UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática

Aplicações $\tau(p;q)$-somantes e $\sigma(p)$-nucleares

Tese de Doutorado

Ximena Mujica
Orientador: Prof. Dr. Mário C. Matos

Aplicações $\tau(p;q)$-somantes e $\sigma(p)$-nucleares

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por *Ximena Mujica* e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 17 de Fevereiro de 2006.

Prof. Dr. **Mário C. Matos**

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Mário C. Matos
Profa. Dra. Luiza Amália de Moraes
Prof. Dr. Geraldo Márcio de A. Botelho
Profa. Dra. Maria Sueli Marconi Roversi
Prof. Dr. Ary O. Chiachio
Prof. Dr. Raymundo Alencar (suplente)
Prof. Dr. Daniel M. Pellegrino (suplente)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, **UNICAMP**, como requisito parcial para obtensão do Título de **Doutora em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Mujica Serdio, Ximena
M896a Aplicações tau(p;q)-somantes e sigma(p)-nucleares / Ximena Mujica Serdio -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientador : Mário Carvalho de Matos
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Ideais (Matemática). 2. Aplicações holomorfas. 3. Polinômios (Matemática). 4. Fatoração de operadores. 5. Dualidade (Matemática). 6. Análise funcional. I. Matos, Mário C. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Tau(p;q)-summing and sigma(p)-nuclear mappings.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Ideals (Mathematics). 2. Holomorphic mappings. 3. Polynomials (Mathematics). 4. Factorization of operators. 5. Duality (Mathematics). 6. Functional analysis.

Área de concentração: Análise funcional

Titulação: Doutora em Matematica

Banca examinadora: Prof. Dr. Mario Carvalho de Matos (IMECC-UNICAMP)
Profa. Dra. Luiza Amália de Moraes (UFRJ)
Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho (UFU)
Profa. Dra. Maria Sueli Marconi Roversi (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Ary Orozimbo Chiacchio (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 17/02/2006

Tese de Doutorado defendida em 17 de fevereiro de 2006e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). MARIO CARVALHO DE MATOS

Luiza Amália de Moraes

Prof. (a). Dr (a). LUIZA AMALIA DE MORAES

Prof. (a). Dr (a). GERALDO MARCIO DE AZEVEDO BOTELHO

Prof. (a). Dr (a). MARIA SUELI MARCONI ROVERSI

Ary O Chiacchio

Prof. (a) Dr. (a) ARY OROZIMBO CHIACCHIO

Quero ter

Coragem para mudar o que devo,
Paciência para aceitar o que não posso mudar e
Sabedoria para reconhecer a diferença entre ambos.

anônimo

Dedico este trabalho a Jorge, Ana Maria e Felipe.

Agradecimentos

ao meu orientador Prof. Dr. Mário Matos pela orientação, atenção e paciência;

à banca examinadora: Luiza, Geraldo, Sueli e Ary que contribuíram muitíssimo para melhorar a versão final deste trabalho;

‘a minha família pelo apoio, e principalmente a meu pai com quem pude tirar várias dúvidas ao longo desta trajetória;

aos meus familiares científicos Daniel, Marcela, Cristiane e Daniela, que sempre me apoiaram a animaram;

aos meus colegas de salinha Weber, Lindomberg, Rogério, Brandão, Daniele, Rafael, Luciana e Pereba. Em especial ao amigão Weber, o único a me acompanhar durante os quatro anos desta árdua caminhada, amenizada por muitos momentos de descontração;

aos amigos Luciana e Fábio, Paula e Romário e Gimena e Jones pela amizade;

aos muitos amigos da pós: Ariosvaldo, Edson, Elder, Evandro, Flávia, Humberto, Juliana, Marcelo, Maurício, Po Lin, Rodolfo Rogério Casa Grande, Simão, Sonia, Vinícius... (desculpem se esqueci de nomear alguém!);

aos muitos amigos, professores e colegas da AB&C que me ensinaram que a vida é uma dança;

aos funcionários do IMECC, em especial à Cidinha, Ednaldo, Tânia e o pessoal do departamento de finanças pela atenção e presteza concedidas;

ao IMECC pelo apoio financeiro nos SBA´s em que participei;

ao programa CAPES/PICDT e ao departamento de matemática da UFPR pelo apoio financeiro.

Sumário

Resumo

Neste trabalho estendemos os conceitos de operadores τ-somantes e σ-nucleares apresentados por Pietsch em seu livro Operator Ideals, para aplicações multilineares, polinômios e funções holomorfas, estabelecendo uma relação de dualidade entre os mesmos. Apresentamos também um teorema de dominação para aplicações e polinômios $\tau(p;q)$-somantes, mostrando a sua relação com as aplicações e polinômios semi-integrais, bem como um teorema de fatoração para aplicações e polinômios $\sigma(p)$-nucleares.

Abstract

In this work we extend the concepts of τ-summing and σ-nuclear operators presented by Pietsch in his book Operator Ideals, to multilinear mappings, polynomials and holomorphic functions, thus establishing a duality relation between them. We also present a domination theorem for $\tau(p;q)$-summing mappings and polynomials, showing their relation with semi-integral mappings and polynomials, as well as a factorization theorem for $\sigma(p)$-nuclear mappings and polynomials.

Introdução

Por volta dos anos 50, Alexandre Grothendieck desenvolveu um amplo trabalho sobre operadores p-somantes. Mais tarde, no ano 1967, Albrecht Pietsch conseguiu isolar esta classe de operadores e estabeleceu muitas de suas propriedades fundamentais. Em seu livro *Operator Ideals* são estudadas várias classes de operadores que possuem essas propriedades, dentre os quais estão os operadores τ-somantes e os σ-nucleares, aqui estudados.

No capítulo 1 estendemos para as aplicações multilineares os conceitos de operadores τ-somantes e σ-nucleares. Tendo em vista uma analogia com a álgebra, as classes das aplicações multilineares que generalizam esses conceitos serão chamados de $\mathcal{L}_n$-*módulos de aplicações*; entretanto, é bom lembrar que vários autores têm usado o termo ideal de aplicações. Ao trabalhar com polinômios voltamos a usar o termo *ideal de polinômios*. Para o teorema de dominação para aplicações $\tau(p)$-somantes foram exploradas idéias já usadas por Pellegrino para aplicações p-semi-integrais em [15], e de Matos e Alencar para aplicações absolutamente p-somantes em [1]. Para as aplicações $\sigma(p)$-nucleares estendemos o teorema da fatoração. Para finalizar esse capítulo estabelecemos uma relação de dualidade entre as aplicações τ-somantes e as σ-nucleares.

No capítulo 2 estendemos os resultados do capítulo 1 para os polinômios n-homogêneos. No capítulo 3 desenvolvemos os conceitos de funções holomorfas de tipo $\tau(p)$-somante exponencial e funções holomorfas $\sigma(p)$-nucleares de tipo limitado e foi estabelecida a dualidade entre as mesmas. As idéias usadas por Gupta em sua monografia [6] foram de grande valia.

Muita coisa ainda pode ser feita, relativa a esses operadores. Para as aplicações σ-nucleares e $\sigma(p)$-nucleares falta explorar se temos uma relação de inclusão estrita. As relações entre τ-somantes e σ-nucleares foram obtidas para o espaço F sendo reflexivo; e se não for será que esse resultado vale? Os conceitos de procedimentos[1] entre ideais de operadores e operadores σ-integrais não foram mencionados neste trabalho, mas são também outro aspecto a se estudar.

[1]procedures - ver[17] pg 180

Lista de notações

$\mathbb{K}$ = corpo de escalares ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ e $\mathbb{N}_m = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$.

$D, D_i, E, E_i, F, F_i, G, G_i, U$ denotarão espaços de Banach.

$\dim E$ denota a dimensão do espaço E.

Dim$E$ será o conjunto dos subespaços vetoriais M de E com $\dim M < \infty$.

$\|.\|_E$ é a norma usual em E. Denotaremos por β, τ e $\tau*$ as topologias forte (topologia relativa à norma $\|.\|_E$, fraca e fraca$*$ respectivamente, em E.

${}^nE := E, \overset{\text{n vezes}}{\cdots}, E, \ \ x^n := (x, \overset{\text{n vezes}}{\cdots}, x)$.

$\Sigma_n = \{\sigma : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n : \ \sigma$ é bijeção$\}$ é o grupo simétrico de grau n.

$B_E = \{x \in E : \|x\| < 1\}$.

$W(B_{E_1} \times \ldots \times B_{E_n})$ é o conjunto das probabilidades de Borel em $B_{E_1} \times \ldots \times B_{E_n}$.

Sejam $x_j \in E$ para cada $j \in \mathbb{N}$:

$(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p(E)$, se $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p := (\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p)^{1/p} < \infty$;

$(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(E)$, se $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p^w := \sup_{\phi \in B_{E'}} (\sum_{j=1}^{\infty} |\phi(x_j)|^p)^{1/p} < \infty$;

$(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^u(E)$, se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(E)$ e $\lim_{m \to \infty} \|(x_j)_{j=m}^{\infty}\|_p^w = 0$.

Sejam $x_{ij} \in E_i$ para cada $j \in \mathbb{N}$ e $i = 1, \ldots, n$:

$(x_{1j}, \ldots, x_{nj})_{j=1}^{\infty} \ \in \ l_p(E_1, \ldots, E_n)$ se

$\|(x_{1j}, \ldots, x_{nj})_{j=1}^{\infty}\|_p := (\sum_{j=1}^{\infty} \|x_{1j}\|^p \ldots \|x_{nj}\|^p)^{1/p} < \infty$;

$(x_{1j}, \ldots, x_{nj})_{j=1}^{\infty} \ \in \ l_p^w(E_1, \ldots, E_n)$ se

$\|(x_{1j}, \ldots, x_{nj})_{j=1}^{\infty}\|_p^w \ := \ \sup_{\phi_i \in B_{E_i'}} (\sum_{j=1}^{\infty} \ |\phi_1(x_{1j}) \ldots \phi_n(x_{nj})|^p)^{1/p} < \infty$.

$id_E : E \longrightarrow E$ é a aplicação identidade em E.

$\mathcal{L}(E; F)$ operadores lineares contínuos de E em F; $E' := \mathcal{L}(E; \mathbb{K})$.

$\mathcal{L}_f(E; F)$ operadores lineares contínuos cuja imagem em F é subespaço de dimensão finita.

$\mathcal{L}_a(E; F)$ operadores lineares aproximáveis de E em F, i.e., que são o limite de operadores de tipo finito (pg 29).

$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ aplicações n-lineares contínuas de $E_1 \times \ldots \times E_n$ em F.

$\mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F)$ aplicações n-lineares contínuas de $E_1\mathsf{x}\ldots\mathsf{x}E_n$ em F cuja imagem em F é subespaço de dimensão finita.

$\mathcal{L}_a(E_1,\ldots,E_n;F)$ aplicações n-lineares aproximáveis de $E_1\mathsf{x}\ldots\mathsf{x}E_n$ em F, i.e., que são o limite de aplicações de tipo finito (pg 29).

$\mathcal{L}_{as}(E_1,\ldots,E_n;F) := \mathcal{L}_{as(1)}(E_1,\ldots,E_n;F)$ aplicações n-lineares absolutamente somantes de $E_1\mathsf{x}\ldots\mathsf{x}E_n$ em F.

$\mathcal{L}_{as(p)}(E_1,\ldots,E_n;F) := \mathcal{L}_{as(p;p)}(E_1,\ldots,E_n;F)$ é o espaço das aplicações n-lineares absolutamente p-somantes de $E_1\mathsf{x}\ldots\mathsf{x}E_n$ em F .

$\mathcal{L}_{as(p;q)}(E_1,\ldots,E_n;F) := \mathcal{L}_{as(p;q,\ldots,q)}(E_1,\ldots,E_n;F)$ aplicações n-lineares absolutamente $(p;q)$-somantes de $E_1\mathsf{x}\ldots\mathsf{x}E_n$ em F.

$\mathcal{L}_{as(p;q_1,\ldots,q_n)}(E_1,\ldots,E_n;F)$ é o espaço das aplicações n-lineares absolutamente $(p;q_1,\ldots,q_n)$-somantes de $E_1\mathsf{x}\ldots\mathsf{x}E_n$ em F (ver pg 15).

$\mathcal{L}_s({}^nE;F)$ aplicações n-lineares simétricas contínuas (pg 73).

$\mathcal{L}_{si}(E_1,\ldots,E_n;F) := \mathcal{L}_{si(1)}(E_1,\ldots,E_n;F)$ aplicações n-lineares semi-integrais.

$\mathcal{L}_{si(p)}(E_1,\ldots,E_n;F)$ aplicações n-lineares p-semi-integrais (pg 18).

$\mathcal{L}_\sigma(E_1,\ldots,E_n;F)$ aplicações n-lineares σ-nucleares (pg 27).

$\mathcal{L}_{\sigma 1(p)}(E_1,\ldots,E_n;F)$ aplicações n-lineares $\sigma1(p)$-nucleares (pg 50).

$\mathcal{L}_{\sigma(p)}(E_1,\ldots,E_n;F)$ aplicações n-lineares $\sigma(p)$-nucleares (pg 19).

$\mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F)$ aplicações n-lineares $\tau(p)$-somantes (pg 15).

$\mathcal{L}_{\tau(p;q)}(E_1,\ldots,E_n;F)$ aplicações n-lineares $\tau(p;q)$-somantes (pg 12).

$\mathcal{P}(E;F)$ polinômios contínuos (pg 74).

$\mathcal{P}({}^nE;F)$ polinômios n-homogêneos contínuos (pg 73).

$\mathcal{P}_f(E;F)$ polinômios n-homogêneos contínuos de tipo finito, i.e., cuja imagem em F é subespaço de dimensão finita.

$\mathcal{P}_a(E;F)$ polinômios n-homogêneos contínuos aproximáveis de E em F, i.e., que são o limite de polinômios de tipo finito (pg 86).

$\mathcal{P}_{\sigma(p)}({}^nE;F)$ polinômios n-homogêneos $\sigma(p)$-nucleares (pg 80).

$\mathcal{P}_{\tau(p;q)}({}^nE;F)$ polinômios n-homogêneos $\tau(p;q)$-somantes (pg 77).

$\mathcal{H}(U;F)$ funções holomorfas de U em F (pg 101).

$\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(U;F)$ funções holomorfas $\sigma(p)$-nucleares de tipo limitado de U em F (pg 103).

$\mathcal{E}xp_{\tau(p;q)}(U;F)$ funções holomorfas $\tau(p;q)$-somantes de tipo exponencial de U em F (pg 118).

$\tau_{n,f}(x)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f em ξ para x em E (pg 102).

Seja $M \subset E$ subespaço vetorial:

$J_M^E : M \hookrightarrow E$ é a inclusão canônica; $\|J_M^E x\| = \|x\|$ e $\|J_M^E\| = 1$.

$Q_M^E : E \to E/M$ é a aplicação quociente; $\|Q_M^E\| = 1$.
Se $T : E \longrightarrow F$ é aplicação linear, sua adjunta é

$$\begin{array}{rcccccl} T' : & F' & \longrightarrow & E' & & & \\ & y' & \mapsto & T'y' : & E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & & & x & \mapsto & T'y'(x) = y' \circ T(x). \end{array}$$

Analogamente, para uma aplicação multilinear $T : E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow F$, definimos:

$$\begin{array}{rcccccl} T' : & F' & \longrightarrow & \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K}) & & & \\ & y' & \mapsto & T'y' : & E_1, \ldots, E_n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & & & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & T'y'(x_1, \ldots, x_n) = y' \circ T(x_1, \ldots, x_n). \end{array}$$

Em particular, se $T = (T_1 \otimes \ldots \otimes T_n)$ com $T_i \in \mathcal{L}(E_i; \mathbb{K})$, isto é, $T(x_1, \ldots, x_n) = T_1(x_1) \ldots T_n(x_n)$, temos

$$\begin{array}{rcccccl} (T_1 \otimes \ldots \otimes T_n)' : & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K}) & & & \\ & \lambda & \mapsto & (T_1 \otimes \ldots \otimes T_n)'\lambda : & E_1, \ldots, E_n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & & & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (T_1 \otimes \ldots \otimes T_n)'\lambda(x_1, \ldots, x_n) := \\ & & & & & & := \lambda(T_1(x_1) \ldots T_n(x_n)). \end{array}$$

E para uma transformação linear $T : D_1 \times \ldots \times D_n \to E_1 \times \ldots \times E_n$, definimos

$$\begin{array}{rcccccl} T' : & (E_1 \times \ldots \times E_n)' & \to & (D_1 \times \ldots \times D_n)' & & & \\ & a & \mapsto & T'a & : D_1 \times \ldots \times D_n & \to & \mathbb{K} \\ & & & & (u_1, \ldots, u_n) & \mapsto & T'a(u_1, \ldots, u_n) := \\ & & & & & & a \circ T(u_1, \ldots, u_n). \end{array}$$

Em particular se $T = (T_1, \ldots, T_n) : D_1 \times \ldots \times D_n \to E_1 \times \ldots \times E_n$, temos

$$\begin{array}{rcccccl} T' : & (E_1, \ldots, E_n)' & \to & (D_1, \ldots, D_n)' & & & \\ & a & \mapsto & (T_1, \ldots, T_n)'a & : D_1 \times \ldots \times D_n & \to & \mathbb{K} \\ & & & & (u_1, \ldots, u_n) & \mapsto & [(T_1, \ldots, T_n)'a](u_1, \ldots, u_n) := \\ & & & & & & a(T_1 u_1, \ldots, T_n u_n). \end{array}$$

Para os casos acima vale que $\|T\| = \|T'\|$.
Para $T = (T_1, \ldots, T_n) : D_1 \times \ldots \times D_n \to E_1 \times \ldots \times E_n$, também podemos definir

$$\begin{array}{rcccccl} T^{n\prime} : & \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K}) & \to & \mathcal{L}(D_1, \ldots, D_n; \mathbb{K}) & & & \\ & a & \mapsto & (T_1, \ldots, T_n)^{n\prime}(a) & : D_1 \times \ldots \times D_n & \to & \mathbb{K} \\ & & & & (u_1, \ldots, u_n) & \mapsto & a(T_1 u_1, \ldots, T_n u_n). \end{array}$$

Aqui temos que $\|(T_1, \ldots, T_n)\| = \|(T_1, \ldots, T_n)^{n\prime}\|$, ou seja $\|T\| = \|T^{n\prime}\|$.
Aplicação avaliação, definida para um $x \in E$:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}_E(x): & E' & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & a & \mapsto & \mathcal{A}_E x(a) := a(x) \end{array}$$

tem-se que $\|\mathcal{A}_E(x)\| = \|x\|$.
Aplicação avaliação multilinear, definida para $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \mathsf{x} \ldots \mathsf{x} E_n$:

$$\begin{array}{rccccc} \mathcal{A}_n: & E_1 \mathsf{x} \ldots \mathsf{x} E_n & \rightarrow & (\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K}))' & & \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \mathcal{A}_n(x_1, \ldots, x_n) & : \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n : \mathbb{K}) \rightarrow & \mathbb{K} \\ & & & & a \qquad\qquad \mapsto & a(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

e a exemplo do caso anterior temos $\|\mathcal{A}_n(x_1, \ldots, x_n)\| = \|x_1\| \ldots \|x_n\|$.
χ_K denota a função característica do conjunto K: $\chi_K(x) = 1$, se $x \in K$ e $\chi_K(x) = 0$, se $x \notin K$

Capítulo 0

Resultados preliminares

A seguir apresentamos definições e resultados que serão utilizados ao longo deste trabalho.

0.1 Definições e resultados diversos

Para $p \geq 1$, denotaremos por p' seu conjugado, ie, $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$. Lembre que $(l_p)' = l_{p'}$, se $1 \leq p < \infty$.

0.1.1 Lema: *Sejam E um espaço de Banach, $p \geq 1$ e $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(E')$, então:*

$$\sup_{\phi \in B_{E''}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\phi(a_j)|^p \Big)^{1/p} = \sup_{t \in B_E} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j(t)|^p \Big)^{1/p}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\sup_{\phi \in B_{E''}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\phi(a_j)|^p \Big)^{1/p} &= \sup_{\|(\lambda_j)\|_{p'}=1} \sup_{\phi \in B_{E''}} |\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \phi(a_j)| = \sup_{\phi \in B_{E''}} \sup_{\|(\lambda_j)\|_{p'}=1} |\phi(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j)| \\
&= \sup_{\|(\lambda_j)\|_{p'}=1} \| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j \| = \sup_{\|(\lambda_j)\|_{p'}=1} \sup_{t \in B_E} |\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j(t)| = \sup_{t \in B_E} \sup_{\|(\lambda_j)\|_{p'}=1} |\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j(t)| \\
&= \sup_{t \in B_E} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j(t)|^p \Big)^{1/p}.
\end{aligned}$$

■

0.1.2 Lema: *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ espaços de Banach, e para $i = 1, \ldots, n$ sejam $a_{ij} \in E_i'$ tais que*

$$\Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\phi_1(a_{1j}) \ldots \phi_n(a_{nj})|^p\Big)^{1/p} < \infty, \ \textit{para}\ \phi_j \in E_j',$$

então:

$$\sup_{\phi_i \in B_{E_i''}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\phi_1(a_{1j}) \ldots \phi_n(a_{nj})|^p\Big)^{1/p} = \sup_{t_i \in B_{E_i}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(t_1) \ldots a_{nj}(t_n)|^p\Big)^{1/p}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\sup_{\phi_i \in B_{E_i''}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\phi_1(a_{1j}) \ldots \phi_n(a_{nj})|^p\Big)^{1/p} &= \sup_{\substack{\phi_i \in B_{E_i''} \\ i \neq 1}} \sup_{\phi_1 \in B_{E_1''}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \Big|\phi_1\Big(a_{1j}\phi_2(a_{2j}) \ldots \phi_n(a_{nj})\Big)\Big|^p\Big)^{1/p} \\
\text{(por 0.1.1)} \quad &= \sup_{\substack{\phi_i \in B_{E_i''} \\ i \neq 1}} \sup_{t_1 \in B_{E_1}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \Big|\Big(a_{1j}\phi_2(a_{2j}) \ldots \phi_n(a_{nj})\Big)(t_1)\Big|^p\Big)^{1/p} \\
&= \sup_{\substack{\phi_i \in B_{E_i''} \\ i \neq 1,2}} \sup_{t_1 \in B_{E_1}} \sup_{\phi_2 \in B_{E_2''}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \Big|\phi_2\Big(a_{1j}(t_1)a_{2j}\phi_3(a_{3j}) \ldots \phi_n(a_{nj})\Big)\Big|^p\Big)^{1/p} \\
\text{(por 0.1.1)} \quad &= \sup_{\substack{\phi_i \in B_{E_i''} \\ i \neq 1,2}} \sup_{t_1 \in B_{E_1}} \sup_{t_2 \in B_{E_2}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \Big|\Big(a_{1j}(t_1)a_{2j}\phi_3(a_{3j}) \ldots \phi_n(a_{nj})\Big)(t_2)\Big|^p\Big)^{1/p} \\
&= \sup_{\substack{\phi_i \in B_{E_i''} \\ i \neq 1,2}} \sup_{\substack{t_i \in B_{E_i} \\ i = 1,2}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(t_1)a_{2j}(t_2)\phi_3(a_{3j}) \ldots \phi_n(a_{nj})|^p\Big)^{1/p} \\
\text{e assim por diante} \quad &\vdots \\
&= \sup_{\phi_n \in B_{E_n''}} \sup_{\substack{\phi_1 \in B_{E_1''} \\ i \neq n}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(t_1) \ldots a_{n-1j}(t_{n-1})\phi_n(a_{nj})|^p\Big)^{1/p} \\
&= \sup_{\phi_n \in B_{E_n''}} \sup_{\substack{\phi_1 \in B_{E_1''} \\ i \neq n}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \Big|\phi_n\Big(a_{1j}(t_1) \ldots a_{n-1j}(t_{n-1})a_{nj}\Big)\Big|^p\Big)^{1/p} \\
\text{(por 0.1.1)} \quad &= \sup_{t_n \in B_{E_n}} \sup_{\substack{t_i \in B_{E_i} \\ i \neq n}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \Big|\Big(a_{1j}(t_1) \ldots a_{n-1j}(t_{n-1})a_{nj}\Big)(t_n)\Big|^p\Big)^{1/p} \\
&= \sup_{t_i \in B_{E_i}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(t_1) \ldots a_{nj}(t_n)|^p\Big)^{1/p}.
\end{aligned}$$

∎

0.1.3 Lema (Desigualdade de Hölder generalizada): *Se* $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q_1} + \ldots + \frac{1}{q_n}$ *e* $(\alpha_{ij})_{j=1}^{\infty} \in l_{q_i}$ *para* $i = 1, \ldots, n$, *então*

$$\Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{1j} \ldots \alpha_{nj}|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{1j}|^{q_1}\Big)^{1/q_1} \ldots \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{nj}|^{q_n}\Big)^{1/q_n}.$$

Demonstração: A Desigualdade de Hölder diz que para $s \geq 1$ e $1 = 1/s + 1/s'$

$$\sum_{j=1}^{m} |\alpha_j \beta_j| \leq \Big(\sum_{j=1}^{m} |\alpha_j|^s\Big)^{1/s} \Big(\sum_{j=1}^{m} |\beta_j|^{s'}\Big)^{1/s'}$$

e sua demonstração pode ser vista em [14] na pg 2. Para a versão generalizada, note primeiro que se $1/q = 1/q_1 + 1/q_2$, então $1 = 1/(q_1/q) + 1/(q_2/q)$. Logo, se $\bar{\alpha}_j = \alpha_j^q$ e $\bar{\beta}_j = \beta_j^q$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} |\alpha_j \beta_j|^q = \sum_{j=1}^{m} |\bar{\alpha}_j \bar{\beta}_j| &\leq \Big(\sum_{j=1}^{m} |\bar{\alpha}_j|^{(q_1/q)}\Big)^{1/(q_1/q)} \Big(\sum_{j=1}^{m} |\bar{\beta}_j|^{(q_2/q)}\Big)^{1/(q_2/q)} \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{m} |\alpha_j|^{q.(q_1/q)}\Big)^{1/(q_1/q)} \Big(\sum_{j=1}^{m} |\beta_j|^{q.(q_2/q)}\Big)^{1/(q_2/q)} \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{m} |\alpha_j|^{q_1}\Big)^{1/(q_1/q)} \Big(\sum_{j=1}^{m} |\beta_j|^{q_2}\Big)^{1/(q_2/q)}
\end{aligned}$$

e portanto

$$\Big(\sum_{j=1}^{m} |\alpha_j \beta_j|^q\Big)^{1/q} \leq \Big(\sum_{j=1}^{m} |\alpha_j|^{q_1}\Big)^{1/q_1} \Big(\sum_{j=1}^{m} |\beta_j|^{q_2}\Big)^{1/q_2}$$

Agora considere $1/q = 1/q_1 + \ldots + 1/q_n$ e chame $1/p_i = 1/q_i + \ldots + 1/q_n$ para $i = 1, \ldots, n-1$. Então $1/q = 1/q_1 + 1/p_1$, de onde segue que

$$\Big(\sum_{j=1}^{m} |\alpha_{1j}(\alpha_{2j} \ldots \alpha_{nj})|^q\Big)^{1/q} \leq \Big(\sum_{j=1}^{m} |\alpha_{1j}|^{q_1}\Big)^{1/q_1} \Big(\sum_{j=1}^{m} |(\alpha_{2j} \ldots \alpha_{nj})|^{p_1}\Big)^{1/p_1}$$

Como $1/p_1 = 1/q_2 + \ldots + 1/q_n$, temos

$$\Big(\sum_{j=1}^{m} |\alpha_{2j}(\alpha_{3j} \ldots \alpha_{nj})|^{p_1}\Big)^{1/p_1} \leq \Big(\sum_{j=1}^{m} |\alpha_{2j}|^{q_2}\Big)^{1/q_2} \Big(\sum_{j=1}^{m} |(\alpha_{3j} \ldots \alpha_{nj})|^{p_2}\Big)^{1/p_2}$$

e juntando com acima,

$$\Big(\sum_{j=1}^{m}|\alpha_{1j}\dots\alpha_{nj}|^{q}\Big)^{1/q} \leq \Big(\sum_{j=1}^{m}|\alpha_{1j}|^{q_1}\Big)^{1/q_1}\Big(\sum_{j=1}^{m}|\alpha_{2j}|^{q_2}\Big)^{1/q_2}\Big(\sum_{j=1}^{m}|(\alpha_{3j}\dots\alpha_{nj})|^{p_2}\Big)^{1/p_2}$$

e depois de repetir esse processo $n-1$ vezes, obtemos

$$\Big(\sum_{j=1}^{m}|\alpha_{1j}\dots\alpha_{nj}|^{q}\Big)^{1/q} \leq \Big(\sum_{j=1}^{m}|\alpha_{1j}|^{q_1}\Big)^{1/q_1}\dots\Big(\sum_{j=1}^{m}|\alpha_{nj}|^{q_n}\Big)^{1/q_n}$$

Para $1 \leq q \leq p$, sabemos que $\|.\|_p \leq \|.\|_q$. Logo,

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{j=1}^{m}|\alpha_{1j}\dots\alpha_{nj}|^{p}\Big)^{1/p} &\leq \Big(\sum_{j=1}^{m}|\alpha_{1j}|^{q_1}\Big)^{1/q_1}\dots\Big(\sum_{j=1}^{m}|\alpha_{nj}|^{q_n}\Big)^{1/q_n}\\ &\leq \Big(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{1j}|^{q_1}\Big)^{1/q_1}\dots\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{nj}|^{q_n}\Big)^{1/q_n}.\end{aligned}$$

e como isso vale para cada $m \in \mathbb{N}$, seque o resultado. ∎

0.1.4 Definição: Dado X um espaço topológico, dizemos que $f : X \to \mathbb{R}$ é função *semi-contínua inferior* se o conjunto $\{x : f(x) > \lambda\}$ é aberto para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

0.1.5 Definição: Dizemos que $f : E \to \mathbb{R}$ é função *convexa* se para $x, y \in E$ e escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ com $\alpha + \beta = 1$ tem-se $f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$.

0.1.6 Definição: Uma coleção $\mathcal{F}$ de funções reais Φ definidas num conjunto K é chamada *côncava*, se para cada $n \in \mathbb{N}$, $\Phi_1, \dots, \Phi_n \in \mathcal{F}$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ tais que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$, existe $\Phi \in \mathcal{F}$ satisfazendo

$$\Phi(x) \geq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Phi_i(x), \qquad \text{para cada } x \in K.$$

Um exemplo de uma família côncava de funções: sejam $K = [0, \infty[$ e $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$, onde $f_1(x) = x,\ f_2(x) = 2x$. Então, para $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$ e $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, temos:

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 2x = (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_2 x = 1x + \alpha_2 x \leq 2x = f_2(x).$$

0.1.7 Lema (Ky Fan): *Seja K um subconjunto convexo compacto de um espaço vetorial topológico Hausdorff, e seja $\mathcal{F}$ uma coleção côncava de funções reais convexas semi-contínuas inferiores em K. Suponha que para cada $\Phi \in \mathcal{F}$ existe $x \in K$ com $\Phi(x) \leq \varrho$. Então podemos encontrar $x_0 \in K$ tal que $\Phi(x_0) \leq \varrho$ para toda $\Phi \in \mathcal{F}$ simultaneamente.*

A demonstração deste lema pode ser vista em [17] pg 40

0.1.8 Definição: Sejam X um espaço localmente compacto de Hausdorff, e $\mathcal{C}_c(X)$ o espaço das funções de X em $\mathbb{R}$, contínuas na topologia de X, com suporte compacto. Dizemos que um funcional $\phi \in \mathcal{C}_c(X)^*$ é *positivo*, se $\phi(f) \geq 0$ sempre que $f \geq 0$.

0.1.9 Definição: Uma *medida de Radon* em X é uma medida de Borel em X que é finita sobre conjuntos compactos, *regular externa* em conjuntos de Borel E, ie,

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \supset E, U \textit{ aberto}\}$$

e *regular interna* em todo conjunto aberto A, ie,

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \textit{ compacto}\}.$$

0.1.10 Teorema (da representação de Riesz): *Se $0 \leq f \leq 1$ e $\{x \in X : f(x) \neq 0\} \subseteq U$, escrevemos $f \prec U$, e seja χ_K a função característica de K. Se ϕ é um funcional linear positivo em $\mathcal{C}_c(X)$, existe uma única medida de Radon μ em X tal que $\phi(f) = \int f d\mu$ para cada $f \in \mathcal{C}_c(X)$. Além disso, μ satisfaz*

$$\mu(A) = \sup\{\phi(f) : f \in \mathcal{C}_c(X) \text{ e } f \prec U\} \text{ para cada aberto } A \in X,$$

$$\mu(K) = \sup\{\phi(f) : f \in \mathcal{C}_c(X) \text{ e } f \geq \chi_K\} \text{ para cada compacto } K \in X,$$

Mais detalhes podem ser vistos em [5] pg 205.

0.1.11 Teorema (Alaoglu): *Se E é um espaço vetorial normado, a bola unitária fechada $\{\phi \in E' : \|\phi\| = 1\}$ em E' é compacto na topologia fraca*.*

Para mais detalhes, ver [5] pg 162.

0.2 Princípio da reflexividade local

0.2.1 Lema (Auerbach): *Se E for um espaço normado, $\dim E = n < \infty$, então existem $x_1, \ldots, x_n \in E$ e $P_1, \ldots, P_n \in E'$ tais que $\|e_i\| = \|P_i\| = 1$ e $P_i(e_j) = \delta_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq n$, onde δ_{ij} denota o delta de Kronecker.*

A demonstração deste lema pode ser vista em [17], pg 29 B.4.8.

0.2.2 Lema (Nachbin): *Se $f, f_1, f_2, \ldots, f_n$ são funcionais lineares num espaço vetorial, então f é combinação linear de $f_1, f_2, \ldots, f_n$ se e só se*

$$\ker f \supset \ker f_1 \cap \ker f_2 \cap \ldots \cap \ker f_n.$$

A demonstração desse lema pode ser vista em [13] pg 32 lemma 8.

0.2.3 Proposição: *Dados E um espaço normado, e $M \in DimE'$ com $dimM = m$, existem $x_1, x_2, \ldots,\ x_m \in E$ e $a_1, a_2, \ldots,\ a_m \in E'$ tais que $a_i(x_j) = \delta_{ij}$ para $0 \leq i, j \leq m$ e*

$$E = \mathbb{K}x_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}x_m \oplus \bigcap_{i=1}^{m} \ker a_i.$$

Demonstração: Seja $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ uma base de M. Posso supor que $\|a_i\| = 1$, para cada $i = 1, \ldots, m$. Pelo lema 0.2.2, temos que

$$\ker a_i \not\supset \bigcap_{j \neq i} \ker a_j$$

ou seja, existe $x_i \in \bigcap_{j \neq i} \ker a_j$ com $x_i \notin \ker a_i$; em outras palavras, $a_i(x_i) \neq 0$ e $a_j(x_i) = 0$ para cada $j \neq i$, obtendo $\{x_1, \dots, x_m\}$ li. Se $\|a_i(x_i)\| \neq 1$, troco x_i por $x_i/\|a_i(x_i)\|$ e assim $a_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Mostremos que $E = \mathbb{K}x_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}x_m \oplus \bigcap_{i=1}^{m} \ker a_i$. Lembre que $E = \mathbb{K}x_i \oplus \ker a_i$ para $i = 1, \dots, m$. Seja $z \in E = \mathbb{K}x_1 \oplus \ker a_1$:

$$
\begin{aligned}
z = {} & \lambda_1 x_1 + z_1 && , z_1 \in \ker a_1 \subset E = \mathbb{K}x_2 \oplus \ker a_2 \\
= {} & \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + z_2 && , z_2 \in \ker a_1 \bigcap \ker a_2 \subset E = \mathbb{K}x_3 \oplus \ker a_3 \\
\vdots & && \\
= {} & \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{m-1} x_{m-1} + z_{m-1} && , z_{m-1} \in \textstyle\bigcap_{i=1}^{m-1} \ker a_i \subset E = \mathbb{K}x_m \oplus \ker a_m \\
= {} & \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m + z_m && , z_m \in \textstyle\bigcap_{i=1}^{m} \ker a_i.
\end{aligned}
$$
■

Em [2] pg 73 podemos ver as demonstrações dos resultados que seguem:

0.2.4 Lema (Helly): *Dados $M \in \mathrm{Dim}E'$ e $\epsilon > 0$, para cada $\alpha_0 \in E''$, existe $x_0 \in E$ tal que $\|x_0\| \leq (1+\epsilon)\|\alpha_0\|$ e $a(x_0) = \alpha_0(a)$ para cada $a \in M$.*

0.2.5 Lema (Princípio fraco da reflexividade local): *Suponha que $dim D < \infty$. Sejam $S \in \mathcal{L}(D; E'')$ e $M \in \mathrm{Dim}(E')$. Dado $\epsilon > 0$, existe $X \in \mathcal{L}(D; E)$ tal que $\|X\| \leq (1+\epsilon)\|S\|$ e $b(Xu) = (Su)(b)$ para cada $u \in D$ e $b \in M$.*

O lema que segue está em [17] pg 40 E.3.2:

0.2.6 Lema: *Sejam E, D espaços de Banach e suponha que D tem dimensão finita. Sejam $Y \in \mathcal{L}(E'; D')$ e $T \in \mathcal{L}_f(F'; E')$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $X \in \mathcal{L}(D; E)$ tal que $\|X\| \leq (1+\epsilon)\|Y\|$ e $X'T = YT$.*

0.3 A propriedade de aproximação

0.3.1 Definição: Sejam E um espaço vetorial e A um subconjunto. Dizemos que A é *absolutamente convexo* se $\alpha x + \beta y \in A$ para todo $x, y \in A$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ com $|\alpha| + |\beta| \leq 1$.

0.3.2 Definição: Um espaço normado E tem a

1. *propriedade da aproximação* se para cada compacto absolutamente convexo $K \subset E$ e $\epsilon > 0$, existe $T \in \mathcal{L}_f(E;E)$ com $\|x - Tx\| \leq \epsilon$ para cada $x \in K$.

2. *propriedade da aproximação limitada* se para algum $\lambda \in [1, \infty)$ existe uma rede (T_η) com $T_\eta \in \mathcal{L}_f(E;E)$, $\|T_\eta\| \leq \lambda$ e $T_\eta \to id_E$ em $\mathcal{L}_{co}(E;E) = [\mathcal{L}(E;E), \tau_{co}]$.

3. *propriedade da aproximação λ_0-limitada* se vale a propriedade da aproximação limitada para $\lambda = \lambda_0$.

4. *propriedade da aproximação métrica* se vale a propriedade da aproximação limitada para $\lambda = 1$.

As demonstrações dos lemas que seguem são pequenas adaptações das que estão em [17] pg 131 e 132 (10.2.4, 10.2.5 e 10.2.6):

0.3.3 Lema: *Suponha que E tem a propriedade de aproximação limitada. Sejam $M \in \mathrm{Dim}E$ e $\epsilon > 0$. Então existe um operador $A \in \mathcal{L}_f(E;E)$ tal que $\|A\| \leq (1+\epsilon)\lambda$ e $Ax = x$, para cada $x \in M$.*

0.3.4 Lema: *Suponha que F tem a propriedade de aproximação limitada. Sejam $S \in \mathcal{L}_f(E;F)$ e $\epsilon > 0$. Então existem $\lambda \geq 1$ e um operador $B \in \mathcal{L}_f(F;F)$ tal que $\|B\| \leq (1+\epsilon)\lambda$ e $BS = S$.*

0.3.5 Lema: *Suponha que E' tem a propriedade de aproximação limitada. Seja $S \in \mathcal{L}_f(E;F)$ e seja $\epsilon > 0$. Então existem $\lambda \geq 1$ e um operador $X \in \mathcal{L}_f(E;E)$ tal que $\|X\| \leq (1+\epsilon)\lambda$ e $SX = S$.*

Capítulo 1

Aplicações n-lineares $\tau(p;q)$-somantes e $\sigma(p)$-nucleares

1.1 $\mathcal{L}_n$-módulos de aplicações n-lineares

Sejam E_i, F espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. Denotaremos por $\mathcal{L}_n$ a classe de todas as aplicações n-lineares entre espaços de Banach arbitrários. Um *$\mathcal{L}_n$-módulo de aplicações n-lineares* $\mathcal{M}$ é um subconjunto de $\mathcal{L}_n$ tal que as componentes

$$\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F) := \mathcal{M} \cap \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$$

satisfazem as seguintes condições:

(M1) $I_n = 1 \otimes \overset{\text{n vezes}}{\cdots} \otimes 1 \otimes 1 \in \mathcal{M}(\mathbb{K}, \overset{\text{n vezes}}{\ldots}, \mathbb{K}; \mathbb{K})$, onde $I_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 \ldots . \lambda_n$.

(M2) Se $S_1, S_2 \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$, então $S_1 + S_2 \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

(M3) Se $S \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$, $R \in \mathcal{L}(F; G)$ e $T = (T_1, \ldots, T_n)$ onde $T_i \in \mathcal{L}(D_i; E_i)$, então $RST \in \mathcal{M}(D_1, \ldots, D_n; G)$.

Note que a aplicação nula de $E_1 \mathsf{x} \ldots \mathsf{x} E_n$ em F está em $\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$, pois se $R : y \in F \mapsto R(y) := 0 \in F$ e $T = (T_1, \ldots, T_n)$ onde $T_i \in \mathcal{L}(E_i; E_i)$, ela pode ser obtida pela composição RST, que pela propriedade (M3) está em $\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Sob a condição (M3), a propriedade $(M1)$ é equivalente à propriedade $(M1')$:

(M1′) $a_i \in E_i'$ e $y \in F$ implicam $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes y \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

$\vdash (M1) \Leftrightarrow (M1')$

($\Rightarrow$) Como $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes y = (1 \otimes y) \circ I_n \circ (a_1 \otimes 1, \ldots, a_n \otimes 1)$ por $(M3)$ e $(M1)$ segue que $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes y \in \mathcal{M}$.
($\Leftarrow$) Como $I_n = 1 \otimes \overset{\text{n vezes}}{\cdots} \otimes 1 \otimes 1$ por $(M1')$ segue que $I_n \in \mathcal{M}$.

Uma aplicação não negativa $\|.\|_{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M}$ em $\mathbb{K}$ será chamada *quasi-norma* em $\mathcal{M}$ se:
(QN1) $\|I_n\|_{\mathcal{M}} = 1$.
(QN2) Existe uma constante $c_{\mathcal{M}} \geq 1$ tal que $\|S_1 + S_2\|_{\mathcal{M}} \leq c_{\mathcal{M}}(\|S_1\|_{\mathcal{M}} + \|S_2\|_{\mathcal{M}})$ para cada $S_i \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall E_1, \ldots, E_n, F$.
(QN3) $\|RST\|_{\mathcal{M}} \leq \|R\|\|S\|_{\mathcal{M}}\|T_1\| \ldots \|T_n\|$ para $S \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$, $R \in \mathcal{L}(F; G)$ e $T = (T_1, \ldots, T_n)$ onde $T_i \in \mathcal{L}(D_i; E_i)$.

Se a constante $c_{\mathcal{M}}$ for igual a 1, então $\|.\|_{\mathcal{M}}$ é uma norma. Como conseqüência dessa definição temos a seguinte propriedade:

$\vdash$Se $S \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$, então $\|S\| \leq \|S\|_{\mathcal{M}}$:

$$|b(S(x_1, \ldots, x_n))| \leq \|b \otimes 1\|\|S\|_{\mathcal{M}}\|1 \otimes x_1\| \ldots \|1 \otimes x_n\|, \qquad x_1 \in E_i, \ldots, x_n \in E_n, b \in F.$$

Logo

$$\begin{aligned} \|S\| &= \sup_{\|x_i\| \leq 1} \|S(x_1, \ldots, x_n)\|_F \\ &= \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ \|b\| \leq 1}} |b(S(x_1, \ldots, x_n))| \\ &\leq \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ \|b\| \leq 1}} \|b \otimes 1\|\|S\|_{\mathcal{M}}\|1 \otimes x_1\| \ldots \|1 \otimes x_n\| \;=\; \|S\|_{\mathcal{M}}. \end{aligned}$$

Note que a propriedade $(QN1)$ é equivalente a

(QN1′) $\|a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes y\|_{\mathcal{M}} = \|a_1\| \ldots \|a_n\|\|y\|$ para cada $a_i \in E_i'$ e $y \in F$.

$\vdash\Big(\|a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes y\|_{\mathcal{M}} = \|a_1\| \ldots \|a_n\|\|y\|\Big) \Leftrightarrow \Big(\|1 \otimes \overset{\text{n vezes}}{\cdots} \otimes 1 \otimes 1\|_{\mathcal{M}} = 1\Big)$.

($\Rightarrow$) É claro.
($\Leftarrow$) Para $S = a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes y$, já sabemos que $\|a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes y\|_{\mathcal{M}} = \|S\| \leq \|S\|_{\mathcal{M}}$. Por outro lado, temos que $S = (1 \otimes y)I_n(a_1 \otimes 1, \ldots, a_n \otimes 1)$, e por $(QN3)$ tem-se $\|S\|_{\mathcal{M}} \leq \|1 \otimes y\|\|I_n\|_{\mathcal{M}}\|a_1 \otimes 1\| \ldots \|a_n \otimes 1\| = \|y\|1\|a_1\| \ldots \|a_n\|$.

Alguns autores têm chamado de ideais de aplicações n-lineares aos $\mathcal{L}_n$-módulo de aplicações n-lineares aqui definidos, mas por uma analogia com a álgebra preferimos usar a segunda denominação.

Uma quasi-norma $\|.\|_{\mathcal{M}}$ é chamada de *r-norma* $(0 < r \leq 1)$ se vale a *desigualdade r-triangular*

(QN2′) $\|S_1 + S_2\|_{\mathcal{M}}^r \leq \|S_1\|_{\mathcal{M}}^r + \|S_2\|_{\mathcal{M}}^r$ para $S_1, S_2 \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Se $r = 1$, $\|.\|_{\mathcal{M}}$ é chamada de *norma*. Diremos que $[\mathcal{M}, \|.\|_{\mathcal{M}}]$ é um *$\mathcal{L}_n$-módulo r-normado de aplicações n-lineares* ou simplesmente um *$\mathcal{L}_n$-módulo r-normado* se $\mathcal{M}$ for um $\mathcal{L}_n$-módulo de aplicações n-lineares com uma r-norma $\|.\|_{\mathcal{M}}$ tal que todo subespaço vetorial topológico Hausdorff[1] $\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$ seja completo. Se $r = 1$, diremos que $[\mathcal{M}, \|.\|_{\mathcal{M}}]$ é um *$\mathcal{L}_n$-módulo de Banach de aplicações n-lineares* ou apenas *$\mathcal{L}_n$-módulo de Banach* .

O resultado a seguir é muito útil:

1.1.1 Teorema: *Seja $\mathcal{M}$ uma subclasse de $\mathcal{L}_n$ com uma função com valores não negativos $\|.\|_{\mathcal{M}}$ tal que para algum $0 < r \leq 1$ são satisfeitas as seguintes condições:*

(0) $I_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \lambda_1. \ldots .\lambda_n$ está em $\mathcal{M}$ e $\|I_n\|_{\mathcal{M}} = 1$.
(1) Se $S_1, S_2, \ldots \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n;\ F)$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \|S_k\|_{\mathcal{M}}^r < \infty$, então $S = \sum_{k=1}^{\infty} S_k \in \mathcal{M}(E_1, \ldots,$ $E_n;\ F)$ e $\|S\|_{\mathcal{M}}^r \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|S_k\|_{\mathcal{M}}^r$.
(2) $T_i \in \mathcal{L}(D_i; E_i)$, $S \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $R \in \mathcal{L}(F; G)$, implicam $RS(T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{M}(D_1,$ $\ldots,\ D_n;\ G)$ e $\|RST\|_{\mathcal{M}} \leq \|R\|\ \|S\|_{\mathcal{M}}\ \|T_1\| \ldots \|T_n\|$.

Então, $[\mathcal{M}, \|.\|_{\mathcal{M}}]$ é um $\mathcal{L}_n$-módulo r-normado de aplicações n-lineares e se $r = 1$, $[\mathcal{M}, \|.\|_{\mathcal{M}}]$ é um $\mathcal{L}_n$-módulo de Banach de aplicações n-lineares.

Demonstração: Note que (0) implica $M1$ e $QN1$, (2) implica $M3$ e $QN3$ e (1) implica $M2$ e $QN2$. A completude do espaço vetorial topológico Hausdorff $\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$ também segue de (1): seja $(R_k)_{k=1}^{\infty}$ uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$; logo, dado $\epsilon > 0$ existe $J_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que se $k, l \geq J_\epsilon$, então

$$\|R_k - R_l\|_{\mathcal{M}}^r \leq \epsilon.$$

Sejam $T_1 = R_1$, $T_2 = R_2 - R_1$, $\ldots$, $T_k = R_k - R_{k-1}$, então $\sum_{j=1}^{k} T_j = R_k$. Vejamos que a série $\sum_{j=1}^{k} T_j$ é de Cauchy:

$$\| \sum_{j=1}^{k} T_j - \sum_{j=1}^{l} T_j \|_{\mathcal{M}}^r \leq \|R_k - R_l\|_{\mathcal{M}}^r \leq \epsilon$$

para $k, l \geq J_\epsilon$. A seguir considere uma seqüência de naturais $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ tais que $n_k \leq n_{k+1}$ para cada k satisfazendo

[1]Como $[\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F), \|.\|]$ é sempre Hausdorff e $\|.\| \leq \|.\|_{\mathcal{M}}$, segue que $[\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F), \|.\|_{\mathcal{M}}]$ é sempre Hausdorff.

$$\underbrace{\| \sum_{j=1}^{n_{k+1}} T_j - \sum_{j=1}^{n_k} T_j \|_{\mathcal{M}}^r}_{S_k} \leq \epsilon/2^k$$

Então, $\sum_{k=1}^{\infty} \|S_k\|_{\mathcal{M}}^r \leq \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon/2^k = \epsilon < \infty$. Tem-se que $S = \sum_{k=1}^{\infty} S_k \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e que $\|S\|_{\mathcal{M}}^r \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|S_k\|_{\mathcal{M}}^r < \epsilon$, por (1). Como

$$S \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} S_k \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\sum_{j=1}^{n_{k+1}} T_j - \sum_{j=1}^{n_k} T_l \Big] \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} T_j \Big) \;=\; \sum_{j=n_1+1}^{\infty} T_j,$$

se $R = \sum_{j=1}^{n_1} T_j + S \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$ com $k \geq n_1 \geq J_\epsilon$, então

$$\begin{aligned} \|R_k - R\|_{\mathcal{M}}^r &= \Big\| \sum_{j=1}^{k} T_j - \Big(\sum_{j=1}^{n_1} T_j + S \Big) \Big\|_{\mathcal{M}}^r \\ &\leq \Big\| \sum_{j=1}^{k} T_j - \sum_{j=1}^{n_1} T_j \Big\|_{\mathcal{M}}^r + \|S\|_{\mathcal{M}}^r \\ (k, n_1 \geq J_\epsilon) &< \epsilon + \epsilon \end{aligned}$$

seguindo a completude do espaço. ∎

Mostra-se facilmente que as aplicações $\mathcal{L}_f$ de tipo finito formam um $\mathcal{L}_n$-módulo de aplicações n-lineares e estão contidas em todo $\mathcal{L}_n$-módulo de aplicações n-lineares $\mathcal{M}$.

1.2 Aplicações n-lineares $\tau(p;q)$-somantes

Para uma aplicação multilinear $S \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $1 \leq q \leq p$, diremos que S é $\tau(p;q)$-*somante* se existe uma constante $C \geq 0$ tal que para quaisquer $m \in \mathbb{N}$, $x_{ij} \in E_i$, $b_j \in F'$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$ vale a desigualdade seguinte:

$$\Big(\sum_{j=1}^{m} |b_j(S(x_{1j}, \ldots, x_{nj}))|^p \Big)^{1/p} \leq C \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{m} |a_1(x_{1j}) \ldots a_n(x_{nj}) b_j(y)|^q \Big)^{1/q}$$

ou equivalentemente, por 0.1.1

$$\Big(\sum_{j=1}^{m} |b_j(S(x_{1j}, \ldots, x_{nj}))|^p \Big)^{1/p} \leq C \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|\beta\| \leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{m} |a_1(x_{1j}) \ldots a_n(x_{nj}) \beta(b_j)|^q \Big)^{1/q}.$$

onde $a_i \in E_i'$, $y \in F$ e $\beta \in F''$. Denotaremos o conjunto das aplicações n-lineares $\tau(p;q)$-somantes de $E_1 \mathsf{x} \ldots \mathsf{x} E_n$ em F por $\mathcal{L}_{\tau(p;q)}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e nela definimos a norma $\|S\|_{\tau(p;q)} := \inf C$ para a constante que aparece na expressão acima.

Observe que se $p < q$ e S é $\tau(p;q)$-somante, então $S = 0$. Fixe $x_1 \in E_1,\ \ldots,\ x_n \in E_n, b \in F'$ e considere $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{nq} \setminus l_{np}$. Sejam $x_{ij} = x_i \in E_i$, $b_j = b \in F'$, para $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Então:

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{j=1}^{m} |\lambda_j|^{np}\Big)^{1/p} |bS(x_1, \ldots, x_n)| &= \Big(\sum_{j=1}^{m} |\lambda_j^n bS(x_1, \ldots, x_n)|^p\Big)^{1/p} \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{m} |bS(\lambda_j x_1, \ldots, \lambda_j x_n)|^p\Big)^{1/p} \\
(S \in \mathcal{L}_{\tau(p;q)}(E_1, \ldots, E_n; F)) \quad &\leq C \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{m} |a_1(\lambda_j x_1) \ldots a_n(\lambda_j x_n) b(y)|^q\Big)^{1/q} \\
&= C \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{m} |\lambda_j|^{nq} |a_1(x_1) \ldots a_n(x_n) b(y)|^q\Big)^{1/q} \\
&= C \Big(\sum_{j=1}^{m} |\lambda_j|^{nq}\Big)^{1/q} \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |a_1(x_1) \ldots a_n(x_n) b(y)| \\
&= C \Big(\sum_{j=1}^{m} |\lambda_j|^{nq}\Big)^{1/q} \|x_1\| \ldots \|x_n\| \|b\|
\end{aligned}$$

então

$$\Big(\sum_{j=1}^{m} |\lambda_j|^{np}\Big)^{1/np} \underbrace{\Big(|b_j S(x_1, \ldots, x_n)|\Big)^{1/n}}_{\text{constante}} \leq \Big(\sum_{j=1}^{m} |\lambda_j|^{nq}\Big)^{1/nq} \underbrace{\Big(C\|x_1\| \ldots \|x_n\| \|b\|\Big)^{1/n}}_{\text{constante}}.$$

Como $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{nq} \setminus l_{np}$, para um m grande o suficiente teremos que

$$\Big(\sum_{j=1}^{m} |\lambda_j|^{np}\Big)^{1/np} \underbrace{\Big(|b_j S(x_1, \ldots, x_n)|\Big)^{1/n}}_{\text{constante}} > \Big(\sum_{j=1}^{m} |\lambda_j|^{nq}\Big)^{1/nq} \underbrace{\Big(C\|x_1\| \ldots \|x_n\| \|b\|\Big)^{1/n}}_{\text{constante}},$$

que só vale se S for identicamente nula. Sendo assim, de agora em diante trabalharemos sempre com $p \geq q$.

Usando 1.1.1 mostraremos que $\mathcal{L}_{\tau(p;q)}$ com $\|.\|_{\tau(p;q)}$ é $\mathcal{L}_n$-módulo de Banach de aplicações n-lineares.

$\vdash(0)$: Mostraremos que $I_n \in \mathcal{L}_{\tau(p;q)}$ e que $\|I_n\|_{\tau(p;q)} = 1$. Note que

$$\Big(\sum_{j=1}^{m} |\gamma_j (I_n(\lambda_{1j}, \ldots, \lambda_{nj}))|^p\Big)^{1/p} = \Big(\sum_{j=1}^{m} |\gamma_j \lambda_{1j}. \ldots .\lambda_{nj}|^p\Big)^{1/p}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(\sum_{j=1}^{m} |1.\lambda_{1j}.\ldots.1.\lambda_{nj}.\gamma_j.1|^p\Big)^{1/p} \\
(p \geq q \Rightarrow \|.\|_p \leq \|.\|_q) \quad &\leq \sup_{\substack{\|a_i\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{m} |a_1.\lambda_{1j}.\ldots a_n.\lambda_{nj}.\gamma_j.y|^q\Big)^{1/q}
\end{aligned}
$$

para quaisquer $\gamma_j \in \mathbb{K}$, $\lambda_{ij} \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$ $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$, ou seja I_n é $\tau(p;q)$-somante e $\|I_n\|_{\tau(p;q)} \leq 1$. Como $1 = \inf C$, então $\|I_n\|_{\tau(p;q)} = 1$.

$\vdash(1)$: Sejam $S_1, S_2, \ldots \in \mathcal{L}_{\tau(p;q)}(E_1, \ldots, E_n; F)$ tais que $\sum_{k=1}^{\infty} \|S_k\|_{\tau(p;q)} < \infty$. Para cada S_k sabemos que

$$
\Big(\sum_{j=1}^{m} |b_j(S_k(x_{1j}, \ldots, x_{nj}))|^p\Big)^{1/p} \leq \|S_k\|_{\tau(p;q)} \sup_{\substack{\|a_i\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{m} |a_1(x_{1j})\ldots a_n(x_{nj})b_j(y)|^q\Big)^{1/q}.
$$

Para $S = \sum_{k=1}^{\infty} S_k$ e $m \in \mathbb{N}$, temos que:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m}\Big(|b_j(S(x_{1j}, \ldots, x_{nj}))|^p\Big)^{1/p} &= \Big(\sum_{j=1}^{m} |b_j(\sum_{k=1}^{\infty} S_k(x_{1j}, \ldots, x_{nj}))|^p\Big)^{1/p} \\
\text{(des. triangular)} \quad &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{m} |b_j(S_k(x_{1j}, \ldots, x_{nj}))|^p\Big)^{1/p} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\Big[\|S_k\|_{\tau(p;q)} \sup_{\substack{\|a_i\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{m} |a_1(x_{1j})\ldots a_n(x_{nj})b_j(y)|^q\Big)^{1/q}\Big] \\
&= \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \|S_k\|_{\tau(p;q)}\Big)\Big[\sup_{\substack{\|a_i\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{m} |a_1(x_{1j})\ldots a_n(x_{nj})b_j(y)|^q\Big)^{1/q}\Big]
\end{aligned}
$$

de onde segue que $S \in \mathcal{L}_{\tau(p;q)}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\|S\|_{\tau(p;q)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|S_k\|_{\tau(p;q)}$.

$\vdash(2)$: A seguir considere as transformações lineares $T_i : D_i \longrightarrow E_i$ para $i = 1, \ldots, n$ e $R : F \longrightarrow G$ linear contínua, onde $D_1, \ldots, D_n$ e G são espaços de Banach. Vejamos que $RS(T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}_{\tau(p;q)}(D_1, \ldots, D_n; G)$ para $S \in \mathcal{L}_{\tau(p;q)}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Fixado $m \in \mathbb{N}$, considere $u_{ij} \in D_i,\ c_j \in G'$ $i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m$:

$$
\begin{aligned}
\Big(\sum_{j=1}^{m}|c_j(RS(T_1, \ldots, T_n)(u_{1j}, \ldots, u_{nj}))|^p\Big)^{1/p} &= \Big(\sum_{j=1}^{m} |(R'c_j)(S(T_1u_{1j}, , \ldots, T_nu_{nj}))|^p\Big)^{1/p} \\
(S \in \mathcal{L}_{\tau(p;q)}(E_1, \ldots, E_n; F)) \quad &\leq \|S\|_{\tau(p;q)} \sup_{\substack{\|a_i\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{m} |a_1(T_1u_{1j})\ldots a_n(T_nu_{nj})(R'c_j)(y)|^q\Big)^{1/q} \\
= \|T_1\|\ldots\|T_n\|\ \|S\|_{\tau(p;q)} &\sup_{\substack{\|a_i\|\leq 1 \\ \|y\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=1}^{m} \Big|a_1\Big(\frac{T_1}{\|T_1\|}u_{1j}\Big)\ldots a_n\Big(\frac{T_n}{\|T_n\|}u_{nj}\Big)c_j\,(Ry)\Big|^q\Big)^{1/q}
\end{aligned}
$$

$$= \|T_1\|\ldots\|T_n\|\ \|R\|\ \|S\|_{\tau(p;q)} \sup_{\substack{\|a_i\|\leq 1\\ \|y\|\leq 1}} \left(\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{T_1'}{\|T_1\|}a_1(u_{1j})\ldots\frac{T_n'}{\|T_n\|}a_n(u_{nj})c_j\left(\frac{R}{\|R\|}y\right)\right|^q\right)^{1/q}$$

$$\leq \|T_1\|...\|T_n\|\ \|R\|\ \|S\|_{\tau(p;q)} \sup_{\substack{\|v_i\|\leq 1\\ \|z\|\leq 1}} \left(\sum_{j=1}^{m}|v_1(u_{1j})...v_n(u_{nj})c_j(z)|^q\right)^{1/q}.$$

Portanto $RS(T_1,\ldots,T_n)$ é $\tau(p;q)$-somante, e

$$\|RS(T_1,\ldots,T_n)\|_{\tau(p;q)} \leq \|R\|\ \|S\|_{\tau(p;q)}\ \|T_1\|\ldots\|T_n\|.$$

Pelo teorema 1.1.1 temos então que $\mathcal{L}_{\tau(p;q)}$ com a norma $\|.\|_{\tau(p;q)}$ é $\mathcal{L}_n$-módulo normado de aplicações n-lineares. Como conseqüência temos que $\|S\| \leq \|S\|_{\tau(p;q)}$ e que se $S = a_1\otimes\cdots\otimes a_n\otimes y$, tem-se $\|S\|_{\tau(p;q)} = \|a_1\|\ldots\|a_n\|\|y\|$. Quando tivermos $p = q$, escreveremos $\mathcal{L}_{\tau(p)}$ e $\|S\|_{\tau(p)}$ ao invés de $\mathcal{L}_{\tau(p;p)}$ e $\|S\|_{\tau(p;p)}$, respectivamente e diremos que S é $\tau(p)$-somante, e se $p = q = 1$, escreveremos $\mathcal{L}_\tau$ e $\|S\|_\tau$ ao invés de $\mathcal{L}_{\tau(1)}$ e $\|S\|_{\tau(1)}$, respectivamente e diremos que S é τ-somante. Observe que se $1 \leq s \leq r \leq q \leq p$, então

$$\mathcal{L}_{\tau(q;r)} \subseteq \mathcal{L}_{\tau(p;s)},$$

pois, se $S \in \mathcal{L}_{\tau(q;r)}$, temos que

$$\left(\sum_{j=1}^{m}|b_j(S(x_{1j},\ldots,x_{nj}))|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{m}|b_j(S(x_{1j},\ldots,x_{nj}))|^q\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq C \sup_{\substack{\|a_i\|\leq 1\\ \|y\|\leq 1}} \left(\sum_{j=1}^{m}|a_1(x_{1j})\ldots a_n(x_{nj})b_j(y)|^r\right)^{1/r} \leq C \sup_{\substack{\|a_i\|\leq 1\\ \|y\|\leq 1}} \left(\sum_{j=1}^{m}|a_1(x_{1j})\ldots a_n(x_{nj})b_j(y)|^s\right)^{1/s}.$$

Além disso, das desigualdades acima segue que

$$\|S\|_{\tau(p;r)} \leq \|S\|_{\tau(q;r)},\quad \forall S \in \mathcal{L}_{\tau(q;r)} \subseteq \mathcal{L}_{\tau(p;r)} \quad \text{e} \quad \|S\|_{\tau(q;s)} \leq \|S\|_{\tau(q;r)},\quad \forall S \in \mathcal{L}_{\tau(q;r)} \subseteq \mathcal{L}_{\tau(q;s)}.$$

Pelo lema 0.1.1 temos que se S é $\tau(p;q)$-somante, então

$$\left(\sum_{j=1}^{m}|b_j(S(x_{1j},\ldots,x_{nj}))|^p\right)^{1/p} \leq C \sup_{\substack{\|a_i\|\leq 1\\ \|\beta\|\leq 1}} \left(\sum_{j=1}^{m}|a_1(x_{1j})\ldots a_n(x_{nj})\beta(b_j)|^q\right)^{1/q}.$$

Esta desigualdade será útil mais tarde, e para mostrar uma relação entre aplicações $\tau(p;q)$-somantes e aplicações absolutamente $(p;q_1,\ldots,\ q_n)$-somantes:

Lembre que uma aplicação n-linear $T \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ é *absolutamente* $(p;q_1,\ldots,\ q_n)$-*somante* se $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q_1} + \ldots + \frac{1}{q_n}$, e se existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\forall m,n \in \mathbb{N}$, $\forall x_{ij} \in E_i$, $i = 1,\ldots,n$ e $j = 1,\ldots,m$

$$\Big(\sum_{j=1}^{m}\|T(x_{1j},\ldots,x_{nj})\|^p\Big)^{1/p}\le C\prod_{i=1}^{n}\sup_{\|a_i\|\le 1}\Big(\sum_{j=1}^{m}|a_i(x_{ij})|^{q_i}\Big)^{1/q_i}.$$

Pela desigualdade de Hölder generalizada, se $\frac{1}{q}\le\frac{1}{q_1}+\ldots+\frac{1}{q_n}$, então

$$\Big(\sum_{j=1}^{m}(\|x_{1j}\|\ldots\|x_{nj}\|)^q\Big)^{1/q}\le\Big(\sum_{j=1}^{m}\|x_{1j}\|^{q_1}\Big)^{1/q_1}\ldots\Big(\sum_{j=1}^{m}\|x_{nj}\|^{q_n}\Big)^{1/q_n}.$$

Dada $S\in\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$, podemos definir $S_F\in\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n,F';\mathbb{K})$ por

$$S_F(x_1,\ldots,x_n,b):=bS(x_1,\ldots,x_n).$$

Segue que se $\frac{1}{q}=\frac{1}{q_1}+\ldots+\frac{1}{q_n}+\frac{1}{q_{n+1}}$ e se S é $\tau(p;q)$-somante,

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{j=1}^{m}|S_F(x_{1_j},\ldots,x_{n_j},b_j)|^p\Big)^{1/p} &= \Big(\sum_{j=1}^{m}|b_jS(x_{1_j},\ldots,x_{n_j})|^p\Big)^{1/p}\\
&\le C\sup_{\substack{\|a_i\|\le 1\\ \|y\|\le 1}}\Big(\sum_{j=1}^{m}|a_1(x_{1j})\ldots a_n(x_{nj})b_j(y)|^q\Big)^{1/q}\\
(\text{Hölder})\quad &\le C\sup_{\substack{\|a_i\|\le 1\\ \|y\|\le 1}}\Big(\sum_{j=1}^{m}|a_1(x_{1j})^{q_1}\Big)^{1/q_1}\ldots\Big(\sum_{j=1}^{m}|a_n(x_{nj})|^{q_n}\Big)^{1/q_n}\Big(\sum_{j=1}^{m}|b_j(y)|^{q_{n+1}}\Big)^{1/q_{n+1}}\\
(\text{ por } 0.1.1)\quad &= C\sup_{\substack{\|a_i\|\le 1\\ \|\beta\|\le 1}}\Big(\sum_{j=1}^{m}|a_1(x_{1j})^{q_1}\Big)^{1/q_1}\ldots\Big(\sum_{j=1}^{m}|a_n(x_{nj})|^{q_n}\Big)^{1/q_n}\Big(\sum_{j=1}^{m}|\beta(b_j)|^{q_{n+1}}\Big)^{1/q_{n+1}}.
\end{aligned}$$

ou seja, $S\in\mathcal{L}_{\tau(p;q)}(E_1,\ldots,E_n;F)\Rightarrow S_F\in\mathcal{L}_{as(p;q_1,\ldots,q_n,q_{n+1})}(E_1,\ldots,E_n,F';\mathbb{K})$.

1.3 O teorema da dominação para aplicações n-lineares $\tau(p)$-somantes

1.3.1 Teorema (da dominação para aplicações n-lineares $\tau(p)$-somantes): *Seja $1\le p<\infty$. Uma aplicação $S\in\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ é $\tau(p)$-somante se e só se existem uma constante $\sigma\ge 0$ e $\mu\in W(B_{E_1'}\text{x}\ldots\text{x}B_{E_n'}\text{x}B_{F''})$, o conjunto das probabilidades de Borel em $B_{E_1}\text{x}\ldots\text{x}B_{E_n}$, tais que*

$$|b(S(x_1,\ldots,x_n))|\le\sigma\Big(\int_{B_{E_1'}\text{x}\ldots\text{x}B_{E_n'}\text{x}B_{F''}}|a_1(x_1)\ldots a_n(x_n)\beta(b)|^q d\mu(a_1,\ldots,a_n,\beta)\Big)^{1/q},$$

para cada $x_i\in E_i$ e cada $b\in F'$.

Demonstração:

$$(\Rightarrow)\qquad \Big(\sum_{j=1}^{m}|b_j(S(x_{1j},\dots,x_{nj}))|^p\Big)^{1/p}\leq$$

$$\text{(por Hölder)} \leq \Big\{\sum_{j=1}^{m}\Big[\sigma\Big(\int_{B_{E_1'}\times\ldots\times B_{E_n'}\times B_{F''}}|a_1(x_{1j})\dots a_n(x_{nj})\beta(b_j)|^p\ d\mu(a_1,\dots,a_n,\beta)\Big)^{1/p}\Big]^p\Big\}^{1/p}$$

$$\text{(soma finita } \Rightarrow) = \sigma\Big\{\int_{B_{E_1'}\times\ldots\times B_{E_n'}\times B_{F''}}\sum_{j=1}^{m}|a_1(x_{1j})\dots a_n(x_{nj})\beta(b_j)|^p\ d\mu(a_1,\dots,a_n,\beta)\Big\}^{1/p}$$

$$\leq \sigma\Big\{\int_{B_{E_1'}\times\ldots\times B_{E_n'}\times B_{F''}}\sup_{\substack{\|a_i\|\leq 1\\ \|\beta\|\leq 1}}\sum_{j=1}^{m}|a_1(x_{1j})\dots a_n(x_{nj})\beta(b_j)|^p d\mu(a_1,\dots,a_n,\beta)\Big\}^{1/p}$$

$$= \sigma\sup_{\substack{\|a_i\|\leq 1\\ \|\beta\|\leq 1}}\Big\{\sum_{j=1}^{m}|a_1(x_{1j})\dots a_n(x_{nj})\beta(b_j)|^p\Big\}^{1/p}.$$

($\Leftarrow$) Supondo que $S\in\mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1,\dots,E_n;F)$, fixe $\sigma=\|S\|_{\tau(p)}$. Considere $C(B_{E_1'}\times\ldots\times B_{E_n'}\times B_{F''})'$ (dual do conjunto das funções contínuas) com a topologia $C(B_{E_1'}\times\ldots\times B_{E_n'}\times B_{F''})$-fraca. Então $W(B_{E_1'}\times\ldots\times B_{E_n'}\times B_{F''})$ é subconjunto convexo e compacto[2]. Para qualquer família finita de elementos $x_{i1},\dots,x_{im}\in E_i$ e funcionais $b_1,\dots,b_m\in F'$ a equação

$$\phi(\mu):=\sum_{j=1}^{m}\Big\{|b_j(S(x_{1j},\dots,x_{nj}))|^p-\sigma^p\int_{B_{E_1'}\times\ldots\times B_{E_n'}\times B_{F''}}|a_1(x_{1j})\dots a_n(x_{nj})\beta(b_j)|^p d\mu(a_1,\dots,a_n,\beta)\Big\}$$

define uma função real convexa e contínua ϕ sobre $W(B_{E_1'}\times\ldots\times B_{E_n'}\times B_{F''})$. Escolha $a_{10}\in B_{E_1'},\dots,\ a_{n0}\in B_{E_n'}$ e $\beta_0\in B_{F''}$[3] tais que

$$\sup\Big\{\sum_{j=1}^{m}|a_1(x_{1j})\dots a_n(x_{nj})\beta(b_j)|^p:\|a_i\|,\|\beta\|\leq 1\Big\}=\sum_{j=1}^{m}|a_{10}(x_{1j})\dots a_{n0}(x_{nj})\beta_0(b_j)|^p.$$

Se $\delta(a_{10},\dots,a_{n0},\beta_0)$ denota a medida de Dirac no ponto $(a_{10},\dots,a_{n0},\beta_0)$, então temos

$$\phi(\delta(a_{10},\dots,a_{n0},\beta_0))=\sum_{j=1}^{m}|b_j(S(x_{1j},\dots,x_{nj}))|^p-\sigma^p|a_{10}(x_{1j})\dots a_{n0}(x_{nj})\beta_0(b_j)|^p\leq 0.$$

$\vdash$A coleção $\mathcal{F}$ das funções obtidas desta forma é côncava:

Uma coleção de funções é côncava se para cada natural K, $\phi_1,\dots,\phi_K\in\mathcal{F}$, $0\leq\lambda_1,\dots,\lambda_K\leq 1$ com $\sum_{k=1}^{K}\lambda_k=1$, então $\sum_{k=1}^{K}\lambda_k\phi_k\leq\phi$, para alguma $\phi\in\mathcal{F}$. Chame $U=B_{E_1'}\times\ldots\times B_{E_n'}\times B_{F''}$, e onsidere as aplicações

---

[2]Pelo teorema da representação de Riesz 0.1.10, $W(B_{E_1'}\times\ldots\times B_{E_n'}\times B_{F''})$ é isomorfo a $B_{[C(B_{E_1'}\times\ldots\times B_{E_n'}\times B_{F''})]'}$; por Alaoglu 0.1.11, este último é compacto na topologia considerada, e claramente é convexo.

[3]Isso é possivel, uma vez que os $B_{E_1'},\dots B_{E_n'},B_{F''}$ são compactos

$$\phi_k(\mu) := \sum_{j=1}^{m_k}\Big\{|b_j^k(S(x_{1j}^k,\ldots,x_{nj}^k))| - \sigma^p\int_U |a_1(x_{1j}^k)\ldots a_n(x_{nj}^k)\beta(b_j^k)|d\mu(a_1,\ldots,a_n,\beta)\Big\}$$

onde $x_{ij}^k \in E_i$ e $b_j^k \in F'$ para cada $k=1,\ldots,K,\ i=1,\ldots,n$ e $j=1,\ldots,m_k$. Logo,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^K \lambda_k\phi_k &= \sum_{k=1}^K \lambda_k \sum_{j=1}^{m_k}\Big\{|b_j^k(S(x_{1j}^k,\ldots,x_{nj}^k))| - \sigma^p\int_U |a_1(x_{1j}^k)\ldots a_n(x_{nj}^k)\beta(b_j^k)|d\mu(a_1,\ldots,a_n,\beta)\Big\}\\ &= \sum_{k=1}^K\sum_{j=1}^{m_k}\Big\{|(\lambda_k b_j^k)(S(x_{1j}^k,\ldots,x_{nj}^k))| - \sigma^p\int_U |a_1(x_{1j}^k)\ldots a_n(x_{nj}^k)\beta(\lambda_k b_j^k)|d\mu(a_1,\ldots,a_n,\beta)\Big\}\end{aligned}$$

que foi gerada por $x_{ij}^k,\ \lambda_k b_j^k$ para $k=1,\ldots,K,\ i=1,\ldots,n$ e $j=1,\ldots,m_k$, e pertence a $\mathcal{F}$, mostrando que é coleção côncava.

Pelo Lema de Ky Fan 0.1.7, existe uma medida $\mu_0 \in W(B_{E_1'}\times\ldots\times B_{E_n'}\times B_{F''})$ tal que $\phi(\mu_0)\leq 0,\ \forall\phi\in\mathcal{F}$ simultaneamente. Em particular, se ϕ é gerada por $x_1,\ldots,x_n$ e b, isto é

$$\phi(\mu) := \Big\{|b(S(x_1,\ldots,x_n))|^p - \sigma^p\int_{B_{E_1'}\times\ldots\times B_{E_n'}\times B_{F''}} |a_1(x_1)\ldots a_n(x_n)\beta(b)|^p d\mu(a_1,\ldots,a_n,\beta)\Big\}$$

segue que

$$|b(S(x_1,\ldots,x_n))|^p - \sigma^p\int_{B_{E_1'}\times\ldots\times B_{E_n'}\times B_{F''}} |a_1(x_1)\ldots a_n(x_n)\beta(b)|^p \quad d\mu_0(a_1,\ldots,a_n,\beta)\leq 0.$$

Logo

$$|b(S(x_1,\ldots,x_n))|^p \leq \sigma^p \textstyle\int_{B_{E_1'}\times\ldots\times B_{E_n'}\times B_{F''}} |a_1(x_1)\ldots a_n(x_n)\beta(b)|^p \quad d\mu_0(a_1,\ldots,a_n,\beta)$$

e daí

$$|b(S(x_1,\ldots,x_n))| \leq \sigma\Big(\textstyle\int_{B_{E_1'}\times\ldots\times B_{E_n'}\times B_{F''}} |a_1(x_1)\ldots a_n(x_n)\beta(b)|^p \quad d\mu_0(a_1,\ldots,a_n,\beta)\Big)^{1/p}. \qquad \blacksquare$$

Lembremos a seguinte definição. Uma aplicação n-linear $S\in\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ é dita *p-semi-integral* (ver [1] pg 10 ou [15] pg 98) se existem uma constante $C\geq 0$ e uma medida regular de probabilidade $\mu\in W(B_{E_1'}\times\ldots\times B_{E_n'})$ tais que

$$\|S(x_1,\ldots,x_n)\| \leq C\Big(\int_{B_{E_1'}\times\ldots\times B_{E_n'}} |a_1(x_1)\ldots a_n(x_n)|^p \quad d\mu(a_1,\ldots,a_n)\Big)^{1/p} \quad \forall x_i\in E_i.$$

Seja ν medida regular de probabilidade dada por $\nu(C)=\mu(C\times B_{F''})$ para cada C subconjunto Boreliano de $B_{E_1'}\times\ldots\times B_{E_n'}$. Segue que se $S\in\mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F)$, então

$$\begin{aligned}
|bS(x_1,\ldots,x_n)| &= |b(S(x_1,\ldots,x_n))| \\
&\leq \sigma\Big(\int_{B_{E_1'}\mathsf{x}\ldots\mathsf{x}B_{E_n'}\mathsf{x}B_{F''}} |a_1(x_1)\ldots a_n(x_n)\beta(b)|^p \; d\mu(a_1,\ldots,a_n,\beta)\Big)^{1/p} \\
&\leq \sigma\Big(\int_{B_{E_1'}\mathsf{x}\ldots\mathsf{x}B_{E_n'}\mathsf{x}B_{F''}} |a_1(x_1)\ldots a_n(x_n)|^p\|\beta\|^p\|(b)|^p \; d\mu(a_1,\ldots,a_n,\beta)\Big)^{1/p} \\
&\leq \|b\|\sigma\Big(\int_{B_{E_1'}\mathsf{x}\ldots\mathsf{x}B_{E_n'}} |a_1(x_1)\ldots a_n(x_n)|^p \; d\nu(a_1,\ldots,a_n)\Big)^{1/p}, \; \forall x_i \in E_i.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\|S(x_1,\ldots,x_n)\| &= \sup_{\|b\|\leq 1} |bS(x_1,\ldots,x_n)| \\
&\leq \sup_{\|b\|\leq 1} \|b\|\sigma\Big(\int_{B_{E_1'}\mathsf{x}\ldots\mathsf{x}B_{E_n'}} |a_1(x_1)\ldots a_n(x_n)|^p \; d\nu(a_1,\ldots,a_n)\Big)^{1/p} \\
&\leq \sigma\Big(\int_{B_{E_1'}\mathsf{x}\ldots\mathsf{x}B_{E_n'}} |a_1(x_1)\ldots a_n(x_n)|^p \; d\nu(a_1,\ldots,a_n)\Big)^{1/p} \forall x_i \in E_i
\end{aligned}$$

ou seja, S é p-semi-integral, ie $\mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F) \subseteq \mathcal{L}_{si(p)}(E_1,\ldots,E_n;F)$. Observe que se $F=\mathbb{K}$, também vale $\mathcal{L}_{si(p)}(E_1,\ldots,E_n;F) \subseteq \mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1,\ldots,E_n;F)$.

1.4 Aplicações n-lineares $\sigma(p)$-nucleares

Sejam D_i, E_i, F, G espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. Diremos que uma aplicação multilinear $S: E_1\mathsf{x}\ldots\mathsf{x}E_n \to F$ é *$\sigma(p)$-nuclear*, se admite uma representação da forma

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_{1j} \otimes \cdots \otimes a_{nj} \otimes y_j$$

com $\lambda_j \in \mathbb{K}$, $a_{ij} \in E_i'$, $y_j \in F$, $i = 1,\ldots,n$ e $j \in \mathbb{N}$, onde $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{p'}$ e

$$\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \Big(\textstyle\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p} < \infty$$

com

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \Big(\textstyle\sum_{j=m}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p} = 0.$$

Observe que $x_i \in E_i$ e $b \in F'$. Denotaremos o conjunto dessas aplicações por $\mathcal{L}_{\sigma(p)}(E_1,\ldots,E_n;F)$ e nele definimos a seguinte norma:

$$\|S\|_{\sigma(p)} = \inf_{\substack{\text{representações} \\ de \ S}} \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'} \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p}.$$

A seguir, usando o teorema 1.1.1 mostraremos que a classe $\mathcal{L}_{\sigma(p)}$ de todas as aplicações n-lineares $\sigma(p)$-nucleares sobre espaços de Banach com a norma $\|.\|_{\sigma(p)}$ é $\mathcal{L}_n$-módulo de Banach de aplicações n-lineares.

$\vdash$(0): Veja que $I_n \in \mathcal{L}_{\sigma(p)}$, pois para $I_n = 1.1\otimes \overset{\text{n vezes}}{\cdots} \otimes 1 \otimes 1$, temos $\sup_{\substack{\|\lambda_i\|\leq 1 \\ \|\gamma\|\leq 1}} |1.1(\lambda_1).\dots.1(\lambda_n)\gamma(1)| \leq 1$; como para $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \gamma = 1$ tem-se a igualdade, vemos que $\|I_n\|_{\sigma(p)} = 1$.

$\vdash$(1): Sejam $S_1, S_2, \dots \in \mathcal{L}_{\sigma(p)}(E_1, \dots, E_n; F)$ tais que $\sum_{k=1}^{\infty} \|S_k\|_{\sigma(p)} < \infty$, e considere representações tais que para cada k, $S_k = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^k a_{1j}^k \otimes \dots \otimes a_{nj}^k \otimes y_j^k$ com

$$\|(\lambda_j^k)_{j=1}^{\infty}\|_{p'} \ \leq \ \Big[(1+\epsilon)\|S_k\|_{\sigma(p)}\Big]^{1/p'}$$

e

$$\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}^k(x_1)\dots a_{nj}^k(x_n)b(y_j^k)|^p\Big)^{1/p} \ \leq \ \Big[(1+\epsilon)\|S_k\|_{\sigma(p)}\Big]^{1/p}. \tag{1.4.0:eq1}$$

Isto é possível, pois se

$$C_1 \ = \ \|(\lambda_j^k)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}$$

e

$$C_2 \ = \ \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}^k(x_1)\dots a_{nj}^k(x_n)b(y_j^k)|^p\Big)^{1/p},$$

podemos considerar nova representação trocando

$$\lambda_j^k \ \text{ por } \ \frac{\lambda_j^k C_2}{\Big((1+\epsilon)\|S_k\|_{\sigma(p)}\Big)^{1/p}} \quad \text{e} \quad y_j^k \ \text{ por } \ \frac{y_j^k C_1}{\Big((1+\epsilon)\|S_k\|_{\sigma(p)}\Big)^{1/p'}}$$

satisfazendo então as desigualdades citadas acima. Segue que

$$\begin{aligned}
\|(\lambda_j^k)_{j,k=1}^{\infty}\|_{p'} \ &:= \ (\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j^k|^{p'})^{1/p'} \ = \ \Big[\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\Big[\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j^k|^{p'}\Big]^{1/p'}\Big)^{p'}\Big]^{1/p'} \ \leq \\
&\leq \ \Big[\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\Big[(1+\epsilon)\|S_k\|_{\sigma(p)}\Big]^{1/p'}\Big)^{p'}\Big]^{1/p'} \ = \ (1+\epsilon)^{1/p'}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\|S_k\|_{\sigma(p)}\Big]^{1/p'}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\|x_i\|\le 1\\ \|b\|\le 1}} \Big[\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}^k(x_1)\dots a_{nj}^k(x_n)b(y_j^k)|^p\Big]^{1/p} &= \Big[\sup_{\substack{\|x_i\|\le 1\\ \|b\|\le 1}} \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\Big[\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}^k(x_1)\dots a_{nj}^k(x_n)b(y_j^k)|^p\Big]^{1/p}\Big)^p\Big]^{1/p}\\
&\le \Big[\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sup_{\substack{\|x_i\|\le 1\\ \|b\|\le 1}}\Big[\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}^k(x_1)\dots a_{nj}^k(x_n)b(y_j^k)|^p\Big]^{1/p}\Big)^p\Big]^{1/p}\\
&\le \Big[\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\Big[(1+\epsilon)\|S_k\|_{\sigma(p)}\Big]^{1/p}\Big)^p\Big]^{1/p}\\
&= (1+\epsilon)^{1/p}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\|S_k\|_{\sigma(p)}\Big]^{1/p}.
\end{aligned}$$

Então $S=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^k a_{1j}^k\otimes\cdots\otimes a_{nj}^k\otimes y_j^k$ e

$$\begin{aligned}
\|(\lambda_j^k)_{j,k=1}^{\infty}\|_{p'} \sup_{\substack{\|x_i\|\le 1\\ \|b\|\le 1}}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{1j}^k(x_1)\dots a_{nj}^k(x_n)b(y_j^k)|^p\Big)^{1/p} &\le\\
&\le (1+\epsilon)^{1/p'}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\|S_k\|_{\sigma(p)}\Big]^{1/p'}(1+\epsilon)^{1/p}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\|S_k\|_{\sigma(p)}\Big]^{1/p}\\
(1=1/p'+1/p \ \Rightarrow) \quad &= (1+\epsilon)\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\|S_k\|_{\sigma(p)}\Big].
\end{aligned}$$

Como isso pode ser feito para cada $\epsilon>0$, segue que

$$\|S\|_{\sigma(p)} \ \le\ \sum_{k=1}^{\infty}\|S_k\|_{\sigma(p)} \ <\ \infty.$$

Falta mostrar que

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{\substack{\|x_i\|\le 1\\ \|b\|\le 1}}\Big(\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{j=m}^{\infty}|a_{1j}^k(x_1)\dots a_{nj}^k(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p}=0.$$

Para isso, observe que:

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\|x_i\|\le 1\\ \|b\|\le 1}}\Big(\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{j=m}^{\infty}|a_{1j}^k(x_1)\dots a_{nj}^k(x_n)b(y_j^k)|^p\Big)^{1/p} &\le \Big(\sum_{k=m}^{\infty}\sup_{\substack{\|x_i\|\le 1\\ \|b\|\le 1}}\sum_{j=m}^{\infty}|a_{1j}^k(x_1)\dots a_{nj}^k(x_n)b(y_j^k)|^p\Big)^{1/p}\\
&\le \Big(\sum_{k=m}^{\infty}\sup_{\substack{\|x_i\|\le 1\\ \|b\|\le 1}}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{1j}^k(x_1)\dots a_{nj}^k(x_n)b(y_j^k)|^p\Big)^{1/p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \Big(\sum_{k=m}^{\infty}\Big[\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{1j}^k(x_1)\ldots a_{nj}^k(x_n)b(y_j^k)|^p\Big)^{1/p}\Big]^p\Big)^{1/p} \\ \text{(por 1.4.0:eq1)} \quad &\leq \Big(\sum_{k=m}^{\infty}\Big[\Big((1+\epsilon)\|S_k\|_{\sigma(p)}\Big)^{1/p}\Big]^p\Big)^{1/p} \\ &= \Big(\sum_{k=m}^{\infty}(1+\epsilon)\|S_k\|_{\sigma(p)}\Big)^{1/p} \;<\; \infty \end{aligned}$$

que converge a zero quando m tende a infinito. Logo, S é $\sigma(p)$-nuclear.

$\vdash$(2): Agora considere os operadores lineares $T_i : D_i \longrightarrow E_i$, $i = 1,\ldots,n$, $R : F \longrightarrow G$ e uma aplicação multilinear $S : E_1 \text{x} \ldots \text{x} E_n \to F$ em $\mathcal{L}_{\sigma(p)}(E_1,\ldots,E_n;F)$. Vamos mostrar que $RS(T_1, \ldots, T_n) \in [\mathcal{L}_{\sigma(p)}(D_1,\ldots,D_n;G), \|.\|_{\sigma(p)}]$.

$$\begin{aligned} RS(T_1,\ldots,T_n)(u_1,\ldots,u_n) &= RS(T_1(u_1),\ldots,T_n(u_n)) \\ &= R\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j a_{1j}(T_1(u_1)).\ldots.a_{nj}(T_n(u_n)).y_j\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j a_{1j}(T_1(u_1)).\ldots.a_{nj}(T_n(u_n)).R(y_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j T_1'(a_{1j})(u_1).\ldots.T_n'(a_{nj})(u_n).R(y_j). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} &\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}\sup_{\substack{\|u_i\|\leq 1\\ \|c\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|(T_1'a_{1j})(u_1).\ldots.(T_n'a_{nj})(u_n).c(R(y_j))|^p\Big)^{1/p} = \\ &= \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}\sup_{\substack{\|u_i\|\leq 1\\ \|c\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{1j}(T_1u_1).\ldots.a_{nj}(T_nu_n).R'c(y_j)|^p\Big)^{1/p} \\ &= \|T_1\|\ldots\|T_n\|\|R'\|\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}\sup_{\substack{\|u_i\|\leq 1\\ \|c\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{1j}\Big(\frac{T_1u_1}{\|T_1\|}\Big).\ldots.a_{nj}\Big(\frac{T_nu_n}{\|T_n\|}\Big).\frac{R'c}{\|R'\|}(y_j)|^p\Big)^{1/p} \\ &\leq \|T_1\|\ldots\|T_n\|\|R\|\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{1j}(x_1).\ldots a_{nj}(x_n).b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \end{aligned}$$

para cada representação de S. Por acima temos também que

$$\sup_{\substack{\|u_i\|\leq 1\\ \|c\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=m}^{\infty}|(T_1'a_{1j})(u_1).\ldots.(T_n'a_{nj})(u_n).c(R(y_j))|^p\Big)^{1/p} \leq$$

$$\leq \quad \|T_1\|\ldots\|T_n\|\|R\| \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \left(\sum_{j=m}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n).b(y_j)|^p\right)^{1/p}$$

que tende a zero quando m vai para infinito. Logo $RS(T_1,\ldots,T_n)$ é $\sigma(p)$-nuclear e

$$\|RS(T_1,\ldots,T_n)\|_{\sigma(p)} \leq \|T_1\|.\ldots\|T_n\|.\|R\|\|S\|_{\sigma(p)}.$$

Portanto, $\mathcal{L}_{\sigma(p)}$ com a norma $\|.\|_{\sigma(p)}$ é $\mathcal{L}_n$-módulo de Banach de aplicações n-lineares e portanto temos que $\|S\| \leq \|S\|_{\sigma(p)}$ e que $\|\lambda a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes y\|_{\sigma(p)} = |\lambda|\|a_1\|.\ldots\|a_n\|.\|y\|$.

Gostaríamos de saber se para $1 \leq q \leq p$ existe alguma relação entre $\|.\|_{\sigma(p)}$ e $\|.\|_{\sigma(q)}$. Temos certamente $\mathcal{L}_{\sigma(p)} \subset \mathcal{L}_{\sigma(1)}$, mas como comparar

$$\inf_{\substack{\text{representações}\\ \text{de } S}} \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'} \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\right)^{1/p}$$

e

$$\inf_{\substack{\text{representações}\\ \text{de } S}} \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{q'} \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^q\right)^{1/q}$$

uma vez que $q \leq p$ implica $p' \leq q'$, obtendo que

$$\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\right)^{1/p} \leq \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^q\right)^{1/q}$$

e

$$\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'} \geq \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{q'}?$$

É interessante considerar o subconjunto $\mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F)$ de $\mathcal{L}_{\sigma(p)}(E_1,\ldots,E_n;F)$. Nele podemos definir a norma

$$\|S\|_{\sigma(p)f} = \inf_{\substack{\text{representações}\\ \text{finitas de } S}} \|(\lambda_j)_{j=1}^{m}\|_{p'} \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\right)^{1/p}.$$

Pelas definições de $\|.\|_{\sigma(p)f}$ e $\|.\|_{\sigma(p)}$, é claro que $\|S\|_{\sigma(p)} \leq \|S\|_{\sigma(p)f}$, para $S \in \mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F) \subset \mathcal{L}_{\sigma(p)}(E_1,\ldots,E_n;F)$. É natural perguntar quando ocorre a igualdade:

1.4.1 Proposição: *Se os espaços $E_1,\ldots,E_n$ tiverem dimensão finita e $S \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$, então*

$$\|S\|_{\sigma(p)} = \|S\|_{\sigma(p)f}.$$

Demonstração: Note que $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F) = \mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F)$ para $\dim E_k < \infty$, $k = 1,\ldots,n$ seguindo que é um espaço completo para ambas as normas $\|.\|_{\sigma(p)}$ e $\|.\|_{\sigma(p)f}$. Considere a aplicação identidade $id : \mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F) \to \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$, então como $\|id(S)\|_{\sigma(p)} = \|S\|_{\sigma(p)} \leq \|S\|_{\sigma(p)f}$, segue que é contínua e por ser bijetiva, pelo teorema da aplicação aberta segue que é isomorfismo, i. e., existe uma constante $c \geq 0$ tal que

$$\|S\|_{\sigma(p)f} \leq c\|S\|_{\sigma(p)}. \tag{1.4.1:eq1}$$

A seguir provaremos que $c = 1$. Dado $S \in \mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F)$ e $\epsilon > 0$, considere uma representação infinita

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_{1j} \otimes \cdots \otimes a_{nj} \otimes y_j$$

tal que

$$\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'} \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \leq (1+\epsilon/2)\|S\|_{\sigma(p)}.$$

Em particular, para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j a_{1j} \otimes \cdots \otimes a_{nj} \otimes y_j\|_{\sigma(p)f} &\leq \|(\lambda_j)_{j=1}^{m-1}\|_{p'} \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{m-1} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \\ &\leq (1+\epsilon/2)\|S\|_{\sigma(p)}. \end{aligned} \tag{1.4.1:eq2}$$

Como

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=m}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p} = 0,$$

para um $m \in \mathbb{N}$ grande o bastante, tem-se

$$\begin{aligned} c\|\sum_{j=m}^{\infty} \lambda_j a_{1j} \otimes \cdots \otimes a_{nj} \otimes y_j\|_{\sigma(p)} &\leq c\|(\lambda_j)_{j=m}^{\infty}\|_{p'} \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=m}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \\ &\leq \epsilon/2\|S\|_{\sigma(p)}. \end{aligned} \tag{1.4.1:eq3}$$

Chame $S_1 = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j a_{1j} \otimes \cdots \otimes a_{nj} \otimes y_j$, então

$$S - S_1 = \sum_{j=m}^{\infty} \lambda_j a_{1j} \otimes \cdots \otimes a_{nj} \otimes y_j \in \mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F).$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\|S\|_{\sigma(p)f} &\leq \|\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_j a_{1j}\otimes\cdots\otimes a_{nj}\otimes y_j\|_{\sigma(p)f} + \|\sum_{j=m}^{\infty}\lambda_j a_{1j}\otimes\cdots\otimes a_{nj}\otimes y_j\|_{\sigma(p)f}\\
\text{(por 1.4.1: eq2 e 1.4.1: eq1)} &\leq (1+\epsilon/2)\|S\|_{\sigma(p)} + c\|\sum_{j=m}^{\infty}\lambda_j a_{1j}\otimes\cdots\otimes a_{nj}\otimes y_j\|_{\sigma(p)}\\
\text{(por 1.4.1: eq3)} &\leq (1+\epsilon/2)\|S\|_{\sigma(p)} + \epsilon/2\|S\|_{\sigma(p)}\\
&\leq (1+\epsilon)\|S\|_{\sigma(p)}.
\end{aligned}$$

Como isso vale para todo $\epsilon > 0$, segue o resultado. ■

Nem sempre é possível trabalhar com espaços de dimensão finita. A seguir temos um resultado que pode ser útil:

1.4.2 Proposição: *Se $S \in \mathcal{L}_{\sigma(p)}(E_1,\ldots,E_n;F)$ e $T_k \in \mathcal{L}_f(D_k;E_k)$, $k=1,\ldots,n$, então*

$$\|S\circ(T_1,\ldots,T_n)\|_{\sigma(p)f} \leq \|S\|_{\sigma(p)}\ \|T_1\|\ldots\|T_n\|.$$

Demonstração: Seja J_k a injeção natural de $T_k(D_k)$ em E_k; então, podemos escrever $T_k = J_k\circ\tilde{T}_k$, onde $\tilde{T}_k : u_k \in D_k \mapsto \tilde{T}_k(u_k) := T_k(u_k) \in T_k(D_k)$, $\|\tilde{T}_k\| = \|T_k\|$, k = 1,...,n. Logo, $S\circ(J_1,\ldots,J_n) \in \mathcal{L}(T_1(D_1),\ldots,T_n(D_n);F)$, onde $dim T_k(D_k) < \infty$. Logo, pela proposição anterior temos

$$\|S\circ(J_1,\ldots,J_n)\|_{\sigma(p)f} \;=\; \|S\circ(J_1,\ldots,J_n)\|_{\sigma(p)} \;\leq\; \|S\|_{\sigma(p)}\ \|J_1\|\ldots\|J_n\| \;=\; \|S\|_{\sigma(p)}$$

de onde temos que

$$\begin{aligned}
\|S\circ(T_1,\ldots,T_n)\|_{\sigma(p)f} &= \|S\circ(J_1,\ldots,J_n)\circ(\tilde{T}_1,\ldots,\tilde{T}_n)\|_{\sigma(p)f}\\
&\leq \|S\circ(J_1,\ldots,J_n)\|_{\sigma(p)f}\|\tilde{T}_1\|\ldots\|\tilde{T}_n\|\\
&= \|S\|_{\sigma(p)}\|T_1\|\ldots\|T_n\|.
\end{aligned}$$

■

1.4.3 Proposição: *Se $E_1',\ldots,E_n'$ têm a propriedade de aproximação limitada, então*

$$\|S\|_{\sigma(p)f} = \|S\|_{\sigma(p)},$$

para cada $S \in \mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F)$.

Demonstração: Faremos a prova para $n=2$, pois para outros $n's$ o processo é análogo. Seja $S \in \mathcal{L}_f$. Temos que $\mathcal{L}_f(E_1,E_2;F)$ é isometricamente isomorfo a $\mathcal{L}_f(E_1;\mathcal{L}(E_2;F))$, pela aplicação que associa $S_1 \in \mathcal{L}_f(E_1;\mathcal{L}(E_2;F))$ a $S \in \mathcal{L}_f(E_1,E_2;F)$ dada por $S_1(x_1)(x_2) = S(x_1,x_2)$, $x_i \in E_i$, $i=1,2$. Como E_1' tem a propriedade de aproximação limitada, por (0.3.5), dado $\epsilon > 0$, existe $T_1 \in \mathcal{L}_f(E_1;E_1)$ tal que $\|T_1\| \le (1+\epsilon)\gamma_1$ com $\gamma_1 \ge 1$, e $S_1T_1 = S_1$. Logo temos

$$S(T_1x_1,x_2) = (S_1 \circ T_1x_1)(x_2) = (S_1x_1)(x_2) = S(x_1,x_2).$$

Analogamente, se $S_2 \in \mathcal{L}_f(E_2;\mathcal{L}(E_1;F))$ é dada por $S_2(x_2)(x_1) = S(x_1,x_2)$, existe $T_2 \in \mathcal{L}_f(E_2;E_2)$ tal que $\|T_2\| \le (1+\epsilon)\gamma_2$ com $\gamma_2 \ge 1$, e $S_2T_2 = S_2$. E assim

$$S(x_1,T_2x_2) = (S_2 \circ T_2x_2)(x_1) = (S_2x_2)(x_1) = S(x_1,x_2).$$

Ou seja, $S = S \circ (T_1,T_2)$ de onde segue que

$$\begin{aligned} \|S\|_{\sigma(p)f} &= \|S \circ (T_1,T_2)\|_{\sigma(p)f} \\ \text{(por 1.4.2)} \quad &\le \|S\|_{\sigma(p)}\|T_1\|\|T_2\| \\ &\le (1+\epsilon)^2\gamma_1\gamma_2\|S\|_{\sigma(p)}. \end{aligned}$$

Como isso vale para cada $\epsilon > 0$, segue que $\|S\|_{\sigma(p)f} \le \gamma_1\gamma_2\|S\|_{\sigma(p)}$. Repetindo o processo utilizado em (1.4.1), obtém-se $\|S\|_{\sigma(p)f} \le \|S\|_{\sigma(p)}$, e portanto vale a igualdade. ■

1.4.4 Proposição: *Se $E_1',\ldots,E_n'$ têm a propriedade de aproximação limitada, então $\mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F)$ é denso em $\mathcal{L}_{\sigma(p)}(E_1,\ldots,E_n;F)$ na norma $\|.\|_{\sigma(p)}$.*

Demonstração: Seja $S \in \mathcal{L}_{\sigma(p)}(E_1,\ldots,E_n;F)$ e dado $\epsilon > 0$ considere uma representação de $S = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j a_{1j}\otimes\cdots\otimes a_{nj}\otimes y_j$ tal que

$$\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'} \sup_{\substack{\|x_i\|\le 1 \\ \|b\|\le 1}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\right)^{1/p} \le (1+\epsilon)\|S\|_{\sigma(p)}.$$

Sabemos que

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{\|x_i\|\le 1 \\ \|b\|\le 1}} \left(\sum_{j=k}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\right)^{1/p} = 0. \tag{1.4.4: eq1}$$

Considere $S_k = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j a_{1j}\otimes\cdots\otimes a_{nj}\otimes y_j \in \mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F)$, então por 1.4.4: eq1, S_k converge a S na norma $\|.\|_{\sigma(p)}$ (bem como na norma $\|.\|_{\sigma(p)f}$, pelo resultado acima) provando o que queríamos. ■

É importante observar que em geral $[\mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F);\|.\|_{\sigma(p)f}]$ não é completo: basta considerar $E_1,\ldots,E_n$ espaços de dimensões infinitas, de modo que as normas $\|.\|_{\sigma(p)f}$ e $\|.\|_{\sigma(p)}$ não coincidam. Se $S\in\mathcal{L}_{\sigma(p)}(E_1,\ldots,E_n;F)\setminus\mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F)$, dado $\epsilon>0$, considere uma representação $S=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j a_{1j}\otimes\cdots\otimes a_{nj}\otimes y_j$ tal que

$$\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \leq (1+\epsilon)\|S\|_{\sigma(p)}.$$

Seja $S_k=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j a_{1j}\otimes\cdots\otimes a_{nj}\otimes y_j\in\mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F)$, para cada $k\in\mathbb{N}$. Então $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ é seqüência de Cauchy em $[\mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F);\|.\|_{\sigma(p)f}]$: se $k<l$ são grandes o bastante,

$$\begin{aligned}\|S_l-S_k\|_{\sigma(p)f} &\leq \|(\lambda_j)_{j=k+1}^{l}\|_{p'}\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=k+1}^{l}|a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p}\\ &\leq \|(\lambda_j)_{j=k+1}^{l}\|_{p'}\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=k+1}^{\infty}|a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p}\\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\|S-S_k\|_{\sigma(p)f} \leq \|(\lambda_j)_{j=k+1}^{\infty}\|_{p'}\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=k+1}^{\infty}|a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p}.$$

que converge a 0 quando k vai para o infinito. Suponha que existe $T\in\mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F)$ tal que S_k converge para T. Então

$$\begin{aligned}\|S-T\|_{\sigma(p)} &\leq \|S-S_k\|_{\sigma(p)}+\|S_k-T\|_{\sigma(p)}\\ &\leq \|S-S_k\|_{\sigma(p)}+\|S_k-T\|_{\sigma(p)f}.\end{aligned}$$

Logo, só podemos ter $S=T$, o que é absurdo, uma vez que S não é de tipo finito.

Somente se os espaços $E_1,\ldots,E_n$ tiverem dimensões finitas, $[\mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F);\|.\|_{\sigma(p)f}]$ será $\mathcal{L}_n$-módulo de Banach.

1.5 Fatoração para aplicações n-lineares σ-nucleares

Vejamos primeiro alguns resultados e definições:

1.5.1 Proposição: *$S\in\mathcal{L}_{\sigma(1)}(E_1,\ldots,E_n;F)$, se e só se S tem uma representação da forma $S=\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}\otimes\cdots\otimes a_{nj}\otimes y_j$, com $a_{ij}\in E_i'$ e $y_j\in F$ para $i=1,\ldots,n$ e $j\in\mathbb{N}$ com*

$$\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)| < \infty,$$

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=k}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)| = 0$$

e

$$\|S\|_{\sigma(1)} = \|S\|_{\sigma} := \inf_{S=\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}\otimes\cdots\otimes a_{nj}\otimes y_j} \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)|.$$

Demonstração: Para $S = \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j} \otimes \cdots \otimes a_{nj} \otimes y_j = \sum_{j=1}^{\infty} 1\ a_{1j} \otimes \cdots \otimes a_{nj} \otimes y_j$ com as hipóteses acima, é claro que $S \in \mathcal{L}_{\sigma(1)}(E_1, \dots, E_n; F)$. Agora, se $S \in \mathcal{L}_{\sigma(1)}(E_1, \dots, E_n; F)$, com representação $S = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_{1j} \otimes \cdots \otimes a_{nj} \otimes z_j$, podemos reescrevê-la como $S = \sum_{j=1}^{\infty} 1\ a_{1j} \otimes \cdots \otimes a_{nj} \otimes y_j$, onde $y_j = \lambda_j z_j$. Segue que:

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\dots a_{nj}(x_n)b(\lambda_j z_j)| \ \leq \\
&\text{(por Hölder)} \ \leq \ \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\dots a_{nj}(x_n)b(z_j)| \ < \ \infty.
\end{aligned}$$

$\vdash \|S\|_{\sigma(1)} \leq \|S\|_{\sigma}$

$$\begin{aligned}
\|S\|_{\sigma(1)} &= \inf_{S=\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j c_{1j}\otimes\cdots\otimes c_{nj}\otimes z_j} \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=1}^{\infty} |c_{1j}(x_1)\dots c_{nj}(x_n)b(z_j)| \\
\text{(há menos representações)} &\leq \inf_{S=\sum_{j=1}^{\infty} 1.a_{1j}\otimes\cdots\otimes a_{nj}\otimes y_j} \|(1)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)| \\
&= \inf_{S=\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}\otimes\cdots\otimes a_{nj}\otimes y_j} \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)| \\
&= \|S\|_{\sigma}.
\end{aligned}$$

$\vdash \|S\|_{\sigma(1)} \geq \|S\|_{\sigma}$: Dado $\epsilon > 0$, considere uma representação $S = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j c_{1j} \otimes \cdots \otimes c_{nj} \otimes z_j$ tal que

$$\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=1}^{\infty} |c_{1j}(x_1)\dots c_{nj}(x_n)b(z_j)| \leq (1+\epsilon)\|S\|_{\sigma(1)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|S\|_\sigma &\leq \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=1}^{\infty} |c_{1j}(x_1)\dots c_{nj}(x_n)b(\lambda_j z_j)| \\
\text{(por Hölder)} &\leq \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_\infty \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=1}^{\infty} |c_{1j}(x_1)\dots c_{nj}(x_n)b(z_j)| \\
&\leq (1+\epsilon)\|S\|_{\sigma(1)}.
\end{aligned}$$ ■

Escrevemos $\mathcal{L}_\sigma(E_1,\dots,E_n;F)$ e $\|.\|_\sigma$ ao invés de $\mathcal{L}_{\sigma(1)}(E_1,\dots,E_n;F)$ e $\|.\|_{\sigma(1)}$, respectivamente. Diremos também que $S\in\mathcal{L}_\sigma(E_1,\dots,E_n;F)$ é σ-nuclear.

1.5.2 Definição: Dizemos que um operador A é *aproximável* se existe uma seqüência $A_j\in\mathcal{L}_f(E;F)$ tal que $\lim_{j\to\infty}\|A-A_j\|=0$. Nesse caso, escrevemos $A\in\mathcal{L}_a(E;F)$. Analogamente, uma aplicação n-linear A é *aproximável* e escrevemos $A\in\mathcal{L}_a(E_1,\dots,E_n;\,F)$ se existe uma seqüência $A_j\in\mathcal{L}_f(E_1,\dots,E_n;\,F)$ tal que $\lim_{j\to\infty}\|A-A_j\|=0$. Sejam $U_1,\dots,U_n$ espaços de Banach com bases de Schauder $\{e_{1j_1}\},\dots,\{e_{nj_n}\}$. Dizemos que uma aplicação n-linear $Y\in\mathcal{L}(U_1,\dots,U_n;F)$ é *diagonal* se existem $y_j\in F$, $j\in\mathbb{N}$ tais que

$$Y(e_{1j_1},\dots,e_{nj_n})=\begin{cases} y_j & \text{, se } j_1=\dots=j_n=j;\\ 0 & \text{, caso contrário.}\end{cases}$$

Se $t_i\in U_i$, $t_i=\sum_{j_i=1}^{\infty}\tau_{ij_i}e_{ij_i}$, $\tau_{ij_i}\in\mathbb{K}$ para $i=1,\dots,n$, então

$$\begin{aligned}
Y(t_1,\dots,t_n) &= Y(\sum_{j_1=1}^{\infty}\tau_{1j_1}e_{1j_1},\dots,\sum_{j_n=n}^{\infty}\tau_{nj_n}e_{nj_n}) \\
&= \sum_{j_1=1}^{\infty}\dots\sum_{j_n=1}^{\infty}\tau_{1j_1}\dots\tau_{nj_n}Y(e_{1j_1},\dots,e_{nj_n}) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\tau_{1j}\dots\tau_{nj}Y(e_{1j},\dots,e_{nj}) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\tau_{1j}\dots\tau_{nj}y_j.
\end{aligned}$$

1.5.3 Definição: Dizemos que uma base $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ de um espaço de Banach E é uma *base hiperortogonal* se

$$\|\sum_{j=1}^{m}\alpha_j e_j\|\leq\|\sum_{j=1}^{m}\beta_j e_j\|$$

para cada seqüência finita de escalares $\alpha_1, \ldots \alpha_m, \beta_1, \ldots \beta_m$ com $|\alpha_j| \leq |\beta_j|$ $(j = 1, \ldots, m)$. Dizemos que uma base $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ de um espaço de Banach E é uma *base estritamente hiperortogonal* se

$$\|\sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j\| < \|\sum_{j=1}^{m} \beta_j e_j\|$$

para cada seqüência finita de escalares $\alpha_1, \ldots \alpha_n, \beta_1, \ldots \beta_n$ com $|\alpha_j| \leq |\beta_j|$ $(j = 1, \ldots, m)$, tais que $0 < |\alpha_{j_0}| < |\beta_{j_0}|$, para algum índice j_0. No livro [20] na página 558 podem ser vistas propriedades destas bases.

1.5.4 Definição: Dada uma base hiperortogonal $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ de um espaço U, dizemos que $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ são seus *funcionais conjugados* ou *associados* se $f_j : U \to \mathbb{K}$ é funcional linear para cada $j \in \mathbb{N}$ e

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(u).e_j, \qquad \text{para cada } u \in U.$$

VERSÃO LINEAR DO TEOREMA DA FATORAÇÃO: Um operador linear S$\in \mathcal{L}$(E;F) é σ-nuclear se e só se existe um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \mathtt{E} \arrow[rr, "\mathtt{S}"] \arrow[dr, "\mathtt{A}"'] & & \mathtt{F} \\ & \mathtt{U} \arrow[ur, "\mathtt{Y}"'] & \end{tikzcd}$$

com A$\in \mathcal{L}_a$(E;U) e Y$\in \mathcal{L}_a$(U;F), onde U é espaço de Banach com base hiperortogonal. Neste caso, $\|\mathtt{S}\|_\sigma = \mathtt{inf}\|\mathtt{Y}\|\|\mathtt{A}\|$.

Na demonstração deste teorema em [17] pg 325 23.2.5, ao supor que $S = Y \circ A$, a condição Y aproximável pode ser retirada:

Demonstração: Se $\{e_j\}$ é a base hiperortogonal de U e $\{f_j\}$ seus funcionais associados, se $u = A(x)$ tem-se

$$A(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(A(x)).e_j = \sum_{j=1}^{\infty} (A' f_j)(x).e_j,$$

e compondo com Y obtemos

$$S(x) = Y \circ A(x) = Y(\sum_{j=1}^{\infty} (A' f_j)(x).e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (A' f_j)(x).Y(e_j),$$

que é a representação desejada. Queremos saber se S é σ-nuclear. Com tal finalidade, considere os seguintes fatos:

(1) Como os operadores aproximáveis são operadores compactos, (ver [17] 1.11.2 pg 50) segue que $\overline{A(B_E)}$ é compacto. Logo, se $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é função contínua, existe $u_0 \in \overline{A(B_E)}$ tal que $g(u_0) = \max\{g(u) : u \in \overline{A(B_E)}\}$;

(2) se U é espaço com base de Schauder $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ e consideramos a projeção $P_k(x) = \sum_{j=1}^{k} f_j(x)e_j$, existe uma constante C tal que $\sup_k \|P_k\| = C < \infty$ (ver 26.3 pg 191 em [9]);

(3) Se $K \subset U$ é compacto, então $\sup_{u\in K} \|u - P_k(u)\| = \sup_{u\in K} \|\sum_{j=k+1}^{\infty} f_j(u)e_j\|$ converge a 0 quando k vai a infinito;

Suponha agora que $A \in \mathcal{L}_a(E;U)$, $Y \in \mathcal{L}(U;F)$, e U tem base de Schauder hiperortogonal. Temos que:

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{x\in B_E\\ b\in B_{F'}}} \sum_{j=k+1}^{\infty} |f_j(A(x)).b(Y(e_j))| \ &= \\
(\exists|\varepsilon_j| = 1) \quad &= \sup_{\substack{x\in B_E\\ b\in B_{F'}}} |b(Y(\sum_{j=k+1}^{\infty} \varepsilon_j f_j(A(x)).e_j))| \\
(\text{Hahn-Banach}) \quad &= \sup_{x\in B_E} \|Y(\sum_{j=k+1}^{\infty} \varepsilon_j f_j(A(x)).e_j)\|_F \\
(Y \text{ é contínua}) \quad &\leq \|Y\| \sup_{x\in B_E} \|\sum_{j=k+1}^{\infty} \varepsilon_j f_j(A(x)).e_j\|_U \\
(\{e_j\} \text{ é base hiperortogonal}) \quad &\leq \|Y\| \sup_{x\in B_E} \|\sum_{j=k+1}^{\infty} f_j(A(x)).e_j\|_U \\
(A(B_E) \subseteq \overline{A(B_E)}) \quad &\leq \|Y\| \sup_{u\in\overline{A(B_E)}} \|\sum_{j=k+1}^{\infty} f_j(u).e_j\|_U \\
&= \|Y\| \sup_{u\in\overline{A(B_E)}} \|u - P_k(u)\|_U. \qquad (1.5.4\text{:eq1})
\end{aligned}$$

Como $\overline{A(B_E)}$ é compacto, de (3) segue que a última expressão vai para 0 se k tende a infinito, e por (2) temos que existe $C < \infty$ tal que

$$\sup_{\substack{x\in B_E\\ b\in B_{F'}}} \sum_{j=1}^{k} |f_j(A(x)).b(Y(e_j))| \ \leq C$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Isso mostra que S é σ-nuclear, sem a necessidade de Y ser aproximável. ∎

O próximo passo é generalizar esse resultado. Logo de início, vemos duas situações a considerar: substituir a aplicação A por uma aplicação n-linear, definindo um espaço U e uma aplicação

Y como acima, ou substituir A por n aplicações lineares $A_1, \ldots, A_n$ e definindo n espaços de Banach $U_1, \ldots, U_n$ e Y n-linear.

1.5.5 Teorema (da fatoração para aplicações n-lineares σ-nucleares): *Uma aplicação multilinear $S \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é σ-nuclear se e só se existe um diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} E_1 \times \ldots \times E_n \arrow[rr, "S"] \arrow[dr, "A_1 \ \ldots \ A_n"'] & & F \\ & U_1 \times \ldots \times U_n \arrow[ur, "Y"'] & \end{tikzcd}$$

onde os U_i's são espaços de Banach com base de Schauder e pelo menos um tem base hiper-ortogonal, $A_i \in \mathcal{L}_a(E_i; U_i)$ para $i = 1, \ldots, n$, e $Y : U_1 \times \ldots \times U_n \to F$ diagonal . Neste caso, $\|S\|_\sigma = \inf \|Y\| \|A_1\| \ldots \|A_n\|$.

Demonstração:
$(\Leftarrow)$ $S = Y \circ (A_1, \ldots, A_n)$. Seja $\{e_{ij}\}$ base de U_i e $\{f_{ij}\}$ os seus funcionais associados, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Suponha que para $i = 1$ a base é hiperortogonal. Então

$$A_i(x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} f_{ij}(A_i(x_i)).e_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} (A_i' f_{ij})(x_i).e_{ij},$$

bem como

$$\begin{aligned} S(x_1, \ldots, x_n) &= Y(A_1(x_1), \ldots, A_n(x_n)) \\ &= Y\Big(\sum_{j_1=1}^{\infty} (A_1' f_{1j_1})(x_1).e_{1j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{\infty} (A_n' f_{nj_n})(x_n).e_{nj_n}\Big) \\ (Y \text{é } n\text{−linear}) &= \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} (A_1' f_{1j_1})(x_1) \ldots (A_n' f_{nj_n})(x_n) Y(e_{1j_1}, \ldots, e_{nj_n}) \\ (Y \text{ é diagonal} \Rightarrow) &= \sum_{j=1}^{\infty} A_1' f_{1j}(x_1) \ldots (A_n' f_{nj})(x_n) Y(e_{1j}, \ldots, e_{nj}). \end{aligned}$$

Logo, se chamamos $a_{ij} = (A_i' f_{ij}) \in E'$, $i = 1, 2, \ldots, n$ e $y_j = Y(e_{1j}, \ldots, e_{nj}) \in F$, temos a representação

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j} \otimes \cdots \otimes a_{nj} \otimes y_j.$$

Queremos saber se S é σ-nuclear:

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=1}^{\infty} |A_1' f_{1j}(x_1)\dots(A_n' f_{nj})(x_n) b\circ Y(e_{1j},\dots,e_{nj})| = \\
(\exists |\varepsilon_j|=1) \quad &= \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} |\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j (A_1' f_{1j})(x_1)\dots(A_n' f_{nj})(x_n) b\circ Y(e_{1j},\dots,e_{nj})| \\
(b \text{ linear, } Y \text{ diagonal}) \quad &= \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} |b\circ Y\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j (A_1' f_{1j})(x_1) e_{1j},\ \dots\ ,\sum_{j=1}^{\infty} (A_n' f_{nj})(x_n) e_{nj}\Big)| \\
(b,\ Y \text{ contínuas}) \quad &\leq \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \|b\|\|Y\| \Big\|\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j\ (A_1' f_{1j})(x_1) e_{1j}\Big\|_{U_1} \dots \Big\|\sum_{j=1}^{\infty} (A_n' f_{nj})(x_n) e_{nj}\Big\|_{U_n} \\
(\{e_{1j}\} \text{ hiperortogonal}) \quad &\leq \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \|b\|\|Y\| \Big\|\sum_{j=1}^{\infty} (A_1' f_{1j})(x_1) e_{1j}\Big\|_{U_1} \dots \Big\|\sum_{j=1}^{\infty} A_n' f_{nj}(x_n) e_{nj}\Big\|_{U_n} \\
&= \|Y\| \sup_{\|x_i\|\leq 1} \|A_1(x_1)\|_{U_1}\dots\|A_n(x_n)\|_{U_n} \\
(A_i \ \ \text{contínua}, \forall i) \quad &\leq \|Y\| \sup_{\|x_i\|\leq 1} \|A_1\|\|x_1\|\dots\|A_n\|\|x_n\| \\
&= \|Y\|\|A_1\|\dots\|A_n\|.
\end{aligned}$$

Cada A_i é aproximável, logo é operador compacto (ver [17] 1.11.2). Portanto, a imagem da bola unitária B_{E_i} por A_i é relativamente compacta em U_i. Segue que a sua aderência $\overline{A_i(B_{E_i})}$ é um compacto em U_i. Como Y é contínua em U_1x$\dots$xU_n e $\overline{A_1(B_{E_1})}$x$\dots$x$\overline{A_n(B_{E_n})}$ é subconjunto compacto, existe $(u_{10},\dots,u_{n0}) \in \overline{A_1(B_{E_1})}x\dots$x$\overline{A_n(B_{E_n})}$ tal que

$$\|Y(u_{10},\dots,u_{n0})\|_F \ \geq \ \|Y(u_1,u_2,\dots,u_n)\|_F$$

para todo $(u_1,\dots,u_n) \in \overline{A_1(B_{E_1})}x\dots$x$\overline{A_n(B_{E_n})}$, em particular para cada $x_i \in B_{E_i}$, $i=1,\dots,n$. tem-se

$$\|Y(u_{10},\dots,u_{n0})\|_F \ \geq \ \|Y(A_1(x_1),\dots,A_n(x_n))\|_F.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=k}^{\infty} |A_1' f_{1j}(x_1)\dots(A_n' f_{nj})(x_n) b\circ Y(e_{1j},\dots,e_{nj})| = \\
(\exists |\varepsilon_j|=1) \quad &= |\sum_{j=k}^{\infty} \varepsilon_j (A_1' f_{1j})(x_1)\dots(A_n' f_{nj})(x_n) b\circ Y(e_{1j},\dots,e_{nj})| \\
&= |b\circ Y\Big(\sum_{j=k}^{\infty} \varepsilon_j (A_1' f_{1j})(x_1) e_{1j},\ \dots\ ,\sum_{j=k}^{\infty} (A_n' f_{nj})(x_n) e_{nj}\Big)|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|b\|\Big\|Y\Big(\sum_{j=k}^{\infty}(A_1'f_{1j})(u_{10})e_{1j},\ \ldots\ ,\sum_{j=k}^{\infty}(A_n'f_{nj})(u_{n0})e_{nj}\Big)\Big\| \\
&\leq \|b\|.\|Y\|\Big\|\sum_{j=k}^{\infty}(A_1'f_{1j})(u_{10})e_{1j}\Big\|_{U_1}\ldots\Big\|\sum_{j=k}^{\infty}(A_n'f_{nj})(u_{n0})e_{nj}\Big\|_{U_n}.
\end{aligned}$$

Como $\left\|\sum_{j=k}^{\infty}(A_i'f_{ij})(u_{i0})e_{ij}\right\|_{U_i}$ vai para 0 quando k tende a infinito, para cada i, segue que

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\sum_{j=k}^{\infty}|A_1'f_{1j}(x_1)\ldots(A_n'f_{nj})(x_n)b\circ Y(e_{1j},\ldots,e_{nj})| \ = \ 0.$$

Logo, S é σ-nuclear com

$$\|S\|_\sigma \leq \inf_{Y,A_1,\ldots,A_n}\|Y\|.\|A_1\|\ldots.\|A_n\|. \tag{1.5.5: eq1}$$

($\Rightarrow$) Suponha que $S\ \neq\ 0$ é σ-nuclear; dado $\epsilon>0$, considere uma representação $S=\sum_{j=1}^{\infty}a_{1j}\otimes\cdots\otimes a_{nj}\otimes y_j$ com

$$\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|<(1+\epsilon)\|S\|_\sigma. \tag{1.5.5: eq2}$$

Note que

$$\sigma_{1,k}:=\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\sum_{j=k}^{\infty}|a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)| \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad 0.$$

Vamos construir $(\rho_{1j})\in c_0$ com $1\geq\rho_{1,1}\geq\rho_{1,2}\geq\ldots\geq\rho_{1j}\geq\ldots>0$ e satisfazendo

$$\sum_{j=1}^{\infty}\rho_{1,j}^{-2}|a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|\leq(1+\epsilon)^2\|S\|_\sigma\|x_1\|\ldots\|x_n\|\|b\|. \tag{1.5.5: eq3}$$

Se existe $m=\max\{j\in\mathbb{N}:\sigma_{1,j}>0\}$, definimos

$$\rho_{1j}=\begin{cases}(1+\epsilon)^{-1/2} & ,\ j\leq m;\\ (1+j\epsilon)^{-1/2} & ,\ j>m.\end{cases}$$

Note que para $j>m$

$$|a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|\leq\sigma_{1,j}\|x_1\|\ldots\|x_n\|\|b_j\|=0.$$

Então

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty}\rho_{1,j}^{-2}|a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)| \ &= \ \sum_{j=1}^{m}(1+\epsilon)|a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)| \\
&= \ \|x_1\|\ldots\|x_n\|\|b\|(1+\epsilon)\sum_{j=1}^{m}|a_{1j}(\frac{x_1}{\|x_1\|})\ldots a_{nj}(\frac{x_n}{\|x_n\|})\frac{b(y_j)}{\|b\|}| \\
\text{(por 1.5.5: eq2)} \ &\leq \ \|x_1\|\ldots\|x_n\|\|b\|(1+\epsilon)(1+\epsilon)\|S\|_\sigma.
\end{aligned}$$

Para o caso em que $\sigma_{1,j} > 0$ para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$(\sigma_{1,m+1})^{1/2} \leq \min\left\{\frac{\epsilon}{2}\sigma_{1,1}, 1\right\}. \tag{1.5.5: eq4}$$

Fixe um m satisfazendo 1.5.5: eq4, e seja

$$\rho_{1j} := \begin{cases} 1 & , se\ j \leq m; \\ (\sigma_{1,j})^{1/4} & , se\ j > m. \end{cases}$$

Como $\sigma_{1,j} \longrightarrow 0$, então $\rho_{1j} \longrightarrow 0$ e $(\rho_{1j}) \in c_0$. Além disso, $1 \geq \rho_{1,1} \geq \rho_{1,2} \geq \ldots \geq \rho_{1j} \geq \ldots > 0$. Para simplificar a notação, chame

$$B_j := \left|a_{1j}\Big(\frac{x_1}{\|x_1\|}\Big) \ldots a_{nj}\Big(\frac{x_n}{\|x_n\|}\Big)\frac{b(y_j)}{\|b\|}\right| \qquad\qquad (\|x_i\|, \|b\| \neq 0).$$

Note que $\sum_{j=k}^{\infty} B_j \leq \sigma_{1k}$. Para cada $M > m$, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{M} \rho_{1,k}^{-2}|a_{1k}(x_1)\ldots a_{nk}(x_n)b(y_k)| \ &= \ \sum_{k=1}^{m}|a_{1k}(x_1)\ldots a_{nk}(x_n)b(y_k)| + \\
&\sum_{k=m+1}^{M}\rho_{1,k}^{-2}\Big[\Big(\Big(\sum_{j=k}^{M+1}|a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|\Big)^{1/4}\Big)^4 - \Big(\Big(\sum_{j=k+1}^{M+1}|a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|\Big)^{1/4}\Big)^4\Big] \\
&= \ \sum_{k=1}^{m}|a_{1k}(x_1)\ldots a_{nk}(x_n)b(y_k)| + \sum_{k=m+1}^{M}\Big\{\Big((\sigma_{1,k})^{1/4}\Big)^{-2}. \\
&\quad \Big\{\Big[\Big(\sum_{j=k}^{M+1}|a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|\Big)^{1/4}\Big]^2 + \Big[\Big(\sum_{j=k+1}^{M+1}|a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|\Big)^{1/4}\Big]^2\Big\}. \\
&\qquad \Big\{\Big[\Big(\sum_{j=k}^{M+1}|a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|\Big)^{1/4}\Big]^2 - \Big[(\sum_{j=k+1}^{M+1}|a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|)^{1/4}\Big]^2\Big\}\Big\} \\
&\leq \ \|x_1\|\ldots\|x_n\|\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{m}B_k + \sum_{k=m+1}^{M}\Big\{\sigma_{1,k}^{-1/2}. \\
&\qquad \Big[\Big(\sum_{j=k}^{M+1}B_j\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{j=k+1}^{M+1}B_j\Big)^{1/2}\Big].\Big[\Big(\sum_{j=k}^{M+1}B_j\Big)^{1/2} - \Big(\sum_{j=k+1}^{M+1}B_j\Big)^{1/2}\Big]\Big\}\Big\} \\
&\leq \ \|x_1\|\ldots\|x_n\|\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{m}B_k + \sum_{k=m+1}^{M}2\Big[\Big(\sum_{j=k}^{M+1}B_j\Big)^{1/2} - \Big(\sum_{j=k+1}^{M+1}B_j\Big)^{1/2}\Big]\Big\} \\
&= \ \|x_1\|\ldots\|x_n\|\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{m}B_k + 2\Big\{\Big[\Big(\sum_{j=m+1}^{M+1}B_j\Big)^{1/2} - \Big(\cancel{\sum_{j=(m+1)+1}^{M+1}B_j}\Big)^{1/2}\Big] + \Big[\Big(\cancel{\sum_{j=m+2}^{M+1}B_j}\Big)^{1/2} -
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \ldots - \Big(\cancel{\sum_{j=(M-1)+1}^{M+1}} B_j\Big)^{1/2}\Big] + \Big[\Big(\cancel{\sum_{j=M}^{M+1} B_j}\Big)^{1/2} - \Big(\sum_{j=(M)+1}^{M+1} B_j\Big)^{1/2}\Big]\Big\}\Big\} \\
= \ & \|x_1\|\ldots\|x_n\|\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{m} B_k + 2\Big[\Big(\sum_{j=m+1}^{M+1} B_j\Big)^{1/2} - \Big(\Big(\sum_{j=(M)+1}^{M+1} B_j\Big)^{1/2}\Big]\Big\} \\
\leq \ & \|x_1\|\ldots\|x_n\|\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{m} B_k + 2\Big[\Big(\sum_{j=m+1}^{M+1} B_j\Big)^{1/2}\Big]\Big\} \\
\leq \ & \|x_1\|\ldots\|x_n\|\|b\|\Big\{\sigma_{1,1} + 2.\frac{\epsilon}{2}.\sigma_{1,1}\Big\} \qquad \Big(\text{por 1.5.5: eq4}\Big) \\
\leq \ & \|x_1\|\ldots\|x_n\|\|b\|(1+\epsilon)\sigma_{1,1} \\
\leq \ & (1+\epsilon)^2\|S\|_\sigma\|x_1\|\ldots\|x_n\|\|b\| \qquad \Big(\text{por 1.5.5: eq2}\Big)
\end{aligned}
$$

para cada $M \in \mathbb{N}$, seguindo o resultado desejado.

Para $i = 1$ definimos o espaço U_1 das seqüências $t_1 = (\tau_{1j})_{j=1}^{\infty}$ tais que $\sum_{j=1}^{\infty} \rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}a_{2j} \otimes \cdots \otimes a_{nj} \otimes y_j)_{j=1}^{\infty}$ está em $\mathcal{L}_\sigma(E_2, \ldots, E_n; F)$. Nesse espaço definimos a norma

$$\|t_1\|_{U_1} = \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=1}^{\infty} |\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}a_{2j}(x_2)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|.$$

Mostraremos que U_1 é espaço completo. Para simplificar a notação faremos para o caso n=2. Seja $(t_{1k})_{k=1}^{\infty}$ uma seqüência de Cauchy em U_1, $t_{1k} = (\tau_{1j}^k)_{j=1}^{\infty}$:

$$\|t_{1k} - t_{1l}\|_{U_1} = \sup_{\|x_2\|\leq 1} \sup_{\|b\|\leq 1} \sum_{j=1}^{\infty} |\rho_{1j}^{-1}(\tau_{1j}^k - \tau_{1j}^l)a_{2j}(x_2)b(y_j)| \leq \epsilon$$

para k, l suficientemente grandes. Vamos considerar a seqüência de Cauchy $(T^k)_{k=1}^{\infty}$, onde

$$T^k = \sum_{j=1}^{\infty}(\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}^k a_{2j}) \otimes y_j.$$

Como $\mathcal{L}_\sigma(E_2; F)$ é completo, existe $T = \sum_{j=1}^{\infty} c_{2j} \otimes z_j$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \|T - T^k\|_\sigma = 0.$$

Mostraremos que existe $\gamma_j \in \mathbb{K}$ tal que $c_{2j} \otimes z_j = \gamma_j a_{2j} \otimes y_j$, para cada $j \in \mathbb{N}$.

Caso contrário, suponha que existe j_0 tal que $c_{2j_0} \otimes z_{j_0} \neq \lambda a_{2j_0} \otimes y_{j_0}$ para cada $\lambda \in \mathbb{K}$. Vamos analisar as três situações em que isso ocorre:

(1) $c_{2j_0} \neq \lambda a_{2j_0}$ e $z_{j_0} \neq \lambda y_{j_0}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Se $M = [a_{2j_0}, c_{2j_0}] \in DimE_2'$, por 0.2.3 podemos encontrar $x_{2j_0} \in E_2$ tal que $c_{2j_0}(x_{2j_0}) = 1$ e $a_{2j_0}(x_{2j_0}) = 0$, e por Hahn-Banach podemos encontrar $b_{j_0} \in F'$ tal que $b_{j_0}(z_{j_0}) = 1$ e $b_{j_0}(y_{j_0}) = 0$. Então

$$\begin{aligned} |b_{j_0}(c_{2j_0} \otimes z_{j_0} - \rho_{1,j_0}^{-1}\tau_{1j_0}^k a_{2j_0} \otimes y_{j_0})(x_{2j_0})| &= |c_{2j_0}(x_{2j_0})b_{j_0}(z_{j_0}) - \rho_{1,j_0}^{-1}\tau_{1j_0}^k a_{2j_0}(x_{2j_0})b_{j_0}(y_{j_0})| \\ &= |1.1 - 0.0| \ = \ 1. \end{aligned}$$

(2) $c_{2j_0} = \gamma_{2j_0} a_{2j_0}$ e $z_{j_0} \neq \lambda y_{j_0}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Considere $x_{2j_0} \in E_2$ tal que $c_{2j_0}(x_{2j_0}) = \gamma_{2j_0} a_{2j_0}(x_{2j_0}) \neq 0$, e por Hahn-Banach podemos encontrar $b_{j_0} \in F'$ tal que $b_{j_0}(z_{j_0}) = 1$ e $b_{j_0}(y_{j_0}) = 0$. Então

$$\begin{aligned} |b_{j_0}(c_{2j_0} \otimes z_{j_0} - \rho_{1,j_0}^{-1}\tau_{1j_0}^k a_{2j_0} \otimes y_{j_0})(x_{2j_0})| &= |c_{2j_0}(x_{2j_0})b_{j_0}(z_{j_0}) - \rho_{1,j_0}^{-1}\tau_{1j_0}^k a_{2j_0}(x_{2j_0})b_{j_0}(y_{j_0})| \\ &= |c_{2j_0}(x_{2j_0}).1 - \rho_{1,j_0}^{-1}\tau_{1j_0}^k a_{2j_0}(x_{2j_0}).0| \\ &= |c_{2j_0}(x_{2j_0})| \ \neq 0. \end{aligned}$$

(3) $c_{2j_0} \neq \lambda a_{2j_0}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ e $z_{j_0} = \bar{\gamma}_{j_0} y_{j_0}$.

Se $M = [a_{2j_0}, c_{2j_0}] \in DimE_2'$, por 0.2.3 podemos encontrar $x_{2j_0} \in E_2$ tal que $c_{2j_0}(x_{2j_0}) = 1$ e $a_{2j_0}(x_{2j_0}) = 0$, e seja $b_{j_0} \in F'$ tal que $b_{j_0}(z_{j_0}) = \gamma_{j_0} b(y_{j_0}) \neq 0$. Então

$$\begin{aligned} |b_{j_0}(c_{2j_0} \otimes z_{j_0} - \rho_{1,j_0}^{-1}\tau_{1j_0}^k a_{2j_0} \otimes y_{j_0})(x_{2j_0})| &= |c_{2j_0}(x_{2j_0})b_{j_0}(z_{j_0}) - \rho_{1,j_0}^{-1}\tau_{1j_0}^k a_{2j_0}(x_{2j_0})b_{j_0}(y_{j_0})| \\ &= |1.b_{j_0}(z_{j_0}) - 0.b_{j_0}(y_{j_0})| \\ &= |b_{j_0}(z_{j_0})| \ \neq 0. \end{aligned}$$

Seja $\nu = \min\{1, |c_{2j_0}(x_{2j_0})|, |b_{j_0}(z_{j_0})|\}$, então por (1),(2) e (3) para $\bar{x}_2 \in E_2$ e $\bar{b} \in F'$ adequados, temos

$$\begin{array}{rcl} \nu & \leq & \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |\bar{b}(c_{2j_0} \otimes z_{j_0} - \rho_{1,j_0}^{-1}\tau_{1j_0}^k a_{2j_0} \otimes y_{j_0})(\bar{x}_2)| \\ & & \downarrow \ k \to \infty \\ & & 0 \end{array}$$

o que é absurdo. Segue então que para cada $j \in \mathbb{N}$, existe γ_j tal que $(\rho_{1,j}^{-1}\tau_{1j}^k a_{2j} \otimes y_j)_{k=1}^{\infty}$ converge a $\gamma_j a_{2j} \otimes y_j$: então se $\tau_{1j} = \rho_{1,j}\gamma_j$, tem-se que $t = (\tau_{1j})_{j=1}^{\infty} \in U_1$ é o limite de $t_{1k} = (\tau_{1j}^k)_{j=1}^{\infty}$.

Para entender bem como funciona, vejamos também como fica para $n = 3$:

Seja $(t_{1k})_{k=1}^{\infty}$ uma seqüência de Cauchy em U_1, $t_{1k} = (\tau_{1j}^k)_{j=1}^{\infty}$:

$$\|t_{1k} - t_{1l}\|_{U_1} = \sup_{\|x_i\| \leq 1} \sup_{\|b\| \leq 1} \sum_{j=1}^{\infty} |\rho_{1j}^{-1}(\tau_{1j}^k - \tau_{1j}^l) a_{2j}(x_2) a_{3j}(x_3) b(y_j)| \leq \epsilon$$

para k, l suficientemente grandes. Vamos considerar a seqüência de Cauchy $(T^k)_{k=1}^{\infty}$, onde

$$T^k = \sum_{j=1}^{\infty}(\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}^k a_{2j}) \otimes a_{3j} \otimes y_j.$$

Como $\mathcal{L}_\sigma(E_2, E_3; F)$ é completo, existe $T = \sum_{j=1}^{\infty} c_{2j} \otimes c_{3j} \otimes z_j$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \|T - T^k\|_\sigma = 0.$$

Mostraremos que para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $\gamma_j \in \mathbb{K}$ tal que $c_{2j} \otimes c_{3j} \otimes z_j = \gamma_j a_{2j} \otimes a_{3j} \otimes y_j$.

Caso contrário, suponha que existe j_0 tal que $c_{2j_0} \otimes c_{3j_0} \otimes z_{j_0} \neq \lambda a_{2j_0} \otimes a_{3j_0} \otimes y_{j_0}$ para cada $\lambda \in \mathbb{K}$. Vamos analisar as sete situações em que isso ocorre:

(1) $c_{2j_0} \neq \lambda a_{2j_0}$, $c_{3j_0} \neq \lambda a_{3j_0}$ e $z_{j_0} \neq \lambda y_{j_0}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Para $M_2 = [a_{2j_0}, c_{2j_0}] \in DimE_2'$ e $M_3 = [a_{3j_0}, c_{3j_0}] \in DimE_3'$, por 0.2.3 podemos encontrar $x_{2j_0} \in E_2$ tal que $c_{2j_0}(x_{2j_0}) = 1$ e $a_{2j_0}(x_{2j_0}) = 0$, $x_{3j_0} \in E_3$ tal que $c_{3j_0}(x_{3j_0}) = 1$ e $a_{3j_0}(x_{3j_0}) = 0$, e por Hahn-Banach podemos encontrar $b_{j_0} \in F'$ tal que $b_{j_0}(z_{j_0}) = 1$ e $b_{j_0}(y_{j_0}) = 0$. Então

$$\begin{aligned}
&|b_{j_0}(c_{2j_0} \otimes c_{3j_0} \otimes z_{j_0} - \rho_{1,j_0}^{-1}\tau_{1j_0}^k a_{2j_0} \otimes a_{3j_0} \otimes y_{j_0})(x_{2j_0}, x_{3j_0})| = \\
&= |c_{2j_0}(x_{2j_0})c_{3j_0}(x_{3j_0})b_{j_0}(z_{j_0}) - \rho_{1,j_0}^{-1}\tau_{1j_0}^k a_{2j_0}(x_{2j_0})a_{3j_0}(x_{3j_0})b_{j_0}(y_{j_0})| \\
&= |1.1.1 - 0.0.0| = 1.
\end{aligned}$$

(2) $c_{2j_0} = \gamma_{2j_0} a_{2j_0}$, $c_{3j_0} \neq \lambda a_{3j_0}$ e $z_{j_0} \neq \lambda y_{j_0}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Considere $x_{2j_0} \in E_2$ tal que $c_{2j_0}(x_{2j_0}) = \gamma_{2j_0} a_{2j_0}(x_{2j_0}) \neq 0$; para $M_3 = [a_{3j_0}, c_{3j_0}] \in DimE_3'$, por 0.2.3 podemos encontrar $x_{3j_0} \in E_3$ tal que $c_{3j_0}(x_{3j_0}) = 1$ e $a_{3j_0}(x_{3j_0}) = 0$, e por Hahn-Banach podemos encontrar $b_{j_0} \in F'$ tal que $b_{j_0}(z_{j_0}) = 1$ e $b_{j_0}(y_{j_0}) = 0$. Então

$$\begin{aligned}
&|b_{j_0}(c_{2j_0} \otimes c_{3j_0} \otimes z_{j_0} - \rho_{1,j_0}^{-1}\tau_{1j_0}^k a_{2j_0} \otimes a_{3j_0} \otimes y_{j_0})(x_{2j_0}, x_{3j_0})| = \\
&= |c_{2j_0}(x_{2j_0})c_{3j_0}(x_{3j_0})b_{j_0}(z_{j_0}) - \rho_{1,j_0}^{-1}\tau_{1j_0}^k a_{2j_0} a_{3j_0}(x_{3j_0})b_{j_0}(y_{j_0})| \\
&= |c_{2j_0}(x_{2j_0}).1.1 - \rho_{1,j_0}^{-1}\tau_{1j_0}^k a_{2j_0}(x_{2j_0}).0.0| \\
&= |c_{2j_0}(x_{2j_0})| \neq 0.
\end{aligned}$$

(3) $c_{2j_0} \neq \lambda a_{2j_0}$, $c_{3j_0} = \gamma_{3j_0} a_{3j_0}$ e $z_{j_0} \neq \lambda y_{j_0}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Para $M_2 = [a_{2j_0}, c_{2j_0}] \in DimE_2'$, por 0.2.3 podemos encontrar $x_{2j_0} \in E_2$ tal que $c_{2j_0}(x_{2j_0}) = 1$ e $a_{2j_0}(x_{2j_0}) = 0$, considero $x_{3j_0} \in E_3$ tal que $c_{3j_0}(x_{3j_0}) = \gamma_{3j_0} a_{3j_0}(x_{3j_0}) \neq 0$, e por Hahn-Banach podemos encontrar $b_{j_0} \in F'$ tal que $b_{j_0}(z_{j_0}) = 1$ e $b_{j_0}(y_{j_0}) = 0$. Então

$$\begin{aligned}
&|b_{j_0}(c_{2j_0} \otimes c_{3j_0} \otimes z_{j_0} - \rho_{1,j_0}^{-1}\tau_{1j_0}^k a_{2j_0} \otimes a_{3j_0} \otimes y_{j_0})(x_{2j_0}, x_{3j_0})| = \\
&= |c_{2j_0}(x_{2j_0})c_{3j_0}(x_{3j_0})b_{j_0}(z_{j_0}) - \rho_{1,j_0}^{-1}\tau_{1j_0}^k a_{2j_0}(x_{2j_0})a_{3j_0}(x_{3j_0})b_{j_0}(y_{j_0})|
\end{aligned}$$

$$= |1.c_{3j_0}(x_{3j_0}).1 - 0.a_{3j_0}(x_{3j_0}).0|$$
$$= |c_{3j_0}(x_{3j_0})| \neq 0.$$

(4) $c_{2j_0} \neq \lambda a_{2j_0}$, $c_{3j_0} \neq \lambda a_{3j_0}$ e $z_{j_0} = \gamma_{j_0} y_{j_0}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Para $M_2 = [a_{2j_0}, c_{2j_0}] \in DimE_2'$ e $M_3 = [a_{3j_0}, c_{3j_0}] \in DimE_3'$, por 0.2.3 podemos encontrar $x_{2j_0} \in E_2$ tal que $c_{2j_0}(x_{2j_0}) = 1$ e $a_{2j_0}(x_{2j_0}) = 0$, e $x_{3j_0} \in E_3$ tal que $c_{3j_0}(x_{3j_0}) = 1$ e $a_{3j_0}(x_{3j_0}) = 0$, e existe $b \in F'$ tal que $b(z_{j_0}) = \gamma_{j_0} b(y_{j_0}) \neq 0$.

$$|b(c_{2j_0} \otimes c_{3j_0} \otimes z_{j_0} - \rho_{1,j_0}^{-1} \tau_{1j_0}^k a_{2j_0} \otimes a_{3j_0} \otimes y_{j_0})(x_{2j_0}, x_{3j_0})| =$$
$$= |c_{2j_0}(x_{2j_0}) c_{3j_0}(x_{3j_0}) b(z_{j_0}) - \rho_{1,j_0}^{-1} \tau_{1j_0}^k a_{2j_0}(x_{2j_0}) a_{3j_0}(x_{3j_0}) b(y_{j_0})|$$
$$= |1.1.b(z_{j_0}) - 0.0.b(y_{j_0})|$$
$$= |b(z_{j_0})| \neq 0.$$

(5) $c_{2j_0} = \gamma_{2j_0} a_{2j_0}$, $c_{3j_0} = \gamma_{3j_0} a_{3j_0}$ e $z_{j_0} \neq \lambda y_{j_0}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Considere $x_2 \in E_2$ tal que $c_{2j_0}(x_2) = \gamma_{2j_0} a_{2j_0}(x_2) \neq 0$, $x_3 \in E_3$ tal que $c_{3j_0}(x_3) = \gamma_{3j_0} a_{3j_0}(x_3) \neq 0$, e por Hahn-Banach podemos encontrar $b_{j_0} \in F'$ tal que $b_{j_0}(z_{j_0}) = 1$ e $b_{j_0}(y_{j_0}) = 0$. Então

$$|b_{j_0}(c_{2j_0} \otimes c_{3j_0} \otimes z_{j_0} - \rho_{1,j_0}^{-1} \tau_{1j_0}^k a_{2j_0} \otimes a_{3j_0} \otimes y_{j_0})(x_2, x_3)| =$$
$$= |c_{2j_0}(x_2) c_{3j_0}(x_3) b_{j_0}(z_{j_0}) - \rho_{1,j_0}^{-1} \tau_{1j_0}^k a_{2j_0}(x_2) a_{3j_0}(x_3) b_{j_0}(y_{j_0})|$$
$$= |c_{2j_0}(x_2).c_{3j_0}(x_3).1 - \rho_{1,j_0}^{-1} \tau_{1j_0}^k a_{2j_0}(x_2) a_{3j_0}(x_3).0|$$
$$= |c_{2j_0}(x_2) c_{3j_0}(x_3)| \neq 0.$$

(6) $c_{2j_0} = \gamma_{2j_0} a_{2j_0}$, $c_{3j_0} \neq \lambda a_{3j_0}$ e $z_{j_0} = \gamma_{j_0} y_{j_0}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Escolho $x_2 \in E_2$ tal que $c_{2j_0}(x_2) = \gamma_{2j_0} a_{2j_0}(x_2) \neq 0$; para $M_3 = [a_{3j_0}, c_{3j_0}] \in DimE_3'$, por 0.2.3 podemos encontrar $x_{3j_0} \in E_3$ tal que $c_{3j_0}(x_{3j_0}) = 1$ e $a_{3j_0}(x_{3j_0}) = 0$, e seja $b \in F'$ tal que $b(z_{j_0}) = \gamma_{j_0} b(y_{j_0}) \neq 0$. Então

$$|b(c_{2j_0} \otimes c_{3j_0} \otimes z_{j_0} - \rho_{1,j_0}^{-1} \tau_{1j_0}^k a_{2j_0} \otimes a_{3j_0} \otimes y_{j_0})(x_2, x_{3j_0})| =$$
$$= |c_{2j_0}(x_2) c_{3j_0}(x_{3j_0}) b(z_{j_0}) - \rho_{1,j_0}^{-1} \tau_{1j_0}^k a_{2j_0}(x_2) a_{3j_0}(x_{3j_0}) b(y_{j_0})|$$
$$= |c_{2j_0}(x_2).1.b(z_{j_0}) - a_{2j_0}(x_2)0.b(y_{j_0})|$$
$$= |c_{2j_0}(x_2) b(z_{j_0})| \neq 0.$$

(7) $c_{2j_0} \neq \lambda a_{2j_0}$, $c_{3j_0} = \gamma_{3j_0} a_{3j_0}$ e $z_{j_0} = \gamma_{j_0} y_{j_0}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Para $M_2 = [a_{2j_0}, c_{2j_0}] \in DimE_2'$, por 0.2.3 podemos encontrar $x_{2j_0} \in E_2$ tal que $c_{2j_0}(x_{2j_0}) = 1$ e $a_{2j_0}(x_{2j_0}) = 0$, escolho $x_3 \in E_3$ tal que $c_{3j_0}(x_3) = \gamma_{3j_0} a_{3j_0}(x_3) = 0$, e $b \in F'$ tal que $b(z_{j_0}) = \gamma_{j_0} b(y_{j_0}) = 0$. Então

$$\begin{aligned}
&|b(c_{2j_0}\otimes c_{3j_0}\otimes z_{j_0}-\rho^{-1}_{1,j_0}\tau^k_{1j_0}a_{2j_0}\otimes a_{3j_0}\otimes y_{j_0})(x_{2j_0},x_3)| \;=\\
&= \;|c_{2j_0}(x_{2j_0})c_{3j_0}(x_3)b(z_{j_0})-\rho^{-1}_{1,j_0}\tau^k_{1j_0}a_{2j_0}(x_{2j_0})a_{3j_0}(x_3)b(y_{j_0})|\\
&= \;|1.c_{3j_0}(x_3)b(z_{j_0})-\rho^{-1}_{1,j_0}\tau^k_{1j_0}0.a_{3j_0}(x_3)b(y_{j_0})|\\
&= \;|1.c_{3j_0}(x_3)b(z_{j_0})|\neq\; 0.
\end{aligned}$$

Seja $\nu=\min\{1,\ |c_{2j_0}(x_2)|,\ |c_{3j_0}(x_3)|,\ |b(z_{j_0})|,\ |c_{2j_0}(x_2).c_{3j_0}(x_3)|,\ |c_{2j_0}(x_2).b(z_{j_0})|,\ |c_{3j_0}(x_3).b(z_{j_0})|\}$, então por (1) a (7) para $\bar{x}_2\in E_2$, $\bar{x}_3\in E_3$ e $\bar{b}\in F'$ adequados, temos

$$\begin{aligned}
\nu \;\leq\; &\sum_{j=1}^{\infty}|\bar{b}(c_{2j_0}\otimes c_{3j_0}\otimes z_{j_0}-\rho^{-1}_{1,j_0}\tau^k_{1j_0}a_{2j_0}\otimes a_{3j_0}\otimes y_{j_0})(\bar{x}_2,\bar{x}_3)|\\
&\qquad\qquad\downarrow\ k\to\infty\\
&\qquad\qquad 0
\end{aligned}$$

o que é absurdo. Segue então que para cada $j\in\mathbb{N}$, existe γ_j tal que $(\rho^{-1}_{1,j}\tau^k_{1j}a_{2j}\otimes a_{3j}\otimes y_j)_{k=1}^{\infty}$ converge a $\gamma_j a_{2j}\otimes a_{3j}\otimes y_j$: então se $\tau_{1j}=\rho^{-1}_{1,j}\gamma_j$, tem-se que $t=(\tau_{1j})_{j=1}^{\infty}\in U_1$ é o limite de $t_{1k}=(\tau^k_{1j})_{j=1}^{\infty}$.

Então, podemos definir

$$\begin{aligned}
A_1:\ E_1 &\longrightarrow U_1\\
x_1 &\mapsto (a_{1j}(x_1))_{j=1}^{\infty}
\end{aligned}$$

Seja $P_{1m}(\tau_{11},\ldots,\tau_{1m},\tau_{1m+1},\ldots)=(\tau_{11},\ldots,\tau_{1m},0,0,\ldots)$ a projeção canônica usual em U_1. Com $n=2$ temos:

$$\begin{aligned}
\|(A_1-P_{1m}A_1)(\bar{x}_1)\|_{U_1} \;&=\; \|(a_{1j}(\bar{x}_1))_{j=m+1}^{\infty}\|_{U_1}\\
&=\; \sup_{\|x_2\|\leq 1}\sup_{\|b\|\leq 1}\sum_{j=m+1}^{\infty}|\rho^{-1}_{1j}a_{1j}(\bar{x}_1)a_{2j}(x_2)b(y_j)|\\
&=\; \sup_{\|x_2\|\leq 1}\sup_{\|b\|\leq 1}\sum_{j=m+1}^{\infty}\rho_{1j}|\rho^{-2}_{1j}a_{1j}(\bar{x}_1)a_{2j}(x_2)b(y_j)|\\
&\leq\; \rho_{1,m+1}\|\bar{x}_1\|\sup_{\|x_k\|=1}\sup_{\|b\|\leq 1}\sum_{j=m+1}^{\infty}|\rho^{-2}_{1j}a_{1j}(x_1)a_{2j}(x_2)b(y_j)|\\
\text{(por 1.5.5: eq3)}\quad &\leq\; \rho_{1,m+1}\|S\|_{\sigma}(1+\epsilon)^2\|\bar{x}_1\|\\
&=\; \rho_{1,m+1}(1+\epsilon)^2\|S\|_{\sigma}\|\bar{x}_1\| \qquad (1.5.5\text{: eq5})
\end{aligned}$$

que converge a zero, quando m tende a infinito, mostrando que A_1 é aproximável.

$$\begin{aligned}
\|(A_1)(\bar{x}_1)\|_{U_1} &= \|(a_{1j}(\bar{x}_1))_{j=1}^{\infty}\|_{U_1} \\
&= \sup_{\|x_2\|\leq 1} \sup_{\|b\|\leq 1} \sum_{j=1}^{\infty} |\rho_{1j}^{-1} a_{1j}(\bar{x}_1) a_{2j}(x_2) b(y_j)| \\
&= \sup_{\|x_2\|\leq 1} \sup_{\|b\|\leq 1} \sum_{j=1}^{\infty} \rho_{1j} |\rho_{1j}^{-2} a_{1j}(\bar{x}_1) a_{2j}(x_2) b(y_j)| \\
&\leq \rho_{1,1} \|\bar{x}_1\| \sup_{\|x_k\|=1} \sup_{\|b\|\leq 1} \sum_{j=1}^{\infty} |\rho_{1j}^{-2} a_{1j}(x_1) a_{2j}(x_2) b(y_j)| \\
\text{(por 1.5.5: eq3)} \quad &\leq \rho_{1,1} \|S\|_{\sigma} (1+\epsilon)^2 \|\bar{x}_1\| \\
&= (1+\epsilon)^2 \|S\|_{\sigma} \|\bar{x}_1\|. \qquad \text{(1.5.5: eq6)}
\end{aligned}$$

Isso mostra que $\|A_1\| \leq (1+\epsilon)^2 \|S\|_{\sigma}$.

A seguir, considere

$$\sigma_{2,k} = \sup_{\|t_1\|_{U_1}\leq 1} \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=k}^{\infty} \rho_{1j}^{-1} |\tau_{1j} a_{2j}(x_2) \ldots a_{nj}(x_n) b(y_j)| \xrightarrow{k\to\infty} 0, \qquad \text{(1.5.5: eq7)}$$

e note que $\sigma_{2,1} = 1$. Vamos construir $(\rho_{2j}) \in c_0$ com $1 \geq \rho_{2,1} \geq \rho_{2,2} \geq \ldots \geq \rho_{2j} \geq \ldots > 0$ e satisfazendo

$$\sum_{j=1}^{\infty} \rho_{2j}^{-2} \rho_{1j}^{-1} |\tau_{1j} a_{2j}(x_2) \ldots a_{nj}(x_n) b(y_j)| \leq (1+\epsilon) \|t_1\|_{U_1} \|x_2\| \ldots \|x_n\| \|b\|. \qquad \text{(1.5.5: eq8)}$$

Se existe $m = \max\{j \in \mathbb{N} : \sigma_{2,j} > 0\}$, definimos

$$\rho_{2j} = \begin{cases} (1+\epsilon)^{-1/2} & , \ j \leq m; \\ (1+j\epsilon)^{-1/2} & , \ j > m \end{cases}$$

que certamente satisfaz 1.5.5: eq8. Para o caso em que $\sigma_{2,j} > 0$ para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$(\sigma_{2,m+1})^{1/2} \leq \min\left\{\frac{\epsilon}{2}\sigma_{2,1}, 1\right\}. \qquad \text{(1.5.5: eq9)}$$

Fixe um m satisfazendo 1.5.5: eq9, e seja

$$\rho_{2j} := \begin{cases} 1 & , se \ j \leq m; \\ (\sigma_{2,j})^{1/4} & , se \ j > m. \end{cases}$$

Como $\sigma_{2,j} \longrightarrow 0$, então $\rho_{2j} \longrightarrow 0$ e $(\rho_{2j}) \in c_0$. Além disso, $1 \geq \rho_{2,1} \geq \ldots \geq \rho_{2j} \geq \ldots > 0$. Para simplificar a notação, chame

$$B_j := \rho_{1j}^{-1}\Big|\frac{\tau_{1j}}{\|t_1\|_{U_1}} a_{2j}\Big(\frac{x_2}{\|x_2\|}\Big)\dots a_{nj}\Big(\frac{x_n}{\|x_n\|}\Big)\frac{b(y_j)}{\|b\|}\Big| \qquad\qquad (\|x_i\|, \|b\| \neq 0).$$

Note que $\sum_{j=k}^{\infty} B_j \leq \sigma_{2k}$. Para cada $M > m$, segue que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{M} \rho_{2,k}^{-2}\rho_{1,k}^{-1}|\tau_{1k}a_{2k}(x_2)\dots a_{nk}(x_n)b(y_k)| \ &= \ \sum_{k=1}^{m} \rho_{1,k}^{-1}|\tau_{1k}a_{2k}(x_2)\dots a_{nk}(x_n)b(y_k)| + \\
&\sum_{k=m+1}^{M} \rho_{2,k}^{-2}\Big[\Big((\sum_{j=k}^{M+1} \rho_{1j}^{-1}|\tau_{1j}a_{2j}(x_2)\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)|)^{1/4}\Big)^4 - \\
&\quad \Big((\sum_{j=k+1}^{M+1} \rho_{1j}^{-1}|\tau_{1j}a_{2j}(x_2)\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)|)^{1/4}\Big)^4\Big] \\
= \ &\sum_{k=1}^{m} \rho_{1,k}^{-1}|\tau_{1k}a_{2k}(x_2)\dots a_{nk}(x_n)b(y_k)| + \sum_{k=m+1}^{M} ((\sigma_{2,k})^{1/4})^{-2}. \\
&\Big[\Big((\sum_{j=k}^{M+1} \rho_{1j}^{-1}|\tau_{1j}a_{2,j}(x_2)\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)|)^{1/4}\Big)^2 + \Big((\sum_{j=k+1}^{M+1} \rho_{1j}^{-1}|\tau_{1j}a_{2j}(x_2)\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)|)^{1/4}\Big)^2\Big]. \\
&\Big[\Big((\sum_{j=k}^{M+1} \rho_{1j}^{-1}|\tau_{1j}a_{2j}(x_2)\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)|)^{1/4}\Big)^2 - \Big((\sum_{j=k+1}^{M+1} \rho_{1j}^{-1}|\tau_{1j}a_{2j}(x_2)\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)|)^{1/4}\Big)^2\Big] \\
\leq \ &\|t_1\|_{U_1}\|x_2\|\dots\|x_n\|\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{m} B_k + \sum_{k=m+1}^{M} \sigma_{2,k}^{-1/2}. \\
&\quad \Big[\Big(\sum_{j=k}^{M+1} B_j\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} B_j\Big)^{1/2}\Big].\Big[\Big(\sum_{j=k}^{M+1} B_j\Big)^{1/2} - \Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} B_j\Big)^{1/2}\Big]\Big\} \\
\leq \ &\|t_1\|_{U_1}\|x_2\|\dots\|x_n\|\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{m} B_k + \sum_{k=m+1}^{M} 2\Big[\Big(\sum_{j=k}^{M+1} B_j\Big)^{1/2} - \Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} B_j\Big)^{1/2}\Big]\Big\} \\
= \ &\|t_1\|_{U_1}\|x_2\|\dots\|x_n\|\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{m} B_k + 2\Big\{\Big[\Big(\sum_{j=m+1}^{M+1} B_j\Big)^{1/2} - \cancel{\Big(\sum_{j=(m+1)+1}^{M+1} B_j\Big)^{1/2}}\Big] + \Big[\cancel{\Big(\sum_{j=m+2}^{M+1} B_j\Big)^{1/2}} - \\
&\dots - \cancel{\Big(\sum_{j=(M-1)+1}^{M+1} B_j\Big)^{1/2}}\Big] + \Big[\cancel{\Big(\sum_{j=M}^{M+1} B_j\Big)^{1/2}} - \Big(\sum_{j=(M)+1}^{M+1} B_j\Big)^{1/2}\Big]\Big\}\Big\} \\
\leq \ &\|t_1\|_{U_1}\|x_2\|\dots\|x_n\|\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{m} B_k + 2\Big[\Big(\sum_{j=m+1}^{M+1} B_j\Big)^{1/2} - \Big(\sum_{j=(M)+1}^{M+1} B_j\Big)^{1/2}\Big]\Big\} \\
\leq \ &\|t_1\|_{U_1}\|x_2\|\dots\|x_n\|\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} B_k + 2\Big(\sum_{j=m+1}^{\infty} B_j\Big)^{1/2}\Big\} \\
\leq \ &\|t_1\|_{U_1}\|x_2\|\dots\|x_n\|\|b\|\Big\{\sigma_{2,1} + 2.\frac{\epsilon}{2}.\sigma_{2,1}\Big\} \qquad \Big(\text{por 1.5.5: eq9}\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|t_1\|_{U_1}\|x_2\|\dots\|x_n\|\|b\|(1+\epsilon)\sigma_{2,1} \\
&\leq (1+\epsilon)^2\|t_1\|_{U_1}\|x_2\|\dots\|x_n\|\|b\| \qquad \Big(\text{por 1.5.5: eq7}\Big)
\end{aligned}
$$

como queríamos mostrar.

Para $i=2$ definimos o espaço U_2 das seqüências $t_2=(\tau_{2j})_{j=1}^{\infty}$ tais que $\sum_{j=1}^{\infty}\rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}\tau_{2j}a_{3j}\otimes\dots\otimes a_{nj}\otimes y_j$ está em $\mathcal{L}_\sigma(E_3,\dots,E_n;F)$ sempre que $t_1=(\tau_{1j})_{j=1}^{\infty}\in U_1$. Nesse espaço definimos a norma

$$\|t_2\|_{U_2} = \sup_{\|t_1\|_{U_1}\leq 1}\ \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\sum_{j=1}^{\infty}\rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}|\tau_{1j}\tau_{2j}a_{3j}(x_3)\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)|.$$

Mostraremos que U_2 é espaço completo. Para simplificar a notação faremos para o caso n=3. Seja $(t^k)_{k=1}^{\infty}$ uma seqüência de Cauchy em U_2, $t^k=(\tau_{2j}^k)_{j=1}^{\infty}$:

$$\|t^k-t^l\|_{U_2} = \sup_{\|t_1\|_{U_1}\leq 1}\ \sup_{\|x_3\|\leq 1}\ \sup_{\|b\|\leq 1}\sum_{j=1}^{\infty}|\rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}(\tau_{2j}^k-\tau_{2j}^l)a_{3j}(x_3)b(y_j)|\leq\epsilon$$

para k,l suficientemente grandes. Vamos considerar a seqüência de Cauchy $(T^k)_{k=1}^{\infty}$, onde

$$T^k = \sum_{j=1}^{\infty}(\rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}\tau_{2j}^k a_{3j})\otimes y_j = \sum_{j=1}^{\infty}(\rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{2j}^k a_{3j})\otimes(\tau_{1j}y_j).$$

Como $\mathcal{L}_\sigma(E_3;F)$ é completo, existe $T=\sum_{j=1}^{\infty}c_{3j}\otimes z_j$ tal que

$$\lim_{k\to\infty}\|T-T^k\|_\sigma=0.$$

Mostraremos que para cada $j\in\mathbb{N}$ existe $\gamma_j\in\mathbb{K}$ tal que $c_{3j}\otimes z_j=\gamma_j a_{3j}\otimes(\tau_{1j}y_j)$.

Caso contrário, suponha que existe j_0 tal que $c_{3j_0}\otimes z_{j_0}\neq\lambda a_{3j_0}\otimes(\tau_{1j_0}y_{j_0})$ para cada $\lambda\in\mathbb{K}$. Vamos analisar as três situações em que isso ocorre:

(1) $c_{3j_0}\neq\lambda a_{3j_0}$ e $z_{j_0}\neq\lambda\tau_{1j_0}y_{j_0}$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$.

Se $M=[a_{3j_0},c_{3j_0}]\in DimE_3'$, por 0.2.3 podemos encontrar $x_{3j_0}\in E_3$ tal que $c_{3j_0}(x_{3j_0})=1$ e $a_{3j_0}(x_{3j_0})=0$, e por Hahn-Banach podemos encontrar $b_{j_0}\in F'$ tal que $b_{j_0}(z_{j_0})=1$ e $b_{j_0}(\tau_{1j_0}y_{j_0})=0$. Então

$$
\begin{aligned}
\Big|b_{j_0}\Big(c_{3j_0}\otimes z_{j_0}-\rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{2j}^k a_{3j}\otimes(\tau_{1j_0}y_{j_0})\Big)(x_{3j_0})\Big| &= |c_{3j_0}(x_{3j_0})b_{j_0}(z_{j_0})-\rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{2j}^k a_{3j}(x_{3j_0})b_{j_0}(\tau_{1j_0}y_{j_0})| \\
&= |1.1-0.0| = 1.
\end{aligned}
$$

(2) $c_{3j_0}=\gamma_{3j_0}a_{3j_0}$ e $z_{j_0}\neq\lambda(\tau_{1j_0}y_{j_0})$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$.

Considere $x_{3j_0}\in E_3$ tal que $c_{3j_0}(x_{3j_0})=\gamma_{3j_0}a_{3j_0}(x_{3j_0})\neq 0$, e por Hahn-Banach podemos encontrar $b_{j_0}\in F'$ tal que $b_{j_0}(z_{j_0})=1$ e $b_{j_0}(\tau_{1j_0}y_{j_0})=0$. Então

$$\begin{aligned}|b_{j_0}(c_{3j_0}\otimes z_{j_0}-\rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{2j}^{k}a_{3j}\otimes(\tau_{1j_0}y_{j_0}))(x_{3j_0})| &= |c_{3j_0}(x_{3j_0})b_{j_0}(z_{j_0})-\rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{2j}^{k}a_{3j}(x_{3j_0})b_{j_0}(\tau_{1j_0}y_{j_0})|\\ &= |c_{3j_0}(x_{3j_0}).1-\rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{2j}^{k}a_{3j}(x_{3j_0}).0|\\ &= |c_{3j_0}(x_{3j_0})| \neq 0.\end{aligned}$$

(3) $c_{3j_0}\neq\lambda a_{3j_0}$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$ e $z_{j_0}=\gamma_{j_0}\tau_{1j_0}y_{j_0}$.

Se $M=[a_{3j_0},c_{3j_0}]\in DimE_3'$, por 0.2.3 podemos encontrar $x_{3j_0}\in E_3$ tal que $c_{3j_0}(x_{3j_0})=1$ e $a_{3j_0}(x_{3j_0})=0$, e seja $b_{j_0}\in F'$ tal que $b_{j_0}(z_{j_0})=\gamma_{j_0}b_{j_0}(\tau_{1j_0}y_{j_0})\neq 0$. Então

$$\begin{aligned}&\left|b_{j_0}\Big(c_{3j_0}\otimes z_{j_0}-\rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{2j}^{k}a_{3j}\otimes(\tau_{1j_0}y_{j_0})\Big)(x_{3j_0})\right| =\\ &\quad= |c_{3j_0}(x_{3j_0})b_{j_0}(z_{j_0})-\rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{2j}^{k}a_{3j}(x_{3j_0})b_{j_0}(\tau_{1j_0}y_{j_0})|\\ &\quad= |1.b_{j_0}(z_{j_0})-0.b_{j_0}(\tau_{1j_0}y_{j_0})|\\ &\quad= |b_{j_0}(z_{j_0})| \neq 0.\end{aligned}$$

Seja $\nu=\min\{1,|c_{3j_0}(x_{3j_0})|,|bj_0(z_{j_0})|\}$, então por (1),(2) e (3) para $\bar{x}_3\in E_3$ e $\bar{b}\in F'$ adequados, temos

$$\begin{array}{ccl}\nu & \leq & \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}|\bar{b}(c_{3j_0}\otimes z_{j_0}-\rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{2j}^{k}a_{3j}\otimes(\tau_{1j}y_{j_0})(\bar{x}_3)|\\ & & \qquad\qquad\downarrow\ k\to\infty\\ & & \qquad\qquad 0\end{array}$$

o que é absurdo. Segue então que para cada $j\in\mathbb{N}$, existe γ_j tal que $(\rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{2j}^{k}a_{3j}\otimes(\tau_{1j}y_j))_{k=1}^{\infty}$ converge a $\gamma_j a_{3j}\otimes(\tau_{1j}y_j)$: então se $\tau_{2j}=\rho_{2j}\rho_{1j}\gamma_j$, tem-se que $t_2=(\tau_{2j})_{j=1}^{\infty}\in U_2$ é o limite de $t_{2k}=(\tau_{2j}^{k})_{j=1}^{\infty}$

Então, podemos definir

$$\begin{array}{rccc}A_2: & E_2 & \longrightarrow & U_2\\ & x_2 & \mapsto & (a_{2j}(x_2))_{j=1}^{\infty}\end{array}$$

Seja $P_{2m}(\tau_{21},\dots,\tau_{2m},\tau_{2m+1},\dots)=(\tau_{21},\dots,\tau_{2m},0,0,\dots)$ a projeção canônica usual em U_2. Com $n=3$ temos:

$$\begin{aligned}\|(A_2-P_{2m}A_2)(\bar{x}_2)\|_{U_2} &= \|(a_{2j}(\bar{x}_2))_{j=m+1}^{\infty}\|_{U_2}\\ &= \sup_{\|t_1\|_{U_1}\leq 1}\ \sup_{\substack{\|x_3\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\ \sum_{j=m+1}^{\infty}|\rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}a_{2j}(\bar{x}_2)a_{3j}(x_3)b(y_j)|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\|t_1\|_{U_1}\le 1} \sup_{\substack{\|x_3\|\le 1\\ \|b\|\le 1}} \sum_{j=m+1}^{\infty} \rho_{2j} |\rho_{2j}^{-2}\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j} a_{2j}(\bar{x}_2) a_{3j}(x_3) b(y_j)| \\
&\le \rho_{2,m+1}\|\bar{x}_2\| \sup_{\|t_1\|_{U_1}\le 1} \sup_{\substack{\|x_k\|\le 1\\ \|b\|\le 1}} \sum_{j=m+1}^{\infty} |\rho_{2j}^{-2}\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j} a_{2j}(x_2) a_{3j}(x_3) b(y_j)| \\
\text{(por 1.5.5: eq8)} &\le \rho_{2,m+1}\|\bar{x}_2\| \sup_{\|t_1\|_{U_1}\le 1} \sup_{\substack{\|x_k\|\le 1\\ \|b\|\le 1}} \|t_1\|_{U_1}\|x_2\|\|x_3\|\|b\|| \\
&\le \rho_{2,m+1}(1+\epsilon)\|\bar{x}_2\|
\end{aligned}
$$

que converge a zero, quando m tende a infinito, mostrando que A_2 é aproximável.

$$
\begin{aligned}
\|(A_2)(\bar{x}_2)\|_{U_2} &= \|(a_{2j}(\bar{x}_2))_{j=1}^{\infty}\|_{U_2} \\
&= \sup_{\|t_1\|_{U_1}\le 1} \sup_{\substack{\|x_3\|\le 1\\ \|b\|\le 1}} \sum_{j=1}^{\infty} |\rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j} a_{2j}(\bar{x}_2) a_{3j}(x_3) b(y_j)| \\
&= \sup_{\|t_1\|_{U_1}\le 1} \sup_{\substack{\|x_3\|\le 1\\ \|b\|\le 1}} \sum_{j=1}^{\infty} \rho_{2j} |\rho_{2j}^{-2}\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j} a_{2j}(\bar{x}_2) a_{3j}(x_3) b(y_j)| \\
&\le \rho_{2,1}\|\bar{x}_2\| \sup_{\|t_1\|_{U_1}\le 1} \sup_{\substack{\|x_k\|\le 1\\ \|b\|\le 1}} \sum_{j=1}^{\infty} |\rho_{2j}^{-2}\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j} a_{2j}(x_2) a_{3j}(x_3) b(y_j)| \\
\text{(por 1.5.5: eq8)} &\le \|\bar{x}_2\| \sup_{\|t_1\|_{U_1}\le 1} \sup_{\substack{\|x_k\|\le 1\\ \|b\|\le 1}} \|t_1\|_{U_1}\|x_2\|\|x_3\|\|b\|| \\
&\le (1+\epsilon)\|\bar{x}_2\|.
\end{aligned}
$$

Logo $\|A_2\| \le (1+\epsilon)$. De modo análogo, para cada $i = 3, \dots, n-1$, se

$$
\sigma_{i,k} = \sup_{\substack{\|t_k\|_{U_k}\le 1,\ k<i\\ \|x_k\|\le 1,\ k>i\\ \|b\|\le 1}} \sum_{j=k}^{\infty} \rho_{i,j}^{-1} \dots \rho_{1j}^{-1} |\tau_{1j} \dots \tau_{i-1j} a_{ij}(x_i) \dots a_{nj}(x_n) b(y_j)|,
$$

construímos seqüências $(\rho_{i,j}) \in c_0$, com $1 \ge \rho_{i,1} \ge \rho_{i,2} \ge \dots \ge \rho_{i,j} \ge \dots > 0$, e satisfazendo

$$
\begin{aligned}
\sup_{\substack{\|t_k\|_{U_k}\le 1\\ k<i}} \sup_{\substack{\|x_k\|\le 1\\ k\ge i}} \sup_{\|b\|\le 1} \sum_{j=1}^{\infty} \rho_{i,j}^{-2}\rho_{i-1,j}^{-1} \dots \rho_{1j}^{-1}\tau_{1j} \dots \tau_{i-1j} a_{ij}(x_i) a_{i+1j}(x_{i+1}) \dots a_{nj}(x_n) y_j \le \\
\le \ (1+\epsilon)\|\tau_{1j}\|_{U_1} \dots \|\tau_{i-1j}\|_{U_{i-1}}\|x_i\| \dots \|x_n\|.
\end{aligned}
$$

A seguir definimos espaços U_i das seqüências $t_i = (\tau_{ij})_{j=1}^{\infty}$ tais que para cada $t_k = (\tau_{kj})_{j=1}^{\infty} \in U_k$ com $k < i$

$$
\sum_{j=1}^{\infty} \rho_{i,j}^{-1} \dots \rho_{1j}^{-1}\tau_{1j} \dots \tau_{i-1j}\tau_{ij} a_{i+1j}(x_{i+1}) \dots a_{nj}(x_n) y_j \in \mathcal{L}_{\sigma}(E_{i+1}, \dots, E_n; F)
$$

e com norma

$$\|t_i\|_{U_i} = \sup_{\substack{\|t_i\|_{U_i}=1,\ k<i \\ \|x_k\|\leq 1,\ k>i \\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=1}^{\infty} |\rho_{i,j}^{-1} \dots \rho_{1j}^{-1} \tau_{1j} \dots \tau_{i-1j}\tau_{ij} a_{i+1j}(x_{i+1}) \dots a_{nj}(x_n) b(y_j)|.$$

Como antes, mostra-se que U_i é Banach para cada $i = 3, \dots, n-1$. Também definimos

$$\begin{array}{rccc} A_i: & E_i & \longrightarrow & U_i \\ & x_i & \mapsto & (a_{ij}(x_i))_{j=1}^{\infty}, \end{array}$$

e como nos casos anteriores, tem-se que

$$\|(A_i - P_{im}A_i)(\bar{x}_i)\|_{U_i} \leq \rho_{i,m+1}(1+\epsilon)\|\bar{x}_i\| = \rho_{i,m+1}(1+\epsilon)\|\bar{x}_i\|$$

que converge a zero, quando m tende a infinito, mostrando que A_i é aproximável e como nos casos anteriores tem-se também que

$$\|A_i\| \leq (1+\epsilon). \tag{1.5.5: eq10}$$

Finalmente definimos o espaço U_n das seqüências $t_n = (\tau_{nj})_{j=1}^{\infty}$ tais que para cada $t_k = (\tau_{kj})_{j=1}^{\infty} \in U_k$ com $k < n$

$$\left(\rho_{n,j}^{-1} \dots \rho_{1j}^{-1} \tau_{1j} \dots \tau_{n-1j}\tau_{nj} y_j\right) \in l_1^u(F)$$

e com norma

$$\|t_n\|_{U_n} = \sup_{\substack{\|t_k\|_{U_k}\leq 1,\ k<n \\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=1}^{\infty} |\rho_{n,j}^{-1} \dots \rho_{1j}^{-1} \tau_{1j} \dots \tau_{n-1j}\tau_{nj} b(y_j)|.$$

Como antes, mostra-se que U_n é Banach. Em cada um dos espaços U_i, $e_{ij} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ é uma base; para $i = n$ ela é base hiperortogonal. Sejam $|\alpha_j| \leq |\beta_j|$ para cada $j \in \mathbb{N}$ e $t_i = (\tau_{ij})_{j=1}^{\infty}$ para $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\|_{U_n} = \|(\alpha_j)_{j=1}^{n}\|_{U_n} &= \sup_{\substack{\|t_k\|_{U_k}\leq 1 \\ k<n}} \|(\rho_{n,j}^{-1} \dots \rho_{1j}^{-1} \tau_{1j} \dots \tau_{n-1j}\alpha_j y_j)_{j=1}^{n}\|_1^w \\ &= \sup_{\substack{\|t_k\|_{U_k}\leq 1 \\ k<n}} \sup_{\|b\|\leq 1} \sum_{j=1}^{n} |\rho_{n,j}^{-1} \dots \rho_{1j}^{-1} \tau_{1j} \dots \tau_{n-1j}\alpha_j b(y_j)| \\ &= \sup_{\substack{\|t_k\|_{U_k}\leq 1 \\ k<n}} \sup_{\|b\|\leq 1} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j||\rho_{n,j}^{-1} \dots \rho_{1j}^{-1} \tau_{1j} \dots \tau_{n-1j} b(y_j)| \\ &\leq \sup_{\substack{\|t_k\|_{U_k}\leq 1 \\ k<n}} \sup_{\|b\|\leq 1} \sum_{j=1}^{n} |\beta_j||\rho_{n,j}^{-1} \dots \rho_{1j}^{-1} \tau_{1j} \dots \tau_{n-1j} b(y_j)| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\substack{\|t_k\|_{U_k}\leq 1\\ k<n}} \sup_{\|b\|\leq 1} \sum_{j=1}^{n} |\rho_{n,j}^{-1}\ldots\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}\ldots\tau_{n-1j}\beta_j b(y_j)| \\
&= \sup_{\substack{\|t_k\|_{U_k}\leq 1\\ k<n}} \|(\rho_{n,j}^{-1}\ldots\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}\ldots\tau_{n-1j}\beta_j y_j)_{j=1}^{n}\|_1^{w} \\
&= \|(\beta_j)_{j=1}^{n}\|_{U_n} \;=\; \|\sum_{j=1}^{n}\beta_j e_j\|_{U_n}.
\end{aligned}
$$

Também definimos

$$
\begin{array}{rccc}
A_n: & E_n & \longrightarrow & U_n \\
 & x_n & \mapsto & (a_{nj}(x_n))_{j=1}^{\infty},
\end{array}
$$

e como nos casos anteriores, tem-se que

$$
\|(A_n - P_{nm}A_n)(\bar{x}_n)\|_{U_n} \;\leq\; \rho_{n,m+1}(1+\epsilon)\|\bar{x}_n\|
$$

que converge a zero, quando m tende a infinito, mostrando que A_n é aproximável e obtém-se também que $\|A_n\| \leq (1+\epsilon)$. A seguir definimos:

$$
\begin{array}{rccc}
Y: & U_1 \mathsf{x} \ldots \mathsf{x} U_n & \longrightarrow & F \\
 & ((\tau_{1j})_{j=1}^{\infty},\ldots,(\tau_{nj})_{j=1}^{\infty}) & \mapsto & \sum_{j=1}^{\infty}\tau_{1j}.\ldots.\tau_{nj}y_j.
\end{array}
$$

Pela definição de U_n temos que Y está bem definida, e é diagonal por definição. Vejamos que sua norma é menor ou igual a um.

$$
\begin{aligned}
&\|Y(t_1,\ldots,t_n)\|_F = \|\sum_{j=1}^{\infty}\tau_{1j}\ldots\tau_{nj}y_j\|_F \\
&= \sup_{\|b\|\leq 1} |\sum_{j=1}^{\infty}\tau_{1j}\ldots\tau_{nj}b(y_j)| \\
&= \sup_{\|b\|\leq 1} \sum_{j=1}^{\infty}\rho_{1j}\ldots\rho_{n,j}|\rho_{1j}^{-1}\ldots\rho_{n,j}^{-1}\tau_{1j}\ldots\tau_{nj}b(y_j)| \\
&\leq \rho_{1,1}\ldots\rho_{n,1}\sup_{\|b\|\leq 1}\sum_{j=1}^{\infty}|\rho_{1j}^{-1}\ldots\rho_{n,j}^{-1}\tau_{1j}\ldots\tau_{nj}b(y_j)| \\
&= \rho_{1,1}\ldots\rho_{n,1}\|t_1\|_{U_1}\ldots\|t_{n-1}\|_{U_{n-1}}\sup_{\|b\|\leq 1}\sum_{j=1}^{\infty}|\rho_{1j}^{-1}\ldots\rho_{n,j}^{-1}\frac{\tau_{1j}}{\|t_1\|_{U_1}}\ldots\frac{\tau_{n-1j}}{\|t_{n-1}\|_{U_{n-1}}}\tau_{nj}b(y_j)| \\
&\leq \|t_1\|_{U_1}\ldots\|t_{n-1}\|_{U_{n-1}}\sup_{\substack{\|\bar{t}_i\|_{U_i}\leq 1\\ i<n}}\sup_{\|b\|\leq 1}\sum_{j=1}^{\infty}|\rho_{1j}^{-1}\ldots\rho_{n,j}^{-1}\bar{\tau}_{1j}\ldots\bar{\tau}_{n-1j}\tau_{nj}b(y_j)| \\
&= \|t_1\|_{U_1}\ldots\|t_n\|_{U_n}. \qquad (1.5.5\colon \mathrm{eq}11)
\end{aligned}
$$

Logo resulta que

$$
\begin{aligned}
Y \circ (A_1(x_1), \ldots, A_n(x_n)) &= Y\Big(((a_{1j}(x_1))_{j=1}^{\infty}, \ldots, (a_{nj}(x_n))_{j=1}^{\infty})\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}(x_1) \ldots a_{nj}(x_n) y_j \\
&= S(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\|S(x_1, \ldots, x_n)\| &= \|Y\Big(((a_{1j}(x_1))_{j=1}^{\infty}, \ldots, (a_{nj}(x_n))_{j=1}^{\infty})\Big)\|_F \\
\text{(por 1.5.5: eq11)} \quad &\leq \|A_1(x_1)\|_{U_1} \ldots \|A_n(x_n)\|_{U_n} \\
(A_i\text{'s contínuas}) \quad &\leq \|A_1\| \ldots \|A_n\| \|x_1\| \ldots \|x_n\| \\
\text{(por 1.5.5: eq5 e 1.5.5: eq10)} \quad &\leq \|S\|_\sigma (1+\epsilon)^{n+1} \|x_1\| \ldots \|x_n\|. \qquad \text{(1.5.5: eq12)}
\end{aligned}
$$

Juntando 1.5.5: eq1 e 1.5.5: eq12 obtemos

$$\|S\|_\sigma = \inf_{Y, A_1, \ldots, A_n} \|Y\|.\|A_1\| \ldots .\|A_n\|. \qquad \blacksquare$$

Com este teorema em mãos, temos uma ferramenta para construir aplicações σ-nucleares. Toda vez que tivermos espaços de Banach $E_1, \ldots, E_n, U_1, \ldots, U_n, F$, com algum U_i munido de base hiperortogonal, e construirmos operadores aproximáveis $A_i : E_i \to U_i$ e uma aplicação contínua diagonal $Y : U_i \to F$, então a composição $S = Y \circ (A_1, \ldots, A_n)$ é uma aplicação σ-nuclear, e $\|S\|_\sigma \leq \|Y\| \|A_1\| \ldots \|A_n\|$.

Também é possivel obter o seguinte:

1.5.6 Proposição: *Se uma aplicação multilinear $S \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é σ-nuclear, então existe um diagrama comutativo*

$$
\begin{tikzcd}
E_1 \times \ldots \times E_n \arrow[rr, "S"] \arrow[dr, "A"'] & & F \\
& U \arrow[ur, "Y"'] &
\end{tikzcd}
$$

onde U é espaço de Banach com base de Schauder hiperortogonal, $A \in \mathcal{L}_a(E_1, \ldots, E_n; U)$ e $Y \in \mathcal{L}_a(U; F)$. Neste caso, $\|S\|_\sigma \geq \inf \|Y\| \|A\|$.

A demonstração deste resultado segue a mesma idéia do teorema anterior, porém é bem mais simples:

Demonstração: Seja $S = \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j} \otimes \cdots \otimes a_{nj} \otimes y_j$ σ-nuclear, satisfazendo

$$\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(x_1) \dots a_{nj}(x_n) b(y_j)| < (1+\epsilon)\|S\|_\sigma. \tag{1.5.6: eq1}$$

Note que

$$\sigma_k := \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=k}^{\infty} |a_{1j}(x_1) \dots a_{nj}(x_n) b(y_j)| \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad 0.$$

Constrói-se $(\rho_j) \in c_0$ com $1 \geq \rho_1 \geq \rho_2 \geq \ldots \geq \rho_j \geq \ldots > 0$ e satisfazendo

$$\sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^{-2} |a_{1j}(x_1) \dots a_{nj}(x_n) b(y_j)| \leq (1+\epsilon)^2 \|S\|_\sigma \|x_1\| \dots \|x_n\| \|b\| \tag{1.5.6: eq2}$$

exatamente igual ao feito para (ρ_{1j}) do teorema anterior. Definimos o espaço U das seqüências $t = (\tau_j)_{j=1}^{\infty}$ tais que a seqüência $(\rho_j^{-1}\tau_j y_j)_{j=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável e nele definimos a norma

$$\|t\|_U \quad = \quad \sup_{\|b\|\leq 1} \sum_{j=1}^{\infty} |\rho_j^{-1} \tau_j b(y_j)|.$$

Mostra-se que U é espaço completo e tem base hiperortogonal, da mesma forma que para U_n do teorema anterior. Em seguida definine-se

$$\begin{array}{rccc} A: & E_1 \times \ldots \times E_n & \longrightarrow & U \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (a_{1j}(x_1) \dots a_{nj}(x_n))_{j=1}^{\infty}. \end{array}$$

que é aproximável e tem norma menor ou igual a $(1+\epsilon)^2 \|S\|_\sigma$, e definimos:

$$\begin{array}{rccc} Y: & U & \longrightarrow & F \\ & ((\tau_j)_{j=1}^{\infty}) & \mapsto & \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j y_j. \end{array}$$

que tem norma menor ou igual a um. Daí resulta que

$$\begin{aligned} Y \circ A(x_1, \ldots, x_n) &= Y\Big((a_{1j}(x_1), \ldots, (a_{nj}(x_n))_{j=1}^{\infty}\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}(x_1) \dots a_{nj}(x_n) y_j \\ &= S(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|S(x_1,\ldots,x_n)\| &= \|Y\circ A(x_1,\ldots,x_n)\| \\ (Y \text{ contínua}) &\leq \|Y\|\|A(x_1,\ldots,x_n)\|_U \\ (A \text{ contínua}) &\leq \|Y\|\|A\|\|x_1\|\ldots\|x_n\| \\ &\leq \|S\|_\sigma(1+\epsilon)^2\|x_1\|\ldots\|x_n\|. \end{aligned}$$

Como vale para cada ϵ, segue que

$$\|S\|_\sigma \geq \inf_{Y,A_1,\ldots,A_n} \|Y\|.\|A\|.$$ ■

1.6 Fatoração para aplicações n-lineares $\sigma(p)$-nucleares

Para este o próximo resultado precisaremos da seguinte definição:

1.6.1 Definição: Sejam D_i, E_i, F, G espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. Diremos que uma aplicação multilinear $S : E_1 \mathsf{x} \ldots \mathsf{x} E_n \to F$ é $\sigma_1(p)$-*nuclear*, se admite uma representação da forma

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}\otimes\cdots\otimes a_{nj}\otimes y_j$$

com $a_{ij}\in E_i'$, $y_j\in F$, $i=1,\ldots,n$ e $j\in\mathbb{N}$, onde

$$\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\right)^{1/p} < \infty$$

com

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \left(\sum_{j=m}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\right)^{1/p} = 0.$$

Observe que $x_i\in E_i$ e $b\in F'$. Denotaremos o conjunto dessas aplicações por $\mathcal{L}_{\sigma_1(p)}(E_1,\ldots,E_n;F)$ e nele definimos a seguinte norma:

$$\|S\|_{\sigma_1(p)} = \inf_{\substack{\text{representações}\\ \text{de } S}} \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\right)^{1/p}.$$

Usando o teorema 1.1.1 mostra-se que a classe $\mathcal{L}_{\sigma_1(p)}$ de todas as aplicações n-lineares $\sigma_1(p)$-nucleares sobre espaços de Banach com a norma $\|.\|_{\sigma_1(p)}$ é $\mathcal{L}_n$-módulo de Banach de aplicações n-lineares.

$\vdash$(0): Veja que $I_n \in \mathcal{L}_{\sigma_1(p)}$, pois para $I_n = 1 \otimes \overset{\text{n vezes}}{\cdots} \otimes 1 \otimes 1$, temos $\sup_{\substack{\|\lambda_i\|\leq 1 \\ \|\gamma\|\leq 1}} |1.\lambda_1. \ldots .1.\lambda_n \gamma.1| \leq 1$; como para $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \gamma = 1$ tem-se a igualdade, vemos que $\|I_n\|_{\sigma_1(p)} = 1$.

$\vdash$(1): Sejam $S_1, S_2, \ldots \in \mathcal{L}_{\sigma_1(p)}(E_1, \ldots, E_n; F)$ tais que $\sum_{k=1}^{\infty} \|S_k\|_{\sigma_1(p)} < \infty$, e considere representações tais que para cada k, $S_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}^k \otimes \cdots \otimes a_{nj}^k \otimes y_j^k$ com

$$\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}^k(x_1) \ldots a_{nj}^k(x_n) b(y_j^k)|^p\Big)^{1/p} \ \leq \ (1+\epsilon)\|S_k\|_{\sigma_1(p)}. \tag{1.6.1:eq1}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}^k(x_1) \ldots a_{nj}^k(x_n) b(y_j^k)|^p\Big)^{1/p} \ \leq \\
\text{(des. triang. em } l_p) \ &\leq \ \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}^k(x_1) \ldots a_{nj}^k(x_n) b(y_j^k)|^p\Big)^{1/p} \\
&\leq \ \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}^k(x_1) \ldots a_{nj}^k(x_n) b(y_j^k)|^p\Big)^{1/p} \\
&\leq \ \sum_{k=1}^{\infty}(1+\epsilon)\|S_k\|_{\sigma_1(p)} \\
&= \ (1+\epsilon)\sum_{k=1}^{\infty}\|S_k\|_{\sigma_1(p)} \ < \ \infty.
\end{aligned}$$

Como isso pode ser feito para cada $\epsilon > 0$, se $S = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}^k \otimes \ldots \otimes a_{nj}^k \otimes y_j^k$

$$\|S\|_{\sigma_1(p)} \ \leq \ \sum_{k=1}^{\infty}\|S_k\|_{\sigma_1(p)} \ < \ \infty.$$

Falta mostrar que

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{j=m}^{\infty} |a_{1j}^k(x_1) \ldots a_{nj}^k(x_n) b(y_j)|^p\Big)^{1/p} = 0.$$

Para isso, observe que:

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{j=m}^{\infty} |a_{1j}^k(x_1) \ldots a_{nj}^k(x_n) b(y_j^k)|^p\Big)^{1/p} \ &\leq \ \sum_{k=m}^{\infty}\Big(\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}^k(x_1) \ldots a_{nj}^k(x_n) b(y_j^k)|^p\Big)^{1/p} \\
\text{(por 1.6.1:eq1)} \ &\leq \ \sum_{k=m}^{\infty}(1+\epsilon)\|S_k\|_{\sigma_1(p)} \ < \ \infty
\end{aligned}$$

que converge a zero quando m tende a infinito. Logo, S é $\sigma_1(p)$-nuclear.

$\vdash$(2): Agora considere os operadoes lineares

$$\begin{array}{rccc} T_i: & D_i & \longrightarrow & E_i \\ & u_i & \mapsto & T_i(u_i) \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rccc} R: & F & \longrightarrow & G \\ & y & \mapsto & R(y) \end{array}$$

e uma aplicação multilinear $S : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ em $\mathcal{L}_{\sigma_1(p)}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Quero mostrar que $RS(T_1, \ldots, T_n) \in [\mathcal{L}_{\sigma_1(p)}(D_1, \ldots, D_n; G), \|.\|_{\sigma_1(p)}]$.

$$\begin{aligned} RS(T_1, \ldots, T_n)(u_1, \ldots, u_n) &= RS(T_1(u_1), \ldots, T_n(u_n)) \\ &= R\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}(T_1(u_1)). \ldots .a_{nj}(T_n(u_n)).y_j\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}(T_1(u_1)). \ldots .a_{nj}(T_n(u_n)).R(y_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} T_1'(a_{1j})(u_1). \ldots .T_n'(a_{nj})(u_n).R(y_j). \end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_{\substack{\|u_i\| \le 1 \\ \|c\| \le 1}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |(T_1'a_{1j})(u_1). \ldots .(T_n'a_{nj})(u_n).c(R(y_j))|^p\Big)^{1/p} =$$

$$\begin{aligned} &= \sup_{\substack{\|u_i\| \le 1 \\ \|c\| \le 1}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(T_1u_1). \ldots .a_{nj}(T_nu_n).R'c(y_j)|^p\Big)^{1/p} \\ &= \|T_1\| \ldots \|T_n\| \|R'\| \sup_{\substack{\|u_i\| \le 1 \\ \|c\| \le 1}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}\Big(\frac{T_1u_1}{\|T_1\|}\Big). \ldots .a_{nj}\Big(\frac{T_nu_n}{\|T_n\|}\Big).\frac{R'c}{\|R'\|}(y_j)|^p\Big)^{1/p} \\ &\le \|T_1\| \ldots \|T_n\| \|R\| \sup_{\substack{\|x_i\| \le 1 \\ \|b\| \le 1}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(x_1). \ldots a_{nj}(x_n).b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \end{aligned}$$

para cada representação de S. Por acima temos também que

$$\sup_{\substack{\|u_i\| \le 1 \\ \|c\| \le 1}} \Big(\sum_{j=m}^{\infty} |(T_1'a_{1j})(u_1). \ldots .(T_n'a_{nj})(u_n).c(R(y_j))|^p\Big)^{1/p} \le$$

$$\le \|T_1\| \ldots \|T_n\| \|R\| \sup_{\substack{\|x_i\| \le 1 \\ \|b\| \le 1}} \Big(\sum_{j=m}^{\infty} |a_{1j}(x_1). \ldots a_{nj}(x_n).b(y_j)|^p\Big)^{1/p}$$

que tende a zero quando m vai para infinito. Logo $RS(T_1, \ldots, T_n)$ é $\sigma_1(p)$-nuclear e $\|RS(T_1, \ldots, T_n)\|_{\sigma_1(p)} \le \|T_1\|. \ldots \|T_n\|.\|R\| \|S\|_{\sigma_1(p)}$.

Portanto, $\mathcal{L}_{\sigma_1(p)}$ com a norma $\|.\|_{\sigma_1(p)}$ é $\mathcal{L}_n$-módulo de Banach de aplicações n-lineares e portanto temos que $\|S\| \leq \|S\|_{\sigma_1(p)}$ e que $\|a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \otimes y\|_{\sigma_1(p)} = \|a_1\|. \ldots \|a_n\|.\|y\|$.

1.6.2 Teorema (da fatoração para aplicações n-lineares $\sigma(p)$-nucleares): *Uma aplicação multilinear $S \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é $\sigma(p)$-nuclear se e só se existe um diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} E_1 \times \ldots \times E_n \arrow[rr, "S"] \arrow[dr, "A_1 \ \ldots \ A_n"'] & & F \\ & U_1 \times \ldots \times U_n \arrow[ur, "Y"'] & \end{tikzcd}$$

onde os U_i's são espaços de Banach com bases de Schauder $\{e_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ e pelo menos um tem base hiperortogonal, $A_i \in \mathcal{L}_a(E_i; U_i)$ para $i = 1, \ldots, n$, $Y : U_1 \times \ldots \times U_n \to F$ é diagonal, $Y(e_{1j}, \ldots, e_{nj}) = \lambda_j y_j$ com $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{p'}$ e $y_j \in F$ tais que $(\tau_{1j} \ldots \tau_{nj} y_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^u(F)$ para cada $(\tau_{ij})_{j=1}^{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} \tau_{ij} e_{ij} \in U_i$, $i = 1, \ldots, n$. Neste caso, $\|S\|_{\sigma(p)} = \inf \|Y\| \|A_1\| \ldots \|A_n\|$.

Demonstração:

$(\Leftarrow)$ $S = Y \circ (A_1, \ldots, A_n)$. Sejam $\{f_{ij}\}$ os funcionais associados às bases $\{e_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, com $\{e_{1j}\}_{j=1}^{\infty}$ base hiperortogonal. Então se $u_i = A_i(x_i)$ tem-se

$$A_i(x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} f_{ij}(A_i(x_i)).e_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} (A_i' f_{ij})(x_i).e_{ij},$$

bem como

$$\begin{aligned} S(x_1, \ldots, x_n) &= Y(A_1(x_1), \ldots, A_n(x_n)) \\ &= Y\Big(\sum_{j_1=1}^{\infty} (A_1' f_{1j_1})(x_1).e_{1j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{\infty} (A_n' f_{nj_n})(x_n).e_{nj_n}\Big) \\ (Y \text{é } n-\text{linear}) &= \sum_{j_1, \ldots, j_n=1}^{\infty} (A_1' f_{1j_1})(x_1) \ldots (A_n' f_{nj_n})(x_n) Y(e_{1j_1}, \ldots, e_{nj_n}) \\ (Y \text{ é diagonal} \Rightarrow) &= \sum_{j=1}^{\infty} (A_1' \circ f_{1j})(x_1) \ldots (A_n' f_{nj})(x_n) Y(e_{1j}, \ldots, e_{nj}). \end{aligned}$$

Logo, se chamamos $a_{ij} = (A_i' f_{ij}) \in E'$, $i = 1, 2, \ldots, n$, como existem $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{p'}$ e $y_j \in F$ tais que $Y(e_{1j}, \ldots, e_{nj}) = \lambda_j y_j$, então temos a representação

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_{1j} \otimes \cdots \otimes a_{nj} \otimes y_j.$$

Como $(a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)y_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^u(F)$ para cada $x_i \in E_i$, segue que

$$\sup_{\substack{\|x_i\|\le 1\\ \|b\|\le 1}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \le \infty,$$

bem como

$$\sup_{\substack{\|x_i\|\le 1\\ \|b\|\le 1}} \Big(\sum_{j=k}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

mostrando que S é $\sigma(p)$-nuclear. Além disso, temos que:

$$\begin{aligned}
\|S(x_1,\ldots,x_n)\| &= \|\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)y_j\| \\
&\le \sup_{\|b\|\le 1}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(\lambda_j y_j)| \\
&= \sup_{\|b\|\le 1}\sum_{j=1}^{\infty}|A_1'f_{1j}(x_1)\ldots(A_n'f_{nj})(x_n)b\circ Y(e_{1j},\ldots,e_{nj})| \\
(\exists|\varepsilon_j|=1) \quad &= \sup_{\|b\|\le 1}|\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j(A_1'f_{1j})(x_1)\ldots(A_n'f_{nj})(x_n)b\circ Y(e_{1j},\ldots,e_{nj})| \\
(b \text{ linear e } Y n\text{-linear e diagonal}) \quad &= \sup_{\|b\|\le 1}|b\circ Y\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j A_1'f_{1j}(x_1)e_{1j}, \\
&\qquad \sum_{j=1}^{\infty}A_2'f_{2j}(x_2)e_{2j}\ ,\ldots,\ \sum_{j=1}^{\infty}(A_n'f_{nj})(x_n)e_{nj}\Big)| \\
(b \text{ e } Y \text{ contínuas}) \quad &\le \sup_{\|b\|\le 1}\|b\|\|Y\|\Big\|\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j A_1'f_{1j}(x_1)e_{1j}\Big\|_{U_1} \\
&\qquad \Big\|\sum_{j=1}^{\infty}A_2'f_{2j}(x_2)e_{2j}\Big\|_{U_2}\ldots\Big\|\sum_{j=1}^{\infty}(A_n'f_{nj})(x_n)e_{nj}\Big\|_{U_n} \\
(\{e_{1j}\} \text{ é hiperortogonal}) \quad &\le \|Y\|\Big\|\sum_{j=1}^{\infty}(A_1'f_{1j})(x_1)e_{1j}\Big\|_{U_1}\ldots\Big\|\sum_{j=1}^{\infty}A_n'f_{nj}(x_n)e_{nj}\Big\|_{U_n} \\
&= \|Y\|\|A_1(x_1)\|_{U_1}\ldots\|A_n(x_n)\|_{U_n} \\
(A_i \ \text{ contínua } \forall i) \quad &\le \|Y\|\|A_1\|\ldots\|A_n\|\|x_1\|\ldots\|x_n\|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|S\|_{\sigma(p)} \le \inf_{Y,A_1,\ldots,A_n}\|Y\|\|A_1\|\ldots\|A_n\|. \tag{1.6.2:eq1}$$

($\Rightarrow$) Suponha que $S \neq 0$ é $\sigma(p)$-nuclear; dado $\epsilon > 0$, com uma representação $S = \sum_1^{\infty}\lambda_j a_{1j}\otimes\cdots\otimes a_{nj}\otimes y_j$ satisfazendo

$$\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'} \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p} < (1+\epsilon)\|S\|_{\sigma(p)}. \qquad (1.6.2\text{: eq2})$$

Note que

$$\Psi_{1,k} := \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=k}^{\infty} |a_{1j}(x_1)\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Vamos construir $(\rho_{1j}) \in c_0$ com $1 \geq \rho_{11} \geq \rho_{12} \geq \dots \geq \rho_{1j} \geq \dots > 0$ e satisfazendo

$$\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \rho_{1j}^{-2p}|a_{1j}(x_1)\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \leq$$
$$(1+\epsilon)^2\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}^{-1}\|S\|_{\sigma(p)}\|x_1\|\dots\|x_n\|\|b\|. \qquad (1.6.2\text{: eq3})$$

Se existe $m = \max\{j \in \mathbb{N} : \Psi_{1,j} > 0\}$, definimos

$$\rho_{1j} = \begin{cases} (1+\epsilon)^{-1/2} & , \ j \leq m;\\ (1+j\epsilon)^{-1/2} & , \ j > m.\end{cases}$$

Note que para $j > m$,

$$|a_{1j}(x_1)\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)| \leq \Psi_{1,m}\|x_1\|\dots\|x_n\|\|b_j\| = 0.$$

Então

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \rho_{1j}^{-2p}|a_{1j}(x_1)\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p} &= \Big(\sum_{j=1}^{m}(1+\epsilon)^p|a_{1j}(x_1)\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p}\\
&= \|x_1\|\dots\|x_n\|\|b\|(1+\epsilon)\Big(\sum_{j=1}^{m}\Big|a_{1j}\Big(\frac{x_1}{\|x_1\|}\Big)\dots a_{nj}\Big(\frac{x_n}{\|x_n\|}\Big)\frac{b(y_j)}{\|b\|}\Big|^p\Big)^{1/p}\\
(\text{por } 1.6.2\text{: eq2}) &\leq \|x_1\|\dots\|x_n\|\|b\|(1+\epsilon)(1+\epsilon)\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}^{-1}\|S\|_{\sigma(p)}.
\end{aligned}$$

Para o caso em que $\Psi_{1,j} > 0$ para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$(\Psi_{1,m+1})^{p/2} \leq \min\Big\{\frac{\epsilon^p}{2}\Psi_{1,1}^p, 1\Big\}. \qquad (1.6.2\text{: eq4})$$

Fixe um m satisfazendo 1.6.2: eq4, e seja

$$\rho_{1j} := \begin{cases} 1 & , se\ j \leq m;\\ (\Psi_{1,j})^{1/4} & , se\ j > m.\end{cases}$$

Como $\Psi_{1,j} \longrightarrow 0$, então $\rho_{1j} \longrightarrow 0$ e $(\rho_{1j}) \in c_0$. Além disso, $1 \geq \rho_{11} \geq \rho_{12} \geq \ldots \geq \rho_{1j} \geq \ldots > 0$. Para simplificar a notação, chame

$$B_j := \Big| a_{1j}\Big(\frac{x_1}{\|x_1\|}\Big) \ldots a_{nj}\Big(\frac{x_n}{\|x_n\|}\Big) \frac{b(y_j)}{\|b\|}\Big| \qquad\qquad (\|x_i\|, \|b\| \neq 0).$$

Note que $\sum_{j=k}^{\infty} B_j^p \leq \Psi_{1,k}^p$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Para cada $M > m$, temos:

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k=1}^{M} \rho_{1,k}^{-2p} |a_{1k}(x_1)\ldots a_{nk}(x_n)b(y_k)|^p\Big)^{1/p} \; = \; & \Big\{\sum_{k=1}^{m} |a_{1k}(x_1)\ldots a_{nk}(x_n)b(y_k)|^p + \sum_{k=m+1}^{M} \rho_{1,k}^{-2p}. \\
& \Big[\Big(\Big(\sum_{j=k}^{M+1} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/4}\Big)^4 - \Big(\Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/4}\Big)^4\Big]\Big\}^{1/p} \\
= \; & \Big\{\sum_{k=1}^{m} |a_{1k}(x_1)\ldots a_{nk}(x_n)b(y_k)|^p + \sum_{k=m+1}^{M} \Big[\Big((\Psi_{1,k})^{1/4}\Big)^{-2p}. \\
& \Big\{\Big[\Big(\sum_{j=k}^{M+1} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/4}\Big]^2 + \Big[\Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/4}\Big]^2\Big\}. \\
& \Big\{\Big[\Big(\sum_{j=k}^{M+1} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/4}\Big]^2 - \Big[\Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} |a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/4}\Big]^2\Big\}\Big]\Big\}^{1/p} \\
\leq \; & \|x_1\|\ldots\|x_n\|\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{m} B_k^p + \sum_{k=m+1}^{M} \Big[\Psi_{1,k}^{-p/2}. \\
& \Big[\Big(\sum_{j=k}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2}\Big].\Big[\Big(\sum_{j=k}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2} - \Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2}\Big]\Big]\Big\}^{1/p} \\
\leq \; & \|x_1\|\ldots\|x_n\|\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{m} B_k^p + \sum_{k=m+1}^{M} 2\Big[\Big(\sum_{j=k}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2} - \Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2}\Big]\Big\}^{1/p} \\
= \; & \|x_1\|\ldots\|x_n\|\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{m} B_k^p + 2\Big\{\Big[\Big(\sum_{j=m+1}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2} - \Big(\cancel{\sum_{j=(m+1)+1}^{M+1}} B_j^p\Big)^{1/2}\Big] + \Big[\Big(\cancel{\sum_{j=m+2}^{M+1} B_j^p}\Big)^{1/2} - \\
& \ldots - \Big(\cancel{\sum_{j=(M-1)+1}^{M+1}} B_j^p\Big)^{1/2}\Big] + \Big[\Big(\cancel{\sum_{j=M}^{M+1} B_j^p}\Big)^{1/2} - \Big(\sum_{j=(M)+1}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2}\Big]\Big\}\Big\}^{1/p} \\
\leq \; & \|x_1\|\ldots\|x_n\|\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{M} B_k^p + 2\Big[\Big(\sum_{j=m+1}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2} - \Big(B_{M+1}^p\Big)^{1/2}\Big]\Big\}^{1/p} \\
\leq \; & \|x_1\|\ldots\|x_n\|\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{M} B_k^p + 2\Big[\Big(\sum_{j=m+1}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2}\Big]\Big\}^{1/p}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|x_1\|\ldots\|x_n\|\|b\|\Big\{\Psi_{1,1}^p + 2.\Psi_{1,m+1}^{p/2}\Big\}^{1/p} \\
&\leq \|x_1\|\ldots\|x_n\|\|b\|\Big\{\Psi_{1,1}^p + 2.\frac{\epsilon^p}{2}.\Psi_{1,1}^p\Big\}^{1/p} \qquad \Big(\text{por 1.6.2: eq4}\Big) \\
&\leq \|x_1\|\ldots\|x_n\|\|b\|\Big\{\Psi_{1,1} + \epsilon\Psi_{1,1}\Big\} \qquad \Big(\text{pois } 1 \leq p \ \Rightarrow \ \|.\|_p \leq \|.\|_1\Big) \\
&\leq \|x_1\|\ldots\|x_n\|\|b\|(1+\epsilon)\Psi_{1,1} \\
&\leq (1+\epsilon)^2\|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\|_{p'}^{-1}\|S\|_{\sigma(p)}\|x_1\|\ldots\|x_n\|\|b\| \qquad \Big(\text{por 1.6.2: eq2}\Big)
\end{aligned}
$$

para cada $M \in \mathbb{N}$, seguindo o resultado desejado.

Para $i = 1$ definimos o espaço U_1 das seqüências $t_1 = (\tau_{1j})_{j=1}^\infty$ tais que $\sum_{j=1}^\infty \rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}a_{2j}\otimes\cdots\otimes a_{nj}\otimes y_j)_{j=1}^\infty$ está em $\mathcal{L}_{\sigma_1(p)}(E_2,\ldots,E_n;F)$. Nesse espaço definimos a norma

$$
\|t_1\|_{U_1} = \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=1}^\infty |\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}a_{2j}(x_2)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p}.
$$

Mostraremos que U_1 é espaço completo. Para simplificar a notação faremos para o caso n=2. Seja $(t_{1k})_{k=1}^\infty$ uma seqüência de Cauchy em U_1, $t_{1k} = (\tau_{1j}^k)_{j=1}^\infty$; logo, dado $\epsilon > 0$

$$
\|t_{1k} - t_{1l}\|_{U_1} = \sup_{\|x_2\|\leq 1}\sup_{\|b\|\leq 1}\Big(\sum_{j=1}^\infty |\rho_{1j}^{-1}(\tau_{1j}^k - \tau_{1j}^l)a_{2j}(x_2)b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \leq \epsilon
$$

para k, l suficientemente grandes. Vamos considerar a seqüência de Cauchy $(T^k)_{k=1}^\infty$, onde

$$
T^k = \sum_{j=1}^\infty(\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}^k a_{2j})\otimes y_j.
$$

Como $\mathcal{L}_{\sigma_1(p)}(E_2;F)$ é completo, existe $T = \sum_{j=1}^\infty c_{2j}\otimes z_j \in \mathcal{L}_{\sigma_1(p)}(E_2,E_n;F)$ tal que

$$
\lim_{k\to\infty}\|T - T^k\|_{\sigma_1(p)} = 0.
$$

Mostraremos que existe $\gamma_j \in \mathbb{K}$ tal que $c_{2j}\otimes z_j = \gamma_j a_{2j}\otimes y_j$, para cada $j \in \mathbb{N}$.

Caso contrário, suponha que existe j_0 tal que $c_{2j_0}\otimes z_{j_0} \neq \gamma a_{2j_0}\otimes y_{j_0}$ para cada $\gamma \in \mathbb{K}$. Vamos analisar as três situações em que isso ocorre:

(1) $c_{2j_0} \neq \gamma a_{2j_0}$ e $z_{j_0} \neq \gamma y_{j_0}$, $\forall\gamma \in \mathbb{K}$.

Se $M = [a_{2j_0}, c_{2j_0}] \in DimE_2'$, por 0.2.3 podemos encontrar $x_{2j_0} \in E_2$ tal que $c_{2j_0}(x_{2j_0}) = 1$ e $a_{2j_0}(x_{2j_0}) = 0$, e por Hahn-Banach podemos encontrar $b_{j_0} \in F'$ tal que $b_{j_0}(z_{j_0}) = 1$ e $b_{j_0}(y_{j_0}) = 0$. Então

$$
\begin{aligned}
|b_{j_0}(c_{2j_0}\otimes z_{j_0} - \rho_{1,j_0}^{-1}\tau_{1j_0}^k a_{2j_0}\otimes y_{j_0})(x_{2j_0})| &= |c_{2j_0}(x_{2j_0})b_{j_0}(z_{j_0}) - \rho_{1,j_0}^{-1}\tau_{1j_0}^k a_{2j_0}(x_{2j_0})b_{j_0}(y_{j_0})| \\
&= |1.1 - 0.0| = 1.
\end{aligned}
$$

(2) $c_{2j_0} = \gamma_{2j_0} a_{2j_0}$ e $z_{j_0} \neq \gamma y_{j_0}$, $\forall \gamma \in \mathbb{K}$.

Considere $x_{2j_0} \in E_2$ tal que $c_{2j_0}(x_{2j_0}) = \gamma_{2j_0} a_{2j_0}(x_{2j_0}) \neq 0$, e por Hahn-Banach podemos encontrar $b_{j_0} \in F'$ tal que $b_{j_0}(z_{j_0}) = 1$ e $b_{j_0}(y_{j_0}) = 0$. Então

$$\begin{aligned} |b_{j_0}(c_{2j_0} \otimes z_{j_0} - \rho_{1,j_0}^{-1} \tau_{1j_0}^k a_{2j_0} \otimes y_{j_0})(x_{2j_0})| &= |c_{2j_0}(x_{2j_0}) b_{j_0}(z_{j_0}) - \rho_{1,j_0}^{-1} \tau_{1j_0}^k a_{2j_0}(x_{2j_0}) b_{j_0}(y_{j_0})| \\ &= |c_{2j_0}(x_{2j_0}).1 - \rho_{1,j_0}^{-1} \tau_{1j_0}^k a_{2j_0}(x_{2j_0}).0| \\ &= |c_{2j_0}(x_{2j_0})| \neq 0. \end{aligned}$$

(3) $c_{2j_0} \neq \gamma a_{2j_0}$, $\forall \gamma \in \mathbb{K}$ e $z_{j_0} = \gamma_{j_0} y_{j_0}$.

Se $M = [a_{2j_0}, c_{2j_0}] \in DimE_2'$, por 0.2.3 podemos encontrar $x_{2j_0} \in E_2$ tal que $c_{2j_0}(x_{2j_0}) = 1$ e $a_{2j_0}(x_{2j_0}) = 0$, e seja $b \in F'$ tal que $b(z_{j_0}) = \gamma_{j_0} b(y_{j_0}) \neq 0$. Então

$$\begin{aligned} |b(c_{2j_0} \otimes z_{j_0} - \rho_{1,j_0}^{-1} \tau_{1j_0}^k a_{2j_0} \otimes y_{j_0})(x_{2j_0})| &= |c_{2j_0}(x_{2j_0}) b(z_{j_0}) - \rho_{1,j_0}^{-1} \tau_{1j_0}^k a_{2j_0}(x_{2j_0}) b(y_{j_0})| \\ &= |1.b(z_{j_0}) - 0.b(y_{j_0})| \\ &= |b(z_{j_0})| \neq 0. \end{aligned}$$

Seja $\nu = \min\{1, |c_{2j_0}(x_2)|, |b(z_{j_0})|\}$, então por (1), (2) e (3) para $\bar{x}_2 \in E_2$ e $\bar{b} \in F'$ adequados, temos

$$\begin{aligned} \nu \;\leq\; & \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\bar{b}(c_{2j_0} \otimes z_{j_0} - \rho_{1,j_0}^{-1} \tau_{1j_0}^k a_{2j_0} \otimes y_{j_0})(\bar{x}_2)|^p \Big)^{1/p} \\ & \qquad\qquad \downarrow \; k \to \infty \\ & \qquad\qquad 0 \end{aligned}$$

o que é absurdo. Segue então que para cada $j \in \mathbb{N}$, existe γ_j tal que $(\rho_{1,j}^{-1} \tau_{1j}^k a_{2j} \otimes y_j)_{k=1}^{\infty}$ converge a $\gamma_j a_{2j} \otimes y_j$: então se $\tau_{1j} = \rho_{1,j} \gamma_j$, tem-se que $t_1 = (\tau_{1j})_{j=1}^{\infty} \in U_1$ é o limite de $t_{1k} = (\tau_{1j}^k)_{j=1}^{\infty}$.

Agora podemos definir

$$\begin{aligned} A_1 : \; E_1 &\longrightarrow U_1 \\ x_1 &\longmapsto (a_{1j}(x_1))_{j=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

Seja $P_{1m}(\tau_{11}, \ldots, \tau_{1m}, \tau_{1m+1}, \ldots) = (\tau_{11}, \ldots, \tau_{1m}, 0, 0, \ldots)$ a projeção canônica usual em U_1; com $n = 2$ temos:

$$\begin{aligned} \|(A_1 - P_{1m} A_1)(\bar{x}_1)\|_{U_1} &= \|(a_{1j}(\bar{x}_1))_{j=m+1}^{\infty}\|_{U_1} \\ &= \sup_{\|x_2\| \leq 1} \sup_{\|b\| \leq 1} \Big(\sum_{j=m+1}^{\infty} |\rho_{1j}^{-1} a_{1j}(\bar{x}_1) a_{2j}(x_2) b(y_j)|^p \Big)^{1/p} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\|x_2\|\leq 1}\sup_{\|b\|\leq 1}\Big(\sum_{j=m+1}^{\infty}\rho_{1j}^{p}|\rho_{1j}^{-2}a_{1j}(\bar{x}_1)a_{2j}(x_2)b(y_j)|^p\Big)^{1/p}\\
&\leq \rho_{1m+1}\|\bar{x}_1\|\sup_{\|x_i\|=1}\sup_{\|b\|\leq 1}\Big(\sum_{j=m+1}^{\infty}|\rho_{1j}^{-2}a_{1j}(x_1)a_{2j}(x_2)b(y_j)|^p\Big)^{1/p}\\
\text{(por 1.6.2: eq3)}\quad &\leq \rho_{1m+1}(1+\epsilon)^2\|(\lambda_j)_{j=1}\|_{p'}^{-1}\|S\|_{\sigma(p)}\|\bar{x}_1\|
\end{aligned}
$$

que converge a zero, quando m tende a infinito, mostrando que A_1 é aproximável e de modo semelhante mostra-se que $\|A_1\|\leq(1+\epsilon)^2\|(\lambda_j)_{j=1}\|_{p'}^{-1}\|S\|_{\sigma(p)}$.

Agora, para

$$
\Psi_{2,k}:=\sup_{\substack{\|t_1\|_{U_1}\leq 1\\ \|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=k}^{\infty}|\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}a_{2j}(x_2)\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p}\xrightarrow{k\to\infty} 0,
$$

vamos construir $(\rho_{2j})\in c_0$ com $1\geq\rho_{21}\geq\rho_{22}\geq\ldots\geq\rho_{2j}\geq\ldots\geq 0$, satisfazendo

$$
\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\rho_{2j}^{-2p}|\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}a_{2j}(x_2)\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p}\leq(1+\epsilon)\|t_1\|_{U_1}\|x_2\|\dots\|x_n\|\|b\|. \tag{1.6.2: eq5}
$$

Observe que $\Psi_{2,1}=1$. Se existe $m=\max\{j\in\mathbb{N}:\Psi_{2,j}>0\}$, definimos

$$
\rho_{2j}=\begin{cases}(1+\epsilon)^{-1/2} & ,\ j\leq m;\\ (1+j\epsilon)^{-1/2} & ,\ j>m.\end{cases}
$$

Para $j>m$,

$$
|\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}a_{2j}(x_2)\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)|\leq\Psi_{2,m}\|x_1\|\dots\|x_n\|\|b_j\|=0.
$$

Seguindo que

$$
\begin{aligned}
\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\rho_{2,j}^{-2p}|\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}a_{2j}(x_2)\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p} &= \Big(\sum_{j=1}^{m}(1+\epsilon)^p|\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}a_{2j}(x_2)\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p}\\
&= (1+\epsilon)\Big(\sum_{j=1}^{m}|\rho_{1j}^{-1}\frac{\tau_{1j}}{\|t_1\|_{U_1}}a_{2j}(\frac{x_2}{\|x_2\|})\dots a_{nj}(\frac{x_n}{\|x_n\|})\frac{b(y_j)}{\|b\|}|^p\Big)^{1/p}\|t_1\|_{U_1}\|x_2\|\dots\|x_n\|\|b\|\\
&\leq (1+\epsilon)\Psi_{2,1}\|t_1\|\|x_2\|\dots\|x_n\|\|b\|\\
&= (1+\epsilon)\|t_1\|\|x_2\|\dots\|x_n\|\|b\|.
\end{aligned}
$$

Para o caso em que $\Psi_{2,j}>0$ para cada $j\in\mathbb{N}$, existe $m\in\mathbb{N}$ tal que:

$$
(\Psi_{2,m+1})^{p/2}\leq\min\left\{\frac{\epsilon^p}{2}\Psi_{2,1}^p,1\right\}. \tag{1.6.2: eq6}
$$

Fixe um m satisfazendo 1.6.2: eq6, e seja

$$\rho_{2j} := \begin{cases} 1 & , se\ j \leq m; \\ (\Psi_{2,j})^{1/4} & , se\ j > m. \end{cases}$$

Como $\Psi_{2,j} \longrightarrow 0$, então $\rho_{2j} \longrightarrow 0$ e $1 \geq \rho_{21} \geq \rho_{22} \geq \ldots \geq \rho_{2j} \geq \ldots > 0$. Para simplificar a notação, chame

$$B_j := |\rho_{1j}^{-1} \frac{\tau_{1j}}{\|t_1\|_{U_1}} a_{2j}\Big(\frac{x_2}{\|x_2\|}\Big) \ldots a_{nj}\Big(\frac{x_n}{\|x_n\|}\Big) \frac{b(y_j)}{\|b\|}| \qquad (\|t_1\|_{U_1}, \|x_i\|, \|b\| \neq 0).$$

Note que $\sum_{j=k}^{\infty} B_j^p \leq \Psi_{2k}^p$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Para cada $M > m$, temos:

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k=1}^{M} \rho_{2,k}^{-2p} \rho_{1,k}^{-p} |\tau_{1k} a_{2k}(x_2) \ldots a_{nk}(x_n) b(y_k)|^p\Big)^{1/p} &= \Big\{\sum_{k=1}^{m} |\tau_{1k} a_{2k}(x_2) \ldots a_{nk}(x_n) b(y_k)|^p + \\
&\quad \sum_{k=m+1}^{M} \rho_{2,k}^{-2p} \cdot \Big[\Big(\Big(\sum_{j=k}^{M+1} \rho_{1,k}^{-p} |\tau_{1j} a_{2j}(x_2) \ldots a_{nj}(x_n) b(y_j)|^p\Big)^{1/4}\Big)^4 \\
&\quad - \Big(\Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} \rho_{1,k}^{-p} |\tau_{1j} a_{2j}(x_2) \ldots a_{nj}(x_n) b(y_j)|^p\Big)^{1/4}\Big)^4\Big]\Big\}^{1/p} \\
= \Big\{\sum_{k=1}^{m} \rho_{1,k}^{-p} |\tau_{1k} a_{2k}(x_2) \ldots a_{nk}(x_n) b(y_k)|^p &+ \sum_{k=m+1}^{M} \Big[\Big((\Psi_{2,k})^{1/4}\Big)^{-2p} . \\
&\quad \Big\{\Big[\Big(\sum_{j=k}^{M+1} \rho_{1,j}^{-p} |\tau_{1j} a_{2j}(x_2) \ldots a_{nj}(x_n) b(y_j)|^p\Big)^{1/4}\Big]^2 + \\
&\quad \Big[\Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} \rho_{1,k}^{-p} |\tau_{1j} a_{2j}(x_2) \ldots a_{nj}(x_n) b(y_j)|^p\Big)^{1/4}\Big]^2\Big\}. \\
&\quad \Big\{\Big[\Big(\sum_{j=k}^{M+1} \rho_{1,k}^{-p} |\tau_{1j} a_{2j}(x_2) \ldots a_{nj}(x_n) b(y_j)|^p\Big)^{1/4}\Big]^2 - \\
&\quad \Big[\Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} \rho_{1,k}^{-p} |\tau_{1j} a_{2j}(x_2) \ldots a_{nj}(x_n) b(y_j)|^p\Big)^{1/4}\Big]^2\Big\}\Big]\Big\}^{1/p} \\
\leq \|t_1\|_{U_1} \|x_2\| \ldots \|x_n\| \|b\| \Big\{\sum_{k=1}^{m} B_k^p &+ \sum_{k=m+1}^{M} \Big[\Psi_{2,k}^{-p/2} . \\
&\quad \Big[\Big(\sum_{j=k}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2}\Big] . \Big[\Big(\sum_{j=k}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2} - \Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2}\Big]\Big]\Big\}^{1/p} \\
\leq \|t_1\|_{U_1} \|x_2\| \ldots \|x_n\| \|b\| \Big\{\sum_{k=1}^{m} B_k^p &+ \sum_{k=m+1}^{M} 2\Big[\Big(\sum_{j=k}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2} - \Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2}\Big]\Big\}^{1/p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|t_1\|_{U_1}\|x_2\|\ldots\|x_n\|\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{m} B_k^p + 2\Big\{\Big[\Big(\sum_{j=m+1}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2} - \Big(\cancel{\sum_{j=(m+1)+1}^{M+1}} B_j^p\Big)^{1/2}\Big] + \Big[\Big(\cancel{\sum_{j=m+2}^{M+1} B_j^p}\Big)^{1/2} - \\
&\quad \ldots - \Big(\cancel{\sum_{j=(M-1)+1}^{M+1}} B_j^p\Big)^{1/2}\Big] + \Big[\Big(\cancel{\sum_{j=M}^{M+1} B_j^p}\Big)^{1/2} - \Big(\sum_{j=(M)+1}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2}\Big]\Big\}\Big\}^{1/p} \\
&\le \|t_1\|_{U_1}\|x_2\|\ldots\|x_n\|\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{M} B_k^p + 2\Big[\Big(\sum_{j=m+1}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2} - \Big(B_{M+1}^p\Big)^{1/2}\Big]\Big\}^{1/p} \\
&\le \Big\{\sum_{k=1}^{\infty} B_k^p + 2\Big(\sum_{j=m+1}^{\infty} B_j^p\Big)^{1/2}\Big\}^{1/p}\|t_1\|_{U_1}\|x_2\|\ldots\|x_n\|\|b\| \\
&\le \Big\{\sum_{k=1}^{\infty} B_k^p + 2\Big(\Psi_{2,m+1}^p\Big)^{1/2}\Big\}^{1/p}\|t_1\|_{U_1}\|x_2\|\ldots\|x_n\|\|b\| \\
&\le \Big\{\Psi_{2,1}^p + 2\frac{\epsilon^p}{2}\Big(\Psi_{2,1}^p\Big)^{1/2}\Big\}^{1/p}\|t_1\|_{U_1}\|x_2\|\ldots\|x_n\|\|b\| \qquad \Big(\text{por 1.6.2: eq6}\Big) \\
&\le \Big\{\Psi_{2,1} + \epsilon\Big(\Psi_{2,1}\Big)\Big\}\|t_1\|_{U_1}\|x_2\|\ldots\|x_n\|\|b\| \qquad \Big(\text{pois } 1 \le p \ \Rightarrow\ \|.\|_1 \ge \|.\|_p\Big) \\
&\le (1+\epsilon)\Psi_{2,1}\|t_1\|_{U_1}\|x_2\|\ldots\|x_n\|\|b\| \\
&= (1+\epsilon)\|t_1\|_{U_1}\|x_2\|\ldots\|x_n\|\|b\|.
\end{aligned}$$

para cada $M \in \mathbb{N}$, seguindo o resultado desejado.

Para $i = 2$ definimos o espaço U_2 das seqüências $t_2 = (\tau_{2j})_{j=1}^{\infty}$ tais que $\sum_{j=1}^{\infty} \rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}\tau_{2j}a_{3j} \otimes \cdots \otimes a_{nj} \otimes y_j$ está em $\mathcal{L}_{\sigma_1(p)}(E_3,\ldots,E_n;F)$ sempre que $t_1 = (\tau_{1j})_{j=1}^{\infty} \in U_1$. Nesse espaço definimos a norma

$$\|t_2\|_{U_2} = \sup_{\|t_1\|_{U_1}\le 1}\ \sup_{\substack{\|x_i\|\le 1\\ \|b\|\le 1}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}|\tau_{1j}\tau_{2j}a_{3j}(x_3)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p}.$$

Mostraremos que U_2 é espaço completo. Para simplificar a notação faremos para o caso n=3. Seja $(t^k)_{k=1}^{\infty}$ uma seqüência de Cauchy em U_2, $t^k = (\tau_{2j}^k)_{j=1}^{\infty}$:

$$\|t^k - t^l\|_{U_2} = \sup_{\|t_1\|_{U_1}\le 1}\ \sup_{\|x_3\|\le 1}\ \sup_{\|b\|\le 1}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}(\tau_{2j}^k - \tau_{2j}^l)a_{3j}(x_3)b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \le \epsilon$$

para k, l suficientemente grandes. Vamos considerar a seqüência de Cauchy $(T^k)_{k=1}^{\infty}$, onde

$$T^k = \sum_{j=1}^{\infty}(\rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}\tau_{2j}^k a_{3j}) \otimes y_j = \sum_{j=1}^{\infty}(\rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{2j}^k a_{3j}) \otimes (\tau_{1j}y_j).$$

Como $\mathcal{L}_{\sigma_1(p)}(E_3;F)$ é completo, existe $T = \sum_{j=1}^{\infty} c_{3j} \otimes z_j$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \|T - T^k\|_{\sigma_1(p)} = 0.$$

Mostraremos que para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $\gamma_j \in \mathbb{K}$ tal que $c_{3j} \otimes z_j = \gamma_j a_{3j} \otimes (\tau_{1j} y_j)$.

Caso contrário, suponha que existe j_0 tal que $c_{3j_0} \otimes z_{j_0} \neq \gamma a_{3j_0} \otimes (\tau_{1j_0} y_{j_0})$ para cada $\gamma \in \mathbb{K}$. Vamos analisar as três situações em que isso ocorre:

(1) $c_{3j_0} \neq \gamma a_{3j_0}$ e $z_{j_0} \neq \gamma(\tau_{1j_0} y_{j_0})$, $\forall \gamma \in \mathbb{K}$.

Se $M = [a_{3j_0}, c_{3j_0}] \in DimE_3'$, por 0.2.3 podemos encontrar $x_{3j_0} \in E_3$ tal que $c_{3j_0}(x_{3j_0}) = 1$ e $a_{3j_0}(x_{3j_0}) = 0$, e por Hahn-Banach podemos encontrar $b_{j_0} \in F'$ tal que $b_{j_0}(z_{j_0}) = 1$ e $b_{j_0}(\tau_{1j_0} y_{j_0}) = 0$. Então

$$\begin{aligned}
\Big|b_{j_0}\Big(c_{3j_0} \otimes z_{j_0} - \rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{2j}^{k} a_{3j} \otimes (\tau_{1j_0} y_{j_0})\Big)(x_{3j_0})\Big| &= \\
&= |c_{3j_0}(x_{3j_0}) b_{j_0}(z_{j_0}) - \rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{2j}^{k} a_{3j}(x_{3j_0}) b_{j_0}(\tau_{1j_0} y_{j_0})| \\
&= |1.1 - 0.0| \;=\; 1.
\end{aligned}$$

(2) $c_{3j_0} = \gamma_{3j_0} a_{3j_0}$ e $z_{j_0} \neq \gamma(\tau_{1j_0} y_{j_0})$, $\forall \gamma \in \mathbb{K}$.

Considere $x_{3j_0} \in E_3$ tal que $c_{3j_0}(x_{3j_0}) = \gamma_{3j_0} a_{3j_0}(x_{3j_0}) \neq 0$, e por Hahn-Banach podemos encontrar $b_{j_0} \in F'$ tal que $b_{j_0}(z_{j_0}) = 1$ e $b_{j_0}(\tau_{1j_0} y_{j_0}) = 0$. Então

$$\begin{aligned}
|b_{j_0}(c_{3j_0} \otimes z_{j_0} - \rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{2j}^{k} a_{3j} \otimes (\tau_{1j_0} y_{j_0}))(x_{3j_0})| &= \\
&= |c_{3j_0}(x_{3j_0}) b_{j_0}(z_{j_0}) - \rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{2j}^{k} a_{3j}(x_{3j_0}) b_{j_0}(\tau_{1j_0} y_{j_0})| \\
&= |c_{3j_0}(x_{3j_0}).1 - \rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{2j}^{k} a_{3j}(x_{3j_0}).0| \\
&= |c_{3j_0}(x_{3j_0})| \;\neq 0.
\end{aligned}$$

(3) $c_{3j_0} \neq \gamma a_{3j_0}$, $\forall \gamma \in \mathbb{K}$ e $z_{j_0} = \gamma_{j_0}(\tau_{1j_0} y_{j_0})$.

Se $M = [a_{3j_0}, c_{3j_0}] \in DimE_3'$, por 0.2.3 podemos encontrar $x_{3j_0} \in E_3$ tal que $c_{3j_0}(x_{3j_0}) = 1$ e $a_{3j_0}(x_{3j_0}) = 0$, e seja $b \in F'$ tal que $b(z_{j_0}) = \gamma_{j_0} b(\tau_{1j_0} y_{j_0}) \neq 0$. Então

$$\begin{aligned}
|b(c_{3j_0} \otimes z_{j_0} - \rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{2j}^{k} a_{3j} \otimes (\tau_{1j_0} y_{j_0}))(x_{3j_0})| &= \\
&= |c_{3j_0}(x_{3j_0}) b(z_{j_0}) - \rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{2j}^{k} a_{3j}(x_{3j_0}) b(\tau_{1j_0} y_{j_0})| \\
&= |1.b(z_{j_0}) - 0.b(\tau_{1j_0} y_{j_0})| \\
&= |b(z_{j_0})| \;\neq 0.
\end{aligned}$$

Seja $\nu = \min\{1, |c_{3j_0}(x_3)|, |b(z_{j_0})|\}$, então por (1),(2) e (3) para $\bar{x}_3 \in E_3$ e $\bar{b} \in F'$ adequados, temos

$$\begin{aligned}
\nu \;\leq\; & \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\bar{b}(c_{3j_0} \otimes z_{j_0} - \rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{2j}^{k} a_{3j} \otimes (\tau_{1j_0} y_{j_0}))(\bar{x}_3)|^p\Big)^{1/p} \\
& \qquad\qquad \downarrow \; k \to \infty \\
& \qquad\qquad 0
\end{aligned}$$

o que é absurdo. Segue então que para cada $j \in \mathbb{N}$, existe γ_j tal que $(\rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{2j}^{k}a_{3j} \otimes (\tau_{1j}y_j))_{k=1}^{\infty}$ converge a $\gamma_j a_{3j} \otimes (\tau_{1j}y_j)$; logo $t_2 = (\tau_{2j})_{j=1}^{\infty} \in U_2$ é o limite de $t_{2k} = (\tau_{2j}^{k})_{j=1}^{\infty}$.

Então, podemos definir

$$\begin{array}{rccc} A_2: & E_2 & \longrightarrow & U_2 \\ & x_2 & \mapsto & (a_{2j}(x_2))_{j=1}^{\infty} \end{array}$$

Seja $P_{2m}(\tau_{21}, \ldots, \tau_{2m}, \tau_{2m+1}, \ldots) = (\tau_{21}, \ldots, \tau_{2m}, 0, 0, \ldots)$ a projeção canônica usual em U_2. Com $n = 3$ temos:

$$\begin{array}{rcl} \|(A_2 - P_{2m}A_2)(\bar{x}_2)\|_{U_2} & = & \|(a_{2j}(\bar{x}_2))_{j=m+1}^{\infty}\|_{U_2} \\ & = & \sup\limits_{\|t_1\|_{U_1}\le 1} \sup\limits_{\substack{\|x_3\|\le 1 \\ \|b\|\le 1}} \Big(\sum\limits_{j=m+1}^{\infty} |\rho_{2j}^{-1}\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}a_{2j}(\bar{x}_2)a_{3j}(x_3)b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \\ & = & \sup\limits_{\|t_1\|_{U_1}\le 1} \sup\limits_{\substack{\|x_3\|\le 1 \\ \|b\|\le 1}} \Big(\sum\limits_{j=m+1}^{\infty} \rho_{2j}^{p}|\rho_{2j}^{-2}\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}a_{2j}(\bar{x}_2)a_{3j}(x_3)b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \\ & \le & \rho_{2m+1}\|\bar{x}_2\| \sup\limits_{\|t_1\|_{U_1}\le 1} \sup\limits_{\substack{\|x_i\|\le 1 \\ \|b\|\le 1}} \Big(\sum\limits_{j=m+1}^{\infty} |\rho_{2j}^{-2}\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}a_{2j}(x_2)a_{3j}(x_3)b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \\ \text{(por 1.6.2: eq5)} & \le & \rho_{2m+1}(1+\epsilon)\|\bar{x}_2\| \end{array}$$

que converge a zero, quando m tende a infinito, mostrando que A_2 é aproximável e da mesma forma, mostra-se que $\|A_2\| \le (1+\epsilon)$.

De modo análogo, para cada $i = 3, \ldots, n-1$, se

$$\Psi_{i,k} = \sup_{\substack{\|t_k\|_{U_k}\le 1 \\ \|x_k\|\le 1 \\ \|b\|\le 1}} \Big(\sum_{j=k}^{\infty} |\rho_{i-1j}^{-1}\ldots\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}\ldots\tau_{i-1j}a_{ij}(x_i)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p},$$

construímos seqüências $(\rho_{ij}) \in c_0$, com $1 \ge \rho_{i1} \ge \rho_{i2} \ge \ldots \ge \rho_{ij} \ge \ldots > 0$, e satisfazendo

$$\begin{array}{l} \Big(\sum\limits_{j=1}^{\infty} \rho_{ij}^{-2p}|\rho_{i-1j}^{-1}\ldots\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}\ldots\tau_{i-1j}a_{ij}(x_i)\ldots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \le \\ \qquad\qquad \le (1+\epsilon)\|t_1\|_{U_1}\ldots\|t_{i-1}\|_{U_i}\|x_i\|\ldots\|x_n\|\|b\|. \end{array}$$

A seguir definimos espaços U_i das seqüências $t_i = (\tau_{ij})_{j=1}^{\infty}$ tais que para cada $t_k = (\tau_{kj})_{j=1}^{\infty} \in U_k$ com $k < i$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \rho_{i,j}^{-1}\ldots\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}\ldots\tau_{i-1j}\tau_{ij}a_{i+1j}\otimes\cdots\otimes a_{nj}\otimes y_j \in \mathcal{L}_{\sigma_1(p)}(E_{i+1}, \ldots, E_n; F)$$

e com norma

$$\|t_i\|_{U_i} = \sup_{\substack{\|t_k\|_{U_k}=1,\ k<i \\ \|x_k\|\leq 1,\ k>i \\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\rho_{ij}^{-1}\dots\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}\dots\tau_{ij}a_{i+1j}(x_{i+1})\dots a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p}.$$

Como antes, mostra-se que U_i é Banach para cada $i = 3, \dots, n-1$. Também definimos

$$\begin{array}{rccc} A_i: & E_i & \longrightarrow & U_i \\ & x_i & \mapsto & (a_{ij}(x_i))_{j=1}^{\infty}, \end{array}$$

e como nos casos anteriores, tem-se que

$$\begin{aligned}\|(A_i - P_{im}A_i)(\bar{x}_i)\|_{U_i} &\leq \rho_{im+1}(1+\epsilon)\Psi_{i,1}\|\bar{x}_i\| \\ &= \rho_{im+1}(1+\epsilon)\|\bar{x}_i\|\end{aligned}$$

que converge a zero, quando m tende a infinito, mostrando que A_i é aproximável e tem norma menor ou igual a $(1+\epsilon)$. Por último, para $i = n$,

$$\Psi_{n,k} = \sup_{\substack{\|t_k\|_{U_k}\leq 1 \\ \|x_k\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=k}^{\infty} |\rho_{n-1j}^{-1}\dots\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}\dots\tau_{n-1j}a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p},$$

construímos a seqüência $(\rho_{nj}) \in c_0$, com $1 \geq \rho_{n1} \geq \rho_{n2} \geq \dots \geq \rho_{nj} \geq \dots > 0$, satisfazendo

$$\begin{aligned}&\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \rho_{nj}^{-2p}|\rho_{n-1j}^{-1}\dots\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}\dots\tau_{n-1j}a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \leq \\ &\qquad \leq (1+\epsilon)\|t_1\|_{U_1}\dots\|t_{n-1}\|_{U_{n-1}}\|x_n\|\|b\|.\end{aligned}$$

Finalmente definimos o espaço U_n das seqüências $t_n = (\tau_{nj})_{j=1}^{\infty}$ tais que para cada $t_k = (\tau_{kj})_{j=1}^{\infty} \in U_k$ com $k < n$

$$\Big(\rho_{n,j}^{-1}\dots\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}\dots\tau_{n-1j}\tau_{nj}y_j\Big)_{j=1}^{\infty} \in l_p^u(F)$$

e com norma

$$\|t_n\|_{U_n} = \sup_{\substack{\|t_i\|_{U_i}=1,\ k<n \\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\rho_{n,j}^{-1}\dots\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}\dots\tau_{n-1j}\tau_{nj}b(y_j)|^p\Big)^{1/p}.$$

De modo análogo aos anteriores, mostra-se que U_n é Banach. Em todos os espaços U_i, $e_{ij} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ é base. Vejamos que U_n tem base hiperortogonal: sejam $|\alpha_j| \leq |\beta_j|$ para cada $j \in \mathbb{N}$ e $t_i = (\tau_{ij})_{j=1}^{\infty}$ para $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
\|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_{nj}\|_{U_n} = \|(\alpha_j)_{j=1}^{n}\|_{U_n} &= \sup_{\substack{\|t_i\|_{U_k}=1\\ k<n}} \|(\rho_{nj}^{-1}\dots\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}\dots\tau_{n-1j}\alpha_j y_j)_{j=1}^{n}\|_p^w \\
&= \sup_{\substack{\|t_i\|_{U_k}=1\\ k<n}} \sup_{\|b\|\le 1}\Big(\sum_{j=1}^{n}|\rho_{nj}^{-1}\dots\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}\dots\tau_{n-1j}\alpha_j b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \\
&= \sup_{\substack{\|t_i\|_{U_k}=1\\ k<n}} \sup_{\|b\|\le 1}\Big(\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j||\rho_{nj}^{-1}\dots\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}\dots\tau_{n-1j} b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \\
&\le \sup_{\substack{\|t_i\|_{U_k}=1\\ k<n}} \sup_{\|b\|\le 1}\Big(\sum_{j=1}^{n}|\beta_j||\rho_{nj}^{-1}\dots\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}\dots\tau_{n-1j} b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \\
&= \sup_{\substack{\|t_i\|_{U_k}=1\\ k<n}} \sup_{\|b\|\le 1}\Big(\sum_{j=1}^{n}|\rho_{nj}^{-1}\dots\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}\dots\tau_{n-1j}\beta_j b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \\
&= \sup_{\substack{\|t_i\|_{U_k}=1\\ k<n}} \|(\rho_{nj}^{-1}\dots\rho_{1j}^{-1}\tau_{1j}\dots\tau_{n-1j}\beta_j y_j)_{j=1}^{n}\|_p^w \\
&= \|(\beta_j)_{j=1}^{n}\|_{U_n} = \|\sum_{j=1}^{n}\beta_j e_{nj}\|_{U_n}
\end{aligned}$$

Também definimos

$$\begin{array}{rccc} A_n: & E_n & \longrightarrow & U_n \\ & x_n & \mapsto & (a_{nj}(x_n))_{j=1}^{\infty}, \end{array}$$

e como nos casos anteriores, tem-se que

$$\|(A_n - P_{nm}A_n)(\bar{x}_n)\|_{U_n} \;\le\; \rho_{n,m+1}(1+\epsilon)\Psi_{n,1}\|\bar{x}_n\| \;=\; \rho_{n,m+1}(1+\epsilon)\|\bar{x}_n\| \qquad (1.6.2\text{:eq}7)$$

que converge a zero, quando m tende a infinito, mostrando que A_n é aproximável e mostra-se também que $\|A_n\| \le (1+\epsilon)$. A seguir definimos:

$$\begin{array}{rccc} Y: & U_1 \times \dots \times U_n & \longrightarrow & F \\ & ((\tau_{1j})_{j=1}^{\infty},\dots,(\tau_{nj})_{j=1}^{\infty}) & \mapsto & \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\tau_{1j}.\dots.\tau_{nj}y_j. \end{array}$$

Pela definição de U_n temos que Y está bem definida e é diagonal. Vejamos que sua norma é menor ou igual a $\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}$.

$$\|Y(t_1,\dots,t_n)\|_F = \|\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\tau_{1j}\dots\tau_{nj}y_j\|_F$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\|b\|\leq 1} |\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \tau_{1j} \dots \tau_{nj} b(y_j)| \\
&\leq \sup_{\|b\|\leq 1} \sum_{j=1}^{\infty} \rho_{1j} \dots \rho_{n,j} |\lambda_j \rho_{1j}^{-1} \dots \rho_{n,j}^{-1} \tau_{1j} \dots \tau_{nj} b(y_j)| \\
&\leq \rho_{1,1} \dots \rho_{n,1} \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'} \sup_{\|b\|\leq 1} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\rho_{1j}^{-1} \dots \rho_{n,j}^{-1} \tau_{1j} \dots \tau_{nj} b(y_j)|^p \Big)^{1/p} \\
&\leq \|t_1\|_{U_1} \dots \|t_{n-1}\|_{U_{n-1}} \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'} \sup_{\|b\|\leq 1} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\rho_{1j}^{-1} \dots \rho_{n,j}^{-1} \frac{\tau_{1j}}{\|t_1\|_{U_1}} \dots \frac{\tau_{n-1j}}{\|t_{n-1}\|_{U_{n-1}}} \tau_{nj} b(y_j)|^p \Big)^{1/p} \\
&\leq \|t_1\|_{U_1} \dots \|t_{n-1}\|_{U_{n-1}} \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'} \sup_{\substack{\|\bar{t}_i\|_{U_i}\leq 1 \\ i<n}} \sup_{\|b\|\leq 1} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\rho_{1j}^{-1} \dots \rho_{n,j}^{-1} \bar{\tau}_{1j} \dots \bar{\tau}_{n-1j} \tau_{nj} b(y_j)|^p \Big)^{1/p} \\
&= \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'} \|t_1\|_{U_1} \dots \|t_n\|_{U_n}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y \circ \Big(A_1(x_1), \dots, A_n(x_n)\Big) &= Y\Big((a_{1j}(x_1) \dots a_{nj}(x_n) y_j)_{j=1}^{\infty}\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_{1j}(x_1) \dots a_{nj}(x_n) y_j \\
&= S(x_1, \dots, x_n).
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\|S(x_1, \dots, x_n)\|_F &= \|Y \circ \Big(A_1(x_1), \dots, A_n(x_n)\Big)\|_F \\
&\leq \|Y\| \|A_1(x_1)\|_{U_1} \dots \|A_n(x_n)\|_{U_n} \\
&\leq \|Y\| \|A_1\| \|x_1\| \dots \|A_n\| \|x_n\| \\
&\leq \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}.1.(1+\epsilon)^2 \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}^{-1} \|S\|_{\sigma(p)} \|x_1\| (1+\epsilon) \|x_2\| \dots (1+\epsilon) \|x_n\| \\
&\leq (1+\epsilon)^{n+1} \|S\|_{\sigma(p)} \|x_1\| \dots \|x_n\|.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\|S\|_{\sigma(p)} \geq \inf_{Y, A_1, \dots, A_n} \|Y\|.\|A_1\| \dots .\|A_n\|.
$$

Juntando com a primeira parte, resulta que vale a igualdade. ∎

De modo análogo ao caso σ-nuclear, com este teorema temos uma ferramenta para construir aplicações $\sigma(p)$-nucleares. Toda vez que tivermos espaços de Banach $E_1, \dots, E_n, U_1, \dots, U_n, F$, com algum U_i munido de base hiperortogonal, e construirmos operadores aproximáveis $A_i : E_i \to U_i$ e uma aplicação contínua diagonal $Y : U_i \to F$, com $Y(e_{1j}, \dots, e_{nj}) = \lambda_j y_j$ com $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{p'}$ e

$y_j \in F$ tais que $(\tau_{1j} \dots \tau_{nj} y_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^u(F)$ para cada $(\tau_{ij})_{j=1}^{\infty} = \sum_{j=1}^{\infty} \tau_{ij} e_{ij} \in U_i$, $i = 1, \dots, n$, então a composição $S = Y \circ (A_1, \dots, A_n)$ é uma aplicação $\sigma(p)$-nuclear, e $\|S\|_{\sigma(p)} \leq \|Y\| \|A_1\| \dots \|A_n\|$.

Este teorema não é extensão do teorema 1.5.5. Foi necessário acrescentar a hipótese $Y(e_{1j}, \dots, e_{nj}) = \lambda_j y_j$ com $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{p'}$ e $y_j \in F$ tais que $(\tau_{1j} \dots \tau_{nj} y_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^u(F)$ para $(\tau_{ij})_{j=1}^{\infty} \in U_i$, que é muito forte.

Vejamos um exemplo: Sejam $1 < p, q, r < \infty$ tais que

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}; \qquad \frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'}; \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}.$$

Considere espaços de Banach E_1, E_2, F quaisquer, $U_1 = l_r$, $U_2 = l_{r'}$, $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{p'}$, $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{q'}^u(F)$, $(a_{1j})_{j=1}^{\infty} \in l_r(E_1)$, $(a_{2j})_{j=1}^{\infty} \in l_{r'}(E_2)$. Pelo teorema acima, a aplicação $S = Y \circ (A_1, A_2)$ é $\sigma(p)$-nuclear, e $\|S\|_{\sigma(p)} \leq \|Y\|.\|A_1\|.\|A_2\|$.

Também é possivel obter o seguinte:

1.6.3 Proposição: *Se uma aplicação multilinear $S \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é $\sigma(p)$-nuclear, então existe um diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} E_1 \times \dots \times E_n \arrow[rr, "S"] \arrow[dr, "A"'] & & F \\ & U \arrow[ur, "Y"'] & \end{tikzcd}$$

onde U é espaço de Banach com base de Schauder hiperortogonal, $A \in \mathcal{L}_a(E_1, \dots, E_n; U)$ e $Y \in \mathcal{L}_a(U; F)$. Neste caso, $\|S\|_{\sigma(p)} \geq \inf \|Y\| \|A_\|$.

A demonstração deste resultado segue a mesma idéia do teorema anterior, porém é bem mais simples.

Demonstração: Seja $S = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_{1j} \otimes \dots \otimes a_{nj} \otimes y_j$ $\sigma(p)$-nuclear, com

$$\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'} \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ \|b\| \leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(x_1) \dots a_{nj}(x_n) b(y_j)|^p \Big)^{1/p} \leq (1+\epsilon) \|S\|_{\sigma(p)} \qquad (1.6.3\text{: eq1})$$

Primeiro construímos $(\rho_j) \in c_0$ com $1 \geq \rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_j \geq \dots \geq 0$, satisfazendo

$$\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^{-2p} |a_{1j}(x_1) \dots a_{nj}(x_n) b(y_j)|^p \Big)^{1/p}$$
$$\leq (1+\epsilon)^2 \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}^{-1} \|S\|_{\sigma(p)} \|x_1\| \dots \|x_n\| \|b\|. \qquad (1.6.3\text{: eq2})$$

A seguir definimos o espaço U das seqüências $t = (\tau_j)_{j=1}^{\infty}$ tais que a seqüência $(\rho_j^{-1}\tau_j y_j)_{j=1}^{\infty}$ é incondicionalmente p-somável, i.e.

$$\sup_{\|b\|\leq 1}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|\rho_j^{-1}\tau_j b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \;<\; \infty$$

e

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{\|b\|\leq 1}\Big(\sum_{j=k}^{\infty}|\rho_j^{-1}\tau_j b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \;=\; 0.$$

Nesse espaço definimos a norma

$$\|t\|_U \;:=\; \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}\sup_{\|b\|\leq 1}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|\rho_j^{-1}\tau_j b(y_j)|^p\Big)^{1/p}.$$

Verifica-se facilmente que U é espaço completo, com base hiperortogonal $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$. A seguir definimos

$$\begin{array}{rccc} A: & E_1 \mathsf{x} \ldots \mathsf{x} E_n & \longrightarrow & U \\ & (x_1,\ldots,x_n) & \mapsto & (a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n))_{j=1}^{\infty}. \end{array}$$

que é aproximável e

$$\|A\| \;\leq\; \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}^{-1}\;\|S\|_{\sigma(p)}. \tag{1.6.3:eq3}$$

A seguir definimos:

$$\begin{array}{rccc} Y: & U & \longrightarrow & F \\ & ((\tau_j)_{j=1}^{\infty}) & \mapsto & \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\tau_j y_j. \end{array}$$

As condições $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{p'}^u$ e $(\tau_j y_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^u(F)$ vem do fato de S ser $\sigma(p)$-somante. Verifica-se facilmente que $Y : U \to F$ é aproximável e tem norma menor ou igual a $\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}$. Daí resulta que

$$\begin{aligned} Y\circ(A(x_1,\ldots,x_n)) &= Y\Big((a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n))_{j=1}^{\infty}\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n)y_j \\ &= S(x_1,\ldots,x_n). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|S(x_1,\ldots,x_n)\| &= \Big\|Y\Big((a_{1j}(x_1)\ldots a_{nj}(x_n))_{j=1}^{\infty}\Big)\Big\| \\ (Y \text{ contínua}) &\leq \|Y\|\|A(x_1,\ldots,x_n)\|_U \\ (A \text{ contínua}) &\leq \|Y\|\|A\|\|x_1\|\ldots\|x_n\| \\ &\leq \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}^{-1}\|S\|_{\sigma(p)}(1+\epsilon)^2\|x_1\|\ldots\|x_n\|. \end{aligned}$$

Logo

$$\|S\|_{\sigma(p)} \geq \inf_{Y,A} \|Y\|.\|A\|. \qquad \blacksquare$$

1.7 Relação entre aplicações n-lineares $\tau(p)$-somantes e $\sigma(p)$-nucleares

1.7.1 Teorema: *Se F é espaço de Banach reflexivo, e $E_1', \ldots, E_n'$ têm a propriedade de aproximação λ_i-limitada, então se $p \geq 1$,*

$$\mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1', \ldots, E_n'; F') \quad \text{e} \quad (\mathcal{L}_{\sigma(p)}(E_1, \ldots, E_n; F))'$$

são isometricamente isomorfos.

Demonstração: Temos por objetivo construir uma bijeção contínua, linear e isométrica entre os espaços mencionados acima:
($\subseteq$) Seja $T \in \mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1', \ldots, E_n'; F')$, então:

$$\begin{array}{llllll} T: & E_1' \times \ldots \times E_n' & \longrightarrow & F' & & \\ & (a_1, \ldots, a_n) & \mapsto & T(a_1, \ldots, a_n): & F & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & & & y & \mapsto & T(a_1, \ldots, a_n)(y). \end{array}$$

Para $a = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_{1j} \otimes \cdots \otimes a_{nj} \otimes y_j \in \mathcal{L}_{\sigma(p)}(E_1, \ldots, E_n; F)$, seja $\varphi_T : \mathcal{L}_{\sigma(p)}(E_1, \ldots, E_n; F) \longrightarrow \mathbb{K}$, definido por

$$\varphi_T(a) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j T(a_{1j}, \ldots, a_{nj})(y_j).$$

$\vdash$ a série $\varphi_T(a)$ converge em $\mathbb{K}$: Lembre que se $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_{1j} \otimes \cdots \otimes a_{nj} \otimes y_j \in \mathcal{L}_{\sigma(p)}(E_1, \ldots, E_n; F)$, então

$$\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'} \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ \|b\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{1j}(x_1) \ldots a_{nj}(x_n) b(y_j)|^p \right)^{1/p} < \infty$$

e

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ \|b\| \leq 1}} \left(\sum_{j=m}^{\infty} |a_{1j}(x_1) \ldots a_{nj}(x_n) b(y_j)|^p \right)^{1/p} = 0.$$

Dado $\epsilon > 0$ considere uma seqüência estritamente crescente de naturais $(N_k)_{k=1}^{\infty}$ tais que se $s > r \geq N_k$, então

$$\sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ \|b\| \leq 1}} \left(\sum_{j=r}^{s} |a_{1j}(x_1) \ldots a_{nj}(x_n) b(y_j)|^p \right)^{1/p} < \epsilon / 2^k.$$

Chame $N_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
|\varphi_T(\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j a_{1j}\otimes\cdots\otimes a_{nj}\otimes y_j)| &= |\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j T(a_{1j},\ldots,a_{nj})(y_j)| \\
\text{(por Hölder)} \quad &\leq \|(\lambda_j)_1^{\infty}\|_{p'}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|\mathcal{A}_F(y_j)T(a_{1j},\ldots,a_{nj})|^p\Big)^{1/p} \\
&\leq \|(\lambda_j)_1^{\infty}\|_{p'}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}}|\mathcal{A}_F(y_j)T(a_{1j},\ldots,a_{nj})|^p\Big)^{1/p} \\
(T\in\mathcal{L}_{\tau(p)}\Rightarrow) \quad &\leq \|(\lambda_j)_1^{\infty}\|_{p'}\sum_{k=0}^{\infty}\|T\|_{\tau(p)}\sup_{\substack{\|\alpha_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}}|\alpha_1(a_{1j})\ldots.\alpha_n(a_{nj})\mathcal{A}_F(y_j)(b)|^p\Big)^{1/p} \\
&= \|(\lambda_j)_1^{\infty}\|_{p'}\|T\|_{\tau(p)}\sum_{k=0}^{\infty}\sup_{\substack{\|\alpha_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}}|\alpha_1(a_{1j})\ldots.\alpha_n(a_{nj})b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \\
\text{(por 0.1.2)} \quad &= \|(\lambda_j)_1^{\infty}\|_{p'}\|T\|_{\tau(p)}\sum_{k=0}^{\infty}\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}}|a_{1j}(x_1)\ldots.a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \\
&\leq \|(\lambda_j)_1^{\infty}\|_{p'}\|T\|_{\tau(p)}\Big\{\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=1}^{N_1}|a_{1j}(x_1)\ldots.a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p}+\sum_{k=1}^{\infty}\epsilon/2^k\Big\} \\
&\leq \|T\|_{\tau(p)}\|(\lambda_j)_1^{\infty}\|_{p'}\Big\{\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{1j}(x_1)\ldots.a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p}+\epsilon\Big\} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

$\vdash\varphi_T$ está bem definida: Para um elemento $a\in\mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F)$, o valor $\varphi_T(a)$ não depende da representação de a: Suponha que temos uma representação finita do zero, $0=\sum_{j=1}^m\lambda_j a_{1j}\otimes\cdots\otimes a_{nj}\otimes y_j$ e pelas contas acima, obtemos

$$\begin{aligned}
|\varphi_T(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j a_{1j}\otimes\cdots\otimes a_{nj}\otimes y_j)| &= |\sum_{j=1}^{m}\lambda_j T(a_{1j},\ldots,a_{nj})(y_j)| \\
&\leq \|T\|_{\tau(p)}\|(\lambda_j)_{j=1}^{m}\|_{p'}\Big\{\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=1}^{m}|a_{1j}(x_1)\ldots.a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p}+\epsilon\Big\}.
\end{aligned}$$

para todo $\epsilon>0$; logo, a restrição de φ_T a $\mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F)$ está bem definida, e para cada $a\in\mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F)$ temos:

$$|\varphi_T|_{\mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F)}(a)|\leq\|T\|_{\tau(p)}\|(\lambda_j)_{j=1}^{m}\|_{p'}\Big[\sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=1}^{m}|a_{1j}(x_1)\ldots.a_{nj}(x_n)b(y_j)|^p\Big)^{1/p}+\epsilon\Big]$$

de onde segue que

$$|\varphi_T|_{\mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F)}(a)| \leq \|T\|_{\tau(p)}\|a\|_{\sigma(p)f}, \qquad \text{para cada} \;\; a \in \mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F).$$

Como os espaços E_i' tem a propriedade de aproximação λ_i-limitada para $i=1,\ldots,n$, por 1.4.3 segue que $|\varphi_T|_{\mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F)}(a)| \leq \|T\|_{\tau(p)}\|a\|_{\sigma(p)}$. Logo, $\varphi_T|_{\mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F)} : [\mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F), \|.\|_{\sigma(p)}] \mapsto [\mathbb{K}, \|.\|]$ é contínua. Lembre que $a \mapsto \varphi(a)$ e $T \mapsto \varphi_T$ são lineares. Por 1.4.4, $\mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F)$ é $\|.\|_{\sigma(p)}$-denso em $\mathcal{L}_{\sigma(p)}(E_1,\ \ldots,\ E_n;F)$, seguindo que $\varphi_T|_{\mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F}$ pode ser estendida a $[\mathcal{L}_{\sigma(p)}(E_1,\ldots,E_n;F), \|.\|_{\sigma(p)}]$ de modo único. Ou seja, a extensão coincide com φ_T e

$$|\varphi_T(a)| \leq \|T\|_{\tau(p)}\|a\|_{\sigma(p)}, \qquad \text{para cada} \;\; a \in \mathcal{L}_{\sigma(p)}(E_1,\ldots,E_n;F).$$

Isso mostra que φ_T está bem definida, e

$$\|\varphi_T\| \leq \|T\|_{\tau(p)}. \tag{1.7.1:eq1}$$

($\supseteq$) Seja $\varphi \in (\mathcal{L}_{\sigma(p)}(E_1,\ldots,E_n;F))'$,

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathcal{L}_{\sigma(p)}(E_1,\ldots,E_n;F) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & a=\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}\otimes\cdots\otimes a_{nj}\otimes y_j & \mapsto & \varphi(a)=\varphi(\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j}\otimes\cdots\otimes a_{nj}\otimes y_j) \end{array}$$

definimos

$$\begin{array}{cccccc} T_\varphi: & E_1'\text{x}\ldots\text{x}E_n' & \longrightarrow & F' & & \\ & (a_1,\ldots,a_n) & \mapsto & T_\varphi(a_1,\ldots,a_n): F & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & & y & \mapsto & T_\varphi(a_1,\ldots,a_n)(y) := \varphi(a_1\otimes\cdots\otimes a_n\otimes y) \end{array}$$

$\vdash T_\varphi \in \mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1',\ldots,E_n';F')$: Queremos saber se existe $C \geq 0$ tal que para $\beta_1,\ldots,\beta_m \in F''$ e $a_{i1},\ldots,a_{im} \in E_i'$, $i=1,\ldots,n$,

$$\Big(\sum_{j=1}^m |\beta_j(T_\varphi(a_{1j},\ldots,a_{nj}))|^p\Big)^{1/p} \leq C \sup_{\substack{\|\alpha_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^m |\alpha_1(a_{1j}),\ldots,\alpha_n(a_{nj})\beta_j(b)|^p\Big)^{1/p}.$$

Como F é reflexivo, para cada $\beta_j \in F''$ existe $y_j \in F$ tal que $\mathcal{A}_F y_j = \beta_j$. Logo, para $T_\varphi(a_{1j},\ldots,a_{nj}) \in F'$ temos que

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{j=1}^m |\beta_j(T_\varphi(a_{1j},\ldots,a_{nj}))|^p\Big)^{1/p} &= \Big(\sum_{j=1}^m |\mathcal{A}_F y_j(T_\varphi(a_{1j},\ldots,a_{nj}))|^p\Big)^{1/p} \\ &= \Big(\sum_{j=1}^m |T_\varphi(a_{1j},\ldots,a_{nj})(y_j)|^p\Big)^{1/p} \\ &= \Big(\sum_{j=1}^m |\varphi(a_{1j}\otimes\cdots\otimes a_{nj}\otimes y_j)|^p\Big)^{1/p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(por Hahn-Banach, } \exists \|(\epsilon_j)_{j=1}^m\|_{p'} = 1) \quad &= |\sum_{j=1}^m \epsilon_j \varphi(a_{1j} \otimes \cdots \otimes a_{nj} \otimes y_j)| \\
&= |\varphi(\sum_{j=1}^m \epsilon_j a_{1j} \otimes \cdots \otimes a_{nj} \otimes y_j)| \\
(\varphi \text{ contínua}) \quad &\leq \|\varphi\| \| \sum_{j=1}^m (\epsilon_j a_{1j} \otimes \cdots \otimes a_{nj} \otimes y_j)\|_{\sigma(p)} \\
&\leq \|\varphi\| \|(\epsilon_j)_1^m\|_{p'} \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^m |a_{1j}(x_1) \ldots a_{nj}(x_n) b(y_j)|^p \Big)^{1/p} \\
\text{(por 0.1.2)} \quad &= \|\varphi\| \sup_{\substack{\|\alpha_i\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^m |\mathcal{A}_F y_j(b) \alpha_1(a_{1j}) \ldots \alpha_n(a_{nj})|^p \Big)^{1/p} \\
&= \|\varphi\| \sup_{\substack{\|\alpha_i\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^m |\beta_j(b) \alpha_1(a_{1j}) \ldots \alpha_n(a_{nj})|^p \Big)^{1/p}
\end{aligned}$$

mostrando que T_φ é $\tau(p)$-somante e

$$\|T_\varphi\|_{\tau(p)} \leq \|\varphi\|. \qquad (1.7.1\text{:eq2})$$

Note que $\varphi \mapsto T_\varphi$ e $T \mapsto \varphi_T$ são inversas uma da outra: dadas $\varphi \in [\mathcal{L}_{\sigma(p)}(E_1, \ldots, E_n; F)]'$, $T \in \mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1', \ldots, E_n'; F')$, $\sum_{j=1}^\infty a_{1j} \otimes \cdots \otimes a_{nj} \otimes y_j \in \mathcal{L}_{\sigma(p)}(E_1, \ldots, E_n; F)$, $a_1 \in E_1', \ldots, a_n \in E_n'$ e $y \in F_i'$, temos:

$$\begin{aligned}
\varphi_{T_\varphi}(\sum_{j=1}^\infty a_{1j} \otimes \cdots \otimes a_{nj} \otimes y_j) &= \sum_{j=1}^\infty T_\varphi(a_{1j}, \ldots, a_{nj})(y_j) \\
&= \sum_{j=1}^\infty \varphi(a_{1j} \otimes \cdots \otimes a_{nj} \otimes y_j) \\
&= \varphi(\sum_{j=1}^\infty a_{1j} \otimes \cdots \otimes a_{nj} \otimes y_j)
\end{aligned}$$

bem como

$$\begin{aligned}
T_{\varphi_T}(a_1, \ldots, a_n)(y) &= \varphi_T(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes y_j) \\
&= T(a_1, \ldots, a_n)(y).
\end{aligned}$$

Obtivemos uma bijeção contínua, linear e de 1.7.1:eq1 e 1.7.1:eq2 segue que $\|T_\varphi\|_{\tau(p)} = \|\varphi\|$. ∎

Capítulo 2

Polinômios n-homogêneos

2.1 Polinômios n-homogêneos

Dados E, F espaços de Banach, escreveremos $\mathcal{L}(^nE; F) := \mathcal{L}(E, \overset{\text{n vezes}}{\dots}, E; F)$. Seja Σ_n o conjunto de todas as permutações de $\{1, \dots, n\}$. Dizemos que $T \in \mathcal{L}(^nE; F)$ é *aplicação n-linear simétrica* se

$$T(x_1, \dots, x_n) = T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \quad \forall \sigma \in \Sigma_n, \ \forall x_1, \dots, x_n \in E.$$

Denotamos por $\mathcal{L}_s(^nE; F)$ o espaço das aplicações n-lineares simétricas. O espaço $[\mathcal{L}_s(^nE; F), \|.\|]$ é fechado em $[\mathcal{L}(^nE; F), \|.\|]$ (ver [6] proposição 1 pg2). A *aplicação n-linear de simetrização*

$$\begin{array}{cccc} s: & \mathcal{L}(^nE; F) & \longrightarrow & \mathcal{L}_s(^nE; F) \\ & T & \mapsto & T_s \end{array}$$

onde

$$T(x_1, \dots, x_n) = \tfrac{1}{n!} \textstyle\sum_{\sigma \in \Sigma_n} T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

é uma projeção contínua (ver [6] proposição 2 pg 3).

Escrevemos $x^n := (x, \overset{\text{n vezes}}{\dots}, x)$. Um *polinômio n-homogêneo contínuo* é uma aplicação $P : E \to F$ para a qual existe $T \in \mathcal{L}(^nE; F)$ tal que $P(x) = T(x^n)$ para cada $x \in E$. Para mostrar que T corresponde a P, escrevemos $\hat{T} = P$. Denotaremos por $\mathcal{P}(^nE; F)$ o espaço de Banach dos polinômios n-homogêneos contínuos de E em F em relação às operações pontuais de vetores e à norma definida por

$$\|P\| := \sup\{\|P(x)\| : x \in B_E\}.$$

Observe que $\|P(x)\| \leq \|P\|\|x\|^n$, pois se $\hat{T} = P$, então

$$\|P(x)\| \;=\; \|\hat{T}(x)\| \;=\; \|T(x^n)\| \;\leq\; \|T\|\|x\|^n,$$

e

$$\begin{aligned} \|\hat{T}\| &:= \sup\{\|\hat{T}(x)\| : x \in B_E\} \\ &= \sup\{\|T(x^n)\| : x \in B_E\} \\ &\leq \sup\{\|T(x_1, \ldots x_n)\| : x_i \in B_E\} \;=\; \|T\|. \end{aligned}$$

A aplicação

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_s({}^nE;F) & \longrightarrow & \mathcal{P}({}^nE;F) \\ T & \mapsto & \hat{T} \end{array}$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais bem como um homeomorfismo do espaço de Banach $\mathcal{L}_s({}^nE;F)$ sobre $\mathcal{P}({}^nE;F)$ (ver [6] proposição 3 pg 4). Para $n = 0$, escrevemos $\mathcal{P}({}^0E;F) = F$, o espaço das aplicações constantes de E em F.

Um *polinômio contínuo* P de E em F é uma aplicação $P : E \to F$ para a qual existem $n \in \mathbb{N}_0$ e $P_k \in \mathcal{P}({}^kE;F)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ tais que $P = P_0 + P_1 + \ldots + P_n$. O espaço dos polinômios contínuos será denotado por $\mathcal{P}(E;F)$. Também em [6] mostra-se que se $P \in \mathcal{P}(E;F)$, $P \neq 0$, existe uma única forma de escrever

$$P = P_0 + P_1 + \ldots + P_n$$

com $n \in \mathbb{N}_0$ e $P_k \in \mathcal{P}({}^kE;F)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ e $P_n \neq 0$.

No espaço das aplicações n-lineares de tipo finito $\mathcal{L}_f({}^nE;F)$ podemos considerar o subconjunto das aplicações simétricas

$$\mathcal{L}_{fs}({}^nE;F) := \mathcal{L}_f({}^nE;F) \bigcap \mathcal{L}_s({}^nE;F).$$

É claro que para uma aplicação $T \in \mathcal{L}_f({}^nE;F)$ sua simetrização $\hat{T}$ está em $\mathcal{L}_{fs}({}^nE;F)$. Denotaremos por $\mathcal{P}_f({}^nE;F)$ o espaço dos polinômios n-homogêneos P tais que $P(x) = Tx^n$, onde $T \in \mathcal{L}_{fs}({}^nE;F)$, e diremos que P é *polinômio n-homogêneo contínuo de tipo finito*. A aplicação $T \in \mathcal{L}_s({}^nE;F) \mapsto \hat{T} \in \mathcal{P}({}^nE;F)$ induz um isomorfismo de espaços vetoriais entre $\mathcal{L}_{fs}({}^nE;F)$ e $\mathcal{P}_f({}^nE;F)$.

2.2 Ideais de polinômios n-homogêneos

Denotaremos por $\mathcal{P}$ a classe de todos os polinômios contínuos entre espaços de Banach arbitrários. Um *ideal de polinômios n-homogêneos contínuos* $\mathcal{I}$ é um subconjunto de $\mathcal{P}$ tal que as componentes

$$\mathcal{I}(^nE;F) := \mathcal{I} \cap \mathcal{P}(^nE;F)$$

satisfazem as seguintes condições:

(I1) $I_n \in \mathcal{P}(^n\mathbb{K};\mathbb{K})$, onde $I_n(\lambda) = \lambda^n$.
(I2) Se $P_1, P_2 \in \mathcal{I}(^nE;F)$, então $P_1 + P_2 \in \mathcal{I}(^nE;F)$.
(I3) Se $P \in \mathcal{I}(^nE;F)$, $O \in \mathcal{L}(F;G)$ e $Q \in \mathcal{L}(D;E)$, então $OPQ \in \mathcal{I}(^nD;G)$.

Note que a aplicação nula de E em F está em $\mathcal{I}(^nE;F)$, pois se $O : y \in F \mapsto O(y) := 0 \in F$ e $Q \in \mathcal{L}(E;E)$, ela pode ser obtida pela composição OPQ, que pela propriedade (M3) está em $\mathcal{I}(^nE;F)$.

Sob a condição (I3), a propriedade $(I1)$ é equivalente à propriedade $(I1')$:

(I1′) $a \in E'$ e $y \in F$ implicam $a^n \otimes y \in \mathcal{I}(^nE;F)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

$\vdash (I1) \Leftrightarrow (I1')$

$(\Rightarrow)$ Como $a^n \otimes y = (1 \otimes y) \circ I_n \circ (a \otimes 1)$ por $(I3)$ e $(I1)$segue que $a^n \otimes y \in \mathcal{I}$.
$(\Leftarrow)$ Como $I_n = 1^n \otimes 1$ por $(I1')$ segue que $I_n \in \mathcal{I}$.

Uma aplicação não negativa $\|.\|_{\mathcal{I}}$ de $\mathcal{I}$ em $\mathbb{K}$ será chamada *quasi-norma* em $\mathcal{I}$ se:

(PQN1) $\|I_n\|_{\mathcal{I}} = \|1^n \otimes 1\| = 1$.
(PQN2) Existe uma constante $c_{\mathcal{I}} \geq 1$ tal que $\|P_1 + P_2\|_{\mathcal{I}} \leq c_{\mathcal{I}}\Big(\|P_1\|_{\mathcal{I}} + \|P_2\|_{\mathcal{I}}\Big)$ para cada $P_i \in \mathcal{I}(^nE;F)$, $\forall E$, $\forall F$.
(PQN3) $\|OPQ\|_{\mathcal{I}} \leq \|O\| \; \|P\|_{\mathcal{I}} \; \|Q\|^n$ para $P \in \mathcal{I}(^nE;F)$, $O \in \mathcal{L}(F;G)$ e $Q \in \mathcal{L}(D;E)$.

Se a constante $c_{\mathcal{I}}$ for igual a 1, então $\|.\|_{\mathcal{I}}$ é uma norma. Como conseqüência dessa definição temos a seguinte propriedade:
$\vdash$Se $P \in \mathcal{I}(^nE;F)$, então $\|P\| \leq \|P\|_{\mathcal{I}}$. Com efeito, seja $b \in F'$, então:

$$|b(P(x))| \leq \|b \otimes 1\|\|P\|_{\mathcal{I}}\|1 \otimes x\|$$

e considerando o supremo temos:

$$\|P\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\|_F = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|b\| \leq 1}} |b(P(x))| \leq \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|b\| \leq 1}} \|b \otimes 1\| \; \|P\|_{\mathcal{I}} \; \|1 \otimes x\| = \|P\|_{\mathcal{I}}.$$

Note que a propriedade $(PQN1)$ é equivalente a

(PQN1′) $\|a^n \otimes y\| = \|a\|^n \; \|y\|$ para cada $a \in E'$ e $y \in F$.

$\vdash\Big(\|a^n \otimes y\| = \|a\|^n\|y\|\Big) \Leftrightarrow \Big(\|1^n \otimes 1\| = 1\Big)$

($\Rightarrow$) É claro.

($\Leftarrow$) Já sabemos que $\|a^n \otimes y\| \leq \|a^n \otimes y\|_{\mathcal{I}}$. Por outro lado, temos que $a^n \otimes y = (1 \otimes y)I_n(a^1 \otimes 1)$, e por $(PQN3)$ tem-se $\|a^n \otimes y\|_{\mathcal{I}} \leq \|1 \otimes y\|\|I_n\|_{\mathcal{I}}\|a^1 \otimes 1\|^n = \|y\|1\|a\|^n$. ∎

Uma quasi-norma $\|.\|_{\mathcal{I}}$ é chamada de *r-norma* $(0 < r \leq 1)$ se vale a *desigualdade r-triangular*

(PQN2′) $\|P_1 + P_2\|_{\mathcal{I}}^r \leq \|P_1\|_{\mathcal{I}}^r + \|P_2\|_{\mathcal{I}}^r$ para $P_1, P_2 \in \mathcal{I}(^nE; F)$.

Se $r = 1$, $\|.\|_{\mathcal{I}}$ é chamada de *norma*. Diremos que $[\mathcal{I}, \|.\|_{\mathcal{I}}]$ é um *ideal r-normado de polinômios n-homogêneos contínuos* se $\mathcal{I}$ for um ideal de polinômios n-homogêneos contínuos com uma r-norma $\|.\|_{\mathcal{I}}$ tal que todo subespaço vetorial topológico Hausdorff $\mathcal{I}(^nE; F)$ seja completo. Se $r = 1$, diremos que $[\mathcal{I}, \|.\|_{\mathcal{I}}]$ é um *ideal de Banach de polinômios n-homogêneos contínuos.*

O resultado a seguir é muito útil:

2.2.1 Teorema: *Seja $\mathcal{I}$ uma subclasse de $\mathcal{P}$ com uma função com valores reais não negativos $\|.\|_{\mathcal{I}}$ tal que para algum $0 < r \leq 1$ são satisfeitas as seguintes condições:*

(0) $I_n \in \mathcal{I}$ e $\|I_n\|_{\mathcal{I}} = 1$.

(1) Se $P_1, P_2, \ldots \in \mathcal{I}(^nE; F)$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \|P_k\|_{\mathcal{I}}^r < \infty$, então $P = \sum_{k=1}^{\infty} P_k \in \mathcal{I}(^nE; F)$ e $\|P\|_{\mathcal{I}}^r \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|P_k\|_{\mathcal{I}}^r$.

(2) $Q \in \mathcal{P}(^1D; E)$, $P \in \mathcal{I}(^nE; F)$ e $O \in \mathcal{P}(^1F; G)$, implicam $OPQ \in \mathcal{I}(^nD; G)$ e $\|OPQ\|_{\mathcal{I}} \leq \|O\|\|P\|_{\mathcal{I}}\|Q\|$.

Então $[\mathcal{I}, \|.\|_{\mathcal{I}}]$ é um ideal r-normado de polinômios n-homogêneos contínuos, e se $r = 1$, é um ideal de Banach de polinômios n-homogêneos contínuos.

Demonstração: Note que (0) implica $(I1)$ e $(PQN1)$, (2) implica $(I3)$ e $(PQN3)$ e (1) implica $(I2)$, $(PQN2')$. A completude do espaço vetorial topológico Hausdorff $\mathcal{I}(^nE; F)$ também segue de (1): Seja $(O_j)_{j=1}^{\infty}$ uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{I}(^nE; F)$; logo, dado $\epsilon > 0$ existe $J_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que se $k, l \geq J_\epsilon$, então

$$\|O_k - O_l\|_{\mathcal{I}}^r \leq \epsilon.$$

Sejam $Q_1 = O_1$, $Q_2 = O_2 - O_1$, $\ldots$, $Q_k = O_k - O_{k-1}$, então $\sum_{j=1}^{k} Q_j = O_k$. Vejamos que a série $\sum_{j=1}^{k} Q_j$ é de Cauchy:

$$\Big\|\sum_{j=1}^{k} Q_j - \sum_{j=1}^{l} Q_j\Big\|_{\mathcal{I}}^r \leq \Big\|O_k - O_l\Big\|_{\mathcal{I}}^r \leq \epsilon,$$

para $k, l \geq J_\epsilon$. A seguir considere uma seqüência de naturais $(n_k)_{k=1}^\infty$ tais que $n_k \leq n_{k+1}$ para cada k e satisfazendo

$$\Big\| \underbrace{\sum_{j=1}^{n_{k+1}} Q_j - \sum_{j=1}^{n_k} Q_j}_{P_k} \Big\|_{\mathcal{I}}^r \leq \epsilon/2^k.$$

Então $\sum_{k=1}^\infty \|P_k\|_{\mathcal{I}}^r \leq \sum_{k=1}^\infty \epsilon/2^k = \epsilon < \infty$. Por (1) tem-se que $P = \sum_{k=1}^\infty P_k \in \mathcal{I}(^nE; F)$ e que $\|P\|_{\mathcal{I}}^r \leq \sum_{k=1}^\infty \|P_k\|_{\mathcal{I}}^r < \epsilon$. Como

$$P = \sum_{k=1}^\infty P_k = \sum_{k=1}^\infty \Big(\sum_{j=1}^{n_{k+1}} Q_j - \sum_{j=1}^{n_k} Q_j \Big) = \sum_{j=n_k+1}^\infty Q_j,$$

se $O = \sum_{j=1}^{n_1} Q_j + P \in \mathcal{I}(^nE; F)$, então

$$\begin{aligned} \|O_k - O\|_{\mathcal{I}}^r &= \Big\| \sum_{j=1}^{k} Q_j - \Big(\sum_{j=1}^{n_1} Q_j + P \Big) \Big\|_{\mathcal{I}}^r \\ &\leq \Big\| \sum_{j=1}^{k} Q_j - \sum_{j=1}^{n_1} Q_j \Big\|_{\mathcal{I}}^r + \|P\|_{\mathcal{I}}^r \\ (k, n_1 \geq J_\epsilon) &< \epsilon + \epsilon \end{aligned}$$

seguindo a completude do espaço. ■

Mostra-se facilmente que os polinômios $\mathcal{P}_f$ de tipo finito formam um ideal de polinômios n-homogêneos e estão contidos em todo ideal de polinômios n-homogêneos $\mathcal{P}$.

2.3 O teorema da dominação para polinômios n-homogêneos $\tau(p)$-somantes

Para um polinômio n-homogêneo $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$, diremos que P é $\tau(p; q)$-*somante* se existe uma constante $C \geq 0$ tal que para quaisquer $m \in \mathbb{N}$, $x_j \in E$, $b_j \in F'$, $j = 1, 2, \ldots, m$ vale a desigualdade seguinte:

$$\Big(\sum_{j=1}^m |b_j(P(x_j))|^p \Big)^{1/p} \leq C \sup_{\substack{\|a\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^m |a(x_j) b_j(y)|^q \Big)^{1/q}.$$

Denotaremos o conjunto dos polinômios n-homogêneos $\tau(p; q)$-somantes de E em F por $\mathcal{P}_{\tau(p;q)}(^nE; F)$ e nele definimos a norma $\|P\|_{\tau(p;q)} := \inf C$ para a constante que aparece na expressão acima. Quando $p = q$ escreve-se apenas $\mathcal{P}_{\tau(p)}(^nE; F)$ e dizemos que é conjunto dos polinômios

n-homogêneos $\tau(p)$-somantes de E em F. Verificar que $[\mathcal{P}_{\tau(p;q)}(^nE;F), \|.\|_{\tau(p;q)}]$ é ideal de Banach de polinômios n-homogêneos é simples com o uso do teorema 2.2.1. Observe que tal como no caso das aplicações $\tau(p;q)$-somantes, só é interessante se $p \geq q$.

2.3.1 Teorema (da dominação para polinômios n-homogêneos $\tau(p)$-somantes): *Um polinômio n-homogêneo $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ é $\tau(p)$-somante se e só se existem uma constante $\sigma \geq 0$ e uma medida de probabilidade $\mu \in W(B_{E'}\times B_{F''})$, o conjunto das probabilidades de Borel em $B_{E'}\times B_{F''}$, tais que*

$$|b(P(x))| \leq \sigma\Big(\int_{B_{E'}\times B_{F''}} |a(x)^n\beta(b)|^p d\mu(a,\beta)\Big)^{1/p}, \quad \forall x \in E, \forall b \in F'. \tag{2.3.1:eq1}$$

Demonstração:

($\Leftarrow$) Temos:

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{j=1}^m |b_jP(x_j)|^p\Big)^{1/p} &\leq \Big\{\sum_{j=1}^m\Big[\sigma\Big(\int_{B_{E'}\times B_{F''}} |a(x_j)^n\beta(b_j)|^p \; d\mu(a,\beta)\Big)^{1/p}\Big]^p\Big\}^{1/p} \\
(\text{soma finita } \Rightarrow) &= \sigma\Big\{\int_{B_{E'}\times B_{F''}} \sum_{j=1}^m |a(x_j)^n\beta(b_j)|^p \; d\mu(a,\beta)\Big\}^{1/p} \\
&\leq \sigma\Big\{\int_{B_{E'}\times B_{F''}} \sup_{\substack{\|a\|\leq 1\\ \|\beta\|\leq 1}} \sum_{j=1}^m |a(x_j)^n\beta(b_j)|^p d\mu(a,\beta)\Big\}^{1/p} \\
&= \sigma \sup_{\substack{\|a\|\leq 1\\ \|\beta\|\leq 1}} \Big\{\sum_{j=1}^m |a(x_j)^n\beta(b_j)|^p\Big\}^{1/p}.
\end{aligned}$$

($\Rightarrow$) Supondo que $P \in \mathcal{P}_{\tau(p)}(^nE;F)$, fixe $\sigma = \|P\|_{\tau(p)}$. Considere $C(B_{E'}\times B_{F''})'$ (dual do conjunto das funções contínuas) com a topologia $C(B_{E'}\times B_{F''})$-fraca. Então $W(B_{E'}\times B_{F''})$ é subconjunto convexo e compacto[1]. Para qualquer família finita de elementos $x_1,\ldots,x_m \in E$ e funcionais $b_1,\ldots,b_m \in F'$ a equação

$$\phi(\mu) := \sum_{j=1}^m\Big\{|b_jP(x_j)|^p - \sigma^p\int_{B_{E'}\times B_{F''}} |a(x_j)^n\beta(b_j)|^p d\mu(a,\beta)\Big\}$$

define uma função real convexa e contínua ϕ sobre $W(B_{E'}\times B_{F''})$. Escolha $a_0 \in B_{E'}$ e $\beta_0 \in B_{F''}$[2] tais que

$$\sup\Big\{\sum_{j=1}^m |a(x_j)^n\beta(b_j)|^p : \|a\|, \|\beta\| \leq 1\Big\} = \sum_{j=1}^m |a_0(x_j)^n\beta_0(b_j)|^p.$$

[1]Pelo teorema da representação de Riesz 0.1.10, $W(B_{E'}\times B_{F''})$ é isomorfo a $B_{[C(B_{E'}\times B_{F''})]'}$; por Alaoglu 0.1.11, este último é compacto na topologia considerada, e claramente é convexo.

[2]Isso é possivel, uma vez que $B_{E'}, B_{F''}$ são compactos

Se $\delta(a_0, \beta_0)$ denota a medida de Dirac no ponto (a_0, β_0), então temos

$$\phi(\delta(a_0, \beta_0)) = \sum_{j=1}^{m} |b_j P(x_j)|^p - \sigma^p |a_0(x_j)^n \beta_0(b_j)|^p \leq 0.$$

Como a coleção $\mathcal{F}$ das funções obtidas desta forma é côncava[3], pelo Lema de Ky Fan 0.1.7, existe uma medida $\mu_0 \in W(B_{E'} \times B_{F''})$ tal que $\phi(\mu_0) \leq 0, \ \forall \phi \in \mathcal{F}$ simultaneamente. Em particular, se ϕ é gerada por x e b, segue que

$$|b(P(x))|^p - \sigma^p \int_{B_{E'} \times B_{F''}} |a(x)^n \beta(b)|^p \quad d\mu_0(a, \beta) \leq 0.$$

Logo

$$|b(P(x))|^p \leq \sigma^p \int_{B_{E'} \times B_{F''}} |a(x)^n \beta(b)|^p \quad d\mu_0(a, \beta)$$

e daí

$$|b(P(x))| \leq \sigma \Big(\int_{B_{E'} \times B_{F''}} |a(x)^n \beta(b)|^p \quad d\mu_0(a, \beta) \Big)^{1/p}. \qquad \blacksquare$$

Lembremos a seguinte definição (ver pg 10 [1] e pg 98 [15]): Um polinômio n-homogêneo $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$ é dito *p-semi-integral* se existem uma constante $C \geq 0$ e uma medida regular de probabilidade $\mu \in W(B_{E'})$ tais que

$$\|P(x)\| \leq C \Big(\int_{B_{E'}} |a(x)^n|^p \quad d\mu(a) \Big)^{1/p} \qquad \forall x \in E.$$

Seja ν medida regular de probabilidade dada por $\nu(C) = \mu(C \times B_{F''})$ para cada C subconjunto Boreliano de $B_{E'}$. Segue que se $P \in \mathcal{P}_{\tau(p)}(^nE; F)$, então

$$\begin{aligned} |bP(x)| &= |b(P(x))| \\ &\leq \sigma \Big(\int_{B_{E'} \times B_F} |a(x)^n \beta(b)|^p d\mu(a, \beta) \Big)^{1/p} \\ &\leq \|b\| \sigma \Big(\int_{B_{E'}} |a(x)^n|^p d\nu(a) \Big)^{1/p} \end{aligned}$$

para cada $x \in E$, onde ν é medida regular de probabilidade dada por $\nu(C) = \mu(C \times B_{F''})$ para cada C subconjunto Boreliano de B_E. Segue que

$$\begin{aligned} \|P(x)\| &= \sup_{\|b\| \leq 1} |bP(x)| \\ &\leq \sup_{\|b\| \leq 1} \|b\| \sigma \Big(\int_{B_{E'}} |a(\lambda^{1/n}.x)^n|^p d\nu(a) \Big)^{1/p} \\ &\leq \sigma \Big(\int_{B_{E'}} |a(\lambda^{1/n}.x)^n|^p d\nu(a) \Big)^{1/p}, \end{aligned}$$

para cada $x \in E$. ou seja, P é p-semi-integral, ie $\mathcal{P}_{\tau(p)}(^nE; F) \subseteq \mathcal{P}_{si(p)}(^nE; F)$.

[3] A demonstração é análoga ao caso n-linear.

2.4 Polinômios n-homogêneos $\sigma(p)$-nucleares

Sejam D, E, F, G espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. Diremos que um polinômio n-homogêneo $P : E \to F$ é $\sigma(p)$-*nuclear*, se P admite uma representação da forma

$$P = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j^n \otimes y_j$$

onde $\lambda_j \in \mathbb{K}$, $a_j \in E'$, $y_j \in F$, $j \in \mathbb{N}$, onde $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in l_{p'}$ e

$$\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j(x)^n b(y_j)|^p\right)^{1/p} < \infty$$

com

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \left(\sum_{j=m}^{\infty} |a_j(x)^n b(y_j)|^p\right)^{1/p} = 0.$$

Observe que $x \in E$ e $b \in F'$. Denotaremos o conjunto dessas aplicações por $\mathcal{P}_{\sigma(p)}({}^nE; F)$, e nele podemos definir a norma:

$$\|P\|_{\sigma(p)} = \inf_{\substack{\text{representações}\\ \text{de } P}} \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'} \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \left(\sum_{1}^{\infty} |a_j(x)^n b(y_j)|^p\right)^{1/p}.$$

A seguir mostraremos que $\mathcal{P}_{\sigma(p)}$ com a norma $\|.\|_{\sigma(p)}$ é ideal normado de polinômios n-homogêneos, usando o teorema 2.2.1.

$\vdash(0)$: Veja que $I_n \in \mathcal{P}_{\sigma(p)}$, pois para $I_n = 1 \otimes \overset{\text{n vezes}}{\cdots} \otimes 1 \otimes 1$, temos $\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} |1.x.\ldots.1.xb.1| \leq 1$; como para $x = b = 1$ tem-se a igualdade, vemos que $\|I_n\|_{\sigma(p)} = 1$.

$\vdash(1)$: Sejam $P_1, P_2, \ldots \in \mathcal{P}_{\sigma(p)}({}^nE; F)$ tais que $\sum_{k=1}^{\infty} \|P_k\|_{\sigma(p)} < \infty$, e considere representações tais que para cada k, $P_k = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{kj} a_{kj}^n \otimes y_{kj}$ com

$$\|(\lambda_{kj})_{j=1}^{\infty}\|_{p'} \ \leq \ \left[(1+\epsilon)\|P_k\|_{\sigma(p)}\right]^{1/p'}$$

e

$$\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}(x)^n b(y_{kj})|^p\right)^{1/p} \ \leq \ \left[(1+\epsilon)\|P_k\|_{\sigma(p)}\right]^{1/p}. \qquad (2.4.0\text{:eq1})$$

Isto é possível, pois se

$$C_1 \ = \ \|(\lambda_j^k)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}$$

e

$$C_2 \ = \ \sup_{\substack{\|x_i\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}(x)^n b(y_{kj})|^p\right)^{1/p},$$

podemos considerar nova representação trocando

$$\lambda_j^k \quad \text{por} \quad \frac{\lambda_j^k C_2}{\Big((1+\epsilon)\|P_k\|_{\sigma(p)}\Big)^{1/p}} \quad \text{e} \quad y_j^k \quad \text{por} \quad \frac{y_j^k C_1}{\Big((1+\epsilon)\|P_k\|_{\sigma(p)}\Big)^{1/p'}}$$

que satisfará as desigualdades citadas acima. Segue que

$$\begin{aligned}
\|(\lambda_j^k)_{j,k=1}^{\infty}\|_{p'} &:= (\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j^k|^{p'})^{1/p'} = \Big[\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\Big[\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j^k|^{p'}\Big]^{1/p'}\Big)^{p'}\Big]^{1/p'} \leq \\
&\leq \Big[\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\Big[(1+\epsilon)\|S_k\|_{\sigma(p)}\Big]^{1/p'}\Big)^{p'}\Big]^{1/p'} = (1+\epsilon)^{1/p'}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\|S_k\|_{\sigma(p)}\Big]^{1/p'}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{kj}(x)^n b(y_{kj})|^p\Big)^{1/p} &= \Big[\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\Big[\sum_{j=1}^{\infty}|a_{kj}(x)^n b(y_{kj})|^p\Big]^{1/p}\Big)^p\Big]^{1/p} \\
&\leq \Big[\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big[\sum_{j=1}^{\infty}|a_{kj}(x)^n b(y_{kj})|^p\Big]^{1/p}\Big)^p\Big]^{1/p} \\
&\leq \Big[\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\Big[(1+\epsilon)\|P_k\|_{\sigma(p)}\Big]^{1/p}\Big)^p\Big]^{1/p} \\
&= (1+\epsilon)^{1/p}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\|P_k\|_{\sigma(p)}\Big]^{1/p}.
\end{aligned}$$

Então $P = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{kj}a_{kj}^n \otimes y_{kj}$ e

$$\begin{aligned}
\|(\lambda_{kj})_{j,k=1}^{\infty}\|_{p'}\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{kj}(x)^n b(y_{kj})|^p\Big)^{1/p} &\leq \\
&\leq (1+\epsilon)^{1/p'}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\|P_k\|_{\sigma(p)}\Big]^{1/p'}(1+\epsilon)^{1/p}\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\|P_k\|_{\sigma(p)}\Big]^{1/p} \\
(1/p'+1/p=1 \ \Rightarrow) &= (1+\epsilon)\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\|P_k\|_{\sigma(p)}\Big].
\end{aligned}$$

Como isso pode ser feito para cada $\epsilon > 0$, segue que

$$\|P\|_{\sigma(p)} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\|P_k\|_{\sigma(p)} < \infty.$$

Falta mostrar que

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{j=m}^{\infty}|a_{kj}(x)^n b(y_{kj})|^p\Big)^{1/p} = 0.$$

Para isso, observe que:

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{j=m}^{\infty}|a_{kj}(x)^n b(y_{kj})|^p\Big)^{1/p} &\leq \Big(\sum_{k=m}^{\infty}\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\sum_{j=m}^{\infty}|a_{kj}(x)^n b(y_{kj})|^p\Big)^{1/p}\\
&\leq \Big(\sum_{k=m}^{\infty}\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{kj}(x)^n b(y_{kj})|^p\Big)^{1/p}\\
&= \Big(\sum_{k=m}^{\infty}\Big[\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{kj}(x)^n b(y_{kj})|^p\Big)^{1/p}\Big]^p\Big)^{1/p}\\
\text{(por 2.4.0: eq1)}\quad &\leq \Big(\sum_{k=m}^{\infty}\Big[\Big((1+\epsilon)\|P_k\|_{\sigma(p)}\Big)^{1/p}\Big]^p\Big)^{1/p}\\
&= \Big(\sum_{k=m}^{\infty}(1+\epsilon)\|P_k\|_{\sigma(p)}\Big)^{1/p} < \infty
\end{aligned}$$

que converge a zero quando m tende a infinito, ou seja, P é $\sigma(p)$-nuclear.

$\vdash$(2): Agora considere os polinômios 1-homogêneos $Q : D \longrightarrow E$ e $O : F \longrightarrow G$ e um polinômio n-homogêneo $P : E \rightarrow F$ em $\mathcal{P}_{\sigma(p)}(^nE; F)$. Queremos mostrar que $OPQ \in [\mathcal{P}_{\sigma(p)}(^nD; G), \|.\|_{\sigma(p)}]$.

$$\begin{aligned}
OPQ(u) &= O\Big(\sum_{1}^{\infty}\lambda_j a_j(Q(u))^n y_j\Big)\\
&= \sum_{1}^{\infty}\lambda_j a_j(Q(u))^n.O(y_j)\\
&= \sum_{1}^{\infty}\lambda_j (Q'a_j)(u)^n.O(y_j).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}\sup_{\substack{\|u\|\leq 1\\ \|c\|\leq 1}}\Big(\sum_{1}^{\infty}|(Q'a_j)(u).c(O(y_j))|^p\Big)^{1/p} =\\
&= \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}\sup_{\substack{\|u\|\leq 1\\ \|c\|\leq 1}}\Big(\sum_{1}^{\infty}|a_j(Qu).O'c(y_j)|^p\Big)^{1/p}\\
&= \|Q\|\|O'\|\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}\sup_{\substack{\|u\|\leq 1\\ \|c\|\leq 1}}\Big(\sum_{1}^{\infty}\Big|a_j\Big(\frac{Qu}{\|Q\|}\Big)\frac{O'c}{\|O'\|}(y_j)\Big|^p\Big)^{1/p}\\
&\leq \|Q\|\|O\|\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{1}^{\infty}|a_j(x)^n.b(y_j)|^p\Big)^{1/p}
\end{aligned}$$

para cada representação de P. Por acima temos também que

$$\sup_{\substack{\|u\|\leq 1\\ \|c\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=m}^{\infty}|[(Q'a_j)(u)]^n.c(O(y_j))|^p\Big)^{1/p}\leq$$

$$\leq \quad \|Q\|\|O\|\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=m}^{\infty}|a_j(x)^n.b(y_j)|^p\Big)^{1/p}$$

que tende a zero quando m vai para infinito. Logo OPQ é $\sigma(p)$-nuclear e

$$\|OPQ\|_{\sigma(p)}\leq\|Q\|.\|O\|\|P\|_{\sigma(p)}.$$

Logo, $\mathcal{P}_{\sigma(p)}$ com a norma $\|.\|_{\sigma(p)}$ é ideal de Banach de polinômios n-homogêneos e portanto temos que $\|P\|\leq\|P\|_{\sigma(p)}$ e $\|\lambda a^n\otimes y\|_{\sigma(p)}=|\lambda|\|a\|^n.\|y\|$.

Gostaríamos de saber se para $1\leq q\leq p$ existe alguma relação entre $\|.\|_{\sigma(p)}$ e $\|.\|_{\sigma(q)}$. Temos certamente $\mathcal{P}_{\sigma(p)}\subset\mathcal{P}_{\sigma(1)}$, mas como comparar

$$\inf_{\substack{\text{representações}\\ \text{de } P}}\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|a_j(x)^n b(y_j)|^p\Big)^{1/p}$$

e

$$\inf_{\substack{\text{representações}\\ \text{de } P}}\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{q'}\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|a_j(x_1)^n b(y_j)|^q\Big)^{1/q}$$

uma vez que $q\leq p$ implica $p'\leq q'$, obtendo que

$$\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|a_j(x)^n b(y_j)|^p\Big)^{1/p}\leq\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|a_j(x)^n b(y_j)|^q\Big)^{1/q}$$

e

$$\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}\geq\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{q'}?$$

No conjunto $\mathcal{P}_f(^nE;F)$ podemos considerar a norma $\|.\|_{\sigma(p)f}$, induzida pela norma $\|.\|_{\sigma(p)}$ de $\mathcal{P}_{\sigma(p)}(^nE;F)$.

$$\|P\|_{\sigma(p)f}=\inf_{\substack{\text{representações}\\ \text{finitas}\\ \text{de } P}}\|(\lambda_j)_{j=1}^{m}\|_{p'}\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}}\Big(\sum_{1}^{m}|a_j(x)^n b(y_j)|^p\Big)^{1/p}.$$

Pelas definições de $\|.\|_{\sigma(p)f}$ e $\|.\|_{\sigma(p)}$, é claro que $\|P\|_{\sigma(p)}\leq\|P\|_{\sigma(p)f}$, sempre que $P\in\mathcal{L}_f(^nE;F)\subset\mathcal{L}_{\sigma(p)}(^nE;F)$. É natural perguntar quando ocorre a igualdade:

2.4.1 Proposição: *Se o espaço E tiver dimensão finita e $P\in\mathcal{P}(^nE;F)$, então $\|P\|_{\sigma(p)}=\|P\|_{\sigma(p)f}$.*

Demonstração: Como $\dim E < \infty$, segue que $\mathcal{P}(^nE;F) = \mathcal{P}_f(^nE;F)$ é um espaço completo para ambas as normas $\|.\|_{\sigma(p)}$ e $\|.\|_{\sigma(p)f}$. Considere a aplicação identidade $id : \mathcal{P}_f(^nE;F) \to \mathcal{P}(^nE;F)$, então como $\|id(P)\|_{\sigma(p)} = \|P\|_{\sigma(p)} \leq \|P\|_{\sigma(p)f}$, a identidade é contínua, e por ser bijetiva, pelo teorema da aplicação aberta segue que é isomorfismo, i.e., existe uma constante $c \geq 0$ tal que

$$\|P\|_{\sigma(p)f} \leq c\|P\|_{\sigma(p)}. \tag{2.4.1: eq1}$$

A seguir provaremos que $c = 1$. Dados $P \in \mathcal{P}_f(^nE;F)$ e $\epsilon > 0$, considere uma representação infinita $P = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j^n \otimes y_j$ tal que

$$\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'} \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j(x)^n b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \leq (1+\epsilon/2)\|P\|_{\sigma(p)}.$$

Em particular, para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j a_j^n \otimes y_j\|_{\sigma(p)f} &\leq \|(\lambda_j)_{j=1}^{m-1}\|_{p'} \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{m-1} |a_j(x)^n b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \\ &\leq (1+\epsilon/2)\|P\|_{\sigma(p)}. \end{aligned} \tag{2.4.1: eq2}$$

Como

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=m}^{\infty} |a_j(x)^n b(y_j)|^p\Big)^{1/p} = 0,$$

para um $m \in \mathbb{N}$ grande o bastante, tem-se

$$\begin{aligned} c\|\sum_{j=m}^{\infty} \lambda_j a_j^n \otimes y_j\|_{\sigma(p)} &\leq c\|(\lambda_j)_{j=m}^{\infty}\|_{p'} \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=m}^{\infty} |a_j(x)^n b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \\ &\leq \epsilon/2\|P\|_{\sigma(p)}. \end{aligned} \tag{2.4.1: eq3}$$

Chame $P_1 = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j a_j^n \otimes y_j$, então $P - P_1 = \sum_{j=m}^{\infty} \lambda_j a_j^n \otimes y_j \in \mathcal{P}_f(^nE;F)$. Segue que

$$\begin{aligned} \|P\|_{\sigma(p)f} &\leq \|\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j a_j^n \otimes y_j\|_{\sigma(p)f} + \|\sum_{j=m}^{\infty} \lambda_j a_j^n \otimes y_j\|_{\sigma(p)f} \\ \text{(por 2.4.1: eq2 e 2.4.1: eq1)} &\leq (1+\epsilon/2)\|P\|_{\sigma(p)} + c\|\sum_{j=m}^{\infty} \lambda_j a_j^n \otimes y_j\|_{\sigma(p)} \\ \text{(por 2.4.1: eq3)} &\leq (1+\epsilon/2)\|P\|_{\sigma(p)} + \epsilon/2\|P\|_{\sigma(p)} \\ &\leq (1+\epsilon)\|P\|_{\sigma(p)}. \end{aligned}$$

Como isso vale para todo $\epsilon > 0$, segue o resultado. ■

Nem sempre é possível trabalhar com espaços de dimensão finita. A seguir temos um resultado que pode ser útil:

2.4.2 Proposição: *Se $P \in \mathcal{P}_{\sigma(p)}(^nE; F)$ e $Q \in \mathcal{P}_f(^1D; E)$, então $\|P \circ Q\|_{\sigma(p)f} \leq \|P\|_{\sigma(p)}\|Q\|^n$.*

Demonstração: Seja J a injeção natural de $Q(D)$ em E; então, podemos escrever $Q = J \circ \tilde{Q}$, onde $\tilde{Q} : u \in D \mapsto \tilde{Q}(u) := Q(u) \in Q(D)$, $\|\tilde{Q}\| = \|Q\|$. Logo, $Q \circ J \in \mathcal{P}(^1Q(D); F)$, onde $dimQ(D) < \infty$ e pela proposição anterior

$$\|P \circ J\|_{\sigma(p)f} \ = \ \|P \circ J\|_{\sigma(p)} \ \leq \ \|P\|_{\sigma(p)}\|J\|^n \ = \ \|P\|_{\sigma(p)}$$

de onde temos

$$\|P \circ Q\|_{\sigma(p)f} \ = \ \|P \circ J \circ \tilde{Q}\|_{\sigma(p)f} \ \leq \ \|P \circ J\|_{\sigma(p)f}\|\tilde{Q}\|^n \ = \ \|P\|_{\sigma(p)}\|Q\|^n. \qquad \blacksquare$$

2.4.3 Proposição: *Se E' tem a propriedade de aproximação limitada, então $\|P\|_{\sigma(p)f} = \|P\|_{\sigma(p)}$, para cada $P \in \mathcal{P}_f(^nE; F)$.*

Demonstração: Faremos uma prova para $n = 2$; para outros p's é análogo. Seja $P \in \mathcal{P}_f(^2E; F)$. Sabemos que $\mathcal{L}_f(E, E; F)$ é isométricamente isomorfo a $\mathcal{L}_f(E; \mathcal{L}_f(E; F)$, pela aplicação que associa $\overline{S} \in \mathcal{L}_f(E; \mathcal{L}_f(E; F)$ a $S \in \mathcal{L}_f(E, E; F)$ por $\overline{S}(x_1)(x_2) := S(x_1, x_2)$. Se $S = \check{P}$ é a aplicação bilinear simétrica associada a P, note que $\overline{S}(x_1)(x_2) = S(x_1, x_2) = S(x_2, x_1) = \overline{S}(x_2)(x_1)$. Como E' tem a propriedade de aproximação limitada, por 0.3.5, dado $\epsilon > 0$, existe $\overline{T} \in \mathcal{L}_\sigma(E; E)$ tal que $\|\overline{T}\| \leq (1 + \epsilon)\gamma$, com $\gamma \geq 1$ e $\overline{ST} = \overline{S}$. Logo temos

$$S(\overline{T}x_1, x_2) = \overline{S}(\overline{T}x_1)(x_2) = \overline{ST}(x_1)(x_2) = \overline{S}(x_1)(x_2) = S(x_1, x_2)$$

E pela simetria de S,

$$S(x_1, \overline{T}x_2) = S(\overline{T}x_2, x_1) = S(x_2, x_1) = S(x_1, x_2).$$

Logo, $S \circ (\overline{T}, \overline{T}) = S$, e para cada $x \in E$ temos

$$P(x) = S(x, x) = S \circ (\overline{T}x, \overline{T}x) = P(\overline{T}x) = P \circ \overline{T}(x).$$

Então

$$\begin{array}{rcl} \|P\|_{\sigma(p)f} & = & \|P \circ \overline{T}\|_{\sigma(p)f} \\ (2.4.2) & \leq & \|P\|_{\sigma(p)}\|\overline{T}\|^2 \\ & \leq & (1 + \epsilon)^2\gamma^2\|P\|_{\sigma(p)} \end{array}$$

Como isso vale para cada $\epsilon > 0$, segue que $\|P\|_{\sigma(p)f} \leq \gamma^2\|P\|_{\sigma(p)}$. Repetindo o processo feito em 2.4.1, mostra-se que $\gamma^2 = 1$ e $\|P\|_{\sigma(p)f} \leq \|P\|_{\sigma(p)}$. $\blacksquare$

2.4.4 Proposição: *Se E' tem a propriedade de aproximação limitada, então $\mathcal{P}_f({}^nE;F)$ é denso em $\mathcal{P}_{\sigma(p)}({}^nE;F)$ na norma $\|.\|_{\sigma(p)}$.*

Demonstração: Seja $P \in \mathcal{P}_{\sigma(p)}({}^nE;F)$ e dado $\epsilon > 0$ considere uma representação de P tal que

$$\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'} \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j(x)^n b(y_j)|^p\right)^{1/p} \;\leq\; (1+\epsilon)\|P\|_{\sigma(p)}.$$

Sabemos que

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \left(\sum_{j=k}^{\infty} |a_j(x)^n b(y_j)|^p\right)^{1/p} \;=\; 0. \qquad (2.4.4\text{: eq1})$$

Considere $P_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j^n \otimes y_j \;\in\; \mathcal{P}_f({}^nE;F)$, então por 2.4.4: eq1, P_k converge a P na norma $\|.\|_{\sigma(p)}$ (bem como na norma $\|.\|_{\sigma(p)f}$, pelo resultado acima) provando o que queríamos. ∎

No capítulo anterior mostramos que $\mathcal{L}_{\sigma(1)}(E_1,\ldots,E_n;F) = \mathcal{L}_{\sigma}(E_1,\ldots,E_n;F)$. De modo análogo mostra-se para polinômios resultado semelhante. Quando tivermos $p=1$ falaremos de polinômios σ-nucleares, denotando seu espaço por $\mathcal{P}_{\sigma}({}^nE;F)$ com norma $\|.\|_{\sigma}$, e representação $P = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^n \otimes y_j$ tal que

$$\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_j(x)^n b(y_j)| < \infty, \quad \text{com} \quad \lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=k}^{\infty} |a_j(x)^n b(y_j)| = 0$$

e

$$\|P\|_{\sigma(1)} = \|P\|_{\sigma} := \inf_{P=\sum_{j=1}^{\infty} a_j^n \otimes y_j} \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_j(x)^n b(y_j)|.$$

2.4.5 Definição: Diremos que um polinômio n-homogêneo contínuo P é *aproximável* se existe uma seqüência $P_j \in \mathcal{P}_f({}^nE;F)$ tal que $\lim_{j\to\infty} \|P - P_j\| = 0$. Nesse caso, escrevemos $P \in \mathcal{P}_a({}^nE;F)$.

Os resultados de fatoração para polinômios exigem a hipótese de que U seja espaço de Banach complexo.

2.4.6 Teorema: *Um polinômio n-homogêneo contínuo $P \in \mathcal{P}({}^nE;F)$ é σ-nuclear, se e somente se existe um diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "P"] \arrow[dr, "A"'] & & F \\ & U \arrow[ur, "Y"'] & \end{tikzcd}$$

onde U é espaço de Banach complexo com base de Schauder hiperortogonal $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$, $A \in \mathcal{P}_a({}^1E;U)$ e $Y \in \mathcal{P}_a({}^nU;F)$ de modo que sua aplicação n-linear associada $\check{Y} \in \mathcal{L}_s({}^nU;F)$ seja diagonal. Neste caso, $\|P\|_\sigma = \inf \|Y\|\|A\|^n$.

Demonstração:
$(\Leftarrow)$ $P = Y \circ A$. Sejam $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ os funcionais associados de $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$. Se $u \in U$, temos

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(u).e_j.$$

E se $u = A(x)$ tem-se

$$A(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(A(x)).e_j = \sum_{j=1}^{\infty}(A'f_j)(x).e_j,$$

bem como

$$\begin{aligned}
P(x) &= Y(A(x)) \\
&= Y\Big(\sum_{j=1}^{\infty}(A'f_j)(x).e_j\Big) \\
&= \check{Y}\Big(\Big[\sum_{j=1}^{\infty}(A'f_j)(x).e_j\Big]^n\Big) \\
(\check{Y} \text{ é diagonal}) &= \sum_{j=1}^{\infty}[A'f_j(x)]^n\check{Y}(e_j^n) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}[(A'f_j)(x)]^n Y(e_j).
\end{aligned}$$

Logo, se chamamos $a_j = (A'f_j) \in E'$, e $y_j = Y(e_j) \in F$, temos a representação $P = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^n \otimes y_j$. Queremos saber se P é σ-nuclear:

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\|x\|\le 1\\ \|b\|\le 1}} \sum_{j=1}^{\infty} |[(A'f_j)(x)]^n b \circ Y(e_j)| &= \sup_{\substack{\|x\|\le 1\\ \|b\|\le 1}} \sum_{j=1}^{\infty} |[(A'f_j)(x)]^n b \circ Y(e_j)| \\
(\text{ para certos } |\varepsilon_j| = 1) &= \sup_{\substack{\|x\|\le 1\\ \|b\|\le 1}} \Big|\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j[(A'f_j)(x)]^n b \circ Y(e_j)\Big)\Big| \\
(b \text{ linear, } Y \text{ } n\text{-homogêneo e } U \text{ complexo}) &= \sup_{\substack{\|x\|\le 1\\ \|b\|\le 1}} \Big|\sum_{j=1}^{\infty} b \circ Y\Big(\varepsilon_j^{1/n}(A'f_j)(x)e_j\Big)\Big| \\
&= \sup_{\substack{\|x\|\le 1\\ \|b\|\le 1}} \Big|\sum_{j=1}^{\infty} b \circ \check{Y}\Big([\varepsilon_j^{1/n}(A'f_j)(x)e_j]^n\Big)\Big| \\
(\check{Y} \text{é diagonal}) &= \sup_{\substack{\|x\|\le 1\\ \|b\|\le 1}} \Big|b \circ \check{Y}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}[\varepsilon_j^{1/n}(A'f_j)(x)e_j]^n\Big)\Big|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\substack{\|x\|\le 1\\ \|b\|\le 1}} \Big| b\circ Y\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j^{1/n}(A'f_j)(x)e_j\Big)\Big| \\
(b,\ Y \text{contínuas}) &\le \sup_{\substack{\|x\|\le 1\\ \|b\|\le 1}} \|b\|\|Y\| \Big\|\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j^{1/n}(A'f_j)(x)e_j\Big\|_U^n \\
(\{e_j\} \text{ hiperortogonal, } |\varepsilon_j^{1/n}|\le 1) &\le \sup_{\substack{\|x\|\le 1\\ \|b\|\le 1}} \|b\|\|Y\| \Big\|\sum_{j=1}^{\infty} (A'f_j)(x)e_j\Big\|_U^n \\
&= \|Y\| \sup_{\|x\|\le 1} \|A(x)\|_U^n \\
(A \text{ contínua}) &\le \|Y\| \sup_{\|x\|\le 1} \|A\|^n\|x\|^n \\
&= \|Y\|\|A\|^n \ < \ \infty.
\end{aligned}
$$

Como A é aproximável, é operador compacto (ver [17] 1.11.2). Portanto, a imagem da bola unitária B_E por A é relativamente compacta em U. Segue que a sua aderência $\overline{A(B_E)}$ é um compacto em U. Como Y é contínua em U e $\overline{A(B_E)}$ é subconjunto compacto, existe $u_0 \in \overline{A(B_E)}$ tal que

$$\|Y(u_0)\|_F \ \ge \ \|Y(u)\|_F$$

para todo $u \in \overline{A(B_E)}$, em particular para cada $x \in B_E$, tem-se

$$\|Y(u_0)\|_F \ \ge \ \|Y(A(x))\|_F.$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{\infty} |A'f_j(x)^n b\circ Y(e_j)| &= |\sum_{j=k}^{\infty} \varepsilon_j[(A'f_j)(x)]^n b\circ Y(e_j)| \qquad \text{(para certos } |\varepsilon_j| = 1) \\
&= |b\circ Y\Big(\sum_{j=k}^{\infty} \varepsilon_j[(A'f_j)(x)]^n e_j\Big)| \\
&\le \|b\|\Big\|Y\Big(\sum_{j=k}^{\infty} [(A'f_j)(x)]^n e_j\Big)\Big\| \\
&\le \|b\|\Big\|Y\Big(\sum_{j=k}^{\infty} [(A'f_j)(u_0)]^n e_j\Big)\Big\| \\
&\le \|b\|.\|Y\|\Big\|\sum_{j=k}^{\infty} (A'f_j)(u_0)e_j\Big\|_U^n.
\end{aligned}
$$

Como $\Big\|\sum_{j=k}^{\infty}(A'f_j)(u_0)e_j\Big\|_U$ vai para 0 quando k tende a infinito, o mesmo ocorre para qualquer $x \in B_E$:

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=k}^{\infty} |[A'f_j(x)]^n b \circ Y(e_j)| \;=\; 0.$$

Logo, S é σ-nuclear com

$$\|S\|_\sigma \leq \inf_{Y,A} \|Y\|.\|A\|^n. \tag{2.4.6: eq1}$$

($\Rightarrow$) Esta demonstração é análoga ao caso n-linear, porém bem mais simples. Suponha que $P \neq 0$ é σ-nuclear; dado $\epsilon > 0$, considere uma representação $P = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^n \otimes y_j$ tal que

$$\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=1}^{\infty} |a_j(x)^n b(y_j)| < (1+\epsilon)\|P\|_\sigma. \tag{2.4.6: eq2}$$

Note que

$$\sigma_k := \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \sum_{j=k}^{\infty} |a_j(x)^n b(y_j)| \quad \xrightarrow{k\to\infty} \quad 0.$$

Vamos construir $(\rho_j) \in c_0$ com $1 \geq \rho_1 \geq \rho_2 \geq \ldots \geq \rho_j \geq \ldots > 0$ e satisfazendo

$$\sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^{-2} |a_j(x)^n b(y_j)| \leq (1+\epsilon)^2 \|P\|_\sigma \|x\|^n \|b\| \tag{2.4.6: eq3}$$

Se existe $m = \max\{j \in \mathbb{N} : \sigma_j > 0\}$, definimos

$$\rho_j = \begin{cases} (1+\epsilon)^{-1/2} & ,\ j \leq m; \\ (1+j\epsilon)^{-1/2} & ,\ j > m \end{cases}$$

Note que para $j > m$

$$|a_j(x)^n b(y_j)| \leq \sigma_j \|x\|^n \|b_j\| = 0.$$

Então

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^{-2} |a_j(x)^n b(y_j)| &= \sum_{j=1}^{m} (1+\epsilon) |a_j(x)^n (x_n) b(y_j)| \\ &= \|x\|^n \|b\| (1+\epsilon) \sum_{j=1}^{m} \Big| a_j \Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)^n \frac{b(y_j)}{\|b\|} \Big| \\ \text{(por 2.4.6: eq2)} \quad &\leq \|x\|^n \|b\| (1+\epsilon)(1+\epsilon) \|P\|_\sigma. \end{aligned}$$

Para o caso em que $\sigma_j > 0$ para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$(\sigma_{m+1})^{1/2} \leq \min\left\{\frac{\epsilon}{2}\sigma_1, 1\right\} \tag{2.4.6:eq4}$$

Fixe um m satisfazendo 2.4.6:eq4, e seja

$$\rho_j := \begin{cases} 1 & , se\ j \leq m; \\ (\sigma_j)^{1/4} & , se\ j > m. \end{cases}$$

Como $\sigma_j \longrightarrow 0$, então $\rho_j \longrightarrow 0$ e $(\rho_j) \in c_0$. Além disso, $1 \geq \rho_1 \geq \rho_2 \geq \ldots \geq \rho_j \geq \ldots > 0$. Para simplificar a notação, chame

$$B_j := \left| a_j\left(\frac{x}{\|x\|}\right)^n \frac{b(y_j)}{\|b\|}\right| \qquad (\|x\|, \|b\| \neq 0).$$

Note que $\sum_{j=k}^{\infty} B_j \leq \sigma_k$. Segue que para cada $M > m$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{M} \rho_k^{-2}|a_k(x)^n b(y_k)| &= \sum_{k=1}^{m} |a_k(x)^n b(y_k)| + \\
& \sum_{k=m+1}^{M} \rho_k^{-2}\Big[\Big(\Big(\sum_{j=k}^{M+1} |a_j(x)^n b(y_j)|\Big)^{1/4}\Big)^4 - \Big(\Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} |a_j(x)^n b(y_j)|\Big)^{1/4}\Big)^4\Big] \\
&= \sum_{k=1}^{m} |a_k(x)^n b(y_k)| + \sum_{k=m+1}^{M} \Big((\sigma_k)^{1/4}\Big)^{-2}. \\
& \Big[\Big(\Big(\sum_{j=k}^{M+1} |a_j(x)^n b(y_j)|\Big)^{1/4}\Big)^2 + \Big(\Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} |a_j(x)^n b(y_j)|\Big)^{1/4}\Big)^2\Big]. \\
& \Big[\Big(\Big(\sum_{j=k}^{M+1} |a_j(x)^n b(y_j)|\Big)^{1/4}\Big)^2 - \Big(\Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} |a_j(x)^n b(y_j)|\Big)^{1/4}\Big)^2\Big] \\
&\leq \|x\|^n\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{m} B_k + \sum_{k=m+1}^{M} \sigma_k^{-1/2}. \\
& \Big[\Big(\sum_{j=k}^{M+1} B_j\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} B_j\Big)^{1/2}\Big].\Big[\Big(\sum_{j=k}^{M+1} B_j\Big)^{1/2} - \Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} B_j\Big)^{1/2}\Big]\Big\} \\
&\leq \|x\|^n\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{m} B_k + \sum_{k=m+1}^{M} 2\Big[\Big(\sum_{j=k}^{M+1} B_j\Big)^{1/2} - \Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} B_j\Big)^{1/2}\Big]\Big\} \\
&= \|x\|^n\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{m} B_k + 2\Big\{\Big[\Big(\sum_{j=m+1}^{M+1} B_j\Big)^{1/2} - \Big(\cancel{\sum_{j=(m+1)+1}^{M+1}} B_j\Big)^{1/2}\Big] + \Big[\Big(\cancel{\sum_{j=m+2}^{M+1} B_j}\Big)^{1/2} - \ldots \\
& - \Big(\cancel{\sum_{j=(M-1)+1}^{M+1}} B_j\Big)^{1/2}\Big] + \Big[\Big(\cancel{\sum_{j=M} B_j}\Big)^{1/2} - \Big(\sum_{j=(M)+1}^{M+1} B_j\Big)^{1/2}\Big]\Big\}\Big\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|x\|^n\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{m} B_k + 2\Big\{\Big[\Big(\sum_{j=m+1}^{M+1} B_j\Big)^{1/2} - \Big(\sum_{j=(M)+1}^{M+1} B_j\Big)^{1/2}\Big]\Big\}\Big\} \\
&\leq \|x\|^n\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{m} B_k + 2\Big(\sum_{j=m+1}^{M+1} B_j\Big)^{1/2}\Big\} \\
&\leq \|x\|^n\|b\|\Big\{\sigma_1 + 2.\frac{\epsilon}{2}.\sigma_1\Big\} \qquad \Big(\text{por 2.4.6: eq4}\Big) \\
&\leq \|x\|^n\|b\|(1+\epsilon)\sigma_1 \\
&\leq (1+\epsilon)^2\|P\|_\sigma\|x\|^n\|b\| \qquad \Big(\text{por 2.4.6: eq2}\Big)
\end{aligned}
$$

como queríamos mostrar.

A seguir definimos o espaço U das seqüências de números complexos $t = (\tau_j)_{j=1}^\infty$ tais que $(\rho_j^{-1}\tau_j^n y_j)_{j=1}^\infty$ está em $l_1^u(F)$. Nesse espaço definimos a norma

$$
\|t\|_U = \Big(\sup_{\|b\|\leq 1}\sum_{j=1}^{\infty}|\rho_j^{-1}\tau_j^n b(y_j)|\Big)^{1/n}.
$$

Mostra-se que U é espaço completo com base hiperortogonal de modo análogo ao feito para U_n no caso n-linear. Então, podemos definir

$$
\begin{array}{rccc}
A: & E & \longrightarrow & U \\
 & x & \mapsto & (a_j(x))_{j=1}^\infty
\end{array}
$$

Seja $P_m(\tau_1,\ldots,\tau_m,\tau_m+1,\ldots) = (\tau_1,\ldots,\tau_m,0,0,\ldots)$ a projeção canônica usual em U:

$$
\begin{aligned}
\|(A-P_mA)(x)\|_U &= \|(a_j(x))_{j=m+1}^\infty\|_U \\
&= \Big(\sup_{\|b\|\leq 1}\sum_{j=m+1}^{\infty}|\rho_j^{-1}a_j(x)^n b(y_j)|\Big)^{1/n} \\
&= \Big(\sup_{\|b\|\leq 1}\sum_{j=m+1}^{\infty}\rho_j|\rho_j^{-2}a_j(x)^n b(y_j)|\Big)^{1/n} \\
&\leq \Big(\rho_{m+1}\sup_{\|b\|\leq 1}\sum_{j=m+1}^{\infty}|\rho_j^{-2}a_j(x)^n b(y_j)|\Big)^{1/n} \\
(\text{por 2.4.6: eq3}) \quad &\leq \rho_{m+1}^{1/n}(1+\epsilon)^{2/n}\|P\|_\sigma^{1/n}\|x\|
\end{aligned}
$$

que converge a zero, quando m tende a infinito, mostrando que A é aproximável.

$$
\begin{aligned}
\|A(x)\|_U &= \|(a_j(x))_{j=1}^\infty\|_U \\
&= \Big(\sup_{\|b\|\leq 1}\sum_{j=1}^{\infty}|\rho_j^{-1}a_j(x)^n b(y_j)|\Big)^{1/n}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \Big(\sup_{\|b\|\leq 1}\sum_{j=1}^{\infty}\rho_j|\rho_j^{-2}a_j(x)^n b(y_j)|\Big)^{1/n} \\
&\leq \Big(\rho_1\sup_{\|b\|\leq 1}\sum_{j=1}^{\infty}|\rho_j^{-2}a_j(x)^n b(y_j)|\Big)^{1/n} \\
\text{(por 2.4.6: eq3)} \quad &\leq \rho_1^{1/n}(1+\epsilon)^{2/n}\|P\|_\sigma^{1/n}\|x\| \qquad (2.4.6\text{: eq5})
\end{aligned}$$

mostrando que $\|A\|$ tem norma menor ou igual a $(1+\epsilon)^{2/n}\|P\|_\sigma^{1/n}$.

A seguir definimos:

$$\begin{array}{rccc}
Y: & U & \longrightarrow & F \\
 & ((\tau_j)_{j=1}^{\infty}) & \mapsto & \sum_{j=1}^{\infty}\tau_j^n y_j.
\end{array}$$

Pela definição de U temos que Y está bem definida, e é diagonal. Vejamos que sua norma é menor ou igual a um.

$$\begin{aligned}
\|Y(t)\|_F &= \|\sum_{j=1}^{\infty}\tau_j^n y_j\|_F \\
&= \sup_{\|b\|\leq 1}|\sum_{j=1}^{\infty}\tau_j^n b(y_j)| \\
&\leq \sup_{\|b\|\leq 1}\sum_{j=1}^{\infty}\rho_j|\rho_j^{-1}\tau_j^n b(y_j)| \\
&\leq \rho_1\sup_{\|b\|\leq 1}\sum_{j=1}^{\infty}|\rho_j^{-1}\tau_j^n b(y_j)| \\
(\rho_1\leq 1) \quad &\leq \|t\|_U^n. \qquad (2.4.6\text{: eq6})
\end{aligned}$$

Daí resulta que

$$\begin{aligned}
Y\circ(A(x)) &= Y\Big((a_j(x))_{j=1}^{\infty}\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}a_j(x)^n y_j \\
&= P(x)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|P(x)\| &= \|Y\Big((a_j(x))_{j=1}^{\infty}\Big)\| \\
&\leq \|Y\|\|A(x)\|_U^n \\
&\leq \|Y\|\|A\|^n\|x\|^n \\
\text{(por 2.4.6: eq5 e 2.4.6: eq6)} \quad &\leq 1.\Big[(1+\epsilon)^{2/n}\|P\|_\sigma^{1/n}\Big]^n\|x\|^n \\
&\leq 1.(1+\epsilon)^{2/n}\|P\|_\sigma\|x\|^n, \qquad \forall\epsilon>0. \qquad (2.4.6\text{: eq7})
\end{aligned}$$

Juntando 2.4.6:eq1 e 2.4.6:eq7 obtemos

$$\|P\|_\sigma = \inf_{Y,A,\ldots,A_n} \|Y\|.\|A\|^n \qquad \blacksquare$$

2.4.7 Teorema: *Um polinômio n-homogêneo $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ é $\sigma(p)$-nuclear se e somente se existe um diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "P"] \arrow[dr, "A"'] & & F \\ & U \arrow[ur, "Y"'] & \end{tikzcd}$$

onde U é espaço de Banach complexo com base de Schauder hiperortogonal $\{e_j\}_{j=1}^\infty$, $A \in \mathcal{P}_a(^1E;U)$, $Y \in \mathcal{P}_a(^nU;F)$ com $Y(e_j) = \lambda_j y_j$, $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in l_{p'}$ e $y_j \in F$ tais que $(\tau_j y_j)_{j=1}^\infty \in l_p^u(F)$ para $(\tau_j)_{j=1}^\infty = \sum_{j=1}^\infty \tau_j e_j \in U$, e de modo que sua aplicação n-linear simétrica associada $\check{Y} \in \mathcal{L}_s(^nU;F)$ seja diagonal. Neste caso, $\|P\|_{\sigma(p)} \leq \inf \|Y\|.\|A\|^n$.

Demonstração:
($\Leftarrow$) $P = Y \circ A$. Sejam $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ os funcionais conjugados da base $\{e_j\}_{j=1}^\infty$. Como antes,

$$A(x) = \sum_{j=1}^\infty f_j(A(x)).e_j = \sum_{j=1}^\infty (A'f_j)(x).e_j,$$

e como em 2.4.6,

$$P(x) \;=\; \sum_{j=1}^\infty (A'f_j)(x)^n Y(e_j).$$

Logo, se chamamos $a_j = (A'f_j) \in E'$, como existem $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in l_{p'}$ e $y_j \in F$ tais que $Y(e_j) = \lambda_j y_j$, então temos a representação $P = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j a_j^n \otimes y_j$. Como $(a_j(x)^n y_j)_{j=1}^\infty \in l_p^u(F)$ para cada $x \in E$, segue que

$$\sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \left(\sum_{j=1}^\infty |a(x)^n b(y_j)|^p\right)^{1/p} \leq \infty,$$

bem como

$$\sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \left(\sum_{j=k}^\infty |a(x)^n b(y_j)|^p\right)^{1/p} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

mostrando que P é $\sigma(p)$-nuclear. Além disso, temos que:

$$\|P(x)\| \;=\; \|\sum_{j=1}^\infty \lambda_j a_j(x)^n y_j\|$$

$$
\begin{aligned}
& \leq \sup_{\|b\|\leq 1} \|b\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j(x)^n y_j\Big)\| \\
(b \text{ é linear}) \quad & \leq \sup_{\|b\|\leq 1} \sum_{j=1}^{\infty} |a_j(x)^n b(\lambda_j y_j)| \\
& = \sup_{\|b\|\leq 1} \sum_{j=1}^{\infty} |[(A'f_j)(x)]^n b\circ Y(e_j)| \\
& = \sup_{\|b\|\leq 1} \sum_{j=1}^{\infty} |[(A'f_j)(x)]^n b\circ \check{Y}(e_j^n)| \\
(\text{ para certos } |\varepsilon_j| = 1) \quad & = \sup_{\|b\|\leq 1} \Big|\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j[(A'f_j)(x)]^n b\circ \check{Y}(e_j^n)\Big)\Big| \\
(U \text{ complexo, } b \text{ linear, } \check{Y}\ n\text{-linear e diagonal}) \quad & \leq \sup_{\|b\|\leq 1} \Big|b\circ \check{Y}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} [\varepsilon_j^{1/n}(A'f_j)(x)e_j]^n\Big)\Big| \\
& = \sup_{\|b\|\leq 1} \Big|b\circ Y\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j^{1/n}(A'f_j)(x)e_j\Big)\Big| \\
(b,\ Y \text{contínuas}) \quad & \leq \sup_{\|b\|\leq 1} \|b\|\|Y\|\Big\|\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j^{1/n}\ (A'f_j)(x)e_j\Big\|_U^n \\
(\{e_j\} \text{ hiperortogonal}) \quad & \leq \sup_{\|b\|\leq 1} \|b\|\|Y\|\Big\|\sum_{j=1}^{\infty} (A'f_j)(x)e_j\Big\|_U^n \\
& = \|Y\|\|A(x)\|_U^n \\
(A \text{ contínua}) \quad & \leq \|Y\|\|A\|^n\|x\|^n.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\|P\|_{\sigma(p)} \leq \inf_{Y,A} \|Y\|\|A\|^n. \tag{2.4.7: eq1}$$

($\Rightarrow$) Dado $\epsilon > 0$, seja $P = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j^n \otimes y_j$ $\sigma(p)$-nuclear, com

$$\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'} \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j(x)^n b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \leq (1+\epsilon)\|P\|_{\sigma(p)}. \tag{2.4.7: eq2}$$

Note que

$$\sigma_k = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=k}^{\infty} |a_j(x)^n b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Vamos construir $(\rho_j) \in c_0$ com $1 \geq \rho_1 \geq \rho_2 \geq \ldots \geq \rho_j \geq \ldots \geq 0$, satisfazendo

$$\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^{-2p} |a_j(x)^n b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \leq (1+\epsilon)^2 \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}^{-1} \|P\|_{\sigma(p)} \|x\|^n \|b\|. \tag{2.4.7: eq3}$$

O caso em que existe $m = \max\{j \in \mathbb{N} : \sigma_j > 0\}$ é trivial. Para o caso em que $\sigma_j > 0$ para cada $j \in \mathbb{N}$, dado $\epsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$(\sigma_{m+1})^{p/2} \leq \min\left\{\frac{\epsilon^p}{2}\sigma_1^p, 1\right\} \tag{2.4.7:eq4}$$

Fixe um m satisfazendo 2.4.7:eq4, e seja

$$\rho_j := \begin{cases} 1 & , se\ j \leq m; \\ (\sigma_j)^{1/4} & , se\ j > m. \end{cases}$$

Como $\sigma_j \longrightarrow 0$, então $\rho_j \longrightarrow 0$ e $(\rho_j) \in c_0$. Além disso, $1 \geq \rho_1 \geq \rho_2 \geq \ldots \geq \rho_j \geq \ldots > 0$. Para simplificar a notação, chame

$$B_j := \left|a_j\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)^n\frac{b(y_j)}{\|b\|}\right| \qquad (\|x_i\|, \|b\| \neq 0).$$

Note que $\sum_{j=k}^{\infty} B_j^p \leq \sigma_k^p$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Para cada $M > m$, temos:

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k=1}^{M} \rho_k^{-2p}|a_k(x)^n b(y_k)|^p\Big)^{1/p} &= \Big\{\sum_{k=1}^{m} |a_k(x)^n b(y_k)|^p + \sum_{k=m+1}^{M} \rho_k^{-2p}. \\
&\quad \Big[\Big(\Big(\sum_{j=k}^{M+1} |a_j(x)^n b(y_j)|^p\Big)^{1/4}\Big)^4 - \Big(\Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} |a_j(x)^n b(y_j)|^p\Big)^{1/4}\Big)^4\Big]\Big\}^{1/p} \\
&= \Big\{\sum_{k=1}^{m} |a_k(x)^n b(y_k)|^p + \sum_{k=m+1}^{M} \Big((\sigma_k)^{1/4}\Big)^{-2p}. \\
&\quad \Big[\Big(\Big(\sum_{j=k}^{M+1} |a_j(x)^n b(y_j)|^p\Big)^{1/4}\Big)^2 + \Big(\Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} |a_j(x)^n b(y_j)|^p\Big)^{1/4}\Big)^2\Big]. \\
&\quad \Big[\Big(\Big(\sum_{j=k}^{M+1} |a_j(x)^n b(y_j)|^p\Big)^{1/4}\Big)^2 - \Big(\Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} |a_j(x)^n b(y_j)|^p\Big)^{1/4}\Big)^2\Big]\Big\}^{1/p} \\
&\leq \|x\|^n\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{m} B_k^p + \sum_{k=m+1}^{M} \sigma_k^{-p/2}. \\
&\quad \Big[\Big(\sum_{j=k}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2}\Big].\Big[\Big(\sum_{j=k}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2} - \Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2}\Big]\Big\}^{1/p} \\
&\leq \|x\|^n\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{m} B_k^p + \sum_{k=m+1}^{M} 2\Big[\Big(\sum_{j=k}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2} - \Big(\sum_{j=k+1}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2}\Big]\Big\}^{1/p} \\
&= \|x\|^n\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{m} B_k^p + 2\Big\{\Big[\Big(\sum_{j=m+1}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2} - \Big(\cancel{\sum_{j=(m+1)+1}^{M+1}} B_j^p\Big)^{1/2}\Big] + \Big[\Big(\cancel{\sum_{j=m+2}^{M+1} B_j^p}\Big)^{1/2} -
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \ldots - \Big(\cancel{\sum_{j=(M-1)+1}^{M+1} B_j^p}\Big)^{1/2}\Big] + \Big[\Big(\cancel{\sum_{j=M}^{M+1} B_j^p}\Big)^{1/2} - \Big(\sum_{j=(M)+1}^{M+1} B_j^p\Big)^{1/2}\Big]\Big\}\Big\}^{1/p} \\
\leq \;& \|x\|^n\|b\|\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} B_k^p + 2\Big(\sum_{j=m+1}^{\infty} B_j^p\Big)^{1/2}\Big\}^{1/p} \\
\leq \;& \|x\|^n\|b\|\Big\{\sigma_1^p + 2.\frac{\epsilon^p}{2}.\sigma_1^p\Big\}^{1/p} \qquad \text{(por 2.4.7: eq4)} \\
\leq \;& \|x\|^n\|b\|\Big\{\sigma_1 + \epsilon\sigma_1\Big\} \qquad (1 \leq p \Rightarrow \|.\|_p \leq \|.\|_1) \\
\leq \;& \|x\|^n\|b\|(1+\epsilon)\sigma_1 \\
\leq \;& (1+\epsilon)^2\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}^{-1}\|P\|_{\sigma(p)}\|x\|^n\|b\| \qquad \text{(por 2.4.7: eq2)}
\end{aligned}
$$

como queríamos mostrar.

A seguir definimos o espaço U das seqüências complexas $t = (\tau_j)_{j=1}^{\infty}$ tais que a seqüência $(\rho_j^{-1}\tau_j^n y_j)_{j=1}^{\infty}$ é incondicionalmente p-somável. Nesse espaço definimos a norma

$$
\|t\|_U \;:=\; \Big[\sup_{\|b\|\leq 1}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\rho_j^{-1}\tau_j^n b(y_j)|^p\Big)^{1/p}\Big]^{1/n}.
$$

Como em 1.6.3, o espaço U é completo e tem base hiperortogonal. A seguir definimos

$$
\begin{aligned}
A:\; & E \longrightarrow U \\
& x \mapsto (a_j(x)^n)_{j=1}^{\infty}.
\end{aligned}
$$

Seja $P_m(\tau_1, \ldots, \tau_m, \tau_{m+1}, \ldots) = (\tau_1, \ldots, \tau_m, 0, 0, \ldots)$ a projeção canônica usual em U:

$$
\begin{aligned}
\|(A - P_mA)(x)\|_U &= \|(a_j(x)^n)_{j=m+1}^{\infty}\|_U \\
&= \Big[\sup_{\|b\|\leq 1}\Big(\sum_{j=m+1}^{\infty} \rho_j^{-p}|a_j(x)^n b(y_j)|^p\Big)^{1/p}\Big]^{1/n} \\
&= \Big[\sup_{\|b\|\leq 1}\Big(\sum_{j=m+1}^{\infty} \rho_j^{p}\rho_j^{-2p}|a_j(x)^n b(y_j)|^p\Big)^{1/p}\Big]^{1/n} \\
&\leq \rho_{m+1}^{1/n}\Big[\sup_{\|b\|\leq 1}\Big(\sum_{j=m+1}^{\infty} \rho_j^{-2p}|a_j(x)^n b(y_j)|^p\Big)^{1/p}\Big]^{1/n} \\
\text{(por 2.4.7: eq3)} \quad &\leq \rho_{m+1}^{1/n}(1+\epsilon)^{2/n}\Big[\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}^{-1}\|P\|_{\sigma(p)}\|x\|^n\Big]^{1/n}
\end{aligned}
$$

que converge a zero, quando m tende a infinito, mostrando que A é aproximável e

$$
\|A\| \;\leq\; (1+\epsilon)^{2/n}\Big[\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}^{-1}\|P\|_{\sigma(p)}\|x\|^n\Big]^{1/n}. \tag{2.4.7: eq5}
$$

A seguir definimos:

$$\begin{array}{rccc} Y: & U & \longrightarrow & F \\ & ((\tau_j)_{j=1}^{\infty}) & \mapsto & \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \tau_j^n y_j. \end{array}$$

Como em 1.6.3, temos que Y está bem definida,é diagonal, aproximável e com norma menor ou igual a $\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}$. Daí resulta que

$$Y \circ (A(x)) \;=\; Y\Big((a_j(x))_{j=1}^{\infty}\Big) \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j(x)^n y_j \;=\; P(x).$$

e

$$\begin{array}{rcl} \|P(x)\| & = & \|Y(A(x)))\| \\ (Y \text{ contínua}) & \leq & \|Y\|\|A(x)\|_U^n \\ (A \text{ contínua e } n\text{-homogênea}) & \leq & \|Y\|\|A\|^n\|x\|^n \\ (\text{por 2.4.7: eq5 e } \|Y\| \leq \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}) & \leq & \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}.\Big\{(1+\epsilon)^{2/n}\Big[\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'}^{-1}\|P\|_{\sigma(p)}\Big]^{1/n}\Big\}^n\|x\|^n. \end{array}$$

Logo

$$\|P\|_{\sigma(p)} \geq \inf_{Y,A} \|Y\|.\|A\|^n,$$

e por 2.4.7: eq1 segue que

$$\|P\|_{\sigma(p)} = \inf_{Y,A} \|Y\|.\|A\|^n.$$

■

2.5 Relação entre polinômios n-homogêneos $\tau(p)$-somantes e $\sigma(p)$-nucleares

2.5.1 Teorema: *Se E, F são espaços de Banach, E' tem a propriedade de aproximação λ-limitada, F é reflexivo, e $p \geq 1$, então os espaços*

$$\mathcal{P}_{\tau(p)}({}^nE';F') \;\text{ e }\; [\mathcal{P}_{\sigma(p)}({}^nE;F)]'$$

são isometricamente isomorfos.

Demonstração:

($\subseteq$) Seja $P \in \mathcal{P}_{\tau(p)}({}^nE';F')$, então:

$$\begin{array}{rcccccc} P: & E' & \longrightarrow & F' & & & \\ & a & \mapsto & Pa: & F & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & & & y & \mapsto & Pa(y). \end{array}$$

Para $a = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j^n \otimes y_j \in \mathcal{P}_{\sigma(p)}(^nE; F)$, seja $\varphi_P : \mathcal{P}_{\sigma(p)}(^nE; F) \longrightarrow \mathbb{K}$, definido por

$$\varphi_P(a) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (Pa_j)(y_j)$$

$\vdash$ a série $\varphi_P(a)$ converge em $\mathbb{K}$: Lembre que se $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j^n \otimes y_j \in \mathcal{P}_{\sigma(p)}(^nE; F)$, então

$$\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j(x)^n b(y_j)|^p \Big)^{1/p} \ < \ \infty$$

e

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=m}^{\infty} |a_j(x)^n b(y_j)|^p \Big)^{1/p} = 0.$$

Dado $\epsilon > 0$ considere uma seqüência estritamente crescente de naturais $(N_k)_{k=1}^{\infty}$ tais que se $s > r \geq N_k$, então

$$\sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=r}^{s} |a_j(x)^n b(y_j)|^p \Big)^{1/p} < \epsilon/2^k.$$

Chame $N_0 = 0$, então segue que

$$\begin{aligned}
|\varphi_P\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j^n \otimes y_j\Big)| \ &= \ |\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (Pa_j)(y_j)| \\
\text{(por Hölder)} \ &\leq \ \|(\lambda_j)_1^{\infty}\|_{p'} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |(\mathcal{A}_F y_j)(Pa_j)|^p \Big)^{1/p} \\
&= \ \|(\lambda_j)_1^{\infty}\|_{p'} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} |(\mathcal{A}_F y_j)(Pa_j)|^p \Big)^{1/p} \\
(P \in \mathcal{P}_{\tau(p)} \Rightarrow) \ &\leq \ \|(\lambda_j)_1^{\infty}\|_{p'} \sum_{k=0}^{\infty} \|P\|_{\tau(p)} \sup_{\substack{\|\alpha\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} |\alpha(a_j)^n (\mathcal{A}_F y_j)(b)|^p \Big)^{1/p} \\
&= \ \|(\lambda_j)_1^{\infty}\|_{p'} \|P\|_{\tau(p)} \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{\substack{\|\alpha\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} |\alpha(a_j)^n b(y_j)|^p \Big)^{1/p} \\
\text{(por 0.1.2)} \ &= \ \|(\lambda_j)_1^{\infty}\|_{p'} \|P\|_{\tau(p)} \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=N_k+1}^{N_{k+1}} |a_j(x)^n b(y_j)|^p \Big)^{1/p} \\
&\leq \ \|(\lambda_j)_1^{\infty}\|_{p'} \|P\|_{\tau(p)} \Big\{ \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{N_1} |a_j(x)^n b(y_j)|^p \Big)^{1/p} + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon/2^k \Big\} \\
&\leq \ \|P\|_{\tau(p)} \|(\lambda_j)_1^{\infty}\|_{p'} \Big\{ \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j(x)^n b(y_j)|^p \Big)^{1/p} + \epsilon \Big\} \\
&< \ \infty.
\end{aligned}$$

$\vdash$ φ está bem definida: Para um elemento $a \in \mathcal{P}_f({}^nE;F)$, o valor $\varphi_P(a)$ não depende da representação de a: Suponha que temos uma representação finita do zero, $0 = \sum_{j=1}^m \lambda_j a_j^n \otimes y_j$ e pelas contas acima obtemos

$$\begin{aligned} |\varphi_P\Big(\sum_{j=1}^m \lambda_j a_j^n \otimes y_j\Big)| &= |\sum_{j=1}^m \lambda_j (Pa_j)(y_j)| \\ &\leq \|P\|_{\tau(p)} \|(\lambda_j)_1^\infty\|_{p'} \Big\{ \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^m |a_j(x)^n b(y_j)|^p \Big)^{1/p} + \epsilon \Big\}. \end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$; logo a restrição de φ_P a $\mathcal{L}_f({}^nE;F)$ está bem definida, e para cada $a \in \mathcal{L}_f({}^nE;F)$ temos

$$|\varphi_P|_{\mathcal{P}_f({}^nE;F)}(a)| \leq \|P\|_{\tau(p)} \|(\lambda_j)_{j=1}^m\|_{p'} \Big[\sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^m |a_j(x)^n b(y_j)|^p \Big)^{1/p} + \epsilon \Big]$$

de onde segue que

$$|\varphi_P|_{\mathcal{P}_f({}^nE;F)}(a)| \leq \|P\|_{\tau(p)} \|a\|_{\sigma(p)f}, \qquad \text{para cada} \ \ a \in \mathcal{P}_f({}^nE;F).$$

Como o espaço E' tem a propriedade de aproximação λ-limitada, por 2.4.3 $|\varphi_P|_{\mathcal{P}_f({}^nE;F)}(a)| \leq \|P\|_{\tau(p)} \|a\|_{\sigma(p)}$. Logo, $\varphi_P|_{\mathcal{P}_f({}^nE;F)} : [\mathcal{P}_f({}^nE;F), \|.\|_{\sigma(p)}] \mapsto [\mathbb{K}, \|.\|]$ é contínua. Temos que $A \mapsto \varphi_P(A)$ e $P \mapsto \varphi_P$ são lineares. Por 1.4.4, $\mathcal{P}_f({}^nE;F)$ é $\|.\|_{\sigma(p)}$-denso em $\mathcal{P}_{\sigma(p)}({}^nE;F)$; logo $\varphi_P|_{\mathcal{P}_f({}^nE;F)}$ pode ser estendida a $[\mathcal{P}_{\sigma(p)}({}^nE;F),\ \|.\|_{\sigma(p)}]$ de modo único. Ou seja a extensão coincide com φ_P e

$$|\varphi_P(a)| \leq \|P\|_{\tau(p)} \|a\|_{\sigma(p)}, \qquad \text{para cada} \ \ a \in \mathcal{P}_{\sigma(p)}({}^nE;F). \tag{2.5.1: eq1}$$

Logo,

$$\|\varphi_P\| \leq \|P\|_{\tau(p)}. \tag{2.5.1: eq2}$$

($\supseteq$) Seja $\varphi \in (\mathcal{P}_{\sigma(p)}(E;F))'$,

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{P}_{\sigma(p)}(E;F) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & a = \sum_{j=1}^\infty a_j^n \otimes y_j & \mapsto & \varphi(a) = \varphi(\sum_{j=1}^\infty a_j^n \otimes y_j) \end{array}$$

definimos

$$\begin{array}{rccccc} P_\varphi: & E' & \longrightarrow & F' & & \\ & a & \mapsto & P_\varphi a: & F \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & & & y \ \mapsto & P_\varphi a(y) := \varphi(a^n \otimes y) \end{array}$$

$\vdash P_\varphi \in \mathcal{P}_{\tau(p)}({}^nE';F')$: Vamos ver se existe $C \geq 0$ tal que para $\beta_1, \ldots, \beta_m \in F''$ e $a_1, \ldots, a_m \in E'$,

$$\Big(\sum_{j=1}^m |\beta_j(P_\varphi(a_j))|^p \Big)^{1/p} \leq C \sup_{\substack{\|\alpha\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^m |\alpha(a_j)^n \beta_j(b)|^p \Big)^{1/p}.$$

Como F é reflexivo, para cada $\beta_j \in F''$ existe $y_j \in F$ tal que $\mathcal{A}_F y_j = \beta_j$:

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{j=1}^{m} |\beta_j(P_\varphi a_j)|^p\Big)^{1/p} &= \Big(\sum_{j=1}^{m} |\mathcal{A}_F y_j(P_\varphi a_j)|^p\Big)^{1/p} \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{m} |(P_\varphi a_j)(y_j)|^p\Big)^{1/p} \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(a_j^n \otimes y_j)|^p\Big)^{1/p} \\
(\text{por Hahn-Banach } \exists \|(\varepsilon_j)_1^m\|_{p'} = 1 \text{ tal que}) \quad &= |\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \varphi(a_j^n \otimes y_j)| \\
&= |\varphi(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j a_j^n \otimes y_j)| \\
(\varphi \text{ contínua}) \quad &\leq \|\varphi\| \Big\|\sum_{j=1}^{m} (\varepsilon_j a_j^n \otimes y_j)\Big\|_{\sigma(p)} \\
&\leq \|\varphi\| \|(\varepsilon_j)_1^m\|_{p'} \sup_{\substack{\|x\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{m} |a_j^n(x) b(y_j)|^p\Big)^{1/p} \\
(\text{por } 0.1.2) \quad &= \|\varphi\| \sup_{\substack{\|\alpha\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{m} |\mathcal{A}_F y_j(b) \alpha(a_j)^n|^p\Big)^{1/p} \\
&= \|\varphi\| \sup_{\substack{\|\alpha\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} \Big(\sum_{j=1}^{m} |\beta_j(b) \alpha(a_j)^n|^p\Big)^{1/p}
\end{aligned}$$

mostrando que P_φ é $\tau(p)$-somante e

$$\|P_\varphi\|_{\tau(p)} \leq \|\varphi\|. \tag{2.5.1:eq3}$$

Note que $\varphi \mapsto P_\varphi$ e $P \mapsto \varphi_P$ são inversas uma da outra: dadas $\varphi \in [\mathcal{P}_{\sigma(p)}(^nE; F)]'$, $P \in \mathcal{P}_{\tau(p)}(^nE'; F')$, $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^n \otimes y_j \in \mathcal{P}_{\sigma(p)}(^nE; F)$, $a \in E'$ e $y \in F_i'$, temos:

$$\varphi_{P_\varphi}(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^n \otimes y_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P_\varphi(a_j)(y_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(a_j^n \otimes y_j) = \varphi(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^n \otimes y_j)$$

bem como

$$P_{\varphi_P} a(y) = \varphi_P(a^n \otimes y_j) = Pa(y).$$

De 2.5.1:eq2 e 2.5.1:eq3 segue que $\|P_\varphi\|_{\tau(p)} = \|\varphi\|$. ∎

Capítulo 3

Aplicações holomorfas

3.1 Aplicações holomorfas

Dados E, F espaços de Banach complexos e U subconjunto aberto em E. Uma função $f : U \to F$ é dita *holomorfa* em U se para cada $\xi \in U$ existe uma série de potências de polinômios n-homogêneos contínuos

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x - \xi).$$

de E em F em volta de ξ, existe $\rho > 0$ tal que a bola aberta $B_\rho(\xi)$ está contida em U e

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x - \xi)$$

uniformemente para $x \in B_\rho(\xi)$. A seqüência $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ é única em cada ponto $\xi \in U$ (ver [6]). Esta série de potências é chamada *série de Taylor de f em ξ* e escrevemos

$$f(x) \cong \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x - \xi)$$

para denotar a relação entre f e a série de potências.

Denotamos por $\mathcal{H}(U; F)$ o espaço vetorial das aplicações holomorfas de U em F. Se $P_n \in \mathcal{P}(^nE; F)$ é o polinômio correspondente a $S_n \in \mathcal{L}_s(^nE; F)$ por $P_n = \hat{S}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, fixemos as notações

$$d^n f(\xi) = n!\ S_n \qquad \text{e} \qquad \hat{d}^n f(\xi) = n!\ P_n$$

de modo a obter as aplicações diferenciais

$$d^n f : \xi \in U \to d^n f(\xi) \in \mathcal{L}_s({}^n E; F) \qquad \text{e} \qquad \hat{d}^n f : \xi \in U \to \hat{d}^n f(\xi) \in \mathcal{P}({}^n E; F)$$

e os operadores diferenciais

$$d^n : f \in \mathcal{H}(U; F) \to d^n f \in \mathcal{H}(U; \mathcal{L}_s({}^n E; F))$$

e

$$\hat{d}^n : f \in \mathcal{H}(U; F) \to \hat{d}^n f \in \mathcal{H}(U; \mathcal{P}({}^n E; F))$$

de ordens $n = 0, 1, 2, \ldots$ Se f é holomorfa em cada ξ em E, dizemos que f é *inteira* e escrevemos $f \in \mathcal{H}(E; F)$. O *polinômio de Taylor* $\tau_{n,f,\xi}(x)$ de ordem n de f em ξ para x em E é definido por

$$\tau_{n,f,\xi}(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(\xi)(x-\xi)^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \hat{d}^k f(\xi)(x-\xi).$$

A seguir mencionamos resultados cujas demonstrações podem ser vistas em [6] pgs 21 a 25:

3.1.1 Proposição: $\mathcal{P}(E; F) \subset \mathcal{H}(E; F)$.

3.1.2 Proposição (Fórmula integral de Cauchy): *Sejam E, F espaços de Banach complexos, $U \subseteq E$ um aberto, $f \in \mathcal{H}(U; F)$, $\xi \in U$, $x \in U$ e $\rho > 1$ tais que $(1-\lambda)\xi + \lambda x \in U$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \le \rho$. Então*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f[(1-\lambda)\xi + \lambda x]}{\lambda - 1} d\lambda.$$

3.1.3 Proposição (Fórmula integral de Cauchy): *Sejam E, F espaços de Banach complexos, $U \subseteq E$ um aberto, $f \in \mathcal{H}(U; F)$, $\xi \in U$, $x \in E$ e $\rho > 0$ tais que $\xi + \lambda x \in U$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \le \rho$. Então*

$$\frac{1}{n!} \hat{d}^n f(\xi)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=\rho} \frac{f(\xi + \lambda x)}{\lambda^{n+1}} d\lambda$$

para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$

3.1.4 Proposição (Desigualdades de Cauchy): *Sejam $U \subseteq E$ um aberto, $f \in \mathcal{H}(U; F)$, $\rho > 0$ e $\overline{B}_\rho \subset U$. Então*

$$\left\| \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(\xi) \right\| \le \frac{1}{\rho^n} \sup_{\|x-\xi\|=\rho} \|f(x)\|, \qquad \textit{para cada } n = 0, 1, 2, \ldots$$

3.1.5 Proposição: *Seja $\mathcal{C}(U; F)$ o espaço vetorial das aplicações contínuas do aberto $U \subseteq E$ em F. Então $\mathcal{H}(U; F)$ está contido em $\mathcal{C}(U; F)$, e é fechado em $\mathcal{C}(U; F)$ munido da topologia compacto-aberta.*

3.2 Topologia das funções holomorfas σ(p)-nucleares de tipo limitado

3.2.1 Definição: Sejam E, F espaços de Banach, $U \subset E$ aberto e $f : U \to F$ função holomorfa em U com série de Taylor em volta de ξ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(\xi)(x - \xi).$$

Diremos que ela é *holomorfa $\sigma(p)$-nuclear de tipo limitado* de E em F se

(i) $\frac{1}{n!}\hat{d}^n f(0) \in \mathcal{P}_{\sigma(p)}({}^nE; F)$ para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$;

(ii) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n!}\|\hat{d}^n f(0)\|_{\sigma(p)}\right)^{1/n} = 0$.

Neste caso escrevemos $f \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E; F)$. Note que $\mathcal{P}({}^nE; F) \subset \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E; F)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Vamos munir o espaço $\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E; F)$ com a seguinte família de normas:

$$f \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E; F) \mapsto \|f\|_{\sigma(p),\rho} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} \|\hat{d}^n f(0)\|_{\sigma(p)}$$

para cada $\rho > 0$. Note que

$$\|f\|_{\sigma(p),\rho} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} \|\hat{d}^n f(0)\|_{\sigma(p)} = 0 \Leftrightarrow \|\hat{d}^n f(0)\|_{\sigma(p)} = 0,\ \forall n = 0, 1, 2, \ldots \Leftrightarrow f \equiv 0.$$

3.2.2 Proposição: *$[\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E; F), \tau]$ é espaço de Frechét.*

Demonstração: Para ser espaço de Frechét, deve ser espaço localmente convexo, metrizável e completo. Como a topologia gerada pelas normas $\|.\|_{\sigma(p),\rho}$ é localmente convexa, falta apenas mostrar que é metrizável e completo.

$\vdash [\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E; F), \tau]$ é metrizável: Por um resultado para espaços vetoriais topológicos, um espaço localmente convexo de Hausdorff é metrizável se, e só se existe uma seqüência de semi-normas que define a topologia (esse resultado pode ser visto em [10] pg 38 12.2). Basta considerar a família enumerável de semi-normas

$$\mathcal{F} \ = \ \{\|.\|_{\sigma(p),1/n} :\ n = 1, 2, \ldots\}$$

que claramente define a topologia τ em $\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$.

$\vdash[\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E;F),\tau]$ é completo: Seja $\{f_k\}_{k\geq 1}$ seqüência de Cauchy em $[\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E;F),\tau]$. Logo, dados $\epsilon>0,\ \rho\geq 1$, existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que para cada n

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{n!}\hat{d}^n f_i(0)-\frac{1}{n!}\hat{d}^n f_j(0)\right\|_{\sigma(p)} &\leq \rho^n\left\|\frac{1}{n!}\hat{d}^n f_i(0)-\frac{1}{n!}\hat{d}^n f_j(0)\right\|_{\sigma(p)}\\ &\leq \|f_i-f_j\|_{\sigma(p),\rho}\\ &< \frac{\epsilon}{4}\end{aligned} \tag{3.2.2: eq1}$$

para cada $n\in\mathbb{N}_0$ e $i,j,\geq k_0$. Logo, $\{\frac{1}{n!}\hat{d}^n f_k(0)\}_{k\geq1}$ é seqüência de Cauchy em $\mathcal{P}_{\sigma(p)}({}^nE;F)$ que é completo. Logo, existe $P_n\in\mathcal{P}_{\sigma(p)}({}^nE;F)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n!}\hat{d}^n f_k(0)=P_n.$$

Então,

$$\|P_n\|_{\sigma(p)} = \lim_{k\to\infty}\|P_n\|_{\sigma(p)} \leq \lim_{k\to\infty}\|1/n!\hat{d}^n f_k(0)\|_{\sigma(p)},$$

e assim

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|P_n\|_{\sigma(p)}^{1/n} &\leq \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\|1/n!\hat{d}^n f_k(0)\|_{\sigma(p)}\right)^{1/n}\\ \text{(podemos trocar os limites)} &= \lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\|1/n!\hat{d}^n f_k(0)\|_{\sigma(p)}\right)^{1/n}\\ (f_k\in\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E;F),\ \forall k) &= \lim_{k\to\infty}0 = 0,\end{aligned}$$

e portanto

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)$$

está em $\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E;F)$.

Resta saber se $f_k\to f$ na topologia τ. Fixados $\epsilon>0$ e $\rho>0$, se m é grande o suficiente,

$$\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\rho^n}{n!}\|n!P_n(x)\|_{\sigma(p)} = \|\sum_{n=m}^{\infty}P_n(x)\|_{\sigma(p),\rho}\leq\epsilon/4. \tag{3.2.2: eq2}$$

Como $1/n!\hat{d}^n f_j(0)\overset{j\to\infty}{\longrightarrow}P_n$, para j grande o bastante temos

$$\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\rho^n}{n!}\|\hat{d}^n f_j(0)-n!P_n\|_{\sigma(p)}<\epsilon/4. \tag{3.2.2: eq3}$$

Como $f_k\in\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E;F)$, para m grande o bastante,

$$\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\rho^n}{n!}\|\hat{d}^n f_k(0)\|_{\sigma(p)}<\epsilon/4; \tag{3.2.2: eq4}$$

Logo, para uma boa escolha de j, k e m, temos

$$\begin{aligned}
\|f_k - f\|_{\sigma(p),\rho} &\leq \|f_k - f_j\|_{\sigma(p),\rho} + \|f_j - f\|_{\sigma(p),\rho} \\
\text{(por 3.2.2: eq1)} \quad &\leq \epsilon/4 + \|\sum_{n=1}^{\infty} P_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\hat{d}^n f_j(0)\|_{\sigma(p),\rho} \\
&\leq \epsilon/4 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\rho^n}{n!}\left\|n!P_n - \hat{d}^n f_j(0)\right\|_{\sigma(p)} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!}\left\|n!P_n - \hat{d}^n f_j(0)\right\|_{\sigma(p)} \\
\text{(por 3.2.2: eq3)} \quad &\leq \epsilon/4 + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!}\|n!P_n\|_{\sigma(p)} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!}\|\hat{d}^n f_j(0)\|_{\sigma(p),\rho} + \epsilon/4 \\
&\leq \epsilon/4 + \epsilon/4 + \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon. \qquad \text{(por 3.2.2: eq2 e 3.2.2: eq4)}
\end{aligned}$$

Isso conclui o resultado. ∎

No capítulo anterior mostramos que se E, F são espaços de Banach, E' tem a propriedade de aproximação λ-limitada, F é reflexivo e $1 \leq p$, então os espaços

$$\mathcal{P}_{\tau(p)}(E'; F') \quad \text{e} \quad [\mathcal{P}_{\sigma(p)}(E; F)]'$$

são isometricamente isomorfos. Logo, é natural perguntar se essa relação se estende às aplicações holomorfas, i.e. se

$$\mathcal{H}_{\tau(p)}(E'; F') \quad \text{e} \quad [\mathcal{H}_{\sigma(p)}(E; F)]'$$

são isometricamente isomorfos. Para responder essa pergunta, precisamos de alguns resultados. Em [6] (pgs 28,29) está o seguinte resultado:

3.2.3 Proposição: *Se $f \in \mathcal{H}(U; F)$ então*

$$d^n f \in \mathcal{H}(U; \mathcal{L}_s(^nE; F)) \qquad \text{e} \qquad \hat{d}^n f \in \mathcal{H}(U; \mathcal{H}(U; \mathcal{P}(^nE; F)))$$

para $n = 0, 1, 2 \dots$, e se

$$f(x) \cong \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\hat{d}^n f(\xi)(x - \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x - \xi)$$

é a série de Taylor para f em volta de ξ, então as séries de Taylor para $d^n f$ e $\hat{d}^n f$ em volta de ξ, no ponto x, são dadas por

$$d^n f(x) \cong \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} d^n\Big(\frac{1}{(n+k)!}d^{n+k} f(\xi)\Big)(x - \xi)^k = \sum_{k=0}^{\infty} d^n P_{n+k}(x - \xi)^k$$

e

$$\hat{d}^n f(x) \cong \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \hat{d}^n\Big(\frac{1}{(n+k)!}\hat{d}^{n+k} f(\xi)\Big)(x - \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{d}^n P_{n+k}(x - \xi). \qquad (3.2.3\text{: eq1})$$

3.2.4 Observações:

1.
$$2^{n+k} = (1+1)^{n+k} = \sum_{j=1}^{n+k}\binom{n+k}{j}1^{n+k-j}.1^j \geq \binom{n+k}{j} = \frac{(n+k)!}{j!(n+k-j)!}$$

e se $j = n$, tem-se

$$2^{n+k} \geq \frac{(n+k)!}{n!k!}. \tag{3.2.4: eq1}$$

2. Usando a fórmula integral de Cauchy 3.1.3, mostra-se que

$$\hat{d}^n\Big(\frac{1}{(n+k)!}\hat{d}^{n+k}f(\xi)\Big)(x) = \frac{1}{k!}\,\widehat{d^{n+k}f(\xi)x^k} \tag{3.2.4: eq2}$$

Demonstração: Note que $g = \frac{1}{(n+k)!}\hat{d}^{n+k}f(\xi) \in \mathcal{P}(^{n+k}E;F) \subset \mathcal{H}(E;F)$. Usando a fórmula integral de Cauchy 3.1.3 para encontrar $\hat{d}^n g(\xi)(x)$:

$$\begin{aligned}
\hat{d}^n\Big(\frac{1}{n+k!}\hat{d}^{n+k}f(\xi)\Big)(x)(a) &= \frac{n!}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho}\frac{\frac{1}{n+k!}\hat{d}^{n+k}f(\xi)(x+\lambda a)}{\lambda^{n+1}}d\lambda \\
&= \frac{1}{n+k!}\frac{n!}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho}\frac{d^{n+k}f(\xi)(x+\lambda a)^{n+k}}{\lambda^{n+1}}d\lambda \\
&= \frac{1}{n+k!}\frac{n!}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho}\sum_{j=0}^{n+k}\binom{n+k}{j}\frac{d^{n+k}f(\xi)x^{n+k-j}\lambda^j a^j}{\lambda^{n+1}}d\lambda \\
&= \frac{1}{n+k!}\frac{n!}{2\pi i}\sum_{j=0}^{n+k}\binom{n+k}{j}d^{n+k}f(\xi)x^{n+k-j}a^j\int_{|\lambda|=\rho}\frac{\lambda^j}{\lambda^{n+1}}d\lambda \\
&= \frac{1}{n+k!}\frac{n!}{2\pi i}\binom{n+k}{n}d^{n+k}f(\xi)x^k a^n 2\pi i \\
&= \frac{n!}{n+k!}\frac{n+k!}{n!k!}d^{n+k}f(\xi)x^k a^n \\
&= \frac{1}{k!}\,\widehat{d^{n+k}f(\xi)x^k}\,(a).
\end{aligned} \tag{3.2.4: eq3}$$

Como vale para cada a, segue o resultado. ∎

3. Usando 3.2.3: eq1 mostra-se que

$$\frac{1}{k!}\hat{d}^k\Big(\frac{1}{n!}\hat{d}^n f(\xi)\Big) = \frac{1}{n!}\hat{d}^n\Big(\frac{1}{(n+k)!}\hat{d}^{n+k}f(\xi)\Big) \tag{3.2.4: eq4}$$

Demonstração: Desenvolvendo a série de Taylor para $\hat{d}^n f$, temos:

$$\hat{d}^n f(x) \cong \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \hat{d}^k(\hat{d}^n f)(\xi)(x-\xi) \qquad (I).$$

Por 3.2.3: eq1, temos:

$$\hat{d}^n f(x) \cong \sum_{k=0}^{n} \hat{d}^n \Big[\frac{1}{(n+k)!} \hat{d}^{n+k} f(\xi) \Big] (x-\xi) \qquad (II).$$

Igualando (I) e (II) termo-a-termo e dividindo por $n!$, obtem-se o resultado. ■

A seguir, seguem três lemas para o espaço $\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E;F)$ cujas demonstrações são praticamente idênticas às correspondentes ao espaço das funções nuclearmente inteiras de tipo limitado (ver [6] pgs 52 a 57). De agora em diante, estaremos trabalhando com $F = \mathbb{K} = \mathbb{C}$.

3.2.5 Lema: *Sejam $a \in E$ e $f \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$. Então:*

(i) $\hat{d}^n f(x) \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$ *e*

$$\hat{d}^n f(x)(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{n+k} f(0) x^k}\ (a)$$

no sentido de $\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$ para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$

(ii)

$$(\tau_{-a} f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(x)(a)$$

no sentido de $\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$ para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$, onde $(\tau_{-a} f)(x) = f(x-(-a)) = f(x+a)$.

Demonstração:

(i) Se $f \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$, então a série de Taylor de f em volta de 0 em x, é

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(0)(x)$$

com $\hat{d}^n f(0) \in \mathcal{P}_{\sigma(p)}(^n E)$, bem como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \left\| \hat{d}^n f(0) \right\|_{\sigma(p)}^{1/n} = 0.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \hat{d}^n f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{d}^n \left[\frac{1}{(n+k)!} \hat{d}^{n+k} f(0) \right] (x) && \text{(por 3.2.3: eq1)} \\ \text{(por 3.2.4: eq2)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{n+k} f(0) x^k}\ . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\hat{d}^n f(x)(a) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{n+k} f(0) x^k}\ (a) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d^{n+k} f(0) x^k a^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{n+k} f(0) a^n}\ (x) \;=\; \hat{d}^n f(a)(x). \qquad (3.2.5\text{: eq1})
\end{aligned}$$

Logo, segue que $d^{n+k} f(0) \in \mathcal{L}_{\sigma(p)}({}^{n+k}E; F)$, $\widehat{d^{n+k} f(0) a^n} \in \mathcal{P}_{\sigma(p)}({}^{k}E; F)$ e como

$$\begin{aligned}
&\|\hat{d}^{n+k} f(0)\|_{\sigma(p)} = \\
&= \inf_{reps} \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'} \sup_{\substack{\|x_i\|\le 1,\ 1\le i\le k \\ \|a_i\|\le 1,\ 1\le i\le n \\ \|b\|\le 1}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |c_{1j}(x_1) \ldots c_{kj}(x_k) c_{(k+1)j}(a_1) \ldots c_{(k+n)j}(a_n) b(y_j)|^p \right)^{1/p},
\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}
&\|d^{n+k} f(0) a^n\|_{\sigma(p)} = \\
&= \inf_{reps} \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'} \sup_{\substack{\|x_i\|\le 1,\ 1\le i\le k \\ \|b\|\le 1}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |c_{1j}(x_1) \ldots c_{kj}(x_k) c_{(k+1)l}(a) \ldots c_{(k+n)l}(a) b(y_j)|^p \right)^{1/p} \\
&= \|a\|^n \inf_{reps} \|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p'} \sup_{\substack{\|x_i\|\le 1,\ 1\le i\le k \\ \|b\|\le 1}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |c_{1j}(x_1) \ldots c_{kj}(x_k) c_{(k+1)j}(\frac{a}{\|a\|}) \ldots c_{(k+n)j}(\frac{a}{\|a\|}) b(y_j)|^p \right)^{1/p} \\
&\le \|a\|^n \|\hat{d}^{n+k} f(0)\|_{\sigma(p)}. \qquad (3.2.5\text{: eq2})
\end{aligned}$$

Falta mostrar que $\hat{d}^n f(0)(.)(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{n+k} f(0) a^n}\ (.)$ está em $(\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E), \tau)$. Considere $\rho > 0$:

$$\begin{aligned}
\left\| \hat{d}^n f(0)(.)(a) - \sum_{k=0}^{\eta-1} \frac{1}{k!} \widehat{d^{n+k} f(0)\ .^k}\ (a) \right\|_{\sigma(p),\rho} &= \left\| \sum_{k=\eta}^{\infty} \frac{1}{k!} d^{n+k} f(0)\ .^k a^n \right\|_{\sigma(p),\rho} \\
&= \sum_{k=\eta}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \left\| d^{n+k} f(0) a^n \right\|_{\sigma(p)} \\
(\text{por } 3.2.5\text{: eq2}) \quad &\le \sum_{k=\eta}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \|a\|^n \left\| \hat{d}^{n+k} f(0) \right\|_{\sigma(p)} \\
&\le \frac{n!}{\rho^n} \|a\|^n \sum_{k=\eta}^{\infty} \frac{\rho^{k+n}}{k! n!} \left\| \hat{d}^{n+k} f(0) \right\|_{\sigma(p)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{(por 3.2.4: eq1)} \quad &\leq \frac{n!}{\rho^n}\|a\|^n \sum_{k=\eta}^{\infty} \frac{(2\rho)^{k+n}}{(k+n)!} \left\| \hat{d}^{n+k} f(0) \right\|_{\sigma(p)} \\
&= \frac{n!}{\rho^n}\|a\|^n \left\| \sum_{k=\eta}^{\infty} \frac{1}{(k+n)!} \hat{d}^{n+k} f(0) \right\|_{\sigma(p),2\rho}
\end{aligned}
$$

que converge a 0 quando η vai a infinito, pois $f \in (\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E), \tau)$.

(ii) Dada $f \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$, definimos

$$
(\tau_{-a} f)(x) = f(x-a)
$$

para um $a \in E$ fixo. Claro que $(\tau_{-a} f) \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$. Queremos mostrar que a série

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(.)(a)
$$

converge a $(\tau_{-a} f)$ no sentido de $\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$. A série de Taylor de $(\tau_{-a} f)(x)$ em volta de 0 é:

$$
\begin{aligned}
(\tau_{-a} f)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{d}^n \tau_{-a} f(0)(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(0-(-a))(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(a)(x) \\
\text{(por 3.2.5: eq1)} \quad &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{n+k} f(0) a^n}\ (x) \qquad (3.2.5\text{: eq3}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \widehat{d^{n+k} f(0) a^n}\ (x) \qquad (3.2.5\text{: eq4})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left\| \tau_{-a} f - \sum_{n=0}^{\nu} \frac{1}{n!} \hat{d}^n f(.)(a) \right\|_{\sigma(p),\rho} = \\
\text{(por 3.2.5: eq1)} \quad &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{d}^k (\tau_{-a} f)(0)(.) - \sum_{n=0}^{\nu} \frac{1}{n!} \Big[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{n+k} f(0) a^n}\ (.) \Big] \right\|_{\sigma(p),\rho} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \left\| \hat{d}^k (\tau_{-a} f)(0) - \sum_{n=0}^{\nu} \frac{1}{n!} \widehat{d^{n+k} f(0) a^n}\ (.) \right\|_{\sigma(p)} \\
\text{(por 3.2.5: eq4)} \quad &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \left\| \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \widehat{d^{n+k} f(0) a^n} \right\|_{\sigma(p)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\| \widehat{d^{n+k} f(0) a^n} \right\|_{\sigma(p)} \\
\text{(por 3.2.5: eq2)} & = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \rho^k \frac{(n+k)!}{n!k!} \|a\|^n \frac{1}{(n+k)!} \left\| \hat{d}^{n+k} f(0) \right\|_{\sigma(p)} \\
\text{(por 3.2.4: eq1)} & = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \rho^k 2^{(n+k)} \|a\|^n \frac{1}{(n+k)!} \left\| \hat{d}^{n+k} f(0) \right\|_{\sigma(p)}.
\end{aligned}
$$

Agora como $f \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$, tem-se que

$$\lim_{j \to \infty} \left(\frac{1}{j!} \|\hat{d}^j f(0)\|_{\sigma(p)} \right)^{1/j} = 0$$

ou seja, dado $\epsilon > 0$ existe N_ϵ natural, tal que se $j \geq N_\epsilon$

$$\frac{1}{j!} \|\hat{d}^j f(0)\|_{\sigma(p)} \leq \epsilon^j.$$

Escolha $\epsilon > 0$ tal que $2\epsilon\|a\| < 1$ e $2\rho\epsilon \leq 1$. Segue que

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \rho^k 2^{n+k} \|a\|^n \frac{1}{(n+k)!} \left\| \hat{d}^{n+k} f(0) \right\|_{\sigma(p)} & = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=\nu+1}^{\infty} (2\rho)^k (2\|a\|)^n \frac{1}{(n+k)!} \left\| \hat{d}^{n+k} f(0) \right\|_{\sigma(p)} \\
(\nu \geq N_\epsilon) & \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=\nu+1}^{\infty} (2\rho)^k (2\|a\|)^n \epsilon^{n+k} \\
& \leq \sum_{k=0}^{\infty} (2\rho\epsilon)^k \sum_{n=\nu+1}^{\infty} (2\|a\|\epsilon)^n \\
& = \frac{1}{1-2\rho\epsilon} . \Big[\frac{1}{1-2\|a\|\epsilon} - \sum_{n=1}^{\nu} (2\|a\|\epsilon)^n \Big]
\end{aligned}
$$

que tende a 0 quando ν tende ao infinito. ∎

3.2.6 Lema: *Seja E espaço de Banach tal que E' tem a propriedade de aproximação λ-limitada. Seja $T \in [\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)]'$, então existem $\rho, c > 0$ tais que $|T(f)| \leq c\|f\|_{\sigma(p),\rho}$ para cada $f \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$. Para cada $P = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j^n \in \mathcal{P}_{\sigma(p)}(^nE)$ com $A \in \mathcal{L}_{\sigma(p)s}(^nE)$ tal que $P = \hat{A}$, definimos $T_x(\widehat{Ax^k}) := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j T(\varphi_j^k) \varphi_j^{n-k} \in \mathcal{P}_{\sigma(p)}(^{n-k}E)$. Logo, para cada $y \in E$, $T_x(\widehat{Ax^k})(y) \in \mathbb{C}$. Além disso,*

$$\|T_x(\widehat{Ax^k})\|_{\sigma(p)} \leq c\rho^k \|P\|_{\sigma(p)}.$$

Demonstração: Quando E' tem a propriedade de aproximação λ-limitada, $\mathcal{P}_f(^nE)$ é denso em $\mathcal{P}_{\sigma(p)}(^nE)$ na norma $\|.\|_{\sigma(p)}$; logo, basta considerar $P \in \mathcal{P}_f(^nE)$.

$$P = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j^n = \hat{A},\ A \in \mathcal{L}_{fs}(^n E),$$

Então

$$T_x(\widehat{Ax^k})(y) \ = \sum_{j=1}^{m} T(\varphi_j^k)\varphi_j(y)^{n-k},$$

e temos

$$T_x(\widehat{Ax^k}) \ = \ \sum_{j=1}^{m} T(\varphi_j^k)\varphi_j^{n-k} \in \mathcal{P}_f(^{n-k}E).$$

Como $\varphi_j^k \in \mathcal{P}_f(^k E) \subset \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$,

$$|T(\varphi_j^k)| \ \leq \ c\|\varphi_j^k\|_{\sigma(p),\rho} \ \leq \ c\rho^k \|\varphi_j^k\|_{\sigma(p)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|T_x(\widehat{Ax^k})\|_{\sigma(p)}^p \ &= \ \Big\|\sum_{j=1}^{m} T(\varphi_j)^k \varphi_j^{n-k}\Big\|_{\sigma(p)}^p \\
&\leq \ \sum_{j=1}^{m} |T(\varphi_j^k)|^p.\|\varphi_j\|_{\sigma(p)}^{(n-k)p} \\
&\leq \ \sum_{j=1}^{m} c^p\rho^{kp}\|\varphi_j\|_{\sigma(p)}^{kp}\|\varphi_j\|_{\sigma(p)}^{(n-k)p} \\
&= \ c^p\rho^{kp}\sum_{j=1}^{m} \|\varphi_j\|^{np} \\
&\leq \ c^p\rho^{kp} \sup_{\|x\|=1} \sum_{j=1}^{m} |\varphi_j(x)|^{np}
\end{aligned}$$

para cada representação de P. Logo, elevando a $1/p$ ambos lados,

$$\|T_x(\widehat{Ax^k})\|_{\sigma(p)} \leq c\rho^k\|P\|_{\sigma(p)}, \qquad \forall k \leq n.$$

■

3.2.7 Lema: *Sejam E espaço de Banach tal que E' tem a propriedade de aproximação λ-limitada e $T \in (\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E))'$. Então, $(T * f)(x) := T(\tau_{-x}f)$, $x \in E$ define uma função $T * f \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$ para cada $f \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$. Além disso, a aplicação $f \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E) \mapsto T * f \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$ é contínua, linear e invariante sob translação.*

Demonstração: Queremos mostrar que existem polinômios $P_n \in \mathcal{P}(^n E)$ tais que

$$(T * f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x).$$

Sabemos que $(T * f)(x) = T(\tau_{-x} f)$; logo

$$\begin{aligned}
(T * f)(x) &= T(\tau_{-x} f) \ = \ T(f(\cdot + x)) \\
\text{(por 3.2.5: eq3)} &= T\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\ \widehat{d^{n+k} f(0)\ x^k}\Big)\Big] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big[\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T\Big(\ \widehat{d^{n+k} f(0)\ x^k}\Big)}\Big] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Big[\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T_x\Big(\ \widehat{d^{n+k} f(0)\ x^k}\Big)}_{\text{será que converge em } \mathcal{P}_{\sigma(p)}(^nE)?}\Big]
\end{aligned}$$

Como $T \in (\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E))'$, pelo lema 3.2.6 $T_x(\ \widehat{d^{n+k} f(0)\ x^k}) \in \mathcal{P}_{\sigma(p)}(^nE)$, para cada $k = 0, 1, \ldots$, existem $\rho, c > 0$ tais que $|T(f)| \leq c.\|f\|_{\sigma(p)}$ e

$$\|T_x(\ \widehat{d^{n+k} f(0)\ x^k})\|_{\sigma(p)} \leq c\rho^k \|\hat{d}^{n+k} f(0)\|_{\sigma(p)}. \tag{3.2.7: eq1}$$

Seja $\rho_0 > \rho$, então

$$\begin{aligned}
\|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T_x\Big(\widehat{d^{n+k} f(0)\ x^k}\Big)\|_{\sigma(p)} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|T_x\Big(\widehat{d^{n+k} f(0)\ x^k}\Big)\|_{\sigma(p)} \\
\text{(por 3.2.7: eq1)} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} c\rho^k \|\hat{d}^{n+k} f(0)\|_{\sigma(p)} \\
(\rho < \rho_0) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} c\rho_0^k \|\hat{d}^{n+k} f(0)\|_{\sigma(p)} \\
&= c\frac{n!}{\rho_0^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!n!} \rho_0^{n+k} \|\hat{d}^{n+k} f(0)\|_{\sigma(p)} \\
\text{(por 3.2.4: eq1)} &\leq c\frac{n!}{\rho_0^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{n+k}}{(n+k)!} \rho_0^{n+k} \|\hat{d}^{n+k} f(0)\|_{\sigma(p)} \\
&= c\frac{n!}{\rho_0^n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \rho_0^k \|\hat{d}^k f(0)\|_{\sigma(p)} \\
&\leq c\frac{n!}{\rho_0^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\rho_0)^k}{k!} \|\hat{d}^k f(0)\|_{\sigma(p)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= c\frac{n!}{\rho_0^n}\Big\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\hat{d}^k f(0)\Big\|_{\sigma(p),2\rho_0} \\ &= c\frac{n!}{\rho_0^n}\|f\|_{\sigma(p),2\rho_0} \qquad (3.2.7\!:\text{eq2}) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Logo, a série

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}T_x\Big(\widehat{d^{n+k}f(0)\ x^k}\Big)$$

converge para um polinômio $P_n \in \mathcal{P}_{\sigma(p)}(^nE)$ e temos que

$$\|P_n\|_{\sigma(p)} \leq c\frac{n!}{\rho_0^n}\|f\|_{\sigma(p),2\rho_0} \qquad (3.2.7\!:\text{eq3})$$

e portanto

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{n!}\|P_n\|_{\sigma(p)}\Big)^{1/n} &\leq \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{n!}c\frac{n!}{\rho_0^n}\|f\|_{\sigma(p),2\rho_0}\Big)^{1/n} \\ &\leq \frac{1}{\rho_0}\lim_{n\to\infty}\Big(c\|f\|_{\sigma(p),2\rho_0}\Big)^{1/n}. \end{aligned}$$

Como isto vale para cada $\rho_0 > \rho$, tem-se que o limite é zero. Segue que

$$(T * f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E).$$

$\vdash T*$ é:

1. linear:

$$\begin{aligned} [T*(\lambda f + g)](x) &= T(\tau_{-x}(\lambda f + g)) \\ &= T(\lambda\tau_{-x}(f) + \tau_{-x}(g)) \\ &= \lambda T * f(x) + T * g(x). \end{aligned}$$

2. contínua: Sejam $\rho_1 > 0$ e $\rho_0 > \rho_1 + \rho > \rho$. Da linearidade e da definição de $\|.\|_{\sigma(p),\rho_1}$ temos

$$\begin{aligned} \|T * f\|_{\sigma(p),\rho_1} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho_1^n}{n!}\|P_n\|_{\sigma(p)} \\ \text{(por 3.2.7: eq3)} &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho_1^n}{n!}\frac{cn!}{(\rho+\rho_1)^n}\|f\|_{\sigma(p),2(\rho+\rho_1)} \\ &\leq c\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho_1^n}{(\rho+\rho_1)^n}\right)\|f\|_{\sigma(p),2(\rho+\rho_1)} \\ \Big(\frac{\rho_1}{(\rho+\rho_1)} < 1 \Rightarrow \exists\bar{c} < \infty \text{ tal que}\Big) &\leq \bar{c}\ \|f\|_{\sigma(p),2(\rho+\rho_1)} \end{aligned}$$

logo, f é contínua.

3. invariante sob translação:

$$\begin{aligned}(T * \tau_a f)(x) &= T(\tau_{-x} \circ \tau_a f)\\ &= T(\tau_{-x+a} f)\\ &= T * f(\cdot - [-x+a])\\ &= T * f([\cdot + x] - a)\\ &= [\tau_a(T * f)](x).\end{aligned}$$ ■

3.2.8 Definição: Uma aplicação $\mathcal{O} : \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E) \to \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$ é chamada *operador de convolução* sobre $\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$ se, e só se:

(1) $\mathcal{O}$ é linear;

(2) $\mathcal{O}$ é contínua;

(3) $\mathcal{O}$ é invariante sob translação, no sentido que para cada $a \in E$, $f \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$,

$$\mathcal{O}(\tau_a f) = \tau_a(\mathcal{O} f),$$

onde $\tau_a : x \in E \mapsto x + a \in E$ e $\tau_a f : x \in E \mapsto f(x-a) \in E$. Chame $\mathcal{A}$ o conjunto dos operadores de convolução sobre $\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$, que é uma álgebra com unidade, sob a composição de operadores como multiplicação e as operações usuais de espaço vetorial.

3.2.9 Proposição: *Considere a seguinte aplicação:*

$$\begin{array}{llllll}\gamma : & \mathcal{A} & \to & [\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)]' & & \\ & \mathcal{O} & \mapsto & \gamma\mathcal{O} : & \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E) & \to \mathbb{K} \\ & & & & f & \mapsto (\gamma\mathcal{O})(f) := (\mathcal{O} f)(0).\end{array}$$

A aplicação γ é linear e bijetiva de $\mathcal{A}$ em $[\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)]'$.

Demonstração: Considere a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{lllllll}\bar{\gamma} : & [\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)]' & \to & \mathcal{A} & & & \\ & \varphi & \mapsto & \bar{\gamma}\varphi \cong \mathcal{O} : & \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E) & \to & \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E) \\ & & & & f & \mapsto & \bar{\gamma}\varphi(f) = \mathcal{O}(f) := \varphi * f,\end{array}$$

onde $(\varphi * f) : x \in E \mapsto \varphi(\tau_{-x} f) \in \mathbb{K}$. Pelo lema 3.2.7 $\bar{\gamma}\varphi$ é um operador de convolução para cada φ em $[\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)]'$. Agora considere $\mathcal{O} \in \mathcal{A}$, a composição $\bar{\gamma} \circ \gamma$ e $x \in E$:

$$\begin{aligned}
\{[\bar{\gamma}\circ\gamma(\mathcal{O})](f)\}(x) &= \{[\bar{\gamma}(\gamma\mathcal{O})](f)\}(x)\\
\text{(pela definição de } \bar{\gamma}) &= [\gamma(\mathcal{O}) * f](x)\\
\text{(pela definição de } \varphi * \mathrm{f}) &= (\gamma\mathcal{O})(\tau_{-x}f)\\
\text{(pela definição de } \gamma\mathcal{O}) &= [\mathcal{O}(\tau_{-x}f)](0)\\
(\mathcal{O} \text{ é invariante sob translação}) &= \tau_{-x}(\mathcal{O}f)(0)\\
&= \mathcal{O}f(0-(-x))\\
&= \mathcal{O}f(x)
\end{aligned}$$

logo, $\bar{\gamma}\circ\gamma$ é a identidade em $\mathcal{A}$. Sejam agora $\varphi \in [\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)]'$ e $\bar{\gamma}\circ\gamma$:

$$\begin{aligned}
[\gamma\circ\bar{\gamma}(\varphi)](f) &= \gamma[\bar{\gamma}(\varphi)](f)\\
\text{(pela definição de } \gamma) &= [\bar{\gamma}(\varphi)]f(0)\\
&= (\varphi * f)(0)\\
&= \varphi(\tau_{-0}f)\\
&= \varphi(f)
\end{aligned}$$

logo, $\gamma\circ\bar{\gamma}$ é a identidade em $[\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)]'$. Com isso tem-se que γ é bijetiva, e a linearidade é clara. ∎

Notação: Para cada $\varphi \in [\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)]'$ escreveremos $\bar{\gamma}(\varphi) = \varphi* \in \mathcal{A}$, onde $\bar{\gamma}$ é a aplicação definida na proposição que acabamos de ver.

3.2.10 Definição: Para $\varphi_i \in [\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)]'$, $\varphi_i* \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2$, definimos

$$\varphi_1 * \varphi_2 := \gamma(\varphi_1 * \circ\ \varphi_2 *) \in [\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)]'.$$

Temos também que para cada $f \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$,

$$(\varphi_1 * \varphi_2) * f = \bar{\gamma}(\varphi_1 * \varphi_2)(f) = \bar{\gamma}[\gamma(\varphi_1 * \circ\ \varphi_2 *)](f) = \varphi_1 * \circ\ \varphi_2 * (f).$$

Dizemos que $\varphi_1 * \varphi_2$ é o *produto convolução* ou simplesmente a *convolução* de φ_1 e φ_2.

Considere as álgebras com unidade $(\mathcal{A}, +, ., \circ)$ e $([\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)]', +, ., *)$. Observe que a aplicação γ preserva os produtos em $\mathcal{A}$ e $[\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)]'$; sejam $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{A}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in [\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)]'$ tais que $\mathcal{O}_i = \varphi_i*$, então

$$\gamma(\mathcal{O}_1 \circ\ \mathcal{O}_2) = \gamma(\varphi_1 * \circ\ \varphi_2 *) = \varphi_1 * \varphi_2.$$

Seja $u \in [\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)]'$ a unidade dessa álgebra, então como $1_{\mathcal{A}} = id_{\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)}$ é a unidade em $\mathcal{A}$, temos

$$u(f) = \gamma 1_{\mathcal{A}}(f) = 1_{\mathcal{A}} f(0) = f(0).$$

3.2.11 Lema: *Seja $f \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E;F)$ e seja $\tau_{n,f,0}$ o polinômio de Taylor de grau n de f na origem. Então, para cada $\rho > 0$, temos*

$$\|f - \tau_{n,f,0}\|_{\sigma(p),\rho} \to 0 \qquad \text{para } n \to \infty.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \|f - \tau_{n,f,0}\|_{\sigma(p),\rho} &= \|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(0)\|_{\sigma(p),\rho} \\ &= \|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(0)\|_{\sigma(p),\rho} \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!}\|\hat{d}^k f(0)\|_{\sigma(p)}. \end{aligned} \tag{3.2.11:eq1}$$

Como $f \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E;F)$, temos que

$$\lim_{k\to\infty}\Big(\frac{1}{k!}\|\hat{d}^k f(0)\|_{\sigma(p)}\Big)^{1/k} = 0$$

e como conseqüência temos que

$$\lim_{k\to\infty}\Big(\frac{\rho^k}{k!}\|\hat{d}^k f(0)\|_{\sigma(p)}\Big)^{1/k} = \lim_{k\to\infty}\rho\Big(\frac{1}{k!}\|\hat{d}^k f(0)\|_{\sigma(p)}\Big)^{1/k} = 0.$$

Segue pelo teste da raíz que a série converge:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}\|\hat{d}^k f(0)\|_{\sigma(p)} < \rho\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\|\hat{d}^k f(0)\|_{\sigma(p)} < \infty$$

e portanto

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}\|\hat{d}^k f(0)\|_{\sigma(p)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$ ■

3.2.12 Proposição: *Se E' tem a propriedade de aproximação λ-limitada, então o espaço vetorial gerado por*

$$\{e^{\phi}y : \ \phi \in E', \ y \in F\}$$

é denso em $\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E;F)$.

Demonstração: Chame β o subespaço vetorial fechado de $\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E;F)$ gerado por $\mathsf{S} = \{e^{\phi}y : \phi \in E',\ y \in F\}$. Se $f \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E;F)$, então

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(0)$$

ou seja, se cada $\hat{d}^k f(0) \in \beta$, então $f \in \beta$. Logo, basta mostrar que $\mathcal{P}_{\sigma(p)}(^nE;F) \subseteq \beta$, para cada $n = 0,1,2,\ldots$ Temos que

$$e^{\phi}.y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\phi^n.y,\ \forall \phi \in E',\ \forall y \in F$$

no sentido de $\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E;F)$. Logo,

$$e^{\lambda\phi}.y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n\phi^n.y}{n!},\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall \phi \in E',\ \forall y \in F$$

no sentido de $\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E;F)$. Note que $y = e^0.y \in \mathsf{S}$. Queremos mostrar que $\phi^n.y \in \beta$, para cada $n = 0,1,2,\ldots$. Se $\rho > 0$, e $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$, temos:

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{e^{\lambda\phi}.y - y}{\lambda} - \phi.y\right\|_{\sigma(p),\rho} &= \left\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}\phi^n.y}{n!} - \lambda^{-1}y - \phi.y\right\|_{\sigma(p),\rho} \\
&= \left\|\frac{\lambda^{-1}\phi^0.y}{0!} + \frac{\lambda^0\phi^1.y}{1!} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}\phi^n.y}{n!} - \lambda^{-1}y - \phi.y\right\|_{\sigma(p),\rho} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\rho^n|\lambda|}{n!}\left\|\frac{\lambda^{n-2}\phi^n.y}{n!}\right\|_{\sigma(p)} \\
&= |\lambda|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\rho^n}{n!}|\lambda|^{n-2}\|\phi\|^n\|y\| \\
&\qquad\qquad \downarrow \\
&\qquad\qquad 0 \qquad\qquad \text{se } |\lambda| \to 0,\ \forall \phi \in E',\ \forall y \in F;
\end{aligned}$$

logo, $\phi.y \in \beta$. Hipótese de indução: $y, \phi.y, \frac{\phi^2.y}{n!}, \ldots, \frac{\phi^{n-1}.y}{(n-1)!} \in \beta$.

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{e^{\lambda\phi}.y - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k\phi^k.y}{k!}}{\lambda^n} - \frac{\phi^n.y}{n!}\right\|_{\sigma(p),\rho} &= \left\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k-n}\phi^k.y}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^{k-n}\phi^k.y}{k!} - \frac{\phi^n.y}{n!}\right\|_{\sigma(p),\rho} \\
&= \left\|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-n}\phi^k.y}{k!}\right\|_{\sigma(p),\rho} \\
&= |\lambda|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}|\lambda|^{k-n-1}\|\phi\|^k\|y\| \\
&\qquad\qquad \downarrow \\
&\qquad\qquad 0 \qquad\qquad \text{se } |\lambda| \to 0,\ \forall \phi \in E',\ \forall y \in F;
\end{aligned}$$

segue que $\phi^n.y \in \beta$, e $\mathcal{P}_f(^nE;F) \subseteq \beta$. Como E' tem a propriedade de aproximação λ-limitada, $\mathcal{P}_f(^nE;F)$ é denso em $\mathcal{P}_{\sigma(p)}(^nE;F)$ e $\mathcal{P}_{\sigma(p)}(^nE;F) \subseteq \beta$, para cada $n = 0,1,2,\ldots$ Como $\mathcal{P}_{\sigma(p)}(^nE;F)$ é denso em $\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E;F)$, temos $\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E;F) = \beta$. ■

3.3 Relação entre o dual das funções holomorfas $\sigma(p)$-nucleares de tipo limitado e as funções holomorfas de tipo $\tau(p)$-somante exponencial

3.3.1 Definição: A *transformada de Borel* $\hat{\varphi}$ de um funcional $\varphi \in [\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)]'$

$$\begin{array}{cccc} \hat{\varphi} & E' & \to & \mathbb{C} \\ & a & \mapsto & \hat{\varphi}(a) := \varphi(e^a) \end{array}$$

que está bem definida, uma vez que $e^a \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$ para cada $a \in E'$.

3.3.2 Definição: Dada uma função inteira $f \in \mathcal{H}(E;F)$, diremos que ela é $\tau(p;q)$-*somante de tipo exponencial*, se:

(i) $\hat{d}^n f(0) \in \mathcal{P}_{\tau(p;q)}(^nE;F)$ para cada $n = 0,1,2,\ldots$;

(ii) existirem constantes $C \geq 0$ e $\rho > 0$ tais que

$$\|\hat{d}^n f(0)\|_{\tau(p;q)} \leq C\rho^n, \ \forall n = 0,1,2,\ldots.$$

Denotaremos o conjunto de tais funções por $\mathcal{E}xp_{\tau(p;q)}(E;F)$[1].

3.3.3 Proposição: *Sejam E Banach, E' com a propriedade de aproximação λ-limitada. Para cada $\varphi \in [\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)]'$, $\hat{\varphi}$ é uma função holomorfa $\tau(p)$-somante de tipo exponencial em E', e a aplicação*

$$\begin{array}{cccc} \beta : & [\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)]' & \to & \mathcal{E}xp_{\tau(p)}(E') \\ & \varphi & \mapsto & \hat{\varphi} \end{array}$$

estabelece um isomorfismo de álgebras.

[1]Para ver mais sobre funções de tipo exponencial, ver [12] pg 240.

Demonstração:

$\vdash \beta$ está bem definida:

Sejam $\varphi \in [\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)]'$ e $a \in E'$, então

$$\beta(\varphi)(a) = \hat{\varphi}(a) = \varphi(e^a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(a^n)}{n!}.$$

Como $\mathcal{P}_{\sigma(p)}(^n E) \subseteq \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$, podemos considerar a restrição $\varphi_n = \varphi|\mathcal{P}_{\sigma(p)}(^n E)$. Pelo teorema 2.5.1 sabemos que

$$[\mathcal{P}_{\sigma(p)}(^n E)]' \cong^1 \mathcal{P}_{\tau(p)}(^n E').$$

Logo, para cada $\varphi_n \in [\mathcal{P}_{\sigma(p)}(^n E)]'$ existe um único polinômio $P_n \in \mathcal{P}_{\tau(p)}(^n E')$ tal que

$$\varphi_n(\phi^n) = P_n(\phi), \ \|\varphi_n\| = \|P_n\|_{\tau(p)}, \ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Como φ é contínua, existem $C \geq 0, \ \rho \geq 0$ tais que para cada $h \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$ tem-se $|\varphi(h)| \leq C\|h\|_{\sigma(p),\rho}$. Em particular, para cada $q_n \in \mathcal{P}_{\sigma(p)}(^n E)$, temos

$$|\varphi_n(q_n)| = |\varphi(q_n)| \leq C\|q_n\|_{\sigma(p),\rho} = C\rho^n\|q_n\|_{\sigma(p)} \tag{3.3.3: eq1}$$

e portanto $\|\varphi_n\| = \|P_n\|_{\tau(p)} \leq C\rho^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Como

$$\hat{\varphi}(a) = \varphi(e^a) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi(a^n)}{n!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(a^n)}{n!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{P_n(a)}{n!},$$

segue que $\hat{\varphi} \in \mathcal{E}xp_{\tau(p)}(E')$.

$\vdash \beta$ é linear:

$$\begin{aligned} \beta(\lambda\varphi + \psi)(a) &= \widehat{(\lambda\varphi + \psi)}\,(a) \\ &= (\lambda\varphi + \psi)(e^a) \\ &= \lambda\varphi(e^a) + \psi(e^a) \\ &= \lambda\hat{\varphi}(a) + \hat{\psi}(a) \\ &= \lambda\beta(\varphi)(a) + \beta(\psi)(a). \end{aligned}$$

$\vdash \beta$ é injetiva:

Como β é linear, basta ver que $\beta(\varphi) = 0$ implica que $\varphi = 0$. Se $\beta(\varphi) = 0$, então para cada $a \in E'$, temos $\varphi(e^a) = 0$. Se $h \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$, como $\{e^a : \ a \in E'\}$ é denso em $\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$, existe uma seqüência $\{e^{a_n}\}_{n\geq 1}$ que converge a h. Como φ é contínua,

$$\varphi(h) = \lim_{n\to\infty} \varphi(e^{a_n}) = 0.$$

Logo, $\varphi \equiv 0$ e β é injetiva.

$\vdash \beta$ é sobrejetiva: Seja $P \in \mathcal{E}xp_{\tau(p)}(E')$, com

$$P(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P_n(a),$$

onde $P_n \in \mathcal{P}_{\tau(p)}(^nE')$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ e $\{\|P_n\|_{\tau(p)}^{1/n}\}_{n\geq 1}$ limitada. Logo, existem constantes $C \geq 0$ e $\rho \geq 0$ tais que

$$\left.\begin{array}{rcl} \|P_n\|_{\tau(p)}^{1/n} & \leq & \rho \\ \|P_0\|_{\tau(p)} & \leq & C \end{array}\right| \Rightarrow \|P_n\|_{\tau(p)} \leq C\rho^n.$$

Como $[\mathcal{P}_{\sigma(p)}(^nE)]' \cong^1 \mathcal{P}_{\tau(p)}(^nE')$, existe um único funcional $\varphi_n \in [\mathcal{P}_{\sigma(p)}(^nE)]'$ tal que $\varphi_n(a^n) = P_n(a)$, para cada $a \in E'$ e cada $n = 0, 1, 2, \ldots$, bem como $\|\varphi_n\| = \|P_n\|_{\tau(p)}$. Para $h \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$, com $h = \sum_{n=0}^{\infty} q_n$, fixe

$$\varphi(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(q_n).$$

Então

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n(q_n)| & \leq & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_n\| \|q_n\|_{\sigma(p)} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \|P_n\|_{\tau(p)} \|q_n\|_{\sigma(p)} \;\leq \\ & \leq & \displaystyle C \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \|q_n\|_{\sigma(p)} \;=\; C \sum_{n=0}^{\infty} \|q_n\|_{\sigma(p),\rho} \;= \\ & = & C\|h\|_{\sigma(p),\rho} \end{array}$$

ou seja, $\varphi(h) \in \mathbb{K}$, estando bem definida para cada $h \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$. Além disso, se $a \in E'$,

$$\hat{\varphi}(a) = \varphi(e^a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(a^n)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(a)}{n!} = P(a).$$

Logo, dado $P \in \mathcal{E}xp_{\tau(p)}(E')$, encontramos $\varphi \in [\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)]'$ tal que $\beta(\varphi) = \hat{\varphi} = P$.

$\vdash \beta$ preserva os produtos nas álgebras: Sejam $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in [\mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)]'$, $h \in \mathcal{H}_{\sigma(p)b}(E)$, $a_n \in E'$, $x \in E$ com $h(x) = \lim_{n\to\infty} e^{a_n x}$:

$$\begin{array}{rcl} (\varphi * h)(x) & = & \varphi(\tau_{-x}h) \;=\; \varphi(h(.+x)) \\ & = & \displaystyle\varphi(\lim_{n\to\infty} e^{a_n(.+x)}) \;=\; \lim_{n\to\infty} \varphi(e^{a_n(.+x)}) \\ & = & \displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{a_n(x)} \varphi(e^{a_n(.)}) \;=\; h(x)\varphi(h) \\ & = & (h\varphi(h))(x). \end{array} \qquad (3.3.3\text{:eq2})$$

Logo, $\varphi * h = h\varphi(h)$. Segue que:

$$\begin{array}{rcl}
\widehat{\varphi_1 * \varphi_2}\,(a) & := & (\varphi_1 * \varphi_2)(e^a) \\
(\text{definição de } \varphi_1 * \varphi_2) & = & \gamma(\varphi_1 * \circ\, \varphi_2 *)(e^a) \\
(\text{definição de } \gamma) & = & (\varphi_1 * \circ\, \varphi_2 *)(e^a)(0) \\
(\text{definição de } \varphi *) & = & \varphi_1(\tau_{-0}(\varphi_2 * e^a)) \\
& = & \varphi_1(\varphi_2 * (e^a)) \\
(\text{por acima com } h = e^a) & = & \varphi_1(e^a \varphi_2(e^a)) \\
& = & \varphi_1(e^a)\varphi_2(e^a) \\
& = & \hat{\varphi}_1(a)\hat{\varphi}_2(a).
\end{array}$$

Isso completa o teorema. ∎

Em [6] é estudado o seguinte resultado:

3.3.4 Proposição: *Sejam $f_1, f_2, g \in \mathcal{H}(E)$ tais que $f_1 = f_2.g$ e f_1, f_2 são funções inteiras de tipo exponencial em E com f_2 não identicamente nula. Então g é também função inteira de tipo exponencial em E.*

Matos obteve resultado análogo para aplicações de tipo $(p; m(s; q))$-somante exponencial:

3.3.5 Proposição: *Para $0 < s < q \leq +\infty$, se f_1, g são aplicações inteiras em E com valores em F, f_2 inteira sobre E com valores em $\mathbb{C}$, $f_2(a) \neq 0$, $f_1(x) = f_2(x)g(x)$ para cada $x \in E$ com f_1, f_2 de tipo $(p; m(s; q))$-somante exponencial em $a \in E$, então g é de tipo $(p; m(s; q))$-somante exponencial em $a \in E$.*

Surge então a pergunta natural: as funções holomorfas de tipo $\tau(p; q)$-somante exponencial satisfazem resultado análogo? Para obter tal resultado não é possível fazer demonstrações semelhantes àquelas feitas por Matos e Gupta, uma vez que a caracterização destas funções não envolve convergência de seqüências.

Referências Bibliográficas

[1] ALENCAR, R. L. and MATOS, M. C. - *Some classes of multilinear mappings between Banach spaces*. Publicaciones del Departamento de Analisis Matematico, Universidad Complutense de Madrid, 12, (1989).

[2] DEFANT, A. and FLORET, K. - *Tensor Norms and Operator Ideals*. North-Holland Mathematics Studies 176, 1993.

[3] DIESTEL, J., JARCHOW, H. e TONGE, A. - *Absolutely Summing Operators*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 43 (1995).

[4] DIEUDONNÉ, J - *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press, New York (1960).

[5] FOLLAND, GERALD B. - *Real analysis modern techniques and their applications*. John Wiley and Sons (1984).

[6] GUPTA, CHAITAN P. - *Convolution Operators and Holomorphic Mappings on a Banach Space* . Département de Mathématiques - Université de Sherbrooke (1969).

[7] LACEY, H. ELTON - *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces* - Springer-Verlag, 1974.

[8] MATOS, M. C. - *On multilinear mappings of nuclear type* - Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid. Vol.6, No.1, 61-81, 1993.

[9] MUJICA, J. - *Complex analysis in Banach Spaces* - North-Holland Mathematics Studies, 1986.

[10] MUJICA, J. - *Notas de Espaços Vetoriais Topplógicos* - Disciplina ministrada no IMECC - UNICAMP no 2º semestre de 2004.

[11] NACHBIN, L. - *Elements of Approximation Theory* D. van Nostran Co., Inc., 1967. Reprinted by R. Krieger Co., Inc., 1976.

[12] NACHBIN, L. - *Lectures on the Theory of Distributions* - Textos de Matemática - Instituto de Física e Matemática - UNIVERSIDADE DO RECIFE (1964)

[13] NACHBIN, L. - *Topics on Topological Vector Spaces* - Textos de Métodos Matemáticos

[14] GOFFMAN, C. and PEDRICK, G - *First Course in Functional Analysis* Prentice Hall, Inc.

[15] PELLEGRINO, D. M. - *Aplicações entre Espaços de Banach Relacionadas à Convergência de Séries* - Tese de Doutorado, UNICAMP - 2002.

[16] PÉREZ, D. and VILLANUEVA, I. - *Multiple summing operators on Banach spaces*, J Math. Anal. appl. 285 (2003) 86-96.

[17] PIETSCH, A. - *Operator Ideals* - North Holland Publishing Company - Amsterdam (1980).

[18] PIETSCH, A. - *Ideals of Multilineal Functionals*, Procedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and Their Applications in Theoretical Physics (Leipzig, 1983) pp 185-199, Teubner-Texte zur Mathematik, 67, Teubner Leipzig (1984).

[19] SCHAEFER, H. H. - *Topological Vector Spaces*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag.

[20] SINGER, IVAN - *Bases in Banach Spaces I*, Springer-Verlag, 1970.

[21] TAYLOR, ANGUS E. - *Introduction to Functional Analysis* - John Wiley & Sons (1958).

[22] WOJTASZCZYK, P. - *Banach Spaces for Analysts*, Cambridge Stud. Adv. Math. **25**, Cambridge University Press, Cambridge 1991.

Índice Remissivo