m)r(0) \quad &\longrightarrow \quad (u_0, w_m)r(0). \end{aligned}$$

Vamos agora demonstrar que se $k \longrightarrow \infty$ então

$$\int_0^T (\mathbf{B}_0(u_m(t), u_m(t)), w_m)r(t)\,\mathrm{dt} \longrightarrow \int_0^T (\mathbf{B}_0(u(t), u(t), w_m)r(t)\,\mathrm{dt}.$$

De fato:

$$\begin{aligned}
\int_0^T |(\mathbf{B}_0(u_m(t), u_m(t)), w_m)r(t) \;&-\; (\mathbf{B}_0(u(t), u(t)), w_m)r(t)|\,\mathrm{dt} \\
&\leq \int_0^T |(\mathbf{B}(u_m(t), u_m(t)) - \mathbf{B}(u(t), u(t)), w_m)r(t)|\,\mathrm{dt} \\
&\quad + \int_0^T |(\mathbf{B}_1 u_m(t) - \mathbf{B}_1 u(t), w_m)r(t)|\,\mathrm{dt} \\
&\quad + \int_0^T |(\mathbf{B}_2 u_m(t) - \mathbf{B}_2 u(t), w_m)r(t)|\,\mathrm{dt} \\
&\leq c\int_0^T |\mathbf{B}(u_m(t) - u(t), u_m(t))|_{-1}\,\mathrm{dt} \\
&\quad + c\int_0^T |\mathbf{B}(u(t), u_m(t) - u(t))|_{-1}\,\mathrm{dt} \\
&\quad + c\int_0^T |\mathbf{B}_1(u_m(t) - u(t))|_{-1}\,\mathrm{dt} \\
&\quad + c\int_0^T |\mathbf{B}_2(u_m(t) - u(t))|_{-1}\,\mathrm{dt} \\
&\leq \tilde{c}\left(\int_0^T |u_m(t) - u(t)|^2\,\mathrm{dt}\right)^{\frac{1}{2}} \to 0.
\end{aligned}$$

Fazendo $m \to \infty$ em (3.13)

$$\begin{aligned}
-\int_0^T (u(t), w_k)r'(t)dt \;&+\; \int_0^T ((u(t), w_k))r(t)\,\mathrm{dt} + \int_0^T \mathbf{B}_0(u(t), u(t), w_k)r(t)\,\mathrm{dt} \\
&= (u_0, w_k)r(0) + \int_0^T (f(t), w_k)r(t)\,\mathrm{dt}. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Como os elementos de $C^1([0,T];\mathcal{H}) \cap C([0,T];\mathcal{H}^1)$ são limites de combinacões lineares finitas de termos do tipo $r(\cdot)w^i$, a igualdade (3.1) é obtida da igualdade (3.14). ■

Teorema 3.4 (Propriedade de Reprodução das Soluções Fracas) *Sob as mesmas hipôteses do teorema 3.3, existe uma solução fraca de* (3.1)-(3.2) *que possui a seguinte propriedade de reprodução :*

$$u(0,x) = u(T,x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Demonstração.

Como $\mathcal{H}^1 \hookrightarrow \mathcal{H}$, existe $c_1 > 0$ tal que $c_1|u_m|^2 \leq c|u_m|_1^2$. Usando isto em (3.8) temos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|u_m|^2 + c_1|u_m|^2 \leq \varepsilon|f|_{-1}^2,$$

ou de maneira equivalente

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(e^{c_1 t}|u_m|^2\right) \leq \varepsilon e^{c_1 t}|f|_{-1}^2.$$

Integrando de 0 até T:

$$e^{c_1 T}|u_m(T)|^2 \leq |u_m(0)|^2 + \int_0^T e^{c_1 t}\varepsilon|f(t)|_{-1}^2\,\mathrm{dt}. \tag{3.15}$$

Definamos a aplicação $L_m : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ como segue:

$$L_m(t) := (c_{1m}(t), \ldots, c_{mm}(t))$$

onde $c_{km}(t),\ k = 1, \ldots, m$, são os coeficientes da expansão de Galerkin de $u_m(t)$. Pela escolha da base espectral $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$ e que é ortonormal em $\mathcal{H}$, temos

$$\|L_m(t)\|_{\mathbb{R}^m} = |u_m|, \tag{3.16}$$

Definamos agora a aplicação $\Phi_m : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ como segue: Dado $(L_m)_0 \in \mathbb{R}^m$ definimos $\Phi_m((L_m)_0) = L_m(T)$, onde $L_m(t)$ corresponde à solução do problema (3.3)-(3.4) com valor inicial $(L_m)_0$. É fácil ver que Φ_m é continua.

Vejamos que Φ_m tem ponto fixo. Para isto, é suficiente demonstrar que para qualquer λ no intervalo $[0,1]$, a possível solução da equação

$$(L_m)_0(\lambda) = \lambda\Phi_m\left[(L_m)_0(\lambda)\right], \tag{3.17}$$

pode ser é limitada por uma constante que não depende de λ.

Como $(L_m)_0(0) = 0$, é suficiente demonstrar (3.17) para λ no intervalo $(0,1]$. Neste caso, (3.17) é equivalente a $\Phi_m((L_m)_0(\lambda)) = \frac{1}{\lambda}(L_m)_0(\lambda)$ e pela definição de Φ_m e (3.16), a desigualdade (3.15) implica que

$$e^{c_1 T}\|\frac{1}{\lambda}(L_m)_0(\lambda)\|^2_{\mathbb{R}^m} \leq \|(L_m)_0(\lambda)\|^2_{\mathbb{R}^m} + 2c\int_0^T e^{c_1 T}|f(t)|^2_{-1}\,\mathrm{dt},$$

e isto implica que

$$\|(L_m)_0(\lambda)\|^2_{\mathbb{R}^m} \leq (e^{c_1 T} - 1)^{-1}\left(2c\int_0^T e^{c_1 T}|f(t)|^2_{-1}\,\mathrm{dt}\right) =: SM,$$

já que $\lambda \in (0,1]$. Esta estimativa não depende de $\lambda \in [0,1]$ e assim Φ_m tem um ponto fixo $(L_m)_0(1)$ que satisfaz a mesma estimativa em (3.9). Isto corresponde à existência de uma solução $(u_m)_p(t)$ de (3.3)-(3.4) e que satisfaz $(u_m)_p(0) = (u_m)_p(T)$, ou seja, uma solução reprodutiva aproximada. Além disso,

$$|(u_m)_p(0)|^2 = \|(L_m)_0(1)\|^2_{\mathbb{R}^k} \leq M,$$

estimativa que também não depende de m.

Desta forma, podemos repetir os argumentos usados na demonstração do Item 1 para as soluções aproximadas $(u_m)_p$ e isto nos da exatamente o mesmo tipo de limitações uniformes em m para elas e nos da a convergência de uma subsequência para a solução u_p de (3.1)-(3.2) e que satisfaz $u(0) = u(T)$. ∎

Antes de enunciar nosso próximo resultado, colocamos uma hipôteses adicional que vai nos ajudar a garantir a unicidade das soluções .

H6. Suponhamos que os operadores $\mathbf{B}, \mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$ são tais que o seguinte é válido

$$\begin{aligned}
|(\mathbf{B}(u,v),w)| &\leq c|u|^{1/2}|u|_1^{1/2}|v|^{1/2}|v|_1^{1/2}|w|_1,\\
|(\mathbf{B}_1(u),v)| &\leq c|u|_1|v|^{1/2}|v|_1^{1/2},\\
|(\mathbf{B}_2(u),v)| &\leq c|u|^{1/2}|u|_1^{1/2}|v|^{1/2}|v|_1^{1/2},
\end{aligned}$$

onde c é uma constante que não depende dos elementos u, v e w do espaço $\mathcal{H}^1$.

Teorema 3.5 *Suponhamos que os operadores* $\mathbf{B}, \mathbf{B}_1$ *e* $\mathbf{B}_2$ *satisfazem as condiciones* ***H1*-*H6***. *Então o problema* (3.1)-(3.2) *possui uma única solução .*

Demonstração.

Sejam u, v duas soluções do problema (3.1)-(3.2) e consideremos $w := u - v$. Então w satisfaz la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} w_t + \mathbf{A}w + \mathbf{B}(u,u) - \mathbf{B}(v,v) + \mathbf{B}_1 w + \mathbf{B}_2 w &= 0 \\ w(0) &= 0, \end{aligned}$$

ou de forma equivalente

$$\begin{aligned} w_t + \mathbf{A}w &= -\mathbf{B}_1 w - \mathbf{B}_2 w - \mathbf{B}(u,w) - \mathbf{B}(w,v) \\ w(0) &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando a equação anterior por w e integrando sobre Ω temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + |w(t)|_1^2 &= -(\mathbf{B}_1 w, w) - (\mathbf{B}_2 w, w) - (\mathbf{B}(u,w), w) - (\mathbf{B}(w,v), w) \\ &= -(\mathbf{B}_2 w, w) - (\mathbf{B}(w,v), w) \\ &\leq c_\eta |w|^2 + \eta |w|_1^2 + c_\eta |v|_1^2 |w|^2 + \eta |w|_1^2. \end{aligned}$$

já que $(\mathbf{B}_1 w, w) = (\mathbf{B}(u,w), w) = 0$ e onde usamos a hipôtesis H6. Tomando $\eta = \frac{1}{4}$, obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|w(t)|^2 + |w(t)|_1^2 \leq c|w(t)|^2(1 + |v(t)|_1^2).$$

Integrando de 0 a t, temos

$$|w(t)|^2 + \int_0^t |w(\tau)|_1^2 \,\mathrm{d}\tau \leq c \int_0^t |w(\tau)|^2 (1 + |v(\tau)|_1^2) \,\mathrm{d}\tau.$$

Como $v \in L^2(0,T;\mathcal{H}^1)$ o Lema de Gronwall implica que $w = 0$ e assim $u = v$ ∎

Capítulo 4

Soluciones Periódicas Fortes

Nesta capítulo vamos considerar um problema abstrato e vamos demonstrar a existência e unicidade de soluções fortes periódicas no tempo.

Como uma aplicação da teoría desenvolvida, vamos considerar o sistema de equações dos fluidos magneto-micropolares. Nosso principal resultado cobre vários outros modelos da hidrodinâmica: equações de Navier-Stokes com condiciones de fronteira não homogêneas, equações da magneto-hidrodinâmica e equações dos fluidos micropolares.

4.1 Hipôteses e o Resultado Principal

Lembremos que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert separable com produto interno $(\cdot,\cdot)$ e norma $|\cdot|$. Consideremos a seguinte equação abstrata

$$u_t + \mathbf{A}u + \mathbf{B}(u,u) + \mathbf{R}u = f, \tag{4.1}$$

onde vamos a impor as seguintes hipôtese:

H1. $\mathbf{A}$ é um operador autoadjunto, definido positivo em $\mathcal{H}$ com domínio $\mathcal{D}(\mathbf{A})$ e com inverso compacto.

H2. $\mathbf{B}$ é uma forma bilinear em $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ tal que

$$|(\mathbf{B}(u,v),w)| \leq c_1 |\mathbf{A}^{1/2}u||\mathbf{A}v||w| \tag{4.2}$$

para $u \in \mathcal{D}(\mathbf{A}^{1/2}), v \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$ e $w \in \mathcal{H}$. Além disso, supomos que

$$(\mathbf{B}(u,v),v) = 0, \qquad u \in \mathcal{D}(\mathbf{A}^{1/2}), v \in \mathcal{D}(\mathbf{A}). \tag{4.3}$$

H3. $\mathbf{R}$ é um operador lineal em $\mathcal{H}$ com domínio $\mathcal{D}(\mathbf{A}^{1/2}$ tal que

$$|\mathbf{R}(u,v)| \leq c_2 |A^{1/2}u||v| \tag{4.4}$$

onde $\mathbf{R}(u,v) = (\mathbf{R}u, v)$ para toda $u \in \mathcal{D}(\mathbf{A}^{1/2}), v \in \mathcal{H}$. Além disso, supomos que

$$\mathbf{A}(u,u) + \lambda \mathbf{R}(u,u) \geq k_1 |\mathbf{A}^{1/2}u|^2 \qquad \text{para } \lambda \in [0,1], \tag{4.5}$$

onde $\mathbf{A}(u,v) = (\mathbf{A}^{1/2}u, \mathbf{A}^{1/2}v)$ para toda $u, v \in D(\mathbf{A}^{1/2})$ e $k_1 > 0$.

O principal resultado é o seguinte:

Teorema 4.1 *Seja $f \in C^1(\tau, \mathcal{H})$ para algúm $\tau > 0$. Sob as hipôteses* (4.2)-(4.5) *e se existe uma constante positiva M tal que se*

$$\sup_t |f(t)| \leq M \tag{4.6}$$

então (4.1) *possui uma solução forte τ–periódica*

$$u \in \mathcal{H}^2(\tau; \mathcal{H}) \cap \mathcal{H}^1(\tau; \mathcal{D}(\mathbf{A})) \cap L^\infty(\tau; \mathcal{D}(\mathbf{A})) \cap W^{1,\infty}(\tau; D(\mathbf{A}^{1/2})). \tag{4.7}$$

Além disso, se

$$|\mathbf{B}(u,v,w)| \leq c_1 |\mathbf{A}^{1/2}u||\mathbf{A}^{1/2}v|^{1/2}|\mathbf{A}v|^{1/2}|w| \tag{4.8}$$

ou se $\|f\|_{C^1(\tau,\mathcal{H})}$ for suficientemente pequena, então a solução é única e para toda solução $\tilde{u}$ de (4.1) *definida para $t \in (0, \infty)$ com valores em $\mathcal{D}(\mathbf{A})$ e tal que*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{u}(t)| + \int_0^T |\mathbf{A}^{1/2}\tilde{u}(t)|^2 \, dt < \infty$$

para todo $T > 0, |\tilde{u}(t) - u(t)| \to 0$ exponencialmente quando $t \to \infty$.

A demonstração deste teorema é básicamente um conjunto de estimativas para as soluções aproximadas $u_m \in C^1(\tau; V_m), m = 1, 2, 3, \ldots,$ onde $V_m = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ e $\{w_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é um conjunto ortonormal completo de $\mathcal{H}$ formado pelas autofunções do operador $\mathbf{A}$.

Na próxima seção apresentamos a demonstração do teorema 4.1. O roteiro desta prova é o seguinte: Primeiro demonstramos a existência das soluções u_m. Segundo, obtemos um conjunto de estimativas das u_n que nos permitirem fazer a passagem ao limite em n. O terceiro passo é demonstrar a existência de uma solução da equação (4.1) e que satisfaz (4.6) tomando $n \to \infty$ e também sua unicidade.

4.2 Demonstração do Teorema 4.1

4.2.1 Soluções Aproximadas e Estimativas de Primeira Ordem.

Consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias que definem soluções aproximadas da equação (4.1).

$$((u_m)t, w_k) + \mathbf{A}(u_m, w_k) + \mathbf{B}(u_m, u_m, w_k) + \mathbf{R}(u_m, w_k) = (f, w_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, m \tag{4.9}$$

onde $u_m(t) = \sum_{k=1}^{m} c_{km}(t) w_k$ e $u_m(t) = u_m(t+\tau)$ para $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Lema 4.2 *Para cada m existe uma solução $u \in C^1(\tau; V_m)$ do problema não linear* (4.9).

Demonstração.

O problema linear

$$\begin{aligned} (u_t, \phi) + \mathbf{A}(u, \phi) &= (f, \phi) - \mathbf{R}(v, \phi) - B(v, v, \phi), \qquad \phi \in V_m, &(4.10)\\ u(t) &= u(t+\tau) \end{aligned}$$

possui uma única solução $u \in C^1(\tau; V_m)$ para cada $v \in C^0(\tau; V_m)$ (ver [amann], [burton]).

Considere o operador $\Phi : C^0(\tau; H_n) \to C^0(\tau; H_n)$ tal que $\Phi v = u$. Vamos a demonstrar que Φ tem um ponto fixo usando o Teorema de Leray-Schauder. Para isto, vamos a demonstrar que para todo u e $\lambda \in [0,1]$ tais que $\lambda \Phi u = u$ temos

$$\sup_{0 \le t \le \tau} |u(t)| \le CM \quad \text{para algúm } C > 0 \tag{4.11}$$

onde M é a constante que aparece na desigualdade (4.6). Para $\lambda = 0$ temos que $u = 0$. Seja $\lambda > 0$ e vamos supor que $\lambda \Phi(u) = u$. Usando (4.10) temos que

$$(u_t, \phi) + \mathbf{A}(u, \phi) = \lambda(f, \phi) - \lambda \mathbf{R}(u, \phi) - \lambda \mathbf{B}(u, u, \phi)$$

Tomando $\phi = u$ e lembrando (4.3) obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|u|^2 + \mathbf{A}(u, u) + \lambda \mathbf{R}(u, u) = \lambda(f, u)$$

Denotando por μ o menor autovalor de $\mathbf{A}$, temos

$$|\mathbf{A}^\alpha u| \le \mu^{\alpha - \beta} |\mathbf{A}^\beta u|, \quad 0 \le \alpha \le \beta, \tag{4.12}$$

e assim $|(f, u)| \le C|f||\mathbf{A}^{1/2}u|$ e pela desigualdade (4.5) obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|u|^2 + k_1 |\mathbf{A}^{1/2}u|^2 \le CM^2 \tag{4.13}$$

Integrando em relação a t e usando a periodicidade de u temos

$$\int_0^\tau |\mathbf{A}^{1/2}u(t)|^2 \,\mathrm{dt} \le CM^2\tau.$$

Pelo Teorema do valor médio para integrais e (4.12), existe $t^* \in [0, \tau]$ tal que

$$|u(t^*)| \le C|\mathbf{A}^{1/2}u(t^*)| \le CM \tag{4.14}$$

Integrando novamente (4.13) de t^* até $t+\tau$, com $t \in [0,\tau]$ obtemos (4.11). Como o operador Φ é continuo e compacto em $C^0(\tau; H_n)$ obtemos a existência de um ponto fixo u para Φ. Note que (4.11) se satisfaz para este u.

Agora, vamos a demonstrar algumas estimativas fundamentais.

Lema 4.3 *Seja $u = u_m$ a solução de* (4.9). *Existe uma constante positiva C que não depende de m tal que*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\mathbf{A}^{1/2}u(t)| \leq CM^{1/2} \tag{4.15}$$

Demonstração.

De (4.14) com $M < 1$ temos

$$|\mathbf{A}^{1/2}u(t^*)| < CM^{1/2}.$$

Seja $T^* = \sup\{T : |\mathbf{A}^{1/2}u(t)| \leq CM^{1/2}$ para $t \in [t^*, T)\}$. Vamos demonstrar que $T^* = \infty$ e assim vale (4.15) pela periodicidade. Suponhamos o contrário, ou seja, que vale $T^* < \infty$. Então

$$|A^{1/2}u(T^*)| = CM^{1/2} \tag{4.16}$$

Nosso objetivo é usar (4.16) para obter a desigualdade diferencial

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|\mathbf{A}^{1/2}u(T^*)|^2 \leq 0 \tag{4.17}$$

e que demonstra a contradição baseada na definição de T^*. Para toda $\phi \in H_n$, temos

$$(u_t, \phi) + \mathbf{A}(u, \phi) + \mathbf{B}(u, u, \phi) + \mathbf{R}(u, \phi) = (f, \phi). \tag{4.18}$$

Tomando $\phi = \mathbf{A}u$ obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|\mathbf{A}^{1/2}u|^2 + |\mathbf{A}u|^2 \leq |f||\mathbf{A}u| + |\mathbf{R}(u, \mathbf{A}u)| + |\mathbf{B}(u, u, \mathbf{A}u)|$$

onde usamos o fato de que $(\mathbf{A}u, \phi) = \mathbf{A}(u, \phi)$ para $u \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$ e $\phi \in \mathcal{H}$. Agora, por (4.2) e (4.4)

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|\mathbf{A}^{1/2}u|^2 + |\mathbf{A}u|^2 \leq |f||\mathbf{A}u| + c_2|\mathbf{A}^{1/2}u| \cdot |\mathbf{A}u| + c_1|\mathbf{A}^{1/2}u||\mathbf{A}u|^2. \tag{4.19}$$

Consideremos esta desigualdade no ponto $t = T^*$. Então , usando (4.11), (4.16) e a desigualdade de interpolação seguinte

$$|\mathbf{A}^{\sigma}u| \leq C|\mathbf{A}^{\alpha}u|^{\lambda}|\mathbf{A}^{\beta}u|^{1-\lambda}, \qquad u \in \mathcal{D}(\mathbf{A}^{\beta}) \tag{4.20}$$

onde $\sigma = \alpha\lambda + \beta(1-\lambda), 0 \leq \alpha \leq \sigma \leq \beta$ e $\lambda \geq 0$. Então

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}^{1/2}u||\mathbf{A}u|^2 &= CM^{1/2}|\mathbf{A}u|^2 && (4.21)\\ |\mathbf{A}^{1/2}u||\mathbf{A}u| &\leq \varepsilon|\mathbf{A}u|^2 + c_\varepsilon|\mathbf{A}^{1/2}u|^2 && (4.22)\\ &\leq \varepsilon|\mathbf{A}u|^2 + c_\varepsilon|u||\mathbf{A}u| \\ &\leq \varepsilon|\mathbf{A}u|^2 + c_\varepsilon M \cdot |\mathbf{A}u| \\ &\leq \varepsilon|\mathbf{A}u|^2 + c_\varepsilon M^{1/2}|\mathbf{A}^{1/2}u||\mathbf{A}u| \\ &\leq \varepsilon|\mathbf{A}u|^2 + CM^{1/2}|\mathbf{A}u|^2 \end{aligned}$$

e usando (4.6)

$$|f||\mathbf{A}u| \leq M|\mathbf{A}u| = CM^{1/2}|\mathbf{A}^{1/2}u| \cdot |\mathbf{A}u| \leq CM^{1/2}|\mathbf{A}u|^2 \tag{4.23}$$

Usando (4.19), junto com (4.21)-(4.23), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|\mathbf{A}^{1/2}u|^2 + (1 - C(M))|\mathbf{A}u|^2 \leq 0$$

onde $C(M) \to 0^+$ quando $M \to 0^+$. Assim obtemos (4.19) para M suficientemente pequeno. ■

Usando (4.15) e (4.19) temos, para M pequeno,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|\mathbf{A}^{1/2}u|^2 + |\mathbf{A}u|^2 \leq |f|^2 + CM$$

integrando e lembrando a periodicidade de u obtemos

$$\int_0^\tau |\mathbf{A}u(t)|^2\,\mathrm{dt} \leq C(M), \qquad C(M) \to 0^+ \text{ quando } M \to 0^+. \tag{4.24}$$

Lema 4.4 *Seja u a solução de* (4.9). *Então*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |u_t(t)|^2 \leq C(M, M_1), \qquad C(M, M_1) \to 0^+ \textit{ quando } M + M_1 \to 0^+ \tag{4.25}$$

uniformemente em relação a m. Aqui $M_1 = (\int_0^\tau |f_t(t)|^2\, dt)^{1/2}$.

Demonstração.

Seja $\phi := u_t$ em (4.18). Usando (4.4) temos que

$$|u_t|^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|\mathbf{A}^{1/2}u|^2 \leq |f||u_t| + c_2|\mathbf{A}^{1/2}u||u_t| + |(\mathbf{B}(u,u), u_t)|. \tag{4.26}$$

Lembrando (4.2) e (4.15)

$$\begin{aligned} |(\mathbf{B}(u,u), u_t)| &\leq c_1|\mathbf{A}^{1/2}u||\mathbf{A}u||u_t| \qquad (4.27)\\ &\leq CM^{1/2}|\mathbf{A}u|^2 + CM^{1/2}|u_t|^2 \end{aligned}$$

e por (4.26), (4.27), para M pequeno,

$$|u_t|^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|\mathbf{A}^{1/2}u|^2 \leq |f|^2 + C|\mathbf{A}^{1/2}u|^2 + CM^{1/2}|\mathbf{A}u|^2$$

Logo de integrar em t e usando (4.24), (4.15) obtemos

$$\int_0^\tau |u_t(t)|^2\,\mathrm{dt} \leq C(M), \qquad C(M) \to 0^+ \text{ cuando } M \to 0^+. \tag{4.28}$$

Agora, vamos derivar (4.18) em relação a t e tomemos $\phi := u_t$. Então , usando (4.3) obtemos

$$(u_{tt}, u_t) + \mathbf{A}(u_t, u_t) + \mathbf{B}(u_t, u, u_t) + \mathbf{R}(u_t, u_t) = (f_t, u_t)$$

e por (4.5),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|u_t|^2 + 2k_1|\mathbf{A}^{1/2}u_t|^2 \le C|f_t|^2 + \frac{k_1}{2}|\mathbf{A}^{1/2}u_t|^2 + 2|\mathbf{B}(u_t,u,u_t)|$$

Por (4.2),

$$2|\mathbf{B}(u_t,u,u_t)| \le 2c_1|\mathbf{A}^{1/2}u_t||\mathbf{A}u||u_t| \le \frac{k_1}{2}|\mathbf{A}^{1/2}u_t|^2 + C|\mathbf{A}u|^2|u_t|^2.$$

De duas últimas desigualdades tiramos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|u_t|^2 + k_1|\mathbf{A}^{1/2}u_t|^2 \le C|f_t|^2 + C|\mathbf{A}u|^2|u_t|^2 \tag{4.29}$$

e em particular

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|u_t|^2 \le C|f_t|^2 + C|\mathbf{A}u|^2|u_t|^2 \tag{4.30}$$

Temos agora que

$$\int_t^{t+\tau} |u_t(s)|^2\,\mathrm{ds} = \int_0^{\tau} |u_t(s)|^2\,\mathrm{ds} \le C(M)$$

por (4.28) e (4.24)

$$\int_t^{t+\tau} |\mathbf{A}u(s)|^2\,\mathrm{ds} = \int_0^{\tau} |\mathbf{A}u(s)|^2\,\mathrm{ds} \le C(M)$$

Pelas nossa hipôtesis,

$$\int_t^{t+\tau} |f_t(s)|^2\,\mathrm{ds} = \int_0^{\tau} |f_t(s)|^2\,\mathrm{ds} = M_1^2$$

Usando o lema uniforme de Gronwall (ver [teminf]) na desigualdade (4.30) obtemos

$$|u_t(t+\tau)|^2 \le \left(\frac{C(M)}{\tau} + M_1^2\right)\exp C(M) \quad \text{para todo } t \ge 0$$

Como u é τ–periódica, obtemos (4.25). ■

4.2.2 Estimativas de Ordem Maior.

Lema 4.5 *Seja u a solução aproximada de* (4.1). *Então*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\mathbf{A}u(t)| \leq C(M, M_1) \tag{4.31}$$

e

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\mathbf{A}^{1/2}u_t(t)| \leq C(M, M_1) \tag{4.32}$$

onde $C(M, M_1) \to 0^+$ *quando* $M + M_1 \to 0^+$.

Demonstração.

Tomando $\phi = \mathbf{A}u$ em (4.18), usando (4.2) e (4.4) e logo (4.25), (4.15) e (4.6) para obter

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}u|^2 &\leq |u_t||\mathbf{A}u| + c_1|\mathbf{A}^{1/2}u||\mathbf{A}u||\mathbf{A}u| + c_2|\mathbf{A}^{1/2}u||\mathbf{A}u| + |f||\mathbf{A}u| \\ &\leq C(M, M_1)|\mathbf{A}u| + CM^{1/2}|\mathbf{A}u|^2. \end{aligned}$$

Para M tal que $1 - CM^{1/2} > 0$ obtemos (4.31).

Para obter a segunda estimativa do lema derivamos a identidade (4.18) em relação a t e então tomamos $\phi = \mathbf{A}u_t$. Usando (4.2) e (4.4) temos

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|\mathbf{A}^{1/2}u_t|^2 + |\mathbf{A}u_t|^2 &\leq c_1|\mathbf{A}^{1/2}u_t||\mathbf{A}u||\mathbf{A}u_t| + c_1|\mathbf{A}^{1/2}u||\mathbf{A}u_t|^2 + \\ &\qquad C|\mathbf{A}^{1/2}u_t|^2 + \tfrac{1}{4}|\mathbf{A}u_t|^2 + |f_t|^2 + \tfrac{1}{4}|\mathbf{A}u_t|^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando (4.12) e (4.31) obtemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|\mathbf{A}^{1/2}u_t|^2 + |\mathbf{A}u_t|^2 \leq C(M, M_1)|\mathbf{A}^{1/2}u_t||\mathbf{A}u_t| + CM|\mathbf{A}u_t|^2 + C|\mathbf{A}^{1/2}u_t|^2 + |f_t|^2. \tag{4.33}$$

De (4.29) e (4.28),

$$\int_0^\tau |\mathbf{A}^{1/2}u_t|^2 \,\mathrm{dt} \leq C(M, M_1) \tag{4.34}$$

e de (4.33), (4.34) e para M suficientemente pequeno,

$$\int_0^\tau |\mathbf{A}u_t|^2 \,\mathrm{dt} \leq C(M, M_1)^{3/2} \left(\int_0^\tau |\mathbf{A}u_t|^2 \,\mathrm{dt} \right)^{1/2} + C(M, M_1)$$

e assim

$$\int_0^\tau |\mathbf{A}u_t(t)|^2\,\mathrm{dt} \le C(M, M_1). \tag{4.35}$$

Para algúm $t^* \in [0, \tau]$,

$$|\mathbf{A}^{1/2}u_t(t^*)|^2 \le C(M, M_1)$$

e, depois de integrar (4.33) em relação a t de t^* até $t+\tau, t \in [0,\tau]$, obtemos (4.32). ■

Lema 4.6 *Seja u a solução aproximada de* (4.9). *Então*

$$\int_0^\tau |u_{tt}(t)|^2\,dt \le C(M, M_1) \tag{4.36}$$

onde $C(M, M_1)$ é como no Lema 4.5.

Demonstração.

Derivando (4.18) em relação a t e tomando $\phi = u_{tt}$ temos

$$\begin{aligned} |u_{tt}|^2 &\le |\mathbf{A}(u_t, u_{tt})| + |\mathbf{R}(u_t, u_{tt})| + |\mathbf{B}(u_t, u, u_{tt})| + |\mathbf{B}(u, u_t, u_{tt})| + |(f_t, u_{tt})| \\ &\le |\mathbf{A}u_t||u_{tt}| + C|\mathbf{A}^{1/2}u_t||u_{tt}| + c_1|\mathbf{A}^{1/2}u_t||\mathbf{A}u||u_{tt}| + c_1|\mathbf{A}^{1/2}u||\mathbf{A}u_t||u_{tt}| + |f_t||u_{tt}| \end{aligned}$$

Usando (4.2), (4.4) e lembrando (4.12), (4.31) e (4.32)

$$|u_{tt}|^2 \le C(M, M_1)|Au_t|^2 + C|f_t|^2$$

Integrando em t e usando (4.35) nos da (4.36). . ■

4.2.3 Convêrgencia e Unicidade.

Das estimativas obtidas segue-se que $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em

$$H^2(\tau; \mathcal{H}) \cap H^1(\tau; \mathcal{D}(\mathbf{A})) \cap L^\infty(\tau; \mathcal{D}(\mathbf{A})) \cap W^{1,\infty}(\tau; \mathcal{D}(\mathbf{A}^{1/2})) \tag{4.37}$$

e existe uma subsequência $\{u_\mu\}$ e algúm u no espaço (4.37) tais que

$$\begin{aligned}
u_\mu \to u &\quad \text{fracamente em } L^\infty(\tau; \mathcal{D}(\mathbf{A})),\\
u_\mu \to u &\quad \text{fortemente em } L^\infty(\tau; \mathcal{D}(\mathbf{A}^{1/2})),\\
D_t u_\mu \to D_t u &\quad \text{fraco * em } L^\infty(\tau; \mathcal{D}(\mathbf{A}^{1/2})),\\
D_t u_\mu \to D_t u &\quad \text{fortemente em } L^\infty(\tau; \mathbf{h}).
\end{aligned}$$

Tomando $u = u_\mu$ na identidade (4.9) para $\mu \geq m$ e fazendo $\mu \to \infty$. Para obter (4.1) observamos que, por (4.2) e (4.3), para toda $\phi \in V_m$ temos

$$\begin{aligned}
|\mathbf{B}(u_\mu, u_\mu, \phi) - \mathbf{B}(u, u, \phi)| &\leq |\mathbf{B}(u_\mu - u, u_\mu, \phi)| + |\mathbf{B}(u, u_\mu - u, \phi)|\\
&\leq c_1|\mathbf{A}^{1/2}(u_\mu - u)||\mathbf{A}u_\mu||\phi| + c_1|\mathbf{A}^{1/2}u||\mathbf{A}\phi||u_\mu - u| \to 0
\end{aligned}$$

uniformemente em t e onde usamos (4.15) e (4.31). Logo a seguinte igualdade:

$$(u_t, \phi) + (\mathbf{A}u, \phi) + (\mathbf{B}(u, u), \phi) + (\mathbf{R}u, \phi) = (f, \phi)$$

segue-se fácilmente para a função limite u e toda $\phi \in \mathcal{H}$.

Para demonstrar a unicidade supomos que existem duas soluções diferentes u e v. Então $w := u - v$ satisfaz

$$(w_t, \phi) + (\mathbf{A}w, \phi) + (\mathbf{B}(u, w), \phi) + (\mathbf{B}(w, v), \phi) + (\mathbf{R}w, \phi) = 0 \qquad \forall \phi \in \mathcal{H}.$$

Tomando $\phi = w$ e usando (4.8), (4.12), (4.15) e (4.31) temos

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|w|^2 + k_1|\mathbf{A}^{1/2}w|^2 \leq |(\mathbf{B}(w, v), w)| \leq\ & c_1|\mathbf{A}^{1/2}w||\mathbf{A}^{1/2}v|^{1/2}|\mathbf{A}v|^{1/2}|w|\\
&\leq M^{1/4}C(M, M_1)|\mathbf{A}^{1/2}w|^2
\end{aligned}$$

e assim para M pequeno obtemos para algum $c > 0$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|W|^2 + c|W|^2 \leq 0 \tag{4.38}$$

e isto é uma contradição já que (4.32) nos dá $w \equiv 0$ pelo Lema de Gronwall e a periodicidade de w. Isto demonstra a unicidade sob a hipôtesis (4.8). Alternativamente, se

$\|f\|_{C^1(\tau;\mathbf{h})}$ é suficientemente pequeno então

$$|(\mathbf{B}(w,v),w)| \leq c_1|\mathbf{A}^{1/2}w||\mathbf{A}v||\mathbf{A}^{1/2}w| \leq C(M,M_1)|\mathbf{A}^{1/2}w|^2$$

para $C(M,M_1)$ suficientemente pequeno. Isto dá a unicidade no segundo caso. ■

Bibliografia

[aa94] D. Hărăgus. Equations du type navier-stokes. Technical report, Monografia matematica nro. 49, Universitatea de vest din timisoana, 1994.

[Ada95] R. A. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1995.

[AG91] G. Amrouche and V. Girault. On the existence and regularity of the solutions of stokes problem in arbitrary dimension. *Proc. Japan Acad., Ser. A.*, 67:171–175, 1991.

[APU74] S.A. Regiger A.S. Popel and P.I. Usick. A continuum model of blood flow. *Biorheology*, 11:427–437, 1974.

[BBRM95] R. Beltrán-Barrios and M.A. Rojas-Medar. The initial value problem for the equations of magnetohydrodynamic type in noncylindrical domains. *Rev. Mat. Univ. Compl. Madrid*, 8:229–251, 1995.

[BF99] L.C. Berselli and J. Ferreira. On the magnetohydrodynamic type equations in a new class of non-cylindrical domains. *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat.*, 8(2):365–382, 1999.

[BK91] M.A. Brutyan and P.L. Krapiskiui. Stability of periodic flow in a micropolar fluid. *J. Engrg. Phys.*, 4:513–521, 1991.

[BK93] Ya. V. Belov and B.V. Kapitonov. A certain hydrodynamic model of a chemically active fluid. *Siberian Math. J.*, 24:823–833, 1993.

[Bre83] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle.* Masson, 1983.

[BRM95] J.L Boldrini and M.A. Rojas-Medar. On a system of evolution equations of magnetohydrodinamic type. *Mat. Cont.*, 8:1–19, 1995.

[BRM97] J.L. Boldrini and M.A. Rojas-Medar. Global strong solutions of equations of magnetohydrodynamic type. *J. Australian Math. Soc., Serie B, Applied Math*, 38:291–306, 1997.

[CD80] J.R. Canon and E. DiBenedetto. The initial value problem for the boussinesq equations with data in l^p. In Ed. R. Rautmann, editor, *Proc. IUTAM Symp. 1979, Approx. Methods for Navier-Stokes problem*, pages 129–144, Bergen, 1980. Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 771.

[DRM97] P.D. Damásio and M.A. Rojas-Medar. On some questions of the weak solutions of evolution equation for magnetohydrodynamic type. *Proyecciones*, 16:83–97, 1997.

[DS85] T. Das and V.U.K. Sastry. Stability of couette flow and dean flow in micropolar fluids. *Int. J. Engng. Sci.*, 23:1163–1177, 1985.

[Eri66] A.C. Eringen. Theory of micropolar fluids. *J. Math. Mech.*, 16:1–16, 1966.

[Eva98] L. Evans. *Partial Differential Equations.* Providence : American Mathematical Society, 1998.

[Fer83] C. Ferrari. On lubrication with structured fluids. *Applicable Anal.*, 15:127–146, 1983.

[FK64] H. Fujita and T. Kato. On the navier-stokes initial value problem i. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 16:269–315, 1964.

[His91] T. Hishida. Existence and regularizing properties of solutions for the nonstationary convection problem. *Funkcialy Ekvacioj*, 34(3):449–474, 1991.

[His94] T. Hishida. Asymtotic behavior and stability of solutions to the exterior convection problem. *Nonlinear Analysis*, 22(7):895–925, 1994.

[HY92] T. Hishida and Y. Yamada. Global solutions for the heat convection equations in an exterior domain. *Tokyo J. Math.*, 15(1):135–151, 1992.

[Jos76] D. D. Joseph. *Stability of Fluid Motion*. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[Kor77] N.K. Korenev. On some problems of convection in a viscous incompressible fluid. *Vestnik Leningrand Univ. math.*, 4:125–137, 1977.

[KS74] W.P. Kotorynski and M. Shinbrot. The initial value problem for a viscous heat-conducting fluid. *J. Math. Anal. Appl.*, 45:1–22, 1974.

[Lak70] S.K. Lakshmana. Stability of micropolar fluid motion. *Int. J. Engng. Sci.*, 8:753–762, 1970.

[Lak71] S.K. Lakshmana. Existence of periodic solutions of the equations of incompressible micropolar flow. *Int. J. Engng. Sci.*, 9:1143–1150, 1971.

[Las67] G. Lassner. Uber ein rand-anfangswert - problem der magnetohydrodinamik. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 25:388–405, 1967.

[Lio69] J.L. Lions. *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*. Dunod, Paris, 1969.

[LRM95a] S.A. Lorca and M.A. Rojas-Medar. The equations of a viscous incompressible chemical active fluid i: uniqueness and existence of the local solutions. *Revista de Matemáticas Aplicadas*, 19(16):57–80, 1995.

[LRM95b] S.A. Lorca and M.A. Rojas-Medar. The equations of a viscous incompressible chemical active fluid ii: regularity of solutions. *Revista de Matemáticas Aplicadas*, 19(16):81–95, 1995.

[LRM95c] S.A. Lorca and M.A. Rojas-Medar. Global strong solution of the equations for the motion of a chemical active fluid. *Matemática Contemporânea*, 8:319–335, 1995.

[LRM96] S.A. Lorca and M.A. Rojas-Medar. Weak solutions for a viscous incompressible chemical active fluid. *Revista de Matemática e Estatística, UNESP*, 14:183–199, 1996.

[Luk99] G. Lukaszewicz. *Micropolar Fluids: Theory and Applications.* Birkhauser, Boston, 1999.

[M.I91] Gil's M.I. Solvability of a system of stationary boussinesq equations. *Differential Equations*, 27:1377–1382, 1991.

[Mor92] H. Morimoto. Nonstationary boussinesq equations. *J. Fac. Sci., Univ Tokyo, Sect., IA Math.*, 39:61–75, 1992.

[MR75] L.A. Medeiros and P.H. Rivera. *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais.* Textos de Métodos Matemáticos, Nro. 9, UFRJ, 1975.

[MX98] S. Malham and J. Xin. Global solutions to a reactive boussinesq system with front data on an infinite domain. *Commun. Math. Phys.*, 193(2):287–316, 1998.

[NCRM98] E.A. Notte-Cuello and M.A. Rojas-Medar. On a system of evolution equations of magnetohydrodynamic type: an iterational approach. *Proyecciones*, 17:133–165, 1998.

[Ō97] K. Ōeda. Periodic solutions of the heat convection equation in exterior domain. *Proc. Japan Acad., Ser. A*, 73(4):49–54, 1997.

[OM98] K. Ōeda and N. Matsuda. Initial value problems for the heat convection equations in exterior domain. *Tokyo J. Math.*, 21(2):359–375, 1998.

[OT98] E. Ortega-Torres. *Equações de Fluidos Magneto-Micropolares: Existência, Unicidade, Regularidade e Aproximação da solução.* PhD thesis, IMECC-UNICAMP, 1998.

[OTRM96] E. Ortega-Torres and M.A. Rojas-Medar. On the uniqueness and regularity of the weak solution for magnetomicropolar fluid equations. *Rev. Mat. Apl.*, 17(2):75–90, 1996.

[Pik66] S.B. Pikelner. *Grundlangen der Kosmischen Elektrohydrodynamik.* Moscou, 1966.

[PR96] M. Padula and R. Russo. A uniqueness theorem for micropolar fluid motions in unbounded regions. *Boll. Un. Mat. Ital.*, 13(3):660–666, 1996.

[RM95] M.A Rojas-Medar. *Algumas questões matemáticas das equações dos fluidos não homogêneos.* minicurso, 41 Seminário Brasileiro de Análise,IMECC-UNICAMP, 1995.

[RM02] M.A. Rojas-Medar. *Sobre una clase de ecuaciones diferenciales parciales no lineales.* Minicurso Universidad de Sevilla, Sevilla, España, 2002.

[Sch50] A. Schlüter. Dynamic des plasmas i . *Z. Naturforsch.*, 5:72–78, 1950.

[Sch51] A. Schlüter. Dynamic des plasmas ii. *Z. Naturforsch.*, 6:73–79, 1951.

[Sim87] J. Simon. Compact sets in $l^p(0, t; b)$. *Annali Mat. Pura Applicata (IV)*, 146(6):65–96, 1987.

[Sim90a] J. Simon. Nonhomogeneous viscous incompressible fluids existence of velocity, density and pressure. *SIAM J. Math. Anal.*, 21(5):1093–1117, 1990.

[Sim90b] J. Simon. Sobolev, besov and nikolskii and functional spaces: imbeddings and comparisons for vector valued spaces on an interval. *Annali di Mat. Pura Applicata (4)*, (157):117–148, 1990.

[Tem79] Roger Temam. *Navier-Stokes Equations.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1979.

[Tem88] R. Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics.* Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[Zha93] K. Zhang. On shinbrot's conjeture for the navier-stokes. *Proc. R. Soc. London A.*, J37-J40,(440), 1993.

[Zyg59] A. Zygmund. *Trigonometric Series, 2nd. Ed., vol 1.* Cambridge University Press, 1959.