

Dissertação de Mestrado
Problemas Variacionais Geométricos

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Universidade Estadual de Campinas

Aluno: Gil Ramos Cavalcanti

Orientador: Renato Hyuda de Luna Pedrosa

Projeto financiado pela FAPESP (98/13163-3)

Problemas Variacionais Geométricos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Gil Ramos Cavalcanti, e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 1º de setembro de 2000



Prof. Dr. Renato H. L. Pedrosa
Orientador

Banca Examinadora
Prof. Dr. Renato Hyuda de Luna Pedrosa
Prof. Dr. Paolo Piccione
Profa. Dra. Helena Judith Nussenzeig Lopes

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

1881100

UNIDADE	80
N.º CHAMADA:	
V.	Ex.
TOMBO BC/	430.18
PROC.	16-278/00
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	07/11/00
N.º CPD	

CM-00149559-1

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Cavalcanti, Gil Ramos

C314p Problemas variacionais geométricos / Gil Ramos Cavalcanti --
Campinas, [S.P. :s.n.], 2000.

Orientador : Renato Hyuda de Luna Pedrosa

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Geometria diferencial. 2. Desigualdades isoperimétricas. I.
Pedrosa, Renato Hyuda de Luna. II. Universidade Estadual de
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 01 de setembro de 2000 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). RENATO HYUDA DE LUNA PEDROSA



Prof (a). Dr (a). HELENA JUDITH NUSSENZVEIG LOPES



Prof (a). Dr (a). PAOLO PICCIONE

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Resumo

Nesta dissertação tratamos dois problemas variacionais geométricos: O Problema Isoperimétrico e a Desigualdade de Faber-Krahn. A partir da noção de funções de variação limitada e conjuntos de perímetro finito (*a la de Giorgi*), apresentamos a resolução do primeiro problema no espaço euclidiano. Também são feitas as contas referentes às fórmulas de variação, que caracterizam, em uma variedade riemanniana, quais são os possíveis candidatos a solução do problema e, por fim, demonstramos o Teorema de Gromov-Levy, que consiste na determinação de um perfil isoperimétrico para uma variedade com curvaturas de Ricci limitadas inferiormente por um número positivo. No caso da esfera, este teorema fornece a solução do problema isoperimétrico. A desigualdade de Faber-Krahn é resolvida em variedades rotacionalmente simétricas com hipóteses sobre as soluções do problema isoperimétrico. Entre as variedades que satisfazem as hipóteses necessárias para a resolução estão todas as formas espaciais simplesmente conexas, parabolóides e certos ovalóides dois dimensionais. Conseguimos ainda teoremas comparando a desigualdade de Faber-Krahn em variedades com alguma espécie de limitação na curvatura com a desigualdade de Faber-Krahn nas formas simplesmente conexas.

Abstract

In this dissertation we treat two variational geometric problems: The Isoperimetric Problem and the Faber-Krahn Inequality. By means of the notions of functions of bounded variation and sets of finite perimeter (*a la de Giorgi*), we present the resolution of the first problem in the Euclidean space. We also make the computations for the variation formulae, which describe, in a Riemannian manifold, which domains are the possible candidates for solution of the problem and, in the end, we prove the Gromov-Levy Theorem which gives an isoperimetric profile for a manifold whose Ricci curvatures are bounded from below by a positive constant. In the case of the sphere this theorem gives us the solution of the isoperimetric problem. The Faber-Krahn inequality is extended to rotationally symmetric manifolds with extra hypothesis concerning the solutions of the isoperimetric problem. Among the manifolds satisfying the necessary hypothesis for the resolution are all simply-connected space forms and two dimensional paraboloids and some ovaloids. We also have results comparing the Faber-Krahn inequality for manifolds with some kind of limitation on the curvature with the Faber-Krahn inequality for simply-connected space forms.

Conteúdo

Introdução	1
Capítulo 1. Problema Isoperimétrico	5
1. Funções de Variação Limitada e Conjuntos de Perímetro Finito	6
2. O Problema Isoperimétrico em \mathbb{R}^n	17
3. O Problema Isoperimétrico em Variedades	21
Capítulo 2. A Desigualdade de Faber-Krahn	41
1. Operadores Elípticos de Segunda Ordem	42
2. Desigualdade de Faber-Krahn em Variedades Rotacionalmente Simétricas	48
3. Teoremas de Comparação	53
4. Desigualdade de Faber-Krahn: Existência	58
Capítulo 3. Comentários Finais	63
Bibliografia	65

Introdução

O título Problemas Variacionais Geométricos se refere a uma série de problemas geométricos usualmente referentes à minimização/maximização ou simples determinação de características geométricas do ambiente, como perímetro, volume ou autovalores de operadores, por vezes sujeitos a restrições. Talvez o exemplo de tal tipo de problema mais em voga nos últimos anos seja o das superfícies mínimas (e seus desdobramentos): dentre todas as superfícies com um bordo fixado, achar aquela(s) com menor área. E certamente o problema variacional mais antigo é o problema isoperimétrico no plano

Dentre todas as curvas planas fechadas com um comprimento fixado, achar aquelas que englobam a maior área possível.

A curva que soluciona este problema é a circunferência e este fato já era conhecido dos gregos, aparecendo nos escritos de Zenódoro e posteriormente de Pappus. Com o passar do tempo o problema caiu no esquecimento e no século XVIII ressurgiu em mais uma das brigas dos irmãos Bernoulli. Depois disto foram apresentadas várias demonstrações desta propriedade de minimalidade do círculo, mas na época de Weierstrass, quando se começou a fixar entre os matemáticos o conceito de "prova rigorosa", foi levantada a questão da existência de solução, anteriormente considerada "óbvia". De fato, a maioria das provas até então existentes incorria no erro de se supor que houvesse uma curva que maximizasse a área englobada e em seguida vinha um argumento para demonstrar que tal curva era a circunferência.

Um exemplo de prova simples incorrendo neste erro é o seguinte. Seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma curva fechada simples de comprimento l que engloba a maior área possível entre as curvas com o mesmo comprimento. Primeiramente vemos que a região Ω delimitada por α é convexa. Com efeito, dados quaisquer dois pontos de Ω , se o segmento ligando tais pontos não estivesse contido em Ω , haveria dois pontos x_1 e x_2 de $\partial\Omega$ tais que o segmento ligando os dois estaria fora de Ω . Então, trocando α pela curva que entre x_1 e x_2 é o segmento ligando estes pontos e no restante é igual a α , obteríamos uma nova curva englobando uma região com maior área que Ω e com menor comprimento, uma vez que o segmento realiza a menor distância entre dois pontos. Em seguida, observamos que se t_0 é o ponto tal que o comprimento de α entre 0 e t_0 é $\frac{l}{2}$, então a reta r passando por $\alpha(0)$ e $\alpha(t_0)$ divide Ω ao meio, pois, caso contrário, refletindo alguma das partes de Ω em relação a r obteríamos uma curva de comprimento l que englobaria área maior que a englobada por α . Finalmente, provaremos que cada uma das duas partes em que α ficou dividida acima é um semicírculo. De fato, fixado t entre 0 e t_0 , podemos dividir a metade de Ω que contém $\alpha(t)$ em três partes: o triângulo com vértices $\alpha(0)$, $\alpha(t)$ e $\alpha(t_0)$ e duas abas.

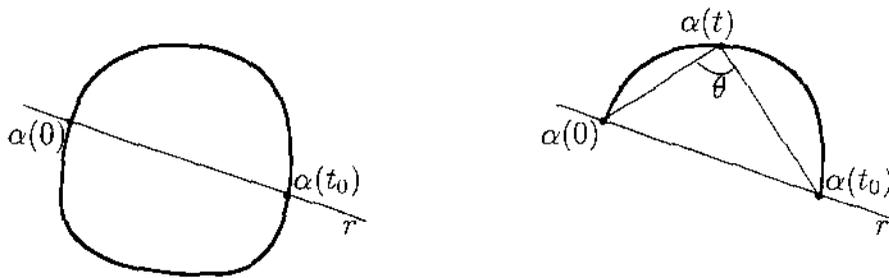


Figura 1

A área do triângulo é dada por $\frac{1}{2}\|\alpha(0) - \alpha(t)\|\|\alpha(t_0) - \alpha(t)\| \sin \theta$, logo, se θ não fosse $\pi/2$, poderíamos trocar este triângulo por um reto com mesmos lados, de modo a aumentar esta "metade" de Ω . Refletindo a nova região em r obteríamos um novo domínio com perímetro l e área maior que a de Ω , o que contradiz a escolha de α . Logo todo ponto $\alpha(t)$ enxerga o segmento ligando $\alpha(0)$ a $\alpha(t_0)$ segundo um ângulo reto e α parametriza uma circunferência.

Um argumento semelhante (e muito mais simples) nos levaria à conclusão de que 1 é o maior número natural, pois tomando n o maior número natural, se fosse $n \neq 1$, então n^2 seria maior n e portanto n não seria o maior. Assim, concluímos que 1 é o maior natural.

A questão da existência de um domínio isoperimétrico passa então a ser também objeto de atenção e, no caso do plano, pode ser determinada a partir de uma desigualdade isoperimétrica do tipo

$$l^2 \geq 4\pi A,$$

onde l denota o comprimento do bordo e A a área do domínio, uma vez que para a circunferência tal desigualdade se torna igualdade, garantindo a minimalidade do círculo (e portanto, também, a existência de minimizantes).

Uma vez resolvido o problema isoperimétrico em \mathbb{R}^2 , surgem inúmeras variações. A mais óbvia talvez seja simplesmente perguntar se em dimensões maiores a bola também tem esta propriedade minimizante. Em seguida, passaríamos ao estudo em variedades, mas aqui já começamos com o problema de que o Teorema de Jordan não é verdade em geral, isto é, existem curvas fechadas que não delimitam área alguma e, no caso compacto, delimitam mais que uma e o problema isoperimétrico fica sem sentido. Mesmo supondo que tudo ainda funcione bem, ainda enfrentaríamos o drama da questão da existência pois é fácil encontrar exemplos de superfícies em que não existem domínios isoperimétricos. Por isto, no caso de variedades, investigamos que características um minimizante deve possuir e principalmente procuramos desigualdades isoperimétricas. Se possível, tentamos identificar quais são os domínios que tornam tais desigualdades uma igualdade. Aqui vale mencionar que, embora haja algumas desigualdades isoperimétricas para variedades, apenas em poucos casos o problema foi resolvido.

Um outro problema variacional geométrico é o problema do tambor: dentre todos os formatos possíveis para uma tambor com área fixada, determinar aquele cuja frequência fundamental é a mais grave, ou, em linguagem matemática

Determinar o domínio com uma dada área que minimiza o primeiro autovalor do laplaciano com condições de Dirichlet.

De fato, este é apenas um de uma série de problemas relacionados com o espectro do laplaciano. Outros do tipo são o de minimizar o primeiro autovalor positivo do laplaciano com condições

de Neumann e determinar se o espectro do laplaciano determina univocamente o domínio. Além disto, cada um destes problemas se transfere imediatamente para variedades.

Para o problema do tambor, novamente o disco com a área dada é o domínio que minimiza o primeiro autovalor do laplaciano, conforme demonstrado independentemente por Faber [15] e Krahn [26] (e por isto nos referimos a este problema não como "problema do tambor" e sim como Desigualdade de Faber-Krahn). Embora de enunciado completamente alheio ao problema isoperimétrico, a coincidência das respostas é mais que mero capricho da natureza, de fato, estes problemas guardam certas relações e um estudo detalhado do Problema Isoperimétrico resulta em uma série de resultados sobre a Desigualdade de Faber-Krahn.

Neste trabalho, estudamos estes dois problemas variacionais. No primeiro capítulo estudamos o Problema Isoperimétrico e, no segundo, a Desigualdade de Faber-Krahn, explicitando a relação existente entre estes problemas.

Problema Isoperimétrico

O Problema Isoperimétrico pode ser enunciado no espaço euclidiano de muitas formas equivalentes, mas a que melhor se estende a variedades riemannianas é a seguinte:

Dentre todos os domínios do espaço euclidiano com um dado volume, identificar aqueles cuja área da fronteira (perímetro) é mínima.

Embora apresentado deste modo o problema seja uma questão de fácil entendimento, após uma breve reflexão vemos que há muitas lacunas importantes a serem preenchidas antes de se conseguir uma demonstração de qualquer resultado. Por exemplo, qual é a definição de perímetro que devemos utilizar? Que conjuntos estão sendo considerados quando perguntamos qual é o ínfimo? Felizmente o conjunto que resolve é suficientemente suave para que seja de fato solução, quaisquer que sejam as definições e conjuntos (razoáveis) utilizados, mas a teoria utilizada na resolução pode variar bastante. Por exemplo, com a restrição de que os conjuntos tenham bordo suave é possível apresentar uma resolução muito conhecida e bastante simples do problema em dimensão 2 baseada na expansão de uma função periódica nas autofunções do laplaciano $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ (veja, por exemplo, [38]). Considerando apenas domínios cujo bordo é suave por partes podemos dar uma solução do problema a partir da Desigualdade de Brunn-Minkowski conforme em [7].

Na primeira seção, a seguir, damos a definição que utilizaremos de perímetro (perímetro *a la de Giorgi*), definimos a classe de conjuntos onde estamos resolvendo o problema (conjuntos de perímetro finito) e provamos as principais propriedades de tais conjuntos. Na segunda seção, resolvemos o problema em \mathbb{R}^n usando a técnica de simetrização de Steiner.

Quanto ao estudo do problema em variedades, nos detivemos ao caso suave, não fornecendo provas de existência, mas sempre supondo que se tenha um domínio suave que solucione o problema e investigando que propriedades este deve possuir. Este tópico é abordado ao longo da terceira seção em duas partes. Na primeira parte fazemos as contas das fórmulas de variação e na segunda tratamos uma série de teoremas de comparação de volumes a partir de limitações da curvatura, como os Teoremas de Bishop e Topogonov e a Desigualdade de Heintze-Karcher. A seção é finalizada com o Teorema de Gromov-Levy, que consiste na apresentação de um perfil isoperimétrico para variedades cujas curvaturas de Ricci sejam limitadas inferiormente por uma constante positiva. Ao final ainda fazemos alguns comentários sobre o caso oposto que seria o de uma variedade cujas curvaturas fossem limitadas superiormente por uma constante.

É conveniente chamar atenção para alguma notação utilizada sem qualquer explicação. Em geral $|\Omega|$ indica a medida de Lebesgue do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, embora em alguns casos por abuso, usemos a mesma simbologia para denotar a medida 1-dimensional de um conjunto contido em uma reta de \mathbb{R}^n . De acordo com a situação, fica claro do que estamos falando. Também usamos $[p(f(x))]$ para designar o conjunto dos x tal que $f(x)$ satisfaz a condição p . Seguimos a notação usual para designar os espaços de Sobolev, sendo $W^{k,p}$ o espaço das funções p -integráveis com

derivadas fracas até ordem k também p -integráveis. Para propriedades de espaços de Sobolev veja [13, 14, 41]. Ademais, usamos o nome variedade riemanniana sempre designando variedade riemanniana completa. Esperamos que o resto da notação tenha sido devidamente explicado durante o texto.

1. Funções de Variação Limitada e Conjuntos de Perímetro Finito

Um conceito em análise que está intimamente ligado ao de perímetro e ao problema isoperimétrico é o de função de variação limitada. De fato, como veremos a seguir, o perímetro de um conjunto não é nada além da variação de sua função característica. Por isto, começamos definindo o que significa uma função ser de variação limitada e determinamos as propriedades básicas de tais funções.

DEFINIÇÃO . Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^1(\Omega)$, dizemos que f é de *variação limitada* (em Ω) se

$$\sup \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div} \varphi \mid |\varphi| \leq 1, \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) \right\} < \infty$$

Neste caso, denotamos este supremo por $\int_{\Omega} |Df|$ e ele é chamado *variação total de f* (em Ω), ou simplesmente, *variação de f* . O conjunto de todas as funções de variação limitada sobre Ω será denotado por $BV(\Omega)$, ou simplesmente BV , quando não houver perigo de confusão.

EXEMPLO 1. Se $f \in W^{1,1}(\Omega)$, então, pela definição de derivada fraca, temos

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \varphi = - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \varphi \rangle.$$

E portanto, tomando o supremo sobre todas as funções $\varphi \in C_0^\infty$ de norma menor que 1, obtemos que $\int_{\Omega} |Df| = \int_{\Omega} |\nabla f|$, de onde concluímos que $W^{1,1} \subset BV$.

De fato, como toda f de $L^1(\Omega)$ tem uma derivada no sentido das distribuições, a condição de variação limitada é exatamente a que garante a limitação do funcional $\varphi \mapsto \int_{\Omega} f \operatorname{div} \varphi$, o que nos coloca nas condições do Teorema de Representação de Riesz (veja [14]), que, no nosso caso, afirma a existência de uma medida de Radon finita μ e de uma função μ -mensurável $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que:

$$|\sigma| = 1, \quad \mu\text{-quase todo ponto e}$$

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \varphi = \int_{\Omega} \langle \varphi, \sigma \rangle d\mu.$$

Observemos que a variação total da medida vetorial $\sigma d\mu$, dada por $\int_{\Omega} d\mu$, pode ser calculada

$$\int_{\Omega} d\mu = \sup_{\varphi \in C_0^\infty, |\varphi| \leq 1} \int_{\Omega} \langle \varphi, \sigma \rangle d\mu = \sup_{\varphi \in C_0^\infty, |\varphi| \leq 1} \int_{\Omega} f \operatorname{div} \varphi = \int_{\Omega} |Df|.$$

Além disto, no caso de $f \in W^{1,1}(\Omega)$, o Teorema de Representação de Riesz nos levaria à seguinte identidade

$$- \int_{\Omega} \langle \varphi, \nabla f \rangle = \int_{\Omega} f \operatorname{div} \varphi = \int_{\Omega} \langle \varphi, \sigma \rangle d\mu$$

Baseados nesta observação de agora em diante, denotaremos a medida vetorial $-\sigma d\mu$ por Df e o Teorema de Riesz de certa forma nos afirma que as funções de variação limitada são aquelas para as quais vale o Teorema de Gauss

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \varphi = - \int_{\Omega} \varphi \cdot Df.$$

e esta fórmula ainda nos permite definir a variação de f sobre qualquer boreliano B , ao invés de apenas sobre abertos. Basta fazer $\int_B |Df|$. É claro que esta fórmula é o que justifica a notação $\int_{\Omega} |Df|$ para a variação total de f em Ω .

EXEMPLO 2. Seja Ω limitado, de medida finita e fronteira C^2 e consideremos a função χ_{Ω} . A condição sobre a medida de Ω garante que $\chi_{\Omega} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Calculando a sua variação obtemos, pelo Teorema de Gauss

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\Omega} \operatorname{div} \varphi = \int_{\Omega} \operatorname{div} \varphi = \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot ndS \leq \int_{\partial\Omega} dS = \text{Área de } \partial\Omega,$$

onde n representa o vetor normal unitário externo a Ω .

Por outro lado, como $\partial\Omega$ é de classe C^2 , podemos estender n a uma função φ de classe C^1 definida em todo \mathbb{R}^n e com suporte compacto (digamos, contido em uma vizinhança tubular de $\partial\Omega$), para a qual a inequação acima se torna uma igualdade. Pela densidade das funções C_0^{∞} entre as C_0^1 , concluímos que $\int |D\chi_{\Omega}| = \text{Área de } \partial\Omega$. E como vimos que, de certa forma, as funções de variação limitada são justamente aquelas para as quais vale o Teorema de Gauss, as contas acima nos motivam uma definição.

DEFINIÇÃO . Um conjunto Ω será dito de *perímetro finito* se a sua função característica for de variação limitada, caso em que o perímetro será dado pela variação de χ_{Ω} e também escreveremos $p(\Omega)$ para designá-lo.

OBSERVAÇÃO . No primeiro exemplo, mostramos que $W^{1,1} \subset BV$. Com o segundo exemplo, concluímos que esta inclusão é estrita, uma vez que χ_{Ω} não pertence a $W^{1,1}$, a menos que Ω seja de medida nula. A proposição abaixo nos fornece uma resposta sobre quando uma função de BV realmente está em $W^{1,1}$

PROPOSIÇÃO 1.1. *Suponha que f seja uma função de variação limitada e que a medida Df seja absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue. Então f está de fato em $W^{1,1}$ e reciprocamente.*

Demonstração: Note que a recíproca é imediata, uma vez que, como vimos, se f pertence a $W^{1,1}$, então $Df = \nabla f$ e se A for um conjunto de medida nula,

$$\int_A |Df| = \int_A \|\nabla f\| dx = 0.$$

Por outro lado, sendo Df absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue de \mathbb{R}^n , existe uma derivada de Radon-Nikodin $\frac{Df}{dx}$, ou seja para toda φ Df -integrável, vale

$$\int \langle \varphi, Df \rangle = \int \langle \varphi, \frac{Df}{dx} \rangle dx.$$

E portanto, se φ for uma função diferenciável temos

$$\int f \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int \langle \varphi, Df \rangle = - \int \langle \varphi, \frac{Df}{dx} \rangle \, dx$$

e $\frac{Df}{dx}$ é a derivada fraca de f . □

TEOREMA 1.1. (Semicontinuidade Inferior) *Seja (f_n) uma seqüência de funções de $BV(\Omega)$ com variação total limitada por uma constante, convergindo em L^1 a uma função f . Então $f \in BV(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |Df| \leq \liminf \int_{\Omega} |Df_n|$$

Demonstração: Seja φ uma função $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ com $|\varphi| \leq 1$. Então, pela convergência de f_n a f em $L^1(\Omega)$ e pela limitação de $\operatorname{div} \varphi$, temos:

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \varphi = \lim \int_{\Omega} f_n \operatorname{div} \varphi \leq \liminf \int_{\Omega} |Df_n|.$$

Como exigimos que $\int_{\Omega} |Df_n| < M$, para algum M suficientemente grande, temos que o \liminf acima é finito, logo f é de variação limitada e tomando o supremo na desigualdade acima sobre todas as φ , obtemos a desigualdade enunciada. □

OBSERVAÇÃO . A limitação da variação das f_n só foi usada para garantir a finitude de $\liminf \int_{\Omega} |Df_n|$ e assim podermos concluir que f de fato era de variação limitada. Caso já saibamos disto por outros meios, não se faz necessário que $\int_{\Omega} |Df_n|$ seja limitada, uma vez que a desigualdade não depende disto.

Se considerarmos em $BV(\Omega)$ a norma

$$\|f\|_{BV(\Omega)} = \|f\|_{L^1(\Omega)} + \int_{\Omega} |Df|,$$

o teorema acima é justamente a ferramenta necessária para provar que este é um espaço de Banach. Com efeito, se (f_n) for uma seqüência de Cauchy na norma BV , então $\int_{\Omega} |Df_n|$ é limitado e (f_n) é Cauchy em L^1 , logo existe $f \in L^1$ limite (em L^1) das f_n . Pelo Teorema 1, $f \in BV$. Resta então provar que

$$\int_{\Omega} |D(f_n - f)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Como (f_n) é Cauchy na norma BV , existe n_0 tal que se $n, m > n_0$ vale

$$\int_{\Omega} |D(f_n - f_m)| < \varepsilon \Rightarrow \int_{\Omega} (f_n - f_m) \operatorname{div} \varphi < \varepsilon, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1.$$

Tomando o limite quando m tende a infinito, pela convergência L^1 das f_n , temos que, se $n > n_0$,

$$\int_{\Omega} (f_n - f) \operatorname{div} \varphi \leq \varepsilon, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1,$$

como queríamos. □

Como já demonstramos, $W^{1,1} \subset BV$, e pelo Exemplo 1, vemos que a norma $W^{1,1}$ corresponde justamente à restrição da norma BV a este espaço. Em outras palavras, $W^{1,1}$ é subespaço próprio fechado de BV . Como já sabemos que o fecho de $C^\infty(\Omega)$ na norma $W^{1,1}$ (e portanto também na

norma BV) é $W^{1,1}$, não há muita esperança de se conseguir aproximar uma função genérica de BV por uma função C^∞ na norma BV , então vamos ver o melhor que conseguirmos obter. Para isto, vamos, como de costume, precisar dos regularizadores

DEFINIÇÃO . Um *regularizador* é uma função $\eta(x)$ satisfazendo

1. $\eta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.
2. $\eta(x) = 0$ se $|x| \geq 1$.
3. $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) = 1$ e
4. $\eta(x) \geq 0, \forall x$.

Se ainda valer

5. $\eta(x) = \eta(y)$, sempre que $|x| = |y|$,

dizemos que η é um *regularizador simétrico*.

Ainda, dado um regularizador η e uma função $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, definimos

$$\eta_\varepsilon = \varepsilon^{-n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{e} \quad f_\varepsilon = \eta_\varepsilon * f$$

Com esta notação, valem os seguintes fatos da vida:

1. $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f_\varepsilon \xrightarrow{L^1_{loc}} f$ e se $f \in L^1$, então $f_\varepsilon \xrightarrow{L^1} f$.
2. $a \leq f(x) \leq b, \forall x \Rightarrow a \leq f_\varepsilon(x) \leq b, \forall x$.
3. Se $f, g \in L^1$, então $\int f_\varepsilon g = \int f g_\varepsilon$.
4. Se $f \in C^1$, então $\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_\varepsilon$, o mesmo valendo *qtp* se $f \in W^{1,1}$ e
5. Se $\text{spt} f \subset A$, então $\text{spt} f_\varepsilon \subset A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) < \varepsilon\}$

cujas demonstrações serão omitidas (veja [13, 14]). Um fato sobre regularizadores de demonstração fácil, mas que será bastante usado consiste em uma análogo do item 2 acima para funções vetoriais. Se $\varphi \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ satisfizer $|\varphi(x)| \leq 1$ para todo x , então $|\varphi_\varepsilon(x)| \leq 1$. Com efeito, sendo B_ε a bola de centro na origem e raio ε , temos:

$$\begin{aligned} |\varphi_\varepsilon(x)| &= \left| \int_{B_\varepsilon} \eta_\varepsilon(y) \varphi(y-x) dy \right| = \lim_{|P| \rightarrow 0} \left| \sum_{i=1}^n \eta_\varepsilon(y_i) \varphi(y_i-x) \Delta y_i \right| \\ &\leq \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\eta_\varepsilon(y_i) \varphi(y_i-x) \Delta y_i| = \int_{B_\varepsilon} |\eta_\varepsilon(y)| |\varphi(y-x)| dy \leq \int_{B_\varepsilon} \eta_\varepsilon(y) dy = 1, \end{aligned}$$

onde $|P|$ é o diâmetro no maior conjunto da partição P usada quando escrevemos as somas de Riemann para a integral e Δy_i é o volume de cada parte da partição.

Agora usaremos os regularizadores na teoria das funções de variação limitada.

PROPOSIÇÃO 1.2. *Sejam $f \in BV(\Omega)$ e $A \subset\subset \Omega$ um aberto tal que*

$$\int_{\partial A} |Df| = 0.$$

Então, se f_ε são as funções regularizadas descritas acima (e f estendida como zero fora de Ω , se necessário), temos

$$\int_A |Df_\varepsilon| \leq \int_{A_\varepsilon} |Df| \quad \text{e} \quad \int_A |Df| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_A |Df_\varepsilon|.$$

Demonstração: Pelo Teorema 1, mais a observação subsequente, temos que

$$\int_A |Df| \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_A |Df_\varepsilon|.$$

Para provar a desigualdade contrária, tomemos $\varphi \in C_0^\infty(A)$, $|\varphi| \leq 1$ e usando as propriedades dos regularizadores, temos

$$\int_A f_\varepsilon \operatorname{div} \varphi = \int_{A_\varepsilon} f(\operatorname{div} \varphi)_\varepsilon = \int_{A_\varepsilon} f \operatorname{div} \varphi_\varepsilon \leq \int_{A_\varepsilon} |Df|.$$

pois $|\varphi| \leq 1$ implica $|\varphi_\varepsilon| \leq 1$. Logo, tomando o supremo sobre todas as φ , vemos que $\int_A |Df_\varepsilon| \leq \int_{A_\varepsilon} |Df|$ e portanto, tomando o limite quando ε tende a zero, vem

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_A |Df_\varepsilon| \leq \int_{\overline{A}} |Df| = \int_A |Df|$$

□

Se $A = \mathbb{R}^n$, então a proposição acima garante que $\int_{\mathbb{R}^n} |Df| = \lim \int_{\mathbb{R}^n} |Df_\varepsilon|$. Em particular, se f for a função característica de um conjunto Ω , temos que $p(\Omega) = \lim \int_{\mathbb{R}^n} |D(\chi_\Omega)_\varepsilon|$, o que para os nossos propósitos já é suficiente, no entanto ainda podemos melhorar a proposição acima.

TEOREMA 1.2. *Se $f \in BV(\Omega)$, então existe uma seqüência (f_n) de funções $C^\infty(\Omega)$ tal que*

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |Df_n| = \int_\Omega |Df|$$

Demonstração: A idéia é exaurir Ω por abertos e em cada conjunto da exaustão usar o teorema anterior para conseguir uma aproximação para f . Em seguida, usamos partição da unidade para colar tudo. Fazendo tudo com cuidado, dá certo, o resto são contas.

Definamos

$$\Omega_a = \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > a\}, \quad a > 0.$$

Então para qualquer seqüência (a_k) de elementos distintos vale

$$\sum_{a_k} \int_{\partial\Omega_{a_k}} |Df| \leq \int_\Omega |Df| < \infty,$$

logo para quase todo a , $\int_{\partial\Omega_a} |Df| = 0$, em particular podemos tomar uma seqüência (a_k) convergente a zero tal que esta condição se verifique. Denotemos $\Omega_{a_k} = \Omega_k$.

Tomemos então $\varepsilon > 0$ e sem perda de generalidade suponhamos que a_0 seja pequeno suficiente para que $\int_{\Omega - \Omega_0} |Df| < \varepsilon$, o que é possível pela finitude de $\int_\Omega |Df|$

Definimos então $A_i \subset \Omega$ por $A_1 = \Omega_2$ e se $i > 1$, $A_i = \Omega_{i-1} - \overline{\Omega_{i-1}}$. Então cada A_i é aberto em Ω , logo podemos tomar (ψ_i) uma partição da unidade subordinada a (A_i) . Sendo η um regularizador, para cada índice i podemos encontrar $\varepsilon_i > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \operatorname{spt}(\eta_{\varepsilon_i} * (f\psi_i)) &\subset \Omega_{i-2} - \overline{\Omega_{i-2}}, \\ \int |\eta_{\varepsilon_i} * (f\psi_i) - f\psi_i| &< \varepsilon 2^{-i} \text{ e} \\ \int |\eta_{\varepsilon_i} * (f\nabla\psi_i) - f\nabla\psi_i| &< \varepsilon 2^{-i}. \end{aligned}$$

E então fazemos $f^\varepsilon = \sum \eta_{\varepsilon_i} * (f\psi_i)$. Pelas propriedades acima, f^ε é soma localmente finita de funções $C^\infty(\Omega)$, logo f^ε é diferenciável. Mais ainda, temos

$$\int_{\Omega} |f^\varepsilon - f| = \int_{\Omega} \left| \sum \eta_{\varepsilon_i} * (f\psi_i) - f\psi_i \right| \leq \sum \int_{\Omega} |\eta_{\varepsilon_i} * (f\psi_i) - f\psi_i| < \varepsilon,$$

e portanto $f^\varepsilon \xrightarrow{L^1(\Omega)} f$ e pelo Teorema 1.1 temos $\int_{\Omega} |Df| \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |Df^\varepsilon|$. Daí, resta apenas mostrar a desigualdade oposta.

Tomando $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, temos

$$\int_{\Omega} f^\varepsilon \operatorname{div} \varphi = \int_{\Omega} \sum \eta_{\varepsilon_i} * (f\psi_i) \operatorname{div} \varphi = \sum \int_{\Omega} f\psi_i \operatorname{div}(\eta_{\varepsilon_i} * \varphi).$$

Usando o fato de que $\nabla(\sum \psi_i) = 0$, podemos reescrever a equação acima

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f^\varepsilon \operatorname{div} \varphi &= \int_{\Omega} f \operatorname{div}(\psi_1 \eta_{\varepsilon_1} * \varphi) + \sum_{i=2}^{\infty} \int_{\Omega} f \operatorname{div}(\psi_i \eta_{\varepsilon_i} * \varphi) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega} \langle f \nabla(\psi_i), \eta_{\varepsilon_i} * \varphi - \varphi \rangle \end{aligned}$$

Assim, conseguimos majorar a primeira integral por $\int_{\Omega} |Df|$. Levando em conta que a interseção de mais de 3 A_i é vazia, majoramos a primeira soma por $3 \int_{\Omega - \Omega_0} |Df| < 3\varepsilon$. Finalmente, utilizando propriedades dos regularizadores, reescrevemos a última soma

$$- \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega} \langle \eta_{\varepsilon_i} * f \nabla(\psi_i) - f \nabla(\psi_i), \varphi \rangle \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega} |\eta_{\varepsilon_i} * f \nabla(\psi_i) - f \nabla(\psi_i)| < \varepsilon$$

Com isto, concluímos que

$$\int_{\Omega} f^\varepsilon \operatorname{div} \varphi < \int_{\Omega} |Df| + 4\varepsilon$$

e o resultado segue, tomando o supremo sobre as φ . \square

A importância do teorema acima está no fato de que, de certa forma, conseguimos aproximar funções de variação limitada por funções de $W^{1,1}$, que está compactamente imerso em L^1 (Teorema de Rellich-Kondrachov, veja [13, 14]). Isto nos permite obter um teorema de compacidade para conjuntos limitados em BV .

TEOREMA 1.3. (Compacidade) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, limitado com bordo Lipschitz, então os subconjuntos limitados de $BV^-(\Omega)$ são relativamente compactos em $L^1(\Omega)$.*

Demonstração: Seja (f_n) uma seqüência de funções de variação limitada tal que $\|f_n\|_{BV} < M$, para algum M . Pelo Teorema 1.2, existe uma seqüência (g_n) de funções $C^\infty(\Omega)$ tais que

$$\int_{\Omega} |f_n - g_n| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \left| \int_{\Omega} |Df_n| - \int_{\Omega} |Dg_n| \right| < 1$$

Em particular, sendo as g_n diferenciáveis e de norma BV finita (e limitada superiormente por $M + 2$), concluímos que elas estão em $W^{1,1}(\Omega)$ e portanto, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov,

existe subsequência (g_{n_j}) convergente em $L^1(\Omega)$. Seja f o limite. Então

$$\int_{\Omega} |f_{n_j} - f| \leq \int_{\Omega} |f_{n_j} - g_{n_j}| + \int_{\Omega} |g_{n_j} - f|$$

e portanto (f_{n_j}) converge a f em L^1 . \square

TEOREMA 1.4. (Existência de solução para o Problema Isoperimétrico) *Fixado um volume V e um raio R de modo que a bola de raio R , B_R , tenha volume maior que V , existe um subconjunto Ω de B_R tal que:*

- $|\Omega| = V$ e
- Se $\Omega' \subset B_R$, $|\Omega'| = V$, tem perímetro finito, então $p(\Omega') \geq p(\Omega)$.

Demonstração: Como o perímetro dos conjuntos é limitado inferiormente por zero, existe $p = \inf\{p(\Omega') \mid |\Omega'| = V, \Omega' \subset B_R\}$. Seja então (Ω_n) uma sequência minimizante, i. e., $|\Omega_n| = V$ e $\lim p(\Omega_n) = p$. Estas condições implicam que (χ_{Ω_n}) é uma sequência com norma BV limitada, logo, pelo teorema anterior, existe subsequência, que ainda denotaremos por (χ_{Ω_n}) , e $f \in L^1$ tais que (χ_{Ω_n}) converge em L^1 a f . Tomando nova subsequência podemos supor que (χ_{Ω_n}) converge pontualmente a f e portanto f é a função característica de um conjunto contido em B_R que chamaremos de Ω .

Como (χ_{Ω_n}) converge em L^1 a χ_{Ω} , temos que $|\Omega| = V$ e, pelo Teorema 1.1, temos

$$p(\Omega) = \int_{B_R} |D\chi_{\Omega}| \leq \lim \int_{B_R} |D\chi_{\Omega_n}| = p.$$

Portanto, pela minimalidade de p , temos $p(\Omega) = p$. \square

OBSERVAÇÃO . Se conseguíssemos provar que este Ω acima não depende do raio R escolhido, ele seria de fato solução do problema isoperimétrico em \mathbb{R}^n . Com efeito, se não fosse, haveria $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ com $V(\Omega') = V$ e $p' = p(\Omega') < p$. Por integração em coordenadas esféricas, vemos que a medida $n - 1$ dimensional de $\Omega' \cap B_R$ deve convergir a zero quando R tende a infinito, pois o volume de Ω' é finito. Portanto, dados ε e δ positivos, podemos escolher um R grande o suficiente para que $|\Omega' \cap B_R| > V - \varepsilon$ e $p(\Omega' \cap B_R) < p' + \delta$. Daí, dilatando $\Omega' \cap B_R$ de modo a obter um conjunto de volume V , obteríamos um conjunto limitado e cujo perímetro seria menor que

$$(p' + \delta) \left(\frac{V}{V - \varepsilon} \right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Agora notamos que o limite da expressão acima quando ε e δ tendem a zero é $p' < p$ e portanto para ε e δ suficientemente pequenos teríamos um conjunto limitado (e portanto contido em alguma bola) de volume V e perímetro menor que p e não seria possível escolher a solução do problema isoperimétrico de maneira independente de R .

Nosso próximo objetivo é provar que todo conjunto limitado de perímetro finito pode ser aproximado em medida e perímetro por conjuntos de bordo suave. Para isto, vamos precisar do seguinte resultado.

LEMA . (Fórmula de Co-área) Dada $f \in BV(\Omega)$, definimos

$$\Omega_t = \{x \in \Omega \mid f(x) > t\}.$$

Então

$$\int_{\Omega} |Df| = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} |D\chi_{\Omega_t}| dt$$

e reciprocamente, se $f \in L^1(\Omega)$ e a integral à direita acima for finita, então f é de variação limitada.

Demonstração: Começaremos provando que

$$\int |Df| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} |D\chi_{\Omega_t}| dt.$$

Para tanto, notamos que se $f(x) \geq 0$, então

$$f(x) = \int_0^{\infty} \chi_{\Omega_t}(x) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\Omega_t}(x) - \chi_{(-\infty, 0)}(t) dt$$

e se $f(x) < 0$,

$$f(x) = \int_{-\infty}^0 \chi_{\Omega_t}(x) - 1 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\Omega_t}(x) - \chi_{(-\infty, 0)}(t) dt,$$

logo, sempre podemos escrever $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\Omega_t}(x) - \chi_{(-\infty, 0)}(t) dt$.

Daí

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} (\chi_{\Omega_t}(x) - \chi_{(-\infty, 0)}(t)) \operatorname{div} \varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega_t} \operatorname{div} \varphi - \int_{-\infty}^0 \int_{\Omega} \operatorname{div} \varphi \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} |D\chi_{\Omega_t}|,$$

onde usamos, na última passagem, o fato de que $\operatorname{spt}(\varphi) \subset\subset \Omega$, para concluir que a segunda integral é nula. Portanto, tomando o supremo sobre as φ , temos

$$\int_{\Omega} |Df| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} |D\chi_{\Omega_t}| dt.$$

E então observamos que as contas acima já dão conta da segunda afirmação feita no teorema.

Passaremos à demonstração de que é suficiente provar a outra desigualdade apenas para funções de classe $C^{\infty}(\Omega)$ (de variação limitada). Com efeito, suponhamos o resultado válido para tais funções. Então, usando o Teorema 1.2, encontramos uma seqüência (f_n) de funções C^{∞} tal que $f_n \xrightarrow{L^1} f$ e $\int |Df_n| \rightarrow \int |Df|$. Como

$$|f_n(x) - f(x)| = \int_{\min\{f_n(x), f(x)\}}^{\max\{f_n(x), f(x)\}} 1 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\chi_{\Omega_{nt}}(x) - \chi_{\Omega_t}(x)| dt,$$

onde $\Omega_{nt} = \{x \in \Omega \mid f_n(x) > t\}$, vemos que

$$\int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)| = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} |\chi_{\Omega_{nt}}(x) - \chi_{\Omega_t}(x)| dt.$$

Portanto, pela convergência das f_n a f em L^1 , vemos que a integral à direita tende a zero e portanto $\int_{\Omega} |\chi_{\Omega_{nt}}(x) - \chi_{\Omega_t}(x)|$ tende a zero em $L^1(\mathbb{R})$, enquanto função de t . Conseqüentemente existe subsequência, ainda denotada pelos mesmos símbolos, que converge a zero $t - qtp$. Daí, para quase todo t , $\int_{\Omega} |\chi_{\Omega_{nt}}(x) - \chi_{\Omega_t}(x)|$ tende a zero, logo $\chi_{\Omega_{nt}} \xrightarrow{L^1} \chi_{\Omega_t}$, $t - qtp$.

Portanto, pelo Teorema 1.1, Lema de Fatou, mais a hipótese de validade no caso de funções C^∞ , vem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} |D\chi_{\Omega_t}| dt \leq \liminf \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} |D\chi_{\Omega_{r,t}}| dt = \liminf \int_{\Omega} |Df_r| = \int_{\Omega} |Df|.$$

Portanto resta provar a segunda desigualdade apenas no caso $f \in BV \cap C^\infty$. Seja então f uma tal função e definamos

$$m(t) = \int_{\Omega - \Omega_t} |Df|.$$

Então m é uma função não decrescente, logo é diferenciável *qtp*, sua derivada é integrável e ainda satisfaz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} m'(t) dt \leq m(\infty) - m(-\infty) = \int_{\Omega} |Df|.$$

Fixemos $r > 0$ e $t \in \mathbb{R}$ e consideremos a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < t \\ \frac{x-t}{r}, & \text{se } t \leq x \leq t+r \\ 1 & \text{se } x > t+r \end{cases} \Rightarrow h'(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < t \text{ ou } x > t+r \\ \frac{1}{r}, & \text{se } t \leq x \leq t+r \end{cases}$$

Então, para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ com $|\varphi| \leq 1$, temos:

$$-\int_{\Omega} h(f(x)) \operatorname{div} \varphi = \int_{\Omega} h'(f(x)) \langle \nabla f, \varphi \rangle = \frac{1}{r} \int_{\Omega_t - \Omega_{t+r}} \langle \nabla f, \varphi \rangle.$$

mas por outro lado, também vale

$$\frac{m(t+r) - m(t)}{r} = \frac{1}{r} \left(\int_{\Omega - \Omega_{t+r}} |Df| - \int_{\Omega - \Omega_t} |Df| \right) = \frac{1}{r} \int_{\Omega_t - \Omega_{t+r}} |Df| \geq \frac{1}{r} \int_{\Omega_t - \Omega_{t+r}} \langle \nabla f, \varphi \rangle.$$

Juntando as duas, temos

$$\frac{m(t+r) - m(t)}{r} \geq - \int_{\Omega} h(f(x)) \operatorname{div} \varphi$$

de onde, tomando o limite quando r tende a zero, obtemos

$$m'(t) \geq - \int_{\Omega_t} \operatorname{div} \varphi, \quad t - \text{qtp}.$$

Tomando o supremo sobre todas as φ e integrando, obtemos o resultado desejado. \square

OBSERVAÇÃO . A fórmula de co-área ainda pode ser ligeiramente melhorada. Com efeito, suponhamos $A \subset \Omega$ mensurável. Então, pela fórmula de co-área, temos

$$\int_{\Omega} \chi_A |Df| = \int_A |Df| = \int_{-\infty}^{\infty} \int_A |D\chi_{\Omega_t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} \chi_A |D\chi_{\Omega_t}| dt$$

Assim, para A_1, \dots, A_n conjuntos mensuráveis disjuntos e $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ reais, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} |Df| &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{\Omega} \chi_{A_i} |Df| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} \chi_{A_i} |D\chi_{\Omega_t}| dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i} |D\chi_{\Omega_t}| dt. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que a seguinte identidade é válida para toda função g simples (i. e., que assume apenas um número finito de valores)

$$\int_{\Omega} g |Df| = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} g |D\chi_{\Omega_t}| dt.$$

E portanto, também é válida para toda função $|Df|$ integrável.

TEOREMA 1.5. *Dado um conjunto Ω limitado de perímetro finito, existe uma seqüência (Ω_n) de conjuntos limitados de bordo suave tal que χ_{Ω_n} converge em L^1 a χ_{Ω} e $p(\Omega_n)$ converge a $p(\Omega)$.*

Demonstração: Pela Proposição 1.2, sabemos que os regularizadores $\eta_{\varepsilon} * \chi_{\Omega}$ convergem em L^1 a χ_{Ω} . Em particular, temos convergência também em medida, i. e., para δ fixado, $|\{|\eta_{\varepsilon} * \chi_{\Omega} - \chi_{\Omega}| > \delta\}|$ tende a zero quando ε tende a zero. Portanto para qualquer $t \in (0, 1)$ fixado, $\chi_{\Omega_{\varepsilon t}} \xrightarrow{L^1} \chi_{\Omega}$, onde $\Omega_{\varepsilon t}$ é definido de maneira análoga a Ω_t . Então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |D\chi_{\Omega}| &= \lim \int_{\mathbb{R}^n} |D(\eta_{\varepsilon} * \chi_{\Omega})| = \lim \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |D\chi_{\Omega_{\varepsilon t}}| dt \\ &\geq \int_0^1 \liminf \int_{\mathbb{R}^n} |D\chi_{\Omega_{\varepsilon t}}| dt \geq \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |D\chi_{\Omega}| dt = \int_{\mathbb{R}^n} |D\chi_{\Omega}|, \end{aligned}$$

onde usamos sucessivamente a Proposição 1.2, a Fórmula de Co-área, o Lema de Fatou e o Teorema 1.1.

Daí, vemos que $\int |D\chi_{\Omega}| = \liminf \int |D\chi_{\Omega_{\varepsilon t}}|$ para quase todo t e, pelo Teorema de Sard, $\Omega_{\varepsilon t}$ tem bordo suave para quase todo t . Logo, dada uma seqüência (ε_k) convergindo a zero, podemos escolher t convenientemente de modo a obter os conjuntos desejados. \square

Agora passaremos a uma caracterização alternativa das funções de variação limitada sobre a reta que fornece uma demonstração rápida do problema isoperimétrico no caso ingênuo 1-dimensional. Para isto, no entanto, precisaremos de algumas definições.

DEFINIÇÃO . O número y_0 é dito *limite aproximado* da função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ quando x tende a x_0 se

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|\{ |f(x) - y_0| > \varepsilon \} \cap B(x_0, r)|}{r^n} = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

No caso em que o valor de f no ponto x_0 coincide com o limite aproximado dizemos que x_0 é *ponto de continuidade aproximada* de f

Observemos que se $f \in L^1_{loc}$, então quase todo ponto é ponto de continuidade aproximada uma vez que

$$\frac{|\{ |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon \} \cap B(x_0, r)|}{r^n} \leq \frac{1}{r^n} \int_{B(x_0, r)} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{\varepsilon} = \frac{\omega_n}{\varepsilon \omega_n r^n} \int_{B(x_0, r)} |f(x) - f(x_0)|,$$

mas pelo Teorema de Lebesgue, o limite da expressão acima quando r tende a zero é zero quase sempre.

Outra observação facilmente constatada é que em todo ponto x_0 de continuidade aproximada vale que $\eta_{\varepsilon} * f(x_0)$ converge a $f(x_0)$.

DEFINIÇÃO . A *variação essencial* de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \right\},$$

onde $-\infty \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq \infty$ e cada t_i é ponto de continuidade aproximada de f . Denotamos este supremo por $\text{ess}V f$. Caso a função esteja definida apenas em um intervalo (a, b) temos uma definição análoga e denotamos a variação essencial de f por $\text{ess}V_a^b f$.

TEOREMA 1.6. *Suponha que $f \in L^1(a, b)$. Então f é de variação limitada se, e somente se, $\text{ess}V_a^b f < \infty$, caso em que vale*

$$\text{ess}V_a^b f = \int_a^b |Df|$$

Demonstração: Suponhamos inicialmente que $\text{ess}V_a^b f < \infty$. fixemos $\varepsilon > 0$ e consideremos a regularizada f_ε . Dada uma partição $a + \varepsilon \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b - \varepsilon$ formada apenas por pontos de continuidade aproximada, como $f \in L^1$, para quase todo s os $t_i - s$ também são de continuidade aproximada, logo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |f_\varepsilon(t_i) - f_\varepsilon(t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^n \left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta_\varepsilon(s) (f(t_i - s) - f(t_{i-1} - s)) ds \right| \\ &\leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta_\varepsilon(s) \sum_{i=1}^n |f(t_i - s) - f(t_{i-1} - s)| ds \leq \text{ess}V_a^b f. \end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre todas as partições obtemos

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} |f'_\varepsilon| dx \leq \text{ess}V_a^b f$$

e portanto, para toda $\varphi \in C_0^\infty$, $|\varphi| \leq 1$, temos

$$\int_a^b f'_\varepsilon \varphi' = - \int_a^b f'_\varepsilon \varphi \leq \int_a^b |f'_\varepsilon| \leq \text{ess}V_a^b f.$$

Fazendo ε tender a zero, obtemos $\int_a^b f \varphi' \leq \text{ess}V_a^b f$ e tomando o supremo sobre φ , ganhamos que f tem variação limitada e $\int_a^b |Df| \leq \text{ess}V_a^b f$.

Agora, tomemos $f \in BV(a, b)$ e escolhamos $a < c < d < b$. Então para cada φ e cada $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente, temos

$$\int_c^d f'_\varepsilon \varphi = - \int_c^d f_\varepsilon \varphi' = - \int_a^b f \varphi'_\varepsilon \leq \int_a^b |Df|.$$

E portanto

$$\sum_{i=1}^n |f_\varepsilon(t_i) - f_\varepsilon(t_{i-1})| \leq \int_c^d |f'_\varepsilon| = \sup_{\varphi} \int_c^d f'_\varepsilon \varphi \leq \int_a^b |Df|$$

Como $f_\varepsilon(t)$ converge a $f(t)$ sempre que t for ponto de continuidade aproximada, obtemos

$$\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq \int_a^b |Df|$$

sempre que os t_i forem pontos de continuidade aproximada e portanto $\text{ess}V_a^b f \leq \int_a^b |Df|$, o que dá conta da segunda parte da prova. \square

COROLÁRIO . (*Problema isoperimétrico na reta*) O perímetro de qualquer subconjunto Ω da reta de perímetro finito e medida positiva e finita é sempre maior do que ou igual a 2 e só é igual caso Ω seja equivalente a um intervalo.

Demonstração. Como $0 < |\Omega| < \infty$, concluímos que $\chi_\Omega \in L^1$ e daí que quase todo ponto é ponto de continuidade aproximada de χ_Ω . Em particular, como $|\Omega| > 0$, existe $x_1 \in \Omega$ ponto de continuidade aproximada de χ_Ω . Do mesmo modo, como $\mathbb{R} - (\Omega \cup [-|x_1|, |x_1|])$ tem medida infinita, podemos encontrar pontos $x_0 < x_1$ e $x_2 > x_1$ de continuidade aproximada de χ_Ω que não pertençam a Ω . Daí, pelo teorema acima

$$p(\Omega) = \int |D\chi_\Omega| = \text{ess}V\chi_\Omega \geq |\chi_\Omega(x_1) - \chi_\Omega(x_0)| + |\chi_\Omega(x_2) - \chi_\Omega(x_1)| = 2$$

Suponhamos agora que $p(\Omega) = 2$. Então, pelo argumento acima, dados dois pontos de continuidade aproximada de χ_Ω que pertençam a Ω , todos os pontos de continuidade aproximada entre eles também pertencem a Ω . logo, Ω é um intervalo. \square

2. O Problema Isoperimétrico em \mathbb{R}^n

DEFINIÇÃO . Dados um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, e um hiperplano $n - 1$ -dimensional V , construímos o *simetrizado* $\tilde{\Omega}$ de Ω do seguinte modo. Para cada reta r perpendicular a V , a interseção de $\tilde{\Omega}$ com esta reta será um segmento aberto de tamanho l contido em r com centro em V , onde l é a medida 1-dimensional de $\Omega \cap r$

O seguinte teorema apresenta algumas propriedades do simetrizado $\tilde{\Omega}$

TEOREMA 1.7. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mensurável e $\tilde{\Omega}$ o simetrizado de Ω em relação a um hiperplano V . Então*

1. $\tilde{\Omega}$ é simétrico em relação a V ,
2. $|\Omega| = |\tilde{\Omega}|$,
3. Se Ω for um conjunto de perímetro finito, $\tilde{\Omega}$ também o será e ainda vale que $p(\Omega) \geq p(\tilde{\Omega})$,
4. Se Ω tem perímetro finito, ou $p(\Omega) > p(\tilde{\Omega})$ ou então quase toda linha perpendicular a V intersectando Ω o faz em um segmento,
5. Se Ω for convexo, então ou $p(\Omega) > p(\tilde{\Omega})$ ou $\tilde{\Omega}$ é uma translação de Ω .

Demonstração. A primeira propriedade segue diretamente da construção do simetrizado. A segunda propriedade é consequência do Teorema de Fubini. Para demonstrar as outras provaremos uma seqüência de afirmações, mas antes vamos mudar ligeiramente a notação.

Consideremos os nossos conjuntos Ω e, conseqüentemente, $\tilde{\Omega}$ em \mathbb{R}^{n-1} ao invés de \mathbb{R}^n e usaremos (x, y) para designar os pontos de \mathbb{R}^{n-1} , com $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}$. Identificaremos V com o hiperplano $y = 0$. Ainda, denotaremos

$$\text{sec}_x(\Omega) = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in \Omega\},$$

a interseção de Ω com a linha perpendicular a \mathbb{R}^n passando por x e $l(x) = |\sec_x(\Omega)|$. Então, pela definição do simetrizado,

$$\tilde{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |y| \leq \frac{1}{2}l(x)\}.$$

Ainda, relembramos que um conjunto Ω tem perímetro finito quando a derivada de sua função característica é uma medida de Radon vetorial finita (pelo Teorema de Riesz). Neste caso, escrevemos $D\chi_\Omega = \sigma d\mu$, onde $|\sigma| = 1$ μ -q.t.p. A variação total desta medida vetorial sobre um boreliano B será dada por

$$\|D\chi_\Omega\|(B) = \int_B d\mu = \sup_{\varphi \in C_0^\infty, |\varphi| \leq 1} \int_B \langle \varphi, \sigma \rangle d\mu = \sup_{\varphi \in C_0^\infty, |\varphi| \leq 1} \int_B \chi_\Omega \operatorname{div} \varphi$$

e do mesmo modo, podemos definir a variação total de $\frac{\partial}{\partial x_i} \chi_\Omega$ sobre um boreliano B , escrevendo $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$.

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \chi_\Omega \right\|(B) = \int_B |\sigma_i| d\mu = \sup_{\psi \in C_0^\infty, |\psi| \leq 1} \int_B \psi \sigma_i d\mu = \sup_{\psi \in C_0^\infty, |\psi| \leq 1} \int_B \chi_\Omega \frac{\partial \psi}{\partial x_i}.$$

AFIRMAÇÃO 1. Para todo boreliano $B \subset \mathbb{R}^n$,

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y} \chi_\Omega \right\|(B \times \mathbb{R}) = \int_B p(\sec_x(\Omega)) dx.$$

Conseqüentemente, se Ω tem perímetro finito, $\sec_x(\Omega)$ tem perímetro finito para quase todo x .

Demonstração: Seja $\psi \in C_0^\infty$ uma função teste com $|\psi| \leq 1$. Então, pela própria definição de perímetro, para x fixo, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_\Omega \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \leq p(\sec_x(\Omega)).$$

Daí, integrando sobre B e tomando o supremo sobre as funções teste ψ , obtemos

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y} \chi_\Omega \right\|(B \times \mathbb{R}) = \sup_{\psi \in C_0^\infty, |\psi| \leq 1} \int_{B \times \mathbb{R}} \chi_\Omega \frac{\partial \psi}{\partial y} \leq \int_B p(\sec_x(\Omega)) dx$$

Por outro lado, analogamente ao feito na Proposição 1.2, pode-se provar que a variação total decresce quando se convolve a função com um regularizador em apenas uma coordenada, ou seja

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y} \chi_\Omega \right\|(B \times \mathbb{R}) \geq \int_B \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial y} (\chi_\Omega)_\varepsilon \right| dy dx,$$

onde

$$(\chi_\Omega)_\varepsilon(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_\varepsilon(y-t) \chi_\Omega(x, t) dt$$

e η_ε é um regularizador 1-dimensional. Mas

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial y} \eta_\varepsilon(y-t) \chi_\Omega(x, t) \right| dt = p(\sec_x(\Omega)),$$

independentemente de $p(\sec_x(\Omega))$ ser finito, logo, tomando o limite a outra desigualdade segue. \square

Repare que pela resolução do Problema Isoperimétrico em dimensão 1 (corolário do Teorema 1.6), esta afirmação nos fornece a seguinte estimativa

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y} \chi_\Omega \right\|(B \times \mathbb{R}) \geq 2|B \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < l(x) < \infty\}|,$$

valendo a desigualdade estrita se, e somente se.

$$\{x \in B \mid \text{sec}_x(\Omega) \text{ não é um intervalo e } 0 < l(x) < \infty\}$$

tiver medida positiva.

AFIRMAÇÃO 2. Vale a seguinte estimativa

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \chi_\Omega \right\| (B \times \mathbb{R}) \geq \left\| \frac{\partial l}{\partial x_i} \right\| (B).$$

Em particular, se Ω tem perímetro finito, l é de variação limitada.

Demonstração: Segue-se da definição da variação total de $\frac{\partial}{\partial x_i} \chi_\Omega$ que se restringirmos mais a classe de funções teste, obteremos resultados sempre menores, logo

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \chi_\Omega \right\| (B \times \mathbb{R}) \geq \int_{B \times \mathbb{R}} \chi_\Omega(x, y) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dy dx = \int_B l(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dx.$$

Tomando o supremo sobre estas φ , obtemos o resultado. \square

AFIRMAÇÃO 3. O simetrizado $\tilde{\Omega}$ de um conjunto de perímetro finito Ω também tem perímetro finito e além disto valem

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \chi_{\tilde{\Omega}} \right\| (B \times \mathbb{R}) = \left\| \frac{\partial l}{\partial x_i} \right\| (B).$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y} \chi_{\tilde{\Omega}} \right\| (B \times \mathbb{R}) = 2|B \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < l(x) < \infty\}|.$$

Demonstração: Basta demonstrar as igualdades, uma vez que elas implicam a finitude da variação total de $D\chi_{\tilde{\Omega}}$. Observemos inicialmente que a segunda igualdade já foi provada, uma vez que, por construção, $\tilde{\Omega}$ satisfaz a propriedade que assegura igualdade comentada logo após a Afirmação 1. Do mesmo modo, como certamente o simetrizado do simetrizado é o próprio, a Afirmação 2 dá conta de uma desigualdade na primeira igualdade, restando provar que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \chi_{\tilde{\Omega}} \right\| (B \times \mathbb{R}) \leq \left\| \frac{\partial l}{\partial x_i} \right\| (B).$$

Como as medidas em consideração são de Radon, não há perda em se supor que B seja aberto. Tomemos por hipótese extra que l seja diferenciável e escolhamos $\varphi \in C_0^\infty(B \times \mathbb{R})$ uma função teste ($|\varphi| \leq 1$). Vamos provar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{-l(x)/2}^{l(x)/2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dy dx \leq \left\| \frac{\partial l}{\partial x_i} \right\| (B) = \int_B \left| \frac{\partial l}{\partial x_i} \right| dx.$$

Com efeito,

$$\int_{-l(x)/2}^{l(x)/2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dy = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-l(x)/2}^{l(x)/2} \varphi(x, y) dy - \frac{1}{2} (\varphi(x, l(x)/2) + \varphi(x, -l(x)/2)) \frac{\partial l}{\partial x_i}.$$

integrando sobre \mathbb{R}^n , obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{-l(x)/2}^{l(x)/2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dy = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi(x, l(x)/2) + \varphi(x, -l(x)/2)) \frac{\partial l}{\partial x_i} dx \leq \int_{\text{prj spt}(\varphi)} \left| \frac{\partial l}{\partial x_i} \right| dx$$

Tomando o supremo sobre tais φ , obtemos o resultado no caso em que l é diferenciável.

Caso l não seja diferenciável, consideremos as regularizadas l_ε . Para estas valem

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{-l_\varepsilon(x)/2}^{l_\varepsilon(x)/2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dy dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \int_{-l(x)/2}^{l(x)/2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dy dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{\tilde{\Omega}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dy dx.$$

bem como que

$$\int_{\text{prj spt}(\varphi)} \left| \frac{\partial l_\varepsilon}{\partial x_i} \right| dx \leq \left\| \frac{\partial l}{\partial x_i} \right\|(B)$$

E o resultado segue tomando o limite em ε e em seguida o supremo sobre φ . \square

Agora podemos continuar a demonstração do teorema. Pelas afirmações acima, vemos que a variação total de cada coordenada de $D\chi_{\tilde{\Omega}}$ sobre qualquer conjunto da forma $B \times \mathbb{R}$ é sempre menor do que ou igual à variação da respectiva coordenada de $D\chi_{\Omega}$, logo se Ω for de perímetro finito, $\tilde{\Omega}$ também o será e ainda

$$p(\tilde{\Omega}) = \|D\chi_{\tilde{\Omega}}\|(\mathbb{R}^{n-1}) \leq \|D\chi_{\Omega}\|(\mathbb{R}^{n-1}) = p(\Omega).$$

Mais ainda, pela observação ao final da primeira afirmação mais a última afirmação, se

$$\{x \in B \mid \text{sec}_x(\Omega) \text{ não é um intervalo e } 0 < l(x) < \infty\}$$

tiver medida positiva, vale a desigualdade estrita e assim provamos as propriedades 3 e 4 do teorema.

Vamos agora à propriedade 5. Suponhamos $\Omega \in \mathbb{R}^{n-1}$ convexo. Daí o bordo de Ω tem medida $n+1$ -dimensional nula e tanto Ω quanto seu fecho têm o mesmo perímetro, logo podemos, sem perda de generalidade, supor Ω fechado. Além disto se $|\Omega| < \infty$ concluímos que Ω é limitado, pois caso não fosse, poderíamos tomar uma bola B no interior de Ω e uma seqüência (x_n) de pontos de Ω tais que $|x_n| > n$. Daí concluiríamos que o cone com base em B e vértice x_n estaria contido em Ω e teria volume tendendo a infinito. Portanto, podemos tomar B a projeção de Ω sobre \mathbb{R}^n , que será um conjunto convexo e limitado e podemos escrever

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x \in B \text{ e } fl(x) \leq y \leq cl(x)\}$$

para duas funções fl e cl , a primeira convexa e a segunda côncava.

Com isto, concluímos que, para $x \in B$, $\text{sec}_x(\Omega) = [fl(x), cl(x)]$ e $l(x) = cl(x) - fl(x)$ e portanto,

$$\tilde{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x \in B \text{ e } |y| \leq \frac{l(x)}{2}\}.$$

Neste caso, temos que

$$p(\tilde{\Omega}) = 2 \int_B \sqrt{1 + \sum \left(\frac{\partial l/2}{\partial x_i} \right)^2} dx + R,$$

onde R é um resto que aparece devido a possíveis descontinuidades de l na fronteira de B (imagine o caso de um cubo).

Do mesmo modo, teríamos

$$p(\Omega) = \int_B \sqrt{1 + \sum \left(\frac{\partial fl}{\partial x_i} \right)^2} + \sqrt{1 + \sum \left(\frac{\partial cl}{\partial x_i} \right)^2} dx + R,$$

onde este R é o mesmo do caso anterior. E portanto,

$$p(\Omega) - p(\tilde{\Omega}) = \int_B \sqrt{1 + \sum \|\nabla(fl/2)\|^2} + \sqrt{1 + \sum \|\nabla(cl/2)\|^2} - 2\sqrt{1 + \sum \|\nabla(l/2)\|^2} dx.$$

Agora diferenciando a identidade $2\frac{l(x)}{2} = cl(x) - fl(x)$, observamos que

$$\nabla \frac{l(x)}{2} = \frac{1}{2}(\nabla(-fl(x)) + \nabla(cl(x))),$$

em palavras, $\nabla \frac{l(x)}{2}$ é o ponto médio do segmento ligando $\nabla(-fl(x))$ a $\nabla(cl(x))$. Mas como a função $t \mapsto \sqrt{1 + |tv + (1-t)w|^2}$, é estritamente convexa, quaisquer que sejam v e w em \mathbb{R}^n , como pode ser facilmente verificado, concluímos que os perímetros de Ω e $\tilde{\Omega}$ serão iguais se, e somente se,

$$\nabla(-fl(x)) = \nabla(cl(x)) = \nabla \frac{l(x)}{2},$$

de onde concluímos que Ω e $\tilde{\Omega}$ são transladados um do outro. \square

Como já vimos no Teorema 1.4, existe solução para o problema isoperimétrico na bola de raio R . Como consequência das propriedades da Simetrização de Steiner, vemos que tal solução deve ser convexa (propriedade 4) e, digamos, simétrica em relação a qualquer hiperplano passando pela origem (propriedade 5), logo a solução é a bola englobando o volume dado. Em particular, esta solução não depende do raio da bola escolhida para conter os domínios competindo, logo é solução do problema em \mathbb{R}^n .

3. O Problema Isoperimétrico em Variedades

Novamente estamos procurando soluções para o problema de minimizar o volume do bordo com o vínculo de que o volume da região seja igual a uma quantidade previamente fixada. Nesta parte, no entanto, tratamos o problema com menos rigor e em geral supomos ter diferenciabilidade. Inicialmente, encontramos condições para que um domínio seja mínimo local para o perímetro com volume fixado. Em seguida, apresentamos alguns teoremas de comparação entre volumes a partir de limitações da curvatura para ao final demonstrar o Teorema de Gromov-Levy.

3.1. Fórmulas de Variação. Seja \overline{M}^n uma variedade riemanniana e $\Omega \subset \overline{M}$ um conjunto aberto de bordo suave, o qual denotaremos por M . Sujeitaremos M a variações que mantenham o volume de Ω fixo (pelo menos até segunda ordem) e queremos descobrir quais condições devem ser impostas sobre M para que Ω seja ponto crítico para o perímetro (ou seja, o perímetro não varie em primeira ordem) e mais ainda, para que seja estável. Em outras palavras, procuramos condições sobre M para que Ω seja ponto crítico estável da função perímetro com o vínculo "volume constante".

Começamos tomando a seguinte parametrização de uma vizinhança tubular de M

$$\mathbb{X} : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \overline{M}: \quad \mathbb{X}(m, t) = \exp_m(t n(m)),$$

onde $n(m)$ é o vetor normal unitário interno de M .

Inicialmente procuraremos descobrir algumas informações sobre a métrica na parametrização \mathbb{X} . De fato, via de regra, tomaremos uma parametrização $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow M$ e ainda denotaremos

por $\mathbb{X}(x, t) = \mathbb{X}(\varphi(x), t)$ e, para não carregar demais a notação, escreveremos $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$ e $t = x_n$. Então, por construção, temos $\partial_n \partial_n = 0$ e $|\partial_n| = 1$, logo

$$2\partial_n \langle \partial_i; \partial_n \rangle = 2\langle \partial_i \partial_n; \partial_n \rangle = \partial_i \langle \partial_n; \partial_n \rangle = 0$$

e portanto $\langle \partial_i; \partial_n \rangle$ independe da última coordenada, mas

$$\langle \partial_i(x, 0); \partial_n(x, 0) \rangle = \langle \partial_i(x, 0); n(x) \rangle = 0.$$

E com isto, concluímos que ∂_n é sempre perpendicular aos demais vetores coordenados. Como $|\partial_n| = 1$, ainda ganhamos

$$\det(g_{ij})_{n \times n} = \det(g_{ij})_{(n-1) \times (n-1)}.$$

Dada $f : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a variação de M por f é dada por $\mathbb{X}(m, sf(m, s))$, para cada s fixo. Se tomarmos uma parametrização $\varphi : D \rightarrow M$ de uma região de M , a variação do volume englobado pela parametrização é dada por

$$\Delta V(\varphi(D)) = \int_D \int_0^{sf} \sqrt{\det(g_{ij}(x, t))} dt dx = \int_D \int_0^1 \sqrt{\det(g_{ij}(x, sft))} sf dt dx.$$

Derivando em relação a s obtemos

(1.1)

$$\frac{d}{ds} \Delta V(\varphi(D)) = \int_D \int_0^1 \frac{\partial_n(\det(g_{ij}(x, sft)))(f + s \frac{\partial f}{\partial s}) sft}{2\sqrt{\det(g_{ij}(x, sft))}} + \sqrt{\det(g_{ij}(x, sft))} (f + s \frac{\partial f}{\partial s}) dt dx$$

Logo, avaliando em $s = 0$, obtemos

$$\left. \frac{d}{ds} \Delta V(\varphi(D)) \right|_{s=0} = \int_D \int_0^1 \sqrt{\det(g_{ij}(x, 0))} f(x, 0) dt dx = \int_{\varphi(D)} f(m, 0) dV$$

e portanto, a mesma identidade é válida em M e queremos que o volume não varie em primeira ordem, ou seja

$$(1.2) \quad 0 = \left. \frac{d\Delta V(M)}{ds} \right|_{s=0} = \int_M f(m, 0) dV.$$

i. e., f deve ter média nula sobre M . Agora, diferenciamos novamente a equação (1.1) e exigimos que o volume permaneça fixo até segunda ordem. Repare que agora não precisamos mais nos preocupar com a careta dos termos que aparecem multiplicados por s

$$\frac{d^2}{ds^2} \Delta V(\varphi(D)) = \int_D \int_0^1 \frac{\partial_n(\det(g_{ij}(x, sft)))(f + s \frac{\partial f}{\partial s}) f t}{\sqrt{\det(g_{ij}(x, sft))}} + 2\sqrt{\det(g_{ij}(x, sft))} \frac{\partial f}{\partial s} + O(s) dt dx.$$

Portanto, avaliando em $s = 0$, temos

$$(1.3) \quad \left. \frac{d^2}{ds^2} \Delta V(\varphi(D)) \right|_{s=0} = \int_D \int_0^1 \left(\frac{\partial_n(\det(g_{ij}(x, 0))) f^2 t}{\det(g_{ij}(x, 0))} + 2 \frac{\partial f}{\partial s} \right) dt \sqrt{\det(g_{ij}(x, 0))} dx.$$

Aqui vem a seguinte observação: até o momento, embora tenhamos usado parametrizações, a situação em questão está geometricamente bem definida, logo o resultado da integral acima não deve depender da parametrização φ tomada, mas apenas de características geométricas de M . Mais precisamente, nem mesmo o integrando deve depender da parametrização (descontado o elemento de volume $\sqrt{\det(g_{ij}(x, 0))}$), uma vez que toda a situação está bem definida geometricamente. Assim, para descobrirmos o valor do integrando no ponto $\mathbb{X}(m, 0)$, podemos tomar uma

parametrização cujos vetores coordenados em $\mathbb{X}(m, 0)$ sejam ortonormais e então procuraremos exprimir o integrando em termos de características geométricas de M no ponto m . Uma vez que tenhamos obtido um tal resultado, ele independe da parametrização escolhida e será verdadeiro sobre toda M . Feito este comentário, voltamos às contas

Precisamos saber calcular $\partial_n(\det(g_{ij}(x, 0)))$, o que teremos que fazer na marra mesmo

$$\partial_n(\det(g_{ij})) = \sum_{i=1}^{n-1} \det \begin{vmatrix} \langle \partial_1, \partial_1 \rangle & \cdots & \langle \partial_1, \partial_{n-1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n \langle \partial_i, \partial_1 \rangle & \cdots & \partial_n \langle \partial_i, \partial_{n-1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \partial_{n-1}, \partial_1 \rangle & \cdots & \langle \partial_{n-1}, \partial_{n-1} \rangle \end{vmatrix}.$$

Mas, pelo menos para $s = 0$, temos $\partial_n = n$ e

$$(1.4) \quad \partial_n \langle \partial_i, \partial_j \rangle = \langle \partial_i \partial_n, \partial_j \rangle + \langle \partial_i, \partial_j \partial_n \rangle = -2II(\partial_i, \partial_j),$$

onde II denota a segunda forma fundamental de M . Agora voltando a (1.3), e supondo que φ seja ortonormal em x , para um x fixado, vemos que o determinante acima se torna

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \partial_n(\det(g_{ij}(x, 0))) &= \sum_{i=1}^{n-1} \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -2II(\partial_i, \partial_1) & -2II(\partial_i, \partial_2) & \cdots & -2II(\partial_i, \partial_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} -2II(\partial_i, \partial_i) = -2H, \end{aligned}$$

onde H denota a curvatura média de M no ponto imagem x .

Com isto, voltando a (1.3), já conseguimos avaliar $\frac{d^2}{ds^2} \Delta V(\varphi(D))$ em $s = 0$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{ds^2} \Delta V(\varphi(D)) \right|_{s=0} &= \int_{\varphi(D)} \int_0^1 \left(-2H(m) f^2 t + 2 \frac{\partial f}{\partial s} \right) dt dV \\ &= \int_{\varphi(D)} -H(m) f^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial s} dV \end{aligned}$$

Logo, a mesma fórmula funciona para M e devemos exigir que o resultado seja nulo, ou seja

$$(1.6) \quad \int_M -H(m) f^2(m, 0) + 2 \frac{\partial f}{\partial s}(m, 0) dV = 0$$

Agora, passemos ao perímetro. Fixada uma parametrização φ o volume $n - 1$ -dimensional da imagem de φ na variação de M será dado por

$$p(\varphi(D)) = \int_D \sqrt{\det(g_{ij}(x, sf) + s^2 \partial_i f \partial_j f)} dx$$

Portanto, derivando em relação a s , obtemos

$$(1.7) \quad \frac{d}{ds} p(\varphi(D)) = \int_D \frac{\frac{d}{ds} \det(g_{ij}(x, sf) + s^2 \partial_i f \partial_j f)}{2 \sqrt{\det(g_{ij}(x, sf) + s^2 \partial_i f \partial_j f)}} dx$$

que em $s = 0$ resulta

$$\left. \frac{d}{ds} p(\varphi(D)) \right|_{s=0} = \int_D \frac{\frac{d}{ds} \det(g_{ij}(x, sf) + s^2 \partial_i f \partial_j f) \Big|_{s=0}}{2 \det(g_{ij}(x, 0))} \sqrt{\det(g_{ij}(x, 0))} dx$$

E lá vamos nós de novo... Escrevendo $\frac{d}{ds} \det(g_{ij}(x, sf) + s^2 \partial_i f \partial_j f)$ por extenso, temos

$$(1.8) \quad \sum_{i=1}^{n-1} \begin{vmatrix} g_{11} + s^2 \partial_1 f \partial_1 f & \cdots & g_{1n-1} + s^2 \partial_1 f \partial_{n-1} f \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n g_{i1} (f + s \frac{df}{ds}) + 2s \partial_i f \partial_1 f + O(s^2) & \cdots & \partial_n g_{in-1} (f + s \frac{df}{ds}) + 2s \partial_i f \partial_{n-1} f + O(s^2) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n-11} + s^2 \partial_{n-1} f \partial_1 f & \cdots & g_{n-1n-1} + s^2 \partial_{n-1} f \partial_{n-1} f \end{vmatrix}$$

Fazendo $s = 0$, a soma acima se torna

$$\sum_{i=1}^{n-1} \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n g_{i1} f & \cdots & \partial_n g_{in-1} f \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n-11} & \cdots & g_{n-1n-1} \end{vmatrix} = f \partial_n \det(g_{ij}(x, 0))$$

E então, novamente tomando uma parametrização ortonormal em um $m \in M$ fixado, usando a equação (1.5), já conseguimos calcular a derivada da variação do volume $n-1$ -dimensional para $s = 0$

$$\left. \frac{d}{ds} p(\varphi(D)) \right|_{s=0} = \int_{\varphi(D)} -f H(m) dV$$

E portanto a mesma igualdade vale sobre M .

$$\left. \frac{d}{ds} p(M) \right|_{s=0} = \int_M -f H dV$$

Com a condição (1.2) sobre f para que o volume permaneça constante em primeira ordem, vemos que Ω será ponto crítico se a curvatura média de M for constante.

Agora vamos procurar condições para que um domínio que seja ponto crítico também seja estável, ou seja, vamos derivar novamente (1.7) e exigir que o resultado seja não negativo

$$(1.9) \quad \frac{d^2}{ds^2} p(\varphi(D)) = \int_D -\frac{(\frac{d}{ds} \det(g_{ij}(x, sf) + s^2 \partial_i f \partial_j f))^2}{4(\det(g_{ij}(x, sf) + s^2 \partial_i f \partial_j f))^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{d^2}{ds^2} \det(g_{ij}(x, sf) + s^2 \partial_i f \partial_j f)}{2\sqrt{\det(g_{ij}(x, sf) + s^2 \partial_i f \partial_j f)}} dx$$

Pelas contas feitas para achar os pontos críticos, a primeira parcela na integral, em $s = 0$, se iguala a

$$\int_{\varphi(D)} -H^2 f^2 dV.$$

Portanto, nos resta calcular a segunda parcela. Então, voltamos a (1.8) e derivamos mais uma vez

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \det(g_{ij}(x, sf) + s^2 \partial_i f \partial_j f) &= \sum_{i \neq j} \left| \begin{array}{ccc} g_{11} + O(s) & \cdots & g_{1n-1} + O(s) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n g_{i1} f + O(s) & \cdots & \partial_n g_{in-1} f + O(s) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n g_{j-1} f + O(s) & \cdots & \partial_n g_{jn-1} f + O(s) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n-11} + O(s) & \cdots & g_{n-1n-1} + O(s) \end{array} \right| + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \left| \begin{array}{ccc} g_{11} + O(s) & \cdots & g_{1n-1} + O(s) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n^2 g_{i1} f^2 + 2\partial_n g_{i1} \frac{\partial f}{\partial s} + 2\partial_i f \partial_1 f + O(s) & \cdots & \partial_n^2 g_{in-1} f^2 + 2\partial_n g_{in-1} \frac{\partial f}{\partial s} + 2\partial_i f \partial_{n-1} f + O(s) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n-11} + O(s) & \cdots & g_{n-1n-1} + O(s) \end{array} \right| \end{aligned}$$

Logo, para $s = 0$ e x o ponto em que a parametrização é ortonormal, tudo se reduz à seguinte expressão

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{ds^2} \det(g_{ij}(x, sf) + s^2 \partial_i f \partial_j f) \right|_{s=0} &= f^2 \sum_{i \neq j} \partial_n g_{ii} \partial_n g_{jj} - (\partial_n g_{ij})^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \partial_n^2 g_{ii} f^2 + 2\partial_n g_{ii} \frac{\partial f}{\partial s} + 2(\partial_i f)^2 \end{aligned}$$

Daí, usando (1.4), obtemos que o integrando de (1.9) é

$$-2H^2 f^2 - H \left(2 \frac{\partial f}{\partial s} - H f^2 \right) + \|\nabla f\|^2 + \frac{f^2}{2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \partial_n^2 g_{ii} + \sum_{i \neq j} \partial_n g_{ii} \partial_n g_{jj} - (\partial_n g_{ij})^2 \right).$$

Utilizando (1.5) ao contrário, para sumir com a curvatura média que aparece no primeiro termo, obtemos

$$-2H^2 f^2 = -2f^2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} \partial_n g_{ii} \right)^2 = \frac{f^2}{2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} -(\partial_n g_{ii})^2 + \sum_{i \neq j} -\partial_n g_{ii} \partial_n g_{jj} \right).$$

logo o integrando, após as simplificações possíveis, se torna

$$(1.10) \quad -H \left(2 \frac{\partial f}{\partial s} - H f^2 \right) + \|\nabla f\|^2 + \frac{f^2}{2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \partial_n^2 g_{ii} - \sum_{i,j}^{n-1} (\partial_n g_{ij})^2 \right).$$

Logo, $a_0 = 0$ e o termo $\int_M f(-\Delta f) dV$ pode ser estimado por

$$\begin{aligned} \int_M f(-\Delta f) dV &= \int_M \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n (-\Delta \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n) dV = \int_M \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n v_n dV \\ &= \int_M \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (a_n v_n)^2 dV \geq \lambda_1 \int_M \sum_{n=1}^{\infty} (a_n v_n)^2 dV = \lambda_1 \int_M f^2 dV. \end{aligned}$$

E assim, podemos apresentar uma outra condição suficiente para estabilidade

$$\frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} p(M) \geq \int_M (\lambda_1 - \text{Ric}(\partial_n) - \|II\|^2) f^2 dV \geq 0,$$

ou ainda, a condição

$$(1.11) \quad \lambda_1 - \text{Ric}(\partial_n) - \|II\|^2 \geq 0, \text{ para todo } m \in M$$

Sabendo que o primeiro autovalor não nulo da esfera S^n é n (veja [18]), concluímos que o primeiro autovalor da esfera de raio r será $\frac{n}{r^2}$. Com isto já podemos verificar a estabilidade dos casos triviais que são as esferas de \mathbb{R}^{n+1} e as calotas geodésicas das esferas. Para uma esfera de raio unitário em \mathbb{R}^{n+1} , temos que $\text{Ric}(n) = 0$, pois o ambiente não tem curvatura e a aplicação normal de Gauss é a identidade, logo $\|II\|^2 = n$. Portanto vale a condição (1.11), com a igualdade (que resulta do fato de que translações da esfera também são soluções do problema). Já na esfera S^{n+1} , a calota geodésica de raio r tem como bordo uma esfera de dimensão n e raio $\sin r$, logo, $\lambda_1 = \frac{n}{\sin^2 r}$. Como a curvatura seccional de S^{n+1} é constante e igual a 1, temos que $\text{Ric}(\partial_n) = n$. Finalmente, como a esfera bordo da calota é umbilica, basta calcularmos a curvatura média H , pois $\|II\| = \frac{H^2}{n}$, mas pelas contas na próxima seção, temos que $H = n \cot r$, e então (1.11) também vale neste caso com a igualdade.

3.2. Teoremas de Comparação de Volume. Conforme demonstrado na seção *O Problema Isoperimétrico em \mathbb{R}^n* , dentre todos os domínios de \mathbb{R}^n com um volume dado V , a bola com este volume é a região com menor perímetro. Denotando por r o raio de tal bola e por α_n o volume da bola unitária, esta sentença pode ser reescrita da seguinte maneira

$$p(\Omega) \geq \frac{p(B_0(r))}{|B_0(r)|} |\Omega| = \frac{n}{r} |\Omega| = \frac{n}{(|\Omega|/\alpha_n)^{\frac{1}{n}}} |\Omega| = n \alpha_n^{\frac{1}{n}} |\Omega|^{\frac{n-1}{n}}.$$

DEFINIÇÃO . Uma função $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é dita *um perfil isoperimétrico* para a variedade M se para todo $\Omega \subset M$ de perímetro finito valer $p(\Omega) \geq \varphi(|\Omega|)$. Uma função $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é dita *o perfil isoperimétrico* da variedade M se for um perfil isoperimétrico para M e para todo outro perfil φ de M valer $\varphi(t) \leq \psi(t)$, para todo t .

Com esta definição a desigualdade isoperimétrica pode ser parafraseada por “ $\varphi(t) = n \alpha_n^{\frac{1}{n}} t^{\frac{n-1}{n}}$ é um perfil isoperimétrico para \mathbb{R}^n ”.

Nesta seção apresentamos uma série de teoremas de comparação de volumes de subconjuntos de variedades riemannianas com hipóteses sobre limitações da curvatura e temos como resultado final o Teorema de Gromov-Levy que consiste exatamente na apresentação de um perfil isoperimétrico para uma variedade n -dimensional para a qual valha $\text{Ric}(v) \geq n - 1$. Nesta seção usaremos vol_k para denotar o volume k -dimensional de uma k -subvariedade de \overline{M} .

Ainda considerando a mesma situação da seção anterior, muito mais pode ser dito sobre a parametrização \mathbb{X} ... como nesta seção não faremos uso de outras parametrizações compostas com \mathbb{X} , voltamos à notação original $\mathbb{X}(m, t)$, ao invés da que vínhamos usando $\mathbb{X}(x)$, com a última coordenada substituindo t . Ademais, denotaremos $M_t = \mathbb{X}(M, t)$. Começemos comentando sobre o seu domínio de definição. Antes estávamos apenas interessados em saber o que acontece perto de M , de modo que a existência de um ε positivo tal que \mathbb{X} estivesse definida em $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ era suficiente, mas, de fato, fixado $m \in M$ podemos considerar \mathbb{X} definida no intervalo $(-c_-(m), c_+(m))$ em que a geodésica passando por m e com vetor tangente $n(m)$ é a geodésica que minimiza a distância entre M e $\mathbb{X}(m, t)$. Observe que com este novo domínio podemos definir \mathbb{X} de outro modo: dado $p \in \overline{M}$, tome $m \in M$ o ponto de M mais próximo de p e faça $\tau = d(p, m)$, então $\mathbb{X}(m, \tau) = p$ e $\mathbb{X}(m, \cdot)$ está definida para todo t entre 0 e τ . Obviamente, o argumento acima não se aplica a todos os pontos de \overline{M} , pois nem sempre existe apenas um ponto de M que realiza a distância entre M e p , mas felizmente tais pontos (que são exatamente os que estarão fora da imagem da parametrização \mathbb{X}) formam um conjunto de medida nula de \overline{M} . A prova deste fato é dada pelo argumento que esboçamos agora.

Se considerarmos as funções $\varphi_{\pm} : M \rightarrow TM^{\pm}$, dadas por $m \mapsto \pm c_{\pm}(m)n(m)$, pode-se mostrar que estas funções são contínuas e, além disto, é claro que compostas com a projeção de TM^{\pm} em M resultam na identidade. Portanto suas imagens em TM^{\pm} têm medida nula. Como a exponencial é diferenciável, leva conjuntos de medida nula em conjuntos de medida nula e portanto $\mathbb{X}(\varphi_{\pm}(M))$ também terá medida nula em \overline{M} . Claramente este último é exatamente o conjunto dos pontos não parametrizados por \mathbb{X} . Uma consequência importante deste fato é que se quisermos integrar uma função sobre \overline{M} bastará integrá-la sobre a imagem de \mathbb{X} .

Investiguemos agora como fica o elemento de volume de \overline{M} na nossa parametrização. Já vimos na seção anterior que o vetor ∂_t é sempre perpendicular à variedade M_t e sempre tem norma 1, de modo que o elemento de volume $\overline{\omega}$ de \overline{M} pode ser escrito como

$$\overline{\omega}^2 = dt^2 + \omega_t^2,$$

onde ω_t é o elemento de volume da subvariedade M_t .

Por definição $\mathbb{X}(m, \cdot)$ é uma geodésica para todo m fixado, logo, dado $v \in T_m M$, tomando um caminho α passando por m com velocidade v e concluímos que $\mathbb{X}(\alpha(s), t)$ é uma variação da geodésica $\mathbb{X}(m, t)$ por geodésicas, logo $\partial_v \mathbb{X}(m, t)$ é campo de Jacobi. Para determiná-lo exatamente, calculemos as condições iniciais satisfeitas pelo campo $\partial_v \mathbb{X}(m, t)$ (por simplicidade de notação chamemo-lo de $J_t(v)$). Como $\mathbb{X}(\cdot, 0) = \text{Id}_M$, vemos que $J_0(v) = v$. Além disto, para a derivada de $J_t(v)$ em $t = 0$, temos

$$\frac{d}{dt} J_t(v)|_{t=0} = \partial_t \partial_v \mathbb{X}(m, t)|_{t=0} = \partial_v \partial_t \mathbb{X}(m, t)|_{t=0} = \partial_v n(m) = -A(v),$$

onde A é a transformação autoadjunta da segunda forma fundamental de M . Se denotarmos por $J_t^*(v)$ o transporte paralelo de $J_t(v)$ de volta ao ponto $t = 0$, temos que J_t^* é um endomorfismo de $T_m M$ e lembrando que o transporte paralelo é uma isometria temos, para $v_1, \dots, v_{n-1} \in T_m M$

$$(1.12) \quad \omega_t(J_t(v_1), \dots, J_t(v_{n-1})) = \omega_0(J_t^*(v_1), \dots, J_t^*(v_{n-1})) = \det J_t^* \omega_0(v_1, \dots, v_{n-1}).$$

Com isto, dada $f : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ integrável, vale a seguinte identidade

$$(1.13) \quad \int_{\overline{M}} f \, d\overline{\omega} = \int_M \int_{c_-(m)}^{c_+(m)} f(m, t) \det J_t^* \, dt d\omega_0$$

OBSERVAÇÃO . Analogamente ao caso de geodésicas saindo de um ponto, pode-se mostrar que uma geodésica γ ortogonal a M em m não é minimizante da distância entre M e $\gamma(t)$ além do primeiro zero de qualquer campo de Jacobi J sobre γ com condições iniciais $J(0) \in T_m M$ e $J'(0) = A(J(0))$. Tal demonstração é feita com pequenas alterações ao Teorema do índice e no nosso caso implica que os zeros de $\det J_t^*$ sempre ocorrem depois de $c_{\pm}(m)$. Como $J_0 = \text{Id}$, concluímos que este determinante é positivo para todo $t \in (c_-(m), c_+(m))$. Observe ainda que já havíamos usado este fato anteriormente, embora sem explicitá-lo, para garantir que \mathbb{X} é de fato uma parametrização com o domínio que escolhemos.

OBSERVAÇÃO . Se fixarmos uma base v_1, \dots, v_{n-1} para $T_m M$, o determinante de J_t^* pode ser calculado por meio de sua matriz relativamente a esta base. Por outro lado, se considerarmos a base $v_1(t), \dots, v_{n-1}(t)$ de $T_{\gamma(t)} M_t$ obtida por transporte paralelo de v_1, \dots, v_{n-1} , vemos que a expressão matricial de J_t relativamente a estas bases seria exatamente a mesma que a obtida anteriormente para J_t^* . Neste sentido, falaremos de $\det J_t$ e a equação (1.12) se torna

$$\omega_t(J_t(v_1), \dots, J_t(v_{n-1})) = \det J_t \omega_t(v_1(t), \dots, v_{n-1}(t)) = \det J_t \omega_0(v_1, \dots, v_{n-1}).$$

Além disto, sendo $J_t(v)$ campo de Jacobi, para cada $v \in T_m M$, $J_t(v)$ satisfaz a equação

$$\frac{d^2}{dt^2} J_t(v) + R(\gamma', J_t(v))\gamma' = 0.$$

que escreveremos abreviadamente

$$(1.14) \quad \frac{d^2}{dt^2} J_t + R(\gamma', J_t)\gamma' = 0,$$

entendendo que esta última é uma equação envolvendo transformações lineares.

LEMA . (*Fórmula de Liouville*) Se X é solução da equação diferencial matricial $X' = A(t)X$, com A Lipschitz, então $\det X$ satisfaz

$$(\det X)' = \text{tr} A(t)(\det X).$$

Em particular, se $X(t)$ for um caminho diferenciável de matrizes invertíveis, vale

$$(\det X)' = \text{tr}(X'(t)X^{-1}(t))(\det X).$$

Demonstração: Suponhamos X uma solução de $X' = A(t)X$. Como esta é uma equação linear, se $\det X(t_0) = 0$, para algum t_0 , então $\det X \equiv 0$, logo é suficiente provar o resultado no caso em que X é não singular. Fazendo φ_i as colunas de X , temos que φ_i são soluções da equação $\varphi_i' = A(t)\varphi_i$ e ainda podemos escrever a expressão de $A(t)$ nesta base $A(t)\varphi_i = \sum a_{ij}\varphi_j$.

Com isto, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det X &= \sum_{i=1}^n \det(\varphi_1, \dots, \varphi'_i, \dots, \varphi_n) = \sum_{i=1}^n \det(\varphi_1, \dots, A(t)\varphi_i, \dots, \varphi_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \det(\varphi_1, \dots, \sum_{j=1}^n a_{ij}\varphi_j, \dots, \varphi_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \det(\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_n) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} \det X = \operatorname{tr} A \det X \end{aligned}$$

Para obter a segunda identidade basta aplicar o resultado ao caso $X' = (X'X^{-1})X$. \square

EXERCÍCIO 1. (*Fórmula de Primeira Variação*) Usando a Fórmula de Liouville e os fatos determinados sobre a métrica de \overline{M} na parametrização \mathbb{X} nesta seção é possível dar uma nova demonstração para a fórmula de primeira variação substancialmente mais simples.

TEOREMA 1.8. (Bishop) *Suponhamos dada uma geodésica γ perpendicular à variedade $M^{n-1} \subset \overline{M}^n$ no ponto m , apontando na direção de $n(m)$ e tal que a curvatura de Ricci ao longo de γ seja maior do que ou igual a $n - 1$. Se h for a curvatura média normalizada de M (orientada segundo $n(m)$) em m , então*

$$(1.15) \quad \frac{(\det J_t)'}{\det J_t} \leq (n-1) \frac{(\cos t - h \sin t)'}{(\cos t - h \sin t)},$$

em $(0, c_-(m))$ e

$$\det J_t \leq (\cos t - h \sin t)^{n-1}$$

em $(0, c_+(m)]$.

Além disto, só ocorre igualdade nas equações acima em um t_0 se for $J_{t_0}^* = (\cos t_0 - h \sin t_0)\operatorname{Id}$ e $R(\gamma', \cdot)\gamma' = \operatorname{Id}$ em $[0, t_0]$.

Demonstração: Tomemos $\theta \in (0, \pi)$ tal que $\cot \theta = h$. Então a expressão $\cos t - h \sin t$ se torna $\frac{\sin(\theta-t)}{\sin \theta}$ e portanto o termo da direita de (1.15) se simplifica para

$$-(n-1) \frac{\cos(\theta-t)}{\sin(\theta-t)} = -(n-1) \cot(\theta-t) = (n-1) \cot(t-\theta).$$

Façamos agora $W(t) = (J_t')^* J_t - (J_t)^* J_t'$, onde $(J_t)^*$ denota a adjunta de J_t . Então, em $t = 0$, temos, usando as condições iniciais satisfeitas por J_t

$$W(0) = (J_0')^* J_0 - (J_0)^* J_0' = -A^* \operatorname{Id} + \operatorname{Id} A = 0,$$

pois a segunda forma fundamental A é autoadjunta. E derivando a expressão para W , obtemos, para $v, w \in T_{\gamma(t)}M$

$$\begin{aligned} \langle W'(t)v, w \rangle &= \langle ((J_t'')^* J_t - (J_t)^* J_t'')v, w \rangle = \langle J_t' v, J_t'' w \rangle - \langle J_t'' v, J_t' w \rangle \\ &= -\langle R(\gamma', J_t' w)\gamma', J_t v \rangle + \langle R(\gamma', J_t v)\gamma', J_t' w \rangle = 0, \end{aligned}$$

onde, na penúltima passagem, usamos a equação (1.14). Com isto, concluímos que $W \equiv 0$ e portanto, fazendo $U = J_t'(J_t)^{-1}$, temos

$$U^* - U = (J^{-1})^* W J^{-1} = 0,$$

logo U é autoadjunta. E ainda, uma conta no mesmo espírito da anterior mostra que U satisfaz a equação

$$U' + U^2 + R(\gamma', \cdot)\gamma' = 0$$

o que implica que a mesma vale para os traços

$$\text{tr}U' + \text{tr}U^2 + \text{tr}R(\gamma', \cdot)\gamma' = 0$$

O traço da curvatura acima é exatamente a curvatura de Ricci que, por hipótese, é limitada inferiormente por $n - 1$, logo vale

$$\text{tr}U' + \text{tr}U^2 + n - 1 \leq 0.$$

Lembrando que no espaço das transformações lineares $\text{tr}(AB^*)$ determina um produto interno, usando que U é autoadjunta, temos

$$(1.16) \quad \text{tr}U = \text{tr}(U\text{Id}^*) \leq (\text{tr}(UU^*))^{\frac{1}{2}} (\text{tr}\text{Id}\text{Id}^*)^{\frac{1}{2}} = ((n-1)\text{tr}U^2)^{\frac{1}{2}}.$$

E portanto

$$(1.17) \quad \text{tr}U' + \frac{(\text{tr}U)^2}{n-1} + n - 1 \leq 0.$$

Logo, definindo $\varphi = \text{tr}U = \text{tr}(J_t'(J_t)^{-1})$, pela Fórmula de Liouville, temos que $\varphi = \frac{(\det J_t)'}{\det J_t}$ e além disto, pelas contas feitas até agora, φ satisfaz

$$\varphi' + \frac{\varphi^2}{n-1} + n - 1 \leq 0.$$

Donde

$$(1.18) \quad \frac{-\varphi'}{\frac{\varphi^2}{n-1} + n - 1} \geq 1$$

E integrando, lembrando que $\varphi(0) = \text{tr}(J_0'(J_0)^{-1}) = -\text{tr}A = -(n-1)h$, obtemos

$$t \leq \text{arccot} \left(\frac{\varphi}{n-1} \right) \Big|_0^t = \text{arccot} \left(\frac{\varphi}{n-1} \right) - \text{arccot}(-h) = \text{arccot} \left(\frac{\varphi}{n-1} \right) + \theta$$

Portanto,

$$t - \theta \leq \text{arccot} \left(\frac{\varphi}{n-1} \right)$$

Ou ainda, como a cotangente é uma função decrescente,

$$\cot(t - \theta) \geq \frac{\varphi}{n-1},$$

o que prova (1.15). Obviamente a segunda desigualdade segue da primeira por integração.

Agora analisemos o caso em que há igualdade em um t_0 . Neste caso, a desigualdade em (1.18) deve ser igualdade para todo $t \leq t_0$. E portanto as estimativas usadas em (1.16) e (1.17) devem de fato ser igualdades neste intervalo. Para que (1.16) seja uma igualdade U deve ser múltiplo da identidade $U = \lambda(t)\text{Id}$. Usando que agora temos igualdade em (1.17) obtemos que λ é solução de

$$\lambda' + \lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda(0) = h.$$

Conseqüentemente, após integração, obtemos $\lambda = \cot(t - \theta)$ e pela definição $U = J_t'(J_t)^{-1}$, concluímos que

$$J_t' = \cot(t - \theta)J_t$$

e portanto

$$(J_t^*)' = \cot(t - \theta)J_t^*$$

e daí $J_t^* = \frac{\sin(\theta-t)}{\sin\theta} \text{Id}$ em $(0, t_0]$. Esta equação implica que $J_t(v) = \frac{\sin(\theta-t)}{\sin\theta} v(t)$, onde $v(t)$ é o transporte paralelo de v ao longo de γ . Usando a equação de Jacobi, vemos que $R(\gamma', \cdot)\gamma' = \text{Id}$. \square

OBSERVAÇÃO. O Teorema de Bishop é válido no caso mais geral em que a curvatura de Ricci é limitada inferiormente por $(n-1)\kappa$. Se $\kappa > 0$, após uma dilatação/contração recaímos no caso aqui demonstrado. Se $\kappa < 0$ a demonstração é uma cópia da aqui apresentada amenos das alterações óbvias de que $\cos t$, $\sin t$ e etc se tornam $\frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \cosh \sqrt{-\kappa}t$, $\frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \sinh \sqrt{-\kappa}t$ e etc. Deixamos este caso como exercício para o leitor, banca, acessor...

COROLÁRIO. Dada $M^{n-1} \subset \overline{M}^n$ uma subvariedade de uma variedade com curvaturas de Ricci maiores que $n-1$, $c_+(m)$ é menor que o primeiro zero de $\cos t - h(m) \sin t$, e $c_-(m)$ é menor que o primeiro zero de $\cos t + h(m) \sin t$, onde $h(m)$ é a curvatura média normalizada de M em m .

Demonstração: Com efeito, conforme já foi observado anteriormente, $c_-(m)$ são sempre menores do que ou iguais aos primeiros zeros de $\det J_t$ ao longo da geodésica partindo de m com vetor tangente $\pm n(m)$. A afirmação sobre c_+ segue então imediatamente do Teorema de Bishop. Quanto à afirmação sobre c_- , devemos lembrar que se trocarmos a orientação de M , a curvatura média troca de sinal. \square

COROLÁRIO. (*Desigualdade de Heintze-Karcher*) Sejam $M^{n-1} \subset \overline{M}^n$ diferenciável com curvatura média constante e igual a $(n-1)h$, $t > 0$ e $D \subset M$ um aberto de M tal que $\mathbb{X}(\cdot, t)$ esteja definida em D . Se as curvaturas de Ricci de \overline{M} forem limitadas inferiormente por $n-1$, vale

$$\text{vol}_{n-1}(\mathbb{X}(D, t)) \leq \text{vol}_{n-1}(D)(\cos t - h \sin t)^{n-1}$$

Além disto, nas mesmas condições acima, se $M = \partial\Omega$, para algum aberto $\Omega \subset \overline{M}$, vale

$$(1.19) \quad \text{vol}_n(\Omega) \leq \text{vol}_{n-1}(M) \int_0^r (\cos t - h \sin t)^{n-1} dt,$$

onde h é a curvatura média normalizada de M orientada de acordo com o vetor normal interno e r é o primeiro zero do integrando, i. e., $\cot r = h$. Ademais, se houver igualdade em (1.19), então as geodésicas unitárias perpendiculares a M apontando para dentro de Ω são minimizantes da distância a M para todo $t < r$.

Demonstração: A primeira identidade é conseqüência de (1.12) mais o Teorema de Bishop. Com efeito,

$$\begin{aligned} \text{vol}_{n-1}(\mathbb{X}(D, t)) &= \int_{\mathbb{X}(D, t)} d\omega_t = \int_D \det J_t d\omega_0 \leq \int_D (\cos t - h \sin t)^{n-1} d\omega_0 = \\ &= (\cos t - h \sin t)^{n-1} \text{vol}_{n-1}(D). \end{aligned}$$

A segunda é consequência da primeira após integração em t , mas também podemos vê-la como consequência da identidade (1.13)

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(\Omega) &= \int_{\overline{M}} \chi_\Omega d\overline{\omega} = \int_M \int_{c_-(m)}^{c_+(m)} \chi_\Omega \det J_t^* dt d\omega_0 \\ &= \int_M \int_0^{c_+(m)} \det J_t^* dt d\omega_0 \leq \int_M \int_0^{c_-(m)} (\cos t - h \sin t)^{n-1} dt d\omega_0 \\ &\leq \int_M \int_0^r (\cos t - h \sin t)^{n-1} dt d\omega_0 = \text{vol}_{n-1}(M) \int_0^r (\cos t - h \sin t)^{n-1} dt \end{aligned}$$

No caso de termos igualdade em (1.19), obtemos pelas contas acima, entre outras coisas, que $c_+(m) = r$, para todo $m \in M$, logo as geodésicas unitárias ortogonais a M apontando para o interior de Ω são minimizantes da distância a M para todo $t < r$. \square

EXEMPLO 3. No caso de $\Omega \subset S^n$ ser uma calota esférica de raio r , todas as desigualdades acima se tornam igualdades, como consequência do caso em que há igualdade no Teorema de Bishop (note que a curvatura média de $\partial\Omega$ é constante por esta ser homogênea com as isometrias de S^n). Além disto, podemos calcular o volume de Ω tanto integrando o elemento de volume de S^n sobre Ω como usando (1.19), daí obtemos:

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(\Omega) &= \int_0^r (\sin t)^{n-1} \omega_{n-1} dt = \int_0^r (\sin(r-t))^{n-1} \omega_{n-1} dt \\ &= \int_0^r (\sin r \cos t - \sin t \cos r)^{n-1} \omega_{n-1} dt = (\sin r)^{n-1} \omega_{n-1} \int_0^r (\cos t - \cot r \sin t)^{n-1} dt \\ &= \text{vol}_{n-1}(\partial\Omega) \int_0^r (\cos t - \cot r \sin t)^{n-1} dt. \end{aligned}$$

de onde, comparando com (1.19), concluímos que a curvatura média normalizada de $\partial\Omega$ é $\cot r$. É claro que este fato poderia ter sido provado fazendo as contas.

O Teorema de Bishop na forma apresentada é uma alteração do Teorema “Clássico” de Bishop que trata da comparação do volume de bolas a partir de limitações da curvatura da variedade. A situação é a seguinte. Suponhamos que as curvaturas de Ricci de M sejam limitadas inferiormente por $(n-1)\kappa$. Tomemos um ponto $m \in M$ e consideremos a parametrização local \mathbb{X} de M dada pela exponencial no ponto m . Para cada $w \in T_p M$ de norma 1, denotamos r_w o maior valor de t tal que a geodésica γ saindo de m com vetor tangente w é minimizante da distância a m em $[0, t)$. Se considerarmos para a exponencial o domínio em forma de estrela (centrado na origem) formado pela união dos segmentos $D = \cup_{\|w\|=1} [0, r_w)w$, o mesmo argumento usado anteriormente mostra que o conjunto dos pontos não parametrizados por \mathbb{X} tem medida nula e que \mathbb{X} pode ser caracterizada do seguinte modo: dado $p \in M$ seja γ a geodésica unitária minimizando a distância entre m e p , então $\mathbb{X}(d(p, m)\gamma'(0)) = p$.

Agora vamos obter alguma informação sobre a métrica de M nesta parametrização. Tome-mos $v \in T_w D$ e uma curva α em D passando por w com vetor tangente v . Então, para cada s fixo, $\mathbb{X}(t\alpha(s))$ é uma geodésica e portanto esta é uma variação da geodésica $\mathbb{X}(tw)$ por geodésicas e $\partial_s \mathbb{X}(t\alpha(s))|_{s=0}$ é um campo de Jacobi ao longo de $\gamma(t) = \mathbb{X}(tw)$ (chamemo-lo $J_{tw}(v)$). Como

$\mathbb{X}(0\alpha(s)) \equiv m$. vemos que $J_{0w}(v) = 0$. Além disto,

$$\partial_t J_{tw}(v)|_{t=0} = \partial_t|_{t=0} \partial_s|_{s=0} \exp_m(t\alpha(s)) = \partial_s|_{s=0} \partial_t|_{t=0} \exp_m(t\alpha(s)) = \partial_s|_{s=0} \alpha(s) = v.$$

Em particular, $J_{tw}(w)$ é o campo de Jacobi satisfazendo as condições $J_{0w}(w) = 0$ e $J'_{0w}(w) = w = \gamma'(0)$. logo $J_{tw}(w) = t\gamma'(t)$.

Novamente denotando por $J_{tw}^*(v)$ o transporte paralelo de $J_{tw}(v)$ de volta ao ponto m e identificando T_0T_mM com T_mM , vemos que J_{tw}^* é um endomorfismo de T_mM . Tomando uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ para T_mM e escrevendo ω_t para a forma de volume em $\gamma(t)$ vem

$$\omega_t(J_{tw}(v_1), \dots, J_{tw}(v_n)) = \omega_0(J_{tw}^*(v_1), \dots, J_{tw}^*(v_n)) = \det J_{tw}^* \omega_0(v_1, \dots, v_n).$$

Como a matriz de J_{tw}^* em uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ fixada é a mesma que a de J_{tw} considerando os transportes paralelos $\{v_1(t), \dots, v_n(t)\}$, escrevemos a identidade acima na forma

$$\omega_t(J_{tw}(v_1), \dots, J_{tw}(v_n)) = \det J_{tw} \omega_0(v_1, \dots, v_n).$$

Ademais, se tomarmos a base acima da forma $\{v_1(t), \dots, v_{n-1}(t), w(t)\}$, com v_1, \dots, v_{n-1} ortogonais a w , vemos que os campos de Jacobi $J_{tw}(v_i)$ são sempre ortogonais a $w(t) = \gamma'(t)$, pois, pela equação de Jacobi,

$$\langle J_{tw}''(v_i), \gamma'(t) \rangle = -\langle R(\gamma'(t), J_{tw}(v_i))\gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 0.$$

E as condições iniciais satisfeitas por $J_{tw}(v_i)$ implicam

$$\begin{aligned} \langle J_{0w}(v_i), \gamma'(0) \rangle &= \langle 0, w \rangle = 0 \quad \text{e} \\ \langle J'_{0w}(v_i), \gamma'(0) \rangle &= \langle v_i, w \rangle = 0. \end{aligned}$$

Com isto, podemos calcular o determinante

$$\det J_{tw} = \|J_{tw}(w)\| \det(J_{tw}|_{w^\perp}) = t\|w\| \det(J_{tw}|_{w^\perp}).$$

Conseqüentemente, podemos estabelecer uma relação entre o elemento de volume da esfera centrada em m e o elemento de volume da esfera unitária em \mathbb{R}^n usando o determinante acima. Com efeito, suponhamos $\|w\| = 1$ e façamos ω_{S_r} o elemento de volume da esfera de raio r no ponto $\gamma(r)$, β o elemento de volume da esfera unitária de \mathbb{R}^n em w e ω_r conforme acima.

$$\begin{aligned} \omega_{S_r}(J_{rw}(v_1), \dots, J_{rw}(v_{n-1})) &= \frac{1}{t\|w\|} \omega_r(J_{rw}(v_1), \dots, J_{rw}(v_{n-1}), J_{rw}(w)) \\ &= \det(J_{tw}|_{w^\perp}) \omega_0(v_1, \dots, v_{n-1}, w) \\ &= \det(J_{tw}|_{w^\perp}) \beta(v_1, \dots, v_{n-1}) \end{aligned}$$

Isto nos dá a integral análoga de (1.13)

$$(1.20) \quad \int_M f d\omega = \int_{S^{n-1}} \int_0^{r_w} f(\mathbb{X}(tw)) \det(J_{tw}|_{w^\perp}) dt d\beta.$$

Com esta notação, temos o seguinte

TEOREMA 1.9. (Bishop) *Suponhamos dada uma geodésica unitária γ na variedade riemanniana M partindo do ponto m e tal que a curvatura de Ricci ao longo de γ seja maior do que ou igual a $(n-1)\kappa$. Então*

$$(1.21) \quad \frac{(\det J_{t\gamma'(0)}|_{\gamma'^\perp})'}{\det J_{t\gamma'(0)}|_{\gamma'^\perp}} \leq (n-1) \frac{s'_\kappa(t)}{s_\kappa(t)}.$$

em $(0, r_{\gamma'(0)})$ e

$$\det J_{t, \gamma'(0)}|_{\gamma'(0)^-} \leq (s_\kappa(t))^{n-1}$$

em $(0, r_{\gamma'(0)})$, onde s_κ é a solução de

$$y'' + ky = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Além disto, só ocorre igualdade nas equações acima em um t_0 se for $J_{t, \gamma'}^*|_{\gamma'^\pm} = s_\kappa(t)\text{Id}$ e $R(\gamma', \cdot)\gamma' = \text{Id}$ em $[0, t_0]$.

E, após integração, obtemos o equivalente da Desigualdade de Heintze-Karcher, que é

TEOREMA 1.10. (Bishop) *Suponha que as curvaturas de Ricci de uma variedade M sejam limitadas inferiormente por $(n-1)\kappa$. Então para todos $m \in M$ e $r > 0$ vale*

$$(1.22) \quad \text{vol}_{n-1}(\partial B_r(x)) \leq \text{vol}_{n-1}(\partial B_r^\kappa)$$

$$(1.23) \quad \text{vol}_n(B_r(x)) \leq \text{vol}_n(B_r^\kappa)$$

e

$$(1.24) \quad \varphi(r) = \frac{\text{vol}_n(B_r(x))}{\text{vol}_n(B_r^\kappa)}$$

é uma função decrescente de r , onde $B_r(x)$ é a bola de centro x e raio r em M e B_r^κ a bola de raio r na forma espacial simplesmente conexa de curvatura constante κ . Além disto, só haverá igualdade em (1.23) ou φ terá derivada 1 em r se $B_r(x)$ for isométrica a B_r^κ .

A demonstração destas versões do teorema também seguem as mesmas linhas aqui apresentadas, com as únicas alterações provindo do fato de que agora $J_{t,w}$ satisfaz condições iniciais $J_{0,w} \equiv 0$ e $J'_{0,w} = \text{Id}$. Para uma demonstração veja, por exemplo, [10, 18].

COROLÁRIO . (Topogonov) *Se uma variedade riemanniana M tem curvaturas de Ricci limitadas inferiormente por $(n-1)$ e diâmetro π , esta superfície é uma esfera.*

Demonstração: Tome x e y dois pontos de M que realizam o diâmetro. Então, tomando $r = \pi/2$ e $r = \pi$ em (1.24), temos

$$\frac{\text{vol}_n(B_{\pi/2}(x))}{\text{vol}_n(B_{\pi/2}^1)} \geq \frac{\text{vol}_n(B_\pi(x))}{\text{vol}_n(B_\pi^1)} = \frac{\text{vol}_n(M)}{\text{vol}_n(S^n)},$$

Agora observamos que $\text{vol}_n(B_{\pi/2}^1) = \frac{1}{2}\text{vol}_n(S^n)$ e portanto

$$\text{vol}_n(B_{\pi/2}(x)) \geq \frac{1}{2}\text{vol}_n(M).$$

Repetindo o mesmo argumento com y no lugar de x , obtemos

$$\text{vol}_n(B_{\pi/2}(y)) \geq \frac{1}{2}\text{vol}_n(M).$$

Mas a nossa hipótese sobre o diâmetro de M implica que estas bolas são disjuntas (e unidas resultam M), logo

$$\text{vol}_n(B_{\pi/2}(x)) + \text{vol}_n(B_{\pi/2}(y)) = \frac{1}{2}\text{vol}_n(M)$$

e portanto φ definida em (1.24) é constante em $(\pi/2, \pi)$ e concluímos que M é isométrica à esfera. \square

TEOREMA 1.11. (Gromov-Levy) *Sejam \overline{M}^n uma variedade riemanniana cujas curvaturas de Ricci são limitadas inferiormente por $n-1$ e $\beta \in (0, 1)$. Se $\Omega \subset \overline{M}$ é tal que $\text{vol}_n(\Omega) = \beta \text{vol}_n(\overline{M})$, então*

$$\frac{\text{vol}_{n-1}(\partial\Omega)}{\text{vol}_n(\overline{M})} \geq \frac{\text{vol}_{n-1}(\partial B_\beta)}{\text{vol}_n(S^n)},$$

onde B_β é a calota esférica com volume $\beta \text{vol}_n(S^n)$. Ademais, se para algum $\Omega \subset \overline{M}$ valer a igualdade, então \overline{M} é uma esfera e Ω uma calota esférica

Demonstração: Nós assumiremos que existe um domínio Ω com bordo suave tal que $\text{vol}_n(\Omega) = \beta \text{vol}_n(\overline{M})$ e $\frac{\text{vol}_{n-1}(\partial\Omega)}{\text{vol}_n(\overline{M})}$ é mínimo entre os domínios com este volume. Pela fórmula de primeira variação, sabemos que $M = \partial\Omega$ tem curvatura média constante, logo podemos estimar o volume de Ω pela desigualdade de Heintze-Karcher

$$\text{vol}_n(\Omega) \leq \text{vol}_{n-1}(M) \int_0^r (\cos t - h \sin t)^{n-1} dt,$$

onde $h = \frac{1}{n-1}H$ é a curvatura média normalizada e r é o primeiro zero do integrando, i.e., $h = \cot r$.

Definamos então

$$a(r) = \left(\int_0^r (\cos \tau - \cot r \sin \tau)^{n-1} d\tau \right)^{-1}.$$

Pelo Exemplo 3, sabemos que

$$(*) \quad a(r) = \frac{\text{vol}_{n-1}(\partial B(r))}{\text{vol}_n(B(r))},$$

onde $B(r)$ é a bola de raio r na esfera S^n .

Observe que $a(r)$ é decrescente uma vez que

$$\text{sinal} \left(\frac{da}{dr} \right) = \text{sinal} \left(\frac{da/dr}{a^2} \right) = -\text{sinal} \left(\frac{d}{dr} \frac{1}{a} \right),$$

mas,

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{a} = \int_0^r (n-1)(\cos t - \cot r \sin t)^{n-2} (-\sin t)(-\csc^2 r) dt > 0,$$

pois o maior valor possível para r é π .

Com isto, a desigualdade de Heintze-Karcher se torna

$$\frac{\text{vol}_n(\Omega)}{\text{vol}_{n-1}(M)} \leq \frac{1}{a(r)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{vol}_{n-1}(M)}{\text{vol}_n(\overline{M})} \geq a(r)\beta.$$

Repetindo as mesma contas só que com Ω substituído por $\overline{M} \setminus \Omega$, lembrando que neste caso a curvatura média troca de sinal, vem

$$\frac{\text{vol}_{n-1}(M)}{\text{vol}_n(\overline{M})} \geq a(\pi - r)(1 - \beta).$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
 (**) \quad \frac{\text{vol}_{n-1}(M)}{\text{vol}_n(\overline{M})} &\geq \max\{a(r)\beta, a(\pi-r)(1-\beta)\} \\
 &\geq \inf_t \max\{a(t)\beta, a(\pi-t)(1-\beta)\}
 \end{aligned}$$

Como $a(t)$ é decrescente, o ínfimo acima é atingido em um t_0 tal que $a(t_0)\beta = a(\pi-t_0)(1-\beta)$. Logo, usando (*) vem

$$\beta \frac{\text{vol}_{n-1}(\partial B(t_0))}{\text{vol}_n(B(t_0))} = (1-\beta) \frac{\text{vol}_{n-1}(\partial B(t_0))}{\text{vol}_n(B(\pi-t_0))} = \frac{\text{vol}_{n-1}(\partial B(t_0))}{\text{vol}_n(S^n)},$$

e portanto $\beta = \frac{\text{vol}_n(B(t_0))}{\text{vol}_n(S^n)}$ e, por (**),

$$\frac{\text{vol}_{n-1}(M)}{\text{vol}_n(\overline{M})} \geq \frac{\text{vol}_{n-1}(\partial B(t_0))}{\text{vol}_n(S^n)},$$

o que dá conta de desigualdade.

Agora suponhamos que se tenha igualdade. Vemos então que $r = \text{arccot } h$ deve ser o t_0 que realiza o mínimo em (**). Daí concluímos que para Ω e $\overline{M} \setminus \Omega$ vale a igualdade na desigualdade de Heintze-Karcher portanto toda geodésica ortogonal a M apontando para o interior de Ω é minimizante da distância a M para t no intervalo $(-\text{arccot } h, \text{arccot } h)$. Tomemos γ uma tal geodésica e sejam $p = \gamma(\text{arccot } h)$ e $q = \gamma(-\text{arccot } h)$. Então, como p e q estão de lados opostos de M , temos

$$d(p, q) \geq d(p, M) + d(q, M) = \text{arccot } h + \text{arccot }(-h) = \text{arccot } h + \pi - \text{arccot } h = \pi.$$

Logo o diâmetro de M é π e pelo Teorema de Topogonov M é uma esfera. Ademais, o mesmo argumento acima mostra que dado um ponto $p \in \Omega$ com $d(p, M) = \text{arccot } h$ e um ponto $q \notin \Omega$ com $d(q, M) = \text{arccot }(-h)$, p e q são antípodas. Conseqüentemente, todas as geodésicas normais a M apontando para dentro de Ω deixam de ser minimizantes quando atingem um ponto comum a todas e tal ponto está à distância $\text{arccot } h$ de M . logo Ω é a bola centrada em tal ponto e com raio $\text{arccot } h$. \square

Na demonstração que dada para o Teorema de Gromov-Levy, supusemos que o problema isoperimétrico fosse resolvido por um domínio suave Ω . Conforme visto no caso de \mathbb{R}^n , há uma grande lacuna entre o apresentado e uma solução completa, mas devemos observar que no caso atual, ao contrário do anterior, em \mathbb{R}^n , a existência de um conjunto de perímetro finito, volume V e perímetro mínimo é um resultado fácil e usa um argumento simples de compacidade. Com efeito, fixemos V e façamos

$$p = \inf\{p(\partial\Omega) \mid \text{vol}_n(\Omega) = V \text{ e } \Omega \text{ é de perímetro finito}\}.$$

Então tomemos (Ω_k) uma seqüência minimizante, isto é, $\text{vol}_n(\Omega_k) = V$ e $p(\Omega_k) \searrow p$. Estas hipóteses garantem que $\|\chi_{\Omega_k}\|_{BV}$ é limitada, logo, pelo Teorema 1.3 (note que \overline{M} é compacta), existe uma subsequência, que ainda denotaremos pelos mesmos símbolos, convergindo em $L^1(\overline{M})$ a uma função f . Tomando subsequências se necessário, podemos supor ainda que χ_{Ω_k} converge pontualmente a f . logo f é a função característica de um conjunto Ω e daí temos

$$\text{vol}_n(\Omega) = \int_{\overline{M}} \chi_{\Omega} = \lim \int_{\overline{M}} \chi_{\Omega_k} = V.$$

Além disto, pelo Teorema 1.1, temos que $\chi_\Omega \in BV$ e

$$p(\Omega) = \int_M |D\chi_\Omega| \leq \liminf \int_M |D\chi_{\Omega_k}| = \lim p(\Omega_k) = p.$$

E portanto vemos que este Ω é de fato solução do problema isoperimétrico

Mais complicada é a questão da diferenciabilidade, pois até o momento não fizemos qualquer comentário sobre regularidade de conjuntos de perímetro finito. De fato, pode-se mostrar que a fronteira (no sentido de teoria da medida) de um conjunto de perímetro finito é formada por um conjunto de medida de Hausdorff $n - 1$ dimensional nula unido com variedades C^1 (veja [19, 41]). No nosso caso, o fato de o conjunto ser solução do problema isoperimétrico ainda traz mais restrições sobre o tipo de singularidades da fronteira e implica que esta de fato é formada por superfícies C^∞ e que as singularidades ocorrem em um conjunto de dimensão de Hausdorff menor do que ou igual a $n - 8$ (veja [16]).

Porém, mais importante neste sentido é um resultado de Almgren e de Giorgi ([1, 6]) que diz que, em \mathbb{R}^n , se a união de dois “cones abertos” for minimal, então a interseção deles não pode ser apenas a origem. No nosso caso, dado um ponto $p \in \overline{M}$, este resultado implica que o ponto de M que realiza a distância é um ponto regular e portanto podemos aplicar a teoria desenvolvida acima. Com efeito, se o ponto $m \in M$ que realizasse a distância fosse singular, tomando a geodésica ligando m a p , localmente M estaria apenas de um lado do hiperplano perpendicular a esta geodésica (pela minimalidade da distância) e portanto, fazendo o “blow up” de M neste ponto, obteríamos um cone minimal que está apenas de um lado do hiperplano (observe que, sendo o ponto singular, este cone é diferente de um semi-espço). Claramente a reflexão de tal cone no hiperplano também seria minimal e a interseção de ambos seria apenas a origem, o que contradiz o resultado mencionado. Para outro argumento, veja [20, 21].

3.3. Outros Resultados. Até o momento nos detivemos em procurar teoremas de comparação para o caso em que as curvaturas de Ricci da variedade M são limitadas inferiormente por uma constante positiva e o grande resultado neste sentido foi o Teorema de Gromov-Levy que apresentou um perfil isoperimétrico para tais variedades. Agora faremos alguns comentários sobre o outro caso extremo: as curvaturas de M são limitadas superiormente por uma constante. A seguir usaremos que o problema isoperimétrico já foi resolvido também no espaço hiperbólico \mathbb{H}^n e que os domínios isoperimétricos neste caso também existem e são as bolas ([7, 35]).

Sabendo que os domínios isoperimétricos da esfera e do espaço hiperbólico são bolas, podemos calcular o perfil isoperimétrico para estas variedades. Começemos por S^n . Fixemos um volume V e tomemos a calota esférica com este volume. Então

$$V = \int_0^r \omega_{n-1} \sin^{n-1} t \, dt$$

para algum $r > 0$ e o perímetro da calota de raio r é dado

$$p(r) = \omega_{n-1} \sin^{n-1} r.$$

Desta forma, se conseguíssemos explicitar $r = r(V)$, a desigualdade isoperimétrica afirma que se $\Omega \subset S^n$ tem volume V e perímetro finito, então

$$p(\Omega) \geq \omega_{n-1} \sin^{n-1} r(|\Omega|).$$

No caso $n = 2$, podemos realmente fazer as contas acima. A expressão para o volume se torna $V = 2\pi(1 - \cos r)$ e daí a estimativa para o perímetro de um conjunto Ω se torna

$$p(\Omega) \geq 2\pi \sin \left(\arccos \left(1 - \frac{|\Omega|}{2\pi} \right) \right)$$

ou ainda, elevando ao quadrado e fazendo as contas

$$(p(\Omega))^2 \geq 4\pi|\Omega| - |\Omega|^2.$$

Se estivéssemos trabalhando com um esfera de raio R , ao invés de com a esfera padrão, após uma contração e usando que a curvatura K de tal esfera é $\frac{1}{R^2}$, veríamos que vale

$$(1.25) \quad (p(\Omega))^2 \geq 4\pi|\Omega| - K|\Omega|^2,$$

No caso do espaço hiperbólico, o volume de uma bola de raio r se escreve

$$V = \int_0^r \omega_{n-1} \sinh^{n-1} t \, dt$$

e o perímetro é dado por

$$p(r) = \omega_{n-1} \sinh^{n-1} r$$

E usando a condição sobre o volume para escrever $r = r(V)$, a desigualdade isoperimétrica se escreveria, para um Ω de perímetro finito

$$p(\Omega) \geq \omega_{n-1} \sinh^{n-1} r(|\Omega|).$$

Novamente, no caso $n = 2$ é possível fazer as contas acima e, no caso de um domínio Ω de perímetro finito, vale

$$(p(\Omega))^2 \geq 4\pi|\Omega| + |\Omega|^2.$$

Com dilatações obtemos a desigualdade geral

$$(1.25) \quad (p(\Omega))^2 \geq 4\pi|\Omega| - K|\Omega|^2,$$

onde K novamente é a curvatura do espaço hiperbólico dilatado. Observe que no caso do plano, que seria a forma espacial simplesmente conexa com curvatura constante e igual a zero, (1.25) também se verifica e é apenas a desigualdade isoperimétrica clássica. Deste exemplo vemos que, pelo menos em dimensão 2, aumentar a curvatura “piora” a desigualdade e surge a questão: Suponha que a curvatura de uma superfície 2-dimensional M seja limitada superiormente por K . Os domínios de perímetro finito de M satisfazem a alguma desigualdade do tipo (1.25)? O fato é que tal pergunta já foi respondida afirmativamente há muito tempo por A. Weil [40] e é o conteúdo do seguinte

TEOREMA 1.12. *Assuma que a curvatura de uma variedade 2-dimensional simplesmente conexa seja limitada superiormente por κ . Então para todo Ω de perímetro finito vale*

$$p(\Omega)^2 \geq 4\pi|\Omega| - K|\Omega|^2.$$

E uma pergunta óbvia seria se uma tal desigualdade tem um análogo em dimensões maiores [2]. Uma versão para esta pergunta seria

CONJECTURA . (Aubin) *Se M^n é uma variedade Riemanniana simplesmente conexa com curvatura não positiva, então qualquer domínio Ω de perímetro finito satisfaz a desigualdade isoperimétrica de \mathbb{R}^n*

$$p(\Omega) \geq n\alpha_n^{\frac{1}{n}} |\Omega|^{\frac{n-1}{n}}.$$

Além do caso $n = 2$, esta conjectura já foi respondida afirmativamente para as dimensões 3 e 4, respectivamente, em [27] e [12], mas o caso geral ainda permanece em aberto

Como veremos no próximo capítulo, uma aplicação imediata de cada desigualdade isoperimétrica fornece estimativas para o menor primeiro autovalor dos domínios de uma superfície.

CAPÍTULO 2

A Desigualdade de Faber-Krahn

A desigualdade de Faber-Krahn é outro problema cuja resolução se baseia em técnicas de análise. Para enunciá-la precisamente, recordemos algumas propriedades do laplaciano. Dado um domínio conexo $\Omega \subset M$ sempre podemos encontrar uma seqüência (λ_n) tal que $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \cdots \leq \lambda_n \nearrow \infty$ e funções $0 \neq u_n \in H_0^1(\Omega)$ que satisfazem

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \lambda_n u_n & \text{em } \Omega \\ u_n = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

e ainda, as u_n formam uma base para $H_0^1(\Omega)$. Salientemos o fato de que conforme sugerido pela notação acima, o menor autovalor (ou primeiro autovalor) λ_1 sempre é simples. Mais ainda, a autofunção u_1 a ele associada não muda de sinal em Ω . Obviamente, se mudarmos o domínio Ω , também mudam os autovalores do laplaciano e a pergunta que se faz então é: dentre todos os domínios possíveis com um volume fixado V , quais são aqueles que têm o menor primeiro autovalor, se é que tal ínfimo é atingido? Uma vez respondida esta pergunta, surgem outras, como, que regularidade podemos esperar do bordo de tal domínio? Como podemos caracterizá-lo geometricamente? Que estimativas temos para o seu valor? A Desigualdade de Faber-Krahn clássica afirma que dentre todos os domínios do plano com volume fixado V , o que tem menor primeiro autovalor é o círculo, ou seja, denotando por B_V a bola de volume V ,

$$\lambda_1(B_V) \leq \lambda_1(\Omega), \quad \forall \Omega \text{ tal que } |\Omega| = V.$$

Na primeira seção, a seguir, provamos as afirmações feitas acima sobre o laplaciano no caso um pouco mais geral de operadores elípticos autoadjuntos, seguindo a apresentação de [13]. Na seção seguinte tratamos o problema de determinar os domínios que minimizam o primeiro autovalor em variedades rotacionalmente simétricas. A chave para tanto são a simetrização de Schwartz, a Fórmula de Co-área e a Desigualdade Isoperimétrica. A referência é o artigo [37], onde é apresentada a resolução para \mathbb{R}^n , mas que se estende automaticamente ao que estamos tratando. Outra referência para esta parte é [9], onde as contas são feitas para tais variedades com um pouco menos de cuidado.

Uma vez elucidada a relação entre a Desigualdade Isoperimétrica e a Desigualdade de Faber-Krahn, cada teorema de comparação do capítulo anterior fornece uma estimativa para o menor primeiro autovalor de uma variedade a partir de uma generalização simples do processo de simetrização. Estas relações são o conteúdo da seção *Teoremas de Comparação*, onde obtemos limitantes inferiores e superiores para o menor primeiro autovalor a partir de limitações da curvatura ou perfis isoperimétricos satisfeitos pela variedade. As referências são [8, 10, 11]. Finalmente, na última seção passamos ao estudo da questão de existência de solução para a desigualdade de Faber-Krahn em variedades riemannianas compactas.

1. Operadores Elípticos de Segunda Ordem

Nesta seção daremos um passeio rápido pelas propriedades de operadores elípticos com enfoque voltado para a questão dos seus autovetores. Embora a apresentação que façamos seja para um tal operador definido no plano, a única diferença que existe para o caso de variedades é que no segundo não há sentido intrínseco em se falar da derivada em relação a x_i , o que nos obriga a definir o operador em termos de formas diferenciais, como é o caso do laplaciano. Não abordaremos aqui estas questões, pois é relativamente claro que todo o estudo se estende a variedades sem qualquer problema. Para propriedades de espaços de Sobolev em variedades e outros tópicos correlacionados, veja [36].

Consideramos o seguinte operador diferencial L na sua forma divergente

$$L(u) = - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu,$$

onde a_{ij} , b_i e c são funções de L^∞ . Além disto, supomos que valha $a_{ij} = a_{ji}$ e que a matriz (a_{ij}) satisfaça a condição de elipticidade uniforme

$$\theta \|\xi\|^2 < \sum a_{ij} \xi_i \xi_j,$$

para algum $\theta > 0$ independente do ponto onde os a_{ij} são avaliados e do vetor ξ escolhido.

Embora nosso interesse inicial seja o problema de achar autovetores para L , o que sempre é um problema em que não se tem unicidade de soluções e a existência é sempre garantida, pois $u = 0$ sempre resolve o problema, vamos começar resolvendo o problema oposto, isto é, determinando condições sob quais se tem existência e unicidade. Para tanto, comecemos definindo o que entendemos por solução.

Queremos resolver o problema $L(u) = f$, em um domínio Ω , $u = 0$ em $\partial\Omega$, para alguma $f \in L^2(\Omega)$. Multiplicando a equação por uma $v \in C_0^1(\Omega)$ e integrando por partes, obteríamos

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} v + cuv = \int_{\Omega} f v,$$

sendo esta igualdade válida para toda $v \in C_0^1(\Omega)$ e portanto para toda $v \in H_0^1(\Omega)$. Então, diremos que uma $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma *solução fraca* para o problema proposto se satisfizer a equação acima para toda $v \in H_0^1(\Omega)$. Escrevendo

$$B[u, v] = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} v + cuv.$$

vemos que $B : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear e que o nosso problema consiste em, dada f , achar u tal que

$$B[u, v] = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in H_0^1.$$

Inicialmente atacamos o problema de se encontrar estas soluções fracas.

TEOREMA 2.1. (Lax-Milgram) *Sejam H um espaço de Banach e $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear satisfazendo*

$$B[u, v] \leq C \|u\| \|v\| \quad e \quad B[u, u] \geq \alpha \|u\|^2,$$

para constantes positivas C e α . Então, para qualquer funcional linear $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ contínuo, existe um único $u \in H$ tal que

$$B[u, v] = f(v), \quad \forall v \in H.$$

Demonstração: Pelas hipóteses sobre B , para cada $u \in H$ fixo, $B[u, \cdot]$ determina um funcional linear contínuo em H . logo, pela identificação do espaço de Hilbert H com o seu dual, vemos que existe um elemento, que designaremos por Au , tal que $B[u, v] = \langle Au, v \rangle$ para todo v . A função A assim definida é linear, pois

$$\langle A(au + bw), v \rangle = B[au + bw, v] = aB[u, v] + bB[w, v] = a\langle Au, v \rangle + b\langle Aw, v \rangle = \langle aAu + bAw, v \rangle.$$

Como a igualdade vale para todo $v \in H$, obtemos a linearidade de A . Para obter a continuidade de A , observamos que

$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au \rangle = B[u, Au] \leq C\|Au\|\|u\|.$$

Agora observamos que A é injetora e tem imagem fechada em H . Com efeito, se $Au = Aw$, então $A(u - w) = 0$ e portanto

$$\alpha\|u - w\|^2 \leq B[u - w, u - w] = \langle A(u - w), u - w \rangle = 0,$$

de onde $u = w$. E esta mesma desigualdade nos fornece a segunda afirmação pois se (u_n) é seqüência de Cauchy em H , temos

$$\alpha\|u_n - u_m\|^2 \leq B[u_n - u_m, u_n - u_m] = \langle A(u_n - u_m), u_n - u_m \rangle \leq \|A(u_n - u_m)\|\|u_n - u_m\|.$$

Portanto, (u_n) também é seqüência de Cauchy em H e conseqüentemente converge a um u e pela continuidade de A , $Au = \lim Au_n$.

Finalmente, observamos que A é sobrejetora. Com efeito, se $w \in H$ está no complemento ortogonal da imagem de A , vale

$$0 = \langle Aw, w \rangle = B[w, w] \geq \alpha\|w\|^2.$$

E portanto a imagem de A é um subespaço fechado denso em H , ou seja, é todo H .

Agora, se f é um funcional linear contínuo em H , podemos identificá-lo com um vetor w tal que $f(v) = \langle w, v \rangle$. Pela sobrejetividade de A , existe u tal que $Au = w$. Para este u temos

$$B[u, v] = \langle Au, v \rangle = \langle w, v \rangle = f(v), \quad \forall v \in H.$$

Claramente este u é único, pois se tivéssemos outro u' , valeria

$$\alpha\|u - u'\|^2 \leq B[u - u', u - u'] = B[u, u - u'] - B[u', u - u'] = f(u - u') - f(u - u') = 0.$$

□

Voltando ao nosso problema de achar soluções fracas, temos a forma bilinear $B : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$ associada ao operador L e $v \mapsto \int f v$ com $f \in L^2$ é um funcional contínuo em H_0^1 , logo a idéia é verificar que B satisfaz as condições do Teorema de Lax-Milgram. A continuidade da forma bilinear é fácil dado que a_{ij}, b_i e c estão em L^∞ :

$$\begin{aligned}
B[u, v] &= \int \sum a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum b_i u_{x_i} v + cuv \\
&\leq \int C \|\nabla u\| \|\nabla v\| + C|v| \|\nabla u\| + C|u| |v| \\
&\leq C \left(\int \|\nabla u\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \|\nabla v\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\
&+ C \left(\int \|\nabla u\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \|v\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + C \left(\int \|u\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \|v\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}
\end{aligned}$$

Para verificar a segunda condição a chave é usar a elipticidade estrita, mas mesmo assim não chegamos exatamente aonde queríamos

$$B[u, u] = \int \sum a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + \int \sum b_i u_{x_i} u + cu^2 = A + B.$$

Pela elipticidade estrita, temos

$$A \geq \theta \int \|\nabla u\|^2.$$

E estimamos B usando a desigualdade de Cauchy com ε :

$$|B| \leq \int C \|\nabla u\| |u| + C|u|^2 \leq \varepsilon \int \|\nabla u\|^2 + C(\varepsilon) \int |u|^2.$$

Tomando $\varepsilon = \theta/2$. obtemos

$$\theta \int \|\nabla u\|^2 \leq A = B[u, u] - B \leq B[u, u] + \frac{\theta}{2} \int \|\nabla u\|^2 + C \int |u|^2.$$

de onde,

$$\frac{\theta}{2} \int \|\nabla u\|^2 \leq B[u, u] + C \int |u|^2.$$

Como, pela desigualdade de Poincaré, $\int \|\nabla u\|^2$ e $\|u\|_{H_0^1}^2$ são normas equivalentes, as contas acima nos dizem que existem números positivos α e γ_0 tais que

$$\alpha \|u\|_{H_0^1}^2 \leq B[u, u] + \gamma_0 \|u\|_{L^2}^2.$$

Desta maneira, não conseguimos verificar a segunda condição do Teorema de Lax-Milgram para a forma bilinear B , mas se considerarmos $L_\gamma = L + \gamma$, com $\gamma \geq \gamma_0$ e B_γ a forma bilinear associada a L_γ , temos

$$B_\gamma[u, u] = B[u, u] + \gamma \|u\|_{L^2}^2 \geq \alpha \|u\|_{H_0^1}^2 + (\gamma - \gamma_0) \|u\|_{L^2}^2 \geq \alpha \|u\|_{H_0^1}^2.$$

Logo, usando Lax-Milgram, $B_\gamma[u, c] = \int f v$ tem solução única para toda $f \in L^2$, o que denotamos escrevendo $L_\gamma u = f$.

Continuando a nossa caçada a soluções fracas para L , com $\gamma \geq \gamma_0$ fixado, estamos interessados em resolver $L_\gamma u = f + \gamma u$, o que é equivalente a

$$u = L_\gamma^{-1} f + \gamma L_\gamma^{-1} u := h + Ku$$

ou ainda.

$$(I - K)u = h.$$

Agora notamos que $L_\gamma : H_0^1 \rightarrow L^2$, logo a sua inversa $L_\gamma^{-1} : L^2 \rightarrow H_0^1 \subset L^2$ será compacta, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, desde que provemos que esta é contínua, caso em que também o será o operador K definido acima. Mas para a continuidade tomemos $u = L_\gamma^{-1}f$

$$\alpha \|u\|_{H_0^1}^2 \leq B_\gamma[u, u] = \int f u \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{H_0^1},$$

de onde

$$\alpha \|L_\gamma^{-1}f\|_{H_0^1} \leq \|f\|_{L^2}.$$

Com isto, temos disponível toda a teoria de operadores compactos para nos ajudar. Por exemplo, se soubermos que 1 não é autovalor do operador K acima, então $I - K$ é invertível e o problema inicial tem solução única. De fato, ainda se pode dizer mais sobre existência de soluções no caso em que 1 é autovalor de K usando a Alternativa de Fredholm, mas para os nossos propósitos já temos o suficiente. então voltemos ao nosso problema de achar autovetores para L .

Queremos achar soluções não triviais para

$$\begin{cases} Lu = \lambda u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Somando-se γu a ambos os membros da equação, obtemos

$$L_\gamma u = (\lambda + \gamma)u \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{\lambda + \gamma}{\gamma} K u,$$

onde K é o mesmo operador compacto definido anteriormente. Então vemos que u será um autovetor para L se, e somente se, for um autovetor de K e os autovalores estão relacionados pela regra λ é autovalor de L se, e somente se, $\frac{\gamma}{\gamma - \lambda}$ é autovalor de K . Pela teoria de operadores lineares compactos, sabemos que os seus autovalores são em quantidade no máximo enumerável e que cada um dos autoespaços (diferentes do núcleo) tem dimensão finita. Mais ainda, os autovalores de um operador compacto, quando em quantidade enumerável, formam uma seqüência convergente a zero. Dada a relação entre os autovalores de L e os de K , vemos que os autovalores de L devem convergir a $\pm\infty$. Por outro lado, se $\lambda \leq -\gamma_0$, o problema $Lu = \lambda u$ seria equivalente a $(L - \lambda)u = 0$ que, como vimos, tem solução única, logo, de fato, vale que a seqüência dos autovalores deve convergir a infinito. Juntando tudo, temos o seguinte

TEOREMA 2.2. *Dado um operador elíptico de segunda ordem L conforme acima, existe um conjunto Λ no máximo enumerável tal que se $\gamma \notin \Lambda$ então o problema*

$$\begin{cases} Lu = \gamma u + f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

tem solução única para toda $f \in L^2(\Omega)$. Além disto, se $\lambda \in \Lambda$, então o problema

$$\begin{cases} Lu = \lambda u, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

tem uma quantidade finita de soluções linearmente independentes. Por fim, se $\Lambda = \{\lambda_n\}$ for enumerável, podemos ordenar seus elementos, contando com as respectivas multiplicidades, de forma a obter uma seqüência (λ_n) não decrescente convergente a infinito.

Agora consideraremos um operador L com a forma

$$Lu = \sum (a_{ij}u_{x_j})_{x_i} + cu,$$

com $c \geq 0$ e os a_{ij} ainda satisfazendo as condições de simetria e elipticidade estrita. Este operador tem as vantagens de ser autoadjunto, ou seja, $B[u, v] = B[v, u]$, e positivo definido, ou seja, $B[u, u] \geq \alpha \|u\|_{H_0^1}^2$ para algum α positivo. Isto nos permite melhorar substancialmente as conclusões do Teorema 2.2.

TEOREMA 2.3. *Dado um operador L nas condições acima valem*

1. Cada autovalor de L é real e positivo;
2. Se repetirmos cada autovalor (λ_i) com a sua respectiva multiplicidade, teremos $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$
3. Podemos escolher autovetores de L normalizados de modo a obter uma base (ortonormal) de $L^2(\Omega)$.

OBSERVAÇÃO. Aqui existe uma pequena diferença entre se trabalhar em \mathbb{R}^n e em uma variedade compacta M , pois no último caso, se for $\Omega = M$, perdemos a condição de que a autofunção se anule no bordo e aí a função constante passa a ser autofunção para o problema com autovalor 0.

Demonstração: Uma olhada de volta no uso do Teorema de Lax-Milgram para resolver o nosso problema mostra que no caso atual podemos tomar $\gamma_0 = 0$, o operador L é invertível e sua inversa $T = L^{-1}$ é um operador compacto. Mais ainda, afirmamos que T é autoadjunto. Com efeito, dizer que $Tf = u$ e $Tg = v$ significa que

$$\langle g, u \rangle_{L^2} = B[v, u] = B[u, v] = \langle f, v \rangle_{L^2},$$

logo

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, Tg \rangle.$$

Portanto, pela teoria dos operadores compactos autoadjuntos, os autovetores de T podem ser escolhidos de modo a se obter uma base ortonormal de L^2 e os autovalores associados são sempre não negativos. Como T é o inverso de L , concluímos que estes possuem os mesmos autovetores e que os autovalores de um são os inversos dos autovalores do outro e portanto 0 não é autovalor de T e as afirmações do teorema seguem. \square

Para caracterizar um pouco melhor ainda o primeiro autovalor, precisaremos saber um pouco sobre regularidade de soluções fracas de equações elípticas. Nos limitamos a enunciar o resultado aqui. A demonstração é uma conta grande e feia que pode ser encontrada em [13].

TEOREMA 2.4. *Suponha que no operador elíptico L acima valha*

$$a_{ij}, b_i, c \in C^{m-1}(\Omega)$$

e tenhamos $f \in H^m(\Omega)$. Então toda solução fraca u para a equação $Lu = f$ de fato está em $H_{loc}^{m-2}(\Omega)$ e vale a seguinte estimativa, para cada $V \subset\subset \Omega$

$$\|u\|_{H^{m-2}(V)} \leq C(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Se, além disto, ainda tivermos $\partial\Omega \in C^{m-2}$, então a solução fraca u de fato está em $H^{m-2}(\bar{\Omega})$ e temos a estimativa

$$\|u\|_{H^{m+2}(\bar{\Omega})} \leq C(\|f\|_{H^m(\bar{\Omega})} + \|u\|_{L^2(\bar{\Omega})}).$$

OBSERVAÇÃO . Pelas desigualdades generalizadas de Sobolev, se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, uma função em $W^{k,p}(\Omega)$, com $k > \frac{n}{p}$, está também em $C^{k-\lceil \frac{n}{p} \rceil - 1}(\Omega)$. Daí concluímos que se os coeficientes de L forem C^∞ , então toda solução u pertencerá a $C^\infty(\Omega)$ e além disto, se $\partial\Omega$ for C^∞ , uma tal u de fato pertencerá a $C^\infty(\bar{\Omega})$.

TEOREMA 2.5. (Caracterização variacional do primeiro autovalor) *Suponhamos que $a_{ij} \in C^\infty$. Então o primeiro autovalor λ_1 de L é simples, a autofunção correspondente não muda de sinal em Ω e vale*

$$\lambda_1 = \min\{B[u, u] \mid u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2} = 1\}.$$

Demonstração: Tomemos uma base ortonormal (w_i) de L^2 formada por autofunções de L com respectivos autovalores λ_i . Notemos que $B[\cdot, \cdot]$ define um produto interno equivalente em H_0^1 , como consequência das hipóteses de elipticidade e $a_{ij} \in L^\infty$ feitas para o operador L . Deste modo, afirmamos que $(w_i/\lambda_i^{\frac{1}{2}})$ é base ortonormal para H_0^1 com este novo produto interno, pois

$$B[w_i, w_j] = \lambda_i \langle w_i, w_j \rangle_{L^2} = \lambda_i \delta_{ij},$$

mostrando que de fato trata-se de um conjunto ortonormal.

Para mostrar que gera o espaço todo, suponhamos que $B[w_i/\lambda_i^{\frac{1}{2}}, u] = 0$ para todo i . Então pela identidade

$$B[w_i/\lambda_i^{\frac{1}{2}}, u] = \frac{1}{\lambda_i^{\frac{1}{2}}} \langle w_i, u \rangle_{L^2}$$

mais o fato de (w_i) ser base de L^2 , concluímos que $u = 0$. Ou seja, de fato $(w_i/\lambda_i^{\frac{1}{2}})$ trata-se de base ortonormal de H_0^1 . Daí, concluímos que se $u \in H_0^1$, a expressão deste na base w_i converge também em H_0^1 .

Portanto, se $u \in H_0^1$, $\|u\|_{L^2} = 1$, escrevendo $u = \sum \alpha_i w_i$, temos

$$B[u, u] = \sum \lambda_i \alpha_i^2 \geq \sum \lambda_1 \alpha_i^2 = \lambda_1.$$

Por outro lado, $B[w_1, w_1] = \lambda_1$, o que prova a caracterização de λ_1 como o mínimo de $B[u, u]$ com $\|u\|_{L^2} = 1$.

Afirmamos que $Lu = \lambda_1 u$ se, e somente se, $B[u, u] = \lambda_1 \|u\|_{L^2}^2$. De fato, uma das implicações é imediata. Tomemos então u com $\|u\|_{L^2} = 1$ tal que $B[u, u] = \lambda_1$, e consideremos a expressão de u na base w_i , $u = \sum \alpha_i w_i$. Conforme feito anteriormente, temos

$$\lambda_1 = B[u, u] = \sum \lambda_i \alpha_i^2 = \lambda_1 + \sum (\lambda_i - \lambda_1) \alpha_i^2.$$

Sendo λ_1 o menor autovalor, concluímos que α_i deve ser zero quando $\lambda_i \neq \lambda_1$ e portanto u é uma combinação de λ_1 -autofunções e consequentemente também é uma λ_1 -autofunção.

Suponhamos agora que u seja uma λ_1 -autofunção de norma unitária. Então tanto u^- quanto u^+ são λ_1 -autofunções. De fato, como u^- e suas derivadas zeram qtp onde u^- e suas derivadas

são diferentes de zero, temos

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= B[u, u] = \int \sum a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} = \int \sum a_{ij} u_{x_i}^- u_{x_j}^- + \int \sum a_{ij} u_{x_i}^+ u_{x_j}^+ \\ &= B[u^-, u^-] + B[u^+, u^+] \geq \lambda_1 \|u^-\|_{L^2}^2 + \lambda_1 \|u^+\|_{L^2}^2 = \lambda_1 \|u\|_{L^2}^2 = \lambda_1.\end{aligned}$$

E portanto valem as igualdades $B[u^\pm, u^\pm] = \lambda_1 \|u^\pm\|_{L^2}^2$ e conforme demonstrado, concluímos que u^\pm satisfazem $Lu^\pm = \lambda_1 u^\pm \geq 0$. Logo, u^\pm são supersoluções de $Lu = 0$ e, pela teoria de regularidade, são $C^\infty(\Omega)$. Logo podemos aplicar o Princípio do Mínimo a estas soluções e concluir que ou elas são positivas no interior de Ω ou são identicamente nulas. Obviamente não podem ser ambas nulas e nem ambas não nulas, logo concluímos que u não troca de sinal em Ω .

Agora, se u e \tilde{u} são λ_1 -autofunções, também o será $\tilde{u} - au$, com $a \in \mathbb{R}$. Logo, tomando a tal que $\int \tilde{u} - au = 0$, obtemos uma autofunção que, pelo que foi visto, não muda de sinal e tem integral nula, logo vale $\tilde{u} = au$, o que mostra que o λ_1 -autoespaço tem dimensão 1. \square

OBSERVAÇÃO . O quociente

$$\mathfrak{R}_B(u) = \frac{B[u, u]}{\|u\|_{L^2}^2}$$

é chamado Quociente de Rayleigh. Pelo Teorema 2.5, o menor autovalor do operador L é o mínimo que este quociente atinge para funções $u \in H_0^1(\Omega)$. No caso em que $L = \Delta$, este quociente toma a forma mais simpática

$$\mathfrak{R}(u) = \frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^2}^2}.$$

Enfatizando a dependência do primeiro autovalor em relação ao domínio poderíamos escrever $\lambda_1(\Omega)$. Dada a caracterização do primeiro autovalor em termos do Quociente de Rayleigh, vemos que se $\Omega \subset \Omega'$, então o $\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega')$, uma vez que

$$\lambda_1(\Omega) = \min_{\text{spt}u \subset \Omega} \mathfrak{R}_B(u) = \min_{\text{spt}u \subset \Omega} \frac{B[u, u]}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} \geq \min_{\text{spt}u \subset \Omega'} \frac{B[u, u]}{\|u\|_{L^2(\Omega')}^2} = \min_{\text{spt}u \subset \Omega'} \mathfrak{R}_B(u) = \lambda_1(\Omega').$$

2. Desigualdade de Faber-Krahn em Variedades Rotacionalmente Simétricas

Nesta seção apresentamos o método de simetrização de Schwartz junto com algumas de suas propriedades básicas. Ao final, obtemos a seguinte relação entre a Desigualdade Isoperimétrica e a Desigualdade de Faber-Krahn: Se em uma variedade riemanniana rotacionalmente simétrica as calotas em torno do pólo forem as soluções do problema isoperimétrico, então, para qualquer volume fixado V , o mínimo do quociente de Rayleigh é atingido pela primeira autofunção da calota com volume V .

DEFINIÇÃO . Dizemos que uma variedade riemanniana M^n é *rotacionalmente simétrica* se ela for isométrica ao espaço \mathbb{R}^n ou à bola centrada na origem $B_{r_0} \subset \mathbb{R}^n$ com a métrica em coordenadas esféricas dada por

$$ds^2 = dr^2 + f^2(r)dw^2,$$

onde $f(r) > 0$ e dw é o elemento de volume da esfera unitária padrão. Ademais, no caso de M ser isométrica à bola B_{r_0} , ainda devemos impor que $f(r_0) = 0$.

Na definição acima, a origem é chamada de *pólo* e para cada r fixado o conjunto dos pontos que distam r do pólo forma uma esfera redonda de raio $f(r)$. A bola centrada no pólo é chamada *calota*. Se tomarmos sucessivamente $f(r) = \sin r, r, \sinh r$ (com $0 \leq r \leq \pi$ no primeiro caso) obtemos a esfera S^n , o espaço euclidiano \mathbb{R}^n e o espaço hiperbólico \mathbb{H}^n . Com outras escolhas, podemos obter todos os ovalóides de revolução. Além destes ainda é interessante o caso dos parabolóides que são definidos como sendo superfícies rotacionalmente simétricas não compactas de curvatura positiva e decrescente a zero no infinito.

Observe que a situação que queremos considerar (ou seja, as calotas são soluções do problema isoperimétrico) se verifica nas três formas espaciais simplesmente conexas. Além disto, em [32] se prova que o mesmo é verdade em dimensão dois para parabolóides e para certos ovalóides e há trabalhos sendo desenvolvidos no sentido de provar que as calotas são de fato solução do problema isoperimétrico em parabolóides de qualquer dimensão.

DEFINIÇÃO . Seja M uma variedade riemanniana rotacionalmente simétrica. Dado um conjunto $\Omega \subset M$, definimos o *simetrizado* Ω^* de Ω como sendo a bola aberta com centro no pólo (calota) e mesma medida n -dimensional de Ω . Também definimos a *simetrizada* u^* de uma função $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ da maneira natural, ou seja, denotamos

$$\Omega_t = \{x \in M \mid u(x) > t\}$$

e fazemos

$$u^*(x) = \sup\{t \mid x \in \Omega_t^*\}.$$

Algumas observações devem ser feitas sobre esta definição mesmo quando ainda estamos lidando com o caso real ($M = \mathbb{R}$). Por exemplo, quem seria a simetrizada de $\frac{x}{1-x^2}$? Para cada $t < 1$, o conjunto Ω_t é um intervalo ilimitado a direita, logo o seu simetrizado é a reta toda. Por outro lado, se $t \geq 1$, $\Omega_t = \emptyset$, logo a simetrizada desta função seria a função constante e igual a 1. Do mesmo modo, vemos que a simetrizada da função x^2 seria identicamente infinito. Estes exemplos nos mostram que, amenos que imponhamos condições extras sobre as funções a serem simetrizadas ou sobre os domínios de definição, os resultados que podemos obter podem ser diferentes dos que gostaríamos. Mas uma coisa é certa, o que atrapalhou em ambos os exemplos acima foi o fato de os conjuntos Ω_t terem media infinita. Há algumas maneiras de contornar este problema. A que adotaremos será a de nos restringirmos a funções não negativas tendendo a zero no infinito no seguinte sentido: Dado qualquer t positivo, o conjunto Ω_t definido acima tem medida finita. Para fixar a linguagem, chamaremos uma função *não negativa* com tal propriedade de *função que tende a zero no infinito*. Observe que qualquer função não negativa de $L^p(M)$, $p < \infty$ tende a zero no infinito segundo esta definição.

Agora vamos a algumas propriedades da Simetrização de Schwartz. Observemos inicialmente que se $A \subset M$ tem medida finita, então podemos simetrizar χ_A e vale

$$\chi_A^* = \chi_{A^*}.$$

E se $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ tende a zero no infinito, temos

$$u^*(x) = \int_0^\infty \chi_{\{u > t\}}(x) dt = \int_0^\infty \chi_{\{t < u\}}^*(x) dt.$$

É claro pela definição de u^* que esta é uma função não negativa, radialmente simétrica e não crescente com o raio e que $\|u^*\|_{L^\infty} = \|u\|_{L^\infty}$. Além disto, também vale que u e u^* têm a mesma

norma L^1 , uma vez que, pela representação integral acima, temos

$$\begin{aligned} \int_M u(x) dx &= \int_M \int_0^\infty \chi_{\{t < u\}}(x) dt dx = \int_0^\infty \int_M \chi_{\{t < u\}}(x) dx dt = \int_0^\infty |\Omega_t| dt \\ &= \int_0^\infty |\Omega_t^*| dt = \int_M \int_0^\infty \chi_{\{t < u\}}^*(x) dt = \int_M u^*(x). \end{aligned}$$

Mais ainda, suponhamos que φ seja uma função monótona crescente com $\varphi(0) = 0$. Então é claro que $(\varphi \circ u)^* = \varphi \circ (u^*)$. Em particular, como $x \mapsto x^p$ ($p \geq 1$) é uma função satisfazendo as hipóteses feitas sobre φ , se $u \in L^p$, então $u^p \in L^1$ e portanto, pela igualdade das normas L^1 temos

$$\|u\|_{L^p}^p = \|u^p\|_{L^1} = \|(u^*)^p\|_{L^1} = \|u^*\|_{L^p}^p$$

e portanto a simetrização preserva a norma L^p .

Agora estamos em condições de fazer mais alguns comentários sobre os nossos objetivos. O que procuramos é uma função com suporte com uma medida fixada V e que minimize o quociente de Rayleigh \mathfrak{R} entre tais funções. Obviamente, dada uma $u \in H^1$ cujo suporte tenha medida V , se considerarmos \tilde{u} a primeira autofunção do suporte de u , vale $\mathfrak{R}(\tilde{u}) \leq \mathfrak{R}(u)$, conseqüentemente podemos restringir a nossa busca às primeiras autofunções, as quais são positivas e portanto simetrizáveis. Suponhamos que u seja uma tal função. Já sabemos que a medida do suporte de u é $|\Omega_0|$ e a sua simetrizada u^* tem suporte Ω_0^* que por construção tem o mesmo volume que Ω_0 . Além disto, acabamos de ver que a norma L^2 de u^* é igual à de u . Assim, para concluir tudo só precisamos mostrar que a simetrizada de uma função de H^1 está em H^1 e tem gradiente com norma L^2 menor do que ou igual à norma do gradiente da função original. Com isto, concluiríamos que um minimizante para o quociente de Rayleigh seria a primeira autofunção da bola.

De fato, não precisamos provar que para toda função $u \in H^1$ vale que $\|\nabla u^*\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}$ (ou equivalentemente que $\|u^*\|_{H^1} \leq \|u\|_{H^1}$), mas apenas para um subconjunto denso

LEMA . Suponha que para um subconjunto $D \subset H^1$ denso entre as funções não negativas valha a relação

$$\|\nabla u^*\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}, \quad \forall u \in D.$$

Então a mesma relação também é válida para as funções não negativas de H^1 .

Demonstração: Dada $u \in H^1$ uma função não negativa, tomemos uma seqüência u_n de elementos de D convergindo a u . Imediatamente temos que a seqüência u_n é limitada em H^1 e portanto, pela igualdade das normas L^2 das u_n e suas simetrizadas mais a hipótese de que a simetrização decresce a norma do gradiente, obtemos que a seqüência u_n^* é limitada em H^1 . Pelo Teorema de Rellich, tomando subsequências se necessário, podemos supor que u_n^* converge fortemente em L^2_{loc} a uma função v de H^1 e ainda converge fracamente em H^1 e qtp a v . Pela convergência pontual, obtemos que v é radialmente simétrica, não crescente com o raio e ainda, para cada $t > 0$ vale

$$|[v > t]| = |\lim[u_n^* > t]| = \lim |[u_n^* > t]| = \lim |[u_n > t]| = |[u > t]|,$$

onde, na segunda igualdade usamos o fato de que os conjuntos $[u_n^* > t]$ são calotas (e portanto, dadas duas, uma obrigatoriamente contém a outra). na terceira usamos a própria definição de simetrizada e na última o fato de que u_n converge fortemente em L^2 a u .

Pela igualdade acima, obtemos que v é uma função rotacionalmente simétrica não crescente com o raio e cujos conjuntos de nível $[v > t]$ têm a mesma medida de $[u > t]$, logo $v = u^*$.

Finalmente, sendo v o limite fraco das u_n^* , temos, usando a hipótese do lema novamente

$$\|v\|_{H^1} \leq \liminf \|u_n^*\|_{H^1} \leq \lim \|u_n\|_{H^1} = \|u\|_{H^1}.$$

Que é o resultado que queríamos. \square

Com este lema, concluímos que é suficiente provar a relação $\|\nabla u^*\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}$ para funções Lipschitz contínuas e infinitamente diferenciáveis de suporte compacto.

LEMA . Seja M uma variedade riemanniana rotacionalmente simétrica em que as calotas são soluções do problema isoperimétrico e suponhamos que u seja uma função não negativa, Lipschitz contínua com constante de Lipschitz L , integrável e com derivada integrável. Então a sua simetrizada também é Lipschitz com mesma constante.

Demonstração: Pela fórmula de co-área, temos

$$\int_{t-h < u < t} \|\nabla u\| dx = \int_{t-h}^t p(\Omega_t) dt,$$

onde $p(\Omega_t)$ denota o perímetro de Ω_t . Pelo fato de u ser L -Lipschitz, temos que $\|\nabla u\| \leq L$ quase sempre, enquanto o segundo lado pode ser estimado usando a desigualdade isoperimétrica

$$L(|\Omega_{t-h}| - |\Omega_t|) \geq \int_{t-h < u < t} \|\nabla u\| dx = \int_{t-h}^t p(\Omega_t) dt \geq \int_{t-h}^t p(\Omega_t^*) dt = \int_{t-h < u^* < t} |Du^*|,$$

onde na última passagem usamos a fórmula de co-área para u^* e Du^* é a derivada de u^* no sentido das funções de variação limitada (note que as contas acima e a fórmula de co-área já garantem que u^* é de variação limitada). Com isto concluímos que

$$\int_{t-h < u^* < t} |Du^*| \leq L(|\Omega_{t-h}^*| - |\Omega_t^*|)$$

e como u^* é rotacionalmente simétrica a desigualdade acima é equivalente a

$$\int_A |Du^*| dx \leq L|A|,$$

e portanto $|Du|$ é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue, e pela Proposição 1.1 concluímos que u de fato está em $W^{1,1}$ e que $\|\nabla u\| \leq L$ em quase toda parte e portanto u de fato é Lipschitz contínua com constante de Lipschitz L . \square

OBSERVAÇÃO . Pelo primeiro lema sabemos que basta verificar que a simetrização diminui a norma do gradiente de funções Lipschitz contínuas com suporte compacto. Este segundo lema mostra que a simetrização de uma tal função também é Lipschitz de suporte compacto e portanto, em particular, está em H^1 .

TEOREMA 2.6. *Seja M nas mesmas condições do lema anterior, então a simetrizada de uma função não negativa de H^1 tem norma menor do que ou igual à da função original.*

Demonstração: Seja u uma função diferenciável Lipschitz de suporte compacto. Façamos $\mu(t) = |\Omega_t|$. Então a seguinte desigualdade vale para quase todo t

$$(2.1) \quad \int_M \|\nabla u\| |D\chi_{\Omega_t}| \geq -\frac{1}{\mu'(t)} (p(\Omega_t))^2.$$

Com efeito, pela versão melhorada da fórmula de co-área com $g = \|\nabla u\|^{-1}\chi_{\Omega_t}$ temos

$$\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_M \|\nabla u\|^{-1}\chi_{\Omega_t}|D\chi_{\Omega_\tau}| d\tau = \int_t^{\infty} \int_M \|\nabla u\|^{-1}|D\chi_{\Omega_\tau}| d\tau$$

E então, para cada t valor regular de u , temos

$$\mu'(t) = - \int_M \|\nabla u\|^{-1}|D\chi_{\Omega_t}|.$$

Por outro lado, por Cauchy-Schwartz vem

$$(2.2) \quad \begin{aligned} p(\Omega_t) &= \int_M |D\chi_{\Omega_t}| = \int_M \|\nabla u\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|^{-\frac{1}{2}} |D\chi_{\Omega_t}| \\ &\leq \left(\int_M \|\nabla u\| |D\chi_{\Omega_t}| \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M \|\nabla u\|^{-1} |D\chi_{\Omega_t}| \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

E juntando as duas obtemos (2.1). Aqui é fundamental observar que se u for rotacionalmente simétrica, o suporte de $|D\chi_{\Omega_t}|$ estará no bordo da calota Ω_t , e pela simetria de u novamente, $\|\nabla u\|$ é constante neste conjunto, logo $\|\nabla u\|^{\frac{1}{2}}$ e $\|\nabla u\|^{-\frac{1}{2}}$ são proporcionais e a desigualdade de Cauchy-Schwartz torna-se uma igualdade.

Agora, fazendo $g = \|\nabla u\|$ na fórmula de co-área melhorada obtemos

$$\begin{aligned} \int_M \|\nabla u\|^2 &= \int_0^{\infty} \int_M \|\nabla u\| |D\chi_{\Omega_\tau}| d\tau \geq \int_0^x -\frac{1}{\mu'(\tau)} (p(\Omega_\tau))^2 d\tau \geq \\ &\geq \int_0^{\infty} -\frac{1}{\mu'(\tau)} (p(\Omega_\tau^*))^2 d\tau = \int_0^{\infty} \int_M \|\nabla u^*\| |D\chi_{\Omega_\tau^*}| d\tau = \int_M \|\nabla u^*\|^2, \end{aligned}$$

onde usamos sucessivamente (2.1), a desigualdade isoperimétrica e a observação feita após a demonstração de (2.1) mais o fato de que u^* é rotacionalmente simétrica. \square

TEOREMA 2.7. *Seja M uma variedade riemanniana rotacionalmente simétrica. Suponhamos que as calotas sejam as únicas soluções do problema isoperimétrico em M e que u tenha suporte de medida finita e seja um minimizante para o quociente de Rayleigh entre as funções com suporte com a medida do suporte de u . Então $u = u^*$.*

Demonstração: Pelo teorema anterior sabemos que sempre vale $\|u^*\|_{H^1} \leq \|u\|_{H^1}$. Por outro lado se u for um minimizante obtemos uma igualdade. Além disto, u também será a primeira autofunção do seu suporte e portanto, infinitamente diferenciável e Lipschitz. Checando a demonstração do teorema anterior, vemos que para que para termos a igualdade u deve ter as seguintes propriedades: $p(\Omega_t) = p(\Omega_t^*)$, para quase todo t , de onde concluímos, pela hipótese do teorema, que Ω_t é uma calota para quase todo t e portanto $u = u^*$ \square

TEOREMA 2.8. *Em \mathbb{R}^n , \mathbb{H}^n e S^n as únicas funções que minimizam o quociente de Rayleigh com o vínculo de que o suporte tenha uma medida fixada V são rotacionalmente simétricas em relação a um pólo convenientemente escolhido.*

OBSERVAÇÃO . Note que nestes espaços há soluções para o problema isoperimétrico diferentes das "calotas" centradas na origem, por isto o teorema anterior não se aplica diretamente.

Demonstração: Primeiro modo. Para todos os três espaços sabemos que as únicas soluções do problema isoperimétrico são as bolas, logo o mesmo argumento usado anteriormente nos fornece que se u for um minimizante então Ω_t é uma bola para quase todo t . Mais ainda, só há igualdade em (2.2) se o gradiente de u for constante sobre as curvas de nível de u e portanto as curvas de nível de u são esferas concêntricas. Fixando o centro destas esferas como o pólo, temos $u = u^*$.

Segundo modo. Como tal u minimiza o quociente de Rayleigh entre todas as funções com suporte de medida V , também minimiza entre as funções com o mesmo suporte de u , logo u é a primeira autofunção de seu suporte, e portanto contínua e infinitamente diferenciável no conjunto $\{u > 0\}$. Pelo mesmo argumento do teorema anterior temos que os conjuntos de nível $\{u > t\}$ são circunferências. Em particular, concluímos que o suporte de u é uma bola. Simetrizando u em relação ao centro desta bola obtemos uma nova função u^* que pelo Teorema 2.6 tem quociente de Rayleigh menor do que ou igual ao de u . Como u já era minimizante para tal quociente, concluímos que u e u^* são minimizantes do quociente de Rayleigh da bola, logo ambas são primeiras autofunções da bola de mesmo sinal e mesma norma L^2 e portanto $u = u^*$. \square

OBSERVAÇÃO . O método apresentado acima é o usado em [37] em \mathbb{R}^n não apenas para o caso de minimizar o primeiro autovalor, mas para investigar a melhor constante na imersão de Sobolev de $W^{1,p}$ em L^{p^*} , onde $p^* = \frac{np}{n-p}$ e tem a virtude de se estender a variedades rotacionalmente simétricas. Este mesmo problema é tratado em outros lugares, como [25, 28], mas em ambos a simetrização de Schwartz é utilizada em conjunto com a simetrização de Steiner (de fato, trata-se de um argumento iterado de que "a simetrização de Schwartz pode ser obtida como limite de simetrizações de Steiner"), o que limita a demonstração ao caso de \mathbb{R}^n .

3. Teoremas de Comparação

O método de simetrização utilizado na seção anterior ainda pode ser adaptado para variedades gerais de uma maneira razoável, variando ligeiramente de acordo com as ferramentas que temos disponíveis para tratar o nosso problema. A chave é a observação de que as propriedades úteis do processo de simetrização são:

- $\|u^*\|_{L^2} \geq C_1 \|u\|_{L^2}$,
- $\|\nabla u^*\|_{L^2} \leq C_2 \|\nabla u\|_{L^2}$
- $p(\Omega_t) \geq C_3 p(\Omega_t^*)$

e que para obter teoremas de comparação não precisamos que a função original e sua simetrizada estejam definidas sobre um mesmo espaço. Assim, dada uma variedade cujas curvaturas (ou curvaturas de Ricci) sejam limitadas superior ou inferiormente, encontramos um perfil isoperimétrico para esta variedade pelos teoremas de comparação do capítulo anterior que ou é idêntico ou semelhante ao de uma das formas espaciais simplesmente conexas, então fazemos a simetrização das funções tendendo a zero no infinito da variedade na forma espacial simplesmente conexa, onde existem conjuntos "simetrizados" e as soluções da desigualdade de Faber-Krahn são conhecidas.

TEOREMA 2.9. *Suponha que M^n seja uma variedade riemanniana em que todo conjunto de perímetro finito tem perímetro maior do que ou igual ao da bola de mesmo volume na forma espacial simplesmente conexa de curvatura constante κ (em outras palavras, o perfil isoperimétrico da forma espacial também é um perfil para M). Então, fixado V , vale*

$$\inf_{u: M \rightarrow \mathbb{R}, \text{spt } u \leq V} \mathfrak{R}(u) \geq \lambda_1.$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor da bola de volume V da forma espacial simplesmente conexa de curvatura κ .

Demonstração: Inicialmente fixemos um pólo na κ -forma espacial simplesmente conexa. Dado um conjunto $\Omega \subset M$ de medida finita, definimos o seu simetrizado Ω^* como sendo a bola centrada no pólo e com mesma medida que Ω e dada uma função u que tende a zero no infinito fazemos Ω_t conforme na seção anterior e definimos a simetrizada u^* por

$$u^*(x) = \sup\{t \mid x \in \Omega_t^*\}$$

Com esta definição, u^* desfruta de todas as propriedades da simetrizada enunciadas na seção anterior bem como permanecem válidos e com as mesmas demonstrações os lemas e o Teorema 2.6. \square

TEOREMA 2.10. (Bérard e Meyer [5]) *Sejam M^n uma variedade riemanniana cujas curvaturas de Ricci são limitadas inferiormente por $n - 1$ e $0 < V < \text{vol}_n(M)$. Fazendo $\beta = \frac{V}{\text{vol}_n(M)}$, o ínfimo do quociente de Rayleigh em M sobre as funções com suporte de medida V é maior do que o primeiro autovalor da calota de volume $\beta \text{vol}_n(S^n)$. Além disto, se valer a igualdade, M é isométrica a esfera S^n .*

Demonstração: Novamente fixemos um ponto na esfera para ser o nosso pólo e dado $\Omega \subset M$ definimos o seu simetrizado Ω^* como sendo a calota esférica de volume $\frac{\text{vol}_n(\Omega)}{\text{vol}_n(M)} \text{vol}_n(S^n)$. Ainda denotando por Ω_t os conjuntos de nível $[u > t]$, definimos a simetrizada u^* por

$$u^*(x) = \sup\{t \mid x \in \Omega_t^*\}.$$

As mesmas demonstrações dadas anteriormente agora provam as seguintes afirmações

- Se $u \in L^p$,

$$\|u\|_{L^p} = \left(\frac{\text{vol}_n(M)}{\text{vol}_n(S^n)} \right)^{\frac{1}{p}} \|u^*\|_{L^p}.$$

- Se u for L Lipschitz, então u^* é $\frac{\text{vol}_n(S^n)}{\text{vol}_n(M)} L$ Lipschitz.
- Usando o Teorema de Gromov-Levy, se $u \in H^1(M)$, então

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq \frac{\text{vol}_n(M)}{\text{vol}_n(S^n)} \|\nabla u^*\|_{L^2}^2.$$

e só vale a igualdade acima se as curvas de nível de os conjuntos $[u > t]$ satisfizerem a igualdade no Teorema de Gromov-Levy para quase todo t .

E isto é suficiente para obter a desigualdade do teorema. Para o caso de o ínfimo ser igual, se houvesse uma função u que realizasse o ínfimo o caso de igualdade também seria consequência do Teorema de Gromov-Levy. A demonstração da existência de tal função será deixada para a próxima seção. \square

TEOREMA 2.11. (Cheng [11]) *Suponha que as curvaturas de Ricci de uma variedade riemanniana M^n sejam limitadas inferiormente por $n - 1$. Então para qualquer $m \in M$ e $r > 0$, o menor autovalor da bola $B_m(r)$ de centro m e raio r é menor que o primeiro autovalor da calota de raio r na esfera S^n . Em particular, fixado $0 < V < \text{vol}_n(M)$, se λ_1 for o primeiro autovalor da calota de volume V , o ínfimo do quociente de Rayleigh sobre as funções com suporte de medida V em M*

é menor do que ou igual a λ_1 e só há igualdade se o recobrimento universal de M for isométrico a uma esfera.

LEMA . Sejam M^n uma variedade riemanniana e $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável em um aberto de M cujo valor depende apenas da distância a um ponto fixado m . Escrevendo $\varphi(p) = \psi(d(p, m))$, com $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e usando a notação do Teorema 1.9, vale

$$\Delta\varphi(p) = \psi''(r) + \frac{(\det J_{rw}|_{w^-})'}{\det J_{rw}|_{w^-}}\psi'(r),$$

onde w é o vetor unitário tangente em m à geodésica minimizante ligando m a p e $r = d(p, m)$.

Demonstração: Sabemos que, em coordenadas polares, $d\varphi = \psi' dr$, logo, conforme visto na apresentação do Teorema 1.9,

$$*d\varphi = (-1)^{n-1}\psi' \det J_{rw}|_{w^-} d\beta,$$

onde β é o elemento de volume da esfera unitária de \mathbb{R}^n e $*$ denota a estrela de Hodge. Portanto

$$\begin{aligned} \Delta\varphi dV &= d * d\varphi = (-1)^{n-1}(\psi'' \det J_{tw}|_{w^-} + \psi'(\det J_{tw}|_{w^-})') dr \wedge d\beta \\ &= \left(\psi'' + \psi' \frac{(\det J_{tw}|_{w^-})'}{\det J_{tw}|_{w^-}} \right) (\det J_{tw}|_{w^-} d\beta) \wedge dr = \left(\psi'' + \psi' \frac{(\det J_{tw}|_{w^-})'}{\det J_{tw}|_{w^-}} \right) dV. \end{aligned}$$

□

Demonstração do Teorema 2.11: Já vimos que a primeira autofunção da calota esférica é rotacionalmente simétrica e decrescente com o raio, logo podemos escrevê-la como $\varphi(p) = \psi(d(p, m))$, para algum m convenientemente escolhido e tal ψ satisfaz $\psi(r) = 0$, ψ é estritamente decrescente em $[0, r]$ e $\psi'(0) = 0$, onde r é o raio de tal calota.

Consideremos então definida sobre M a função $\tilde{\varphi}(p) = \psi(d(p, m))$, onde d denota a distância em M . Vamos mostrar que esta função tem quociente de Rayleigh menor que o quociente de Rayleigh da primeira autofunção da calota esférica, o que é suficiente para concluir a primeira afirmação feita no teorema.

Com efeito, sendo φ a primeira autofunção da calota (com autovalor λ_1), usando o lema, ψ satisfaz

$$\psi''(t) + \frac{(\sin^{n-1} t)'}{\sin^{n-1} t} \psi'(t) + \lambda_1 \psi(t) = 0$$

Como $\psi' < 0$, usando o Teorema 1.9, temos

$$\psi''(t) + \frac{(\det J_{tw}|_{w^-})'}{\det J_{tw}|_{w^-}} \psi'(t) + \lambda_1 \psi(t) \geq 0.$$

de onde, novamente pelo lema, $\Delta\tilde{\varphi} + \lambda_1\tilde{\varphi} \geq 0$, o que mostra que $\tilde{\varphi}$ tem quociente de Rayleigh menor do que ou igual a λ_1 .

A segunda afirmação é uma consequência fácil do Teorema de Bishop. Com efeito, se B_{r_0} for a calota esférica de volume V , então para qualquer $m \in M$, $B_{r_0}(m)$ tem volume menor que B_{r_0} , graças ao Teorema 1.10, e portanto podemos tomar $r \geq r_0$ tal que $B_r(m)$ tenha volume V . Daí

$$\lambda_1(B_r(m)) \leq \lambda_1(B_{r_0}(m)) \leq \lambda_1(B_{r_0})$$

Finalmente, suponhamos que o ínfimo do quociente de Rayleigh sobre as funções com suporte de medida V seja igual a λ_1 . Então para qualquer $m \in M$ vale $\lambda_1(B_r(m)) = \lambda_1(B_r)$ o que implica, na demonstração acima, que $\text{vol}_n(B_{r_0}) = \text{vol}_n B_{r_0}(m)$ e portanto, pelo Teorema 1.10, $B_{r_0}(m)$ é

uma calota esférica, para todo $m \in M$. Daí vem que M tem curvatura seccional constante e igual a 1 e portanto o seu recobrimento universal é a esfera. \square

Os Teoremas 2.10 e 2.11 acima fornecem estimativas superior e inferior para o menor primeiro autovalor do laplaciano com vínculo de que as funções tenham suporte com volume fixado, em presença da condição de que as curvaturas de Ricci sejam limitadas inferiormente por uma constante positiva. Por outro lado, uma vez verificada a conjectura feita ao final do primeiro capítulo, o Teorema 2.9 dá uma estimativa inferior para o menor primeiro autovalor no caso de as curvaturas da variedade serem limitadas superiormente (por zero, se $n > 2$, ou qualquer número, se $n = 2$). No entanto achar uma estimativa superior para o ínfimo dos primeiros autovalores requer versões mais elaboradas do Teorema 1.12, o que dificulta o trabalho no caso geral. No caso 2 dimensional tal estimativa é apresentada em [8] e se baseia na seguinte modificação do Teorema 1.12.

TEOREMA 1.12'. *Sejam M^2 uma variedade riemanniana 2-dimensional com curvatura limitada superiormente por κ e $\Omega \subset M$ um aberto com bordo real analítico. Denotando*

$$\Omega_t = \{x \in \Omega | d(x, \partial\Omega) \geq t\}, \quad \Gamma_t = \{x \in \Omega | d(x, \partial\Omega) = t\},$$

$$A(t) = \text{vol}_2(\Omega_t), \quad L(t) = \text{vol}_1(\Gamma_t),$$

definimos $\Delta(t) = L^2(t) - 4\pi A(t) + \kappa A^2(t)$. Então $\Delta(t)$ está definida em todo o intervalo $[0, T]$, com T sendo a maior distância de um ponto de Ω a $\partial\Omega$, é uma função decrescente neste intervalo e tende a zero quando t tende a T . Ademais, só há igualdade se Ω for isométrico a uma bola na forma espacial de curvatura κ

TEOREMA 2.12. *Nas mesmas hipóteses e notação do teorema anterior com a hipótese extra $\kappa \geq 0$, se escolhermos r_1 de modo que a bola de raio r_1 no espaço de curvatura constante κ tenha o mesmo perímetro que Ω (e portanto, pelo teorema anterior, maior área) e r_2 de modo que a área do anel delimitado pelas bolas de raios r_1 e r_2 seja a mesma que a de Ω , vale*

$$\lambda_1(\Omega) \leq \inf_{\substack{u \in H^1(B_{r_1}), \\ u=0 \text{ em } \partial B_{r_1}}} \frac{\int_{B_{r_1} \setminus B_{r_2}} \|\nabla u\|^2}{\int_{B_{r_1} \setminus B_{r_2}} u^2}.$$

Em particular, o ínfimo dos primeiros autovalores do laplaciano em M entre as funções com suporte de medida V é menor que

$$\inf_{\substack{u \in H^1(B_a), \\ u=0 \text{ em } \partial B_a}} \frac{\int_{B_a \setminus B_b} \|\nabla u\|^2}{\int_{B_a \setminus B_b} u^2},$$

onde a é o raio da bola de perímetro igual ao ínfimo dos perímetros dos conjuntos de M com área V e b é o raio da bola tal que o anel $B_a \setminus B_b$ tenha área V .

Demonstração: Denotemos B_r^κ a bola de raio r na forma espacial 2-dimensional simplesmente conexa de curvatura κ e façamos $\mathfrak{A}(r) = \text{vol}_2(B_r^\kappa)$, $\mathfrak{L}(r) = \text{vol}_1(\partial B_r^\kappa)$ e $r(t)$ a solução da equação diferencial

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{L(t)}{\mathfrak{L}(r)} \quad \mathfrak{L}(r(0)) = L(0).$$

Integrando a equação acima, vem

$$\mathfrak{A}(r(0)) - \mathfrak{A}(r(t)) = A(0) - A(t),$$

ou seja, $r(t)$ é escolhido de modo que a área do anel $B_{r(0)}^\kappa \setminus B_{r(t)}^\kappa$ seja igual á area do "anel" $\Omega - \Omega_t$. Pela desigualdade isoperimétrica, como Ω e $B_{r(0)}^\kappa$ têm o mesmo perímetro, concluímos que $\mathfrak{A}(r(0)) \geq A(0)$ e assim obtemos da igualdade acima que

$$(*) \quad \mathfrak{A}(r(t)) \geq A(t).$$

Como, por definição, vale

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dr} \frac{dr}{dt} = -\frac{dA}{dt},$$

obtemos, após integração de (*),

$$\mathfrak{A}^2(r(0)) - \mathfrak{A}^2(r(t)) \geq A^2(0) - A^2(t)$$

Usando o Teorema 1.12' e o fato de que $\kappa > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} L(t) &\leq L^2(0) - 4\pi(A(0) - A(t)) + \kappa(A^2(0) - A^2(t)) \\ &\leq \mathfrak{L}^2(r(0)) - 4\pi(\mathfrak{A}(r(0)) - \mathfrak{A}(r(t))) + \kappa(\mathfrak{A}^2(r(0)) - \mathfrak{A}^2(r(t))) = \mathfrak{L}(r(t)) \end{aligned}$$

E conseqüentemente, pela própria definição, $-1 \leq \frac{dr}{dt} < 0$.

Observe que, novamente denotando T a maior distancia entre um ponto de Ω a $\partial\Omega$, o r_2 do enunciado do teorema é exatamente $r(T)$. Além disto, um argumento de simetrização mostra que o ínfimo de

$$\mathfrak{R}(u) = \frac{\int_{B_{r_1} \setminus B_{r_2}} \|\nabla u\|^2}{\int_{B_{r_1} \setminus B_{r_2}} u^2}$$

ocorre para uma função u rotacionalmente simétrica (e diferenciável), portanto para provar a primeira parte do teorema é suficiente, dada uma função rotacionalmente simétrica diferenciável $\varphi : B_{r_1} \setminus B_{r_2} \rightarrow \mathbb{R}$ achar outra em $H^1(\Omega)$ cujo quociente de Rayleigh seja menor. Seja então $\varphi = f(d(x, 0))$ como acima e definamos $\tilde{\varphi}$ por $\tilde{\varphi}(q) = f(r(t))$, sempre que $q \in \Gamma_t$. Esta função é contínua e diferenciável, exceto no cut locus de $\partial\Omega$ e além disto,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|\nabla \tilde{\varphi}\|^2 &= \int_0^T (f'(r(t)))^2 (r'(t))^2 L(t) dt \leq \int_0^T (f'(r(t)))^2 L(t) dt \\ &= - \int_{r_2}^{r_1} (f'(r))^2 \mathfrak{L}(r) dr = \int_{B_{r_1} \setminus B_{r_2}} \|\nabla \varphi\|^2. \end{aligned}$$

Enquanto para as normas L^2 temos

$$\int_{\Omega} \tilde{\varphi}^2 = \int_0^T f^2(r(t)) L(t) dt = - \int_{r_2}^{r_1} f^2(r) \mathfrak{L}(r) dr = \int_{B_{r_1} \setminus B_{r_2}} \varphi^2,$$

o que conclui com a primeira parte do teorema.

Para a segunda afirmação, fixado V , definamos

$$p = \inf\{p(\Omega) \mid |\Omega| = V \text{ e } \chi_\Omega \in BV(M)\}.$$

Tomemos então uma seqüência Ω_n de abertos de volume V e bordo analítico cujos comprimentos dos bordos tendam a p . Agora o resultado é conseqüência da dependência contínua do primeiro autovalor em relação ao domínio. \square

4. Desigualdade de Faber-Krahn: Existência

Trabalhando ingenuamente, um primeiro argumento para tentar encontrar um minimizante para o primeiro autovalor do laplaciano em uma variedade riemanniana M compacta seria tomar uma seqüência Ω_n de domínios de volume V tais que os respectivos primeiros autovalores convergissem para o menor valor possível e ver se conseguimos extrair uma subseqüência convergente. Daí, ainda precisaríamos verificar se o conjunto limite é um domínio admissível e se seu primeiro autovalor realmente é o ínfimo. Embora não sejamos exatamente bem sucedidos, vamos tentar seguir este caminho.

Consideremos

$$A = \{\lambda \mid \exists \Omega, |\Omega| = V \text{ tal que } \lambda \text{ é autovalor do laplaciano em } \Omega\}.$$

Seja $\lambda_1 = \inf A$ e tomemos uma seqüência Ω_n de domínios de volume V tal que seus respectivos primeiros autovalores λ_n convergem a λ_1 . Consideremos u_n as respectivas autofunções e, sem perda de generalidade, suponha que $\|u_n\|_{L^2(\Omega_n)} = 1$, onde as u_n são não negativas e estendidas como sendo zero fora de Ω_n . Da equação diferencial satisfeita pelas u_n , temos, multiplicando por u_n e integrando por partes:

$$\int_M \|\nabla u_n\|^2 = \lambda_n \int_M u_n^2 = \lambda_n.$$

Logo a norma $H^1(M)$ de u_n é limitada e como estamos em uma variedade compacta, podemos usar o Teorema de Rellich-Kondrachov para garantir a existência de uma subseqüência que converge em $L^2(M)$. Além disto, sendo $L^2(M)$ Hilbert, em particular reflexivo, podemos tomar ainda outra subseqüência das u_n tal que ∇u_n convirja fracamente em $L^2(M)$. Denotemos por u o limite forte das u_n e por v o limite fraco de ∇u_n . Então para φ uma função $C^\infty(M)$, temos:

$$\int_M u \nabla \varphi = \lim \int_M u_n \nabla \varphi = - \lim \int_M \nabla u_n \varphi = - \int_M v \varphi.$$

Logo temos que de fato $u \in H^1(M)$. Como u_n converge fortemente a u em L^2 , vemos que $\|u\|_{L^2} = 1$. Como ∇u_n converge fracamente a ∇u , temos que a norma L^2 deste é menor que o limite inferior das normas de ∇u_n , então para concluir que de fato a norma de ∇u é λ_1 , restaria apenas mostrar que u está na família de funções admissíveis, ou seja, que $\text{spt } u$ tem volume V . Bom, comecemos notando que, como as u_n convergem em L^2 , podemos tomar ainda outra subseqüência das u_n que converge *qtp*. Assim, temos

$$\limsup \{x \mid u_n(x) = 0\} \subset \{x \mid u(x) = 0\}$$

e desta forma,

$$\limsup |\{x \mid u_n(x) = 0\}| \leq |\limsup \{x \mid u_n(x) = 0\}| \leq |\{x \mid u(x) = 0\}|$$

Portanto, $|\{x \mid u(x) \neq 0\}| \leq V$. Bom, este que poderia parecer um problema, pois gostaríamos que valesse a igualdade, de fato não deve ser algo muito ruim, pois sabemos que "aumentando o domínio, o primeiro autovalor diminui", logo é de se esperar que seja possível provar que de fato vale a lda. Melhor ainda, poderíamos fazer uma pequena alteração no problema original e considerar

$$A = \{\lambda \mid \exists \Omega, |\Omega| \leq V \text{ tal que } \lambda \text{ é autovalor do laplaciano em } \Omega\}.$$

o que "acabaria" com o problema.

Mas há outro problema um pouco mais grave. Com o que foi feito até agora, não podemos concluir que $|\text{spt}u(x)| \leq V$. De fato, em princípio, nada impede que o fecho de $\{x \mid u(x) \neq 0\}$ fosse, por exemplo, toda a M , e portanto o domínio de u poderia ter saído dos conjuntos que estavam competindo inicialmente e u não seria de fato um minimizante para o primeiro autovalor com as condições dadas.

O que fazemos então é alterar um pouco o nosso problema e tirar a ênfase dos domínios e passá-la para as funções da seqüência minimizante. Para isto, lembramos da caracterização variacional do primeiro autovalor e fazemos

$$\tilde{A} = \{u \in H^1(M) \mid |\{u \neq 0\}| \leq V\}.$$

Queremos minimizar o quociente de Rayleigh

$$\mathfrak{R}(u) = \frac{\int_M \|\nabla u\|^2}{\int_M u^2}, \quad u \in \tilde{A}.$$

Se provarmos que existe u que minimiza este quociente e que de fato o suporte de tal u tem medida V , concluiremos que u era solução do problema inicial. Observe, no entanto, que se simplesmente mostrarmos que existe u que minimiza este quociente, sem conseguirmos provar a afirmação sobre a medida do suporte de u , poderia acontecer de $\mathfrak{R}(u)$ ser estritamente menor que o ínfimo do quociente de Rayleigh no conjunto A o que, na notação estabelecida abaixo, se traduz em $\tilde{\lambda}_1 \leq \lambda_1$.

Agora, as técnicas utilizadas para garantir a existência de um minimizante se aplicam sem qualquer problema. Apenas por desencargo de consciência, vamos repetir os argumentos.

Denotemos por $\tilde{\lambda}_1$ o ínfimo de $\mathfrak{R}(u)$ com $u \in \tilde{A}$ e tomemos $u_n \in \tilde{A}$ uma seqüência tal que $\mathfrak{R}(u_n)$ convirja para $\tilde{\lambda}_1$. Novamente, podemos supor que todas as u têm norma L^2 igual a 1 e, como trocando u por $|u|$ o valor do quociente permanece inalterado, podemos supor que as u_n são positivas. Como $\int_M \|\nabla u_n\|^2$ converge a $\tilde{\lambda}_1$, vemos que a seqüência (u_n) é limitada em H^1 , logo, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, tem subsequência que converge fortemente em L^2 . Sendo ∇u_n limitado em L^2 , podemos extrair ainda uma subsequência tal que ∇u_n converge fracamente a uma função v de L^2 . As mesmas contas feitas anteriormente se aplicam ao nosso caso e concluímos que u de fato está em H^1 e que seu gradiente é v . Como u_n converge em L^2 a u , ainda podemos extrair uma subsequência que convirja *qtp* e daí temos

$$\limsup \{x \mid u_n(x) = 0\} \subset \{x \mid u(x) = 0\}$$

e desta forma,

$$\limsup |\{x \mid u_n(x) = 0\}| \leq |\limsup \{x \mid u_n(x) = 0\}| \leq |\{x \mid u(x) = 0\}|$$

e portanto $|\{u \neq 0\}| \leq V$ e $u \in \tilde{A}$.

Continuando, pela convergência forte das u_n a u em L^2 , vemos que $\|u\|_{L^2} = 1$ e pela convergência fraca de ∇u_n a ∇u , temos

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq \liminf \|\nabla u_n\|_{L^2}^2 = \tilde{\lambda}_1.$$

Daí, obtemos que $\mathfrak{R}(u) \leq \tilde{\lambda}_1$. Pela minimalidade de $\tilde{\lambda}_1$, concluímos que vale a igualdade e portanto o nosso novo problema tem um mínimo e de quebra ainda ganhamos que tal mínimo é atingido por uma função $u \geq 0$, embora esta, em princípio não seja a única com esta propriedade.

Uma primeira pergunta que se faz dada a demonstração acima é se realmente pode acontecer de u ser minimizante para \mathfrak{R} em \tilde{A} , mas $|\{u \neq 0\}| < V$. De fato, isto não pode acontecer, o que vamos provar por partes

PROPOSIÇÃO 2.1. *Se u é um minimizante para o Quociente de Rayleigh em \tilde{A} que não muda de sinal, então $|\{u \neq 0\}| = V$*

Demonstração: Com efeito, suponhamos que se tenha um tal minimizante e que valha $|\{u \neq 0\}| < V$ e tomemos $\varphi \in C^\infty(M)$ com $|\text{spt}\varphi| < V - |\{u \neq 0\}| = \varepsilon$. Então, para todo t , $u + t\varphi \in \tilde{A}$ e sendo u minimizante de \mathfrak{R} , a derivada de $\mathfrak{R}(u + t\varphi)$ em $t = 0$ deveria ser nula.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{\int \|\nabla(u + t\varphi)\|^2}{\int |u + t\varphi|^2} - \frac{\int \|\nabla u\|^2}{\int |u|^2} \right) = 0$$

ou seja, já eliminando os termos em t^2 ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{\int |u|^2 \int (\|\nabla u\|^2 + 2t \nabla u \cdot \nabla \varphi) - \int (|u|^2 + 2tu\varphi) \int \|\nabla u\|^2}{\int |u|^2 \int |u + t\varphi|^2} \right) = 0.$$

Simplificando o termos em comum, fazendo $t = 0$ e usando o fato de que $\mathfrak{R}(u) = \tilde{\lambda}_1$, obtemos

$$\frac{\int (\nabla u \cdot \nabla \varphi - \tilde{\lambda}_1 u \varphi)}{\int |u|^2} = 0$$

Ignorando o denominador, temos

$$\int \nabla u \cdot \nabla \varphi - \tilde{\lambda}_1 u \varphi = 0, \quad \forall \varphi \in C^\infty(M), |\text{spt}\varphi| < \varepsilon$$

Agora, tomemos uma partição da unidade (ψ_i) tal que o suporte de cada ψ_i tenha medida menor que ε . Seja $\varphi \in C^\infty(M)$ qualquer. Então:

$$\begin{aligned} \int \nabla u \cdot \nabla \varphi - \tilde{\lambda}_1 u \varphi &= \int \nabla u \cdot \nabla (\sum \psi_i \varphi) - \tilde{\lambda}_1 u \sum (\psi_i \varphi) \\ &= \sum \int \nabla u \cdot \nabla (\psi_i \varphi) - \tilde{\lambda}_1 u (\psi_i \varphi) = 0, \end{aligned}$$

pois $\psi_i \varphi$ satisfaz à condição $|\text{spt}(\psi_i \varphi)| < \varepsilon$ para todo i .

Com isto, concluímos que u é solução fraca em M do problema $-\Delta u = \tilde{\lambda}_1 u$ e portanto é uma autofunção do laplaciano em M . Como a função constante também é autofunção do laplaciano em M (associada ao autovalor zero), estas deveriam ser perpendiculares em L^2 , conforme vimos na primeira seção, mas como u não troca de sinal, isto só acontece se for $u \equiv 0$. \square

PROPOSIÇÃO 2.2. *Se u for um minimizante do Quociente de Rayleigh em \tilde{A} , então u não troca de sinal*

Demonstração: Digamos que u troque de sinal. Então tanto u^+ quanto u^- são não nulas e ambas são diferentes de zero em um conjunto de medida menor que V , uma vez que u é diferente de zero em um conjunto de medida menor do que ou igual a V . Pela proposição anterior, nem u^+ nem u^- podem ser minimizantes para o Quociente de Rayleigh, logo

$$\frac{\int \|\nabla u^\pm\|^2}{\int |u^\pm|^2} > \tilde{\lambda}_1.$$

Dai

$$\frac{\int \|\nabla u\|^2}{\int |u|^2} = \frac{\int \|\nabla u^-\|^2 + \int \|\nabla u^+\|^2}{\int |u^-|^2 + \int |u^+|^2} > \tilde{\lambda}_1,$$

e portanto u não é minimizante para o Quociente de Rayleigh. \square

Continuando a nossa aventura em busca de informações sobre o nosso minimizante, consideremos a variação $u(1+t\varphi)$, com $\varphi \in C^\infty$. Se u for minimizante para \mathfrak{R} , a derivada desta variação em $t=0$ deve ser nula, ou seja

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{\int \|\nabla(u(1+t\varphi))\|^2}{\int |u(1+t\varphi)|^2} - \frac{\int \|\nabla u\|^2}{\int |u|^2} \right) = 0.$$

Expandindo e ignorando os termos em t^2 , temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{\int |u|^2 \int (\|\nabla u\|^2 + 2t\varphi \|\nabla u\|^2 + 2tu \nabla \varphi \cdot \nabla u) - \int \|\nabla u\|^2 \int (u^2 + 2tu^2\varphi)}{\int |u(1+t\varphi)|^2 \int |u|^2} \right) = 0.$$

Cancelando os termos comuns, substituindo $t \rightarrow 0$ e usando o fato de que $\mathfrak{R}(u) = \tilde{\lambda}_1$, obtemos

$$\frac{\int (\varphi \|\nabla u\|^2 + u \nabla \varphi \cdot \nabla u - \tilde{\lambda}_1 \varphi u^2)}{\int |u|^2} = 0$$

Ignorando o denominador, ainda podemos simplificar a equação acima para

$$(2.3) \quad \int \nabla(\varphi u) \cdot \nabla u - \tilde{\lambda}_1 \varphi u^2 = 0, \quad \forall \varphi \in C^\infty(M).$$

Agora observamos que se fossemos definir uma solução fraca para a equação

$$(2.4) \quad u \Delta u + \tilde{\lambda}_1 u^2 = 0, \quad u \in H^1(M)$$

o natural seria multiplicar esta equação por uma função φ suave e integrar por partes, o que nos levaria a (2.3). Ou seja, neste sentido, um minimizante para o quociente de Rayleigh é solução fraca de (2.4).

OBSERVAÇÃO . Na esfera S^n o minimizante u aqui obtido é de fato a autofunção da bola. Com efeito, fixado um pólo, o método de simetrização utilizado na seção *Desigualdade de Faber-Krahn em Variedades Rotacionalmente Simétricas* nos fornecerá uma nova função u^* cujo suporte é a bola de medida $|\{x \mid u(x) \neq 0\}|$ e pelo Teorema 2.6 $\mathfrak{R}(u^*) \leq \mathfrak{R}(u)$. Pela minimalidade de $\mathfrak{R}(u)$, concluímos que vale a igualdade. Agora voltamos à demonstração do Teorema 2.6 e notamos a mesma demonstração se aplica e μ lá definida será diferenciável, agora em consequência da diferenciabilidade da primeira autofunção da bola u^* e não da função u . Portanto, obtemos que as curvas de nível de u devem ser bolas e portanto o suporte de u é uma bola.

OBSERVAÇÃO . No Teorema 2.10 ficamos devendo a existência de um minimizante. Como sabemos que a condição de que a curvatura de Ricci seja limitada inferiormente por $n-1$ implica que a variedade é compacta, é fácil verificar que o minimizante aqui encontrado de fato funciona, embora não pudéssemos a priori garantir que o seu suporte tivesse medida V .

OBSERVAÇÃO . Dado $\Omega \subset M$ aberto, se uma função u minimizando \mathfrak{R} em $\bar{\Omega}$ zera apenas em um subconjunto de medida nula de Ω , podemos tomar variações $u+t\varphi$ com φ qualquer função $C_0^\infty(\Omega)$. Exigindo que a derivada seja nula em $t=0$, contas análogas às feitas na Proposição 2.1

mostram que u deve ser solução de $-\Delta u = \tilde{\lambda}_1 u$ em Ω . Em particular, pela teoria de regularidade e princípio do máximo, concluímos que $u|_{\Omega} \in C^{\infty}(\Omega)$ e $u > 0$ em Ω .

Comentários Finais

Conforme já mencionado anteriormente, o Problema Isoperimétrico foi resolvido para uma quantidade pequena de espaços e a questão de existência e classificação de domínios isoperimétricos em variedades é tema de pesquisa. Por exemplo, uma conjectura razoável de ser feita seria a seguinte: se uma variedade não compacta rotacionalmente simétrica tem curvatura de Ricci na direção radial positiva e decrescente a zero, então as calotas são soluções do problema isoperimétrico. Isto já foi provado em dimensão 2, originalmente em [4] com versões posteriores, por exemplo, [32], mas permanece em aberto nos demais casos. Para resolução do Problema Isoperimétrico em espaços diferentes das formas espaciais simplesmente conexas, veja [24, 33, 34, 4, 30, 22, 31, 32]. Outra é a Conjectura de Aubin, apresentada ao final do primeiro capítulo, de que se M tem curvatura negativa, então o perfil isoperimétrico de \mathbb{R}^n é um perfil isoperimétrico para M , ou mais geralmente, de que se as curvaturas de M são limitadas superiormente por uma constante κ , então o perfil isoperimétrico da forma espacial simplesmente conexa de curvatura κ (veja [27]) é perfil isoperimétrico para M . Alguns resultados gerais sobre perfis isoperimétricos para variedades podem ser achados em [29, 3, 17, 23].

Sobre a desigualdade de Faber-Krahn, há ainda mais problemas em aberto, pois, a existência de um domínio com o volume dado e primeiro autovalor mínimo não é garantida sequer no caso compacto e quanto a alteração do problema variacional aqui apresentada, embora tenhamos a existência, não conseguimos provar que a função minimizante é contínua. Além disto, uma vez obtidos estes resultados sobre a existência, vêm as perguntas: Que regularidade podemos esperar do suporte da função minimizante? Como podemos caracterizá-lo geometricamente? Observamos que, analogamente ao feito na seção Fórmulas de Variação, poderíamos supor estar no melhor dos mundos e exigir que uma função u fosse minimizante local do quociente de Rayleigh e fazer variações desta por funções suaves sem alterar o volume do domínio, no entanto as contas de variação neste caso nos dão apenas a informação de que u tem derivada normal constante ao longo do bordo, contrastando com a informação obtida para o Problema Isoperimétrico “curvatura média constante”.

Uma variação natural que pode ser trabalhada com relação ao problema da desigualdade de Faber-Krahn seria trocar o laplaciano por um operador elíptico autoadjunto sobre M qualquer. Neste caso as contas feitas para superfícies rotacionalmente simétricas não se traduzem automaticamente e muito possivelmente, a menos que o operador ainda tenha uma forma bem específica, não será possível explicitar uma solução para a desigualdade de Faber-Krahn, caso esta exista. Por outro lado, usando técnicas semelhantes às apresentadas em [25], deve ser possível obter comparações para o menor primeiro autovalor do problema em questão em relação a um “problema simetrizado”. Devemos observar que todos os resultados da seção *Desigualdade de Faber-Krahn: Existência* permanecem válidos se trabalharmos com um operador elíptico autoadjunto qualquer.

uma vez que as propriedades lá utilizadas são apenas propriedades gerais de tais operadores (caracterização variacional do primeiro autovalor), teoremas de análise funcional e mergulhos de Sobolev (Teorema de Rellich-Kondrachov).

Bibliografia

- [1] ALMGREN, F., *Spherical Symmetrization*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. suplemento, s2. 15. 11-25 (1987).
- [2] AUBIN, T., *Problèmes Isopérimétriques et Espaces de Sobolev*. J. Diff. Geom. 11, 573-598 (1976)
- [3] BAVARD C. e PANSU, P., *Sur le Volume Minimal de \mathbb{R}^2* . Ann Sci. École Norm. Sup (4). 19. 479-490 (1986).
- [4] BENJAMIN, I. e CAO, J., *A new Isoperimetric Comparison Theorem for Surfaces of Variable Curvature*. Duke Math. J. 85, no 2, 97-107 (1996).
- [5] BÉRARD, P. H. e MEYER, D., *Inégalités Isopérimétriques et Applications*. Ann Sci. École Norm. Sup, 15, 531-542 (1982).
- [6] BOMBIERI, Enrico e GIUSTI, Enrico, *Harnack's Inequality for Elliptic Differential Equations on Minimal Surfaces*. Inventiones Mathematicae, 15, 24-46 (1972)
- [7] BURAGO, Yu D., ZALGALLER, V. A., *Geometric Inequalities*. Springer Verlag, Berlin, 1988.
- [8] CHAVEL, Isaac e FELDMAN, Edgar, *Isoperimetric Inequalities on Curved Surfaces*. Advances in Mathematics, 37, 83-98 (1980)
- [9] CHAVEL, Isaac, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*. Academic Press, Inc., Orlando, 1984.
- [10] CHAVEL, Isaac, *Riemannian Geometry: A Modern Introduction*. Cambridge University Press, 1993.
- [11] CHENG, Shiu-Yuen, *Eigenvalue Comparison Theorems and Its Applications*. Mathematische Zeitschrift, 143, vol 3, 289-297 (1975).
- [12] CROKE, C., *A Sharp Four Dimensional Isoperimetric Inequality*. Comment. Math Helv. 59, 187-192 (1984)
- [13] EVANS, L. C., *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.
- [14] EVANS, L. C. e GARIEPY, R. F., *Lecture Notes on Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Kentucky EPSCoR Preprint Series.
- [15] FABER, C., *Beweis dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten grundton gibt*. Sitzungsber. Bayer. Akad der Wiss. Math.-Phys., Munique, 169-172 (1923)
- [16] FEDERER, Herbert, *Geometric Measure Theory*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1969.
- [17] GALOT, S., *Inégalités Isopérimétriques et Analytiques sur les Variétés Riemanniennes*. Astérisque no. 163-164, 31-91 (1988).
- [18] GALLOT, Sylvestre, HULIN, Dominique e LAFONTAINE, Jacques, *Riemannian Geometry*. Springer Verlag, Berlin, 1987.
- [19] GIUSTI, Enrico, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*. Birkhäuser, Basel, 1984.
- [20] GROMOV, M., *Paul Levy's Isoperimetric Inequality*. Manuscrito não publicado.
- [21] GROMOV, M., *Isoperimetric Inequalities in Riemannian Geometry*, apêndice em *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*. Springer Verlag, Lecture Notes in Mathematics, 1200 (1980)
- [22] HOWARDS, H., HUTCHINGS, M. e MORGAN, F., *The Isoperimetric Problem on Surfaces of R evolution of Decreasing Gauss Curvature*. Trans. Amer. Math. Soc., pre-print
- [23] HSIANG, W. Y., *Isoperimetric Regions and Soap Bubbles*. (Blaine Lawson Jr. e K. Tenenblat, eds.), Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math. 52, Longman Sci. Tech., Harlow, 1991. In *Differential Geometry (A Symposium in Honor of Manfredo Perdigão do Carmo)*, pp. 229-240.
- [24] HSIANG, W. T. e HSIANG, W. Y., *On the Uniqueness of Isoperimetric Solutions and Imbedded Soap Bubbles in Noncompact Symmetric Spaces*. Inventiones Mathematicae, 85, 39-58 (1989)
- [25] KAWOHL, Bernhard, *Rearrangements and Convexity of Level sets in PDE*. Springer Verlag, Berlin, 1985.

- [26] KRAHN, E., *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises*. Math. Ann. 94, 95-100 (1925).
- [27] KLEINER, Bruce, *An Isoperimetric Comparison Theorem*. Inventiones Mathematicae, 108, 37-47 (1992).
- [28] LIEB, Elliott, e LOSS, Michael, *Analysis*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996.
- [29] OSSERMAN, R., *The Isoperimetric Inequality*. Bull. A.M.S., 84, 1182-1238 (1978).
- [30] PANSU, P., *Sur la Régularité du Profil Isopérimétrique des Surfaces Riemanniennes Compactes*. Ann. Inst. Fourier, 48, 247-264 (1998).
- [31] PEDROSA, R. e RITORÉ, M., *Isoperimetric Domains in the Riemannian Product of a Circle with a Simple Connected Space Form and Applications to Free Boundary Problems*. Indiana Univ. Math. J., 48, 1357-1394 (1999)
- [32] RITORÉ, Manuel, *Closed Embedded Curves with Constant Geodesic Curvature and Isoperimetric Domains in Rotationally Symmetric Surfaces*. Preprint (1998).
- [33] RITORÉ, M. e ROS, A., *Stable Constant Mean Curvature Tori and the Isoperimetric Problem in three Space Forms*. Comm. Math. Helv. 67, 293-305 (1992).
- [34] RITORÉ, M. e ROS, A., *The Space of Stable Constant Mean Curvature Surfaces and Index one Minimal Surfaces Embedded in Flat three Manifolds*. Trans. Amer. Math. Soc. 348, 391-410 (1996).
- [35] SCHMIDT, E., *Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im hyperbolischen und sphärischen Raum jeder Dimensionenzahl*. Mathematische Zeitschrift 49, 1-109 (1943)
- [36] SCHOEN, Richard e YAU, S.T., *Lectures on Differential Geometry*. International Press Inc., Boston, 1994.
- [37] TALENTI, Giorgio, *Best Constant in Sobolev Inequality*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, IV. Ser. 110, 353-372 (1976).
- [38] TALENTI, Giorgio, *The Standard Isoperimetric Theorem*, do livro *Handbook of Convex Geometry*, vol A. North-Holland, Amsterdam, 1993.
- [39] ÜHLENBECK, Karen, *Generic Properties of Eigenfunctions*. American Journal of Mathematics, vol 98, 1059-1078 (1976).
- [40] WEIL, Andre, *Sur les Surfaces a Courbure Negative*. C.R. Acad. Sci., Paris 182, 1069-1071 (1926)
- [41] ZIEMER, William P., *Weakly Differentiable Functions*. Springer Verlag, Berlin, 1989.