

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica

Dissertação de Mestrado

**Remigração na profundidade mediante a equação
da onda imagem**

Autor: **Fernando Perin Munerato**

Orientador: **Prof. Dr. Jörg Schleicher**

Co-orientadora: **Profa. Dra. Amélia Novais**

Campinas, SP

Março 2006

Remigração na profundidade mediante a equação da onda imagem

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Fernando Perin Munerato e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 31 de março de 2006.

Prof. Dr. Jörg Schleicher

Orientador

Profa. Dra. Amélia Novais

Co-orientadora

Banca Examinadora

Prof. Dr. Jörg Schleicher

Prof. Dr. Maurilio Boaventura

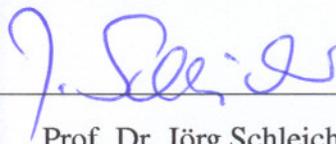
Prof. Dr. Ricardo Biloti

Dissertação de Mestrado apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada.

Remigração na profundidade mediante a equação da onda imagem

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Fernando Perin Munerato e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 31 de março de 2006.



Prof. Dr. Jörg Schleicher

Orientador



Profa. Dra. Amélia Novais

Co-orientadora

Banca Examinadora

Prof. Dr. Jörg Schleicher

Prof. Dr. Maurilio Boaventura

Prof. Dr. Ricardo Biloti

Dissertação de Mestrado apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 859

Munerato, Fernando Perin

M923r Remigração na profundidade mediante a equação da onda imagem
/ Fernando Perin Munerato -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientador : Joerg Schleicher

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Ondas sísmicas. 2. Diferenças finitas. 3. Método de volumes finitos. 4. Análise numérica. I. Schleicher, Joerg. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Depth remigration by means of the image wave equation.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Seismic wave. 2. Finite difference. 3. Finite volume method. 4. Numerical analysis.

Área de concentração: Geofísica computacional

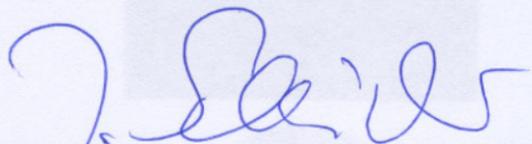
Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Joerg Schleicher (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Maurilio Boaventura (IBILCE-UNESP)
Prof. Dr. Ricardo Biloti (IMECC-UNICAMP)

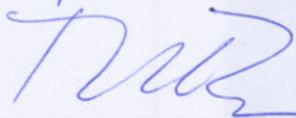
Data da defesa: 31/03/2006

Dissertação de Mestrado defendida em 31 de março de 2006 e aprovada

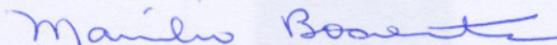
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). JOERG DIETRICH WILHELM SCHLEICHER



Prof. (a). Dr (a). RICARDO CAETANO AZEVEDO BILOTI



Prof. (a). Dr (a). MAURILIO BOAVENTURA

Resumo

Palavras-chave: Remigração, onda imagem, diferenças finitas, volumes finitos, análise numérica

Este trabalho aborda a questão de como resolver a equação da onda imagem para o problema de remigração na profundidade através de métodos numéricos. O objetivo deste problema é a reconstrução de uma imagem das camadas geológicas do subsolo a partir de uma imagem previamente migrada com um modelo de velocidade, geralmente, incorreto.

Nosso principal objetivo neste trabalho é a investigação de possíveis métodos que possam resolver os problemas que surgiram ao usarmos esquemas explícitos do método de diferenças finitas na solução da equação da onda imagem em trabalhos anteriores, como, por exemplo, a dispersão numérica. Para isso, estudamos aqui o método de volumes finitos, assim como esquemas implícitos do método de diferenças finitas.

O método de volumes finitos possui como característica principal propagar as médias das células da malha ao invés de simplesmente os dados pontuais como é feito no método de diferenças finitas.

As outras tentativas para solucionar o problema da dispersão foram dois tipos de implementação de esquemas implícitos do método de diferenças finitas, isto é, implementações implícitas de esquemas convencionais avaliados em pontos da malha e um esquema avaliado nos centros das células.

A qualidade dos algoritmos estudados foi testada numericamente. Estes testes numéricos mostram que o método de volumes finitos não é adequado para resolver o problema da dispersão, uma vez que a média calculada a cada passo aumenta o estiramento do pulso. Além disso, as implementações implícitas dos esquemas convencionais mostram o mesmo comportamento de dispersão que as implementações explícitas. Unicamente o esquema centrado foi capaz de melhorar a dispersão numérica em comparação com as implementações anteriores, porém somente para dados contendo exclusivamente baixas frequências.

Abstract

Keywords: Remigration, image wave, finite differences, finite volumes, numerical analysis

This work approaches the question of how to solve the image-wave equation for depth remigration by numerical methods. The objective is the reconstruction of an image of the geologic layers of the subsoil from a previously migrated image with a different velocity model.

Our main objective in this work is the investigation of possible methods that can solve the problems that appeared when using explicit finite-difference schemes for the solution of the image-wave equation in previous works, particularly numerical dispersion. For this purpose, we study the method of finite volumes, as well as implicit finite-difference schemes.

The main characteristic of the finite-volume method is to simply propagate the averages in the cells of the mesh instead of the discretized data themselves as it is done in the finite-difference method.

As another attempt to solve the problem of the dispersion, we study two types of implementation of implicit finite-difference schemes, that is, implicit implementations of conventional schemes evaluated out the edge of the cell and a scheme evaluated in the center of the cell.

The quality of the studied algorithms has been tested numerically. These numerical tests show that the method of finite volumes is not adequate to solve the problem of dispersion, for the average calculated in each step additionally increases the pulse stretch. Moreover, the implicit implementations of the conventional schemes show the same dispersion behavior as the explicit implementations. Solely the centered scheme was capable to improve the numerical dispersion in comparison with the previous implementations, however only for data containing exclusively low frequencies.

“A casa da saudade chama-se memória: é uma cabana pequenina a um canto do coração.”(Henrique Maximiliano Coelho Neto)

Às nossas boas lembranças (aquelas que ninguém pode tirar de nós, que estão guardadas no nosso íntimo) que existem para nos dar força para nos ajudar a enfrentar momentos difíceis em nossa vida. (Sandra Marega)

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jörg Schleicher, por acreditar na minha capacidade acadêmica, pela paciência em repetir diversas vezes um mesmo tópico, pelos nossos trabalhos durante mais de 4 anos e, principalmente, pelas suas infinitas reflexões olhando diretamente nos nossos olhos.

À minha co-orientadora, Profa. Dra. Amélia Novais, pelo apoio acadêmico e pessoal nos momentos felizes e tristes dessa “nossa” caminhada. Também pela sua maneira “mãe” de orientar e pelos infinitos lenços de papel utilizados nas nossas conversas amigas.

À toda minha família, principalmente, minha querida mãe Jandira, por toda luta travada e pelo seu eterno amor, minhas queridas irmãs Juciléia e Silvia, por todo amor de seus olhos e minha grande namorada e melhor amiga Ticiania, por todo seu amor, sua paciência, seu sorriso, sua família e, principalmente, os lindos momentos ao seu lado.

Ao meu pai, José Wagner Moura Reis (em memória), por apostar e confiar em mim e possibilitar meu primeiro passo nessa caminhada.

Aos antigos e eternos amigos, em especial o “grande” Minhão, por todo ensinamento e alegria nos vários anos de convivência. Aos atuais e presentes amigos, pela compreensão, pelas experiências, pelas risadas e, principalmente, pelos momentos de descontração em nossas festas.

Ao sorriso sincero das crianças, em particular, àquelas que motivam ainda mais minha batalha, Marília Naomi Hatori Rock’n Roll Super Poderosa, Luísa, Maria Clara, Lucas, Mirko e Arthur.

Aos professores e amigos acadêmicos que sempre estiveram de portas abertas para me receber e por serem pessoas fantásticas além dos portões da universidade: Fátima, Chico, Talita, Cheti, Lúcio, Tânia, Biloti e Ary.

À amizade e àqueles que fazem desta um incentivo para minha vida: Alessandra, Ana Carolina e Gabi, pelo companherismo durante toda a graduação e todo o mestrado. Aleixo, Gabriel, Flávia, Marcela, Ricardinho, Vanessa e Vânia, pelos bons momentos vividos na graduação. Ana Letícia, Janne e Mari Aiub, pelo carinho, jogos e alegria, respectivamente. Fred, Juliano, Márcio, Marquinho e Neto, por me aturarem morando junto deles. Vera, Jana e Lincoln, por zelarem por mim como membro da família. Camila, Gabi, Juliana e Processinho, pelos momentos inesquecíveis de alegria e diversão. Heid, Matheus e Maurício, por terem feito e fazerem parte da minha vida. Lopes, Wando e Vivi, pela convivência hoje. Valéria por toda ajuda amiga, principalmente nos momentos de desespero. Priscila e os amigos do apoio do vestibular. Os companheiros do LGC. Os amigos da faculdade em geral. Os amigos do messenger. E, é claro, os amigos sem grupo.

À UNICAMP e ao IMECC pela infraestrutura disponibilizada.

À FAPESP pelo suporte financeiro.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte desta etapa da minha vida meus sinceros agradecimentos.

Sumário

Lista de Figuras	x
1 Introdução	1
2 Equação da onda imagem	8
3 Introdução ao método de volumes finitos	12
3.1 Desenvolvimento	12
3.2 Implementação	16
4 Esquemas de diferenças finitas implícitos	20
4.1 Esquemas implícitos convencionais	20
4.1.1 Desenvolvimento	21
4.1.2 Implementação	22
4.2 Esquema avaliado no centro da célula	26
4.2.1 Desenvolvimento	26
4.2.2 Consistência	29
4.2.3 Estabilidade	37
4.2.4 Dispersão	41
4.2.5 Dissipação	46
4.2.6 Implementação	47

5 Experimentos numéricos	50
5.1 Refletor plano	50
5.2 Método de volumes finitos	52
5.3 Esquemas implícitos convencionais	56
5.4 Esquema implícito avaliado no centro da célula	57
5.5 Tempos computacionais	68
6 Conclusões	71
Referências bibliográficas	74
A Equação do envelope para onda imagem	76
B Equação iconal da onda imagem	78
C Equação iconal independente de F	80
D Matrizes de iteração do esquema centrado	82
E Mudança de variável na equação da onda imagem	84
E.1 Consistência	84
E.2 Estabilidade	85
E.3 Dispersão numérica	85

Lista de Figuras

1.1	Imagem do refletor plano remigrado (esquerda) e migrado (direita) com velocidades: (a) $v = 2320$ m/s, (b) $v = 2680$ m/s e (c) $v = 3000$ m/s. A migração foi feita por migração Kirchhoff convencional e a remigração através do método DF (esquema avançado em v e z).	5
2.1	Representação de um ponto $P_0(x_0, z_0)$ sobre o refletor.	9
2.2	Representação gráfica das isócronas quando: (a) se interceptam no ponto refletor $P_0(x_0, z_0)$, (b) não mais se interceptam no ponto refletor $P(x_0, z_0)$, aqui para uma velocidade $v > v_0$	10
3.1	Malha representando a célula $C_{m,n}$	13
3.2	Ilustração do algoritmo REA para uma malha de dados. Os dados iniciais são subdivididos em células $C_{m,n}$ e usa-se a expressão (3.1) para calcular as médias nessas células. Passo 1: reconstrução da malha a partir das médias $P_{m,n}^l$. Passo 2: evolução dos dados para um nível posterior na velocidade (através de algum método). Passo 3: cálculo das novas médias no novo nível.	15
3.3	Ilustração do algoritmo REA para uma malha discreta de dados. Os dados iniciais são subdivididos em células $C_{m,n}$ e usa-se uma das equações (3.9) para calcular as médias nessas células. Passo 1: reconstrução da malha discreta, como sugerido ser o caso mais simples, $p_{m,n}^l = P_{m,n}^l$. Passo 2: evolução dos dados para um nível posterior na velocidade, usando método de DF. Passo 3: cálculo das novas médias no novo nível.	17

4.1	Aproximação do ponto $(x_m, z_{n+1/2}, v_{l+1/2})$	27
4.2	Visualização da distância de propagação.	42
4.3	Gráfico da relação entre o número de passos das mudanças de variável em função da razão entre a maior e a menor velocidade.	49
5.1	Modelo de afastamento nulo para refletor plano horizontal.	51
5.2	Seções migradas na profundidade com velocidade de migração (a) $v = 2000$ m/s e (b) $v = 4000$ m/s.	51
5.3	Imagem do refletor plano remigrado com velocidades: (a) $v = 2320$ m/s, (b) $v = 2680$ m/s e (c) $v = 3000$ m/s, para o esquema avançado em v e z . Esquerda: Método de diferenças finitas explícito. Direita: Método de volumes finitos.	53
5.4	Imagem do refletor plano remigrado com velocidades: (a) $v = 3680$ m/s, (b) $v = 3320$ m/s e (c) $v = 3000$ m/s, para o esquema avançado em v e atrasado em z . Esquerda: Método de diferenças finitas explícito. Direita: Método de volumes finitos.	55
5.5	Imagem do refletor plano remigrado com velocidades: (a) $v = 2320$ m/s, (b) $v = 2680$ m/s e (c) $v = 3000$ m/s, para o esquema avançado em v e z . Esquerda: Método de diferenças finitas explícito. Direita: Método de diferenças finitas implícito fixando x	58
5.6	Imagem do refletor plano remigrado com velocidades: (a) $v = 2320$ m/s, (b) $v = 2680$ m/s e (c) $v = 3000$ m/s, para o esquema avançado em v e z . Esquerda: Método de diferenças finitas explícito. Direita: Método de diferenças finitas implícito fixando z	59
5.7	Imagem do refletor plano remigrado com velocidades: (a) $v \approx 2320$ m/s, (b) $v \approx 2680$ m/s e (c) $v \approx 3000$ m/s. Esquerda: Método de diferenças finitas explícito. Direita: Método de diferenças finitas implícito centrado no centro da célula.	61

-
- 5.8 Imagens do refletor plano, na velocidade correta do meio $v = 3000$ m/s, para diferentes valores de $\Delta\sigma$. A remigração foi feita utilizando o método de diferenças finitas implícito centrado no centro da célula. 63
- 5.9 Imagem do refletor plano remigrado pelo método de DF implícito centrado no centro da célula com velocidades: (a) $v \approx 2320$ m/s, (b) $v \approx 2680$ m/s e (c) $v \approx 3000$ m/s. Esquerda: incrementos espaciais $\Delta x = \Delta z = 10$ m. Direita: incrementos espaciais $\Delta x = \Delta z = 5$ m. 64
- 5.10 Seção migrada na profundidade com velocidade $v = 2000$ m/s, com conteúdo maior de baixas frequências. 65
- 5.11 Imagem do refletor plano, com menor conteúdo de altas frequências, remigrado com velocidades: (a) $v \approx 2320$ m/s, (b) $v \approx 2680$ m/s e (c) $v \approx 3000$ m/s. Esquerda: Método de diferenças finitas explícito. Direita: Método de diferenças finitas implícito centrado no centro da célula. 66
- 5.12 Imagem do refletor plano, com menor conteúdo de altas frequências, remigrado (esquerda) e migrado (direita) com velocidades: (a) $v \approx 2320$ m/s, (b) $v \approx 2680$ m/s e (c) $v \approx 3000$ m/s, respectivamente. A migração foi feita por migração Kirchhoff e o esquema utilizado para remigração foi DF implícito centrado no centro da célula. 67

Capítulo 1

Introdução

A Geofísica dedica-se à determinação dos parâmetros do interior da terra por experimentos físicos realizados em sua superfície. Entre os vários métodos físicos empregados para este objetivo, a sísmica tem um papel fundamental. Métodos sísmicos trabalham usando os princípios da ecografia. Estes métodos baseiam-se na propagação de energia em forma de ondas elásticas ou acústicas na Terra. Existem fontes naturais (terremotos) e artificiais (explosões, vibradores, etc.) que geram ondas sísmicas. Por meio do registro dessas ondas, em chamadas *seções sísmicas*, obtém-se uma imagem distorcida no tempo da situação geológica no subsolo.

O objetivo principal tanto da sismologia de terremotos quanto da sísmica de exploração é a reconstrução da melhor imagem possível não distorcida na profundidade a partir desta imagem distorcida no tempo. Para este objetivo, empregam-se os chamados métodos de imageamento, entre eles principalmente o da *migração*. Uma vez que estes métodos dependem do conhecimento de um modelo de velocidade do subsolo, que não é conhecido *a priori*, é de praxe que uma migração seja aplicada várias vezes com modelos de velocidade variados.

Uma alternativa à migração repetida dos dados originais consiste na chamada *remigração* ou *continuação de velocidade*, i.e., a construção da imagem migrada para um modelo de velocidade atualizado a partir de uma imagem anterior, obtida com um modelo original. Para a realização deste processo de imageamento, existem várias técnicas. Neste trabalho, estudamos a chamada *equação da onda imagem* para remigração, desenvolvida por Fomel (1994)

e Hubral et al. (1996), observando a necessidade de melhorar a imagem obtida, uma vez que o modelo correto da velocidade de migração não é conhecido e tem que ser determinado durante o processo da construção da melhor imagem possível. Portanto, convém variar o modelo de velocidade e construir as correspondentes imagens. Quando é feita tal variação da velocidade, observa-se que as novas imagens dos refletores (fronteiras entre as camadas geológicas) comportam-se de forma similar à propagação de uma frente de onda em diferentes instantes. Esta “propagação” de imagens é descrita por uma equação diferencial parcial semelhante à equação da onda (Fomel, 1994; Hubral et al., 1996) que, conseqüentemente, recebe o nome de “equação da onda imagem para remigração” (Hubral et al., 1996).

Existem equações da onda imagem para a remigração no *tempo* e na *profundidade*. A utilidade da equação da onda imagem no tempo já foi comprovada na prática (Jaya et al., 1999). Resultados recentes para a análise de velocidade, usando a remigração no tempo, também mostraram-se bastante promissores (Fomel, 2003).

Neste trabalho, tratamos da equação na profundidade, a saber,

$$p_{xx} + p_{zz} + \frac{v}{z}p_{vz} = 0. \quad (1.1)$$

A dedução da equação (1.1) se encontra no Capítulo 2. Aqui, p representa o campo de onda imagem, i.e., a seção migrada em função da velocidade de migração, v . Além disso, x e z representam as variáveis espaciais, sendo x a coordenada horizontal e z a profundidade. Nesta equação, a variável de propagação, no entanto, não é o tempo como no caso de ondas físicas convencionais, mas a velocidade de migração, v . Esta equação está em sua forma bidimensional e é estritamente válida somente para meios homogêneos. Apesar disso, pode ser aplicada para meios inomogêneos com variação vertical de velocidade, como mostrado em Schleicher et al. (2003b, 2004a). A condição inicial para o problema é dada por um campo de ondas migrado, p_0 . As condições de contorno são, em conseqüência da falta de dados fora do domínio a ser migrado, tomadas nulas.

Observamos que em comparação com a equação da onda, ao invés da derivada segunda com respeito à variável de propagação, a equação da onda imagem contém uma derivada mista que envolve uma coordenada espacial. Esta característica reflete o fato de que o campo de

onda p que satisfaz a equação (1.1) possui um comportamento cinemático diferente das ondas convencionais (Fomel, 1994; Hubral et al., 1996; Schleicher et al., 2004a).

Mediante um estudo numérico da equação da onda imagem (Schleicher et al., 2003a, 2004a), vimos que imagens remigradas de refletores propagam à profundidade correta quando a velocidade atinge o seu valor correto e estruturas como pontos difratores se focalizam na profundidade correta assim como gravatas se dissolvem corretamente. Os primeiros exemplos realizados em meios não homogêneos (Schleicher et al., 2003b, 2004a) mostram que é possível levar a técnica adiante. Estas aplicações numéricas indicam o potencial da remigração da onda imagem de ser útil como uma ferramenta para análise de velocidade de migração quando se possui informação adicional sobre a posição do refletor, por exemplo, a sua profundidade medida em um poço.

O objetivo concreto deste trabalho é a análise de métodos numéricos para solucionar a equação da onda imagem, com a finalidade de contribuir com a análise de velocidade de migração. Como foi mostrado em Fomel (2003) e Schleicher et al. (2004a), o uso da solução numérica das equações da onda imagem no tempo e na profundidade possui um potencial neste sentido. Para a remigração na *profundidade*, este potencial é difícil de ser explorado, principalmente por causa das dificuldades numéricas, especialmente a dispersão numérica dos esquemas de diferenças finitas estáveis. Aqui continuamos os estudos desta equação que foi iniciado em Schleicher et al. (2003a, 2004a), onde foram testados esquemas explícitos do método de diferenças finitas para diversas aproximações da derivada mista assim como algumas mudanças de variáveis para a velocidade de migração. Em todos os casos estudados anteriormente não foi encontrado um método numérico que faça a remigração na profundidade através da equação da onda imagem sem que ocorresse um forte efeito de dispersão numérica, mesmo que a estabilidade e a consistência do método estejam garantidas.

O efeito de dispersão ocorre quando ondas de diferentes frequências propagam com diferentes velocidades distorcendo, desta forma, o formato do pulso da onda. Quando as velocidades das ondas de diferentes frequências realizadas pelo esquema numérico são diferentes da solução exata do problema, fala-se de *dispersão numérica*. Este efeito, intrínseco de métodos de diferenças finitas, aqui é tão forte que influencia a resolução nos testes numéricos quando usamos

o método de diferenças finitas para simular a propagação da onda imagem. Para cada um dos esquemas investigados em Schleicher et al. (2003a, 2004a) observou-se que o comprimento do pulso não se mantinha igual ao comprimento obtido pela migração direta dos dados para velocidades correspondentes.

Esta desvantagem do método pode ser observada quando comparamos os resultados da técnica de remigração com imagens migradas correspondentes, obtidas por migração direta dos dados sísmicos originais. A Figura 1.1 mostra tal comparação para dados sintéticos de afastamento nulo, modelados, por exemplo, com um único refletor horizontal em 550 m de profundidade (modelo descrito detalhadamente no Capítulo 5). Na Figura 1.1 fica evidente a diferença entre as larguras dos pulsos obtidos pela migração direta dos dados distorcidos no tempo e pela largura do pulso quando fazemos a remigração da onda imagem através do método de diferenças finitas a partir de uma imagem previamente migrada com velocidade supostamente incorreta de 2000 m/s. No lado esquerdo, estão as imagens obtidas pela remigração por onda imagem nas velocidades 2320 m/s, 2680 m/s e 3000 m/s. No lado direito, para efeito de comparação, estão as correspondentes imagens obtidas por migração direta dos dados originais no tempo usando migração de Kirchhoff convencional com as velocidades 2320 m/s, 2680 m/s e 3000 m/s, respectivamente. São estas as imagens que deveriam ser obtidas na propagação da onda imagem.

Observa-se que as imagens do refletor estão posicionadas corretamente, na mesma profundidade da migração direta. Para a velocidade correta do meio, Figuras 1.1c, a imagem se encontra na posição correta do refletor indicada pela linha preta. Observa-se ainda que o formato do pulso não é o mesmo. A diferença do comprimento do pulso das figuras da direita para as da esquerda se deve a dispersão numérica do esquema de diferenças finitas utilizado para a realização da propagação. Nota-se também que mesmo nas figuras da direita, o pulso se estica com o aumento da velocidade de migração. Este é o efeito de estiramento do pulso introduzido pela própria migração (Tygel et al., 1994), que não pode ser removido. Ele se reflete no fato de que a equação (1.1) possui dispersão intrínseca (Schleicher et al., 2004a). O estiramento adicional gerado pela dispersão numérica, nas figuras da esquerda, é criado somente pela forma em

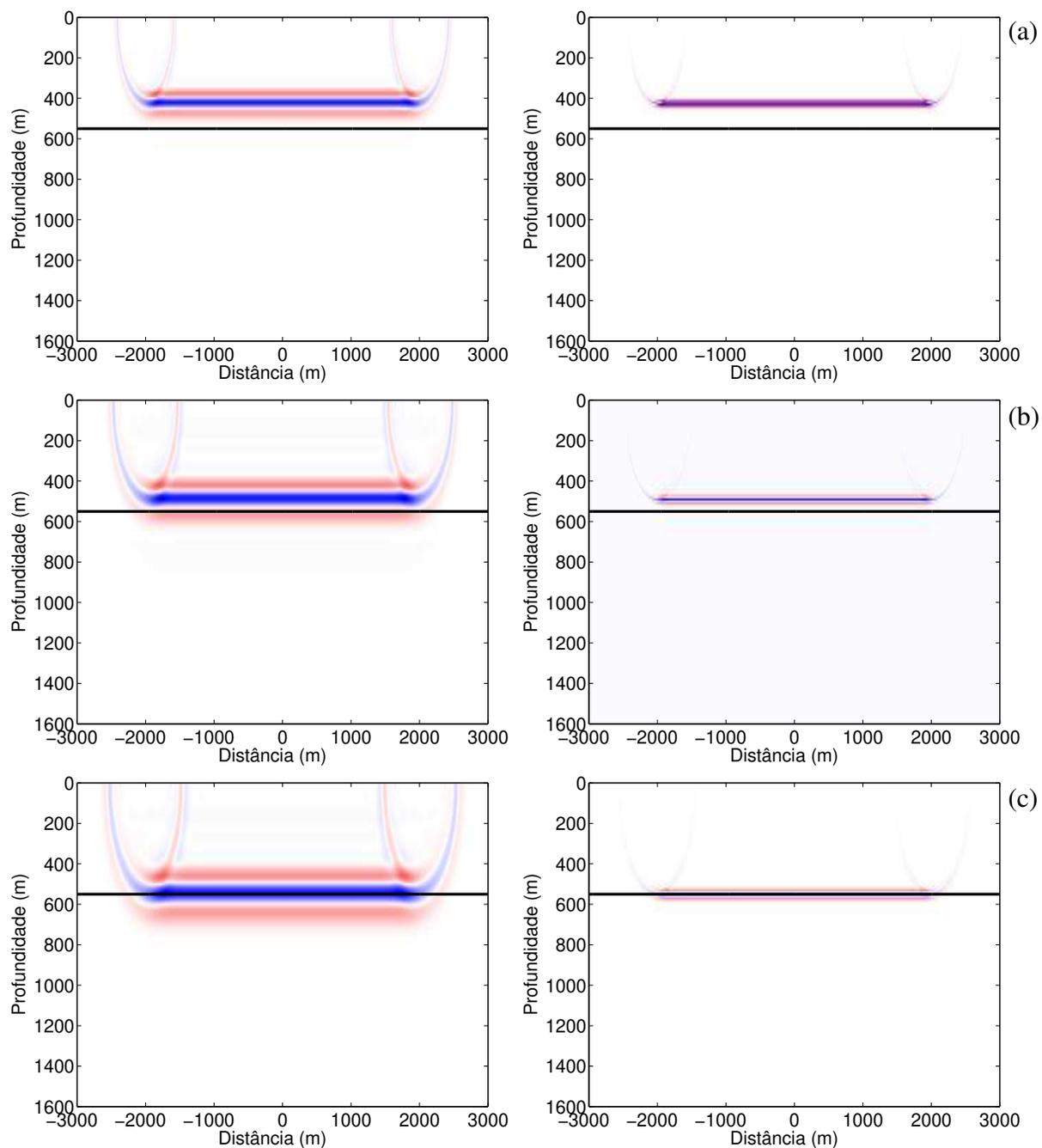


Figura 1.1: Imagem do refletor plano remigrado (esquerda) e migrado (direita) com velocidades: (a) $v = 2320$ m/s, (b) $v = 2680$ m/s e (c) $v = 3000$ m/s. A migração foi feita por migração Kirchhoff convencional e a remigração através do método DF (esquema avançado em v e z).

que a equação (1.1) é implementada e é altamente indesejável, uma vez que causa uma perda significativa de resolução da imagem remigrada. Pela Figura 1.1, é claramente visível o quão difícil seria a detecção de um segundo refletor horizontal perto do primeiro, digamos em 500 m de profundidade. Enquanto no lado direito, as imagens dos dois refletores ficariam claramente separadas, no lado esquerdo os seus pulsos se sobreporiam, o que impossibilitaria a distinção dos dois refletores.

Motivados por esta observação, estudamos neste trabalho outras maneiras de implementar a equação da onda imagem para remigração na profundidade (1.1) em busca de uma solução para o problema dos efeitos numéricos indesejados que aparecem na propagação pelo método de diferenças finitas como, principalmente, o da dispersão, ou pelo menos minimizá-los quando estes não puderem ser eliminados.

Para solucionar estes problemas investigamos primeiramente os efeitos da aproximação da equação da onda imagem pelo “método de volumes finitos”, uma vez que tal método tem se mostrado de alta precisão na resolução numérica de vários outros problemas complexos (LeVeque, 2002). Este método funciona de forma similar ao método de diferenças finitas. No entanto utiliza como passo inicial para propagação uma média nas células, ao invés dos dados pontuais, e faz isso a cada iteração do algoritmo, ou seja, a cada passo na velocidade de propagação.

Outra maneira na tentativa de solucionar os problemas numéricos, é utilizar métodos de diferenças finitas implementados implicitamente, similares aos usados por Fomel (2003) na sua implementação da remigração no tempo, visto que em estudos anteriores apenas formas explícitas foram implementadas (Schleicher et al., 2004a,b).

Este trabalho encontra-se na seguinte disposição:

No Capítulo 2 deduzimos a equação da onda imagem para o problema de remigração na profundidade, enfatizando a maneira como esta é utilizada neste trabalho.

Na tentativa de solucionar os problemas encontrados na propagação da onda imagem pelo método de diferenças finitas explícito introduzimos, no Capítulo 3, o método de volumes finitos. Constatamos que este é muito similar ao método de diferenças finitas, diferenciando-se apenas

na forma dos dados a serem propagados a cada passo na velocidade.

No Capítulo 4, métodos de diferenças finitas implícitos foram estudados para, também, tentar solucionar os problemas mencionados acima. Para isso, utilizamos métodos de diferenças finitas implícitos convencionais avaliados em pontos da malha e um método avaliado nos centros das células.

Os resultados numéricos estão descritos no Capítulo 5. Neste é feita a comparação entre os resultados dos métodos descritos aqui com os resultados do método de diferenças finitas explícito estudado em Schleicher et al. (2004a,b).

Finalmente, no Capítulo 6 encontram-se um resumo dos principais resultados e as conclusões.

Capítulo 2

Equação da onda imagem

Neste capítulo apresentamos brevemente a dedução da equação da onda imagem conforme detalhada em Hubral et al. (1996).

Supomos que o refletor no subsolo é composto por um conjunto de pontos refletores (Figura 2.1). Nestas circunstâncias, o campo de onda refletido pode ser considerado como uma superposição dos campos espalhados em todos pontos refletores. Primeiramente, estudamos somente um ponto refletor $P_0(x_0, z_0)$ localizado no subsolo (Figura 2.1). Para um par fonte-receptor situados num mesmo ponto $(\xi, 0)$ na superfície (situação conhecida como afastamento nulo), a distância entre este e o ponto refletor $P_0(x_0, z_0)$ é dada por

$$d = \sqrt{(x_0 - \xi)^2 + z_0^2} .$$

Logo, o tempo t de propagação da onda emitida pela fonte, situada na superfície em $(\xi, 0)$, até o ponto P_0 e, então, captada pelo receptor, situado no mesmo ponto $(\xi, 0)$, é expresso em função de ξ , por

$$t(\xi) = \frac{2d}{v_0} = \frac{2}{v_0} \sqrt{(x_0 - \xi)^2 + z_0^2} , \quad (2.1)$$

onde v_0 é a velocidade de propagação no subsolo, supostamente homogêneo, i.e., v_0 é constante.

Agora podemos pensar que para um dado ponto $(\xi, 0)$, temos um conjunto de pontos que satisfaz a equação (2.1) para a mesma velocidade v_0 , i.e., dado um ponto $(\xi, 0)$ temos um mesmo

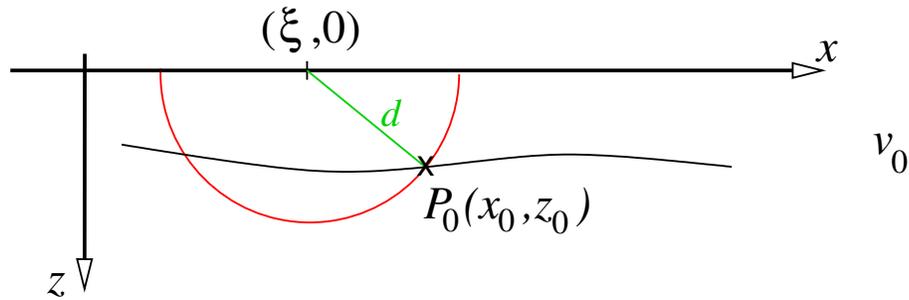


Figura 2.1: Representação de um ponto $P_0(x_0, z_0)$ sobre o refletor.

tempo de propagação t correspondente a este par fonte-receptor para todos os pontos $P(x, z)$ que satisfazem a equação

$$z = \sqrt{\left(\frac{v_0 t}{2}\right)^2 - (x - \xi)^2}. \quad (2.2)$$

Esta equação descreve uma semi-circunferência de raio $d = v_0 t/2$ que é chamada de *isócrona*, pois todos os pontos nesta curva possuem o mesmo tempo de propagação.

Assim, em um levantamento sísmico inteiro de afastamento nulo, sobre o ponto $P_0(x_0, z_0)$ fixo, cada valor de ξ define um ponto $(\xi, 0)$ com seu respectivo $t(\xi)$ que gera uma nova isócrona. Todas essas isócronas passam por P_0 , i.e., a interseção dessas isócronas é o ponto $P_0(x_0, z_0)$, como pode ser visto na Figura 2.2a. Esta construção é implicitamente realizada por uma migração com a velocidade v_0 .

Mas existe a possibilidade da velocidade de migração utilizada v não ser a velocidade correta do meio, v_0 , assim, teríamos uma reformulação da equação (2.2), agora para uma velocidade $v \neq v_0$,

$$z = \sqrt{\left(\frac{vt}{2}\right)^2 - (x - \xi)^2}. \quad (2.3)$$

Nesta situação, a interseção das isócronas não é mais o ponto $P_0(x_0, z_0)$ (ver Figura 2.2b), pois se a velocidade aumentar ($v > v_0$) a distância d entre o par fonte-receptor e um ponto $P(x, z)$ aumentará também considerando que o tempo permaneça constante, i.e., o raio da isócrona é proporcional à velocidade. O envelope do conjunto das isócronas representa a nova

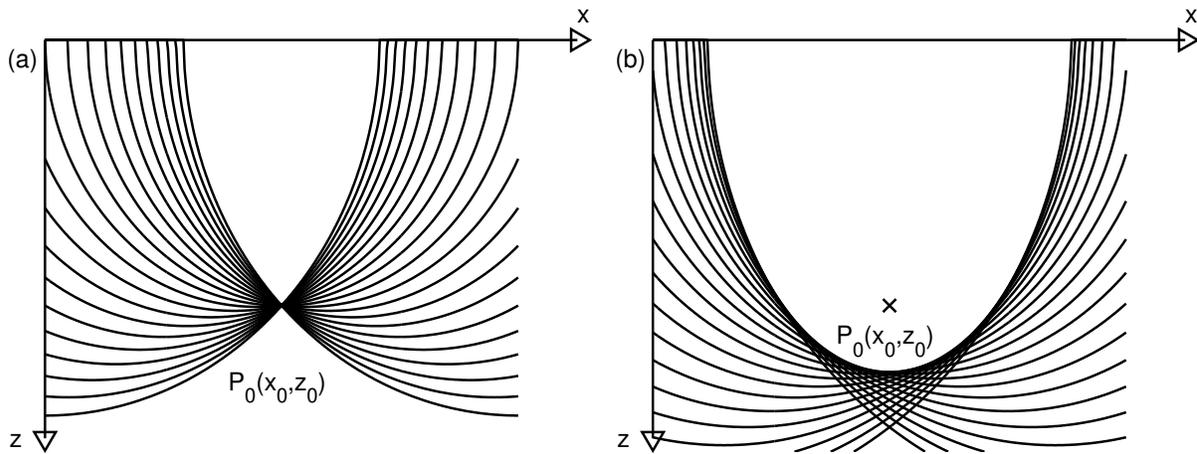


Figura 2.2: Representação gráfica das isócronas quando: (a) se intersectam no ponto refletor $P_0(x_0, z_0)$, (b) não mais se intersectam no ponto refletor $P(x_0, z_0)$, aqui para uma velocidade $v > v_0$.

imagem do ponto refletor para a nova velocidade v . Observe que, para cada velocidade $v \neq v_0$, temos um novo envelope. Isto nos dá a idéia da propagação de uma onda imagem, sendo gerada no ponto $P_0(x_0, z_0)$.

Agora temos que encontrar a equação que descreve estes envelopes pois, assim, temos a equação que descreve a posição da onda imagem. Como mostrado no Apêndice A, seguindo o desenvolvimento de Hubral et al. (1996), o envelope é descrito pela equação

$$z = (v/v_0) \sqrt{z_0^2 + \frac{(x - x_0)^2}{1 - (v/v_0)^2}}. \quad (2.4)$$

Calculando esta posição para vários valores de $v \neq v_0$, obtemos a propagação desta imagem.

O próximo passo consiste em estabelecer a relação entre esta parte cinemática da propagação da onda imagem e a correspondente equação diferencial parcial. Esta relação obedece aos mesmos princípios que a correspondente relação entre a cinemática da propagação de ondas acústicas e a equação da onda. No caso desta, a cinemática da propagação é descrita pela chamada equação iconal (Bleistein, 1984). Correspondentemente, existe uma “equação iconal da onda imagem” que descreve a cinemática da propagação da onda imagem (Hubral et al., 1996).

Para encontrarmos esta equação iconal para a onda imagem, substituímos a velocidade de migração v da equação (2.4) pelo iconal da onda imagem, $V(x, z)$, e calculamos as derivadas parciais desta equação modificada com respeito a x e a z . Substituindo essas derivadas parciais novamente na equação (2.4) e realizando assim as eliminações de x_0 , z_0 e v_0 , obtemos a equação iconal da onda imagem (veja Apêndice B e Hubral et al. (1996))

$$V_x^2 + V_z^2 - \frac{V}{z}V_z = 0. \quad (2.5)$$

A solução desta equação para uma fonte pontual em $P_0(x_0, z_0)$ é representada pela equação (2.4). A equação (2.5) pode ser interpretada como a equação iconal de uma equação da onda imagem, i.e., ela descreve a parte cinemática de uma solução aproximada da forma

$$p(x, z, v) = p_0(x, z)f[v - V(x, z)] \quad (2.6)$$

da equação

$$p_{xx} + p_{zz} + \frac{v}{z}p_{vz} = 0, \quad (2.7)$$

que é a equação da onda imagem (1.1) para o problema de remigração. Na equação (2.6), o campo p é aproximado por um pulso $f(v)$, deslocado no espaço conforme descrito pela função iconal $v = V(x, z)$ e com amplitude $p_0(x, z)$. Aqui, a função amplitude $p_0(x, z)$ é somente introduzida para descrição completa de um campo de onda. Nesta dissertação, os valores de $p_0(x, z)$ não são de interesse.

Por esta razão, podemos desconsiderar uma função $F \equiv F(p_x, p_z, p_v, p, x, z, v)$ na forma geral da equação,

$$p_{xx} + p_{zz} + \frac{v}{z}p_{vz} = F(p_x, p_z, p_v, p, x, z, v), \quad (2.8)$$

que não alteraria a equação iconal (2.5), como mostrado no Apêndice C.

Capítulo 3

Introdução ao método de volumes finitos

3.1 Desenvolvimento

A primeira tentativa para solucionar os problemas numéricos encontrados quando usamos o método de diferenças finitas (DF) para fazer a remigração da onda imagem foi utilizar o método de volumes finitos (VF).

O método de VF está fortemente relacionado ao método de DF. No entanto, o método de VF é deduzido na base da forma integral, i.e., é baseado em subdividir o domínio espacial em células (os “volumes finitos”, também chamados de células da malha) e calcular média dos dados dentro dessas células através de uma integral e, assim, fazer a propagação da equação diferencial.

Para entender como este método funciona, consideramos uma malha de pontos no espaço (x, z, v) . Sejam Δx , Δz e Δv números positivos. O campo de onda imagem, para uma malha de pontos $(x_m, z_n, v_l) = (x_0 + m\Delta x, z_0 + n\Delta z, v_0 + l\Delta v)$ para quaisquer inteiros não negativos m , n e l e valores iniciais x_0 , z_0 e v_0 , é denotado por $p_{m,n}^l$ (onde aqui x_0 e z_0 não são mais as coordenadas de P_0 do capítulo anterior).

Seja, também, a (m, n) -ésima célula, i.e., a célula centrada no ponto (x_m, z_n) , representada por

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{m,n} &= (x_{m-1/2}, x_{m+1/2}) \times (z_{n-1/2}, z_{n+1/2}) \\ &= \{(x, z) \mid x_{m-1/2} < x < x_{m+1/2}, z_{n-1/2} < z < z_{n+1/2}\}, \end{aligned}$$

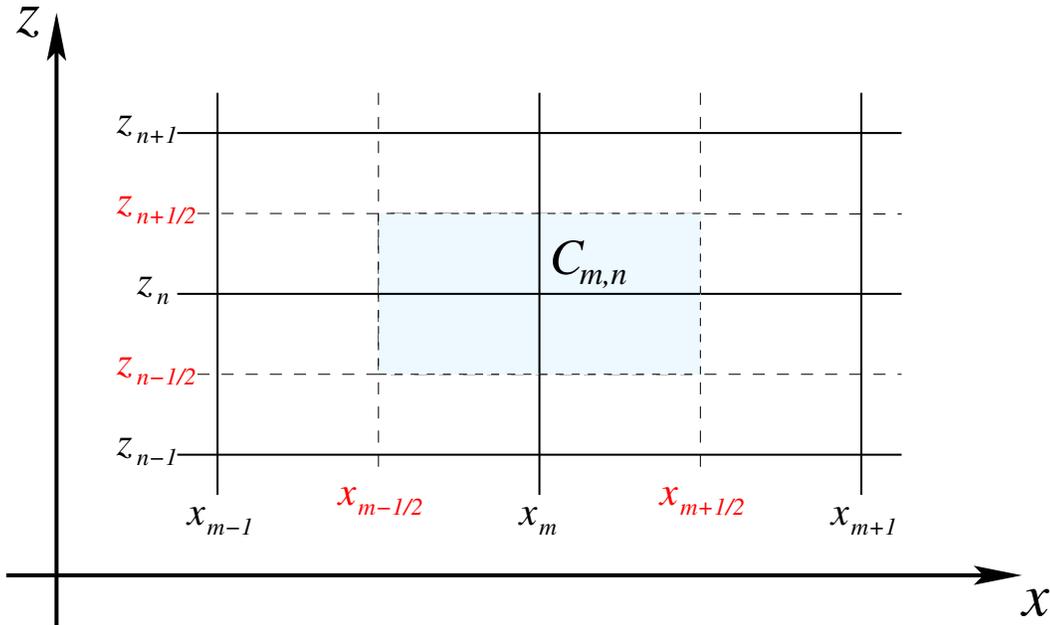


Figura 3.1: Malha representando a célula $C_{m,n}$.

como ilustrada na Figura 3.1. O valor $P_{m,n}^l$ aproximará o valor médio de $p(x, z, v_l)$ sobre essa (m, n) -ésima célula, para uma velocidade v_l , por

$$P_{m,n}^l \approx \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{\Delta z} \int_{x_{m-1/2}}^{x_{m+1/2}} \int_{z_{n-1/2}}^{z_{n+1/2}} p(x, z, v_l) dx dz \equiv \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{\Delta z} \int \int_{C_{m,n}} p(x, z, v_l) dx dz, \quad (3.1)$$

onde $\Delta x = x_{m+1/2} - x_{m-1/2}$ e $\Delta z = z_{n+1/2} - z_{n-1/2}$. Para simplificar, supomos uma malha uniforme, mas ressaltamos que a uniformidade da malha não é sempre requerida.

Assim, usamos para fazer a propagação da onda imagem os valores de $P_{m,n}^l$ calculados de acordo com a expressão (3.1). Portanto, o método de VF é diferente do método de DF somente pelo conteúdo utilizado para realizar a propagação. Enquanto o método de VF utiliza a média na célula $C_{m,n}$ (isto para o caso bidimensional) para fazer a propagação, o método de DF realiza sua propagação usando somente os dados pontuais $p_{m,n}^l = p(x_m, z_n, v_l)$.

Uma aplicação deste método para a Lei de Conservação foi desenvolvido por “Godunov” (LeVeque, 2002). Baseado nesta aplicação, Godunov desenvolveu o “Algoritmo REA” (*Reconstruct-Evolve-Average*) para a equação de advecção. Tal algoritmo é dividido em três passos como descrito a seguir:

Algoritmo REA:

1. *Reconstruir* uma função polinomial por partes $\hat{p}^l(x, z, v_l)$ definida para todo x e z , pelas médias das células $P_{m,n}^l$. No caso mais simples esta é uma função constante por partes que leva o valor $P_{m,n}^l$ na (m, n) -ésima célula,

$$\hat{p}^l(x, z, v_l) = P_{m,n}^l, \quad \text{para todo } (x, z) \in C_{m,n}.$$

2. *Evoluir* a equação da onda imagem exatamente (ou aproximadamente) com estes dados iniciais para obter $\hat{p}^{l+1}(x, z, v_{l+1})$ para uma velocidade Δv posterior.
3. *Calcular a média* desta função sobre cada célula da malha para obter uma nova média da célula

$$P_{m,n}^{l+1} = \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{\Delta z} \int \int_{C_{m,n}} \hat{p}^{l+1}(x, z, v_{l+1}) dx dz.$$

Este processo completo é então repetido nos próximos passos da velocidade.

Como dado inicial para usarmos este algoritmo (veja Figura 3.2), supomos $p^l(x, z, v_l)$ uma função contínua para todo ponto (x, z) , $p_0(x, z, v_0)$. A partir desta função calculamos a média do volume, $P_{m,n}^l$, para todas as células $C_{m,n}$ através da expressão (3.1). Tendo as médias $P_{m,n}^l$, aplicamos o primeiro passo do algoritmo REA, ou seja, reconstruímos então uma função polinomial por partes $\hat{p}^l(x, z, v_l)$ através das médias $P_{m,n}^l$, para todo $(x, z) \in C_{m,n}$. Esta reconstrução é feita de tal forma que obtemos uma função seccionalmente contínua para todo (x, z) , que pode ser evoluída a partir do passo dois utilizando, por exemplo, o método de DF.

No passo de evolução, os dados são passados de $\hat{p}^l(x, z, v_l)$ para uma função ainda seccionalmente contínua $\hat{p}^{l+1}(x, z, v_{l+1})$ através de algum método numérico, como pode ser visto na Figura 3.2. Sobre esta, aplicamos o passo 3, i.e., calculamos uma nova média dos dados evoluídos $\hat{p}^{l+1}(x, z, v_{l+1})$, obtendo assim $P_{m,n}^{l+1}$.

No final do passo 3, temos novamente médias nas células só que agora num nível posterior. Podemos então voltar ao passo 1 e reconstruir uma nova função polinomial por partes para fazer uma nova evolução e conseqüentemente uma nova média, e assim por diante, como ilustrado na Figura 3.2.

Vemos então, que a principal diferença entre o método de VF e o método de DF é o fato de o

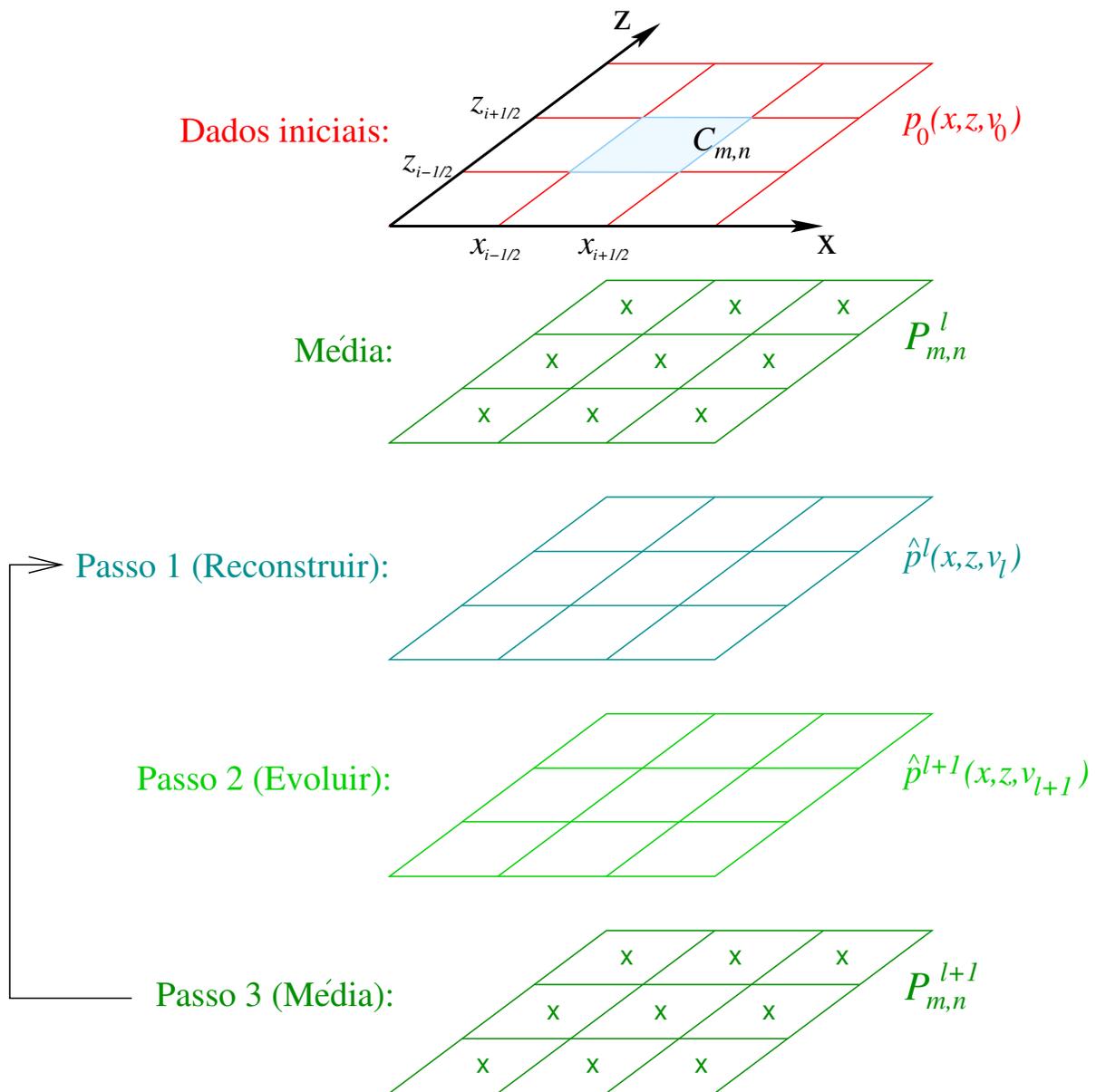


Figura 3.2: Ilustração do algoritmo REA para uma malha de dados. Os dados iniciais são subdivididos em células $C_{m,n}$ e usa-se a expressão (3.1) para calcular as médias nessas células. Passo 1: reconstrução da malha a partir das médias $P_{m,n}^l$. Passo 2: evolução dos dados para um nível posterior na velocidade (através de algum método). Passo 3: cálculo das novas médias no novo nível.

primeiro utilizar uma aproximação para a média nas células, $P_{m,n}^l$, para calcular o próximo nível da propagação, enquanto que o segundo utiliza somente os dados pontuais $p_{m,n}^l$. Utilizamos uma adaptação do algoritmo REA para implementar o método de VF para a equação da onda imagem (1.1). A seção seguinte descreve este procedimento.

3.2 Implementação

Uma pergunta a se fazer é como podemos calcular $P_{m,n}^l$ a partir de (3.1) quando não conhecemos $p(x, z, v_l)$ para todos os valores de $(x, z) \in \mathcal{C}_{m,n}$, mas somente a função discretizada $p_{m,n}^l$ em (x_m, z_n) , veja os dados iniciais na Figura 3.3. Nesta situação, não podemos resolver a equação (3.1) pois não temos a informação sobre os valores da função no interior da célula $\mathcal{C}_{m,n}$.

Então, ao invés de calcular a integral da equação (3.1) de maneira exata, aproximamo-la utilizando a “Regra dos Trapézios” a partir dos valores discretizados $p_{m,n}^l$. Em outras palavras, para aproximar a integral em duas variáveis, utilizamos a seguinte aproximação

$$\int_a^b \int_c^d f(x, z) dx dz \approx \frac{\Delta x \Delta z}{4} [f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d)] . \quad (3.2)$$

Esta aproximação foi usada para fazer uso dos pontos onde a função original é dada. Uma aproximação com mais pontos poderia também ser utilizada, contanto que os dados para tal estejam disponíveis.

Substituindo a aproximação acima na equação (3.1), obtemos a seguinte expressão para as médias $P_{m,n}^l$,

$$P_{m,n}^l = \frac{1}{4} [p_{m-1/2, n-1/2}^l + p_{m-1/2, n+1/2}^l + p_{m+1/2, n-1/2}^l + p_{m+1/2, n+1/2}^l] , \quad (3.3)$$

para uma velocidade fixa v_l . Entretanto, para calcularmos a média $P_{m,n}^l$ no ponto (x_m, z_n) , precisaríamos dos valores da função p nos pontos intermediários da malha, conforme explicitado na equação (3.3). Como os dados iniciais são fornecidos somente em cima dos pontos da malha, calculamos então, ao invés da equação (3.3), a seguinte média

$$P_{m+1/2, n+1/2}^l = \frac{1}{4} [p_{m,n}^l + p_{m,n+1}^l + p_{m+1,n}^l + p_{m+1, n+1}^l] , \quad (3.4)$$

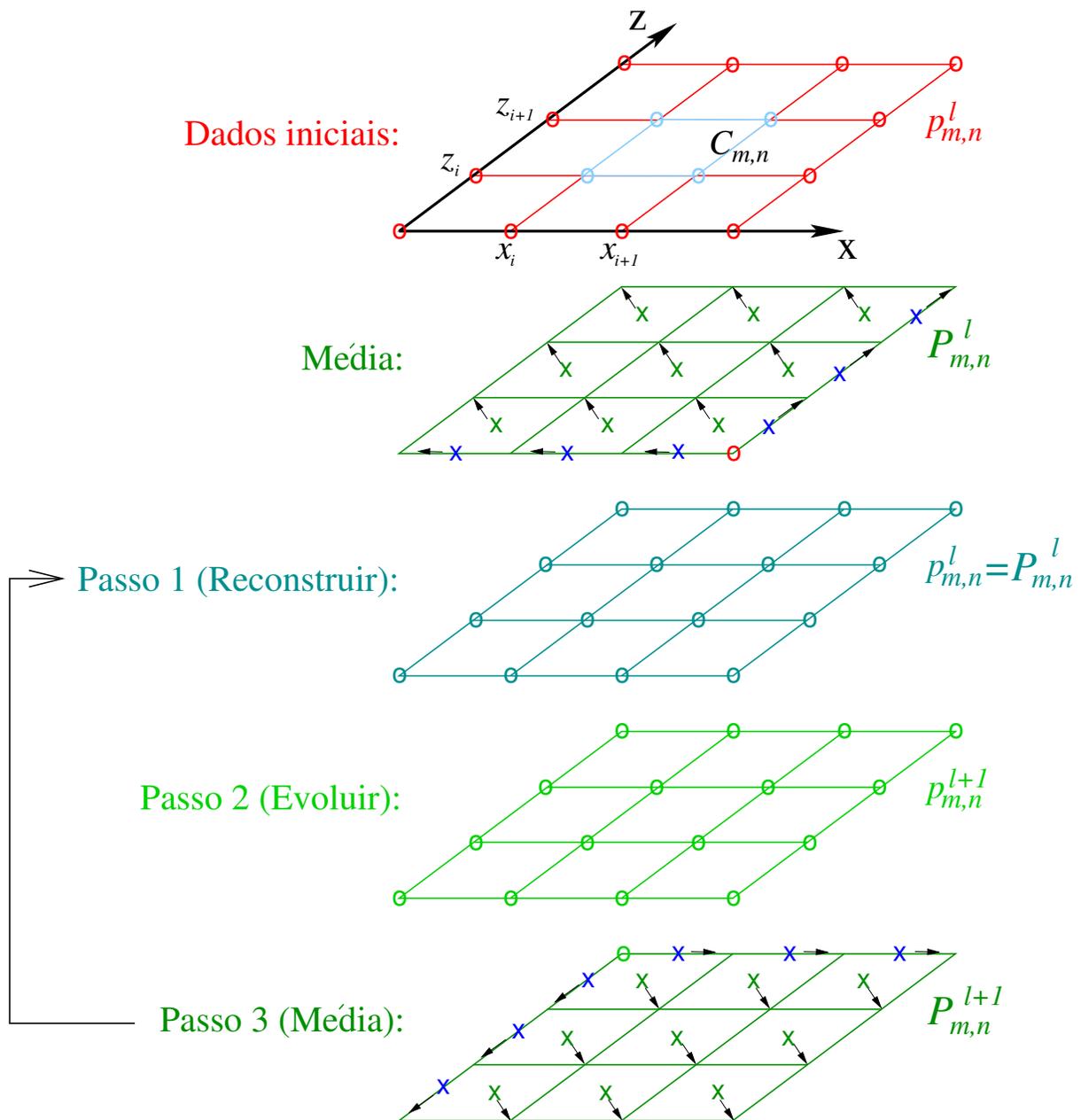


Figura 3.3: Ilustração do algoritmo REA para uma malha discreta de dados. Os dados iniciais são subdivididos em células $C_{m,n}$ e usa-se uma das equações (3.9) para calcular as médias nessas células. Passo 1: reconstrução da malha discreta, como sugerido ser o caso mais simples, $p_{m,n}^l = P_{m,n}^l$. Passo 2: evolução dos dados para um nível posterior na velocidade, usando método de DF. Passo 3: cálculo das novas médias no novo nível.

como ilustrado na Figura 3.3. Logo, concluímos que a média na célula $C_{m,n}$ para o nosso caso de uma malha de pontos discreta bidimensional, é simplesmente uma média linear entre quatro pontos da célula da malha.

Mas, na prática, o valor de $P_{m+1/2,n+1/2}^l$ é atribuído à variável $P_{m,n}^l$ que constitui a base para o passo seguinte da evolução pois não possuímos os pontos intermediários da malha (caso Média na Figura 3.3).

Após termos obtido as médias $P_{m,n}^l$, podemos aplicar o primeiro passo do algoritmo de Godunov. Neste passo, reconstruímos uma função constante por partes, como sugerido ser o caso mais simples para a reconstrução, ou seja, $p_{m,n}^l = P_{m,n}^l$ (passo 1 na Figura 3.3). Assim, tendo obtido uma nova função após a reconstrução podemos executar um passo da evolução do método, i.e., o segundo passo do algoritmo, usando o método de DF.

Para o passo da evolução do algoritmo REA (passo 2 na Figura 3.3), no caso de uma malha discreta, foram utilizadas, a critério de comparação, as duas aproximações pelo método de DF já estudadas anteriormente em Schleicher et al. (2004a). Ou seja, para as derivadas segundas espaciais, usamos aproximações de quarta ordem (veja, por exemplo, Strikwerda, 1989; Thomas, 1995), i.e.,

$$p_{xx} \approx \delta_{x,4}^{(2)} p = \frac{1}{12(\Delta x)^2} \left[-p_{m+2,n}^l - p_{m-2,n}^l + 16(p_{m+1,n}^l + p_{m-1,n}^l) - 30p_{m,n}^l \right] \quad (3.5)$$

(uma expressão correspondente para p_{zz}) e para a derivada mista a aproximação avançada em v e z e a avançada em v e atrasada em z , i.e., respectivamente,

$$p_{vz} \approx \frac{p_{m,n+1}^{l+1} - p_{m,n}^{l+1} - p_{m,n+1}^l + p_{m,n}^l}{\Delta z \Delta v} \quad \text{e} \quad p_{vz} \approx \frac{p_{m,n}^{l+1} - p_{m,n-1}^{l+1} - p_{m,n}^l + p_{m,n-1}^l}{\Delta z \Delta v} . \quad (3.6)$$

Desta forma, obtemos dois esquemas de DF para a propagação da onda imagem:

Avançado em v e z

$$p_{m,n+1}^{l+1} = -\frac{z_n \Delta z \Delta v}{v_l} \left\{ \delta_{x,4}^{(2)} p + \delta_{z,4}^{(2)} p \right\} + p_{m,n}^{l+1} + p_{m,n+1}^l - p_{m,n}^l , \quad (3.7)$$

Avançado em v e atrasado em z

$$p_{m,n}^{l+1} = -\frac{z_n \Delta z \Delta v}{v_l} \left\{ \delta_{x,4}^{(2)} p + \delta_{z,4}^{(2)} p \right\} + p_{m,n-1}^{l+1} + p_{m,n}^l - p_{m,n-1}^l . \quad (3.8)$$

Estamos utilizando tais esquemas pois estes foram os que tiveram resultados convergentes para a solução da onda imagem (1.1) pelo método de DF. Os respectivos resultados numéricos se encontram no Capítulo 5.

Em consequência da evolução realizada no passo 2, como descrita anteriormente, podemos agora passar para o passo 3, onde neste novamente fazemos as médias em cada uma das células da malha utilizando a equação (3.4), ver Figura 3.3. No entanto, precisamos novamente atribuir $P_{m+1/2,n+1/2}^l$ à variável $P_{m,n}^l$ e esta atribuição, porém, é equivalente a um deslocamento por meia célula. Como esta média é feita em todo passo do algoritmo, foi observado que esta causa uma propagação dos dados, isto devido ao deslocamento que estamos fazendo para armazenar os dados, já que não temos os pontos intermediários da malha.

Além disso, foi observado, também, que esta propagação causada pelo deslocamento da média é maior que a realizada pela onda imagem causando assim uma não convergência do método.

A solução para esta falha na implementação foi, portanto, fazer a média em um sentido para um passo e no sentido contrário para o passo seguinte, ou seja, fazemos a média em duas direções distintas para que o deslocamento dos dados seja compensado a cada segunda iteração do algoritmo.

Resumindo, as médias são então calculadas da seguinte forma, em cada passo da velocidade,

$$\begin{aligned} \text{passo ímpar:} \quad P_{m,n}^l &= \frac{1}{4} [p_{m,n}^l + p_{m,n+1}^l + p_{m+1,n}^l + p_{m+1,n+1}^l] , \\ \text{passo par:} \quad P_{m,n}^l &= \frac{1}{4} [p_{m-1,n-1}^l + p_{m,n-1}^l + p_{m-1,n}^l + p_{m,n}^l] , \end{aligned} \quad (3.9)$$

como pode ser visto na Figura 3.3.

Desta maneira, conseguimos fazer com que o método de VF propagasse a equação da onda imagem à sua profundidade correta. Portanto, através de uma adaptação do algoritmo de Godunov (REA), construímos um esquema de VF para a equação da onda imagem que é convergente (ver Capítulo 5). Apesar de óbvio, constatamos que há um acréscimo no tempo computacional em relação ao método de DF pois fazemos o cálculo das médias em cada iteração do algoritmo, (ver Seção 5.5).

Capítulo 4

Esquemas de diferenças finitas implícitos

Além da abordagem pelo método de VF, exposta no Capítulo 3, tentamos solucionar os problemas numéricos que aparecem ao propagarmos uma imagem sísmica através de esquemas de DF implementados explicitamente, como detalhado em Schleicher et al. (2004a,b), usando esquemas de DF implementados implicitamente.

Para isso, dividimos nossos estudos desse capítulo em duas partes onde em cada uma delas trabalhamos com aproximações implícitas de forma diferente. Na primeira, utilizamos os já estudados esquemas avançado em v e z e avançado em v e atrasado em z (Schleicher et al., 2004a,b), mas agora implementados de maneira implícita pois, no trabalho citado, estes só foram resolvidos explicitamente. Na segunda forma, foi feita uma aproximação avaliada no centro da célula pois esta forma de aproximação gerou bons resultados quando aplicada à remigração no tempo, conforme demonstrado no trabalho realizado por Fomel (2003).

Nas seções seguintes fazemos um estudo de cada uma dessas aproximações onde os respectivos experimentos numéricos estão descritos no Capítulo 5.

4.1 Esquemas implícitos convencionais

Agora, queremos implementar implicitamente os esquemas de DF utilizados anteriormente, i.e., o **avançado em v e z** e o **avançado em v e atrasado em z** , para que possamos compará-

los com estes mesmos quando estes são implementados de maneira explícita, como foi feito em Schleicher et al. (2004a,b). Estes esquemas foram implentados de maneira explícita pois foi observado que condições de contorno adicionais poderiam ser tomadas nulas facilitando a implementação.

Porém, quando tais esquemas são considerados explícitos aparecem alguns efeitos indesejados na propagação da onda imagem (1.1), como, por exemplo, a dispersão numérica. Então, o motivo de uma implementação implícita desses esquemas é que queremos fazer com que não seja necessário criar condições de contorno adicionais tentando evitar assim que tais efeitos indesejados apareçam na propagação.

4.1.1 Desenvolvimento

Considerando uma malha de pontos no espaço (x, z, v) , como definida no capítulo anterior, montamos os esquemas de DF implícitos. Para as derivadas segundas espaciais p_{xx} e p_{zz} , usamos a aproximações de quarta ordem como a representada pela equação (3.5).

Os esquemas escolhidos para a derivada mista foram os mesmos do capítulo anterior e de Schleicher et al. (2004a,b). No que segue, consideramos esses esquemas, escritos de forma a simplificar a identificação de um esquema implícito na velocidade de migração,

Avançado em v e z

$$\begin{aligned} \mu_n^l [p_{m,n}^{l+1} - p_{m,n+1}^{l+1}] &= -\beta p_{m,n-2}^l + 16\beta p_{m,n-1}^l - \alpha p_{m-2,n}^l + 16\alpha p_{m-1,n}^l \\ &\quad - [30(\alpha + \beta) - \mu_n^l] p_{m,n}^l + 16\alpha p_{m+1,n}^l - \alpha p_{m+2,n}^l + (16\beta - \mu_n^l) p_{m,n+1}^l - \beta p_{m,n+2}^l, \end{aligned} \quad (4.1)$$

Avançado em v e atrasado em z

$$\begin{aligned} -\mu_n^l [p_{m,n}^{l+1} - p_{m,n-1}^{l+1}] &= -\beta p_{m,n-2}^l + (16\beta + \mu_n^l) p_{m,n-1}^l - \alpha p_{m-2,n}^l + 16\alpha p_{m-1,n}^l \\ &\quad - [30(\alpha + \beta) + \mu_n^l] p_{m,n}^l + 16\alpha p_{m+1,n}^l - \alpha p_{m+2,n}^l + 16\beta p_{m,n+1}^l - \beta p_{m,n+2}^l, \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde $\alpha = 1/(12\Delta x^2)$, $\beta = 1/(12\Delta z^2)$ e $\mu_n^l = v_l/(z_n \Delta z \Delta v)$.

Como podemos observar, estes esquemas de DF são esquemas implícitos na velocidade. Porém, para acelerar os testes numéricos foram tratados como esquemas explícitos em Schleicher et al. (2004a,b).

Para estes casos, também esperamos um aumento no custo computacional pois, apesar de esquemas implícitos possuírem em geral matrizes esparsas, temos que resolver sistemas lineares de grande porte (muito comum em sísmica) que, geralmente, é mais caro que uma implementação explícita.

4.1.2 Implementação

Esquema avançado em v e z

A implementação implícita do método de DF avançada em v e z foi feita de duas formas diferentes. Em ambas as formas utilizamos a discretização dada pela equação (4.1). A diferença entre as duas formas está na ordem de execução e, portanto, na forma das matrizes de iteração. No primeiro caso, para montarmos tais matrizes, fixamos a variável x e variamos z , no segundo caso fixamos z e variamos x . Fizemos isto pois, ao implementarmos o primeiro caso vimos que a propagação da onda imagem estava sofrendo uma dispersão numérica muito grande. Assim, mediante este fato e estudos anteriores do método explícito, a construção das matrizes de iteração foi realizada utilizando a segunda forma, pois quando implementamos a forma explícita deste caso em Schleicher et al. (2004a), fixando z e variando x , obtivemos melhores resultados conforme descritos no Capítulo 5.

Para fins de implementação, escrevemos a equação (4.1) na forma matricial, $A^l u_m^{l+1} = b^l$, onde u_m^{l+1} representa o vetor a ser determinado a cada passo, i.e., $u_m^{l+1} = [p_{m,1}^{l+1}, p_{m,2}^{l+1}, \dots, p_{m,nz}^{l+1}]^T$, e onde b^l representa o vetor conhecido no lado direito da equação (4.1). Observamos que, tanto a matriz A^l quanto o vetor b^l precisam ser atualizados a cada iteração do algoritmo, ou seja, a cada passo da velocidade. Para o caso de x fixo e z variando, a matriz A^l correspondente do esquema (4.1) tem a forma

$$A^l = \begin{pmatrix} \mu_1^l & -\mu_1^l & & & & \\ & \mu_2^l & -\mu_2^l & & & \\ & & \mu_3^l & -\mu_3^l & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \mu_{nz-1}^l & -\mu_{nz-1}^l \\ & & & & & \mu_{nz}^l \end{pmatrix},$$

onde $\mu_n^l = v_l / (z_n \Delta z \Delta v)$. Aqui e no restante do texto, espaços em branco em uma matriz representam elementos nulos. Em decorrência das condições de contorno necessárias para o problema, implementamos este algoritmo por blocos, i.e., a cada passo da velocidade resolvemos cada um dos sistemas abaixo

$$\text{Bloco 1: } A^l u_1^{l+1} = E^l u_1^l + D u_2^l + C u_3^l = b_1^l$$

$$\text{Bloco 2: } A^l u_2^{l+1} = D u_1^l + E^l u_2^l + D u_3^l + C u_4^l = b_2^l$$

$$\text{Blocos } j = 3, \dots, nx-2: A^l u_j^{l+1} = C u_{j-2}^l + D u_{j-1}^l + E^l u_j^l + D u_{j+1}^l + C u_{j+2}^l = b_j^l$$

$$\text{Bloco } nx-1: A^l u_{nx-1}^{l+1} = C u_{nx-3}^l + D u_{nx-2}^l + E^l u_{nx-1}^l + D u_{nx}^l = b_{nx-1}^l$$

$$\text{Bloco } nx: A^l u_{nx}^{l+1} = C u_{nx-2}^l + D u_{nx-1}^l + E^l u_{nx}^l = b_{nx}^l,$$

onde o vetor b_j^l representa a forma do vetor b^l para o bloco j , que é construído a partir das matrizes C , D e E^l e do dado inicial U_0^l . Aqui, supomos que os dados iniciais possam ser escritos da seguinte forma matricial,

$$U_0^l = \begin{pmatrix} p_{1,1}^l & p_{1,2}^l & p_{1,3}^l & \cdots & p_{1,nz}^l \\ p_{2,1}^l & p_{2,2}^l & p_{2,3}^l & \cdots & p_{2,nz}^l \\ p_{3,1}^l & p_{3,2}^l & p_{3,3}^l & \cdots & p_{3,nz}^l \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{nx,1}^l & p_{nx,2}^l & p_{nx,3}^l & \cdots & p_{nx,nz}^l \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

onde o vetor $u_j^l = [p_{j,1}^l, p_{j,2}^l, \dots, p_{j,nz}^l]^T$ representa a j -ésima linha transposta da matriz U_0^l , $j = 1, \dots, nx$, com nx sendo o número de elementos de x . Portanto, resolvemos nx sistemas

esta implementação são muito similares aos obtidos para com a implementação explícita. Os resultados obtidos estão descritos no Capítulo 5.

Esquema avançado em v e atrasado em z

Considerações correspondentes se aplicam ao caso deste esquema. Verifica-se que as matrizes envolvidas ficam muito semelhantes. Por isso, não há necessidade de explicitá-las aqui.

4.2 Esquema avaliado no centro da célula

Nesta seção, estudamos uma aproximação alternativa de DF implícita a qual identificamos como esquema avaliado no centro da célula. Este tipo de aproximação foi sugerido e estudado por Fomel (2003) para o caso de remigração no tempo e mostrou um bom desempenho naquele caso.

Esta nova aproximação, diferentemente das aproximações de DF vistas neste trabalho, faz a discretização da onda imagem (1.1) nos centros das células da malha ao invés de discretizá-la nos vértices desta.

Nas subseções seguintes, descrevemos detalhadamente este esquema assim como sua implementação e sua respectiva análise numérica. Ao contrário dos esquemas estudados na Seção 4.1, este esquema não pode ser implementado de forma explícita.

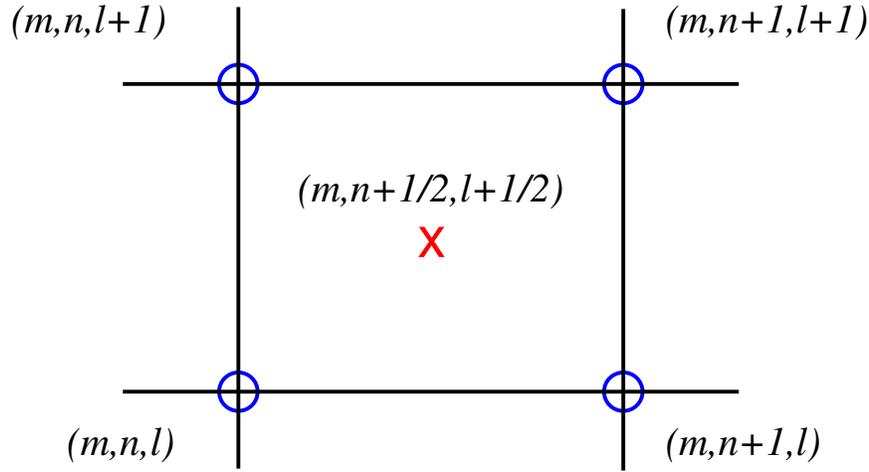
4.2.1 Desenvolvimento

Para montar o esquema de DF avaliado no centro da célula, para a equação da onda imagem, consideramos uma malha de pontos no espaço (x, z, v) conforme descrito no Capítulo 3.

Porém, para este esquema, nossa discretização é feita no ponto $(x_m, z_{n+1/2}, v_{l+1/2})$, ou seja,

$$p_{xx} \Big|_{m, n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + p_{zz} \Big|_{m, n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{v}{z} p_{vz} \Big|_{m, n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} = 0 . \quad (4.4)$$

No entanto, o ponto $(x_m, z_{n+1/2}, v_{l+1/2})$ não é um ponto da malha, portanto, aproximamos o campo p neste ponto pela média aritmética dos seus valores nos 4 pontos dos vértices da célula


 Figura 4.1: Aproximação do ponto $(x_m, z_{n+1/2}, v_{l+1/2})$.

(veja Figura 4.1). Logo, para as derivadas segunda em relação a x e z , temos

$$p_{xx} \Big|_{m, n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \left[p_{xx} \Big|_{m, n}^l + p_{xx} \Big|_{m, n+1}^l + p_{xx} \Big|_{m, n}^{l+1} + p_{xx} \Big|_{m, n+1}^{l+1} \right], \quad (4.5)$$

$$p_{zz} \Big|_{m, n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \left[p_{zz} \Big|_{m, n}^l + p_{zz} \Big|_{m, n+1}^l + p_{zz} \Big|_{m, n}^{l+1} + p_{zz} \Big|_{m, n+1}^{l+1} \right].$$

Para a derivada mista p_{vz} , fazemos então uma aproximação avaliada no centro da célula da seguinte forma

$$p_{vz} \Big|_{m, n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta z \Delta v} \left[p_{m, n+1}^{l+1} - p_{m, n+1}^l - p_{m, n}^{l+1} + p_{m, n}^l \right]. \quad (4.6)$$

E, para o termo que multiplica p_{vz} , fazemos uma média linear nos dois níveis $l, l+1$ e $n, n+1$, i.e.,

$$\frac{v}{z} \Big|_{m, n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} = \frac{(v_{l+1} + v_l)/2}{(z_{n+1} + z_n)/2} = \frac{v_{l+1} + v_l}{z_{n+1} + z_n} = \frac{2v_l + \Delta v}{2z_n + \Delta z}. \quad (4.7)$$

Agora, podemos substituir as aproximações de (4.5), (4.6) e (4.7) na equação (4.4) e chegar na seguinte equação, quando isolamos os termos do nível $l+1$ do lado esquerdo e os do nível l do lado direito,

$$\begin{aligned} & \left[p_{xx} \Big|_{m, n}^{l+1} + p_{xx} \Big|_{m, n+1}^{l+1} + p_{zz} \Big|_{m, n}^{l+1} + p_{zz} \Big|_{m, n+1}^{l+1} + k_n^l \left(p_{m, n+1}^{l+1} - p_{m, n}^{l+1} \right) \right] = \\ & - \left[p_{xx} \Big|_{m, n}^l + p_{xx} \Big|_{m, n+1}^l + p_{zz} \Big|_{m, n}^l + p_{zz} \Big|_{m, n+1}^l + k_n^l \left(p_{m, n}^l - p_{m, n+1}^l \right) \right], \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde

$$k_n^l = \frac{4(2v_l + \Delta v)}{(2z_n + \Delta z)\Delta z\Delta v}. \quad (4.9)$$

Na equação (4.8), falta ainda discretizar cada um dos termos de derivadas segunda em x e z . Assim, para essas derivadas espaciais, usamos as aproximações de segunda ordem descritas abaixo (veja, por exemplo, Strikwerda, 1989; Thomas, 1995)

$$p_{xx} \Big|_{m,n}^l \approx \delta_{x,2}^{(2)} p = \frac{p_{m+1,n}^l - 2p_{m,n}^l + p_{m-1,n}^l}{\Delta x^2} \quad (4.10)$$

e

$$p_{zz} \Big|_{m,n}^l \approx \delta_{z,2}^{(2)} p = \frac{p_{m,n+1}^l - 2p_{m,n}^l + p_{m,n-1}^l}{\Delta z^2}.$$

Nesta implementação, reduzimos a ordem das aproximações das derivadas segundas para facilitar as contas.

As aproximações (4.10) são então substituídas na equação (4.8). Logo, após algumas simplificações algébricas, chegamos em

$$\begin{aligned} & \beta p_{m,n-1}^{l+1} + \alpha p_{m-1,n}^{l+1} + \mu_n^l p_{m,n}^{l+1} + \alpha p_{m+1,n}^{l+1} + \alpha p_{m-1,n+1}^{l+1} \\ & + \nu_n^l p_{m,n+1}^{l+1} + \alpha p_{m+1,n+1}^{l+1} + \beta p_{m,n+2}^{l+1} = - \left[\beta p_{m,n-1}^l + \alpha p_{m-1,n}^l + \nu_n^l p_{m,n}^l \right. \\ & \left. + \alpha p_{m+1,n}^l + \alpha p_{m-1,n+1}^l + \mu_n^l p_{m,n+1}^l + \alpha p_{m+1,n+1}^l + \beta p_{m,n+2}^l \right], \quad (4.11) \end{aligned}$$

onde $\alpha = 1/\Delta x^2$, $\beta = 1/\Delta z^2$, $\mu_n^l = -k_n^l - 2\alpha - \beta$ e $\nu_n^l = k_n^l - 2\alpha - \beta$.

A partir da discretização acima, observamos que o esquema só pode ser resolvido implicitamente. Logo, os trabalhos computacionais tornam-se mais complicados e custosos que nos casos onde podemos considerar o esquema como sendo explícito, através de condições adicionais de contorno.

A seguir, fazemos uma análise numérica deste esquema, assim como uma discussão a respeito de como este pode ser implementado. O resultado numérico deste esquema está apresentado no Capítulo 5.

4.2.2 Consistência

Nesta seção, estudamos a consistência do esquema avaliado no centro da célula. Sabemos que um esquema de DF é consistente com a equação diferencial parcial, se para qualquer função suave $\phi(x, z, v)$, a diferença entre o operador diferencial e o discretizado em um ponto (x_m, z_n, v_l) , aplicados a esta função, tende a zero quando Δx , Δz e Δv tendem a zero, i.e.,

$$\mathcal{L}\phi - \mathcal{L}^\Delta\phi \rightarrow 0, \quad \text{quando } \Delta x, \Delta z, \Delta v \rightarrow 0, \quad (4.12)$$

onde $\mathcal{L}^\Delta\phi = \mathcal{L}_{xx}^\Delta\phi + \mathcal{L}_{zz}^\Delta\phi + \mathcal{L}_{vz}^\Delta\phi$ representa o operador discretizado do operador

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} + \frac{v}{z} \frac{\partial}{\partial v \partial z}.$$

Para verificarmos se o esquema citado na seção anterior é consistente, consideramos as séries de Taylor de ordem conveniente para determinar seu operador discretizado.

Primeiramente, consideramos a aproximação para p_{xx} no centro da célula dada pela primeira expressão da equação (4.5), só que agora aplicada a função suave ϕ , ou seja,

$$\mathcal{L}_{xx}^\Delta\phi = \frac{1}{4} \left[\delta_{x,2}^{(2)}\phi \Big|_{m,n}^l + \delta_{x,2}^{(2)}\phi \Big|_{m,n+1}^l + \delta_{x,2}^{(2)}\phi \Big|_{m,n}^{l+1} + \delta_{x,2}^{(2)}\phi \Big|_{m,n+1}^{l+1} \right],$$

onde podemos substituir a primeira expressão da equação (4.10) em cada um dos seus termos e chegar em

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{xx}^\Delta\phi = \frac{1}{4\Delta x^2} & \left[\phi_{m+1,n}^l - 2\phi_{m,n}^l + \phi_{m-1,n}^l + \phi_{m+1,n}^{l+1} - 2\phi_{m,n}^{l+1} + \phi_{m-1,n}^{l+1} + \phi_{m+1,n+1}^l \right. \\ & \left. - 2\phi_{m,n+1}^l + \phi_{m-1,n+1}^l + \phi_{m+1,n+1}^{l+1} - 2\phi_{m,n+1}^{l+1} + \phi_{m-1,n+1}^{l+1} \right]. \quad (4.13) \end{aligned}$$

Agora, para cada um dos termos da equação acima, fazemos uma expansão em série de Taylor na variável v em torno de $v = v_{l+1/2}$. Para facilitar as contas, tomamos esses termos aos pares para que alguns termos se cancelem entre si. Assim, para o primeiro e o quarto termo de (4.13), temos

$$\begin{aligned} \phi_{m+1,n}^l &= \phi_{m+1/2,n}^{l+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta v}{2}(\phi_v)_{m+1/2,n}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta v^2}{8}(\phi_{vv})_{m+1/2,n}^{l+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta v^3), \\ \phi_{m+1,n}^{l+1} &= \phi_{m+1/2,n}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta v}{2}(\phi_v)_{m+1/2,n}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta v^2}{8}(\phi_{vv})_{m+1/2,n}^{l+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta v^3). \end{aligned}$$

Logo, a soma desses termos fornece

$$\phi_{m+1,n}^l + \phi_{m+1,n}^{l+1} = 2\phi_{m+1,n}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta v^2}{4}(\phi_{vv})_{m+1,n}^{l+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta v^3). \quad (4.14)$$

Agora, para o segundo e o quinto termo de (4.13), temos

$$\begin{aligned} -2\phi_{m,n}^l &= -2 \left[\phi_{m,n}^{l+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta v}{2}(\phi_v)_{m,n}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta v^2}{8}(\phi_{vv})_{m,n}^{l+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta v^3) \right], \\ -2\phi_{m,n}^{l+1} &= -2 \left[\phi_{m,n}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta v}{2}(\phi_v)_{m,n}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta v^2}{8}(\phi_{vv})_{m,n}^{l+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta v^3) \right], \end{aligned}$$

e, portanto,

$$-2(\phi_{m,n}^l + \phi_{m,n}^{l+1}) = -4\phi_{m,n}^{l+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta v^2}{2}(\phi_{vv})_{m,n}^{l+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta v^3). \quad (4.15)$$

Similarmente, podemos fazer para os demais termos da equação (4.13) e encontrar

$$\phi_{m-1,n}^l + \phi_{m-1,n}^{l+1} = 2\phi_{m-1,n}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta v^2}{4}(\phi_{vv})_{m-1,n}^{l+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta v^3), \quad (4.16)$$

$$\phi_{m+1,n+1}^l + \phi_{m+1,n+1}^{l+1} = 2\phi_{m+1,n+1}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta v^2}{4}(\phi_{vv})_{m+1,n+1}^{l+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta v^3), \quad (4.17)$$

$$-2(\phi_{m,n+1}^l + \phi_{m,n+1}^{l+1}) = -4\phi_{m,n+1}^{l+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta v^2}{2}(\phi_{vv})_{m,n+1}^{l+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta v^3), \quad (4.18)$$

$$\phi_{m-1,n+1}^l + \phi_{m-1,n+1}^{l+1} = 2\phi_{m-1,n+1}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta v^2}{4}(\phi_{vv})_{m-1,n+1}^{l+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta v^3). \quad (4.19)$$

Agora, expandimos os novos termos acima, (4.14) até (4.19), em série de Taylor na variável z em torno de $z = z_{n+1/2}$. Novamente, para facilitar as contas, agrupamos os termos aos pares para que alguns termos se cancelem entre si. Iniciando com a expansão da soma (4.14), temos

$$\begin{aligned} \phi_{m+1,n}^l + \phi_{m+1,n}^{l+1} &= 2 \left[\phi_{m+1,n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta z}{2}(\phi_z)_{m+1,n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta z^2}{8}(\phi_{zz})_{m+1,n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta z^3) \right] \\ &\quad + \frac{\Delta v^2}{4} \left[(\phi_{vv})_{m+1,n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta z}{2} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial v^2 \partial z} \right)_{m+1,n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta z^2}{8} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial v^2 \partial z^2} \right)_{m+1,n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{O}(\Delta z^3) \right] + \mathcal{O}(\Delta v^3), \end{aligned}$$

e, para a soma (4.17), temos

$$\phi_{m+1,n+1}^l + \phi_{m+1,n+1}^{l+1} = 2 \left[\phi_{m+1,n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta z}{2}(\phi_z)_{m+1,n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta z^2}{8}(\phi_{zz})_{m+1,n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta z^3) \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\Delta v^2}{4} \left[(\phi_{vv})_{m+1, n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta z}{2} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial v^2 \partial z} \right)_{m+1, n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta z^2}{8} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial v^2 \partial z^2} \right)_{m+1, n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \right. \\
 & \left. + \mathcal{O}(\Delta z^3) \right] + \mathcal{O}(\Delta v^3).
 \end{aligned}$$

Portanto, somando as duas igualdades acima, obtemos

$$\begin{aligned}
 & \phi_{m+1, n}^l + \phi_{m+1, n}^{l+1} + \phi_{m+1, n+1}^l + \phi_{m+1, n+1}^{l+1} = \\
 & 4\phi_{m+1, n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta z^2}{2} (\phi_{zz})_{m+1, n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta v^2}{2} (\phi_{vv})_{m+1, n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta v^2 \Delta z^2}{16} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial v^2 \partial z^2} \right)_{m+1, n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \\
 & + \mathcal{O}(\Delta v^3) + \mathcal{O}(\Delta z^3). \tag{4.20}
 \end{aligned}$$

Similarmente, para os outros termos, obtemos

$$\begin{aligned}
 & -2(\phi_{m, n}^l + \phi_{m, n}^{l+1} + \phi_{m, n+1}^l + \phi_{m, n+1}^{l+1}) = \\
 & -8\phi_{m, n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \Delta z^2 (\phi_{zz})_{m, n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \Delta v^2 (\phi_{vv})_{m, n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta v^2 \Delta z^2}{8} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial v^2 \partial z^2} \right)_{m, n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \\
 & + \mathcal{O}(\Delta v^3) + \mathcal{O}(\Delta z^3), \tag{4.21}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 & \phi_{m-1, n}^l + \phi_{m-1, n}^{l+1} + \phi_{m-1, n+1}^l + \phi_{m-1, n+1}^{l+1} = \\
 & 4\phi_{m-1, n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta z^2}{2} (\phi_{zz})_{m-1, n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta v^2}{2} (\phi_{vv})_{m-1, n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta v^2 \Delta z^2}{16} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial v^2 \partial z^2} \right)_{m-1, n+\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \\
 & + \mathcal{O}(\Delta v^3) + \mathcal{O}(\Delta z^3). \tag{4.22}
 \end{aligned}$$

Agora, expandimos as equações (4.20) e (4.22) em x e em torno de x_m e as somamos. A partir daqui, omitimos o ponto no qual estamos pois todos os termos do lado direito das igualdades já estão no ponto $(x_m, z_{n+1/2}, v_{l+1/2})$. Expandindo a equação (4.20), temos

$$\begin{aligned}
 & \phi_{m+1, n}^l + \phi_{m+1, n}^{l+1} + \phi_{m+1, n+1}^l + \phi_{m+1, n+1}^{l+1} = \\
 & 4 \left[\phi + \Delta x \phi_x + \frac{\Delta x^2}{2} \phi_{xx} + \frac{\Delta x^3}{6} \phi_{xxx} + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x^5) \right] \\
 & + \frac{\Delta z^2}{2} \left[\phi_{zz} + \Delta x \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^2 \partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^2 \partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^5 \phi}{\partial z^2 \partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{\partial^6 \phi}{\partial z^2 \partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x^5) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\Delta v^2}{2} \left[\phi_{vv} + \Delta x \frac{\partial^3 \phi}{\partial v^2 \partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^4 \phi}{\partial v^2 \partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^5 \phi}{\partial v^2 \partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{\partial^6 \phi}{\partial v^2 \partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x^5) \right] \\
 & + \frac{\Delta v^2 \Delta z^2}{16} \left[\frac{\partial^4 \phi}{\partial v^2 \partial z^2} + \Delta x \frac{\partial^5 \phi}{\partial v^2 \partial z^2 \partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^6 \phi}{\partial v^2 \partial z^2 \partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^7 \phi}{\partial v^2 \partial z^2 \partial x^3} \right. \\
 & \left. + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{\partial^8 \phi}{\partial v^2 \partial z^2 \partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x^5) \right] + \mathcal{O}(\Delta v^3) + \mathcal{O}(\Delta z^3),
 \end{aligned}$$

e a equação (4.22),

$$\begin{aligned}
 & \phi_{m-1,n}^l + \phi_{m-1,n}^{l+1} + \phi_{m-1,n+1}^l + \phi_{m-1,n+1}^{l+1} = \\
 & 4 \left[\phi - \Delta x \phi_x + \frac{\Delta x^2}{2} \phi_{xx} - \frac{\Delta x^3}{6} \phi_{xxx} + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x^5) \right] \\
 & + \frac{\Delta z^2}{2} \left[\phi_{zz} - \Delta x \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^2 \partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^2 \partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^5 \phi}{\partial z^2 \partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{\partial^6 \phi}{\partial z^2 \partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x^5) \right] \\
 & + \frac{\Delta v^2}{2} \left[\phi_{vv} - \Delta x \frac{\partial^3 \phi}{\partial v^2 \partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^4 \phi}{\partial v^2 \partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^5 \phi}{\partial v^2 \partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{\partial^6 \phi}{\partial v^2 \partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x^5) \right] \\
 & + \frac{\Delta v^2 \Delta z^2}{16} \left[\frac{\partial^4 \phi}{\partial v^2 \partial z^2} - \Delta x \frac{\partial^5 \phi}{\partial v^2 \partial z^2 \partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^6 \phi}{\partial v^2 \partial z^2 \partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^7 \phi}{\partial v^2 \partial z^2 \partial x^3} \right. \\
 & \left. + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{\partial^8 \phi}{\partial v^2 \partial z^2 \partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x^5) \right] + \mathcal{O}(\Delta v^3) + \mathcal{O}(\Delta z^3).
 \end{aligned}$$

Fazendo a soma, temos

$$\begin{aligned}
 & \phi_{m+1,n}^l + \phi_{m+1,n}^{l+1} + \phi_{m+1,n+1}^l + \phi_{m+1,n+1}^{l+1} + \phi_{m-1,n}^l + \phi_{m-1,n}^{l+1} + \phi_{m-1,n+1}^l + \phi_{m-1,n+1}^{l+1} = \\
 & 8\phi + 4\Delta x^2 \phi_{xx} + \frac{\Delta x^4}{3} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \Delta z^2 \phi_{zz} + \frac{\Delta z^2 \Delta x^2}{2} \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^2 \partial x^2} + \frac{\Delta z^2 \Delta x^4}{24} \frac{\partial^6 \phi}{\partial z^2 \partial x^4} \\
 & + \Delta v^2 \phi_{vv} + \frac{\Delta v^2 \Delta x^2}{2} \frac{\partial^4 \phi}{\partial v^2 \partial x^2} + \frac{\Delta v^2 \Delta x^4}{24} \frac{\partial^6 \phi}{\partial v^2 \partial x^4} + \frac{\Delta v^2 \Delta z^2}{8} \frac{\partial^4 \phi}{\partial v^2 \partial z^2} \\
 & + \frac{\Delta v^2 \Delta z^2 \Delta x^2}{16} \frac{\partial^6 \phi}{\partial v^2 \partial z^2 \partial x^2} + \frac{\Delta v^2 \Delta z^2 \Delta x^4}{192} \frac{\partial^8 \phi}{\partial v^2 \partial z^2 \partial x^4} \\
 & + \mathcal{O}(\Delta x^5) + \mathcal{O}(\Delta v^3) + \mathcal{O}(\Delta z^3). \tag{4.23}
 \end{aligned}$$

Portanto, somamos as equações (4.21) e (4.23) e obtemos

$$\begin{aligned}
 & \phi_{m+1,n}^l + \phi_{m+1,n}^{l+1} + \phi_{m+1,n+1}^l + \phi_{m+1,n+1}^{l+1} + \phi_{m-1,n}^l + \phi_{m-1,n}^{l+1} + \phi_{m-1,n+1}^l + \phi_{m-1,n+1}^{l+1} \\
 & - 2(\phi_{m,n}^l + \phi_{m,n}^{l+1} + \phi_{m,n+1}^l + \phi_{m,n+1}^{l+1}) = \\
 & 4\Delta x^2 \phi_{xx} + \frac{\Delta x^4}{3} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\Delta z^2 \Delta x^2}{2} \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^2 \partial x^2} + \frac{\Delta z^2 \Delta x^4}{24} \frac{\partial^6 \phi}{\partial z^2 \partial x^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\Delta v^2 \Delta x^2}{2} \frac{\partial^4 \phi}{\partial v^2 \partial x^2} + \frac{\Delta v^2 \Delta x^4}{24} \frac{\partial^6 \phi}{\partial v^2 \partial x^4} + \frac{\Delta v^2 \Delta z^2 \Delta x^2}{16} \frac{\partial^6 \phi}{\partial v^2 \partial z^2 \partial x^2} \\
 & + \frac{\Delta v^2 \Delta z^2 \Delta x^4}{192} \frac{\partial^8 \phi}{\partial v^2 \partial z^2 \partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x^5) + \mathcal{O}(\Delta v^3) + \mathcal{O}(\Delta z^3) \\
 & = 4\Delta x^2 \phi_{xx} + \mathcal{O}(\Delta x^4) + \mathcal{O}(\Delta v^2 \Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta z^2 \Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta v^2 \Delta z^2 \Delta x^2) .
 \end{aligned}$$

Aqui, utilizamos que os termos de ordem menor que Δx^2 também cancelam nos termos não explicitados de ordem Δv^3 e Δz^3 .

Logo, voltando para a equação (4.13), temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{xx}^\Delta \phi & = \phi_{xx} + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\Delta z^2}{8} \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^2 \partial x^2} + \frac{\Delta z^2 \Delta x^2}{96} \frac{\partial^6 \phi}{\partial z^2 \partial x^4} + \frac{\Delta v^2}{8} \frac{\partial^4 \phi}{\partial v^2 \partial x^2} \\
 & + \frac{\Delta v^2 \Delta x^2}{96} \frac{\partial^6 \phi}{\partial v^2 \partial x^4} + \frac{\Delta v^2 \Delta z^2}{64} \frac{\partial^6 \phi}{\partial v^2 \partial z^2 \partial x^2} + \frac{\Delta v^2 \Delta z^2 \Delta x^2}{768} \frac{\partial^8 \phi}{\partial v^2 \partial z^2 \partial x^4} \\
 & + \mathcal{O}(\Delta x^3) + \mathcal{O}(\Delta v^3) + \mathcal{O}(\Delta z^3) , \\
 & = \phi_{xx} + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta z^2) + \mathcal{O}(\Delta v^2) . \tag{4.24}
 \end{aligned}$$

Na seqüência, consideremos a aproximação para p_{zz} no centro da célula dada pela segunda expressão da equação (4.5) novamente para uma função suave ϕ , ou seja,

$$\mathcal{L}_{zz}^\Delta \phi = \frac{1}{4} \left[\phi_{zz} \Big|_{m,n}^l + \phi_{zz} \Big|_{m,n+1}^l + \phi_{zz} \Big|_{m,n}^{l+1} + \phi_{zz} \Big|_{m,n+1}^{l+1} \right] ,$$

onde podemos substituir a segunda expressão da equação (4.10) em cada um dos seus termos e chegar em

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{zz}^\Delta \phi & = \frac{1}{4\Delta z^2} \left[\phi_{m,n+1}^l - 2\phi_{m,n}^l + \phi_{m,n-1}^l + \phi_{m,n+2}^l - 2\phi_{m,n+1}^l + \phi_{m,n}^l \right. \\
 & \quad \left. + \phi_{m,n+1}^{l+1} - 2\phi_{m,n}^{l+1} + \phi_{m,n-1}^{l+1} + \phi_{m,n+2}^{l+1} - 2\phi_{m,n+1}^{l+1} + \phi_{m,n}^{l+1} \right] , \\
 & = \frac{1}{4\Delta z^2} \left[-\phi_{m,n+1}^l - \phi_{m,n}^l + \phi_{m,n-1}^l - \phi_{m,n+1}^{l+1} - \phi_{m,n}^{l+1} + \phi_{m,n-1}^{l+1} + \phi_{m,n+2}^l \right. \\
 & \quad \left. + \phi_{m,n+2}^{l+1} \right] . \tag{4.25}
 \end{aligned}$$

Agora, para cada um dos termos da equação acima, fazemos uma expansão em série de Taylor em torno de $v_{l+1/2}$. Para facilitar as contas, agrupamos esses termos aos pares para que alguns termos se cancelem entre si. Expandindo o primeiro e o quarto da equação (4.25), temos

$$\begin{aligned}
 -\phi_{m,n+1}^l & = -\phi_{m,n+1}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta v}{2} (\phi_v)_{m,n+1}^{l+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta v^2}{8} (\phi_{vv})_{m,n+1}^{l+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta v^3) , \\
 -\phi_{m,n+1}^{l+1} & = -\phi_{m,n+1}^{l+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta v}{2} (\phi_v)_{m,n+1}^{l+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta v^2}{8} (\phi_{vv})_{m,n+1}^{l+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta v^3) ,
 \end{aligned}$$

que somando, obtemos

$$-\phi_{m,n+1}^l - \phi_{m,n+1}^{l+1} = -2\phi_{m,n+1}^{l+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta v^2}{4}(\phi_{vv})_{m,n+1}^{l+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta v^3). \quad (4.26)$$

Similarmente, para os demais termos, temos

$$-\phi_{m,n}^l - \phi_{m,n}^{l+1} = -2\phi_{m,n}^{l+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta v^2}{4}(\phi_{vv})_{m,n}^{l+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta v^3), \quad (4.27)$$

$$\phi_{m,n-1}^l + \phi_{m,n-1}^{l+1} = 2\phi_{m,n-1}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta v^2}{4}(\phi_{vv})_{m,n-1}^{l+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta v^3), \quad (4.28)$$

$$\phi_{m,n+2}^l + \phi_{m,n+2}^{l+1} = 2\phi_{m,n+2}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta v^2}{4}(\phi_{vv})_{m,n+2}^{l+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta v^3). \quad (4.29)$$

Assim, podemos expandir os novos termos acima em série de Taylor em z em torno de $z = z_{n+1/2}$ e novamente trabalhar aos pares. Por comodidade, vamos negligenciar os índices nas novas expressões pois todas são feitas no ponto $(x_m, z_{n+1/2}, v_{l+1/2})$. Para (4.26) e (4.27), temos

$$\begin{aligned} -\phi_{m,n+1}^l - \phi_{m,n+1}^{l+1} &= -2 \left[\phi + \frac{\Delta z}{2}\phi_z + \frac{\Delta z^2}{8}\phi_{zz} + \frac{\Delta z^3}{48}\phi_{zzz} + \frac{\Delta z^4}{384}\frac{\partial^4\phi}{\partial z^4} + \mathcal{O}(\Delta z^5) \right] \\ &\quad - \frac{\Delta v^2}{4} \left[\phi_{vv} + \frac{\Delta z}{2}\frac{\partial^3\phi}{\partial v^2\partial z} + \frac{\Delta z^2}{8}\frac{\partial^4\phi}{\partial v^2\partial z^2} + \frac{\Delta z^3}{48}\frac{\partial^5\phi}{\partial v^2\partial z^3} + \frac{\Delta z^4}{384}\frac{\partial^6\phi}{\partial v^2\partial z^4} \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{O}(\Delta z^5) \right] + \mathcal{O}(\Delta v^3), \\ -\phi_{m,n}^l - \phi_{m,n}^{l+1} &= -2 \left[\phi - \frac{\Delta z}{2}\phi_z + \frac{\Delta z^2}{8}\phi_{zz} - \frac{\Delta z^3}{48}\phi_{zzz} + \frac{\Delta z^4}{384}\frac{\partial^4\phi}{\partial z^4} + \mathcal{O}(\Delta z^5) \right] \\ &\quad - \frac{\Delta v^2}{4} \left[\phi_{vv} - \frac{\Delta z}{2}\frac{\partial^3\phi}{\partial v^2\partial z} + \frac{\Delta z^2}{8}\frac{\partial^4\phi}{\partial v^2\partial z^2} - \frac{\Delta z^3}{48}\frac{\partial^5\phi}{\partial v^2\partial z^3} + \frac{\Delta z^4}{384}\frac{\partial^6\phi}{\partial v^2\partial z^4} \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{O}(\Delta z^5) \right] + \mathcal{O}(\Delta v^3). \end{aligned}$$

Agora, somando as expressões acima, temos

$$\begin{aligned} -\phi_{m,n+1}^l - \phi_{m,n+1}^{l+1} - \phi_{m,n}^l - \phi_{m,n}^{l+1} &= -4\phi - \frac{\Delta z^2}{2}\phi_{zz} - \frac{\Delta z^4}{96}\frac{\partial^4\phi}{\partial z^4} - \frac{\Delta v^2}{2}\phi_{vv} \\ &\quad - \frac{\Delta v^2\Delta z^2}{16}\frac{\partial^4\phi}{\partial v^2\partial z^2} - \frac{\Delta v^2\Delta z^4}{768}\frac{\partial^6\phi}{\partial v^2\partial z^4} + \mathcal{O}(\Delta z^5) + \mathcal{O}(\Delta v^3). \quad (4.30) \end{aligned}$$

Similarmente, para as equações (4.28) e (4.29), chegamos em

$$\phi_{m,n-1}^l + \phi_{m,n-1}^{l+1} = 2 \left[\phi - \frac{3\Delta z}{2}\phi_z + \frac{9\Delta z^2}{8}\phi_{zz} - \frac{9\Delta z^3}{16}\phi_{zzz} + \frac{27\Delta z^4}{128}\frac{\partial^4\phi}{\partial z^4} + \mathcal{O}(\Delta z^5) \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\Delta v^2}{4} \left[\phi_{vv} - \frac{3\Delta z}{2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial v^2 \partial z} + \frac{9\Delta z^2}{8} \frac{\partial^4 \phi}{\partial v^2 \partial z^2} - \frac{9\Delta z^3}{16} \frac{\partial^5 \phi}{\partial v^2 \partial z^3} \right. \\
 & \left. + \frac{27\Delta z^4}{128} \frac{\partial^6 \phi}{\partial v^2 \partial z^4} + \mathcal{O}(\Delta z^5) \right] + \mathcal{O}(\Delta v^3), \\
 \phi_{m,n+2}^l + \phi_{m,n+2}^{l+1} & = 2 \left[\phi + \frac{3\Delta z}{2} \phi_z + \frac{9\Delta z^2}{8} \phi_{zz} + \frac{9\Delta z^3}{16} \phi_{zzz} + \frac{27\Delta z^4}{128} \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} + \mathcal{O}(\Delta z^5) \right] \\
 & + \frac{\Delta v^2}{4} \left[\phi_{vv} + \frac{3\Delta z}{2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial v^2 \partial z} + \frac{9\Delta z^2}{8} \frac{\partial^4 \phi}{\partial v^2 \partial z^2} + \frac{9\Delta z^3}{16} \frac{\partial^5 \phi}{\partial v^2 \partial z^3} \right. \\
 & \left. + \frac{27\Delta z^4}{128} \frac{\partial^6 \phi}{\partial v^2 \partial z^4} + \mathcal{O}(\Delta z^5) \right] + \mathcal{O}(\Delta v^3).
 \end{aligned}$$

Logo, a soma das duas expressões acima é

$$\begin{aligned}
 \phi_{m,n-1}^l + \phi_{m,n-1}^{l+1} + \phi_{m,n+2}^l + \phi_{m,n+2}^{l+1} & = 4\phi + \frac{9\Delta z^2}{2} \phi_{zz} + \frac{27\Delta z^4}{32} \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} + \frac{\Delta v^2}{2} \phi_{vv} \\
 & + \frac{9\Delta v^2 \Delta z^2}{16} \frac{\partial^4 \phi}{\partial v^2 \partial z^2} + \frac{27\Delta v^2 \Delta z^4}{256} \frac{\partial^6 \phi}{\partial v^2 \partial z^4} \\
 & + \mathcal{O}(\Delta z^5) + \mathcal{O}(\Delta v^3). \tag{4.31}
 \end{aligned}$$

Portanto, somando as equações (4.30) e (4.31), temos

$$\begin{aligned}
 & -\phi_{m,n+1}^l - \phi_{m,n+1}^{l+1} - \phi_{m,n}^l - \phi_{m,n}^{l+1} + \phi_{m,n-1}^l + \phi_{m,n-1}^{l+1} + \phi_{m,n+2}^l + \phi_{m,n+2}^{l+1} = \\
 & 4\Delta z^2 \phi_{zz} + \frac{5\Delta z^4}{6} \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} + \frac{\Delta v^2 \Delta z^2}{2} \frac{\partial^4 \phi}{\partial v^2 \partial z^2} + \frac{5\Delta v^2 \Delta z^4}{48} \frac{\partial^6 \phi}{\partial v^2 \partial z^4} + \mathcal{O}(\Delta z^5) + \mathcal{O}(\Delta v^3) \\
 & = 4\Delta z^2 \phi_{zz} + \mathcal{O}(\Delta z^4) + \mathcal{O}(\Delta v^2 \Delta z^2) + \mathcal{O}(\Delta v^3).
 \end{aligned}$$

Observamos, novamente, que o termo de ordem Δv^3 nessa expansão também é multiplicado por Δz^2 se considerarmos mais termos.

Voltando para a equação (4.25), temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{zz}^\Delta \phi & = \phi_{zz} + \frac{5\Delta z^2}{24} \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} + \frac{\Delta v^2}{8} \frac{\partial^4 \phi}{\partial v^2 \partial z^2} + \frac{5\Delta v^2 \Delta z^2}{192} \frac{\partial^6 \phi}{\partial v^2 \partial z^4} + \mathcal{O}(\Delta z^3) + \mathcal{O}(\Delta v^3), \\
 & = \phi_{zz} + \mathcal{O}(\Delta z^2) + \mathcal{O}(\Delta v^2). \tag{4.32}
 \end{aligned}$$

Por fim, consideramos a expressão dada pela equação (4.6), junto com a expressão (4.7), e aplicamos o operador \mathcal{L}_{vz}^Δ a uma função suave ϕ , ou seja,

$$\mathcal{L}_{vz}^\Delta \phi = \frac{2v_l + \Delta v}{(2z_n + \Delta z)\Delta z \Delta v} \left[\phi_{m,n+1}^{l+1} - \phi_{m,n+1}^l - \phi_{m,n}^{l+1} + \phi_{m,n}^l \right]. \tag{4.33}$$

Para esta expressão, também fazemos a expansão em séries de Taylor em cada um dos seus quatro termos, primeiramente em torno de $v = v_{l+1/2}$, trabalhando ainda aos pares dos termos da equação (4.33). Inicialmente, expandimos o primeiro e o segundo termo de (4.33)

$$\begin{aligned}\phi_{m,n+1}^{l+1} &= \phi_{m,n+1}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta v}{2}(\phi_v)_{m,n+1}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta v^2}{8}(\phi_{vv})_{m,n+1}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta v^3}{48}(\phi_{vvv})_{m,n+1}^{l+\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{\Delta v^4}{384} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial v^4} \right)_{m,n+1}^{l+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta v^5), \\ -\phi_{m,n+1}^l &= -\phi_{m,n+1}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta v}{2}(\phi_v)_{m,n+1}^{l+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta v^2}{8}(\phi_{vv})_{m,n+1}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta v^3}{48}(\phi_{vvv})_{m,n+1}^{l+\frac{1}{2}} \\ &\quad - \frac{\Delta v^4}{384} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial v^4} \right)_{m,n+1}^{l+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta v^5).\end{aligned}$$

Agora, somando estas duas igualdades, temos

$$\phi_{m,n+1}^{l+1} - \phi_{m,n+1}^l = \Delta v(\phi_v)_{m,n+1}^{l+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta v^3}{24}(\phi_{vvv})_{m,n+1}^{l+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta v^5). \quad (4.34)$$

Similarmente, temos para os dois últimos termos da equação (4.33)

$$-\phi_{m,n}^{l+1} + \phi_{m,n}^l = -\Delta v(\phi_v)_{m,n}^{l+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta v^3}{24}(\phi_{vvv})_{m,n}^{l+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta v^5). \quad (4.35)$$

Agora, expandimos as equações (4.34) e (4.35), em torno de $z_{n+1/2}$, e obtemos

$$\begin{aligned}\phi_{m,n+1}^{l+1} - \phi_{m,n+1}^l &= \Delta v \left[\phi_v + \frac{\Delta z}{2} \phi_{vz} + \frac{\Delta z^2}{8} \frac{\partial^3 \phi}{\partial v \partial z^2} + \frac{\Delta z^3}{48} \frac{\partial^4 \phi}{\partial v \partial z^3} + \frac{\Delta z^4}{384} \frac{\partial^5 \phi}{\partial v \partial z^4} \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{O}(\Delta z^5) \right] + \frac{\Delta v^3}{24} \left[\phi_{vvv} + \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial^4 \phi}{\partial v^3 \partial z} + \frac{\Delta z^2}{8} \frac{\partial^5 \phi}{\partial v^3 \partial z^2} + \frac{\Delta z^3}{48} \frac{\partial^6 \phi}{\partial v^3 \partial z^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta z^4}{384} \frac{\partial^7 \phi}{\partial v^3 \partial z^4} + \mathcal{O}(\Delta z^5) \right] + \mathcal{O}(\Delta v^5), \\ -\phi_{m,n}^{l+1} + \phi_{m,n}^l &= -\Delta v \left[\phi_v - \frac{\Delta z}{2} \phi_{vz} + \frac{\Delta z^2}{8} \frac{\partial^3 \phi}{\partial v \partial z^2} - \frac{\Delta z^3}{48} \frac{\partial^4 \phi}{\partial v \partial z^3} + \frac{\Delta z^4}{384} \frac{\partial^5 \phi}{\partial v \partial z^4} \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{O}(\Delta z^5) \right] - \frac{\Delta v^3}{24} \left[\phi_{vvv} - \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial^4 \phi}{\partial v^3 \partial z} + \frac{\Delta z^2}{8} \frac{\partial^5 \phi}{\partial v^3 \partial z^2} - \frac{\Delta z^3}{48} \frac{\partial^6 \phi}{\partial v^3 \partial z^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta z^4}{384} \frac{\partial^7 \phi}{\partial v^3 \partial z^4} + \mathcal{O}(\Delta z^5) \right] + \mathcal{O}(\Delta v^5),\end{aligned}$$

os quais, quando somamos, fornecem

$$\phi_{m,n+1}^{l+1} - \phi_{m,n+1}^l - \phi_{m,n}^{l+1} + \phi_{m,n}^l = \Delta v \Delta z \phi_{vz} + \frac{\Delta v \Delta z^3}{24} \frac{\partial^4 \phi}{\partial v \partial z^3} + \frac{\Delta v^3 \Delta z}{24} \frac{\partial^4 \phi}{\partial v^3 \partial z}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\Delta v^3 \Delta z^3}{576} \frac{\partial^6 \phi}{\partial v^3 \partial z^3} + \mathcal{O}(\Delta z^5) + \mathcal{O}(\Delta v^5) \\
 & = \Delta v \Delta z \phi_{vz} + \mathcal{O}(\Delta v \Delta z^3) + \mathcal{O}(\Delta v^3 \Delta z). \quad (4.36)
 \end{aligned}$$

Novamente, observamos que os termos representados por $\mathcal{O}(\Delta z^5)$ e $\mathcal{O}(\Delta v^5)$, se expandidos, são multiplicados por Δv e Δz , respectivamente.

Portanto, voltando para a equação (4.33), chegamos em

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{vz}^{\Delta} \phi & = \frac{2v_l + \Delta v}{2z_n + \Delta z} \left[\phi_{vz} + \frac{\Delta z^2}{24} \frac{\partial^4 \phi}{\partial v \partial z^3} + \frac{\Delta v^2}{24} \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^v \partial 3} + \frac{\Delta v^2 \Delta z^2}{576} \frac{\partial^6 \phi}{\partial v^3 \partial z^3} \right. \\
 & \quad \left. + \mathcal{O}(\Delta z^4) + \mathcal{O}(\Delta v^4) \right], \quad (4.37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = \frac{2v_l + \Delta v}{2z_n + \Delta z} \phi_{vz} + \mathcal{O}(\Delta v^2) + \mathcal{O}(\Delta z^2). \quad (4.38)
 \end{aligned}$$

De acordo com a equação (4.12), concluímos que o esquema centrado no centro da célula é consistente de ordem 2 em x , z e v com a equação diferencial parcial da onda imagem, ou seja,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\phi - \mathcal{L}^{\Delta}\phi & = \phi_{xx} + \phi_{zz} + \frac{v}{z} \phi_{vz} - \left\{ \phi_{xx} + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\Delta z^2}{8} \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^2 \partial x^2} + \frac{\Delta z^2 \Delta x^2}{96} \frac{\partial^6 \phi}{\partial z^2 \partial x^4} \right. \\
 & \quad + \frac{\Delta v^2}{8} \frac{\partial^4 \phi}{\partial v^2 \partial x^2} + \frac{\Delta v^2 \Delta x^2}{96} \frac{\partial^6 \phi}{\partial v^2 \partial x^4} + \frac{\Delta v^2 \Delta z^2}{64} \frac{\partial^6 \phi}{\partial v^2 \partial z^2 \partial x^2} \\
 & \quad + \frac{\Delta v^2 \Delta z^2 \Delta x^2}{768} \frac{\partial^8 \phi}{\partial v^2 \partial z^2 \partial x^4} + \phi_{zz} + \frac{5\Delta z^2}{24} \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} + \frac{\Delta v^2}{8} \frac{\partial^4 \phi}{\partial v^2 \partial z^2} \\
 & \quad + \frac{5\Delta v^2 \Delta z^2}{192} \frac{\partial^6 \phi}{\partial v^2 \partial z^4} + \frac{2v_l + \Delta v}{2z_n + \Delta z} \left[\phi_{vz} + \frac{\Delta z^2}{24} \frac{\partial^4 \phi}{\partial v \partial z^3} + \frac{\Delta v^2}{24} \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^v \partial 3} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\Delta v^2 \Delta z^2}{576} \frac{\partial^6 \phi}{\partial v^3 \partial z^3} \right] + \mathcal{O}(\Delta x^3) + \mathcal{O}(\Delta z^3) + \mathcal{O}(\Delta v^3) \left. \right\} \\
 & = \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta z^2) + \mathcal{O}(\Delta v^2) \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

quando $\Delta x, \Delta z, \Delta v \rightarrow 0$.

4.2.3 Estabilidade

Baseado no critério de estabilidade de von Neumann (Strikwerda, 1989; Thomas, 1995), podemos verificar a estabilidade do esquema centrado no centro da célula estudado nesta seção,

i.e., substituímos na equação discretizada (4.11) a seguinte expressão

$$p_{m,n}^l = \xi^l e^{imk_x \Delta x} e^{ink_z \Delta z}, \quad (4.39)$$

onde k_x e k_z são as frequências espaciais (i.e., números de ondas) em x e z , respectivamente, e ξ é chamado de fator de amplificação. Depois verificamos se a condição

$$|\xi| \leq 1 \quad (4.40)$$

é satisfeita. Se esta desigualdade for verdadeira dizemos que o esquema de DF é estável.

Consideremos inicialmente o lado esquerdo (LE) da equação (4.11). Quando substituímos a expressão de (4.39) em cada um dos seus termos e dividimos por esta mesma expressão, obtemos

$$\text{LE} \equiv \xi \left[\beta e^{-i\theta_z} + \alpha e^{-i\theta_x} + \mu_n^l + \alpha e^{i\theta_x} + \alpha e^{-i\theta_x} e^{i\theta_z} + \nu_n^l e^{i\theta_z} + \alpha e^{i\theta_x} e^{i\theta_z} + \beta e^{i2\theta_z} \right],$$

onde $\mu_n^l = -k_n^l - 2\alpha - \beta$, $\nu_n^l = k_n^l - 2\alpha - \beta$ e k_n^l é o dado pela equação (4.9). Logo,

$$\begin{aligned} \text{LE} &= \xi \left[\beta e^{-i\theta_z} + \alpha e^{-i\theta_x} - k_n^l - 2\alpha - \beta + \alpha e^{i\theta_x} + \alpha e^{-i\theta_x} e^{i\theta_z} + k_n^l e^{i\theta_z} - 2\alpha e^{i\theta_z} - \beta e^{i\theta_z} \right. \\ &\quad \left. + \alpha e^{i\theta_x} e^{i\theta_z} + \beta e^{i2\theta_z} \right] \\ &= \xi \left[-\beta(e^{i\theta_z} - e^{-i\theta_z}) + \alpha(e^{i\theta_x} + e^{-i\theta_x}) + \alpha e^{i\theta_z}(e^{i\theta_x} + e^{-i\theta_x}) + k_n^l(e^{i\theta_z} - 1) \right. \\ &\quad \left. - 2\alpha(e^{i\theta_z} + 1) + \beta(e^{i2\theta_z} - 1) \right] \\ &= \xi \left[-\beta 2i \sin \theta_z + 2\alpha \cos \theta_x (e^{i\theta_z} + 1) - 2\alpha(e^{i\theta_z} + 1) + k_n^l(e^{i\theta_z} - 1) + \beta(e^{i2\theta_z} - 1) \right] \\ &= \xi \left[-\beta 2i \sin \theta_z + 2\alpha(e^{i\theta_z} + 1)(\cos \theta_x - 1) + k_n^l(e^{i\theta_z} - 1) + \beta(e^{i2\theta_z} - 1) \right]. \end{aligned}$$

Daí, separando a parte real da parte imaginária, temos

$$\begin{aligned} \text{LE} &\equiv \xi \left[2\alpha(\cos \theta_x - 1)(\cos \theta_z + 1) + k_n^l(\cos \theta_z - 1) + \beta(\cos 2\theta_z - 1) \right] \\ &\quad + i \left\{ [k_n^l - 2\beta + 2\alpha(\cos \theta_x - 1)] \sin \theta_z + \beta \sin 2\theta_z \right\}. \end{aligned}$$

Trabalhamos agora com as partes real e imaginária separadamente. Usamos as seguintes relações trigonométricas

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$\begin{aligned}\sin \theta &= 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\ \sin^2 \theta &= 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 4 \sin^4 \frac{\theta}{2} = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right),\end{aligned}$$

e obtemos

$$\begin{aligned}r_1 \equiv \text{Re}(\text{LE}) &= 2\alpha \left(-2 \sin^2 \frac{\theta_x}{2}\right) \left(2 - 2 \sin^2 \frac{\theta_z}{2}\right) + k_n^l \left(-2 \sin^2 \frac{\theta_z}{2}\right) + \beta \left(-2 \sin^2 \theta_z\right) \\ &= -8\alpha \sin^2 \frac{\theta_x}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta_z}{2}\right) - 2k_n^l \sin^2 \frac{\theta_z}{2} - 8\beta \sin^2 \frac{\theta_z}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta_z}{2}\right) \\ &= -8\alpha \sin^2 \frac{\theta_x}{2} + 8 \sin^2 \frac{\theta_z}{2} \left[\alpha \sin^2 \frac{\theta_x}{2} - \frac{k_n^l}{4} - \beta \left(1 - \sin^2 \frac{\theta_z}{2}\right)\right]\end{aligned}\quad (4.41)$$

e

$$\begin{aligned}r_2 \equiv \text{Im}(\text{LE}) &= \left[k_n^l - 2\beta + 2\alpha \left(-2 \sin^2 \frac{\theta_x}{2}\right)\right] 2 \sin \frac{\theta_z}{2} \cos \frac{\theta_z}{2} + 2\beta \sin \theta_z \cos \theta_z \\ &= 2 \left[k_n^l - 2\beta - 4\alpha \sin^2 \frac{\theta_x}{2}\right] \sin \frac{\theta_z}{2} \cos \frac{\theta_z}{2} + 4\beta \sin \frac{\theta_z}{2} \cos \frac{\theta_z}{2} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\theta_z}{2}\right) \\ &= 2 \left[k_n^l - 4\alpha \sin^2 \frac{\theta_x}{2}\right] \sin \frac{\theta_z}{2} \cos \frac{\theta_z}{2} - 8\beta \sin^2 \frac{\theta_z}{2} \sin \frac{\theta_z}{2} \cos \frac{\theta_z}{2} \\ &= 8 \left[\frac{k_n^l}{4} - \alpha \sin^2 \frac{\theta_x}{2} - \beta \sin^2 \frac{\theta_z}{2}\right] \sin \frac{\theta_z}{2} \cos \frac{\theta_z}{2}.\end{aligned}\quad (4.42)$$

Para o lado direito (LD) da equação (4.11) as contas são muito similares. Vejamos os cálculos para este caso

$$\begin{aligned}\text{LD} &\equiv - \left[\beta e^{-i\theta_z} + \alpha e^{-i\theta_x} + k_n^l - 2\alpha - \beta + \alpha e^{i\theta_x} + \alpha e^{-i\theta_x} e^{i\theta_z} - k_n^l e^{i\theta_z} - 2\alpha e^{i\theta_z} - \beta e^{i\theta_z} \right. \\ &\quad \left. + \alpha e^{i\theta_x} e^{i\theta_z} + \beta e^{i2\theta_z}\right] \\ &= - \left[-\beta 2i \sin \theta_z + 2\alpha(\cos \theta_x - 1)(e^{i\theta_z} + 1) - k_n^l(e^{i\theta_z} - 1) + \beta(e^{i2\theta_z} - 1)\right],\end{aligned}$$

que, separando a parte real da parte imaginária, fornece

$$\begin{aligned}\text{LD} &= - \left\{ \left[2\alpha(\cos \theta_x - 1)(\cos \theta_z + 1) - k_n^l(\cos \theta_z - 1) + \beta(\cos 2\theta_z - 1)\right] \right. \\ &\quad \left. + i \left\{ \left[-k_n^l - 2\beta + 2\alpha(\cos \theta_x - 1)\right] \sin \theta_z + \beta \sin 2\theta_z \right\} \right\}.\end{aligned}$$

Utilizando as relações trigonométricas vistas anteriormente, chegamos nas seguintes expressões para as partes real e imaginária do lado direito de (4.11)

$$s_1 \equiv \text{Re}(\text{LD}) = - \left\{ -8\alpha \sin^2 \frac{\theta_x}{2} + 8 \sin^2 \frac{\theta_z}{2} \left[\alpha \sin^2 \frac{\theta_x}{2} + \frac{k_n^l}{4} - \beta \left(1 - \sin^2 \frac{\theta_z}{2}\right)\right] \right\}\quad (4.43)$$

e

$$s_2 \equiv \text{Im}(\text{LD}) = - \left\{ 8 \left[-\frac{k_n^l}{4} - \alpha \sin^2 \frac{\theta_x}{2} - \beta \sin^2 \frac{\theta_z}{2} \right] \sin \frac{\theta_z}{2} \cos \frac{\theta_z}{2} \right\}. \quad (4.44)$$

Portanto, podemos expressar ξ da seguinte forma

$$\xi = \frac{s_1 + i s_2}{r_1 + i r_2}, \quad (4.45)$$

onde, usando a notação $\eta_x = \sin^2 \frac{\theta_x}{2}$ e $\eta_z = \sin^2 \frac{\theta_z}{2}$, temos

$$\begin{aligned} \xi &= - \frac{-\alpha\eta_x + \eta_z \left[\alpha\eta_x + \frac{k_n^l}{4} - \beta(1 - \eta_z) \right] + i \left[-\frac{k_n^l}{4} - \alpha\eta_x - \beta\eta_z \right] \sin \frac{\theta_z}{2} \cos \frac{\theta_z}{2}}{-\alpha\eta_x + \eta_z \left[\alpha\eta_x - \frac{k_n^l}{4} - \beta(1 - \eta_z) \right] + i \left[\frac{k_n^l}{4} - \alpha\eta_x - \beta\eta_z \right] \sin \frac{\theta_z}{2} \cos \frac{\theta_z}{2}} \\ &= - \frac{-\alpha\eta_x/\eta_z + \left[\alpha\eta_x + \frac{k_n^l}{4} - \beta(1 - \eta_z) \right] + i \left[-\frac{k_n^l}{4} - \alpha\eta_x - \beta\eta_z \right] \cot \frac{\theta_z}{2}}{-\alpha\eta_x/\eta_z + \left[\alpha\eta_x - \frac{k_n^l}{4} - \beta(1 - \eta_z) \right] + i \left[\frac{k_n^l}{4} - \alpha\eta_x - \beta\eta_z \right] \cot \frac{\theta_z}{2}}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Logo,

$$|\xi|^2 = \frac{\left[-\alpha\eta_x/\eta_z + \alpha\eta_x + \frac{k_n^l}{4} - \beta(1 - \eta_z) \right]^2 + \left[\left(-\frac{k_n^l}{4} - \alpha\eta_x - \beta\eta_z \right) \cot \frac{\theta_z}{2} \right]^2}{\left[-\alpha\eta_x/\eta_z + \alpha\eta_x - \frac{k_n^l}{4} - \beta(1 - \eta_z) \right]^2 + \left[\left(\frac{k_n^l}{4} - \alpha\eta_x - \beta\eta_z \right) \cot \frac{\theta_z}{2} \right]^2}.$$

Agora, seja $a = -\alpha\eta_x - \beta\eta_z$. Observando que $(1/\eta_z - 1) = \cot^2 \theta_z/2$, temos

$$\begin{aligned} |\xi|^2 &= \frac{\left[-\alpha\eta_x/\eta_z - \beta + \alpha\eta_x + \beta\eta_z + \frac{k_n^l}{4} \right]^2 + \left[\left(-\frac{k_n^l}{4} - \alpha\eta_x - \beta\eta_z \right) \cot \frac{\theta_z}{2} \right]^2}{\left[-\alpha\eta_x/\eta_z - \beta + \alpha\eta_x + \beta\eta_z - \frac{k_n^l}{4} \right]^2 + \left[\left(\frac{k_n^l}{4} - \alpha\eta_x - \beta\eta_z \right) \cot \frac{\theta_z}{2} \right]^2} \\ &= \frac{\left[a/\eta_z - a + \frac{k_n^l}{4} \right]^2 + \left[\left(a - \frac{k_n^l}{4} \right) \cot \frac{\theta_z}{2} \right]^2}{\left[a/\eta_z - a - \frac{k_n^l}{4} \right]^2 + \left[\left(a + \frac{k_n^l}{4} \right) \cot \frac{\theta_z}{2} \right]^2} \\ &= \frac{\left[a(1/\eta_z - 1) + \frac{k_n^l}{4} \right]^2 + \left[\left(a - \frac{k_n^l}{4} \right) \cot \frac{\theta_z}{2} \right]^2}{\left[a(1/\eta_z - 1) - \frac{k_n^l}{4} \right]^2 + \left[\left(a + \frac{k_n^l}{4} \right) \cot \frac{\theta_z}{2} \right]^2} \\ &= \frac{\left[a \cot^2 \frac{\theta_z}{2} + \frac{k_n^l}{4} \right]^2 + \left[\left(a - \frac{k_n^l}{4} \right) \cot \frac{\theta_z}{2} \right]^2}{\left[a \cot^2 \frac{\theta_z}{2} - \frac{k_n^l}{4} \right]^2 + \left[\left(a + \frac{k_n^l}{4} \right) \cot \frac{\theta_z}{2} \right]^2} \\ &= \frac{a^2 \cot^4 \frac{\theta_z}{2} + 2a \frac{k_n^l}{4} \cot^2 \frac{\theta_z}{2} + \left(\frac{k_n^l}{4} \right)^2 + a^2 \cot^2 \frac{\theta_z}{2} - 2a \frac{k_n^l}{4} \cot^2 \frac{\theta_z}{2} + \left(\frac{k_n^l}{4} \right)^2 \cot^2 \frac{\theta_z}{2}}{a^2 \cot^4 \frac{\theta_z}{2} - 2a \frac{k_n^l}{4} \cot^2 \frac{\theta_z}{2} + \left(\frac{k_n^l}{4} \right)^2 + a^2 \cot^2 \frac{\theta_z}{2} + 2a \frac{k_n^l}{4} \cot^2 \frac{\theta_z}{2} + \left(\frac{k_n^l}{4} \right)^2 \cot^2 \frac{\theta_z}{2}} \\ &= \frac{a^2 \cot^4 \frac{\theta_z}{2} + \left(\frac{k_n^l}{4} \right)^2 + a^2 \cot^2 \frac{\theta_z}{2} + \left(\frac{k_n^l}{4} \right)^2 \cot^2 \frac{\theta_z}{2}}{a^2 \cot^4 \frac{\theta_z}{2} + \left(\frac{k_n^l}{4} \right)^2 + a^2 \cot^2 \frac{\theta_z}{2} + \left(\frac{k_n^l}{4} \right)^2 \cot^2 \frac{\theta_z}{2}} = 1. \end{aligned}$$

Ou seja, o esquema é incondicionalmente estável.

O fato deste esquema ser incondicionalmente estável é de extrema importância pois nos diz que a convergência do método é independente do tamanho do passo dado na velocidade de propagação. Também, que podemos usar este esquema tanto para crescer como decrescer na velocidade.

É importante observar neste contexto que, o fato do esquema ser incondicionalmente estável não implica que um passo Δv , de tamanho arbitrário, possa ser usado na sua realização numérica. O tamanho do passo Δv ainda tem influência na qualidade da aproximação realizada, mesmo o esquema sendo estável. Um efeito que pode degradar a qualidade da aproximação numérica em função do tamanho do passo Δv é a dispersão numérica dos esquemas, apresentada na próxima seção.

4.2.4 Dispersão

Primeiramente, estudamos o efeito de dispersão no exemplo da propagação de uma onda no tempo. Ou seja, na propagação sem dispersão é de se esperar que um pulso de onda deslocado para (x_1, z_1) , no tempo t_1 , tenha as mesmas propriedades que possuía na sua posição original (x_0, z_0) , no tempo t_0 . É de nosso interesse que a onda imagem se comporte desta maneira quando propagada por meio de um esquema numérico. Assim, como mencionado anteriormente, é de se esperar que um pulso de onda $f(x, z, t)$ no tempo t_0 e no tempo $t_1 = t_0 + \Delta t$ sejam iguais, a não ser pelo seu deslocamento. Com isso esperamos que $f(x_0, z_0, t_0) = f(x_1, z_1, t_1)$.

É conhecido que podemos obter a transformada de Fourier no domínio das frequências espaciais para cada uma das funções acima. As suas inversas são dadas por

$$f(x_0, z_0, t_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k_x, k_z, t_0) e^{ik_x x_0} e^{ik_z z_0} dk_x dk_z$$

(4.47)

e

$$f(x_1, z_1, t_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k_x, k_z, t_1) e^{ik_x x_1} e^{ik_z z_1} dk_x dk_z,$$

onde supomos que a função f satisfaça todas as condições necessárias para que estas transformadas existam.

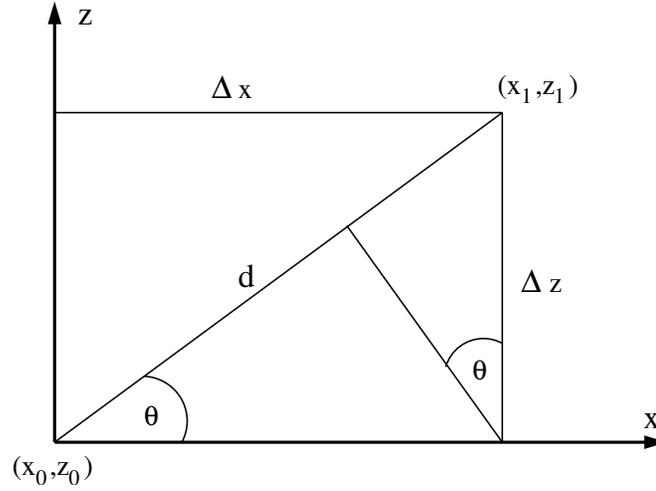


Figura 4.2: Visualização da distância de propagação.

Como queremos a igualdade das funções e sabemos que a transformação de Fourier é única, concluímos que os argumentos das integrais devem ser iguais, isto é,

$$\hat{f}(k_x, k_z, t_0) e^{ik_x x_0} e^{ik_z z_0} = \hat{f}(k_x, k_z, t_1) e^{ik_x x_1} e^{ik_z z_1}, \quad (4.48)$$

de onde, com $t_1 = t_0 + \Delta t$, $x_1 = x_0 + \Delta x$ e $z_1 = z_0 + \Delta z$, temos que

$$\hat{f}(k_x, k_z, t_0 + \Delta t) = e^{-i(k_x \Delta x + k_z \Delta z)} \hat{f}(k_x, k_z, t_0). \quad (4.49)$$

Para uma melhor compreensão deste resultado, mostramos a expressão acima de uma forma diferente. Consideramos, então d o deslocamento que o pulso de onda teve do tempo t_0 para t_1 , assim temos

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2} = a \Delta t, \quad (4.50)$$

onde a é a velocidade de propagação da onda.

Da Figura 4.2, temos

$$d = \Delta x \cos \theta + \Delta z \sin \theta, \quad (4.51)$$

do qual, ao considerarmos $k_x = k \cos \theta$ e $k_z = k \sin \theta$, isto é, $k^2 = k_x^2 + k_z^2$, chegamos em

$$k_x \Delta x + k_z \Delta z = k(\Delta x \cos \theta + \Delta z \sin \theta) = kd = ka \Delta t. \quad (4.52)$$

Logo, da equação (4.49),

$$\hat{f}(k_x, k_z, t_0 + \Delta t) = e^{-ika\Delta t} \hat{f}(k_x, k_z, t_0) . \quad (4.53)$$

Portanto, queremos que um esquema de diferenças finitas realize esta propagação no tempo, isto é, multiplique a transformada de Fourier do campo de onda a cada passo por um fator de multiplicação igual a $e^{-ika\Delta t}$. Ou, em tradução ao nosso problema, queremos que um esquema de diferenças finitas da equação da onda imagem multiplique a transformada de Fourier do campo de onda a cada passo por $e^{ika\Delta v}$, onde a é a velocidade de propagação a ser realizada pela equação da onda imagem. Em outras palavras, queremos que

$$\hat{p}(k_x, k_z, v + \Delta v) = e^{-ika\Delta v} \hat{p}(k_x, k_z, v) . \quad (4.54)$$

Mas isso quase nunca acontece, pois sempre há perda de energia na propagação da onda ou as velocidades de ondas de diferentes frequências são distintas, quando propagadas pelo esquema de diferenças finitas.

O que pretendemos então é determinar quão boa é a aproximação para o termo $e^{-ika\Delta v}$ que o esquema de DF realiza. Para isso, consideramos um passo no esquema de diferenças finitas no domínio das frequências espaciais k_x e k_z . Temos que o esquema realiza o cálculo de \hat{p}^{n+1} a partir de \hat{p}^n . Em símbolos,

$$\hat{p}^{n+1} = \xi(k_x\Delta x, k_z\Delta z) \hat{p}^n , \quad (4.55)$$

onde ξ é o chamado fator de amplificação do esquema.

Comparamos a equação (4.55) com a equação (4.53) para enfatizarmos suas similaridades. Para tal, escrevemos ξ como

$$\xi(k_x\Delta x, k_z\Delta z) = |\xi(k_x\Delta x, k_z\Delta z)| e^{-ikc\Delta v} , \quad (4.56)$$

onde c é função de Δx e Δz , bem como k_x e k_z , e é chamada de velocidade de fase realizada pelo esquema. Observamos, pela comparação das equações (4.53) e (4.55), que um esquema ideal seria aquele que realizasse a propagação com $|\xi| = 1$ e $c = a$.

Em outras palavras, se $c(\Delta x, \Delta z, k_x, k_z)$ for igual a a para todos k_x e k_z , então ondas propagariam com a velocidade correta e sem dispersão numérica, mas isto não acontece para quase nenhum esquema de diferenças finitas para equações diferenciais hiperbólicas exceto em casos triviais. O fenômeno de ondas de diferentes frequências propagando com diferentes velocidades do que corresponderia à equação diferencial é chamada de *dispersão numérica*.

Para estudar a dispersão numérica, precisamos encontrar a função $c(\Delta x, \Delta z, k_x, k_z)$ que aproxima a velocidade de propagação a da equação da onda imagem. Para isso, usamos o já encontrado fator de amplificação ξ dado pela equação (4.45), onde aqui o representamos por

$$\xi = \frac{s_1 + is_2}{r_1 + ir_2} = \frac{(s_1 r_1 + s_2 r_2)}{r_1^2 + r_2^2} + i \frac{(s_2 r_1 - s_1 r_2)}{r_1^2 + r_2^2}, \quad (4.57)$$

onde r_1, r_2, s_1 e s_2 , são dados pelas equações (4.41), (4.42), (4.43) e (4.44), respectivamente.

Logo, para determinar a velocidade de fase, escrevemos

$$\xi = |\xi| e^{-ikc\Delta v}, \quad (4.58)$$

onde a velocidade de fase c é função de Δx e Δz , bem como k_x e k_z .

Por análise de números complexos temos que o argumento da exponencial é dado pelo arco-tangente da parte imaginária dividida pela parte real, isto é,

$$\arg \xi = -kc\Delta v = \arctan \left(\frac{s_2 r_1 - s_1 r_2}{s_1 r_1 + s_2 r_2} \right). \quad (4.59)$$

Para encontrarmos uma aproximação interpretável para a velocidade de fase $c(\Delta x, \Delta z, k_x, k_z)$, desenvolvemos a equação (4.59) em séries de Taylor de quarta ordem em Δv e de terceira nos incrementos espaciais Δx e Δz usando o software Mathematica e depois dividimos o resultado por $-k\Delta v$. Assim, encontramos

$$c \approx \frac{kz_n}{k_z v_l} - \frac{k^5 z_n^3 \Delta v^2}{12 k_z^3 v_l^3} - \frac{k_x^4 z_n \Delta x^2}{12 k_z v_l k} - \frac{k_z (k_x^2 + 2k_z^2) z_n \Delta z^2}{12 v_l k} + \frac{[k_x^4 \Delta x^2 + k_z^2 (k_x^2 + 2k_z^2) \Delta z^2] k^3 z_n^3 \Delta v^2}{48 k_z^3 v_l^3} + O(\Delta v^4) + O(\Delta x^3) + O(\Delta z^3), \quad (4.60)$$

onde $k^2 = k_x^2 + k_z^2$. Observa-se que o efeito da dispersão é maior para as frequências mais altas, ou seja, quanto maior o valor de k maior a dispersão deste esquema.

Na aproximação para c , o primeiro termo não depende de Δz e Δv . Este representa a velocidade de fase realizada pela própria equação da onda imagem. Observa-se, ainda, que este termo depende de k e k_z , isto é, a própria equação diferencial causa dispersão na propagação da onda imagem. Este efeito não pode ser reduzido pela escolha dos valores de Δz e Δv convenientes.

Os demais termos dependem dos incrementos em x , z , e v e descrevem a dispersão numérica. Uma vez que estes termos dependem não só de k_x , k_z e k , mas também de z_n e v_l , não é possível reduzir a dispersão numérica em todo o domínio por uma escolha inteligente de Δv em função de Δx e Δz .

Como não podemos reduzir o efeito da dispersão com uma escolha inteligente dos incrementos em x , z , e v , fazemos uma análise da equação (4.60) de maneira a tentar avaliar seus efeitos na solução numérica. Primeiramente, observamos que os três termos com sinal negativo são os termos que mais influenciam para a dispersão numérica, já que o último termo, que é positivo, é de ordem maior. Desta forma, tentamos encontrar condições sobre Δx , Δz e Δv que reduzam ao máximo a influência destes termos sobre a velocidade de fase c da equação da onda imagem. Para isso, fazemos com que cada um desses termos seja muito menor que o primeiro termo que é a velocidade de fase realizada pela própria equação. Assim, chegamos à condição que os incrementos em x , z e v devem satisfazer

$$\Delta v \ll \frac{\sqrt{12} k_z v_l}{k^2 z_n}, \quad \Delta x \ll \frac{\sqrt{12} k}{k_x^2} \quad \text{e} \quad \Delta z \ll \frac{\sqrt{12} k}{k_z \sqrt{k_x^2 + 2k_z^2}}. \quad (4.61)$$

Portanto, concluímos que, para o esquema avaliado no centro da célula, a escolha dos incrementos espaciais é muito importante como critério para reduzir a dispersão numérica, apesar deste esquema ser incondicionalmente estável.

Para fins práticos, analisamos considerações que podem ser feitas em relação as frequências espaciais. Inicialmente, consideramos $k_x \ll k_z$, ou seja, podemos negligenciar k_x na equação (4.60), chegando em

$$c \approx \frac{z_n}{v_l} - \frac{k_z^2 \Delta v^2 z_n^3}{12 v_l^3} - \frac{k_z^2 \Delta z^2 z_n}{6 v_l} + \frac{k_z^4 \Delta z^2 \Delta v^2 z_n^3}{24 v_l^3}. \quad (4.62)$$

Logo, ao observamos os três últimos termos da equação acima, concluímos que a velocidade de propagação é reduzida quando os dados iniciais possuem maior quantidade de altas frequências, já que o último termo, apesar de positivo, possui ordem em Δz e Δv maior que nos termos negativos. Portanto, a dispersão deste esquema possui uma forte dependência nos números de onda, ou seja, quanto maior a quantidade de altas frequências, para este esquema, mais lenta a propagação da respectiva onda e, conseqüentemente, maior a dispersão numérica.

Outra consideração feita é quando $k_x \approx k_z$, onde chegamos em

$$c \approx \sqrt{2} \frac{z_n}{v_l} - \sqrt{2} \frac{k_z^2 \Delta v^2 z_n^3}{3v_l^3} - \sqrt{2} \frac{k_z^2 \Delta x^2 z_n}{24v_l} - \sqrt{2} \frac{k_z^2 \Delta z^2 z_n}{8v_l} + \sqrt{2} \frac{k_z^4 \Delta x^2 \Delta v^2 z_n^3}{24v_l^3} + \sqrt{2} \frac{k_z^4 \Delta z^2 \Delta v^2 z_n^3}{8v_l^3}, \quad (4.63)$$

onde podemos ver que a argumentação para este caso é similar ao caso anterior pois somente subtraímos um termo com o fator Δx^2 e somamos outro menor com o fator $\Delta x^2 \Delta v^3$ em relação ao caso anterior, mesmo tendo o fator $\sqrt{2}$ nos termos. Em outras palavras, mesmo para dados com os números de frequências proporcionais na horizontal e na vertical o esquema considerado é dispersivo e sua dependência da frequência é, ainda, muito forte.

4.2.5 Dissipação

Quando o fator de amplificação de um esquema tem um módulo menor que um (veja equação (4.56)), perde-se amplitude do campo propagado a cada passo. Neste caso, fala-se de dissipação numérica.

Na Seção 4.2.3, observamos que, para o esquema em questão, $|\xi| = 1$. Portanto, o esquema (4.11) não apresenta dissipação. Observa-se, porém, que a sua realização computacional pode, por erro numérico, possuir um ξ com módulo diferente de 1. Se este ξ numérico tiver um módulo menor que 1, temos uma pequena dissipação. Por outro lado, caso que o ξ numérico possuir um módulo maior do que 1, a realização computacional do esquema apresenta instabilidades numéricas.

4.2.6 Implementação

Como notado anteriormente, o esquema avaliado no centro da célula, representado pela equação (4.11), só pode ser implementado implicitamente.

Para implementar um esquema de DF implícito se faz necessário encontrar as matrizes de iteração para que possamos estabelecer um sistema linear que será resolvido em cada iteração do algoritmo.

A partir do esquema discretizado (4.11), montamos as matrizes de iteração para resolver o problema de propagar a equação da onda imagem. Porém, mediante observações anteriores, resolvemos montar as matrizes de iteração fixando z e variando x , como é comumente feito em problemas geofísicos. Com isso, conseguimos montar um sistema linear que pode ser escrito da seguinte forma

$$A^l U^{l+1} = B^l U^l . \quad (4.64)$$

As estruturas das matrizes A^l e B^l e do vetor U^l estão mostradas no Apêndice D.

Logo, o algoritmo se resume em resolver o sistema linear acima a partir de um dado de entrada U^0 , que é fornecido previamente e que consiste de uma seção sísmica migrada com uma velocidade a princípio incorreta.

Um dos problemas encontrados para resolver o sistema linear acima, foi o fato de que as matrizes de iteração dependem da velocidade de propagação. Assim, é necessário que estas matrizes sejam atualizadas a cada iteração do algoritmo já que este é feito em função da velocidade de propagação, por motivos de definição da equação da onda imagem. Logo, quanto maior forem as dimensões do problema, torna-se mais difícil a resolução do sistema linear (4.64), pois as matrizes A^l e B^l , apesar de esparsas (ver Apêndice D), possuirão dimensões ainda maiores. Por exemplo, para o caso de uma matriz de dados iniciais com dimensão 600×160 , as matrizes A^l e B^l terão dimensão dada por 96160×96160 , pois quando montamos essas matrizes de iteração não conseguimos separá-las por bloco. Portanto, o trabalho computacional deste algoritmo é alto porque as dimensões das matrizes são, em geral, muito grande.

Uma alternativa ao problema discutido acima, foi utilizar uma mudança de variável já estu-

dada em Munerato (2003), $\sigma = \ln(v/v_0)$. Através desta mudança conseguimos fazer com que a equação da onda imagem (1.1) não possua mais a velocidade de propagação v multiplicando o fator da derivada mista, como pode ser visto a seguir

$$p_{xx} + p_{zz} + \frac{1}{z}p_{\sigma z} = 0, \quad (4.65)$$

pois, quando fazemos a mudança de variável $\sigma = \ln(v/v_0)$, obtemos

$$\frac{v}{z}p_{zv} = \frac{v}{z} \frac{\partial p_z}{\partial v} = \frac{v}{z} \frac{\partial p_z}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \frac{v}{z} \frac{1}{v} \frac{\partial p_z}{\partial \sigma} = \frac{1}{z} p_{\sigma z}.$$

onde $\partial \sigma / \partial v = 1/v$.

Mediante esta mudança de variável e a nova equação para a onda imagem (4.65), conseguimos evitar o problema de ter que atualizar a matriz de iteração a cada iteração do algoritmo. Isto foi um ganho substancial na implementação deste esquema pois o custo computacional foi bastante reduzido (ver Seção 5.5).

Esta mudança de variável também foi útil no sentido de diminuir o número de iterações que o algoritmo precisava executar sem tal mudança pois, se consideramos n_v e n_σ o número de passos de v e σ , respectivamente, obtemos

$$n_v = \frac{v_{\max} - v_{\min}}{\Delta v}, \quad n_\sigma = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{\Delta \sigma}. \quad (4.66)$$

Agora, se consideramos, por exemplo, $\Delta \sigma = \Delta v/v_{\min}$, ou seja, uma relação onde $\Delta \sigma$ seja menor que Δv , obtemos os seguintes cálculos

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{\Delta \sigma} = \frac{\ln(v_{\max}/v_0) - \ln(v_{\min}/v_0)}{\Delta v/v_{\min}} = \left(\frac{\ln \frac{v_{\max}}{v_{\min}}}{\frac{v_{\max}}{v_{\min}} - 1} \right) n_v, \quad (4.67)$$

que é menor que n_v sempre que $v_{\max} > v_{\min}$ (veja Figura 4.3). Logo podemos concluir que para este caso, $\sigma = \ln(v/v_0)$, temos sempre menos passos que para v , isto quer dizer que quando fazemos esta mudança de variável estamos tendo vantagem no ponto de vista de tempo computacional. Outras mudanças podem ser feitas, porém, não são todas que possuem esta vantagem, como pode ser visto na Figura 4.3.

Portanto, toda a implementação feita para este esquema foi baseada na mudança de variável $\sigma = \ln(v/v_0)$. Assim, as matrizes mostradas no Apêndice D são agora independentes

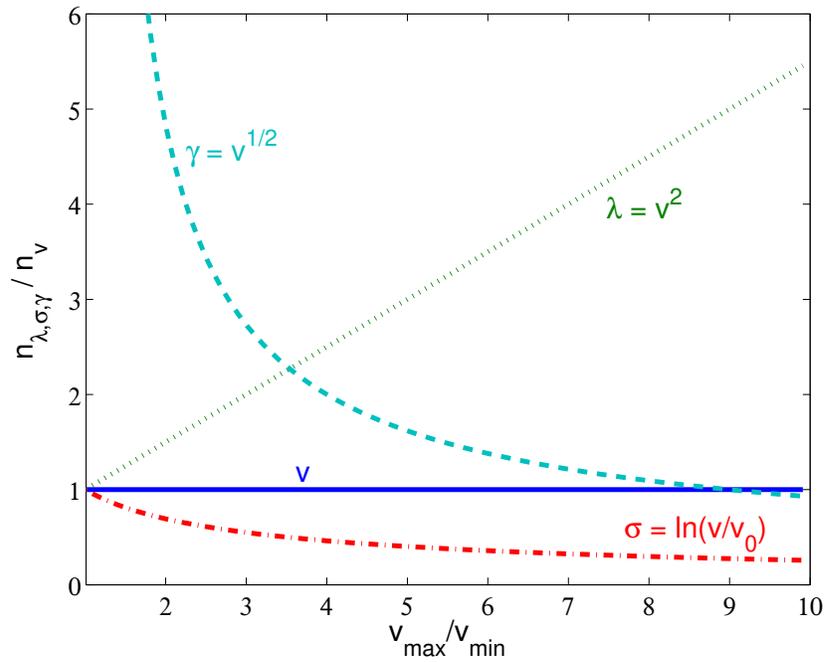


Figura 4.3: Gráfico da relação entre o número de passos das mudanças de variável em função da razão entre a maior e a menor velocidade.

da velocidade de propagação, pois ao invés da variável k_n^l aparece no esquema em σ o fator correspondente,

$$k_n = \frac{8}{(2z_n + \Delta z)\Delta z \Delta \sigma}, \quad (4.68)$$

e conseqüentemente, $\mu_n = -k_n - 2\alpha - \beta$ e $\nu_n = k_n - 2\alpha - \beta$.

Como pode ser visto no Apêndice E, tal mudança de variável não altera as propriedades de consistência, estabilidade e dispersão da equação da onda imagem feitas anteriormente.

Os testes numéricos para este esquema estão descritos no Capítulo 5.

Capítulo 5

Experimentos numéricos

Esta seção tem como objetivo comparar os resultados numéricos entre os métodos já estudados anteriormente (Schleicher et al., 2004a,b) e os métodos propostos neste trabalho para a solução numérica da equação da onda imagem (1.1).

Exemplos para a propagação da imagem de refletores (planos, inclinados e em meios inhomogêneos) pelo método de DF foram apresentados em Schleicher et al. (2004a), assim como uma análise dos efeitos da propagação quando refinamos a malha em z , pois, pelo desenvolvimento teórico, constatou-se que os efeitos de dispersão e dissipação têm forte dependência dos números de onda e do tamanho da malha.

5.1 Refletor plano

Para tornar os estudos numéricos mais simples, foi simulado um experimento sísmico como descrito em Schleicher et al. (2004a,b), i.e., utilizamos um modelo simples com um refletor plano horizontal localizado em 550 m de profundidade com dados registrados por um experimento de afastamento nulo com 401 pares de fonte-receptor localizados a cada 10 m na região entre -2000 m e 2000 m na direção x , como ilustrado na Figura 5.1. Os dados na direção z foram simulados entre 10 m e 1600 m, com $\Delta z = 10$ m. A velocidade de propagação v_c no meio, supostamente homogêneo, é de $v_c = 3000$ m/s. Os dados de entrada para a remigração,

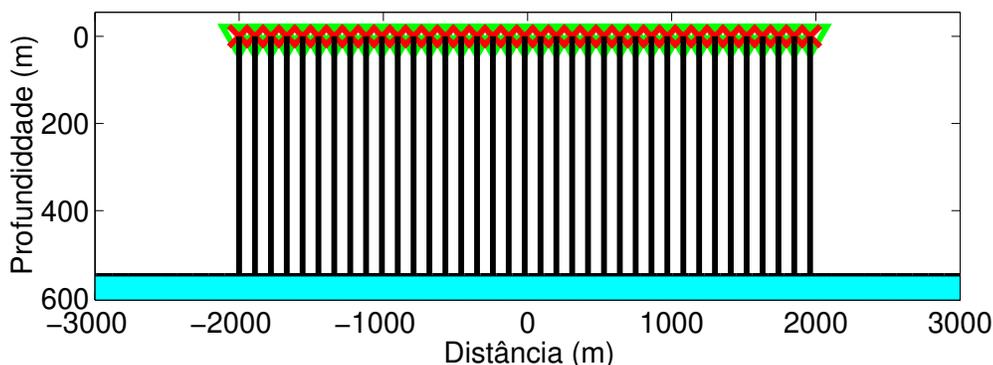


Figura 5.1: Modelo de afastamento nulo para refletor plano horizontal.

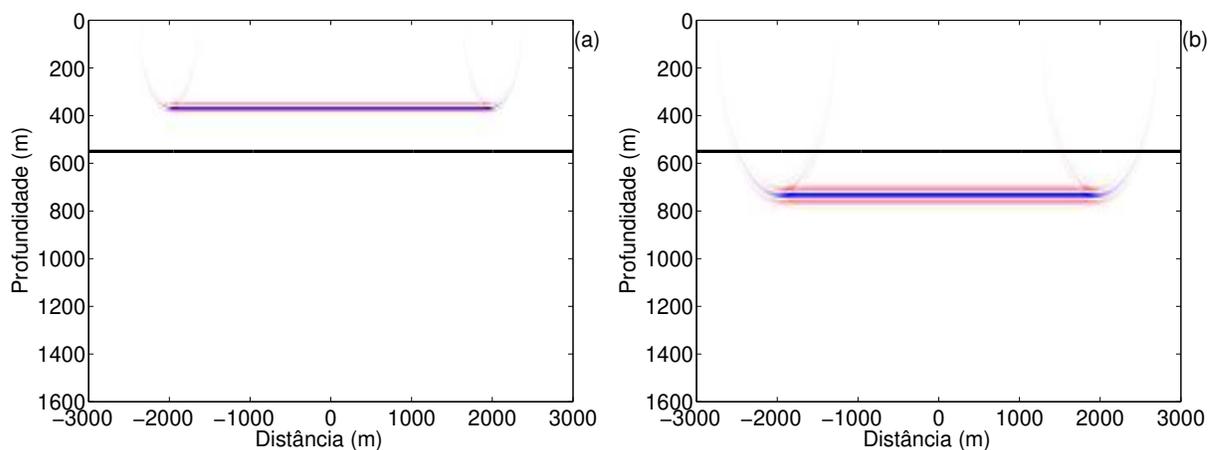


Figura 5.2: Seções migradas na profundidade com velocidade de migração (a) $v = 2000$ m/s e (b) $v = 4000$ m/s.

neste caso de refletor plano, foram obtidos pela migração na profundidade dos dados de afastamento nulo com duas velocidades de migração incorretas de $v = 2000$ m/s (Figura 5.2a) e de $v = 4000$ m/s (Figura 5.2b), para que pudessem ser utilizados em testes com velocidade de migração crescente ou decrescente, respectivamente.

Como podemos observar nestas figuras, o pulso do evento de reflexão na Figura 5.2b é mais largo do que na Figura 5.2a. Este efeito corresponde ao conhecido estiramento do pulso na migração, que é proporcional à velocidade de migração (Tygel et al., 1994).

Então, utilizamos as imagens acima para testar a implementação dos métodos estudados neste trabalho. Com esses dados migrados podemos utilizar incrementos positivos e negativos

na velocidade, ou seja, para o dado da esquerda (Figura 5.2a) queremos sair de uma velocidade baixa e aumentar até atingir a velocidade correta, já para o segundo dado (Figura 5.2b) queremos partir de uma velocidade alta para podermos diminuir a velocidade até atingir a velocidade correta, que neste caso é menor que a velocidade usada na migração inicial.

5.2 Método de volumes finitos

Esquema avançado em v e z

A seção migrada na profundidade incorretamente com velocidade baixa, Figura 5.2a, foi então remigrada utilizando para evolução o esquema avançado em v e z . Como condição para o método de VF, resolvemos a equação (3.1) para a malha finita do modelo descrito acima. Assim, constatou-se que os dados iniciais para a remigração na profundidade para o método em questão são simplesmente as médias dos pontos da malha discreta. , Então, esta média foi feita em todo o domínio. Nos pontos onde não temos informação dos quatro pontos (borda) fizemos a média utilizando somente dois pontos, ou seja, consideramos os valores nos outros dois pontos como iguais.

Do estudo teórico para o método de DF deste esquema (Schleicher et al., 2004a,b), sabemos que este só é condicionalmente estável para passos de velocidade positivos, $\Delta v > 0$. Assim, utilizando um incremento na velocidade que satisfaça a condição de estabilidade, $\Delta v = 2$ m/s, obtemos a Figura 5.3 que representa a propagação da imagem do refletor plano através do método de DF (esquerda) e do método de VF (direita).

Em virtude dos ruídos que aparecem quando implementamos este esquema na direção crescente em z (Schleicher et al., 2003a, 2004a), ou seja, ruído numérico gerado pelos dados possuem números de onda maior na horizontal do que na vertical, utilizamos aqui a forma reversa em z , i.e., implementamos a variável z na direção decrescente. Também foi necessário fazer as médias em cada iteração em dois sentidos, um contrário ao outro, pois o deslocamento da média realiza uma propagação maior do que a da própria equação, i.e., se utilizamos somente a média em um só sentido, esta não permite a convergência do método (Capítulo 2).

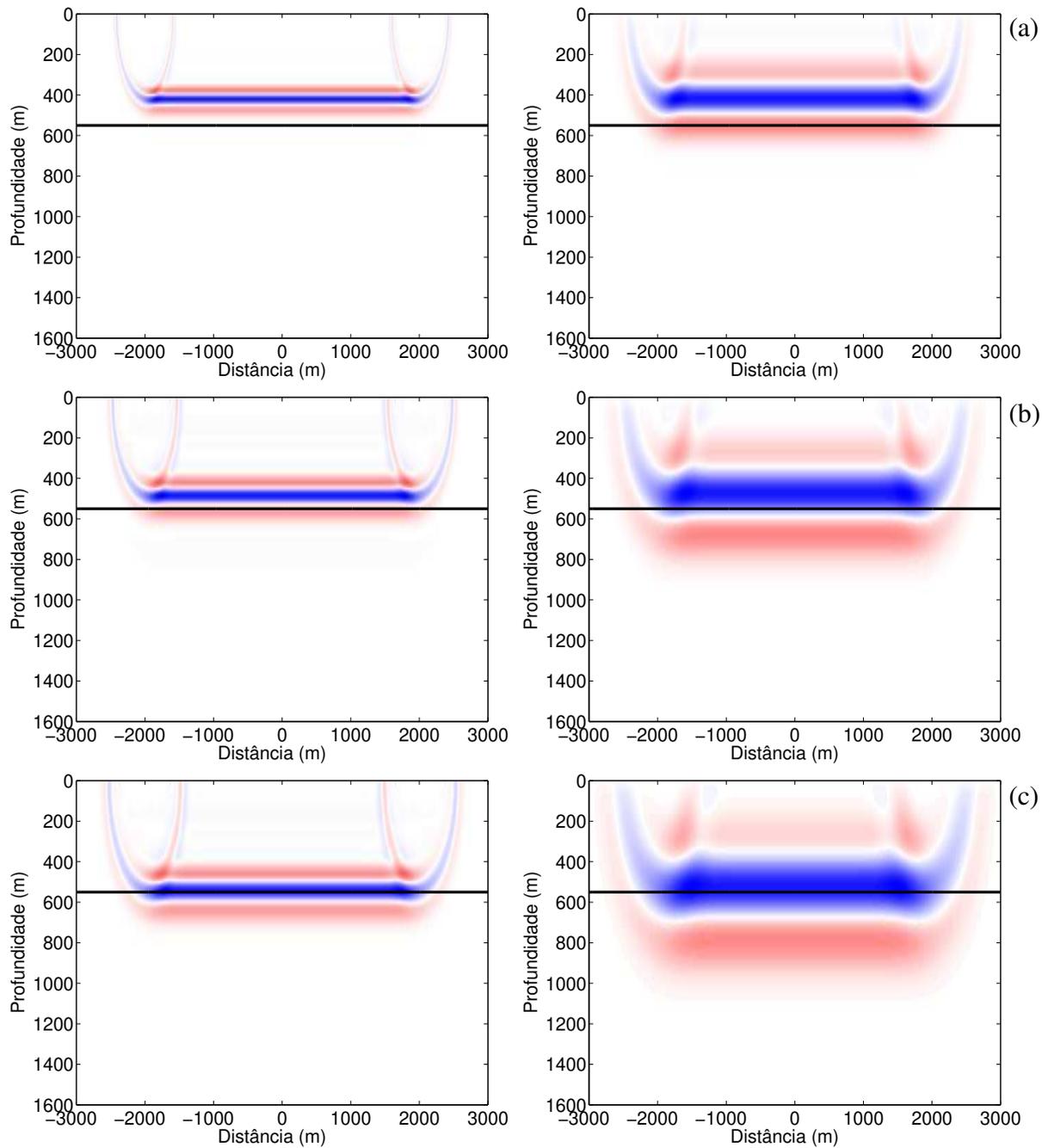


Figura 5.3: Imagem do refletor plano remigrado com velocidades: (a) $v = 2320$ m/s, (b) $v = 2680$ m/s e (c) $v = 3000$ m/s, para o esquema avançado em v e z . Esquerda: Método de diferenças finitas explícito. Direita: Método de volumes finitos.

As partes (a), (b) e (c) da Figura 5.3 representam imagens intermediárias da propagação da onda imagem para velocidades $v = 2320$ m/s, $v = 2680$ m/s e $v = 3000$ m/s, respectivamente, a última sendo a velocidade do meio correta. Observamos que a imagem do refletor nas Figuras 5.3c é remigrada para a profundidade correta de 550 m em ambos os casos.

A observação principal é em relação ao estiramento do pulso que pode ser observado em ambas as propagações na Figura 5.3. Na propagação do método de DF (esquerda) já sabemos que o estiramento acontece por dois motivos. O primeiro é o estiramento do pulso convencional devido a migração na profundidade (Tygel et al., 1994), como observado na Figura 5.2. O segundo, que causa o estiramento adicional, é a dispersão numérica que foi discutida teórica e numericamente em Schleicher et al. (2004a).

Na propagação obtida pelo método de VF, Figura 5.3 (direita), observamos que o estiramento do pulso é maior ainda do que no método de DF, logo, além dos dois motivos discutidos anteriormente, existe um terceiro motivo que causa tal estiramento. Este é devido ao fato de o método de VF fazer a média a cada iteração do algoritmo, ou seja, esta média causa uma dispersão adicional.

Assim, concluímos que o método de VF não nos ajuda a solucionar o problema com relação a dispersão causada pelo já estudado método de DF. Em contrapartida, nos incentiva a pensar em um estudo futuro com relação a uma possível aplicação de um operador “anti-média” para, ao invés de aumentar, diminuir o estiramento observado no método de DF.

Convém ressaltar que, o método de VF também possui um tempo computacional maior do que o método de DF pois, adicionalmente ao passo de propagação, necessita fazer as médias a cada iteração na velocidade, ou seja, o tempo computacional vai aumentar proporcionalmente ao tamanho da seção sísmica a ser remigrada (ver Tabela 5.1, Seção 5.5).

Esquema avançado em v e atrasado em z

A seção migrada na profundidade incorretamente com velocidade alta, Figura 5.2b, foi então remigrada utilizando o esquema avançado em v e atrasado em z . Também do estudo teórico para este esquema (Schleicher et al., 2003a, 2004a), sabemos que este só é condicionalmente estável

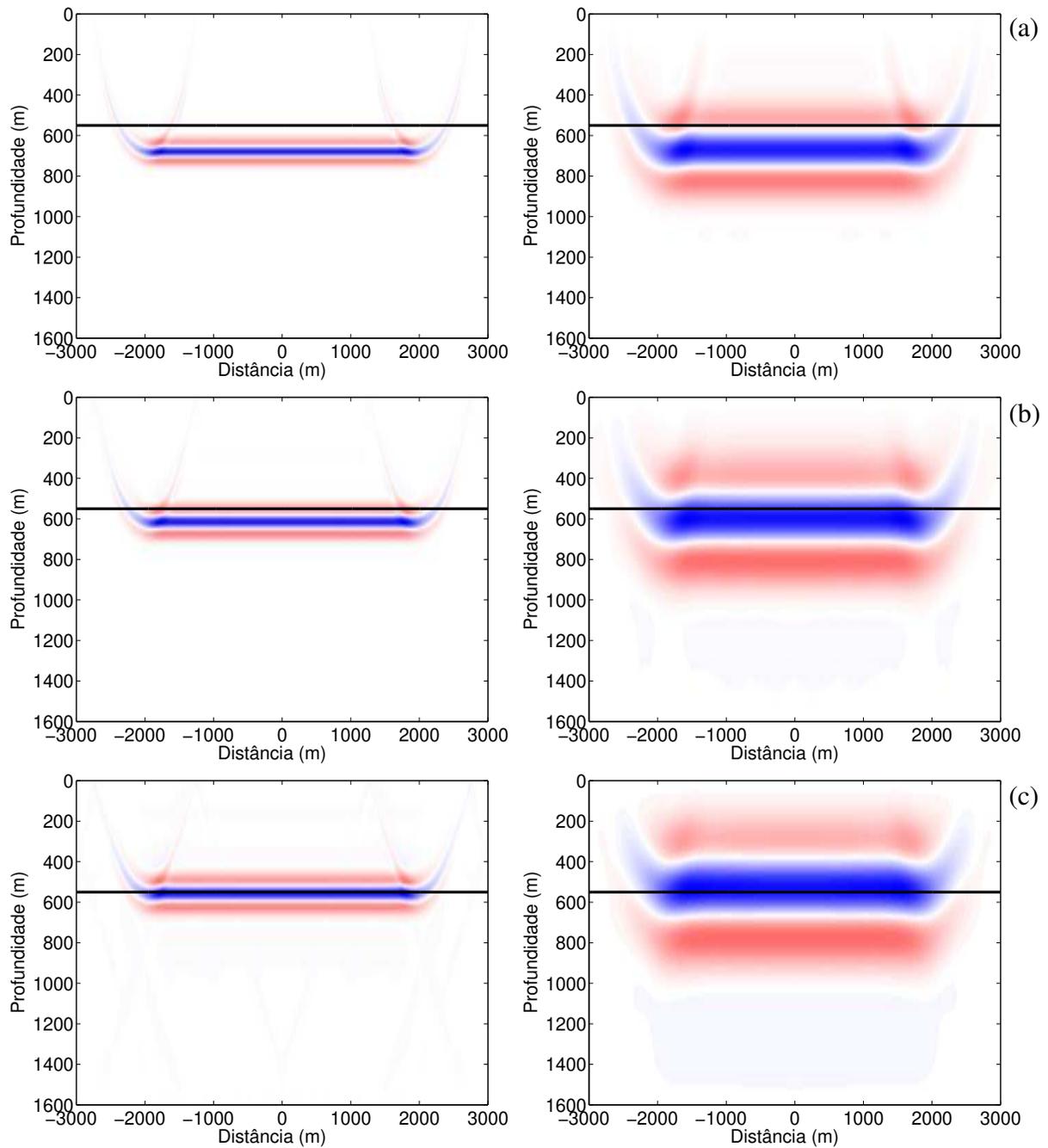


Figura 5.4: Imagem do refletor plano remigrado com velocidades: (a) $v = 3680$ m/s, (b) $v = 3320$ m/s e (c) $v = 3000$ m/s, para o esquema avançado em v e atrasado em z . Esquerda: Método de diferenças finitas explícito. Direita: Método de volumes finitos.

para passos de velocidade negativos, $\Delta v < 0$. Assim, utilizando um incremento na velocidade que satisfaça a condição de estabilidade, $\Delta v = -1$ m/s, obtemos a Figura 5.4 que representa a propagação da imagem do refletor plano através do método de DF (esquerda) e do método de VF (direita).

Para este caso avançado em v e atrasado em z , os ruídos não aparecem quando implementamos o esquema da forma direta e sim, ao contrário do que foi observado para o esquema avançado em v e z , aparecem na implementação reversa de z (Schleicher et al., 2003a, 2004a). Portanto, utilizamos aqui a forma direta em z , i.e., implementamos a variável z na forma crescente. Também aqui fizemos as médias em sentido alternado, já que independe do método utilizado para que a média não introduza uma propagação adicional.

As partes (a), (b) e (c) da Figura 5.4 representam imagens intermediárias da propagação da onda imagem para velocidades $v = 3680$ m/s, $v = 3320$ m/s e $v = 3000$ m/s, respectivamente, a última sendo a velocidade do meio correta. Observamos que a imagem do refletor nas Figuras 5.4c também são remigradas para a profundidade correta de 550 m em ambos os casos.

Neste caso, a observação em relação ao estiramento do pulso na propagação é similar ao discutido para o caso avançado em v e z , ou seja, o método de VF não é útil como forma de resolver o problema do estiramento causado na propagação do método de DF pois possui um estiramento ainda maior do que neste método.

5.3 Esquemas implícitos convencionais

Como o método de volumes finitos não ajudou no propósito desta dissertação, que é a redução da dispersão numérica na realização computacional de propagação da onda imagem, acrescentamos um estudo de esquemas implícitos com a mesma finalidade.

Esquema avançado em v e z

A partir da Figura 5.2a, foi feita a remigração através da equação da onda imagem para o método de DF implícito na velocidade de migração. Aqui utilizamos também, um passo na

velocidade que satisfaça a condição de estabilidade observada em Schleicher et al. (2004a), $\Delta v = 2$ m/s.

Utilizando a iteração fixando ora a variável x e ora a variável z , obtemos as Figuras 5.5 e 5.6, respectivamente. Estas foram colocadas ao lado da propagação obtida pelo método de DF explícito (Schleicher et al., 2004a), para que possamos compará-las com os resultados deste.

Como podemos observar na Figura 5.5 (direita), existe uma forte dispersão numérica na propagação da onda imagem usando esta implementação. Esta dispersão é bem maior do que a observada na propagação da Figura 5.5 (esquerda), obtida pelo método explícito. Ela não só estica o pulso, como nos exemplos anteriores, mas faz com que o pulso se desfça totalmente. Podemos até ver que as frequências baixas propagam para cima enquanto as frequências altas propagam para baixo. Esta dispersão acontece quando montamos a matriz de iteração fixando a variável x e variando z .

Quanto à Figura 5.6 (esquerda), observamos que o esquema utilizado propagou a imagem do refletor à profundidade correta, assim como o método explícito. Esta foi obtida fazendo a variável z ser fixa e x variável na montagem da matriz de iteração do método implícito. A observação principal para este caso é o fato das imagens serem praticamente idênticas, nas velocidades correspondentes. Em outras palavras, não há vantagem na implementação implícita deste esquema, uma vez que resultados iguais podem ser obtidos pela implementação explícita que é computacionalmente menos custosa (ver Tabela 5.1, Seção 5.5).

5.4 Esquema implícito avaliado no centro da célula

Nesta seção, estudamos numericamente o esquema implícito avaliado no centro da célula para que pudéssemos compará-lo com os outros esquemas citados neste trabalho. Isto se faz necessário pois procuramos um esquema que, na propagação da onda imagem, não seja tão dispersivo quanto os esquemas já estudados aqui e em Schleicher et al. (2004a,b).

A grande dificuldade na implementação deste esquema na forma original é o fato de precisarmos atualizar as matrizes de iteração a cada passo do algoritmo. Porém, como foi observado

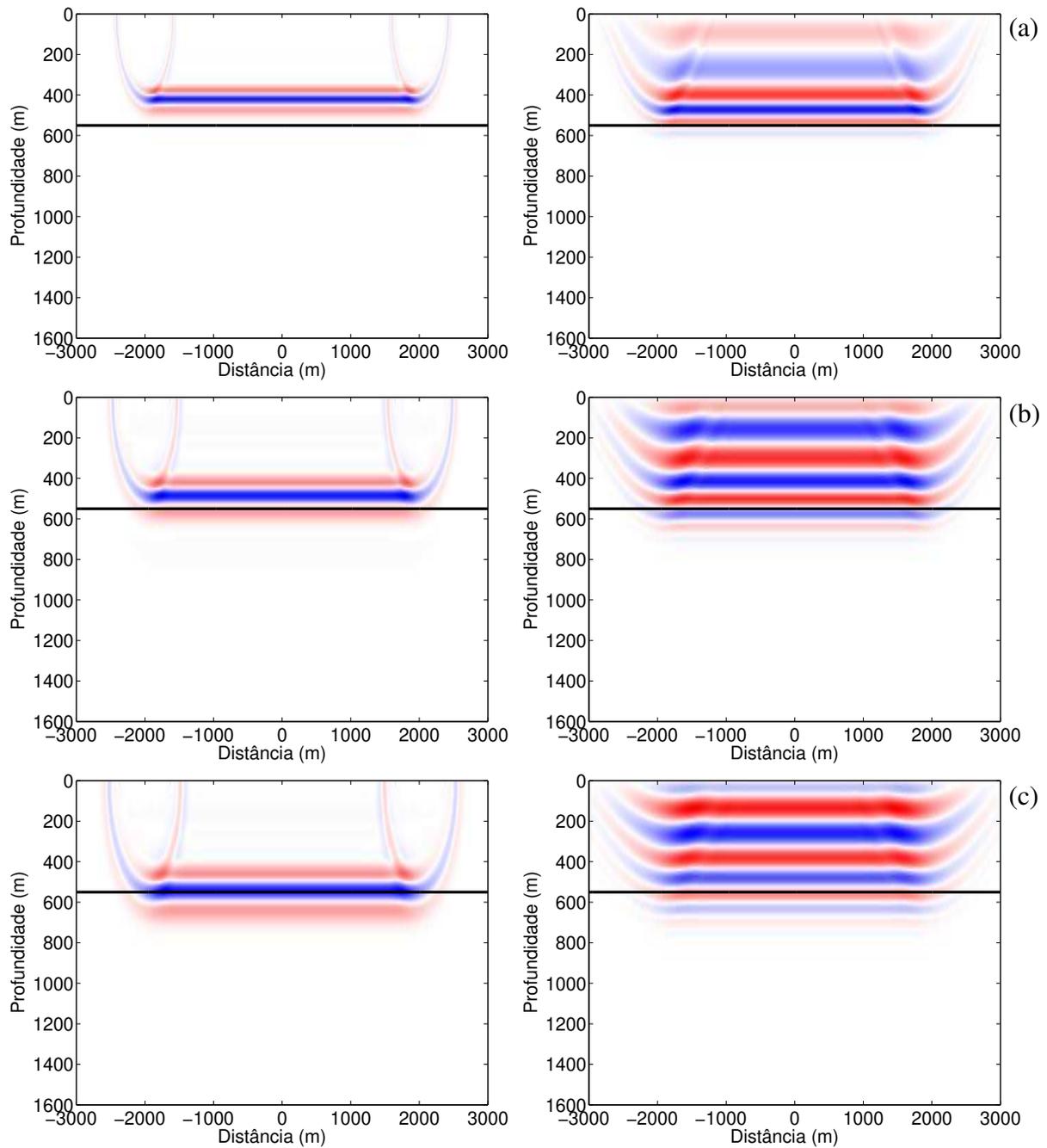


Figura 5.5: Imagem do refletor plano remigrado com velocidades: (a) $v = 2320$ m/s, (b) $v = 2680$ m/s e (c) $v = 3000$ m/s, para o esquema avançado em v e z . Esquerda: Método de diferenças finitas explícito. Direita: Método de diferenças finitas implícito fixando x .

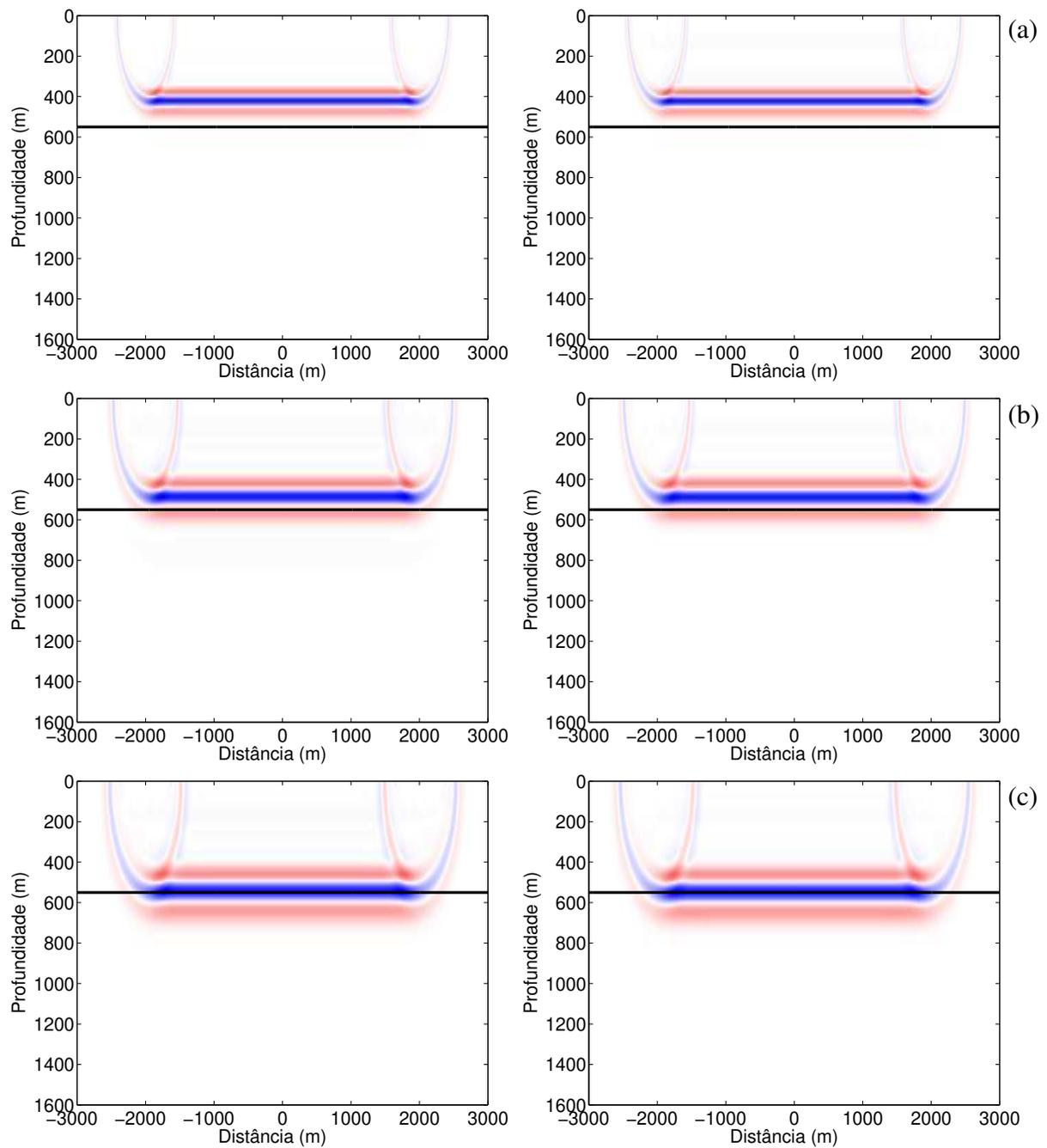


Figura 5.6: Imagem do refletor plano remigrado com velocidades: (a) $v = 2320$ m/s, (b) $v = 2680$ m/s e (c) $v = 3000$ m/s, para o esquema avançado em v e z . Esquerda: Método de diferenças finitas explícito. Direita: Método de diferenças finitas implícito fixando z .

no Capítulo 4 - Seção 4.2.6, sugerimos uma mudança de variável na equação da onda imagem tal que esta dificuldade não mais ocorra. Portanto, a equação implementada aqui foi a equação (4.65), na qual foi feita a mudança de variável $\sigma = \ln(v/v_0)$, ou seja, resolvemos o sistema linear

$$AU^{l+1} = BU^l$$

onde A , B e U^l têm as formas como mostrado no Apêndice D, só que A e B sem a dependência em l .

Para o nosso caso, do modelo do refletor plano, utilizamos a seção migrada dada pela Figura 5.2a para fazermos a remigração da onda imagem pelo método implícito centrado no centro da célula. Para isso, escolhemos o passo $\Delta\sigma = 0.002$ (adimensional). Já que o esquema é incondicionalmente estável, a escolha foi aleatória de modo que o número de passos não ficou muito grande. O resultado desta remigração está ilustrado na Figura 5.7 (direita).

Como podemos observar nesta figura, existe uma forte dispersão quando fazemos a propagação com este esquema em comparação com o já visto esquema explícito avançado em v e z , Figura 5.7 (esquerda). Isto se deve ao fato dos dados utilizados para a remigração apresentarem um grande conteúdo de alta frequência. Observamos, novamente, o efeito de frequências altas e baixas propagarem em direções diferentes (agora altas para cima e baixas para baixo). Este resultado coincide com a observação teórica de que a dispersão deste esquema será maior quanto maiores forem as frequências espaciais na profundidade, k_z .

Vimos na equação (4.60) que o primeiro termo da dispersão numérica depende de Δv^2 . Para observar e tentar reduzir o efeito da dispersão deste caso, inicialmente, variamos o tamanho do passo na velocidade de propagação σ , ou seja, fizemos $\Delta\sigma = 0.04$, $\Delta\sigma = 0.005$, $\Delta\sigma = 0.001$, $\Delta\sigma = 0.0005$, $\Delta\sigma = 0.0001$ e $\Delta\sigma = 0.00005$. Para cada um destes valores de $\Delta\sigma$, foi feita a remigração da onda imagem, onde selecionamos, dentre cada propagação, a imagem correspondente a velocidade correta do meio, $v = 3000$ m/s, como ilustrado na Figura 5.8. Nesta, observamos que não há uma redução na dispersão numérica quando variamos o valor de $\Delta\sigma$, mesmo tendo uma redução do $\Delta\sigma$ por um fator de 800. Logo, para esta tentativa não obtivemos êxito, somente um acréscimo significativo no tempo computacional, o que não

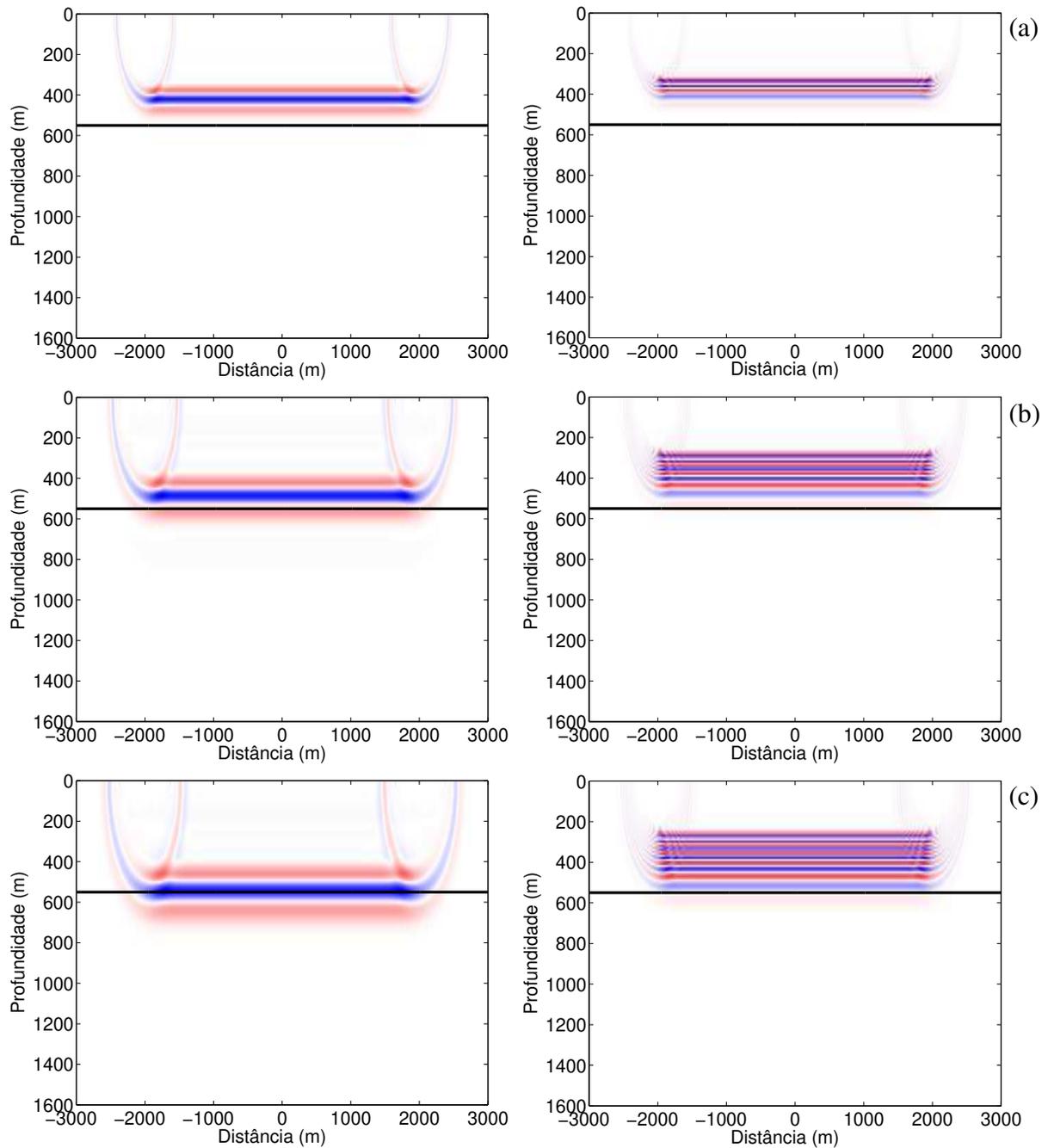


Figura 5.7: Imagem do refletor plano remigrado com velocidades: (a) $v \approx 2320$ m/s, (b) $v \approx 2680$ m/s e (c) $v \approx 3000$ m/s. Esquerda: Método de diferenças finitas explícito. Direita: Método de diferenças finitas implícito centrado no centro da célula.

é aconselhável pela similaridade dos resultados. Concluimos que o termo em Δv^2 contribui pouco para a dispersão numérica.

Outra alternativa para reduzir o efeito da dispersão, foi diminuir os incrementos espaciais ao invés do incremento da velocidade, i.e., utilizamos agora os mesmos dados anteriores, porém com a migração feita tendo os incrementos espaciais Δx e Δz iguais a 5 m, e não mais 10 m, como era anteriormente. Na Figura 5.9, podemos ver que há uma redução da dispersão numérica quando implementamos esta caso, logo, a dispersão deste esquema esta diretamente relacionada com os incrementos espaciais, ou seja, quanto menor forem esses incrementos menos dispersão apresentará o esquema. Concluimos que os termos em Δx^2 e Δz^2 são os responsáveis pela maior parte da dispersão numérica. Neste caso, é intuitivo fazer os incrementos espaciais cada vez menor, porém, isto é impraticável computacionalmente, pois temos que resolver sistemas lineares de grande porte, como discutido teoricamente.

Ainda, para confirmar a conclusão sobre a dispersão numérica, em decorrência do conteúdo de altas frequências nos dados a ser propagado, modelamos novos dados reduzindo a quantidade de altas frequências, i.e., dados com o pulso duas vezes mais largo. Esta alternativa está de acordo com o fato observado teoricamente pois, quando usamos o pulso mais largo, estamos diminuindo as frequências nos dados, i.e., pulsos estreitos possuem frequências maiores e assim aumentam o efeito de dispersão numérica quando utilizamos para a remigração o esquema centrado no centro da célula. Desta forma, é possível reduzir o efeito dos termos em Δx^2 e Δz^2 , sem ter que reduzir o espaçamento. A Figura 5.10 mostra o novo modelo de dados que usamos para fazer a remigração.

Esta figura possui as mesmas propriedades da Figura 5.2a, ou seja, a configuração da aquisição de dados é a mesma, porém, o pulso da fonte é mais largo. Logo, os dados migrados também possuem mais baixas frequências. A migração foi feita novamente com a velocidade incorreta de 2000 m/s.

Assim, a partir dos dados da Figura 5.10, foi feita a remigração utilizando o esquema avaliado no centro da célula com incrementos $\Delta z = \Delta x = 10$ m. Como podemos ver na Figura 5.11 (direita) esta propagação não apresenta dispersão numérica muito grande, ao contrário, sua dis-

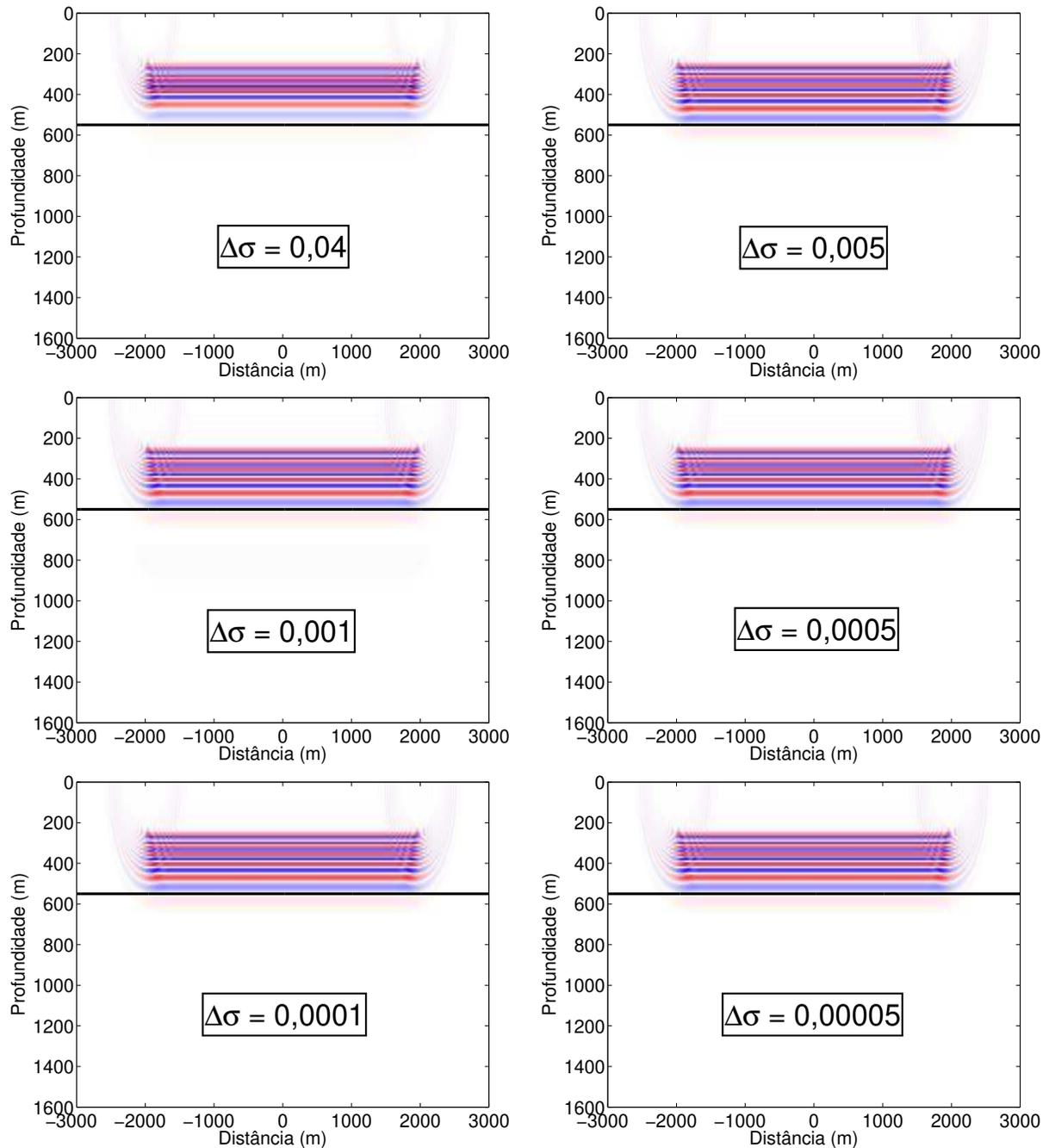


Figura 5.8: Imagens do refletor plano, na velocidade correta do meio $v = 3000$ m/s, para diferentes valores de $\Delta\sigma$. A remigração foi feita utilizando o método de diferenças finitas implícito centrado no centro da célula.

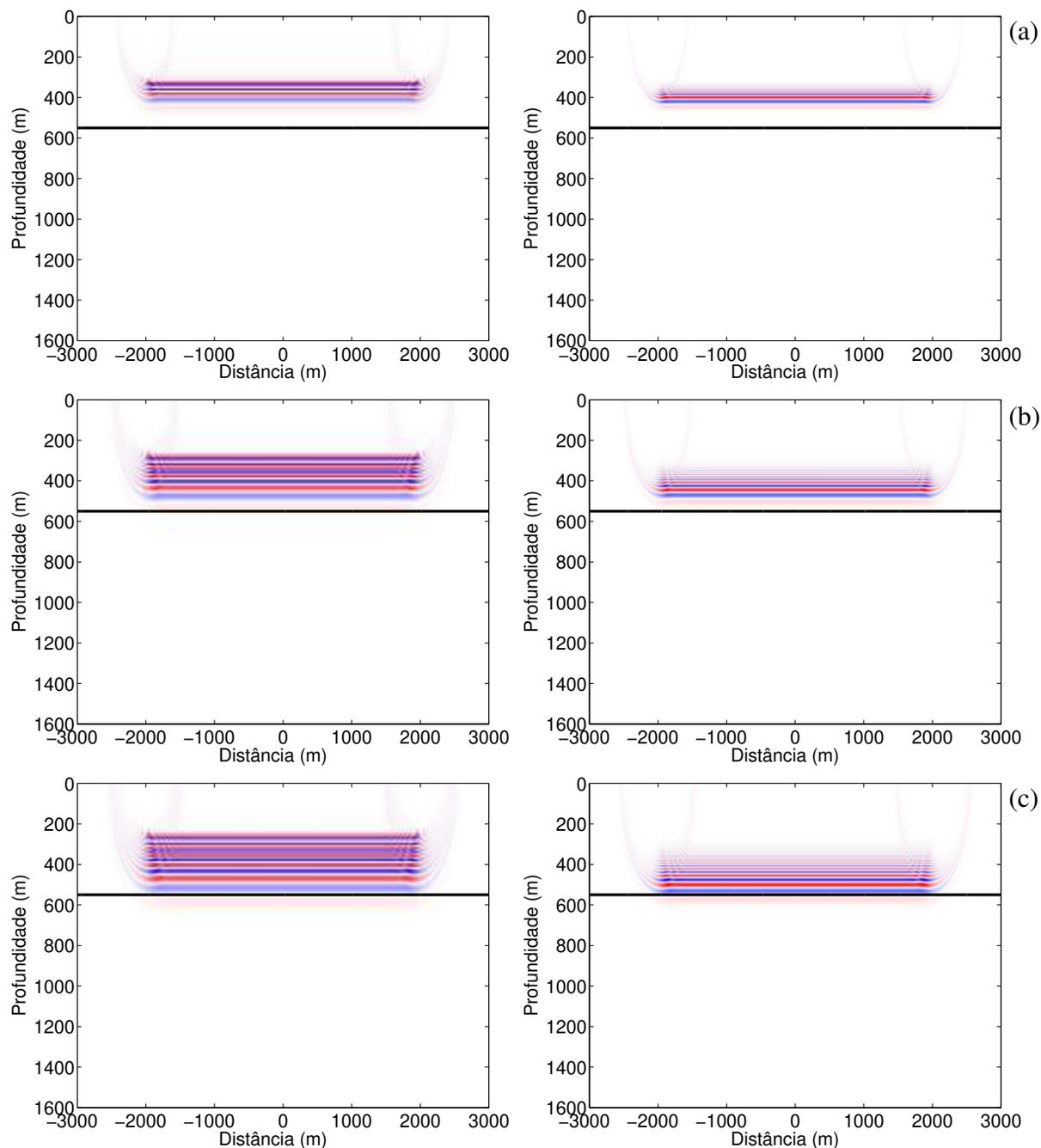


Figura 5.9: Imagem do refletor plano remigrado pelo método de DF implícito centrado no centro da célula com velocidades: (a) $v \approx 2320$ m/s, (b) $v \approx 2680$ m/s e (c) $v \approx 3000$ m/s. Esquerda: incrementos espaciais $\Delta x = \Delta z = 10$ m. Direita: incrementos espaciais $\Delta x = \Delta z = 5$ m.

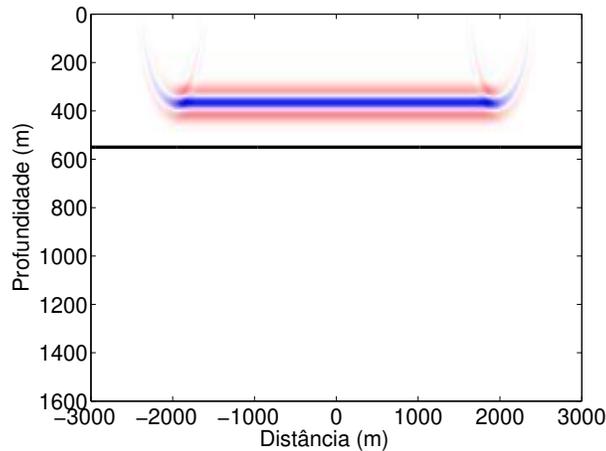


Figura 5.10: Seção migrada na profundidade com velocidade $v = 2000$ m/s, com conteúdo maior de baixas frequências.

persão é imperceptível em comparação à remigração feita utilizando os dados com altas frequências, Figura 5.7 (direita), assim como à observada quando utilizamos os mesmos dados migrados para fazer a remigração através do método de DF explícito avançado em v e z , Figura 5.11 (esquerda).

Na Figura 5.12, estabelecemos a relação entre os dados migrados diretamente e os dados remigrados através do esquema centrado. Nesta, observamos que a remigração com este esquema, Figura 5.12 (esquerda), possui uma dispersão praticamente igual àquela observada na migração direta dos dados originais, Figura 5.12 (direita). Assim, podemos concluir que este esquema é muito eficiente no sentido de evitar a dispersão quando o conteúdo de frequência dos dados é baixo. Em outras palavras, a redução da dispersão numérica por diminuição do espaçamento da malha é mais forte do que nos esquemas convencionais. Como anteriormente, uma diminuição no incremento da velocidade de propagação, $\Delta\sigma$, não nos mostrou vantagem neste caso, pois os resultados são muito similares, assim temos então a vantagem de escolher incrementos não tão pequenos como acontece para os esquemas discutidos anteriormente.

No entanto, apesar deste esquema possuir a propriedade de não causar muita dispersão numérica na propagação da onda imagem, quando os dados contêm números de ondas com baixas frequências, este esquema também pode apresentar problemas para dados com quaisquer quan-

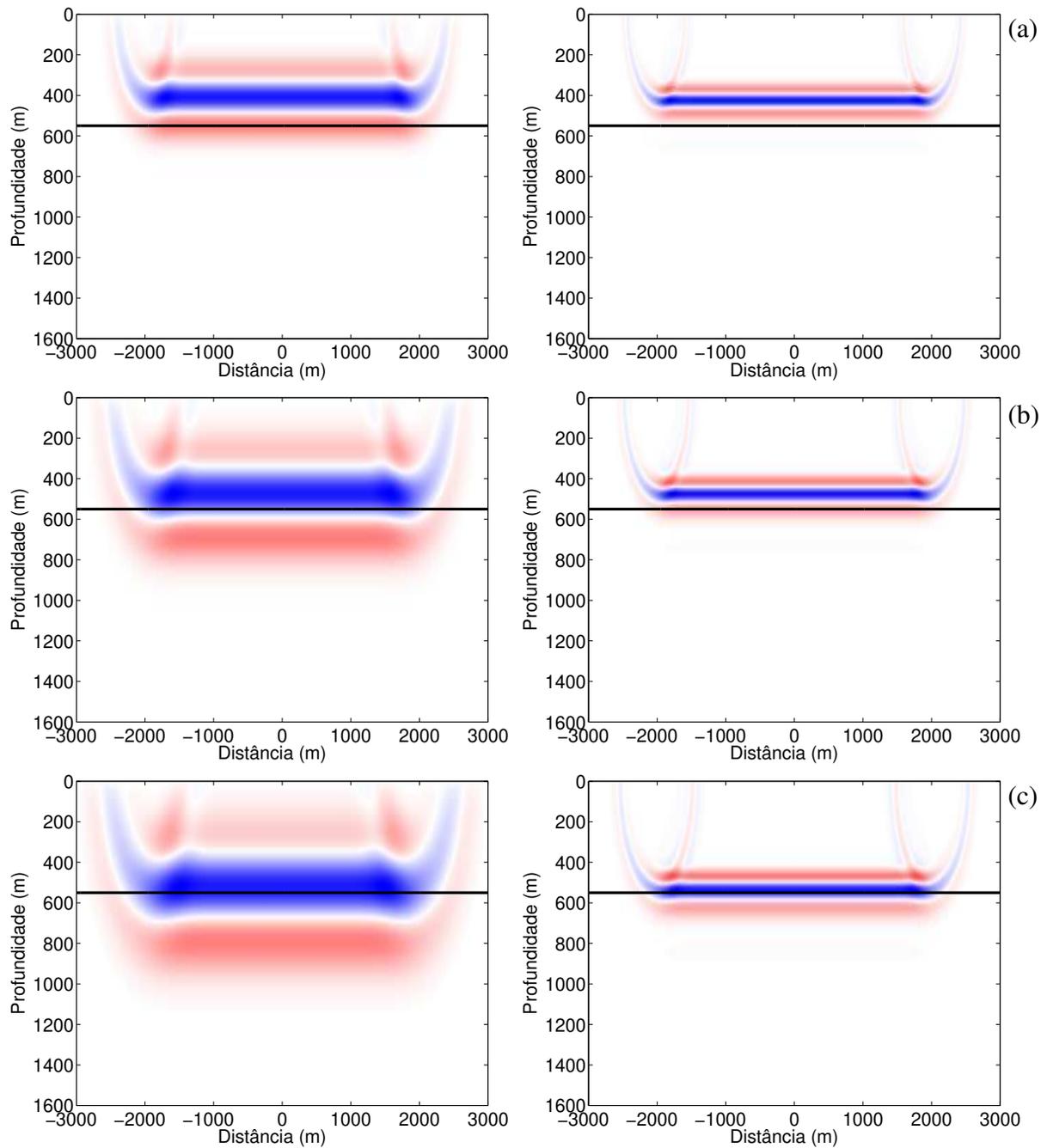


Figura 5.11: Imagem do refletor plano, com menor conteúdo de altas frequências, remigrado com velocidades: (a) $v \approx 2320$ m/s, (b) $v \approx 2680$ m/s e (c) $v \approx 3000$ m/s. Esquerda: Método de diferenças finitas explícito. Direita: Método de diferenças finitas implícito centrado no centro da célula.

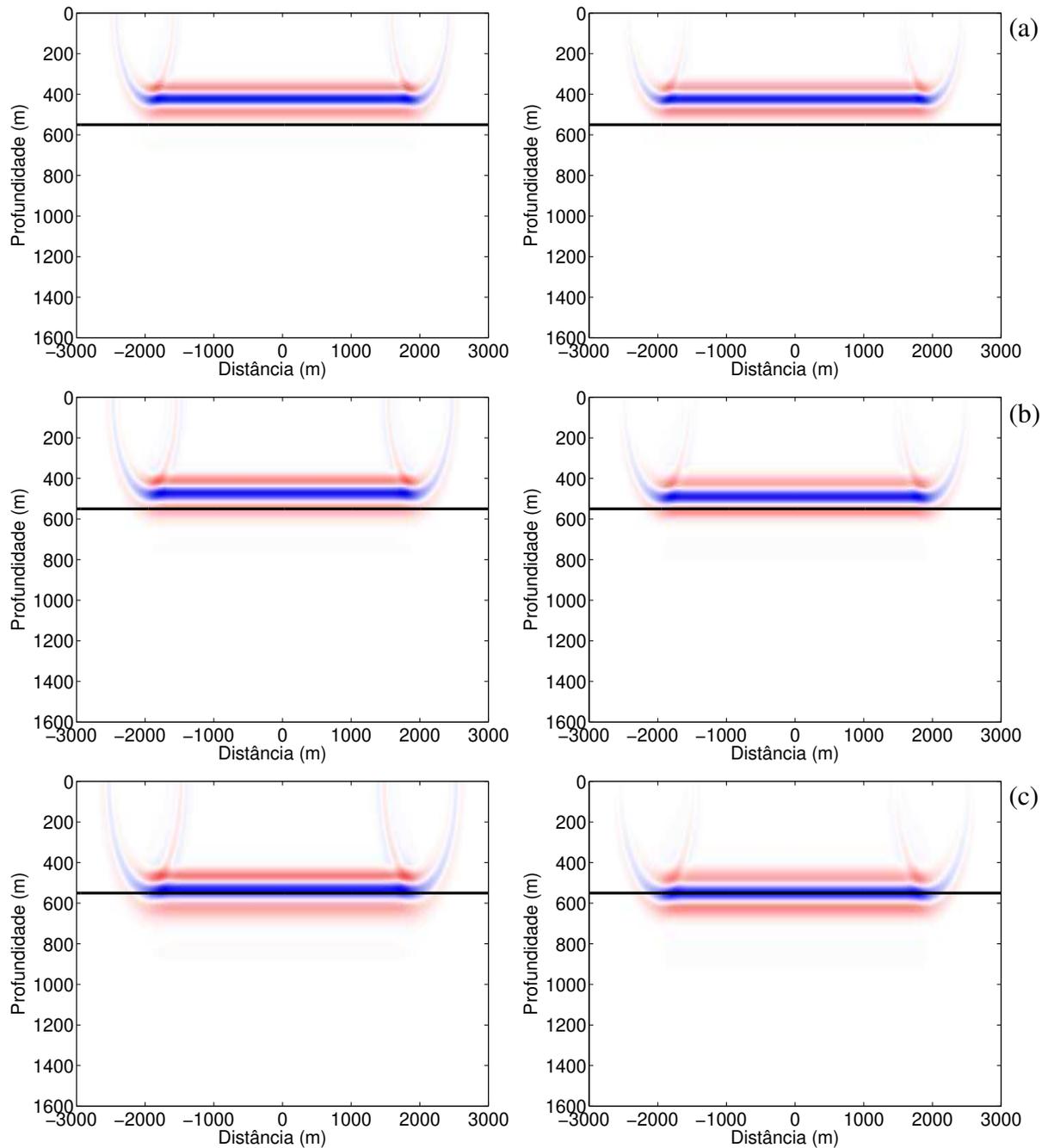


Figura 5.12: Imagem do refletor plano, com menor conteúdo de altas frequências, remigrado (esquerda) e migrado (direita) com velocidades: (a) $v \approx 2320$ m/s, (b) $v \approx 2680$ m/s e (c) $v \approx 3000$ m/s, respectivamente. A migração foi feita por migração Kirchhoff e o esquema utilizado para remigração foi DF implícito centrado no centro da célula.

tidade de números de onda, pois as propriedades de dispersão deste esquema dependem mais fortemente ainda do conteúdo de frequência dos dados do que os outros apresentados neste trabalho e para reduzi-los, precisa-se diminuir a malha o que aumenta o custo computacional.

A princípio, pelo fato deste esquema ser incondicionalmente estável temos a vantagem de crescer ou decrescer na velocidade de propagação quando o esquema é implementado, e, com isso, podemos também utilizar o modelo migrado com velocidade incorreta de 4000 m/s, como ilustrado na Figura 5.2b, para fazer a remigração da onda imagem até a profundidade correta de 550 m e conseqüentemente, até a velocidade correta de 3000 m/s. Porém, para este caso, o algoritmo numérico não é executável pois a matriz de iteração gerada para resolver o sistema é mal-condicionada e, portanto, não permite inversão.

Outra dificuldade observada neste esquema é o custo computacional elevado (ver Seção 5.5) pois se faz necessário resolver sistemas lineares de grande porte a cada iteração. O fato deste esquema só poder ser implementado de maneira implícita nos mostra que sempre temos matrizes de iteração com dimensões elevadas, em decorrência dos problemas relacionados à geofísica. É importante mencionar, neste contexto, que os problemas de demonstração escolhidos neste trabalho são de dimensão bastante reduzida em comparação com os problemas reais.

5.5 Tempos computacionais

Nesta seção relatamos a comparação dos tempos computacionais que cada um dos métodos investigados neste trabalho gastou na realização da propagação da onda imagem para o modelo de um refletor plano como descrito no início deste capítulo, ou seja, os dados iniciais conforme representado na Figura 5.2a, que são os dados contendo maior conteúdo de altas frequências. Os dados iniciais estão armazenados numa matriz de dimensões 601×160 , que são os números de pontos na horizontal (distância x) e na vertical (profundidade z), respectivamente.

Na Tabela 5.1 estão os tempos de execução de cada um dos métodos estudados assim como o tempo da migração direta dos dados por Kirchhoff. Para a migração direta, o tempo representado na tabela é o tempo de se fazer uma única migração. Para os métodos investigados, o

Método	Tempo (s)
Migração Kirchhoff	116
DF explícito	51
Volumes finitos	72
DF implícito	18700
DF centrado	3050

Tabela 5.1: Comparação entre os tempos computacionais.

tempo representado na tabela é o tempo de se construir aproximadamente 500 imagens pela remigração, armazenando-se somente 10 imagens. Assim, para se construir 500 imagens fazendo a migração direta levaríamos aproximadamente 58000 s, ou seja, em todos os métodos investigados a vantagem em se fazer a remigração é bem clara do ponto de vista computacional, principalmente o método de DF explícito (Schleicher et al., 2003a, 2004a). Um exemplo da vantagem de se fazer a remigração ao invés da migração é quando temos um bom chute para a velocidade correta do meio (medida, por exemplo, através de uma rocha conhecida no interior do subsolo) e queremos um conjunto de 20 imagens ao redor desta velocidade para podermos fazer uma análise de velocidade. Para isso, seria necessário se fazer 20 migrações o que levaria o tempo de 2320 s. Já para a remigração por onda imagem, usando o método de DF explícito, seria praticamente de graça, ou seja, aproximadamente 2 s. Logo, fica claro nossa busca por um método que não cause dispersão, pois as vantagens são grandes em usar a remigração, porém este método não pode ser mais caro em comparação com a migração direta.

Uma comparação entre tempos para cada um dos métodos nos mostra que o método de DF explícito é o mais aconselhável. O método de volumes finitos possui um tempo computacional maior que o método de DF explícito e ainda possui maior dispersão. O método de DF implícito convencional é o menos aconselhável pois possui um tempo computacional muito maior e não soluciona o problema da dispersão em relação ao método de DF explícito. Já o DF centrado é aconselhável quando nosso critério é não causar dispersão, porém só é possível para dados com baixas frequências.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho, estudamos a chamada equação da onda imagem, cuja dedução, originalmente desenvolvida por Fomel (1994) e Hubral et al. (1996), é apresentada no Capítulo 2. O objetivo dos nossos estudos foi a solução dessa equação utilizando métodos numéricos, como, por exemplo, os métodos de diferenças finitas, melhorando a qualidade da solução numérica em comparação àquela alcançada em estudos anteriores Schleicher et al. (2004a). Ao utilizarmos tais métodos, observamos alguns efeitos indesejáveis em sua propagação, como o efeito de dispersão. A redução deste efeito foi um dos principais objetivos deste trabalho.

Assim, a primeira tentativa de solucionar o problema da dispersão numérica, observada na propagação da onda imagem quando utilizamos o método de DF explícito (Schleicher et al., 2004a), foi implementar o método de volumes finitos, estudado no Capítulo 3. Este método não apresentou resultados satisfatórios apesar de convergentes, pois, além de termos a dispersão já estudada anteriormente, também observamos uma dispersão causada pela média realizada para a execução do método a cada iteração. Esta média é o diferencial deste método em relação ao método de DF explícito, logo temos também um aumento no custo computacional em comparação com o método de DF explícito.

Em decorrência deste resultado, as outras tentativas propostas foram apresentadas no Capítulo 4. Utilizamos esquemas de DF implícitos, já que este método só havia sido implementado explicitamente para simplificar a implementação (Schleicher et al., 2004a). Inicialmente, os

esquemas propostos foram os mesmos estudados em Schleicher et al. (2004a), só que aqui implementamos implicitamente, porém, sem resultados satisfatórios. Apesar de não termos identificado um aumento na dispersão numérica, também não identificamos ganho nesse sentido, pois a propagação da onda imagem para este caso apresentou os mesmos efeitos de dispersão encontrados no melhor caso das implementações explícitas. Isso demonstra que a análise teórica da dispersão numérica destes esquemas vale independentemente da forma em que os esquemas forem implementados, explícita ou implícita. Na forma implícita, observamos um aumento no custo computacional.

Outro esquema implícito proposto no Capítulo 4, foi o centrado no centro da célula. Para este esquema foi estudada sua consistência, estabilidade, dispersão e dissipação, de onde concluímos que este é consistente, incondicionalmente estável e não dissipativo, porém, que a dispersão tem forte dependência no número de ondas, isto é, para este caso, quanto maior a quantidade de altas frequências mais dispersivo é este esquema. Alternativas para solucionar este problema foram testadas, como, por exemplo, redução dos incrementos espaciais e da velocidade. No entanto, apesar deste esquema apresentar ótimos resultados para problemas contendo um baixo conteúdo de altas frequências, não soluciona por completo o nosso problema, pois significa que, dependendo do conteúdo de frequência dos dados a serem migrados, pode ser necessária uma malha de migração muito fina que implica um custo computacional do esquema implícito muito alto.

Os resultados numéricos de cada um dos métodos estudados neste trabalho estão ilustrados e discutidos no Capítulo 5. A fim de comparação, utilizamos um modelo com um refletor plano, com levantamento sísmico inteiro de afastamento nulo, assim como o utilizado em Schleicher et al. (2004a).

Em conclusão, podemos constatar os seguintes resultados deste trabalho:

- O método de VF, na sua forma mais simples, não é indicado para resolver os problemas de dispersão dos esquemas de DF. A média contida no procedimento acrescenta dispersão adicional ao invés de reduzi-la.
- As implementações explícita e implícita de um mesmo esquema de DF apresentam a

mesma dispersão numérica. Assim, a implementação explícita, onde possível, é preferível, uma vez que possui um menor custo computacional.

- O esquema centrado no centro da célula, com espaçamento da malha adequado para o conteúdo de frequência dos dados, reduz o efeito de dispersão, porém, apresenta um custo computacional alto.

Observamos então que, no âmbito desta dissertação, não foi possível apresentar uma solução para o problema da dispersão numérica dos esquemas de diferenças finitas para a aproximação da solução da equação da onda imagem que não aumentasse o custo computacional proibitivamente. Deve-se lembrar que, para que o método de remigração tenha significado prático, deve ser executável mais rápido do que uma migração repetida.

Devido as observações do efeito da média aplicada no método de volumes finitos, sugerimos estudos de métodos baseados em conceitos de anti-média para futuras tentativas de solução dos problemas considerados neste trabalho.

Referências Bibliográficas

- Bleistein, N., 1984, *Mathematical methods for wave phenomena*: Academic Press.
- Fomel, S., 1994, Method of velocity continuation in the problem of seismic time migration: *Russian Geology and Geophysics*, **35**, no. 5, 100–111.
- 2003, Time migration velocity analysis by velocity continuation: *Geophysics*, **68**, 1662–1672.
- Hubral, P., M. Tygel, and J. Schleicher, 1996, Seismic image waves: *Geophysical Journal International*, **125**, 431–442.
- Jaya, M., M. Botelho, P. Hubral, and G. Liebhardt, 1999, Remigration of ground-penetrating radar data: *Journal of Applied Geophysics*, **41**, 19–30.
- LeVeque, R. J., 2002, *Finite volume methods for hyperbolic problems*: Cambridge University Press.
- Munerato, F., 2003, Solução da equação da onda imagem pelo método de diferenças finitas: Technical report, FAPESP. Relatório de iniciação científica.
- Schleicher, J., A. Novais, and F. Munerato, 2003a, Análise numérica da equação da onda imagem na profundidade: *TEMA – Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, **4**, 267–276.
- 2003b, Migration velocity analysis by depth image-wave remigration: First results: EAGE/SEG Summer Research Workshop on “Processing and Imaging of Seismic Data Using Explicit or Implicit Velocity Information?”, Extended Abstracts, T18.
- 2004a, Migration velocity analysis by depth image-wave remigration: First results: *Geophysical Prospecting*, **52**, 559–574.

- 2004b, Migration velocity analysis by depth image-wave remigration: First results: 74th Ann. Internat. Meeting, Soc. Expl. Geoph. (SEG), Expanded Abstracts, ST1.6:1–4.
- Strikwerda, J., 1989, Finite difference schemes and partial differential equations: Wadsworth & Brooks.
- Thomas, J., 1995, Numerical partial differential equations: Springer-Verlag.
- Tygel, M., J. Schleicher, and P. Hubral, 1994, Pulse distortion in depth migration: *Geophysics*, **59**, 1561–1569.

Apêndice A

Equação do envelope para onda imagem

Neste apêndice relacionamos o ponto refletor $P_0(x_0, z_0)$, referente à velocidade v_0 , à sua imagem, referente à velocidade v . Para tal, reconhecemos que o tempo t representado nas equações (2.2) e (2.3) é o mesmo. Desta forma, podemos igualar a equação do tempo (2.1)

$$T = \frac{2}{v_0} \sqrt{z_0^2 + (x_0 - \xi)^2}, \quad (\text{A.1})$$

com a equação

$$T = \frac{2}{v} \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2}, \quad (\text{A.2})$$

que é a equação (2.3) resolvida para o tempo.

Ao igualarmos estas duas equações, temos a seguinte equação

$$F(x, z, \xi) = (x - \xi)^2 + z^2 - (v/v_0)^2 [(x_0 - \xi)^2 + z_0^2] = 0. \quad (\text{A.3})$$

A condição para a curva envelope é

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = 0,$$

que define, para cada x , um valor do parâmetro ξ . Aplicando esta condição à equação (A.3), encontramos a igualdade

$$2(x - \xi)(-1) - 2(v/v_0)^2(x_0 - \xi)(-1) = 0,$$

que pode ser resolvida para ξ , fornecendo

$$\xi = \frac{x - (v/v_0)^2 x_0}{1 - (v/v_0)^2}. \quad (\text{A.4})$$

Este, substituído na equação (A.3), fornece, após solução da expressão resultante em z ,

$$z = (v/v_0) \sqrt{z_0^2 + \frac{(x - x_0)^2}{1 - (v/v_0)^2}}, \quad (\text{A.5})$$

que é a equação do envelope (2.4).

Apêndice B

Equação iconal da onda imagem

Queremos achar a equação iconal da onda imagem para o problema de remigração. Fazemos então a substituição de $v = V(x, z)$ na equação (2.4)

$$z = (V/v_0) \sqrt{z_0^2 + \frac{(x - x_0)^2}{1 - (V/v_0)^2}}. \quad (\text{B.1})$$

Para simplificar a notação, usamos $M(x, z) = V(x, z)/v_0$. Agora derivamos esta equação com respeito a x e a z

$$M_x \left\{ \left[z_0^2 + \frac{(x - x_0)^2}{1 - M^2} \right]^{1/2} + \frac{M^2(x - x_0)^2}{(1 - M^2)^2} \left[z_0^2 + \frac{(x - x_0)^2}{1 - M^2} \right]^{-1/2} \right\} \\ + \frac{M(x - x_0)}{1 - M^2} \left[z_0^2 + \frac{(x - x_0)^2}{1 - M^2} \right]^{-1/2} = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$M_z \left\{ \left[z_0^2 + \frac{(x - x_0)^2}{1 - M^2} \right]^{1/2} + \frac{M^2(x - x_0)^2}{(1 - M^2)^2} \left[z_0^2 + \frac{(x - x_0)^2}{1 - M^2} \right]^{-1/2} \right\} = 1. \quad (\text{B.3})$$

Da equação (B.3), observamos imediatamente que

$$\left\{ \left[z_0^2 + \frac{(x - x_0)^2}{1 - M^2} \right]^{1/2} + \frac{M^2(x - x_0)^2}{(1 - M^2)^2} \left[z_0^2 + \frac{(x - x_0)^2}{1 - M^2} \right]^{-1/2} \right\} = \frac{1}{M_z}. \quad (\text{B.4})$$

Da equação (B.1), temos a expressão

$$\left[z_0^2 + \frac{(x - x_0)^2}{1 - M^2} \right]^{1/2} = \frac{z}{M}, \quad (\text{B.5})$$

que, juntamente com a equação (B.4), pode ser substituída na equação (B.2), obtendo

$$M_x \frac{1}{M_z} + \frac{M(x - x_0)}{1 - M^2} \frac{M}{z} = 0 . \quad (\text{B.6})$$

Esta equação usamos para expressar o último termo desconhecido em (B.3),

$$\frac{M(x - x_0)}{1 - M^2} = -\frac{z}{M} \frac{M_x}{M_z} . \quad (\text{B.7})$$

Agora, substituímos as equações (B.5) e (B.7) na equação (B.3) e obtemos

$$\frac{z}{M} + \left(-\frac{z}{M} \frac{M_x}{M_z} \right)^2 \frac{M}{z} = \frac{1}{M_z} \quad \text{ou} \quad \frac{z}{M} + \frac{z}{M} \frac{M_x^2}{M_z^2} = \frac{1}{M_z} ,$$

que, após multiplicação por $\frac{M}{z} M_z^2$, torna-se a equação iconal para $M(x, z)$,

$$M_x^2 + M_z^2 - \frac{M}{z} M_z = 0 . \quad (\text{B.8})$$

Retornando para $V(x, z) = v_0 M(x, z)$, nós achamos a procurada equação iconal (2.5) da equação da onda imagem (1.1).

Apêndice C

Equação iconal independente de F

Neste apêndice mostramos que a equação (2.5) representa a equação iconal para qualquer equação diferencial de segunda ordem da forma (2.8). Para tal, calculamos as derivadas parciais da candidata a solução da equação da onda imagem (2.6), em relação as variáveis espaciais x e z e a velocidade v . Chegamos nas expressões abaixo

$$p_x = \frac{\partial p}{\partial x} = p_{0x}f - p_0f'V_x, \quad (\text{C.1})$$

$$p_{xx} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = p_{0xx}f - 2p_{0x}f'V_x + p_0f''V_x^2 - p_0f'V_{xx}, \quad (\text{C.2})$$

$$p_z = \frac{\partial p}{\partial z} = p_{0z}f - p_0f'V_z, \quad (\text{C.3})$$

$$p_{zz} = \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = p_{0zz}f - 2p_{0z}f'V_z + p_0f''V_z^2 - p_0f'V_{zz}, \quad (\text{C.4})$$

$$p_v = \frac{\partial p}{\partial v} = p_0f'. \quad (\text{C.5})$$

Agora, utilizando a equação (C.3), calculamos a derivada mista em relação à profundidade e à velocidade, obtendo

$$p_{zv} = \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial v} = p_{0z}f' - p_0f''V_z. \quad (\text{C.6})$$

Assim, podemos substituir as equações (C.2), (C.4) e (C.6) na equação (2.8) e obter

$$p_{0xx}f - 2p_{0x}f'V_x + p_0f''V_x^2 - p_0f'V_{xx}$$

$$\begin{aligned}
 &+p_{0zz}f - 2p_{0z}f'V_z + p_0f''V_z^2 - p_0f'V_{zz} \\
 &+ \frac{V}{z}[p_{0z}f' + p_0f''V_z] = F(p_x, p_z, p_v, p, x, z, v) = \hat{F}(p_0, f, f', x, z, v),
 \end{aligned}$$

onde utilizamos que as primeiras derivadas de p somente dependem de f e f' . Rearranjando os termos, chegamos em

$$\begin{aligned}
 p_0[V_x^2 + V_z^2 - \frac{V}{z}V_z]f'' &= \hat{F}(p_0, f, f', x, z, v) - [p_{0xx} + p_{0zz}]f \\
 &+ [2p_{0x}V_x - p_0V_{xx} + 2p_{0z}V_z - p_0V_{zz} + \frac{V}{z}p_{0z}]f'. \quad (C.7)
 \end{aligned}$$

Como podemos observar, o lado direito da equação (C.7) não depende da segunda derivada de f . Portanto, concluímos que a equação iconal

$$V_x^2 + V_z^2 - \frac{V}{z}V_z = 0,$$

é associada a todas as equações diferenciais parciais que podem ser representadas da forma (2.8), independentemente da forma da função F . Isto justifica a nossa escolha $F = 0$ para a desejada equação da onda imagem (2.7).

Apêndice E

Mudança de variável na equação da onda imagem

E.1 Consistência

Aqui, queremos enfatizar que o fato de fazermos a mudança de variável citada no Capítulo 4 não altera as condições de consistência, estabilidade e dispersão do esquema centrado no centro da célula.

Como podemos observar no desenvolvimento para determinar a consistência do esquema, o fato de não haver mais a velocidade multiplicando o termo misto da equação diferencial da onda imagem (4.65) não altera o cálculo dos termos

$$\mathcal{L}_{xx}^{\Delta\sigma}\phi = \phi_{xx} + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta z^2) + \mathcal{O}(\Delta\sigma^2),$$

$$\mathcal{L}_{zz}^{\Delta\sigma}\phi = \phi_{zz} + \mathcal{O}(\Delta z^2) + \mathcal{O}(\Delta\sigma^2),$$

agora alterados para a variável σ . Porém, no termo $\mathcal{L}_{\sigma z}^{\Delta\sigma}$, temos a seguinte mudança

$$\mathcal{L}_{\sigma z}^{\Delta\sigma}\phi = \frac{2}{2z_n + \Delta z}\phi_{\sigma z} + \mathcal{O}(\Delta\sigma^2) + \mathcal{O}(\Delta z^2),$$

que nos diz que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\phi - \mathcal{L}^{\Delta\sigma}\phi &= \phi_{xx} + \phi_{zz} + \frac{1}{z}\phi_{\sigma z} \\ &- \left[\phi_{xx} + \phi_{zz} + \frac{2}{2z_n + \Delta z}\phi_{\sigma z} + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta z^2) + \mathcal{O}(\Delta\sigma^2) \right] \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $\Delta x, \Delta z, \Delta \sigma \rightarrow 0$.

Logo, o esquema continua sendo consistente de segunda ordem em x, z e σ com a equação diferencial, mesmo tendo feito a mudança de variável $\sigma = \ln(v/v_0)$.

E.2 Estabilidade

Em relação à estabilidade do esquema centrado no centro da célula, a conclusão é a mesma que para o caso da consistência, pois ao observarmos o desenvolvimento e, em particular, a equação (4.45), concluímos que $|\xi|^2$ é igual a 1, independente do valor k_n^l , que neste caso é k_n , como mostrado na equação (4.68).

Portanto, o esquema em discussão, é ainda incondicionalmente estável mesmo tendo feito a mudança de variável sugerida no contexto.

E.3 Dispersão numérica

Correspondentemente, concluímos, pela semelhança do fator de amplificação ξ dos esquemas em v e em σ , que a dispersão do esquema em σ pode ser obtida por substituir na equação (4.60) Δv por $\Delta \sigma$ e v_l por 1.