

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

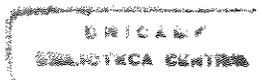
UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

# Métodos Clássicos e Simetrias no Problema de Dirichlet

Augusto César Ponce

Dissertação de Mestrado orientada pelo Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo

200016367



# MÉTODOS CLÁSSICOS E SIMETRIAS NO PROBLEMA DE DIRICHLET

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Augusto César Ponce e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 10 de agosto de 2000

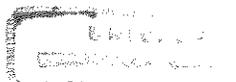
  
Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo

Orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo
2. Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes
3. Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para obtenção do título de MESTRE em Matemática.



UNIDADE	30
N.º CHAMADA:	TIUNICAMP
	P773m
V.	Ex.
TOMBO BC/	42937
PROC.	16.278100
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$11,00
DATA	25/10/00
N.º CPD	

CM-00145870-1

## FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Ponce, Augusto César

P773m Métodos clássicos e simetrias no problema de Dirichlet / Augusto  
César Ponce -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2000.

Orientador : Djairo Guedes de Figueiredo

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Dirichlet, Problemas de. 2. Cálculo das variações. I. Figueiredo,  
Djairo Guedes de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

**Dissertação de Mestrado defendida em 10 de agosto de 2000 e aprovada**

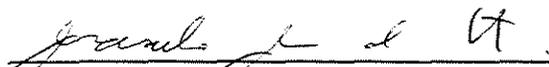
**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



**Prof (a). Dr (a). DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO**



**Prof (a). Dr (a). ORLANDO FRANCISCO LOPES**



**Prof (a). Dr (a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS**

# Resumo

Este trabalho tem por objetivo principal o estudo de alguns desenvolvimentos históricos do problema de Dirichlet, desde suas origens no século 18. Nós adotamos um tratamento puramente matemático, apresentando na primeira parte uma discussão detalhada dos métodos clássicos utilizados no estudo do problema de Dirichlet para a equação de Laplace. Na segunda e na terceira parte, consideramos o caso mais geral do problema de Dirichlet semilinear, inicialmente num contexto de minimização do funcional associado, e, em seguida, tratamos do problema na presença de simetria, em cujo caso é possível concluir a existência de uma seqüência ilimitada de soluções.

# Abstract

The main goal of this dissertation is to study some historical developments of the Dirichlet problem since its early beginnings during the eighteenth century. We used a strictly mathematical approach, giving in the first part a detailed discussion of the classical methods developed to handle Dirichlet problem for Laplace's equation. In the second and third parts we consider the more general case of a semilinear Dirichlet problem. First the discussion is in the context of minimization of the associated functional, and then we handle this problem when symmetry is involved. In such a case it is possible to conclude the existence of an unbounded sequence of solutions.

*“... et propter vitam vivendi perdere causas.”*

[... e, por causa da vida, esquecer as razões de viver.]

À minha terra natal.

# Prólogo

Durante o inverno de 1997, deparei-me com uma citação de Henri Poincaré, na qual este afirmava que “o papel do educador consiste em fazer que o espírito da criança passe novamente por onde estiveram seus antepassados, atravessando algumas etapas mais rapidamente, mas sem omitir nenhuma; a história da Ciência deve ser nosso guia.” A proposta é nada convencional e raramente colocada em prática: o que se vê em geral consiste numa completa dissociação entre aquilo que se estuda e sua história.

Quando o leitor encontra alguma referência histórica nos livros de Matemática, então ela está no início de algum capítulo e o autor a utiliza como um pretexto para introduzir um determinado assunto; em outros casos, tais referências encontram-se ao final de capítulos e o leitor terá à sua frente uma galeria interminável de nomes, datas e artigos. Em qualquer uma dessas situações, a História é colocada à parte, quer como algo impuro, distante das “coisas sérias”, ou como se fosse sagrada e que não poderia ser tocada senão por especialistas no assunto.

Como resultado, temos a seguinte situação: de um lado, encontram-se os compêndios em História da Matemática, os quais, com algumas exceções, preocupam-se em transmitir intrigas sobre matemáticos famosos cujas obras são feitos inatingíveis e inquestionáveis, verdadeiros objetos de inspiração divina; do outro lado, encontram-se os textos didáticos que se abstêm dos fatos históricos (pertinentes) envolvidos e o resultado dessa cisão é um estudante mal informado, e por que não dizer desmotivado, sobre seu objeto de interesse.

Este trabalho consiste numa primeira tentativa do autor em colocar em prática a proposta de Poincaré.

Meu objetivo consiste em apresentar a evolução de alguns métodos clássicos na resolução do

problema de Dirichlet para a equação de Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (1)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado, o qual viria a culminar com outros problemas requerindo técnicas bem mais elaboradas, os quais são objetos de intensa pesquisa atualmente. Ao final desta monografia, concentro-me em algumas questões mais simples envolvendo o problema de Dirichlet semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u = p(x, u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (2)$$

onde  $p : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua.

É preciso deixar claro que o leitor não está diante de um trabalho em História da Matemática, a despeito do enfoque dado, por alguns motivos bastante simples.

Em primeiro lugar, a seqüência histórica é utilizada senão como um palco onde apresento gradativamente a evolução temporal de determinados tópicos. O texto, contudo, não segue a ordem cronológica dos fatos, por uma mera questão de estilo: em vários momentos avanço e retrocedo historicamente, sem maiores explicações ao leitor, buscando garantir, com isso, a unidade e melhor compreensão do assunto.

Além disso, à medida que o texto avança, ocorre uma queda vertiginosa com respeito ao número de referências históricas, principalmente a partir da Parte II, e tenho por pretexto minha falta de isenção necessária para tratar de questões mais recentes. Afinal, é uma tarefa bastante árdua escrever sobre assuntos que ainda não passaram por uma seleção que cabe apenas ao tempo realizar.

Com respeito aos métodos que apresento, dei preferência a uma apresentação mais moderna, aproveitando os recursos que a Matemática nos proporciona atualmente, e que propiciou uma maior clareza na exposição das técnicas utilizadas à época. Contudo, sempre que julguei conveniente, foram acrescentados comentários sobre as demonstrações originais, mas principalmente sobre alguns graves erros cometidos nestas últimas. Meu objetivo com isso não tem um caráter depreciativo e sem ética, mas sim de transparecer ao leitor um período de trevas até meados do século 19, numa época na qual não se tinha uma idéia muito clara dos limites da Matemática.

Sempre que possível, preferi utilizar os textos originais como uma forma de evitar erros históricos que já se encontram completamente disseminados pela literatura, causados em grande parte por citações feitas de memória e utilização de fontes de segunda e terceira mão. Fiquei realmente surpreso com a quantidade de informações desconhecidas e, sempre que faço alguma referência da qual não tive como comprovar sua veracidade (o que não foram poucas as vezes), coloquei uma nota sobre onde a retirei. Acredito que isso irá trazer algum auxílio a alguém que se interesse em se aprofundar no assunto.

Com respeito à organização deste trabalho, ele está dividido em três partes bem definidas.

Na primeira parte, trato apenas de métodos clássicos de resolução do problema de Dirichlet para a equação de Laplace. O primeiro capítulo concentra assuntos anteriores ao célebre Princípio de Dirichlet, muito embora a exposição não se limite ao início do século 19. Após um retrospecto sobre os fenômenos que deram origem à equação de Laplace, faço uma comparação entre esta e a equação de Poisson. O primeiro método apresentado é o de Fourier, obtido a partir de separação de variáveis, onde proponho a resolução de um dos primeiros problemas de equilíbrio de temperaturas tratados por Fourier. Em seguida, passo para a função de Green associada a (1), onde descrevo uma técnica de demonstração proposta por Peter D. Lax por volta de 1950 que garante a existência da função de Green utilizando-se do Teorema de Hahn-Banach. Finalmente, concluo com alguns resultados em torno da fórmula da média para funções harmônicas e que fora constatada inicialmente por Gauss.

O tema central do segundo capítulo é o Princípio de Dirichlet, cuja formulação original estava incorreta, mas, mesmo assim, seria utilizada por Green, Dirichlet, Poisson e Riemann para garantir a existência de soluções do problema de Dirichlet. Em seguida, descrevo como isso auxiliou Riemann na obtenção do Teorema de Representação Conforme e concluo com alguns contra-exemplos questionando a validade daquele Princípio.

O Capítulo 3 concentra alguns métodos alternativos para a resolução de (1) surgidos a partir de 1870, logo após a queda do Princípio de Dirichlet. Neste trabalho apresento o processo alternante de Schwarz e os métodos da equação integral de Fredholm, de varredura de Poincaré e o das funções sub-harmônicas de Perron.

A segunda parte trata do resgate do Princípio de Dirichlet realizado por Hilbert no final do século 19 e início deste, quando ele propôs a utilização de seqüências minimizantes para obter o

ponto de mínimo da integral de Dirichlet

$$I(u) := \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

sobre uma classe de funções admissíveis conveniente. O Capítulo 4 inicia-se com a utilização de seqüências minimizantes em espaços clássicos com  $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ . Em seguida, passo para o método de projeção ortogonal de Weyl que oferece um novo enfoque, mais geométrico, na resolução de (1) e que viria a culminar com a utilização dos espaços de Sobolev nesse contexto. Finalmente, no Capítulo 5 a idéia de Hilbert é posta em prática no estudo do problema (2) desde que  $p$  satisfaça condições de crescimento capazes de garantir que o funcional associado

$$I(u) := \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \int_0^u p(x, s) ds \right) dx, u \in H_0^1(\Omega) \quad (3)$$

seja limitado inferiormente.

Na terceira e última parte, apresento uma breve introdução ao problema semilinear (2) no caso em que o funcional (3) não é mais limitado inferiormente e o problema de minimização de  $I$  perde seu significado. No Capítulo 6 é apresentado um resultado clássico de multiplicidade de pontos críticos de funções reais de classe  $C^1$  sobre  $S^n$  no contexto da Teoria de Ljusternik-Schnirelman, no qual utilizamos o Lema de Deformação. Por fim, no Capítulo 7, as idéias do capítulo anterior foram adaptadas para a demonstração de infinitas soluções no caso em que o funcional  $I$  em (3) é par e  $p$  satisfaz algumas condições adicionais de crescimento e, para isso, utilizo o Teorema da Fonte, demonstrado por Bartsch em 1992. A última seção foi reservada a algumas questões relacionadas ao problema associado à perturbação da simetria e à comparação entre o Teorema da Fonte e a versão simétrica do Teorema do Passo da Montanha.

## Agradecimentos

Algumas pessoas auxiliaram no andamento de meu trabalho e aproveito este espaço para prestar-lhes uma singela homenagem.

A redação desta monografia não teria sido possível graças ao suporte financeiro garantido pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Fapesp), que permitiu a aquisição de diversas obras que se mostraram de importantes no decorrer da pesquisa realizada.

Tenho também em grande dívida o auxílio prestado pelo Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo, meu orientador, pelas suas valiosas sugestões ao longo de minha formação.

Meu amigo Julio Cesar Magalhães de Oliveira incentivou-me bastante enquanto eu preparava a primeira parte deste trabalho.

Agradeço ao meu tio Pedro Olavo Ponce por ter cedido, tão gentilmente, seu computador para que eu pudesse dar continuidade ao trabalho de digitação nos períodos em que permaneci em Poços de Caldas.

Finalmente, a todos os professores, funcionários e colegas do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica que contribuíram para a conclusão desta monografia que agora vai à luz.

Augusto César Ponce

Poços de Caldas, 30 de julho de 2000

# Sumário

<b>I</b>	<b>Métodos Clássicos em Teoria do Potencial</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Os trabalhos pioneiros</b>	<b>5</b>
1.1	Introdução . . . . .	5
1.1.1	Histórico . . . . .	5
1.1.2	A equação de Laplace . . . . .	8
1.1.3	A equação de Poisson . . . . .	10
1.2	O método de Fourier . . . . .	15
1.2.1	O problema de equilíbrio térmico numa placa semi-infinita . . . . .	15
1.2.2	Sobre a representabilidade de funções em séries trigonométricas . . . . .	20
1.2.3	Alguns resultados de convergência . . . . .	26
1.3	A função de Green . . . . .	30
1.3.1	Construção da função de Green . . . . .	30
1.3.2	A fórmula de Poisson . . . . .	34
1.3.3	Sobre a existência da função de Green . . . . .	38
1.4	O Teorema de Gauss . . . . .	43
<b>2</b>	<b>O Princípio de Dirichlet</b>	<b>47</b>
2.1	Sobre o chamado Princípio de Dirichlet . . . . .	47
2.2	O Teorema da Aplicação Conforme de Riemann . . . . .	51
2.3	O declínio do Princípio de Dirichlet . . . . .	53
2.3.1	O criticismo de Weierstrass . . . . .	53
2.3.2	O exemplo de Prym . . . . .	55
2.3.3	O exemplo de Hadamard . . . . .	57

<b>3</b>	<b>Métodos alternativos de resolução do problema de Dirichlet</b>	<b>63</b>
3.1	O processo alternante de Schwarz . . . . .	63
3.2	O método da equação integral de Fredholm . . . . .	69
3.3	O método de varredura de Poincaré . . . . .	74
3.4	Crise no problema de Dirichlet: os exemplos de Zaremba e Lebesgue . . . . .	82
3.5	O método das funções sub-harmônicas de Perron . . . . .	86
<b>II</b>	<b>O Nascimento da Teoria Variacional Moderna</b>	<b>93</b>
<b>4</b>	<b>A ressurreição do Princípio de Dirichlet</b>	<b>97</b>
4.1	A consolidação dos métodos diretos do Cálculo das Variações . . . . .	98
4.2	O método da projeção ortogonal de Weyl . . . . .	106
4.3	A formulação moderna do Princípio de Dirichlet . . . . .	111
<b>5</b>	<b>O problema de Dirichlet semilinear</b>	<b>113</b>
5.1	A formulação fraca do problema . . . . .	113
5.2	Sobre a existência de soluções para o problema semilinear . . . . .	114
<b>III</b>	<b>Rumo à Teoria Global de Pontos Críticos</b>	<b>127</b>
<b>6</b>	<b>A Teoria de Ljusternik-Schnirelman</b>	<b>131</b>
6.1	A noção de gênero . . . . .	132
6.2	O Lema de Deformação . . . . .	137
6.3	Sobre um teorema de Ljusternik e Schnirelman . . . . .	140
<b>7</b>	<b>Problemas de multiplicidade envolvendo simetrias</b>	<b>143</b>
7.1	O Teorema da Fonte . . . . .	144
7.2	Retorno ao problema de Dirichlet semilinear . . . . .	147
7.3	Algumas considerações finais . . . . .	151

<b>Sumário</b>	xix
<b>Apêndice</b>	<b>157</b>
<b>A Alguns resultados sobre funções sub-harmônicas</b>	<b>157</b>
A.1 Princípio do Máximo . . . . .	157
A.2 Funções sub-harmônicas . . . . .	158
A.3 Levantamento harmônico . . . . .	158
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>161</b>

# Lista de Figuras

1.1	Somas parciais dos $n$ primeiros termos da série, para $n = 5, 15$ e $60$ . . . . .	19
1.2	Gráfico de $u(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} e^{-(2k-1)y} \cos(2k-1)x$ . . . . .	28
1.3	O domínio $\Omega$ do exemplo . . . . .	34
2.1	Elementos da família $u_\varepsilon$ com $a = -1$ e $b = 1$ . . . . .	54
2.2	Gráfico da função $u$ sobre $\Omega$ . . . . .	56
2.3	Exemplo de Hadamard . . . . .	59
2.4	Gráfico de $f$ . . . . .	60
3.1	Curvas $\gamma_1, \gamma_2$ e $\sigma$ em $\bar{\Omega}$ . . . . .	66
3.2	As regiões $\Omega_1$ e $\Omega_2$ . . . . .	67
3.3	Curvas de nível do potencial gravitacional $u$ gerado por $L$ . . . . .	84
3.4	Curvas de nível de $u$ em $\Omega$ no plano $x_1x_2$ . . . . .	85

Parte I

Métodos Clássicos em Teoria do  
Potencial

*“[...] la physique ne nous donne pas seulement  
l'occasion de résoudre des problèmes;  
elle nous aide à en trouver les moyens [...]”*  
(Henri Poincaré)

[(...) a Física não nos oferece apenas  
a possibilidade de resolver problemas;  
ela nos ajuda a encontrar os meios para fazê-lo (...)]

# Capítulo 1

## Os trabalhos pioneiros

### 1.1 Introdução

#### 1.1.1 Histórico

§1. Segundo o dicionário *Le Robert*, a palavra potencial tem origem do latim *potentialis*, derivado de *potens*, e sua utilização no contexto da Filosofia remonta aos séculos 15 e 16, em referência a algo em estado latente mas que não possui efeito real<sup>(i)</sup>.

Dieudonné<sup>(ii)</sup> observa que seu uso em Matemática deve ter sido influenciado pelos filósofos naturais do século 18, o que poderia explicar o fato de tanto George Green<sup>(iii)</sup> (1793-1841) (recorrendo à expressão *potential function*, em inglês) como Karl Friedrich Gauss<sup>(iv)</sup> (1777-1855) (*potential*, em alemão) apelarem ao mesmo termo, mas de forma totalmente independente, para se referirem às soluções da equação de Laplace  $\Delta u = 0$ .

Considero bastante provável que tenha ocorrido tal influência; mas, ao que foi possível constatar, coube a Daniel Bernoulli (1700-1782) a primeira referência ao conceito de potencial, em sua obra *Hydrodynamica* (1738), utilizando a idéia de *vis potentialis* (energia potencial), como sendo uma quantidade a partir da qual um campo de forças poderia ser obtido.

---

<sup>(i)</sup>POTENTIEL. In : P. Robert, [54], v.7, pp.645-646.

<sup>(ii)</sup>J. A. Dieudonné, [17], p.35.

<sup>(iii)</sup>G. Green, *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism*. In : *Papers*, pp.1-115. Apud G. D. Birkhoff, [5], p.347-358.

<sup>(iv)</sup>K. F. Gauss, *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnis des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs und Abstoßungskräfte*. In : *Werke*, v.5, p.200 et seq. Apud O. D. Kellogg, [38], p.52.

No entanto, até meados do século 18, o termo potencial estava ainda longe de se consolidar. Na *Encyclopédie*, por exemplo, a palavra francesa mais próxima que pude encontrar foi *puissance* (potência) e, muito embora já viesse sendo bastante utilizada à época, Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) reconhece que mesmo esta possuía ainda um significado um tanto confuso<sup>(v)</sup>.

§2. Embora o conceito de potencial já tivesse aparecido com Bernoulli em 1738, a equação de Laplace viria à luz somente em 1752, no trabalho *Princípios do Movimento dos Fluidos* de Leonhard Euler (1707-1783).

O objetivo de Euler era estudar o comportamento do campo de velocidades  $V$  de um líquido incompressível numa região  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Nesse caso, devemos ter  $\text{rot } V = 0$  e, sendo  $\Omega$  simplesmente conexo,  $V$  é um campo gradiente; em outras palavras, existe uma função  $v$  (que viria a ser chamada potencial de velocidades por Hermann von Helmholtz (1821-1894), em 1868) tal que  $V = \nabla v$ .

Por outro lado, sendo o líquido incompressível, o campo de velocidades está sujeito à Lei de Continuidade

$$\text{div } V = 0,$$

e, portanto,  $\Delta v = 0$  em  $\Omega$ . Euler limitou-se às soluções desta equação na forma polinomial, uma vez que reconheceu não ser capaz de determinar uma solução geral para ela.

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) obteve resultados semelhantes em 1762<sup>(vi)</sup> sem que fizesse qualquer menção ao trabalho de Euler, além de ter introduzido algumas melhorias consideráveis nos argumentos utilizados por este.

§3. Apesar de tais trabalhos em Mecânica dos Fluidos, os primeiros avanços realmente reconhecidos no campo da Teoria do Potencial estão ligados à Astronomia, a qual recebeu grande parte dos esforços dos matemáticos do século 18, numa busca incessante de aprimoramento dos trabalhos de Issac Newton (1642-1727) e cujo enfoque vinha sendo dado à descrição e à previsão do movimento de corpos celestes.

Segundo a Lei da Gravitação Universal, o campo gravitacional gerado por uma partícula de

---

<sup>(v)</sup>PUISSANCE : “[...] & plusieurs autres théorèmes semblables qui ne sont pas toujours démontrés dans la pratique avec toute la précision possible, parce qu'on y donne communément une notion un peu confuse du mot de *puissance*”.

(J. le R. d'Alembert) In : [16], v.13, pp.555-556.

<sup>(vi)</sup>J. L. Lagrange, *Misc. Taur.* 2 (1760\61), publ. 1762, pp.196-298; *Œuvres*, v.1, pp.365-468. Apud M. Kline, [39], p.525.

massa  $m$  no vácuo pode ser expresso por

$$F(x) = -m \frac{x}{|x|^3}, \quad x \neq 0,$$

onde estamos posicionando a partícula na origem do sistema de coordenadas e tomamos um sistema de unidades conveniente para que a constante de gravitação universal seja 1. No caso de uma distribuição de massas numa região  $\Omega$  com densidade  $\rho$ , o campo de forças resultante será

$$F(x) = - \int_{\Omega} \frac{x-y}{|x-y|^3} \rho(y) dy, \quad x \notin \bar{\Omega}.$$

Em 1773, Lagrange<sup>(vii)</sup> constatou que, nessas condições, teríamos

$$F = \nabla v, \quad \text{onde } v(x) = \int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|} \rho(y) dy.$$

Essa observação foi de grande valia a Pierre Simon de Laplace (1749-1827), pois transformava o estudo do campo gravitacional, com três componentes, à análise de uma única função escalar.

Para auxiliar seu trabalho, Laplace verificou que  $v$  satisfazia a equação  $\Delta v = 0$  no exterior da região  $\bar{\Omega}$ , primeiramente em coordenadas polares<sup>(viii)</sup> em 1782 e, posteriormente, em coordenadas cartesianas<sup>(ix)</sup> em 1787. Tal equação, conforme observou Siméon Denis Poisson<sup>(x)</sup> (1781-1840), serviu de base para belas investigações sobre a atração de esferóides.

§4. A equação de Laplace também se mostrou presente nos fenômenos eletrostáticos e magnetostáticos no vácuo graças aos trabalhos de Coulomb<sup>(xi)</sup> na década de 1780 e que, por sua vez, já haviam sido detectados experimentalmente por Daniel Bernoulli antes mesmo de 1760<sup>(xii)</sup>.

Finalmente, em 1807, devido aos seus estudos sobre o fenômeno de condução do calor, Fourier submete à Academia de Ciências de Paris, em 21 de dezembro de 1807, um artigo intitulado “Sur

<sup>(vii)</sup>J. L. Lagrange, *Mém. des sav. étrangers* 7 (1773); *Œuvres*, v.6, p.348. Apud O. D. Kellogg, loc cit.

<sup>(viii)</sup>P. S. Laplace, “Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes”, *Mém. Acad. Sci. Paris* 1782 (1785); *Œuvres*, X, pp.339–419. Apud G. D. Birkhoff, [5], pp.336–338.

<sup>(ix)</sup> P. S. Laplace, “Mémoire sur la théorie de l’anneau de saturne”, *Mém. Acad. Sci. Paris* 1787 (1789); *Œuvres*, XI, pp.273–292. Apud G. D. Birkhoff, loc cit.

<sup>(x)</sup>S. D. Poisson, “Remarques sur une équation qui se présente dans la théorie de l’attraction des sphéroïdes”, *Bull. Soc. Philomath. Paris* 3 (1813), pp.388–392. In : G. D. Birkhoff, op cit, pp.342–346.

<sup>(xi)</sup>Coulomb, *Hist. de l’Acad. des Sci., Paris* (1785), pp.569–577. Apud O. D. Kellogg, op cit, p.175.

<sup>(xii)</sup>Cf. M. Kline, [39], p.507.

la Théorie de la Chaleur”, segundo o qual a temperatura  $u$  de um corpo homogêneo deve satisfazer a equação

$$u_t = \Delta u, \quad (1.1)$$

e onde apresenta um novo método de resolução para este problema<sup>(xiii)</sup>.

Dessa maneira, se supusermos que a temperatura  $u$  de um sólido homogêneo esteja em equilíbrio, então segue de (1.1) que  $\Delta u = 0$ , e mais uma vez obtemos a equação de Laplace.

### 1.1.2 A equação de Laplace

§5. O fato de a equação de Laplace aparecer na formulação de modelos físicos tão diversos é, sem dúvida alguma, intrigante. Além disso, foi necessário algum tempo para que os matemáticos do século 19 percebessem que deveria haver um conceito comum por trás disso.

A resposta encontra-se exatamente na idéia de *equilíbrio*, i.e., que podemos associar a cada um desses fenômenos uma quantidade cujo fluxo total em qualquer região seja nulo. Mais explicitamente, temos:

- Num líquido incompressível, a quantidade de matéria que penetra numa região deverá ser compensada pela saída de igual volume, para evitar uma eventual mudança de densidade do líquido;
- O campo de forças gerado por uma partícula, ou mesmo por uma carga elétrica, no vácuo pode ser associado, por analogia, aos raios luminosos produzidos por uma fonte pontual e, neste caso, todos os raios que incidem sobre uma região que não contenha tal ponto luminoso necessariamente irão sair dela, e o fluxo total será nulo<sup>(xiv)</sup>;
- Num sólido homogêneo em equilíbrio térmico, as trocas de calor entre as regiões devem se compensar, para que não ocorram variações de temperatura.

Em termos matemáticos, se considerarmos  $u$  como sendo uma grandeza física satisfazendo a condição

$$\int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = 0, \quad \forall U \subset \subset \Omega,$$

<sup>(xiii)</sup>Vid seção 1.2.

<sup>(xiv)</sup>Parece-me bastante plausível que esta analogia possa ter auxiliado Newton a formular sua Lei da Gravitação Universal.

seguirá do Teorema do Divergente que

$$\int_U \Delta u \, dx = \int_U \operatorname{div} \nabla u \, dx = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma = 0.$$

Sendo o aberto  $U \subset\subset \Omega$  arbitrário, devemos ter  $\Delta u = 0$  em  $\Omega$ .

§6. Inversamente, podemos considerar tudo o que foi visto até aqui do ponto de vista puramente matemático e associar fenômenos físicos *generalizados* para regiões abertas  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 2$ .

Neste caso, o potencial gerado por uma partícula em  $\mathbb{R}^n$  irá corresponder a soluções radiais da equação  $\Delta u = 0$ , e que são da forma  $u(x) = a \log |x| + b$ , se  $n = 2$ , e  $u(x) = a \frac{1}{|x|^{n-2}} + b$ , caso  $n > 2$ . Em vista disso, podemos definir a solução fundamental da equação de Laplace<sup>(xv)</sup>, como sendo

$$\vartheta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x|}, & \text{se } n = 2 \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{se } n > 2 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0.$$

Além disso, dado um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , uma questão física natural que surge é se existe uma configuração de equilíbrio de temperaturas sobre  $\Omega$ , sabendo que a temperatura sobre a superfície do condutor é dada por  $f$ . Matematicamente, temos o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (1.2)$$

onde por solução consideraremos, ao menos na 1ª parte desta monografia, aquelas funções que satisfazem (1.2) no sentido clássico, i.e., tais que  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ .

Caso  $\Omega$  seja limitado, segue do Princípio do Máximo que, se existir solução para o problema acima, ela necessariamente será única, embora essa conclusão seja falsa para  $\Omega$  ilimitado. Com efeito, se  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$  for o semi-espaco superior, então

$$u_1(x) = e^{-x_n} \cos x_1$$

$$u_2(x) = e^{x_n} \cos x_1$$

satisfazem a equação  $\Delta u = 0$ , mas com a mesma condição de contorno sobre  $\partial\mathbb{R}_+^n$ . Para evitarmos inconveniências desse tipo, estaremos interessados sempre em soluções limitadas, o que elimina a 2ª solução acima, por exemplo.

<sup>(xv)</sup>Embora essa terminologia seja clássica, na linguagem moderna da Teoria das Distribuições isso significa que  $-\Delta\vartheta = \delta$ , ou seja,  $-\int_{\mathbb{R}^n} \vartheta(x-y)\Delta\varphi(y) \, dy = \varphi(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Esta relação será verificada sob condições bem mais gerais na próxima subseção.

### 1.1.3 A equação de Poisson

§7. A generalização imediata do potencial gravitacional gerado por uma distribuição de massas com densidade  $\rho$  num aberto limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é a seguinte<sup>(xvi)</sup>:

$$u(x) = \int_{\Omega} \vartheta(x-y)\rho(y) dy, \quad (1.3)$$

sendo denominado potencial newtoniano gerado pela densidade  $\rho$ .

Uma análise mais atenta dessa expressão nos mostra que ela está bem definida para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , desde que  $\rho$  seja integrável e limitada. Além disso, embora  $\Delta u = 0$  se  $x \notin \bar{\Omega}$ , não devemos ter muitas esperanças de que a mesma relação se verifique em  $\Omega$ , por conta da descontinuidade no núcleo da integral.

Com efeito, essa equação não se verifica em  $\Omega$ , como foi constatado pela 1ª vez por Poisson em 1813<sup>(xvii)</sup>. Segundo Poisson<sup>(xviii)</sup>, a expressão (1.3) vinha sendo utilizada apenas na região exterior a  $\Omega$ , o que não trouxe maiores dificuldades para a época; Morris Kline, no entanto, argumenta que num artigo de Laplace de 1789<sup>(xix)</sup> este assumira implicitamente que a equação se verificaria inclusive nas regiões contendo matéria<sup>(xx)</sup>. De qualquer forma, não foi possível verificar essas informações.

§8. Devemos ser cautelosos no cálculo das derivadas do potencial newtoniano  $u$ , por conta do grau de descontinuidade e de integrabilidade das derivadas da solução fundamental  $\vartheta$ . Isso será feito em três lemas<sup>(xxi)</sup>:

LEMA 1.1 Para todo  $1 \leq i, j \leq n$ :

$$\left| \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}(x) \right| \leq C \frac{1}{|x|^{n-1}}, \quad (1.4)$$

$$\left| \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right| \leq C \frac{1}{|x|^n}. \quad (1.5)$$

---

<sup>(xvi)</sup>Embora estejamos indicando  $\rho$  como sendo uma distribuição de massas, admitiremos que  $\rho$  assumia tanto valores negativos quanto positivos. É verdade que isso poderia ser evitado se tratássemos de uma densidade de cargas elétricas. No entanto, acredito que a idéia de potencial gravitacional tem um apelo intuitivo mais claro.

<sup>(xvii)</sup>S. D. Poisson, loc cit.

<sup>(xviii)</sup>S. D. Poisson, loc cit.

<sup>(xix)</sup>Vid nota (ix).

<sup>(xx)</sup>Cf. M. Kline, op cit, p.530.

<sup>(xxi)</sup>Cf. D. Gilbarg e N. S. Trudinger, [32], pp.54-56.

*Demonstração.* As estimativas acima seguem do cálculo direto das derivadas de  $\vartheta$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}(x) &= -\frac{1}{\omega_n} \frac{x_i}{|x|^n}, \\ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_i \partial x_j}(x) &= \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{|x|^n} \left\{ n \frac{x_i}{|x|} \frac{x_j}{|x|} - \delta_{ij} \right\}.\end{aligned}$$

■

LEMA 1.2 *Se  $\rho$  for limitada e integrável, então  $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$  e, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}(x-y) \rho(y) dy. \quad (1.6)$$

*Demonstração.* Escrevendo

$$v_i(x) := \int_{\Omega} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}(x-y) \rho(y) dy,$$

segue da estimativa (1.4) que  $v$  está bem definida para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Nosso objetivo será mostrar que  $v_i(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ .

Para tanto, vamos fixar uma função  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$  tal que  $0 \leq \eta \leq 1$ ,  $\eta(t) = 0$ , se  $t \leq 1$ ,  $\eta(t) = 1$ , se  $t \geq 2$  e  $0 \leq \eta' \leq 2$ . Para cada  $\varepsilon > 0$ , podemos definir:

$$u_\varepsilon(x) := \int_{\Omega} \vartheta(x-y) \eta_\varepsilon(x-y) \rho(y) dy,$$

onde  $\eta_\varepsilon(x-y) := \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)$ .

Pela construção de  $\eta$ , é imediato que  $u_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R}^n)$  e

$$v_i(x) - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \int_{\Omega \cap B_{2\varepsilon}(x)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \vartheta(x-y) [1 - \eta_\varepsilon(x-y)] \right\} \rho(y) dy.$$

Logo, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned}\left| v_i(x) - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x) \right| &\leq \sup_{\Omega} |\rho| \int_{B_{2\varepsilon}(0)} \left( \left| \frac{\partial \vartheta}{\partial z_i} \right| + \frac{2}{\varepsilon} |\vartheta| \right) dz \\ &\leq \sup_{\Omega} |\rho| \begin{cases} C\varepsilon(1 + |\log 2\varepsilon|), & \text{se } n = 2 \\ C\varepsilon, & \text{se } n > 2 \end{cases}.\end{aligned}$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , segue que  $u_\varepsilon$  e  $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}$  convergem uniformemente a  $u$  e  $v$ , respectivamente, em  $\mathbb{R}^n$ . Logo,  $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$  e  $v_i(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ .

■

O grande inconveniente ligado ao potencial gerado por  $\rho$  diz respeito ao cálculo da derivada segunda de  $u$ , uma vez que, pela estimativa (1.5), não é permitido o cálculo de  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  sob o sinal da integral em (1.6).

Para a demonstração de  $u \in C^2(\Omega)$ , devemos supor que  $\rho$  seja Hölder-contínua<sup>(xxii)</sup> com expoente  $0 < \alpha \leq 1$ , ou seja,  $|\rho(x) - \rho(y)| \leq C|x - y|^\alpha$ ,  $\forall x, y \in \Omega$ .

LEMA 1.3 *Se  $\rho$  for Hölder-contínua com expoente  $0 < \alpha \leq 1$ , então  $u \in C^2(\Omega)$  e, para todo  $x \in \Omega$ ,*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{\Omega_0} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_i \partial x_j}(x - y) [\rho(y) - \rho(x)] dy - \rho(x) \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}(x - y) \nu_j(y) d\sigma_y, \quad (1.7)$$

onde  $\Omega_0 \supset \supset \Omega$  é uma aberto limitado com bordo regular e estendemos  $\rho$  como sendo zero em  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ .

*Demonstração.* Por conta da estimativa (1.5) e do fato de  $\rho$  ser Hölder contínua, a função

$$w_{ij}(x) := \int_{\Omega_0} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_i \partial x_j}(x - y) [\rho(y) - \rho(x)] dy - \rho(x) \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}(x - y) \nu_j(y) d\sigma_y$$

está bem definida para todo  $x \in \Omega$ .

Mantendo as notações do lema anterior, definiremos

$$v_{i\varepsilon}(x) := \int_{\Omega_0} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}(x - y) \eta_\varepsilon(x - y) \rho(y) dy.$$

Dessa forma,  $v_{i\varepsilon} \in C^1(\Omega)$  e, por aplicação da fórmula de integração por partes, virá

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{i\varepsilon}}{\partial x_j} &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}(x - y) \eta_\varepsilon(x - y) \right\} \rho(y) dy \\ &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}(x - y) \eta_\varepsilon(x - y) \right\} [\rho(y) - \rho(x)] dy - \rho(x) \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}(x - y) \eta_\varepsilon(x - y) \nu_j d\sigma_y \\ &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}(x - y) \eta_\varepsilon(x - y) \right\} [\rho(y) - \rho(x)] dy - \rho(x) \int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}(x - y) \nu_j(y) d\sigma_y, \end{aligned}$$

onde na última igualdade estamos supondo  $2\varepsilon < d(\Omega, \partial\Omega_0)$ .

<sup>(xxii)</sup>Foi exatamente para essa finalidade que Ludwig Otto Hölder (1859–1937) introduziu tal condição. Cf. L. O. Hölder, *Beiträge zur Potentialtheorie*, Stuttgart, 1882 (Dissertação). Apud O. D. Kellogg, op cit, p.152.

Assim, se  $x \in \Omega_{2\varepsilon} := \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) < 2\varepsilon\}$ , teremos

$$\begin{aligned} \left| w_{ij}(x) - \frac{\partial v_{i\varepsilon}}{\partial x_j}(x) \right| &= \left| \int_{|x-y| < 2\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}(x-y) [1 - \eta_\varepsilon(x-y)] \right\} [\rho(y) - \rho(x)] dy \right| \\ &\leq C \int_{|z| < 2\varepsilon} \left\{ \left| \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z_i \partial z_j} \right| + \frac{2}{\varepsilon} \left| \frac{\partial \vartheta}{\partial z_i} \right| \right\} |z|^\alpha dz \leq C\varepsilon^\alpha. \end{aligned}$$

Sendo  $\alpha > 0$ ,  $\frac{\partial v_{i\varepsilon}}{\partial x_j}$  converge uniformemente a  $w_{ij}$  nas partes compactas de  $\Omega$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Como pelo lema anterior  $v_{i\varepsilon} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j}$  uniformemente quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , segue que  $u \in C^2(\Omega)$  e  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = w_{ij}$ . ■

Na verdade, a conclusão do Lema 1.3 é falsa caso  $\rho$  seja somente contínua, como podemos verificar no exemplo abaixo<sup>(xxiii)</sup>:

EXEMPLO 1.1 Sejam  $\Omega = B_{1/2}(0) \subset \mathbb{R}^2$  e

$$\rho(x) := \begin{cases} \alpha \frac{(x_1^2 - x_2^2)}{|x|^2} |\log|x||^{\alpha-2} (\alpha - 1 + 4 \log|x|), & \text{se } 0 < |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

onde  $0 < \alpha < 1$ . Assim,  $\rho \in C(\bar{\Omega})$ , mas o potencial gerado por  $\rho$ ,

$$u(x) = \begin{cases} (x_1^2 - x_2^2) |\log|x||^\alpha, & \text{se } 0 < |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

não é de classe  $C^2$ . ■

Contudo, se  $\rho \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , então em virtude do Lema 1.2, sabemos que  $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$  e, além disso, é possível provar que a equação  $-\Delta u = \rho$  é satisfeita no sentido das distribuições, ou seja,<sup>(xxiv)</sup>

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx = \int_{\Omega} \rho \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

§9. Finalmente o resultado que queríamos:

<sup>(xxiii)</sup> Cf. B. Dacorogna, [13], p.127.

<sup>(xxiv)</sup> Cf. E. Lieb e M. Loss, [44], pp.149-150.

**TEOREMA 1.4** *Se  $\rho$  for Hölder contínua, então  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$  e satisfaz a equação de Poisson, i.e.,  $-\Delta u = \rho$  em  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Com efeito, dado  $x \in \Omega$ , vamos fixar  $R > 0$  suficientemente grande tal que  $\Omega \subset \subset B_R(x)$ . Assim, tomando  $\Omega_0 = B_R(x)$ , pela equação (1.7) teremos<sup>(xxv)</sup>

$$-\Delta u(x) = - \int_{\Omega_0} \Delta_x \vartheta(x-y) [\rho(y) - \rho(x)] dy + \frac{1}{n\sigma_n R^{n-1}} \rho(x) \int_{\partial\Omega_0} \sum_{i=1}^n \nu_i \nu_i d\sigma = \rho(x).$$

■

Podemos formular o problema de Dirichlet clássico para a equação de Poisson, que consiste em obter uma função  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = \rho & \text{em } \Omega \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.8)$$

Como estamos supondo  $\Omega$  limitado, o Princípio do Máximo nos garante a existência de, no máximo, uma solução. Além disso, o Teorema 1.4 nos assegura que a resolução do problema acima quando  $\rho$  for Hölder-contínua num aberto  $\Omega$  é equivalente ao problema de Dirichlet para a equação de Laplace; mais precisamente, temos:

**COROLÁRIO 1.4.1** *Se (1.2) admitir uma solução para toda  $f \in C(\partial\Omega)$  e se  $\rho$  for Hölder-contínua, então o problema (1.8) também possui solução para toda  $f \in C(\partial\Omega)$ .*

*Demonstração.* Definindo  $v$  como sendo o potencial gerado por  $\rho$ , dado por (1.3), tomamos  $w$  como sendo a solução da equação de Laplace com condição de contorno  $f - v$ , onde  $f \in C(\partial\Omega)$ . Neste caso,  $u := v + w$  satisfaz (1.8) e, além disso,  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ . ■

O Exemplo (1.1) nos mostra que se  $\rho$  for apenas contínua, a conclusão do corolário acima deixa de ser verdadeira, pois, como veremos na subseção 1.3.2, o problema de Dirichlet para a equação de Laplace sobre  $B_{1/2}(0)$  sempre admite solução.

§10. A equação de Poisson foi obtida originalmente por Poisson apenas sob a hipótese de continuidade de  $\rho$  e o argumento utilizado foi o seguinte:

---

<sup>(xxv)</sup>Devemos ressaltar que, neste caso,  $y \mapsto \Delta_x \vartheta(x-y) [\rho(y) - \rho(x)]$  é uma função integrável e nula exceto em  $y = x$ , ao contrário de  $y \mapsto \Delta_x \vartheta(x-y)$  que não é integrável em qualquer vizinhança de  $x$ .

Suponhamos  $\Omega$  homogêneo, i.e., que  $\rho$  seja constante. Utilizando uma relação demonstrada por Newton, conclui-se facilmente que o potencial gravitacional  $u$  satisfaz  $-\Delta u = \rho$ . Caso  $\Omega$  seja heterogêneo e  $\rho$ , apenas contínua, fixamos arbitrariamente um ponto  $x \in \Omega$ . Para toda bola  $B_\varepsilon(x)$  suficientemente pequena, vemos que o potencial resultante sobre  $x$  pode ser decomposto em duas partes: a primeira,  $u_1$ , gerada por  $\Omega \setminus B_\varepsilon(x)$ , que é harmônica, e uma segunda,  $u_2$ , que é gerada por  $B_\varepsilon(x)$ . Em nosso caso, estamos interessados apenas em  $u_2$  (pois já sabemos que  $\Delta u_1 = 0$ ). Escolhendo  $\varepsilon$  tão pequeno quanto se queira, podemos supor, com um erro desprezível, que  $\rho$  valha  $\rho(x)$  em  $B_\varepsilon(x)$  e portanto, pelo caso anterior, teremos  $-\Delta u_2(x) = \rho(x)$ . Seguirá das equações correspondentes para  $u_1$  e  $u_2$  que  $-\Delta u(x) = \rho(x)$ ,  $\forall x \in \Omega$ , quando  $\rho$  for contínua.

Devemos reconhecer que essa seria uma demonstração bem mais simples do que a apresentada por nós, não fosse pelo mero detalhe de ela estar errada. O erro de Poisson está no forte apelo físico utilizado, escondendo as questões genuinamente matemáticas envolvidas. No entanto, esse tipo de argumento foi bastante utilizado até meados do século 19, como iremos verificar nas próximas seções<sup>(xxvi)</sup>.

## 1.2 O método de Fourier

### 1.2.1 O problema de equilíbrio térmico numa placa semi-infinita

§11. Historicamente, o método de Fourier representa o primeiro tratamento sistemático para a resolução de equações diferenciais parciais e, embora sua aplicação esteja restrita a regiões com simetrias, teve um papel inquestionável no desenvolvimento da Matemática, especialmente porque foi uma dos motivos que levaram os matemáticos do século 19 a construir toda uma base lógica que até então praticamente não existia; além disso, o estudo da convergência das séries de Fourier trouxe à luz um grande número de questões envolvendo conceitos fundamentais e que já não podiam mais ser desprezadas.

§12. Denotaremos por  $\Omega$  uma placa infinita e homogênea de largura  $\pi$  no semiplano superior de  $\mathbb{R}^2$ , delimitada pelas retas  $x = -\frac{\pi}{2}$  e  $x = \frac{\pi}{2}$ ; e vamos supor que a superfície desta placa esteja

<sup>(xxvi)</sup> Segundo Morris Kline (op cit, p.682), Poisson reconheceu que sua demonstração não era rigorosa. No entanto, não temos qualquer indicação de onde ele obtém essa informação e, no artigo original de Poisson, também não há referências a esse fato.

termicamente isolada, de maneira que não ocorram trocas de calor na superfície.

Nosso objetivo será determinar sua configuração de equilíbrio térmico, sabendo que a temperatura sobre as retas  $x = -\frac{\pi}{2}$  e  $x = \frac{\pi}{2}$  será mantida em 0, e que, sobre o segmento  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  do eixo  $x$ , a temperatura seja dada por uma função  $f$  que independa do tempo (nenhuma hipótese será feita sobre o valor de  $f$  nas extremidades desse segmento).

Como foi visto na subseção 1.1.1, denotando por  $u$  a temperatura de equilíbrio sobre a placa  $\Omega$ , Fourier observou que  $u$  satisfaz a equação de Laplace  $\Delta u = 0$ .

Vamos supor inicialmente que  $u$  possa ser escrita como o produto de funções  $v = v(x)$  e  $w = w(y)$ , i.e.,  $u(x, y) = v(x)w(y)$ . Neste caso, após substituição dessa expressão na equação de Laplace, teremos

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)}.$$

Ora, sendo o 1º membro função somente de  $x$ , e o 2º, apenas de  $y$ , então ambos devem ser constantes e iguais a  $\mu$ . Logo, satisfazem as equações

$$\begin{cases} v''(x) - \mu v(x) = 0 \\ w''(y) + \mu w(y) = 0 \end{cases}.$$

Por outro lado, temos  $v(-\frac{\pi}{2}) = v(\frac{\pi}{2}) = 0$ , correspondente às condições de contorno e, como estamos interessados em soluções não-triviais, devemos supor  $\mu = -\lambda^2 < 0$ , de onde segue que  $\lambda$  é inteiro e

$$w(y) = e^{-\lambda y}$$

$$v(x) = \begin{cases} \cos \lambda x, & \text{se } \lambda = \pm 1, \pm 3, \dots \\ \text{sen } \lambda x, & \text{se } \lambda = \pm 2, \pm 4, \dots \end{cases}.$$

Como já havíamos observado, trataremos apenas das soluções limitadas (o que, do ponto de vista físico, é bastante plausível); eliminando os valores negativos de  $\lambda$ , teremos

$$u(x, y) = \begin{cases} e^{-\lambda y} \cos \lambda x, & \text{se } \lambda = 1, 3, \dots \\ e^{-\lambda y} \text{sen } \lambda x, & \text{se } \lambda = 2, 4, \dots \end{cases}.$$

Pelo Princípio de Superposição, uma combinação finita das funções acima continuará sendo solução da equação de Laplace, satisfazendo as condições contorno nas laterais da placa. Em geral, no entanto, a condição de contorno não será atendida sobre o eixo  $x$ .

§13. A idéia de Fourier foi considerar a série

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha_k e^{-(2k-1)y} \cos(2k-1)x + \beta_k e^{-2ky} \operatorname{sen} 2kx \right\} \quad (1.9)$$

e tentar determinar os coeficientes  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  de maneira que, para  $y = 0$ , tenhamos

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha_k \cos(2k-1)x + \beta_k \operatorname{sen} 2kx \right\}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \quad (1.10)$$

Vamos admitir, ao menos por enquanto, que uma função  $g$  definida num intervalo  $(a, b)$  e com *boas propriedades* sempre admita uma expansão em séries de Fourier da forma

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ a_j \cos\left(\frac{2\pi j}{b-a}x\right) + b_j \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi j}{b-a}x\right) \right\}, \quad (1.11)$$

onde os coeficientes são obtidos a partir das relações de ortogonalidade entre as funções trigonométricas:

$$a_j = \frac{2}{b-a} \int_a^b g(x) \cos\left(\frac{2\pi j}{b-a}x\right) dx \quad (1.12)$$

$$b_j = \frac{2}{b-a} \int_a^b g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi j}{b-a}x\right) dx. \quad (1.13)$$

Iremos admitir, ainda, que a igualdade em (1.11) ocorra, pelo menos, nos pontos de continuidade de  $g$ .

O cálculo dos coeficientes de Fourier de  $f$  diretamente sobre o intervalo  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  não irá nos fornecer, em geral, uma expansão da forma (1.10). Para tanto, devemos estender  $f$  convenientemente sobre  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  como uma função  $\tilde{f}$  tal que

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -f(\pi - x), & \text{se } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}.$$

Com essa escolha, verifica-se facilmente que a série de Fourier de  $\tilde{f}$  está representada como em (1.10). Além disso, teremos

$$\alpha_k = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(2k-1)x dx, \quad (1.14)$$

$$\beta_k = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \operatorname{sen} 2kx dx. \quad (1.15)$$

Dessa forma, espera-se que a solução do problema posto inicialmente sobre a temperatura de equilíbrio da placa seja dada pela expressão (1.9), onde os coeficientes  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  são dados por (1.14) e (1.15), respectivamente.

§14. Toda a argumentação que fizemos até aqui é muito bonita e um leitor um pouco mais desatento poderia acreditar que o nosso problema está encerrado, enquanto ainda mal tocamos nas questões matemáticas envolvidas. Com efeito, uma série de perguntas necessitam ser respondidas:

1. Sob quais condições a série (1.11) converge?
2. Quando a igualdade em (1.11) ocorre, sabendo-se que a série converge?
3. Se  $f$  tiver tais *boas propriedades*, o mesmo irá ocorrer à sua extensão  $\tilde{f}$ ?
4. Se  $f$  puder ser expressa na forma (1.10), o operador  $\Delta$  pode ser permutado com  $\sum$  em (1.9)?  
Em outras palavras,  $\Delta u = 0$  em  $\Omega$ ? Além disso,  $u \in C^2(\Omega)$ ?
5. Será que  $u$  satisfaz as condições de contorno do problema no sentido clássico, i.e.,  $u$  é contínua sobre  $\bar{\Omega}$  exceto, eventualmente, nos vértices da placa?

Evidentemente, outras questões surgem naturalmente da resolução destas listadas acima. Nosso objetivo será responder a estas indagações no problema apresentado abaixo, o qual representa o primeiro exemplo tratado por Fourier<sup>(xxvii)</sup> na sua obra *Théorie Analytique de la Chaleur*, correspondendo ao caso em que  $f \equiv 1$  sobre o segmento  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  do eixo  $x$ .

EXEMPLO 1.2 Vamos considerar o problema de determinação da temperatura de equilíbrio da placa  $\Omega$  quando o segmento  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  do eixo  $x$  é mantido à temperatura constante  $f \equiv 1$ .

Como neste caso  $f$  é uma função par, devemos ter

$$\beta_k = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_k = \frac{4(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)}.$$

e, portanto, (1.10) toma a forma (figura 1.1)

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cos(2k-1)x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \quad (1.16)$$

Além disso, obtemos a seguinte expressão para (1.9):

---

<sup>(xxvii)</sup>J. B. J. Fourier, [28], p.141 et seq.

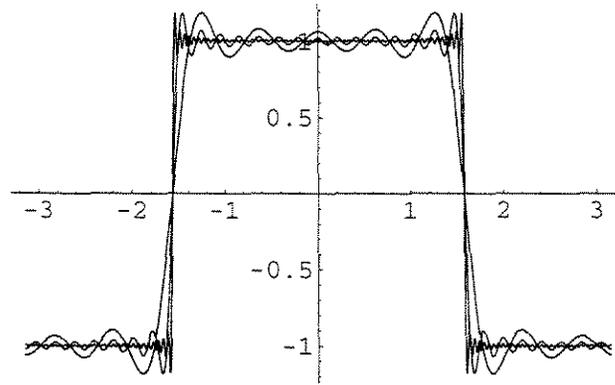


Figura 1.1: Somas parciais dos  $n$  primeiros termos de (1.16), para  $n = 5, 15$  e  $60$

$$u(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} e^{-(2k-1)y} \cos(2k-1)x. \quad (1.17)$$

Retomaremos o estudo dessas representações somente na subseção 1.2.3. ■

§15. A escolha da série (1.16) por Fourier realmente não foi das mais felizes, pois representava uma função constante por uma série composta apenas por co-senos e consistiu em um grande golpe nas crenças (sic) dos matemáticos do início do século 19. Embora correta, os ataques feitos a essa expansão em série trigonométrica foram bastante duros, principalmente porque, no intervalo  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ , seu valor muda bruscamente para  $-1$  (exatamente como havíamos construído). Um verdadeiro despropósito!

Alguns matemáticos da Academia de Ciências de Paris, destacadamente Lagrange, não podiam conceber como uma soma infinita de funções levaria a algo que na época sequer era considerado uma função!<sup>(xxviii)</sup> Além disso, Lagrange negava veementemente a possibilidade de que toda (sic) função pudesse ser escrita em série de senos e co-senos<sup>(xxix)</sup>.

Não bastasse isso, pela escolha de pontos convenientes, Fourier foi capaz de reobter os valores de diversas séries numéricas que haviam sido calculadas ao longo do século 18.

Como os críticos à utilização das séries de Fourier não conseguiam precisar o problema dessa

<sup>(xxviii)</sup> Embora não existisse ainda uma definição precisa de função, digamos que a mais flexível admitia por função, no máximo, aquelas curvas capazes de ser desenhadas no papel, sem que o lápis fosse retirado da folha. Lagrange, por sua vez, acreditava que uma função estaria completamente determinada pelos seus valores em um intervalo arbitrariamente pequeno (o que corresponderia às nossas funções analíticas).

<sup>(xxix)</sup> Vid nota (xliv).

representação, partiram ao ataque da questão de convergência global da série, além da falta de rigor no trabalho de Fourier<sup>(xxx)</sup>.

Correspondem a esse período os primeiros trabalhos na tentativa de estabelecer os conceitos de diferencial e integral em bases mais rigorosas<sup>(xxxi)</sup>. Além disso, como a série (1.16) não é absolutamente convergente, teoremas de convergência bastante delicados faziam-se necessários.

Fourier acreditava que todo o problema se restringia a mostrar que a sua série era convergente pois, pela própria construção dos coeficientes, o limite deveria corresponder ao valor desejado<sup>(xxxii)</sup>.

No tratamento destas questões durante as três primeiras décadas do século 19 destacaram-se, direta ou indiretamente, Augustin Louis Cauchy (1789-1857), Henrik Niels Abel (1802-1829) e Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), Poisson e o próprio Fourier. O objetivo estava em responder se as representações de funções por meio das séries de Fourier estavam corretas.

Somente na década de 1820 surgiram os primeiros resultados favoráveis a Fourier.

### 1.2.2 Sobre a representabilidade de funções em séries trigonométricas

§16. Ao contrário da confiança quase universal dos matemáticos atualmente de que o tratamento original de Fourier seguiu, à sua maneira, os passos que descrevi acima, a verdade está muito longe disso.

Devo reconhecer que o argumento apresentado por Fourier no seu livro *Théorie Analytique de la Chaleur*, publicado em 1822, tem algo de grandioso pela infinidade de manipulações algébricas que ele utiliza para finalmente obter as expressões (1.12) e (1.13).

Meu objetivo será apresentar aqui os passos que considero mais relevantes sobre como Fourier

---

<sup>(xxx)</sup>Com relação a este último ponto, não consegui encontrar um consenso. Segundo Bressoud ([7], p.219), essa falta de rigor se refere à maneira que Fourier utilizara para obter a equação do calor; Kline (op cit, p.678), por sua vez, acredita que tais críticas eram devidas à falta de rigor no trabalho de Fourier em geral. De qualquer forma, fica difícil saber o quão adequadas eram as manipulações formais adotadas por Fourier, para os padrões pré-Cauchy, no início do século 19.

<sup>(xxxi)</sup>Vale observar que, ao longo de todo o século 18, esse objetivo foi insistentemente perseguido, mas os resultados não foram nada animadores.

<sup>(xxxii)</sup>A respeito da série (1.16), Fourier escreveu: "Il serait aisé de prouver que cette série est toujours convergente; c'est-à-dire que, en mettant au lieu de  $y [x]$  un nombre quelconque et en poursuivant le calcul des coefficients, on approche de plus en plus d'une valeur fixe; en sorte que la différence de cette valeur à la somme des termes calculés devient moindre que toute grandeur assignable. Sans nous arrêter à cette démonstration que le lecteur peut supplier, [...]". (J. B. J. Fourier, opus cit, p.156)

obteve os valores dos coeficientes de sua série.

A razão para isso é que esta obra de Fourier apresenta uma rara oportunidade de se compreender o processo de criação em Matemática. Embora pudesse ter iniciado pelas expressões integrais dos coeficientes, ele preferiu expor todo o raciocínio (impreciso, devo reconhecer) que o levou a tais representações. Além disso, acredito que tais argumentos não tenham sido explorados o suficiente na tentativa de expor o quão tortuoso representa o caminho trilhado pela Matemática. Por fim, teremos a possibilidade de observar como a lógica sobrevivia em meio às manipulações puramente formais de expressões algébricas, algo que já vinha se arrastando desde o século 18.

Para colocarmos em prática nosso intento, vamos tratar do segundo exemplo apresentado por Fourier (como já observamos, o primeiro corresponde a (1.16), extremamente mais simples).

§17. Dada uma função  $f$  ímpar, nosso objetivo será determinar os coeficientes  $b_k$  de maneira que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} kx. \quad (1.18)$$

Expandindo ambos os membros da equação (1.18) em série de potências em torno de  $x = 0$ , obtemos o seguinte sistema linear infinito, nas variáveis  $b_k$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(0) = 1^1 b_1 + 2^1 b_2 + 3^1 b_3 + 4^1 b_4 + \dots \\ 0 = 1^2 b_1 + 2^2 b_2 + 3^2 b_3 + 4^2 b_4 + \dots \\ -f'''(0) = 1^3 b_1 + 2^3 b_2 + 3^3 b_3 + 4^3 b_4 + \dots \\ 0 = 1^4 b_1 + 2^4 b_2 + 3^4 b_3 + 4^4 b_4 + \dots \\ f^v(0) = 1^5 b_1 + 2^5 b_2 + 3^5 b_3 + 4^5 b_4 + \dots \\ \vdots \end{array} \right. \quad (1.19)$$

Ao expandir ambos os membros de (1.18) em série de potências, parece-me que Fourier estava à procura de algo que atestasse a possibilidade de representação de  $f$  na forma (1.18). Conceitualmente, existe uma certa diferença entre tomar tal expansão em série de potências e verificar se é possível determinar coeficientes  $b_k$  que satisfazem (1.18), ou então simplesmente admitir a existência destes coeficientes e procurar uma fórmula que permite determiná-los.

Caso Fourier simplesmente derivasse ambos os membros de (1.18), a fim de obter o sistema (1.19), ele estaria aceitando a segunda opção. Além disso, Fourier não estava em uma posição muito confortável, pois nada lhe garantia a viabilidade de uma decomposição de  $f$  em série de senos, por

exemplo<sup>(xxxiii)</sup>.

§18. A resolução de um sistema infinito realmente não é tarefa das mais fáceis, pois além de envolver laboriosos cálculos, leva à questão da própria convergência de cada equação. No entanto, para a época, a manipulação de somas infinitas era o menor de todos os problemas<sup>(xxxiv)</sup>.

A idéia de Fourier foi bastante interessante e partiu da resolução de sistemas finitos<sup>(xxxv)</sup>. Para isso, ele considera apenas as  $n$  primeiras equações em (1.19), supõe  $b_{n+1} = b_{n+2} = \dots = 0$ , e resolve o sistema em  $n$  equações a  $n$  incógnitas. Além disso, é bastante razoável que, ao aumentar  $n$ , tais soluções se aproximem dos coeficientes que devem satisfazer o sistema infinito original<sup>(xxxvi)</sup>.

As expressões dos coeficientes  $b_k$  são então obtidas na forma de produtos infinitos e, após várias páginas de fatigantes manipulações algébricas, obtém-se a seguinte representação para os coeficientes em termos de uma série envolvendo todas as derivadas de  $f$  em  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} (-1)^{k-1} \frac{k}{2} b_k = & \left\{ \frac{1}{1} \right\} f'(0) \\ & + \left\{ \frac{\pi^2}{3!} - \frac{1}{k^2} \right\} f'''(0) \\ & + \left\{ \frac{\pi^4}{5!} - \frac{1}{k^2} \frac{\pi^2}{3!} + \frac{1}{k^4} \right\} f^{(5)}(0) \\ & + \left\{ \frac{\pi^6}{7!} - \frac{1}{k^2} \frac{\pi^4}{5!} + \frac{1}{k^4} \frac{\pi^2}{3!} - \frac{1}{k^6} \right\} f^{(7)}(0) \\ & + \dots \end{aligned}$$

Agrupando os termos de uma mesma coluna, vemos que a  $j$ -ésima coluna corresponde à série de Taylor da  $2(j-1)$ -ésima derivada de  $\frac{1}{k^{2(j-1)\pi}} f$ , avaliada em  $x = \pi$ . Com base nessas observações, obtemos uma expressão um pouco mais simples para  $b_k$ :

$$(-1)^{k-1} \frac{k\pi}{2} b_k = f(\pi) - \frac{1}{k^2} f''(\pi) + \frac{1}{k^4} f^{(4)}(\pi) - \frac{1}{k^6} f^{(6)}(\pi) + \dots,$$

<sup>(xxxiii)</sup>Embora tanto Euler como Daniel Bernoulli já tivessem se utilizado de expansões em séries trigonométricas, é realmente difícil saber o quanto Fourier conhecia do trabalho de seus antecessores nessa área. Num artigo de 1825, ele escreve que Lacroix o informara sobre isso, mas não se refere quando isso ocorreu. Cf. M. Kline, opus cit, p.676.

<sup>(xxxiv)</sup>Vid nota (xxxvii).

<sup>(xxxv)</sup>Este recurso foi utilizado por Fredholm, na forma de determinantes infinitos, para a resolução de equações integrais, e foi neste contexto que ele formulou a Alternativa de Fredholm. Cf. E. I. Fredholm, "Sur une classe d'équations fonctionnelles". *Acta Math.* 27 (1903), pp.365-390. In : G. D. Birkhoff, opus cit, pp.449-465.

<sup>(xxxvi)</sup>Cf. J. A. Dieudonné, op cit, pp.76-79.

de onde virá a seguinte representação de  $f$  em série de Fourier:

$$\frac{1}{2}\pi f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ f(\pi) - \frac{1}{k^2} f^{ii}(\pi) + \frac{1}{k^4} f^{iv}(\pi) - \frac{1}{k^6} f^{vi}(\pi) + \dots \right\} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \operatorname{sen} kx. \quad (1.20)$$

Para ilustrar a aplicabilidade de (1.20), Fourier a utiliza para a função  $f(x) = e^x - e^{-x}$ , obtendo

$$\frac{\pi e^x - e^{-x}}{2 e^{\pi} - e^{-\pi}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{k}} \operatorname{sen} kx. \quad (1.21)$$

À primeira vista, não há nenhum problema com a expressão (1.21). No entanto, pelo cálculo direto do coeficiente de  $\operatorname{sen} x$  em (1.20), concluímos nada mais, nada menos, do que  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$ !

§19. Ao leitor que estiver imaginando que Fourier aplicou algum outro critério de convergência (por exemplo, a da média) para obter tal valor, lamento informar que está completamente enganado. Na verdade, Fourier se utiliza da soma da série geométrica

$$1 - t + t^2 - t^3 + \dots = \frac{1}{1 + t} \quad (1.22)$$

calculada em  $t = 1$ .

As esperanças de alguém que ainda tivesse confiança no desenvolvimento adotado por Fourier e acreditasse que (1.20) seria apenas uma representação exótica que se verificaria caso  $f$  fosse analítica em  $\mathbb{R}$  já devem ter se esvaído; ainda por cima, após uma anomalia desse tipo acontecer logo ao protótipo de função analítica que é a exponencial.

De qualquer maneira, aqui encontramos um dos mais básicos exemplos de utilização das chamadas séries divergentes, as quais se disseminaram durante o século 18. O que realmente impressiona neste caso são as discussões que ocorreram em torno da validade de se considerar extensões de fórmulas que se verificavam nos intervalos de convergência, para as regiões onde tais séries divergiam, exatamente como em (1.22) para  $t = 1$  <sup>(xxxvii)</sup>.

Como apenas a geometria possuía uma estrutura lógica consistente, isso graças aos *Elementos*, de Euclides, as demais áreas da Matemática viviam num constante conflito sobre o que estaria

<sup>(xxxvii)</sup> No século 18, a manipulação formal de somas infinitas há muito ultrapassara a capacidade de justificá-la. Segundo Kline, os matemáticos começaram a confiar nos símbolos mais do que na própria lógica, sustentando-se em argumentos metafísicos para explicar seus procedimentos. Cf. M. Kline, [40], pp.151-152.

correto ou não, de forma que essas discussões deslocavam-se rapidamente para problemas de ordem filosófica ou até mesmo religiosa<sup>(xxxviii)</sup>, mas que, no fundo, era apenas uma forma de sustentar uma opinião pessoal sobre o assunto.

Sobre as questões envolvendo as séries divergentes, simplesmente não havia um consenso. Enquanto Euler as defendia ardorosamente contra qualquer objeção, d'Alembert não as via com bons olhos<sup>(xxxix)</sup>. De qualquer maneira, suas razões não estavam estabelecidas em qualquer princípio lógico mas, tão-somente, na conveniência.

Mesmo quando se inicia o processo de rigorização do Cálculo, as séries divergentes já estavam tão enraizadas, que Cauchy lamenta não conseguir estabelecer uma base lógica para elas<sup>(xli)</sup>. Esse tipo de observação não escapa a Abel, que considera vergonhoso alguém ainda tentar formalizar o uso de tais séries<sup>(xlii)</sup>.

---

<sup>(xxxviii)</sup> A interferência de questões religiosas na Matemática constitui um capítulo à parte nessa história. A presença de Deus foi muito marcante no estabelecimento de equações matemáticas que modelassem os fenômenos físicos do universo. Na verdade, até os séculos 16 e 17, a simples existência de Deus já era motivo para que um modelo matemático simples, descrevendo um determinado fenômeno natural, estivesse realmente correto, pois essa simplicidade refletia a perfeição da obra de seu Criador. Quando Newton publica sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, os modelos matemáticos propostos foram considerados corretos ainda com base nesses princípios teológicos, muito embora, logo em seguida, tenham se sustentado na comprovação experimental de suas conseqüências. No caso, por exemplo, da trajetória dos corpos celestes, apesar de a Lei da Gravitação Universal garantir a estabilidade do sistema formado por dois corpos, haveria uma instabilidade no Sistema Solar devido à perturbação entre os planetas. Neste ponto, Newton argumenta que Deus se encarregava constantemente de corrigir as órbitas, e a estabilidade estaria garantida. No entanto, aqui já observamos como Deus é colocado num papel secundário, de mero coadjuvante. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), num de seus ataques a Newton, utiliza-se dessa idéia e chama a obra de Newton de anti-cristã, pois as equações aí contidas modelam de forma tão completa os fenômenos do Universo, que a existência de Deus era desnecessária. E assim, ao entrar no século 18, os mesmos modelos matemáticos que haviam se sustentado na existência de Deus passaram a negá-la. Esse fato teve implicações profundas em toda a Ciência, que, por essa visão mecanicista do mundo, colocava uma Matemática ainda débil do ponto de vista lógico, como o grande Norte do século 18. A Idade da Razão estaria apenas começando...

<sup>(xxxix)</sup> "Pour moi, j'avoue que tous les raisonnements et les calculs fondés sur des séries qui ne sont pas convergentes ou qu'on peut supposer ne pas l'être, me paraîtront toujours très suspects". (J. R. d'Alembert, *Opusc. Mathem.*, v.5, 1768, p.35; *Mémoire*, p.183. Apud K. Knopp, [41], p.458.)

<sup>(xli)</sup> "Je me suis vu forcé d'admettre plusieurs propositions qui paraîtront peut-être un peu dures, par exemple qu'une série divergente n'a pas de somme". (A. L. Cauchy, prefácio à *Analyse Algébrique*. Apud K. Knopp, opus cit, p.459.)

<sup>(xlii)</sup> "Les séries divergentes sont, en général, quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on ose y fonder aucune démonstration". (Abel em carta a Michael Berndt Holmböe, 16 de janeiro de 1826. Apud K. Knopp, loc cit.)

§20. Retomando a expansão de  $f$  dada por (1.20), devemos procurar uma forma mais *tratável* para os coeficientes. Para isso, definimos

$$s_k(x) = f(x) - \frac{1}{k^2}f''(x) + \frac{1}{k^4}f^{iv}(x) - \frac{1}{k^6}f^{vi}(x) + \dots$$

e, pela derivação formal de  $s_k$ , obtemos a seguinte equação<sup>(xiii)</sup>:

$$s_k + \frac{1}{k^2} \frac{d^2 s_k}{dx^2} = f.$$

Portanto,  $s_k$  pode ser escrita na forma

$$s_k(x) = a \cos kx + b \operatorname{sen} kx + k \int_0^x f(t) \operatorname{sen} k(x-t) dt,$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes.

Como  $s_k(0) = 0$ , devemos ter  $a = 0$ . Assim, tomando  $x = \pi$ , obtemos

$$s_k(\pi) = (-1)^{k-1} k \int_0^\pi f(t) \operatorname{sen} t dt,$$

e, conseqüentemente, os coeficientes  $b_k$  da série de Fourier de  $f$  devem ser dados por

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \operatorname{sen} kx dx.$$

Impressiona o fato de se obter o resultado correto após tantos apelos a argumentos nada precisos<sup>(xliii)</sup>.

§21. Sobre a série (1.20), Fourier observa que, embora tais coeficientes tenham sido obtidos para funções infinitamente diferenciáveis, tal representação permanece válida para funções descontínuas e totalmente arbitrárias<sup>(xliiv)</sup>. Neste caso, é realmente difícil saber qual a extensão que o comentário de Fourier assume<sup>(xlv)</sup>, mas essa pretensa generalidade não deixa de ser curiosa.

<sup>(xliii)</sup> Fourier, aqui, ultrapassa todo o bom-senso e trata  $\pi$  como sendo uma variável. A equação diferencial obtida em termos de  $\pi$ , no entanto, é logo reescrita na variável  $x$ .

<sup>(xliiii)</sup> Um outro exemplo ainda mais surpreendente desse tipo de fenômeno está na obtenção original da fórmula de Stirling por Abraham de Moivre (1667-1754) e James Stirling (1692-1770), publicada em 1730. Cf. D. Bressoud, [7], pp.294-303 e 122-123.

<sup>(xliiv)</sup> "On peut étendre les mêmes conséquence à des fonctions quelconques, mêmes à celles qui seraient discontinues et entièrement arbitraires". (J. B. J. Fourier, opus cit, p.207)

<sup>(xlv)</sup> Para Euler, por exemplo, uma função descontínua era uma curva traçada continuamente, mas com eventuais discontinuidades na derivada. No entanto, parece-me que Fourier tinha em mente as funções seccionalmente contínuas.

De qualquer maneira, fica claro aqui um recurso utilizado à época, de admitir um resultado como verdadeiro pela utilização de um número mínimo de hipóteses, suficientes apenas para que os conceitos envolvidos possuam algum significado (no caso, a possibilidade de se calcular os coeficientes  $b_k$ ), mesmo que tenha sido demonstrado (nos padrões da época, evidentemente) apenas um caso bastante particular dessa proposição.

Somente após todo esse desenvolvimento e agora convencido (sic) da validade da expressão (1.20), Fourier passa ao cálculo direto dos coeficientes da série por meio das relações de ortogonalidade das funções trigonométricas.

### 1.2.3 Alguns resultados de convergência

§22. Somente em 1821, com a publicação das *Leçons sur le calcul infinitésimal* por Cauchy, as bases rigorosas da Análise começariam a ser lançadas.

Entre 1807, quando Fourier submete seu primeiro trabalho sobre a utilização de séries trigonométricas, e 1822, quando é publicada a *Théorie Analytique de la Chaleur*, não havia ainda muitos progressos no estudo da convergência das séries de Fourier; muito embora Fourier se esforçasse em divulgar, através de casos particulares, a utilidade de suas séries no estudo da condução do calor.

Poisson apresenta em 1820 uma demonstração para a convergência das séries de Fourier e que estaria correta, não fosse pelo detalhe de Poisson ter assumido em determinado ponto de seu artigo que tais séries convergiam. Fourier também procurou apresentar uma demonstração para esse resultado na sua obra citada acima; embora não tivesse sucesso, foi capaz de mostrar qual a direção que deveria ser seguida.

Em 1826, Cauchy tratou desse problema, publicando o que acreditava ser uma solução. Porém havia falhas em seu tratamento. Dentre elas, ele assumiu que, dadas duas seqüências  $(a_k)_{k \geq 1}$  e  $(b_k)_{k \geq 1}$ , tais que  $\sum_k a_k$  converge e  $|a_k - b_k| \rightarrow 0$ , então  $\sum_k b_k$  também deveria convergir. Dirichlet<sup>(xlvii)</sup>, no entanto, observou que, tomando  $a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$  e  $b_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$ , as hipóteses são atendidas, mas  $\sum_k b_k$  evidentemente não converge.

Finalmente, em 1829, Dirichlet publica uma primeira demonstração satisfatória<sup>(xlvii)</sup> (com algumas incorreções, é verdade, mas todas elas facilmente contornáveis) para a convergência das séries

<sup>(xlvii)</sup>Cf. P. G. L. Dirichlet, [18], p.118.

<sup>(xlvii)</sup>P. G. L. Dirichlet, op cit.

de Fourier, e que teve uma versão mais detalhada em 1837<sup>(xlviii)</sup>. O teorema era o seguinte<sup>(xlix)</sup>:

TEOREMA 1.5 (TEOREMA DE DIRICHLET) *Seja  $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada, seccionalmente contínua e seccionalmente monótona sobre  $(-\pi, \pi)$ . Logo,*

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx), \quad \forall x \in (-\pi, \pi),$$

onde  $a_k$  e  $b_k$  são os coeficientes de Fourier de  $f$ :

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad (1.23)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx \, dx. \quad (1.24)$$

■

§23. Agora podemos retomar o Exemplo 1.2. Antes, devemos observar que, por translação e mudanças de escala do intervalo de definição de  $f$ , o teorema acima permanece válido na forma aparentemente mais geral dada por (1.11).

EXEMPLO 1.3 Pela aplicação do Teorema 1.5 a

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ -1 & \text{se } x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases},$$

podemos concluir a validade da representação

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cos(2k-1)x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Devemos verificar, ainda, que (figura 1.2)

$$u(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} e^{-(2k-1)y} \cos(2k-1)x \quad (1.17)$$

realmente satisfaz a equação de Laplace, com as condições de contorno desejadas, i.e.,  $u = 0$  sobre as semi-retas  $x = -\frac{\pi}{2}$  e  $x = \frac{\pi}{2}$  do semiplano superior, e  $u = 1$  sobre o segmento  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  do eixo  $x$ .

<sup>(xlviii)</sup>P. G. L. Dirichlet, "Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen". In : *Werke*, pp.133-160.

<sup>(xlix)</sup>Cf. D. Bressoud, op cit, pp.220-234.

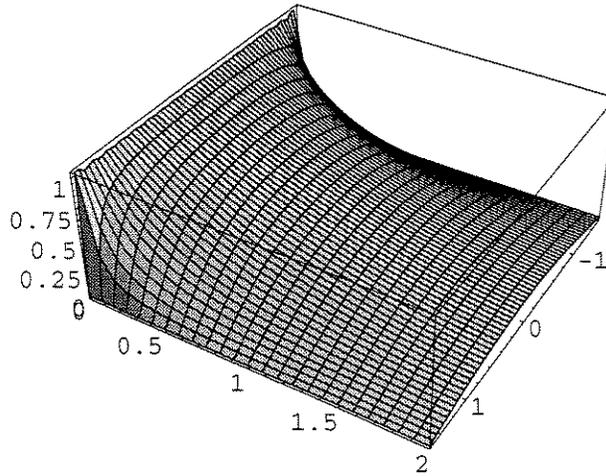


Figura 1.2: Gráfico de  $u(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} e^{-(2k-1)y} \cos(2k-1)x$

Denotando por  $\Omega_\varepsilon$  a parte da placa  $\Omega$  acima da reta  $y = \varepsilon$ , segue de uma verificação imediata que  $u$  e todas as séries obtidas por derivações formais sucessivas de  $u$  convergem uniformemente em  $\overline{\Omega}_\varepsilon$ . Nesse caso,  $u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon) \cap C(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ , para todo  $\varepsilon > 0$ . Em particular,  $\Delta u = 0$  em  $\Omega$  e as condições de contorno laterais da placa são atendidas.

Resta verificar a continuidade de  $u$  numa vizinhança do segmento  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  sobre o eixo  $x$ . Para isso precisaremos do seguinte resultado demonstrado por Abel em 1826 num estudo sobre a convergência da série de Taylor<sup>(1)</sup>:

LEMA 1.6 (LEMA DE ABEL) *Sejam  $(c_k)_{k \geq 1}$  e  $(v_k)_{k \geq 1}$  duas seqüências em  $\mathbb{R}$ . Suponha que*

$$c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \dots \geq 0$$

*e que exista uma constante  $M > 0$  satisfazendo*

$$\left| \sum_{k=1}^n v_k \right| \leq M, \forall n \geq 1.$$

*Logo,*

$$\left| \sum_{k=1}^n c_k v_k \right| \leq c_1 M, \forall n \geq 1.$$

<sup>(1)</sup>H. N. Abel, *Œuvres*, I, pp.219–250. Apud G. D. Birkhoff, *op cit*, 68–70.

*Demonstração.* Definindo  $s_k := \sum_{k=1}^n v_k$ , teremos

$$v_1 = s_1, \quad v_2 = s_2 - s_1, \quad v_3 = s_3 - s_2, \quad \dots.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_k v_k &= c_1 s_1 + c_2 (s_2 - s_1) + \dots + c_n (s_n - s_{n-1}) \\ &= (c_1 - c_2) s_1 + (c_2 - c_3) s_2 + \dots + (c_{n-1} - c_n) s_{n-1} + c_n s_n. \end{aligned}$$

Como  $c_n$  e os termos entre parêntesis são positivos, o resultado segue imediatamente da estimativa uniforme para  $|s_k|$ . ■

Vamos aplicar o lema acima com

$$c_k(y) := \frac{1}{2k-1} e^{-(2k-1)y} \quad \text{e} \quad v_k(x) := (-1)^k \cos(2k-1)x.$$

Utilizando a fórmula da soma de uma progressão geométrica, torna-se fácil verificar que  $\left| \sum_{k=m}^n v_k(x) \right| \leq |\sec x|$ , se  $m \leq n$ ; em particular, tais somas permanecem uniformemente limitadas sobre o intervalo  $(-\frac{\pi}{2} + \delta, \frac{\pi}{2} - \delta)$ .

Em vista disso, podemos tomar  $\Omega^\delta$  como sendo os pontos da placa  $\Omega$  a uma distância  $\delta$  de suas laterais, i.e., das retas  $x = -\frac{\pi}{2}$  e  $x = \frac{\pi}{2}$ . Assim, se  $(x, y) \in \overline{\Omega}^\delta$ , pelo Lema 1.6 teremos

$$\left| \sum_{k=m}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} e^{-(2k-1)y} \cos(2k-1)x \right| \leq \frac{1}{2m-1} \sec \delta, \quad \text{se } m \leq n.$$

Dessa forma, a série em (1.17) converge uniformemente em  $\overline{\Omega}^\delta$ , para todo  $\delta > 0$ . Em particular,  $u(x, y) \rightarrow 1$  quando  $x \rightarrow x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  e  $y \rightarrow 0$ . ■

**§24.** Meu objetivo, não é discutir resultados envolvendo a série de Fourier e a história de seu desenvolvimento após Dirichlet. Isso o leitor poderá encontrar de forma bastante detalhada e esclarecedora na bibliografia sobre o assunto<sup>(ii)</sup>. Mas é bastante profícuo ressaltar a importância que certos conceitos, presentes no estudo das séries de Fourier ainda de forma bastante modesta e acanhada, viriam a assumir neste século.

<sup>(ii)</sup>Cf. G. D. Birkhoff, op cit, pp.130–156, passim; D. G. de Figueiredo, [24], pp.40–42 e 99–100; M. Kline, op cit, pp.969–972.

Dentre estes, talvez os mais importantes sejam os de autovalor e autovetor que, no caso em que tratamos, aparecem sutilmente na obtenção das soluções não-triviais da equação

$$v''(x) - \mu v(x) = 0,$$

sujeitas às condições de contorno  $v(-\frac{\pi}{2}) = v(\frac{\pi}{2}) = 0$ . Evidentemente, Fourier tratou ainda de problemas mais elaborados, cujos autovalores deveriam satisfazer certas equações transcendentais.

No entanto, é improvável que Fourier pudesse ter consciência da monumental importância que o estudo dos autovalores de um operador linear viriam assumir na Análise, inicialmente com a Teoria de Sturm-Liouville, no século 19; mas, principalmente, com o advento da Análise Funcional nesse século.

## 1.3 A função de Green

### 1.3.1 Construção da função de Green

§25. Em 1828, Green publicou um pequeno livro intitulado *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism*, no qual apresentou suas três identidades, obtidas a partir do Teorema do Divergente, e construiu a função de Green para regiões limitadas. Seu objetivo era estudar a relação entre a densidade superficial de cargas sobre  $\partial\Omega$  e o potencial eletrostático resultante.

Nesse livro, Green apresenta uma demonstração de existência de soluções do problema de Dirichlet para a equação de Laplace. No entanto, em vista do isolamento que a Matemática inglesa já vinha enfrentando a mais de um século (por conta das diferentes posturas adotadas no desenvolvimento dos conceitos fundamentais do Cálculo<sup>(iii)</sup>), esse trabalho de Green permaneceria incógnito à Europa continental por um longo tempo<sup>(liii)</sup>.

---

<sup>(ii)</sup>Enquanto na Inglaterra buscavam construir um Cálculo baseado nas idéias geométricas e físicas de Newton, apelando para velocidades instantâneas, por exemplo; na parte continental da Europa, desenvolviam-se os diferenciais, i.e., as quantidades infinitamente pequenas de Leibniz. Embora nenhuma dessas vertentes conseguisse estabelecer uma base lógica para seus conceitos, o uso dos diferenciais era bem mais flexível, levando a todo um aparato de manipulações algébricas formais e que seriam largamente utilizadas no século 18.

<sup>(liii)</sup>E ficou praticamente esquecido até que Sir William Thompson (1824-1907), futuro Lorde Kelvin, intercedeu para que ele fosse publicado no *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*. Cf. G. Green, *J. Reine Angew. Math.* **39** (1850), pp.73-79; **44** (1852), pp.356-374; **47** (1854), pp.161-221. Apud M. Kline, op cit, p.683.

Evidentemente, não podemos ter muitas esperanças de que os argumentos de Green tivessem o rigor adequado aos nossos dias. De qualquer maneira, suas linhas gerais têm sobrevivido muito bem ao longo do tempo, não encontrando modificações significativas na forma, desde a época em que foram apresentados.

§26. No que se segue, vamos supor  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e limitado, e cuja fronteira  $\partial\Omega$  seja de classe  $C^1$ . Sob essas condições, o seguinte teorema se verifica<sup>(liv)</sup>:

TEOREMA 1.7 (AS TRÊS IDENTIDADES DE GREEN) *Sejam  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ , então*

$$\int_{\Omega} \langle \nabla v, \nabla u \rangle + v \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma, \quad (1.25)$$

$$\int_{\Omega} u \Delta v - v \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, d\sigma, \quad (1.26)$$

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \vartheta(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu}(y-x) u(y) \, d\sigma_y - \int_{\Omega} \vartheta(y-x) \Delta u(y) \, dy, \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.27)$$

A segunda identidade é conseqüência imediata da primeira que, por sua vez, segue do Teorema do Divergente. A terceira identidade segue da aplicação da segunda identidade sobre o conjunto  $\Omega \setminus B_{\varepsilon}(x)$  e tomando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .<sup>(lv)</sup>

A terceira identidade de Green merece uma atenção especial por fornecer uma representação para  $u$  em termos de integrais. Fisicamente, (1.27) significa que  $u$  pode ser expressa como a combinação de três potenciais, a saber:

- $u_1(x) = \int_{\partial\Omega} \vartheta(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \, d\sigma_y$ , correspondendo ao potencial eletrostático gerado por uma distribuição superficial de cargas sobre  $\partial\Omega$ , com densidade  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ ;
- $u_2(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu_y}(y-x) u(y) \, d\sigma_y$ , o potencial magnético gerado por um momento de dipolo magnético  $u$  sobre  $\partial\Omega$ ;

---

<sup>(liv)</sup>A segunda identidade de Green foi obtida independentemente, também em 1828, pelo matemático russo Mikhail Vassilievich Ostrogradski (1801-1861). Cf. M. V. Ostrogradski, *Mém. Akad. Sci. St. Peters.* (6), 1, (1831), pp.39-53. Apud M. Kline, loc cit.

<sup>(lv)</sup>Uma demonstração destas identidades pode ser encontrada em D. Gilbarg e N. S. Trudinger, [32], pp.17-18.

- $u_3(x) = \int_{\Omega} \vartheta(y-x) \Delta u(y) dy$ , o potencial elétrico gerado por uma distribuição volumétrica de cargas, com densidade  $\Delta u$  em  $\Omega$ .

Além disso, (1.27) nos forneceria uma bela representação para as soluções  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (1.28)$$

não fosse pelo termo  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ , que não é conhecido *a priori*.

§27. Para eliminar essa dificuldade, vamos supor que  $\phi_x \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  seja uma função harmônica em  $\Omega$ . Pela segunda identidade de Green, aplicada com  $v := \phi_x$ ,

$$\int_{\partial\Omega} \phi_x(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial \phi_x}{\partial \nu_y}(y) d\sigma_y + \int_{\Omega} \phi_x(y) \Delta u(y) dy = 0.$$

Finalmente, somando essa expressão a (1.27), temos

$$\begin{aligned} u(x) = \int_{\partial\Omega} \left\{ \left[ \vartheta(y-x) - \phi_x(y) \right] \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \left[ \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu}(y-x) - \frac{\partial \phi_x}{\partial \nu_y}(y) \right] u(y) \right\} d\sigma_y + \\ - \int_{\Omega} \left\{ \vartheta(y-x) - \phi_x(y) \right\} \Delta u(y) dy, \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Tomando  $\phi_x(y) = \vartheta(y-x)$ ,  $\forall y \in \partial\Omega$ , o termo  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  será eliminado da representação integral de  $u$ .

Com base nestas observações, podemos definir:

**DEFINIÇÃO (FUNÇÃO DE GREEN)** A função de Green associada ao problema de Dirichlet para a equação de Laplace em  $\Omega$  será dada por

$$G(x, y) := \vartheta(y-x) - \phi_x(y), \quad \forall x \in \Omega, \forall y \in \bar{\Omega},$$

onde  $\vartheta$  é a solução fundamental de  $-\Delta$  em  $\mathbb{R}^n$  e  $\phi_x(y)$ , a parte regular da função de Green, deverá ser um elemento de  $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  satisfazendo, para cada  $x \in \Omega$ , o problema de Dirichlet<sup>(1vi)</sup>

$$\begin{cases} \Delta_y \phi_x = 0 & \text{em } \Omega \\ \phi_x(y) = \vartheta(y-x) & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}. \quad (1.30)$$

<sup>(1vi)</sup>Observe que esta não é uma solução clássica no sentido que havíamos estabelecido pois, neste caso, devemos exigir que  $\nabla_y \phi_x$  também possa ser estendida continuamente até  $\partial\Omega$ . Essa hipótese adicional traz uma série de complicações na utilização da função de Green.

OBSERVAÇÃO 1 Pelo Princípio do Máximo, é fácil verificar que  $G(x, y) \geq 0$ . Além disso, pode ser demonstrado, utilizando a segunda identidade de Green, que  $G$  é simétrica, i.e.,  $G(x, y) = G(y, x)$ , a despeito da definição totalmente assimétrica da parte regular da função de Green<sup>(lvii)</sup>.

Dessa forma, caso exista tal função  $\phi_x$ , a função de Green associada a  $\Omega$  está bem definida e (1.29) pode ser escrita numa forma bem mais compacta:

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\nu_y} G(x, y) u(y) d\sigma_y - \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) dy, \quad \forall x \in \Omega.$$

Finalmente, se  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  for harmônica em  $\Omega$ , então teremos a seguinte representação para  $u$ :

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\nu_y} G(x, y) u(y) d\sigma_y, \quad \forall x \in \Omega, \quad (1.31)$$

a qual depende apenas dos valores de  $u$  sobre  $\partial\Omega$ .

§28. Em vista da representação acima, somos levados a imaginar que a resolução do problema de Dirichlet irá se limitar apenas à determinação da função de Green associada a  $\Omega$ . No entanto, isso significa determinar sua parte regular dada por (1.30), o que não simplifica muito nosso problema; além disso,  $\phi_x$  deverá pertencer a  $C^1(\bar{\Omega})$ , uma condição bastante estranha no meio onde estamos, que é exigir também a extensão contínua das derivadas de uma tal solução até  $\partial\Omega$ , como podemos observar no exemplo seguinte<sup>(lviii)</sup>:

EXEMPLO 1.4 Consideremos a região em forma de  $L$  dada por  $\Omega := (-1, 1)^2 \setminus [0, 1]^2$  (figura 1.3). Parametrizando-a em coordenadas polares, segue que a função  $u(r, \varphi) := r^{2/3} \operatorname{sen} \left( \frac{2\varphi - \pi}{3} \right)$  é harmônica em  $\Omega$  e contínua em  $\bar{\Omega}$ ; além disso,  $u|_{\partial\Omega}$  é suave. Como veremos no Capítulo 3, o problema de Dirichlet sempre irá admitir solução em  $\Omega$ ; no entanto,  $u \notin C^1(\bar{\Omega})$ . ■

Ainda, a expressão (1.31) foi obtida sob a hipótese de que a função harmônica  $u$  existisse e que estivesse em  $C^1(\bar{\Omega})$ . Dessa maneira, caso sejamos capazes de demonstrar a existência da função de Green, (1.31) nos oferece apenas qual seria um candidato natural a solução do problema de Dirichlet.

<sup>(lvii)</sup>Cf. L. C. Evans, [20], pp.35–36.

<sup>(lviii)</sup>Cf. W. Hackbusch, [34], pp.13–14.

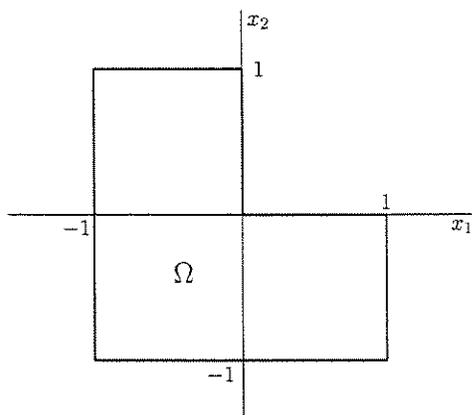


Figura 1.3: O domínio  $\Omega$  do exemplo

A obtenção explícita da função de Green pode ser feita apenas para domínios extremamente particulares, como por exemplo o semi-espaço ou a bola em  $\mathbb{R}^n$ . Como aplicação das técnicas ilustradas aqui, na próxima subseção iremos demonstrar a existência de soluções para o problema de Dirichlet sobre  $B_R(0)$ . Em seguida, trataremos da existência da função de Green para regiões mais gerais, como uma bela aplicação do Teorema de Hahn-Banach.

### 1.3.2 A fórmula de Poisson

**§29.** Nosso objetivo será obter uma fórmula explícita para as soluções do problema de Dirichlet sobre  $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ , partindo da construção da função de Green associada a  $B_R(0)$ , com a qual seremos capazes de verificar que a expressão (1.31) realmente resolve o nosso problema no sentido clássico, para toda  $f \in C(\partial B_R(0))$ .

Para a obtenção da parte regular da função de Green, utilizaremos um princípio de reflexão de cargas eletrostáticas, ou seja, dada uma carga pontual numa região  $\Omega$ , devemos determinar a posição de outra carga, no exterior de  $\Omega$ , mas gerando o mesmo potencial sobre  $\partial\Omega$ . Esse potencial será a função procurada.

No caso de  $B_r(0)$ , podemos fazer a seguinte definição:

**DEFINIÇÃO** Dado  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$ , vamos definir a reflexão de  $x$  com relação a  $\partial B_R(0)$  como sendo o ponto  $x'$ , na direção positiva de  $x$ , tal que  $|x||x'| = R^2$ ; matematicamente, podemos escrever  $x' := \frac{R^2}{|x|^2}x$ . Em particular,  $(x')' = x$ .

O ponto  $x'$  possui uma propriedade geométrica bastante elementar, mas que será de grande utilidade<sup>(lix)</sup>:

PROPOSIÇÃO 1.8 *Se  $x \notin \partial B_R(0)$  e  $x \neq 0$ , então*

$$\frac{|y-x|}{|y-x'|} = \frac{|x|}{R}, \quad \forall y \in \partial B_R(0).$$

*Por outro lado, se  $y \notin B_R(0)$ , então*

$$\begin{aligned} \frac{|y-x|}{|y-x'|} &\geq \frac{|x|}{R}, \quad \forall x \in B_R(0), \quad x \neq 0, \\ \frac{|y-x|}{|y-x'|} &\leq \frac{|x|}{R}, \quad \forall x \notin B_R(0). \end{aligned}$$

*Demonstração.* A demonstração desses fatos é extremamente elementar e seguem da expressão

$$\frac{|y-x|^2}{|y-x'|^2} = \frac{|y|^2 - 2\langle y, x \rangle + |x|^2}{|y|^2 - 2\frac{R^2}{|x|^2}\langle y, x \rangle + \frac{R^4}{|x|^2}} = \frac{|x|^2}{R^2} \cdot \frac{|y|^2 - 2\langle y, x \rangle + |x|^2}{\frac{|y|^2}{R^2}|x|^2 - 2\langle y, x \rangle + R^2}.$$

Se  $y \in \partial B_R(0)$ , então obtemos a primeira identidade. As outras duas relações são consequência direta de

$$\left(|y|^2 + |x|^2\right) - \left(\frac{|y|^2}{R^2}|x|^2 + R^2\right) = \left(|y|^2 - R^2\right)\left(1 - \frac{|x|^2}{R^2}\right).$$

■

Com base na proposição acima e na dependência radial da solução fundamental  $\vartheta$ , concluímos que

$$\vartheta(y-x) = \vartheta\left(\frac{|x|}{R}(y-x')\right), \quad \forall y \in \partial B_R(0), \quad \forall x \in B_R(0), \quad x \neq 0.$$

Além disso, como  $x' \notin B_R(0)$ , se  $x \in B_R(0)$ , então a parte regular da função de Green deverá ser dada por

$$\phi_x(y) = \begin{cases} \vartheta\left(\frac{|x|}{R}(y-x')\right), & \text{se } x \in B_R(0), \quad x \neq 0 \\ \vartheta(y), & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Utilizando a expressão de  $\frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}$  e a proposição anterior, obtemos

$$\frac{\partial G}{\partial v_y}(x, y) = -\frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R} \frac{1}{|y-x|^n}. \quad (1.32)$$

<sup>(lix)</sup>A segunda parte dessa proposição será utilizada somente na próxima subseção.

§30. Dada  $f \in C(\partial B_R(0))$ , devemos verificar se (1.31) realmente satisfaz a equação de Laplace, com condição de contorno  $f$ , no sentido clássico. Em nosso caso, o candidato a solução para tal problema tem a seguinte representação:

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{f(y)}{|y - x|^n} d\sigma_y, \quad \forall x \in B_R(0). \quad (1.33)$$

Por verificação direta (ou utilizando a simetria da função de Green), conclui-se que  $u$  é harmônica em  $B_R(0)$ , de forma que o ponto delicado da demonstração está na constatação de que  $u$  assume o valor de contorno desejado, em outras palavras, resta-nos demonstrar que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in B_R(0)}} u(x) = f(x_0), \quad \forall x_0 \in \partial B_R(0).$$

Para isso, utilizaremos o lema seguinte, o qual é consequência imediata da equação (1.31) aplicada a  $u \equiv 1$ :

LEMA 1.9

$$\frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{1}{|y - x|^n} d\sigma_y = 1, \quad \forall x \in B_R(0).$$

■

Pela continuidade de  $f$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|y - x_0| < \delta$  implica  $|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$ . Com essa notação e pelo Lema 1.9, podemos escrever

$$\begin{aligned} u(x) - f(x_0) &= \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{1}{|y - x|^n} [f(y) - f(x_0)] d\sigma_y \\ &= \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R} \left\{ \int_{\partial B_R(0) \cap B_\delta(x_0)} \frac{1}{|y - x|^n} [f(y) - f(x_0)] d\sigma_y + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial B_R(0) \setminus B_\delta(x_0)} \frac{1}{|y - x|^n} [f(y) - f(x_0)] d\sigma_y \right\} \\ &=: A + B. \end{aligned}$$

Seja  $\ell > 0$  tal que  $d(y, B_{\delta/2}(x_0)) > \ell$ ,  $\forall y \in \partial B_R(0) \setminus B_\delta(x_0)$ . Logo, se  $x \in B_{\delta/2}(x_0)$ , então pela

continuidade de  $f$  teremos:

$$|A| < \varepsilon,$$

$$|B| < \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R} \cdot \sigma_n R^{n-1} \cdot \frac{1}{\ell^n} \cdot 2\|f\|_{L^\infty} = \frac{2\|f\|_{L^\infty} R^{n-2}}{\ell^n} (R^2 - |x|^2) \rightarrow 0,$$

quando  $x \rightarrow x_0$ .

Conseqüentemente,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in B_R(0)}} u(x) = f(x_0), \forall x_0 \in \partial B_R(0)$$

e, portanto, a função  $u$  dada por (1.33) satisfaz o problema de Dirichlet para a equação de Laplace, com condição de contorno  $f$ .

§31. A representação integral da solução do problema de Dirichlet

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{f(y)}{|y - x|^n} d\sigma_y, \forall x \in B_R(0)$$

é denominada fórmula de Poisson e uma tal expressão foi obtida pela 1ª vez por Poisson em 1820<sup>(lx)</sup>.

Além de garantir a existência do problema de Dirichlet em  $B_R(0)$  por meio de uma fórmula explícita, essa expressão permite obter estimativas de crescimento de funções harmônica por meio da desigualdade de Harnack<sup>(lxi)</sup>:

PROPOSIÇÃO 1.10 (DESIGUALDADE DE HARNACK) *Seja  $u \in C(\overline{B_R(0)})$  uma função harmônica e não-negativa. Logo,*

$$R^{n-2} \frac{R - |x|}{(R + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq R^{n-2} \frac{R + |x|}{(R - |x|)^{n-1}} u(0), \forall x \in B_R(0).$$

*Demonstração.* A proposição segue diretamente da estimativa do núcleo da fórmula de Poisson a partir da desigualdade triangular

$$R - |x| \leq |y - x| \leq R + |x|, \forall x \in B_R(0), \forall y \in \partial B_R(0),$$

<sup>(lx)</sup>S. D. Poisson, *J. École Poly.* **11** (1820), p.422. Apud O. D. Kellogg, op cit, p.241.

<sup>(lxi)</sup>A. Harnack, *Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials*, Leipzig, 1887, p.62. Apud O. D. Kellogg, op cit, p.262.

e do valor de  $u$  calculado em  $x = 0$ , utilizando a fórmula de Poisson<sup>(lxii)</sup>:

$$u(0) = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(0)} u \, d\sigma.$$

■

Nós iremos utilizar a estimativa acima na seção 1.4, para demonstrar o Segundo Teorema de Harnack, o qual, por sua vez, é necessário no estudo dos métodos de Poincaré e de Perron.

### 1.3.3 Sobre a existência da função de Green

§32. O fato de a função de Green não ter sido explorada de forma mais sistemática durante o século 19 se deve em grande parte, como já observamos, ao desconhecimento do trabalho de Green na Europa continental. Além disso, a resolução do problema particular

$$\begin{cases} \Delta_y \phi_x = 0 & \text{em } \Omega \\ \phi_x(y) = \vartheta(y-x) & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

não simplificava muito a questão original.

De qualquer maneira, a função de Green envolve uma questão bastante delicada e que diz respeito ao fato de sua parte regular ser uma função em  $C^1(\overline{\Omega})$ . Acredito que esse detalhe tenha passado despercebido até o final do século 19. Em 1890, por exemplo, Poincaré ainda não parecia se deter muito nessa questão de regularidade, pois ao resolver um caso particular do problema de Dirichlet (sobre a existência de um potencial condutor para  $\Omega$ ), ele observa que o caso geral poderia ser obtido por meio da função de Green<sup>(lxiii)</sup>.

Tal problema somente seria resolvido por Alexander Lyapunov (1857-1918) em 1898<sup>(lxiv)</sup>, garantindo a possibilidade de extensão contínua das derivadas de  $\phi_x$  sobre  $\overline{\Omega}$ , desde que  $\Omega$  fosse suficientemente regular<sup>(lxv)</sup>.

<sup>(lxii)</sup>Essa é a chamada fórmula da média que será estudada mais detalhadamente na seção 1.4.

<sup>(lxiii)</sup>“C'est un cas particulier du problème de Dirichlet, mais on connaît un moyen (par les fonctions de Green) de ramener le cas général à ce cas particulier”. (H. Poincaré, [48], p.29)

<sup>(lxiv)</sup>A. Lyapunov, “Sur quelques questions qui se rattachent au problème de Dirichlet”. *J. Math. Pures Appl.* 5 (IV) (1898). Apud O. D. Kellogg, op cit, p. 238.

<sup>(lxv)</sup>Uma demonstração desse resultado em dimensão três pode ser encontrada em S. L. Sobolev, [55], pp.292-296. Utilizando a teoria moderna, no entanto, é possível obter uma demonstração muito mais elegante em dimensão qualquer, quando  $\partial\Omega$  for de classe  $C^\infty$ , por exemplo. Nesse caso, o interesse fica por conta da possibilidade de representação de uma função harmônica  $u$  na forma (1.31). Cf. G. B. Folland, [26], pp.263-265.

Como não faremos maior uso da função de Green nesta monografia, nos contentaremos com uma aplicação do Teorema de Hahn-Banach apresentada por Peter D. Lax<sup>(lxvi)</sup> e que trata da existência de tais funções em abertos limitados de  $\mathbb{R}^n$ .

§33. Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado e  $\mathcal{B}$  o subespaço vetorial de  $C(\partial\Omega)$  formado pelas funções  $f$  para as quais o problema de Dirichlet admite solução clássica, a qual denotaremos por  $u_f$ . Pelo Princípio do Máximo, para cada  $x \in \Omega$ , a aplicação

$$\begin{aligned} L_x: \mathcal{B} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto u_f(x) \end{aligned}$$

é um operador linear contínuo. Além disso,  $L_x$  é monótona crescente, i.e.,  $f_1 \leq f_2$  implica  $L_x(f_1) \leq L_x(f_2)$  ou, equivalentemente,  $f \leq 0$  implica  $L_x(f) \leq 0$ .

Nosso objetivo inicial será utilizar o Teorema de Hahn-Banach<sup>(lxvii)</sup> para estender o operador  $L_x$  a  $C(\partial\Omega)$ , preservando a monotonicidade. Isso será feito por meio de sua forma analítica<sup>(lxviii)</sup>:

TEOREMA 1.11 (TEOREMA DE HAHN-BANACH, FORMA ANALÍTICA) *Sejam  $\mathbb{E}$  um espaço vetorial normado e  $p: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função subaditiva e homogênea positiva, ou seja,*

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) &\leq p(\mathbf{x}_1) + p(\mathbf{x}_2), \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{E}, \\ p(\lambda \mathbf{x}) &= \lambda p(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}, \lambda > 0. \end{aligned}$$

*Dados  $F \subset \mathbb{E}$  um subespaço vetorial e  $T: F \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear contínuo tal que  $T\mathbf{x} \leq p(\mathbf{x})$ ,  $\forall \mathbf{x} \in F$ , então existe uma extensão linear contínua  $\bar{T}$  de  $T$  em  $\mathbb{E}$  tal que  $\bar{T}\mathbf{x} \leq p(\mathbf{x})$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}$ . ■*

Vamos tomar  $p_x(g) := \sup_{\substack{f \leq g \\ f \in \mathcal{B}}} L_x(f)$ , de forma que  $p_x$  é subaditiva e homogênea positiva; além disso,  $L_x(f) = p_x(f)$ ,  $\forall f \in \mathcal{B}$ .

Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe  $\bar{L}_x: C(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  linear e contínua, que estende  $L_x$  e  $\bar{L}_x(g) \leq p_x(g)$ ,  $\forall g \in C(\partial\Omega)$ . Em particular,  $\bar{L}_x$  é monótona crescente, pois  $g \leq 0$  implica  $L_x(g) \leq p_x(g) \leq 0$ .

§34. Dado  $y \notin \partial\Omega$ , a aplicação  $\vartheta_y: z \mapsto \vartheta(z - y)$  pertence a  $C(\partial\Omega)$ , e podemos definir

$$\phi_x(y) := \bar{L}_x(\vartheta_y).$$

<sup>(lxvi)</sup>P. D. Lax, [42].

<sup>(lxvii)</sup>S. Banach, "Sur les fonctionnelles linéaires II," *Studia Math.* **1** (1929), pp.223–239.

<sup>(lxviii)</sup>Cf. H. Brézis, [8], pp.1–3.

Sendo  $\bar{L}_x$  linear e contínua, teremos  $\Delta_y \phi_x(y) = \bar{L}_x(\Delta_y \vartheta_y) = 0$ , de maneira que  $\phi_x$  é harmônica em  $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ . Ainda, se  $y \notin \bar{\Omega}$ , então  $\vartheta_y \in \mathcal{B}$ , de onde segue que

$$\phi_x(y) = L_x(\vartheta_y) = \vartheta(y - x), \quad \forall y \notin \bar{\Omega}. \quad (1.34)$$

**§35.** Em vista do exposto acima, para mostrarmos que  $\phi_x$  é a parte regular da função de Green em  $\Omega$ , será suficiente que  $\phi_x$ , definida em  $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ , possa ser estendida continuamente sobre  $\partial\Omega$ . Para isso, devemos supor que  $\Omega$  satisfaça a condição da esfera interior e exterior:

**DEFINIÇÃO**  $\Omega$  *satisfaz a condição da esfera interior e exterior se existir  $r > 0$  tal que, para todo  $y_0 \in \partial\Omega$ , existam  $y_1 \in \Omega$  e  $y_2 \notin \bar{\Omega}$  satisfazendo as seguintes condições:*

$$\begin{aligned} B_r(y_1) &\subset \Omega, & \partial B_r(y_1) \cap \partial\Omega &= \{y_0\}, \\ B_r(y_2) \cap \Omega &= \emptyset, & \partial B_r(y_2) \cap \partial\Omega &= \{y_0\}. \end{aligned}$$

**OBSERVAÇÃO 2** Para cada  $y_0$ , como  $B_r(y_1)$  e  $B_r(y_2)$  não se interceptam, o plano tangente a  $\partial\Omega$  em  $y_0$  está bem definido; em particular, os pontos  $y_1$  e  $y_2$  estão unicamente determinados.

Dado  $y \in \Omega$ , com  $h := d(y, \partial\Omega) < r$ , tomamos  $y_0 \in \partial\Omega$  o único ponto que minimiza a distância entre  $y$  e  $\partial\Omega$ <sup>(lxix)</sup>. Como  $y \neq y_1$  e  $y \neq y_2$ , podemos definir  $y'$  e  $y''$ , as reflexões de  $y$  com relação a  $\partial B_r(y_1)$  e  $\partial B_r(y_2)$ , respectivamente.

Nosso objetivo será mostrar que, caso  $y$  esteja suficientemente próximo de  $\partial\Omega$ , então  $y'$  e  $y''$  não pertencem a  $\Omega$ .

**PROPOSIÇÃO 1.12** *Se  $y \in \Omega$  e  $d(y, \partial\Omega) < \frac{2r}{3}$ , então  $y', y'' \notin \bar{\Omega}$ .*

*Demonstração.* No caso de  $y''$ , não há problema, pois  $y \in \Omega$  significa  $y \notin \overline{B_r(y_2)}$  e, portanto,  $y'' \in B_r(y_2)$ .

Por outro lado, vamos supor  $y \in \Omega$  e que  $d(y, \partial\Omega) < \frac{2r}{3}$ . Se  $y_0$  for o ponto que minimiza a distância entre  $y$  e  $\partial\Omega$ , então  $y \in [y_0, y_1]$ <sup>(lxxx)</sup>; mais precisamente,  $y = y_1 + t(y_0 - y_1)$ , com  $\frac{1}{3} < t < 1$ . Logo  $y' = y_1 + s(y_0 - y_1)$ , com  $1 < s < 3$ . Em particular,  $|y' - y_2| < r$  e  $y' \in B_r(y_2)$ . ■

<sup>(lxix)</sup> A unicidade segue do fato de que  $B_h(y)$  e  $B_r(y_1)$  devem estar no mesmo subespaço afim determinado pelo plano tangente a  $\partial\Omega$  em  $y_0$ . Como este plano tangente também tangencia  $B_h(y)$  e  $B_r(y_1)$  em  $y_0$ , e  $h < r$ , então  $B_h(y) \subset B_r(y_1)$ . Logo,  $\overline{B_h(y)} \cap \partial\Omega = \{y_0\}$ . Além disso, temos  $y \in [y_0, y_1]$ , i.e.,  $y$  está no segmento que liga  $y_0$  a  $y_1$ .

<sup>(lxxx)</sup> Vid nota anterior.

Se  $z \in \partial\Omega$ , então  $z \notin B_r(y_1)$  e  $z \notin B_r(y_2)$ . Logo, aplicando a segunda parte da Proposição 1.8, com as devidas modificações de notação, teremos

$$\frac{r}{|y - y_2|} \cdot \frac{1}{|y'' - z|} \leq \frac{1}{|y - z|} \leq \frac{r}{|y - y_1|} \cdot \frac{1}{|y' - z|}, \quad \forall z \in \partial\Omega,$$

onde estamos supondo  $y \in \Omega$  e  $d(y, \partial\Omega) < \frac{2r}{3}$ .

Vamos supor  $n > 2$  (o caso  $n = 2$  pode ser tratado de forma análoga<sup>(1xxi)</sup>). Segue da relação acima que

$$\left(\frac{r}{|y - y_2|}\right)^{n-2} \vartheta_{y''}(z) \leq \vartheta_y(z) \leq \left(\frac{r}{|y - y_1|}\right)^{n-2} \vartheta_{y'}(z), \quad \forall z \in \partial\Omega.$$

Como  $\bar{L}_x$  é um funcional linear monótono crescente, aplicando esse operador à expressão acima, as desigualdades serão mantidas. Além disso, como  $y', y'' \notin \bar{\Omega}$ , a equação (1.34) pode ser utilizada nesse caso, de onde obtemos

$$\left(\frac{r}{|y - y_2|}\right)^{n-2} \vartheta(y'' - x) \leq \phi_x(y) \leq \left(\frac{r}{|y - y_1|}\right)^{n-2} \vartheta(y' - x), \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.35)$$

Fixado  $\bar{y} \in \partial\Omega$ , segue imediatamente que  $y \rightarrow \bar{y}$  implica  $|y - y_1|, |y - y_2| \rightarrow r$  e, portanto,  $y', y'' \rightarrow \bar{y}$ . Em vista de (1.35), teremos

$$\lim_{\substack{y \rightarrow \bar{y} \\ y \in \Omega}} \phi_x(y) = \vartheta(\bar{y} - x), \quad \forall \bar{y} \in \partial\Omega.$$

**OBSERVAÇÃO 3** Após a demonstração acima, uma pergunta natural que surge é sobre a possibilidade de utilizar o Teorema de Hahn-Banach para se resolver o problema de Dirichlet, e não somente demonstrar a existência da função de Green. Essa tarefa foi realizada por Carlo Miranda num artigo de 1947<sup>(1xxii)</sup> e consistia em mostrar que o subespaço  $\mathcal{B} \subset C(\partial\Omega)$  é denso. Sendo fechado (pelo Princípio do Máximo), ficaria demonstrada a solubilidade do problema de Dirichlet. Para isso, Miranda considera um funcional linear contínuo  $L$  em  $C(\partial\Omega)$  tal que  $L|_{\mathcal{B}} \equiv 0$  e, utilizando o Teorema de Representação de Riesz, escreve  $L$  na forma de uma integral de Stieltjes

$$L(f) = \int_{\partial\Omega} f d\mu, \quad \forall f \in C(\partial\Omega).$$

Assim, pelo Teorema de Hahn-Banach, o resultado estará demonstrado desde que sejamos capazes de mostrar que  $L \equiv 0$  ou, equivalentemente,  $\mu \equiv 0$ .

<sup>(1xxi)</sup>Na verdade, a existência da parte regular da função de Green para  $n = 2$  pode ser obtida de forma bem mais simples, supondo apenas que a curva simples e fechada  $\partial\Omega$  seja regular por partes. Cf. P. D. Lax, loc cit; A. E.

Taylor, [57], pp.188–190.

<sup>(1xxii)</sup>Cf. C. Miranda, [46].

§36. Posso ter causado um pouco de estranheza ao leitor ao afirmar que Green utilizara sua função com o intuito de demonstrar a existência de solução para o princípio de Dirichlet. Afinal, como poderia ele ter alcançado tal objetivo se no início do século 19 ainda mal dispunha das ferramentas necessárias?

Ora, seguindo um recurso bastante empregado na época, pela utilização de imagens concretas envolvendo a função de Green; em outras palavras, confundindo o fenômeno físico com o modelo matemático que procura descrevê-lo, no caso o potencial eletrostático.

Dessa forma, Green se utiliza de uma demonstração física para garantir a existência de  $G$ . As linhas gerais do argumento são as seguintes<sup>(lxxiii)</sup>:

Seja  $\Omega$  um condutor e, num ponto  $x \in \Omega$ , posicionamos uma carga elétrica unitária que irá gerar um campo eletrostático de intensidade  $\vartheta_x$ . Ligando a superfície de  $\Omega$  à terra (que, por convenção, possui potencial zero), haverá uma troca de cargas, de maneira que o potencial sobre  $\partial\Omega$  seja nulo. Assim,  $G(x, \cdot)$  será o potencial eletrostático resultante em  $\Omega$ . Repetindo o processo para cada  $x \in \Omega$ , ficaria estabelecida a existência da função de Green.

Atualmente, o argumento acima é utilizado apenas para apresentar uma interpretação física para a função de Green, sem maiores conseqüências.

Como já ressaltamos, a questão da diferenciabilidade de  $G$  sobre  $\partial\Omega$  estava longe ser constatada por Green, de maneira que, por construção,

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\nu_y} G(x, y) f(y) d\sigma_y, \quad \forall x \in \Omega,$$

deveria ser harmônica em  $\Omega$ .

Finalmente, resta verificar a condição de contorno. Aqui, Green observa que a forma de  $\partial\Omega$  não é relevante, e o resultado segue do decaimento rápido de  $\frac{\partial}{\partial\nu_y} G(x, y)$  quando  $x$  se afasta de  $y \in \partial\Omega$ , exatamente como ocorre à esfera (ver (1.32)).

<sup>(lxxiii)</sup> "To convince ourselves that there does exist such a function as we have supposed  $U [G]$  to be, conceive the surface to be a perfect conductor put in communication with the earth, and a unit of positive electricity to be concentrated in the point  $p' [x]$ ; then the total potential function arising from  $p' [x]$  and from the electricity it will induce upon the surface will be the required value of  $U [G]$ ". (G. Green, op cit. Apud G. D. Birkhoff, op cit, p.356.)

## 1.4 O Teorema de Gauss

§37. Nesta seção não trataremos de nenhum método particular de resolução do problema de Dirichlet. Nosso objetivo será apresentar algumas propriedades extremamente úteis das funções harmônicas e que serão necessárias nos métodos que apresentaremos a partir do Capítulo 3.

Parece ter sido Gauss, num estudo sobre o potencial eletrostático<sup>(lxxiv)</sup>, o primeiro matemático a constatar que uma função harmônica  $u$ , definida num aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , deve satisfazer a chamada fórmula da média, que corresponde ao Teorema de Gauss, ou seja,

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u \, d\sigma, \quad \forall B_R(x) \subset\subset \Omega. \quad (1.36)$$

Para  $r > 0$  suficientemente pequeno podemos definir

$$\phi(r) := \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u \, d\sigma = \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x + rz) \, d\sigma_z.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x + rz) \cdot z \, d\sigma_z \\ &= \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x + rz) \, d\sigma_z \\ &= \frac{1}{\sigma_n} \int_{B_1(0)} \Delta u(x + rz) \, dz = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{B_r(x)} \Delta u \, dy, \end{aligned} \quad (1.37)$$

onde na terceira igualdade utilizamos a segunda identidade de Green (1.26), com  $v = 1$ . Como  $\Delta u = 0$ , devemos ter  $\phi(r)$  constante. Por outro lado, fazendo  $r \rightarrow 0$ , temos  $\phi(r) \rightarrow u(x)$  e, portanto, (1.36) se verifica.

Além disso, pela integração de  $\sigma_n r^{n-1} u(x)$  entre 0 e  $R$ , obtemos

$$\sigma_n \frac{R^n}{n} u(x) = \int_0^R \int_{\partial B_r(x)} u \, d\sigma \, dr = \int_{B_R(x)} u \, dy,$$

ou seja,

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x)} u \, dy, \quad \forall B_R(x) \subset\subset \Omega. \quad (1.38)$$

<sup>(lxxiv)</sup>K. F. Gauss, "Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs und Abstoßungskräfte". In : *Werke*, V, pp.191-242 [pp.221-226]. Apud G. D. Birkhoff, op cit, pp.358-361.

§38. É curioso observar que (1.38) caracteriza completamente as funções harmônicas. Essa recíproca do Teorema de Gauss foi demonstrada pela primeira vez por Paul Koebe<sup>(lxxv)</sup> (1882-1945) e por Maxime Bôcher<sup>(lxxvi)</sup>, de forma totalmente independente, em 1906; além de suas demonstrações se restringirem às dimensões 2 e 3, a função  $u$  deveria ter certo grau de regularidade.

Apresentamos a seguir uma bela demonstração da recíproca ao Teorema de Gauss utilizando o produto de convolução e constitui um resultado de regularidade para as funções harmônicas<sup>(lxxvii)</sup>:

TEOREMA 1.13 Se  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  satisfaz

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u \, d\sigma, \text{ para quase toda } B_R(x) \subset\subset \Omega, \quad (1.39)$$

então  $u \in C^\infty(\Omega)$  e  $\Delta u = 0$ .

*Demonstração.* Para  $x \in \Omega_\varepsilon$ , definimos

$$u_\varepsilon(x) := \int_{\Omega} \rho_\varepsilon(x-y)u(y) \, dy,$$

onde  $\rho \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\rho \geq 0$ ,  $\text{supp } \rho \subset B_1(0)$  e  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho \, dx = 1$ . Em particular,  $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$ ; além disso, utilizando (1.39), teremos:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \int_{B_\varepsilon(x)} \rho_\varepsilon(x-y)u(y) \, dy = \int_0^\varepsilon \int_{\partial B_r(x)} \rho_\varepsilon(r)u(z) \, d\sigma_z \, dr \\ &= \left( \int_0^\varepsilon \rho_\varepsilon(r)\sigma_n r^{n-1} \, dr \right) u(x) = \left( \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon \, dy \right) u(x) = u(x). \end{aligned}$$

Logo,  $u_\varepsilon = u$  quase sempre em  $\Omega_\varepsilon$ . Sendo  $\varepsilon > 0$  arbitrário, então  $u \in C^\infty(\Omega)$  e (1.39) se verifica para toda bola em  $\Omega$ .

Resta demonstrarmos que  $\Delta u = 0$  em  $\Omega$ . Caso  $\Delta u(x) > 0$  para algum  $x \in \Omega$  (o caso  $\Delta u < 0$  é tratado de forma análoga), por (1.37) teríamos  $\phi'(r) > 0$  para todo  $r$  suficientemente pequeno, contradizendo o fato de  $\phi$  ser constante. ■

Vamos apresentar uma segunda bela demonstração da recíproca ao Teorema de Gauss, que depende apenas da observação de que uma função contínua que satisfaz a fórmula do valor médio

<sup>(lxxv)</sup>P. Koebe, *Sitzungsber. Berliner Math. Ges.* 5 (1906), pp.39-42. Apud O. D. Kellogg, op cit, p.226.

<sup>(lxxvi)</sup>M. Bôcher, *Proc. Amer. Acad. Arts Sc.* 41 (1906). Apud O. D. Kellogg, op cit, p.227.

<sup>(lxxvii)</sup>Cf. L. C. Evans, [20], p.28.

também deve satisfazer o Princípio do Máximo. Embora essa demonstração seja mais elementar, devemos supor de início que  $u$  seja contínua em  $\Omega$ . Mais precisamente:

TEOREMA 1.14 *Se  $u \in C(\Omega)$  satisfaz*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x)} u \, dy, \quad \forall B_R(x) \subset\subset \Omega,$$

*então  $u$  é harmônica em  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Fixada  $B_R(x) \subset\subset \Omega$ , seja  $v$  a única solução do problema de Dirichlet em  $B_R(x)$ , com condição de contorno  $u$ . A função  $w := v - u$  satisfaz a fórmula do valor médio em  $B_R(x)$  e  $w \equiv 0$  sobre  $\partial B_R(x)$ . Como o Princípio do Máximo se verifica para  $v$ , o máximo (e, por simetria, o mínimo) de  $w$  devem ser assumidos em  $\partial B_R(x)$ , onde a função é identicamente nula. Logo,  $w \equiv 0$  e  $u = v$  em  $B_R(x)$ . ■

A partir do Teorema 1.13, podemos obter o seguinte resultado de convergência para seqüências de funções harmônicas devido a Alex Harnack (1851-1888)<sup>(lxxviii)</sup>:

COROLÁRIO 1.14.1 (PRIMEIRO TEOREMA DE HARNACK) *Seja  $(u_k)_{k \geq 1}$  uma seqüência de funções harmônicas em  $\Omega$  convergindo uniformemente a  $u$ . Logo,  $u$  é harmônica.*

*Demonstração.* Se  $x \in \Omega$  e  $B_R(x) \subset\subset \Omega$ , temos

$$u_k(x) = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u_k \, d\sigma.$$

Fazendo  $k \rightarrow \infty$  na expressão acima, concluímos da arbitrariedade de  $x$  que  $u$  satisfaz a fórmula do valor médio. Pelo Teorema 1.13,  $u$  é harmônica. ■

Além disso, utilizando a desigualdade de Harnack (Proposição 1.10) obtemos

COROLÁRIO 1.14.2 (SEGUNDO TEOREMA DE HARNACK) *Seja  $(u_k)_{k \geq 1}$  uma seqüência crescente de funções harmônicas convergindo (pontualmente) a  $u$ . Logo,  $u$  é harmônica.*

*Demonstração.* Se  $x \in \Omega$  e  $B_R(x) \subset\subset \Omega$ , então  $u_l - u_k \geq 0$  em  $\overline{B_R(x)}$ , se  $l \geq k$ . Pela desigualdade de Harnack (Proposição 1.10), com adaptações óbvias, virá:

$$C_1 [u_l(x) - u_k(x)] \leq [u_l(y) - u_k(y)] \leq C_2 [u_l(x) - u_k(x)], \quad \forall y \in \overline{B_R(x)}.$$

<sup>(lxxviii)</sup>A. Harnack, op cit, p.66. Apud O. D. Kellogg, p.248.

Assim,  $u_k \rightarrow u$  uniformemente em  $\overline{B_R(x)}$  e, pelo corolário anterior, segue que  $u$  é harmônica em  $B_R(x)$ . Como  $x$  foi tomado arbitrariamente em  $\Omega$ , temos o resultado desejado. ■

## Capítulo 2

# O Princípio de Dirichlet

§39. Num artigo submetido em 14 de julho de 1870<sup>(i)</sup>, Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) reproduz uma carta bastante detalhada de Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916), onde este descreve uma técnica de demonstração, bastante original, para a abordagem do problema de Dirichlet e que lhe fora apresentada por Dirichlet no verão de 1856. Weierstrass comenta que tal método já havia sido utilizado por muitos outros matemáticos, destacadamente Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), a quem cabe o primeiro uso da expressão *Princípio de Dirichlet* para se referir a tal método<sup>(ii)</sup>.

### 2.1 Sobre o chamado Princípio de Dirichlet

§40. O Princípio de Dirichlet consiste em transformar o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (2.1)$$

no problema variacional de se determinar qual a função que corresponde ao mínimo do funcional

$$\mathcal{I}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad (2.2)$$

---

<sup>(i)</sup>K. T. W. Weierstrass, "Über das Sogenannte Dirichlet'sche Prinzip", *Königl. Akademie der Wissenschaften* 14 (1870).

<sup>(ii)</sup>"In seinen Vorlesungen über die Kräfte, welche nach dem Newton'schen Gesetz wirken, hat sich Lejeune Dirichlet zur Begründung eines Hauptsatzes der Potentialtheorie einer eigenthümlichen Schlussweise bedient, welche später auch von anderen Mathematikern, namentlich von Riemann, vielfach angewandt worden ist und den Namen 'Dirichlet'sche Princip' erhalten hat." (K. T. W. Weierstrass, loc cit.)

sobre  $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , com a restrição de que  $u = f$  sobre  $\partial\Omega$ .

§41. Seja  $m$  o ínfimo de (2.2) e vamos admitir que exista uma função admissível  $u_0$  satisfazendo a condição de contorno  $f$  e tal que  $\mathcal{I}(u_0) = m$ .

Para cada  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , é claro que  $u_0 + t\varphi$  continua sendo uma função admissível, qualquer que seja  $t \in \mathbb{R}$ . Nesse caso,

$$\mathcal{I}(u_0 + t\varphi) - \mathcal{I}(u_0) = 2t \int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla \varphi \rangle dx + t^2 \mathcal{I}(\varphi) \geq 0.$$

Para que a última desigualdade permaneça válida para todo  $t \in \mathbb{R}$ , devemos ter

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla \varphi \rangle dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Além disso, se  $u_0 \in C^2(\Omega)$ , podemos utilizar a fórmula de integração por partes, e a expressão acima pode ser reescrita como

$$\int_{\Omega} \Delta u_0 \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

ou seja,  $\Delta u_0 = 0$  em  $\Omega$ .

Como  $u_0 = f$  sobre  $\partial\Omega$ , ter-se-ia acima uma demonstração bastante elegante sobre a solubilidade do problema de Dirichlet, desde que fôssemos capazes de demonstrar que as seguintes condições são atendidas:

1.  $m < \infty$ , em outras palavras, a classe de funções admissíveis é não-vazia;
2. Existe uma função admissível  $u_0$ , i.e.,  $u_0 \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  e  $u_0 = f$  sobre  $\partial\Omega$ , que minimiza a integral de Dirichlet (2.2);
3. A função que minimiza a integral de Dirichlet é, de fato, um elemento em  $C^2(\Omega)$ .

Enquanto que a necessidade de estabelecer tais fatos seja clara aos nossos olhos, o mesmo não pode ser dito sobre a utilização do Princípio de Dirichlet em meados do século 19. Na verdade, essas três condições que ficaram pendentes em nossa exposição passariam despercebidas aos matemáticos daquele período por mais de duas décadas, até 1870.

§42. Muito embora Dirichlet tenha levado os créditos no princípio variacional que ostenta seu nome (isso graças a Riemann, que cunhara a expressão Princípio de Dirichlet como uma homenagem a seu antigo professor), na mesma época o Princípio de Dirichlet também esteve presente em trabalhos de William Thompson (futuro Lorde Kelvin) (1824-1907) e do próprio Riemann.

Além disso, o pioneirismo em tal abordagem coube a Green<sup>(iii)</sup> que, em 1833, a utilizara para garantir a existência de soluções do problema de Dirichlet. No entanto, como já observamos no capítulo anterior, os trabalhos de Green tiveram pouca influência na Europa continental.

Gauss, por meio de uma formulação um pouco mais primitiva envolvendo a energia potencial de um campo eletrostático<sup>(iv)</sup> também, à sua maneira, garantiu a existência de soluções para o problema de Dirichlet<sup>(v)</sup>.

No entanto, se Green e Gauss sustentaram-se em seus trabalhos, mesmo que implicitamente, no modelo físico de equilíbrio de cargas eletrostáticas<sup>(vi)</sup>, estranhamente o mesmo não aparece ocorrer com Thompson, Dirichlet e Riemann.

Com relação a Thompson e Dirichlet, ambos acreditavam que a existência do mínimo  $u_0$  para a integral de Dirichlet era uma consequência do fato de

$$\mathcal{I}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

ser positiva para toda função admissível.

§43. Ao contrário do que o leitor possa estar imaginando, a absoluta convicção de Dirichlet e Thompson não me parece que reflita a utilização, pelo menos de forma consciente da parte deles, de qualquer embasamento físico que porventura pudesse justificar seus procedimentos.

Sustento essa minha posição em dois fatos que pude constatar.

No caso de Thompson<sup>(vii)</sup>, este utiliza uma formulação um pouco mais geral para o Princípio de Dirichlet, com o intuito de demonstrar a existência de soluções para a equação  $\operatorname{div}(\alpha^2 \nabla u) = \rho$  em  $\Omega$ , onde  $\alpha$  e  $\rho$  são funções dadas, a qual se reduz à nossa conhecida equação de Poisson quando  $\alpha \equiv 1$ ; no entanto, em nenhum momento é feita qualquer menção a fenômenos físicos (muito embora a equação estudada tenha origem nesse tipo de problema): seu trabalho tem um conteúdo

---

<sup>(iii)</sup>G. Green, *Trans. Camb. Phil. Soc.* 5 (1835), pp.395–430; *Mathematical Papers*, pp.187–222. Apud M. Kline, [39], p.684.

<sup>(iv)</sup>K. F. Gauss, “Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs und Abstoßungskräfte”. In : *Werke*, V, pp.191–242 [pp.221–226]. Apud G. D. Birkhoff, op cit, pp.358–361. Cf. D. Birkhoff, op cit, p.379.

<sup>(v)</sup>Cf. J. A. Dieudonné, [17], pp.36.

<sup>(vi)</sup>Cf. O. D. Kellogg, [38], pp.79–81 e 278–279.

<sup>(vii)</sup>W. Thompson, “Theorems with reference to the solution of certain partial differential equations”, *Cambridge Dublin Math. J.* 3 (1948), p.84; *J. Math.* 12 (1847), p.496; *Math. and Phys. Papers* v.1, pp.93–96. In : G. D. Birkhoff, op cit, pp.380–382.

puramente matemático.

Com Dirichlet, no entanto, a situação é ainda mais drástica. Embora eu deva reconhecer que ele associe um fenômeno físico ao problema matemático que estava estudando, isso é feito da forma mais surpreendente possível.

Num livro publicado postumamente<sup>(viii)</sup>, Dirichlet se propõe a demonstrar que, dada uma função contínua sobre  $\partial\Omega$ , existe uma distribuição de massas sobre  $\partial\Omega$  e capaz de gerar um potencial gravitacional que assuma tais valores pré-estabelecidos sobre  $\partial\Omega$ .

Dirichlet observa que tal problema se resume a mostrar a existência de soluções de  $\Delta u = 0$  em  $\Omega$ , com condição de contorno dada. Ele lamenta que a determinação de uma tal função não seja construtiva; no entanto, comenta que a resolução da equação de Laplace não oferece quaisquer dificuldades (sic)<sup>(ix)</sup> e utiliza o Princípio de Dirichlet, sem se preocupar com nenhuma das questões levantadas acima, em particular, sobre a existência de um mínimo para  $\mathcal{I}(u)$ , sujeito às condições de contorno.

§44. Acredito que tais exemplos ilustram bem uma certa tentativa de se evitar a utilização de problemas físicos na resolução de questões de ordem puramente matemática. No caso de Dirichlet, essa postura parece ser levada ao extremo, onde se recorre à possibilidade de solução do problema matemático para se tratar do problema físico associado, como numa tentativa de justificar a si mesmo que a intuição havia sido deixada de lado.

Tudo isso me parece muito influenciado pelo processo de fundamentação lógica pelo qual passou a Matemática no século 19, a partir de Cauchy, na década de 1820. No entanto, ainda nas décadas de 1850 e 1860, esse processo ainda não estava consolidado: as idéias físicas ainda permeavam os espíritos dos matemáticos, em muitos casos de forma bastante sutil para os padrões da época.

§45. Uma questão levantada por Henri Poincaré (1854-1912) num artigo de 1890<sup>(x)</sup> trata exatamente dessa interferência de fenômenos físicos na resolução de problemas matemáticos.

Sabemos que um modelo físico é obtido a partir de uma série de considerações aproximativas, a partir de simplificações do fenômeno que se planeja estudar; em muitos caso, ainda, os argumentos matemáticos envolvidos são altamente questionáveis.

<sup>(viii)</sup>P. G. L. Dirichlet, *Die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte*, Leipzig, 1876.

Apud G. D. Birkhoff, [5], p.385.

<sup>(ix)</sup>“The latter presents no difficulty”. (P. G. L. Dirichlet, op cit, §32. Apud G. D. Birkhoff, loc cit.)

<sup>(x)</sup>H. Poincaré, [49], pp.31–32.

Chegamos então ao seguinte dilema envolvendo o Princípio de Dirichlet: realmente é necessária uma demonstração para a existência de soluções do problema de Dirichlet, mesmo sabendo que isso pode ser obtido por argumentos puramente físicos? Além disso, sendo uma demonstração necessária, tal problema deveria ser tratado com o mesmo rigor de uma questão de Análise Pura, mesmo que isso possa parecer um pedantismo inútil?

A resposta de Poincaré é bastante incisiva a essas indagações. Na verdade, a equação resultante de um modelo físico representa a um matemático um desafio a ser vencido, utilizando para isso todo o rigor necessário a uma questão, agora, puramente matemática. Além disso, nada impede que equações proveniente da Física tenham, algum dia, profundas implicações na Matemática<sup>(xi)</sup>.

§46. No caso específico do Princípio de Dirichlet em meados do século 19, ainda embasado de certa maneira nas idéias físicas que apresentamos acima, Riemann o utilizaria no estudo de problemas envolvendo aplicações conformes<sup>(xii)</sup> e integrais abelianas<sup>(xiii)</sup>.

Em 1870, Weierstrass iria apontar uma séria falha nessa abordagem.

## 2.2 O Teorema da Aplicação Conforme de Riemann

§47. Nesta seção apresentaremos uma aplicação do Princípio de Dirichlet ao problema de representação conforme. Embora não seja a demonstração original de Riemann, ficará bem claro como a existência de soluções para o problema de Dirichlet, que estaria garantida por meio do Princípio de Dirichlet, pode ser utilizada nesse caso.

§48. Sejam abertos  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ ; uma função  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  é dita conforme se  $f$  preserva os ângulos; mais precisamente, se dados  $x \in \Omega_1$  e  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$  não-nulos, então  $\angle(f'(x)v_1, f'(x)v_2) = \angle(v_1, v_2)$ .

Caso a dimensão do espaço ambiente seja 2, podemos fazer uso das funções analíticas no estudo das transformações conformes. Com efeito, se  $f$  for analítica,  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  forem não-nulos, e

---

<sup>(xi)</sup>“Est-il encore permis de se contenter d’une demi-rigueur? Et qui nous dit que les autres problèmes de la Physique mathématique ne seront pas un jour, comme l’a déjà été le plus simple d’entre eux appelés à jouer en Analyse un rôle considérable?” (H. Poincaré, op cit, p.32.)

<sup>(xii)</sup>G. F. B. Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, Göttingen, 1851 (Tese de Doutorado); *Werke*, pp.3-43. Apud M. Kline, op cit, p.655.

<sup>(xiii)</sup>G. F. B. Riemann, “Theorie der Abel’sche Functionen”, *J. Reine Angew. Math.* 54 (1857); *Werke*, 2ª ed., pp.82-142 [88-96]. In : G. D. Birkhoff, op cit, pp.50-56.

$f'(x) \neq 0$ , teremos

$$\begin{aligned} \arg f'(x)v_1 - \arg f'(x)v_2 &= \left[ \arg f'(x) + \arg v_1 \right] - \left[ \arg f'(x) + \arg v_2 \right] \\ &= \arg v_1 - \arg v_2. \end{aligned}$$

A recíproca também é verdadeira. Com efeito, se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  for conforme e de classe  $C^1$ , então  $f$  satisfaz as equações de Cauchy-Riemann e, portanto, é analítica<sup>(xiv)</sup>.

Com base na propriedade acima, válida no plano, podemos substituir o estudo das transformações conformes pelo das funções analíticas. Para isso, utilizaremos um resultado clássico da teoria de funções analíticas<sup>(xv)</sup>:

**LEMA 2.1 (TEOREMA DE ROUCHÉ)** *Seja  $\Gamma$  uma curva simples e contraível em  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Se  $f$  e  $g$  forem analíticas em  $\Omega$ , e tais que  $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ ,  $\forall z \in \Gamma$ , então  $\Gamma$  envolve o mesmo número de zeros de  $f$  e  $g$ , incluindo suas multiplicidades.*

**§49.** Apresentamos abaixo uma versão mais fraca do Teorema da Aplicação Conforme, onde não faremos restrições sobre os valores da transformação analítica na fronteira do domínio de definição<sup>(xvi)</sup>.

Além disso, vamos admitir que o problema de Dirichlet sempre admita solução nas regiões simplesmente conexas do plano. Embora esse resultado seja verdadeiro, como veremos no Capítulo 3, Riemann se utilizou do Princípio de Dirichlet para concluir que o problema de Dirichlet sempre teria solução, para toda (sic) região considerada.

**TEOREMA 2.2 (TEOREMA DA APLICAÇÃO CONFORME)** *Dois abertos simplesmente conexos e limitados  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$  possuem uma bijeção conforme  $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ .*

*Demonstração.* Como a composição de aplicações conformes também é conforme, basta demonstrarmos o resultado quando um dos abertos é a bola unitária  $B_1(0)$ ; o outro conjunto denotaremos simplesmente por  $\Omega$ .

Fixado  $z_0 \in \Omega$ , seja  $u := \phi_{z_0}$  a parte regular da função de Green  $G$  associada a  $\Omega$ , i.e.,  $u$

<sup>(xiv)</sup>Cf. L. V. Ahlfors, [1], pp.73-74.

<sup>(xv)</sup>Cf. L. V. Ahlfors, op cit, pp.153-154.

<sup>(xvi)</sup>Cf. B. Epstein, [19], p.211 et seq.

é harmônica e  $u(z) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|z-z_0|}$ , se  $z \in \partial\Omega$ <sup>(xvii)</sup>. Como  $\Omega$  é simplesmente conexo, o complexo conjugado de  $u$ , que denotaremos por  $v$ , está bem definido a menos de uma constante arbitrária.

Seja  $h(z) := (z - z_0) e^{2\pi[u(z)+iv(z)]}$ . Dessa forma,  $h$  é harmônica em  $\Omega$  e  $h(z) = 0$  se, e somente se,  $z = z_0$ . Por outro lado,

$$|h(z)| = |z - z_0| e^{2\pi u(z)} = e^{2\pi \left[ \frac{1}{2\pi} \log |z-z_0| + \phi_{z_0}(z) \right]} = e^{-2\pi G(z, z_0)} \leq 1, \text{ pois } G \geq 0.$$

Em particular,  $h : \Omega \rightarrow B_1(0)$ ; além disso, temos  $|h(z)| \rightarrow 1$  quando  $d(z, \partial\Omega) \rightarrow 0$ .

Resta verificarmos que  $h$  é, de fato, uma bijeção; em outras palavras, dado  $w \in B_1(0)$ , devemos mostrar que existe um único  $z \in \Omega$  tal que  $h(z) = w$ .

Com efeito, como  $|w| < 1$  e  $\lim_{d(z, \partial\Omega) \rightarrow 0} |h(z)| = 1$ , podemos encontrar uma curva simples e contraível  $\Gamma$  em  $\Omega$ , suficientemente próxima de  $\partial\Omega$ , tal que  $|h(z)| > |w| = |h(z) - [h(z) - w]|$  sobre a região compreendida entre  $\partial\Omega$  e  $\Gamma$ , inclusive<sup>(xviii)</sup>. Pelo Teorema de Rouché, o número de raízes de  $h(z)$  e  $h(z) - w$  devem coincidir na região limitada por  $\Gamma$ . Como  $h$  possui um único zero, a equação  $h(z) = w$  deverá admitir uma única solução no interior de  $\Gamma$  e, portanto, em  $\Omega$ . ■

## 2.3 O declínio do Princípio de Dirichlet

### 2.3.1 O criticismo de Weierstrass

§50. As décadas de 1840 e 1850 testemunharam os esforços de William Thompson, Dirichlet e Riemann em disseminar a utilização do elegante Princípio de Dirichlet. No entanto, ao que me parece, o grau de rigor que já havia sido atingido em Análise por volta dessa época, embora estivesse ainda muito aquém de nossos padrões, não permitiam mais os argumentos físicos de outrora; mas que não fora capaz de evitar graves incorreções causadas por fatos provenientes de um *senso-comum* que envolvia a comunidade matemática desse período.

Já por volta de 1870, a Matemática passaria por uma onda de contestações, tendo por objetivo o questionamento de fatos que até então eram tratados como óbvios. Esse movimento, liderado por Weierstrass, se caracterizou pela obtenção de contra-exemplos, que ilustravam patologias decorrentes de definições embasadas por toda uma fundamentação lógica, mas que encontravam na intuição sua motivação original.

<sup>(xvii)</sup> Aqui fazemos uso do Princípio de Dirichlet para garantir a existência da parte regular da função de Green associada a  $\Omega$ .

<sup>(xviii)</sup> Sendo a existência de uma tal curva  $\Gamma$  seja intuitivamente óbvia, este resultado será admitido sem demonstração.

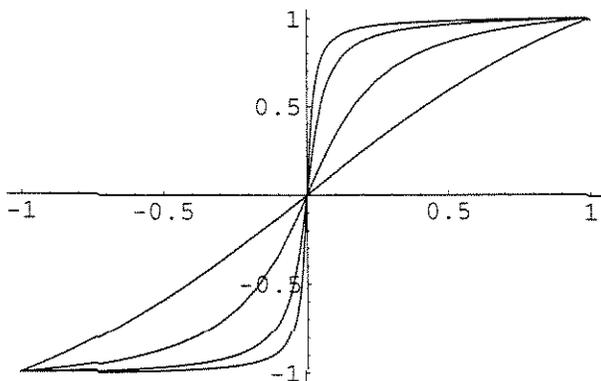


Figura 2.1: Elementos da família  $u_\varepsilon$  com  $a = -1$  e  $b = 1$ , para  $\varepsilon = 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{20}, \frac{1}{50}$

Certamente, o Princípio de Dirichlet, da forma com que vinha sendo utilizado, não poderia passar despercebido frente a tal processo. Além disso, esse era o objetivo de Weierstrass no seu artigo de 1870<sup>(xix)</sup>: apresentar um funcional positivo, mas que não possuísse um mínimo.

§51. Consideremos o funcional

$$I(u) := \int_{-1}^1 \left[ x \frac{du}{dx}(x) \right]^2 dx,$$

onde  $u$  é contínua em  $[-1, 1]$ , continuamente diferenciável em  $(-1, 1)$ , e satisfaz as condições de contorno  $u(-1) = a$  e  $u(1) = b$ , com  $a \neq b$ .

Afirmo que  $\inf I = 0$ , onde o ínfimo é tomado sobre a classe de funções admissíveis consideradas acima.

Vamos definir (figura 2.1)

$$u_\varepsilon(x) := \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Dessa forma,  $u_\varepsilon$  é uma função admissível e

$$\frac{du_\varepsilon}{dx}(x) = \frac{b-a}{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}} \cdot \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}.$$

Logo,

$$I(u_\varepsilon) \leq \int_{-1}^1 (x^2 + \varepsilon^2) \left[ \frac{du_\varepsilon}{dx}(x) \right]^2 dx \quad (2.3)$$

$$= \varepsilon \frac{(b-a)^2}{\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}\right)^2} \int_{-1}^1 \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \frac{\varepsilon (b-a)^2}{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}} \rightarrow 0, \quad (2.4)$$

<sup>(xix)</sup>Vid nota (i)

quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Conseqüentemente,  $\inf I = 0$ . No entanto, é claro que esse ínfimo somente poderá ser atingido por uma função constante, a qual não é uma função admissível (pois  $a \neq b$ ).

Assim, chegamos à conclusão de que o Princípio de Dirichlet, tal como proposto em meados do século 19, nos conduz a um resultado falso<sup>(xx)</sup>.

### 2.3.2 O exemplo de Prym

**§52.** Embora Weierstrass não tratasse exatamente da integral de Dirichlet, o exemplo que apresentamos na subseção anterior foi o suficiente para aniquilar as esperanças de que o Princípio de Dirichlet, na forma imprecisa em que fora tratado, pudesse estar correto.

Acredito que antes mesmo de 1870 já pairassem dúvidas sobre ele. No entanto, talvez por medo das críticas que poderiam sobrevir, ou mesmo pela mais pura fé de que o Princípio de Dirichlet estivesse correto, não me consta que tenham ocorrido contestações abertas. De qualquer maneira, Weierstrass rompera a linha tênue que sustentara tal argumento por tantos anos.

Em 1871, F. E. Prym publicou um artigo<sup>(xxi)</sup> onde era levantada uma questão que nem Weierstrass parece ter observado: mesmo que o problema de Dirichlet tenha uma solução  $u$  em  $\Omega$ , nada garante que a integral de Dirichlet calculada em  $u$  seja finita, i.e.,  $\mathcal{I}(u) < \infty$ .

Embora esteja quase esquecido atualmente, apresentamos o exemplo original de Prym abaixo.

**§53.** Vamos fixar um ramo da função  $\log$  sobre o plano complexo, do qual excluimos os números reais não-positivos e, considerando a representação de um ponto nessa região em coordenadas polares como  $z = \rho e^{i\varphi}$ , com  $-\pi < \varphi < \pi$ , escreveremos  $\log z = \log \rho + i\varphi$ .

A função harmônica  $u + iv := i\sqrt{-\log(R + x + iy)}$ , com  $R > 0$ , está bem definida exceto para os números reais menores que ou iguais a  $-R$ . Vamos supor  $R < \frac{1}{2}$  e considerar a parametrização do semicírculo fechado  $\Omega$ , de centro  $-R$  e raio  $2R$ , em coordenadas polares:

$$\begin{cases} x + R = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \end{cases}$$

com  $0 \leq \rho \leq 2R$  e  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

<sup>(xx)</sup> "Die Dirichlet'sche Schlussweise führt also in dem betrachteten Falle offenbar zu einem falschen Resultat". (K. T. W. Weierstrass, op cit, p.54)

<sup>(xxi)</sup> F. E. Prym, [52].

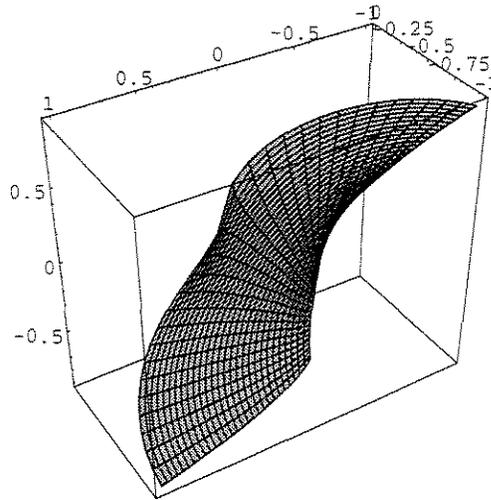


Figura 2.2: Gráfico da função  $u$  sobre  $\Omega$

Como

$$-\log(R + x + iy) = -\log \rho - i\varphi = -\sqrt{\log^2 \rho + \varphi^2} e^{i \operatorname{arctg}\left(\frac{\varphi}{\log \rho}\right)},$$

obtemos as seguintes expressões para  $u$  e  $v$  sobre  $\bar{\Omega}$ :

$$u(\rho, \varphi) = (\log^2 \rho + \varphi^2)^{\frac{1}{4}} \operatorname{sen} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{\varphi}{\log \rho} \right) \right]$$

$$v(\rho, \varphi) = -(\log^2 \rho + \varphi^2)^{\frac{1}{4}} \operatorname{cos} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{\varphi}{\log \rho} \right) \right]$$

§54. Devemos nos restringir apenas à função  $u$  (figura 2.2) e estudar seu comportamento em  $\partial\Omega$ , em especial no ponto  $-R$  (pois  $v$  diverge nesse ponto). Para isso, definimos as funções

$$\tilde{\xi}(\rho, \varphi) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{\varphi}{\log \rho} \right), \quad 0 < \rho \leq 2R \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\tilde{u}(\xi, \varphi) = \left( \frac{\varphi^2}{\operatorname{sen}^2 2\xi} \right)^{\frac{1}{4}} \operatorname{sen} \xi, \quad \xi \in \operatorname{Imagem}(\tilde{\xi}) \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

e verifica-se facilmente que  $u(\rho, \varphi) = \tilde{u}(\tilde{\xi}(\rho, \varphi), \varphi)$ .

Observando que  $\tilde{\xi}(\rho, \varphi) \rightarrow 0$  e  $\tilde{u}(\xi, \varphi) \rightarrow 0$  uniformemente em  $\varphi$  quando  $\rho \rightarrow 0$  e  $\xi \rightarrow 0$ , respectivamente, segue que

$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow 0+ \\ \varphi \rightarrow \varphi_0}} u(\rho, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi_0 \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Portanto,  $u$  é harmônica e pode ser estendida continuamente ao bordo  $\partial\Omega$  do semicírculo.

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{1}{2} (\log^2 \rho + \varphi^2)^{-\frac{3}{4}} \left\{ \frac{\log \rho}{\rho} \operatorname{sen} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{\varphi}{\log \rho} \right) \right] - \frac{\varphi}{\rho} \cos \left[ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{\varphi}{\log \rho} \right) \right] \right\}, \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= \frac{1}{2} (\log^2 \rho + \varphi^2)^{-\frac{3}{4}} \left\{ \varphi \operatorname{sen} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{\varphi}{\log \rho} \right) \right] + \log \rho \cos \left[ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{\varphi}{\log \rho} \right) \right] \right\}.\end{aligned}$$

Dessa forma, fixado  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, a integral de Dirichlet  $\mathcal{I}_\varepsilon$  de  $u$  sobre a região  $\Omega^\varepsilon$ , onde excluímos de  $\Omega$  a vizinhança de  $-R$  com raio  $\varepsilon$ , será dada por:

$$\mathcal{I}_\varepsilon(u) = \int_\varepsilon^{2R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} \rho d\rho d\varphi = \frac{1}{4} \int_\varepsilon^{2R} \frac{d\rho}{\rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\log^2 \rho + \varphi^2}} \quad (2.5)$$

e, pelo último membro de (2.5),

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\varepsilon(u) &\geq \frac{1}{4} \int_\varepsilon^{2R} \frac{d\rho}{\rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\log^2 \rho + 4}} \\ &= \frac{\pi}{4} \int_\varepsilon^{2R} \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\log^2 \rho + 4}} = \frac{\pi}{4} \left\{ \operatorname{arsenh} \left( \frac{1}{2} \log 2R \right) + \operatorname{arsenh} \left( \frac{1}{2} \log \frac{1}{\varepsilon} \right) \right\}.\end{aligned}$$

Conseqüentemente,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{I}_\varepsilon = +\infty$ , de onde segue que a integral de Dirichlet de  $u$  sobre  $\Omega$  diverge.

**§55.** Devo alertar o leitor que o fato de  $\mathcal{I}(u) = \infty$  não garante, em princípio, que a classe de funções admissíveis com condição de contorno dada por  $u|_{\partial\Omega}$ , e integral de Dirichlet finita, seja vazia.

Embora isso seja verdade, adiaremos a demonstração desse fato à seção 4.3.

### 2.3.3 O exemplo de Hadamard

**§56.** Passados mais de 30 anos, o exemplo de Prym havia caído em profundo esquecimento, mesmo porque a apatia em que ficara o Princípio de Dirichlet já não o fazia mais necessário.

Em 1906, Jacques Salomon Hadamard (1865-1963) construiu um novo exemplo de não-equivalência entre o problema de Dirichlet e o Princípio de Dirichlet, apelando, dessa vez, para a representação de uma função harmônica por meio de séries de Fourier sobre o disco unitário em  $\mathbb{R}^{2(\text{xxii})}$ .

(xxii) J. S. Hadamard, [35].

§57. O leitor pode observar que uma função contínua sobre  $C(\partial B_1(0))$ , onde  $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$  é o disco de raio 1, pode ser expressa de forma equivalente como sendo uma função contínua  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(0) = f(2\pi)$ . Neste caso, a condição de contorno sobre  $\partial B_1(0)$  associada a essa função num ponto  $x = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , vale  $f(\theta)$ .

Utilizando a representação do laplaciano em coordenadas polares

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta},$$

e aplicando o método de separação de variáveis, o leitor poderá verificar sem dificuldade que nosso candidato a solução clássica para o problema de Dirichlet sobre  $B_1(0)$ , com condição de contorno  $f$ , é dado por

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sen k\theta), \quad (2.6)$$

onde  $a_k$  e  $b_k$  são os coeficientes de Fourier de  $f$ , i.e.,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos k\theta \, d\theta,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sen k\theta \, d\theta.$$

§58. Aqui nos deparamos com uma situação bastante curiosa. Embora  $f$  seja somente contínua, o que significa que  $f$  não necessariamente possa ser expressa em termos de sua série de Fourier, (2.6) realmente define a solução desejada.

Esse fato pode ser verificado pelo leitor<sup>(xxiii)</sup>, observando que, com ajuda da representação da soma de uma série geométrica (de números complexos), (2.6) pode ser expressa em termos da fórmula de Poisson aplicada a  $f$ , a qual já sabemos ser solução de nosso problema.

§59. Pela desigualdade de Bessel ou pelo Lema de Riemann-Lebesgue<sup>(xxiv)</sup>,  $a_k, b_k \rightarrow 0$ . Dessa forma, para  $0 \leq r < 1$ , a derivada de  $u$  pode ser obtida por derivação termo-a-termo da série em (2.6), e obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{k=1}^{\infty} k r^{k-1} (a_k \cos k\theta + b_k \sen k\theta),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^{\infty} k r^k (-a_k \sen k\theta + b_k \cos k\theta).$$

<sup>(xxiii)</sup>Cf. D. G. de Figueiredo, [24], pp.251-257.

<sup>(xxiv)</sup>Ibid, pp.60-63 e pp.56-58, respectivamente.

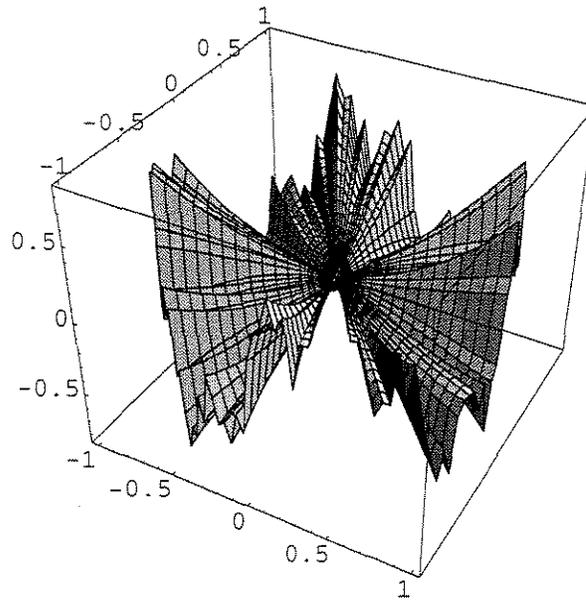


Figura 2.3: Exemplo de Hadamard

Logo, se  $\rho < 1$ , a integral de Dirichlet de  $u$  sobre  $B_\rho(0)$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\rho(u) &= \int_0^\rho \int_0^{2\pi} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right\} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\rho \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2) r^{2k-1} \, dr \, d\theta = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k (a_k^2 + b_k^2) \rho^{2k}. \end{aligned}$$

Finalmente, fazendo  $\rho \rightarrow 1$ , é fácil verificar que

$$\mathcal{I}(u) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k (a_k^2 + b_k^2). \quad (2.7)$$

§60. O exemplo de Hadamard repousa sobre a equação (2.7). Na verdade, basta escolhermos os coeficientes  $a_k$  e  $b_k$  de forma que

$$f(\theta) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta$$

seja absolutamente convergente (e, portanto,  $f$  será contínua), mas que a série em (2.7) seja divergente.

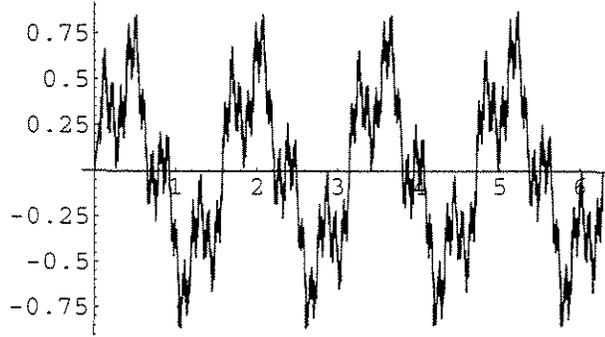


Figura 2.4: Gráfico de  $f$  dada por (2.8)

Tomando, por exemplo,<sup>(xxv)</sup>

$$a_k = 0$$

$$b_k = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq 2^{2n} \\ \frac{1}{2^n}, & \text{se } n = 2^{2n} \end{cases},$$

teremos que (figura 2.4)<sup>(xxvi)</sup>

$$f(\theta) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{sen} 2^{2n} \theta \quad (2.8)$$

é contínua, mas a solução  $u$  do problema de Dirichlet com condição de contorno  $f$  satisfaz

$$\mathcal{I}(u) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n = \infty.$$

§61. Hadamard, ao contrário de Prym, decide ir além, observando que a classe de funções admissíveis para o Princípio de Dirichlet, nesse caso, é vazia. Para isso, ele utiliza estimativas

<sup>(xxv)</sup>Na verdade, Hadamard escolhe apenas  $c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq 2^{2n} \\ \frac{1}{2^n}, & \text{se } n = 2^{2n} \end{cases}$ , deixando a relação  $\frac{a_k}{b_k}$  em aberto.

<sup>(xxvi)</sup>Em 1872, Weierstrass apresentou à Academia de Ciências de Berlim um exemplo de funções contínuas que não teriam derivadas em nenhum ponto. Considerando  $a$  um número ímpar e  $0 < b < 1$  tais que  $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ , então a função real

$$g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos a^k \pi x$$

é contínua, mas não tem derivada em nenhum ponto (Cf. D. Bressoud, [7], pp.259–262.). Com base nesse resultado, parece bastante razoável que o mesmo possa ocorrer a  $f$  ou, pelo menos, que  $f$  não seja diferenciável em quase toda a reta. No entanto, não consegui adaptar a demonstração do resultado de Weierstrass ao nosso caso.

demonstradas por Harnack e Hugoniot em 1880 e 1881, respectivamente, que tratam de casos onde as séries de Fourier envolvidas não eram necessariamente convergentes. Evidentemente não entraremos em detalhes nesse assunto, uma vez que na seção 4.3 isso será tratado de forma muito mais simples.

## Capítulo 3

# Métodos alternativos de resolução do problema de Dirichlet

§62. Algum eventual temor que estivesse rondando o Princípio de Dirichlet antes de 1870 havia se concretizado: o Princípio de Dirichlet estava morto. Além disso, as tentativas subseqüentes de Weierstrass e de alguns de seus alunos em resgatar a validade dessa formulação variacional estariam fadadas ao fracasso.

Restava agora procurar novos métodos para garantir a existência de soluções do problema de Dirichlet; afinal, os trabalhos de Riemann sobre representações conformes no plano e sobre integrais abelianas dependiam disso para que pudessem ser revalidados.

### 3.1 O processo alternante de Schwarz

§63. Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) não estava muito satisfeito com a teoria de representação conforme de Riemann por ser muito abstrata. Por volta de 1864, já teria observado que não conhecia nenhuma aplicação conforme explícita, e não-trivial, que transformasse uma dada região sobre o disco unitário<sup>(i)</sup>.

Motivado por essa deficiência no tratamento de Riemann, Schwarz, juntamente com Karl Gottfried Neumann (1832-1925), começou a construir explicitamente aplicações conformes para polígonos convexos<sup>(ii)</sup>. Por aproximações, ambos foram capazes de resolver o problema de repre-

---

<sup>(i)</sup>Cf. G. D. Birkhoff, [5], pp.47-48.

<sup>(ii)</sup>Cf. H. A. Schwarz, *Gesammelte Werke*, v.2, pp.108-306, passim; K. G. Neumann, *Vorlesungen über Riemann's*

sentações conformes para as regiões convexas e limitadas do plano<sup>(iii)</sup>.

Vejamos qual o nosso interesse nesse problema.

§64. Seja  $h : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{B_1(0)}$  uma aplicação conforme (no nosso caso, uma função analítica) de  $\overline{\Omega} \subset \mathbb{C}$  sobre  $\overline{B_1(0)} \subset \mathbb{C}$ , de maneira que  $h|_{\partial\Omega} : \partial\Omega \rightarrow \partial B_1(0)$  seja um homeomorfismo. Assim, dada  $f \in C(\partial\Omega)$ , então  $g := f \circ (h|_{\partial\Omega})^{-1}$  é uma função contínua sobre  $\partial B_1(0)$ .

Se  $u$  for a solução do problema de Dirichlet em  $B_1(0)$ , com condição de contorno  $g$ , a função  $v := u \circ h$  será harmônica em  $\Omega$  (pois  $h$  é analítica) e coincidirá com  $f$  sobre  $\partial\Omega$ .

Nesse caso, o leitor pode observar que  $B_1(0)$  não tem nada de especial no raciocínio desenvolvido acima, e poderia muito bem ser substituído por qualquer região onde seja possível resolver o problema de Dirichlet.

Ciente desse fato, Schwarz construiu um engenhoso aparato sobre  $\mathbb{C}$  envolvendo o problema de representações conformes, tendo por objetivo seguir o caminho inverso de Riemann, i.e., a partir de um tal teorema nessa área, obter a solubilidade do problema de Dirichlet em abertos do plano.

Como já observamos acima, Schwarz e Neumann já haviam resolvido tal problema nas regiões convexas do plano e restava estender tal resultado para regiões ainda mais gerais.

Para lidar com essa questão, Schwarz desenvolveu um interessante método, denominado processo alternante (*alternierende Verfahren*), segundo o qual é possível construir a solução do problema de Dirichlet em uma região  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , sabendo-se que o problema de Dirichlet admite solução nos abertos  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , e que ambos se interceptam de forma conveniente, num sentido que precisaremos a seguir.

§65. Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto, simplesmente conexo e fronteira  $\Gamma := \partial\Omega$  diferenciável por partes. Vamos supor, ainda, que os ângulos internos formados nos eventuais vértices de  $\Gamma$  estejam estritamente entre 0 e  $2\pi$ <sup>(iv)</sup>, e fixemos uma orientação de percurso da fronteira, de maneira que a normal externa e o vetor tangente no sentido de percurso formem, nessa ordem, uma base positiva de  $\mathbb{R}^2$ .

Nosso objetivo inicial será considerar uma formulação um pouco mais geral do problema de Dirichlet, na qual consideraremos soluções da equação de Laplace com condições de contorno se-

---

*Theorie der Abel'schen Integrale*, 2ª ed., 1884; *Über das logarithmische und Newton'sche Potential*, Leipzig : Teubner, 1877; *Math. Ann.* **3** (1871), pp.325–349; **11** (1877), pp.558–566; **13** (1878), pp.255–300; **16** (1880), pp.409–431. Apud A. R. Forsyth, [27], v.2, p.458.

<sup>(iii)</sup>Cf. R. V. Churchill, *Variáveis Complexas e suas Aplicações*, 1ª ed. São Paulo : McGraw-Hill, 1975, p.166 et seq.

<sup>(iv)</sup>Uma tal hipótese evita o surgimento de cúspides, que poderiam complicar desnecessariamente nossa exposição.

cionalmente contínuas.

Dado  $x_0 \in \Gamma$ , podemos fixar uma determinação contínua de ângulo sobre  $\overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$  com relação a  $x_0$ , e que denotaremos por  $\arg_{x_0}$ . Se  $\omega_0$  for o ângulo formado por  $\Gamma$  em  $x_0$  e  $\alpha$ , um número real qualquer, então a função  $\varrho(x) := \alpha \frac{\arg_{x_0}(x)}{\omega_0}$  é harmônica em  $\Omega$ , contínua em  $\overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$  e tal que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0^- \\ x \in \Gamma}} \varrho(x) - \lim_{\substack{x \rightarrow x_0^+ \\ x \in \Gamma}} \varrho(x) = \alpha.$$

Feita a observação acima sobre a função  $\varrho$ , podemos considerar o seguinte lema:

**LEMA 3.1** *Seja  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente contínua. Se o problema de Dirichlet sempre admitir solução em  $\Omega$ , então existe uma função  $u$  harmônica em  $\Omega$ , tal que  $f = u$  em  $\Gamma$  e  $u$  é contínua em  $\overline{\Omega}$ , exceto pelos pontos de descontinuidade de  $f$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\{x_1, \dots, x_k\}$  os pontos de descontinuidade de  $f$ , obtidos partindo-se de  $x_1$  e percorrendo  $\Gamma$  no sentido positivo, e denotaremos por  $\alpha_i$  o salto da função  $f$  em  $x_i$ , i.e.,  $\alpha_i := \lim_{\substack{x \rightarrow x_i^- \\ x \in \Gamma}} f(x) - \lim_{\substack{x \rightarrow x_i^+ \\ x \in \Gamma}} f(x)$ . Definindo

$$g(x) := \begin{cases} f(x) - \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\arg_{x_i}(x)}{\omega_i}, & x \in \Gamma \setminus \{x_1, \dots, x_k\} \\ 0, & x \in \{x_1, \dots, x_k\} \end{cases},$$

onde  $\omega_i$  denota o ângulo de  $\Gamma$  em  $x_i$ , vemos que  $g$  é contínua em  $\Gamma$  e, por hipótese de solubilidade do problema de Dirichlet, existe uma função  $v$  satisfazendo o problema de Dirichlet em  $\Omega$ , com condição de contorno  $g$ . Para concluirmos a demonstração, basta observar que

$$u := v + \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\arg_{x_i}}{\omega_i}$$

satisfaz as condições desejadas. ■

**§66.** Fixados dois pontos  $p$  e  $q$  distintos em  $\Gamma$ , seja  $\sigma$  uma curva seccionalmente diferenciável em  $\Omega$ , com extremos  $p$  e  $q$ , e que não seja tangente a  $\Gamma$  nestes pontos (figura 3.1). Denotaremos, ainda, por  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  os dois segmentos abertos de  $\Gamma$  delimitados por tais pontos ( $\gamma_1$  liga  $p$  a  $q$ , nesta ordem). Vamos supor, ainda, que o problema de Dirichlet sempre admita solução em  $\Omega$ .

Pelo lema anterior, existe uma função harmônica  $u$  em  $\Omega$  que assume o valor 1 em  $\gamma_1$  e 0 em  $\gamma_2$ . Além disso, pelo Princípio do Máximo,  $u < 1$  sobre  $\sigma$  e, como  $\sigma$  não é tangente a  $\Gamma$  em suas

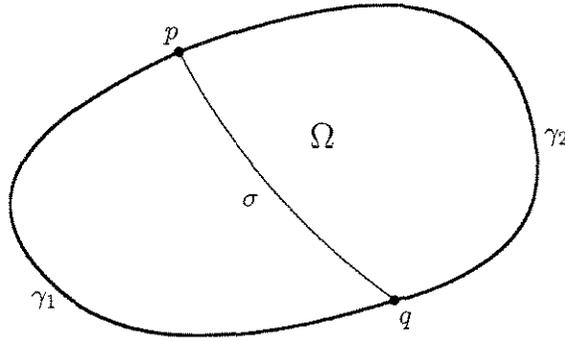


Figura 3.1: Curvas  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $\sigma$  em  $\bar{\Omega}$

extremidades, segue da construção de  $u$  que  $\lim_{\substack{x \rightarrow p \\ x \in \sigma}} u(x) < 1$ , o mesmo ocorrendo em  $q$ . Logo,

$$\theta_\sigma := \sup_{x \in \sigma} u(x) < 1.$$

Seja  $v$  uma função harmônica em  $\Omega$ , contínua em  $\bar{\Omega}$ , e que se anule sobre  $\gamma_2$ . Denotando por  $M := \max_\Gamma |v|$ , então  $v - Mu$  é harmônica e não-positiva em  $\Gamma$ . Pelo Princípio do Máximo,  $v \leq Mu$  e, portanto,  $v \leq \theta_\sigma M$  sobre  $\sigma$ .

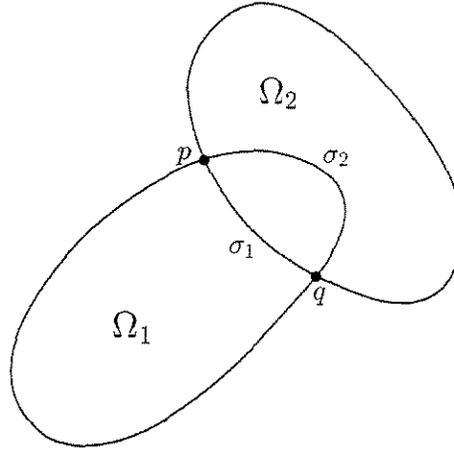
**OBSERVAÇÃO 4** A desigualdade  $v \leq \theta_\sigma M$  em  $\sigma$  fornece uma relação de uniformidade ao longo da curva  $\sigma$ , com respeito ao comportamento das funções harmônicas em  $C(\bar{\Omega})$  que se anulam sobre  $\gamma_2$ .

**§67.** No Teorema que segue,  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  serão dois abertos satisfazendo as condições postas no início desta seção, com bordos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , respectivamente. Ainda, denotaremos por  $\sigma_1 := \Gamma_2 \cap \Omega_1$  e  $\sigma_2 := \Gamma_1 \cap \Omega_2$ , como indicado na Figura 3.2, e vamos supor, por simplicidade, que  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  sejam conexas e que  $\sigma_i$  não seja tangente a  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2$ .

**TEOREMA 3.2** *Se o problema de Dirichlet sempre admitir solução em  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , então o mesmo ocorre a  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ .*

*Demonstração.* Seja  $f$  uma função contínua sobre  $\Gamma := \partial(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ . Nosso objetivo será construir, a partir de  $f$ , seqüências de funções harmônicas  $(u_k)_{k \geq 1}$  e  $(v_k)_{k \geq 1}$  em  $\bar{\Omega}_1$  e  $\bar{\Omega}_2$ , respectivamente, que deverão convergir para a solução procurada; para esse último passo, utilizaremos a estimativa indicada na Observação 4.

Fixada uma extensão contínua  $g_0$  de  $f$  sobre  $\Gamma_1$ , escolhamos  $u_0$  como sendo a solução do problema de Dirichlet em  $\Omega_1$  com condição de contorno  $g_0$ . Seja  $h_1$  a função contínua dada por  $f$

Figura 3.2: As regiões  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ 

em  $\Gamma_2 \setminus \sigma_1$  e por  $u_0$  em  $\sigma_1$ . Vamos definir  $v_1$  como sendo a solução do problema de Dirichlet em  $\Omega_2$ , com condição de contorno  $h_1$ . Analogamente, definimos  $g_1$  como sendo a função contínua dada por  $f$  em  $\Gamma_1 \setminus \sigma_2$  e por  $v_1$  em  $\sigma_2$ . Tomemos  $u_1$  a solução do problema de Dirichlet em  $\Omega_1$  com condição de contorno  $g_1$ .

Estando definidas as funções harmônicas  $u_j$  em  $\Omega_1$  e  $v_j$  em  $\Omega_2$ , se  $g_j := u_j|_{\partial\Omega_1}$  e  $h_j := v_j|_{\partial\Omega_2}$ , tomamos:

$$g_{j+1}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in \Gamma_1 \setminus \sigma_2 \\ v_j(x), & \text{se } x \in \sigma_2 \end{cases}.$$

Assim,  $g_{j+1} \in C(\Gamma_1)$  e existe  $u_{j+1}$  correspondente à solução do problema de Dirichlet em  $\Omega_1$ , com condição de contorno  $g_{j+1}$ ; nesse caso, podemos definir

$$h_{j+1}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in \Gamma_2 \setminus \sigma_1 \\ u_{j+1}(x), & \text{se } x \in \sigma_1 \end{cases},$$

e escolhemos  $v_{j+1}$  como sendo a solução do problema de Dirichlet em  $\Omega_2$ , com condição de contorno contínua  $h_{j+1}$ .

Fixado  $k$  inteiro, escreveremos

$$u_k = u_1 + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_k - u_{k-1}), \quad (3.1)$$

$$v_k = v_1 + (v_2 - v_1) + \cdots + (v_k - v_{k-1}). \quad (3.2)$$

Seja  $M := \max_{\Gamma} |f| + \max_{\Gamma_1} |g_0|$ . Pelo Princípio do Máximo,  $|u_0| \leq M$  e  $|u_1| \leq M$  em  $\Omega_1$ ,

e  $|v_1| \leq M$  e  $|v_2| \leq M$  em  $\Omega_2$ . Mais ainda,  $v_2 - v_1 = 0$  sobre  $\Gamma_2 \setminus \sigma_1$  e  $|v_2 - v_1| \leq 2M$  sobre  $\sigma_1$ . Segue da Observação 4 que  $|v_2 - v_1| \leq 2\theta_{\sigma_2}M$  em  $\sigma_2$  e, portanto,  $|u_2 - u_1| \leq 2\theta_{\sigma_2}M$  em  $\Gamma_1$ . Pelo Princípio do Máximo  $|u_2 - u_1| \leq 2\theta_{\sigma_2}M$  em  $\Omega_1$ . Da mesma forma, obtemos  $|v_2 - v_1| \leq 2\theta_{\sigma_1}M$  em  $\Omega_2$ . Repetindo sucessivamente o argumento acima, teremos  $|u_{j+1} - u_j| \leq 2\theta_{\sigma_2}^j M$  em  $\Omega_1$ , e  $|v_{j+1} - v_j| \leq 2\theta_{\sigma_1}^j M$  em  $\Omega_2$ ,  $\forall j \geq 1$ .

Segue das estimativas acima que

$$|u_1| + |u_2 - u_1| + \cdots + |u_k - u_{k-1}| \leq 2M + 2\theta_{\sigma_2}M + \cdots + 2\theta_{\sigma_2}^{j-1}M < \frac{2M}{1 - \theta_{\sigma_2}} \quad (3.3)$$

$$|v_1| + |v_2 - v_1| + \cdots + |v_k - v_{k-1}| \leq 2M + 2\theta_{\sigma_1}M + \cdots + 2\theta_{\sigma_1}^{j-1}M < \frac{2M}{1 - \theta_{\sigma_1}} \quad (3.4)$$

e, portanto, as somas parciais (3.1) e (3.2) convergem uniformemente para  $u$  em  $\bar{\Omega}_1$  e  $v$  em  $\bar{\Omega}_2$ , respectivamente. Além disso, segue do Teorema de Harnack que  $u$  e  $v$  são harmônicas em seus respectivos domínios.

Fixando nossas atenções em  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ , vemos que ambas as seqüências  $(v_k - u_k)_{k \geq 1}$  e  $(v_k - u_{k-1})_{k \geq 1}$  convergem uniformemente a  $v - u$  em  $\overline{\Omega_1 \cap \Omega_2}$ . Ainda, por construção,  $v_k = u_k$  sobre  $\sigma_1$  e  $v_k = u_{k-1}$  sobre  $\sigma_2$ ,  $\forall k \geq 1$ . Portanto,  $u = v$  em  $\sigma_1 \cup \sigma_2$ , de onde temos  $u = v$  em  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ .

A função  $w$ , que vale  $u$  em  $\Omega_1$  e  $v$  em  $\Omega_2$ , satisfaz o Problema de Dirichlet em  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ , com condição de contorno  $f$ . ■

**OBSERVAÇÃO 5** A técnica apresentada acima pode ser generalizada facilmente no caso em que  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são constituídos de várias componentes conexas, e para regiões multiplamente conexas.

**§68.** O método de Schwarz, embora forneça a possibilidade de resolução do problema de Dirichlet para uma classe bastante ampla de regiões no plano, utiliza-se fortemente das funções analíticas, as quais, por sua vez, estão intimamente ligadas às transformações conformes no plano.

Assim, da forma como o apresentamos, o processo alternante encontra-se condenado à dimensão 2. Isso se deve basicamente ao seguinte teorema, que restringe drasticamente o número de transformações conformes em  $\mathbb{R}^n$ , quando  $n \geq 3^{(v)}$ :

**TEOREMA 3.3 (LIOUVILLE)** *Se  $n \geq 3$ , as únicas transformações conformes em  $\mathbb{R}^n$  são:*

1. *Translação:  $x \mapsto x + h$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$ ;*

<sup>(v)</sup>Cf. R. Nevanlinna, *Analytic Functions*, s.ed., Berlin : Springer-Verlag, 1970. (Traduzido da 2ª ed. em alemão)

2. *Homotetia*:  $x \mapsto \lambda x$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;

3. *Rotação*:  $x \mapsto Ax$ ,  $A \in O(n)$ ;

4. *Inversão*:  $x \mapsto \frac{x}{|x|^2}$ . ■

No entanto, Poincaré iria posteriormente encontrar uma maneira eficiente de estender tais idéias para um contexto mais amplo. De qualquer maneira, o método de Schwarz deu origem a uma extensa classe de métodos numéricos para resolução de equações diferenciais parciais a partir da década de 1960, conhecidos por Métodos de Decomposição de Domínios, os quais são largamente estudados em nossos dias<sup>(vi)</sup>.

### 3.2 O método da equação integral de Fredholm

§69. Embora o método de Schwarz tratasse do problema de Dirichlet de forma bastante geral, permanecia o sério inconveniente de estar restrito à dimensão 2; além disso, não havendo uma teoria de representação conforme suficientemente ampla em dimensão superior, surgiu a idéia de transformar o problema de Dirichlet numa equação integral, sustentando-se no fenômeno físico envolvido.

Como vimos no Capítulo 1, o potencial eletrostático gerado por uma densidade de cargas  $\rho$  na superfície de um condutor  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  deve ser dada por

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy, \quad \forall x \in \Omega.$$

Assim, dado o valor do potencial como sendo uma função contínua  $f$  sobre  $\partial\Omega$ , ficava a questão de se determinar uma densidade  $\rho$  capaz de gerar o potencial desejado sobre  $\partial\Omega$ .

Esse trabalho foi posto em prática de maneira independente, e por considerações distintas, por Neumann<sup>(vii)</sup> e Robin<sup>(viii)</sup> durante as décadas de 1870 e 1880. Suas demonstrações basearam-se no

<sup>(vi)</sup>Cf. B. F. Smith, P. E. Bjørstad e W. D. Gropp, *Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 1996.

<sup>(vii)</sup>K. G. Neumann, *Untersuchungen über das logarithmische und newtonische Potential*, Leipzig, 1877. Apud C. E. Picard, [47], p.257.

<sup>(viii)</sup>Robin, "Thèse sur la distribution de l'électricité," *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 1886. Apud C. E. Picard, op cit, p.238.

método de aproximações sucessivas; no entanto, seus resultados ainda se restringiam ao caso em que  $\Omega$  fosse convexo.

Em 1900, Erik Ivar Fredholm (1866-1927) tratou do problema de se resolver equações integrais mais gerais da forma<sup>(ix)</sup>

$$f(x) = \phi(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, y)\phi(y) dy,$$

e, em 1903, ele voltaria ao assunto de forma bem mais detalhada.<sup>(x)</sup>

As idéias utilizadas por Fredholm, ao contrário daquelas ligadas a Neumann e Murphy, estão em perfeita consonância com os objetivos deste trabalho, uma vez que se sustentaram num interessante aparato de determinantes infinitos<sup>(xi)</sup>, os quais, por sua vez, dariam origem à famosa Alternativa de Fredholm<sup>(xii)</sup>. Além disso, o trabalho de Fredholm representou o pontapé inicial para um estudo sistemático das equações integrais, no qual se destacou David Hilbert<sup>(xiii)</sup> (1862-1943) durante a primeira década do século.

**§70.** Como forma de apresentar uma aplicação da Alternativa de Fredholm ao estudo do problema de Dirichlet<sup>(xiv)</sup>, consideremos um aberto limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  com fronteira  $\Gamma := \partial\Omega$  suave. Nosso objetivo será obter soluções do problema de Dirichlet na forma de um potencial de camada dupla, i.e., gerado por uma densidade de magnetização  $\mu$  sobre  $\Gamma$ :<sup>(xv)</sup>

$$u(x) := \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \log \frac{1}{|x-y|} d\sigma_y, \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.5)$$

Suponhamos que  $u \in C(\bar{\Omega})$  seja uma função harmônica em  $\Omega$ , sendo representada por um potencial de camada dupla gerado por uma densidade contínua  $\mu$  sobre  $\Gamma$ , dada por (3.5); além disso, vamos definir  $f := u|_{\partial\Omega}$ .

Observamos que (3.5) está bem definida em  $\mathbb{R}^2$  e representa uma função harmônica em  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , mas que, em geral, não é contínua sobre  $\Gamma$ . Mais ainda, é possível mostrar que, para todo  $x_0 \in \Gamma$ ,

<sup>(ix)</sup>E. I. Fredholm, *Kongl. Svenska Akad. For.* **57** (1900), pp.39-46.

<sup>(x)</sup>E. I. Fredholm, "Sur une classe d'équations fonctionnelles," *Acta Math.* **27** (1903), pp.365-390.

<sup>(xi)</sup>Tais determinantes infinitos constituíam uma versão rigorosa das idéias imprecisas que Fourier utilizara na obtenção dos coeficientes de sua série.

<sup>(xii)</sup>Vid Proposição 3.4.

<sup>(xiii)</sup>D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Leipzig, 1912. Apud G. D. Birkhoff, op cit, p.437.

<sup>(xiv)</sup>Cf. B. Epstein, [19], pp.179-182.

<sup>(xv)</sup>O fator multiplicativo  $\frac{1}{\pi}$  foi tomado por questões de normalização.

temos<sup>(xvi)</sup>:

$$f(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} u(x) = \pi[u(x_0) - \mu(x_0)], \quad (3.6)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \notin \Omega}} u(x) = \pi[u(x_0) + \mu(x_0)], \quad (3.7)$$

onde, por abuso de notação, estamos denotando por  $u(x_0)$  o valor da integral (3.5) em  $x_0 \in \partial\Omega$ . Além disso, as derivadas normais externas e internas coincidem em  $\Gamma$ <sup>(xvii)</sup>, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_i}(x_0) = \frac{\partial u}{\partial \nu_e}(x_0), \quad \forall x_0 \in \Gamma. \quad (3.8)$$

Reescrevendo a equação (3.6), obtemos:

$$\frac{1}{\pi}f(x_0) = \mu(x_0) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \log \frac{1}{|x_0 - y|} d\sigma_y, \quad \forall x_0 \in \Gamma. \quad (3.9)$$

§71. Inversamente ao raciocínio que conduzimos acima, podemos considerar (3.9) como uma equação integral e procurar uma função contínua  $\mu$  definida em  $\Gamma$  que verifique a expressão (3.9), para uma função  $f \in C(\partial\Omega)$  dada.

Vamos primeiramente estudar o núcleo do operador integral acima, que pode ser reescrito como

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y} \log \frac{1}{|x_0 - y|} = \frac{x - y}{|x - y|^2} \cdot \nu_y. \quad (3.10)$$

Sendo  $\Gamma$  uma curva regular (com curvatura contínua), segue de um cálculo elementar que tal núcleo define uma função contínua sobre  $\Gamma \times \Gamma$ . Em particular, se  $\mu \in C(\Gamma)$ , então

$$x_0 \in \Gamma \mapsto \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \log \frac{1}{|x_0 - y|} d\sigma_y$$

define uma função contínua na variável  $x_0$ .

Assim, em vista do argumento acima, o operador linear  $L : C(\Gamma) \rightarrow C(\Gamma)$  dado por:

$$(L\mu)(x_0) := \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \log \frac{1}{|x_0 - y|} d\sigma_y, \quad \forall x_0 \in \Gamma,$$

<sup>(xvi)</sup>Uma demonstração elementar desse resultado quando o bordo  $\Gamma$  é analítico, utilizando o Teorema de Cauchy-Kowalewski, pode ser encontrada em P. R. Garabedian, [29], pp.334-339. Embora a demonstração seja feita para dimensão 3, o raciocínio é análogo para o plano. Cf. G. B. Folland, [26], pp.128-129.

<sup>(xvii)</sup>Vid nota anterior.

está bem definido, é linear e limitado (pois o núcleo é limitado). Ainda, se  $(\mu_k)_{k \geq 1}$  for uma sequência limitada em  $C(\Gamma)$ , então  $(L\mu_k)_{k \geq 1}$  é limitada e, tendo a integral um núcleo contínuo, é equicontínua. Pelo Teorema de Ascoli-Arzelà, existe uma subsequência convergente de  $(L\mu_k)_{k \geq 1}$  e, portanto,  $L$  é um operador compacto.

Reescrevendo a equação (3.9) em termos de  $L$ , temos:

$$\frac{1}{\pi}f = (I - L)\mu,$$

onde  $f, \mu \in C(\Gamma)$ .

**§72.** Para demonstrarmos a existência de soluções para essa equação, utilizaremos um resultado clássico da Análise Funcional:

**TEOREMA 3.4 (ALTERNATIVA DE FREDHOLM)** *Sejam  $\mathbb{E}$  um espaço de Banach e  $L : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  um operador linear compacto. Logo, exatamente uma das condições seguintes se verifica:*

- $(I - L)\mathbb{E} = \mathbb{E}$ .
- Existe  $\mathbf{x} \neq 0$  tal que  $(I - L)\mathbf{x} = 0$ . ■

Em virtude da Alternativa de Fredholm, deveremos demonstrar que a equação  $(I - L)x = 0$  admite somente a solução trivial. Para isso, seja  $\mu_0 \in C(\Gamma)$  tal que

$$\mu_0(x_0) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \mu_0(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \log \frac{1}{|x_0 - y|} d\sigma_y = 0, \forall x_0 \in \Gamma.$$

Vamos definir, conforme havíamos feito no início desta seção, o potencial de camada dupla resultante da distribuição  $\mu_0$ :

$$u_0(x) := \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \mu_0(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \log \frac{1}{|x - y|} d\sigma_y, x \in \mathbb{R}^2.$$

Fazendo  $x \rightarrow x_0$ ,  $x \in \Omega$ , segue de (3.6) e de  $\mu_0 = u_0|_{\Gamma}$  que  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} u_0(x) = 0$ . Dessa forma,  $u_0$  corresponde a uma função harmônica em  $\Omega$ , convergindo a zero na fronteira  $\Gamma$ . Pela unicidade de soluções para o Problema de Dirichlet,  $u_0 \equiv 0$  em  $\Omega$  e, em particular,  $\frac{\partial u_0}{\partial \nu_i} \Big|_{\Gamma} \equiv 0$ . Utilizando a identidade (3.8), teremos  $\frac{\partial u_0}{\partial \nu_e} \Big|_{\Gamma} \equiv 0$ .

Seja  $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$  uma bola com raio  $R$  grande o suficiente tal que  $\bar{\Omega} \subset B_R(0)$ .

Como  $u_0$  é harmônica em  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  e  $\frac{\partial u_0}{\partial \nu_e} \equiv 0$  em  $\Gamma$ , então a primeira identidade de Green, aplicada à função  $u_0$  sobre a região compreendida entre  $\partial B_R(0)$  e  $\Gamma$ , nos fornece:

$$\int_{B_R(0) \setminus \bar{\Omega}} |\nabla u_0|^2 dx = \int_{\partial B_R(0)} u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \nu} d\sigma. \quad (3.11)$$

§73. Nosso objetivo agora será mostrar que a segunda integral em (3.11) converge a zero quando  $R \rightarrow \infty$ .

Com efeito, segue de (3.10) que

$$\left| \frac{\partial}{\partial \nu_y} \log \frac{1}{|x-y|} \right| \leq \frac{C}{|x-y|} \quad \text{e} \quad \left| \nabla_x \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu_y} \log \frac{1}{|x-y|} \right\} \right| \leq \frac{C}{|x-y|^2},$$

de onde obtemos as estimativas:

$$|u_0(x)| \leq \frac{C}{d(\Gamma; \partial B_R(0))} \quad \text{e} \quad |\nabla u_0(x)| \leq \frac{C}{d(\Gamma; \partial B_R(0))^2}, \quad \forall x \in \partial B_R(0).$$

Conseqüentemente,

$$\left| \int_{\partial B_R(0)} u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \nu} d\sigma \right| \leq C \frac{R^2}{d(\Gamma; \partial B_R(0))^3} \rightarrow 0$$

quando  $R \rightarrow \infty$ .

Logo, por (3.11), temos  $\nabla u_0 \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$  e, portanto,  $u_0$  é constante em  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ . Ora, como  $u_0(x) \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ , isso significa que  $u_0 \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . Por outro lado, (3.6) e (3.7) indicam que  $u_0$  sofre uma variação de  $2\mu_0$  ao atravessar a fronteira  $\Gamma$  e, conseqüentemente,  $\mu_0 \equiv 0$ , como queríamos mostrar.

Pela Alternativa de Fredholm, existe  $\mu \in C(\Gamma)$  tal que  $-\frac{1}{\pi} f = (I - L)\mu$  ou, equivalentemente, satisfazendo a equação (3.9). Nesse caso, a função

$$u(x) := \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \log \frac{1}{|x-y|} d\sigma_y, \quad x \in \Omega,$$

é harmônica e, utilizando (3.6) e (3.9), segue imediatamente que  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = f(x_0)$ ,  $\forall x_0 \in \Gamma$ .

§74. Poderíamos dizer que o estudo do problema de Dirichlet por meio de equações integrais não é das tarefas mais fáceis. Caso tomemos  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 3$ , o argumento natural seria procurar representações de funções harmônicas na forma

$$u(x) := \int_{\partial \Omega} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} d\sigma_y, \quad \forall x \in \Omega.$$

No entanto, ao contrário do que ocorre em dimensão 2, a equação integral resultante não terá um núcleo contínuo, de maneira que, nessas condições, a Alternativa de Fredholm deve ser utilizada a partir de uma convolução de núcleos, até que seja atingida a compacidade do operador resultante<sup>(xviii)</sup>.

De qualquer maneira, a Alternativa de Fredholm nos proporcionou uma bela demonstração para o problema de Dirichlet, um tanto limitada é verdade, mas não deixa de ser elegante.

### 3.3 O método de varredura de Poincaré

§75. Pelos quase 20 anos que se seguiram ao exemplo de Weierstrass, várias foram as tentativas de resolução do problema de Dirichlet; no entanto, nenhuma era capaz de colocar um ponto final à questão.

Como observa Poincaré<sup>(xix)</sup>, entre 1870 e 1890, alguns métodos foram desenvolvidos com esse intuito, dentre os quais podemos destacar aqueles ligados a Schwarz, Neumann, Harnack, Robin e Murphy, além de um sem-número de outros métodos mais ou menos complicados, que Poincaré os denomina métodos alternantes (*méthodes alternantes*).

A 3 de janeiro de 1887, Poincaré submeteu à Academia de Ciências de Paris um artigo de apenas três páginas entitulado *Sur le Problème de la Distribution Électrique*<sup>(xx)</sup>, propondo um novo método de resolução para o problema de Dirichlet, o qual mereceu uma nova versão corrigida e bem mais detalhada em 1890, que seria publicado no *American Journal of Mathematics*<sup>(xxi)</sup>.

§76. Ilustraremos o método de varredura na construção do chamado potencial condutor para um aberto limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , onde ficam bastante evidentes os problemas técnicos envolvidos na resolução do problema de Dirichlet, além de se tratar do contexto em que Poincaré se detém inicialmente.

Ao final desta seção, entretanto, apresentaremos um esboço de como tal método pode ser empregado no caso de condições de contorno arbitrárias, uma vez que as questões envolvidas aí tiveram um desenvolvimento mais profícuo no âmbito do método de Perron, por meio do conceito de barreira, e que será visto com mais detalhes na seção 3.5.

---

<sup>(xviii)</sup> Cf. S. L. Sobolev, [55], p.256 et seq.

<sup>(xix)</sup> Cf. H. Poincaré, [49], p.33.

<sup>(xx)</sup> H. Poincaré, [48].

<sup>(xxi)</sup> H. Poincaré, [49].

Inicialmente, vamos à definição de potencial condutor:

**DEFINIÇÃO** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , um aberto limitado. Uma função  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  será denominada um potencial condutor de  $\Omega$  se  $u$  for contínua em  $\mathbb{R}^n$ , harmônica em  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ ,  $u|_{\overline{\Omega}} \equiv 1$  e  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$ .*

**OBSERVAÇÃO 6** Pelo Princípio do Máximo, sabemos que, caso uma tal função exista, ela deverá ser única; além disso, não existem potenciais condutores em abertos limitados de  $\mathbb{R}^2$ , pois a solução fundamental  $\vartheta(x) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x|}$  não converge a 0, quando  $|x| \rightarrow \infty$ <sup>(xxii)</sup>.

Vamos, a seguir, apresentar qual era o interesse de Poincaré no estudo sobre a existência do potencial condutor que, em princípio, constituiria uma solução extremamente particular do problema de Dirichlet. O ponto principal, como o leitor poderá observar adiante, é que o conhecimento dos potenciais condutores em  $\mathbb{R}^n$  irá garantir a construção da parte regular da função de Green associada ao problema de Dirichlet, cuja existência, como já observamos no Capítulo 1, Poincaré acreditava ser suficiente para estabelecer a solubilidade desse problema.

§77. Necessitaremos de dois resultados clássicos em Teoria do Potencial: o primeiro, dizendo respeito ao Princípio da Singularidade Removível, devido a Émile Picard, no qual utilizaremos uma demonstração que, segundo Goursat, foi apresentada por Lebesgue; o segundo resultado diz respeito à transformação de Kelvin, que havia sido proposta por Thompson numa carta a Liouville, em 1845, quando aquele tinha apenas 21 anos<sup>(xxiii)</sup>.

**PROPOSIÇÃO 3.5 (PRINCÍPIO DA SINGULARIDADE REMOVÍVEL)** *Seja  $u$  uma função harmônica e limitada em  $\overline{B_r(x_0)} \setminus \{x_0\}$ . Logo,  $u$  pode ser estendida continuamente a  $\overline{B_r(x_0)}$ , e a extensão resultante é harmônica em  $B_r(x_0)$ .*

<sup>(xxii)</sup>Para verificar esse fato, vamos supor por simplicidade que  $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ , onde  $\Omega$  é um aberto limitado que admita um potencial condutor  $u$ . Se  $r > 0$  for tal que  $\overline{B_r(0)} \subset \Omega$ , então para cada  $\varepsilon > 0$  teremos

$$\varepsilon \log \frac{r}{|x|} < u(x) - 1 = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Além disso, se  $|x| \geq r e^{1/\varepsilon}$ ,  $\varepsilon \log \frac{r}{|x|} \leq -1 < u(x) - 1 < 0$ . Conseqüentemente, segue do Princípio do Máximo que

$$\varepsilon \log \frac{r}{|x|} < u(x) - 1 < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega.$$

Fixado  $x \notin \overline{\Omega}$  na estimativa acima e fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , teremos  $u(x) = 1$ , um absurdo.

<sup>(xxiii)</sup>W. Thompson, "Extrait d'une lettre de M. William Thompson à M. Liouville," *J. Math. Pures Appl.* **10** (1845), pp.364–367. In : G. D. Birkhoff, loc cit, pp.362–364.

*Demonstração.* Seja  $v$  a solução do problema de Dirichlet em  $B_r(x_0)$ , com condição de contorno  $u|_{\partial B_r(x_0)}$ . Dessa forma, substituindo  $u$  por  $u - v$ , podemos supor de início  $u|_{\partial B_r(x_0)} \equiv 0$  e, nesse caso, será suficiente mostrarmos que  $u \equiv 0$  em  $\overline{B_r(x_0)} \setminus \{x_0\}$ .

Seja  $M > 0$  tal que  $|u| < M$ . Fixado  $0 < \varepsilon < r$ , teremos<sup>(xxiv)</sup>

$$M \frac{\vartheta(x - x_0)}{\vartheta(\varepsilon)} = M > |u(x)|, \quad \forall x \in \partial B_\varepsilon(x_0)$$

e

$$M \frac{\vartheta(x - x_0)}{\vartheta(\varepsilon)} > 0 = |u(x)|, \quad \forall x \in \partial B_r(x_0).$$

Como a função  $x \mapsto M \frac{\vartheta(x - x_0)}{\vartheta(\varepsilon)}$  é harmônica em  $B_r(x_0) \setminus \overline{B_\varepsilon(x_0)}$ , seguirá do Princípio do Máximo que

$$|u(x)| < M \frac{\vartheta(x - x_0)}{\vartheta(\varepsilon)}, \quad \forall x \in B_r(x_0) \setminus \overline{B_\varepsilon(x_0)}, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (3.12)$$

Finalmente, fixado  $x \in B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ , a desigualdade (3.12) se verifica para todo  $0 < \varepsilon < |x - x_0|$  e, portanto, fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , teremos  $u(x) = 0$ . ■

**PROPOSIÇÃO 3.6 (TRANSFORMAÇÃO DE KELVIN)** *Sejam  $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado e  $\Omega^*$  a reflexão de  $\Omega \setminus \{0\}$  com relação a  $\partial B_1(0)$ <sup>(xxv)</sup>. Dada uma função  $u$  harmônica em  $\Omega^*$  e tal que  $\lim_{|y| \rightarrow \infty} u(y) = 0$ , então*

$$v(x) := \frac{1}{|x|^{n-2}} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \quad (3.13)$$

*define uma função harmônica em  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Vamos mostrar inicialmente que  $v$  é harmônica em  $\Omega \setminus \{0\}$ . Definindo  $y := \frac{x}{|x|^2}$ , se  $x \neq 0$ , virá

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left( \frac{1}{|x|^{n-2}} \right) u(y) + 2 \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{|x|^{n-2}} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} u(y) + \frac{1}{|x|^{n-2}} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} u(y).$$

Portanto, como  $\Delta \frac{1}{|x|^{n-2}} = 0$  e  $\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{|x|^{n-2}} \right) = -(n-2) \frac{x_k}{|x|^n}$ ,

$$\Delta v = -\frac{2(n-2)}{|x|^n} \langle x, \nabla_x u(y) \rangle + \frac{1}{|x|^{n-2}} \Delta_x u(y). \quad (3.14)$$

<sup>(xxiv)</sup> Por abuso de notação, estamos tratando  $\vartheta(\varepsilon)$  como sendo o valor da solução fundamental  $\vartheta$  calculado num ponto de norma  $\varepsilon$ . Além disso, caso  $n = 2$ , podemos supor, sem perda de generalidade, que  $r < 1$ , para garantir  $\vartheta > 0$  no domínio considerado.

<sup>(xxv)</sup> Vid seção 1.3.1.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_k} u(y) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} u(y) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_i} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k^2} \\ &= 2 \sum_{i<j} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_l^2} \left( \frac{\partial y_l}{\partial x_k} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_i} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k^2},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\langle x, \nabla_x u(y) \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle x, \nabla y_i \rangle \frac{\partial u}{\partial y_i}, \\ \Delta_x u(y) &= 2 \sum_{i<j} \langle \nabla y_i, \nabla y_j \rangle \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{l=1}^n |\nabla y_l|^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y_l^2} + \langle \Delta y, \nabla u \rangle.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Mas

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_i}{\partial x_k} &= \frac{\delta_{ik}}{|x|^2} - \frac{2x_i x_k}{|x|^4}, \\ \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k^2} &= -\frac{4x_k}{|x|^4} \delta_{ik} - \frac{2x_i}{|x|^4} + \frac{8x_i x_k^2}{|x|^6}.\end{aligned}$$

Logo,<sup>(xxvi)</sup>

$$\begin{aligned}\langle x, \nabla y_i \rangle &= -\frac{x_i}{|x|^2}, \\ \langle \nabla y_i, \nabla y_j \rangle &= \frac{\delta_{ij}}{|x|^4}, \\ \Delta y &= -2(n-2) \frac{x}{|x|^4},\end{aligned}$$

de onde temos, pela substituição das expressões acima em (3.15),

$$\begin{aligned}\langle x, \nabla_x u(y) \rangle &= -\frac{1}{|x|^2} \langle x, \nabla u \rangle, \\ \Delta_x u(y) &= \frac{1}{|x|^4} \Delta u - \frac{2(n-2)}{|x|^4} \langle x, \nabla u \rangle\end{aligned}$$

e, conseqüentemente, seguirá de (3.14) que

$$\Delta v = \frac{1}{|x|^{n+2}} \Delta u.$$

<sup>(xxvi)</sup> A segunda identidade corresponde ao fato de a reflexão  $x \mapsto \frac{x}{|x|^2}$  ser uma transformação conforme.

Sendo  $u$  uma função harmônica, obtemos finalmente  $\Delta v = 0$  em  $\Omega \setminus \{0\}$ .

Resta demonstrarmos que  $v$  pode ser estendida continuamente a  $0 \in \Omega$  e que a extensão é harmônica nesse ponto. No entanto, como vimos na proposição anterior, será suficiente verificarmos que  $v$  permanece limitada numa vizinhança de  $0$ .

Com efeito, seja  $r > 0$  tal que  $B_r(0) \subset \Omega$ ; logo,  $\mathbb{R}^n \setminus B_{1/r}(0) \subset \Omega^*$ .

Sejam  $M := \max_{y \in \partial B_{1/r}(0)} |u(y)|$  e  $\varepsilon > 0$  arbitrário. Logo,

$$|u(y)| \leq M < M \frac{(1/r)^{n-2}}{|y|^{n-2}} + \varepsilon, \quad \forall y \in \partial B_{1/r}(0).$$

Além disso, como  $\lim_{|y| \rightarrow \infty} u(y) = 0$ , existe  $R > 1/r > 0$  tal que  $|u(y)| < \varepsilon$  se  $|y| \geq R$  e, portanto,

$$|u(y)| \leq \varepsilon < M \frac{(1/r)^{n-2}}{|y|^{n-2}} + \varepsilon, \quad \forall y \in \partial B_{R_1}(0), \quad \forall R_1 \geq R.$$

Assim, segue do Princípio do Máximo que

$$|u(y)| < M \frac{(1/r)^{n-2}}{|y|^{n-2}} + \varepsilon, \quad \text{se } |y| \geq \frac{1}{r}.$$

Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, podemos fazer  $\varepsilon \rightarrow 0$  na expressão acima e teremos

$$|u(y)| \leq M \frac{(1/r)^{n-2}}{|y|^{n-2}}, \quad \text{se } |y| \geq \frac{1}{r}.$$

Portanto, tomando  $y = \frac{x}{|x|^2}$ , onde  $x \in B_r(0)$  e  $x \neq 0$ , obtemos finalmente

$$|v(x)| = \frac{1}{|x|^{n-2}} \left| u \left( \frac{x}{|x|^2} \right) \right| = |y|^{n-2} |u(y)| \leq M \frac{1}{r^{n-2}}.$$

Utilizando a proposição anterior, concluímos que  $v$  pode ser estendida continuamente a  $0$ , e a extensão resultante é harmônica em  $\Omega$ . ■

**§78.** A transformação de Kelvin pode ser imediatamente generalizada por meio de translações e homotetias para o seguinte contexto: consideremos  $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado e definiremos  $\Omega_r^*(x_0)$  como sendo a reflexão de  $\Omega \setminus \{x_0\}$  com relação a  $\partial B_r(x_0)$ , i.e.,  $\Omega_r^*(x_0)$  é a imagem de  $\Omega \setminus \{x_0\}$  por meio da função  $y_r(x) := r^2 \frac{x - x_0}{|x - x_0|^2} + x_0$ . Nesse caso, dada uma função  $u$  harmônica em  $\Omega_r^*(x_0)$  tal que  $\lim_{|y| \rightarrow \infty} u(y) = 0$ , então

$$v_{x_0}(x) := \frac{1}{|x - x_0|^{n-2}} u \left( r^2 \frac{x - x_0}{|x - x_0|^2} + x_0 \right), \quad \forall x \in \Omega \setminus \{x_0\}, \quad (3.16)$$

se estende a uma função harmônica em  $\Omega$ .

Com essa notação, seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  limitado; então, para cada  $x_0 \in \Omega$ , o conjunto  $U_{x_0} := \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega_1^*(x_0)}$  é um aberto limitado e vamos supor que exista um potencial condutor associado a  $U_{x_0}$ , ou seja, que exista uma função  $u_{x_0} \in C(\mathbb{R}^n)$  harmônica em  $\Omega_1^*(x_0)$ , tal que  $u_{x_0} \equiv 1$  sobre  $\partial\Omega_1^*(x_0)$  e  $\lim_{|y| \rightarrow \infty} u_{x_0}(y) = 0$ .

Utilizando (3.16), teremos definido para cada  $x_0 \in \Omega$  uma função  $v_{x_0} \in C(\overline{\Omega})$ , harmônica em  $\Omega$  e, como  $u_{x_0}|_{\partial\Omega_1^*(x_0)} \equiv 1$ , devemos ter  $v_{x_0}(x) = \frac{1}{|x-x_0|^{n-2}}$ , ou seja,  $v$  corresponde, a menos de um fator multiplicativo constante, à parte regular da função de Green.

Assim, o conhecimento dos potenciais condutores nos abertos limitados de  $\mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 3$ , nos permite construir a função de Green associada a um aberto limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .<sup>(xxvii)</sup>

**§79.** Fixemos  $R > 0$  suficientemente grande tal que  $\overline{\Omega} \subset B_R(0)$  e vamos considerar  $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$  como sendo o potencial condutor de  $B_R(0)$ , i.e.,

$$u_0(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B_R(0) \\ \frac{R^{n-2}}{|x|^{n-2}}, & \text{se } x \notin B_R(0) \end{cases}.$$

Seja, ainda,  $B_1, B_2, B_3, \dots$  uma família enumerável de bolas abertas que cobrem  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ .

Vamos construir uma seqüência de funções  $(u_k)_{k \geq 1}$ , de maneira que  $u_1$  seja o rebaixamento harmônico de  $u_0$  em  $B_1$  e, para  $k > 1$ , definiremos  $u_k$  como sendo o rebaixamento harmônico de  $u_{k-1}$  em  $B_j$ , onde  $B_j$  é a  $k$ -ésima bola da seqüência

$$B_1 B_2 B_1 B_2 B_3 B_1 B_2 B_3 B_4 B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 \cdots, \quad (3.17)$$

e cada bola aparece um número infinito de vezes.

Como  $u_0$  é super-harmônica e o rebaixamento harmônico de funções super-harmônicas preserva essa propriedade, seguirá que  $(u_k)_{k \geq 1}$  é uma seqüência de funções super-harmônicas e, além disso, tal seqüência é não-crescente, em outras palavras,

$$u_0(x) \geq u_1(x) \geq u_2(x) \geq u_3(x) \geq \cdots \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}.$$

Seja  $u(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x)$ .

Fixada uma bola  $B := B_j$ , vamos considerar  $\mathbb{N}_j \subset \mathbb{N}$  o conjunto das posições onde  $B$  aparece na seqüência (3.17); assim, se  $k \in \mathbb{N}_j$ , então  $u_k$  é o rebaixamento harmônico de  $u_{k-1}$  sobre  $B$ ; em particular, a função  $u_k$  é harmônica em  $B$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}_j$ .

<sup>(xxvii)</sup>Vid nota (lxiii) do Capítulo 1.

Sendo  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}_j}$  uma seqüência não-crescente de funções harmônicas em  $B$ , segue do Segundo Teorema de Harnack (Corolário 1.14.2) que  $u = \lim_{k \in \mathbb{N}_j} u_k$  é harmônica em  $B$ . Como  $B$  é um elemento arbitrário de nossa família, então  $u$  deve ser harmônica sobre  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ .

Além disso, como  $u_0 \geq u \geq 0$ , então  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$ . Assim, resta analisarmos o comportamento de  $u$  próximo a  $\partial\Omega$ . Para isso, devemos supor que  $\Omega$  satisfaz a condição da esfera interior:

**DEFINIÇÃO**  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  satisfaz a condição da esfera interior (exterior) se, para cada  $z \in \partial\Omega$ , existirem  $z_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $r = r(z_0) > 0$  tais que  $B_r(z_0) \subset \Omega$  ( $B_r(z_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ ) e  $\overline{B_r(z_0)} \cap \partial\Omega = \{z\}$ .

Nesse caso, dado  $z \in \partial\Omega$ , seja  $B_r(z_0) \subset \Omega$  a bola dada pela definição anterior. Como  $\overline{B_r(z_0)} \cap \partial\Omega = \{z\}$ , então utilizando um argumento canônico envolvendo o Princípio do Máximo teremos  $1 \geq u_0(x) \geq \frac{r^{n-2}}{|x - z_0|^{n-2}}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ . Sendo  $x \mapsto \frac{r^{n-2}}{|x - z_0|^{n-2}}$  uma função harmônica em  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ , devemos ter

$$1 \geq u_k(x) \geq \frac{r^{n-2}}{|x - z_0|^{n-2}}, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \forall k \geq 1.$$

Fazendo  $k \rightarrow \infty$  na expressão acima, virá

$$\frac{r^{n-2}}{|x - z_0|^{n-2}} \leq u(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}.$$

Logo,  $\lim_{\substack{x \rightarrow z \\ x \notin \Omega}} u(x) = 1$ .

**§80.** Como pode ser verificado no caso de  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ser um aberto limitado arbitrário, a função  $u$  que acabamos de construir sobre  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  independe da ordem em que realizamos os rebaixamentos harmônicos sobre a seqüência de bolas (3.17), da família de bolas utilizadas para cobrir  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$  e de  $B_R(0) \supset \overline{\Omega}$ . Esses fatos serão deixados para a verificação do leitor por serem um tanto enfadonhos, mas que constituem um exercício bastante elementar de manipulação de seqüências e de funções harmônicas.

Além disso, a mesma construção de uma tal função  $u$  também pode ser realizada para conjuntos limitados quaisquer  $A \subset \mathbb{R}^n$  (uma vez que não utilizamos nenhuma propriedade específica dos abertos para tanto) e, como observamos acima,  $u$  está unicamente determinada em  $\mathbb{R}^n \setminus A$ .

Nesse caso, podemos definir  $u = u_A$  como sendo o *potencial condutor generalizado* de  $A$ , o qual, por construção, satisfaz  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u_A(x) = 0$  e  $0 \leq u_A \leq 1$ ; no entanto, não temos quaisquer informações sobre o que possa ocorrer à função  $u_A$  sobre  $\partial A$ .

O interesse em se estudar tais potenciais condutores generalizados ficará claro na seção 3.5, onde trataremos do problema de construção de barreiras.

§81. Resta ainda uma questão pendente sobre o método de varredura de Poincaré, sobre como utilizá-lo no caso de condições de contorno arbitrárias.

Como já observamos no parágrafo §78., o conhecimento dos potenciais condutores irá garantir a existência da função de Green num aberto limitado  $\Omega$  satisfazendo a condição da esfera exterior. No entanto, já sabemos que a mera existência da função de Green não é suficiente para estabelecer a solubilidade do problema de Dirichlet em uma região.

Para atingirmos esse objetivo, devemos compreender a motivação física que levou Poincaré a propor tal método de varredura, onde ficará claro ainda o porquê de tal nome.

§82. Ao partir da função  $u_0$ , a qual representaria uma distribuição de cargas positivas sobre a esfera  $\partial B_R(0)$ , a seqüência  $(u_k)_{k \geq 1}$  forneceria o potencial resultante devido à mudança na distribuição das cargas causado pelo rebaixamento harmônico realizado na bola  $B_j$  correspondente, o qual, por sua vez, constitui um processo de varrer (ou *balayer*, em francês) as cargas que se localizam no interior de  $B_j$  para a sua superfície (o que torna a função  $u_k$  correspondente harmônica em  $B_j$ ), sem que o potencial se modifique fora de  $B_j$ .

Nesse processo, não haveria o aparecimento de cargas negativas (pois  $u_k \geq 0$ ) e, da forma como o processo é realizado, o potencial é decrescente em  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ . Além disso, ao fazer que as cargas sejam eliminadas de cada uma das bolas um número infinito de vezes, esse processo irá varrer todas as cargas para  $\bar{\Omega}$ , de maneira que a função resultante  $u$  seja harmônica no exterior de uma tal região.

§83. Por meio da interpretação física acima, uma primeira tentativa de se estender o método de varredura para um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  (onde nesse caso já podemos supor  $n \geq 2$ ), consiste em admitir que  $f \in C(\partial\Omega)$  seja uma função não-negativa e que possa ser estendida a uma função  $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  super-harmônica a qual, nessas condições, deve satisfazer  $-\Delta u_0 \geq 0$  e, pela equação de Poisson, isso significa que  $u_0$  seria o potencial gerado por uma distribuição de cargas com densidade positiva  $-\Delta u_0$ .

Adaptando a demonstração no caso do potencial condutor para esse contexto, é possível construir uma função  $u$  harmônica em  $\Omega$  e, utilizando-se a mesma demonstração da Proposição 3.7 (que será vista na seção 3.5 sob um contexto mais apropriado), verifica-se que  $u \rightarrow f$  sobre  $\partial\Omega$  quando  $\Omega$  satisfaz a propriedade da esfera exterior.

Caso tal função  $f \in C(\partial\Omega)$  não seja não-negativa, tomamos  $m := \min_{\partial\Omega} f < 0$  e aplicamos o resultado a  $f - m \geq 0$ .

Se  $f \in C(\partial\Omega)$  puder ser estendida a uma função  $u_0 \in C^2(\bar{\Omega})$ , não necessariamente super-

harmônica, definimos  $\alpha := \frac{1}{2n} \max_{\bar{\Omega}} \Delta u_0$  e escrevemos  $u_0 = (u_0 - \alpha|x|^2) + \alpha|x|^2$ . Aplicando o resultado acima separadamente a  $(u_0 - \alpha|x|^2)$  e a  $(-\alpha|x|^2)$ , que nesse caso são super-harmônicas, também podemos resolver o problema para uma tal função  $f$ .

Finalmente, tomando agora  $f \in C(\partial\Omega)$  totalmente arbitrária, utilizamos o Teorema de Tietze para estendê-la a uma função  $\tilde{f} \in C(\bar{\Omega})$ . Pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass,  $\tilde{f}$  pode ser aproximada uniformemente por funções polinomiais em  $x$ , a partir das quais podemos resolver o problema de Dirichlet, como já observamos acima. Utilizando o Princípio do Máximo e o Primeiro Teorema de Harnack, é possível verificar que as soluções associadas a tais polinômios deverão convergir para uma solução do problema de Dirichlet com condição de contorno  $f$ , no caso em que  $\Omega$  satisfizer a condição da esfera exterior.

§84. Assim, muito embora o método de Poincaré resolva o problema de Dirichlet para uma classe suficientemente ampla de regiões limitadas em  $\mathbb{R}^n$ , para  $n \geq 2$ , ele possui o inconveniente de não se aplicar diretamente a condições de contorno  $f \in C(\partial\Omega)$ .

Contudo, estavam apontadas as direções que deveria seguir a Teoria do Potencial, uma vez que as idéias onde esta se apoiaria no século 20 já fermentavam no trabalho de Poincaré pela utilização de funções super-harmônicas (ou sub-harmônicas), que corresponderia a uma distribuição positiva de cargas no espaço; além disso, já se esboçava aqui uma certa tendência de divisão do problema de Dirichlet em duas partes: a resolução do problema em  $\Omega$  e o estudo do comportamento das soluções próximo a  $\partial\Omega$ .

Tais elementos seriam decisivos nas tentativas subseqüentes de se estender os resultados obtidos por Poincaré.

### 3.4 Crise no problema de Dirichlet: os exemplos de Zaremba e Lebesgue

§85. Muito embora os trabalhos de Poincaré no final do século 19 tenham dado um grande impulso ao estudo do problema de Dirichlet, este resistia bravamente às tentativas posteriores de resolvê-lo completamente, i.e., de se demonstrar que a equação de Laplace, sujeita a condições de contorno contínuas, sempre teria solução para qualquer aberto limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

Como observa Kellogg<sup>(xxviii)</sup>, até o início do século acreditava-se que esse objetivo não era atingido pelas limitações inerentes que cada demonstração impunha à solubilidade do problema. No entanto, num artigo publicado em 1911<sup>(xxix)</sup>, Zaremba iria apresentar um exemplo bastante elementar sobre a não-existência de solução do problema de Dirichlet.

§86. Tomando  $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$  e  $f(x) = 0$ , se  $x \in \partial B_1(0)$ , e  $f(0) = 1$ , resulta que o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

não admite uma solução  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

Com efeito, se existisse uma tal solução seguir-se-ia do Princípio da Singularidade Removível que  $u$  deveria ser harmônica em  $B_1(0)$ , mas cujo máximo seria atingido no interior dessa região, o que é um absurdo.

Devemos reconhecer que o exemplo de Zaremba não é muito interessante, por se tratar de uma região com um ponto isolado. Em 1913, Henri Léon Lebesgue<sup>(xxx)</sup> (1875-1941) iria apresentar um exemplo bem mais surpreendente sobre a não-solubilidade do problema de Dirichlet em  $\mathbb{R}^3$ , para uma região homeomorfa à bola.

§87. Consideremos uma barra  $L$  de comprimento 1 em  $\mathbb{R}^3$  posicionada sobre o semi-eixo  $x$  positivo, com uma das extremidades na origem, e com uma densidade linear (de massas)  $\lambda$  dada por  $\lambda(x) = x_1$ .

Nesse caso, o potencial gravitacional resultante num ponto  $x \in L$  será (figura 3.3):

$$u(x) = \int_0^1 \frac{s \, ds}{\sqrt{(x_1 - s)^2 + \rho^2}}, \quad (3.18)$$

onde  $\rho := \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$ . Supondo, ainda,  $\rho \neq 0$ , teremos:

$$u(x) = x_1 \int_{x_1-1}^{x_1} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \rho^2}} - \int_{x_1-1}^{x_1} \frac{t \, dt}{\sqrt{t^2 + \rho^2}} =: x_1 A - B. \quad (3.19)$$

Fazendo a mudança de coordenadas  $t = \rho \sinh \xi$  na integral  $A$ , virá

<sup>(xxviii)</sup>Cf. O. D. Kellogg, [38], p.285.

<sup>(xxix)</sup>Zaremba, *Acta Math.* **34** (1911), pp.293-316. Apud O. D. Kellogg, loc cit.

<sup>(xxx)</sup>H. L. Lebesgue, [43].



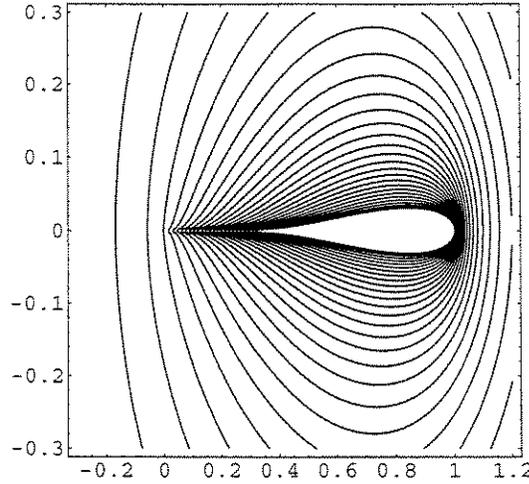


Figura 3.3: Curvas de nível do potencial gravitacional  $u$  gerado por  $L$

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{x_1-1}^{x_1} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \rho^2}} = \operatorname{arsenh} \left( \frac{x_1}{\rho} \right) + \operatorname{arsenh} \left( \frac{1-x_1}{\rho} \right) \\
 &= \log \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 + \rho^2}}{\rho} + \log \frac{(1-x_1) + \sqrt{(1-x_1)^2 + \rho^2}}{\rho} \\
 &= -2 \log \rho + \log \left[ \left( x_1 + \sqrt{x_1^2 + \rho^2} \right) \left( 1-x_1 + \sqrt{(1-x_1)^2 + \rho^2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Por outro lado, por integração direta,

$$B = \sqrt{x_1^2 + \rho^2} - \sqrt{(1-x_1)^2 + \rho^2}.$$

Logo, a expressão (3.19) pode ser reescrita explicitamente como

$$\begin{aligned}
 u(x) &= -2x_1 \log \rho + x_1 \log \left[ \left( x_1 + \sqrt{x_1^2 + \rho^2} \right) \left( 1-x_1 + \sqrt{(1-x_1)^2 + \rho^2} \right) \right] + \\
 &\quad - \left\{ \sqrt{x_1^2 + \rho^2} - \sqrt{(1-x_1)^2 + \rho^2} \right\},
 \end{aligned}$$

quando  $\rho \neq 0$ . Se  $\rho = 0$ , segue diretamente de (3.18) que

$$u(x) = u(x_1, 0, 0) = \begin{cases} x_1 \log \frac{x_1}{x_1-1} - 1, & \text{se } x_1 > 1 \\ -x_1 \log \frac{x_1}{x_1-1} + 1, & \text{se } x_1 < 0 \end{cases}.$$

Nosso objetivo será estudar o comportamento do potencial  $u$  numa vizinhança de 0. Para

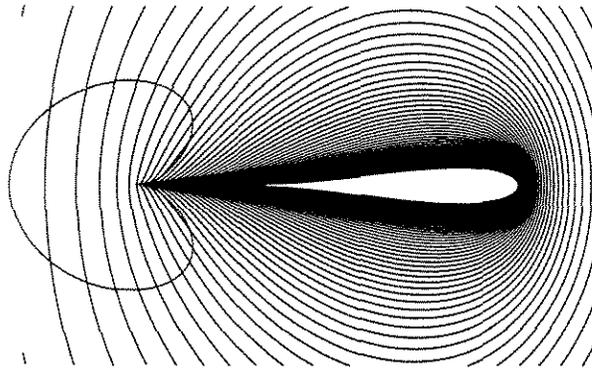


Figura 3.4: Curvas de nível de  $u$  em  $\Omega$  no plano  $x_1x_2$

tanto, observemos que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \notin L}} x_1 \log \left[ \left( x_1 + \sqrt{x_1^2 + \rho^2} \right) \left( 1 - x_1 + \sqrt{(1 - x_1)^2 + \rho^2} \right) \right] = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \notin L}} \left\{ \sqrt{x_1^2 + \rho^2} - \sqrt{(1 - x_1)^2 + \rho^2} \right\} = -1.$$

Dessa forma, se aproximarmos de 0 ao longo das superfícies da forma  $\rho = x_1^k$ , segue da expressão de  $u$  que  $u(x) \rightarrow 1$  quando  $x \rightarrow 0$ . No entanto, fazendo  $x \rightarrow 0$  ao longo das superfícies  $\rho = e^{-\frac{\alpha}{2x_1}}$ , onde  $\alpha > 0$ , então  $u(x) \rightarrow 1 + \alpha$ , ou seja,  $u$  não é contínua em 0. Além disso, sabemos da representação integral (3.18) que  $u$  é contínua em  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{L}$ .

§88. Consideremos uma curva  $\Gamma$  no plano  $x_1x_2$ , simétrica com relação ao eixo  $x_1$ , que tenha a mesma forma da curva fechada semelhante a um cardióide na Figura 3.4, de maneira que, próxima à origem, seja dada pela curva  $x_2 = \pm e^{-\frac{1}{x_1}}$ .

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  o conjunto aberto, limitado pela superfície gerada pela rotação de  $\Gamma$  em torno do eixo  $x_1$ .

Da maneira pela qual construímos  $\Omega$ , é imediato observar que  $u|_{\Omega}$  é harmônica, mas  $u$  não é contínua em  $\bar{\Omega}$ , muito embora  $u|_{\partial\Omega}$  defina uma função contínua em  $\partial\Omega$  e que, em particular,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \partial\Omega}} u(x) = 3.$$

Afirmamos que o problema de Dirichlet não admite solução em  $\Omega$ , com condição de contorno  $u|_{\partial\Omega}$ .

Com efeito, suponhamos que existisse uma função  $v \in C(\bar{\Omega})$ , harmônica em  $\Omega$  e que coincidissemos

com  $u$  sobre  $\partial\Omega$ . Nesse caso,  $u - v$  deve ser harmônica em  $\Omega$  e nula sobre  $\partial\Omega$  (embora tal função não seja contínua em  $\bar{\Omega}$ , em virtude da descontinuidade de  $u$  em  $0$ ).

Utilizando um argumento semelhante ao que fizemos no caso do Princípio da Singularidade Removível, neste caso aplicado em  $0$ , o leitor poderá verificar sem maiores dificuldades que  $v = u$  em  $\Omega$ , o que é uma contradição, pois  $u$  não está definida continuamente em  $\bar{\Omega}$ .

§89. Com respeito ao título desta seção, o leitor deve tê-lo achado um tanto exagerado e, quanto a isso, devo concordar, e tenho por justificativa o fato de não haver encontrado outro melhor.

De qualquer maneira, os exemplos que apresentamos acima modificaram consideravelmente as formas de abordagem do problema de Dirichlet, na tentativa de se determinar um critério que permitisse garantir não apenas a sua solubilidade, mas também agora sua não-solubilidade.

### 3.5 O método das funções sub-harmônicas de Perron

§90. Na década de 1920, a verdadeira natureza do problema de Dirichlet para a equação de Laplace seria revelada, quando verificou-se que a possibilidade ou não de sua resolução não dependia do domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  considerado, mas apenas do comportamento local de cada um dos pontos de  $\partial\Omega$ , num sentido que ficará claro mais adiante.

Dentre os inúmeros matemáticos que trataram desse assunto no início do século, podemos destacar O. Perron, H. L. Lebesgue, G. Bouligand e N. Wiener.

§91. Fixemos  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado qualquer e seja  $f \in C(\partial\Omega)$ . Definiremos a seguinte família de funções em  $C(\bar{\Omega})$ :<sup>(xxxix)</sup>

$$\mathcal{A}_f := \{v \in C(\bar{\Omega}) : v \text{ é sub-harmônica e } v \leq f \text{ sobre } \partial\Omega\};$$

em outras palavras,  $\mathcal{A}_f$  é a família das subsoluções do problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.20)$$

Como  $f$  é limitada inferiormente, a função constante em  $\bar{\Omega}$  dada por  $\min_{\partial\Omega} f$  é um elemento de  $\mathcal{A}_f$  e, portanto,  $\mathcal{A}_f \neq \emptyset$ . Observamos, ainda, que se  $u$  for uma solução de (3.20), então  $u \in \mathcal{A}_f$  e,

<sup>(xxxix)</sup>O. Perron, "Eine neue Behandlung der Randwertaufgabe für  $\Delta u = 0$ ", *Math. Z.* **18** (1923), pp.42-54. Apud E. DiBenedetto, [15], p.72.

pelo Princípio do Máximo, devemos ter  $v \leq u$ ,  $\forall v \in \mathcal{A}_f$ , ou seja,

$$u(x) = \sup_{v \in \mathcal{A}_f} v(x), \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.21)$$

Além disso, como  $v \leq \sup_{\partial\Omega} f$ ,  $\forall v \in \mathcal{A}_f$ , então a expressão acima está bem definida mesmo no caso em que uma tal solução não exista. Nessas condições, diremos que  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por (3.21), é uma solução generalizada do problema de Dirichlet.

**§92.** Em virtude dos comentários acima, caso estejamos interessados em verificar a solubilidade de (3.20) em uma dada região  $\Omega$ , então  $u$  dada por (3.21) será nossa candidata natural a satisfazer tal problema.

A primeira pergunta que surge é como tirar proveito da representação (3.21); pois, em princípio, não sabemos nem mesmo se  $u \in C(\Omega)$ .

O fato surpreendente nesse caso é que não apenas  $u \in C(\Omega)$ , mas também  $u$  é harmônica em  $\Omega^{(xxxii)}$ . Assim, todo nosso trabalho se resume a mostrar que  $u$  se estende continuamente a  $\partial\Omega$ , onde irá coincidir com  $f$ ; ou seja, devemos verificar se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = f(x_0), \quad \forall x_0 \in \partial\Omega.$$

**§93.** Um aparato bastante útil para estudar o comportamento de  $u$  próximo a  $\partial\Omega$  é a noção de barreira que, muito embora tivesse sido utilizada implicitamente por Poincaré, sua importância seria reconhecida por Lebesgue em 1912, quem lhe conferiu esse nome e estendeu tal conceito<sup>(xxxiii)</sup>:

**DEFINIÇÃO** Uma função  $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma barreira em  $x_0 \in \partial\Omega$  com respeito a  $\Omega$  se  $\varphi$  for super-harmônica,  $\varphi(x_0) = 0$  e  $\varphi(x) > 0$ , se  $x \neq x_0$ .

Muito embora tal propriedade diga respeito a um comportamento global de  $\varphi$  com respeito a  $\Omega$ , G. Bouligand observou que a existência de barreiras em um ponto  $x_0$  depende unicamente do comportamento de  $\partial\Omega$  numa vizinhança desse ponto; mais precisamente, suponhamos que  $\varphi$  seja uma barreira (local) em  $x_0$  com respeito ao conjunto  $\Omega \cap B_r(x_0)$ , para algum  $r > 0$  suficientemente pequeno. Denotando por  $A := B_r(x_0) \setminus B_{r/2}(x_0)$  e  $\alpha := \inf_A \varphi > 0$ , definiremos  $\bar{\varphi} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  como

<sup>(xxxii)</sup>Embora esse fato seja de fácil verificação, não o demonstraremos aqui. Cf. D. Gilbarg e N. S. Trudinger, [32], pp.24–25; E. DiBenedetto, op cit, pp.73–74.

<sup>(xxxiii)</sup>H. L. Lebesgue, "Sur le problème de Dirichlet," *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 154 (1912), p.335. Apud O. D. Kellogg, op cit, p.327.

sendo

$$\bar{\varphi}(x) := \begin{cases} \min \{ \varphi(x), \alpha \}, & \text{se } x \in \Omega \cap B_r(x_0) \\ \alpha, & \text{se } x \in \bar{\Omega} \setminus B_r(x_0) \end{cases}.$$

Nesse caso,  $\bar{\varphi}(x_0) = 0$ ,  $\bar{\varphi}(x) > 0$ , se  $x \neq x_0$  e, além disso, o leitor não terá dificuldades em verificar que tal função é super-harmônica. Portanto,  $\bar{\varphi}$  é uma barreira em  $x_0$  com respeito a todo o conjunto  $\Omega$ .

A seguinte definição será bastante pertinente na seqüência:

**DEFINIÇÃO** Diremos que um ponto  $x_0 \in \partial\Omega$  é regular caso exista uma barreira local nesse ponto com respeito a  $\Omega$ .

§94. Passemos a alguns exemplos dos conceitos definidos acima:

**EXEMPLO 3.1** Suponhamos  $n = 2$  e que exista um caminho  $\gamma$  não-constante em  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$  partindo de  $z_0 \in \partial\Omega$ ; nessas condições, é possível definir um ramo da função log numa vizinhança de  $z_0$ , da qual excluimos  $\gamma$ . Assim,

$$\varphi(z) := -\operatorname{Re} \frac{1}{\log z} = -\frac{\log r}{\log^2 r + \theta^2}$$

irá definir uma barreira local em  $z_0$  e, portanto,  $z_0$  é um ponto regular de  $\partial\Omega$ . ■

**EXEMPLO 3.2** Caso  $n \geq 3$ , a situação é bem mais delicada. Com efeito, suponhamos que  $x_0 \in \partial\Omega$  satisfaça a condição da esfera exterior, i.e. que existam  $r > 0$  e  $y \notin \bar{\Omega}$  tais que  $\overline{B_r(y)} \cap \bar{\Omega} = \{x_0\}$ . Nesse caso,

$$\varphi(x) := 1 - \frac{r^{n-2}}{|x - x_0|^{n-2}}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

define uma barreira em  $x_0$ . Portanto, todos os pontos que satisfazem a propriedade da esfera exterior são regulares. ■

**EXEMPLO 3.3** Finalmente, se  $n \geq 2$  e o problema de Dirichlet sempre admitir solução em  $\Omega$ , então todos os pontos de  $\partial\Omega$  são regulares. De fato, se  $x_0 \in \partial\Omega$ , então a solução do problema de Dirichlet com condição de contorno  $f(x) := |x - x_0|$  será uma barreira em  $x_0$  em virtude do Princípio do Máximo. ■

§95. Vejamos agora como o conhecimento dos pontos regulares de  $\partial\Omega$  pode nos ser útil.

Para isso, tomamos  $\varepsilon > 0$  fixado e, como  $f$  é contínua em  $\partial\Omega$ , existe  $\delta > 0$  tal que tal que  $|x - x_0| < \delta$  implica  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ; além disso, o quociente  $\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|}$  é limitado por uma constante  $M > 0$  em  $\partial\Omega \setminus B_\delta(x_0)$ , ou seja,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|, \text{ se } |x - x_0| \geq \delta.$$

Se  $x_0$  for regular, então existe uma barreira  $\varphi$  nesse ponto. Sendo  $\varphi$  positiva no compacto  $\overline{\Omega} \setminus B_\delta(x_0)$ , deve haver uma constante  $b > 0$  tal que

$$\frac{\varphi(x)}{|x - x_0|} \geq b, \text{ se } x \in \overline{\Omega} \setminus B_\delta(x_0),$$

de onde temos

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0| \leq \frac{M}{b}\varphi(x), \text{ se } x \in \overline{\Omega} \setminus B_\delta(x_0). \quad (3.22)$$

Finalmente, irá seguir de (3.22) e da continuidade de  $f$  que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon + \frac{M}{b}\varphi(x), \forall x \in \partial\Omega. \quad (3.23)$$

Sejam

$$\begin{aligned} v(x) &:= f(x_0) - \varepsilon - \frac{M}{b}\varphi(x), \\ w(x) &:= f(x_0) + \varepsilon + \frac{M}{b}\varphi(x). \end{aligned}$$

Segue de (3.23) que  $v \leq f \leq w$  sobre  $\partial\Omega$ . Agora, como  $v$  é sub-harmônica,  $v \in \mathcal{A}_f$ ; além disso, sendo  $w$  uma função super-harmônica, então  $w$  é maior que ou igual a todo elemento de  $\mathcal{A}_f$ . Conseqüentemente,

$$v(x) \leq u(x) \leq w(x), \forall x \in \Omega.$$

Fazendo  $x \rightarrow x_0$ , teremos

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} u(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} u(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

e, sendo  $\varepsilon > 0$  arbitrário, concluímos que  $u(x) \rightarrow u(x_0)$  quando  $x \rightarrow x_0$ . ■

Podemos resumir tal resultado na seguinte proposição:

**PROPOSIÇÃO 3.7** *Se  $x_0 \in \partial\Omega$  for um ponto regular, então  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u(x_0)$ .*

Em outras palavras,  $u$  assume os valores de contorno nos pontos regulares de  $\partial\Omega$ . Além disso, segue da proposição acima e do Exemplo 3.3 o seguinte teorema:

**TEOREMA 3.8** *O problema de Dirichlet (3.20) possui uma solução para toda condição de contorno contínua se, e somente se, todos os pontos de  $\partial\Omega$  forem regulares.*

§96. Dessa forma, a solubilidade do problema de Dirichlet irá depender apenas do comportamento local de cada um dos pontos de  $\partial\Omega$ , e não das condições de contorno dadas. Fica a questão de se determinar a possibilidade de construção de barreiras locais em  $\partial\Omega$ .

Em 1924, N. Wiener publicou um artigo<sup>(xxxiv)</sup> onde a construção de barreiras era transformada num problema de estimativa para uma certa série.

Antes de apresentarmos o resultado de Wiener, precisamos definir a noção de capacidade de um conjunto:<sup>(xxxv)</sup>

**DEFINIÇÃO** *Sejam  $n \geq 3$  e  $A \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto limitado. Denotando por  $u_A$  o potencial condutor generalizado de  $A$ , então a capacidade de  $A$  será*

$$\text{Cap } A := -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_{\Sigma} \frac{\partial u_A}{\partial \nu} d\sigma,$$

onde  $\sigma$  é uma superfície fechada e suave envolvendo  $\bar{A}$ .

**OBSERVAÇÃO 7** Segue da segunda identidade de Green e da harmonicidade de  $u_A$  em  $\Omega \setminus \bar{A}$  que  $\text{Cap } A$  independe da superfície  $\Sigma$  considerada. Além disso,  $\text{Cap } A$  corresponde fisicamente à quantidade total de carga em  $A$  necessária para gerar o potencial condutor  $u_A$ .

A constante de normalização em  $\text{Cap } A$  é escolhida para que se tenha  $\text{Cap } B_1(0) = 1$ , conforme podemos verificar no exemplo abaixo:

**EXEMPLO 3.4** Conforme vimos na seção 3.3, o potencial condutor de  $A := B_r(0)$  é dado por

$$u_A(x) = \begin{cases} \frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}}, & \text{se } |x| \geq r \\ 1, & \text{se } |x| < r \end{cases}. \quad (3.24)$$

<sup>(xxxiv)</sup>N. Wiener, *Journal of Mathematics and Physics of the Massachusetts Institute of Technology* **3** (1924), p.49, p.127.

<sup>(xxxv)</sup>O leitor poderá encontrar em E. H. Lieb e M. Loss, [44], pp.253–261, algumas caracterizações bastante interessantes da noção de capacidade.

Logo, tomando  $\Sigma := \partial B_R(0)$ , onde  $R > r$ , teremos

$$\text{Cap } B_r(0) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} \int_{\partial B_R(0)} \left[ -(n-2) \frac{r^{n-2}}{|x|^{n-1}} \right] d\sigma = r^{n-2}.$$

Se tomarmos  $A := \partial B_r(0)$ , então o potencial condutor de  $A$  também será dado por (3.24) e, portanto,  $\text{Cap } \partial B_r(0) = r^{n-2}$ , o que não é nenhuma novidade do ponto de vista físico, uma vez que as cargas de um condutor tendem a se concentrar em sua superfície. ■

§97. Fixados  $0 < \lambda < 1$  e  $x_0 \in \partial\Omega$ , seja  $A_k$  a região exterior a  $\Omega$  compreendida entre  $\partial B_{\lambda^k}(x_0)$  e  $\partial B_{\lambda^{k+1}}(x_0)$ , ou seja,  $A_k := B_{\lambda^k}(x_0) \setminus (\Omega \cup B_{\lambda^{k+1}}(x_0))$  e escreveremos  $\gamma_k := \text{Cap } A_k$ .

Com essa notação, temos<sup>(xxxvi)</sup>

TEOREMA 3.9 (CRITÉRIO DE WIENER)  $x_0 \in \partial\Omega$  é regular se, e somente se, a série

$$\frac{\gamma_1}{\lambda} + \frac{\gamma_2}{\lambda^2} + \frac{\gamma_3}{\lambda^3} + \frac{\gamma_4}{\lambda^4} + \dots \quad (3.25)$$

*diverge.* ■

Sem dúvida alguma, o critério acima é interessante; no entanto, nos deparamos com o pequeno detalhe técnico sobre como obter estimativas para os coeficientes  $\gamma_k$ . Realmente essa não é uma tarefa das mais simples, por envolver alguns cálculos um tanto laboriosos o que, evidentemente, foge bastante dos objetivos desta monografia.

De qualquer forma, podemos apresentar alguns exemplos interessantes (e nada óbvios) sobre a aplicabilidade do Critério de Wiener<sup>(xxxvii)</sup>:

EXEMPLO 3.5 Pelo exemplo de Lebesgue, sabemos que a cúspide formada pela rotação da curva  $y = e^{-1/x}$ ,  $x \geq 0$ , em torno do eixo  $x$  não será um ponto regular. Contudo, esse exemplo é o melhor possível, pois, como observou G. Bouligand, caso tal cúspide fosse dada pela rotação de  $y = x^m$ ,  $x \geq 0$ , com  $m \geq 1$ , então pelo Critério de Wiener é possível demonstrar que a origem é, de fato, um ponto regular. ■

<sup>(xxxvi)</sup> Cf. O. D. Kellogg, op cit, pp.330-334.

<sup>(xxxvii)</sup> Cf. O. D. Kellogg, op cit, p.334.

§98. A partir da década de 1920, a Teoria do Potencial vivenciaria uma mudança de orientação, aproximando-se de conceitos envolvendo a noção de medida da Teoria da Integral de Lebesgue e, a partir da década de 1950, aproveitando-se da Teoria das Distribuições de Laurent Schwarz. O leitor poderá consultar a referência [6] que fornece uma descrição bastante interessante do desenvolvimento da Teoria do Potencial nesse século.

Com respeito ao método de Perron, ele se estende com as devidas modificações no caso da equação  $Lu = f$ , onde  $L$  é um operador fortemente elíptico com coeficientes regulares<sup>(xxxviii)</sup>.

§99. Após tantos métodos, atingia-se um grau bastante satisfatório de resolução do problema de Dirichlet já por volta de 1920. O Princípio de Dirichlet, também, voltara a correr pelos belos campos da Matemática: ele não havia morrido como proclamara Neumann, mas iria permanecer a partir de 1870 apenas adormecido, aguardando que alguém o resgatasse das trevas em que fora lançado por Weierstrass.

---

<sup>(xxxviii)</sup>Cf. D. Gilbarg e N. S. Trudinger, [32], pp.102–106.

## Parte II

# O Nascimento da Teoria Variacional Moderna

*“Eine jede reguläre Aufgabe der Variationsrechnung besitzt eine Lösung,  
sobald hinsichtlich der Natur der gegebenen  
Grenzbedingungen geeignete einschränkende Annahmen erfüllt sind und  
nötigenfalls der Begriff der Lösung eine sinngemäße Erweiterung erfährt.”*

(David Hilbert)

[Todo problema do Cálculo das Variações tem uma solução,  
contanto que restrições próprias à natureza  
das condições de contorno sejam satisfeitas e,  
sendo necessário, o conceito de solução seja devidamente estendido.]

## Capítulo 4

# A ressurreição do Princípio de Dirichlet

§100. As críticas de Weierstrass sobre a falta de rigor que envolvia o Princípio de Dirichlet até 1870 colocaram-no como objeto de interesse apenas histórico. Além disso, a impossibilidade de se encontrar um tratamento mais rigoroso para essa formulação variacional nos quase 30 anos que se seguiriam parecia determinar o fim de um poderoso recurso que fora aplicado de forma belíssima a tantas áreas da Matemática.

Num artigo de apenas cinco páginas publicado em 1900<sup>(i)</sup>, David Hilbert (1862-1943) se propõe a reviver o Princípio de Dirichlet, apresentando um novo método de abordagem a problemas variacionais, utilizando-se das chamadas seqüências minimizantes para encontrar a solução desejada.

Hilbert ressalta que essa nova técnica, além de sua simplicidade e transparência, tem a vantagem de envolver apenas a propriedade de minimização, sem recorrer à natureza do problema. No entanto, apenas um esboço do que seria uma demonstração para o Princípio de Dirichlet, além de uma aplicação do mesmo recurso ao problema de minimização de curvas sobre superfícies, podem ser encontrados em seu artigo original. Suas idéias seriam exploradas mais detalhadamente num trabalho publicado em 1904<sup>(ii)</sup>.

---

<sup>(i)</sup>D. Hilbert, “Ueber das Dirichlet’sche Prinzip”, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein* 8 (1900), pp.184–188. In : G. D. Birkhoff, [5], pp.399–402.

<sup>(ii)</sup>D. Hilbert, “Über das Dirichletsche Prinzip”, *Math. Ann.* 59 (1904), pp.161-186.

**§103.** A primeira questão com a qual nos deparamos é com a escolha da classe de funções admissíveis:

**DEFINIÇÃO** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Vamos denotar por  $\mathcal{A}$  o subespaço de  $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  formado pelas funções  $v$  tais que  $|\nabla v| \in L^2(\Omega)$ . Além disso, se  $v|_{\partial\Omega} \equiv 0$ , então escreveremos  $v \in \mathcal{A}_0$ .

Vamos admitir que  $f$  possua uma extensão contínua em  $\Omega$  e que esteja em  $\mathcal{A}$ , o que irá garantir que o conjunto das funções admissíveis para o problema variacional de determinar a existência de mínimo para a integral

$$\mathcal{I}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad u - f \in \mathcal{A}_0, \quad (4.1)$$

seja não-vazio. Fixemos uma tal extensão, que também será indicada por  $f$ . Suponhamos, ainda, que  $\partial\Omega$  seja uma curva simples e fechada<sup>(vi)</sup>.

**§104.** Seja  $(u_k)_{k \geq 1}$  uma seqüência minimizante de (4.1) satisfazendo  $u_k|_{\partial\Omega} = f$ , para todo  $n \geq 1$ , e denotaremos por  $m$  o ínfimo de (4.1).

Fixado  $r > 0$ , podemos definir

$$v_k^r(x) := \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(x)} u_k dy, \quad \forall x \in \Omega_r. \quad (4.2)$$

Além disso, dados  $u, v \in \mathcal{A}$ , segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que a seguinte forma bilinear está bem definida

$$\mathcal{I}(u, v) := \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dy.$$

**§105.** Nosso objetivo será mostrar que a seqüência  $(v_k^r)_{k \geq 1}$  converge uniformemente em  $\Omega_r$ , o que será feito a partir de uma série de proposições bastante elementares.

**PROPOSIÇÃO 4.1** *Seja  $(\varphi_k)_{k \geq 1}$  uma família de funções em  $\mathcal{A}_0$  tal que  $\mathcal{I}(\varphi_k) < M, \forall k \geq 1$ . Logo,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}(u_k, \varphi_k) = 0$ .*

*Demonstração.* Para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $u_k + t\varphi_k$  é uma função admissível e, portanto,

$$\mathcal{I}(u_k + t\varphi_k) = \mathcal{I}(u_k) + 2t\mathcal{I}(u_k, \varphi_k) + t^2\mathcal{I}(\varphi_k) \geq m, \quad \forall k \geq 1.$$

<sup>(vi)</sup>Na verdade, o leitor poderá verificar facilmente que a demonstração se aplica sem modificações quando  $\partial\Omega$  satisfaz a seguinte propriedade:

$\forall x \in \partial\Omega$ , existe  $R > 0$  tal que  $\partial B_r(x) \cap \partial\Omega \neq \emptyset, \forall r \leq R$ .

Inclui-se neste caso, por exemplo, o disco  $B_1(0)$ , do qual se exclui um de seus raios.

Seguirá da desigualdade de Schwarz que

$$v^2(x) \leq 2L \int_{\ell_x} \left( \frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 ds \leq 2L \int_{-L}^L \left( \frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 \leq 2L \int_{-L}^L |\nabla v|^2 dx_1.$$

Nesse caso, podemos integrar ambos os membros da desigualdade acima na variável  $x_2$ , obtendo

$$\int_{-L}^L v^2(x) dx_2 \leq 2L \int_Q |\nabla v|^2 dx = 2L \mathcal{I}(v).$$

Integrando uma última vez ambos os membros na variável  $x_1$ , entre  $-L$  e  $L$ , teremos a desigualdade desejada, com  $C := 4L^2$ . ■

Agora, utilizando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Poincaré, teremos

$$\begin{aligned} |v_i^r(x) - v_j^r(x)|^2 &= \left| \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(x)} (u_i - u_j) dy \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(x)} (u_i - u_j)^2 dy \\ &\leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{\Omega} (u_i - u_j)^2 dy \leq \frac{C}{\pi r^2} \mathcal{I}(u_i - u_j), \forall x \in \Omega_r. \end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos do Corolário 4.1.1 que  $\lim_{i,j \rightarrow \infty} \mathcal{I}(u_i - u_j) = 0$ . Conseqüentemente,  $(v_k^r)_{k \geq 1}$  é uma seqüência de Cauchy, com relação à norma do supremo, sobre  $\Omega_r$ . Nesse caso, podemos definir

$$u^r(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} v_k^r(x), \forall x \in \Omega_r.$$

Em particular,  $u^r$  é contínua em  $\Omega_r$ .

**§106.** Um fato notável que ocorre às funções  $u^r$  que acabamos de construir é que elas independem do parâmetro  $r$  utilizado. Mais precisamente, se  $r_1 < r_2$ , então  $u^{r_1} = u^{r_2}$  sobre  $\Omega_{r_2}$ . Com efeito, se definirmos

$$\psi_r(x) := \begin{cases} \log \frac{|x|}{r} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{|x|^2}{r^2} \right), & \text{se } |x| \leq r \\ 0, & \text{se } |x| > r \end{cases},$$

teremos

$$\frac{\partial \psi_r}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} \left( \frac{1}{|x|^2} - \frac{1}{r^2} \right) x_i, & \text{se } |x| \leq r \\ 0, & \text{se } |x| > r \end{cases}.$$

Considerando  $x_0 \in \Omega_r$  e  $\tau_{x_0}(x) := x - x_0$  como sendo a translação de  $x_0$ , então  $\psi_r \circ \tau_{x_0} \notin \mathcal{A}$ , pois tal função não é contínua em  $x_0$ . No entanto, se  $r_1 \leq r_2$ , devemos ter  $(\psi_{r_1} - \psi_{r_2}) \circ \tau_{x_0} \in \mathcal{A}_0$ .

§108. Devemos verificar que nossa função  $u \in C^1(\Omega)$  satisfaz as condições de contorno desejadas, ou seja,  $u$  se estende continuamente a  $\partial\Omega$ , onde deve coincidir com  $f$ .

Sejam  $\bar{x} \in \partial\Omega$  e  $\delta > 0$  fixados. Vamos considerar a integral de Dirichlet definida apenas numa vizinhança de  $\bar{x}$ :

$$\mathcal{I}_\delta(v) := \int_{\Lambda_\delta(\bar{x})} |\nabla v|^2 dx,$$

onde  $\Lambda_\delta(\bar{x}) := B_\delta(\bar{x}) \cap \Omega$ .

Com relação a  $\mathcal{I}_\delta$ , a seguinte versão local da desigualdade de Poincaré se verifica:

PROPOSIÇÃO 4.3

$$\|v\|_{L^2(\Lambda_\delta(\bar{x}))}^2 \leq 4\pi^2\delta^2 \mathcal{I}_\delta(v), \quad \forall v \in A_0.$$

*Demonstração.* Se  $x \in \Lambda_\delta(\bar{x})$ , temos  $v(x) = \int v_s ds$ , onde a integral é tomada sobre o arco de  $B_\delta(\bar{x})$  contendo  $x$  e percorrido no sentido positivo, de  $\partial\Lambda_\delta(\bar{x})$  até  $x$ . Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e integrando novamente em relação ao parâmetro  $s$ , temos

$$\int v^2 ds \leq 4\pi^2\delta^2 \int v_s^2 ds.$$

Estendendo  $v$  e  $v_s$  como sendo nulas fora de  $\Lambda_\delta(\bar{x})$ , segue por integração entre 0 e  $\delta$  que

$$\|v\|_{L^2(\Lambda_\delta(\bar{x}))}^2 \leq 4\pi^2\delta^2 \int_{B_\delta(\bar{x})} v_s^2 dx \leq 4\pi^2\delta^2 \mathcal{I}_\delta(v).$$

■

Além disso,  $\mathcal{I}_\delta(u_k) \rightarrow 0$  uniformemente em  $k$  e  $\bar{x} \in \partial\Omega$ , quando  $\delta \rightarrow 0$ . Mais precisamente,

PROPOSIÇÃO 4.4 *Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\mathcal{I}_\delta(u_k) \leq \varepsilon$ ,  $\forall k \geq 1$  e  $\forall \bar{x} \in \partial\Omega$ .*

*Demonstração.* Seja  $n_0$  tal que  $\mathcal{I}(u_i - u_j) < \frac{\varepsilon}{4}$ , se  $i, j \geq n_0$ . Tomemos, ainda,  $\delta$  pequeno de maneira que  $\int_{\Omega \setminus \Omega_\delta} |\nabla u_l|^2 dy < \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$ , se  $l = 1, \dots, n_0$ . Logo, se  $i > n_0$ ,

$$\sqrt{\mathcal{I}_\delta(u_i)} \leq \sqrt{\mathcal{I}_\delta(u_i - u_{n_0})} + \sqrt{\mathcal{I}_\delta(u_{n_0})} \leq \frac{\varepsilon^{1/2}}{2} + \frac{\varepsilon^{1/2}}{2} = \varepsilon^{1/2}, \quad \forall \bar{x} \in \partial\Omega,$$

de onde segue o resultado. ■

OBSERVAÇÃO 9 Utilizando a desigualdade triangular (4.3), a conclusão da proposição acima permanece válida com  $u_k$  substituída por  $u_k - f$ .

onde  $|C| \leq \left( |\Omega_r| + \max_{\Omega_r} |\nabla u|^2 \right)$ , pois

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_r} |\nabla u|^2 dx - \sum_{i=1}^n \pi r_i^2 |\nabla u(x_i)|^2 dx \right| &\leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{B_{r_i}(x_i)} \left( |\nabla u(x)|^2 - |\nabla u(x_i)|^2 \right) dx \right| + \int_V |\nabla u|^2 dx \\ &\leq \left( |\Omega_r| + \max_{\Omega_r} |\nabla u|^2 \right) \varepsilon. \end{aligned}$$

Por outro lado, em virtude do parágrafo §107., temos

$$\begin{aligned} |\nabla u(x_i)|^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} |\nabla v_k^{r_i}(x_i)|^2 \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\pi r_i^2} \int_{B_{r_i}(x)} \nabla u_k dy \right|^2 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi r_i^2} \int_{B_{r_i}(x)} |\nabla u_k|^2 dy \end{aligned}$$

Dessa forma, segue de (4.4) que

$$\int_{\Omega_r} |\nabla u|^2 dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_{B_{r_i}(x)} |\nabla u_k|^2 dy + C\varepsilon \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}(u_k) + C\varepsilon = m + C\varepsilon,$$

Como  $r$  e  $\varepsilon$  são arbitrários, então  $|\nabla u| \in L^2(\Omega)$  e  $u - f \in \mathcal{A}_0$ ; além disso, devemos ter  $\mathcal{I}(u) = m$ , o que conclui a demonstração do Princípio de Dirichlet. ■

§110. Hilbert colocara finalmente o Princípio de Dirichlet em bases sólidas. No entanto, mesmo a demonstração acima, sem dúvida alguma mais simples do que aquela proposta por Hilbert em 1904, ainda é extremamente longa e delicada.

Além disso, o fato de, para uma seqüência minimizante admissível  $(u_k)_{k \geq 1}$ , termos

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} \mathcal{I}(u_i - u_j) = 0,$$

já indicava que os espaços de funções usualmente considerados não tinham uma boa geometria para tratar de tais problemas variacionais.

O leitor atento deverá ter observado que o problema de Dirichlet não está resolvido ainda, uma vez que não temos informações suficientes sobre a regularidade de  $u$ . Para verificarmos esse fato, faremos uso da seqüência minimizante utilizada na construção de nossa função  $u$ .

§111. Fixados  $x_0 \in \Omega$  e  $r > 0$  tais que  $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ , procedemos como no início do parágrafo §109. e tomamos uma família de círculos  $B_{r_1}(x_1), \dots, B_{r_n}(x_n)$  em  $B_r(x_0)$  que não se interceptam e tal que o conjunto  $V \subset \overline{B_r(x_0)}$  contendo os pontos que não estejam em nenhuma dessas bolas menores tenha área, no máximo,  $\varepsilon^2$ .

Embora Hilbert, Lebesgue e muitos outros tivessem apresentado demonstrações variacionais envolvendo o problema de Dirichlet, as questões 2 e 3 que apresentamos na seção 2.1 e que correspondem, respectivamente, à existência e regularidade do mínimo da integral de Dirichlet

$$\mathcal{I}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

sujeita a condições de contorno pré-estabelecidas, não eram tratados senão à custa de um grande esforço.

No caso específico da questão 3, o leitor pode observar que, em vista de nossa exposição, ela pode ser reescrita nos seguintes termos:

$$3'. \quad u \in C^1(\Omega) \text{ e } \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \text{ implicam } u \in C^2(\Omega)?$$

Weyl deu uma resposta afirmativa a essa questão em seu artigo, sob hipótese bem mais fracas, sendo esse resultado conhecido por *Lema de Weyl*, um dos primeiros resultados de regularidade no contexto do Cálculo das Variações, já sob as graças da teoria de integração de Lebesgue.

Além desse resultado, teremos em mãos uma demonstração de existência de solução do problema de Dirichlet numa natureza totalmente diferente da que vimos até aqui, pois a solução será obtida a partir da decomposição da condição de contorno  $f \in H^1(\Omega)$  em duas partes,  $f = u - h$ , onde  $u$  é harmônica em  $\Omega$  e  $h \in H_0^1(\Omega)$ .

**§113.** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  aberto e limitado. Nosso objetivo inicial será estabelecer generalizações das relações  $\operatorname{div} F = 0$  e  $\operatorname{rot} F = 0$  para campos vetoriais  $F \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ . Para tanto, vamos supor inicialmente que  $F \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$ .

Dados  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  e  $\Phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$ , temos as seguintes identidades vetoriais:

$$\operatorname{div}(F \times \Phi) = \langle \operatorname{rot} F, \Phi \rangle - \langle F, \operatorname{rot} \Phi \rangle,$$

$$\operatorname{div}(\varphi F) = \langle \nabla \varphi, F \rangle + \varphi \operatorname{div} F.$$

Assim, utilizamos o Teorema do Divergente em  $\Omega$  para obter<sup>(xi)</sup>:

$$\int_{\Omega} \langle \operatorname{rot} F, \Phi \rangle dx = \int_{\Omega} \langle F, \operatorname{rot} \Phi \rangle dx, \quad \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3), \quad (4.7)$$

$$\int_{\Omega} \varphi \operatorname{div} F dx = - \int_{\Omega} \langle \nabla \varphi, F \rangle dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (4.8)$$

As identidades (4.7) e (4.8) nos sugerem as definições que procurávamos para  $F \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ :

<sup>(xi)</sup>O leitor deve atentar para o fato de não ser necessário supor qualquer regularidade para  $\partial\Omega$ , pois  $\Phi$  e  $\varphi$  têm suportes compactos em  $\Omega$ .

Vamos assumir a validade do Teorema 4.6 por um momento.

Dada  $f \in H^1(\Omega)$  e utilizando a definição de derivada fraca, temos

$$\int_{\Omega} \langle \nabla f, \text{rot } \Phi \rangle dx = - \int_{\Omega} \langle f, \text{div rot } \Phi \rangle dx = 0, \quad \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3).$$

Logo,  $\nabla f \in \mathcal{R}$  e, pela a decomposição (4.12), existem  $H \in \mathcal{H}$  e  $U \in \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$  tais que  $\nabla f = H + U$ .

Vamos supor  $\Omega$  simplesmente conexo. Neste caso, como  $\text{rot } U = 0$  e  $U \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$ , existe  $u \in C^\infty(\Omega)$  tal que  $\nabla u = U^{(\text{xii})}$ ; além disso,  $\text{div } U = 0$  e, portanto,  $\Delta u = 0$  em  $\Omega$ .

Por outro lado, sabemos que existe uma seqüência  $(\varphi_k)_{k \geq 1}$  em  $C_0^\infty(\Omega)$  tal que  $\nabla \varphi_k \rightarrow H$  em  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ . Logo,  $\nabla \varphi_k \rightarrow \nabla(f - u)$  em  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$  e segue da desigualdade de Poincaré que  $h := u - f \in H_0^1(\Omega)$ .

Assim, podemos escrever  $f = u - h$ , onde  $u$  é harmônica em  $\Omega$  e  $h \in H_0^1(\Omega)$ , como havíamos proposto no início desta seção.

**§115.** Antes de iniciarmos a demonstração do Teorema 4.6, observemos que, dado  $\Phi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$ , temos a identidade

$$\Delta \Phi = \nabla(\text{div } \Phi) - \text{rot rot } \Phi. \quad (4.13)$$

Se  $F \in \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ , podemos aplicar as equações (4.9) e (4.10) com  $\text{rot } \Phi$  e  $\text{div } \Phi$  como funções-teste, respectivamente, de onde obtemos, após a subtração entre as expressões resultantes:

$$\int_{\Omega} \langle F, \Delta \Phi \rangle dx = 0. \quad (4.14)$$

Assim, basta demonstrarmos o lema seguinte, válido em dimensão qualquer<sup>(xiii)</sup>:

**LEMA 4.7 (LEMA DE WEYL)** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $v \in L_{loc}^1(\Omega)$ . Se*

$$\int_{\Omega} v \Delta \varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

*então  $v \in C^\infty(\Omega)$  e  $\Delta v = 0$  em  $\Omega$ .*

---

<sup>(xii)</sup> Com efeito, fixado  $x_0 \in \Omega$ , definimos  $u(x) := \int_a^b \langle U(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle ds$ , onde  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  é uma curva diferenciável por partes e tal que  $\gamma(a) = x_0$  e  $\gamma(b) = x$ . Sendo  $\Omega$  simplesmente conexo, é possível mostrar que o valor de  $u$  independe da curva  $\gamma$  considerada, de onde irá seguir que  $\nabla u = U$  em  $\Omega$ .

<sup>(xiii)</sup> Cf. B. Dacorogna, [13], pp.121–123.

### 4.3 A formulação moderna do Princípio de Dirichlet

§116. As décadas de 1930 e 1940 assistiram ao surgimento e à consolidação da teoria dos espaços de Sobolev tanto por K. Friedrichs como pelo próprio Sobolev, constituindo um processo de verdadeira releitura do que se entenderia por uma solução de uma equação diferencial e que culminaria com a publicação dos dois volumes da obra *Théorie des Distributions* de Laurent Schwarz no final da década de 1940. Tudo isso, por sua vez, se sustentava no advento da Análise Funcional, especialmente a partir da década de 1920.

§117. Por meio da desigualdade de Poincaré,  $H_0^1(\Omega)$  será munido da norma equivalente

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Em vista das seções anteriores, no estudo do problema de Dirichlet, somos imediatamente levados ao problema de minimização da integral

$$\mathcal{I}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad (4.15)$$

onde consideraremos agora  $f + H_0^1(\Omega)$  como sendo o espaço das funções admissíveis, com  $f \in H^1(\Omega)$ , e definimos  $m := \inf_{u-f \in H_0^1(\Omega)} \mathcal{I}(u) \geq 0$ .

§118. Seguindo a idéia original de Hilbert, consideremos  $(u_k)_{k \geq 1}$  uma seqüência minimizante do funcional  $\mathcal{I}$  sobre  $f + H_0^1(\Omega)$ ; em particular, essa seqüência é limitada em  $H^1(\Omega)$  e, portanto, existe uma subseqüência tal que  $u_{k_j} \rightarrow u_0 \in f + H_0^1(\Omega)$ .

Por outro lado, como a função  $t \mapsto \mathcal{I}(tu_0 + (1-t)u_{k_j})$  é convexa, teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(u_{k_j}) &\geq \mathcal{I}(u_0) + \left. \frac{d}{dt} \mathcal{I}(tu_0 + (1-t)u_{k_j}) \right|_{t=0} \\ &\geq \mathcal{I}(u_0) + \int_{\Omega} \langle u_0, u_0 - u_{k_j} \rangle dx. \end{aligned}$$

Finalmente, tomando  $j \rightarrow \infty$ , virá

$$m = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{I}(u_{k_j}) \geq \mathcal{I}(u_0) \geq m,$$

ou seja,  $\mathcal{I}(u_0) = m$ . Além disso,  $u_0$  deve satisfazer a equação de Euler-Lagrange fraca:

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u_0, \nabla \varphi \rangle dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Logo, pelo Lema de Weyl, devemos ter  $u \in C^\infty(\Omega)$  e  $\Delta u_0 = 0$  em  $\Omega$ .

## Capítulo 5

# O problema de Dirichlet semilinear

### 5.1 A formulação fraca do problema

§120. Em vista do problema de Dirichlet para as equações de Laplace e de Poisson, uma generalização natural para tais problemas consiste em determinar uma função  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta u = p(x, u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (5.1)$$

onde tomamos  $p : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua.

Vamos supor que (5.1) tenha uma solução clássica  $u$ . Nesse caso, multiplicando ambos os membros da equação diferencial acima por uma função  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  e integrando por partes a expressão resultante, teremos:

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle - p(x, u) \varphi \, dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Reciprocamente, se  $u \in C^2(\Omega)$  satisfizer a identidade acima, então

$$\int_{\Omega} (\Delta u + p(x, u)) \varphi \, dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

e, portanto,  $-\Delta u = p(x, u)$  em  $\Omega$ .

§121. Motivados pelas observações feitas acima e na última seção do capítulo anterior, podemos definir uma solução fraca para o problema semilinear (5.1), como sendo uma função  $u \in H_0^1(\Omega)$

TEOREMA 5.2 *Sejam  $\mathbb{E}$  um espaço de Banach reflexivo,  $A \subset \mathbb{E}$  um convexo fechado e  $I : A \rightarrow (-\infty, +\infty]$ ,  $I \not\equiv +\infty$ , um funcional fracamente semicontínuo inferiormente satisfazendo a seguinte condição de coercividade:*

$$\lim_{\substack{\|u\| \rightarrow \infty \\ u \in A}} I(u) = +\infty.$$

*Logo,  $I$  possui um ponto de mínimo, i.e., existe  $u_0 \in A$  tal que  $I(u_0) = \inf_{u \in A} I(u)$ .*

*Demonstração.* Seja  $v \in A$  tal que  $I(v) =: a < +\infty$ . Definindo  $K := \{u \in A : I(u) \leq a\}$ , então  $K$  é um subconjunto fracamente fechado, limitado e não-vazio do espaço de Banach reflexivo  $\mathbb{E}$ . Portanto,  $K$  é compacto com relação à topologia fraca<sup>(i)</sup>. Por outro lado, como  $I$  é fracamente semicontínua inferiormente, segue da proposição anterior que deve existir  $u_0 \in K$  onde  $I$  assume seu mínimo em  $K$  e, portanto, em  $A$ . ■

Com relação ao teorema anterior, é interessante observar que ele reflete perfeitamente as idéias de Hilbert em seu artigo de 1900. Com efeito, tomando  $(u_k)_{k \geq 1}$  uma seqüência minimizante de  $I$  sobre  $A$ , segue da condição de coercividade que tal seqüência é necessariamente limitada e, portanto, se  $\mathbb{E}$  for separável, então irá existir uma subseqüência  $(u_{k_j})_{j \geq 1}$  tal que  $u_{k_j} \rightharpoonup u_0$  <sup>(ii)</sup>. Como  $I$  é fracamente semicontínua inferiormente, teremos

$$\inf_{u \in A} I(u) = \lim_{j \rightarrow \infty} I(u_{k_j}) \geq I(u_0),$$

e, portanto,  $I(u_0) = \inf_{u \in A} I(u)$ .

§124. Nossa intenção será aplicar o Teorema 5.2 a

$$I(u) := \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - P(x, u) dx, \quad (5.3)$$

com  $A := H_0^1(\Omega)$ , onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto limitado,  $P(x, \xi) := \int_0^\xi p(x, s) ds$  e  $p \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ . Como a equação de Euler-Lagrange associada a esse funcional é dada formalmente por (5.2), então uma vez obtida a existência de um mínimo para  $I$  em  $A$ , é de se esperar que tenhamos um resultado de existência de soluções fracas para o problema semilinear posto inicialmente, como veremos mais adiante.

<sup>(i)</sup>Cf. H. Brézis, [8], pp.44–45.

<sup>(ii)</sup>Cf. H. Brézis, op cit, pp.48–50.

de onde segue que  $I(u) \rightarrow +\infty$  quando  $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow \infty$ .

§127. Resta verificarmos que  $I$  é fracamente semicontínua inferiormente; mas como

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$$

é contínua e convexa em  $H_0^1(\Omega)$ , será suficiente<sup>(iv)</sup> demonstrarmos a semicontinuidade inferior fraca do funcional

$$J(u) := - \int_{\Omega} P(x, u) dx, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Observamos que a condição de coercividade (5.4) será suficiente para tanto.

Como a aplicação

$$u \in H_0^1(\Omega) \longmapsto \int_{\Omega} \frac{\lambda}{2} u^2 + C u dx$$

é fracamente semicontínua inferiormente, segue da estimativa (5.7) para  $P$  que, sem perda de generalidade, podemos supor  $P(x, \xi) \leq 0, \forall (x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ .

§128. Seja  $(u_k)_{k \geq 1}$  uma seqüência em  $H_0^1(\Omega)$  tal que  $u_k \rightharpoonup u_0$  e vamos definir  $\ell := \liminf_{k \rightarrow \infty} J(u_k)$ . Evidentemente,  $\ell \geq 0$  e devemos considerar apenas o caso em que  $\ell < +\infty$ ; além disso, em vista da compacidade da imersão  $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  e tomando uma subsequência se necessário, podemos supor que  $u_k \rightarrow u_0$  em  $L^2(\Omega)$  e  $u_k \rightarrow u_0$  quase sempre em  $\Omega^{(v)}$ .

Nosso objetivo será mostrar que  $J(u_0) \leq \ell$ , o que irá garantir a semicontinuidade inferior do funcional  $J$ .

Seja  $\varepsilon > 0$  fixado. Como  $u_k \rightarrow u_0$  quase sempre em  $\Omega$ , existe um subconjunto  $\Omega^\varepsilon \subset \Omega$  mensurável tal que  $\mu(\Omega \setminus \Omega^\varepsilon) < \varepsilon$  e  $u_k \rightarrow u$  uniformemente em  $\Omega^\varepsilon$  (Teorema de Egorov<sup>(vi)</sup>), de onde temos

$$J(u_k) = - \int_{\Omega} P(x, u_k) dx \geq - \int_{\Omega^\varepsilon} P(x, u_k) dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega^\varepsilon} -P(x, u_0) dx.$$

Portanto,  $\ell \geq \int_{\Omega^\varepsilon} -P(x, u_0) dx$ , para  $\varepsilon > 0$  arbitrário. Agora se considerarmos  $\varepsilon_j \rightarrow 0$  uma seqüência decrescente e tomarmos os conjuntos  $\Omega^{\varepsilon_j}$  dispostos em ordem crescente, seguirá de  $-P(x, u_0) \geq 0$  e do Teorema da Convergência Monótona que

$$\ell \geq - \int_{\Omega^{\varepsilon_j}} P(x, u_0) dx \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} -P(x, u_0) dx = J(u_0),$$

<sup>(iv)</sup>Cf. H. Brézis, op cit, p.38.

<sup>(v)</sup>Cf. H. Brézis, op cit, pp.58-59.

<sup>(vi)</sup>Cf. H. Brézis, op cit, p.75.

integração por partes pela escolha de funções teste convenientes. Para isso, necessitaremos do seguinte resultado<sup>(viii)</sup>:

PROPOSIÇÃO 5.4 *Se  $u \in H_0^1(\Omega)$ , então  $|u| \in H_0^1(\Omega)$  e*

$$\nabla|u| = \begin{cases} \nabla u, & \text{se } u > 0 \\ -\nabla u, & \text{se } u < 0 \end{cases};$$

em particular,  $u^+, u^- \in H_0^1(\Omega)$  e

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u, & \text{se } u > 0 \\ 0, & \text{se } u < 0 \end{cases} \quad e \quad \nabla u^- = \begin{cases} 0, & \text{se } u > 0 \\ -\nabla u, & \text{se } u < 0 \end{cases}.$$

Além disso,  $\nabla u = 0$  quase sempre sobre o conjunto  $[u = 0] := \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$ . ■

Como  $w$  satisfaz

$$\int_{\Omega} \langle \nabla w, \nabla v \rangle - \lambda \langle w, \nabla v \rangle - C v \, dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

então tomamos  $v := w^- \in H_0^1(\Omega)$  como função teste. Nesse caso,  $\langle \nabla w, \nabla v \rangle = \langle \nabla w^+, \nabla w^- \rangle - \langle \nabla w^-, \nabla w^- \rangle = -|\nabla w^-|^2$  e, analogamente,  $\langle w, v \rangle = -|w^-|^2$ . Logo,

$$\int_{\Omega} |\nabla w^-|^2 - |w^-|^2 + C w^- \, dx = 0,$$

de onde segue que

$$0 \geq \int_{\Omega} |\nabla w^-|^2 - \lambda |w^-|^2 \, dx \geq (\lambda_1 - \lambda) \int_{\Omega} |w^-|^2 \, dx.$$

Como  $\lambda < \lambda_1$ , então  $w^- = 0$  quase sempre em  $\Omega$ , ou seja,  $w \geq 0$ . ■

§131. Mostraremos, agora, que caso  $u$  satisfaça a equação de Euler-Lagrange (5.2), então  $-w \leq u \leq w$  em  $\Omega$ . Mais precisamente, temos a seguinte proposição:

LEMA 5.5 (ESTIMATIVA A PRIORI) *Sejam  $\lambda < \lambda_1$  e  $C > 0$  fixados. Dada  $q : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua tal que*

$$\begin{aligned} q(x, \xi) &\leq \lambda \xi + C, \quad \text{se } \xi \geq 0, \\ q(x, \xi) &\geq \lambda \xi - C, \quad \text{se } \xi \leq 0 \end{aligned}, \tag{5.9}$$

<sup>(viii)</sup>Cf. L. C. Evans, op cit, pp.291-292.

$\forall u \in H_0^1(\Omega)$ . Além disso, temos  $|\tilde{p}(x, \xi)| \leq \lambda|\xi| + C$ ,  $\forall (x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ . Pela Proposição 7.4,  $\tilde{I}$  está bem definido e  $\tilde{I} \in C(H_0^1(\Omega); \mathbb{R})$ .

**§134.** Seja  $\tilde{u}_0$  um ponto de mínimo para  $\tilde{I}$ . Ainda pela Proposição 7.4,  $\tilde{u}_0$  satisfaz a equação de Euler-Lagrange associada a  $\tilde{u}$ :

$$\int_{\Omega} \langle \nabla \tilde{u}_0, \nabla v \rangle - \tilde{p}(x, \tilde{u}_0)v \, dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Logo,  $\tilde{u}_0 \in L^\infty(\Omega)$  e  $|\tilde{u}_0| \leq R$ . Conseqüentemente,  $\tilde{u}_0$  satisfaz (5.2),  $\tilde{P}(x, \tilde{u}_0) = P(x, u_0)$  e teremos

$$I(\tilde{u}_0) = \tilde{I}(\tilde{u}_0) = \text{mín } \tilde{I} \leq \text{mín } I.$$

Isso mostra que um ponto de mínimo de  $\tilde{I}$  também é um mínimo para  $I$ . Inversamente, se  $u_0$  minimiza  $I$ , então

$$\tilde{I}(u_0) \leq I(u_0) = I(\tilde{u}_0) = \tilde{I}(\tilde{u}_0) = \text{mín } \tilde{I}.$$

Portanto, os pontos de mínimos de  $I$  e  $\tilde{I}$  coincidem.

**§135.** Dessa forma, podemos resumir o resultado que acabamos de obter no seguinte teorema:

**TEOREMA 5.6** *Dados  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto regular limitado e  $p : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua satisfazendo*

$$\limsup_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x, \xi)}{\xi} < \lambda_1, \quad (5.11)$$

onde  $\lambda_1 > 0$  é o primeiro autovalor de  $-\Delta$  em  $H_0^1(\Omega)$ , então o problema de Dirichlet semilinear (5.1) possui uma solução fraca  $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ . Além disso,  $u_0$  caracteriza-se como sendo o mínimo do funcional  $I$  sobre  $H_0^1(\Omega)$  onde

$$I(u) := \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - P(x, u) \, dx,$$

com  $P(x, u) := \int_0^u p(x, \xi) \, d\xi$ .

**§136.** Vejamos alguns exemplos que dizem respeito ao teorema que acabamos de demonstrar:

**EXEMPLO 5.1** Sejam  $f \in H_0^1(\Omega)$  e  $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e limitada. Segue do Teorema acima que o problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + g(x, u), & \text{em } \Omega \\ u = f, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

EXEMPLO 5.3 Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua tal que

$$g(\xi) = o(\xi) \text{ quando } \xi \rightarrow 0, \\ \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{g(\xi)}{\xi} = +\infty.$$

Nessas condições,

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - g(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.14)$$

tem uma solução não-trivial se  $\lambda > \lambda_1$ . Além disso, se  $\lambda \leq \lambda_1$  e  $\xi g(\xi) > 0$  se  $\xi \neq 0$ , então  $u \equiv 0$  é a única solução de (5.14). Com efeito, seja  $u \in H_0^1(\Omega)$  uma solução para (5.14):

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle - \lambda uv + g(u)v \, dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Tomando  $v := u^{\pm}$ , teremos

$$\int_{\Omega} |\nabla u^{\pm}|^2 - \lambda |u^{\pm}|^2 \, dx \leq 0$$

e, portanto,  $u^{\pm} = 0$  se  $\lambda < \lambda_1$ . Caso  $\lambda = \lambda_1$ , então  $u = \alpha v_1$ , para algum  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; nesse caso,

$$\alpha \lambda_1 v_1 = -\Delta u = \alpha \lambda_1 v_1 - g(\alpha v_1) \implies g(\alpha v_1) \equiv 0,$$

de onde concluímos que  $\alpha = 0$ . ■

**§138.** É importante observar que a condição (5.11) não pode ser melhorada<sup>(ix)</sup>. Com efeito, se  $v_1 \in C^\infty(\Omega)$  for uma autofunção de  $-\Delta$  em  $H_0^1(\Omega)$  associada ao autovalor  $\lambda_1$ , então

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 u + v_1, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

não admite solução  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Suponhamos por absurdo que existisse uma função  $u$  satisfazendo a equação de Euler-Lagrange fraca associada

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle - (\lambda_1 u + v_1)v \, dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

---

<sup>(ix)</sup> Conforme demonstraram J. Mawhin, J. R. Ward Jr. e M. Willem, o funcional  $I$  associado ainda admite um mínimo caso

$$\limsup_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x, \xi)}{\xi} \leq \lambda_1,$$

desde que a desigualdade estrita ocorra num conjunto de medida positiva; nesse caso, no entanto, é necessária uma condição que limite o crescimento de  $p$  dada por  $(p_2)$  na seção 7.2. Cf. D. G. de Figueiredo, [25], pp.21–22.

então o funcional associado

$$I(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \lambda u^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx$$

não é limitado inferiormente em  $H_0^1(\Omega)$  qualquer que seja o parâmetro  $\lambda \in \mathbb{R}$ ; contudo, se  $\lambda < \lambda_1$ , então

$$\bar{I}(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \lambda u^2 dx$$

é coercivo em  $H_0^1(\Omega)$ .

Por outro lado, se  $2 < p < 2^* := \frac{2n}{n-2}$ , a imersão  $L^p(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$  é compacta e, portanto, o conjunto  $A := \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|_{L^p(\Omega)} = 1\}$  é fracamente fechado. De fato, se  $(u_k)_{k \geq 1}$  for uma seqüência em  $A$  tal que  $u_k \rightharpoonup u$ , então existe uma subsequência convergindo a  $u$  em  $L^p(\Omega)$ ; em particular,  $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 1$ , o que demonstra nossa afirmação.

Em vista das observações acima, segue do Teorema 5.2 que  $\bar{I}$  terá um mínimo relativo a  $A$ . Utilizando-se os multiplicadores de Lagrange<sup>(xi)</sup> em  $A$  e a homogeneidade da equação, segue a existência de uma solução não-trivial para (5.15).

**§141.** O método de Perron se generaliza de forma bastante interessante no contexto deste capítulo. Para vermos isso, precisamos estender as noções de subsolução e supersolução para o sentido fraco.

Uma função  $u \in H^1(\Omega)$  será uma subsolução fraca para o problema (5.1) se  $u|_{\partial\Omega} \leq 0$  e

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle - p(x, u)v dx \leq 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0;$$

de maneira análoga, define-se supersolução revertendo-se as desigualdades acima. Nessas condições, é claro que tais conceitos coincidem com os casos clássicos correspondentes.

Vejam agora uma outra forma de obtermos soluções para (5.1) no caso em que o funcional não seja limitado inferiormente:

**TEOREMA 5.9** *Suponhamos que  $\underline{u}, \bar{u} \in H^1(\Omega)$  sejam sub e supersolução de (5.1), respectivamente, e que existam constantes  $\underline{c}, \bar{c} \in \mathbb{R}$  tais que*

$$-\infty < \underline{c} \leq \underline{u} \leq \bar{u} \leq \bar{c} < +\infty, \text{ quase sempre em } \Omega.$$

*Logo, existe uma solução fraca  $u \in H_0^1(\Omega)$  de (5.1) tal que  $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ .*

<sup>(xi)</sup>Cf. O. Kavian, [37], pp.55-56.

Parte III

**Rumo à Teoria Global de Pontos  
Críticos**

*“Geometry may sometimes appear to take the lead over analysis,  
but in fact precedes it only as a servant goes before his master  
to clear the path and light him on the way.”*

(James Joseph Sylvester)

[Eventualmente pode parecer que a Geometria se sobrepõe à Análise;  
mas, na verdade, aquela a precede como um servo segue à frente de seu mestre  
para remover os obstáculos e guiá-lo através do caminho.]

## Capítulo 6

# A Teoria de Ljusternik-Schnirelman

§142. Um resultado bastante conhecido da Álgebra Linear é o seguinte: dada uma transformação linear auto-adjunta  $A : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , então os autovalores de  $A$  são reais e existe uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^{n+1}$  formada por autovetores de  $A$ . Embora exista uma demonstração puramente algébrica para esse fato, apresentaremos aqui uma versão geométrica, utilizando os multiplicadores de Lagrange.

Se definirmos  $f(x) := \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle$ , então segue do fato de  $A$  ser auto-adjunta que  $\nabla f(x) = Ax$ . Sendo a esfera unitária  $S^n$  compacta,  $f|_{S^n}$  possui um mínimo para algum  $v_1 \in S^n$ ; nesse caso, existe  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  tal que  $Av_1 = \lambda_1 v_1$  e, além disso,  $\lambda_1 = 2 \min_{S^n} f$ .

Suponhamos por indução que existam  $k$  autovetores ortogonais de  $A$  em  $S^n$ , digamos  $v_1, \dots, v_k$ , e definamos  $V_k := \mathbb{R}v_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}v_k$ . Caso  $k \leq n$ , então  $V_k^\perp \cap S^n \neq \emptyset$  e existe um ponto de mínimo  $v_{k+1}$  de  $f$  em  $V_k^\perp \cap S^n$ , de maneira que  $Av_{k+1} = \lambda_{k+1}v_{k+1}$ , com  $\lambda_{k+1} = 2 \min_{V_k^\perp \cap S^n} f$ , o que conclui a demonstração.

§143. O leitor deve observar que, em vista do exposto acima, denotando por  $\Gamma_k$  a família formada pelos subespaços vetoriais de  $\mathbb{R}^{n+1}$  de dimensão maior que ou igual a  $k$ , então os autovalores de  $A$  admitem a seguinte caracterização minimax:

$$\lambda_k = \inf_{V \in \Gamma_k} \max_{V \cap S^n} \langle Ax, x \rangle.$$

O objetivo deste capítulo será desenvolver tais idéias de maneira a demonstrar o seguinte resultado devido a L. Ljusternik e L. Schnirelman sobre o número de pontos críticos para uma função par e continuamente diferenciável sobre  $S^n$ :

onde  $[s_1, y_1, \dots, s_k, y_k] = [\tilde{s}_1, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{s}_k, \tilde{y}_k]$  se, e somente se, para cada  $i$  temos  $s_i = \tilde{s}_i$  e  $y_i = \tilde{y}_i$ , ou  $s_i = \tilde{s}_i = 0$ . O conjunto  $Y_1 * \dots * Y_k$ , munido da topologia quociente induzida pela identificação acima, pode ser tratado como sendo um  $G$ -espaço, sendo a ação de  $G$  definida de maneira óbvia.

Tomando, por exemplo,  $Y_1 = \dots = Y_k = \mathbb{Z}_2$ , então o leitor não terá dificuldades em verificar que  $Y_1 * \dots * Y_k$  é homeomorfo a  $S^{k-1}$  por meio de uma aplicação ímpar, a qual, por sua vez, é  $\mathbb{Z}_2$ -equivariante. Mais geralmente, se denotarmos por  $S(V)$  a esfera unitária de um espaço vetorial normado  $V$ , então dados  $G$ -espaços vetoriais normados  $V_1, \dots, V_k$ , teremos

$$S(V_1) * \dots * S(V_k) \cong S(V_1 \times \dots \times V_k)$$

por meio de um homeomorfismo  $G$ -equivariante.

§146. A proposição a seguir estabelece uma outra caracterização para o  $G$ -gênero:<sup>(i)</sup>

PROPOSIÇÃO 6.2 *Se  $X$  for normal, então  $\gamma_G(X)$  é o menor inteiro  $k$  para o qual existe uma transformação equivariante  $X \rightarrow G_1 * \dots * G_k$ , onde, por conveniência, escrevemos  $G_i = G$ .*

*Demonstração.* Para simplificar a notação, indicamos  $\gamma := \gamma_G(X)$  e denotaremos por  $k$  o menor inteiro acima (evidentemente, caso um tal  $k$  não exista, tomamos  $k = +\infty$ ).

Observamos que  $\gamma \leq k$ . Com efeito, podemos supor  $k < +\infty$  e seja  $h : X \rightarrow G_1 * \dots * G_k$  uma função  $G$ -equivariante. Definindo os conjuntos

$$U_i := \{x \in X : f(x) = [s_1, g_1, \dots, s_k, g_k] \text{ e } s_i > 0\}, \quad i = 1, \dots, k,$$

seguirá que  $U_1, \dots, U_k$  formam uma cobertura aberta de  $X$  e, além disso, as funções  $h_i : U_i \rightarrow G$ ,  $h_i(x) = g_i$  estão bem-definidas, são contínuas e  $G$ -equivariantes. Conseqüentemente,  $\gamma \leq k$ .

Mostraremos, agora, que  $\gamma \geq k$ . Nesse caso, podemos supor  $\gamma < +\infty$  e seja  $U_1, \dots, U_\gamma$  uma cobertura aberta de  $X$  associada. Sendo  $X$  normal, existe uma partição da unidade  $G$ -invariante  $\pi_1, \dots, \pi_\gamma$  subordinada a tal cobertura. Nesse caso, definiremos  $h : X \rightarrow G_1 * \dots * G_\gamma$  como

$$h(x) := [\pi_1(x), h_1(x), \dots, \pi_\gamma(x), h_\gamma(x)].$$

Observamos que, muito embora cada  $h_i$  esteja definida apenas sobre  $U_i$ ,  $h$  está bem definida pois  $\text{supp}(\pi_i) \subset U_i$ ; além disso, é de verificação imediata que  $h$  é contínua e  $G$ -equivariante. Portanto,  $k \leq \gamma$ , o que conclui a demonstração. ■

<sup>(i)</sup>Cf. T. Bartsch, [3], p.13.

*Demonstração.* A condição  $(\gamma_1)$  é óbvia, enquanto que  $(\gamma_4)$  segue da definição de espaço  $G$ -RAV, da Proposição 6.2 e do fato de a ligação de espaços  $G$ -RAV preservar essa propriedade.

Com respeito a  $(\gamma_2)$ , podemos supor  $k := \gamma_G(B) < +\infty$ . Sejam  $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$  uma cobertura aberta de  $B$  por conjuntos invariantes e  $h_i : B_i \rightarrow G$  as funções equivariantes correspondentes; assim,  $A = h^{-1}(B_1) \cup \dots \cup h^{-1}(B_k)$  será uma cobertura aberta de  $A$  com as propriedades desejadas. Logo,  $\gamma_G(A) \leq k$ .

Para verificarmos  $(\gamma_3)$ , vamos definir  $\gamma_1 := \gamma_G(A)$  e  $\gamma_2 := \gamma_G(B)$ , os quais podemos supor que sejam ambos finitos. Denotando por  $h_1$  e  $h_2$  as transformações  $G$ -equivariantes associadas a  $A$  e  $B$ , respectivamente, e  $\pi_1$  e  $\pi_2$  uma partição da unidade  $G$ -invariante subordinada à cobertura  $X = \text{int } A \cup \text{int } B$ , então a função  $h : A \cup B \rightarrow (G_1 * \dots * G_{\gamma_1}) * (G_1 * \dots * G_{\gamma_2})$  dada por

$$h(x) := [\pi_1(x), h_1(x), \pi_2(x), h_2(x)]$$

corresponde a uma função contínua e  $G$ -equivariante. Segue da Proposição 6.2 que  $\gamma_G(A \cup B) \leq \gamma_1 + \gamma_2$ .

Com relação à maximalidade de  $\gamma_G$ , em virtude da Proposição 6.3, será suficiente compararmos os valores de uma função  $\bar{\gamma}$ , satisfazendo as condições  $(\gamma_1)$ ,  $(\gamma_2)$  e  $(\gamma_3)$ , nos conjuntos  $G_1 * \dots * G_k$ . Assim, definindo

$$U_i := \{[s_1, g_1, \dots, s_k, g_k] \in G_1 * \dots * G_k : s_i > 0\},$$

então as funções  $h_i : U_i \rightarrow G$ ,  $h_i([s_1, g_1, \dots, s_k, g_k]) = g_i$  estão bem-definidas e, além disso, são contínuas e  $G$ -equivariantes. Segue de  $(\gamma_1)$  e  $(\gamma_2)$  que  $\bar{\gamma}(U_i) = 1$ . Como  $G_1 * \dots * G_k = U_1 \cup \dots \cup U_k$ , por  $(\gamma_3)$  virá  $\bar{\gamma}(G_1 * \dots * G_k) \leq k$ , de onde temos a maximalidade de  $\gamma_G$ . ■

**§148.** Com respeito à proposição anterior, alguns comentários adicionais merecem ser feitos.

Suponhamos que  $B \in \mathcal{E}_G$  seja formado por um número finito de órbitas de  $G$ , ou seja, que existam  $x_1, \dots, x_k \in B$  tais que  $B = Gx_1 \cup \dots \cup Gx_k$  seja uma união disjunta. Nesse caso, podemos reescrever  $B = G\{x_1, \dots, x_k\}$  e segue da definição de  $G$ -gênero que  $\gamma_G(B) = 1$ , se  $Gx_i = \{e\}$ ,  $1 \leq i \leq k$ ; em outras palavras, se  $\gamma_G(B) > 1$  e a ação de  $G$  sobre  $B$  for livre, então  $B$  não pode ser escrito como um número finito de  $G$ -órbitas.

Dados  $X$  um  $G$ -espaço metrizável e  $K \in \mathcal{E}_G(X)$  compacto, se  $G$  for um  $G$ -RAV e a ação de  $G$  sobre  $K$  for livre, então  $\gamma_G(K) < +\infty$ . Com efeito, para cada  $x \in K$ , segue da condição  $(\gamma_4)$  que existe uma vizinhança aberta e  $G$ -simétrica  $U_x$  contendo  $Gx$  tal que  $\gamma_G(U_x) = \gamma_G(Gx) = 1$ . Como

portanto, em  $Z$  e formam uma família disjunta. Como  $Z$  é metrizável, existem abertos disjuntos  $V_i$  contendo cada fechado  $h^{-1}(g_i)$ . Os conjuntos  $U_j := \bigcap_{i=1}^k g_j g_i^{-1} V_i$  são abertos simétricos disjuntos contendo  $h^{-1}(g_j)$ . Assim,  $U := U_1 \cup \dots \cup U_k$  é aberto simétrico contendo  $A$  e formado pela união disjunta dos conjuntos  $U_j$ . Por construção, a função  $\tilde{h} : U \rightarrow G$ , tal que  $\tilde{h}(x_i) = g_i$ , se  $x_i \in U_i$ , está bem definida, é contínua e  $G$ -equivariante. ■

## 6.2 O Lema de Deformação

**§151.** Sejam  $\mathbb{E}$  um espaço de Banach e  $G$  um grupo de isometrias de  $\mathbb{E}$ . Dados  $S \subset \mathbb{E}$  um conjunto  $G$ -simétrico e  $\delta > 0$ , denotaremos por  $S_\delta$  o conjunto  $\{x \in \mathbb{E} : d(x, S) \leq \delta\}$ ; além disso, dados  $\Phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $c \in \mathbb{R}$ , escreveremos  $\Phi^c := \{x \in \mathbb{E} : \Phi(x) \leq c\}$ .

O Lema de Deformação que apresentamos a seguir é uma versão simplificada daquela demonstrada por Willem em 1983, onde este não faz quaisquer hipóteses de compacidade nos níveis críticos  $K_c := \{x \in \mathbb{E} : \Phi(x) = c \text{ e } \Phi'(x) = 0\}$ :

**TEOREMA 6.5 (LEMA DE DEFORMAÇÃO)** *Dados  $\Phi \in C^1(\mathbb{E}; \mathbb{R})$  um funcional  $G$ -invariante,  $S \subset \mathbb{E}$  um conjunto  $G$ -simétrico,  $c \in \mathbb{R}$  e  $\varepsilon, \delta > 0$  tais que*

$$u \in \Phi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta} \Rightarrow |\Phi'(u)| \geq \frac{2\varepsilon}{\delta}, \quad (6.1)$$

*então existe um homeomorfismo  $G$ -equivariante  $h : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  tal que:*

$$(\Phi_1) \quad h(u) = u, \text{ se } u \notin \Phi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}.$$

$$(\Phi_2) \quad h(\Phi^{c+\varepsilon} \cap S) \subset \Phi^{c-\varepsilon}.$$

*Demonstração.* Para evitarmos questões puramente técnicas envolvendo a utilização de campos pseudo-gradientes (definidos por Palais em 1966), vamos supor que  $\mathbb{E}$  seja um espaço de Hilbert e  $\Phi \in C^2(\mathbb{E}; \mathbb{R})$ .

Sejam

$$\begin{aligned} A &:= \Phi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}, \\ B &:= \Phi^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap S_\delta, \\ \psi(u) &:= \frac{d(x, \mathbb{E} \setminus A)}{d(x, \mathbb{E} \setminus A) + d(x, B)}. \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO 11 Embora o Lema de Deformação tenha sido demonstrado para um espaço de Banach  $\mathbb{E}$ , exatamente a mesma demonstração se aplica a uma variedade riemanniana completa  $\mathbb{M}$ , invariante pela ação de um grupo  $G$ .

§152. Uma maneira freqüente de se utilizar o Lema de Deformação em problemas envolvendo a determinação de pontos críticos consiste em se demonstrar que  $c \in \mathbb{R}$ , dado por uma representação em termos minimax, é de fato um valor crítico para um funcional  $\Phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ . Em muitos casos, isso é feito de maneira indireta, mostrando-se que a conclusão do Lema de Deformação não se verifica, i.e., que não existe um homeomorfismo  $h : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  satisfazendo  $(\Phi_1)$  e  $(\Phi_2)$ . Dessa forma, deverão existir seqüências  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  e  $\frac{\varepsilon_k}{\delta_k} \rightarrow 0$  tais que a condição (6.2) não ocorra, ou seja, existe uma seqüência  $(u_k)_{k \geq 1}$  em  $\mathbb{E}$ , denominada seqüência de Palais-Smale, tal que

$$\Phi(u_k) \rightarrow c \text{ em } \mathbb{E} \text{ e } \Phi'(u_k) \rightarrow 0 \text{ em } \mathbb{E}'. \quad (6.4)$$

Suponhamos que exista uma subseqüência de  $(u_k)_{k \geq 1}$  convergindo a um ponto  $u_0 \in \mathbb{E}$ . Em vista de (6.4), devemos ter  $\Phi(u) = c$  e  $\Phi'(u) = 0$ , ou seja,  $c$  é um valor crítico de  $\Phi$ .

A condição de compacidade acima foi introduzida por Brézis, Coron e Nirenberg em 1980, como uma generalização da condição  $(PS)$  usual<sup>(vi)</sup>:

DEFINIÇÃO *Sejam  $\mathbb{E}$  um espaço de Banach,  $\Phi \in C^1(\mathbb{E}; \mathbb{R})$  e  $c \in \mathbb{R}$ . A função  $\Phi$  satisfaz a condição de Palais-Smale em  $c$ , o que será denotado por  $(PS)_c$ , se toda seqüência  $(u_k)_{k \geq 1}$  satisfazendo (6.4) tiver uma subseqüência convergente.*

Vale observar que, mesmo em dimensão finita, uma seqüência de Palais-Smale não precisa ser convergente, como se constata no seguinte exemplo apresentado por Brézis e Nirenberg em 1991<sup>(vii)</sup>:

EXEMPLO 6.4 Seja  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$  dada por

$$\varphi(x, y) = x^2 + (1 - x)^3 y^2,$$

então  $\left(1 - \frac{1}{k}, \sqrt{\frac{2}{3}k}\right)_{k \geq 1}$  é uma seqüência de Palais-Smale que não possui subseqüência convergente; na verdade,  $\varphi\left(1 - \frac{1}{k}, \sqrt{\frac{2}{3}k}\right) \rightarrow 1$ , muito embora 1 não seja sequer valor crítico de  $\varphi$ . ■

<sup>(vi)</sup>Cf. H. Brézis, J. M. Coron, L. Nirenberg, "Free vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of P. Rabinowitz," *Comm. Pure Appl. Math.* **33** (1980), pp.667-689.

<sup>(vii)</sup>Cf. H. Brézis, L. Nirenberg, "Remarks on finding critical points," *Comm. Pure Appl. Math.* **64** (1991), pp.939-963.

§154. Os valores críticos de  $f$  dados por (6.5) admitem uma outra caracterização bastante interessante:

$$c_k = \inf \{r \in \mathbb{R} : \gamma_G(f^r) \geq k\}, \quad 1 \leq k \leq \ell, \quad (6.6)$$

ou seja, os valores críticos  $c_1 \leq \dots \leq c_\ell$  fornecem os níveis para os quais os conjuntos  $f^r$  mudam de estrutura topológica.

A verificação da relação acima é bastante simples. Com efeito, vamos denotar por  $\bar{c}_k$  o 2º membro de (6.6). Se  $c > \bar{c}_k$ , então  $\gamma_G(f^c) \geq k$ , de onde obtemos,

$$c_k = \inf_{A \in \Gamma_k} \max_{x \in A} f(x) \leq \max_{x \in f^c} f(x) \leq c.$$

Logo,  $c_k \leq \bar{c}_k$ . Por outro lado,  $c > c_k$  implica a existência de  $A_0 \in \Gamma_k$  tal que  $\max_{x \in A_0} f(x) \leq c$ . Assim,  $A_0 \subset f^c$ , de onde segue que  $k \leq \gamma_G(A_0) \leq \gamma_G(f^c)$  e, portanto,  $c \geq \bar{c}_k$ , de onde segue a relação (6.6).

§155. O leitor deve observar que caso  $G$  seja um grupo  $G$ -RAV agindo livremente sobre  $S^n$ , então a mesma demonstração do Teorema 6.1 permite concluir a existência de  $\gamma_G(S^n)$   $G$ -órbitas de pontos críticos para um funcional  $f \in C(S^n; \mathbb{R})$   $G$ -invariante. Contudo, se a ação do grupo  $G$  não for livre, as informações a respeito do número de pontos críticos de um funcional  $G$ -invariante podem ficar bastante comprometidas.

Para vermos isso, definiremos  $\text{Fix}(G) := \{x \in X : gx = x, \forall g \in G\}$ , o conjunto dos pontos de  $X$  que permanecem fixos pela ação de  $G$ . Se  $x \in \text{Fix}(G) \neq \emptyset$ , evidentemente não irá existir uma função  $G$ -equivariante  $h : \{x\} \rightarrow G$  (a não ser que  $G$  possua apenas um elemento) e  $\gamma_G(\{x\}) = +\infty$ .

Por outro lado, considerando  $X = S^n$ , vamos supor  $\text{Fix}(G) \neq \emptyset$  e seja  $x \in \text{Fix}(G)$ . A aplicação  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}x \cong \mathbb{R}$ , correspondendo à projeção ortogonal na direção  $x$  será  $G$ -invariante, com apenas dois pontos críticos, um máximo em  $x$  e um mínimo em  $-x$ .

Em particular, o leitor pode observar que não se pode esperar, em geral, a existência de vários pontos críticos para um operador  $G$ -invariante no caso em que  $\text{Fix}(G) \neq \emptyset$ .

## Capítulo 7

# Problemas de multiplicidade envolvendo simetrias

§156. A história da busca de pontos críticos de caráter mais geral, que não sejam extremos, é bastante recente, se comparada com a própria história do Cálculo das Variações. Seu início ocorre com os trabalhos de G. D. Birkhoff em 1917 e os de L. Ljusternik, L. Schnirelman e M. Morse na década de 1920 sobre a existência de geodésicas fechadas em superfícies de Riemann compactas de gênero zero.

Ainda nas origens da teoria minimax, Ljusternik e Schnirelman perceberam o importante papel que a simetria assume na Teoria de Pontos Críticos e, por volta de 1930, demonstraram o Teorema 6.1 sobre a multiplicidade (geométrica) de pontos críticos em uma função real sobre  $S^n$ . Tal resultado não apenas é intrigante, mostrando que hipóteses de simetria levam ao aparecimento de vários outros pontos críticos que não sejam extremos (mesmo que locais), mas também transparecem a profunda relação entre a geometria de um conjunto simétrico e as funções aí definidas.

§157. Mas o leitor prático poderia estar se perguntando qual o interesse de se estudar tais resultados clássicos apresentados no capítulo anterior.

O fato relevante é que o teorema devido a Ljusternik e Schnirelman que demonstramos foi o ponto de partida para uma Teoria de Pontos Críticos que se mostrou altamente bem sucedida em aplicações a diversos problemas do Cálculo das Variações, para citar apenas algumas, temos:

- Problemas em dimensão infinita com vínculos, como por exemplo o problema de autovalor não-linear  $\nabla\Phi(x) = \lambda x$ , onde  $\Phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  é um funcional  $G$ -invariante definido sobre um

(I<sub>2</sub>)  $I$  satisfaz a condição de Palais-Smale  $(PS)_c$ , para todo  $c > 0$ .

Logo,  $I$  possui uma seqüência ilimitada de valores críticos  $c_k \rightarrow \infty$ .

OBSERVAÇÃO 12 Em vista de nossa demonstração do teorema de Ljusternik-Schnirelman, o leitor deve estar altamente motivado a definir

$$c_k := \inf_{A \in \Gamma_k} \max_{u \in A} I(u), \quad k \geq 1,$$

com  $\Gamma_k := \{A \in \mathcal{E}_G : \gamma_{\mathbb{Z}_2}(A) \geq k\}$ , e espera-se que tais valores correspondam aos pontos críticos do funcional  $I$ . Infelizmente, tal escolha não tem grande utilidade neste contexto, pelo simples fato de que podemos ter  $c_k = -\infty$ , devido à falta de compacidade.

Como veremos na próxima seção, se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  for limitado, o funcional  $I : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$I(u) := \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p} |u|^p \right) dx$$

satisfaz as hipóteses do Teorema da Fonte, contanto que  $2 < p < 2^*$ . No entanto,  $c_k = -\infty$ ,  $\forall k \geq 1$ .

De fato, se  $V \subset H_0^1(\Omega)$  for um subespaço vetorial de dimensão  $k \geq 1$ , então como todas as normas em tais espaços são equivalentes, teremos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{\substack{u \in V \\ \|u\|_{H_0^1} = r}} I(u) = \lim_{r \rightarrow \infty} \max_{\substack{u \in V \\ \|u\|_{H_0^1} = r}} \left( \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{1}{p} \|u\|_{L^p(\Omega)}^p \right) = -\infty,$$

pois  $p > 2$ . Conseqüentemente, tomando  $A := \partial B_r(0) \cap V$  para  $r$  arbitrariamente grande,  $\gamma_{\mathbb{Z}_2}(A) = k + 1$  e, portanto,  $c_k = -\infty$ .

*Demonstração do Teorema 7.1.* Vamos definir

$$c_k := \inf_{\sigma \in \Gamma_k} \max_{u \in B_k} I(\sigma(u)) \quad (7.1)$$

onde  $B_k := \overline{B_{\rho_k}(0)} \cap Y_k$  e  $\Gamma_k := \{\sigma \in C(B_k; \mathbb{E}) : \sigma \text{ é ímpar e } \sigma|_{\partial B_k} = \text{id}\}$ .

Mostraremos inicialmente que  $c_k \geq b_k$ , de onde irá seguir em particular que  $c_k \rightarrow \infty$ . Esse é o conteúdo do seguinte lema:

LEMA 7.2 (LEMA DE INTERSEÇÃO) *Se  $N_k := \partial B_{r_k}(0) \cap Z_k$ , então  $N_k \cap \sigma(B_k) \neq \emptyset$ ,  $\forall \sigma \in \Gamma_k$ .*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{O}_k := \{u \in B_k : \|\sigma(u)\| < r_k\}$ . Como  $r_k < \rho_k$  e  $\sigma|_{\partial B_k} = \text{id}$ , então  $\mathcal{O}_k$  é aberto em  $Y_k \cong \mathbb{R}^{n_k}$ , onde  $n_k := \dim Y_k$ ; além disso, sendo  $\sigma(0) = 0$ , então  $\mathcal{O}_k$  é uma vizinhança de 0.

Seja  $P_k : \mathbb{E} \rightarrow Y_{k-1}$  uma projeção tal que  $P_k Z_k = 0$ . A aplicação  $P_k \sigma : \partial \mathcal{O}_k \rightarrow Y_{k-1}$  é uma aplicação ímpar e, portanto, segue do Teorema de Borsuk-Ulam que existe  $u_0 \in \partial \mathcal{O}_k$  tal que  $P_k \sigma(u_0) = 0$ ; em outras palavras,  $\sigma(u_0) \in N_k \cap \sigma(B_k)$ . ■

DEFINIÇÃO Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita e  $G$  um grupo compacto agindo diagonalmente sobre  $V^k$ :

$$g(v_1, \dots, v_k) := (gv_1, \dots, gv_k).$$

A ação de  $G$  é dita admissível se toda aplicação  $G$ -equivariante  $\partial\mathcal{O} \rightarrow V^{k-1}$  tiver um zero, onde estamos supondo que  $\mathcal{O} \subset V$  é um aberto limitado  $G$ -simétrico contendo 0 e  $k \geq 2$ ; nesse caso, diremos que  $V$  é uma representação admissível de  $G$ .

EXEMPLO 7.1 Segue do Teorema de Borsuk-Ulam que a ação de  $G := \mathbb{Z}_2$  sobre  $V := \mathbb{R}$  é admissível, o mesmo ocorrendo para a ação de  $S^1$  sobre  $\mathbb{C}$ ; além disso, é possível mostrar que toda ação livre de um grupo solúvel finito sobre um espaço de dimensão finita  $V$  é admissível<sup>(iii)</sup>. ■

O leitor não terá dificuldades agora em verificar que exatamente a mesma demonstração que apresentamos acima se aplica ao Teorema da Fonte no caso de  $G$  agir de maneira admissível em um espaço de dimensão finita  $V$ , contanto que a seguinte hipótese adicional seja feita:

(I<sub>3</sub>)  $G$  age isometricamente sobre  $\mathbb{E} = \overline{\bigoplus_{j \geq 1} V_j}$ , cada  $V_j$  é  $G$ -invariante e existe um isomorfismo  $G$ -equivariante entre  $V_j$  e  $V$ .

Passemos agora às tão aguardadas aplicações.

## 7.2 Retorno ao problema de Dirichlet semilinear

§160. Nosso objetivo nessa seção será aplicar o Teorema da Fonte para obter um resultado de multiplicidade de soluções para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = p(x, u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (7.2)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é aberto limitado e  $p: \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz

(p<sub>1</sub>)  $p \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ .

(p<sub>2</sub>) Existem  $C > 0$  e  $2 < p < 2^*$  tais que

$$|p(x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|^{p-1}), \quad \forall (x, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

<sup>(iii)</sup>Cf. T. Bartsch, [4], pp.1214–1215

em particular,  $(p_3)$  implica um crescimento superlinear da função  $p$ ; além disso, comparando tal desigualdade com  $(p_2)$ , concluímos  $\alpha \leq p$ .

Seja  $(u_k)_{k \geq 1}$  uma seqüência em  $H_0^1(\Omega)$  tal que  $I(u_k) \rightarrow c$  e  $I'(u_k) \rightarrow 0$ . Para  $k$  suficientemente grande,  $I(u_k) \leq c + 1$  e  $\|I'(u_k)\| \leq 1$ , e teremos

$$\begin{aligned} c + 1 + \frac{1}{\alpha} \|u_k\|_{H_0^1(\Omega)} &\geq I(u_k) - \frac{1}{\alpha} I'(u_k)u_k \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u_k|^2 - P(x, u_k) dx - \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 - p(x, u_k)u_k dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) \|u_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} p(x, u_k)u_k - \alpha P(x, u_k) dx. \end{aligned}$$

Mas,

$$\int_{\Omega} p(x, u_k)u_k - \alpha P(x, u_k) dx \geq \int_{[u_k < R]} p(x, u_k)u_k - \alpha P(x, u_k) dx \geq \tilde{C}$$

onde  $\tilde{C}$  é uma constante que independe de  $k$ . Logo, para  $k$  suficientemente grande,

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) \|u_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{1}{\alpha} \|u_k\|_{H_0^1(\Omega)} + \tilde{C}_1 \leq 0$$

e, portanto,  $(u_k)_{k \geq 1}$  é limitada em  $H_0^1(\Omega)$ .

**§162.** Como o Teorema da Fonte se aplica a funcionais pares, a seguinte condição irá garantir tal propriedade ao funcional  $I$ :

$(p_4)$   $p(x, \cdot)$  é ímpar  $\forall x \in \bar{\Omega}$ .

Finalmente, o resultado esperado:

**TEOREMA 7.5** *Se  $p$  satisfizer as condições  $(p_1) - (p_4)$ , então o problema (7.2) possui uma seqüência ilimitada de soluções fracas.*

*Demonstração.* Em virtude das observações acima, será suficiente verificar que a hipótese  $(I_1)$  do Teorema da Fonte é atendida e que a seqüência de pontos críticos é ilimitada.

Seja  $H_0^1(\Omega) = \bigoplus_{j \geq 1} V_j$  uma decomposição qualquer de  $H_0^1(\Omega)$  em subespaços vetoriais de dimensão finita.

Se  $u \in H_0^1(\Omega)$ , segue da estimativa (7.4) que

$$I(u) \leq \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - C_1 \|u\|_{L^\alpha(\Omega)}^\alpha + C_1 |\Omega|. \quad (7.5)$$

de onde segue que  $\beta = 0$ . ■

Segue do Teorema da Fonte que existe uma seqüência ilimitada de valores críticos  $c_k \rightarrow \infty$ . Seja  $(u_k)_{k \geq 1}$  uma seqüência de pontos críticos associada; pela estimativa (7.5), teremos

$$\frac{1}{2} \|u_k\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + C_1 |\Omega| \geq I(u_k) = c_k \rightarrow \infty$$

e, portanto,  $\|u_k\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow \infty$ , o que conclui a demonstração do teorema. ■

EXEMPLO 7.2 Se  $2 < p < 2^*$ , então o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{p-2}u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

admite uma seqüência ilimitada de soluções, para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  (compare este resultado com o penúltimo exemplo do Capítulo 5). ■

### 7.3 Algumas considerações finais

§163. Muito embora tenhamos aplicado as idéias originais de L. Ljusternik e L. Schnirelman na obtenção de resultados de multiplicidade de pontos críticos no caso específico de funcionais pares, culminando com o Teorema 7.5, devemos advertir o leitor de que essa é uma amostra ínfima da vastidão do Cálculo das Variações nos dias atuais.

A quantidade de questões que afloram diretamente do problema semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u = p(x, u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}, \quad (7.6)$$

são tantas e tamanhas que livros inteiros podem ser escritos — e de fato são — apenas sobre esse assunto.

§164. Para citar apenas um exemplo, não se chegou ainda a um veredito final no que se refere ao papel que a simetria assume na existência de infinitas soluções de (7.6).

Como demonstramos na seção anterior, esse fato é verdadeiro no caso de existir  $2 < p < 2^*$  tal que

$$|p(x, \xi)| \leq C(|\xi|^{p-1} + 1), \quad \forall (x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R},$$

Podemos remontar sua origem a um artigo de Ambrosetti e Rabinowitz publicado em 1973 onde estes apresentam o célebre Teorema do Passo da Montanha e sua versão simétrica, a qual reproduzimos aqui com algumas modificações de notação, mas não de conteúdo:

**TEOREMA 7.7 (VERSÃO SIMÉTRICA (PRELIMINAR) DO TEOREMA DO PASSO DA MONTANHA)** *Sejam  $\mathbb{E}$  um espaço de Banach e  $I \in C^1(\mathbb{E}; \mathbb{R})$  um funcional par tal que  $I(0) = 0$  e satisfazendo:*

*(I<sub>1</sub>)  $0 \in \mathbb{E}$  é um mínimo local estrito de  $I$ ;*

*(I<sub>2</sub>) Para todo subespaço vetorial de dimensão finita  $F \subset \mathbb{E}$ , o conjunto  $F \cap [I \geq 0]$  é limitado;*

*(I<sub>3</sub>)  $I$  satisfaz  $(PS)_c, \forall c > 0$ .*

*Logo,  $I$  possui infinitos pontos críticos.* ■

É importante ressaltar que essa versão original sofreu algumas modificações importantes ao longo do tempo: a condição  $(I_1)$  impõe uma forte restrição sobre o comportamento local de  $I$  próximo a 0; além disso, não se tem quaisquer informações sobre o crescimento dos valores críticos.

Modificando-se a classe sobre a qual os valores críticos eram obtidos em termos minimax, chegou-se à seguinte versão usualmente empregada:

**TEOREMA 7.8 (VERSÃO SIMÉTRICA DO TEOREMA DO PASSO DA MONTANHA)** *Sejam  $\mathbb{E}$  um espaço de Banach e  $I \in C^1(\mathbb{E}; \mathbb{R})$  um funcional par tal que  $I(0) = 0$ . Se  $\mathbb{E} = V \oplus X$ , onde  $V$  é de dimensão finita, e se  $I$  satisfizer as seguintes condições:*

*(I'<sub>1</sub>) Existem  $\rho, a > 0$  tais que  $I|_{\partial B_\rho \cap X} \geq a$ ;*

*(I'<sub>2</sub>) Para todo subespaço vetorial de dimensão finita  $F \subset \mathbb{E}$ , existe  $R = R(F) > 0$  tal que  $I|_{F \setminus B_R(0)} \leq 0$ ;*

*(I'<sub>3</sub>)  $I$  satisfaz  $(PS)_c, \forall c > 0$ ;*

*então  $I$  possui uma seqüência ilimitada de pontos críticos.* ■

Evidentemente, as duas últimas condições coincidem com a versão preliminar, ficando as grandes novidades por conta do fato de a seqüência resultante ser ilimitada e de se admitir funcionais tais que 0 não seja um mínimo local; nesse último caso, inclui-se o funcional associado ao Exemplo 7.2 quando  $\lambda \geq \lambda_1$ .

$(\Phi_3)$   $\Phi$  satisfaz  $(PS)_c$ ,  $\forall c > 0$ .

Logo,  $I$  possui uma seqüência ilimitada de valores críticos. ■

**§167.** Agora vamos aos fatos relativos aos teoremas que apresentamos acima.

Com respeito às versões simétricas do Teorema do Passo da Montanha, a última que apresentamos, que admite a ação de grupos admissíveis, possui exatamente a mesma demonstração do Teorema 7.8, com algumas adaptações óbvias na demonstração. Além disso, o fato de admitirmos  $\mathbb{E}$  como sendo um espaço de Hilbert tem por objetivo apenas simplificar a notação utilizada. Dessa forma, os Teoremas 7.8 e 7.10 são basicamente os mesmos.

Além disso, o leitor que examina os enunciados do Teorema da Fonte e do Teorema 7.10 irá observar que a única diferença encontra-se na 2ª condição. Na verdade, como  $b_k \rightarrow \infty$ , então, para  $k \geq k_0$  suficientemente grande, teremos  $b_k > b > 0$  e, portanto, existe  $\rho > 0$  tal que  $\Phi|_{\mathbb{E}_{k-1}^\perp \cap \partial B_\rho(0)} > b$ . Assim, a versão simétrica generalizada do Teorema do Passo da Montanha contém o Teorema da Fonte.

Contudo, a seqüência ilimitada de valores críticos dada por ambos os teoremas é praticamente a mesma, i.e.,

$$c_k = \inf_{\sigma \in \Gamma_k} \max_{u \in B_k} \Phi(\sigma(u))$$

onde  $\Gamma_k := \{\sigma \in C(B_k; \mathbb{E}) : \sigma \text{ é ímpar e } \sigma|_{\partial B_k} = \text{id}\}$  e  $B_k := \overline{B_\rho(0)} \cap \mathbb{E}_k$ , no caso do Teorema 7.8, e  $B_k := \overline{B_{\rho_k}(0)} \cap \mathbb{E}_k$ , no caso do Teorema da Fonte, sendo  $\rho_k > 0$  o raio para o qual o valor  $b_k$  é atingido.

Além disso, um resultado demonstrado por Shujie Li em 1986 e que fornece uma recíproca parcial para a questão de coercividade no problema de minimização que apresentamos no Capítulo 5 parece ser bastante pertinente nesse caso.

**§168.** Consideremos  $X$  um espaço de Banach reflexivo e  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional de classe  $C^1$  limitado inferiormente. Caso  $\Phi$  seja coercivo e fracamente semicontínuo inferiormente, o Teorema 5.2 garante que o ínfimo de  $\Phi$  é, de fato, atingido. No entanto, se retirarmos a hipótese de coercividade do funcional, não é possível concluir a existência de tal ponto de mínimo.

Utilizando o Princípio Variacional de Ekeland, demonstra-se que, mesmo sem qualquer hipótese de coercividade, existe uma seqüência de Palais-Smale convergindo a  $\inf \Phi$ , ou seja, existe uma seqüência minimizante  $(u_k)_{k \geq 1}$  tal que  $\Phi'(u_k) \rightarrow 0^{(viii)}$ . Dessa maneira, caso  $\Phi$  satisfaça  $(PS)_{\inf \Phi}$ ,

<sup>(viii)</sup>Cf. D. G. de Figueiredo, [25], pp.24-30; J. Mawhin, M. Willem, [45], pp.75-77.

## Apêndice A

# Alguns resultados sobre funções sub-harmônicas

### A.1 Princípio do Máximo

Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado e  $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  uma subsolução da equação  $-\Delta u = 0$ , i.e.,  $-\Delta v \leq 0$  em  $\Omega$ . Mostraremos que  $\max_{\partial\Omega} v = \max_{\bar{\Omega}} v$  (Princípio do Máximo fraco).

Vamos considerar inicialmente o caso  $-\Delta v < 0$  em  $\Omega$  e suponhamos por absurdo que o máximo de  $v$  fosse atingido num ponto  $x_0 \in \Omega$ . Assim,  $\nabla v(x_0) = 0$  e  $\frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2}(x_0) \leq 0$ , se  $1 \leq k \leq n$ , de onde segue que  $-\Delta v(x_0) \geq 0$ , um absurdo. Portanto, se  $-\Delta v < 0$ , então o máximo de  $v$  será atingido em  $\partial\Omega$ .

Agora, se tivermos apenas  $-\Delta v \leq 0$  em  $\Omega$ , então dado  $\varepsilon > 0$ , definiremos  $v_\varepsilon(x) := v(x) - \varepsilon|x|^2$ . Nesse caso,

$$-\Delta v_\varepsilon = -\Delta v - 2n\varepsilon < 0 \text{ em } \Omega$$

e, em virtude do parágrafo anterior,  $\max_{\partial\Omega} v_\varepsilon = \max_{\bar{\Omega}} v_\varepsilon$ . Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  e utilizando um argumento elementar de compacidade, teremos  $\max_{\partial\Omega} v = \max_{\bar{\Omega}} v$ . ■

Em particular, caso  $v$  seja harmônica, aplicando o resultado acima a  $v$  e  $-v$  virá

$$\min_{\partial\Omega} v \leq v(x) \leq \max_{\partial\Omega} v, \quad \forall x \in \Omega.$$

Dados  $v \in C(\Omega)$  e uma bola  $B \subset\subset \Omega$ , seja  $\bar{v}$  a função harmônica em  $\bar{B}$  tal que  $\bar{v} = v$  sobre  $\partial B$ . Definimos o levantamento harmônico de  $v$  em  $B$  como sendo a função  $V \in C(\Omega)$  dada por

$$V(x) := \begin{cases} v(x), & \text{se } x \in \Omega \setminus B \\ \bar{v}(x), & \text{se } x \in \bar{B} \end{cases}.$$

Em virtude da caracterização acima, temos  $v \leq V$  em  $\Omega$  (daí o nome levantamento).

Ressaltamos que  $V$  é sub-harmônica. De fato, sejam  $\tilde{B} \subset\subset \Omega$  uma bola e  $h$  uma função harmônica em  $\tilde{B}$  tal que  $V \leq h$  sobre  $\partial\tilde{B}$ . Caso  $\tilde{B} \cap B = \emptyset$  ou  $\tilde{B} \subset B$ , é claro que  $V \leq h$  em  $\tilde{B}$ . Suponhamos então que  $\tilde{B} \cap B \neq \emptyset$  e  $\tilde{B} \cap (\Omega \setminus B) \neq \emptyset$ . Como  $v \leq V \leq h$  sobre  $\partial\tilde{B}$ , então  $v \leq h$  em  $\tilde{B}$ . Logo,  $\bar{v} \leq h$  sobre  $\partial(\tilde{B} \cap B)$  e  $\bar{v} \leq h$  em  $\tilde{B} \cap B$ , ou seja,  $V \leq h$  e  $V$  é sub-harmônica. ■

**OBSERVAÇÃO** Resultados inteiramente análogos aos deste Apêndice podem ser obtidos substituindo-se o prefixo sub por super.

# Referências Bibliográficas

- [1] AHLFORS, Lars V. *Complex Analysis : An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. 3ª ed. New York : McGraw-Hill Book Company, 1979.
- [2] AMBROSETTI, Antonio e RABINOWITZ, Paul H. “Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications”. *J. Funct. Anal.* **14** (1973), pp.349–381.
- [3] BARTSCH, Thomas. *Topological Methods for Variational Problems with Symmetries*. 1ª ed. Berlin : Springer-Verlag, 1993. (Lecture Notes in Mathematics, 1560)
- [4] ———. “Infinitely many solutions of a symmetric Dirichlet problem”. *Nonlinear Anal.* **20** (10) (1993), pp.1205–1216.
- [5] BIRKHOFF, George David (Ed.). *A Source Book in Classical Analysis*. s.ed. Cambridge, Mass : Harvard University Press, 1973.
- [6] BRELOT, Marcel. “Historical Introduction”. In : BRELOT, Marcel (Ed.). *Potential Theory* (C.I.M.E., 1º ciclo, 1969), Roma : Cremonese, 1970. pp.1–21.
- [7] BRESSOUD, David. *A Radical Approach to Real Analysis*. 1ª ed. [S.l.] : The Mathematical Association of America, 1994. (Classroom Resource Materials Series, 2)
- [8] BRÉZIS, Haïm. *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications*. 2ª ed. Paris : Dunod, 1999.
- [9] CHABROWSKI, Jan. *Variational Methods for Potential Operator Equations : With Applications to Nonlinear Elliptic Equations*. 1ª ed. Berlin : Walter de Gruyter, 1997. (de Gruyter Studies in Mathematics, 24)
- [10] COURANT, Richard. *Calculus of Variations*. s.ed. New York : Courant Institute of Mathematical Sciences, 1945–1946. (Revisto e ampliado por J. Moser em 1962)

- [24] ———. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. 2ª ed. Rio de Janeiro : Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1987.
- [25] ———. *The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*. s.ed. Berlin : Springer-Verlag, 1989.
- [26] FOLLAND, Gerald B. *Introduction to Partial Differential Equations*. 2ª ed. Princeton : Princeton University Press, 1995.
- [27] FORSYTH, A. R. *Theory of Functions of a Complex Variable*. 3ª ed. New York : Dover Publications, 1965. 2v. (Republicação da 3ª ed., editada por Cambridge University Press em 1918) v.2.
- [28] FOURIER, Jean Baptiste Joseph. *Théorie Analytique de la Chaleur*. 1ª ed. Paris : Firmin Didot, Père et Fils, 1822. In : DARBOUX, Gaston (Ed.). *Œuvres de Fourier*. Paris : Gauthier-Villars et Fils, 1888. 2v., v.1.
- [29] GARABEDIAN, Paul R. *Partial Differential Equations*. 1ª ed. New York : John Wiley & Sons, 1964.
- [30] GIAQUINTA, Mariano e HILDEBRANDT, Stefan. *Calculus of Variations II : The Hamiltonian Formalism*. 1ª ed. Berlin : Springer-Verlag, 1996. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 311)
- [31] GIGLIOLI, Antonio. *Equações Diferenciais Parciais Elípticas*. 10º Colóquio Brasileiro de Matemática (Poços de Caldas - MG), Rio de Janeiro : Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1975.
- [32] GILBARG, David e TRUDINGER, Neil S. *Elliptic partial differential equations of second order*. 2ª ed. Berlin : Springer-Verlag, 1998. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 224)
- [33] GOURSAT, Édouard. *Cours d'Analyse Mathématique*. 5ª ed. Paris : Gauthiers-Villars, 1942.
- [34] HACKBUSCH, Wolfgang. *Elliptic Differential Equations : Theory and Numerical Treatment*. 1ª ed. Berlin : Springer-Verlag, 1992. Tradução de : Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen, mit Genehmigung des Verlages.

- [48] POINCARÉ, Henri. “Sur le Problème de la Distribution Électrique”. *C. R. Acad. Sc. Paris* **104** (1887), pp.44–46. In : *Œuvres de Henri Poincaré*. s.ed. Paris : Gauthier-Villars, 1950–1956. 11v. v.9, pp.15–17.
- [49] ———. “Sur les Équations aux Dérivées Partielles de la Physique Matématique”. *Amer. J. Math.* **12** (1890), pp.211–294. In : H. Poincaré, op cit. v.9 , pp.28–111.
- [50] ———. *O valor da Sciencia*. s.ed. Rio de Janeiro : Livraria Garnier, 1924. Tradução de : La Valeur de la Science.
- [51] PONCE, Augusto César. “Problema antiquum ad cujus solutionem mathematici invitantur”, 1998. Trabalho inédito.
- [52] PRYM, F. E. “Zur Integration der Differentialgleichung  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ”. *J. Reine Angew. Math.* **73** (1871), pp.340–364.
- [53] RABINOWITZ, Paul. *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*. 1<sup>a</sup> ed. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 1986. (Regional conference series in mathematics, 65)
- [54] ROBERT, Paul. *Le Grand Robert de la Langue Française : Dictionnaire Alphabétique et Analogique de la Langue Française*. 2<sup>a</sup> ed. Paris : le Robert, 1985. 9v.
- [55] SOBOLEV, S. L. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. s.ed. Oxford : Pergamon Press, 1964. (Traduzido da 3<sup>a</sup> edição russa por E.R. Dawson)
- [56] STRUWE, Michael. *Variational Methods : Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*. 3<sup>a</sup> ed. Berlin : Springer-Verlag, 2000.
- [57] TAYLOR, Angus E. *Introduction to Functional Analysis*. 1<sup>a</sup> ed. New York : John Wiley & Sons, 1958.
- [58] TRÈVES, François. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*. 1<sup>a</sup> ed. New York : Academic Press, 1967. (Pure and Applied Mathematics, 25)
- [59] WEIERSTRASS, Karl. “Über das Sogenannte Dirichlet’sche Princip.”. *Königl. Akademie der Wissenschaften* **14** (1870). In : *Mathematische Werke*. s.ed. Hildesheim : Georg Olms Verlagsbuchhandlung, New York : Johnson Reprint Corporation, 1967. 5v.