
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

**RELAÇÕES ENTRE EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES
GLOBAIS DA EQUAÇÃO DO CALOR NÃO LINEAR E
EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES FRACAS DO PROBLEMA
ELÍPTICO ASSOCIADO.**

Autor: Bianca Morelli Rodolfo Calsavara

Orientador: Prof. Dr. Aloisio José Freiria Neves

21 de fevereiro de 2003

Relações entre Existência de Soluções Globais da Equação do Calor Não Linear e Existência de Soluções Fracas do Problema Elíptico Associado.

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Bianca Morelli Rodolfo Calsavara** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 21 de fevereiro de 2003.

Prof. Dr. **Aloisio José Freiria Neves**
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Aloisio José Freiria Neves

Prof^a. Dr^a. Helena Judith Nussenzveig Lopes

Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

A meus avós

Mário Alfredo (in memorian) e Gioconda (in memorian)

e

José Rodolpho e Clarice (in memorian).

Agradecimentos

A Deus.

À minha família pelo apoio e incentivo, em especial aos meus pais Rubens e Eliete.

Ao prof. Dr. Aloisio José Freiria Neves pela orientação, dedicação, paciência e confiança.

Ao prof. Dr. Renato Hyuda de Luna Pedrosa pela ajuda na resolução de alguns problemas geométricos.

Aos professores do IMECC/UNICAMP pela minha formação, em especial aos professores Benjamin Bordin pelos dois anos de orientação em iniciação científica e Edmundo Capelas de Oliveira pelo apoio e incentivo durante minha graduação.

Aos funcionários do IMECC/UNICAMP em especial a Cidinha, Ednaldo, Tânia e Júlio.

Às turmas de matemática da Unicamp/97 e do programa de Pós-graduação; pela amizade, pelo incentivo e por toda ajuda.

À CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível.

Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	1
1 Funções Convexas	3
1.1 Definição e Propriedades	3
1.2 Propriedades da g	7
2 Princípios de Máximo para Equações Elípticas	8
2.1 O Operador de Laplace	8
2.2 O Operador Elíptico de Segunda Ordem	9
2.3 Princípios de Máximo	13
2.4 O Lema de Hopf	18
3 Princípios de Máximo para Equações Parabólicas	22
3.1 O Operador Parabólico	22
3.2 Princípios de Máximo	23
3.3 O Lema de Hopf para o Problema Parabólico	35
4 O Semigrupo da equação do Calor	39
4.1 Introdução à Teoria de Semigrupos	39
4.2 Equação do Calor em L^2	42

5	A Equação do Calor Não Linear e o Problema Elíptico Associado	44
5.1	Introdução	44
5.2	Demonstração do Teorema 5.1.3	48
5.3	Demonstração do Teorema 5.1.1	60
5.4	Demonstração do Teorema 5.1.2	68
	Bibliografia	82

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é discutir as relações entre a existência de soluções globais clássicas do problema de evolução

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - \Delta u = g(u) & \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ u(0) = u_0 & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

e a existência de soluções fracas do problema estacionário

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = g(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{array} \right.$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio suave e limitado e $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é uma função C^1 , convexa e não decrescente.

Abstract

In this work we study some relations between the nonlinear heat equation and the corresponding stationary problem. The main purpose is to show the equivalence between the existence of global solutions of the heat equation and the existence of a weak solution of the Laplace equation.

Introdução

Este trabalho é baseado no artigo de Haim Brezis, Thierry Cazenave, Yvan Martel e Arthur Ramiandrisoa, "Blow up for $u_t - \Delta u = g(u)$ revisited", Advances in Differential Equations, volume 1, number 1, January 1996, pp.73-90, [1].

Neste trabalho são discutidas as relações entre a existência de soluções globais clássicas do problema de evolução

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = g(u) \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ u(0) = u_0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (0.0.1)$$

e a existência de soluções fracas do problema estacionário

$$\begin{cases} -\Delta w = g(w) & \text{em } \Omega \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (0.0.2)$$

Neste trabalho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio suave, limitado e conexo e $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é uma função C^1 , convexa e não decrescente.

Para alguns resultados, assumiremos que existe $x_0 \geq 0$ tal que $g(x_0) > 0$ e

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{ds}{g(s)} < \infty. \quad (0.0.3)$$

Soluções u de (0.0.1) e w de (0.0.2) são sempre assumidas não negativas. A condição inicial u_0 é sempre assumidas em $L^\infty(\Omega)$ e $u_0 \geq 0$, tal que alguma solução clássica de (0.0.1) existe em um intervalo maximal $(0, T_m)$.

Definição 0.0.1 : *Uma solução fraca de (0.0.2) é uma função $w \in L^1(\Omega)$, $w \geq 0$, tal que*

$$g(w)\delta \in L^1(\Omega), \quad (0.0.4)$$

onde δ denota a função distância à fronteira,

$$\delta(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega), \quad (0.0.5)$$

e satisfaz

$$-\int_{\Omega} w \Delta \zeta = \int_{\Omega} g(w) \zeta, \quad (0.0.6)$$

para toda $\zeta \in C^2(\bar{\Omega})$ com $\zeta = 0$ em $\partial\Omega$. (Note que a segunda integral faz sentido desde que $|\zeta(x)| \leq C\delta(x)$ para todo $x \in \Omega$.)

No primeiro capítulo são discutidas algumas propriedades básicas de funções convexas e, em particular, propriedades da função g quando esta satisfaz (0.0.3).

No capítulo 2 são apresentados alguns teoremas de princípio de máximo para equações elípticas. Destacamos neste capítulo o Lema de Hopf. No capítulo 3 são apresentados teoremas de princípio de máximo para equações parabólicas, neste capítulo apresentamos uma versão do Lema de Hopf para o problema parabólico. Os resultados apresentados nestes dois capítulos são encontrados em [14], de onde também são baseadas as demonstrações.

No capítulo 4 é apresentada uma pequena introdução sobre teoria de semigrupos e sobre o semigrupo do calor. Neste capítulo apresentamos os principais resultados que serão utilizados no capítulo seguinte, mas não apresentamos suas demonstrações.

Finalmente no capítulo 5 apresentamos relações entre a existência de soluções globais clássicas do problema de evolução (0.0.1) e a existência de soluções fracas do problema estacionário (0.0.2) nos teoremas 5.1.1 e 5.1.2, que é o principal objetivo deste trabalho.

Capítulo 1

Funções Convexas

Este capítulo é dedicado à apresentação de algumas propriedades básicas de funções convexas e de algumas propriedades da função g .

1.1 Definição e Propriedades

Definição 1.1.1 : *Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida num intervalo I chama-se convexa quando para $a < x < b$ arbitrários em I o ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f está situado abaixo da secante (segmento de reta) que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. (Ver [10].)*

Temos então, para $a < x < b$, que

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \\ &\quad \text{ou} \\ f(x) &\leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b). \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Assim, afirmar que f é convexa significa dizer que para $a < x < b$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}. \tag{1.1.2}$$

Na verdade, basta uma dessas desigualdades para caracterizar a convexidade da f .

Lema 1.1.1 *Se $f \in C^1$ e é convexa, então f' é não decrescente*

Demonstração:

Sejam $a, b \in I$ com $a < b$. Então dado $a < x < b$, temos que $x \in I$, pois I é intervalo, e como f é convexa temos também que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

Tomando os limites: $x \rightarrow a$ na primeira desigualdade e $x \rightarrow b$ na segunda desigualdade, como $f \in C^1$, obtemos

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b). \quad (1.1.3)$$

Logo, f' é não decrescente em I .

■

Teorema 1.1.1 *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável no intervalo aberto I . Para que f seja convexa é necessário e suficiente que $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. (Ver [10])*

Demonstração:

Passo 1: $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I \Rightarrow f$ convexa em I .

Suponhamos $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Pela Fórmula de Taylor com resto de Lagrange (Ver [10]), temos que para quaisquer $a, a + h \in I$, existe c entre a e $a + h$, com $f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(c)}{2} \cdot h^2$. Como $f''(c) \geq 0$, temos que $f(a + h) \geq f(a) + f'(a) \cdot h$. Logo, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq f'(a)$, se $h > 0$ e $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq f'(a)$, se $h < 0$. Ou equivalentemente, para $a < x < b$ em I ,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Da última desigualdade temos que $(f(x) - f(a))(b - x) \leq (f(b) - f(x))(x - a)$. Somando e subtraindo $(f(x) - f(a))(x - a)$ a ambos os membros da última desigualdade, obtemos $(f(x) - f(a))(b - a) \leq (f(b) - f(a))(x - a)$, isto é,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

para todo $a < x < b$ em I , ou seja, f é convexa em I .

Passo 2: f convexa em $I \Rightarrow f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.

Seja f convexa. Dados $a < b$ em I , tomando x com $a < x < b$, temos

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Tomando os limites $x \rightarrow a$ na primeira desigualdade e $x \rightarrow b$ na segunda, obtemos

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b).$$

Logo f' é não decrescente em I . De onde, segue que $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. ■

Teorema 1.1.2 *Suponha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexa. Então para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $r \in \mathbb{R}$ tal que a desigualdade*

$$f(y) \geq f(x) + r(y - x)$$

vale para todo $y \in \mathbb{R}$. (Ver [4].)

Demonstração:

Fixemos $x \in \mathbb{R}$. Se $x = y$ vale a igualdade para todo r . Então seja $x \neq y$.

Como f é convexa, temos para $x \neq y$, que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

é uma função monótona não decrescente em y (pela equação (1.1.2)).

Como

$$f(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(y - x) + f(x)$$

temos para $x < y$ que

$$f(y) \geq r_1(y - x) + f(x), \tag{1.1.4}$$

onde

$$r_1 = \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \inf_{y > x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Analogamente se $y < x$

$$f(y) \geq r_2(y - x) + f(x),$$

onde

$$r_2 = \lim_{y \rightarrow x^-} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \sup_{y < x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Como $r_2 \leq r_1$ e (1.1.4) é válida com r_2 no lugar de r_1 , tomando $r = r_2$, obtemos que

$$f(y) \geq r(y - x) + f(x)$$

para todo y , e portanto, o teorema é válido. ■

Teorema 1.1.3 (*Inequação de Jensen*)

Assuma $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexa, e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e limitado. Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ integrável. Então,

$$f\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx\right) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(u) dx.$$

(Ver [4].)

Demonstração:

Como f é convexa, pelo teorema anterior, para cada $p \in \mathbb{R}$ existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(q) \geq f(p) + r(q - p)$$

para todo $q \in \mathbb{R}$.

Colocando $p = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx$ e $q = u(x)$

$$f(u(x)) \geq f\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx\right) + r\left(u - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx\right)$$

e integrando obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(u(x)) dx &\geq \int_{\Omega} f\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx\right) dy + r\left(\int_{\Omega} u dx - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx\right) dy\right) = \\ &= |\Omega| f\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx\right) + r\left(\int_{\Omega} u dx - |\Omega| \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx\right) = |\Omega| f\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx\right), \end{aligned}$$

de onde, concluímos o teorema. ■

Observação 1.1.1 Por definição uma função f é côncava se $-f$ é convexa. Se f é derivável e f' é decrescente, temos que $-f$ é derivável e $(-f)' = -(f')$ é crescente, logo $-f$ é convexa, de onde, f é côncava. Ou seja, f derivável e f' decrescente $\Rightarrow f$ côncava.

1.2 Propriedades da g

Lembremos que $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é uma função C^1 , convexa e não decrescente.

Lema 1.2.1 *Se g satisfaz (0.0.3) então $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} = \infty$.*

Demonstração:

Podemos considerar, sem perda de generalidade, que $g(0) = 0$, pois caso contrário, basta tomar $\tilde{g}(x) = g(x) - g(0)$ para fazer a demonstração.

De (1.1.3) temos que, para $u > 0$,

$$g'(u) \geq \frac{g(u) - g(0)}{u - 0} = \frac{g(u)}{u}$$

então, para $u > 0$,

$$\left(\frac{g(u)}{u} \right)' = \frac{ug'(u) - g(u)}{u^2} \geq \frac{g(u) - g(u)}{u^2} = 0.$$

Logo $g(u)/u$ é não decrescente, e portanto, existe o limite

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} = L.$$

Se L for finito, como $g(u)/u$ é não decrescente temos que $\frac{g(u)}{u} \leq L$, para todo u , de onde, $g(u) \leq L.u$ para todo u . Então, temos que

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{ds}{g(s)} \geq \int_{x_0}^{\infty} \frac{ds}{L.s} = \frac{1}{L} (\ln s)_{x_0}^{\infty} = \infty.$$

O que contradiz (0.0.3).

Portanto,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} = \infty.$$

■

Corolário 1.2.1 *Nas mesmas hipóteses do lema anterior $\lim_{u \rightarrow \infty} g'(u) = \infty$.*

Demonstração:

Segue de $g'(u) \geq \frac{g(u)}{u}$ e do lema anterior.

■

Capítulo 2

Princípios de Máximo para Equações Elípticas

O objetivo deste capítulo é demonstrar princípios de máximo para equações elípticas e o Lema de Hopf. Observe que neste capítulo o domínio Ω é como descrito na introdução.

2.1 O Operador de Laplace

Definição 2.1.1 *Seja $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma função duas vezes continuamente diferenciável definida em Ω . O Operador de Laplace ou Laplaciano Δ é definido como*

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Lema 2.1.1 *Se uma função u satisfaz a inequação estrita*

$$\Delta u > 0$$

em cada ponto de Ω , então u não pode atingir seu máximo em um ponto interior de Ω .

Demonstração:

Suponha que u tem um máximo local em um ponto interior de Ω . Então sabemos do cálculo elementar que neste ponto

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \leq 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \leq 0, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \leq 0.$$

Então, em um máximo local, a inequação

$$\Delta u \leq 0$$

deve ocorrer. ■

Suponha que $b_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $b_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ..., $b_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ são funções limitadas definidas em Ω . Sem nenhuma mudança na demonstração acima, concluímos o seguinte corolário:

Corolário 2.1.1 *Se uma função u satisfaz a inequação estrita*

$$\Delta u + b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + b_n \frac{\partial u}{\partial x_n} > 0$$

em Ω , então u não pode atingir seu máximo em um ponto interior.

2.2 O Operador Elíptico de Segunda Ordem

O operador

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (2.2.1)$$

onde $a_{ij} = a_{ji}$, com $i, j = 1, 2, \dots, n$, é chamado elíptico em um ponto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ se, e somente se, existe uma quantidade positiva $\mu(x)$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \mu(x) \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad (2.2.2)$$

para todas as n-uplas de números reais $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. O operador $\mathcal{L}$ é dito elíptico em Ω se é elíptico em cada ponto de Ω . É uniformemente elíptico em Ω se (2.2.2) vale para cada ponto de Ω e se existe uma constante positiva μ_0 tal que $\mu(x) \geq \mu_0$ para todo x em Ω .

Definição 2.2.1 *A transformação*

$$y_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.2.3)$$

é chamada rotação ou transformação ortogonal se, e somente se, a matriz $C = (c_{ij})$ é uma matriz ortogonal.

Observação 2.2.1 *Uma matriz C é dita ortogonal se, e somente se, seus elementos satisfazem a relação*

$$\sum_{i=1}^n c_{ij}c_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{se } j \neq k \end{cases} \quad j, k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2.4)$$

É fácil mostrar que a condição

$$\sum_{k=1}^n c_{ik}c_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.2.5)$$

é equivalente a relação (2.2.4).

De fato, denotando a transposta por C^t e a inversa por C^{-1} , basta observar que os critérios (2.2.4) e (2.2.5) são ambos equivalentes à relação

$$C^t = C^{-1}.$$

Teorema 2.2.1 *Suponha que o operador*

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

é elíptico. Então sob a transformação ortogonal (2.2.3) o operador $\mathcal{L}$ toma a forma

$$\sum_{k,l=1}^n b_{kl} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l}, \quad (2.2.6)$$

onde

$$b_{kl} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} c_{ki} c_{lj}, \quad k, l = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2.7)$$

Além disso, o operador (2.2.6) é elíptico.

Demonstração:

Como $\partial y_i / \partial x_j = c_{ij}$, aplicando a regra da cadeia em $\mathcal{L}$ obtemos que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij} c_{ki} c_{lj} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l}.$$

Definindo a matriz b_{kl} para $k, l = 1, 2, \dots, n$ pela relação (2.2.7), deixamos $\mathcal{L}$ na forma (2.2.6).

Mostremos agora que (2.2.6) é elíptico.

Consideremos uma n -upla $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ e escrevamos

$$\sum_{k,l=1}^n b_{kl} \xi_k \xi_l = \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij} c_{ki} \xi_k c_{lj} \xi_l.$$

Definindo

$$\eta_i = \sum_{k=1}^n c_{ki} \xi_k,$$

temos que

$$\sum_{k,l=1}^n b_{kl} \xi_k \xi_l = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \eta_i \eta_j.$$

Então, pela condição de elipticidade (2.2.2) e por (2.2.5),

$$\sum_{k,l=1}^n b_{kl} \xi_k \xi_l = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \eta_i \eta_j \geq \mu(x) \sum_{i=1}^n \eta_i \eta_i = \mu(x) \sum_{i,k,l=1}^n c_{ki} \xi_k c_{li} \xi_l = \mu(x) \sum_{k=1}^n \xi_k^2.$$

■

Observação 2.2.2 *Note que não apenas a elipticidade é preservada sob uma transformação ortogonal de coordenadas, mas também a quantidade $\mu(x)$ não muda. Então, se um operador é uniformemente elíptico, este continuará uniformemente elíptico depois de qualquer transformação ortogonal.*

Teorema 2.2.2 *Se $\mathcal{L}$ é um operador de segunda ordem elíptico no ponto $\bar{x}$ existe uma transformação linear*

$$z_k = \sum_{j=1}^n d_{kj} x_j, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

ou seja,

$$z = Dx,$$

onde $D = (d_{kj})$, tal que em $\bar{x}$, $\mathcal{L}$ se torna o Laplaciano nas z_k -coordenadas.

Demonstração:

Seja

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Temos que a matriz $A = (a_{ij})$ é simétrica, então existe uma matriz ortogonal $C = (c_{ij})$ tal que a matriz $B = (b_{ij})$, dada por

$$b_{ij} = \sum_{k,l=1}^n c_{ik} a_{kl} c_{jl}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

ou seja,

$$B = CAC^{-1},$$

é uma matriz diagonal.

Se submetermos o operador a tal diagonalização no ponto $\bar{x}$, obtemos

$$\sum_{k,l=1}^n b_{kl}(\bar{x}) \eta_k \eta_l = \sum_{k=1}^n b_{kk}(\bar{x}) \eta_k^2 \geq \mu(\bar{x}) \sum_{k=1}^n \eta_k^2$$

para toda n-upla $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$. Segue que todos os elementos $b_{kk}(\bar{x})$ da diagonal são positivos. De fato, temos que

$$b_{kk}(\bar{x}) \geq \mu(\bar{x}).$$

Vamos supor que o operador original $\mathcal{L}$ já tenha sido colocado na forma diagonal no ponto $\bar{x}$. Neste ponto podemos escrever

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{i=1}^n b_{ii}(\bar{x}) \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}.$$

Agora vamos introduzir uma segunda transformação de coordenadas, tomando

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{b_{kk}(\bar{x})}} y_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2.8)$$

Em termos das coordenadas originais, temos

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{b_{kk}(\bar{x})}} \sum_{j=1}^n c_{kj} x_j \equiv \sum_{j=1}^n d_{kj} x_j, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

■

Definição 2.2.2 *O operador*

$$(L + h) \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + h$$

é dito *elíptico* em $\bar{x}$ se, e somente se,

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

é *elíptico* neste ponto. É *uniformemente elíptico* em Ω se $\mathcal{L}$ é *uniformemente elíptico* em Ω . O operador $\mathcal{L}$ é chamado *parte principal* de $L + h$.

2.3 Princípios de Máximo

Lema 2.3.1 *Consideremos a inequação diferencial estrita*

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} > 0. \quad (2.3.9)$$

Se L é *elíptico* e uma função u satisfaz (2.3.9) em Ω então u não pode atingir seu máximo em um ponto interior de Ω .

Demonstração:

A mudança de coordenadas $z_k = \sum_{j=1}^n d_{kj} x_j$ dada no teorema 2.2.2 transforma o operador L em

$$L[u] = \Delta u + \sum_{i=1}^n e_i(z) \frac{\partial u}{\partial z_i} > 0,$$

onde $e_i(z) = \sum_{k=1}^n \tilde{b}_k(z) d_{ik}$ e $\tilde{b}_k(z) = b_k(D^{-1}z)$. O resultado segue do corolário 2.1.1. ■

Teorema 2.3.1 *Seja $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ satisfazendo a inequação diferencial*

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0$$

em Ω , onde L é *uniformemente elíptico*. Suponha que os coeficientes a_{ij} e b_i são *uniformemente limitados*. Se u atinge o máximo M em um ponto de Ω , então $u \equiv M$ em Ω .

Demonstração:

Assuma que $u = M$ em algum ponto P de Ω e que $u < M$ em algum outro ponto Q de Ω . Queremos encontrar uma contradição.

Construamos um arco γ em Ω que se estende de Q a P (ver figura 2.1). Denotemos por R o primeiro ponto sobre γ onde $u = M$, isto é, $u < M$ na porção de γ entre Q e R e $u(R) = M$. Seja $d > 0$ o ínfimo das distâncias entre qualquer ponto de γ e qualquer ponto de $\partial\Omega$. Consideremos um ponto P_1 da porção QR de γ de distância menor que $d/2$ de R e construamos a maior bola tendo centro em P_1 no qual $u < M$. Esta bola (que chamaremos de K) terá raio menor que $d/2$ e estará inteiramente contida em Ω .

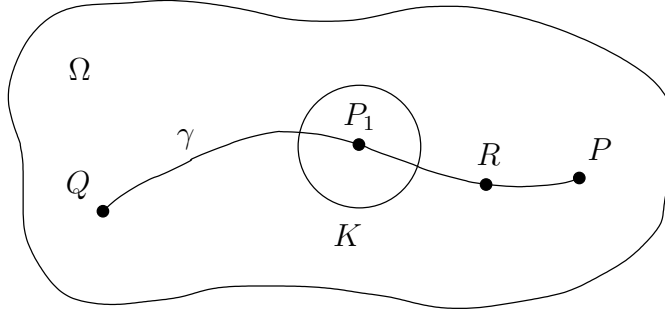


Figura 2.1:

Seja S um ponto na fronteira ∂K de K tal que $u = M$ em S . Pela continuidade deve existir pelo menos um ponto desta forma. Mas pode existir mais que um. Construamos uma bola K_1 tangente a ∂K em S e estando completamente contida em K (ver figura 2.2). Observemos que $u < M$ em K_1 e em ∂K_1 exceto no ponto S , onde $u = M$. O raio de K_1 será denotado por r_1 .

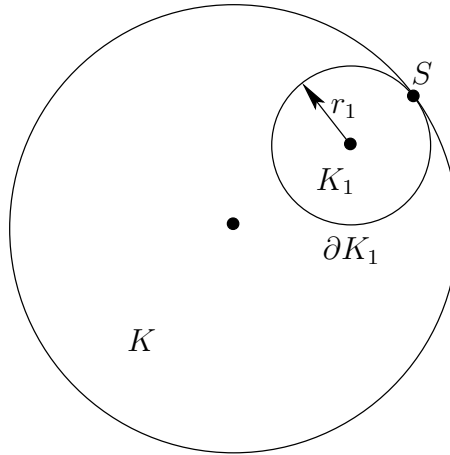


Figura 2.2:

Façamos ainda uma outra construção: uma bola K_2 , com fronteira ∂K_2 , raio $r_2 = \frac{1}{2}r_1$ e centro em S (ver Figura 2.3). Denotamos por C'_2 a porção de ∂K_2 dentro de K_1 e sobre ∂K_1 , isto é, C'_2 inclui sua fronteira, que é a intersecção de ∂K_2 e ∂K_1 . A parte de ∂K_2 fora de ∂K_1 chamamos de C''_2 .

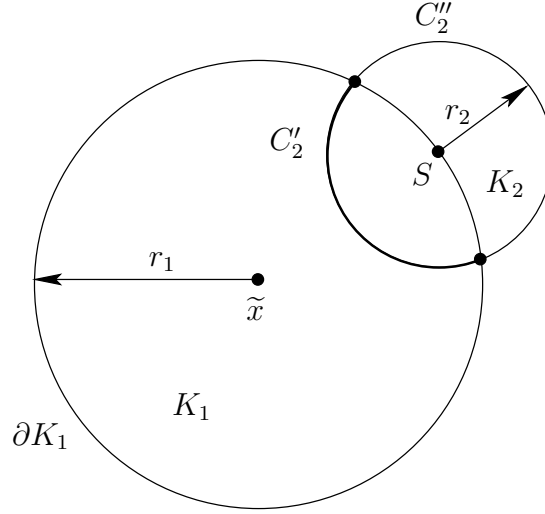


Figura 2.3:

C'_2 é um conjunto fechado e limitado, logo u assume um máximo relativo neste conjunto. Como $u < M$ em C'_2 este máximo deve ser menor que M , e portanto, existe uma constante $\zeta > 0$ tal que

$$u \leq M - \zeta \quad \text{em} \quad C'_2.$$

Por outro lado, como $u \leq M$ em Ω sabemos que

$$u \leq M \quad \text{em} \quad C''_2.$$

Seja o centro de K_1 denotado por $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$. Definimos a função auxiliar

$$z(x) = e^{-\alpha \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x}_i)^2} - e^{-\alpha r_1^2}, \quad (2.3.10)$$

onde α é uma constante positiva a ser determinada. Como o raio de K_1 é r_1 temos que

$$\begin{aligned} z &> 0 && \text{em} && K_1, \\ z &= 0 && \text{em} && \partial K_1 \text{ e} \\ z &< 0 && \text{fora de} && K_1. \end{aligned}$$

Agora calculemos

$$L[z] = e^{-\alpha \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x}_i)^2} \left\{ 4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_i - \tilde{x}_i)(x_j - \tilde{x}_j) - 2\alpha \sum_{i=1}^n [a_{ii} + b_i(x_i - \tilde{x}_i)] \right\}.$$

Da elipticidade uniforme do operador L , temos que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_i - \tilde{x}_i)(x_j - \tilde{x}_j) \geq \mu_0 \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x}_i)^2.$$

Como $\sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x}_i)^2 > \frac{1}{4}r_1^2$ em K_2 , concluimos que para x em K_2 ,

$$L[z] \geq \alpha e^{-\alpha \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x}_i)^2} \left\{ \alpha \mu_0 r_1^2 - 2 \sum_{i=1}^n [a_{ii} + b_i(x_i - \tilde{x}_i)] \right\}.$$

Tomando α suficientemente grande, tornamos positiva a quantidade entre chaves da equação acima e então obtemos

$$L[z] > 0 \quad \text{em} \quad K_2.$$

Tomemos agora a função

$$w = u + \varepsilon z,$$

com ε tal que

$$0 < \varepsilon < \frac{\zeta}{1 - e^{-\alpha r_1^2}}.$$

A função w tem as seguintes propriedades:

- (i) $w < M$ em C'_2 . Para ver isto primeiramente note que $0 \leq z < 1 - e^{-\alpha r_1^2}$. Então $\varepsilon z < \zeta$ e $u \leq M - \zeta$ em C'_2 . Somando essas duas equações chegamos que $w < M$ em C'_2 .
- (ii) $w < M$ em C''_2 . Isto segue de $z < 0$ em C''_2 e de $u \leq M$ em Ω .
- (iii) $w = M$ em S , o centro de K_2 . Esta afirmação é verdadeira pois $u = M$ em S e $z = 0$ em S , pois $S \in \partial K_1$.

De (i), (ii) e (iii), segue que w atinge seu máximo no interior da bola K_2 .

Por outro lado,

$$L[w] = L[u] + \varepsilon L[z] > 0 \quad \text{em} \quad K_2.$$

Então, pelo lema anterior, o máximo não pode ocorrer em K_2 , pois L é elíptico. Assim, uma contradição foi encontrada e o teorema está provado. ■

Teorema 2.3.2 *Seja u satisfazendo a inequação diferencial*

$$(L + h)[u] \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + h \cdot u \geq 0$$

com $h \leq 0$, com L uniformemente elíptico em Ω , e com os coeficientes de L e h limitados. Se u atinge um máximo M não negativo em um ponto de Ω , então $u \equiv M$.

A demonstração do teorema 2.3.2 segue exatamente com o mesmo procedimento da demonstração do teorema 2.3.1. A função auxiliar z e a quantidade positiva ε são definidas do mesmo modo. Como antes, a contradição é obtida da observação de que uma função w satisfazendo $(L + h)[w] > 0$ em um domínio não pode ter um máximo não negativo se $h \leq 0$.

Corolário 2.3.1 *Sejam u e v satisfazendo*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta v = g & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

respectivamente, sendo $f \leq g$ em Ω . Então $u \leq v$ em Ω .

Demonstração:

Seja $w = u - v$, mostremos que $w \leq 0$. Temos que w satisfaz o problema

$$\begin{cases} -\Delta w = f - g \leq 0 & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \Delta w = g - f \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então, pelo teorema 2.3.1 se w atinge o máximo $M > 0$ em um ponto de Ω , então $w \equiv M$ em Ω , e por continuidade, temos que $w \equiv M$ em $\bar{\Omega}$. Mas $w = 0$ em $\partial\Omega$, logo $w = u - v \leq 0$ em Ω . E portanto, $u \leq v$.

■

2.4 O Lema de Hopf

Lema 2.4.1 *Seja $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ satisfazendo a inequação*

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0$$

em Ω e L uniformemente elíptico. Suponha que u é contínua em $\bar{\Omega}$ e seja P o ponto em $\partial\Omega$ no qual u assume seu máximo M . Se uma derivada exterior $\partial u / \partial \nu$ existe em P , então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \geq 0 \quad \text{em } P.$$

Demonstração:

Primeiramente observemos que se Ω é limitado, como u é contínua em $\bar{\Omega}$, u atinge seu máximo. Como L é uniformemente elíptico, pelo teorema 2.3.1, esse máximo deve ser atingido em um ponto P de $\partial\Omega$.

Agora observemos que qualquer derivada direcional exterior a Ω de u em P não pode ser negativa. Pois, neste caso, a função u crescería quando entrasse no domínio Ω por esta direção, e então o máximo não poderia ocorrer em P .

■

Teorema 2.4.1 *Seja $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ satisfazendo a inequação*

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0$$

em Ω e L uniformemente elíptico. Suponha que $u \leq M$ em Ω e que $u = M$ em um ponto P da fronteira. Assuma que P está na fronteira de uma bola $K_1 \subset \Omega$. Se u é contínua em $\Omega \cup P$ e uma derivada direcional exterior $\partial u / \partial \nu$ existe em P , então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0 \quad \text{em } P$$

a menos que $u \equiv M$.

Demonstração:

Vamos proceder como na demonstração do teorema 2.3.1. Diminuindo um pouco a bola K_1 se necessário, podemos assumir que ∂K_1 está inteiramente contida em $\Omega \cup P$.

Construamos a bola K_2 com centro em P e raio $r_1/2$, onde r_1 é o raio de K_1 (ver figura 2.4). Definamos a função

$$w = u + \varepsilon z$$

sendo $z(x) = e^{-\alpha \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x}_i)^2} - e^{-\alpha r_1^2}$, onde $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ é o centro de K_1 , como no teorema 2.3.1.

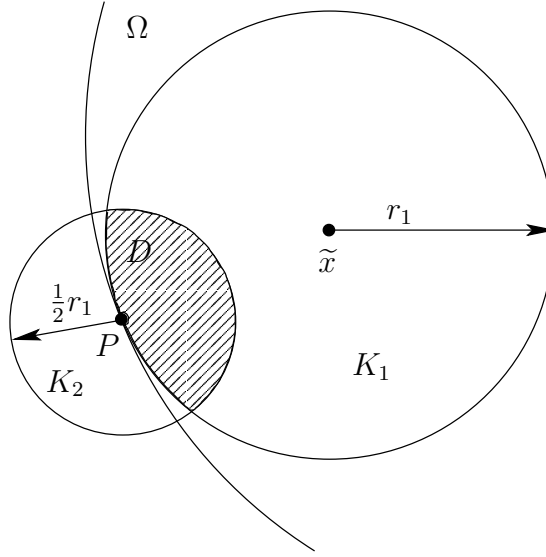


Figura 2.4:

De acordo com o teorema 2.3.1, se $u \neq M$, então $u < M$ em K_1 e na sua fronteira, exceto no ponto P . Recordemos que $z = 0$ na fronteira de K_1 . Tomemos $\varepsilon > 0$ tão pequeno que $w \leq M$ na porção da fronteira de K_2 que está em K_1 . Então $w \leq M$ em toda a fronteira da região hachurada D mostrada na figura 2.4.

Como $L[w] > 0$ nesta região, o máximo de w ocorre em P e $w(P) = M$. Então, pelo lema anterior, em P

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \varepsilon \frac{\partial z}{\partial \nu} \geq 0.$$

Desejamos agora mostrar que $\frac{\partial z}{\partial \nu} < 0$ em P para concluirmos que $\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0$ neste ponto.

Tomemos $\tilde{x}$ (o centro de K_1) como a origem de nosso sistema de coordenadas e tomando r para representar a distância Euclideana de $\tilde{x}$, temos que

$$z = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha r_1^2}.$$

Então,

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -2\alpha x_i e^{-\alpha r^2}$$

e sendo $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ o vetor unitário normal na direção exterior a Ω , como K_1 é tangente a Ω em P , temos também que

$$\eta_i = \frac{x_i}{r}.$$

Como ν é um vetor exterior a Ω , temos que em P

$$\frac{\partial z}{\partial \nu} = \lim_{x \rightarrow P} [\nu \cdot \text{grad } u(x)] = -2\alpha r e^{-\alpha r^2} \sum_{i=1}^n \nu_i \eta_i < 0.$$

Portanto, $\partial u / \partial \nu > 0$, e assim concluímos o teorema. ■

Corolário 2.4.1 *Seja Ω , como na introdução. Se φ_1 é auto-função associada ao primeiro autovalor λ_1 do Laplaciano, isto é,*

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1 & \text{em } \Omega \\ \varphi_1 = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

e $\delta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a função distância do ponto à fronteira de Ω , então existem constantes $c_0, c_1, d_0, d_1 > 0$ tais que $c_0 \varphi_1 \leq \delta \leq c_1 \varphi_1$ e $d_0 \delta \leq \varphi_1 \leq d_1 \delta$.

Demonstração:

Seja $x_0 \in \partial\Omega$.

Afirmamos que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} \frac{\varphi_1(x)}{\delta(x)} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}(x_0),$$

onde η é o vetor normal exterior a $\partial\Omega$ em x_0 .

Como $\delta(x)$ é definida como sendo a distância de x ao bordo de Ω , isto é, para $x \in \Omega$

$$\delta(x) = \min \text{dist}(x, \bar{x})$$

para $\bar{x}$ restrito a $\partial\Omega$, temos, pelo método dos Multiplicadores de Lagrange (ver [11]), que esse mínimo é atingido em algum ponto $\bar{x}_x \in \partial\Omega$ tal que o segmento $\bar{x}_x - x$ é normal ao bordo $\partial\Omega$. Portanto, se $\vec{\eta}$ é o vetor normal unitário exterior, existe $t > 0$ tal que $\bar{x}_x = x + t\vec{\eta}$ e $\delta(x) = \|\bar{x}_x - x\| = t$, logo

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\varphi_1(x)}{\delta(x)} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}(x_0) \right| &\leq \left| \frac{\varphi_1(x) - \varphi_1(\bar{x}_x)}{\delta(x)} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}(\bar{x}_x) \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}(x_0) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}(\bar{x}_x) \right| = \\
&= \left| \frac{\varphi_1(x)}{\partial \eta}(\bar{x}_x) - \frac{\varphi_1(\bar{x}_x - t \vec{\eta}) - \varphi_1(\bar{x}_x)}{-t} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}(x_0) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}(\bar{x}_x) \right|.
\end{aligned}$$

Quando x tende ao bordo de Ω , $\|\bar{x}_x - x\| = t \rightarrow 0$, portanto o primeiro módulo acima tende a zero. Quando $x \rightarrow x_0 \in \partial\Omega$ temos além disso que $\bar{x}_x \rightarrow x_0$ logo o segundo módulo também tende a zero, o que justifica a afirmação inicial.

Temos portanto que $\varphi_1(x)/\delta(x)$ pode ser estendida continuamente a $\bar{\Omega}$, isto é, $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\varphi_1(x)}{\delta(x)} & \text{se } x \in \Omega \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu}(x) & \text{se } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

é contínua e estritamente positiva no compacto $\bar{\Omega}$, portanto existem constantes positivas c_0 , c_1 , d_0 e d_1 tais que

$$c_0\varphi_1 \leq \delta \leq c_1\varphi_1 \quad \text{e} \quad d_0\delta \leq \varphi_1 \leq d_1\delta.$$

■

De modo análogo podemos mostrar que

Observação 2.4.1 *Se ξ_0 é solução da equação*

$$\begin{cases} -\Delta \xi_0 = 1 & \text{em } \Omega \\ \xi_0 = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.4.11)$$

e δ é a função distância à fronteira de Ω , isto é, $\delta(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$, então existe $C > 0$ tal que $\xi_0 \leq C\delta$.

Das duas observações anteriores concluímos que

Observação 2.4.2 *Existe $C > 0$ tal que $\xi_0 \leq C\varphi_1$ em Ω .*

Capítulo 3

Princípios de Máximo para Equações Parabólicas

Os objetivos deste capítulo são estender os resultados do capítulo anterior para obter comparações entre soluções de Problemas de Valor Inicial e Condição de Contorno da equação parabólica associada. Neste capítulo, o domínio Ω é como descrito na introdução.

3.1 O Operador Parabólico

O operador

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t}$$

é dito parabólico em $(x,t) = (x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ se para todo t fixo operador consistindo do primeiro somatório for elíptico em (x,t) . Isto é, L é parabólico em (x,t) se existe um número $\mu > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \geq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad (3.1.1)$$

para todas as n -uplas de números reais $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. O operador L é uniformemente parabólico em um domínio E no espaço (x,t) se (3.1.1) vale com a mesma constante $\mu > 0$ para todo (x,t) em E .

Em particular, o operador

$$\tilde{L} \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial t}$$

é uniformemente elíptico, pois o operador de Laplace é uniformemente parabólico.

3.2 Princípios de Máximo

Proposição 3.2.1 *Se u satisfaz a inequação estrita*

$$\tilde{L}[u] \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial t} > 0$$

em um domínio E do espaço (x, t) então u não pode ter máximo local em nenhum ponto interior de E .

Demonstração:

Se u atingir um máximo local em um ponto interior de E , neste ponto temos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

de onde,

$$\tilde{L}[u] \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial t} \leq 0$$

neste ponto.

■

Observação 3.2.1 [11] *Dada uma função $f \in C^2$, se a é um ponto de máximo local de f , então*

$$H(a).v^2 = \langle H(a)v, v \rangle \leq 0,$$

onde

$$H(x) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right].$$

Em particular, em a temos que

$$\langle H e_i, e_i \rangle = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \leq 0$$

sendo e_i é a i -ésima coordenada da base canônica do $\mathbb{R}^n$.

Lema 3.2.1 *Seja u uma função que satisfaz a inequação diferencial*

$$\tilde{L}[u] \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0 \quad (3.2.2)$$

em um domínio E do espaço (x, t) , onde os b_i são limitados para $i = 1, 2, \dots, n$ e $\tilde{L}$ é uniformemente parabólico. Seja K uma bola tal que ela e sua fronteira ∂K estão contidas em E . Suponha que o máximo de u em E é M , que $u < M$ no interior de K e que $u = M$ em algum ponto $P \in \partial K$. Então $P \equiv (t_0, x_0)$ é tal que $t_0 = \max\{t : (x, t) \in K \cup \partial K\}$ ou $t_0 = \min\{t : (x, t) \in K \cup \partial K\}$.

Demonstração:

Seja K a bola de centro $(\bar{x}, \bar{t})$ e raio R . Vamos assumir que o ponto $P \equiv (t_0, x_0)$ no qual u atinge seu máximo M em ∂K não está no topo ou no fundo da esfera, isto é, (x_0, t_0) é tal que $\min\{t : (x, t) \in K \cup \partial K\} < t_0 < \max\{t : (x, t) \in K \cup \partial K\}$ e procuremos uma contradição.

Podemos assumir, sem perda de generalidade que, P é o único ponto da fronteira ∂K no qual $u = M$. Se não for, podemos trocar K por uma bola um pouco menor K' cuja fronteira está no interior de K , exceto no ponto P , sendo ∂K e $\partial K'$ tangentes neste ponto. Então K' tem exatamente um ponto P na fronteira onde $u = M$ e os argumentos podem ser feitos com K' se necessário.

Suponha que P tem coordenadas (x_0, t_0) , com $x_0 \neq \bar{x}$. Construíamos uma bola com centro P e raio R_1 tão pequena que

$$R_1 < |x_0 - \bar{x}|$$

e também tal que $\overline{K}_1$ está contido em E . A fronteira ∂K_1 consiste de dois arcos: C' que é a intersecção de ∂K_1 com a esfera fechada $\overline{K}$, e C'' é o complemento de C' com respeito a ∂K_1 . (Ver exemplo de $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ na figura 3.1.)

$C' \subset K \cup (\partial K - P)$, então $u < M$ em C' . Logo podemos encontrar uma constante $\eta > 0$ tal que

$$u \leq M - \eta \quad \text{em} \quad C'.$$

Além disso, como $u \leq M$ em E , temos que

$$u \leq M \quad \text{em} \quad C''.$$

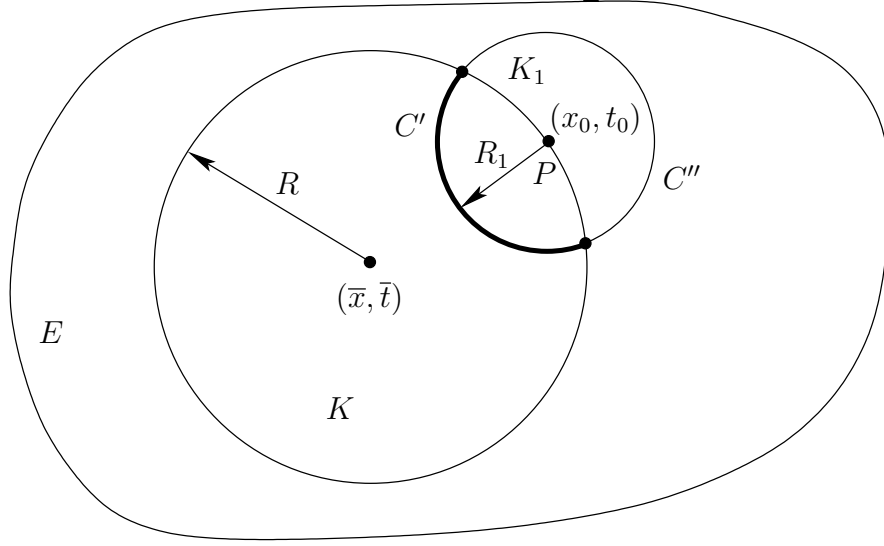


Figura 3.1:

Definimos a função auxiliar

$$v(x, t) = e^{-\alpha[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2 + (t - \bar{t})^2]} - e^{-\alpha R^2} = e^{-\alpha|(x, t) - (\bar{x}, \bar{t})|^2} - e^{-\alpha R^2}.$$

Para valores positivos de α temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2 + (t - \bar{t})^2 &< R^2 \quad \text{em } K &\Rightarrow v > 0 \quad \text{em } K, \\ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2 + (t - \bar{t})^2 &= R^2 \quad \text{em } \partial K &\Rightarrow v = 0 \quad \text{em } \partial K, \\ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2 + (t - \bar{t})^2 &> R^2 \quad \text{fora de } K &\Rightarrow v < 0 \quad \text{em } K^c. \end{aligned}$$

Calculemos $\tilde{L}(v)$:

$$\begin{aligned} \tilde{L}(v) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial t} = \\ &= 2\alpha e^{-\alpha[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2 + (t - \bar{t})^2]} \left\{ 2\alpha \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2 - n - \sum_{i=1}^n b_i (x_i - \bar{x}_i) + (t - \bar{t}) \right\} = \\ &= 2\alpha e^{-\alpha[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2 + (t - \bar{t})^2]} \left\{ 2\alpha |x - \bar{x}|^2 - n - \sum_{i=1}^n b_i (x_i - \bar{x}_i) + (t - \bar{t}) \right\}. \end{aligned}$$

Sendo $x \in \overline{K}_1$ temos

$$|x_0 - \bar{x}| \leq |x_0 - x| + |x - \bar{x}| \leq R_1 + |x - \bar{x}|,$$

de onde,

$$|x - \bar{x}| \geq |x_0 - \bar{x}| - R_1 > 0,$$

pois tomamos $R_1 < |x_0 - \bar{x}|$ na construção de K_1 . Então, é possível tomar α tão grande que

$$\tilde{L}(v) > 0 \quad \forall (x, t) \in \overline{K}_1.$$

Definamos agora a função

$$w(x, t) = u(x, t) + \varepsilon v(x, t),$$

onde ε é uma constante positiva a ser determinada.

Observemos que

$$\tilde{L}(w) = \tilde{L}(u) + \varepsilon \tilde{L}(v) > 0 \quad \text{em} \quad K_1. \quad (3.2.3)$$

Como $u \leq M - \eta$ em C' e $v \geq 0$ em $C'' \subset \overline{K}_1$ podemos tomar ε tão pequeno que

$$w = u + \varepsilon v < M \quad \text{em} \quad C'.$$

Além disso, como $v < 0$ em $C'' \subset \overline{K}^c$ e $u \leq M$, temos

$$w = u + \varepsilon v < M \quad \text{em} \quad C''.$$

Então, $w < M$ na fronteira $\partial K_1 = C' \cup C''$.

Por outro lado, $v = 0$ em ∂K , logo

$$w(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) + \varepsilon v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M.$$

Então o máximo de w em K_1 deve ocorrer num ponto no interior de E , mas pela proposição anterior, isto contradiz (2.2.3), e assim concluímos o lema.

Observe que o argumento falha se P é o topo ou o fundo de K , pois neste caso $x_0 = \bar{x}$ e não podemos tomar $0 < R < |x_0 - \bar{x}|$.

■

Lema 3.2.2 *Seja $E = \Omega \times (0, T)$ com Ω como na introdução. Suponha que u satisfaça a inequação $\tilde{L}[u] \geq 0$ com $\tilde{L}$ como no lema 3.2.1. Se $u \leq M$ em E e $u < M$ em algum ponto (x_0, t_0) do interior de E , então $u < M$ em todos os pontos que estão no nível t_0 , isto é, que estão em $l = \{(x, t_0) : x \in \Omega\}$.*

Demonstração:

Vamos supor que $u = M$ em algum ponto interior (x_1, t_0) em l e que $u < M$ em (x_0, t_0) . Vamos encontrar uma contradição.

Podemos supor que $u < M$ para x no segmento de reta $(x_1, x_0]$, pois caso contrário basta tomar x'_1 em (x_1, x_0) mais próximo de x_0 com esta característica.

Seja

$$d_0 = \min\{|x_0 - x_1|, d_1\},$$

onde

$$d_1 = \min\{\text{dist}((x, t_0), \partial\Omega \times (0, T)) : x = x_1 + t(x_0 - x_1), t \in [0, 1]\}.$$

Para x no segmento $s = \{x = x_1 + t(x_0 - x_1) : t \in [0, 1], 0 < |x - x_1| < d_0\}$, definamos a função $d(x)$ como sendo a distância de (x, t_0) ao ponto mais próximo em $E = \Omega \times (0, T)$ tal que $u = M$. Como $u(x_1, t_0) = M$, $d(x) \leq |x - x_1|$. Pelo lema 3.2.1, o ponto mais próximo de (x, t_0) tal que $u = M$ é $(x, t_0 + d(x))$ ou $(x, t_0 - d(x))$. Então, $u(x, t_0 + d(x)) = M$ ou $u(x, t_0 - d(x)) = M$.

Denotemos por $x + \delta$ o ponto pertencente ao segmento de reta que liga x a x_0 (que está contido em $\overline{x_1 x_0}$) que está a uma distância δ de x .

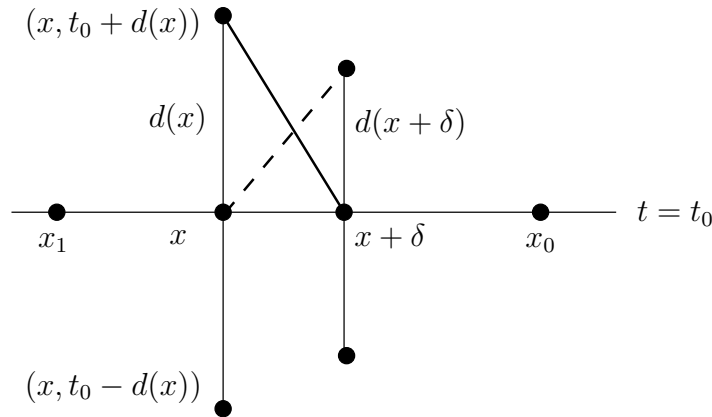


Figura 3.2:

Como a distância de $(x + \delta, t_0)$ a $(x, t_0 \pm d(x))$ é $\sqrt{d(x)^2 + \delta^2}$, vemos que

$$d(x + \delta) \leq \sqrt{d(x)^2 + \delta^2} < d(x) + \frac{\delta^2}{2d(x)} \quad (3.2.4)$$

para $\delta \leq d(x)$.

Observe que a segunda desigualdade em (3.2.4) segue de

$$d(x)^2 + \delta^2 < d(x)^2 + \delta^2 + \left(\frac{\delta^2}{2d(x)}\right)^2 = \left(d(x) + \frac{\delta^2}{2d(x)}\right)^2.$$

De modo análogo, usando o triângulo com hipotenusa tracejada da figura 3.2, temos que

$$d(x) > \sqrt{d(x + \delta)^2 + \delta^2},$$

portanto, se $\delta < d(x)$,

$$d(x + \delta) > \sqrt{d(x)^2 - \delta^2}. \quad (3.2.5)$$

Agora, suponha que $d(x) > 0$, e escolha $0 < \delta < d(x)$. Vamos subdividir o intervalo $(x, x + \delta)$ em n partes iguais e aplicar as desigualdades (3.2.4) e (3.2.5) nestes intervalos

$$\begin{aligned} & d\left(x + \frac{j+1}{n}\delta\right) - d\left(x + \frac{j}{n}\delta\right) \leq \\ & \leq d\left(x + \frac{j}{n}\delta\right) + \frac{\delta^2}{2n^2 d\left(x + \frac{j}{n}\delta\right)} - d\left(x + \frac{j}{n}\delta\right) = \frac{\delta^2}{2n^2 d\left(x + \frac{j}{n}\delta\right)} \leq \\ & \leq \frac{\delta^2}{2n^2 \sqrt{d(x)^2 - \frac{j^2}{n^2}\delta^2}} \leq \frac{\delta^2}{2n^2 \sqrt{d(x)^2 - \delta^2}} \end{aligned}$$

para $j = 1, 2, \dots, n$, pois neste caso $j/n \leq 1$.

Somando j de 0 a $n - 1$ obtemos

$$d(x + \delta) - d(x) \leq \frac{\delta^2}{2n \sqrt{d(x)^2 - \delta^2}}$$

para qualquer n inteiro.

Tomando $n \rightarrow \infty$ temos

$$d(x + \delta) - d(x) \leq 0,$$

ou seja,

$$d(x + \delta) \leq d(x)$$

para $\delta > 0$.

Então $d(x) \geq 0$ é uma função não crescente no segmento de reta contido em s que "começa" em x_1 . Como vimos que $d(x) \leq |x - x_1|$, que é arbitrariamente pequeno para x arbitrariamente próximo de x_1 , obtemos que $d(x) \equiv 0$ para x no segmento descrito anteriormente, logo $u(x, t_0) \equiv M$ para x nesses pontos, o que contraria a hipótese de que $u < M$ para $x \in (x_1, x_0]$.

Portanto encontramos a contradição desejada. ■

Lema 3.2.3 *Seja $E = \Omega \times (0, T)$ um subconjunto aberto, conexo e limitado de $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Suponha que u satisfaz a inequação $\tilde{L}[u] \geq 0$ com $\tilde{L}$ como no lema 3.2.1. Suponha que $u < M$ em $\Omega \times (t_0, t_1)$ para $t_0, t_1 \leq T$ números fixados quaisquer. Então $u < M$ em $\Omega \times \{t = t_1\}$.*

Demonstração:

Suponhamos que exista $P = (\bar{x}, t_1) \in \Omega \times \{t = t_1\}$ tal que $u(P) = M$. Procuremos uma contradição.

Vamos construir uma esfera K com centro em P e raio R tão pequeno que a metade da esfera na qual $t < t_1$, está inteiramente contida em $\Omega \times (0, t_1)$. (Ver exemplo em $E \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$ na figura 3.3.)

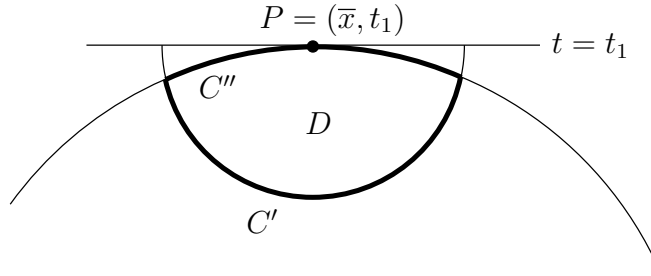


Figura 3.3:

Definamos a função

$$v(x, t) = e^{-\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2 - \alpha(t - t_1)} - 1.$$

Temos que

$$\tilde{L}[v] = \left[4|x - \bar{x}|^2 - 2 - 2 \sum_{i=1}^n b_i (x_i - \bar{x}_i) + \alpha \right] e^{-\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2 - \alpha(t - t_1)}.$$

Tomemos α positivo tão grande que

$$\tilde{L}[v] > 0 \quad \text{em } K \text{ para } t \leq t_1.$$

O parabolóide

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2 + \alpha(t - t_1) \quad (3.2.6)$$

é tangente ao plano $t = t_1$ no ponto P . Denotemos por C' a porção (incluindo os extremos) de ∂K que está abaixo do parabolóide, isto é, se (x, t) está no parabolóide e (x, t') está em ∂K , então $(x, t') \in C' \Leftrightarrow t' \leq t$. E denotemos por C'' a porção do hiperbolóide que está "dentro" da esfera, isto é, se (x, t) está no parabolóide, então $(x, t) \in C'' \Leftrightarrow |(x, t) - P| < R$. E finalmente, denotemos por D a região envolvida por C' e C'' . (Ver figura 3.3.)

Por hipótese, $u < M$ em C' , então existe $\eta > 0$ tal que $u \leq M - \eta$ em C' . Como $u \leq M$ em E temos também que $u \leq M$ em C'' .

Definamos agora a função

$$w(x, t) = u(x, t) + \varepsilon v(x, t),$$

onde ε é uma constante positiva a ser determinada. Observemos que $v = 0$ em C'' . Podemos escolher ε tão pequeno que w tenha as propriedades:

- (i) $\tilde{L}(w) = \tilde{L}(u) + \varepsilon \tilde{L}(v) > 0$ em D . De fato: $\tilde{L}(v) > 0$ e $\tilde{L}(u) \geq 0$, então $\tilde{L}(w) > 0$ para todo $\varepsilon > 0$.
- (ii) $w = u + \varepsilon v < M$ em C' . De fato: $w = u + \varepsilon v \leq M - \eta + \varepsilon v < M$ em C' para ε tão pequeno que $\varepsilon v < \eta$.
- (iii) $w = u + \varepsilon v \leq M$ em C'' . De fato: $w = u + \varepsilon v = u \leq M$ em C'' .

A condição (i) nos mostra que w não pode atingir um máximo em D , pela proposição 3.2.1. Temos que, $w(P) = u(P) + \varepsilon v(P) = M + \varepsilon 0 = M$. E por (ii), $w < M$ em C' , então o máximo de w não ocorre em C' . Logo o máximo de w ocorre em C'' . Por (iii), $w \leq M$, e como $w(P) = M$, temos que

$$\max_D w = \max_{C''} w = M.$$

Em C'' , $w = u + \varepsilon v = u$, e como $u < M$ para $t < t_1$, temos que $w = u = M \Leftrightarrow (x, t) = P$. Logo o máximo de w ocorre em P . De onde, concluimos que

$$\frac{\partial w}{\partial t} \geq 0 \quad \text{em } P.$$

Temos também que

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\alpha < 0 \quad \text{em } P.$$

Das duas desigualdades anteriores obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} \geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} > 0 \quad \text{em } P.$$

Por outro lado, como o máximo de u em $t = t_1$ ocorre em P , temos que neste ponto

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \leq 0 \quad \text{em } P, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n,$$

de onde,

$$\tilde{L}(u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial t} < 0$$

em P . O que contradiz a hipótese $\tilde{L}(u) \geq 0$.

■

Teorema 3.2.1 *Seja $E = \Omega \times (0, T)$ com Ω como na introdução. Suponha que em E a inequação*

$$\tilde{L}[u] \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$$

seja satisfeita e que os b_i são limitadas para $i=1,2,\dots,n$. Se o máximo M de u é atingido em algum ponto $(\bar{x}, t_1)$ do interior de E , então $u \equiv M$ em $\Omega \times [0, t_1]$.

Demonstração:

Como no teorema anterior observemos que E é um subconjunto aberto, conexo e limitado de $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$.

Temos que se $(\bar{x}, t_1) \in E$, então $(\bar{x}, t) \in E$ para todo $0 < t \leq t_1$. Vamos supor que exista um valor de t , digamos t_0 tal que $0 < t_0 < t_1$ e $u(\bar{x}, t_0) < M$ e procuremos uma contradição.

Seja

$$\tau = \sup\{t < t_1 : u(\bar{x}, t) < M\}.$$

Pela continuidade da u , temos que $u(\bar{x}, \tau) = M$ e $u(\bar{x}, t) < M$ para t em algum intervalo (τ_1, τ) . Aplicando o lema 3.2.2 para cada $t \in (\tau_1, \tau)$ temos que

$$u(x, t) < M$$

na região de E tal que $\tau_1 < t < \tau$. Observemos que esta região contém $(\bar{x}, t)$ para todo $t \in (\tau_1, \tau)$. Aplicando o lema 3.2.3 nesta região temos que $u < M$ em $\Omega \times \{t = \tau\}$. Em particular, $u(\bar{x}, \tau) < M$. Contradição.

Portanto, $u(\bar{x}, t_0) = M$ para todo $(\bar{x}, t_0) \in \Omega \times (0, t_1]$. E temos que $u(\bar{x}, 0) = M$ pela continuidade da u . ■

Segue diretamente do teorema anterior que

Corolário 3.2.1 *Suponha que em $\Omega \times (0, T)$ a inequação*

$$\tilde{L}[u] \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$$

seja satisfeita e que os b_i são limitadas para $i=1,2,\dots,n$. Então o máximo M de u é atingido em algum ponto P em $(\Omega \times \{t = 0\}) \cup (\partial\Omega \times (0, T))$.

Corolário 3.2.2 *Suponha que u e v satisfazem*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{L}[u] \equiv u_t - \Delta u + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \\ u(0) = u_0 & \text{em } \Omega, \end{array} \right.$$

e

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{L}[v] \equiv v_t - \Delta v + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega, \\ v(0) = v_0 & \text{em } \Omega, \end{array} \right.$$

respectivamente, sendo $u_0 \leq v_0$ e com $\tilde{L}$ como no teorema anterior. Então temos que $u \leq v$ em $\Omega \times (0, \infty)$.

Demonstração:

Seja $w = u - v$, então w satisfaz o problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{L}[w] = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega, \\ w(0) = u_0 - v_0 < 0 & \text{em } \Omega, \end{array} \right.$$

para todo $T \in (0, \infty)$.

Pelo corolário anterior, temos que o máximo de w ocorre em $\Omega \times \{t = 0\} \cup \partial\Omega \times (0, T)$, e como $w \leq 0$ neste conjunto, temos que $\max\{w(x, t) : (x, t) \in \Omega \times (0, T)\} \leq 0$. Portanto, $w \leq 0$, de onde, $u \leq v$ em $\Omega \times (0, T)$. Como vale para todo $T \in (0, \infty)$, temos que

$$u \leq v$$

em $\Omega \times (0, \infty)$.

■

Teorema 3.2.2 *Seja $\Omega \times (0, T)$ com Ω como na introdução. Suponha que em $\Omega \times (0, T)$ a inequação*

$$(\tilde{L} + h)[u] \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial t} + h.u \geq 0$$

seja satisfeita, que os b_i são limitadas para $i=1,2,\dots,n$ e que $h \leq 0$ em $\Omega \times (0, T)$. Se o máximo M de u é atingido em algum ponto $(\bar{x}, t_1)$ do interior de $\Omega \times (0, T)$ e se $M \geq 0$, então $u \equiv M$ em $\Omega \times [0, t_1]$.

A demonstração deste teorema é feita exatamente como a do teorema 3.2.1, usando os análogos dos lemas 3.2.2 e 3.2.3. Para demonstrá-los, basta tomar α na função auxiliar v grande o suficiente que $(\tilde{L} + h)[v] > 0$ e observar que $(\tilde{L} + h)[w] \leq 0$ em um máximo não negativo de u pois $h \leq 0$. Os outros argumentos das demonstrações são os mesmos.

Segue diretamente do teorema anterior que

Corolário 3.2.3 *Suponha que em $\Omega \times (0, \infty)$ a inequação*

$$(\tilde{L} + h)[u] \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial t} + h.u \geq 0$$

seja satisfeita com $h \leq 0$ e com os b_i limitadas para $i=1,2,\dots,n$. Então o máximo M não negativo de u é atingido em algum ponto P em $(\Omega \times \{t = 0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T])$.

Corolário 3.2.4 *Suponha que em $\Omega \times (0, \infty)$, u e v satisfazem*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g(u) & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \\ u(0) = u_0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = g(v) & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega, \\ v(0) = v_0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

respectivamente com $u_0 \leq v_0$ e sendo g não-decrescente e $C^1(\mathbb{R})$. Então temos que $u \leq v$ em $\Omega \times (0, \infty)$.

Demonstração:

Seja $w = (u - v)e^{kt}$, com k constante a ser determinada, então w satisfaz o problema

$$\begin{cases} L[w] = \Delta w - \frac{\partial w}{\partial t} = -[g(u) - g(v)]e^{kt} + kw & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega, \\ w(0) = u_0 - v_0 \leq 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

para todo $T \in (0, \infty)$. Fixemos $T > 0$.

Pelo teorema do valor médio temos que existe $\tilde{w}(x, t)$ entre $u(x, t)$ e $v(x, t)$ tal que

$$g(u) - g(v) = g'(\tilde{w})(u - v).$$

Então temos que w é solução de

$$\begin{cases} L[w] = -g'(\tilde{w})(u - v)e^{kt} + kw = [k - g'(\tilde{w})]w & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega, \\ w(0) = u_0 - v_0 \leq 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Para $T > 0$ fixado temos que $\{g'(\tilde{w}(x, t)) : (x, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T]\}$ é limitado, pois $\tilde{w}$ está entre u e v , logo tomando

$$k = \sup\{g'(\tilde{w}(x, t)) : (x, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T]\},$$

temos que $h = g'(\tilde{w}) - k \leq 0$ em $\Omega \times [0, T]$.

Portanto, pelo corolário anterior, temos que o máximo de w ocorre em $(\Omega \times \{t = 0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T])$, e como $w \leq 0$ neste conjunto, temos que $w \leq 0$ em $\Omega \times [0, T]$. De onde,

$$u \leq v$$

em $\Omega \times [0, T]$.

Como T é arbitrário temos que $u \leq v$ em $\Omega \times (0, \infty)$. ■

Corolário 3.2.5 *Suponha que em $\Omega \times (0, \infty)$, $u(x, t)$ e $w(x)$ satisfazem*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g(u) & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \\ u(0) = u_0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta w = g(w) & \text{em } \Omega, \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

respectivamente e sendo g não-decrescente e $C^1(\mathbb{R})$. Se $u_0 \leq w$ então $u \leq v$ em $\Omega \times (0, \infty)$.

Demonstração:

Basta observar que $v(x, t) = w(x)$ satisfaz o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = g(v) & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega, \\ v(0) = w & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

pois $\partial v / \partial t = 0$, e aplicar o corolário anterior para u e v .

■

3.3 O Lema de Hopf para o Problema Parabólico

Teorema 3.3.1 *Seja u satisfazendo a inequação*

$$\tilde{L}[u] \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$$

com os coeficientes b_i limitados para $i=1,2,\dots,n$ em $E = \Omega \times (0, T)$, com Ω como na introdução, e suponha que o máximo M de u é atingido um ponto P na fronteira ∂E . Assuma que uma esfera que passa por P possa ser construída de modo que seu interior esteja inteiramente contido em E e no qual $u < M$. Então, se $\partial/\partial\nu$ denota qualquer derivada direcional em uma direção exterior, temos que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0 \quad \text{em } P.$$

Demonstração:

Primeiramente observemos que em qualquer esfera como descrita acima a direção radial do centro da esfera a P não é paralela ao eixo t , na realidade, esta direção é perpendicular ao eixo t .

Vamos proceder como no lema 3.2.1. Construamos um disco K de raio R tangente a ∂E em P (ver exemplo em $E \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ na figura 3.4). Denotemos as coordenadas de P por (x^0, t_0) e o centro de K por (x^1, t_1) . Vamos construir também um disco K_1 com centro em P e raio menor que $|x^1 - x^0|$.

Chamemos de C' a porção da fronteira ∂K_1 contida em $\overline{K}$, então C' é fechado. Denotando por C'' o arco (aberto) de ∂K que está em K_1 . Observemos que os arcos $C' \cup C''$ formam a fronteira de uma região D , como está na figura 3.4.

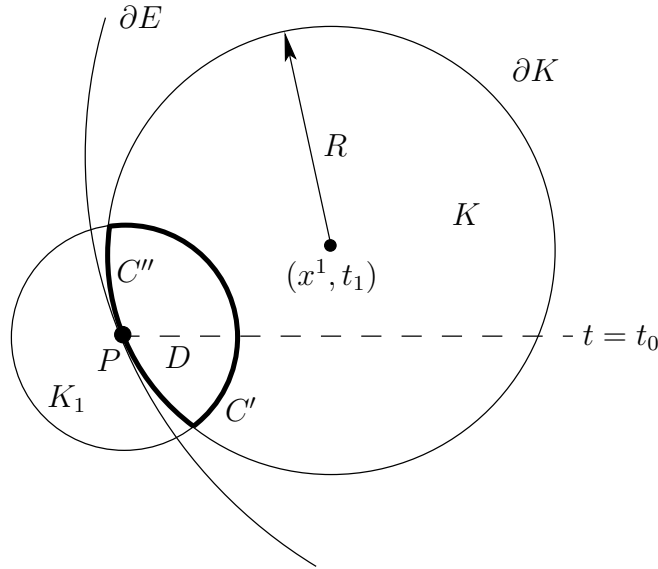


Figura 3.4:

Tomando o círculo tangente ∂K um pouco menor se necessário, podemos dizer que $u < M$ em ∂K , exceto em P . Então $u < M$ no arco fechado C' , e podemos afirmar os seguintes fatos:

- (i) $u < M$ em C'' , exceto no ponto P .
- (ii) $u = M$ em P .
- (iii) Existe um $\eta > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$u \leq M - \eta \quad \text{em } C'.$$

Vamos introduzir a função auxiliar

$$v(x, t) = e^{-\alpha[\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^1)^2 + (t - t_1)^2]} - e^{-\alpha R^2}$$

e note que

$$\tilde{L}[v] = 2\alpha e^{-\alpha[\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^1)^2 + (t - t_1)^2]} \left[2\alpha|x - x^1|^2 - 1 - \sum_{i=1}^n b_i(x_i - x_i^1) + (t - t_1) \right].$$

Então para α suficientemente grande, temos

$$\tilde{L}[v] > 0 \quad \text{para } (x, t) \text{ em } \overline{D}.$$

Construamos a função

$$w = u + \varepsilon v$$

e observemos que para todo número positivo ε , $\tilde{L}[w] = \tilde{L}[u] + \varepsilon \tilde{L}[v] > 0$ em D , então pela proposição 3.2.1 temos que o máximo de w em $\overline{D}$ ocorre na fronteira de D , que é $C' \cup C''$.

Pelo fato (iii) acima, podemos escolher ε tão pequeno que

$$w < M \quad \text{em } C'.$$

Como $v = 0$ em ∂K , temos, pelo fato (i) acima que,

$$w < M \quad \text{em } C'' \text{ exceto em } P$$

e

$$w(P) = M.$$

Como vimos que o máximo de w em $\overline{D}$ deve ocorrer em $C' \cup C''$, o máximo ocorre no ponto P .

Então em P

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu} \geq 0.$$

Sendo $r^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^1)^2 + (t - t_1)^2$ temos que em P

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \nu} &= \nabla v \cdot \nu = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}, \frac{\partial v}{\partial t} \right) \cdot \nu = \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial r}{\partial x_n}, \frac{\partial r}{\partial t} \right) \cdot \nu = \\ &= \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{x_1 - x_1^1}{r}, \dots, \frac{x_n - x_n^1}{r}, \frac{t - t_1}{r} \right) \cdot \nu = \\ &= \nu \cdot \eta \frac{\partial v}{\partial r} = -2\nu \cdot \eta \alpha R e^{-\alpha R^2} < 0, \end{aligned}$$

onde η denota o vetor normal exterior a $\partial(\Omega \times (0, \infty))$ em P . De onde concluímos que $\partial u / \partial \nu > 0$ em P , e assim completamos a prova do teorema. $\blacksquare$

Corolário 3.3.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ como na introdução. Sejam ϕ solução de*

$$\begin{cases} \phi_t - \Delta\phi = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ \phi = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ \phi(0) \geq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

com $\phi(0) \not\equiv 0$ e $\delta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a função distância do ponto à fronteira de Ω . Temos que existem funções $\gamma(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $C(t) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\gamma(t), C(t) \geq 0$ e $\gamma(t)\delta(x) \leq \phi(x, t) \leq C(t)\delta(x)$.

Demonstração:

Do teorema 3.2.2 temos que para $t > 0$, $\phi > 0$ em $\Omega \times \{t\}$. E pelo teorema 3.3.1 temos que para qualquer derivada direcional em uma direção exterior, $\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0$ em $\partial\Omega \times \{t\}$. Então fixado $t > 0$, procedendo como na demonstração do corolário 2.4.1 temos que existem constantes $\gamma_t, C_t > 0$ tais que $\gamma_t\delta(x) \leq \phi(x, t) \leq C_t\delta(x)$. Basta tomar $\gamma(t) = 0$ para $t = 0$ e $\gamma(t) = \gamma_t$ para $t > 0$ e $C(t) = C_t$ para $t > 0$.

■

Capítulo 4

O Semigrupo da equação do Calor

4.1 Introdução à Teoria de Semigrupos

Definição 4.1.1 : *Seja X um espaço de Banach e $\{T(t) : t \geq 0\}$ uma família de operadores lineares contínuos em X . Dizemos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo se satisfizer as condições:*

$$\begin{aligned} i) \quad & T(0) = I, \\ ii) \quad & T(t+s) = T(t)T(s), \\ iii) \quad & \lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)u = u, \text{ para todo } u \in X. \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Neste caso, dizemos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um C^0 -semigrupo. Ainda mais, se:

i) $\|T(t)\| \leq M$ para todo $t \geq 0$, dizemos que $T(t)$ é uniformemente limitado.

ii) $\|T(t)\| \leq 1$ para todo $t \geq 0$, dizemos que $T(t)$ é de contrações.

Definição 4.1.2 : *Definimos o gerador infinitesimal A de um C^0 -semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ por*

$$Au = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)u - u}{h}$$

e o domínio $D(A)$ de A como sendo o conjunto formado pelos u 's para os quais o limite (na norma de X) existe.

Teorema 4.1.1 *Seja $T(t)$ um C^0 -semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então:*

1) *Existem constantes $w \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$.*

2) *Para todo $u \in X$, $T(\cdot)u : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ é contínuo.*

3) Se $u_0 \in D(A)$ então $T(t)u_0 \in D(A)$ e

$$\frac{d}{dt}T(t)u_0 = AT(t)u_0 = T(t)Au_0,$$

em particular, $u(t) = T(t)u_0$ é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t(t) = Au(t) \\ u(0) = u_0 \in D(A) \end{cases} \quad (4.1.2)$$

4) $D(A)$ é denso em X e A é um operador linear fechado, isto é, seu gráfico $\{(u, Au) : u \in D(A)\}$ é fechado em $X \times X$. Na verdade temos que $\cap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ é denso em X .

Demonstração: Ver [13].

Definição 4.1.3 : Dizemos que um C^0 -semigrupo $T(t)$ em X é analítico se $T(t)$ tem as seguintes propriedades adicionais:

- a) $t \mapsto T(t)$ tem uma extensão analítica ao setor $\Delta_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\}$ em $\mathcal{L}(X)$ (conjunto das aplicações lineares contínuas de X em X).
- b) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ para $z_1, z_2 \in \Delta_\theta$.
- c) $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \Delta_\theta}} T(z)u = u$ para todo $u \in X$.

Observação 4.1.1 Se $T(t)$ é analítico temos, para $t > 0$, que:

- i) $T(t) : X \rightarrow D(A^m)$, $m \geq 1$.
- ii) $\frac{d}{dt}T(t) = AT(t)$ é um operador linear limitado em X .
- iii) $t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(X)$ é contínuo, na norma dos operadores lineares (não para $t \rightarrow 0$, a não ser que A seja limitado). (Ver [13].)

Definição 4.1.4 : Seja X um espaço de Banach e X^* o seu dual. Definamos a transformação J de X no conjunto das partes 2^{X^*} de X^* por

$$J(x) = \{x^* \in X^* : (x^*, x) = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

O Teorema de Hanh-Banach garante que $J(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$. Escolhendo $j(x) \in J(x)$ para todo $x \in X$ obtemos uma aplicação

$$j : X \rightarrow X^*$$

que é chamada "aplicação dualidade".

Definição 4.1.5 : Um operador linear A é dissipativo (com respeito à aplicação dualidade j) se

$$\operatorname{Re}(Ax, j(x)) \leq 0$$

para todo $x \in D(A)$, e é acretivo se $-A$ é dissipativo.

Teorema 4.1.2 Seja A um operador linear com domínio $D(A)$ denso em X .

- i) Se A é um gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo de contrações em X então A é dissipativo (com respeito a j) e a imagem de $\lambda - A$ é X para todo $\lambda > 0$.
- ii) A é dissipativo com respeito a alguma aplicação dualidade j e existe $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem de $\lambda_0 - A$ é X , então A é gerador de um C^0 -semigrupo de contrações em X .

Demonstração: Ver [13].

Corolário 4.1.1 Se A é um operador linear com domínio $D(A)$ denso em um espaço de Hilbert H , existe $\lambda_0 > w \geq 0$ tal que a imagem de $\lambda_0 - A$ é H e

$$\operatorname{Re}(Ax, x) \leq w\|x\|^2$$

para todo $x \in D(A)$, então A é gerador de um C^0 -semigrupo $T(t)$ tal que $\|T(t)\| \leq e^{wt}$.

Teorema 4.1.3 Se A é um operador linear com domínio $D(A)$ denso em X , tal que:

- i) O conjunto resolvente de A contém o setor

$$S_\varphi = \left\{ \lambda : \lambda \neq 0, |\arg \lambda| < \varphi + \frac{\pi}{2} \right\}$$

com $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

- ii) $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}$ para $\lambda \in S_\varphi$.

Então A é o gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo analítico $T(t)$, com extensão analítica ao setor $\Delta_\varphi = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \varphi\}$ satisfazendo

$$\|A^m T(t)\| \leq \frac{C}{t^m}$$

para $t > 0$ e $M \geq 1$, onde C depende somente de A e m .

Demonstração: Ver [5].

4.2 Equação do Calor em L^2 .

Seja Ω um aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ suave, de classe C^k para $k \geq 1$. A equação do calor

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

será considerada como a equação diferencial

$$\dot{u} = \Delta u$$

em $H = L^2(\Omega)$ e $D(\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Usaremos as seguintes propriedades do Laplaciano

$$\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

i) O espectro $\sigma(\Delta)$ do Laplaciano Δ é formado por uma sequência de números reais negativos

$$\dots \leq \lambda_4 \leq \lambda_3 \leq \lambda_2 < \lambda_1 < 0.$$

ii) Existe uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$\langle -\Delta u, u \rangle \geq C_0 \|u\|_1^2$$

para toda $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, onde

$$\|u\|_1^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2.$$

As propriedades i) e ii) mostram que o operador Laplaciano satisfaz as condições do Corolário 4.1.1 com $w = 0$, logo Δ é o gerador infinitesimal de um C^0 -semigrupo $T(t)$ de contrações em $L^2(\Omega)$ e $\|T(t)\| \leq 1$. Este semigrupo nos fornece as soluções generalizadas da equação do calor.

Além, podemos usar o teorema 4.1.3 para garantir que $T(t)$ é analítico. De fato,

$$\sigma(\Delta) \subset \Theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z - \pi| \leq \alpha\}$$

com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Para λ no complementar do setor Θ temos que

$$\|(\lambda - \Delta)^{-1}\| \leq \frac{M_\alpha}{|\lambda|},$$

onde $M_\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}$. Pois, para $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, com $\|v\|_{L^2} = 1$,

$$\langle \Delta v, v \rangle \in \mathbb{R}$$

e

$$|\lambda| \operatorname{sen}(\alpha) \leq \operatorname{dist}(\lambda, \mathbb{R}_-) \leq |\lambda - \langle \Delta v, v \rangle| = |\langle (\lambda - \Delta)v, v \rangle| \leq \|(\lambda - \Delta)v\|_{L^2}.$$

Temos portanto que $T(t)$ é diferenciável para $t > 0$ e suaviza as soluções, isto é,

$$T(t) : L^2(\Omega) \rightarrow D(\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

para $t > 0$.

Na verdade $-T(t) \in L^2(\Omega) \subset D(\Delta^m) = H^{2m}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ para $m \geq 1$ e $t > 0$.

Capítulo 5

A Equação do Calor Não Linear e o Problema Elíptico Associado

5.1 Introdução

Finalmente neste capítulo discutiremos as relações entre a existência de soluções clássicas globais da equação de evolução (0.0.1)

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = g(u) & \text{em } (0, \infty) \times \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ u(0) = u_0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

e a existência de soluções fracas do problema estacionário (0.0.2)

$$\begin{cases} -\Delta w = g(w) & \text{em } \Omega \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Neste capítulo:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é suave limitado.
- $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é uma função convexa, C^1 e não decrescente.
- $u : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$.
- $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $u_0 \geq 0$.

Lembremos também que para alguns resultados vamos assumir a hipótese (0.0.3), isto é, que existe $x_0 \geq 0$ tal que $g(x_0) > 0$ e

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{ds}{g(s)} < \infty.$$

Recordemos ainda a seguinte definição:

Definição 5.1.1 : *Uma solução fraca de (0.0.2) é uma função $w \in L^1(\Omega)$, $w \geq 0$, tal que*

$$g(w)\delta \in L^1(\Omega), \quad (0.0.4)$$

onde δ denota a função distância à fronteira,

$$\delta(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega) \quad (0.0.5)$$

e

$$-\int_{\Omega} w \Delta \zeta = \int_{\Omega} g(w) \zeta, \quad (0.0.6)$$

para toda $\zeta \in C^2(\overline{\Omega})$ com $\zeta = 0$ em $\partial\Omega$. (Note que a segunda integral faz sentido desde que $|\zeta(x)| \leq C\delta(x)$ para todo $x \in \Omega$.)

Os principais objetivos deste capítulo são demonstrar os três teoremas seguintes:

Teorema 5.1.1 *Assuma (0.0.3). Se existe uma solução clássica global de (0.0.1) para algum $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $u_0 \geq 0$, então existe uma solução fraca de (0.0.2).*

Observação 5.1.1 *No teorema 5.1.1 observe que não assumimos qualquer limite quando $t \rightarrow \infty$ para a solução global u de (0.0.1).*

Observação 5.1.2 *A existência de uma solução global de (0.0.1), em geral, não implica a existência de uma solução clássica de (0.0.2). Em muitos exemplos, a existência de uma solução fraca de (0.0.2) implica a existência de uma solução clássica da mesma. Porém, existem situações na quais o problema estacionário não admite soluções clássicas, e ainda existe uma solução clássica global do problema de evolução. Ver teorema 5.1.2 e observação 5.1.4.*

Corolário 5.1.1 *Assuma (0.0.3). Se não existe uma solução fraca de (0.0.2), então para qualquer $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $u_0 \geq 0$, a solução de (0.0.1) explode em um tempo finito.*

Existe uma recíproca do teorema 5.1.1, a qual não requer a suposição (0.0.3).

Teorema 5.1.2 *Se existe uma solução fraca w de (0.0.2), então para qualquer $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ com $0 \leq u_0 \leq w$, a solução de (0.0.1) com $u(0) = u_0$ é global.*

Observação 5.1.3 *Se w é uma solução clássica de (0.0.2), então a existência da solução global de (0.0.1) segue imediatamente do corolário 3.2.5. Por outro lado, se $w \notin L^\infty(\Omega)$, então a conclusão não é tão óbvia. De fato, suponha que a solução exploda em um tempo finito T_m . Claramente $u(x, t) \leq w(x)$ em $(0, T_m) \times \Omega$, mas esta estimativa não impede que $\|u(t)\|_{L^\infty}$ exploda em um tempo finito.*

Um ingrediente básico na demonstração do teorema 5.1.2 consiste em provar que se (0.0.2) tem uma solução fraca então algumas "perturbações" de (0.0.2) tem soluções clássicas. Um resultado típico nesta direção é o próximo teorema:

Teorema 5.1.3 *Se existe uma solução fraca w de (0.0.2), então para todo $\varepsilon \in (0, 1)$, existe uma solução clássica w_ε de*

$$\begin{cases} -\Delta w_\varepsilon = (1 - \varepsilon)g(w_\varepsilon) & \text{em } \Omega, \\ w_\varepsilon = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.1.1)$$

O teorema 5.1.3 nos permite tornar mais precisos alguns resultados bem conhecidos do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.1.2)$$

Aqui também assumimos que

$$g(0) > 0 \quad \text{e} \quad g \not\equiv g(0). \quad (5.1.3)$$

Lembremos que existe $0 < \lambda^* < \infty$ tal que:

- a) Para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$ a equação (5.1.2) tem uma solução clássica positiva minimal $u(\lambda)$.
- b) A aplicação $\lambda \mapsto u(\lambda)$ é crescente.
- c) Para $\lambda > \lambda^*$, não existe solução clássica de (5.1.2).
- d) Para $\lambda = \lambda^*$, se

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} = \infty, \quad (5.1.4)$$

então existe uma solução fraca $u^* = \lim_{\lambda \uparrow \lambda^*} u(\lambda)$ de (5.1.2).

Para estes resultados ver [6], [8], [9], [3], [2].

Observação 5.1.4 A solução u^* é algumas vezes uma solução clássica. Por exemplo, quando $g(u) = e^u$ e $n \leq 9$ ou quando $g(u) = (1 + u)^p$ e $n \leq 10$ (ver [12]). Porém, existem casos importantes onde não existe solução clássica para $\lambda = \lambda^*$. Por exemplo, quando Ω é a bola unitária do $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 10$ e $g(u) = e^u$. Neste caso, $\lambda^* = 2(n - 2)$ e $u^* = \log \left(\frac{1}{|x|^2} \right)$ (ver [7]).

Uma consequência do teorema 5.1.3 é o próximo corolário.

Corolário 5.1.2 Assume (5.1.3). Se $\lambda > \lambda^*$, então não existe solução fraca de (5.1.2).

Demonstração:

Vamos supor que existe $\bar{\lambda} > \lambda^*$ tal que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \bar{\lambda}g(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

admite solução fraca $u(\bar{\lambda})$ e chegar a uma contradição.

Pelo teorema 5.1.3, para todo $\varepsilon \in (0, 1)$, existe solução clássica w_ε de

$$\begin{cases} -\Delta w_\varepsilon = (1 - \varepsilon)\bar{\lambda}g(w_\varepsilon) & \text{em } \Omega \\ w_\varepsilon = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

em particular, o teorema vale para ε tal que

$$\tilde{\lambda} := (1 - \varepsilon)\bar{\lambda} \in (\lambda^*, \bar{\lambda}).$$

Então temos uma solução clássica do problema acima para $\tilde{\lambda} \in (\lambda^*, \bar{\lambda})$. O que é uma contradição com a propriedade (c). ■

Dos teoremas 5.1.1, 5.1.2 e 5.1.3, podemos afirmar o seguinte:

Corolário 5.1.3 Assume (0.0.3) e (5.1.3), e considere a solução (clássica) u de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \lambda g(u) \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ u(0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (5.1.5)$$

Se $\lambda \leq \lambda^*$, então u é global. Se $\lambda > \lambda^*$, então u explode num tempo finito.

Demonstração:

Analisemos os 3 casos: $\lambda < \lambda^*$, $\lambda > \lambda^*$ e $\lambda = \lambda^*$.

- $\lambda < \lambda^*$:

Da propriedade (a), temos que para todo $0 < \lambda < \lambda^*$ a equação (5.1.2) tem solução clássica global positiva w . Observemos agora que o problema (5.1.2) é o problema (0.0.2) com λg no lugar de g e o problema (5.1.5) que é o problema (0.0.1) com λg no lugar de g e $u_0 = 0$. Então usando o teorema 5.1.2 para a equação (5.1.2) temos que a solução u de (5.1.5) é global.

- $\lambda > \lambda^*$: Segue da aplicação direta do corolário 5.1.2 seguida da aplicação do corolário 5.1.1.
- $\lambda = \lambda^*$: De (0.0.3) e da convexidade da g , pelo lema 1.2.1, temos que

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} = \infty.$$

Logo, pela propriedade (d) existe uma solução fraca $u^* = \lim_{\lambda \uparrow \lambda^*} u(\lambda)$ de (5.1.2) quando $\lambda = \lambda^*$. Novamente, usando teorema 5.1.2 para a equação (5.1.2), como no caso $\lambda < \lambda^*$, temos que a solução u de 5.1.5 é global.

■

Observação 5.1.5 *É interessante observarmos que obtivemos o mesmo λ^* para o problema de evolução e para o problema estacionário correspondente.*

5.2 Demonstração do Teorema 5.1.3

Antes de começarmos a demonstração do teorema, vamos demonstrar quatro lemas que serão utilizados nela.

Lema 5.2.1 *Dado $f \in L^1(\Omega, \delta(x)dx)$, existe uma única $v \in L^1(\Omega)$ que é uma solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.2.6)$$

no sentido que

$$-\int_{\Omega} v \Delta \xi = \int_{\Omega} f \xi \quad (5.2.7)$$

para toda $\xi \in C^2(\overline{\Omega})$ com $\xi = 0$ em $\partial\Omega$.

Além disso,

$$\|v\|_{L^1} \leq C \|f\|_{L^1(\Omega, \delta(x) dx)} \quad (5.2.8)$$

para alguma constante C independente de f . Ainda mais, se $f \geq 0$ q.t.p. em Ω , então $v \geq 0$ q.t.p. em Ω .

Demonstração:

- Unicidade

Sejam v_1 e v_2 duas soluções de (5.2.6). Então $v = v_1 - v_2$ satisfaz

$$\int_{\Omega} v \Delta \xi = 0$$

para toda $\xi \in C^2(\overline{\Omega})$ com $\xi = 0$ em $\partial\Omega$.

Dado qualquer $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, seja ξ a solução de

$$\begin{cases} \Delta \xi = \varphi & \text{em } \Omega \\ \xi = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\mathcal{D}(\Omega) = \{u \in C^\infty : u \text{ tem suporte compacto contido em } \Omega\}$.

Segue que

$$\int_{\Omega} v \varphi = 0.$$

Como φ é arbitrário, temos que $v = 0$.

- Existência

Podemos assumir $f \geq 0$, pois caso contrário basta observar que $f = f^+ - f^-$.

Dado um inteiro $k \geq 0$, seja $f_k(x) = \min\{f(x), k\}$. Temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ em $L^1(\Omega, \delta(x) dx)$, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 > 0$ tal que $\int_{\Omega} |f_k - f| \delta(x) dx < \varepsilon$ para $k > k_0$.

Seja v_k a solução de

$$\begin{cases} -\Delta v_k = f_k & \text{em } \Omega \\ v_k = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.2.9)$$

A seqüência $(v_k)_{k \geq 0}$ é não decrescente pelo corolário 2.3.1.

Esta é também uma seqüência de Cauchy em $L^1(\Omega)$ pois

$$\int_{\Omega} (v_k - v_l) = \int_{\Omega} (f_k - f_l) \xi_0,$$

onde ξ_0 é definido pela equação (2.4.11), isto é,

$$\begin{cases} -\Delta \xi_0 = 1 & \text{em } \Omega \\ \xi_0 = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Agora, como existe $C > 0$ tal que $\xi_0 \leq C\delta$ (pela observação 2.4.1), temos que

$$\int_{\Omega} (v_k - v_l) = C \int_{\Omega} (f_k - f_l) \delta(x) dx.$$

Como v_k é uma seqüência de Cauchy em $L^1(\Omega)$, existe o limite $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = v$ em $L^1(\Omega)$.

Multiplicando (5.2.9) por ξ e integrando temos que

$$-\int_{\Omega} v_k \Delta \xi = \int_{\Omega} f_k \xi.$$

Passando o limite $k \rightarrow \infty$, como $v_k \leq v$ e $f_k \leq f$ para todo k , $f \in L^1(\Omega, \delta(x) dx)$, $v \in L^1(\Omega)$ e, portanto, $v \in L^1(\Omega, \delta(x) dx)$, pelo teorema da convergência dominada em $L^1(\Omega, \delta(x) dx)$ temos (5.2.7), isto é,

$$-\int_{\Omega} v \Delta \xi = \int_{\Omega} f \xi.$$

Finalmente, tomando $\xi = \xi_0$ em (5.2.7), obtemos

$$\|v\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} v = \int_{\Omega} f \xi_0 \leq C \int_{\Omega} f \delta(x) dx = c \|f\|_{L^1(\Omega, \delta(x) dx)},$$

de onde segue (5.2.8). ■

Lema 5.2.2 *Seja $f \in L^1(\Omega, \delta(x) dx)$ e seja $u \in L^1$ a solução fraca de (5.2.6) . Seja $\Phi \in C^2(\mathbb{R})$ côncava, com Φ' limitada e $\Phi(0) = 0$. Então*

$$-\Delta \Phi(u) \geq \Phi'(u) f$$

no sentido que

$$-\int_{\Omega} \Phi(u) \Delta \xi \geq \int_{\Omega} \Phi'(u) f \xi$$

para toda $\xi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\xi \geq 0$ tal que $\xi = 0$ em $\partial\Omega$.

Demonstração:

Considere uma seqüência $(f_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $f_n \rightarrow f$ em $L^1(\Omega, \delta(x)dx)$ e $f_n \leq f$. Seja u_n a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u_n = f_n & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como no lema 5.2.1, u_n é uma seqüência de Cauchy em L^1 , então $u_n \rightarrow v$ em L^1 quando $n \rightarrow \infty$ e v é solução de (5.2.6). Mas pelo lema 5.2.1, a solução de (5.2.6) é única, então $u_n \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Por outro lado,

$$\Delta \Phi(u_n) = \Phi'(u_n) \Delta u_n + \Phi''(u_n) |\nabla u_n|^2 \leq \Phi'(u_n) \Delta u_n = -\Phi'(u_n) f_n,$$

pois Φ é côncava, de onde, $\Phi''(u_n) \leq 0$. Conseqüentemente,

$$-\int_{\Omega} \Phi(u_n) \Delta \xi \geq \int_{\Omega} \Phi'(u_n) f_n \xi$$

para toda $\xi \in C_2(\overline{\Omega})$, $\xi \geq 0$ tal que $\xi = 0$ em $\partial\Omega$.

Tomando o limite $n \rightarrow \infty$ e usando o Teorema da Convergência Dominada concluímos que

$$-\int_{\Omega} \Phi(u) \Delta \xi \geq \int_{\Omega} \Phi'(u) f \xi.$$

■

Lema 5.2.3 *Seja $\overline{\omega}$ uma super-solução fraca de (0.0.2), no sentido que $\overline{\omega} \in L^1(\Omega)$, $\overline{\omega} \geq 0$, $g(\overline{\omega})\delta \in L^1(\Omega)$, onde δ é dado por (0.0.5), e*

$$-\int_{\Omega} \overline{\omega} \Delta \xi \geq \int_{\Omega} g(\overline{\omega}) \xi \tag{5.2.10}$$

para toda $\xi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\xi \geq 0$, com $\xi = 0$ em $\partial\Omega$. Então existe uma solução fraca w de (0.0.2) com $0 \leq w \leq \overline{\omega}$ quase sempre.

Demonstração:

Defina a sequência $(w_n)_{n \geq 1}$ por

$$\begin{cases} -\Delta w_{n+1} = g(w_n) & \text{em } \Omega \\ w_{n+1} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

com $w_1 = \bar{w}$.

Provemos, por indução, que $\bar{w} = w_1 \geq w_2 \geq w_3 \geq \dots \geq 0$ quase sempre.

Passo 1: Provar que $w_1 \geq w_2 \geq 0$ quase sempre.

Temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (w_1 - w_2)(-\Delta \xi) &= \int_{\Omega} \bar{w}(-\Delta \xi) - \int_{\Omega} w_2(-\Delta \xi) = \\ &= \int_{\Omega} \bar{w}(-\Delta \xi) - \int_{\Omega} g(w_1)\xi = - \int_{\Omega} \bar{w}\Delta \xi - \int_{\Omega} g(\bar{w})\xi \geq 0 \end{aligned}$$

pela equação (5.2.10). Ou seja, obtivemos que

$$\int_{\Omega} (w_1 - w_2)(-\Delta \xi) \geq 0 \quad (5.2.11)$$

para toda $\xi \in C^2(\bar{\Omega})$, $\xi \geq 0$ com $\xi = 0$ em $\partial\Omega$.

Dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, seja ξ_{φ} solução de

$$\begin{cases} -\Delta \xi_{\varphi} = \varphi & \text{em } \Omega \\ \xi_{\varphi} = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Tomando $\xi = \xi_{\varphi}$ em (5.2.11), obtemos

$$\int_{\Omega} (w_1 - w_2)\varphi \geq 0.$$

Como $\varphi \geq 0$ é arbitrário, deduzimos que $w_1 - w_2 \geq 0$ quase sempre, ou seja, $w_2 \leq w_1$ quase sempre em Ω .

Por outro lado, segue do lema 5.2.1 que $w_2 \geq 0$ quase sempre. Logo, $0 \leq w_2 \leq w_1$ quase sempre em Ω .

Passo 2: Mostrar que $w_{n-1} \geq w_n \geq 0$ quase sempre implica $w_n \geq w_{n+1} \geq 0$ quase sempre.

Hipótese de Indução: $w_{n-1} \geq w_n \geq 0$ quase sempre.

Tese: $w_n \geq w_{n+1} \geq 0$ quase sempre.

Temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (w_n - w_{n+1})(-\Delta\xi) &= \int_{\Omega} w_n(-\Delta\xi) - \int_{\Omega} w_{n+1}(-\Delta\xi) = \\ &= \int_{\Omega} g(w_{n-1})(-\Delta\xi) - \int_{\Omega} g(w_n)\xi \geq 0 \end{aligned}$$

pela hipótese de indução $w_{n-1} \geq w_n \geq 0$ e porque g é crescente. Ou seja, obtivemos que

$$\int_{\Omega} (w_n - w_{n+1})(-\Delta\xi) \geq 0 \quad (5.2.12)$$

para toda $\xi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\xi \geq 0$ com $\xi = 0$ em $\partial\Omega$.

Dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, seja ξ_{φ} solução de

$$\begin{cases} -\Delta\xi_{\varphi} = \varphi & \text{em } \Omega \\ \xi_{\varphi} = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Tomando $\xi = \xi_{\varphi}$ em (5.2.12), obtemos

$$\int_{\Omega} (w_n - w_{n+1})\varphi \geq 0.$$

Como $\varphi \geq 0$ é arbitrário, deduzimos que $w_n - w_{n+1} \geq 0$ quase sempre, ou seja, $w_{n+1} \leq w_n$ quase sempre em Ω .

Por outro lado, segue do lema 5.2.1 que $w_{n+1} \geq 0$ quase sempre. Logo, $0 \leq w_{n+1} \leq w_n$ quase sempre em Ω .

Então mostramos que $\overline{w} = w_1 \geq w_2 \geq w_3 \geq \dots \geq 0$ quase sempre.

Como a seqüência $(w_n)_{n \geq 1}$ é não crescente e limitada inferiormente, ela converge a um limite u . Além disso, $u \in L^1(\Omega)$, pois $\overline{w} \in L^1(\Omega)$ e $u \leq \overline{w}$.

Como

$$\int_{\Omega} (w_n - w_{n+1})(-\Delta\xi) \geq 0$$

para todo n , ou seja,

$$\int_{\Omega} (w_n)(-\Delta\xi) \geq \int_{\Omega} (w_{n+1})(-\Delta\xi)$$

para todo n , temos que

$$\int_{\Omega} (w_{n-1})(-\Delta\xi) \geq \int_{\Omega} (w_n)(-\Delta\xi) \geq \int_{\Omega} (w_{n+1})(-\Delta\xi),$$

logo

$$\int_{\Omega} (w_{n-1})(-\Delta \xi) \geq \int_{\Omega} (g(w_{n-1}))(\xi) \geq \int_{\Omega} (w_{n+1})(-\Delta \xi).$$

Tomando o limite $n \rightarrow \infty$ na última desigualdade, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\int_{\Omega} (u)(-\Delta \xi) \geq \int_{\Omega} (g(u))(\xi) \geq \int_{\Omega} (u)(-\Delta \xi),$$

de onde,

$$\int_{\Omega} (u)(-\Delta \xi) = \int_{\Omega} (g(u))(\xi).$$

Logo, u é solução fraca de (0.0.2).

■

Lema 5.2.4 *Assuma $g(0) > 0$ e tome*

$$h(u) = \int_0^u \frac{ds}{g(s)},$$

para todo $u \geq 0$. Seja $\tilde{g} \in C^1$ uma função positiva sobre $[0, \infty)$ tal que $\tilde{g} \leq g$ e $\tilde{g}' \leq g'$. Seja

$$\tilde{h}(u) = \int_0^u \frac{ds}{\tilde{g}(s)}$$

e

$$\Phi(u) = \tilde{h}^{-1}(h(u)),$$

para todo $u \geq 0$. Então,

1. $\Phi(0) = 0$ e $0 \leq \Phi(u) \leq u$ para todo $u \geq 0$.
2. Φ é crescente, côncavo e $\Phi'(u) \leq 1$ para todo $u \geq 0$.
3. Se $h(\infty) < \infty$ e $\tilde{g} \not\equiv g$, então $\Phi(\infty) < \infty$.

Demonstração:

Temos que

$$\tilde{h} : [0, +\infty) \longrightarrow \left[0, \int_0^\infty \frac{ds}{\tilde{g}(s)}\right)$$

é estritamente crescente. Então

$$\tilde{h}^{-1} : \left[0, \int_0^\infty \frac{ds}{\tilde{g}(s)} \right) \longrightarrow [0, +\infty)$$

está bem definida e é crescente.

Agora,

$$h : [0, +\infty) \longrightarrow \left[0, \int_0^\infty \frac{ds}{g(s)} \right).$$

Como $0 \leq \tilde{g} \leq g$, temos que

$$\left[0, \int_0^\infty \frac{ds}{g(s)} \right) \subset \left[0, \int_0^\infty \frac{ds}{\tilde{g}(s)} \right).$$

Logo $\Phi(u) = \tilde{h}^{-1}(h(u))$ está bem definida para todo $u \in [0, \infty)$.

1. $\Phi(0) = 0$ e $0 \leq \Phi(u) \leq u$ para todo $u \geq 0$.

$$\Phi(0) = 0.$$

$$\Phi \geq 0, \text{ pois } h \geq 0 \text{ e } \tilde{h} : [0, +\infty) \longrightarrow \left[0, \int_0^\infty \frac{ds}{\tilde{g}(s)} \right).$$

$$\Phi(u) \leq u:$$

Como $0 \leq \tilde{g} \leq g$, temos que

$$\tilde{h}(u) = \int_0^u \frac{ds}{\tilde{g}(s)} \geq \int_0^u \frac{ds}{g(s)} = h(u),$$

de onde, $h(u) \leq \tilde{h}(u)$. Como $\tilde{h}^{-1}$ é crescente

$$\Phi(u) = \tilde{h}^{-1}(h(u)) \leq \tilde{h}^{-1}(\tilde{h}(u)) = u,$$

para todo $u \geq 0$.

2. Φ é crescente, côncavo e $\Phi'(u) \leq 1$ para todo $u \geq 0$.

Temos que

$$\Phi'(u) = \frac{\tilde{g}(\Phi(u))}{g(u)},$$

logo $0 < \Phi'(u) \leq 1$, pois $\Phi(u) \leq u$ e $0 < \tilde{g} \leq g$.

Logo, Φ é crescente e $\Phi'(u) \leq 1$.

Como g é convexa e C^1 , então g' é não decrescente. E também como $\Phi(u) \leq u$ e $\tilde{g} \leq g$, temos

$$\tilde{g}'(\Phi(u)) \leq g'(\Phi(u)) \leq g'(u).$$

Então,

$$\begin{aligned} \Phi''(u) &= \frac{g(u)\tilde{g}'(\Phi(u))\Phi'(u) - \tilde{g}(\Phi(u))g'(u)}{g(u)^2} = \\ &= \frac{g(u)\tilde{g}'(\Phi(u))\frac{\tilde{g}(\Phi(u))}{g(u)} - \tilde{g}(\Phi(u))g'(u)}{g(u)^2} = \\ &= \frac{\tilde{g}(\Phi(u))[\tilde{g}'(\Phi(u)) - g'(u)]}{g(u)^2} \leq 0. \end{aligned}$$

Portanto, Φ é côncavo.

3. Se $h(\infty) < \infty$ e $\tilde{g} \neq g$, então $\Phi(\infty) < \infty$.

$$h(\infty) = \int_0^\infty \frac{ds}{g(s)} < \int_0^\infty \frac{ds}{\tilde{g}(s)}.$$

Portanto $h(\infty)$ está no domínio de $\tilde{h}^{-1}$, logo

$$\Phi(\infty) = \tilde{h}^{-1}(h(\infty)) < \infty.$$

■

Demonstração do Teorema 5.1.3:

Se $g(0) = 0$, então $w \equiv 0$ é uma solução fraca de (0.0.2) e $w_\varepsilon \equiv 0$ é uma solução clássica de (5.1.1).

Agora assumiremos $g(0) > 0$ e vamos considerar dois casos:

- **Caso 1:** Suponha $\int_0^\infty \frac{ds}{g(s)} < \infty$.

Seja $\tilde{g} = (1 - \varepsilon)g$ e seja $v = \Phi(w)$ como no lema 5.2.4, isto é,

$$\begin{aligned} h(w) &= \int_0^w \frac{ds}{g(s)}, \\ \tilde{h}(w) &= \int_0^w \frac{ds}{\tilde{g}(s)} = \int_0^w \frac{ds}{(1 - \varepsilon)g(s)} = \frac{h(w)}{(1 - \varepsilon)} \end{aligned}$$

e

$$\Phi(w) = \tilde{h}^{-1}(h(w)).$$

Então, pelo lema 5.2.4 temos:

- (i) $\Phi(0) = 0$ e $0 \leq \Phi(u) \leq u$ para todo u , de onde, $0 \leq v \equiv \Phi(w) \leq w$.
- (ii) Φ é crescente, côncava e $\Phi'(u) \leq 1$ para todo u , em particular, $\Phi'(w) \leq 1$.
- (iii) Como $h(\infty) = \int_0^\infty \frac{ds}{g(s)} < \infty$ e $\tilde{g} \not\equiv g$, então $\Phi(\infty) < \infty$.

Temos que $g(w) \in L^1(\Omega, \delta(x)dx)$, pois w é solução fraca de (0.0.2). Temos também que $\Phi \in C^2(\mathbb{R})$, é côncava, Φ' é limitada e $\Phi(0) = 0$. Então pelo lema 5.2.2:

$$-\Delta\Phi(w) \geq \Phi'(w)g = \tilde{g}(\Phi(w))$$

no sentido que

$$-\int_{\Omega} \Phi(w)\Delta\xi \geq \int_{\Omega} \Phi'(w)g\xi = \int_{\Omega} \tilde{g}(\Phi(w))\xi$$

para toda $\xi \in C^2(\overline{\Omega})$, com $\xi \geq 0$ e tal que $\xi = 0$ em $\partial\Omega$.

Então observemos que $\Phi(w)$ é uma super-solução de (5.1.1). Então pelo lema 5.2.3, existe uma solução fraca w_ε de (5.1.1) com $0 \leq w_\varepsilon \leq \Phi(w) < w$.

Agora, como $\Phi(w) < \infty$, temos que $0 \leq w_\varepsilon \leq \Phi(w) < \infty$, logo $w_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$, portanto usando a equação temos que $w_\varepsilon \in W^{2,p}$ para todo $p \geq 1$, em particular $w_\varepsilon \in C^1(\Omega)$. Usando novamente a equação concluímos que w_ε é solução clássica de (5.1.1).

- **Caso 2:** Suponha $\int_0^\infty \frac{ds}{g(s)} = \infty$.

Seja $\tilde{g} = (1 - \varepsilon)g$ e considere a função Φ como no lema 5.2.4, isto é,

$$h(u) = \int_0^u \frac{ds}{g(s)},$$

$$\tilde{h}(u) = \int_0^u \frac{ds}{\tilde{g}(s)} = \int_0^u \frac{ds}{(1 - \varepsilon)g(s)} = \frac{h(u)}{(1 - \varepsilon)},$$

de onde,

$$h(u) = (1 - \varepsilon)\tilde{h}(u)$$

e

$$\Phi(u) = \tilde{h}^{-1}(h(u)),$$

para toda $u \geq 0$.

Então, pelo lema 5.2.4 temos:

- (i) $\Phi(0) = 0$ e $0 \leq \Phi(u) \leq u$ para todo u , de onde, $0 \leq v \equiv \Phi(w) \leq w$.
- (ii) Φ é crescente, côncava e $\Phi'(u) \leq 1$ para todo u , em particular, $\Phi'(w) \leq 1$.

Mas não vale 5.2.4(iii), pois $h(\infty) = \infty$.

Seja $v_1 = \Phi(w)$. Temos que $0 \leq v_1 \leq w$.

Temos que $h'(u) = 1/g(u)$ é decrescente, pois g é crescente, então h é côncava (ver observação 1.1.1). De onde,

$$h(w) \leq h(v_1) + (w - v_1)h'(v_1) = h(v_1) + \frac{w - v_1}{g(v_1)}. \quad (5.2.13)$$

Como $v_1 = \tilde{h}^{-1}(h(w))$, temos que $\tilde{h}(v_1) = h(w)$, de onde $h(v_1) = (1 - \varepsilon)h(w)$

Logo na equação (5.2.13) temos

$$h(w) \leq h(w) - \varepsilon h(w) + \frac{w - v_1}{g(v_1)},$$

de onde,

$$\varepsilon g(v_1) \leq \frac{w - v_1}{h(w)} \leq \frac{w}{h(w)}.$$

Mostremos agora que $\frac{w}{h(w)} \leq C(1 + w)$.

Primeiramente, observemos que $h(w) \rightarrow \infty$ quando $w \rightarrow \infty$, então

$$\frac{1}{h(w)} \leq C' \quad \text{para } w > n_0,$$

de onde,

$$\frac{w}{h(w)} \leq C'w \quad \text{para } w > n_0.$$

Agora, usando a Regra de L'Hôpital, temos que:

$$\lim_{w \rightarrow 0^+} \frac{w}{h(w)} = \lim_{w \rightarrow 0^+} \frac{1}{1/g(w)} = g(0) < \infty.$$

Portanto existe C , tal que

$$\frac{w}{h(w)} \leq C(w+1).$$

Então temos que,

$$\varepsilon g(v_1) \leq \frac{w}{h(w)} \leq C(w+1),$$

de onde, $g(v_1) \in L^1(\Omega)$.

Agora observe que, pelo lema 5.2.2, v_1 é uma super-solução fraca da equação

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = (1 - \varepsilon)g(u_1) & \text{em } \Omega \\ u_1 = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.2.14)$$

(basta proceder como no caso anterior).

Então segue do lema 5.2.3 que existe uma solução fraca u_1 de (5.2.14) tal que $0 \leq u_1 \leq v_1$. Em particular, temos que $0 \leq g(u_1) \leq g(v_1) \in L^1(\Omega)$, de modo que $u_1 \in L^p(\Omega)$ para todo $p \geq 1$ tal que

$$\begin{aligned} p &< \frac{n}{n-2} & \text{para } n &\geq 3, \\ p &< \infty & \text{para } n &= 2 \quad \text{e} \\ p &\leq \infty & \text{para } n &= 1. \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

(Pois, $W^{0,p} = L^p$ e $W^{m,p} \hookrightarrow W^{l,q}$ se $m - \frac{n}{p} > l - \frac{n}{q}$. Ver [4].)

Pela mesma construção, isto é, $v_2 = \Phi(u_1)$, encontramos uma solução u_2 da equação

$$\begin{cases} -\Delta u_2 = (1 - \varepsilon)^2 g(u_2) & \text{em } \Omega \\ u_2 = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

tal que $0 \leq u_2 \leq u_1$ e $0 \leq g(u_2) \leq C(1 + u_1)$. Em particular, $g(u_2) \in L^p(\Omega)$ para todo $p \geq 1$ satisfazendo (5.2.15). Isto implica que $u_2 \in L^r(\Omega)$, para todo $r \geq 1$ tal que $r < \frac{n}{n-4}$, se $n \geq 5$, $r \leq \infty$ se $n = 1, 2, 3$, e $p < \infty$ se $n = 4$.

Iterando, temos que $u_k \in L^q(\Omega)$, para todo $q \geq 1$ tal que $r < \frac{n}{n-2k}$, se $n \geq 2k + 1$, $q \leq \infty$ se $n = 1, \dots, 2k - 1$, e $p < \infty$ se $n = 2k$. Logo se $n \leq 2k - 1$, a solução u_k do problema

$$\begin{cases} -\Delta u_k = (1 - \varepsilon)^k g(u_k) & \text{em } \Omega \\ u_k = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

pertence a $L^\infty(\Omega)$. Do mesmo modo que no Caso 1, temos que essa solução é clássica.

E como $\varepsilon \in (0, 1)$ é arbitrário, completamos a demonstração. ■

5.3 Demonstração do Teorema 5.1.1

Demonstração do Teorema 5.1.1:

Vamos assumir que $g(0) > 0$, pois caso contrário $w \equiv 0$ é uma solução fraca de (0.0.2).

Primeiramente, vejamos que podemos assumir $u_0 = 0$. Precisamos mostrar que se existe uma solução global clássica u de (0.0.1), isto é,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = g(u) & \text{em } (0, \infty) \times \Omega \\ u = 0 & \text{em } (0, \infty) \times \partial\Omega \\ u = u_0 & \text{em } \{t = 0\} \times \Omega \end{cases} \quad (5.3.16)$$

então existe uma solução global clássica v de

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = g(v) & \text{em } (0, \infty) \times \Omega \\ v = 0 & \text{em } (0, \infty) \times \partial\Omega \\ v = 0 & \text{em } \{t = 0\} \times \Omega. \end{cases} \quad (5.3.17)$$

Basta observar que $v \geq 0$ para todo $t \geq 0$, pelo corolário 3.2.1, e que $v \leq u$ para todo $t \geq 0$, pelo corolário 3.2.2. Logo, $0 \leq v \leq u$ para todo $t \geq 0$, e como u é global, v também é global.

Observe que se $u_0 = 0$ então $u \geq 0$ para todo $t > 0$.

Agora, mostremos que se $u_0 = 0$, então $u_t \geq 0$, para todo $t > 0$.

Seja $v = -u_t e^{-kt}$. Temos que

$$\begin{aligned} v_t - \Delta v &= (-u_t e^{kt})_t - \Delta(-u_t e^{-kt}) = -(u_t - \Delta u_t)e^{-kt} - k u_t e^{-kt} = \\ &= -[g(u)]_t e^{-kt} + k v = -g'(u) u_t e^{-kt} + k v = [k - g'(u)] v, \\ v(0) &= -u_t(0) e^{-k \cdot 0} = -u_t(0) \leq 0, \end{aligned}$$

pois $u(0) = 0$ e $u(t) \geq 0$ para todo $t > 0$, de onde, $u_t(0) \geq 0$, e temos também que

$$v(t) = -u_t e^{-kt} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega.$$

Então v satisfaz

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = h \cdot v \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ v(0) \leq 0, \end{cases}$$

onde $h = k - g'(u)$. Procedendo como no corolário 3.2.4, temos que para cada tempo $T > 0$ é possível escolher $k > 0$ tal que $h = k - g'(u) \geq 0$ em $\Omega \times [0, T]$, e assim, pelo corolário 3.2.3 temos que $v \leq 0$ em $[0, T]$. Como T é arbitrário temos que $v \leq 0$ em $[0, \infty)$. De onde, $u_t \geq 0$.

Então, podemos supor $u(0) = 0$, $u \geq 0$ e $u_t \geq 0$ para todo $t > 0$.

Agora, como g é convexa e vale (0.0.3), pelo lema 1.2.1,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{s} = \infty.$$

Então existe $M > 0$ tal que

$$\frac{g(s)}{s} \geq 2\lambda_1 \quad \text{para } s \geq M,$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor do operador $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$. Logo,

$$g(s) - \lambda_1 s \geq g(s)/2 \quad \text{para } s \geq M. \quad (5.3.18)$$

Seja $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$ com $\varphi = 0$ em $\partial\Omega$. Se u é solução de (0.0.1) temos que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t)\varphi + \int_{\Omega} u(t)(-\Delta\varphi) = \int_{\Omega} g(u(t))\varphi. \quad (5.3.19)$$

Mostremos agora que

$$\sup_{t \geq 0} \int_{\Omega} g(u(t))\varphi_1 \leq (1 + \lambda_1)M, \quad (5.3.20)$$

onde φ_1 é a primeira auto-função de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ tal que $\int_{\Omega} \varphi_1 = 1$.

Tomando, $\varphi = \varphi_1$ em (5.3.19) e utilizando a inequação de Jensen (teorema 1.1.3), encontramos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t)\varphi_1 + \lambda_1 \int_{\Omega} u(t)\varphi_1 = \int_{\Omega} g(u(t))\varphi_1 \geq g\left(\int_{\Omega} u(t)\varphi_1\right), \quad (5.3.21)$$

pois $\varphi_1 \geq 0$ e $\int_{\Omega} \varphi_1 = 1$.

Vamos supor agora que existe $t_0 > 0$ tal que $\int_{\Omega} u(t_0)\varphi_1 > M$. Segue de (5.3.21) e de (5.3.18) que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t)\varphi_1 \geq g\left(\int_{\Omega} u(t)\varphi_1\right) - \lambda_1 \int_{\Omega} u(t)\varphi_1 \geq \frac{1}{2}g\left(\int_{\Omega} u(t)\varphi_1\right)$$

para $t \geq t_0$. Chamemos $v(t) = \int_{\Omega} u(t) \varphi_1$, então

$$\frac{dv}{dt} \geq \frac{1}{2}g(v), \quad \text{para } t \geq t_0.$$

Integrando esta inequação diferencial obtemos

$$\int_{t_0}^t \frac{v'}{g(v)} dt \geq \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt = \frac{t - t_0}{2},$$

mas $\frac{t-t_0}{2} \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Fazendo $z = v(t)$ temos que:

$$\int_{v(t_0)}^{v(\infty)} \frac{dz}{g(z)} = \infty,$$

o que contradiz (0.0.3).

Então concluímos que

$$\int_{\Omega} u(t) \varphi_1 \leq M, \quad \forall \quad t \geq 0.$$

Como $u_t \geq 0$, u é não decrescente em t e como g é não decrescente, então $g(u(t))$ é não decrescente em t . Logo,

$$\int_t^{t+1} \int_{\Omega} g(u) \varphi_1 \geq \min_{s \in [t, t+1]} \int_{\Omega} g(u(s)) \varphi_1 = \int_{\Omega} g(u(t)) \varphi_1.$$

Integrando (5.3.19) com $\varphi = \varphi_1$ em $(t, t+1)$ e usando a última desigualdade encontramos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(u(t)) \varphi_1 &\leq \int_{\Omega} u(t+1) \varphi_1 - \int_{\Omega} u(t) \varphi_1 + \lambda_1 \int_t^{t+1} \int_{\Omega} u \varphi_1 \leq \\ &\leq \int_{\Omega} u(t+1) \varphi_1 + \lambda_1 \int_t^{t+1} \int_{\Omega} u \varphi_1 \leq M + \lambda_1 \int_t^{t+1} M = (1 + \lambda_1)M \end{aligned}$$

para todo $t > 0$. De onde segue (5.3.20).

Agora mostremos que existe K tal que

$$\sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_{L^1} \leq K. \quad (5.3.22)$$

Seja ξ_0 a solução de (2.4.11), isto é,

$$\begin{cases} -\Delta \xi_0 = 1 & \text{em } \Omega \\ \xi_0 = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Tomando $\varphi = \xi_0$ em (5.3.19) e integrando em $(t, t+1)$ encontramos

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^1} &= \int_{\Omega} u(t) \leq \int_t^{t+1} \int_{\Omega} u = \int_t^{t+1} \int_{\Omega} u \cdot (-\Delta \xi_0) = \\ &= \int_{\Omega} u(t) \xi_0 - \int_{\Omega} u(t+1) \xi_0 + \int_t^{t+1} \int_{\Omega} g(u) \xi_0. \end{aligned}$$

Pela observação 2.4.2, existe $C > 0$ tal que $\xi_0 \leq C\varphi_1$ em Ω , então temos que

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^1} &\leq \int_{\Omega} u(t) \xi_0 - \int_{\Omega} u(t+1) \xi_0 + \int_t^{t+1} \int_{\Omega} g(u) \xi_0 \leq \\ &\leq C \int_{\Omega} u(t) \varphi_1 - C \int_{\Omega} u(t+1) \varphi_1 + C \int_t^{t+1} \int_{\Omega} g(u) \varphi_1 \leq \\ &\leq C \int_{\Omega} u(t) \varphi_1 + C \int_t^{t+1} \int_{\Omega} g(u) \varphi_1 \leq \\ &\leq M + \int_t^{t+1} (1 + \lambda_1) M = M + (1 + \lambda_1) M = K, \end{aligned}$$

para todo $t > 0$. De onde obtemos (5.3.22).

Seja $w = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$. Como $u_n = u(n)$ é uma seqüência monótona crescente em n , pelo Teorema da Convergência Monótona e usando (5.3.22) temos que

$$\int_{\Omega} w = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \leq \sup_{t \geq 0} \int_{\Omega} u(t) = \sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_{L^1} \leq K.$$

Logo $w \in L^1(\Omega)$. E temos também que

$$\left| \int_{\Omega} (w - u_n) \right| = \int_{\Omega} w - \int_{\Omega} u_n \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Então $u(t) \rightarrow w$ quando $t \rightarrow \infty$ em $L^1(\Omega)$.

Da mesma maneira temos que $g(u) \rightarrow g(w)$ em $L^1(\Omega, \delta(x)dx)$ quando $t \rightarrow \infty$, pois $g_n = g(u(n))$ é uma seqüência monótona crescente. Pelo corolário 2.4.1 temos que existe constante $c_1 > 0$ tal que $\delta(x) \leq c_1 \varphi_1(x)$. Então, pelo Teorema da Convergência Monótona e por (5.3.20),

$$\int_{\Omega} g(w) \delta(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(u_n) \delta(x) dx \leq c_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(u_n) \varphi_1(x) dx \leq C(1 + \lambda_1) M.$$

Logo, $g(w) \delta \in L^1(\Omega)$.

Seja $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ com $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$. Integrando (5.3.19) em $(t, t+1)$ obtemos

$$\left[\int_{\Omega} u\varphi \right]_t^{t+1} + \int_t^{t+1} \int_{\Omega} u(-\Delta\varphi) = \int_t^{t+1} \int_{\Omega} g(u(t))\varphi.$$

Tomando o limite $t \rightarrow \infty$, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_{\Omega} u\varphi \right]_t^{t+1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [u(t+1) - u(t)]\varphi = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u(t+1)\varphi - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u(t)\varphi = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} w\varphi - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} w\varphi = 0. \end{aligned}$$

Como para dado $t > 0$ existem $t_1, t_2 \in [t, t+1]$ tais que

$$\int_t^{t+1} \int_{\Omega} u(-\Delta\varphi) = \int_{\Omega} u(t_1)(-\Delta\varphi)$$

e

$$\int_t^{t+1} \int_{\Omega} g(u(t))\varphi = \int_{\Omega} g(u(t_2))\varphi,$$

tomando o limite $t \rightarrow \infty$, temos que $t_1, t_2 \rightarrow \infty$. Então, usando o Teorema da Convergência Monótona,

$$\int_t^{t+1} \int_{\Omega} u(-\Delta\varphi) \rightarrow \int_{\Omega} w(-\Delta\varphi)$$

e

$$\int_t^{t+1} \int_{\Omega} g(u(t))\varphi \rightarrow \int_{\Omega} g(w)\varphi$$

quando $t \rightarrow \infty$.

Então, tomando o limite $t \rightarrow \infty$, obtemos que

$$\int_{\Omega} w(-\Delta\varphi) = \int_{\Omega} g(w)\varphi.$$

Como $g(w) \in L^1(\Omega, \delta(x)dx)$ e como vale a última igualdade para todo $\varphi \in C^2(\Omega)$ com $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ temos que w é uma solução fraca de (0.0.2). ■

Vamos agora apresentar uma demonstração alternativa do teorema 5.1.1. Para isto, vamos utilizar o seguinte lema:

Lema 5.3.1 *Assuma (5.1.3), isto é, $g(0) > 0$ e $g \not\equiv g(0)$, e seja λ^* o supremo dos $\lambda > 0$ tais que (5.1.2), isto é,*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem uma solução clássica, positiva e minimal. Então $\lambda^ < \infty$. Se, além disso, vale (5.1.4), isto é, $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} = \infty$, então*

$$\lim_{\lambda \nearrow \lambda^*} u(\lambda) = u^*$$

é uma solução fraca de (5.1.2) com $\lambda = \lambda^$.*

Demonstração:

Primeiramente, observemos que por (5.1.3) e da convexidade da g , existe $\varepsilon > 0$ tal que $g(u) \geq \varepsilon u$ para todo $u \geq 0$. Então, $-\Delta u(\lambda) = \lambda g(u) \geq \lambda \varepsilon u$, ou seja,

$$-\Delta u(\lambda) \geq \lambda \varepsilon u. \quad (5.3.23)$$

Sejam λ_1 o primeiro autovalor de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$ e φ_1 a auto-função correspondente. Multiplicando (5.3.23) por φ_1 , temos

$$-\Delta u(\lambda) \varphi_1 \geq \lambda \varepsilon u(\lambda) \varphi_1,$$

assim,

$$\lambda \varepsilon \int_{\Omega} u(\lambda) \varphi_1 \leq \int_{\Omega} -\Delta u(\lambda) \varphi_1 = \int_{\Omega} u(\lambda) (-\Delta \varphi_1) = \lambda_1 \int_{\Omega} u(\lambda) \varphi_1,$$

de onde, $\lambda \varepsilon \leq \lambda_1$, e então $\lambda^* \leq \lambda_1 / \varepsilon$.

Se vale (5.1.4), isto é, $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} = \infty$, mostremos que existe C tal que $g(u) \geq \frac{2\lambda_1}{\lambda^*} u - C$, para todo $u \geq 0$.

De fato, suponhamos que existe $u \geq 0$ tal que $g(u) < \frac{2\lambda_1}{\lambda^*} u - C$, para todo C . Em particular, vale para todo $C > 0$. Se vale para $u = 0$ então temos que $g(0) < -C < 0$, para todo $C > 0$. O que é absurdo, pois $g \geq 0$. Logo, existe $u > 0$ tal que $g(u) < \frac{2\lambda_1}{\lambda^*} u - C$, para todo $C > 0$, de onde,

$$\frac{g(u)}{u} < \frac{2\lambda_1}{\lambda^*} - \frac{C}{u}.$$

Como $C > 0$ é arbitrário e $u > 0$, podemos tomar C tão grande que $\frac{g(u)}{u} < 0$, o que implica, $g(u) < 0$. Absurdo, pois $g \geq 0$.

Então existe C tal que $g(u) \geq \frac{2\lambda_1}{\lambda^*}u - C$, para todo $u \geq 0$, de onde, existe C tal que $\lambda_1 u(\lambda) \leq \frac{\lambda^*}{2}(g(u(\lambda)) + C)$.

Multiplicando (5.1.2) por φ_1 e utilizando a última desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} g(u(\lambda)) \varphi_1 &= \int_{\Omega} -\Delta u(\lambda) \varphi_1 = \int_{\Omega} u(\lambda) (-\Delta \varphi_1) = \\ &= \lambda_1 \int_{\Omega} u(\lambda) \varphi_1 \leq \frac{\lambda^*}{2} \int_{\Omega} (g(u(\lambda)) + C) \varphi_1, \end{aligned}$$

então,

$$\left(\lambda - \frac{\lambda^*}{2} \right) \int_{\Omega} g(u(\lambda)) \varphi_1 \leq \frac{\lambda^*}{2} \int_{\Omega} C \cdot \varphi_1 = \frac{\lambda^* C}{2}.$$

Tomando o limite $\lambda \nearrow \lambda^*$, deduzimos que

$$\lim_{\lambda \nearrow \lambda^*} \int_{\Omega} g(u(\lambda)) \varphi_1 \leq \lim_{\lambda \nearrow \lambda^*} \left(\frac{\lambda^* C}{2\lambda - \lambda^*} \right) = C < \infty.$$

Portanto,

$$L = \lim_{\lambda \nearrow \lambda^*} \int_{\Omega} g(u(\lambda)) \varphi_1 < \infty. \quad (5.3.24)$$

Agora, multiplicando (5.1.2) pela solução ξ_0 de (2.4.11) e utilizando a observação 2.4.2, obtemos

$$\int_{\Omega} u(\lambda) = \int_{\Omega} u(\lambda) (-\Delta \xi_0) = \int_{\Omega} -\Delta u(\lambda) \xi_0 = \lambda \int_{\Omega} g(u(\lambda)) \xi_0 \leq C \lambda \int_{\Omega} g(u(\lambda)) \varphi_1,$$

então, por (5.3.24), $u(\lambda)$ é limitado em $L^1(\Omega)$. Como $u(\lambda)$ é crescente e limitado em $L^1(\Omega)$, segue que $u(\lambda)$ tem um limite $u^* \in L^1(\Omega)$ e que $g(u(\lambda))$ converge para $g(u^*)$ em $L^1(\Omega, \delta(x)dx)$ quando $\lambda \nearrow \lambda^*$. De onde, u^* é uma solução fraca de (5.1.2) com $\lambda = \lambda^*$. (Ver observações após o teorema 5.1.3.)

■

Demonstração Alternativa do Teorema 5.1.1:

Aqui utilizamos as idéias da demonstração de Teorema 5.1.3.

Como na primeira demonstração podemos assumir que $g(0) > 0$ e $u_0 = 0$.

Dado $0 < \varepsilon < 1$, seja $\tilde{g} = (1 - \varepsilon)g$ e sejam $h(u) = \int_0^u \frac{ds}{g(s)}$, $\tilde{h}(u) = \int_0^u \frac{ds}{\tilde{g}(s)} = \frac{1}{1-\varepsilon}h(u)$ e $\Phi(u) = \tilde{h}^{-1}(h(u))$, como no lema 5.2.4. Seja também $v_{\varepsilon}(t) = \Phi(u(t))$ para todo $t \geq 0$.

Como Φ e u são crescentes, utilizando (0.0.3), temos

$$v_\varepsilon(t) = \Phi(u(t)) \leq \Phi(u(\infty)) \leq \Phi(\infty) < \infty.$$

Logo, existe M_ε tal que

$$0 \leq v_\varepsilon \leq M_\varepsilon \quad (5.3.25)$$

para todo $t > 0$.

Além disso, segue dos lemas 5.2.2 e 5.2.4, como no teorema 5.1.3, que

$$\begin{aligned} -\Delta v_\varepsilon &\geq \Phi'(u)(-\Delta u) = \Phi'(u)(g(u) - u_t) = \Phi'(u)g(u) - \Phi'(u)u_t = \\ &= \tilde{g}(\Phi(u)) - (\Phi(u))_t = (1 - \varepsilon)g(v_\varepsilon) - (v_\varepsilon)_t, \end{aligned}$$

então v_ε é uma super-solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = (1 - \varepsilon)g(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ u(0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (5.3.26)$$

Segue do corolário 3.2.5 que existe u_ε solução de (5.3.26) e que $0 \leq u_\varepsilon \leq v_\varepsilon$, e como vale (5.3.25), obtemos que a solução u_ε de (5.3.26) é global e limitada por M_ε .

Procedendo como no início da demonstração do teorema 5.1.1 chega-se que $(u_\varepsilon)_t \geq 0$. Então, (u_ε) é crescente e existe o limite $w_\varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} u_\varepsilon$. Como $|u_\varepsilon| \leq M_\varepsilon$ para todo $t > 0$, tomando a sequência $u_\varepsilon^n = u_\varepsilon(n)$, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que $w_\varepsilon \in L^1(\Omega)$.

Também analogamente à demonstração anterior do teorema 5.1.1, mostra-se que $g(u_\varepsilon) \rightarrow g(w_\varepsilon)$ em $L^1(\Omega, \delta(x)dx)$ quando $t \rightarrow \infty$.

Seja $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$. Multiplicando (5.3.26) por φ e integrando temos

$$\left[\int_\Omega u_\varepsilon \varphi \right]_t^{t+1} + \int_t^{t+1} \int_\Omega u_\varepsilon(t)(-\Delta \varphi) = \int_t^{t+1} \int_\Omega \tilde{g}(u_\varepsilon(t))\varphi.$$

Tomando $t \rightarrow \infty$ (como na demonstração anterior do teorema 5.1.1) temos

$$\int_\Omega w_\varepsilon(-\Delta \varphi) = \int_\Omega \tilde{g}(w_\varepsilon)\varphi.$$

Logo w_ε é uma solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta w_\varepsilon = (1 - \varepsilon)g(w_\varepsilon) \\ w_\varepsilon = 0 \end{cases} \quad \text{em } \partial\Omega. \quad (5.3.27)$$

Mas como $w_\varepsilon \leq M_\varepsilon$ em Ω , e portanto, $w_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$, temos que $w_\varepsilon \in C^2(\Omega)$ (como na demonstração do teorema 5.1.3). Portanto, w_ε é uma solução clássica de (5.3.27).

Como o problema (5.3.27) tem solução clássica para todo $\varepsilon \in (0, 1)$, temos da propriedade (c), após o enunciado de teorema 5.1.3 que $\lambda^* \geq 1$. Então, pelo lema 5.3.1, (0.0.2) tem uma solução fraca. Basta observar que (0.0.2) é o problema (5.3.27) com $\lambda = \varepsilon - 1 = 1$.

■

5.4 Demonstração do Teorema 5.1.2

Como as hipóteses do teorema 5.1.2 permitem que g se anule na origem, precisamos de uma variação do lema 5.2.4 que se aplique ao caso $g(0) = 0$.

Lema 5.4.1 *Assuma (0.0.3). Existem constantes $K \geq 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, existe uma função $\Phi_\varepsilon \in C^2([0, \infty))$, côncava, crescente, com*

$$\Phi_\varepsilon(0) = 0, \quad (5.4.28)$$

$$0 < \Phi_\varepsilon(x) \leq x \quad \text{para } x > 0, \quad (5.4.29)$$

$$1 \geq \Phi'_\varepsilon(x) \geq \frac{(g(\Phi_\varepsilon(x)) - \varepsilon K)^+}{g(x)} \quad \text{para } x \geq 0. \quad (5.4.30)$$

Além disso, $\sup_{x \geq 0} \Phi_\varepsilon(x) < \infty$.

Demonstração:

Caso 1: $g(0) > 0$

Seja $\varepsilon_0 = g(0)$ e $K = 1$. Para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = g(0)$ aplicamos o lema 5.2.4 com $\tilde{g}(u) = g(u) - \varepsilon$. Pois, para $0 < \varepsilon < g(0)$, temos que $\tilde{g} \in C^1$, $\tilde{g} \geq 0$, $\tilde{g} \geq g$ e $\tilde{g}' = g'$. Assim, as conclusões seguem diretamente de (i), (ii) e (iii) do lema 5.2.4, com exceção da última desigualdade de (5.4.30). Mas como $\tilde{g} \geq 0$, temos que

$$\Phi'_\varepsilon(u) = \frac{\tilde{g}(\Phi(u))}{g(u)} = \frac{g(\Phi(u)) - \varepsilon}{g(u)} = \frac{(g(\Phi(u)) - \varepsilon)^+}{g(u)},$$

logo vale a última desigualdade (5.4.30).

Caso 2: $g(0) = 0$

Como $g'(x) \geq 0$, g' é não decrescente e como $g \not\equiv 0$, temos que existe um único a tal que $g(a) = 1$, pois $g'(a) > 0$.

Seja

$$H(x) = a + \int_a^x \frac{ds}{g(s)} \quad \text{para } x \geq a.$$

Como g é contínua e $g(a) = 1$, existe $\varepsilon_0 \in (0, 1)$, tal que $0 < \varepsilon < g((1 - \varepsilon)a)$ para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Para cada ε seja

$$H_\varepsilon(x) = a + \int_{(1-\varepsilon)a}^x \frac{ds}{g(s) - \varepsilon} \quad \text{para } x \geq (1 - \varepsilon)a.$$

Note que $H_\varepsilon(x)$ é injetiva e também que $H_\varepsilon((1 - \varepsilon)a) = a = H(a)$. Além disso,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} H_\varepsilon(x) = a + \int_{(1-\varepsilon)a}^{\infty} \frac{ds}{g(s) - \varepsilon} > a + \int_{(1-\varepsilon)a}^{\infty} \frac{ds}{g(s)} = \lim_{x \rightarrow \infty} H(x).$$

Então, $\Psi_\varepsilon(x) = H_\varepsilon^{-1}(H(x))$ está bem definido para $x \geq a$, $\Psi_\varepsilon(a) = H_\varepsilon^{-1}(H(a)) = H_\varepsilon^{-1}(a) = (1 - \varepsilon)a$ e $\sup_{x \geq a} \Psi_\varepsilon(x) < \infty$. Além disso, para $x \geq a$,

$$\Psi'_\varepsilon(x) = \frac{g(\Psi_\varepsilon(x)) - \varepsilon}{g(x)} \tag{5.4.31}$$

e

$$\begin{aligned} \Psi''_\varepsilon(x) &= \frac{g(x)g'(\Psi_\varepsilon(x))\Psi'_\varepsilon(x) - (g(\Psi_\varepsilon(x)) - \varepsilon)g'(x)}{g(x)^2} = \\ &= \frac{(g(\Psi_\varepsilon(x)) - \varepsilon)(g'(\Psi_\varepsilon(x)) - g'(x))}{g(x)^2} \leq 0, \end{aligned}$$

pois $\Psi_\varepsilon(x) \leq x$, de onde, $g'(\Psi_\varepsilon(x)) \leq g'(x)$, pois g' é não decrescente.

Finalmente consideremos uma função côncava $\Phi_\varepsilon \in C^2([0, \infty))$ tal que $\Phi_\varepsilon(x) = \Psi_\varepsilon(x)$ para $x \geq a$, $\Phi_\varepsilon(0) = 0$ e $\Phi'_\varepsilon(x) \leq 1$ para todo $x \geq 0$.

Tal função existe pois,

$$\begin{aligned} \Psi'_\varepsilon(a) &= g(\Psi_\varepsilon(a)) - \varepsilon \leq g((1 - \varepsilon)a) - \varepsilon \leq g(a) - \varepsilon = \\ &= 1 - \varepsilon = \frac{(1 - \varepsilon)a}{a} = \frac{\Psi_\varepsilon(a)}{a}. \end{aligned}$$

Observemos agora que $\Phi_\varepsilon(0) = 0$, isto é, Φ_ε satisfaz (5.4.28), e $\Phi_\varepsilon(x) < x$, pois, $\Phi'_\varepsilon(x) \leq 1$, e assim vale (5.4.29).

Já vimos que $\Phi_\varepsilon(x) \leq 1$ e falta mostrar que vale a outra desigualdade com $K = 1 + ag'(a) > 1$ para demonstrarmos (5.4.30). Ou seja, falta mostrar que

$$\Phi'_\varepsilon(x) \geq \frac{g(\Phi_\varepsilon(x)) - \varepsilon K}{g(x)}.$$

Segue de (5.4.31) que para $x \geq a$,

$$\Phi'_\varepsilon(x) = \Psi'_\varepsilon(x) = \frac{g(\Psi_\varepsilon(x)) - \varepsilon}{g(x)} = \frac{g(\Psi_\varepsilon(x)) - \varepsilon K}{g(x)} = \frac{g(\Phi_\varepsilon(x)) - \varepsilon K}{g(x)},$$

de onde, vale (5.4.30) para $x \geq a$.

Para $x \leq a$ temos

$$\Phi'_\varepsilon(x) \geq \Phi'_\varepsilon(a) = \Psi'_\varepsilon(a) = \frac{g(\Psi_\varepsilon(a)) - \varepsilon K}{g(a)} = g((1 - \varepsilon)a) - \varepsilon.$$

Pela convexidade da g temos

$$g((1 - \varepsilon)a) - \varepsilon \geq g(a) - \varepsilon ag'(a) = 1 - \varepsilon(K - 1),$$

e então, para $x \leq a$, temos

$$\begin{aligned} \Phi'_\varepsilon(x) &\geq g((1 - \varepsilon)a) - \varepsilon \geq 1 - \varepsilon(K - 1) = 1 + \varepsilon - \varepsilon K \geq 1 - \varepsilon K = \\ &= 1 - \frac{\varepsilon K}{g(a)} \geq 1 - \frac{\varepsilon K}{g(x)} = \frac{g(x) - \varepsilon K}{g(x)} \geq \frac{g(\Phi_\varepsilon(x)) - \varepsilon K}{g(x)}. \end{aligned}$$

Então, segue (5.4.30) para $x \leq a$, o que completa a demonstração. ■

Lema 5.4.2 *Seja δ dada por (0.0.5). Para todo $0 < T < \infty$, existe $\varepsilon_1(T) > 0$ tal que se $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$, então a solução Z da equação*

$$\begin{cases} Z_t - \Delta Z = -\varepsilon & \text{em } \Omega, \\ Z = 0 & \text{em } \partial\Omega, \\ Z(0) = \delta & \text{em } \Omega \end{cases}$$

satisfaz $Z \geq 0$ em $[0, T] \times \overline{\Omega}$.

Demonstração:

Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ o semigrupo do calor com condições de fronteira de Dirichlet, e considere a solução ξ_0 de (2.4.11), isto é,

$$\begin{cases} -\Delta \xi_0 = 1 & \text{em } \Omega \\ \xi_0 = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Colocando $u(t, x) = \xi_0(x)$ temos que

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 1 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ u(0) = \xi_0(x). \end{cases}$$

Portanto, pela Fórmula das Variações das Constantes, temos que

$$\xi_0 = T(t)\xi_0 + \int_0^t T(t-r)1_\Omega dr.$$

Fazendo a mudança de variável $s = t - r$, obtemos

$$\xi_0 = T(t)\xi_0 + \int_0^t T(s)1_\Omega ds \quad (5.4.32)$$

para todo $t \geq 0$.

Agora, ξ_0 satisfaz (2.4.11), isto é,

$$\begin{cases} -\Delta \xi_0 = 1 & \text{em } \Omega \\ \xi_0 = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

então, pelo teorema 2.3.1 temos que $\xi_0 \geq 0$. Portanto, usando o corolário 3.2.1 temos que $T(t)\xi_0 \geq 0$, então de (5.4.32) concluimos que

$$\int_0^t T(s)1_\Omega ds \leq \xi_0 \leq C\delta \quad (5.4.33)$$

para todo $t \geq 0$.

Por outro lado, temos

$$Z(t) = T(t)\delta - \varepsilon \int_0^t T(s)1_\Omega ds,$$

então,

$$Z(t) \geq T(t)\delta - \varepsilon C\delta. \quad (5.4.34)$$

Consideremos agora $c_0, c_1 > 0$ tais que $c_0\varphi_1 \leq \delta \leq c_1\varphi_1$, onde $\varphi_1 > 0$ é a primeira auto-função de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$, associada ao autovalor λ_1 (tais constantes existem pelo corolário 2.4.1). Usando novamente o corolário 3.2.1 temos que

$$T(t)\delta \geq T(t)(c_0\varphi_1) = c_0T(t)\varphi_1.$$

Como $T(t)\varphi_1 = e^{-\lambda_1 t}\varphi_1$, pois ambos satisfazem o problema

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0 \\ w = 0 \\ w(0) = \varphi_1 \end{cases} \quad \text{em } \partial\Omega \quad (5.4.35)$$

temos que

$$T(t)\delta \geq c_0\varphi_1 e^{-\lambda_1 t} \geq \frac{c_0}{c_1} e^{-\lambda_1 t} \delta.$$

Então, por (5.4.34)

$$Z(t) \geq T(t)\delta - \varepsilon C \delta \geq \left(\frac{c_0}{c_1} e^{-\lambda_1 t} - \varepsilon C \right) \delta,$$

portanto, $Z(t) \geq 0$ em $[0, T]$ se $\varepsilon \leq \varepsilon_1 := \frac{c_0}{c_1 C} e^{-\lambda_1 T}$.

■

Prova do teorema 5.1.2:

Primeiramente lembremos da condição (0.0.3): Existe $x_0 \geq 0$ com $g(x_0) > 0$ tal que

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{ds}{g(s)} < \infty.$$

Vamos dividir a demonstração em dois casos.

Caso 1: (0.0.3) falha, isto é, para todo $x_0 \geq 0$ com $g(x_0) > 0$, $\int_{x_0}^{\infty} \frac{ds}{g(s)} = \infty$.

Vamos mostrar que $0 \leq u(t) \leq \theta(t)$ onde $\theta(t)$ é a solução da equação diferencial ordinária

$$\begin{cases} \theta' = g(\theta) \\ \theta(0) = \|u_0\|_{L^\infty}. \end{cases}$$

Em primeiro lugar observemos que $\theta(t)$ é global, pois caso contrário, existe $M > 0$ tal que θ está definida em $(0, M)$ e $\theta(t) \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow M^-$. Como θ é não decrescente

temos que existe $t_0 \in (0, M)$ tal que $\theta(t) \geq x_0$ para $t_0 \leq t < M$, logo $g(\theta(t)) > 0$ para $t_0 \leq t < M$ e

$$\int_{\theta(t_0)}^{\infty} \frac{ds}{g(s)} = \int_{t_0}^M \frac{\theta'(t)}{g(\theta(t))} dt = \int_{t_0}^M dt = M - t_0 < \infty$$

o que é uma contradição.

Como u satisfaz (0.0.1), isto é,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = g(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

pelo corolário 3.2.1 temos que $u \geq 0$.

Para justificarmos a outra desigualdade consideramos $v = (u - \theta)e^{-kt}$ e procedemos como na demonstração do corolário 3.2.4, de onde concluímos que $v \leq 0$ e, portanto, $u \leq \theta$.

Assim, obtivemos que $0 \leq u \leq \theta$. Logo, u é solução global de (0.0.1).

Caso 2: Vale (0.0.3), ou seja, existe $x_0 \geq 0$ com $g(x_0) > 0$ tal que $\int_{x_0}^{\infty} \frac{ds}{g(s)} < \infty$.

Seja w solução de (0.0.2).

Se w for clássica vimos na observação 5.1.3 que u é global. Então precisamos analisar o caso de w não clássica. Se $w \in L^\infty(\Omega)$, como Ω é limitado, temos que $w \in C^2$ (como já vimos na demonstração do teorema 5.1.3). Logo w é clássica, e portanto, u é global.

Seja $w \notin L^\infty(\Omega)$ e seja $[0, T_m)$ o intervalo maximal de existência da u . Vamos mostrar que $T_m = \infty$ em cinco passos.

Passo 1: $u(t) \leq w$ para todo $t \in [0, T_m)$.

Fixemos $T < T_m$.

Seja $h(x, t) \in \mathcal{D}(\Omega \times (0, T))$, onde $\mathcal{D}(\Omega \times (0, T))$ é o conjunto das funções testes $C_c^\infty(\Omega \times (0, T))$, com $h \geq 0$ e seja ξ a solução de

$$\begin{cases} -\xi_t - \Delta \xi = h & \text{em } \Omega \\ \xi = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ \xi(T) = 0. \end{cases}$$

Sendo $v(x, t) = \xi(x, T - t)$, temos que v satisfaz

$$\begin{cases} v_t(x, t) - \Delta v(x, t) = h(x, T - t) =: \tilde{h}(x, t), & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

Logo v tem as seguintes propriedades:

- (1) $v \in C([0, T], C^2(\overline{\Omega}))$ e $v|_{\partial\Omega} = 0$.
- (2) $v \geq 0$, pelo corolário 3.2.1.
- (3) $v(t) = \int_0^t T(t - s)\tilde{h}(s)ds$ pela Fórmula de Variação das Constantes, onde $T(t)$ é o semigrupo do calor com condição de fronteira de Dirichlet.

E destas propriedades segue que:

- (1) $\Rightarrow \xi \in C([0, T], C^2(\overline{\Omega}))$ e $\xi|_{\partial\Omega} = 0$.
- (2) $\Rightarrow \xi \geq 0$.
- (3) $\Rightarrow \xi(t) = v(T - t) = \int_0^{T-t} T(T - t - s)\tilde{h}(s)ds$, o que fazendo a mudança de variável $s = T - s$ nos fornece $\xi(t) = \int_t^T T(s - t)h(s)ds$.

Agora, multiplicando o problema (0.0.1) por ξ e integrando em $\Omega \times (0, T)$, encontramos

$$\int_0^T \int_{\Omega} u_t \xi - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta u \xi - \int_0^T \int_{\Omega} g(u) \xi = 0.$$

Calculando a primeira integral por partes, usando uma das Fórmulas de Green na segunda integral e usando que $u = \xi = 0$ em $\partial\Omega$, $\xi(T) = 0$ e que $\xi_t + \Delta \xi = -h$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} u \xi|_{t=T} - \int_{\Omega} u \xi|_{t=0} - \int_0^T \int_{\Omega} u \xi_t - \int_0^T \int_{\Omega} u \Delta \xi - \\ &\quad - \int_0^T \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \xi}{\partial \nu} + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \xi \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^T \int_{\Omega} g(u) \xi = \\ &= - \int_{\Omega} u_0 \xi(0) - \int_0^T \int_{\Omega} u (\xi_t + \Delta \xi) - \int_0^T \int_{\Omega} g(u) \xi = \\ &= - \int_{\Omega} u_0 \xi(0) + \int_0^T \int_{\Omega} u \cdot h - \int_0^T \int_{\Omega} g(u) \xi. \end{aligned}$$

Portanto,

$$- \int_{\Omega} u_0 \xi(0) + \int_0^T \int_{\Omega} u \cdot h = \int_0^T \int_{\Omega} g(u) \xi. \quad (5.4.36)$$

Por outro lado, sendo w solução de (0.0.2), temos que $w_t = 0$. Multiplicando $w_t = 0$ por ξ e integrando em $\Omega \times (0, T)$ usando integração por partes:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_{\Omega} w_t \xi = \int_{\Omega} w \xi|_{t=T} - \int_{\Omega} w \xi|_{t=0} - \int_0^T \int_{\Omega} w \xi_t = \\ &= - \int_{\Omega} w \xi(0) - \int_0^T \int_{\Omega} w \xi_t. \end{aligned}$$

Portanto,

$$- \int_0^T \int_{\Omega} w \xi_t - \int_{\Omega} w \xi(0) = 0. \quad (5.4.37)$$

Agora, multiplicando o problema (0.0.2) por ξ e integrando em $\Omega \times (0, T)$ usando integração uma Fórmula de Green e lembrando que $w = 0$ e $\xi = 0$ em $\partial\Omega$, temos

$$0 = - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta w \xi - \int_0^T \int_{\Omega} g(w) \xi = - \int_0^T \int_{\Omega} w \Delta \xi - \int_0^T \int_{\Omega} g(w) \xi.$$

Portanto,

$$- \int_0^T \int_{\Omega} w \Delta \xi = \int_0^T \int_{\Omega} g(w) \xi. \quad (5.4.38)$$

Fazendo (5.4.36)–(5.4.37)–(5.4.38), visto que $\xi_t + \Delta \xi = -h$, obtemos

$$- \int_{\Omega} (u_0 - w) \xi(0) + \int_0^T \int_{\Omega} (u - w) h = \int_0^T \int_{\Omega} [g(u) - g(w)] \xi.$$

Como $\xi \geq 0$ e $u_0 \leq w$, temos que,

$$- \int_{\Omega} (u_0 - w) \xi(0) \geq 0,$$

de onde,

$$\int_0^T \int_{\Omega} (u - w) h \leq \int_0^T \int_{\Omega} [g(u) - g(w)] \xi.$$

Dado $\varepsilon > 0$, temos que $\|u\|_{L^\infty((0, T_m - \varepsilon) \times \Omega)} < \infty$, portanto g é Lipschitz no intervalo $[0, \|u\|_{L^\infty((0, T_m - \varepsilon) \times \Omega)}]$, com constante de Lipschitz C que depende de ε .

Portanto,

$$\int_0^T \int_{\Omega} (u - w) h \leq \int_0^T \int_{\{u \geq w\}} [g(u) - g(w)] \xi \leq C \int_0^T \int_{\Omega} (u - w)^+ \xi.$$

Usando a Desigualdade de Schwarz na inequação anterior obtemos

$$\int_0^T \int_{\Omega} (u - w) h \leq C \left(\int_0^T \int_{\Omega} [(u - w)^+]^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 \right)^{1/2}. \quad (5.4.39)$$

Agora,

$$\xi(t) = \int_t^T T(s-t)h(s)ds.$$

Como $\|T(t)\|_{L^2} \leq 1$ e usando a desigualdade de Schwarz temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \xi(t)^2 &= \|\xi(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \left\| \int_t^T T(s-t)h(s)ds \right\|_{L^2}^2 \leq \\ &\leq \left(\int_t^T \|T(s-t)\|_{L^2} \|h(s)\|_{L^2} ds \right)^2 \leq \left(\int_t^T \|h(s)\|_{L^2} ds \right)^2 \leq \\ &\leq (T-t) \int_t^T \|h(s)\|_{L^2} ds \leq (T-t) \int_0^T \int_{\Omega} h^2, \end{aligned}$$

portanto,

$$\int_0^T \int_{\Omega} \xi^2 \leq \int_0^T (T-t)dt \cdot \int_0^T \int_{\Omega} h^2 = \frac{T^2}{2} \int_0^T \int_{\Omega} h^2,$$

e então, de (5.4.39)

$$\int_0^T \int_{\Omega} (u-w)h \leq \frac{CT}{\sqrt{2}} \left(\int_0^T \int_{\Omega} [(u-w)^+]^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_{\Omega} h^2 \right)^{1/2}.$$

Como $h \in \mathcal{D}(\Omega \times (0, T)) = \mathcal{D}$ e este conjunto é denso em $L^2(\Omega \times (0, T))$ temos que existe uma seqüência h_n em $\mathcal{D}$ tal que $h_n \rightarrow (u-w)^+$ em L^2 . Como $(u-w)^+ \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$ podemos tomar a seqüência (h_n) em L^∞ . Como $u-w \in L^1(\Omega \times (0, T))$ obtemos

$$\int_0^T \int_{\Omega} [(u-w)^+]^2 = \int_0^T \int_{\Omega} (u-w)(u-w)^+ \leq \frac{CT}{\sqrt{2}} \int_0^T \int_{\Omega} [(u-w)^+]^2.$$

Segue que $(u-w)^+ = 0$ se $CT/\sqrt{2} < 1$, ou seja, $u \leq w$ para $T < \sqrt{2}/C$.

Iterando podemos concluir que $u \leq w$ em $[0, T_m - \varepsilon]$, como ε é arbitrário provamos o passo 1.

Passo 2: Existem $0 < \tau < T_m$ e $C_0, c_0 > 0$ tais que

$$u(\tau) \leq C_0 \delta, \tag{5.4.40}$$

e

$$u(\tau) \leq w - c_0 \delta. \tag{5.4.41}$$

Seja $v_0 = \min\{w, 1 + u_0\}$. Temos que $v_0 \geq u_0$ e $v_0 \not\equiv u_0$, pois $v_0 \notin L^\infty(\Omega)$ e $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Pelo corolário 3.3.1, existe uma função $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\gamma(t) > 0$ para $t > 0$ e

$$T(t)(v_0 - u_0) \geq \gamma(t)\delta, \quad (5.4.42)$$

onde δ é definido por (0.0.5) e $(T(t))_{t \geq 0}$ é o semigrupo do calor com condição de fronteira de Dirichlet.

Seja v a solução de (0.0.1) com condição inicial $v(0) = v_0$ e seja $[0, \bar{T})$ o intervalo maximal de existência de v . Pelo corolário 3.2.1 $v \geq 0$ e, pelo Passo 1 $v \leq w$. Seja $z(t) = u(t) + T(t)(v_0 - u_0)$ para $0 \leq t < \bar{T}$. Temos que z satisfaz

$$z_t - \Delta z = (u(t)_t - \Delta u(t)) + ((T(t)(v_0 - u_0))_t - \Delta(T(t)(v_0 - u_0))) = g(u),$$

$$z(0) = u(0) + T(0)(v_0 - u_0) = v_0,$$

e

$$z = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega,$$

ou seja,

$$\begin{cases} z_t - \Delta z = g(u) \leq g(z) & \text{em} \quad \Omega \times (0, \bar{T}), \\ z = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \times (0, \bar{T}), \\ z(0) = v_0. \end{cases}$$

Pelo corolário 3.2.4 temos que $z \leq v$. Além disso, pela equação (5.4.42), obtemos

$$u(t) = z(t) - T(t)(v_0 - u_0) \leq v(t) - T(t)(v_0 - u_0) \leq w - T(t)(v_0 - u_0) \leq w - \gamma(t)\delta, \quad (5.4.43)$$

para $0 \leq t < \bar{T}$.

Fixemos $0 < T < \min\{\bar{T}, T_m\}$. Como u é limitado por alguma constante M em $(0, T] \times \bar{\Omega}$, temos

$$u(t) \leq MT(t)1_\Omega + g(M) \int_0^t T(s)1_\Omega ds.$$

Pelo corolário 3.3.1, existe uma função $C : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(t)1_\Omega \leq C(t)\delta$ para $t > 0$, então de (5.4.33), deduzimos que

$$u(t) \leq MC(t)\delta + g(M)C\delta \quad (5.4.44)$$

para $0 < t \leq T$.

Seja $0 < \tau < T$ tal que $C(\tau) > 0$, então de (5.4.44) temos que

$$u(\tau) \leq MC(\tau)\delta + g(M)C\delta = (MC(\tau) + g(M)C)\delta =: C_0\delta,$$

observando que $C_0 > 0$ temos que vale (5.4.40).

E como $\gamma(t) > 0$ para todo $t > 0$, em particular $\gamma(\tau) > 0$, de (5.4.43) temos que

$$u(\tau) \leq w - \gamma(\tau)\delta =: w - c_0\delta,$$

de onde, vale (5.4.41).

Passo 3: Podemos assumir sem perda de generalidade que

$$u_0 \leq C_0\delta \tag{5.4.45}$$

e

$$u_0 \leq w - c_0\delta, \tag{5.4.46}$$

onde C_0, c_0 são como no Passo 2.

Basta observar que podemos, sem perda de generalidade, considerar $u(\cdot + \tau)$ no lugar de $u(\cdot)$.

Passo 4: Sejam ε_0 e Φ_ε como no lema 5.4.1, e seja $w_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(w)$ para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Então,

$$w_\varepsilon \in L^\infty(\Omega) \tag{5.4.47}$$

e

$$\int_{\Omega} \xi(-\Delta w_\varepsilon) \geq \int_{\Omega} (g(w_\varepsilon) - \varepsilon K)\xi, \tag{5.4.48}$$

para todo $\xi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\xi \geq 0$ em Ω e $\xi|_{\partial\Omega} = 0$. Mais ainda, existe $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ tal que

$$u_0 \leq w_\varepsilon - \frac{c_0}{2}\delta, \tag{5.4.49}$$

para $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, onde c_0 é como em (5.4.46).

A condição (5.4.47) segue do lema 5.4.1, pois $\sup_{x \geq 0} \Phi_\varepsilon(x) < \infty$, de onde, $w_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(w) < \infty$. Logo, $w_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$.

Mostremos agora a equação (5.4.48). Do lema 5.4.1 temos que

$$1 \geq \Phi'_\varepsilon(x) \geq \frac{[g(\Phi_\varepsilon(x)) - \varepsilon K]^+}{g(x)} \tag{5.4.30}$$

e que $\Phi_\varepsilon \in C^2[0, \infty)$ é côncavo, crescente e $\Phi(0) = 0$. Então pelo lema 5.2.2,

$$-\int_{\Omega} \Phi_\varepsilon(w) \Delta \xi \geq \int_{\Omega} \Phi'_\varepsilon(w) g \xi \geq \int_{\Omega} [g(\Phi_\varepsilon(w)) - \varepsilon K]^+ \xi \geq \int_{\Omega} [g(\Phi_\varepsilon(w)) - \varepsilon K] \xi$$

para todo $\xi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\xi \geq 0$ em Ω e $\xi|_{\partial\Omega} = 0$.

Por outro lado, lembrando que $w_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(w)$, $w = 0$ e $\xi = 0$ em $\partial\Omega$ e usando as Fórmulas de Green

$$-\int_{\Omega} w_\varepsilon \Delta \xi = \int_{\Omega} \xi (-\Delta w_\varepsilon).$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} \xi (-\Delta w_\varepsilon) \geq \int_{\Omega} [g(w_\varepsilon) - \varepsilon K] \xi$$

para todo $\xi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\xi \geq 0$ em Ω e $\xi|_{\partial\Omega} = 0$, ou seja, vale (5.4.48).

Provemos agora (5.4.49), isto é, existe $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ tal que

$$u_0 \leq w_\varepsilon - \frac{c_0}{2} \delta$$

para $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, onde c_0 é como em (5.4.46).

Seja

$$\eta = \min\{w, (C_0 + c_0)\delta\} \quad \text{e} \quad \eta_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\eta),$$

onde δ é dado por (0.0.5), C_0 é como em (5.4.45) e c_0 é como em (5.4.46).

Nos pontos tais que $\eta = w$, por (5.4.46), $u_0 \leq \eta - c_0\delta$. Nos pontos tais que $\eta = (C_0 + c_0)\delta$, por (5.4.45), $u_0 \leq C_0\delta = \eta - c_0\delta$. Então, segue que

$$u_0 \leq \eta - c_0\delta. \tag{5.4.50}$$

Provemos agora que

$$\eta \leq \eta_\varepsilon + \frac{c_0}{2} \delta \tag{5.4.51}$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Note que de (5.4.50) e de (5.4.51) segue que $u_0 \leq \eta - c_0\delta \leq \eta_\varepsilon + \frac{c_0}{2}\delta - c_0\delta = \eta_\varepsilon - \frac{c_0}{2}\delta$. Como $\eta \leq w$ e Φ_ε é não decrescente, $\eta_\varepsilon \leq w_\varepsilon$. De onde, $u_0 \leq \eta_\varepsilon - \frac{c_0}{2}\delta \leq w_\varepsilon - \frac{c_0}{2}\delta$. Ou seja, (5.4.49) segue de (5.4.50) e (5.4.51).

Então falta provar apenas (5.4.51).

Primeiramente, notemos que pelo lema 5.4.1,

$$\eta_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\eta) \leq M,$$

onde $M = (C_0 + c_0)\|\delta\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}$.

Também pelo lema 5.4.1, temos que $\Phi'_\varepsilon(x) \rightarrow 1$ uniformemente em $[0, M]$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. De fato, $\Phi'_\varepsilon(x)$ é uniformemente limitada para todo $x \geq 0$ e para todo $\varepsilon \geq 0$ e $\Phi''_\varepsilon(x) \leq 0$, pois Φ_ε é côncava, logo $\Phi'_\varepsilon(x)$ é uma família equicontínua de funções. Portanto, o Teorema de Arzelá-Áscoli garante a convergência uniforme de $\Phi'_\varepsilon(x) \rightarrow 1$ quando $\varepsilon \searrow 0$ para $x \in [0, M]$.

Agora,

$$\eta_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\eta) = \Phi_\varepsilon(\eta) - \Phi_\varepsilon(0) = (\eta - 0)\Phi'_\varepsilon(\xi) = \eta\Phi'_\varepsilon(\xi)$$

para algum $0 \leq \xi \leq \eta$. Logo, $\eta_\varepsilon \leq \eta \sup_{0 \leq x \leq M} \Phi'_\varepsilon(x)$, pois $0 \leq \xi \leq \eta \leq M$. Portanto,

$$\eta_\varepsilon \leq \eta \sup_{0 \leq x \leq M} \{\Phi'_\varepsilon(x)\}.$$

Então,

$$\eta - \eta_\varepsilon \leq \eta \sup_{0 \leq x \leq M} \{1 - \Phi'_\varepsilon(x)\} \leq (C_0 + c_0)\delta \sup_{0 \leq x \leq M} \{1 - \Phi'_\varepsilon(x)\} \leq \frac{c_0}{2}\delta$$

para ε suficientemente pequeno. E portanto vale (5.4.51).

Passo 5: Conclusão.

Assuma por contradição que $T_m < \infty$.

Seja $\varepsilon > 0$ tão pequeno que

$$u_0 \leq w_\varepsilon - \frac{c_0}{2}\delta$$

como no Passo 4 e tal que a solução Z da equação

$$\begin{cases} Z_t - \Delta Z = -\varepsilon K & \text{em } \Omega \times (0, T_m) \\ Z = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ Z(0) = \frac{c_0}{2}\delta & \text{em } \Omega \end{cases}$$

seja não negativa em $\bar{\Omega} \times [0, T_m]$, como no lema 5.4.2, sendo K como no lema 5.4.1. Observemos que o lema 5.4.2 vale se substituirmos δ por $c\delta$, para qualquer constante $c > 0$, basta repetir a mesma demonstração.

Seja v solução de

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = g(|v|) - \varepsilon K & \text{em } \Omega \times (0, T_m) \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ v(0) = w_\varepsilon & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Seja $[0, S_m)$ o intervalo maximal de existência de v . Seja $z(t) = Z(t) + u(t)$ para $0 \leq t < T_m$. Temos que $z \geq u \geq 0$ e que z satisfaz

$$\begin{cases} z_t - \Delta z = g(u) - \varepsilon K \leq g(z) - \varepsilon K & \text{em } \Omega \times (0, T_m) \\ z = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ z(0) = u_0 + \frac{c_0}{2}\delta \leq w_\varepsilon \end{cases}$$

pelo Passo 4.

Pelo corolário 3.2.3, procedendo como na demonstração do corolário 3.2.4, temos que $z \leq v$ em $[0, \min\{T_m, S_m\}]$. Em particular, temos que $v \geq 0$ em $[0, \min\{T_m, S_m\}]$, pois $0 \leq u \leq z \leq v$ neste intervalo. Além disso, $v \leq w_\varepsilon$, pelo corolário 3.2.1.

Então temos que $0 \leq v \leq w_\varepsilon$ em $[0, \min\{T_m, S_m\}]$ e como $w_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ concluímos que $S_m = T_m = \infty$, o que é uma contradição.

■

Bibliografia

- [1] Brezis, Haim; Cazenave, Thierry; Martel, Yvan and Ramiandrisoa, Arthur. Blow up for $u_t - \Delta u = g(u)$ revisited, *Advances in Differential Equations*, volume 1, number 1, January 1996, pp.73-90.
- [2] Brezis, H. and Nirenberg, L., *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, Part 1, to appear.
- [3] Crandall, M.G. and Rabinowitz, P.H., Some continuation and variation methods for positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 58 (1975), 207-218.
- [4] Evans, Lawrence C. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, vol.19, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, U.S.A., 1998.
- [5] Friedman, A., *Partial Differential Equations*. Holt, Rinehart and Winston, Inc, 1969.
- [6] Gel'fand, I.M., Some problems in the theory of quasilinear equations, *Amer. Math. Soc. Transl.*, 29 (1963), 295-381.
- [7] Joseph, D.D. and Lundgren, T.S., Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 49 (1973), 241-269.
- [8] Keller, H.B. and Cohen, D.S., Some positive problems suggested by nonlinear heat generation, *J. Math. Mech.*, 16 (1967), 1361-1376.
- [9] Keller, H.B. and Keener, J., Positive solutions of convex nonlinear eigenvalue problems, *J. Differ. Eq.*, 16 (1974), 103-125.

- [10] Lima, Elon Lages. Curso de Análise, volume 1. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2000.(Projeto Euclides).
- [11] Lima, Elon Lages. Curso de Análise, volume 2. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2000.(Projeto Euclides).
- [12] Mignot, F. and Puel, J.-P., Sur une classe de problèmes non linéaires avec non linéarité positive, croissante, convexe, Comm. PDE., 5 (1980), 791-836.
- [13] Pazy, A., Semi-groups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer, Berlin, 1983.
- [14] Protter, Murray H. and Weinberger. Maximum principles in Differential Equations. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., U.S.A., 1967.