

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Espaços de Configurações e OCHA

Eduardo Hoefel

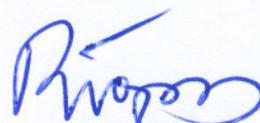
Tese de Doutorado

Orientadores:
Alcibiades Rigas (Unicamp)
Tomas Edson Barros (UFSCar)

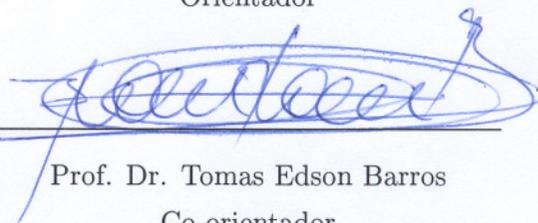
Espaços de Configurações e OCHA

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Eduardo Outeiral Correa Hoefel e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 12 de Abril de 2006



Prof. Dr. Alcibiades Rigas
Orientador



Prof. Dr. Tomas Edson Barros
Co-orientador

Banca Examinadora

Prof. Dr. Tomas Edson Barros (UFSCar), Co-orientador

Prof. Dr. Mauro Spreafico (USP - SÃO CARLOS)

Prof. Dr. Alexandre Luis Trovon de Carvalho (UFPr)

Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim (UNICAMP)

Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura (UNICAMP)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, da Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de DOUTOR em Matemática.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 859

Hoefel, Eduardo Outeiral Correa.

H671e Espaços de configurações e OCHA / Eduardo Outeiral Correa

Hoefel -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientadores : Alcibiades Rigas; Tomas Edson Barros.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Topologia algébrica. 2. Teoria da homotopia. 3. Teoria de módulos. 4. Álgebra homológica. I. Rigas, Alcibiades. II. Barros, Tomas Edson. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Configuration spaces and OCHA

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1.Algebraic topology. 2.Homotopy theory. 3. Moduli theory. 4. Homological algebra.

Área de concentração: Geometria / Topologia

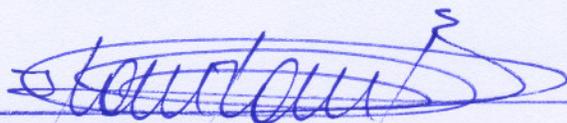
Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Tomas Edson Barros (UFSCar)
Prof. Dr. Mauro Spreafico (USP-São Carlos)
Prof. Dr. Alexandre Luis Trovon de Carvalho (UFPr)
Prof. Dr. Marcos Benevenuto Jardim (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura (IMECC-UNICAMP)

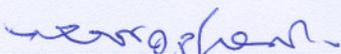
Data da defesa: 06/03/2006

Tese de Doutorado defendida em 06 de março de 2006e aprovada

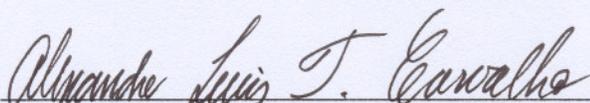
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



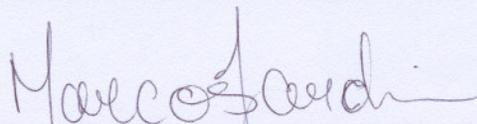
Prof. (a). Dr (a). TOMÁS EDSON BARROS



Prof. (a). Dr (a). MAURO SPREAFICO



Prof. (a). Dr (a). ALEXANDRE LUIS TROVON DE CARVALHO



Prof. (a). Dr (a). MARCOS BENEVENUTO JARDIM



Prof. (a) Dr. (a) ADRIANO ADREGA DE MOURA

Sumário

Introdução	1
1 Álgebras Homotópicas, Coderivações e OCHA	7
1.1 Álgebras Homotópicas	9
1.2 Coálgebras e coderivações	12
1.2.1 Coderivações na Coálgebra Tensorial	14
1.2.2 Coderivações na Coálgebra Simétrica	20
1.3 Definição de OCHA via coderivações	25
1.4 Coderivações em $S^cU \otimes T^cV$	27
1.5 Comutadores e baralhamentos de estruturas A_∞	30
2 A Operada \mathcal{OC}_∞	32
2.1 Operadas	32
2.1.1 Representações de Operadas	36
2.1.2 Operadas coloridas	38
2.2 Árvores Parcialmente Planas e \mathcal{OC}_∞	41
2.2.1 A Operada \mathcal{OC}_∞	42
3 Os espaços $\overline{C(n)}$ e $\overline{C(p,q)}$	48
3.1 Variedade com Córneres	48
3.1.1 A compactificação rFM	50
3.2 A compactificação $\overline{C(p,q)}$	52
3.2.1 Configurações de pontos no plano complexo \mathbb{C}	53

3.2.2	Configurações de pontos no semi-plano superior fechado	57
4	A Seqüência Espectral de $\overline{C(p, q)}$	63
4.1	A Estratificação de $\overline{C(p, q)}$	63
4.1.1	A seqüência espectral	68
4.2	Ilustrações	72
5	Conclusão	76

Resumo

Esta tese consiste do estudo das OCHAs (**Open-Closed Homotopy Algebras**) sob os pontos de vista algébrico e geométrico. São demonstrados essencialmente dois resultados novos. O primeiro refere-se à definição de OCHA através de coderivações. Mais especificamente, provamos que qualquer coderivação $D \in \text{Coder}^1(S^c\mathcal{H}_c \otimes T^c\mathcal{H}_o)$ de grau 1 satisfazendo $D^2 = 0$ define uma estrutura de OCHA em $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c \oplus \mathcal{H}_o$. Onde \mathcal{H}_c e \mathcal{H}_o são os espaços de estados da teoria de campo de corda para cordas fechadas (“closed strings”) e cordas abertas (“open strings”), respectivamente. Até então, sabia-se que as OCHAs eram dadas por coderivações [14], mas o fato de que *qualquer* coderivação define uma OCHA, é novo. O segundo resultado envolve a relação entre OCHA e a versão real da compactificação de Fulton MacPherson do espaço de configurações de pontos no semi-plano superior fechado. Este resultado mostra a estreita relação entre OCHAs e a operada do “Queijo Suíço” introduzida por Voronov [41], tal relação foi de fato sugerida na introdução de [14]. O capítulo 1 contém uma discussão sobre a definição de OCHA usando coálgebras e a conseqüente caracterização das coderivações mencionada acima. Mostramos também que a estrutura de OCHA pode ser obtida a partir de certas álgebras A_∞ de forma inteiramente análoga ao modo como álgebras de Lie podem ser obtidas a partir de álgebras associativas. Em seguida, o capítulo 2 traz a abordagem das OCHAs através de operadas. O capítulo 3 traz uma discussão detalhada do espaço $\overline{C(p, q)}$ (a compactificação de Fulton-MacPherson do espaço de configurações de $p + q$ pontos no semi-plano superior fechado com p pontos no interior e q pontos no bordo) e no capítulo 4 mostramos que a parte essencial da operada que descreve as OCHAs aparece na primeira linha do termo E^1 da seqüência espectral induzida por aquele espaço. O resultado mencionado acima significa que a estrutura algébrica das OCHAs está codificada na estratificação do bordo da variedade $\overline{C(p, q)}$, visto que esta última tem uma estrutura de variedade com córneres. No capítulo final discutimos o significado dos dois resultados obtidos procurando fazer um paralelo entre as abordagens geométrica e algébrica e mencionamos alguns problemas interessantes, como continuação deste trabalho, que podem ser considerados por estudantes interessados em Álgebras Homotópicas e temas relacionados.

Abstract

This thesis consists of the study of OCHA (**Open-Closed Homotopy Algebras**) from both the algebraic and geometric viewpoint. It essentially contains the proof of two new results. The first one is related to the definition of OCHA through coderivations. More specifically, it is shown that any degree one coderivation $D \in \text{Coder}^1(S^c\mathcal{H}_c \otimes T^c\mathcal{H}_o)$ such that $D^2 = 0$ defines an OCHA structure on $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c \oplus \mathcal{H}_o$. Where \mathcal{H}_c and \mathcal{H}_o are respectively the state spaces of Closed String Field Theory and Open String Field Theory. It was clear since its definition in 2004 that OCHAs can be defined in terms of coderivations. Nevertheless, the fact that any such coderivation is of the OCHA form is new. The second result involves the relation between OCHA and the real version of the Fulton MacPherson compactification of the configuration space of points on the closed upper half-plane. That result shows the close relation between OCHAs and the Swiss-Cheese operad introduced by Voronov [41]. Such relation was in fact suggested in the introduction of [14]. Chapter 1 contains a discussion about the coalgebraic definition of OCHA and the above mentioned characterization of all coderivations. It is also shown that OCHA can be obtained from certain A_∞ algebras, similarly to way in which Lie algebras are obtained from associative algebras. Chapter 2 then shows how to approach OCHA using Operads. The space $\overline{C(p, q)}$ (the Fulton-MacPherson compactification of the configuration space of $p + q$ points on the upper half-plane with p interior points and q boundary points) is discussed on chapter 3 and on chapter 4 it is shown that the essential part of the operad describing OCHA appears on the first line of the spectral sequence induced by that space. In other words, we could say that the algebraic structure of OCHA is encoded in the stratification of $\overline{C(p, q)}$, since this space has the structure of a manifold with corners. The final chapter is a discussion about the meaning of the two main results of this thesis. After that, some problems which could be explored by the student interested on homotopy algebras and related subjects are mentioned.

Agradecimentos

Este trabalho contou com a orientação de três excelentes professores: A. Rigas (Unicamp), Tomas Barros (UFSCar) e Jim Stasheff (UNC e UPenn).

O professor Stasheff propôs os problemas desta tese durante nosso estágio de “doutorado sanduíche” na Universidade da Pennsylvania (UPenn). Dentre as inúmeras razões que tenho para dizer “muito obrigado” ao professor Stasheff, gostaria de mencionar apenas algumas: orientação precisa e estimulante; contínuo encorajamento; hospitalidade; e haver escrito os trabalhos fundamentais sobre *Álgebras Homotópicas* e *Operadas* que serviram de base para esta tese e para centenas de outros trabalhos ao redor do mundo que fazem uso das suas idéias.

Dos professores Rigas e Tomas, durante os incontáveis seminários que fizemos na Unicamp, recebi estímulo para o trabalho e ajuda valiosa para corrigir alguns pontos “nebulosos” presentes nas primeiras versões desta tese.

Quero agradecer o companheirismo e apoio dados por minha esposa, Simone. Meus pais, minhas irmãs e a pequena Camile sempre foram, e continuam sendo, fonte de inspiração e encorajamento para enfrentar as dificuldades.

Agradeço a todos os colegas da Unicamp. Em especial ao Mosna, o Rafael, Carlos, Roldão e Peter Ardnt com os quais eu conversei em várias ocasiões sobre temas relacionados com esta tese.

Os membros da banca examinadora, durante a defesa, deram várias sugestões valiosas para melhorar este texto. A eles também quero dizer muito obrigado.

Agradeço ao Brasil e ao CNPq pelo apoio financeiro através das bolsas de “Doutorado no País” e de “Doutorado Sanduíche”, ambas pelo CNPq.

Introdução

Neste trabalho as OCHAs (Open-Closed Homotopy Algebras) são estudadas sob dois pontos de vista. O primeiro ponto de vista é algébrico e envolve coderivações, ao passo que o segundo enfatiza os aspectos geométricos através da compactificação de Fulton-MacPherson. OCHAs foram introduzidas por Kajiura e Stasheff [14] motivados pela Teoria de Campo de Corda considerando cordas abertas (open string) e cordas fechadas (closed string) no nível clássico, isto é, envolvendo apenas superfícies de gênero zero (ver Zwiebach [42]). A estrutura definida em [14] é uma álgebra homotópica. Kajiura e Stasheff definem primeiramente as chamadas álgebras A_∞ sobre álgebras L_∞ . Tal estrutura é introduzida tomando-se propriedades algébricas conhecidas (identidade de Jacobi, associatividade, derivação e representação) e “relaxando-as” de modo que passam a valer apenas a *menos de homotopia*. OCHAs são definidas colocando-se um ingrediente a mais nas álgebras A_∞ sobre álgebras L_∞ , de forma que as propriedades válidas anteriormente são *alteradas*. Assim, não se pode mais dizer simplesmente que as OCHAs são também definidas a partir das propriedades listadas acima. Os novos ingredientes, por assim dizer, destroem as propriedades que eram válidas nas álgebras A_∞ sobre álgebras L_∞ . Kajiura e Stasheff introduziram as OCHAs motivados inteiramente pelo seu aparecimento em Teoria do Campo de Corda, afirmando inclusive que a estrutura mais natural de um ponto de vista puramente matemático é a das álgebras A_∞ sobre álgebras L_∞ . Os resultados demonstrados neste trabalho mostram que as OCHAs possuem aspectos puramente matemáticos interessantes que merecem atenção.

A relação com espaços de configurações e a definição em termos de coderivações

que serão demonstradas nesta tese, também são válidas para as álgebras A_∞ e L_∞ . Estas últimas estruturas também estão relacionadas com a Teoria de Campo de Corda: A_∞ para cordas abertas (OSFT) e L_∞ para cordas fechadas (CSFT).

A seguir mencionaremos de modo muito breve e superficial a relação entre teoria de campo de corda e álgebras homotópicas. As 4 ou 5 páginas seguintes estão aqui apenas a título de motivação. Esta tese está totalmente restrita aos aspectos matemáticos das OCHAs.

Álgebras A_∞ e OSFT

Álgebras A_∞ foram introduzidas na década de 60 por Stasheff [33, 34] no seu estudo sobre H -espaços X que são homotopicamente equivalentes a um espaço de laços, $X = \Omega Y$. A condição sobre o H -espaço X para ser equivalente a um espaço de laços é dada na linguagem das operadas, ver seção 2.1. De fato, X é homotopicamente equivalente a um espaço de laços se e somente se tiver uma estrutura de *álgebra* (definição 2.6) sobre a operada $K = \{K_n\}_{n \geq 1}$, onde cada K_n é um politopo¹ convexo, conhecido como associaedro (do inglês “associahedra”), que contém um vértice para cada maneira de associar n variáveis ordenadas, isto é, maneiras de inserir parênteses numa expressão de n letras, de forma que os parênteses inseridos façam sentido em termos de operações (que estejam aninhados: dados dois conjuntos de pontos limitados por parênteses, se um não está contido no outro, então eles são disjuntos). A Figura 1 abaixo ilustra os associaedros K_3 e K_4 .

Devido à estrutura celular do associaedro K_n , os complexos celulares $\mathcal{A}_\infty = \{CC_*(K_n)\}_{n \geq 1}$ (onde $CC_*(K_n)$ denota o complexo de cadeias celulares sobre um corpo \mathbb{K} fixado de característica 0) formam uma operada de espaços vetoriais graduados (ou operada-DG). Álgebras sobre a operada \mathcal{A}_∞ são, por definição, as álgebras A_∞ . Se Y é um espaço de laços, $Y = \Omega X$, então o espaço $C_*(\Omega X)$ admite uma estrutura de álgebra A_∞ [33, 34, 36]. No próximo capítulo, álgebras A_∞ serão definidas em termos de aplicações multilineares, ver Definição 1.8.

¹Tradução livre do inglês *polytope* que significa a versão hiper-dimensional do conceito usual de poliedro.

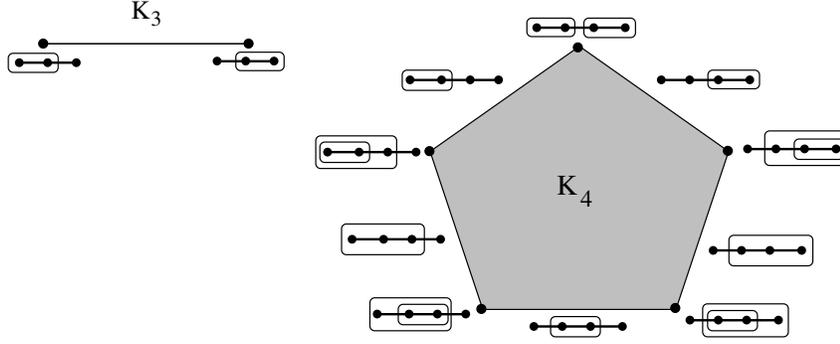


Figura 1: associaedros K_3 e K_4

Na década de 90 percebeu-se que as estruturas de álgebras A_∞ estão presentes na teoria de campo de corda [29, 15, 11]. A teoria de campo de corda é definida a partir de uma variedade diferenciável (espaço-tempo), munida de uma métrica g , (M, g) na qual as superfícies de Riemann Σ correspondentes à propagação de uma corda através do tempo (world sheet) são mapeadas: $\Sigma \rightarrow M$. Dizemos então que a teoria está definida sobre um ‘background’ conforme fixado.

O espaço de estados na Teoria de Campo de Corda é um espaço de Hilbert \mathbb{Z} -graduado \mathcal{H} . A graduação é conhecida na literatura Física como ‘número de ghost’ dos estados de cordas. Além disso temos um operador de cobordo de grau um $Q : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ satisfazendo $Q^2 = 0$ e uma forma bilinear antisimétrica de grau menos um $\omega : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$. Q e ω são chamados respectivamente operador BRST e operador produto interno-BPZ. Nesta teoria a ação é dada por:

$$S(\Phi) = \frac{1}{2}\omega(\Phi, Q\Phi) + \sum_{k \geq 3} \frac{1}{k} \mathcal{V}_k(\Phi, \dots, \Phi),$$

onde $\mathcal{V}_k : \mathcal{H}^{\otimes k} \rightarrow \mathbb{C}$ são dadas em termos de uma integral

$$\mathcal{V}_k(\Phi_1, \dots, \Phi_k) = \int_{\mathcal{M}_k^0} \Omega_k(\Phi_1, \dots, \Phi_k)$$

sobre uma certa variedade com córneres (ver seção 3.1) denotada \mathcal{M}_k^0 . Onde Ω_k  uma forma diferencial a valores no espaço de aplicações lineares da forma $\mathcal{H}^{\otimes k} \rightarrow \mathbb{C}$. Uma descrição mais precisa está em [13] e nas referências ali citadas. A variedade

com c rnere em questão   precisamente a versão real da compactifica o de Fulton MacPherson do espaço de configura es de pontos em $\mathbb{R}P^1$ módulo a a o natural do grupo $PGL(2, \mathbb{R})$. Usando-se a forma não degenerada ω , induz-se a partir de \mathcal{V}_k aplica es multilineares $m_{k-1} : \mathcal{H}^{\otimes k-1} \rightarrow \mathcal{H}$ que d o a \mathcal{H} uma estrutura de  lgebra A_∞ . Este fato decorre da combinatória (a qual   abordada nos capítulos 3 e 4) presente na estratifica o do bordo de \mathcal{M}_k^0 usando-se o teorema de Stokes e algumas propriedades da forma Ω_k [13].

Álgebras L_∞ e CSFT

De modo análogo às  lgebras A_∞ discutidas acima,  lgebras L_∞ podem ser definidas sobre um espaço vetorial graduado V como uma coderiva o $D \in \text{Coder}^1(\uparrow V)$ tal que $D^2 = 0$.

O interesse em  lgebras L_∞ surgiu na década de 80 em fun o das suas aplica es   teoria de deforma o [32]. Na década de 90 percebeu-se que tais estruturas têm também interesse na física pois estavam presentes na teoria de campo de corda para cordas fechadas (CSFT) de Zwiebach, ver [42, 43, 22]. Novamente temos um espaço de Hilbert \mathcal{H} , \mathbb{Z} -graduado, dos estados de corda fechada.

A idéia básica de considerar aplica es $\Sigma \rightarrow M$ onde Σ   uma superfície de Riemann com bordo igual a uma união disjunta de círculos S^1 leva, analogamente ao caso envolvendo cordas abertas, a uma aplica o $\mathcal{H}^{\otimes k} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por uma integral

$$\mathcal{V}_k(\Psi_1, \dots, \Psi_k) = \int_{\mathcal{M}_k^0} \Omega_k(\Psi_1, \dots, \Psi_k)$$

onde \mathcal{M}_k^0   a compactifica o do espaço de configura es de pontos na esfera $\mathbb{C}P^1$ módulo a a o natural do grupo $PGL(2, \mathbb{C})$. Tal integral induz uma aplica o multilinear

$$l_{k-1} : \mathcal{H}^{k-1} \rightarrow \mathcal{H}$$

$l_{k-1}(v_1, \dots, v_{k-1}) = [v_1, \dots, v_{k-1}]$ a qual satisfaz às condi es da defini o de  lgebras L_∞ em fun o da combinatória intríseca na estrutura de variedade com c rnere (isto  , na estratifica o de seu bordo) de \mathcal{M}_k^0 . Uma exposi o muito clara

da estrutura de álgebra L_∞ em CSFT é feita em [18]. Ali o conceito de operada é usado para fornecer uma demonstração matematicamente rigorosa de que a estrutura de álgebra L_∞ aparece em CSFT no nível clássico (gênero zero).

OCHA e OCSFT

Quando se considera a teoria de campo de corda envolvendo *cordas abertas e fechadas* [42] a estrutura de álgebra homotópica que está presente, no nível clássico, é a das “Open-closed homotopy álgebras” (OCHA) introduzidas por Kajjiura e Stasheff. Conforme afirmamos no início, o principal objetivo desta tese é mostrar que tais álgebras homotópicas são “naturais” com base em argumentos puramente matemáticos.

Compactificação de Fulton MacPherson

No caso das álgebras A_∞ (relacionas com teoria de campo de corda clássica para cordas abertas), seu aparecimento naquela teoria se deve ao papel desempenhado pela compactificação dos espaços de configurações de pontos em $\mathbb{R}P^1$. Tal compactificação é uma variedade com córneres (nesse caso é mais simplesmente um politopo, ver nota de rodapé pg. 2). E a estrutura de álgebras A_∞ está contida na estratificação do seu bordo (i.e., nas faces de codimensão k , no caso de um politopo).

Da mesma forma, a estrutura de álgebras L_∞ aparece na estratificação do bordo de uma outra compactificação. Neste caso, trata-se do espaço de configurações de pontos em $\mathbb{C}P^1$. Conforme demonstrado em [18], a estrutura de álgebras L_∞ está contida na estratificação do bordo desta compactificação.

O espaço de módulos relevante para OCHA, que envolve interações entre cordas abertas e fechadas no nível clássico, de certa forma engloba os dois espaços mencionados acima. Trata-se do espaço de configurações de pontos no disco, com pontos tanto no bordo como no interior do disco, ou equivalentemente do espaço de módulos de discos de Riemann com pontos marcados. No capítulo 4 mostramos que a estrutura de OCHA, de modo análogo aos casos anteriores, aparece na estratificação do bordo desta compactificação.

A seguir listamos os aspectos relevantes das OCHAs abordados nesta tese:

1. Descrição via coalgebra: Coderivações diferenciais na coalgebra $S^c\mathcal{H}_c \otimes T^c\mathcal{H}_o$. Caracterização das coderivações na coalgebra $S^c\mathcal{H}_c \otimes T^c\mathcal{H}_o$ mostrando que todas são da mesma forma que as coderivações que aparecem em OCHA [14] e demonstração da relação entre OCHAs e álgebras A_∞ .
2. Espaço de Módulos envolvido: compactificação rFM do espaço de configurações de pontos no semi-plano superior com pontos no bordo (reta real) e no interior do semiplano módulo transformações afins $z \mapsto az + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a > 0$. A estrutura de OCHA aparece na seqüência espectral desta compactificação.
3. Descrição via operadas: OCHAs são descritas através de uma operada com duas cores formada por árvores parcialmente planas. Cada cor corresponde a um tipo de ponto sobre o disco: aresta plana \leftrightarrow ponto no bordo, aresta espacial \leftrightarrow ponto no interior.

Na tabela a seguir mostramos as analogias entre as três estruturas de álgebras homotópicas A_∞ , L_∞ e OCHA:

	Moduli	Coder	Operada
Álgebras A_∞	$\text{Conf}(\mathbb{R}P^1)/PGL(2, \mathbb{R})$	$T^c\mathcal{H}_o$	árvores planas
Álgebras L_∞	$\text{Conf}(\mathbb{C}P^1)/PGL(2, \mathbb{C})$	$S^c\mathcal{H}_c$	árvores espaciais
OCHA	$\text{Conf}(H)/(z \mapsto az + b)$	$S^c\mathcal{H}_c \otimes T^c\mathcal{H}_o$	árvores parcialmente planas

aqui temos os espaços de Módulos para cada uma das estruturas algébricas homotópicas mencionadas e as correspondentes descrições em termos de coalgebras e de operadas. Na última linha, $\text{Conf}(H)/(z \mapsto az + b)$ denota o espaço de configurações de pontos no semi-plano fechado superior H módulo certas transformações afins, como mencionamos acima. O significado preciso de cada um dos termos e símbolos apresentados será desenvolvido no corpo desta tese. A terceira linha da tabela acima só pôde ser preenchida em função dos resultados demonstrados neste trabalho.

Capítulo 1

Álgebras Homotópicas, Coderivações e OCHA

Em [14], Kajiura e Stasheff mostraram que as OCHAs podem ser definidas como *certas* coderivações D que satisfazem $D^2 = 0$. Neste capítulo mostraremos que *qualquer* coderivação D na coálgebra em questão $S^c\mathcal{H}_c \otimes T^c\mathcal{H}_o$ (ver a seção 1.3) satisfazendo $D^2 = 0$ define uma estrutura de OCHA. A idéia chave para provar tal fato é usar um certo morfismo de coálgebras Ξ (fórmula 1.21) o qual é inspirado na geometria de certos espaços de configurações que estão diretamente ligados com as OCHAs, conforme veremos no capítulo 4.

O resultado que provaremos aqui é na verdade uma caracterização de todas as coderivações na coálgebra $\text{Coder}(S^cU \otimes T^cV)$ para quaisquer espaços vetoriais U e V . A afirmação acima sobre OCHA, segue-se como corolário. O morfismo Ξ mencionado acima é também usado para mostrar que, para estruturas $A_\infty(U \oplus V, \mathfrak{m} = \{m_k\})$ (exemplo 1.8) sobre o espaço $U \oplus V$ satisfazendo certas condições, temos uma estrutura de OCHA $\mathfrak{m} \circ \Xi$ naquele espaço (Teorema 1.46).

Notação e Terminologia

Antes de começarmos nosso estudo, faremos algumas observações sobre a notação que será empregada. Procuraremos manter, sempre que possível, nossa notação de acordo com aquela empregada no livro de Markl, Shnider e Stasheff sobre operadas [25].

Considere um corpo \mathbb{K} fixado de característica zero. Salvo menção explícita em contrário, todos os espaços vetoriais mencionados nesta tese devem ser considerados sobre o corpo \mathbb{K} .

Num espaço vetorial \mathbb{Z} -graduado qualquer $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V^n$, dizemos que um vetor $v \in V$ é um elemento homogêneo de V , se $v \in V^n$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. Nesse caso, $n = |v|$ é definido como o *grau* do vetor v . Dados dois espaços vetoriais graduados U e V , uma aplicação linear $f : U \rightarrow V$ é dita uma *aplicação linear homogênea* se existe um inteiro $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f(U^k) \subseteq V^{k+n}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Neste caso f é dita uma aplicação linear de grau $|f| = n$.

Seja A uma álgebra \mathbb{Z} -graduada, isto é, um espaço vetorial $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A^n$ munido de um produto $m : A \otimes A \rightarrow A$ de grau zero, ou seja, $|a \cdot b| = |a| + |b|$.

Definição 1.1 (Sinal de Koszul). *Seja $\sigma \in \Sigma_n$ uma permutação de n elementos. Dado um conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ qualquer de n elementos homogêneos de A . O sinal de Koszul $\epsilon(\sigma; x_1, \dots, x_n)$ da permutação σ agindo em x_1, \dots, x_n será denotado abreviadamente por $(-1)^{\epsilon(\sigma)}$ e é definido da seguinte maneira:*

1. se τ é uma transposição de dois elementos x_i e x_{i+1} , o sinal de Koszul é definido por $(-1)^{\epsilon(\tau)} := (-1)^{|x_i||x_{i+1}|}$;
2. se σ é o produto de duas permutações $\sigma = \sigma_1\sigma_2$, então

$$(-1)^{\epsilon(\sigma)} = (-1)^{\epsilon(\sigma_1)}(-1)^{\epsilon(\sigma_2)}.$$

Definição 1.2. *Sejam U e V espaços vetoriais graduados, dadas duas aplicações lineares homogêneas $f, g : U \rightarrow V$ entre espaços vetoriais graduados, o produto $f \otimes g$ é definido por*

$$(f \otimes g)(v \otimes w) = (-1)^{|v||g|} f(v) \otimes g(w).$$

Nas seções 1.1 e 1.2 faremos uma revisão (baseada nas referências [9, 21, 22, 23, 35]) sobre álgebras homotópicas e coderivações. Já na seção 1.3 apresentamos de forma explícita o levantamento como coderivação usado implicitamente em [14]. A seção 1.4 apresenta nosso primeiro resultado original, nela mostramos como caracterizar todas as coderivações da coálgebra usada para definir OCHA e obtemos como corolário o fato de que uma OCHA é dada simplesmente por uma coderivação D com $D^2 = 0$. Finalmente, na última parte deste capítulo, seção 1.5, mostramos como obter uma OCHA a partir de uma certa estrutura de álgebra A_∞ .

1.1 Álgebras Homotópicas

Um espaço vetorial V é dito diferencial graduado se estiver munido de uma \mathbb{Z} -gradação $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V^n$ e de um operador linear $d : V \rightarrow V$ de grau 1 e tal que $d^2 = 0$. Espaços vetoriais diferenciais graduados serão chamados simplesmente de DG-espacos.

Definição 1.3 (Morfismo). *Um morfismo entre dois DG-espacos (V, d_V) e (W, d_W) é uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$ de grau zero, tal que $d_W f = f d_V$.*

Observação 1.4. *Morfismos serão também chamados de aplicações de cadeia.*

Definição 1.5 (Homotopia de Cadeias). *Sejam (V, d_V) e (W, d_W) dois DG-espacos e $f_1, f_2 : V \rightarrow W$ aplicações de cadeias. Uma homotopia de cadeias entre os dois morfismos f_1, f_2 é uma aplicação linear $h : (V, d_V) \rightarrow (W, d_W)$ de grau -1 tal que $f_1 - f_2 = d_W h + h d_V$.*

Como veremos a seguir, podemos ainda definir homotopias de homotopias, também conhecidas como homotopias de ordem superior. Por exemplo, dados dois morfismos f_1, f_2 e duas homotopias h, k como acima, uma homotopia de segunda ordem é uma aplicação linear $h_2 : (V, d_V) \rightarrow (W, d_W)$ de grau -2 tal que $h - k = d_W h_2 - h_2 d_V$.

Definição 1.6 (Homotopias de Ordem Superior). *Sejam (V, d_V) e (W, d_W) dois DG-espacos e $\{h_n\}_{n \geq 0}$ uma família de aplicações $h_n : (V, d_V) \rightarrow (W, d_W)$ tais que:*

1. $|h_n| = -n$ e h_0 é uma aplicação de cadeia;
2. para todo $n \geq 1$, $d_W h_n - (-1)^n h_n d_V = P_n(h_{n-1}, \dots, h_0)$,

onde cada P_n denota uma “propriedade” que as aplicações devem satisfazer. Cada propriedade P_n é definida em termos de composições das aplicações e permutações das variáveis (tais como as propriedades conhecidas de Associatividade, Identidade de Jacobi, Comutatividade, etc...).

As aplicações h_n para $n \geq 1$, satisfazendo as condições acima, são chamadas de **homotopias de ordem superior** e dizemos que as propriedades P_n são válidas a menos de homotopia.

Observação 1.7. A palavra “propriedade” foi empregada de maneira bastante vaga na definição acima. Este problema pode ser contornado através do conceito de Operada, ver Markl [26].

Uma **álgebra homotópica** em geral é um DG-espaco (A, d) munido de uma família de aplicações $\{h_k : A^{\otimes k} \rightarrow A\}_{k \geq 1}$ satisfazendo as seguintes condições:

1. $h_1 = d$;
2. h_2 é uma aplicação de cadeia, i.e., $dh_2(a, b) = h_2(da, b) + (-1)^{|a|} h_2(a, db)$;
3. as aplicações h_n para $n \geq 3$ são homotopias de ordem superior, no sentido da definição acima.

Exemplo 1.8 (Álgebras A_∞). Uma álgebra A_∞ consiste de um espaco vetorial diferencial graduado A munido de aplicações lineares

$$m_n : A^{\otimes n} \rightarrow A \quad \text{de grau } 2 - n$$

satisfazendo as seguintes relações para cada $n \geq 1$:

$$\sum_{i+j=n+1} \sum_{k=1}^{n-j+1} \beta(i, j, k) m_i(a_1 \otimes \dots \otimes a_{k-1} \otimes m_j(a_k \otimes \dots \otimes a_{k+j-1}) \otimes \dots \otimes a_n) = 0 \quad (1.1)$$

onde $\beta(i, j, k)$ é igual a -1 elevado a $(j+1)k + j(n + \sum_{m=1}^{k-1} |a_m|)$. Nos casos $n = 1, 2, 3, 4$ a expressão acima nos diz que as operações satisfazem as seguintes propriedades:

(A1) $m_1 = d$ é um diferencial: $d^2 = 0$,

(A2) $m = m_2 : A \otimes A \rightarrow A$ é uma aplicação de cadeia, ou seja, d é uma derivação com respeito a $m = m_2$,

(A3) $m_3 : A^{\otimes 3} \rightarrow A$ é uma homotopia de cadeias para a associatividade da multiplicação m , ou seja

$$m_3 d^{[3]} + dm_3 = m(m \otimes 1) - m(1 \otimes m)$$

onde $d^{[3]}$ denota a aplicação $d \otimes 1^{\otimes 2} + 1 \otimes d \otimes 1 + 1^{\otimes 2} \otimes d$,

(A4) m_4 é uma homotopia superior (de segunda ordem) de forma que $m_4 d^{[4]} - dm_4$ tem cinco termos correspondendo às arestas de K_4 (ver figura 1, à página 3):

$$m_4 d^{[4]} - dm_4 = m_3(m_2 \otimes 1^{\otimes 2} - 1 \otimes m_2 \otimes 1 + 1^{\otimes 2} \otimes m_2) - m_2(m_3 \otimes 1 + 1 \otimes m_3).$$

Antes de mencionarmos as Álgebras L_∞ , precisamos definir um tipo de permutação que será frequentemente usado neste trabalho.

Definição 1.9 (Desembaralhamentos). Uma permutação $\sigma \in \Sigma_n$ é chamada de $(p, n-p)$ -desembaralhamento quando $\sigma(1) < \dots < \sigma(p)$ e $\sigma(p+1) < \dots < \sigma(n)$. Denotaremos por $\Sigma_{p, n-p}$ a coleção de todos $(p, n-p)$ -desembaralhamentos.

Observação 1.10. O número de $(p, n-p)$ -desembaralhamentos é $\frac{n!}{(n-p)! p!}$.

Exemplo 1.11 (Álgebras L_∞). Uma álgebra L_∞ consiste de um DG-espaco L munido de aplicações multilineares $l_n : L^{\otimes n} \rightarrow L$ anti-simétricas, isto é:

$$l_n(x_1, \dots, x_n) = -(-1)^{\epsilon(\sigma)} l_n(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \quad \forall \sigma \in S_n$$

de grau $2-n$ satisfazendo as seguintes condições para cada $n \geq 1$:

$$\sum_{i+j=n+1} \sum_{\sigma} e(\sigma) (-1)^\sigma (-1)^{i(j-1)} l_i(l_j(v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(j)}) \otimes v_{\sigma(j+1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(n)}) = 0 \quad (1.2)$$

onde σ percorre todos $(j, n-j)$ -desembaralhamentos.

A fórmula acima, para $n = 1$, diz que l_1 é um diferencial ($l_1^2 = 0$). Quando $n = 2$, a fórmula afirma que l_2 é uma aplicação de cadeia e, quando $n = 3$, temos a identidade de Jacobi a menos de homotopia tendo l_3 como operador de homotopia.

A seguir passaremos a estudar as coderivações, as quais podem ser usadas para definir um grande número de álgebras homotópicas. Daremos ênfase especial às álgebras A_∞ , L_∞ e OCHA.

1.2 Coálgebras e coderivações

Definição 1.12 (Coálgebra). Uma coálgebra é uma tripla (C, Δ, ϵ) , onde C é um espaço vetorial, $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$ e $\epsilon : C \rightarrow \mathbb{K}$ são aplicações lineares satisfazendo os axiomas de coassociatividade e counidade dados pelos seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\
 \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \otimes 1 \\
 C \otimes C & \xrightarrow{1 \otimes \Delta} & C \otimes C \otimes C
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 C \otimes \mathbb{K} & \xleftarrow{1 \otimes \epsilon} & C \otimes C & \xrightarrow{\epsilon \otimes 1} & \mathbb{K} \otimes C \\
 & \searrow \simeq & \uparrow \Delta & \swarrow \simeq & \\
 & & C & &
 \end{array}
 \tag{1.3}$$

Definição 1.13 (Coproducto Iterado). Para qualquer coálgebra $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$, pode-se definir o coproducto iterado: $\Delta^{(n-1)} : C \rightarrow C^{\otimes n}$ para $n \geq 2$, da seguinte forma:

$$\Delta^{(n-1)} = (\Delta \otimes \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{n-2}) \circ \dots \circ (\Delta \otimes 1) \circ \Delta.$$

A posição do Δ em cada um dos fatores acima é de fato irrelevante em função da associatividade da coálgebra.

Definição 1.14 (Morfismo de Coálgebras). Dadas duas coálgebras, (C, Δ, ϵ) e (C', Δ', ϵ') . Um morfismo entre elas é uma aplicação $\phi : C \rightarrow C'$ satisfazendo

$$\Delta' \phi = (\phi \otimes \phi) \Delta \quad e \quad \epsilon' \phi = \epsilon.$$

Lema 1.15. Se $\chi : C \rightarrow C'$ é um morfismo injetor de coálgebras, então $\chi^{-1} : \chi(C) \rightarrow C$ é um morfismo de coálgebras.

Demonstração. $(\chi \otimes \chi)\Delta = \Delta' \chi \Rightarrow (\chi \otimes \chi)\Delta \chi^{-1} = \Delta' \Rightarrow (\chi^{-1} \otimes \chi^{-1})\Delta' = \Delta \chi^{-1}$. \square

Definição 1.16 (Coderivação). *Uma aplicação linear $f : C \rightarrow C$ é uma coderivação da coálgebra (C, Δ, ε) se ela satisfaz às seguintes condições: $\varepsilon f = 0$ e*

$$(f \otimes 1 + 1 \otimes f)\Delta = \Delta f.$$

Observação 1.17. *Lembramos que se $m : A \otimes A \rightarrow A$ é uma álgebra, então uma derivação é uma aplicação $d : A \rightarrow A$ satisfazendo $m(d \otimes 1 + 1 \otimes d) = d m$.*

O conjunto de todas as coderivações numa dada coálgebra C formam um espaço vetorial que será denotado por $\text{Coder}(C)$. A seguir apresentamos dois lemas sobre coderivações que serão úteis no decorrer deste trabalho.

Lema 1.18. *Sejam (C, Δ) e (C', Δ') duas coálgebras e $\chi : C \rightarrow C'$ um morfismo injetor de coálgebras. Se $f' : C' \rightarrow C'$ é uma coderivação cuja imagem está contida em $\chi(C)$, então $f = \chi^{-1} f' \chi$ é uma coderivação de C .*

Demonstração. Pelo lema 1.15 acima, sabemos que $\chi^{-1} : \chi(C) \rightarrow C$ é um morfismo de coálgebras. Temos que

$$\begin{aligned} (f \otimes 1 + 1 \otimes f) \circ \Delta &= (\chi^{-1} f' \chi \otimes 1 + 1 \otimes \chi^{-1} f' \chi) \circ \Delta = \\ &= (\chi^{-1} \otimes \chi^{-1}) \circ (f' \otimes 1 + 1 \otimes f') \circ (\chi \otimes \chi) \circ \Delta = \\ &= (\chi^{-1} \otimes \chi^{-1}) \circ (f' \otimes 1 + 1 \otimes f') \circ \Delta' \circ \chi = \\ &= (\chi^{-1} \otimes \chi^{-1}) \circ (\Delta' \circ f') \circ \chi = \\ &= ((\chi^{-1} \otimes \chi^{-1}) \circ \Delta') \circ f' \circ \chi = \\ &= \Delta \circ \chi^{-1} \circ f' \circ \chi = \Delta \circ f. \end{aligned}$$

Como $\chi : C \rightarrow C'$ é um morfismo de coálgebras, devemos ter $\epsilon' \circ \chi = \epsilon$, sendo ϵ e ϵ' as counidades de C e C' respectivamente. Temos assim

$$\begin{aligned} \epsilon \circ f &= \epsilon \circ (\chi^{-1} \circ f' \circ \chi) = (\epsilon \circ \chi^{-1}) \circ f' \circ \chi = \\ &= (\epsilon' \circ f') \circ \chi = 0 \circ \chi = 0. \end{aligned} \quad \square$$

Definição 1.19 (Coálgebra Produto). Dadas duas coálgebras (C, Δ) e (C', Δ') . A coálgebra produto $(C \otimes C', \Psi)$ é definida pelo seguinte coproduto

$$\begin{aligned}\Psi : C \otimes C' &\rightarrow (C \otimes C') \otimes (C \otimes C') \\ \Psi &\stackrel{def}{=} (1_C \otimes \tau \otimes 1_{C'}) \circ (\Delta \otimes \Delta'),\end{aligned}$$

onde τ é o isomorfismo $\tau : C \otimes C' \rightarrow C' \otimes C$, $\tau(x \otimes y) = (-1)^{|x||y|} y \otimes x$. Com a counidade definida por $\epsilon_{C \otimes C'} : C \otimes C' \rightarrow \mathbb{K}$, $\epsilon_{C \otimes C'}(x \otimes x') = \epsilon_C(x)\epsilon_{C'}(x')$.

Lema 1.20. Sejam (C, Δ) e (C', Δ') duas coálgebras. Se $f : C \rightarrow C'$ é uma coderivação, então $f \otimes 1_{C'} : C \otimes C' \rightarrow C \otimes C'$ é uma coderivação na coálgebra produto.

Demonstração.

$$\begin{aligned}((f \otimes 1_{C'}) \otimes 1_{C \otimes C'} + 1_{C \otimes C'} \otimes (f \otimes 1_{C'}))\Psi &= \\ &= ((f \otimes 1_{C'}) \otimes 1_{C \otimes C'} + 1_{C \otimes C'} \otimes (f \otimes 1_{C'})) \circ (1_C \otimes \tau \otimes 1_{C'}) \circ (\Delta \otimes \Delta') = \\ &= (1_C \otimes \tau \otimes 1_{C'}) \circ [(f \otimes 1_C) \otimes 1_{C' \otimes C'} + (1_C \otimes f) \otimes 1_{C' \otimes C'}] \circ (\Delta \otimes \Delta') = \\ &= (1_C \otimes \tau \otimes 1_{C'}) \circ [(f \otimes 1_C + 1_C \otimes f) \circ \Delta] \otimes (1_{C' \otimes C'} \circ \Delta') = \\ &= (1_C \otimes \tau \otimes 1_{C'}) (\Delta f \otimes \Delta') = (1_C \otimes \tau \otimes 1_{C'}) \circ (\Delta \otimes \Delta') (f \otimes 1_{C'}) = \Psi(f \otimes 1_{C'}).\end{aligned}$$

A condição $\epsilon_{C \otimes C'} \circ (f \otimes 1_{C'}) = 0$, segue-se diretamente da condição $\epsilon_C \circ f = 0$. \square

1.2.1 Coderivações na Coálgebra Tensorial

Definição 1.21. Dado um espaço vetorial V qualquer, a coálgebra tensorial gerada por V é definida como $(T^c V, \Delta_\otimes, \pi_0)$, onde $T^c V = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$, o coproduto

$$\Delta_\otimes : T^c V \rightarrow T^c V \otimes T^c V$$

é definido por

$$\Delta_\otimes(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{[n]} \otimes 1 + \sum_{1 \leq i \leq n-1} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n) + 1 \otimes v_{[n]}$$

onde $v_{[n]} = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$; e a counidade é dada pela projeção canônica

$$\pi_0 : \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n} \rightarrow \mathbb{K}$$

convencionando-se que $V^{\otimes 0} = \mathbb{K}$.

O objetivo desta seção é mostrar como caracterizar todas as coderivações na coálgebra tensorial através do *levantamento de coderivações*. O qual passaremos a explicar. Primeiramente um lema mostrando como a projeção canônica pode ser dada em termos do coproduto.

Lema 1.22. *Seja $\pi_n : T^cV \rightarrow V^{\otimes n}$ a projeção canônica. Em termos do coproduto Δ_{\otimes} , ela pode ser expressa como:*

$$\pi_n = (\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_1) \Delta_{\otimes}^{(n-1)}, \quad \text{para } n \geq 2 \quad (1.4)$$

onde $\Delta_{\otimes}^{(n-1)}$ é o coproduto iterado da definição 1.13.

Demonstração. Pela definição de Δ_{\otimes} , temos que o coproduto iterado $\Delta_{\otimes}^{(n-1)}$ é dado por:

$$\Delta_{\otimes}^{(n-1)}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = \sum x_{[j_0+1, j_1]} \otimes x_{[j_1+1, j_2]} \otimes \cdots \otimes x_{[j_{(n-1)}+1, j_n]} \quad (1.5)$$

onde a soma acima percorre todas as $(n-1)$ -uplas (j_1, \dots, j_{n-1}) de inteiros tais que $0 = j_0 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_{n-1} \leq j_n = k$ e, para cada $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_l$ o multi-índice $x_{[i, j]}$ é definido da seguinte forma:

$$x_{[i, j]} = \begin{cases} 1, & \text{se } j < i \\ x_i, & \text{se } i = j \\ x_i \otimes \cdots \otimes x_j, & \text{se } i < j. \end{cases} \quad (1.6)$$

note-se que a expressão (1.5) contém n multi-índices.

Como a projeção canônica $\pi_n : T^cV \rightarrow V^{\otimes n}$ é definida por

$$\pi_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = \begin{cases} x_1 \otimes \cdots \otimes x_k, & \text{se } k = n \\ 0, & \text{se } k \neq n, \end{cases}$$

aplicando-se $\underbrace{\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_1}_{n \text{ termos}}$ na expressão (1.5), obtemos

$$\sum (\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_1)(x_{[j_0+1, j_1]} \otimes x_{[j_1+1, j_2]} \otimes \cdots \otimes x_{[j_{(n-1)}+1, j_n]}).$$

Mas a expressão dentro do somatório é não nula se, e somente se, todos os multi-índices $x_{[j_i+1, j_{i+1}]}$ pertencerem a V , ou seja, se $k = n$ e $x_{[j_{(l-1)}+1, j_l]} = x_l$ para todo $1 \leq l \leq n$. Em outras palavras

$$(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_1) \Delta_{\otimes}^{(n-1)}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k)$$

é igual a $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ quando $k = n$ e é zero nos outros casos. \square

Observação 1.23. Neste trabalho usaremos a notação T^cV para denotar a coálgebra tensorial gerada por V . A álgebra tensorial será denotada por T^aV . Note-se que, como espaço vetorial, $T^cV \cong T^aV$.

Seja A uma álgebra e $G \subset A$ um subconjunto de geradores. Dadas duas derivações quaisquer $d_1, d_2 : A \rightarrow A$. Se $d_1|_G = d_2|_G$ então $d_1 = d_2$, pois todos elementos de A são produtos de elementos de G e d_1 e d_2 satisfazem a regra de Leibniz.

No caso específico da álgebra tensorial $T^aV = \bigoplus V^{\otimes n}$ com produto dado por:

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \otimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_m) \longmapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m,$$

dada qualquer aplicação linear $f : V \rightarrow T^aV$, podemos estendê-la de forma única como uma derivação $\hat{f} : T^aV \rightarrow T^aV$ da álgebra tensorial. O enunciado dual também é verdadeiro para coálgebras e coderivações. Qualquer aplicação $f : T^cV \rightarrow V$ pode ser unicamente levantada como uma coderivação $\hat{f} : T^cV \rightarrow T^cV$. Como mostraremos a seguir.

Definição 1.24 (Levantamento como Coderivação). Se $f : V^{\otimes n} \rightarrow V$ é uma aplicação linear, ela pode ser levantada como uma coderivação $\hat{f} : T^cV \rightarrow T^cV$ definindo-se $\hat{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = 0$ para $k < n$ e

$$\hat{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \sum_{i=0}^{k-n} (1^{\otimes i} \otimes f \otimes 1^{\otimes k-n-i})(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k), \quad \text{para } k \geq n. \quad (1.7)$$

A definição acima foi dada para qualquer espaço vetorial V . Note-se que, se V é um espaço vetorial graduado $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V^{\otimes n}$ e f é homogênea de grau $|f|$, usando a Definição 1.2 então a fórmula (1.7) na definição acima fica:

$$\hat{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \sum_{i=0}^{k-n} (-1)^{(|v_1| + \cdots + |v_i|)|f|} v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes f(v_{i+1}, \dots, v_{i+n}) \otimes v_{i+n+1} \otimes \cdots \otimes v_k. \quad (1.8)$$

Um espaço vetorial qualquer V pode ser considerado um espaço vetorial graduado onde todo espaço está ‘concentrado’ no grau zero. Nesse caso a fórmula acima se reduz simplesmente a

$$\hat{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \sum_{i=0}^{k-n} v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes f(v_{i+1}, \dots, v_{i+n}) \otimes v_{i+n+1} \otimes \cdots \otimes v_k.$$

Lema 1.25. *Para qualquer espaço vetorial V e qualquer $f : V^{\otimes n} \rightarrow V$, a aplicação $\hat{f} : T^c V \rightarrow T^c V$ é uma coderivação.*

Demonstração. Provaremos primeiramente o caso não-graduado. Pela fórmula acima temos:

$$\begin{aligned} \Delta_{\otimes} \hat{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) &= \sum_{i=0}^{k-n} \Delta(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes f(v_{i+1}, \dots, v_{i+n}) \otimes v_{i+n+1} \cdots \otimes v_k) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-n} \left[\sum_{l=0}^i \left((v_1 \otimes \cdots \otimes v_l) \otimes (v_{l+1} \otimes \cdots \otimes v_i \otimes f(v_{i+1}, \dots, v_{i+n}) \otimes v_{i+n+1} \cdots \otimes v_k) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=i+n}^k \left((v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes f(v_{i+1}, \dots, v_{i+n}) \otimes v_{i+n+1} \cdots \otimes v_l) \otimes (v_{l+1} \otimes \cdots \otimes v_k) \right) \right]. \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} (\hat{f} \otimes 1 + 1 \otimes \hat{f}) \Delta_{\otimes}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) &= (\hat{f} \otimes 1 + 1 \otimes \hat{f}) \left(\sum_{l=0}^k (v_1 \otimes \cdots \otimes v_l) \otimes (v_{l+1} \otimes \cdots \otimes v_k) \right) = \\ &= \sum_{l=0}^k \left(\hat{f}(v_1, \dots, v_l) \otimes (v_{l+1} \otimes \cdots \otimes v_k) + (v_1 \otimes \cdots \otimes v_l) \otimes \hat{f}(v_{l+1}, \dots, v_k) \right) = \\ &= \left[\sum_{l=n}^k \left(\sum_{i=0}^{l-n} v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes f(v_{i+1}, \dots, v_{i+n}) \otimes v_{i+n+1} \cdots \otimes v_l \right) \otimes (v_{l+1} \otimes \cdots \otimes v_k) \right] + \\ &+ \left[\sum_{l=0}^{k-n} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_l) \otimes \left(\sum_{i=0}^{k-n-l} v_{l+1} \otimes \cdots \otimes v_{l+i} \otimes f(v_{l+i+1}, \dots, v_{l+i+n}) \otimes v_{l+i+n+1} \cdots \otimes v_k \right) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{k-n} \left((v_1 \otimes \cdots \otimes v_l) \otimes \left(\sum_{i=l}^{k-n} (v_{l+1} \otimes \cdots \otimes v_i \otimes f(v_{i+1}, \dots, v_{i+n}) \otimes v_{i+n+1} \cdots \otimes v_k) \right) \right) + \\
&\quad + \sum_{l=n}^k \left(\sum_{i=0}^{l-n} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes f(v_{i+1}, \dots, v_{i+n}) \otimes v_{i+n+1} \cdots \otimes v_l) \otimes (v_{l+1} \otimes \cdots \otimes v_k) \right).
\end{aligned}$$

segue-se que $\Delta_{\otimes} \hat{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = (\hat{f} \otimes 1 + 1 \otimes \hat{f}) \Delta_{\otimes}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)$.

O caso graduado segue-se do caso não graduado provado acima apenas observando-se que os sinais, tanto na definição de coderivação $(f \otimes 1 + 1 \otimes f) \Delta = \Delta f$ quanto na definição de \hat{f} seguem o mesmo princípio dado pela Definição 1.2. \square

Para qualquer espaço vetorial V , cada aplicação linear $f \in \text{Hom}(T^c V, V)$ (Salvo menção explícita em contrário, neste trabalho $\text{Hom}(V, W) = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$ denota o espaço das aplicações lineares de V em W), pode ser escrita como $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ com $f_n : V^{\otimes n} \rightarrow V$. Aplicando o levantamento como coderivação para cada \hat{f}_n temos $\hat{f}_n : T^c V \rightarrow T^c V$. Assim temos uma aplicação linear

$$\begin{aligned}
\text{Hom}(T^c V, V) &\xrightarrow{\phi} \text{Coder}(T^c V) \\
f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n &\longmapsto \phi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_n
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Note-se que $\phi(f)$ é uma aplicação bem definida, pois para cada $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \in T^c V$ $\phi(f)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)$ é dada por uma soma finita, uma vez que $\hat{f}_n(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = 0$ para $n > k$. A soma de coderivações é uma coderivação, portanto $\phi(f)$ é uma coderivação.

Proposição 1.26. *A aplicação linear $\phi : \text{Hom}(T^c V, V) \rightarrow \text{Coder}(T^c V)$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.*

Antes de provarmos a proposição acima, precisamos de mais um lema.

Lema 1.27. *As coderivações na cóalgebra tensorial $T^c V$ são determinadas pelas suas projeções em V . Em outras palavras, dadas duas coderivações quaisquer $f, g : T^c V \rightarrow T^c V$ se $\pi_1 f = \pi_1 g$, então $f = g$.*

Demonstração. Primeiramente observamos que para qualquer coproduto Δ e qualquer coderivação f , por indução temos:

$$\Delta^{(n-1)} f = (f \otimes 1^{\otimes n-1} + \cdots + 1^{\otimes n-2} \otimes f \otimes 1 + 1^{\otimes n-1} \otimes f) \Delta^{(n-1)}.$$

De fato, para $n = 2$ a expressão acima é simplesmente a definição de coderivação. Assumindo que a fórmula é válida para $n - 1$, temos

$$\Delta^{(n-2)} f = (f \otimes 1^{\otimes n-2} + \dots + 1^{\otimes n-3} \otimes f \otimes 1 + 1^{\otimes n-2} \otimes f) \Delta^{(n-2)}.$$

Aplicando-se $(\Delta \otimes \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{n-2})$ em cada parcela da igualdade acima obtém-se:

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{n-2})(f \otimes 1^{\otimes n-2}) &= ((f \otimes 1 + 1 \otimes f) \otimes 1^{\otimes n-2})(\Delta \otimes \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{n-2}) \\ &= (f \otimes 1^{\otimes n-1} + 1 \otimes f \otimes 1^{\otimes n-2})(\Delta \otimes \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{n-2}) \end{aligned}$$

e para cada $2 \leq k < n$:

$$(\Delta \otimes \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{n-2})(1^{\otimes n-k} \otimes f \otimes 1^{\otimes k-2}) = (1^{\otimes n-k+1} \otimes f \otimes 1^{\otimes k-2})(\Delta \otimes \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{n-2})$$

pois $\Delta 1 = (1 \otimes 1)\Delta$, isto é, a identidade $1 : C \rightarrow C$ é uma aplicação de coálgebra.

Como por definição $(\Delta \otimes \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{n-2})\Delta^{(n-2)} = \Delta^{(n-1)}$, agrupando-se os termos calculados acima, obtemos:

$$\Delta^{(n-1)} f = (f \otimes 1^{\otimes n-1} + \dots + 1^{\otimes n-2} \otimes f \otimes 1 + 1^{\otimes n-1} \otimes f) \Delta^{(n-1)}.$$

Dada uma coderivação qualquer $f \in \text{Coder}(T^cV)$, usando a fórmula (1.4) e a igualdade acima que acabamos de verificar, segue-se que

$$\begin{aligned} \pi_n f &= (\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_1) \Delta_{\otimes}^{(n-1)} f \\ &= \sum (\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_1 f \otimes \dots \otimes \pi_1) \Delta_{\otimes}^{(n-1)}. \end{aligned}$$

para qualquer $n \geq 1$. Concluimos que qualquer coderivação f é determinada pela sua projeção $\pi_1 f$. \square

Prova da proposição 1.26. $\phi(f)$ é, por definição, $\phi(f) := \sum \hat{f}_n \in \text{Coder}(T^cV)$. Pela Definição (1.7), $\pi_1 \hat{f}_n = f_n$. Portanto $\pi_1 \phi(f) = f$. Segue-se que ϕ é injetora.

Dada uma coderivação qualquer $g \in \text{Coder}(T^cV)$, temos $\pi_1 g \in \text{Hom}(T^cV, V)$. Conforme vimos acima $\pi_1 \phi(\pi_1 g) = \pi_1 g$, mas como as coderivações dependem apenas de π_1 , segue-se que $\phi(\pi_1 g) = g$. Portanto ϕ é sobrejetora. \square

Definição de álgebras A_∞ em termos de coderivações

Para qualquer espaço vetorial graduado V , seja $\uparrow V$ a suspensão de V , isto é, o espaço vetorial graduado definido por $(\uparrow V)^{r+1} = V^r$, ou seja., $|\uparrow v| = |v| + 1$ para todo elemento homogêneo $v \in V$.

Em termos de coderivações, uma estrutura de álgebra A_∞ num espaço vetorial V é equivalente a uma coderivação de grau um $D \in \text{Coder}^1(T^c(\uparrow V))$, onde o grau de D é induzido pela graduação de V , tal que $D^2 = 0$. De fato, para qualquer coderivação D , D^2 também é uma coderivação e portanto é determinada pela projeção $\pi_1 D^2 : T^c(\uparrow V) \rightarrow (\uparrow V)$. A condição $D^2 = 0$ é portanto equivalente a $\pi_1 D^2 = 0$. Pode-se ver que esta última igualdade é equivalente a definição de álgebra A_∞ vista anteriormente, ver [25].

1.2.2 Coderivações na Coálgebra Simétrica

Faremos aqui, para a coálgebra simétrica $S^c(V)$, um estudo de coderivações análogo ao feito na seção anterior para $T^c(V)$. Antes de introduzirmos a coálgebra simétrica, algumas definições são necessárias.

Definição 1.28. $S^c(V)$ é definido como o espaço vetorial quociente $T^c(V)/I$ onde I é o ideal gerado por $x \otimes y - (-1)^{|x||y|} y \otimes x$ para todos elementos homogêneos x, y de V

$$I = \langle x \otimes y - (-1)^{|x||y|} y \otimes x : \forall x, y \in V \rangle$$

A palavra ideal é empregada aqui em relação à estrutura de álgebra associativa em $T^c V$ dada pelo produto tensorial. Uma classe $[v_1 \otimes \cdots \otimes v_n] \in S^c(V)$ será denotada por $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$.

Observação 1.29. Usualmente em álgebra multilinear o símbolo de cunha \wedge é usado para denotar o produto antisimétrico, ou de Grassmann, o qual satisfaz $x \wedge y = -(-1)^{|x||y|} y \wedge x$. Neste trabalho no entanto, \wedge será usado para denotar o produto simétrico graduado, o qual satisfaz

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = (-1)^{\epsilon(\sigma)} v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(k)}$$

onde $(-1)^{\epsilon(\sigma)}$ é o sinal de Koszul da permutação σ introduzido na Definição 1.1.

Definição 1.30 (Coálgebra Simétrica). Para qualquer espaço vetorial graduado V , a coálgebra simétrica gerada por V é definida como a tripla $(S^c(V) = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\wedge n}, \Delta_\wedge, \pi_0)$, onde $\pi_0 : \bigoplus_{n \geq 0} V^{\wedge n} \rightarrow \mathbb{K}$ é a projeção canônica e o coproduto $\Delta_\wedge : S^c(V) \rightarrow S^c(V) \otimes S^c(V)$ é definido por

$$\Delta_\wedge(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \sum_{0 \leq i \leq n} \sum_{\sigma \in S_{i, n-i}} (-1)^{\epsilon(\sigma)} (v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(i)}) \otimes (v_{\sigma(i+1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(n)}). \quad (1.10)$$

onde $\Sigma_{i, n-i}$ denota o conjunto dos $(i, n-i)$ -desembaralhamentos, ver Definição 1.9.

Seja $\chi : S^c V \rightarrow T^c V$ a aplicação de coálgebra definida por:

$$\chi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}. \quad (1.11)$$

É fácil ver que χ é um morfismo injetor de coálgebras (ver Kassel [17]). Segue-se que, $\chi^{-1} : \chi[S^c V] \rightarrow S^c V$ também é um morfismo de coálgebras. O próximo lema estabelece que a projeção canônica $p_n : S^c V \rightarrow V^{\wedge n}$ na coálgebra simétrica também pode ser determinada pelo coproduto iterado.

Lema 1.31. A projeção canônica p_n é expressa em termos do coproduto Δ_\wedge como: $p_n = \chi^{-1}(p_1 \otimes \cdots \otimes p_1) \Delta_\wedge^{(n-1)}$.

Demonstração. Relembrando que na coálgebra tensorial temos

$$\pi_n = (\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_1) \Delta_\otimes^{(n-1)},$$

observamos que $p_n = \chi^{-1} \pi_n \chi$. De fato, para qualquer $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \in S^c(V)$, temos

$$\begin{aligned} \chi^{-1} \pi_n \chi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) &= \chi^{-1} \pi_n \left(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} \right) \\ &= \chi^{-1} \left(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} \right) \\ &= v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \end{aligned}$$

e $\chi^{-1}\pi_n\chi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = 0$ para $k \neq n$. Como χ é uma aplicação de cóalgebra, $\Delta_{\otimes}^{(n-1)} \circ \chi = \chi^{\otimes n} \circ \Delta_{\wedge}^{(n-1)}$, então temos:

$$\begin{aligned} p_n &= \chi^{-1}(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_1) \Delta_{\otimes}^{(n-1)} \chi \\ &= \chi^{-1}(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_1) \chi^{\otimes n} \Delta_{\wedge}^{(n-1)} \\ &= \chi^{-1}(p_1 \otimes \cdots \otimes p_1) \Delta_{\wedge}^{(n-1)} \quad \text{pois } \pi_1 \chi = p_1. \quad \square \end{aligned}$$

Usando exatamente a mesma demonstração do caso da cóalgebra tensorial, o próximo lema afirma que toda coderivação em $\text{Coder}(S^c(V))$ é determinada pela sua projeção $p_1 f$.

Lema 1.32. *Dadas duas coderivações $f, g \in \text{Coder}(S^c(V))$. Se $p_1 f = p_1 g$, então $f = g$.*

Definição 1.33. *Dada uma aplicação linear $f : V^{\wedge n} \rightarrow V$, podemos levantá-la como uma coderivação da seguinte maneira: $\hat{f} : S^c V \rightarrow S^c V$ é definida por:*

$$\hat{f}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = 0 \text{ para } k < n \text{ e}$$

$$\hat{f}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \sum_{\sigma \in S_{n, k-n}} (-1)^{\epsilon(\sigma)} f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) \wedge v_{\sigma(n+1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(k)} \quad (1.12)$$

para $k \geq n$.

Lema 1.34. *Para qualquer espaço vetorial graduado e qualquer aplicação multilinear simétrica graduada $f : V^{\wedge k} \rightarrow V$. O levantamento \hat{f} , definido acima, é uma coderivação.*

Demonstração. Dada a aplicação $f : V^{\wedge k} \rightarrow V$, a qual pode ser vista como uma aplicação simétrica graduada $f : V^{\otimes k} \rightarrow V$, definimos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} V^{\otimes k} &\xrightarrow{sf} V \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_k &\mapsto \frac{1}{k!} f(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k), \end{aligned}$$

vale lembrar que estamos trabalhando sobre um corpo de característica zero. Seja $\phi(sf) : T^c V \rightarrow T^c V$ o levantamento como coderivação na cóalgebra tensorial dado pela fórmula 1.9.

Agora observamos que a imagem de $\phi(sf) \circ \chi$, está contida na imagem de χ , isto é $(\phi(sf) \circ \chi)(S^cV) \subseteq \chi(S^cV)$. De fato,

$$\begin{aligned} \phi(sf) \circ \chi(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) &= \phi(sf) \left(\sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)} \right) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{\sigma \in S_n} \pm (x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(i)} \otimes sf(x_{\sigma(i+1)}, \dots, x_{\sigma(i+k)}) \otimes x_{\sigma(i+k+1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}) \end{aligned} \quad (1.13)$$

onde o sinal na expressão acima é dado por: $(-1)^{\epsilon(\sigma)}(-1)^{(x_{\sigma(1)} + \cdots + x_{\sigma(i)})|f|}$.

Tomamos agora a aplicação $\widehat{sf \circ \chi} : S^c(V) \rightarrow S^c(V)$ dada por

$$\widehat{sf \circ \chi}(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) = \sum_{\sigma \in S_{k, n-k}} (-1)^{\epsilon(\sigma)} sf \circ \chi(x_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma(k)} \wedge x_{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma(n)}).$$

Aplicando-se χ à esta expressão pode-se ver que: $\chi \circ (\widehat{sf \circ \chi}) = \phi(sf) \circ \chi$.

Em outras palavras, o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S^cV & \xrightarrow{\chi} & T^cV \\ \widehat{sf \circ \chi} \uparrow & \phi(sf) \uparrow & \searrow \pi_1 \\ S^cV & \xrightarrow{\chi} & T^cV \xrightarrow{sf} V \end{array} \quad \text{é comutativo.} \quad (1.14)$$

Portanto, $\chi^{-1} \circ \phi(sf) \circ \chi = \widehat{sf \circ \chi}$. Pelo Lema 1.18, sabemos que $\chi^{-1} \circ \phi(sf) \circ \chi$ é uma coderivação em $S^c(V)$, portanto $\widehat{sf \circ \chi}$ é uma coderivação. Mas pela definição de sf , é imediato que $sf \circ \chi = f$. Portanto \hat{f} é uma coderivação. \square

Com a mesma prova dada no caso da coálgebra tensorial, temos a seguinte

Proposição 1.35. *O levantamento como coderivação*

$$\begin{aligned} \text{Hom}(S^cV, V) &\longrightarrow \text{Coder}(S^cV) \\ \sum f_n &\longmapsto \sum \hat{f}_n \end{aligned}$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Definição de álgebras L_∞ em termos de coderivações

Usaremos também a suspensão $\uparrow V$ de um espaço vetorial graduado V para definir álgebras L_∞ em termos de coderivações. Uma estrutura de álgebra L_∞ num espaço vetorial V é equivalente a uma coderivação de grau um $D \in \text{Coder}^1(S^c(\uparrow V))$, com o grau de D induzido pela graduação de V , tal que $D^2 = 0$. Como D^2 também é uma coderivação, $D^2 = 0$ se, e somente se, $p_1 D^2 = 0$. Esta última igualdade é equivalente à sequência de igualdades dadas na definição de álgebra L_∞ , ver [25].

A relação usual entre álgebras associativas e álgebras de Lie estende-se naturalmente para o contexto de álgebras homotópicas através do seguinte teorema

Teorema 1.36 (Lada [21]). *Seja χ o morfismo de coálgebras definido pela fórmula 1.11. Suponhamos que $\{m_n\} : T^c V \rightarrow V$ é uma estrutura A_∞ em V . Então $\{m_n \circ \chi\}$ é uma estrutura L_∞ em V .*

Demonstração. Uma estrutura A_∞ em V é uma seqüência $\{m_n\}_{n \geq 1}$ de aplicações lineares de grau 1, $m_n : V^{\otimes n} \rightarrow V$, tais que depois de levantadas como coderivações $D = \sum \hat{m}_n : T^c V \rightarrow T^c V$, definem um diferencial: $D^2 = 0$. Uma estrutura L_∞ é definida da mesma forma através de aplicações $l_n : V^n \rightarrow V$ tais que $D' = \sum \hat{l}_n : S^c V \rightarrow S^c V$ satisfaz $(D')^2 = 0$.

Agora consideremos a coderivação $D' : S^c V \rightarrow S^c V$ definida por $D' = \sum_n \widehat{m_n} \circ \chi$. Pelo lema 1.34 sabemos que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 S^c V & \xrightarrow{\chi} & T^c V \\
 D' \uparrow & & D \uparrow \\
 S^c V & \xrightarrow{\chi} & T^c V \\
 D' \uparrow & & D \uparrow \\
 S^c V & \xrightarrow{\chi} & T^c V.
 \end{array} \tag{1.15}$$

Como $D^2 = 0$ e χ é injetora, concluímos que $(D')^2 = 0$. □

No restante deste capítulo mostraremos que versões análogas dos resultados mostrados acima também são válidos para as OCHAs. O papel crucial é desempenhado por um morfismo de coálgebras $\Xi : S^c U \otimes T^c V \rightarrow T^c(U \oplus V)$ cuja fórmula (1.21) envolve o *produto baralhamento* definido pela fórmula (1.19).

1.3 Definição de OCHA via coderivações

Nesta seção lembraremos a definição de OCHA através de coálgebras dada em [14]. Como usual na teoria de Álgebras Homotópicas [25], “open-closed homotopy algebras” podem ser descritas como uma coderivação diferencial numa coálgebra apropriada. No caso das OCHAs, a coálgebra é $S^c\mathcal{H}_c \otimes T^c\mathcal{H}_o$. Onde \mathcal{H}_c e \mathcal{H}_o são respectivamente o espaço de estados da teoria de campo de corda para cordas fechadas e abertas. Como o objetivo desta tese é estudar os aspectos puramente matemáticos daquelas álgebras, trabalharemos com espaços vetoriais graduados em geral.

Sejam U e V espaços vetoriais \mathbb{Z} -graduados. Vamos primeiramente lembrar a definição do coproduto Δ em $S^cU \otimes T^cV$:

$$\begin{aligned} & \Delta((u_1 \wedge \cdots \wedge u_m) \otimes (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)) = \\ & = \sum_{\substack{0 \leq p \leq m \\ 0 \leq q \leq n}} \sum_{\sigma \in S_{p,m-p}} (-1)^{\epsilon(\sigma)} (-1)^{\eta(p,q)} ((u_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge u_{\sigma(p)}) \otimes (v_1 \otimes \cdots \otimes v_q)) \otimes \\ & \quad \otimes ((u_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge u_{\sigma(m)}) \otimes (v_{q+1} \otimes \cdots \otimes v_n)), \quad (1.16) \end{aligned}$$

onde : $\eta(p, q) = (|u_{\sigma(p+1)}| + \cdots + |u_{\sigma(m)}|)(|v_1| + \cdots + |v_q|)$.

Definição 1.37. *Dada uma aplicação $f : U^{\wedge p} \otimes V^{\otimes q} \rightarrow V$, seu levantamento como coderivação é definido da seguinte maneira: para $r \geq p, s \geq q$ definimos:*

$$\begin{aligned} & \hat{f}((u_1 \wedge \cdots \wedge u_r) \otimes (v_1 \otimes \cdots \otimes v_s)) = \\ & = \sum_{\substack{\sigma \in S_{r-p,p} \\ 0 \leq j \leq s-q}} (-1)^{\mu_{r-p,j}(\sigma)} (u_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge u_{\sigma(r-p)}) \otimes (v_1 \otimes \cdots \otimes v_j) \otimes \\ & \quad \otimes f(u_{\sigma(r-p+1)}, \dots, u_{\sigma(r)}, v_{j+1}, \dots, v_{j+q}) \otimes \cdots \otimes v_s) \quad (1.17) \end{aligned}$$

onde: $\mu_{p,q}(\sigma) = \epsilon(\sigma) + (|u_{\sigma(1)}| + \cdots + |u_{\sigma(p)}|) + (|v_1| + \cdots + |v_q|) +$
 $+ (|v_1| + \cdots + |v_q|)(|u_{\sigma(q+1)}| + \cdots + |u_{\sigma(n)}|),$

Observação 1.38. *O fato de que a aplicação $\hat{f} : S^c(V) \otimes T^c(U) \rightarrow S^c(V) \otimes T^c(U)$ assim definida é de fato uma coderivação será provado, de modo análogo ao caso da coálgebra simétrica, na próxima seção após introduzirmos o morfismo de coálgebras $\Xi : S^c(V) \otimes T^c(U) \rightarrow T^c(V \oplus U)$. Ver Proposição 1.42.*

Já vimos que qualquer aplicação $g : U^{\wedge p} \rightarrow U$ pode ser levantada como uma coderivação $\bar{g} : S^c U \rightarrow S^c U$, usando-se a fórmula (1.12).

Definição 1.39. *Uma aplicação $g : U^{\wedge p} \rightarrow U$ pode ser levantada como uma coderivação \hat{g} de $S^c U \otimes T^c V$ definida como $\hat{g} = \bar{g} \otimes 1$, onde 1 denota a identidade em $T^c V$. Mais explicitamente, temos $\hat{g} : S^c U \otimes T^c V \rightarrow S^c U \otimes T^c V$*

$$\begin{aligned} & \hat{g}((u_1 \wedge \cdots \wedge u_n) \otimes (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p)) = \\ & = \sum_{\sigma \in S_{p, n-p}} (-1)^{\epsilon(\sigma)} (g(u_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge u_{\sigma(p)}) \wedge u_{\sigma(p+1)} \wedge \cdots \wedge u_{\sigma(n)}) \otimes (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Pelo Lema 1.20, sabemos que $\hat{g} : S^c U \otimes T^c V \rightarrow S^c U \otimes T^c V$ é uma coderivação.

Concluimos que, dadas duas aplicações $f : U^{\wedge p} \otimes V^{\otimes q} \rightarrow V$ e $g : U^{\wedge n} \rightarrow U$, podemos levantá-las como uma coderivação $\hat{f} + \hat{g} \in \text{Coder}(S^c U \otimes T^c V)$. Conforme descrito em [14] uma OCHA é uma soma de espaços vetoriais graduados $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c \oplus \mathcal{H}_o$ munidos de duas famílias de aplicações multilineares de grau 1, $\mathfrak{l} = \{l_p : \mathcal{H}_c^{\wedge p} \rightarrow \mathcal{H}_c\}_{p>0}$ e $\mathfrak{n} = \{n_{p,q} : \mathcal{H}_c^{\wedge p} \otimes \mathcal{H}_o^{\otimes q} \rightarrow \mathcal{H}_o\}_{p,q \geq 0, p+q>0}$, tais que, levantando-se aquelas aplicações para coderivações, tal como definidas nas fórmulas 1.17 e 1.18, $\mathfrak{l}_n \in \text{Coder}(S^c \mathcal{H}_c \otimes T^c \mathcal{H}_o)$ e $\mathfrak{n}_{p,q} \in \text{Coder}(S^c \mathcal{H}_c \otimes T^c \mathcal{H}_o)$, temos $\mathfrak{l} = \sum_n \mathfrak{l}_n$ e $\mathfrak{n} = \sum_{p,q} \mathfrak{n}_{p,q}$, satisfazendo $(\mathfrak{l} + \mathfrak{n})^2 = 0$.

Na próxima seção mostraremos que qualquer $\phi \in \text{Coder}(S^c U \otimes T^c V)$ pode ser escrita como $\phi = \sum_n \mathfrak{g}_n + \sum_{p,q} \mathfrak{f}_{p,q}$, onde \mathfrak{g}_n e $\mathfrak{f}_{p,q}$ são coderivações obtidas levantando-se aplicações multilineares $g_n : U^{\wedge n} \rightarrow U$ e $f_{p,q} : U^{\wedge p} \otimes V^{\otimes q} \rightarrow V$. Em vista deste fato, podemos simplesmente dizer que uma estrutura de OCHA em $U \oplus V$ é dada por uma coderivação diferencial de grau um na coálgebra $S^c U \otimes T^c V$.

Isto também nos dá uma explicação puramente algébrica para as restrições nas aplicações multilineares $f : \mathcal{H}_c^{\wedge p} \otimes \mathcal{H}_o^{\otimes q} \rightarrow \mathcal{H}_c \oplus \mathcal{H}_o$ que aparecem na definição de OCHA [14]. De fato, as aplicações multilineares são *restritas* ao subespaço de $\text{Hom}(S^c \mathcal{H}_c \otimes T^c \mathcal{H}_o, \mathcal{H}_c \oplus \mathcal{H}_o)$ gerado pelas aplicações da forma $f : \mathcal{H}_c^{\wedge p} \otimes \mathcal{H}_o^{\otimes q} \rightarrow \mathcal{H}_o$ e $g : \mathcal{H}_c^{\wedge p} \rightarrow \mathcal{H}_c$. A proposição 1 diz que este subespaço é isomorfo a $\text{Coder}(S^c \mathcal{H}_c \otimes T^c \mathcal{H}_o)$ e podemos concluir que as restrições em OCHA são intrínsecas ao espaço

Coder($S^c\mathcal{H}_c \otimes T^c\mathcal{H}_o$). Foi Martin Markl quem nos sugeriu considerar as restrições em OCHA como intrínsecas nas coderivações acima.

1.4 Coderivações em $S^cU \otimes T^cV$

Nesta seção mostraremos como caracterizar todas coderivações em $S^cU \otimes T^cV$ usando um morfismo injetor de coálgebras apropriado.

Definição 1.40 (Produto Baralhamento). *Seja E um espaço vetorial \mathbb{Z} -graduado e sejam $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \in E^{\otimes n}$ e $0 \leq i \leq n$. O produto baralhamento de $a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \in E^{\otimes i}$ e $a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \in E^{\otimes n-i}$ é definido como*

$$Sh((a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) \otimes (a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n)) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_{(i, n-i)}} (-1)^{\epsilon(\sigma)} a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(n)} \quad (1.19)$$

onde $\mathfrak{A}_{(i, n-i)}$ é o conjunto de todos $(i, n-i)$ -baralhamentos, isto é, permutações $\sigma \in \Sigma_n$ com

$$\sigma^{-1}(1) < \cdots < \sigma^{-1}(i), \quad \sigma^{-1}(i+1) < \cdots < \sigma^{-1}(n).$$

É bem conhecido (ver Kassel [17]) que $Sh : T^cE \otimes T^cE \rightarrow T^cE$ é um morfismo de coálgebras.

Vamos considerar agora o espaço vetorial $U \oplus V$ junto com a inclusão natural $T^cU \rightarrow T^c(U \oplus V)$ e $T^cV \rightarrow T^c(U \oplus V)$. Tomando o produto tensorial das inclusões e compondo com Sh obtemos um morfismo injetor de coálgebra $\text{III} : T^cU \otimes T^cV \rightarrow T^c(U \oplus V)$. Consideremos $\Xi : S^cU \otimes T^cV \rightarrow T^c(U \oplus V)$ dada pela seguinte composição

$$\begin{array}{ccc} S^cU \otimes T^cV & \xrightarrow{\Xi} & T^c(U \oplus V) \\ & \searrow \chi \otimes 1 & \nearrow \text{III} \\ & T^cU \otimes T^cV & \end{array} \quad (1.20)$$

onde χ foi definido em (1.11). Vejamos a fórmula explícita para o morfismo injetor de coálgebras Ξ :

$$\Xi(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k; u_1 \wedge \cdots \wedge u_l) = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \text{III}(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}; u_1, \dots, u_l) \quad (1.21)$$

onde III, conforme vimos acima, é dado pela soma de todos os baralhamentos entre elementos de V e de U .

Lema 1.41. *Para qualquer função $f : \bigoplus_{p+q=n} U^{\wedge p} \otimes V^{\otimes q} \rightarrow V$ existe uma função $bf : (U \oplus V)^{\otimes n} \rightarrow V$ tal que $bf \circ \Xi = f$. Onde $\Xi : \bigoplus_{p+q=n} U^{\wedge p} \otimes V^{\otimes q} \rightarrow (U \oplus V)^{\otimes n}$ é visto aqui como a restrição do morfismo Ξ ao subespaço $\bigoplus_{p+q=n} U^{\wedge p} \otimes V^{\otimes q}$.*

Demonstração. Para definir bf , observamos primeiro que qualquer elemento de $(U \oplus V)^{\otimes n}$ é uma combinação linear de elementos da forma $a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(n)}$ com $a_i = u_i \in U$ para $1 \leq i \leq p$ e $a_j = v_j \in V$ para $p+1 \leq j \leq n$, onde σ é um $(p, n-p)$ -baralhamento, com p variando entre 0 e n . Denotaremos tais elementos por $\sigma(u_1, \dots, u_p; v_{p+1}, \dots, v_n)$.

A aplicação $bf : (U \oplus V)^{\otimes n} \rightarrow V$ é então definida da seguinte forma: para cada $\sigma(u_1, \dots, u_p; v_{p+1}, \dots, v_n)$,

$$bf(\sigma(u_1, \dots, u_p; v_{p+1}, \dots, v_n)) = \frac{(n-p)!}{n!} f \circ \Xi((u_1 \wedge \cdots \wedge u_p) \otimes (v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_n)). \quad \square$$

Proposição 1.42. *Dada uma aplicação $f : U^{\wedge p} \otimes V^{\otimes q} \rightarrow V$, seu levantamento $\hat{f} : S^c U \otimes T^c V \rightarrow S^c U \otimes T^c V$ dado pela fórmula (1.17) define uma coderivação.*

Demonstração. Primeiramente tomamos a aplicação $bf : (U \oplus V)^{\otimes n} \rightarrow V$ definida no lema acima e seja $\phi(bf) : T^c(U \oplus V) \rightarrow T^c(U \oplus V)$ o seu levantamento como coderivação na cólgebra tensorial.

Não é difícil ver que $\Xi \circ \hat{f} = \phi(bf) \circ \Xi$. Portanto, $\hat{f} = \Xi^{-1} \circ \phi(bf) \circ \Xi$. Como $\phi(bf)$ é uma coderivação em $T^c(U \oplus V)$, segue-se que \hat{f} é uma coderivação em $S^c U \otimes T^c V$. \square

Lema 1.43. *A projeção canônica $\theta_n : S^c U \otimes T^c V \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} U^{\wedge p} \otimes V^{\otimes q}$ é determinada pelo coproduto iterado através da fórmula*

$$\theta_n = \Xi^{-1}(\theta_1 \otimes \cdots \otimes \theta_1)\Delta^{(n-1)}.$$

Demonstração. Observamos que $\theta_n = \Xi^{-1}\pi_n\Xi$ onde $\pi_n : T^c(U \oplus V) \rightarrow (U \oplus V)^{\otimes n}$ é a projeção canônica (a verificação desta igualdade é totalmente análoga à verificação

de $p_n = \chi^{-1}\pi_n\chi$, feita no caso da cóalgebra simétrica). Em particular, $\theta_1 = \pi_1\Xi : S^cU \otimes T^cV \rightarrow U \oplus V$. Lembrando que $\pi_n = (\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_1)\Delta_{\otimes}^{(n-1)}$, temos:

$$\begin{aligned}\theta_n &= \Xi^{-1}(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_1)\Delta_{\otimes}^{(n-1)}\Xi \\ &= \Xi^{-1}(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_1)\Xi^{\otimes n}\Delta^{(n-1)} \\ &= \Xi^{-1}(\theta_1 \otimes \cdots \otimes \theta_1)\Delta^{(n-1)}\end{aligned}\tag{1.22}$$

onde Δ_{\otimes} é o coproduto em $T^c(U \oplus V)$ e Δ é definida por (1.16). \square

Dada uma coderivação qualquer $\phi \in \text{Coder}(S^cU \otimes T^cV)$, aplicando-a em (1.22):

$$\begin{aligned}\theta_n\phi &= \Xi^{-1}(\theta_1 \otimes \cdots \otimes \theta_1)\Delta^{(n-1)}\phi \\ &= \Xi^{-1}\sum(\theta_1 \otimes \cdots \otimes \theta_1\phi \otimes \cdots \otimes \theta_1)\Delta^{(n-1)},\end{aligned}\tag{1.23}$$

ϕ é portanto determinada por sua projeção $\theta_1\phi : S^cU \otimes T^cV \rightarrow U \oplus V$, $\theta_1\phi = g \oplus f$. Pode-se escrever g e f como: $g = \sum g_{p,q}$ e $f = \sum f_{p,q}$, onde $g_{p,q} : U^{\wedge p} \otimes V^{\otimes q} \rightarrow U$ e $f_{p,q} : U^{\wedge p} \otimes V^{\otimes q} \rightarrow V$, para $p, q \geq 0$.

$$\begin{aligned}\theta_n\phi &= \Xi^{-1}\sum(\theta_1 \otimes \cdots \otimes (f + g) \otimes \cdots \otimes \theta_1)\Delta^{(n-1)} \\ &= \Xi^{-1}\sum(\theta_1 \otimes \cdots \otimes (\sum g_{p,q} + \sum f_{p,q}) \otimes \cdots \otimes \theta_1)\Delta^{(n-1)},\end{aligned}$$

ϕ é portanto determinada por $g_{p,q}$ e $f_{p,q}$ através das fórmulas acima.

Por outro lado, vimos que $f_{p,q}$ e $g_{n,0}$ podem ser levantadas como coderivações pelas fórmulas (1.17) e (1.18). Conseqüentemente, como $\sum_{p,q} \hat{f}_{p,q} + \sum_n \hat{g}_n$ é uma coderivação, $\phi' = \phi - \sum_{p,q} \hat{f}_{p,q} + \sum_n \hat{g}_n$ é uma coderivação cuja projeção tem a forma:

$$\theta_1\phi' = \sum_{(p,q) \geq (0,1)} g_{p,q} \quad \text{onde } g_{p,q} : U^{\wedge p} \otimes V^{\otimes q} \rightarrow U.$$

Proposição 1.44. *Toda coderivação $\phi \in \text{Coder}(S^cU \otimes T^cV)$ pode ser escrita como $\phi = \sum_n \hat{g}_n + \sum_{p,q} \hat{f}_{p,q}$, onde \hat{g}_n e $\hat{f}_{p,q}$ são coderivações obtidas pelo levantamento, definido pelas expressões (1.17) and (1.18), das aplicações multilineares $g_n : U^{\wedge n} \rightarrow U$ e $f_{p,q} : U^{\wedge p} \otimes V^{\otimes q} \rightarrow V$.*

Corolário 1.45. *Dados dois espaços vetoriais diferenciais graduados \mathcal{H}_c e \mathcal{H}_o . Uma estrutura de OCHA em $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c \oplus \mathcal{H}_o$ é equivalente a uma coderivação diferencial de grau um*

$$D \in \text{Coder}^1(S^c\mathcal{H}_c \otimes T^c\mathcal{H}_o) : D^2 = 0.$$

Prova da Proposição 1.44. Pela discussão acima, basta mostrar que qualquer coderivação $\phi \in \text{Coder}(S^cU \otimes T^cV)$ tal que

$$\theta_1\phi = \sum_{(p,q) \geq (0,1)} g_{p,q} \quad \text{onde } g_{p,q} : U^{\wedge p} \otimes V^{\otimes q} \rightarrow U,$$

deve ser identicamente nula.

De fato, a fórmula (1.23) nos diz que

$$\Xi \theta_2 \phi = \sum_{(p,q) \geq (0,1)} (g_{p,q} \otimes \theta_1 + \theta_1 \otimes g_{p,q}) \Delta.$$

Aplicando-se $u_{[k]} \otimes v_{[l+1]} = (u_1 \wedge \cdots \wedge u_k) \otimes (v_1 \otimes \cdots \otimes v_{l+1})$ (onde $v_1 \neq v_{l+1}$) no lado direito, temos:

$$\begin{aligned} \sum_i \pm g_{k-1,l+1}(u_1 \wedge \cdots \wedge \hat{u}_i \cdots \wedge u_k \otimes v_{[l+1]}) \otimes u_i \pm u_i \otimes g_{k-1,l+1}(u_1 \wedge \cdots \wedge \hat{u}_i \cdots \wedge u_k \otimes v_{[l+1]}) \\ \pm g_{k,l}(u_{[k]} \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_l) \otimes v_{l+1} \pm v_1 \otimes g_{k,l}(u_{[k]} \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_{l+1}). \end{aligned}$$

Esta expressão deve pertencer à imagem de Ξ . Os termos envolvendo $g_{k-1,l+1}$ naturalmente pertencem a ela, pois eles são somas de comutadores de elementos de U . Os termos envolvendo $g_{k,l}$ devem então pertencer a $\text{Im}(\Xi)$ também. Mas como $v_1 \neq v_{l+1}$, tais termos não são baralhamentos e só podem pertencer a $\text{Im}(\Xi)$ se

$$g_{k,l}((u_1 \wedge \cdots \wedge u_k) \otimes (v_1 \otimes \cdots \otimes v_l)) = 0 \quad \forall u_i \in U, v_j \in V. \quad \square$$

1.5 Comutadores e baralhamentos de estruturas A_∞

Dizemos que uma aplicação $f : T^c(\mathcal{H}_c \oplus \mathcal{H}_o) \rightarrow \mathcal{H}_c \oplus \mathcal{H}_o$ é *Open-Closed restrita*, ou simplesmente *OC-restrita*, se $f = l + n$ com $l : T^c\mathcal{H}_c \rightarrow \mathcal{H}_c$ e $n : T^c(\mathcal{H}_c \oplus \mathcal{H}_o) \rightarrow \mathcal{H}_o$. É imediato ver que se duas aplicações $f, g : T^c(\mathcal{H}_c \oplus \mathcal{H}_o) \rightarrow \mathcal{H}_c \oplus \mathcal{H}_o$

são OC-restritas, então seu colchete de Gerstenhaber $[f, g]$ é também OC-restrito. O próximo teorema diz que comutadores e baralhamentos de estruturas A_∞ OC-restritas induzem estruturas de OCHA.

Teorema 1.46. *Dada uma estrutura A_∞ , $M = \{M_k\} : T^c(\mathcal{H}_c \oplus \mathcal{H}_o) \rightarrow \mathcal{H}_c \oplus \mathcal{H}_o$, a qual é OC-restrita. Então $\{M_k \circ \Xi\}$ define uma estrutura de OCHA em $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c \oplus \mathcal{H}_o$.*

Demonstração. Basta mostrar que temos um diagrama comutativo análogo ao diagrama (1.14). Como $M = \{M_k = \ell_k + n_k\}$ é OC-restrita, a composição $M \circ \Xi = \{M_k \circ \Xi\}$ nos dá duas seqüências de aplicações: $l_k = \ell_k \circ \Xi : S^k \mathcal{H}_c \rightarrow \mathcal{H}_c$ e $n_{p,q} = n_k \circ \Xi : \mathcal{H}_c^{\wedge p} \otimes \mathcal{H}_o^{\otimes q} \rightarrow \mathcal{H}_o$ com $p + q = k$. As equações (1.17) e (1.18) nos dizem como levantar estas aplicações como coderivações $l_k \in \text{Coder}(S^c \mathcal{H}_c \otimes T^c \mathcal{H}_o)$ e $n_{p,q} \in \text{Coder}(S^c \mathcal{H}_c \otimes T^c \mathcal{H}_o)$. Denotamos por $\widehat{M \circ \Xi}$ a coderivação $l + n = \sum l_k + \sum n_{p,q} \in \text{Coder}(S^c \mathcal{H}_c \otimes T^c \mathcal{H}_o)$. Como Ξ é injetora, teremos $(\widehat{M \circ \Xi})^2 = (l + n)^2 = 0$ pela comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 S^c \mathcal{H}_c \otimes T^c \mathcal{H}_o & \xrightarrow{\Xi} & T^c(\mathcal{H}_c \oplus \mathcal{H}_o) \\
 \widehat{M \circ \Xi} \uparrow & & \uparrow \hat{M} \\
 S^c \mathcal{H}_c \otimes T^c \mathcal{H}_o & \xrightarrow{\Xi} & T^c(\mathcal{H}_c \oplus \mathcal{H}_o) \xrightarrow{M} \mathcal{H}_c \oplus \mathcal{H}_o,
 \end{array} \tag{1.24}$$

$\searrow \pi_c \oplus \pi_o$

O mesmo argumento usado na prova da Proposição 1.42 prova que $\Xi \circ \widehat{M \circ \Xi} = \hat{M} \circ \Xi$, isto é, que o diagrama acima é comutativo. \square

O resultado acima é o análogo para OCHA da relação usual entre álgebras de Lie a álgebras associativas.

Capítulo 2

A Operada \mathcal{OC}_∞

No capítulo anterior vimos a definição de OCHA através de coderivações. Aqui estudaremos a Operada \mathcal{OC}_∞ tal que as OCHAs são precisamente as álgebras sobre \mathcal{OC}_∞ . Tal operada foi introduzida por Kajiwara e Stasheff em [14]. No entanto, os autores não deixaram inteiramente claro como definir o operador d , de expansão de vértices, para as árvores que definem \mathcal{OC}_∞ . Neste capítulo apresentamos uma maneira de solucionar o problema através das *árvores parcialmente planas* definidas na seção 2.2.

Este capítulo começa com um breve apanhado geral sobre operadas e termina com a definição da operada \mathcal{OC}_∞ em termos de árvores parcialmente planas e do operador de expansão de vértices d . Nos exemplos, discutimos algumas das propriedades mais peculiares das OCHAs usando o operador d .

2.1 Operadas

Definição 2.1 (Operada de Espaços Vetoriais). *Uma operada de espaços vetoriais é uma seqüência $\mathcal{O} = \{O(n)\}_{n \geq 1}$ de espaços vetoriais munida da seguinte estrutura:*

- (i) *uma ação à direita do grupo simétrico Σ_n em cada espaço vetorial $O(n)$;*

(ii) uma lei de composição

$$\gamma_{n;m_1,\dots,m_n} : O(n) \otimes O(m_1) \otimes \cdots \otimes O(m_n) \rightarrow O(m_1 + \cdots + m_n)$$

para todo $n, m_1, \dots, m_n \geq 1$;

(iii) um elemento identidade $e \in O(1)$. Satisfazendo as seguintes propriedades:

(P₁) A composição é equivariante com respeito às ações do grupo simétrico: $\Sigma_n \times \Sigma_{m_1} \times \cdots \times \Sigma_{m_n}$ age no lado esquerdo e sua ação é levada naturalmente à ação de $\Sigma_{m_1+\dots+m_n}$. Ou seja, para todo $c \in O(k)$, $d_s \in O(m_s)$, $\sigma \in \Sigma_k$ e $\tau_s \in \Sigma_{j_s}$:

$$\gamma(c\sigma; d_1, \dots, d_k) = \gamma(c; d_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, d_{\sigma^{-1}(k)}) \sigma(m_1, \dots, m_k)$$

e $\gamma(c; d_1 \tau_1, \dots, d_k \tau_k) = \gamma(c; d_1, \dots, d_k) (\tau_1 \oplus \cdots \oplus \tau_k)$ onde $\sigma(m_1, \dots, m_k)$ denota a permutação de $m = \sum_i m_i$ letras que permutam os k blocos de letras determinados pela dada partição de m da mesma forma que σ permuta k letras.

(P₂) A composição é associativa, i.e., o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} O(k) \otimes O(n_1) \otimes \cdots \otimes O(n_k) \\ \otimes O(m_{1,1}) \otimes \cdots \otimes O(m_{k,n_k}) \end{array} \right\} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \gamma^k} & O(k) \otimes O(m_1) \otimes \cdots \otimes O(m_k) \\ \downarrow \gamma_{k;n_1,\dots,n_k} \otimes \text{id} & & \downarrow \gamma \\ O(n) \otimes O(m_{1,1}) \otimes \cdots \otimes O(m_{k,n_k}) & \xrightarrow{\gamma} & O(m) \end{array}$$

onde $m_i = \sum_j m_{i,j}$, $n = \sum_i n_i$ e $m = \sum_i m_i$;

(P₃) O elemento identidade e satisfaz propriedades naturais com respeito à composição: $\gamma(e; d) = d$ e $\gamma(d; e, \dots, e) = d$ para cada $f \in O(k)$.

Uma operada de espaços topológicos ou de conjuntos pode ser definida com as mesmas sentenças substituindo-se o produto tensorial \otimes pelo produto cartesiano \times . De fato, a mesma definição acima aplica-se para qualquer categoria monoidal simétrica, basta substituir o produto \otimes acima pelo produto simétrico \odot da categoria, ver [25]. Assim, falaremos de operadas topológicas; operadas vetoriais; operadas

diferenciais graduadas (DG); operadas (...) em geral. Onde os parênteses contém o nome da categoria à qual os objetos da operada pertencem.

A melhor maneira de entender o conceito de Operada é através de exemplos. Os exemplos clássicos são a operada das aplicações multilineares e a das árvores. Após discutir estes exemplos, estudaremos outros conceitos relacionados.

Aplicações multilineares

Seja V um espaço vetorial, para cada $n \geq 1$ seja $\text{End}_V(n)$ o espaço das aplicações multilineares $\text{End}_V(n) = \text{Hom}(V^{\otimes n}, V)$. O grupo simétrico Σ_n age à esquerda em $V^{\otimes n}$ de maneira natural:

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \xrightarrow{\sigma} (-1)^{\epsilon(\sigma)} x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma^{-1}(n)}$$

e portanto induz uma ação à direita em $\text{Hom}(V^{\otimes n}, V)$. Para cada $1 \leq i \leq n$, podemos compor uma aplicação $f \in \text{Hom}(V^{\otimes n}, V)$ com outra $g \in \text{Hom}(V^{\otimes m}, V)$ obtendo $f \circ_i g \in \text{Hom}(V^{\otimes n+m-1}, V)$ dada por:

$$f \circ_i g(x_1, \dots, x_{m+n-1}) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, g(x_i, \dots, x_{i+m-1}), x_{i+m}, \dots, x_{m+n-1}).$$

As composições do tipo \circ_i satisfazem naturalmente propriedades de associatividade e equivariância em relação à ação à direita de Σ_n . De fato, para inteiros i, j, r, s apropriados e aplicações multilineares f, g, h , temos

$$(f \circ_i g) \circ_j h = f \circ_r (g \circ_s h).$$

A operação $\circ_i : \text{Hom}(V^{\otimes n}, V) \otimes \text{Hom}(V^{\otimes m}, V) \rightarrow \text{Hom}(V^{\otimes m+n-1}, V)$ é equivariante em relação à ação do grupo $\Sigma_n \times \Sigma_m$ em $\text{Hom}(V^{\otimes n}, V) \otimes \text{Hom}(V^{\otimes m}, V)$ e do grupo Σ_{m+n-1} em $\text{Hom}(V^{\otimes m+n-1}, V)$.

Árvores

Uma árvore é um grafo finito conexo e contrátil. Vamos modificar um pouco a convenção usual e “apagar” os vértices que têm apenas uma aresta adjacente. Conseqüentemente, algumas arestas terão apenas um vértice adjacente e serão chamadas de

arestas externas ou *pernas*. Arestas que têm dois vértices adjacentes serão chamadas *arestas internas*.

Assumimos que todas as árvores têm ao menos uma aresta. A árvore com apenas uma aresta e nenhum vértice é chamada de *árvore trivial*. Uma árvore sem arestas internas será chamada de *corola*.

Uma *árvore com raiz* é uma árvore com uma aresta externa distinguida chamada *raiz*. As outras arestas externas remanescentes numa árvore com raiz serão chamadas *folhas*. Uma vez que sua raiz está fixa, uma árvore com raiz tem uma orientação natural na qual toda aresta está orientada em direção ao vértice mais próximo da raiz.

Salvo menção explícita em contrário, daqui em diante a expressão *árvore* sempre significará árvore com raiz e orientada. Uma árvore n -rotulada é um par (T, ℓ) onde T é uma árvore e $\ell : \text{Fol}(T) \rightarrow [n]$ é uma bijeção, onde $\text{Fol}(T)$ é o conjunto das folhas de T e $[n] = \{1, \dots, n\}$. O grupo das permutações Σ_n age à direita nas árvores n -rotuladas: para cada bijeção $\sigma : [n] \rightarrow [n]$ definimos $\sigma(T, \ell) := (T, \sigma^{-1} \circ \ell)$.

Um isomorfismo entre árvores é uma função contínua $\phi : T_1 \rightarrow T_2$ que induz uma bijeção no conjunto de vértices e tal que, se (v, v') é a aresta de T_1 determinada pelos vértices v e v' , então $(\phi(v), \phi(v'))$ é uma aresta em T_2 . Assumimos que todo isomorfismo preserva as raízes das árvores. Se (T_1, ℓ_1) é uma árvore n -rotulada, o isomorfismo $\phi : T_1 \rightarrow T_2$ induz um rótulo natural $\phi(\ell_1)$ em T_2 . Dizemos que duas árvores n -rotuladas (T_1, ℓ_1) e (T_2, ℓ_2) são isomorfas se existe um isomorfismo $\phi : T_1 \rightarrow T_2$ tal que $\phi(\ell_1) = \ell_2$. A classe de isomorfismo de uma árvore n -rotulada será denotada por $[T, \ell]$.

Para cada inteiro $n \geq 1$, temos um conjunto $\text{Tree}(n)$ das classes de isomorfismo de árvores n -rotuladas (ou n -árvores). Conforme vimos acima, o grupo Σ_n age em $\text{Tree}(n)$. Agora vamos definir uma composição entre árvores tal que, dada uma n -árvore e uma m -árvore, obtemos uma $(m + n - 1)$ -árvore.

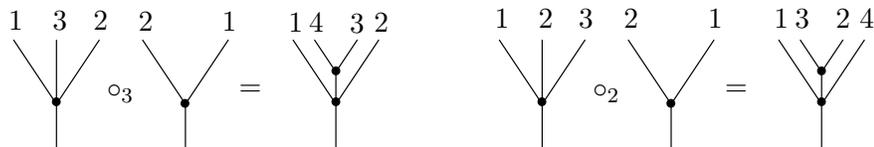
Definição 2.2 (Composição de Árvores). *Dada uma n -árvore (T, ℓ) e uma m -árvore (S, λ) e um inteiro $1 \leq i \leq n$, existe uma árvore denotada $T \circ_i S$ chamada a composição de S com T na folha i de T . Tal árvore é obtida identificando-se a raiz*

de S com a folha i de T . A nova árvore obtida tem $n + m - 1$ folhas e seu rótulo denotado por $\ell \circ_i \lambda$ é definido da seguinte forma:

- (i) uma folha vinda de T com rótulo j , tal que $1 \leq j \leq i - 1$, recebe o mesmo rótulo na nova árvore
- (ii) uma folha vinda de S rotulada por j , recebe o rótulo $j + i - 1$ e
- (iii) uma folha vinda de T cujo rótulo é j e $i + 1 \leq j \leq n$, recebe o novo rótulo $j + m - 1$.

As figuras a seguir ilustram a regra descrita acima.

Exemplo 2.3.



Observação 2.4. A composição acima é bem definida em relação ao isomorfismo de árvores rotuladas. Portanto, para cada $1 \leq i \leq n$, temos uma operação $\circ_i : \text{Tree}(n) \times \text{Tree}(m) \rightarrow \text{Tree}(m + n - 1)$.

Associatividade: A composição de árvores satisfaz a propriedade natural de associatividade: dadas três árvores rotuladas T_1, T_2, T_3 , compor as duas primeiras e depois compor a árvore assim obtida com T_3 em nada difere de compor as duas últimas (nas mesmas folhas) e depois compor T_1 com a árvore obtida através das folhas correspondentes. Desde que usemos as mesmas folhas nos dois casos, as árvores obtidas serão idênticas.

Equivariância: A operação $\circ_i : \text{Tree}(n) \times \text{Tree}(m) \rightarrow \text{Tree}(m + n - 1)$ é equivariante, num certo sentido natural, em relação à ação do grupo $\Sigma_m \times \Sigma_n$ em $\text{Tree}(n) \times \text{Tree}(m)$ e Σ_{m+n-1} em $\text{Tree}(m + n - 1)$.

2.1.1 Representações de Operadas

O conceito de operada de espaços vetoriais é uma generalização do conceito de álgebra associativa. Assim como no caso das álgebras, pode-se definir morfismos, represen-

tações, módulos e ideais no contexto de operadas, os quais apresentaremos a seguir. Para as definições dos conceitos de operada livre e apresentação, ver [25].

Definição 2.5. *Um morfismo entre operadas $\psi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$ é uma seqüência de aplicações Σ_j -equivariantes $\psi_j : \mathcal{O}(j) \rightarrow \mathcal{O}'(j)$ tais que $\psi_1(1) = 1$ e o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(j_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}(j_k) & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{O}(j) \\ \psi_k \otimes \psi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \psi_{j_k} \downarrow & & \psi_j \downarrow \\ \mathcal{O}'(k) \otimes \mathcal{O}'(j_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}'(j_k) & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{O}'(j), \end{array}$$

onde $j = \sum_k j_k$.

Definição 2.6. *Uma representação de uma operada \mathcal{O} é um espaço vetorial V que admite um morfismo de operadas $\mathcal{O} \rightarrow \text{End}(V)$, onde $\text{End}(V)$ é a operada dos endomorfismos definida no início deste capítulo.*

Representações de operadas são também freqüentemente chamadas de *álgebras sobre uma operada*. De fato, o morfismo acima implica em particular que para cada elemento $d_n \in \mathcal{O}(n)$ corresponde uma aplicação multilinear $\psi(d_n) : V^{\otimes n} \rightarrow V$. V está portanto munido de uma seqüência de aplicações multilineares as quais satisfazem propriedades descritas em termos de composições de operações e ação do grupo simétrico Σ_n (tais como associatividade $m(m(x, y), z) - m(x, m(y, z)) = 0$ e identidade de Jacobi $l(l(x, y), z) + l(l(y, z), x) + l(l(z, x), y) = 0$). Tais propriedades refletem a estrutura da operada.

Observação 2.7. *Conforme mencionado anteriormente, o conceito de álgebra sobre uma operada, definido acima para espaços vetoriais, pode naturalmente ser definido para qualquer categoria monoidal simétrica. Em particular pode ser definida para operadas de espaços topológicos substituindo-se o produto tensorial pelo produto cartesiano.*

Definição 2.8. *Um módulo à esquerda sobre uma operada \mathcal{P} é uma família de espaços vetoriais $M = \{M(n)\}_{n \geq 1}$ tal que Σ_n age à direita em cada $M(n)$ e está munida de*

aplicações

$$\lambda_{l;\mathbf{m}} : \bigoplus_{1 \leq i \leq l} \left\{ \mathcal{P}(l) \otimes \mathcal{P}(m_1) \otimes \cdots \otimes M(m_i) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(m_l) \right\} \rightarrow M(m_1 + \cdots + m_l)$$

para quaisquer $l \geq 1$ e $m_1, \dots, m_l \geq 1$, satisfazendo as propriedades usuais de módulo sobre uma álgebra traduzidas no contexto de operadas.

Similarmente, um *módulo à direita* sobre uma operada \mathcal{P} é uma família $M = \{M(n)\}_{n \geq 1}$ tal que Σ_n age à direita em cada $M(n)$ munida de aplicações

$$\rho_{l;\mathbf{m}} : \bigoplus_{1 \leq i \leq l} \left\{ M(l) \otimes \mathcal{P}(m_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(m_l) \right\} \rightarrow M(m_1 + \cdots + m_l),$$

satisfazendo as correspondentes identidades para módulo à direita traduzidas no contexto de operadas.

Definição 2.9. *Um ideal I numa operada \mathcal{P} é uma família $I = \{I(n)\}_{n \geq 1}$ de subespaços $I(n) \subseteq \mathcal{P}(n)$ invariantes pela ação à direita de Σ_n em $\mathcal{P}(n)$ e tais que I é um módulo à esquerda e à direita sobre \mathcal{P} . Denotaremos tal relação por $I \leq \mathcal{P}$.*

2.1.2 Operadas coloridas

Existe uma generalização natural do conceito de operada. Trata-se das Operadas Coloridas. Exemplos de tais operadas, entre outros, são a *operada do queijo suíço* \mathcal{SC} [41] e a operada \mathcal{OC}_∞ (ver seção 2.2.1) que descreve as OCHAs. A importância deste conceito neste trabalho é portanto crucial. Outros exemplos estão no trabalho recente de Berger e Moerdijk [2]

O exemplo canônico de operada é a dos endomorfismos $\{\text{Hom}(X^{\otimes n}, X)\}_{n \geq 1}$, discutida no início deste capítulo. A extensão natural da definição da operada dos endomorfismos para uma operada colorida é feita da seguinte forma. Seja C um conjunto (os elementos de C serão chamados de *cores*), e $\{X_c\}_{c \in C}$ uma família de espaços vetoriais indexada por C . Para cada $n + 1$ -upla $(c_1, \dots, c_n; c)$ de cores, associamos o espaço vetorial das aplicações multilineares:

$$(c_1, \dots, c_n; c) \mapsto \text{Hom}(X_{c_1} \otimes \cdots \otimes X_{c_n}, X_c),$$

a aplicação estrutural desta operada é novamente dada pela composição de aplicações lineares, com a única observação de que a composição deve respeitar a compatibilidade das cores, conforme descrito na definição abaixo. Esta aplicação estrutural satisfaz as propriedades de associatividade, equivariância e elemento identidade dadas na definição a seguir.

Definição 2.10 (Operada C -colorida). *Seja C um conjunto (seus elementos serão chamados de cores). Uma operada C -colorida P é definida pela seguinte estrutura:*

(i) *para cada $n \geq 0$, e cada $(n+1)$ -upla $(c_1, \dots, c_n; c)$ de cores, temos um \mathbb{K} -espaço vetorial:*

$$P(c_1, \dots, c_n; c);$$

(ii) *para cada cor c , um elemento identidade $1_c : \mathbb{K} \rightarrow P(c; c)$;*

(iii) *para cada $(n+1)$ -upla $(c_1, \dots, c_n; c)$ de cores e outras n k_j -uplas de cores*

$$(d_{1,1}, \dots, d_{1,k_1}), \dots, (d_{n,1}, \dots, d_{n,k_n})$$

temos uma aplicação estrutural:

$$\begin{aligned} &P(c_1, \dots, c_n; c) \otimes P(d_{1,1}, \dots, d_{1,k_1}; c_1) \otimes \cdots \otimes P(d_{n,1}, \dots, d_{n,k_n}; c_n) \\ &\xrightarrow{\gamma} P(d_{1,1}, \dots, d_{n,k_n}; c); \end{aligned}$$

(iv) *para cada $\sigma \in \Sigma_n$, uma aplicação $\sigma^* : P(c_1, \dots, c_n; c) \rightarrow P(c_{\sigma(1)}, \dots, c_{\sigma(n)}; c)$.*

Os quatro objetos dados acima, devem satisfazer certos axiomas análogos aos da definição 2.1: as aplicações em (iv) definem uma ação à direita do grupo Σ_n no sentido de que $\sigma^ \tau^* = (\tau \sigma)^*$ para qualquer $\tau, \sigma \in \Sigma_n$; cada elemento 1_c é uma identidade à esquerda e à direita para a aplicação estrutural γ ; e finalmente esta aplicação satisfaz propriedades de associatividade e Σ_n -equivariância no sentido natural análogo à definição 2.1.*

O conceito de álgebras sobre uma operada C -colorida pode ser definido de forma análoga à definição acima para operadas.

Definição 2.11 (*P-álgebras*). Para uma operada C -colorida P , uma P -álgebra é uma família $A = \{A(c)\}_{c \in C}$ de espaços vetoriais que admite aplicações

$$\alpha_{c_1, \dots, c_n; c} : P(c_1, \dots, c_n; c) \otimes A(c_1) \otimes \cdots \otimes A(c_n) \rightarrow A(c)$$

satisfazendo axiomas de associatividade, identidade e equivariância análogos aos discutidos acima.

Por exemplo, para cada $\sigma \in \Sigma_n$, o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} P(c_1, \dots, c_n; c) \otimes A(c_1) \otimes \cdots \otimes A(c_n) & \rightarrow & A(c) \xrightarrow{\alpha_{c_1, \dots, c_n; c}} A(c) \\ & \sigma_* \otimes \sigma_*^{-1} \downarrow & \nearrow \alpha_{c_{\sigma(1)}, \dots, c_{\sigma(n)}; c} \\ P(c_{\sigma(1)}, \dots, c_{\sigma(n)}; c) \otimes A(c_{\sigma(1)}) \otimes \cdots \otimes A(c_{\sigma(n)}) & & \end{array}$$

é comutativo, onde σ_* denota a ação à esquerda nos produtos tensoriais induzida por σ .

Exemplos de Operadas coloridas

(1) **Queijo Suíço:** A operada do queijo suíço introduzida por Voronov [41] é um exemplo de operada 2-colorida. Nesse caso o conjunto binário de cores é $C = \{d, s\}$ correspondendo às cores (d)isco e (s)emi-círculo. Por definição temos:

$$P(\underbrace{d, \dots, d}_n, \underbrace{c, \dots, c}_{m>0}; d) = \emptyset, \quad P(\underbrace{d, \dots, d}_n; d) = D(n)$$

onde $D(n)$ é a bem conhecida operada dos discos pequenos [27] e

$$P(\underbrace{d, \dots, d}_n, \underbrace{c, \dots, c}_m; s) = SC(m, n)$$

onde $SC(m, n)$ é a variedade diferenciável, descrita em [41] (ver também Kontsevich [19]), do espaço de configurações dos discos disjuntos rotulados de 1 até m e semidiscos superiores disjuntos rotulados de 1 até n . Todos dentro do semi-disco superior padrão (de raio 1 no plano). O grupo σ_k age naturalmente permutando os rótulos; a aplicação estrutural é definida colando-se discos e semi-discos pelo seus bordos e posteriormente 'apagando-se' os bordos identificados (ver [41] para mais detalhes);

o elemento identidade de $P(d; d)$ é o próprio disco unitário, assim como o elemento identidade de $P(s; s)$ é o próprio semi-disco unitário.

(2) Operada no sentido usual: Seja $S = \{*\}$ um conjunto contendo apenas um elemento. Toda operada (no sentido da definição 2.1) é uma S -operada.

Outros exemplos interessantes estão em Berger-Moerdijk [2].

2.2 Árvores Parcialmente Planas e \mathcal{OC}_∞

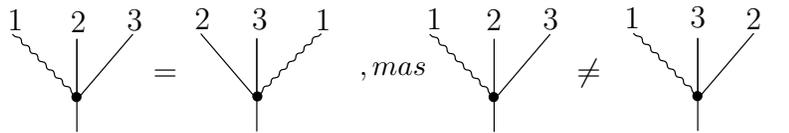
Seja T uma árvore e $f : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função contínua que induz um homeomorfismo entre T e sua imagem $f(T)$. Dizemos então que T está mergulhada no espaço euclidiano com mergulho dado por f . Em particular, $f(T)$ é também uma árvore.

Considere T mergulhada no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Vamos escolher um certo subconjunto, possivelmente vazio, $o(T) \subseteq \text{edge}(T)$ (onde $\text{edge}(T)$ é o conjunto de todas as arestas de T) tal que as arestas em $o(T)$ estão contidas no plano xy . O conjunto escolhido $o(T)$ será chamado o conjunto das arestas planas (também chamadas arestas abertas em alusão às cordas abertas, correspondendo aos pontos marcados no bordo do disco de Riemann.).

Definição 2.12. *Uma Árvore Parcialmente Plana é uma classe de isotopia de árvores T mergulhadas no espaço euclidiano com um conjunto $o(T)$ de arestas planas, considerando-se apenas isotopias f_t tais que o conjunto de arestas planas permanece no plano para qualquer $t \in [0, 1]$.*

Vamos denotar arestas planas com *linhas retas* e arestas espaciais (também chamadas fechadas em alusão às cordas fechadas, pontos marcados no interior do disco de Riemann) serão denotadas com *linhas onduladas*, como nas figuras 4.1.a) e 4.1.b) na página 64.

Exemplo. *de acordo com a definição acima:*



Árvores parcialmente planas definem uma operada 2-colorida (ver seção 2.1.2). De fato, árvores parcialmente planas são árvores com 2 tipos de arestas. A colagem de tais árvores está definida apenas quando a cor da raiz da primeira árvore coincide com a cor da folha da árvore sobre a qual ela vai ser colada. Uma vez estabelecido o tipo de árvore que será usado na descrição das OCHAs, podemos passar ao estudo específico da operada que as descreve.

2.2.1 A Operada \mathcal{OC}_∞

Antes de introduzirmos a operada \mathcal{OC}_∞ , precisamos dar algumas definições. Começaremos definindo uma *orientação externa* para árvores (diferente da orientação interna definida associando-se uma direção a cada aresta da árvore).

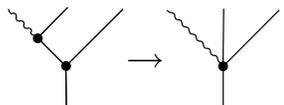
Definição 2.13 (orientação externa). *Uma orientação numa árvore T é uma orientação ξ no espaço vetorial real $\cong \mathbb{R}^{|e(T)|}$, onde $e(T)$ é o conjunto de arestas internas de T . Uma árvore orientada será denotada por (T, ξ) .*

Seja δ uma corola, isto é, uma árvore sem arestas internas. Uma orientação neste caso é simplesmente um sinal que adicionamos à árvore: (δ, \pm) . Dadas árvores orientadas $(T_1, \xi_1), (T_2, \xi_2)$ e seja $T = T_1 \circ_i T_2$ outra árvore obtida através de uma colagem que respeita a compatibilidade de cores entre raiz e folha. A orientação ξ em $T = T_1 \circ_i T_2$ é a orientação induzida pelo isomorfismo

$$\mathbb{R}^{e(T_2)} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{e(T_1)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{e(T_1 \circ_i T_2)} \cong \mathbb{R}^{|e(T_1)|+|e(T_2)|+1}$$

onde o \mathbb{R} sem expoente no lado esquerdo da expressão representa a aresta adicional criada pela colagem das árvores. Como toda árvore é obtida por colagem de um número finito de corolas, a orientação de uma árvore pode ser determinada uma vez que a orientação das corolas que a compõem estejam escolhidas.

Quando uma árvore T pode ser obtida contraindo-se uma aresta interna de T' , denotamos esta relação por $T' \rightarrow T$. por exemplo:



Definição 2.14. Se (T', ξ') é uma árvore orientada e $T' \rightarrow T$, então T' induz uma orientação ξ em T através do mergulho natural $\mathbb{R}^{e(T)} \hookrightarrow \mathbb{R}^{e(T')}$. Isto é, tomando-se $\mathbb{R}^{e(T)}$ como o bordo do semi-espaço superior de $\mathbb{R}^{e(T')}$ e definindo-se ξ como a orientação induzida no bordo.

Assim temos a seguinte relação bem definida: $(T', \xi') \rightarrow (T, \xi)$. Nas discussões a seguir todas as árvores T devem ser consideradas árvores orientadas (T, ξ) , mas elas serão denotadas por T para simplificar a notação.

Uma árvore com apenas um vértice interno é chamada uma *corola*. Qualquer árvore pode ser obtida colando-se um número finito de corolas. As figuras a seguir ilustram os dois tipos de corolas que serão usadas para gerar a operada \mathcal{OC}_∞ .

$$\begin{array}{ccc}
 l_n = & \begin{array}{c} \text{1} \quad \text{2} \quad \dots \quad \text{n} \\ \diagdown \quad \diagup \quad \dots \quad \diagdown \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \dots \quad \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \quad \dots \quad \diagup \\ \bullet \\ \text{---} \end{array} & n_{p,q} = & \begin{array}{c} \text{1} \dots \text{p} \quad \text{1} \dots \text{q} \\ \diagdown \quad \diagup \quad \dots \quad \diagdown \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \dots \quad \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \quad \dots \quad \diagup \\ \bullet \\ \text{---} \end{array} \\
 & & & \end{array} \tag{2.1}$$

Seja $\mathcal{T}(n)$ o conjunto de todas as árvores parcialmente planas orientadas T com n folhas que podem ser obtidas colando-se corolas da forma $n_{p,q}$ e l_r , para todos inteiros positivos p, q, r satisfazendo a $2p + q \geq 2$ e $r \geq 2$.

Seja $\mathcal{T}_o(p, q) \subseteq \mathcal{T}(p + q)$ o subconjunto das árvores orientadas cuja raiz é plana e tem p folhas espaciais e q folhas planas e $\mathcal{T}_c(n) \subseteq \mathcal{T}(n)$ o subconjunto das árvores orientadas com n folhas (espaciais) e tal que todas as arestas são espaciais (em particular, a raiz é espacial).

Definição 2.15. Definimos $\mathcal{N}_\infty(p, q)$ como o espaço vetorial gerado por $\mathcal{T}_o(p, q)$ e $\mathcal{L}_\infty(n)$ o espaço vetorial gerado por $\mathcal{T}_c(n)$, ambos satisfazendo à relação $T + (-T) = 0$, onde $(-T)$ denota a árvore T com orientação externa oposta.

$\mathcal{N}_\infty(p, q)$ e $\mathcal{L}_\infty(n)$ são graduados: para cada árvore T seu grau é dado por

$$|T| = \begin{cases} |e(T)| + 2 - 2p - q, & \text{se } T \in \mathcal{T}_o(p, q) \\ |e(T)| + 3 - 2n, & \text{se } T \in \mathcal{T}_c(n) \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $|e(T)|$ é o número de arestas internas de T .

O operador d de expansão de vértices

Uma vez que temos árvores e um espaço vetorial gerado por elas gerado, vamos agora introduzir neste espaço um operador diferencial natural d de grau 1.

Definição 2.16 (operador de expansão de vértices). *Definimos o operador de expansão de vértices d agindo em árvores orientadas da seguinte forma*

$$d(T, \xi) = \sum_{T' \rightarrow T} (T', \xi'),$$

estendendo-se por linearidade para o espaço vetorial gerado pelas árvores. A orientação de T' deve ser compatível com a orientação de T , tal como descrito na Definição 2.14.

Em particular, o operador d está definido nos espaços $\mathcal{N}_\infty(p, q)$ e $\mathcal{L}_\infty(n)$.

Proposição 2.17. *O operador de expansão de vértices satisfaz à regra de Leibniz em relação à composição de operadas*

$$d(T_1 \circ_i T_2) = d(T_1) \circ_i T_2 + (-1)^{v(T_1)} T_1 \circ_i d(T_2)$$

onde $v(T)$ é o número de vértices de T . O operador d também satisfaz $d^2 = 0$ e tem grau 1, ou seja, é um operador diferencial.

Demonstração. Primeiramente observamos que dar uma orientação externa a uma árvore é equivalente a definir uma ordem no seu conjunto de arestas internas. Sendo que duas ordens numa mesma árvore definem a mesma orientação se uma puder ser levada na outra através de uma permutação par.

Assim sendo, a orientação de $T_1 \circ T_2$ é definida tomando-se primeiro a orientação de T_2 seguida da aresta interna gerada pela colagem e finalizando com a orientação de T_1 . Por outro lado, se $T' \rightarrow T$, a orientação de T' é determinada pela orientação de T observando que T' contém uma aresta interna a mais e colocando-se esta aresta na última posição e mantendo-se a ordem das demais arestas dada pela orientação de T .

Feitas estas observações, a igualdade

$$d(T_1 \circ_i T_2) = d(T_1) \circ_i T_2 + (-1)^{v(T_1)} T_1 \circ_i d(T_2)$$

segue-se observando que $(-1)^{v(T_1)}$ é precisamente o sinal da permutação necessária para levar a orientação de $T_1 \circ_i d(T_2)$ na orientação de $d(T_1 \circ_i T_2)$.

Para mostrar que $d^2 = 0$, em vista da igualdade acima, basta provar que $d^2(\delta_k) = 0$ para qualquer corola δ_k . Vamos usar a seguinte notação: $\delta_k \circ \delta_l := \sum_{i=1}^k \delta_k \circ_i \delta_l$, de forma que $d\delta_l = \sum_{l'+k'=l+1} \delta_{l'} \circ \delta_{k'}$. Agora basta verificarmos que

$$\begin{aligned} d^2 \delta_l &= \sum_{l'+k'=l+1} d(\delta_{l'} \circ \delta_{k'}) = \sum_{l'+k'=l+1} (d\delta_{l'} \circ \delta_{k'} + \delta_{l'} \circ d\delta_{k'}) = \\ &= \sum_{l'+k'=l+1} \left[\left(\sum_{l''+k''=l'+1} \delta_{l''} \circ \delta_{k''} \right) \circ \delta_{k'} + \delta_{l'} \circ \left(\sum_{l''' + k''' = k'+1} \delta_{l'''} \circ \delta_{k'''} \right) \right] = \\ &= \sum_{r+s+t=l+2} \delta_r \circ \delta_s \circ \delta_t - \sum_{r+s+t=l+2} \delta_r \circ \delta_s \circ \delta_t = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Agora podemos dar a seguinte definição:

Definição 2.18 (operada \mathcal{OC}_∞ das OCHAs). *Seja $\{o, c\}$ um conjunto binário de cores. A DG-operada \mathcal{OC}_∞ é definida da seguinte forma: para cada n -upla de cores $(c, \dots, c, o, \dots, o; o)$,*

$$\mathcal{OC}_\infty(\underbrace{c, \dots, c}_p, \underbrace{o, \dots, o}_q; o) = \mathcal{N}_\infty(p, q), \quad \text{se } 2p + q \geq 2 \quad (2.3)$$

e, se $q = 1$ e $p = 0$ então $\mathcal{OC}_\infty(o; o) = \mathbb{K}$ onde \mathbb{K} é o espaço unidimensional gerado pelo elemento identidade $1_o \in \mathcal{OC}_\infty(o; o)$.

Por outro lado, para cada n -upla de cores $(c, \dots, c, o, \dots, o; c)$,

$$\mathcal{OC}_\infty(\underbrace{c, \dots, c}_p, \underbrace{o, \dots, o}_q; c) = \begin{cases} 0, & \text{se } q \neq 0 \\ \mathcal{L}_\infty(p) & \text{se } p \geq 2 \text{ e } q = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Quando $p = 1$ e $q = 0$ novamente $\mathcal{OC}_\infty(c; c) = \mathbb{K}$ é o espaço unidimensional gerado pela identidade 1_c .

\mathcal{OC}_∞ é uma DG-operada 2-colorida com aplicação estrutural dada pela aplicação linear definida na base (árvores) pela operação de colagem de árvores e diferencial dado pelo operador de expansão de vértices d .

Observação 2.19. *Note-se que $\mathcal{N}_\infty = \{\mathcal{N}_\infty(p, q)\}$ é um ideal de \mathcal{OC}_∞ , i.e., $\mathcal{N}_\infty \leq \mathcal{OC}_\infty$.*

Uma OCHA é, por definição, uma álgebra sobre a operada \mathcal{OC}_∞ e portanto é dada por um par de espaços diferenciais graduados usualmente denotados (\mathcal{H}_c, d_c) e (\mathcal{H}_o, d_o) munidos de duas famílias de operações: $\mathfrak{l} = \{l_n : \mathcal{H}_c^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{H}_c\}_{n \geq 1}$ e $\mathfrak{n} = \{n_{p,q} : \mathcal{H}_c^{\otimes p} \otimes \mathcal{H}_o^{\otimes q} \rightarrow \mathcal{H}_c\}_{p+q \geq 1}$, tais que $l_1 = d_c$, $n_{0,1} = d_o$, $(\mathcal{H}_c, \mathfrak{l})$ é uma álgebra L_∞ e todas aplicações satisfazem as seguintes relações (ver a definição original em [14]):

$$0 = \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+r=n}} (-1)^{\epsilon(\sigma)} n_{1+r,m}(l_p(c_{\sigma(1)}, \dots, c_{\sigma(p)}), c_{\sigma(p+1)}, \dots, c_{\sigma(n)}, o_1, \dots, o_m) +$$

$$+ \sum_{\substack{\sigma \in \Sigma_{p+r=n} \\ i+s+j=m}} (-1)^{\mu_{p,i}(\sigma)} n_{p,i+1+j}(c_{\sigma(1)}, \dots, c_{\sigma(p)}, o_1, \dots, o_i, n_{r,s}(c_{\sigma(p+1)}, \dots, c_{\sigma(n)}, o_{i+1}, \dots, o_{i+s}), o_{i+s+1}, \dots, o_m).$$

$$\mu_{p,i}(\sigma) = \epsilon(\sigma) + (c_{\sigma(1)} + \dots + c_{\sigma(p)}) + (o_1 + \dots + o_i) + (o_1 + \dots + o_i)(c_{\sigma(i+1)} + \dots + c_{\sigma(n)}).$$

No próximo exemplo discutimos algumas das propriedades das OCHAs em termos de árvores e de aplicações multilineares. Usaremos a notação: $\partial f = d_V f - (-1)^{|f|} f d_U$ para qualquer aplicação graduada $f : (U, d_U) \rightarrow (V, d_V)$ entre DG-espacos. Em particular, para uma aplicação da forma $f : U \otimes \dots \otimes U \rightarrow U$, temos:

$$\partial f = df - (-1)^{|f|} f (d \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 + \dots + 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes d).$$

Exemplo 2.20 (axiomas de OCHA). *Neste exemplo ilustramos alguns dos axiomas de OCHA usando árvores parcialmente planas e o operador de expansão de*

vértices d .

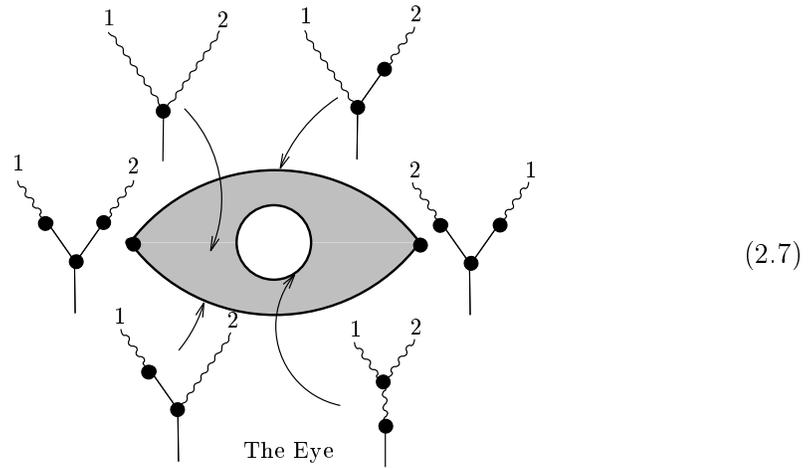
$$(\partial n_{1,1})(c, o) = n_{0,2}(n_{1,0}(c), o) \pm n_{0,2}(o, n_{1,0}(c))$$
(2.5)

$$(\partial n_{2,0})(c_1, c_2) = n_{1,0}(l_2(c_1, c_2)) \pm n_{1,1}(c_2, n_{1,0}(c_1)) \pm n_{1,1}(c_1, n_{1,0}(c_2))$$
(2.6)

O primeiro axioma diz que a aplicação $n_{1,0} : \mathcal{H}_c \rightarrow \mathcal{H}_o$ leva \mathcal{H}_c no centro homotópico de \mathcal{H}_o . A segunda relação leva a uma das propriedades mais peculiares das OCHAs. Abaixo discutimos o seu aspecto geométrico. corresponde geometricamente ao espaço de módulos chamado “The Eye” por Kontsevich, sendo uma das propriedades peculiares das OCHAs.

No próximo capítulo introduziremos certas variedades com córneres (uma espécie de variedade diferenciável na qual o bordo está estratificado em componentes para cada codimensão). Nas variedades com córneres lá apresentadas, a estrutura de OCHA está de certa forma “codificada”. Abaixo temos uma ilustração de um dos espaços que serão discutidos no próximo capítulo. Trata-se do espaço $\overline{C(2,0)}$ o qual topologicamente é um disco perfurado mas, como variedade com córneres, tem estrutura mostrada abaixo. $\overline{C(2,0)}$ foi batizado por Kontsevich como “The Eye”. A figura abaixo mostra também a rotulação da estratificação do bordo do The Eye por árvores

parcialmente planas:



Finalmente observamos que as propriedades bem conhecidas de associatividade e identidade de Jacobi (presentes na estrutura de OCHA) podem ser vistas através de árvores aplicando-se d às corolas l_3 e $n_{0,3}$ (ver [26]).

Capítulo 3

Os espaços $\overline{C}(n)$ e $\overline{C}(p, q)$

Neste capítulo iniciamos a abordagem geométrica das OCHAs. Embora nenhum resultado novo seja apresentado, existe alguma originalidade na maneira como o assunto é apresentado. O objetivo deste capítulo é definir os espaços $\overline{C}(n)$ e $\overline{C}(p, q)$ explicitando sua estrutura de variedade com córneres. Esta última será usada no próximo capítulo onde mostraremos que a parte relevante da operada \mathcal{OC}_∞ é isomorfa à primeira linha do termo E^1 da seqüência espectral de $\overline{C}(p, q)$, ver Proposição 4.6.

A variedade diferenciável na qual as OCHAs estão de certa forma codificadas é obtida através da versão real da compactificação de Fulton-MacPherson. Fulton e MacPherson introduziram uma compactificação de espaços de configurações dentro do contexto da Geometria Algébrica a qual foi adaptada por Axelrod e Singer para o contexto da Geometria Diferencial real, [1].

3.1 Variedade com Córneres

Um dos objetivos deste trabalho (ver Capítulo 4) é mostrar como a estrutura de OCHA está “codificada” na estratificação do bordo da variedade com córneres obtida pela compactificação rFM do espaço de configurações de pontos no semi-plano superior fechado.

Definição 3.1 (Variedades Diferenciável com Córneres). *Uma variedade difer-*

enciável com córneres (ou simplesmente variedade com córneres) é um espaço topológico de Hausdorff M tal que qualquer ponto $x \in M$ admite uma vizinhança aberta homeomorfa a um aberto do cone simplicial $(\mathbb{R}_{\geq 0})^{\times d}$

$$(\mathbb{R}_{\geq 0})^{\times d} = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_1, \dots, x_d \geq 0\}.$$

Este sistema de vizinhanças deve ser tal que quaisquer duas vizinhanças se interceptam diferenciavelmente, no sentido da diferenciabilidade definida no conjunto $(\mathbb{R}_{\geq 0})^{\times d}$.

Observação 3.2. Note-se que, como o cone simplicial $(\mathbb{R}_{\geq 0})^{\times d}$ é homeomorfo ao semi-espaço superior $H^d = \{x \in \mathbb{R}^d : x_d \geq 0\}$, então toda variedade com córneres é homeomorfa a uma variedade com bordo. Falar sobre variedades com córneres só faz sentido, portanto, no contexto de variedades diferenciáveis, pois no contexto de variedades topológicas elas se reduzem às variedades com bordo.

Definição 3.3. Dada uma variedade com córneres M . O bordo de codimensão k de M é definido como o conjunto de todos os pontos de M com coordenadas (x_1, \dots, x_d) onde pelo menos k coordenadas são nulas $x_{i_1} = \dots = x_{i_k} = 0$ e será denotado por $\partial_k M$. Quando $k = 0$, por definição temos $\partial_0 M = M$.

Exemplo 3.4. Se M_1, \dots, M_n são variedades com bordo, então seu produto cartesiano $M = M_1 \times \dots \times M_n$ é uma variedade com córneres. $\partial_k M$ é o conjunto dos pontos (p_1, \dots, p_n) onde pelo menos k pontos p_{i_1}, \dots, p_{i_k} são pontos do bordo $p_i \in \partial M_i$.

Em geral $\partial_k M$ não é uma variedade diferenciável. Basta tomar o cubo $M = I^{\times 3}$ e observar que $\partial M = \partial_1 M$ não tem estrutura diferenciável. Por outro lado, para qualquer variedade com córneres M , $\partial_k M \setminus \partial_{k+1} M$ é o conjunto dos pontos com coordenadas (x_1, \dots, x_d) tais que *exatamente* k coordenadas são nulas. $\partial_k M \setminus \partial_{k+1} M$ é uma variedade diferenciável (este fato pode ser verificado através de um argumento exatamente análogo ao usado, no contexto de variedades com bordo, para provar que o bordo é uma variedade). $\partial_k M \setminus \partial_{k+1} M$ em geral é uma união disjunta de variedades diferenciáveis.

Definição 3.5. Cada componente conexa de $\partial_k M \setminus \partial_{k+1} M$ será chamada de estrato de codimensão k . Eventualmente nos referiremos ao espaço $\partial_k M \setminus \partial_{k+1} M$ como os estratos de codimensão k .

3.1.1 A compactificação rFM

Dada uma variedade compacta sem bordo M de dimensão d , vamos definir uma compactificação de

$$\begin{aligned} \text{Conf}_n(M) &= \{(x_1, \dots, x_n) \in M^{\times n} \mid x_{i_1} \neq x_{i_2}, \forall i_1 \neq i_2\} \\ &= M^{\times n} \setminus \bigcup_{i \neq j} \Delta_{\{i,j\}}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

o espaço de configurações de n pontos distintos em M , onde $\Delta_{\{i,j\}} = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^{\times n} : x_i = x_j\}$.

Definição 3.6 (Blowup). Seja $L \subset M$ uma subvariedade compacta de M com $\dim L < \dim M$. Definimos o Blowup de M através de L , denotado $Bl(M, L)$, da seguinte forma. Primeiramente tomamos uma vizinhança tubular $U \subset M$ de L , e então definimos

$$Bl(M, L) = (M - U).$$

Ou seja, o blowup é definido como o complemento de uma vizinhança tubular de L .

Observação 3.7. Note-se que $Bl(M, L)$ é uma variedade compacta com bordo cujo interior é difeomorfo a $M - L$ e cujo bordo é difeomorfo ao fibrado de esferas associado ao fibrado normal a L em M .

O fibrado normal será denotado por $N(L \subset M)$ e o fibrado de esferas associado, por $S(N(L \subset M))$.

Para todo subconjunto $S \subseteq [n] = \{1, \dots, n\}$, Δ_S denota a menor diagonal em $M^S = \text{Map}(S, M)$ consistindo das aplicações constantes. Seja $Bl(M^S, \Delta_S)$ o blow-up de M^S através da diagonal Δ_S . Seu interior é homeomorfo a $M^S \setminus \Delta_S$ e seu bordo é o fibrado de esferas $S(N(\Delta_S \subset M^S))$ do fibrado normal à menor diagonal em M^S .

Considere a projeção canônica $\pi_S : M^{[n]} \rightarrow M^S$ definida para qualquer subconjunto $S \subseteq [n]$ com $|S| \geq 2$. $\text{Conf}_n(M)$ é levado no interior de $Bl(M^S, \Delta_S)$, i.e., a projeção determina uma aplicação:

$$\overset{o}{\pi}_S : \text{Conf}_n(M) \rightarrow \text{int}(Bl(M^S, \Delta_S)).$$

Colocando estas aplicações juntas para cada S (com $|S| \geq 2$) bem como a inclusão $\vec{f}_0 : \text{Conf}_n(M) \rightarrow M^{[n]}$ obtemos um mergulho

$$f : \text{Conf}_n(M) \hookrightarrow M^{[n]} \times \prod_{|S| \geq 2} Bl(M^S, \Delta_S). \quad (3.2)$$

A variedade à direita será denotada por \mathcal{B} . Como \mathcal{B} é um produto de variedades compactas com bordo, ela é uma variedade compacta com córneres.

Definição 3.8 (Compactificação rFM). *A compactificação rFM de $\text{Conf}_n(M)$ é definida como o fecho de sua imagem pelo mergulho acima*

$$M[n] = \overline{f(\text{Conf}_n(M))}.$$

Observação 3.9. *Neste trabalho o espaço de configurações será denotado por $M(n)$ ou $\text{Conf}_n(M)$ e sua compactificação rFM, por $M[n]$ ou $\overline{\text{Conf}_n(M)}$.*

Vamos agora descrever $M[n] \subset \mathcal{B}$ explicitamente. Um ponto de \mathcal{B} é claramente um par $(\vec{x}, \{\vec{x}_{B,S}\})$ onde \vec{x} é um elemento de $M^{[n]}$ e $\vec{x}_{B,S}$ é um elemento de $Bl(M^S, \Delta_S)$ para cada subconjunto $S \subset [n]$ com $|S| \geq 2$. Dado tal par, seja \vec{x}_S a imagem de $\vec{x}_{B,S}$ pela aplicação *blowdown* de $Bl(M^S, \Delta_S)$ em M^S . Se \vec{x}_S não pertence a Δ_S , então simplesmente $\vec{x}_{B,S} = \vec{x}_S$. Caso contrário, $\vec{x}_{B,S}$ também contém a informação de um ponto na fibra de $\partial Bl(M^S, \Delta_S) = S(N(\Delta_S \subset M^S))$ sobre \vec{x}_S .

Vamos então analisar a informação contida no segundo caso. Dado $\vec{x}_S \in \Delta_S$, seja $z \in M$ a localização comum de todos os vértices em S . A fibra $N(\Delta_S \subset M^S)|_{\vec{x}_S}$ pode ser identificada com $[T_z M]^S / T_z M$ o quociente do conjunto de todas aplicações de S em $T_z M$ pelas translações (ou seja, quociente pela ação em $[T_z M]^S$ das aplicações constantes de S em $T_z M$). O fibrado de esferas associado é dado por mais um quociente no conjunto de todos elementos não nulos do fibrado normal pelo grupo

\mathbb{R}_+ das dilatações. Dado um ponto $\vec{u}_S \in [T_z M]^S$, a sua órbita pelas ações combinadas de $T_z M$ e \mathbb{R}_+ será escrita $[\vec{u}_S]$. $S(N(\Delta_S \subset M^S))$ é portanto o espaço das órbitas $[\vec{u}_S]$ tais que os componentes de \vec{u}_S não são todos iguais (elementos não nulos do fibrado normal). $[\vec{u}_S]$ é chamado de *retrato* de S em z (no exemplo que exploraremos nesta tese, os retratos serão vistos como *configurações relativas* ou *bolhas* e o ponto z , ponto de base da fibra, será chamado *ponto de colisão*). Dada uma métrica em M , retratos podem ser univocamente representados por vetores \vec{u}_S de norma 1 e ortogonais à diagonal Δ_S . Será conveniente definir $u_{S,j} = 0 \in TM_{x_j}$ quando $j \notin S$, de forma que temos $\vec{u}_S \in T_{\vec{x}} M^{[n]}$ de norma 1 e ortogonal a $\bar{\Delta}_S$ (onde $\bar{\Delta}_S$ é a imagem inversa de $\Delta_S \in M^S$ pela projeção canônica $\pi_S : M^{[n]} \rightarrow M^S$).

3.2 A compactificação $\overline{C(p, q)}$

Vamos agora estudar a compactificação descrita acima no caso de configurações de pontos no semi-plano superior, ver Kontsevich [20]. Sejam p, q inteiros não negativos satisfazendo a desigualdade $2p + q \geq 2$. $\text{Conf}(p, q)$ denota o espaço de configurações de pontos no semi-plano superior fechado $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) \geq 0\}$ com p pontos no interior e q pontos no bordo (reta real):

$$\text{Conf}(p, q) = \{(z_1, \dots, z_p, x_1, \dots, x_q) \in H^{p+q} \mid z_{i_1} \neq z_{i_2}, x_{j_1} \neq x_{j_2} \forall i_1 \neq i_2, j_1 \neq j_2 \\ \text{Im}(z_i) > 0, \text{Im}(x_j) = 0 \forall i, j\}$$

$\text{Conf}(p, q)$ é o produto cartesiano de um sub-conjunto aberto de $(H_{>0})^p$ (onde $H_{>0}$ é o interior de H) e um subconjunto aberto de \mathbb{R}^q e conseqüentemente é uma variedade de dimensão $2p + q$. Seja $C(p, q)$ o quociente de $\text{Conf}(p, q)$ pela ação do grupo das transformações afins que fixam a reta real preservando sua orientação:

$$C(p, q) := \text{Conf}(p, q) / (z \mapsto az + b) \quad a, b \in \mathbb{R}, a > 0.$$

A condição $2p + q \geq 2$ garante que a ação é livre e portanto $C(p, q)$ é uma variedade diferenciável de dimensão $2p + q - 2$.

$C(p, q)$ naturalmente não é compacta para $2p + q > 2$ pois os pontos em cada configuração devem ser distintos e podem, portanto, se aproximar indefinidamente.

A idéia intuitiva para construir a compactificação rFM de $C(p, q)$ é incluir não apenas todas as possíveis posições (pontos de H) onde alguns pontos distintos estão tendendo à colisão mas também todas as ‘configurações relativas’ dos pontos que estão colidindo. Antes de entendermos esta compactificação de maneira mais precisa, vamos analisar o caso de configurações de pontos no plano complexo.

3.2.1 Configurações de pontos no plano complexo \mathbb{C}

Seja $\text{Conf}_n(\mathbb{C})$ o espaço de configurações de pontos no plano complexo

$$\text{Conf}_n(\mathbb{C}) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_{i_1} \neq z_{i_2}, \forall i_1 \neq i_2\}$$

com $n \geq 2$. Tomamos o quociente pelas transformações afins $z \mapsto az + b$ onde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $b \in \mathbb{C}$, então definimos: $C(n) := \text{Conf}_n(\mathbb{C}) / (z \mapsto az + b)$. Analogamente a $C(p, q)$, $C(n)$ é uma variedade diferenciável de dimensão $2n - 3$.

Vamos agora estudar compactificação rFM do espaço $C(n)$. Cada classe $[\vec{z}]$ de configurações $\vec{z} = (z_1, \dots, z_n)$ em $\text{Conf}(n)$ é representada univocamente por uma configuração da forma $(0, e^{i\theta}, z_3, \dots, z_n)$. De fato, o primeiro ponto z_1 pode ser levado à origem por uma translação $z \mapsto z - z_1$ e o segundo ponto z_2 (o qual é não nulo porque distinto de z_1) pode ser levado no círculo unitário S^1 por uma dilatação $z \mapsto \frac{1}{|z_2|} z$.

A compactificação rFM, é definida para configurações de pontos numa variedade compacta. Podemos considerar cada z_i como pertencendo à compactificação por um ponto $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2$. Configurações de n pontos distintos em \mathbb{C} podem ser considerados como configurações de $n + 1$ pontos distintos em S^2 onde o último ponto de cada configuração é fixado como ∞ . Concluimos que $C(n)$ é igual ao seguinte espaço:

$$\begin{aligned} C(n) &= \{(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) \in \text{Conf}_{n+1}(S^2) \mid z_1 = 0, z_2 = e^{i\theta}, z_{n+1} = \infty\} \\ &= \{0\} \times S^1 \times (S^2)^{n-2} \times \{\infty\} \setminus \bigcup_{i \neq j} \Delta_{\{i,j\}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $\{0\}$ e S^1 são vistos como subconjuntos de $\mathbb{C} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2$ e, para qualquer $1 \leq i, j \leq n + 1$, $\Delta_{\{i,j\}}$ é a $\{i, j\}$ -diagonal de $(S^2)^{n+1}$. A compactificação $\overline{C(n)}$

(definida como o fecho da imagem do mergulho 3.2) deve ser considerada como obtida através de uma seqüência de blowups iterados sobre cada diagonal.

Observação 3.10. *Uma configuração \vec{z} de $n + 1$ pontos em S^2 que esteja na forma $\vec{z} = (0, e^{i\theta}, z_3, \dots, z_n, \infty)$ será chamada uma configuração na posição normal. Deste ponto em diante, para qualquer subconjunto de índices $S \subset [n]$ com $|S| \geq 2$, todo elemento de $(S^2)^S$ deve ser considerado como a restrição $\vec{z}|_S$ de uma configuração $\vec{z} \in (S^2)^{[n+1]}$ na posição normal.*

Descrição e Parametrização de $\overline{C(n)}$

Inicialmente relembramos que o interior de $\overline{C(n)}$ é homeomorfo ao espaço $C(n)$. Já vimos que $C(n)$ é uma variedade diferenciável, portanto cada ponto do interior de $\overline{C(n)}$ admite um sistema de coordenadas dado pelas coordenadas de $C(n)$.

Vejamos agora como descrever e parametrizar os pontos que não estão no interior. Se um ponto $P = (\vec{x}, \{\vec{x}_{B,S}\}) \in \overline{C(n)}$ não é ponto interior, então existe um subconjunto $S \subset [n]$ tal que $\vec{x}_{B,S} \in S(N(\Delta_S \subset (S^2)^S))$. Em outras palavras, $\vec{x}_{B,S}$ é um ‘componente’ do ponto P que está no fibrado de esferas associado ao fibrado normal da inclusão $\Delta_S \subset (S^2)^S$.

Definição 3.11. *Os pontos $\vec{x}_{B,S}$ que pertencerem ao fibrado de esferas $S(N(\Delta_S \subset (S^2)^S))$ serão chamados de “configurações relativas”. Cada configuração relativa tem seu correspondente ponto de base no fibrado de esferas. Os pontos de base $\vec{x}_S \in \Delta_S$ são dados por uma seqüência constante em $(S^2)^S$. A imagem da seqüência, que contém apenas um elemento $x \in S^2 = \mathbb{C} \cup \infty$, será chamada de “ponto de colisão” dos pontos indexados por S .*

Lema 3.12. *Da mesma forma como na definição do espaço $C(n)$. Configurações relativas $\vec{x}_{B,S}$ são dadas por seqüências de pontos $(x_{s_1}, \dots, x_{s_k})$ em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tomadas módulo translações e dilatações: $z \mapsto az + b$, com $a > 0$ e $b \in \mathbb{C}$.*

Demonstração. Como o fibrado normal está identificado com uma vizinhança tubular de Δ_S em $(S^2)^S$, cada ponto de $S(N(\Delta_S \subset (S^2)^S))$ pode ser visto como uma seqüência de pontos $(x_{s_1}, \dots, x_{s_k}) \in (S^2)^S$ onde pelo menos dois pontos são distintos,

caso contrário a seqüência de pontos corresponderia a um ponto na diagonal Δ_S (ou seja, ao vetor nulo no fibrado normal) e não poderia representar um ponto no fibrado de esferas associado.

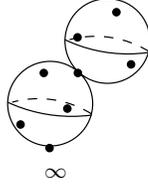
Seja $x \in S^2$ o ponto de colisão referente à configuração relativa $\vec{x}_{B,S} = (x_{s_1}, \dots, x_{s_k})$. A fibra $N(\Delta_S \subset M^S)|_{\vec{x}|_S}$ do fibrado normal em $\vec{x}|_S$ pode ser identificada com $(T_x M)^S / T_x M$, onde $T_x M$ age em $(T_x M)^S$ via translações. Portanto as configurações relativas $(x_{s_1}, \dots, x_{s_k})$ devem ser tomadas módulo translações. Como o fibrado de esferas é o quociente do conjunto de elementos não-nulos do fibrado normal pelo grupo \mathbb{R}_+ das dilatações e os elementos não-nulos são precisamente configurações relativas $[\vec{x}_S] \in (T_x M)^S / T_x M$ onde os componentes (coordenadas do vetor normal) não são todas iguais, temos que as configurações relativas devem ser também tomadas módulo dilatações. \square

As configurações relativas são dadas portanto por seqüências de pontos $\vec{x} \in (S^2)^S$ módulo a ação pelas transformações afins $z \mapsto az + b$. Considerando as configurações relativas \vec{x} onde todos os pontos são distintos, obtemos precisamente uma cópia do espaço $C(k)$ onde $k = |S|$. Considerando apenas pontos $P = (\vec{x}, \{\vec{x}_{B,S}\})$ tais que $\vec{x}_{B,S}$ pertence ao bordo $\partial Bl((S^2)^S, \Delta_S)$ e que os demais $\vec{x}_{B,S'}$ estão no interior de $Bl((S^2)^{S'}, \Delta_{S'})$, o raciocínio acima nos mostra que tais pontos são descritos por configurações contendo um ponto de colisão e configurações relativas associadas a ele. O conjunto de tais pontos é portanto parametrizado por $C(n - k + 1) \times C(k)$ onde $k = |S|$ é o número de pontos na configuração relativa e $n - k + 1$ é o número de pontos nas outras configurações adicionado-se o ponto de colisão referente à configuração relativa.

Observação 3.13. *Note-se que*

$$\begin{aligned} \dim(C(n - k + 1) \times C(k)) &= 2(n - k + 1) - 3 + 2k - 3 \\ &= 2n - 3 - 1 = \dim(C(n)) - 1. \end{aligned}$$

A descrição dos pontos P vista acima, em termos de configurações com um ponto de colisão adicionada e com configurações relativas sobre o ponto de colisão, pode ser ilustrada intuitivamente como uma configuração de pontos numa *esfera degenerada*:



O ponto de colagem das duas “componentes irreduzíveis” da esfera degenerada corresponde ao ponto de colisão discutido acima e as configurações de pontos em cada uma das esferas correspondem às configurações relativas e às configurações $\vec{x}|_{[n]-S}$, sendo que nesta última configuração todos os pontos são distintos.

Vimos portanto que os pontos $P = (\vec{x}, \{\vec{x}_{B,S}\})$ do tipo descrito acima são parametrizados por $C(n - k + 1) \times C(k)$. Um ponto qualquer de $\overline{C(n)}$ pode ser descrito reproduzindo-se para cada um dos espaços $C(n - k + 1)$ e $C(k)$ a mesma descrição que acabamos de dar para os pontos P . Desta forma, iterando a descrição acima, vemos que pontos de $\overline{C(n)}$, em geral, são descritos por produtos $C(l) \times C(n_1) \times \cdots \times C(n_k)$ para toda seqüência $\{l, n_1, \dots, n_k\}$ satisfazendo: $l, n_i \geq 2$ e $l + n_1 + \cdots + n_k = n + k$. Em outras palavras, um ponto em $\overline{C(n)}$ em geral é descrito por uma configuração de pontos numa esfera degenerada formada por $k + 1$ componentes irreduzíveis, coladas através de k pontos de colisão para todo $1 \leq k \leq n - 2$. O número de pontos em cada componente irreduzível devendo sempre ser ≥ 2 .

Proposição 3.14. $\overline{C(n)}$ é uma variedade com córneres.

Demonstração. Lembrando que $\dim \overline{C(n)} = 2n - 3$, precisamos mostrar que cada ponto de $\overline{C(n)}$ possui uma vizinhança homeomorfa a um aberto de $(\mathbb{R}_{\geq 0})^{2n-3}$ e que as vizinhanças interceptam-se diferenciavelmente. Como o interior de $\overline{C(n)}$ é precisamente $C(n)$ e como este último espaço é uma variedade diferenciável, basta exibir vizinhanças coordenadas para os pontos que não estão no interior de $\overline{C(n)}$.

Um ponto $P \in \overline{C(n)}$, que não está no interior de $\overline{C(n)}$, é um ponto $P = (\vec{x}, \{\vec{x}_{B,S}\})$ tal que $\vec{x}_{B,S_i} \in S(N(\Delta_{S_i} \subset (S^2)^{S_i}))$, para $1 \leq i \leq k$. Vimos nas discussões acima que o conjunto dos pontos $P \in \overline{C(n)}$ que têm exatamente k componentes \vec{x}_{B,S_i} pertencendo ao bordo do seu respectivo blowup é homeomorfo à união disjunta dos conjuntos $C(l) \times C(n_1) \times \cdots \times C(n_k)$ para toda seqüência $\{l, n_1, \dots, n_k\}$ satisfazendo:

$l, n_i \geq 2$ e $l + n_1 + \dots + n_k = n + k$. Podemos supor portanto que o ponto P pertence a $C(l) \times C(n_1) \times \dots \times C(n_k)$. Sejam $x = (x_l, x_{n_1}, \dots, x_{n_k})$ as coordenadas de P em \mathbb{R}^{2n-3-k} onde cada x_{n_i} é uma coordenada local em $C(n_i)$.

Como cada $C(n_i)$ está identificado com $S(N(\Delta_{S_i} \subset (S^2)^{S_i}))$, as coordenadas x_{n_i} podem ser usados para definirmos uma sistema local de coordenadas no fibrado normal $N(\Delta_{S_i} \subset (S^2)^{S_i})$. Para tanto, basta introduzirmos um parâmetro a mais e obtermos (x_{n_i}, t_i) com $t_i \geq 0$, tal que (x_{n_i}, t_i) é um sistema local de coordenadas em $Bl((S^2)^{S_i}, \Delta_{S_i})$.

O sistema de coordenadas para o ponto P é então dado por $(x_l, x_{n_1}, t_1, \dots, x_{n_k}, t_k)$, com $t_i \geq 0$. O fato de que as vizinhanças no atlas que acabamos de definir se interceptam diferenciavelmente segue-se do fato de que cada (x_{n_i}, t_i) é um sistema local de coordenadas numa variedade com bordo $Bl((S^2)^{S_i}, \Delta_{S_i})$. \square

Observação 3.15. *Vimos que as esferas degeneradas são obtidas colando-se duas esferas, sendo que uma delas contém as configurações relativas e a outra contém as demais configurações. As esferas contendo as configurações relativas serão eventualmente chamadas de bolhas. Na próxima seção estudaremos configurações de pontos em discos degenerados onde também usaremos a expressão 'bolha' para nos referirmos às configurações relativas.*

3.2.2 Configurações de pontos no semi-plano superior fechado

Definiremos a compactificação $\overline{C(p, q)}$ a partir da definição de $\overline{C(n)}$. $\overline{C(p, q)}$ é também uma variedade com córneres, Proposição 3.19, e é nela que está contida a parte relevante da estrutura de OCHA, conforme veremos no capítulo 4.

Começamos definindo o seguinte mergulho:

$$\begin{aligned} C(p, q) &\longrightarrow C(2p + q) \\ [(z_1, \dots, z_p, x_1, \dots, x_q)] &\longmapsto [(z_1, \dots, z_p, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_p, x_1, \dots, x_q)] \end{aligned} \tag{3.4}$$

Note-se que este mergulho está bem definido. De fato, definimos o espaço $C(p, q)$ para inteiros positivos p, q tais que $2p + q \geq 2$. Por outro lado, $C(n)$ foi definido para $n \geq 2$. Classes de configurações em $C(p, q)$ são definidas em termos de transformações afins

$z \mapsto az + b$ com a, b reais e $a > 0$ ao passo que em $C(2p + q)$ elas são definidas pelas mesmas transformações afins com uma única diferença sendo que b é um número complexo .

Definição 3.16 (Kontsevich [20]). *A compactificação do espaço de configurações $C(p, q)$ de pontos no semi-plano superior fechado é definida como o fecho em $\overline{C(2p + q)}$ da imagem do mergulho (3.4) e será denotada $\overline{C(p, q)}$.*

Observação 3.17. *No estudo de $\overline{C(n)}$ vimos que seus pontos podem ser descritos em termos de ‘pontos de colisão’ e ‘configurações relativas’. Mostramos que essas idéias intuitivas correspondem aos conceitos precisos de pontos no fibrado de esferas associado (configurações relativas) e seus correspondentes pontos em Δ_S , a base do fibrado, (pontos de colisão). A seguir usaremos a descrição dada anteriormente para estudar os pontos de $\overline{C(p, q)}$. Faremos esta descrição em termos de pontos de colisão e configurações relativas, uma vez que o conceito preciso por trás destes termos já está determinado.*

Pela descrição dos pontos na compactificação $\overline{C(n)}$ e pela forma do mergulho (3.4), podemos deduzir uma descrição dos pontos de $\overline{C(p, q)}$. Havíamos considerado a compactificação por um ponto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ do plano complexo. A compactificação por um ponto do semi-plano superior fechado H é o disco fechado $H \cup \{\infty\} = D$. Uma configuração da forma (p, q) no semi-plano superior fechado corresponde a uma configuração de $p + q + 1$ pontos no disco fechado ($p + q$ pontos mais um ponto extra denotado ∞). De fato, o disco fechado é precisamente um hemisfério em $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ onde o bordo do disco é o grande círculo passando pelo ∞ . A orientação na reta real (bordo de H) induz uma orientação no grande círculo e portanto podemos distinguir entre o hemisfério superior e inferior. Identificaremos a compactificação por um ponto de H com o hemisfério superior.

Para entender a compactificação do espaço de configurações de pontos no disco fechado, devemos estudar duas situações possíveis.

A primeira trata de um subconjunto (contendo pelo menos dois elementos) de pontos no interior do disco colidindo em algum ponto do seu interior (ou seja, a

situação de um ponto da compactificação dado por uma configuração relativa formada somente por pontos do interior do disco cujo ponto de colisão também está no interior do disco).

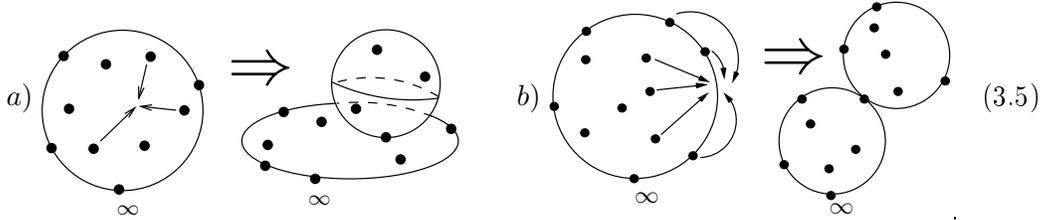
Na segunda situação temos um subconjunto de p_2 pontos no interior e q_2 pontos no bordo com $2p_2 + q_2 \geq 2$ tendendo à colisão em algum ponto do bordo do disco (ou seja, um ponto da compactificação em que a configuração relativa contém pontos tanto do interior quanto do bordo e cujo ponto de colisão está sobre o bordo). O ‘ponto de colisão’ é sempre distinto dos pontos marcados dados. Vamos estudar cada caso olhando para a imagem de cada configuração pelo mergulho (3.4). Em outras palavras, vamos estudar os dois tipos de ‘bolhas’ que aparecem na compactificação do espaço de configurações de pontos no disco.

Bolhas no interior

Dado um subconjunto de pontos $(z_{i_1}, \dots, z_{i_k})$ no interior do disco fechado, sua imagem pelo mergulho 3.4 é dada por pontos no hemisfério superior de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bem como sua reflexão (correspondendo a $(\bar{z}_{i_1}, \dots, \bar{z}_{i_k})$) através do grande círculo contendo o ∞ . Supomos que aqueles pontos vão colidir num ponto interior do disco. A situação correspondente na esfera é a de pontos no hemisfério superior colidindo sobre algum ponto de seu interior, bem como sua reflexão $(\bar{z}_{i_1}, \dots, \bar{z}_{i_k})$ colidindo no interior do hemisfério inferior. Desta forma temos um ponto no bordo de $\overline{C(2p+q)}$. De acordo com nossa descrição em termos de *pontos de colisão* e *configurações relativas* que traduzimos em configurações de pontos em esferas degeneradas (bolhas), a colisão descrita acima nos dá uma esfera colada a duas outras esferas através de pontos no interior de cada um dos hemisférios e tais que uma é o reflexo da outra. Logo, tais configurações são determinadas pelas suas configurações correspondentes no hemisfério superior e podemos restringir nossa atenção àquele hemisfério. Conseqüentemente, este tipo de ponto em $\overline{C(p,q)}$ é descrito por configurações de pontos num disco degenerado formado por uma esfera colada a um disco através de um ponto marcado adicional no interior do disco, ver figura 3.5.a).

Bolhas no bordo

Estudamos agora o caso onde p_2 pontos do interior e q_2 pontos do bordo estão colidindo em algum ponto no bordo, com $2p_2 + q_2 \geq 2$. Na esfera, através do mergulho (3.4), temos p_2 pontos no hemisfério superior, p_2 pontos no hemisfério inferior (os quais são a reflexão dos primeiros p_2 pontos) e q_2 pontos no grande círculo passando por ∞ . Todos estes $2p_2 + q_2$ pontos vão colidir em algum ponto do grande círculo. A configuração obtida no limite (um ponto no bordo de $\overline{C(2p+q)}$) é representada por uma esfera com $2p_2 + q_2$ pontos marcados colada a outra esfera através de um novo ponto sobre o grande círculo pelo infinito. Como tais configurações nas esferas representam um ponto no fecho da imagem de $C(p, q)$, pontos em um hemisfério são exatamente a reflexão dos pontos no outro. Conseqüentemente, este tipo de ponto em $\overline{C(p, q)}$ pode ser representado por configurações de pontos num disco degenerado formado por dois discos colados por um ponto no bordo, ver figura 3.5.b). O ponto de colagem sempre é distinto dos pontos marcados dados.



As figuras 3.5 a) e b) representam assim dois tipos diferentes de pontos em $\overline{C(p, q)}$. Se um ponto P em $\overline{C(p, q)}$ é dado por uma bolha no interior, então temos um subconjunto do conjunto de pontos interiores (indexados por $S_c \subset [p]$, $|S_c| = p_2 \geq 2$) colidindo no interior. O conjunto de todos os pontos deste tipo é parametrizado por $C(p_1 + 1, q) \times C(p_2)$, onde $p_1 + p_2 = p$ e $p_2 \geq 2$.

No caso de uma bolha no bordo, temos dois subconjuntos $S_c \subseteq [p]$ e $S_o \subseteq [q]$, com $|S_c| = p_2$ e $|S_o| = q_2$ satisfazendo $2p_2 + q_2 \geq 2$, tal que os pontos indexados por estes subconjuntos estão colidindo no bordo do disco fechado. O conjunto de tais pontos é parametrizado por $C(p_1, q_1 + 1) \times C(p_2, q_2)$, com $p_1 + p_2 = p$, $q_1 + q_2 = q$, $2p_1 + q_1 \geq 1$ e $2p_2 + q_2 \geq 2$.

Observação 3.18. *Note-se que:*

$$\begin{aligned}\dim(C(p_1, q_1 + 1) \times C(p_2, q_2)) &= 2p_1 + q_1 + 1 - 2 + 2p_2 + q_2 - 2 \\ &= 2p + q - 2 - 1 = \dim C(p, q) - 1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\dim(C(p_1 + 1, q) \times C(p_2)) &= 2(p_1 + 1) + q - 2 + 2p_2 - 3 \\ &= 2p + q - 2 - 1 = \dim C(p, q) - 1\end{aligned}$$

Um ponto qualquer da compactificação $\overline{C(p, q)}$ é dado por configurações de pontos em discos degenerados em geral. Tais discos são obtidos iterando-se o processo descrito acima. Dado um certo disco degenerado, seu espaço de configurações é homeomorfo ao produto de cópias de espaços $C(p_i, q_i)$ e $C(n_i)$ com $2p_i + q_i \geq 2$ e $n_i \geq 2$ conforme descrito na seção 4.1.

Proposição 3.19. $\overline{C(p, q)}$ é uma variedade com *córneres*.

Demonstração. A demonstração é idêntica à demonstração da Proposição 3.14 usando o fato de que um ponto de $\overline{C(p, q)}$ que não está no seu interior corresponde a um ponto num espaço obtido pelo produto cartesiano de cópias de espaços $C(p_i, q_i)$ e $C(n_i)$ com $2p_i + q_i \geq 2$ e $n_i \geq 2$. \square

Da descrição dos pontos nos estratos de $\overline{C(p, q)}$ usando bolhas, passaremos no próximo capítulo à idéia de usar árvores para rotular sua estratificação. De fato, cada disco ou esfera degenerada consiste de um conjunto de discos e esferas com pontos marcados colados por pontos que são distintos dos outros pontos marcados. Agora, para cada disco ou esfera degenerada associamos seu *grafo dual* (uma árvore orientada com raiz) da seguinte forma. Para cada disco ou esfera associamos um vértice e para cada ponto (incluindo o ponto no ∞ e os pontos de colagem ou pontos duplos) associamos uma aresta. A aresta correspondente a ∞ é a raiz da árvore, as arestas correspondentes aos pontos de colisão são arestas internas unindo seus vértices correspondentes, e as arestas associadas aos pontos marcados restantes (que não são ∞ nem pontos duplos) são as folhas das árvores.

Como existem dois tipos de pontos marcados no disco fechado (ponto interior e ponto sobre o bordo) as árvores duais correspondentes terão dois tipos de arestas. Tais árvores foram descritas no capítulo anterior e desempenharão um papel crucial nos estudos do próximo capítulo.

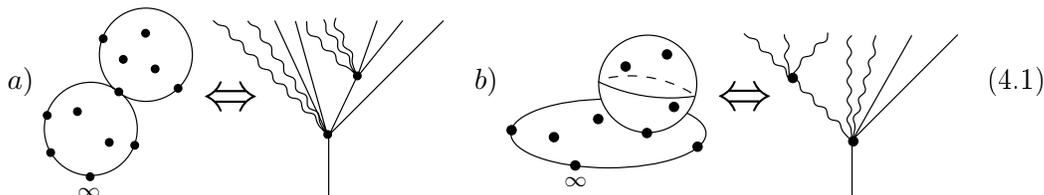
Capítulo 4

A Seqüência Espectral de $\overline{C(p, q)}$

Neste capítulo mostraremos que a primeira linha do termo E^1 da seqüência espectral de $\overline{C(p, q)}$ define uma DG-operada isomorfa ao ideal \mathcal{N}_∞ de \mathcal{OC}_∞ .

4.1 A Estratificação de $\overline{C(p, q)}$

Nesta seção mostraremos como a estrutura de variedade com córneres em $\overline{C(p, q)}$, Proposição 3.19, induz uma filtração natural em seu complexo de cadeia singulares e portanto leva a uma seqüência espectral convergindo para $H_*(\overline{C(p, q)})$. A intuição usada neste capítulo está resumida na seguinte figura:



Lembramos que, para cada par de inteiros (p, q) com $2p + q \geq 2$, definimos $\mathcal{N}_\infty(p, q)$ como o espaço vetorial gerado pelas árvores parcialmente planas do tipo (p, q) satisfazendo $T + (-T) = 0$ onde $(-T)$ denota a árvore T com orientação oposta. $\mathcal{N}_\infty(p, q)$ é um espaço vetorial graduado (para cada árvore $T \in \mathcal{N}_\infty(p, q)$, $|T| = |e(T)| + 2 - 2p - q$). $\mathcal{N}_\infty^m(p, q)$ é o subespaço gerado pelas árvores de grau m .

Observação 4.1. *Nesta tese, todos os complexos diferenciais são tomados com coeficientes no corpo \mathbb{K} fixado. Em particular, os grupos de homologia e cohomologia discutidos a seguir também são tomados com coeficientes em \mathbb{K} .*

Lema 4.2. *Os espaços $H^0\left(\overline{\partial_k C(p, q)} \setminus \overline{\partial_{k+1} C(p, q)}\right)$ e $\mathcal{N}_\infty^m(p, q)$, $m = k + 2 - 2p - q$ são isomorfos como espaços vetoriais.*

Demonstração. Os pontos de $\overline{\partial_k C(p, q)} \setminus \overline{\partial_{k+1} C(p, q)}$ são exatamente os pontos da variedade com córneres $\overline{C(p, q)}$ que têm exatamente k coordenadas nulas. Pela descrição dos pontos de $\overline{C(p, q)}$ como configurações de pontos em discos degenerados, vista no capítulo anterior, pontos com k coordenadas nulas correspondem exatamente a discos degenerados formados por $k + 1$ “componentes irredutíveis” coladas através de k “pontos duplos”.

Tomando-se o grafo dual de cada disco degenerado, temos uma árvore parcialmente plana do tipo (p, q) com k arestas internas. Lembrando que uma árvore parcialmente plana foi de fato definida como uma classe de isotopia de árvores mergulhadas, vemos que cada componente conexa de $\overline{\partial_k C(p, q)} \setminus \overline{\partial_{k+1} C(p, q)}$ corresponde univocamente a uma árvore do tipo (p, q) com k arestas internas. Mas tais árvores formam uma base de $\mathcal{N}_\infty^m(p, q)$, para $m = k + 2 - 2p - q$. \square

O lema acima mostrou que a *estratificação* (ou seja, as componentes conexas de $\partial_k M \setminus \partial_{k+1} M$ para cada codimensão k) da variedade com córneres $\overline{C(p, q)}$ é rotulada por árvores parcialmente planas. Lembrando que cada componente conexa de $\partial_k M \setminus \partial_{k+1} M$ é chamada de estrato de codimensão k .

A combinatória da estratificação da variedade $\overline{C(p, q)}$ está descrita em termos de árvores parcialmente planas na próxima proposição. Tal descrição é inteiramente análoga àquela dada por Axelrod e Singer em [1].

Proposição 4.3. *Para cada árvore parcialmente plana T , seja S_T seu estrato correspondente em $\overline{C(p, q)}$. Os estratos S_T possuem as seguintes propriedades:*

- i) $\overline{C(p, q)} = \coprod_{T \in \mathcal{T}_o(p, q)} S_T$. Cada estrato S_T é uma subvariedade diferenciável de codimensão $|e(T)| = \text{número de arestas internas de } T$;*

ii) existe um único estrato aberto $S_{n_{p,q}} = C(p, q)$ $2p + q \geq 2$;

iii) para cada árvore $T \in \mathcal{T}_o(p, q)$ temos o homeomorfismo

$$S_T \cong S_{n_{p_1, q_1}} \times S_{\delta_1} \times \cdots \times S_{\delta_n}$$

onde cada δ_i é uma corola da forma $n_{k,l}$ ou l_k , e T é obtida colando-se as corolas $\delta_1, \dots, \delta_n$ em n_{p_1, q_1} , i.e., $T = \gamma(n_{p_1, q_1}; \delta_1, \dots, \delta_n)$. Aqui $p_1 + p_2 = p$ e $q_1 + q_2 = q$, onde p_2 (respec. q_2) é a soma do número de folhas espaciais (respec. planas) nas corolas $\delta_1, \dots, \delta_n$;

iv) O bordo do fecho $\overline{S_T}$ de cada estrato é dado por $\partial \overline{S_T} = \coprod_{T' \rightarrow T} S_{T'}$.

Temos assim todos os ingredientes necessários para estudarmos a seqüência espectral de $\overline{C(p, q)}$. Antes disso no entanto, é conveniente darmos alguns exemplos de espaços $\overline{C(p, q)}$ e sua correspondente estratificação rotulada por árvores parcialmente planas. O espaço $\overline{C(2, 0)}$, conhecido como “The Eye”, foi discutido no exemplo 2.20 e ali apresentamos a rotulação da sua estratificação por árvores. Nos dois exemplos abaixo discutiremos os associaedros e os cicloedros. O espaço $\overline{C(2, 1)}$ (último exemplo com dimensão ≤ 3) é apresentado nas ilustrações à página 76.

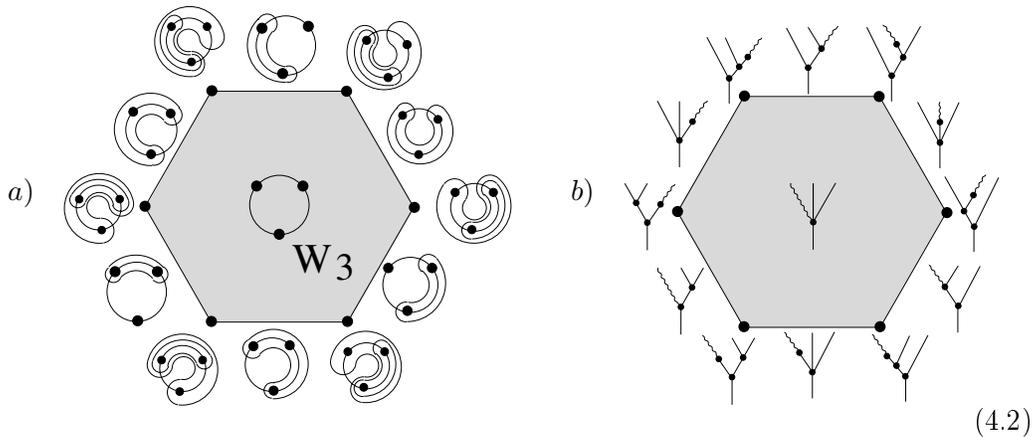
Exemplo 4.4 ($\overline{C(0, q)}$ é o associaedro K_q). Vamos considerar configurações de pontos no semi-plano superior do tipo $(0, q)$, i.e., com q pontos sobre a reta real apenas. Como estamos tomando configurações módulo transformações afins $z \mapsto az + b$, configurações do tipo $(0, q)$ podem ser consideradas como configurações de q pontos sobre o intervalo $[0, 1]$ tal que o primeiro ponto é sempre 0 e o último ponto é fixo igual a 1. É bem conhecido que a compactificação rFM do espaço de configurações de pontos no intervalo fechado é igual aos associaedros (ver [7, 25]). Assim $\overline{C(0, q)} = K_q$. A descrição acima dos estratos do bordo de $\overline{C(p, q)}$ em termos de árvores parcialmente planas é traduzida, no caso de $\overline{C(0, q)}$, à rotulagem usual das faces do associaedro K_q por árvores planas (para uma descrição clara com boas ilustrações, ver o livro [25]).

Exemplo 4.5 ($\overline{C(1, q)}$ é o cicloedro W_{q+1}). O cicloedro foi introduzido por Bott e Taubes [3] e recebeu seu nome de Stasheff [37]. É definido como a compactificação

rFM do espaço de configurações de pontos no círculo S^1 módulo o grupo de rotações $SO(2) = S^1$.

Considerando configurações com apenas um ponto no interior, obtemos um espaço de configurações que topologicamente é uma célula. Conseqüentemente, ambos espaços $\overline{C(1, q)}$ e W_{q+1} são variedades com córneres e topologicamente são apenas células q -dimensionais. Em outras palavras, ambos são hiper-poliedros (i.e., poliedros de dimensão arbitrária.). Para mostrar que eles são realmente iguais, precisamos apenas verificar que a combinatória descrevendo suas faces é a mesma.

De fato, para qualquer $q \geq 0$ as faces do cicloedro W_{q+1} são rotuladas por todas as maneiras coerentes de se inserir colchetes numa expressão de $q+1$ letras dispostas em círculo. A codimensão da face correspondendo a um dado colchete é igual ao número de colchetes inseridos, conforme ilustrado pela figura 4.2.a) (existe um ótimo artigo, com boas ilustrações, sobre os cicloedros escrito por Devadoss [6]):



Precisamos mostrar que as faces de codimensão k de $\overline{C(1, q)}$ estão também em correspondência bijetora com os colchetes sobre o círculo mencionados acima. Pela descrição dos pontos daquele espaço em termos de bolhas, sabemos que cada face de codimensão k em $\overline{C(1, q)}$ corresponde a $k + 1$ discos colados por pontos no bordo tal que exatamente um destes discos contém um ponto no interior e os outros contém apenas pontos no bordo.

Primeiramente observamos que configurações no semi-plano superior da forma (p, q) correspondem a configurações no disco fechado com p pontos no interior e q

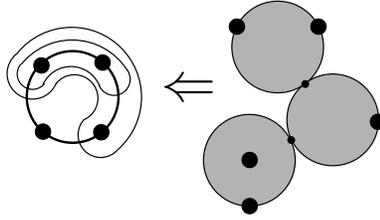


Figura 4.1:

pontos no bordo mais um ponto extra denotado ∞ , o ponto marcado no infinito. Portanto de fato temos $q+1$ pontos no bordo do disco. Para configurações degeneradas pertencentes às faces de codimensão k da compactificação $\overline{C(1, q)}$, nos referimos ao disco contendo um ponto no interior como o disco-círculo e os outros discos contendo apenas pontos no bordo serão chamados de discos-colchete. Agora, toda ‘bolha’ pode ser traduzida no seu colchete correspondente sobre o círculo da seguinte forma:

1. Considere o bordo do disco-círculo como sendo o círculo usado na descrição dos cicloedros;
2. pontos no bordo do disco-círculo correspondem a pontos no círculo que não estão dentro de nenhum colchete;
3. se um disco-colchete está colado ao disco-círculo, pontos no disco-colchete correspondem a pontos no círculo com um colchete em torno deles;
4. discos-colchetes que NÃO estão ligados ao disco-círculo devem necessariamente estar ligados a outro disco-colchete. Se dois discos-colchete estão ligados, pontos em ambos os discos correspondem a pontos no círculo com dois colchetes inseridos tais que um colchete está dentro do outro. O colchete interno será aquele que corresponde ao disco que está mais longe do disco-círculo, como ilustrado na figura 4.1.

Temos assim uma correspondência bijetora entre ‘bolhas’ no disco e ‘colchetes’ no círculo provando que os hiper-poliedros $\overline{C(1, q)}$ e W_{q+1} têm faces correspondentes em cada codimensão e portanto são iguais (hiper-poliedros equivalentes). Vimos que, em

geral, os estratos do bordo de $\overline{C(p, q)}$ são rotulados por árvores parcialmente planas. A figura 4.2.b) ilustra esta rotulagem no caso $\overline{C(1, 2)} = W_3$. Figuras ilustrando o caso $\overline{C(1, 3)} = W_4$ estão nas ilustrações à página 73. Os cicloedros bem como outros conceitos geométricos e físicos interessantes relacionados às OCHAs foram discutidos na palestra proferida por Kajiura no Nagoya Institute of Technology [15].

4.1.1 A seqüência espectral

Consideremos a filtração topológica de $\overline{C(p, q)}$ dada por seus k -bordos:

$$\overline{C(p, q)} = F^{2p+q-2} \supset F^{2p+q-3} \supset \dots \supset F^0 \supset \emptyset,$$

onde $F^i = \partial_{2p+q-2-i} \overline{C(p, q)}$, convencionando-se que $\partial_0 \overline{C(p, q)} = \overline{C(p, q)}$.

Vale a pena observar que $F^i = \coprod_{|T| \geq -i} S_T$ (equivalentemente: $F^i = \coprod_{|T| = -i} \overline{S_T}$), onde a união disjunta percorre todas as árvores $T \in \mathcal{T}_o(p, q)$ de grau $\geq -i$.

A filtração topológica de $\overline{C(p, q)}$ induz uma filtração no seu complexo de cadeias singulares e, pelo Teorema 4.15, temos uma seqüência espectral.

Proposição 4.6. *Existe uma seqüência espectral $E_{m,n}^r$ convergindo para $H_*(C(p, q))$.*

Seu termo E^1 tem a forma $E_{m,n}^1 = H_{m+n}(F^m, F^{m-1})$ e, para $n = 0$, o complexo

$$0 \rightarrow E_{2p+q-2,0}^1 \rightarrow \dots \rightarrow E_{m,0}^1 \rightarrow E_{m-1,0}^1 \rightarrow \dots \rightarrow E_{0,0}^1 \rightarrow 0$$

é isomorfo ao termo $\mathcal{N}_\infty(p, q)$ do ideal $\mathcal{N}_\infty \leq \mathcal{OC}_\infty$.

Demonstração. Pela dualidade de Lefschetz, temos:

$$\begin{aligned} E_{m,0}^1 &= H_m(F^m, F^{m-1}) = H^0(F^m \setminus F^{m-1}) = \\ &= H^0\left(\coprod_{|e(T)|=2p+q-2-m} S_T\right), \quad e(T) = \{\text{arestas internas de } T\} \\ &= \bigoplus_{|e(T)|=2p+q-2-m} k. \end{aligned}$$

Portanto, como espaço vetorial, $E_{m,0}^1$ coincide precisamente com o espaço vetorial gerado pelas árvores de grau $-m$ em $\mathcal{N}_\infty(p, q)$.

Precisamos verificar que o diferencial d^1 na seqüência espectral coincide com d definido previamente em termos do operador de expansão de vértices. Para cada árvore parcialmente plana $T \in \mathcal{T}_o(p, q)$ associamos uma subvariedade S_T , ver seção 4.1. Seu fecho $\overline{S_T}$ define uma classe relativa $[\overline{S_T}] \in H_m(F^m, F^{m-1})$, onde $m = -|T|$. O diferencial d^1 na seqüência espectral é, por construção, a relativização de $\partial\overline{S_T}$ para $[\partial\overline{S_T}] \in H_{m-1}(F^{m-1}, F^{m-2})$. Conseqüentemente, $d^1[\overline{S_T}] = [\partial\overline{S_T}]$ pode ser visto como uma combinação linear de árvores do tipo (p, q) e grau $-m + 1$. Devemos provar que, como uma combinação linear de árvores, ela coincide com o diferencial d definido para árvores, i.e., $dT = [\partial\overline{S_T}]$.

Primeiramente observamos que, conforme descrito na seção 4.1, os estratos abertos S_T satisfazem o seguinte: se T é obtida colando-se T_1 e T_2 , $T = T_1 \circ_i T_2$, então $\overline{S_T} = \overline{S_{T_1}} \times \overline{S_{T_2}}$. Assim

$$\partial\overline{S_T} = (\partial\overline{S_{T_1}}) \times \overline{S_{T_2}} + (-1)^{|S_{T_1}|} \overline{S_{T_1}} \times (\partial\overline{S_{T_2}})$$

onde $|S_{T_1}|$ denota a dimensão de S_{T_1} (igual a $-|T_1|$). Por outro lado, o diferencial nas árvores também satisfaz à regra de Leibniz:

$$d(T_1 \circ_i T_2) = dT_1 \circ_i T_2 + (-1)^{|T_1|} T_1 \circ_i dT_2.$$

Conseqüentemente, apenas precisamos verificar a igualdade $dT = [\partial\overline{S_T}]$ para as corolas $n_{p,q}$ e l_n . A igualdade neste caso segue-se facilmente da descrição das bolhas no bordo de codimensão um de $\overline{C(p, q)}$ e $\overline{C(n)}$, pois $S_{n_{p,q}} = C(p, q)$ e $S_{l_n} = C(n)$. \square

Observação 4.7. $E_{m,n}^r$ está limitada à região $2p - q - 2 \geq m \geq 0$ e $0 \geq n \geq -m$.

Observação 4.8 (OCHA e a Operada do Queijo Suíço). *A compactificação rFM define uma operada 2-colorida homotopicamente equivalente à operada do queijo suíço [41]. De fato os semi-discos superiores na operada do queijo suíço correspondem às vizinhanças dos pontos no bordo do disco fechado, bem como os discos no interior do semi-disco padrão correspondem aos pontos no interior do disco fechado. Contraindo-se as vizinhanças nos pontos obtém-se a equivalência homotópica entre as duas operadas. Concluímos que a seqüência espectral apresentada acima estabelece de maneira precisa a relação entre OCHA e a operada do queijo suíço.*

Apêndice

Seqüências Espectrais

Definição 4.9. Um módulo bigraduado diferencial sobre um anel R é uma coleção de R -módulos $E = \{E_{m,n}\}$, onde m e n são inteiros, munidos de uma aplicação R -linear de grau duplo $(-s, s-1)$

$$d : E_{m,n} \rightarrow E_{m-s, n+s-1}$$

para algum inteiro s , tal que $d \circ d = 0$.

Dado um módulo diferencial bigraduado E , podemos definir sua homologia:

$$H_{m,n}(E, d) = \frac{\ker d : E_{m,n} \rightarrow E_{m-s, n+s-1}}{\operatorname{im} d : E_{m+s, n-s+1} \rightarrow E_{m,n}}$$

Definição 4.10. Uma seqüência espectral é uma coleção de módulos diferenciais bigraduados $\{E_{\bullet, \bullet}^r, d_r\}$ para $r = 1, 2, \dots$, com d_r tendo grau duplo $(-r, r-1)$, tal que $E_{m,n}^{r+1}$ é isomorfo a $H_{m,n}(E^r, d_r)$.

Definição 4.11. Diremos que um seqüência espectral $\{E^r, d_r\}$ colapsa no seu N -ésimo termo se $d_r = 0$ para todo $r \geq N$.

Observação 4.12. Se $\{E^r, d_r\}$ colapsa no N -ésimo termo, então $E^N = E^{N+1} = \dots = E^s$ para todo $s \geq N$, ou seja, a seqüência espectral se estabiliza a partir do módulo E^N . Denotaremos tal módulo por $E^\infty = E^N = E^{N+1} = \dots$.

Definição 4.13. Uma filtração sobre um R -módulo A é uma família de submódulos $\{F^p A\}$ para $p \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\dots \subset F^{p-1} A \subset F^p A \subset F^{p+1} A \subset \dots \subset A.$$

Definição 4.14. Um R -módulo A é um módulo diferencial graduado filtrado (ou um DG -módulo filtrado) se

- 1) $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ é um módulo diferencial graduado com operador linear $d : A_n \rightarrow A_{n-1}$, de grau -1 , satisfazendo $d \circ d = 0$;
- 2) A tem uma filtração F e o diferencial d respeita a filtração, ou seja,

$$d : F^p A \rightarrow F^p A.$$

A homologia de A herda sua filtração da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F^p H(A, d) &= \text{imagem } H(F^p \xrightarrow{\iota} A) \\ &= \text{imagem } (H(F^p A, d) \xrightarrow{H(\iota)} H(A, d)) \end{aligned}$$

Teorema 4.15. Cada DG -módulo filtrado A determina uma seqüência espectral $\{E_{\bullet, \bullet}^r, d_r\}$ $r = 1, 2, \dots$ com d_r de grau duplo $(-r, r - 1)$ e

$$E_{p,q}^1 \simeq H_{p+q}(F^p A / F^{p-1} A).$$

Supondo que a filtração é limitada, isto é, para cada grau n , existem valores $s = s(n)$ e $t = t(n)$ tais que:

$$\{0\} \subset F^s A^n \subset F^{s+1} A^n \subset \dots \subset F^{t-1} A^n \subset F^t A^n = A^n,$$

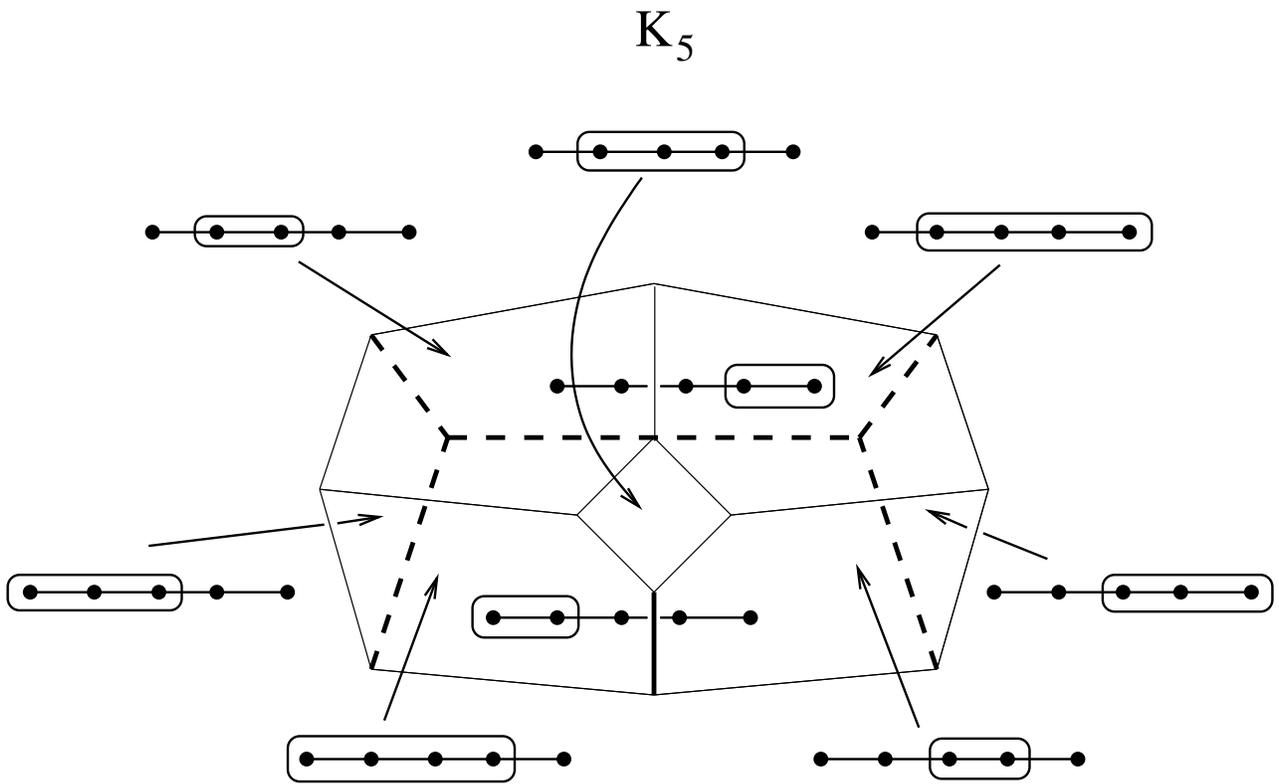
então a seqüência espectral converge para $H(A, d)$, ou seja:

$$E_{p,q}^\infty = \frac{F^p H_{p+q}(A, d)}{F^{p-1} H_{p+q}(A, d)}.$$

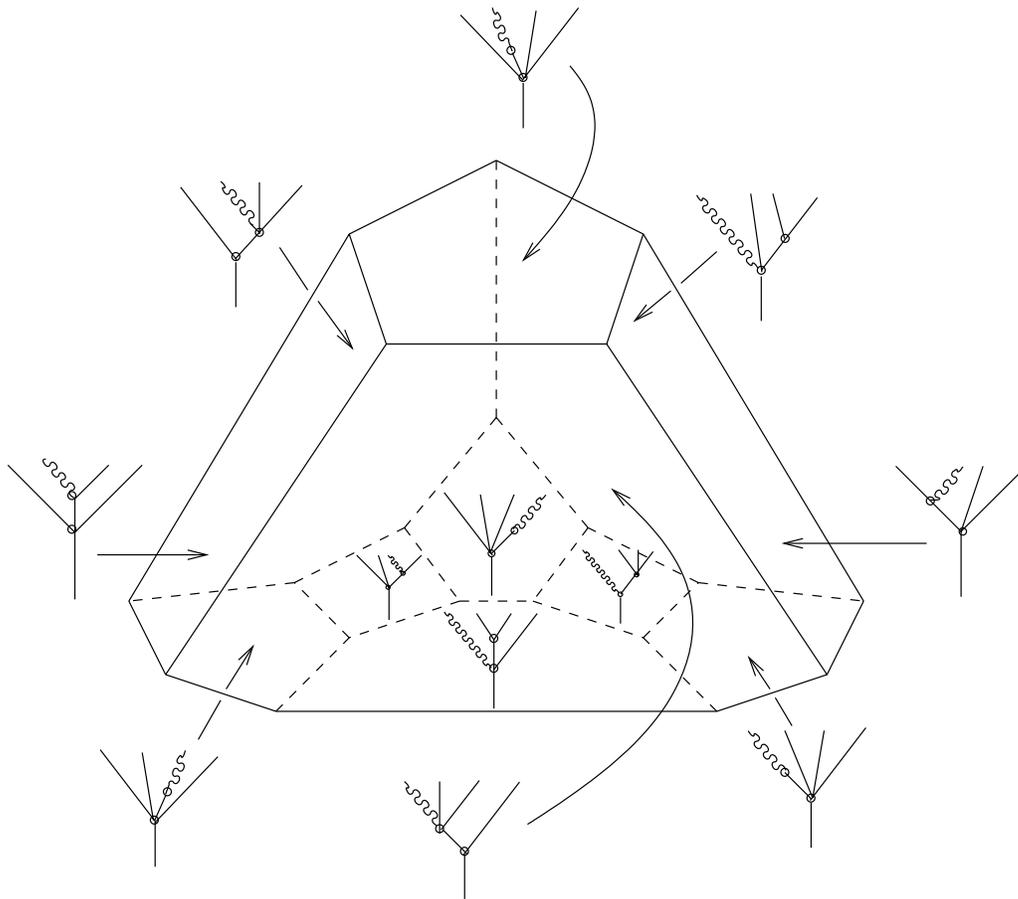
Observação 4.16. No caso em que A é um DG -espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} , a convergência expressa acima significa que

$$H_n(A, d) = \bigoplus_{p+q=n} E_{p,q}^\infty.$$

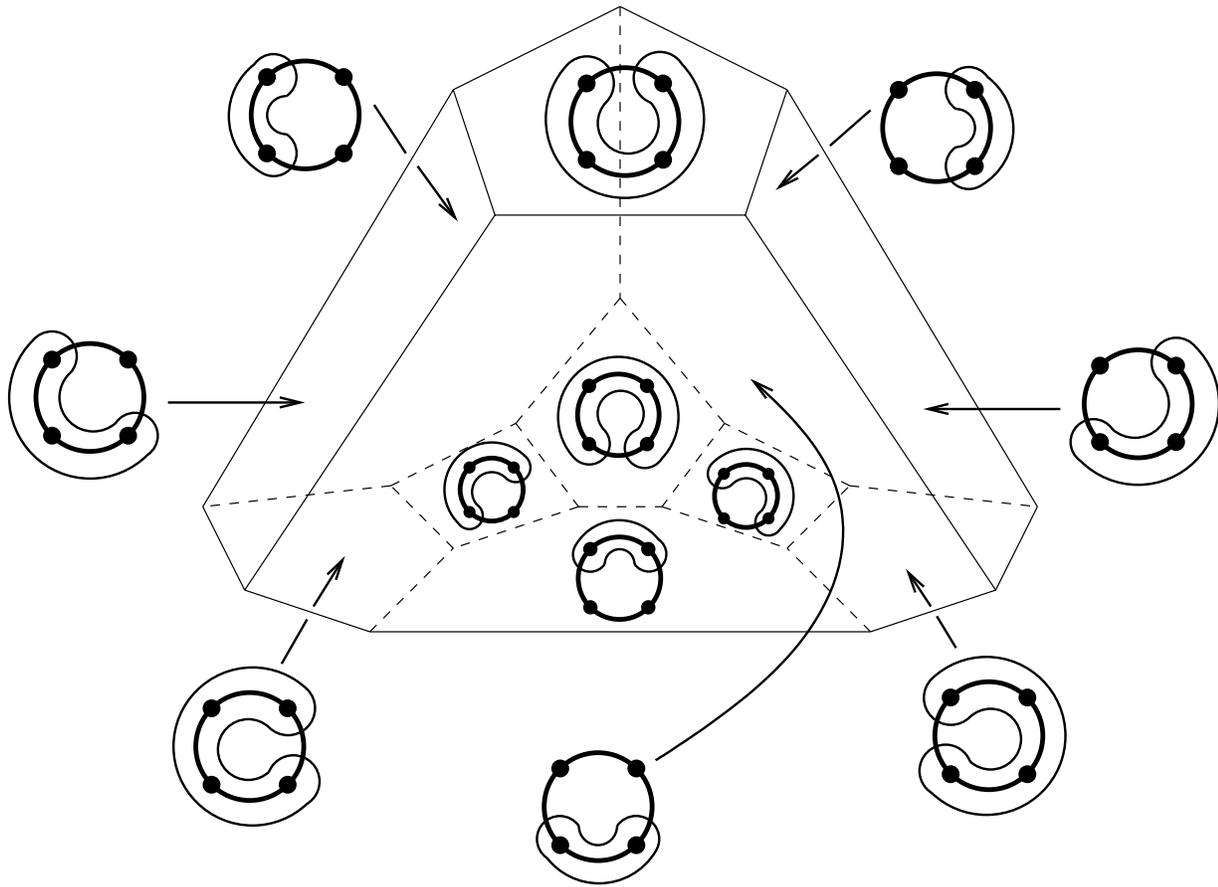
4.2 Ilustrações



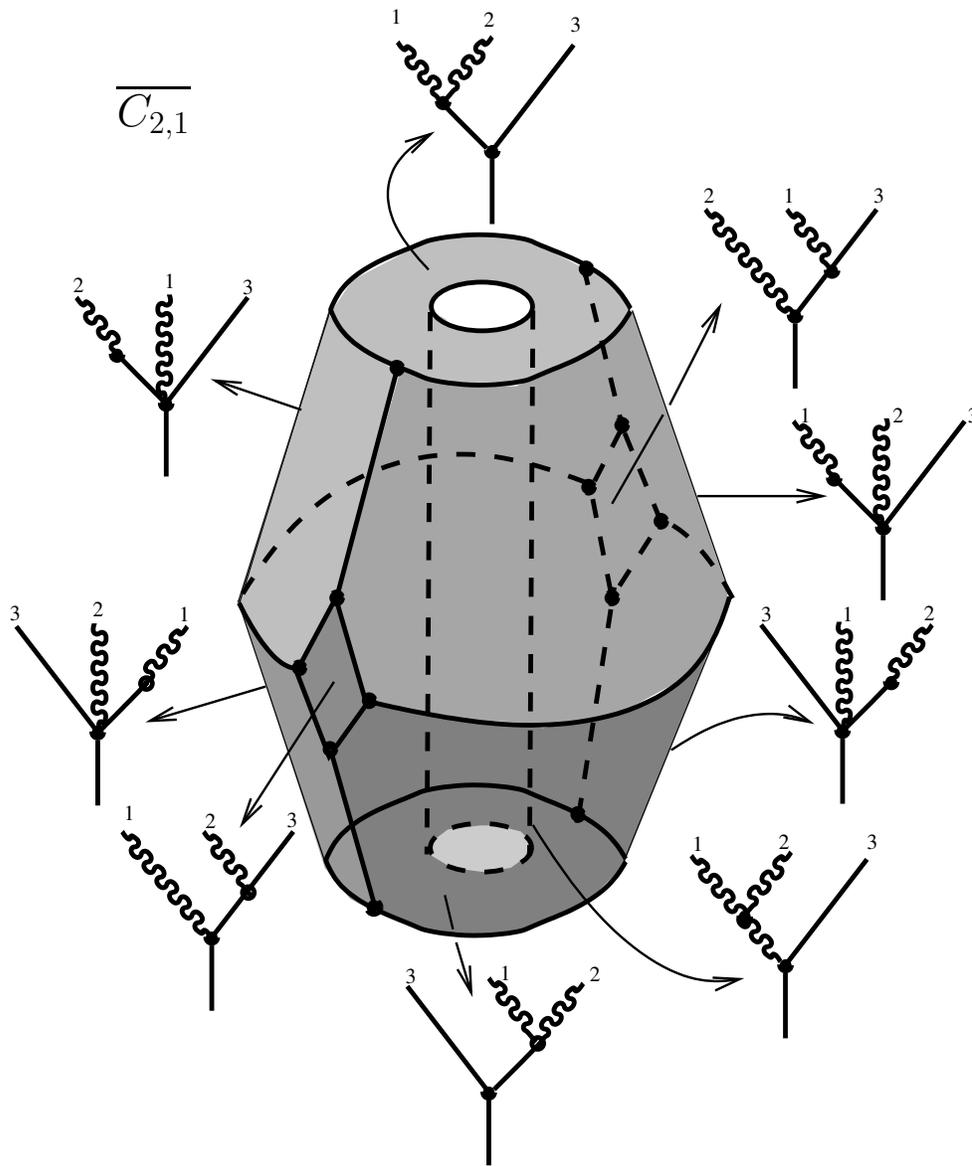
Associaedro K_5 e suas faces rotuladas por colchetes de pontos no intervalo.



Cicloedro W_4 e suas faces rotuladas por árvores parcialmente planas.



Cicloedro W_4 e suas faces rotuladas por colchetes em S^1 .



O espaço $\overline{C}_{2,1}$ e seus estratos rotulados por árvores parcialmente planas.
 Topologicamente, $\overline{C}_{2,1}$ é um toro sólido.

Capítulo 5

Conclusão

A Proposição 4.6 nos diz que a estrutura de OCHA está “codificada” na estratificação do bordo de $\overline{C(p, q)}$. A combinatória desta variedade é descrita por árvores parcialmente planas. Mas as árvores parcialmente planas que de fato aparecem em OCHA são de um tipo específico: de fato, as árvores em OCHA são obtidas a partir de corolas parcialmente planas tais que, se a corola tem raiz espacial, então todas as suas folhas são também espaciais (ver ilustrações 4.1.a) e 4.1.b)).

Tal restrição no formato das árvores é às vezes chamada de *restrições de OCHA*. Mostramos no capítulo 1 que tais restrições são intrínsecas ao espaço das coderivações da coalgebra $S^cU \otimes T^cV$. Este fato revela a beleza da estrutura que estamos estudando e mostra a estreita relação entre a estrutura topológica/combinatória da compactificação de Fulton MacPherson e a estrutura algébricas das coderivações.

Álgebras A_∞ sobre álgebras L_∞ versus OCHA

Dadas uma álgebra de Lie \mathfrak{g} e uma álgebra associativa A , temos o conceito natural de representação por derivações, definido simplesmente como um morfismo de álgebra de Lie:

$$\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(A).$$

Suponhamos que ambos espaços \mathfrak{g} e A sejam DG-espacos munidos respectivamente dos operadores diferenciais $d_{\mathfrak{g}}$ e d_A . Se o morfismo ρ for uma aplicação de cadeia em

relação aos diferenciais $d_{\mathfrak{g}}$ e d_A , dizemos que A é uma \mathfrak{g} -álgebra.

Em [14], Kajiura e Stasheff apresentam as álgebras A_∞ sobre álgebras L_∞ como a versão homotópica das \mathfrak{g} -álgebras. Álgebras A_∞ sobre álgebras L_∞ podem ser vistas como *certas* coderivações na coálgebra $S^c(L) \otimes T^c(A)$. Vamos agora reproduzir um trecho do trabalho de Kajiura e Stasheff. Logo após introduzir as álgebras A_∞ sobre álgebras L_∞ , à página 13, eles comentam:

“This is just the higher homotopy structure a mathematician would construct by the usual procedures of strong homotopy algebra. (...)

String field theory suggest that an open-closed homotopy algebra includes the addition of the maps $n_{p,0} : L^{\otimes p} \rightarrow A$ and in particular $n_{1,0} : L \rightarrow A$ corresponding to the opening of a closed string to an open one”.

Aplicações do tipo $n_{p,0} : L^{\otimes p} \rightarrow A$ não estão presentes na estrutura de álgebras A_∞ sobre álgebras L_∞ . Kajiura e Stasheff apresentam as OCHAs como uma estrutura contendo estas aplicações adicionais e definidas de modo similar às álgebras A_∞ sobre álgebras L_∞ . E mostram que as OCHAs podem também ser dadas por coderivações em $S^c(L) \otimes T^c(A)$.

O problema que nos propusemos a estudar nesse trabalho era o de determinar se existem mais estruturas que podem ser dadas por coderivações ou se as OCHAs esgotavam todas as possibilidades. Como provamos no capítulo 1, todas as coderivações em $S^c(L) \otimes T^c(A)$ são da forma de uma OCHA e portanto não existem outras estruturas de álgebras homotópicas determinadas por coderivações em $S^c(L) \otimes T^c(A)$ além das OCHAs.

O fato interessante a ser observado aqui é que, a princípio, a motivação para a definição das OCHAs era inteiramente física. O aspecto matemático envolvido, como Kajiura e Stasheff mencionam no texto mencionado acima, estaria restrito apenas às álgebras A_∞ sobre álgebras L_∞ . Pois bem, nosso trabalho mostrou que as OCHAs são também naturais de um ponto de vista puramente matemático, pois mostramos que podem ser definidas simplesmente como coderivações D :

$$D \in \text{Coder}^1(S^c(L) \otimes T^c(A)), \quad D^2 = 0.$$

Considerando-se o papel desempenhado pela compactificação do espaço dos discos de Riemann com pontos marcados em Teoria de Campo de Corda clássica (ver [16]), os resultados do capítulo 4 nos permitem ter uma idéia de como as OCHAs aparecem naquela teoria. O fato de as OCHAs aparecerem algebricamente de forma natural como coderivações diferenciais de grau 1, vem reforçar a idéia de que na maioria dos bons conceitos algébricos há uma estrutura física/geométrica subjacente.

Este fato também pode ser visto como um exemplo de *Física aplicada à matemática*: o estudo de certas teorias físicas surgidas recentemente tem levado à descoberta de novas estruturas matemáticas. Vide os desenvolvimentos da mecânica quântica e seu conseqüente impacto na matemática. O presente trabalho é um pequeno exemplo dessa tendência atual.

Abaixo sugerimos alguns problemas que podem ser explorados como continuação deste trabalho.

Resolução de operadas

Álgebras homotópicas podem ser abordadas através do conceito de *Resolução de Operadas* [26, 7, 8].

Problema 1. *Definir uma operada de espaços vetoriais \mathcal{OC} em termos de geradores e relações descritos via árvores parcialmente planas e um morfismo de operadas $\mathcal{OC}_\infty \rightarrow \mathcal{OC}$ que seja um quasi-isomorfismo, i.e., tal que induz um isomorfismo em homologia $H(\mathcal{OC}_\infty) \rightarrow \mathcal{OC}$.*

Pode-se dizer em poucas palavras que álgebras L_∞ são a versão homotópica das álgebras de Lie e álgebras A_∞ , a versão homotópica das álgebras associativas. No entanto, ainda não se sabe de qual estrutura algébrica as OCHAs são a versão homotópica. Acreditamos que a solução do problema acima fornecerá a resposta a essa pergunta.

Álgebras A_∞ sobre álgebras L_∞ são um caso particular de OCHA. Sabemos que aquela estrutura é a versão homotópica de uma \mathfrak{g} -álgebra. Conforme o trecho reproduzido no início deste capítulo, a estrutura de OCHA é obtida a partir das

álgebras A_∞ sobre álgebras L_∞ adicionando mais aplicações $n_{p,0} : L^{\otimes p} \rightarrow A$, as quais, por assim dizer, destroem as relações existentes na estrutura anterior. Daí o problema de se determinar de qual estrutura algébrica clássica (não homotópica) OCHA é a versão homotópica (ver o trabalho recente de Berger e Moerdijk sobre “Retificação de Álgebras Homotópicas” [2]).

Dualidade de Koszul

Outro problema interessante envolve a noção de Dualidade de Koszul. A demonstração de que OCHAs podem ser definidas simplesmente como coderivações diferenciais usou crucialmente uma aplicação de coálgebras definida por ‘shuffles’ (ou embaralhamento). A geometria por trás desta demonstração fica evidente quando se olha com mais calma para as árvores parcialmente planas. Mas essa relação merece ser estudada em mais detalhe. Um problema interessante é demonstrar rigorosamente a geometria por trás deste fato algébrico usando-se dualidade de Koszul [39].

Problema 2. *Uma vez estabelecida a Operada \mathcal{OC} no problema 1, usá-la para dar uma demonstração imediata do corolário 1.45.*

Um caminho possível para resolver este problema seria estender a noção usual de dualidade de Koszul para operadas quadráticas de modo a contemplar a operada \mathcal{OC} a qual, apesar de ainda não estar completamente descrita, não pode ser uma operada quadrática pois envolve um gerador linear correspondendo à aplicação $n_{1,0} : L \rightarrow A$ mencionada na citação no início deste capítulo. Uma vez estando claro quem é seu dual de Koszul $\mathcal{OC}^!$, então deve-se demonstrar que a $\mathcal{OC}^!$ -coalgebra livre cogerada por U e V é precisamente a coalgebra $S^cU \otimes T^cV$. O Corolário 1.45 (página 29) seguiria então imediatamente da proposição 3.88 do livro [25].

Estrutura nova

Outro problema interessante é procurar pela estrutura determinada pela operada \mathcal{OC} em outras áreas da matemática. Em especial aplicações $f : L \rightarrow A$ cuja imagem pertence ao centro homotópico de A . O estudo destas estruturas poderia passar

eventualmente pelo entendimento de como as OCHAs estão relacionadas com os trabalhos de Chas-Sullivan sobre *String Topology* [4, 38, 5].

Seqüência Espectral

Problema 3. *OCHA aparece na primeira coluna do termo E^1 da seqüência espectral de $\overline{C(p, q)}$. Explorar outras partes desta seqüência espectral em busca de novas estruturas de álgebras homotópicas com potenciais aplicações em Teoria de Campo de Corda.*

Ver Voronov [41].

Referências Bibliográficas

- [1] Axelrod, S. e Singer, I. M. *Chern-Simons perturbation theory. II*. Perspectives in mathematical physics, 17–49, Conf. Proc. Lecture Notes Math. Phys., III, Internat. Press, Cambridge, MA, (1994).
- [2] Berger, C. e Moerdijk, I. *Resolution of coloured operads and rectification of homotopy algebras*. math.AT/0512576.
- [3] Bott, R. e Taubes, C. *On the self-linking of knots*. Topology and physics. J. Math. Phys. 35 (1994), no. 10, 5247–5287.
- [4] Chas, M. e Sullivan, D. *String Topology*. math.GT/9911159.
- [5] Chas, M. e Sullivan, D. *Closed string operators in topology leading to Lie bialgebras and higher string algebra*. The legacy of Niels Henrik Abel, 771–784, Springer, Berlin, (2004).
- [6] Devadoss, S. L. *A space of cyclohedra*. math.QA/0102166.
- [7] Getzler, E. e Jones, J. D. S. *Operads, homotopy algebra and iterated integrals for double loop spaces*, hep-th/9403055.
- [8] Ginzburg, V. e Kapranov, M. *Koszul duality for operads*. Duke Math. J. 76 (1994), no. 1, 203–272.
- [9] Gugenheim, V. e Lambe, L., *Perturbation theory in differential homological algebra I*, Ill. J. of Math 33 no. 4, 566-582, (1989).
- [10] Harrelson, E. *On the homology of open-closed string field theory*. arXiv:math.AT/0412249
- [11] Hata, H. ; Itoh, K. ; Kugo, T. ; Kunitomo, H. ; Ogawa, K. *Manifestly covariant field theory of interacting string. I, II*. Phys. Lett. B 172 (1986), no. 2, 186–194, 195–203.

- [12] Hoefel, E. *On the coalgebra description of OCHA*.
- [13] Kajiura, H. *Homotopy algebra morphism and geometry of classical string field theories*. Nuclear Phys. B 630 (2002), no. 3, 361–432.
- [14] Kajiura, H. e Stasheff, J. *Homotopy algebras inspired by classical open-closed string field theory*. math.QA/0410291. APPEAR ON C.M.P.
- [15] Kajiura, H. *On homotopy algebras and their application to string theory*. Talk given at: Homotopy conference 2005 March, 19-21, (2005) at Nagoya Institute of Technology.
- [16] Kajiura, H. e Stasheff, J. *Open-closed homotopy algebras in mathematical physics*. hep-th/0510118.
- [17] Kassel, C. *Quantum groups*. Graduate Texts in Mathematics, 155. Springer-Verlag, New York, (1995).
- [18] Kimura, T. ; Stasheff, J. ; Voronov, A. *On operad structures of moduli spaces and string theory*. Comm. Math. Phys. 171 (1995), no. 1, 1–25.
- [19] Kontsevich, M. *Operads and motives in deformation quantization*. Moshé Flato (1937–1998). Lett. Math. Phys. 48 (1999), no. 1, 35–72.
- [20] Kontsevich, M. *Deformation quantization of Poisson manifolds*. Lett. Math. Phys. 66 (2003), no. 3, 157–216.
- [21] Lada, T. *Commutators of A-infinity structures*. Contemp Math 227, 227-233 (1999).
- [22] Lada, T. e Stasheff, J. *Introduction to sh Lie algebras for physicists*. Int. J. Theo. Phys. 32, 1087-1103, (1993).
- [23] Lada, T. e Markl, M. *Strongly homotopy Lie algebras*. Comm. Algebra, 23, 2147-2161, (1995).
- [24] Lychagin, V. *Calculus and quantizations over Hopf algebras*. Acta Appl. Math. 51 (1998), no. 3, 303–352.
- [25] Markl, M. ; Shnider, S. e Stasheff, J. *Operads in algebra, topology and physics*. Mathematical Surveys and Monographs, 96. AMS, Providence, RI, (2002).
- [26] Markl, M. *Homotopy Algebras via Resolutions of Operads*. math.AT/9808101.

- [27] May, J. P. *The geometry of iterated loop spaces*. Lectures Notes in Mathematics. Vol. 271. Springer-Verlag, Berlin-New York, (1972).
- [28] McCleary, J. *User's Guide to Spectral Sequences*, Publish or Perish, (1984).
- [29] Nakatsu, T. *Classical open-string field theory: A_∞ -algebra, renormalization group and boundary states*. Nuclear Phys. B 642 (2002), no. 1-2, 13–90.
- [30] Nest, R. e Tsygan, B. *On the cohomology ring of an algebra*. Advances in geometry, 337–370, Progr. Math., 172, Birkhäuser Boston, Boston, MA, (1999).
- [31] Nijenhuis, A. e Richardson, R. W., Jr. *Cohomology and deformations of algebraic structures*. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 406–411.
- [32] Schlessinger, M. ; Stasheff, J. *The Lie algebra structure of tangent cohomology and deformation theory*. J. Pure Appl. Algebra 38 (1985), no. 2-3, 313–322.
- [33] Stasheff, J. *On the homotopy associativity of H-spaces I*. Trans. AMS 108 (1963),275-292.
- [34] Stasheff, J. *On the homotopy associativity of H-spaces II*. Trans. AMS 108 (1963),293-312.
- [35] Stasheff, J. *The intrinsic bracket on the deformation complex of an associative algebra*. Journal of Pure and Applied Algebra 89, 231-235, (1993).
- [36] Stasheff, J. *H-spaces from a homotopy point of view*. Lecture Notes in Math., vol. 161, (1970).
- [37] Stasheff, J. *From operads to "physically inspired" theories*. Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995), 53–81, Contemp. Math., 202, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1997).
- [38] Sullivan, D. *Open and closed string field theory interpreted in classical algebraic topology*. Topology, geometry and quantum field theory, 344–357, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 308, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2004).
- [39] van der Laan, P. *Coloured Koszul duality and strongly homotopy operads*. math.QA/0312147.
- [40] Krasil'shchik, J. e Verbovetsky, A. *Homological Methods in Equations of Mathematical Physics*. math.DG/9808130
- [41] Voronov,A. *The Swiss-cheese operad*. Contemp. Math. 239, 365-373, (1999).

- [42] Zwiebach, B. *Closed-string field theory: an introduction*. Gravitation et quantifications (Les Houches, 1992), 647–678, North-Holland, Amsterdam, (1995).
- [43] Zwiebach, B. *Closed string field theory: quantum action and the Batalin-Vilkovisky master equation*. Nuclear Phys. B 390 (1993), no. 1, 33–152.