Rafael Genaro

Grupo de Holonomia e o teorema de Berger

CAMPINAS
2013

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

RAFAEL GENARO

GRUPO DE HOLONOMIA E O TEOREMA DE BERGER

Orientador: Prof. Dr. Rafael de Freitas Leão

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para obtenção do título de Mestre em matemática.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO RAFAEL GENARO,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. RAFAEL DE FREITAS LEÃO.

Assinatura do Orientador

CAMPINAS
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

G285g

Genaro, Rafael, 1989-
Grupo de holonomia e o teorema de Berger / Rafael Genaro. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Rafael de Freitas Leão.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Grupos de holonomia. 2. Geometria riemaniana. 3. Fibrados (Matemática). I. Leão, Rafael de Freitas,1979-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Holonomy group and Berger theorem
Palavras-chave em inglês:
Holonomy group
Riemannian geometry
Fiber bundles (Mathematics)
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Rafael de Freitas Leão [Orientador]
Carlos Henrique Grossi Ferreira
Marcos Benevenuto Jardim
Data de defesa: 28-06-2013
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 28 de junho de 2013 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). RAFAEL DE FREITAS LEÃO

Carlos Henrique G. R.

Prof.(a). Dr(a). CARLOS HENRIQUE GROSSI FERREIRA

MarcoJardim

Prof.(a). Dr(a). MARCOS BENEVENUTO JARDIM

Agradecimentos

Agradeço à instituição Capes e a instituição Cnpq pelas bolsas recebidas.

Agradeço a minha mãe, Maristela, que esteve sempre preocupada e me dando apoio nos momentos mais difíceis. Aos meus amigos, Lucas, André, Elizeu, Renan, Douglas e Jorge que toparam morar juntos e aturar as minhas manias e a minha presença. Aos meus amigos, entre eles Germano e Jéssica me dando conselhos importantes. Ao meu orientador, Rafael Leão, cujo deve uma paciência além do normal para aceitar o desafio de me orientar e me ajudou bastante neste período. Ao meu pai, José Roberto, e aos meus irmãos Gabriel, Felipe, Daniel e Tiago pelo o apoio moral. E por fim, agradeço a minha namorada, Gabrielle, que esteve comigo no período mais díficil, deve a paciência e a compreensão da situação e sempre me apoiou.

Resumo

Dada uma conexão sobre um fibrado vetorial podemos usa-la para construir o transporte paralelo de elementos do fibrado ao longo de curvas da variedade base. Esta operação nos fornece isomorfismos lineares entre as fibras do fibrado em questão, mas quando consideramos laços na variedade base o ponto de partida é igual ao ponto de chegada, desta forma obtemos um isomorfismo da fibra sobre este ponto nela mesma. O conjunto de isomorfismos obtidos por esta construção formam um grupo chamado Grupo de Holonomia.

Quando consideramos o fibrado tangente de uma variedade riemanniana com a conexão Levi-Civita o grupo de holonomia está intrinsecamente relacionado com a geometria da variedade. Esta foi explorada por Marcel Berger para classificar quais grupos podem aparecer como holonomia de uma variedade riemanniana. O objetivo desta dissertação é fornecer uma demonstração geométrica, obtida por Carlos Olmos, deste resultado.

Palavras-chave: Grupo de Holonomia, Geometria riemaniana, Fibrado.

Abstract

Given a connection over a vector bundle we can use it to build the parallel transport of elements in the bundle along curves of the base manifold. This function provides us with linear isomorphisms between the fibers of the bundle in question, but when we consider loops in the base manifold starting point is equal to the arrival point, this way we obtain an isomorphism of the fiber over this point in itself. The set of isomorphism obtained by this construction form a group called Holonomy Group.

When we consider the tangent bundle of a Riemannian manifold with Levi-Civita connection the holonomy group is intrinsically related to the geometry of the array. This was explored by Marcel Berger to classify which groups can appear as holonomy of a Riemannian manifold. The objective of this dissertation is to provide a geometric demonstration, obtained by Carlos Olmos, this result

Keywords: Holonomy Group, Riemannian Geometry, Fiber Bundles.

Sumário

Capítulo 1

Variedades Diferenciáveis

Como foi dito, neste capítulo iremos apresentar conceitos básicos de Topologia Diferencial. Dando destaque ao teorema de Frobenius na última seção, importante resultado para o desenvolvimento deste trabalho principalmente na demonstração do Teorema de Ambrose-Singer apresentado no capítulo 4. A teoria deste capítulo com excesão de um resultado, foi retirada dos livros *Geometry of Manifolds* de autoria de R.L. Bishop e R.J. Crittenden [4], *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups* de autoria de F. W. Warner [9] e *Foundations of Differential Geoometry, vol. 1* de autoria de S. Kobayashi e K. Nomizu.

1.1 Definições básicas

1.1.1 Variedades

Seja M um espaço topológico Hausdorff, segundo contável (base enumerável para a topologia):

Definição 1.1.1. Um sistema de coordenadas (k-dimensional) de M é um par (ϕ, U), onde U é um aberto de M e $\phi : U \to V$ é um homeomorfismo de U em um aberto simplesmente conexo V de $\mathbb{R}^k$. Dizemos que M é uma *k-variedade topológica* se para todo $p \in M$ existir um sistema de coordenadas (ϕ, U) onde $p \in U$.

Dado um sistema de coordenadas, definimos as funções coordenadas por: $x_j = \pi_j \circ \phi$, onde π_j é a projeção na j-ésima coordenada de $\mathbb{R}^k$.

Definição 1.1.2. Seja (ϕ, U) e (ψ, U') dois sistemas de coordenadas em M. Então ϕ e ψ são C^∞-compatíveis se $U \cap U' = \emptyset$ ou se as função $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap U') \to \psi(U \cap U')$ e $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap U') \to \phi(U \cap U')$ são de classe C^∞.

Definição 1.1.3. Um atlas maximal $\mathfrak{A}$ é um conjunto de sistemas de coordenadas de uma variedade topológica M que satisfaz:

1. $M = \bigcup_{(\phi,U)\in\mathfrak{A}} U$;

2. Dados $(\phi, U), (\psi, U') \in \mathfrak{A}$ então ϕ e ψ são C^∞-compatíveis;

3. $\mathfrak{A}$ é maximal com respeito aos itens (1) e (2).

Uma C^∞variedade (ou somente variedade) é o par $(M, \mathfrak{A})$, onde M é uma variedade topológica e $\mathfrak{A}$ é um atlas maximal.

Um conjunto $\mathfrak{A}_0$ que satisfaça os dois primeiros itens da primeira definição é dito apenas um atlas. Todo atlas, $\mathfrak{A}_0$, qualquer determina um atlas maximal $\mathfrak{A}$ no qual $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$, basta tomar $\mathfrak{A} = \{\phi : U \to \mathbb{R}^k : (\phi, U)$ é C^∞-relacionados com todas as cartas de $\mathfrak{A}_0\}$.

Utilizando o atlas maximal podemos definir um conceito de função diferenciável entre variedades, por isso damos ao atlas o nome de C^∞-estrutura.

Definição 1.1.4. Seja M, N duas variedades, uma função $\psi : M \to N$ é de classe C^∞ se dados quaisquer dois sistemas de coordenadas (ϕ, U) de M e (θ, V) de N, a função $\theta \circ \psi \circ \phi^{-1}$ for de classe C^∞.

Se ψ acima, for bijetora com inversa de classe C^∞, dizemos que ψ é um difeomorfismo.

Observação: Podemos ainda considerar variedades analíticas, em que trocamos a ideia da composição dos homeomorfismos serem funções diferenciáveis para funções analíticas, ou variedades complexas, modeladas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{2k} = \mathbb{C}$, onde pedimos que a composição dos sistemas coordenadas sejam funções holomorfas.

Exemplo 1.1.5.

1. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^k$ é uma variedade com a estrutura determinada pelo Atlas $\mathfrak{A} = \{(\mathbb{R}^k, Id)\}$.

2. Dado uma variedade M com a estrutura $\mathfrak{A}$, qualquer conjunto aberto $U \subset M$ é uma variedade com a mesma dimensão de M com a seguinte estrutura $\mathfrak{A}_0 = \{(V \cap U, \phi|_{V\cap U}) : (V, \phi) \in \mathfrak{A}\}$.

3. O grupo das matrizes inversíveis com entradas reais, $Gl(k, \mathbb{R})$, é uma variedade de dimensão k^2, pois é aberto em $\mathbb{R}^{k^2}$, isto ocorre devido ao fato da função determinante ser contínua e que:
$$Gl(k, \mathbb{R}) = det^{-1}(\{0\}^c).$$

4. Considere $\phi_N : S^k - \{N\} \to \mathbb{R}^k$ e $\phi_S : S^k - \{S\} \to \mathbb{R}^k$ as projeções estereográficas da esfera S^k, temos que $\mathfrak{A}_0 = \{(\phi_N, S^k - \{N\}), (\phi_S, S^k - \{S\})\}$ formam uma base de C^∞-estrutura em S^k. Portanto S^k é uma variedade.

5. Dado duas variedade $(M, \mathfrak{A}_M), (N, \mathfrak{A}_N)$, de dimensões k e d respectivamente, considere a seguinte estrutura para $M \times N$: $\mathfrak{A} = \{(U \times V, \phi, \psi) : (U, \phi) \in \mathfrak{A}_M, (V, \psi) \in \mathfrak{A}_N\}$. Portanto $M \times N$ é uma variedade de dimensão $k + d$.

6. Agora, a propriedade do espaço ser Hausdorff não segue do fato do espaço ser localmente euclidiano. Como por exemplo a união disjunta de duas retas reais com a seguinte relação de equivalência: x se relaciona com $y \Leftrightarrow x \neq 0$ e $x = y$. Localmente este espaço é euclidiano, portanto tem uma C^∞-estrutura, mas não é Hausdorff, só observar vizinhanças do zero.

7. Temos que toda função C^∞ entre variedades é necessariamente contínua.

A partir de agora esconderemos na notação de variedade a sua estrutura para facilitar a leitura, ou seja ao invés de $(M, \mathfrak{A})$ colocaremos simplesmente M.

Como comentado no exemplo acima, o motivo de pedirmos que M seja Hausdorff e 2º contável é que, com estas hipóteses, a variedade é normal, metrizável e paracompacta. Paracompacidade implica na existência de partição da unidade.

Definição 1.1.6. Uma partição da unidade em M, é uma coleção $\phi_i : i \in I$ de funções reais C^∞ em M tal que

- A coleção de suportes
$$\{supp(\phi_i) := \phi^{-1}(\mathbb{R} - \{0\}) : i \in I\}$$
é localmente finitos.

- $\sum_{i \in I} \phi_i(p) = 1$ para todo $p \in M$, e $\phi_i(p) \geq 0$ para todo $p \in M$ e $i \in I$.

Uma partição da unidade $\{\phi_i : i \in I\}$ é subordinada a uma cobertura $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ se para cada $i \in I$ existe um α tal que $supp(\phi_i) \subset U_\alpha$.

Um resultado importante é:

Teorema 1.1.7. ([9],p.10) Seja M uma variedade diferenciável e $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ uma cobertura de M. Então existe uma partição da unidade contável $\{\phi_i : i = 1, 2, ...\}$ subordinada a cobertura U_α onde $supp(\phi_i)$ é compacto para cada i.

Corolário 1.1.8. ([9],p.11) Seja G um aberto de M, e seja A um fechado de M tal que $A \subset G$. Então existe uma função C^∞, $\phi : M \to \mathbb{R}$ tal que

- $0 \leq \phi(p) \leq 1$ para todo $p \in M$.
- $\phi(p) = 1$ se $p \in A$.
- $supp(\phi) \subset G$.

1.1.2 Espaços Tangentes

Dada uma variedade M e um ponto $p \in M$ existe um espaço vetorial relacionado a p extremamente importante para o estudo daqui para frente, este espaço é conhecido como espaço tangente em p. No caso de curvas, conhecemos como a reta gerada pelo vetor velocidade naquele ponto, no caso de superfícies conhecemos como o espaço de retas que intersectam a superfície somente naquele ponto em questão.

Este espaço poderá ser caracterizador como o espaço das *derivações* de funções diferenciáveis definidas localmente em torno do ponto na variedade ou como o espaço de vetores velocidades de curvas passando por aquele ponto. Iremos apresentar ambas as definições e mostraremos que elas são equivalentes.

Definição 1.1.9. Seja M uma variedade, $p \in M$, duas funções diferenciáveis $f : U \to \mathbb{R}$ e $g : V \to \mathbb{R}$ em p, onde U e V são vizinhanças abertas de p, definem o mesmo germe se existe um aberto $W \subset U \cap V$ contendo p tal que
$$f|_W = g|_W.$$
A igualdade acima determina uma relação de equivalência entre as funções diferenciáveis definidas em abertos em torno do ponto p. O conjunto das classes de equivalência definidas em p através dos germes será chamado de *espaço de germes* do ponto p e denotaremos como $F(M, p)$.

Observe que $F(M, p)$ possui uma estrutura de álgebra sobre $\mathbb{R}$, pois as operações usuais de funções definem operações nas classes de germe de maneira natural, ou seja se $[f], [g] \in F(M, p)$, as seguintes operações estão bem definidas:
$$[f] + [g] = [f + g];$$
$$k[f] = [kf], \forall k \in \mathbb{R};$$
$$[f][g] = [fg].$$

Definição 1.1.10. Seja $p \in M$, uma derivação de M no ponto p é uma função $t : F(M,p) \to \mathbb{R}$, tal que

- $t(a[f] + b[g]) = at([f]) + bt([g])$ (linear);
- $t([f][g]) = t([f])g(p) + f(p)t([g])$ (Leibniz);

onde $[f], [g] \in F(M,p)$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Denotaremos o espaço das derivações em M no ponto p como $Der(p)$.

Já a segunda maneira da definição de vetores tangentes é mais intuitiva. Definimos o espaço tangente em termos de vetores velocidades de curvas sobre a variedade.

Seja M uma variedade e fixe um ponto $p \in M$. Considere todas as curvas diferenciáveis $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tais que $\gamma(0) = p$ e iremos definir a seguinte relação de equivalência: Duas curvas γ_1 e γ_2 são equivalentes se dado qualquer sistema de coordenadas (ϕ, U)

$$\frac{d(\phi \circ \gamma_1)}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{d(\phi \circ \gamma_2)}{dt}\bigg|_{t=0}.$$

O espaço das classes de equivalência definida pela relação acima será chamado de espaço tangente no ponto p, um elemento do espaço tangente será chamado de vetor tangente e denotaremos por $[\gamma]$ onde γ é uma curva passando pelo ponto p.

É fácil ver que a união dos vetores tangentes no ponto p denotado como T_pM, e o espaço das derivações no ponto p, $Der(p)$, são espaços vetoriais. Mostraremos que o espaço das derivações é naturalmente isomorfo ao espaço tangente, mas para isso devemos demonstrar alguns resultados.

Repare que se $[c] \in F(M,p)$ for uma função constante, então para qualquer derivação t temos $t(c) = 0$.

Seja $\phi = (x_1, ..., x_k)$ um sistema coordenadas de $p \in M$, a derivada parcial em p com respeito a x_i, denotado como $D_{x_i}(p)$, é a derivação definida como

$$D_{x_i}(m)f = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial u_i}(\phi(p)),$$

que também é denotado por $D_{x_i}f(p)$, onde as coordenadas u_i são as de $\mathbb{R}^k$.

Agora defina

$$F_p = \{[f] \in F(M,p) : f(p) = 0\},$$

repare que F_p é um ideal de $F(M,p)$, pois se $[f] \in F_p$ e $[g] \in F(M,p)$ temos $[f][g] = [fg]$, logo $f(p)g(p) = 0$. Definindo $F_p^2 = \{[f][g] :$ tal que $[f],[g] \in F_p\}$.

Teorema 1.1.11. ([9],p.13) O espaço das derivações no ponto p, $Der(p)$, é naturalmente isomorfo ao espaço dual $(F_p/F_p^2)^*$.

Demonstração. Se $h \in F_p^2$, então h pode ser expresso na forma $h = \sum_i f_i g_i$, com $f_i, g_i \in F_p, \forall i$. Se $f, g \in F_p$, e t é uma derivação em p temos

$$t(fg) = t(f)g(p) + t(g)f(p) = 0 \Rightarrow t|_{F_p^2} = 0.$$

Portanto, $t \in Der(p)$ é naturalmente um funcional em F_p que se anula em F_p^2.

Agora, seja $l \in (F_p/F_p^2)^*$. Queremos definir uma derivação em função de l. Seja f_0 a função constante igual a $f(p)$, $f_0(m) = f(p), \forall m \in M$. Note que $f_0 - f \in F_p$ e $f_0 - f(p) = 0$. Tome $v_l([f]) = l(\overline{f - f_0})$, onde $\overline{f-f_0}$ indica a classe de equivalência do quociente de F_p por F_p^2, e o germe é dito como $[f]$, v_l é linear por construção, agora se $[f],[g] \in F(M,p)$:

$$v_l([fg]) = l(\overline{fg - fg_0}) = l(\overline{(f-f_0)(g-g_0)} + \overline{(f-f_0)g_0} + \overline{f_0(g-g_0)}),$$

como, $(f-f_0)(g-g_0)$ é o produto de duas funções que se anulam em p, temos

$$l(\overline{(f-f_0)(g-g_0)}) = 0$$

e daí

$$v_l([fg]) = g(p)v_l([f]) + f(p)v_l([g]).$$

Portanto, v_l é uma derivação.

As duas operações que descrevemos, são inversas, ou seja a composta delas é a identidade em ambos os espaços. O isomorfismo é natural pois não depende da expressão dos funcionais em funções coordenadas. $\square$

Agora iremos enunciar a série de Taylor que será útil para provarmos que a dimensão do espaço tangente em um ponto é igual a dimensão da variedade. Ao contrário dos outros resultados deste capítulo, somente este não foi retirado em [4] e [9].

Lema 1.1.12. [14] Seja g uma função de classe C^k em um aberto convexo $U \subset \mathbb{R}^k$ ao redor de $p \in U$. Então para todo $q \in U$ vale

$$g(q) = g(p) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial x_i}(p)(x_i(q) - x_i(p)) + \sum_{i,j}(x_i(q) - x_i(p))(x_j(q) - x_j(p))h_{ij}(q),$$

onde h é o resto.

Teorema 1.1.13. ([9],p.13) $dim(F_p/F_p^2)^* = dim(M)$.

Demonstração. Seja $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, $\phi : U \subset M \to \mathbb{R}^k$ um sistema de coordenadas no ponto $p \in M$ e seja $f_1 = f \circ \phi^{-1}$, que por abuso de notação será denotada como f. Segundo a expansão de Taylor,

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(x_i - x_i^0) + O(2),$$

onde x_i é a i-ésima projeção e $x_i^0 = x_i(p)$. Como f é C^∞, temos que $O(2)$ também é C^∞. Daí, utilizando a mesma notação da demonstração do teorema 1.14,

$$\overline{f - f(p)} = \overline{\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(x_i - x_i^0)} + \overline{O(2)}.$$

Por definição $[O(2)] \in F_p^2$, assim quocientando F_p por F_p^2, $\overline{f - \overline{f}}$ é escrito como combinação linear dos elementos $\overline{x_i - x_i^0}$, portanto estes geram este espaço. Para ver que eles são l.i., suponha que $\sum a_i[x_i - x_i^0] \in F_p^2$, então $\sum a_i[x_i - x_i^0] = \sum[f_j][g_j]$, onde $[f_j][g_j] \in F_p$. Assim

$$\frac{\partial}{\partial x_k}|_p \sum a_i \overline{x_i - x_i^0} = \sum \frac{\partial}{\partial x_k}|_p \overline{f_j} g_j(p) + \sum \frac{\partial}{\partial x_k}|_p \overline{g_j} f(p) = 0,$$

daí $a_i = 0$, para qualquer i. $\square$

Corolário 1.1.14. *dim $Der(p) = dim\ M, \forall p \in M$.*

Definição 1.1.15. Sejam $p \in M$, $\phi : U \to \mathbb{R}^k$ um sistema de coordenadas em torno de p. Se $\phi = (x_1, ..., x_k)$,para cada $i = 1, ..., k$, definimos a derivação $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}_p([f]) = \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial r_i}_{\phi(p)},$$

onde $[f] \in F(M, p)$ e $(r_i, ..., r_k)$ são as coordenadas usuais de $\mathbb{R}^k$

Proposição 1.1.16. Dado $v \in Der(p)$ temos $v = \sum_i v(x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}$. Em particular $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\}$ formam uma base de $Der(p)$.

Demonstração. Lembramos que $\{\overline{x_i - x_i^0}\}$ formava uma base de F_p/F_p^2. Queremos mostrar que v aplicado a um elemento desta base será igual a $\sum_j v(x_j)\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ aplicado a este mesmo elemento da base. Deste modo eles coincidirão como funcional sobre F_p/F_p^2. Agora $v([x_i - x_i^0]) = v([x_i]) = v(x_i)$, e por outro lado

$$\sum_i v(x_j)\frac{\partial}{\partial x_j}|_p[x_i - x_i^0] = \sum_j v(x_j)\frac{\partial}{\partial x_j}|_p(x_i) = v(x_i).$$

□

Como foi dito anteriormente o espaço das derivações no ponto p é naturalmente isomorfo ao espaço tangente naquele ponto, pois dado um caminho $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ podemos induzir uma derivação naturalmente, como

$$\gamma_*(t) : F(M, \gamma(t)) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto (f \circ \gamma)'(t).$$

Agora dada uma derivação podemos extrair uma curva. De fato, seja $v = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j}|_p$, tome a curva $\gamma(t) = \sum_j a_j \sigma_j(t)$, onde σ_j são as curvas coordenadas, ou seja $\sigma_{j_*}(t) = \frac{\partial}{\partial x_j}|_p$.

Desta forma, quando nos referirmos ao espaço tangente podemos pensar tanto como derivações ou como vetores tangentes a curvas.

Definição 1.1.17. Seja $F : M \to N$ uma função C^∞ entre variedades. A diferencial da função é definida por $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ da seguinte maneira:

$$dF_p(v)([f]) = v([f \circ F]),$$

onde $v \in T_pM$ e $[f] \in F(N, F(p))$.

Repare que a diferencial de uma função é linear.

Definição 1.1.18. Uma função $F : M \to N$ de classe C^∞ entre variedades é dita singular em $p \in M$ se dF_p for uma transformação singular.

Considere agora M uma d-variedade, N uma k-variedade, $F : M \to N$ de classe C^∞, $(x_1, ..., x_d)$ um sistema de coordenadas de M e $(y_1, ..., y_k)$ um sistema de coordenadas de N. Dado $v \in T_pM$ temos que $dF_p(v) \in T_{F(p)}N$ logo:

$$\begin{aligned} dF(v)(f) &= v(f \circ F) \\ &= \sum v^i \tfrac{\partial}{\partial x_i}(f \circ F) \\ &= \sum v^i \tfrac{\partial f}{\partial y_i}\tfrac{\partial F_i}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

De onde inferimos que os novos coeficientes são $v_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$ e obtemos a expressão em coordenadas. Portanto, escrevendo $dF(v)(f)$ em função dos elementos da base $\frac{\partial}{\partial y_j}$, obtemos a matriz $[dF(v)]_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$, chamada de matriz Jacobiana de F.

Proposição 1.1.19. ([9],p.17) **Regra da Cadeia**: Sejam $F : M \to N$ e $G : N \to P$ duas funções C^∞ entre variedades. Então $d(G \circ F) = dG \circ dF$.

Demonstração. Temos que

$$d(G \circ F)(v)(f) = v((f \circ G) \circ F) = dF(v)(f \circ G) = dG(dF(v))(f).$$

□

É usual denotarmos a função dF por F_* e chama-lo de push-forward.

Teorema 1.1.20. ([9],p.18) Seja $F : M \to N$ uma função C^∞ e M conexa. Se $dF_p = 0, \forall p \in M$, então F é constante.

Demonstração. Seja (ϕ, U) e (ψ, V) dois sistemas de coordenadas de p e $F(p)$ respectivamente. Se $dF_p = 0$, então a sua jacobiana é nula. Assim a função $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ tem a jacobiana nula, como os sistemas de coordenadas são homeomorfismos, então F é localmente constante. Como M é conexa, F é constante. □

Definição 1.1.21. Dada uma função $F : M \to N$ entre variedades, chamamos de difeomorfismo se F for uma bijeção tal que $F^{-1} \in C^\infty$.

Existem vários resultados clássicos envolvendo a diferencial de função, uns dos mais importantes é o Teorema da Função inversa

Teorema 1.1.22. ([9],p.23) Seja $F : M \to N$ uma função C^∞ entre variedades de mesma dimensão. Se a matriz jacobiana de F for não singular em um ponto $m \in M$, então existe um aberto $A \subset M$ que contém m tal que $f|_A : A \to f(A)$ é um difeomorfismo.

1.2 Campos de Vetores e Campos Tensoriais

1.2.1 Campos de Vetores

Seja M uma variedade, o seguinte conjunto

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M,$$

é chamado de fibrado tangente de M, a projeção $\pi : TM \to M$ é definida como $\pi(u) = p$ onde $u \in T_p M$.

Teorema 1.2.1. ([9],p.19) Seja M uma variedade de dimensão k. Então TM é uma variedade de dimensão $2k$.

Demonstração. Seja $q \in TM$ e (ϕ, U) um sistema de coordenadas em torno do ponto $\pi(q) = p \in M$, com $\phi = (x_1, ..., x_k)$, defina $dx_i \in (T_p M)^*$ como sendo $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$ (delta de Kronecker), assim podemos estender de forma natural $dx_i \in (\pi^{-1}(U))^*$. Então $\pi^{-1}(U)$ será homeomorfo a $U \times \mathbb{R}^k$ via o homeomorfismo:

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k,$$
$$\Phi(v) = (\pi(v), dx_1(v), ..., dx_k(v)).$$

Assim consideramos TM com uma topologia exigindo que Φ definida, para cada sistema de coordenadas, seja difeomorfismo. Assim TM temos os seguintes sistemas de coordenadas

$$\Psi : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{2k}$$

$$v \mapsto (\phi(\pi(v)), dx_1(v), ..., dx_k(v)).$$

□

Por construção temos que π é C^∞, dim(TM)=2dim(M). Se $f : M \to N$, definimos a função $df : TM \to TN$ como $df(v)(g) = df_{\pi(f(v))}(v)(g) = v(g \circ f), \forall g \in F(N, f(\pi(v)))$ e temos que $df \in C^\infty$ se $f \in C^\infty$.

Definição 1.2.2. Um campo de vetores X ao longo de uma curva $\sigma : [a,b] \to M$ diferenciável é uma função $X : [a,b] \to TM$ tal que $\pi \circ X = \sigma$. Um campo de vetores X em um aberto $U \subset M$ é uma função $X : U \to TM$ tal que $\pi \circ X = Id_U$.

Podemos considerar um campo agindo em uma função C^∞, $f : U \to \mathbb{R}$ da seguinte forma: $X(f)(p) = X_p(f), \forall p \in U$. Repare que o conjunto dos campos de vetores em U (denotado por $\mathfrak{X}(U)$), formam um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e um módulo sobre o anel das funções C^∞ em U, porém este espaço pode não ser finitamente gerado, dependendo do aberto U.

Proposição 1.2.3. ([9],p.35) Seja X um campo de vetores em M, então são equivalentes:

1. $X \in C^\infty$;
2. Se (U, ϕ) é carta em torno de M, $X|_U = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, com $a_i : M \to \mathbb{R} \in C^\infty$;
3. $Xf \in C^\infty$, $\forall V \subset M$ aberto e $f \in C^\infty(V)$.

Definição 1.2.4. Seja $X \in \mathfrak{X}(U)$, onde U é um aberto de M. Uma curva integral de X é uma curva $\gamma : (a,b) \to U$ diferenciável, tal que $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)), \forall t \in (a,b)$ e $X|_\gamma = \dot{\gamma}$.

Será que curvas integrais realmente existem? Seja $\phi = (x_1, ..., x_k)$ uma carta definida em um aberto U de M, tome uma curva $\gamma : (a,b) \to U$ diferenciável, um campo $X \in \mathfrak{X}(U)$ e considere a seguinte equação

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)), \forall t \in (a,b);$$

tomando $\gamma_i = x_i \circ \gamma$, sabemos que

$$\dot{\gamma}(t) = \sum \frac{\partial \gamma_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i},$$
$$X = \sum X(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Assim obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$X(x_i)(\gamma(t)) = \frac{\partial \gamma_i}{\partial t}(t), \text{ para } i = 1, ..., k.$$

Pela existência e unicidade de solução deste sistema em um intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ existe curvas integrais.

Assim temos o seguinte resultado:

Proposição 1.2.5. ([9],p.37) Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então para todo $p \in M$, existe $a(p), b(p) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e uma curva, tal que $\gamma_p : (a(p), b(p)) \to M$ tais que:

1. $0 \in (a(p), b(p))$ e $\gamma_p(0) = p$;

2. γ_p é uma curva integral de X;

3. γ_p é única à menos de restrição do domínio.

Dizemos que um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ é dito completo se para todo $p \in M$, se existir uma extensão $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to M$ da curva integral γ_p do campo X. Assim temos o seguinte resultado que poderá ser encontrado em *Foundations of Differential Geoometry, vol. 1*, [15]:

Proposição 1.2.6. ([15],p.14) Em uma variedade compacta M, todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ é completo.

Existe várias maneiras de derivar campos de vetores, uma delas é a derivação de Lie, para defini-la precisamos definir o grupo uniparamétrico.

Definição 1.2.7. Tomando $X \in \mathfrak{X}(M)$.Para cada $t \in \mathbb{R}$, definimos uma transformação ϕ_X^t com o domínio:

$$\mathcal{D}_t = \{p \in M : t \in (a(p), b(p))\},$$

por

$$\phi_X^t(p) = \gamma_p(t).$$

Chamamos ϕ_X^t de fluxo do campo X no tempo t.

Proposição 1.2.8. ([9],p.37) Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$, então

1. Para todo $p \in M$, existe uma aberto $V \subset M$ contendo p e $\epsilon > 0$, tais que $(t, p) \mapsto \phi_X^t(p)$ é definida e é C^∞ em $(-\epsilon, \epsilon) \times V$;

2. $\mathcal{D}_t$ é aberto para todo $t \in \mathbb{R}$;

3. $\phi_X^t : \mathcal{D}_t \to \mathcal{D}_{-t}$ é difeomorfismo com inversa ϕ_X^{-t};

4. Se $s, t \in \mathbb{R}$ então o domínio de $\phi_X^s \circ \phi_X^t$ está contido em $\mathcal{D}_{t+s}$ e $\phi_X^s \circ \phi_X^t = \phi_X^{s+t}$.

Assim, chamaremos $\{\phi_X^t : t \in \mathbb{R}\}$ de grupo uniparamétrico associado ao campo X.

Definição 1.2.9. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$, definimos a derivada de Lie em relação ao campo X como:

$$\mathfrak{L}_X : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

tal que se $Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $p \in M$ temos

$$(\mathfrak{L}_X Y)_p = \lim_{t \to 0} \frac{d\phi_X^{-t}(Y_{\phi_X^t})_p - Y_p}{t}.$$

Seria interessante se $\mathfrak{X}(M)$ tiver uma estrutura de álgebra, isto é um espaço vetorial com um mapa produto $\cdot : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, porém não podemos considerar a composição de campos, pois a composição de campos nem sempre é campo. De fato, se $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in C^\infty$ são funções definidas em um domínio em comum e $p \in M$, por Leibiniz temos a seguinte propriedade:

$$X(fg)p = X_p(fg) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f) = (fX(g) + gX(f))p,$$

ou seja todo campo respeita Leibiniz. Agora se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$Y(X(fg)) = Y(fX(g) + gX(f)) = Y(X(g))f + X(g)Y(f) + Y(g)X(f) + Y(X(f))g,$$

logo $Y(X)$ respeita Leibiniz se, e somente se $X(f)Y(g) + X(g)Y(f) = 0$. Segue então uma definição de produto entre dois campos que demonstraremos que irá coincidir com a derivada de Lie.

Definição 1.2.10. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o colchete de Lie entre estes dois campos agindo em uma função $f : U \subset M \to \mathbb{R}$, é dado por

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf).$$

Repare que o colchete entre dois campos diferenciáveis será um campo diferenciável. É fácil ver que o colchete é uma função bilinear que respeita Leibiniz e com isso é fácil provar a seguinte proposição:

Proposição 1.2.11. ([9],p.36) Seja $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(U)$ com U um aberto de M, então

1. $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$;
2. $[X, Y] = -[Y, X]$;
3. $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$.

Teorema 1.2.12. ([4],p.17) Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ temos que $\mathfrak{L}_X Y = [X, Y]$.

Demonstração. Tome $f \in C^\infty(M)$ e seja γ uma curva integral do campo X, por definição

$$d\phi_X^{-t}(Y(\gamma(t)))f = Y(\gamma(t))(f \circ \phi_X^{-t}).$$

Agora defina $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$G(t, r) = f(\phi_X^{-t}(\phi_Y^r(\gamma(t)))).$$

Provaremos primeiro que $D_2G(t, 0) = Y(\gamma(t))(f \circ \phi_X^{-t})$, de fato tomando $\eta(r)$ como uma curva integral de Y e $h = f \circ \phi_X^t$ temos

$$\begin{aligned} D_2G(t,0) &= \lim_{r\to 0} \tfrac{f(\phi_X^{-t}(\phi_Y^r(\gamma(t)))) - f(\phi_X^{-t}(\phi_Y^0(\gamma(t))))}{r} \\ &= \tfrac{d}{dr} h \circ \phi_Y^r(\gamma(t))|_{r=0} \\ &= \tfrac{d}{dr} h \circ \eta(r)|_{r=0} \\ &= d_{\eta(r)}h.\dot{\eta}(r)|_{r=0} \\ &= d_{\eta(r)}h.Y(\eta(r))|_{r=0} \\ &= d_{\gamma(t)}h.Y(\phi_Y^0(\gamma(t))) \\ &= Y(\gamma(t))(f \circ \phi_X^{-t}). \end{aligned}$$

Assim,

$$D_1(D_2G(0,0)) = D_1(Y(\gamma(t))(f \circ \phi_X^{-t})) = \frac{d}{dt}(d\phi_X^{-t}(Y(\gamma(t)))f)|_{t=0} = (\mathfrak{L}_X Y)_p f,$$

onde $p = \gamma(0)$. Defina agora $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como

$$H(t, r, s) = f(\phi_X^s \circ_Y^r (\gamma(t))),$$

assim

$$D_1 D_2 G(0,0) = D_1 D_2 H(0,0,0) - D_2 D_3 H(0,0,0).$$

Desde que

$$H(t, r, 0) = f(\phi_X^0(\phi_Y^r(\gamma(0)))) = f(\phi_Y^r(\gamma(t))).$$

Segue que

$$D_2 H(t, 0, 0) = \frac{d}{dt} f \circ \eta(0) = d_{\eta(0)} f \dot{(\eta)}(0) = d_{\gamma(t)} f Y(\gamma(t)) = Y f(\gamma(t));$$

e assim

$$D_1 D_2 H(0,0,0) = \frac{d}{dt}(Y f(\gamma(0))) = d_{\gamma(0)} Y f X(\gamma(0)) = X(p) Y f.$$

Agora,

$$D_3 H(0, r, 0) = d_{\phi_Y^r(\gamma(0))} f X(\phi_Y^r(\gamma(0))) = X f(\phi_Y^r(p)),$$

e por fim

$$D_2 D_3 H(0,0,0) = d_{\gamma(0)} X f \dot{\gamma}(0) = Y(p) X f.$$

$\square$

Agora iremos construir a interpretação geométrica do colchete de Lie entre dois campos. Seja $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $p \in M$, tome g_1 como a curva integral de X começando em p, para $c > 0$ suficientemente pequeno tome g_2 a curva integral de Y começando em $g_1(c)$, g_3 a curva integral de $-X$ começando em $g_2(c)$, g_4 a curva integral de $-Y$ começando em $g_3(c)$ e por fim defina a curva $g(c^2) = g_4(c)$.

Teorema 1.2.13. ([4],p.18) Seja $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ e a curva g definida acima, então

$$[X, Y](p)f = \lim_{t \to 0} g_*(t) f, \forall f \in F(M, p).$$

Demonstração. Defina as seguintes funções:

$$h_1(t, c) = g_2(t) = \phi_Y^t(g_1(c)),$$

$$h_2(t, c) = g_3(t) = \phi_{-X}^t(g_2(c)),$$

$$h_3(t, c) = g_4(t) = \phi_{-Y}^t(g_3(c)).$$

Temos que $h_1, h_2, h_3 \in C^\infty$ pois eles são composições de fluxos de campos. Tome $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(t) = h_3(t, t)$ e $g(t^2) = h(t)$. Primeiro mostraremos que $h_*(0) = 0$: Repare que

1. $D_2(f \circ h_1)(0, t) = X f(h_1(0, t))$;
2. $D_1(f \circ h_1) = Y f \circ h_1$;
3. $D_1(f \circ h_2) = -X f \circ h_2$;
4. $D_1(f \circ h_3) = -Y f \circ h_3$;

5. $h_3(0,t) = h_2(t,t)$;

6. $h_2(0,t) = h_1(t,t)$.

Agora, pela regra da cadeia:

$$(f \circ h)'(0) = D_1(f \circ h_3)(0,0) + D_2(f \circ h_3)(0,0) =$$

de 4 e 5

$$= -Yf \circ h_3(0,0) + D_1(f \circ h_2)(0,0) + D_2(f \circ h_2)(0,0) =$$

de 3, 6, 1 e 2

$$= -Yf(p) - Xf(p) + D_1(f \circ h_1)(0,0) + D_2(f \circ h_1)(0,0) = 0.$$

Logo $h_*(0) = 0$. Agora

$$(f \circ h)''(0) = D_1^2(0,0) + 2D_1D_2(f \circ h_3)(0,0) + D_2^2(f \circ h_3)(0,0).$$

De 4, temos:

$$D_1D_1(f \circ h_3)(0,0) = -\frac{d}{dt}(Yf \circ g_4(0)) = Y^2f(g_4(0)) = Y^2f(p).$$

De 4 e 5

$$2D_2D_1(f \circ h_3)(0,0) = -2D_1(Yf \circ h_2(0,0)) - 2D_2(Yf \circ h_2(0,0)).$$

Temos também que

$$D_2(f \circ h_3)(0,0) = (f \circ h_2)'(0,0) = D_1(f \circ h_2(0,0)) + D_2(f \circ h_2(0,0)),$$

e portanto

$$D_2D_2(f \circ h_3(0,0)) = D_1^2(f \circ h_3)(0,0) + 2D_2D_1(f \circ h_2)(0,0) + D_2^2(f \circ h_2)(0,0).$$

Assim

$$(f \circ h)''(0) = Y^2f(p) - 2D_1(Yf \circ h_2)(0,0) - 2D_2(Yf \circ h_2)(0,0) +$$
$$+ D_1^2(f \circ h_2)(0,0) + 2D_1D_2(f \circ h_2) + D_2^2(f \circ h_2)(0,0).$$

Realizando este mesmo processo nos termos com as função h_2 e recursivamente nos termos com as função h_1 processo análogo mostramos que

$$(f \circ h)''(0) = 2XYf(p) - 2YXf(p).$$

Provamos que $(f \circ h)''(0)$ é um vetor tangente de p e por fim

$$\lim_{t \to 0_+} g_*(t)(f) = \lim_{t \to 0_+} (dg)_t(f) = \lim_{t \to 0_+} (dg_4)_{\sqrt{t}}(f) = \frac{1}{2}(f \circ h)''(0).$$

□

Agora, se $\Phi : M \to N$ for uma função diferenciável sobrejetora entre variedades e $X \in \mathfrak{X}(M)$ será que podemos definir um campo de vetores $Y(\Phi(m)) = d\Phi_m(X(m))$, para todo $m \in M$? A resposta é nem sempre, pois pode ser que tenhamos $\Phi(m) = \Phi(n)$ para $m, n \in M$ porém com $d\Phi_m(X(m)) \neq d\Phi(X(n))$. Caso possamos definir tal campo, temos a seguinte definição:

Definição 1.2.14. Dada $\Phi : M \to N$ uma função C^∞ entre variedades. Dizemos que um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ é Φ-relacionado com o campo $Y \in \mathfrak{X}(N)$ se:

$$d\Phi \circ X = Y \circ \Phi,$$

isto é, se $p \in M$, então $d\phi \circ X(p) = Y(\phi(p))$.

Teorema 1.2.15. ([9],p.41) Seja $\Phi : M \to N$ uma função C^∞ entre variedades, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(N)$. Se X for Φ-relacionado com X_1 e Y for Φ-relacionado com Y_1 então $[X, Y]$ é Φ-relacionado com $[X_1, Y_1]$.

Demonstração. Dados $m \in M$ e $f \in F(N, \Phi(m))$ temos

$$\begin{gathered}
d\Phi([X,Y]_m)f = [X,Y](m)(f \circ \Phi) = \\
= X(m)(Y(f \circ \Phi)) - Y(m)(X(f \circ \Phi)) = \\
= X(m)(d\Phi \circ Y(f)) - Y(m)(d\Phi \circ X(f)) = \\
= X(m)(Y_1(f) \circ \Phi) - Y(m)(X_1(f) \circ \Phi) = \\
= d\Phi(X(m))(Y_1 f) - d\Phi(Y)(X_1(f)) = \\
= X_1(\Phi(m))(Y_1 f) - Y_1(\Phi(m))(X_1 f) = \\
= [X_1, Y_1](\Phi(m))f.
\end{gathered}$$

□

1.2.2 Campos Tensoriais

Considere um espaço vetorial V a priori. Usualmente V^* denota o espaço dual de V, conhecido como o espaço dos covetores ou funcionais lineares de V. Devido a um teorema clássico da teoria de Álgebra Linear chamada a propriedade universal do produto tensorial, podemos definir tensores da seguinte maneira:

Definição 1.2.16.

- Um k-tensor covariante em V é um mapa multilinear

$$F : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{-cópias}} \to \mathbb{R}.$$

- Similarmente, um l-tensor contravariante é um mapa multilinear

$$F : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l\text{-cópias}} \to \mathbb{R}.$$

- Um tensor do tipo (l, k), ou um tensor contravariante de grau l e covariante de grau k, é um mapa multilinear

$$F : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l\text{-cópias}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{-cópias}} \to \mathbb{R}.$$

Denotaremos como T^l como o espaço dos l-tensores contravariantes, T_k como o espaço dos k-tensores covariantes e por fim T^l_k como o espaço dos tensores do tipo (l, k).

O produto tensorial pode ser definido da seguinte maneira: Se $F \in T^l_k$ e $G \in T^q_p$ então o tensor $F \otimes G \in T^{l+q}_{k+p}$ é definido:

$$F \otimes G(w^1, ..., w^{l+q}, v_1, ..., v_{k+p}) = F(w^1, ..., w^l, v_1, ..., v_k)G(w^{l+1}, ..., w^{l+q}, v_{k+1}, ...v_{k+p}).$$

Se $\{E_1, .., E_n\}$ for uma base para V e $\{\phi^1, ..., \phi^n\}$ sua base dual correspondente, definida por $\phi^i(E_j) = \delta^i_j$ (delta de Kronecker). Uma base para T^l_k é dado pelo conjunto de todos os tensores da forma

$$E_{j_1} \otimes ... \otimes E_{j_l} \otimes \phi^{i_1} \otimes ... \otimes \phi^{i_k},$$

com os índices i_p, j_q variando de 1 até n. Estes tensores agem nos elementos básicos da seguinte forma

$$E_{j_1} \otimes ... \otimes E_{j_l} \otimes \phi^{i_1} \otimes ... \otimes \phi^{i_k}(\phi^{s_i}, ..., \phi^{s_l}, E_{r_1}, ..., E_{r_k}) = \delta^S_J,$$

onde $\delta^S_J = \delta^{s_1}_{j_1}...\delta^{s_l}_{j_l}\delta^{i_1}_{r_1}...\delta^{i_k}_{r_k}$. Para qualquer tensor $F \in T^l_k$, denotaremos $F^{j_1...j_l}_{i_1...i_k}$ como sendo o coeficiente de F que acompanha o seguinte elemento da base, $E_{j_1} \otimes ... \otimes E_{j_l} \otimes \phi^{i_1} \otimes ... \otimes \phi^{i_k}$.

Agora dado $p \in M$, considerando $V = T_pM$ denotaremos $T^l_k(p)$ como T^l_k construído a partir do espaço vetorial V.

Definição 1.2.17. Um campo tensorial do tipo (l, k) é um mapa definido em um subconjunto N da variedade M que associa a cada ponto $p \in N$ um tensor $F_p \in T^l_k(p)$.

Devido a discussão acima, dado um sistema de coordenadas $(x_1, ..., x_n, U)$ centrado em um ponto p, temos que os vetores do tipo

$$\{X_1 \otimes \cdots \otimes X_{j_l} \otimes dx_{i_l} \otimes \cdots \otimes dx_{j_k}\}$$

formam uma base de $T^l_k(p)$ onde $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}|_p$. Assim um campo tensorial K do tipo (l, k) definido em U pode ser escrito como

$$K_p = \sum K^{i_1...i_l}_{j_1...j_k} X_{i_1} \otimes \cdots \otimes X_{i_l} \otimes dx_{i_l} \otimes \cdots \otimes dx_{j_k},$$

onde $\{K^{i_1...i_l}_{j_1...j_k}\}$ são funções em U, chamada de componentes de K com respeito ao sistema de coordenadas $(x_1, ..., x_n, U)$. Dizemos que o campo tensorial, K, é C^∞ se as funções $\{K^{i_1...i_l}_{j_1...j_k}\}$ forem C^∞. Pode-se verificar que esta noção de suavidade é independente do sistema de coordenadas.

Agora segue algumas propriedades de campos tensoriais demonstradas em *Foundations of Differential Geoometry, vol. 1*, [15]:

Proposição 1.2.18. ([15],p.26)

- Dado um campo tensorial K do tipo $(0, k)$ em M e tomando F como a álgebra das funções reais C^∞ definidas em M. Podemos considerar K como um mapa F-linear $K : \mathfrak{X}(M) \times ... \times \mathfrak{X}(M) \to F$ definida da seguinte maneira

$$K(f_1X_1, ..., f_kX_k) = f_1...f_kK(X_1, ..., X_k), \forall f_j \in F, X_j \in \mathfrak{X}(M).$$

- Se K for um $(0, k)$ tensor, $X_i = Y_i \in \mathfrak{X}(M)$ for uma vizinhança U de um ponto p, então

$$K(X_1, ..., X_k) = K(Y_1, ..., Y_k)$$

em U.

1.3 Subvariedades

Definição 1.3.1. Seja $F : M \to N$ uma função C^∞ entre variedades:

- F é uma imersão se dF_p for injetora para qualquer $p \in M$.
- F é dita uma submersão se dF_p for sobrejetora para qualquer $p \in M$.

Definição 1.3.2. Uma variedade N é dita subvariedade imersa em M se existe uma imersão injetiva $i : N \to M$.

Na definição acima, a topologia de N nem sempre coincide com a topologia natural de M. De fato, se considerarmos a seguinte curva: $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$:

Repare que na vizinhança de $p = \lim_{t\to\infty} \gamma(t)$, se considerarmos a topologia como subespaço de $\mathbb{R}^2$ não é localmente euclidiano. Porém com a topologia herdada de $\mathbb{R}$, a $Im(\gamma)$ é uma variedade.

Para resolvermos este problema iremos definir variedade mergulhada.

Definição 1.3.3. Dada $F : N \to M$ uma imersão injetora é chamada de mergulho se $F : N \to F(N)$ for um homeomorfismo olhando $F(N)$ com a topologia induzida de subespaço de M. Dizemos que a variedade N é uma subvariedade mergulhada em M se existir um mergulho entre as duas.

Definição 1.3.4. Seja $f : M \to N$ uma função C^∞. Dizemos que $y \in N$ é valor regular se $\forall x \in f^{-1}(y)$, df_x for sobrejetiva.

Se $y \notin Im(f)$ então por vacuidade ele é valor regular.

O seguinte resultado tem uma versão muito mais geral em *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, [9], na página 31.

Teorema 1.3.5. ([9],p.31) Seja $f : M \to N$ uma função C^∞. Se $y \in N$ for um valor regular de f então $f^{-1}(y)$ é uma subvariedade de dimensão igual a $dim(M) - dim(N)$.

Demonstração. Por definição, para todo $x \in f^{-1}(y)$, df_x é sobrejetiva. Daí, pelo teorema da forma local das submersões [11], existem cartas $(x_1, ..., x_p)$ em torno de x e $(y_1, ..., y_q)$ em torno de $f(x) = y$ tais que $y_i(y) = 0$ e $f(x_1, ..., x_p) = (x_1, ..., x_q)$. Então $f^{-1}(y)$ no sistema de coordenadas $(x_1, ..., x_p)$ é dado por $(0, ..., 0, x_{q+1}, ..., x_p)$. Se a carta $(x_1, ..., x_p)$ for definida no aberto $x \in U \subset M$, então podemos considerar $V = U \cap f^{-1}(y)$ e $(x_{q+1}, ..., x_p)$ será a carta de $f^{-1}(y)$ definida em V. $\square$

Exemplo 1.3.6. O conjunto $O(n) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : AA^t = Id\}$ é uma subvariedade de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. De fato, $O(n)$ será a imagem inversa de um valor regular da seguinte função:

$$f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to S(n, \mathbb{R}) \subset M_{n\times n}(\mathbb{R}),$$

$$A \mapsto AA^t,$$

onde $S(n, \mathbb{R})$ é o espaço vetorial das matrizes simétricas. Iremos provar este fato, seja $A \in O(n), B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ então

$$df_A B = \frac{d}{dt} f(A + tB)|_{t=0},$$

mas

$$f(A + tB) = AA^t + tAB^t + tBA^t + t^2 BB^t,$$

assim

$$df_A B = AB^t + BA^t.$$

Se $C \in S(n, \mathbb{R})$, tome $B = \frac{1}{2}CA$ daí $df_A B = C$ o que implica que para todo $A \in O(n)$, df_A é sobrejetiva e portanto $Id \in S(n, \mathbb{R})$ é um valor regular de f. Assim $O(n) = f^{-1}(Id)$ é uma subvariedade de dimensão $n(n-1)/2$.

Agora, se considerarmos $SO(n)$, como o conjunto das matrizes de determinante igual a 1, será também uma subvariedade de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ via a imagem inversa do 1 via a função determinante. Pelo fato de $det(A) = det(A^t)$, temos que $SO(n) \subset O(n)$.

Teorema 1.3.7. [11] Sejam $f : M \to N \in C^\infty$, $y \in N$ um valor regular de f. Então $T_x f^{-1}(y) = ker(df_x), \forall x \in f^{-1}(y)$.

Demonstração. Em $f^{-1}(y)$, f é uma função constante, logo $T_x f^{-1}(y) \subset ker(df_x)$ para todo $x \in f^{-1}(y)$. Como $dim(Im(f)) = dim(N)$ e $dim(M) = dim(T_x M) = dim(ker(df_x)) + dim(Im(f))$ temos que $dim(ker(df_x)) = dim(T_x f^{-1}(y))$ e portanto $T_x f^{-1}(y) = ker(df_x)$ para todo $x \in f^{-1}(y)$. □

1.4 Distribuição e Integrabilidade

Seja M uma variedade de dimensão n e tome $p \leq n$.

Definição 1.4.1. Uma p-distribuição em M, é uma função θ definida em M que associa a cada $m \in M$ a um subespaço vetorial $\theta(m) \subset T_m M$. Uma p-distribuição θ de M é de classe C^∞ em $m \in M$ se existir $\{X_1, ..., X_p\}$ campos de vetores C^∞ definidos em uma vizinhança V de m, tais que para quaisquer $q \in V$ temos que $\{X_1 q, ..., X_p q\}$ formam uma base para $\theta(q)$.

Definição 1.4.2. Dada uma p-distribuição θ de M, uma variedade integral N de θ é uma subvariedade mergulhada de M tal que

$$d\Phi(T_n N) = \theta(\Phi(n)),$$

onde $\Phi : N \to M$ é um mergulho de N em M.

A distribuição θ é integrável se para todo $m \in M$, existe uma variedade integral de θ que contém m.

Definição 1.4.3. Uma p-distribuição, θ, de M é dita involutiva se dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tais que $X(m), Y(m) \in \theta(m), \forall m \in M$, temos que $[X,Y](m) \in \theta(m), \forall m \in M$.

Existe um importante teorema que caracteriza as distribuições integráveis como distribuições involutivas chamado de teorema de Frobenius. Para demonstrar este resultado precisaremos da seguinte proposição que pode ser encontrada demonstrada em *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, [9].

Proposição 1.4.4. ([9],p.40) Seja $p \in M$, onde M é uma variedade de dimensão k, $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X(p) \neq 0$. Então existe uma carta (U, ϕ) com funções coordenadas $(x_1, ..., x_k)$ em uma vizinhança de p tal que

$$X|_U = \frac{\partial}{\partial x_1}|_U.$$

Teorema 1.4.5. ([9],p.42)**Frobenius.** Seja M uma variedade de d-dimensional, θ uma p-distribuição de M. Então θ é integrável se, e somente se, θ é involutiva.

Demonstração.

$\Longrightarrow$

Seja $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos ao longo de θ. Tome N a variedade integral sobre um $m \in M$ de θ e $\Phi : N \to M$ seu respectivo mergulho e suponha que $\Phi(n) = m$. Como, para cada $n \in N$

$$d\Phi : T_n N \to \theta(\Phi(n))$$

é um isomorfismo, existe $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(N)$ tais que $d\Phi(\widetilde{X}) = X \circ \Phi$ e $d\Phi(\widetilde{Y}) = Y \circ \Phi$. Portanto, X e $\widetilde{X}$, Y e $\widetilde{Y}$ são ambos Φ-relacionados, pelo teorema 1.48 temos que

$$[X, Y](m) = d\Phi([\widetilde{X}, \widetilde{Y}](n)) \in \theta(m).$$

$\Longleftarrow$

Para provar que θ é integrável iremos mostrar que existe um sistema de coordenadas (U, ϕ) centrado em um ponto m, com funções coordenadas $x_1, ..., x_k$ tal que se tomarmos $x_i = \textit{constante}$ para todo $i \in \{p+1, ..., k\}$ gera uma variedade integral de θ. Faremos por indução em p. Para $p = 1$, escolha um campo de vetores X ao longo de θ, definido em uma vizinhança de m, tal que $X(m) \neq 0$. Pela proposição 1.49, existe um sistema de coordenadas $(U, (x_1, ..., x_k))$ tal que

$$X|_U = \frac{\partial}{\partial x_1}|_U.$$

Assuma que o teorema vale para $p-1$ e suponha que θ seja uma p-distribuição. Como θ é suave, existe $\{X_1, ..., X_p\}$ campos de vetores que geram θ em uma vizinhança $\widetilde{V}$ de m. Pela proposição 1.60, existe um sistema de coordenadas $(V, (y_1, ..., y_k))$ centrado em m, com $V \subset \widetilde{V}$, tal que

$$X_1|_V = \frac{\partial}{\partial y_1}|_V.$$

Em V, tome os novos campos:

$$Y_1 = X_1,$$

$$Y_i = X_i - X_i(y_i)X_1, \text{ para } i = 2, ..., p.$$

Logo os campos $\{Y_1, ..., Y_p\}$ são l.i. e geram θ em V. Seja S uma fatia com $y_1 = 0$ e tome os campos $Z_i = Y_i|_S$ para $i = 2, ..., p$. Assim

$$Y_i(y_1) = X_i(y_1) - X_i \frac{\partial}{\partial y_1}(y_1) = 0,$$

e Z_i são campos de vetores em S, isto é, $Z_i(q) \in T_q S, \forall q \in S$. Agora $\{Z_2, ..., Z_p\}$ gera uma p-1-distribuição γ de S. Afirmamos que γ é involutiva, de fato, os $\{Z_i\}_i$ são Φ-relacionados com $\{Y_i\}_i$, onde $\Phi : S \to M$ é a inclusão de S em M, e pelo teorema 1.48 $[Z_i, Z_j]$ são Φ-relacionados com $[Y_i, Y_j]$ para $1 < i, j \leq p$. Agora $[Y_i, Y_j]$ não tem nenhuma componente na direção de Y_1 e portanto, existem funções $c_{ijk} \in C^\infty$, tais que

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{k=2}^{p} c_{ijk} Y_k,$$

em V, logo

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=2}^{p} c_{ijk}|_S Z_k.$$

Portanto γ é involutiva. Por hipótese de indução, existe um sistema de coordenadas $(w_2, ..., w_k)$ em uma vizinhança de $m \in S$ tal que se tomarmos $w_i = constante$ para $i > p$, gerará a variedade integral de γ nesta vizinhança. As funções

$$x_1 = y_1,$$

$$x_j = w_j \circ \pi, j = 2, ..., k,$$

onde $\pi : V \to S$ é a projeção natural no sistema de coordenadas $(y_1, ..., y_d)$, são definidas na mesma vizinhança de $m \in M$, não dependem de m e todos anulam em m. Assim existe um sistema de coordenadas (U, ϕ) com funções coordenadas $x_1, ..., x_k$ em uma vizinhança adequada U de m.

Vamos provar agora que, em U:

$$Y_i(x_{p+r}) = 0, i = 1, .., p, r = 1, ..., d - p,$$

pois assim teríamos que $\{\partial/\partial x_i\}$ formaria uma base para θ em U e assim, tomando $x_i = constante, i = p, ..., k$ formaria a variedade integral de θ em U. Assim, observe que, em U:

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = 1, \frac{\partial x_j}{\partial y_1} = 0, j = 2, ..., k$$

e assim

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},$$

em U. Portanto $Y_1(x_{p+r}) = 0$, para todo $r = 1, ..., k - r$. Agora seja $i \in \{2, ..., p\}$ e $r \in \{1, ..., k - p\}$. Temos

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(Y_i(x_{p+r})) = Y_1(Y_i(x_{p+r})) = [Y_1, Y_i](x_{p+r}).$$

Pelo fato de θ ser involutiva, temos que existem funções $c_{ik} \in C^\infty$ tais que

$$[Y_1, Y_i] = \sum_{l=1}^{p} c_{il} Y_l.$$

Portanto

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(Y_i(x_{p+r})) = \sum_{l=2} c_{il} Y_l(x_{p+r}).$$

Tome as fatias de U da forma $x_2 = constante, ..., x_k = constante$. Em tal fatia, $Y_i(x_{p+r})$ é uma função somente de x_1 e assim teríamos um sistema de p-1 equações diferenciais homogêneas lineares, quando variamos o i. Tal sistema tem uma única solução quando dados os valores iniciais. Como o sistema é homogêneo, a função 0 é solução. Mas para cada fatia tem um único ponto em $S \cap U$ e

$$Y_i(x_{p+r}) = Z_i(w_{p+r}) = 0,$$

pois a variedade integral da distribuição γ em S é dado pelo sistema de coordenadas w. Logo

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(Y_i(x_{p+r})) = 0 \Rightarrow Y_i(x_{p+r}) = 0,$$

em U. $\square$

Capítulo 2

Teoria de Fibrados

Neste capítulo, iremos apresentar a teoria básica de fibrados. Na primeira seção apresentaremos os conceitos mais básicos da Teoria de Grupos de Lie, necessários para continuar o nosso estudo. Na segunda seção, definiremos fibrado principal, exibindo vários exemplos inclusive o fibrado das bases. Agora, de um fibrado principal podemos definir um fibrado associado, este será o tema da terceira seção e exibimos nesta a definição de espaço tangente. Por fim, na quarta seção, trabalharemos a noção de conexão em fibrados e definiremos o transporte paralelo, importante elemento de geometria diferencial e essencial para este trabalho. A teoria deste capítulo foi retirada dos livros *Geometry of Manifolds* de autoria de R.L. Bishop e R.J. Crittenden [4], *Foundations of Differential Geoometry, vol. 1* de autoria de S. Kobayashi e K. Nomizu [15], *Compact Manifolds with Special Holonomy* de autoria de D. Joyce *Joyce* e por fim *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups* de autoria de F. W. Warner *Warner*.

2.1 Grupos de Lie

Definição 2.1.1. Um grupo de Lie G é um conjunto que possui uma estrutura de grupo e uma estrutura de variedade, tais que as operações de grupos sejam C^∞, isto é, as funções: $G \times G \to G$ tal que $(g, h) \mapsto gh$ e $G \to G$ tal que $g \mapsto g^{-1}$, são C^∞.

Exemplo 2.1.2.

1. $Gl(k, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie com respeito a operação de multiplicação de matrizes.

2. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^k$ é um grupo de Lie em respeito a adição.

3. O círculo S^1 é um grupo de Lie com a multiplicação de números complexos.

4. $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ é um grupo de Lie com a multiplicação usual de números complexos.

5. O produto cartesiano de dois grupos de Lie H, G com a estrutura de variedade produto e a seguinte operação:
$$(H \times G) \times (H \times G) \to H \times G;$$
$$((g_1, h_1), (g_2, h_2)) \mapsto (g_1 g_2, h_1 h_2),$$
é um grupo de Lie.

6. O n-toro T^n, pois $T^n = S^1 \times ... \times S^1$.

7. Seja $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ e considere $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ com a estrutura de variedade produto e a estrutura de grupo definido pela operação:
$$(x, y)(z, w) = (xz, xw + y).$$
Este é um grupo de Lie conhecido como o grupo dos movimentos afins de $\mathbb{R}$.

8. Agora, tome $Gl(k, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^k$ com a operação
$$(A, v)(A_1, v_1) = (AA_1, Av_1 + v).$$
Este é o grupo de Lie dos movimentos afins de $\mathbb{R}^k$.

9. O subgrupo $SO(n) \subset M_{n\times n}$, das matrizes com o determinante igual a 1 é um grupo de Lie.

Definição 2.1.3. Um subgrupo de Lie é um subgrupo que também é uma subvariedade de um grupo de Lie.

Para cada grupo de Lie, temos uma Álgebra associada. Provaremos nesta seção que o espaço tangente de um Grupo de Lie é uma Álgebra munido de um produto chamado colchete.

Definição 2.1.4. Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial $\mathfrak{h}$ munido de uma função bilinear $[,] : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$, chamada colchete, tal que

1. $[x, x] = 0, \forall x \in \mathfrak{h}$;
2. $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0, \forall x, y, z \in \mathfrak{h}$, (Identidade de Jacobi).

Repare que se $x, y \in \mathfrak{h}$ temos $[x, y] = -[y, x]$, pois
$$0 = [x - y, x - y] = [x, x] - [y, x] - [x, y] + [y, y] = -[x, y] - [y, x].$$

Exemplo 2.1.5.

1. Se M é uma variedade, o espaço dos campos de vetores em M, $\mathfrak{X}(M)$ formam uma álgebra de Lie de dimensão infinita.

2. Considerando $gl(k, \mathbb{R})$ como o conjunto de todas as transformações lineares de $\mathbb{R}^k$ sobre $\mathbb{R}$ munido da seguinte operação:
$$[A, B] = AB - BA, \forall A, B \in gl(k, \mathbb{R}),$$
temos que esta operação satisfaz as propriedades de colchete e portanto $gl(k, \mathbb{R})$ é uma álgebra de Lie. Analogamente, o espaço de todas as transformações lineares de um espaço vetorial V, $gl(V)$ é uma álgebra de Lie.

3. Para qualquer espaço vetorial V, a álgebra de Lie abeliana em V, é definida com o seguinte colchete:
$$[x, y] = 0.$$

4. Seja $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ duas álgebras de Lie, então $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ é uma álgebra de Lie com o colchete:
$$[x + y, x' + y'] = [x, x'] + [y, y'].$$

Definição 2.1.6.

- Uma sub álgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, é um subespaço de $\mathfrak{g}$ que é fechado para a operação colchete de $\mathfrak{g}$.
- Um ideal de $\mathfrak{g}$ é uma sub-álgebra $\mathfrak{h}$, tal que:
$$[x, y] \in \mathfrak{h}, \forall x \in \mathfrak{g} \text{ e } \forall y \in \mathfrak{h}.$$
- Dizemos que $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, onde $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ são álgebras de Lie, é um homomorfismo se:
$$\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)], \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$
- ϕ é um isomorfismo entre $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ se for um homomorfismo bijetor.

Definição 2.1.7. Seja G um grupo de Lie. Um campo vetorial invariante a esquerda de G é um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(G)$, tal que dada qualquer translação à esquerda
$$L_g : G \to G,$$
$$h \mapsto gh,$$
então
$$dL_g(X(h)) = X(gh), \forall h \in G.$$
De maneira análoga podemos definir campo vetorial invariante à direita ou seja,
$$dR_g(X(h)) = X(gh), \forall h \in G.$$

Repare que dL_g é um isomorfismo com a inversa dada por $(dL_g)^{-1} = dL_{g^{-1}}$. O próximo resultado mostra que o espaço tangente de um Grupo de Lie é a álgebra dos campos vetoriais esquerda invariante.

Proposição 2.1.8. ([9],p.85) Seja G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ o conjunto de todos os campos invariantes à esquerda.

1. $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial real e a função $\alpha : \mathfrak{g} \to T_eG$ definida por $\alpha(X) = X(e)$ é um isomorfismo de $\mathfrak{g}$ com T_eG, onde e é o elemento neutro de G.
2. Se $X \in \mathfrak{g}$ então $X \in C^\infty$.
3. Se $X, Y \in \mathfrak{g}$ temos $[X, Y] \in \mathfrak{g}$.
4. $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie.

O conjunto $\mathfrak{g}$ definido na proposição acima é chamado de álgebra de Lie do grupo de Lie G.

Devida a proposição anterior, temos de imediato que grupos de Lie localmente isomorfos têm álgebras de lie isomorfas, pois definem o mesmo espaço tangente. Temos também que a álgebra de Lie de um produto de grupos de Lie é a soma direta das respectivas álgebras de Lie.

E para finalizar está seção, segue algumas definições necessárias para o progresso deste trabalho.

Definição 2.1.9. Seja G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie associada. A função exponencial do grupo G é o mapa:
$$Exp : \mathfrak{g} \to G$$
$$A \mapsto \phi_A^1(e),$$
onde $e \in G$ é o elemento neutro e ϕ_A^t é o grupo uniparamétrico de A.

Para cada $g \in G$, o automorfismo $ad(g)$ é definido como $ad(g) : G \to G$ tal que $ad(g)h = ghg^{-1}, \forall h \in G$. Todo automorfismo de um grupo de Lie G induz um automorfismo na sua algebra de Lie $\mathfrak{g}$. Assim definimos

Definição 2.1.10. A representação $g \mapsto ad(g)$ de G é chamado de representação adjunta de G em $\mathfrak{g}$ tal que:

$$ad(g)V := (R_{g^{-1}})_* V, \forall g \in G, V \in \mathfrak{g}.$$

Seja G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável.

Definição 2.1.11. Dizemos que G age em M de forma diferenciável pela esquerda se existe uma função C^∞, $\phi : G \times M \to M$ e escrevemos $\phi(g, m) = gm$, satisfazendo as seguintes condições:

- Para cada $g \in G$, a função $g : M \to M$, dada por $g(m) = gm$, é um difeomorfismo;
- Para todo $g, h \in G$, $m \in M$, $(gh)m = g(hm)$.

Agora se $gm = m$ para todo $m \in M$ implicar que $g = e$ =identidade de G, dizemos que o G age efetivamente em M;
G age transitivamente pela esquerda se para todo $m, n \in M$, $\exists g \in G$ tal que $g(m) = n$;
G age livremente se dado $g \in G$ existir $m \in M$ tal que $gm = m$, então $g = e$.

2.2 Fibrados Principais

Definição 2.2.1. Seja M uma variedade e G um grupo de Lie. Um fibrado principal em M com o grupo G é uma variedade P munida de uma ação de G em P, tais que:

1. G age livremente em P pela direita, $P \times G \to P$.
2. M é o espaço quociente de P pela relação de equivalência induzida pela ação de G e a projeção canônica $\pi : P \to M$ é diferenciável.
3. P é localmente trivial, isto é, para todo $x \in M$ existe uma vizinhança aberta U de x e um difeomorfismo
$$\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$$
$$u \mapsto (\pi(u), \phi(u)),$$
onde ϕ é uma função que satisfaz $\phi(R_a u) = \phi(u)a$.

A partir de agora iremos denotar $R_a(u) = ua$.

Chamaremos a variedade P de espaço total, M de espaço base, G de grupo de estrutura, π de projeção e para cada $x \in M$ chamaremos o conjunto $\pi^{-1}(x)$ de fibra sobre x.

Repare que as fibras são difeomorfas ao grupo G, de fato, dado $p \in P$ induzimos o seguinte difeomorfismo:

$$p : G \to \pi^{-1}(\pi(p)),$$
$$g \mapsto pg.$$

A função p é C^∞ pois a ação $P \times G \to P$ é C^∞. Dado $h \in \pi^{-1}(\pi(p))$, como G age transitivamente nas fibras, existe um g_h tal que $pg_h = h$, logo defina a seguinte função:

$$p^{-1} : \pi^{-1}(\pi(p)) \to G,$$

$$h \mapsto g_h,$$

p^{-1} será a função inversa de p e ela é C^∞ pois se $pr_2 : \pi^{-1}(\pi(p)) \to G$ for a projeção em G, considerando a vizinhança trivial dada pela terceira propriedade da definição de fibrado, temos que pr_2 é uma composição da ação $P \times G \to P$ com p^{-1}. Agora a função p poderá ser vista como homomorfismo de grupos de Lie, identificando $p \in \pi^{-1}(\pi(p))$ como o elemento neutro da fibra e dado q, l dois elementos arbitrários da fibra podemos definir o produto como $ql = p(g_1 g_2)$ onde $pg_1 = q$ e $pg_2 = l$, assim obtemos uma estrutura de Grupo para a fibra e o produto foi construído para que a função p fosse um homomorfismo.

Dado um fibrado principal (P, G, M), pela trivialidade local, podemos escolher uma cobertura, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de M, tal que

$$\pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G,$$
$$p \mapsto (\pi(p), \phi_\alpha(p)),$$

é um difeomorfismo para cada $\alpha \in \Lambda$, com a propriedade

$$\phi_\alpha(pg) = \phi_\alpha(p)g, \forall g \in G.$$

Se $p \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$, com $\alpha, \beta \in \Lambda$, então

$$\phi_\beta(pg)(\phi_\alpha(pg))^{-1} = \phi_\beta(p)(\phi_\alpha(p))^{-1}, \forall g \in G,$$

mostra que a função $\phi_\beta(p)(\phi_\alpha(p))^{-1}$ depende somente do ponto base e não do elemento p. Portanto podemos definir a seguinte função:

$$\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G,$$
$$m = \pi(p) \mapsto \phi_\beta(p)(\phi_\alpha(p))^{-1}.$$

As funções $\psi_{\alpha\beta}$ são chamadas de funções de transições do fibrado (P, G, M). É fácil verificar que

$$\psi_{\gamma\alpha}(x) = \psi_{\gamma\beta}(x)\psi_{\beta\alpha}(x),$$

para todo $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, onde $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$. Esta identificação é conhecida como condição de co-ciclo.

Proposição 2.2.2. ([15],p.52) Seja M uma variedade, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma cobertura contável de M e G um grupo de Lie. Dada uma família, $\{\psi_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in \Lambda}$ tais que

$$\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G, \forall U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$$

onde

$$\psi_{\gamma\alpha}(x) = \psi_{\gamma\beta}(x)\psi_{\beta\alpha}(x), \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma,$$

então existe um fibrado principal (P, G, M) tais que $\{\psi_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in \Lambda}$ são suas funções de transições.

Demonstração. Primeiro iremos construir o espaço fibrado P: Para cada $\alpha \in \Lambda$ considere o espaço $X_\alpha = U_\alpha \times G$. Tome

$$X = \{(\alpha, x, g) | x \in U_\alpha \ e \ g \in G\},$$

ou seja, $X = \cup_\alpha X_\alpha$. Considere $\{X_\alpha\}$ como uma base da topologia de X. Como X é a única enumerável e disjuntas de X_α então X é uma variedade diferenciável. Assim defina $P := X/\sim$, onde $\sim$ é a seguinte relação de equivalência:

$$(\alpha, x, g) \sim (\beta, y, h) \Leftrightarrow x = y \in U_\alpha \cap U_\beta \ e \ h = \psi_{\beta\alpha}.$$

Agora defina $\pi : P \to M$ como $\pi(\alpha, x, g) = x$ para todo (α, x, g) e repare que, devida a relação de equivalência definida acima, a função π está bem definida. Assim, podemos induzir uma estrutura de diferenciabilidade para P tal que para cada $\alpha \in \Lambda$, $\pi^{-1}(U_\alpha)$ será uma subvariedade aberta em P e que o mapa $X \to P$, induzido pela a relaçao de equivalência, induz um difeomorfismo de X_α em $\pi^{-1}(U_\alpha)$.

Tome a ação $P \times G \to P$ tal que $(\alpha, x, g)h = (\alpha, x, gh)$ levando em consideração que na classe de equivalência, está ação fica bem definida. Seja $h \in G$ e $(\alpha, x, g) \in P$ elementos arbitrários tais que $(\alpha, x, g)h = (\alpha, x, g)$. Logo (α, x, g) está na mesma classe de equivalência de (α, x, gh), portanto $g = \psi_{\alpha\alpha}(x)gh$. Mas $\psi_{\alpha\alpha}(x)$ é o elemento neutro de G, portanto h será o elemento neutro mostrando que G age livremente pela direita em P.

Assim a ação de G em P será diferenciável e (P, G, M) será um fibrado principal tal que as suas funções de transição de P correspondente a cobertura $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ são precisamente $\{\psi_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in\Lambda}$, se definirmos

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G,$$

$$p \mapsto (x, g),$$

onde $p \in \pi^{-1}(U_\alpha)$, é a mesma classe de (α, x, g). □

Dado um fibrado principal (P, G, M), W uma subvariedade de M, então $\pi^{-1}(W)$ é um fibrado em W pela mesma ação induzida de G, pois se $\psi_{\alpha\beta}$ for uma função de transição do fibrado (P, G, M) então a restrição desta função para W (aonde o domínio desta função intercepta W) será uma função de transição de W, chamaremos este fibrado de restrição do fibrado (P, G, M) sobre W e denotaremos por $P|_W$.

Exemplo 2.2.3.

1. Seja M uma variedade e $B(M)$ o conjunto das k+1-uplas $(p, e_1, ..., e_k)$, onde $p \in M$ e $\{e_1, ..., e_k\}$ é uma base de T_pM. E seja $\pi : B(M) \to M$ dado por $\pi(p, e_1, ..., e_k) = p$.

   Primeiro repare que $q = (\pi(q), e_1, ..., e_k) \in B(M)$ pode ser visto como um isomorfismo de $\mathbb{R}^k$ em $T_{\pi(q)}M$ onde
   $$q : \mathbb{R}^k \to T_{\pi(q)}M,$$
   $$(v_1, ..., v_k) \mapsto \sum v_ie_i.$$

   O grupo $Gl(k)$ age livremente pela direita em $B(M)$ da seguinte forma: Se $g = (g_{ij}) \in Gl(n)$, temos

   $$(p, e_1, ..., e_k)g = \left(p, \sum g_{i1}e_i, ..., \sum g_{ik}e_k\right).$$

   Note que as funções q e qg são distintas.

   Precisamos então colocar alguma estrutura de fibrado principal em $B(M)$. Seja $q = (\pi(q), e_1, ..., e_k) \in B(M)$, $p = \pi(q)$ e $\phi = (x_1, ..., x_k)$ uma carta em torno de p. Assim, dado $p' \in U$, e $\{f_1, ..., f_k\}$ uma base de $T_{p'}M$, então temos a seguinte matriz $\{dx_j(f_i)\} =: \{g_{ij}\} \in Gl(k)$, assim definimos

   $$F_U : \pi^{-1}(U) \to Gl(k),$$

   $$(p', f_1, ..., f_k) \to g.$$

   Repare que estamos forçando a terceira propriedade de fibrado definindo uma $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$, tal que $\psi(p) = (\pi(p), F_U(p))$. Assim encare $B(M)$ com a base da topologia de $\pi^{-1}(U)$, onde U é uma vizinhança coordenada de M. A carta de $B(M)$ será dada por (y_i, y_{ij}) onde $x_i = y_i$ e $y_{ij} = x_{ij} \circ F_U$, com $\{x_{ij}\}$ a carta canônica de $Gl(k)$. Ou seja, $B(M)$ é uma variedade de dimensão $k + k^2$ e por construção $(B(M), Gl(k), M)$ é um fibrado principal conhecido como fibrado das bases de M.

2. Dado um grupo de Lie G e uma variedade M, com G agindo livremente em $P = M \times G$ da seguinte maneira: para cada $b \in G$,

$$R_b : M \times G \to M \times G$$

$$(x, a) \mapsto (x, ab).$$

O fibrado (P, G, M) é chamado de fibrado trivial. Se o fibrado principal (P, G, M) é isomorfo à um fibrado trivial então podemos tomar uma seção C^∞, $K : M \to P$, tal que $K(m) = \phi(m, e)$, onde $e \in G$ é o elemento neutro e $\phi : M \times G \to P$ é o isomorfismo em questão, repare que $\pi \circ K$ é a identidade em M. Por outro lado, se existir uma seção C^∞, $K : M \to P$, tal que $\pi \circ K$ é a identidade em M, defina o seguinte isomorfismo $\phi : P \to M \times G$: Dado $p \in \pi^{-1}(m)$, como a ação é transitiva nas fibras, existe um único $g \in G$ tal que $K(m)g = p$ e assim tome $\phi(p) = (m, g)$. Portanto ϕ será um isomorfismo com inversa $\phi^{-1}(m, g) = K(m)g$. Concluímos que, um fibrado principal é isomorfo a um fibrado trivial se, e somente se, existir uma seção C^∞, $K : M \to M$, tal que $\pi \circ K$ é a identidade de M.

3. Se G é um grupo de Lie, H um subgrupo fechado, então existe um fibrado principal com o espaço base G/H, espaço total G e o grupo de estrutura H tal que $\pi : G \to G/H$ é a projeção canônica com a ação $(g, h) \to gh$. Estes são conhecidos como espaços homogêneos.

4. Seja $\mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$ agindo em $\mathbb{R}^{k+1} - \{0\}$ por multiplicação escalar. Então esta ação é diferenciável, livre, e transitiva nas órbitas. O espaço das órbita é o espaço projetivo de dimensão k, $\mathbb{R}P^k$. Logo o espaço projetivo tem como fibrado principal a tripla:

$$(\mathbb{R}^{k+1} - 0, \mathbb{R}^*, \mathbb{R}P^k).$$

$$(\mathbb{R}^{k+1} - 0, \mathbb{R}^+, S^k).$$

Seja (P, G, M) um fibrado principal e $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie do grupo de estrutura. Para cada $A \in \mathfrak{g}$, podemos criar um campo de vetores $A^* \in \mathfrak{X}(P)$ da seguinte forma: Tome a exponencial de grupos de Lie, $Exp : \mathfrak{g} \to G$ e considere o grupo uniparamétrico de A dada por $a_t = Exp(tA)$. Assim a_t age em P e induz um grupo uniparamétrico nesta variedade, denotaremos o campo de vetores com este grupo uniparamétrico de A^*, ou seja, criamos uma função $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$, bem definida, tal que $\sigma(A) = A^*$. Chamamos A^* de campo fundamental correspondente a A.

Teorema 2.2.4. ([15],p.42) A aplicação $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$ definida acima é um homomorfismo de Álgebras de Lie. Para cada $A \neq 0$, $\sigma(A)$ nunca se anula em P. Se G age efetivamente em P, então σ é um isomorfismo sobre a sua imagem.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em *Foundations of Differential Geoometry, vol. 1*, [15]. E por fim, segue algumas definições básicas que serão importantes para a teoria de Grupos de Holonomia desenvolvida no capítulo 4.

Definição 2.2.5.

- Um homomorfismo (f, f') entre os fibrados principais (P, G, M) e (P', G', M') é um mapa $f : P \to P'$ acompanhado de um homomorfismo $f' : G \to G'$ tal que $f(gp) = f'(g)f(p), \forall g' \in G', p' \in P'$.

- (f, f') é chamado de mergulho se f e f' forem ambos mergulhos.

- Se (f, f') for um mergulho, então podemos definir o mapa $h : M' \to M$ como $h(\pi'(p')) = \pi(f(p'))$ e repare que h será mergulho. Assim o fibrado principal $(f(P'), f'(G'), h(M'))$ é chamado de sub fibrado de (P, G, M).

- Se $M' = M$ e $h : M' \to M$ for a identidade então o sub fibrado $(f(P'), f'(G'), M)$ é chamado de uma redução de (P, G, M).

- Dado um subgrupo G' de G dizemos que o fibrado (P, G, M) é redutível se existir uma redução (P', G', M).

Assim temos o seguinte resultado:

Proposição 2.2.6. ([15],p.53) Dado G um grupo de Lie e G' um subgrupo de Lie. O fibrado principal (P, G, M) é redutível para um fibrado (P', G', M) se, e somente se, existir uma cobertura de abertos $\{U_\alpha\}$ de M e um conjunto de funções de transições $\psi_{\beta\alpha}$ que assumem valores em G'.

2.3 Fibrados Associados

Seja P, F duas variedades e considere G um grupo de Lie que age pela direita em P e pela esquerda em F. Tome G agindo pela direita em $P \times F$ da seguinte maneira:

$$G \times P \times F \to P \times F$$

$$(p, f, g) \mapsto (pg, g^{-1}f).$$

Denotaremos por $P \times_G F$ como o espaço das órbitas de $P \times F$ pela a ação definida acima.

Se (P, G, M) for um fibrado principal e $\pi : P \to M$ for a sua projeção, podemos definir uma projeção sobrejetora $\pi' : P \times_G F \to M$ da seguinte forma $\pi'((p, f)G) = \pi(p)$.

Dado $m \in M$, (P, G, M) um fibrado principal. Pela trivialidade local do fibrado principal, existe uma vizinhança aberta de m, U, tal que $\pi^{-1}(U)$ é isomorfo a $U \times G$. Utilizando esta identificação, repare que a ação à direita de G é dada como:

$$(U \times G \times F) \times G \to U \times G \times F$$

$$(q, g, f)h \mapsto (q, gh, h^{-1}f),$$

assim o isomorfismo de $\pi^{-1}(U)$ em $U \times G$ induz um isomorfismo em $\pi'^{-1}(U)$ em $U \times F$ sendo:

$$f : \pi'^{-1}(U) \to U \times F$$

$$(q, g, f) \mapsto (q, gf).$$

Repare que este mapa está bem definido. Assim podemos introduzir uma estrutura C^∞ em $P \times_G F$ exigindo que para cada $m \in M$ e U sua vizinhança trivializante do fibrado principal, $\pi'^{-1}(U)$ seja uma subvariedade aberta de $P \times_G F$ que é difeomorfa a $U \times F$ via o isomorfismo exibido acima. Deste modo π' será um mapa diferenciável sobrejetivo.

Definição 2.3.1. Seja (P, G, M) um fibrado principal com a projeção $\pi : P \to M$ e F uma variedade, tal que G age pela esquerda. Dizemos que (B, F, G, M) é o Fibrado Associado de (P, G, M) com fibra F se:

- $B = P \times_G F$;
- B é munido da estrutura C^∞ definida anteriormente.

Chamaremos $\pi'^{-1}(m)$ como a fibra do ponto $m \in M$ do Fibrado Associado.

Exemplo 2.3.2.

1. Seja (P, G, M) um fibrado principal, e tome G agindo em si mesmo via translação a esquerda. Então (P, G, M) é o fibrado associado a si mesmo com fibra G.

2. *Fibrado Tangente*: Considere o fibrado das bases $B(M)$. Agora temos que $Gl(k, \mathbb{R})$ age em $\mathbb{R}^k$ pela esquerda via transformações lineares. O fibrado associado com fibra $\mathbb{R}^k$ será denotado como TM e chamaremos de fibrado tangente de M. $T(M)$ pode ser identificado como o espaço de todos os pares (m, t), onde $m \in M, t \in T_mM$ da seguinte forma:

$$((m, e_1, ..., e_k)(r_1, ..., r_k))Gl(k, \mathbb{R}) \mapsto \left(m, \sum r_i e_i\right),$$

   ou, se considerarmos $B(M)$ como o conjunto de mapas $p : \mathbb{R}^k \to T_mM$, então para cada $x \in \mathbb{R}^k$ esta identificação é $(p, x)Gl(k, \mathbb{R}) \to (m, px)$, onde $m = \pi(p)$. Com esta última formulação fica mais fácil ver que esta identificação é bem definida, se $(p', x')Gl(k, \mathbb{R}) = (p, x)Gl(k, \mathbb{R})$, então existe um $g \in Gl(k, \mathbb{R})$, tal que $p' = pg, \;\; x' = g^{-1}x$, e portanto, $p'x' = (pg)(g^{-1}x) = px$, considerando pg como composição de mapas.

   Logo vimos que cada fibra de TM é um espaço tangente, logo TM pode ser considerado como a união dos espaços tangentes de M.

3. *Fibrado Tensorial*: Para um espaço vetorial V de dimensão k, definimos no capítulo 1 o seguinte espaço vetorial:

$$T^r_s = \overbrace{V \otimes V \otimes ... \otimes V}^{r\text{-vezes}} \otimes \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes ... \otimes V^*}_{s\text{-vezes}},$$

   o grupo $Gl(k, V)$ pode ser considerado como o grupo das transformações lineares do espaço T^r_s da seguinte forma: Se $g \in Gl(k, V)$ e $w^1 \otimes \cdots \otimes w^r \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_s \in T^r_s$ então $g(w^1 \otimes \cdots \otimes w^r \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_s) = (g^*w^1) \otimes \cdots \otimes g^*w^r \otimes gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_s$, onde $g^*w(v) = w(g^{-1}v), \forall w \in V^*, v \in V$.

   Assim T^r_s poderá ser considerado como um fibrado associado ao fibrado das bases $B(M)$ com a fibra o produto tensorial citado acima, o chamamos como o fibrado tensorial do tipo (r, s). Repare que se $V = \mathbb{R}^k$ então T^1_0 é o fibrado tangente.

4. *Fibrado Vetorial*: Dado um espaço vetorial V e um fibrado principal (P, G, M). Devido ao exemplo acima, o fibrado associado $(T^1_0, V, \rho(G), B(M))$ será chamado de fibrado vetorial onde $\rho : G \to Gl(k)$ é uma representação. Como cada fibra deste fibrado será isomorfa a V, então podemos considerar este fibrado como a união de elementos do tipo $(p, v) \in M \times V$.

5. Seja (P, G, M) um fibrado principal e H um subgrupo do grupo de estrutura G. Naturalmente G age no espaço das classes laterais G/H via translação à esquerda. Assim se $(B, G/H, G, M)$ for o fibrado associado com fibra G/H e considerando a restrição da ação de G em P como sendo uma ação de H em P, B se identifica com P/H da seguinte maneira:

$$P \times_G G/H \to P/H$$

$$(p, gH)G \mapsto pgH.$$

Consequentemente, (P, H, B) é um fibrado principal com o grupo de estrutura H.

Aproveitando que foi apresentado o fibrado tensorial no exemplo 3 acima, vamos apresentar algumas definições sobre a teoria de r-formas de uma variedade que será necessário para o nosso estudo.

Definição 2.3.3. Uma p-forma, ω, é um mapa p-linear, anti-simétrico, de $\mathfrak{X}(M) \times ... \times \mathfrak{X}(M)$ (p-vezes) tomando valores em funções reais definidas em M.

Denotaremos o espaço das r-formas C^∞ definidas em M como $\Lambda^r M$ e o espaço gerado por todas as formas C^∞ definidas em M como ΛM.

Dada uma r-forma, ω, de N e uma função, $\phi : M \to N$, suave entre variedades, temos o seguinte operador $\phi^* : \Lambda^r N \to \Lambda^r M$ definido da seguinte forma

$$\phi^*\omega(v_1, ..., v_r) = \omega(\phi_*(v_1), ..., \phi_*(v_r)),$$

onde $v_1, ..., v_r \in T_n N$. Chamamos o operador ϕ^* de pull-back.

Dado ϕ uma r-forma $\mathfrak{g}$-valorada e ω uma s-forma $\mathfrak{g}$-valorada então definimos o colchete entre estas formas como: $[\phi, \omega]$ é uma $(r+s)$-forma dada por

$$[\phi, \omega](v_1, ..., v_{r+s}) = \sum_{\sigma \in S^{r+s}} sgn(\sigma)[\phi(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(r)})\omega(v_{\sigma(r+1)}, ..., v_{\sigma(r+s)})],$$

onde S^{r+s} é o grupo das permutações do conjunto $\{1, ..., r+s\}$.

E para acabar esta seção, existe um mapa extremamente importante chamado de derivada exterior. Levando em consideração de que a demonstração é dada por uma única fórmula no qual devemos conferir as propriedades, citamos o livro *Geometry of Manifolds*, [4], para consultar as contas.

Teorema 2.3.4. ([4],p.64) Existe um único mapa $d : \Lambda M \to \Lambda M$, tal que se $\omega \in \Lambda^r M$, d satisfaz as seguintes propriedades:

- $d\omega \in \Lambda^{r+1} M$;
- se $r = 0$, $d\omega$ coincide com a definição da diferencial de uma função C^∞;
- o domínio de ω é igual ao domínio de $d\omega$;
- d é $\mathbb{R}$-linear;
- se $\psi \in \Lambda^s M$, então $d(\omega\psi) = (d\omega)\psi + (-1)^r \omega(d\psi)$;
- $d(d\psi) = 0, \forall \psi \in \Lambda M$.

2.4 Conexões

2.4.1 Conexões em Fibrados Principais

Seja (P, G, M) um fibrado principal. Para cada $p \in P$, considere T_pP o espaço tangente de P em p e V_p o subespaço de T_pP de todos os vetores tangentes a fibra $\pi^{-1}(\pi(p))$, isto é, $V_p := \{v \in T_pP | d\pi(v) = 0\}$.

Definição 2.4.1. Uma conexão em P é uma distribuição H de P tal que

- $T_pP = V_p \oplus H_p$ para cada $p \in P$;
- $H_{pg} = (R_g)_* H_p$, para cada $p \in P$ e $g \in G$, onde R_g é a translação a direita dada pela ação de G em P;
- H é diferenciável.

Chamamos H_p como o espaço horizontal de p e V_p como o espaço vertical.

Pela definição de conexão, todo vetor tangente $X \in T_pP$ pode ser escrito unicamente como soma $x = v(x) + h(x)$ onde $v(x)$ é um vetor vertical e $h(x)$ é um vetor horizontal.

Como o núcleo do operador $d\pi$ restrito ao espaço tangente T_pP são os vetores verticais temos que $d\pi|_{H_p} : H_p \to T_{\pi(p)}M$ é injetor e portanto um isomorfismo entre espaços vetoriais. Portanto, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ existe um único campo de vetores $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(P)$, tal que $\widetilde{X}(p) \in H_p$ e $d\pi(\widetilde{X})(p) = X(\pi(p)), \forall p \in P$. Chamamos $\widetilde{X}$ de levantamento horizontal do campo X. Temos que se $X \in C^\infty$ então $\widetilde{X} \in C^\infty$.

Teorema 2.4.2. ([4],p.75) Todo campo $\widetilde{X}$ horizontal em P, isto é, $v\widetilde{X} = 0$, e invariante por translações, é o levantamento de um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Seja $\widetilde{X}$ um campo horizontal. Para cada $x \in M$, tome um ponto $p \in P$ tal que $\pi(p) = x$ e defina $X(x) = d\pi_p(\widetilde{X}(p))$. O campo X é independente da escolha de p, pois se $p, p' \in \pi^{-1}(x)$, então existe $g \in G$ tal que $p' = pg$ e portanto:

$$d\pi_{p'}(\widetilde{X}(p')) = d\pi_{pg}(g_* \circ \widetilde{X}(p)) = d\pi_p(\widetilde{X}(p)).$$

Logo $\widetilde{X}$ é o levantamento horizontal de X. $\square$

Definição 2.4.3. Dado uma conexão H, a 1-forma de conexão de H é a 1-forma, ϕ, $\mathfrak{g}$-valorada, tal que, para todo $x \in T_pP$, $\phi(x) = X, p \in P$, onde X induz o campo fundamental $X^*(p) = v(x)$.

Uma p-forma ω em P é chamada de vertical (horizontal) se se anula quando uma ou mais de suas entradas for horizontal (vertical). Logo temos que a 1-forma de conexão é sempre vertical.

2.4.2 Transporte Paralelo

Considere o fibrado principal (P, G, M) com a projeção $\pi : P \to M$.

Definição 2.4.4. Se γ for uma curva suave por partes em M, então um levantamento (horizontal) de $\widetilde{\gamma}$ é uma curva suave por partes em P tal que

- $\widetilde{\gamma}$ é horizontal, isto é, $\widetilde{\gamma}_*$ é horizontal e;

- $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$.

Teorema 2.4.5. ([4],p.77) Seja $\gamma : [0,1] \to M$ uma curva suave por partes e tome $p \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Então existe um único levantamento horizontal $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to P$ de γ, tal que $\widetilde{\gamma}(0) = p$.

Demonstração. Iremos assumir que γ é C^∞, pois se o teorema for válido para este caso então só devemos concatenar os levantamentos obtidos em cada parte suave da curva.

Estenda suavemente γ como um mapa de $(-\epsilon, 1+\epsilon) = I$ em M.
Se $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ forem as funções de transição do fibrado principal (P, G, M) então o conjunto de funções $\{\psi_{\alpha\beta} \circ \gamma\}$ satisfazem as propriedades do 2.2.2, assim a tripla (N, G, I) onde $N = \{(r,q) \in I \times P | \gamma(r) = \pi(q)\}$, é um fibrado principal (N, G, I) com a projeção $\pi' : N \to I$ canônica, conhecido como o fibrado induzido por γ.

Seja ω a 1-forma de conexão do fibrado principal (P, G, M) e $\theta : N \to P$ tal que $\theta(r,q) = q$ onde $(r,q) \in N$. Assim $\widetilde{\omega} = \theta^*\omega$ será uma 1-forma de conexão em N.

Desde que dado um campo X em I existe um único levantamento horizontal em N a respeito a conexão induzida por ϕ^* e considerando $\widetilde{u}$ como a curva integral de X começando em $(0,p)$. Definimos $\widetilde{\gamma} = \theta \circ \widetilde{u}$. Assim $\widetilde{\gamma}$ será um levantamento de γ, e desde que $\phi(\widetilde{\gamma}_*) = \phi(d\theta \circ \widetilde{u}_*) = \phi(X) = 0$ temos que $\widetilde{\gamma}$ é horizontal.

A unicidade de $\widetilde{\gamma}$ segue do fato que qualquer levantamento pode ser fatorado em N via θ e um levantamento de u, no qual o último é único. $\square$

Corolário 2.4.6. ([4],p.78) Se H for uma conexão no fibrado principal (P, G, M), γ uma curva suave por partes em M, então existe um difeomorfismo T_γ de $\pi^{-1}(\gamma(0))$ sobre $\pi^{-1}(\gamma(1))$. T_γ é independente da parametrização de γ e satisfaz $T_\gamma \circ R_g = R_g \circ T_\gamma, \forall g \in G$. Além disso, se γ e σ forem duas curvas suaves em M com $\sigma(0) = \gamma(1)$, então $T_{\gamma\sigma} = T_\sigma \circ T_\gamma$.

Demonstração. Dado um fibrado principal (P, G, M) munido com uma conexão H, podemos definir $T_\gamma : \pi^{-1}(\gamma(0)) \to \pi^{-1}(\gamma(1))$ da seguinte maneira: Dado $p \in \pi^{-1}(\gamma(0))$, tome $\widetilde{\gamma}$ o levantamento horizontal de γ com $\widetilde{\gamma}(0) = p$, assim $T_\gamma(p) := \widetilde{\gamma(1)}$. Primeiro, dado $g \in G$ temos que

$$\dot{\widetilde{\gamma}}(t) \in H_{\widetilde{\gamma}(t)} \Rightarrow (R_g)_*\widetilde{\gamma}(t) \in (R_g)_* H_{\widetilde{\gamma}(t)} = (\widetilde{\gamma}(\dot{t})g) \in H_{\widetilde{\gamma}(t)g},$$

portanto a curva $(\widetilde{\gamma}g)(t) := \widetilde{\gamma}(t)g$ será um levantamento horizontal da curva γ. Assim provando que T_γ comuta com a ação de G. Verifica-se da mesma maneira as outras propriedades. $\square$

Devida a definição da conexão H em fibrados principais, temos que se $\widetilde{\gamma}$ for uma curva horizontal em P então $g\gamma$ também é uma curva horizontal.

Definição 2.4.7. Dada uma conexão H em um fibrado principal (P, G, M) e uma curva γ suave por partes em M. Chamamos T_γ definido no corolário acima de transporte paralelo da fibra $P_{\gamma(0)}$ até a fibra $P_{\gamma(1)}$.

2.4.3 Curvatura

Com 1-forma de conexão podemos definir um elemento importante no nosso estudo, a forma de curvatura.

Definição 2.4.8. Para cada forma ω em P, a forma $D\omega$ é dada como

$$D\omega = d\omega \circ H,$$

ou seja, se $t_1, ..., t_{k+1} \in T_pP$, então $D\omega(t_1, ..., t_{k+1}) = d\omega(h(t_1), ..., h(t_{k+1}))$ onde H é a conexão e $h(t_j)$ seja a componente horizontal de $t_j, \forall j = 1, ..., k+1$. A 1-forma de curvatura Φ da conexão H é a 2-forma $\mathfrak{g}$-valorada, $D\phi$.

Citaremos alguns resultados clássicos sobre a 1-forma de conexão, iremos somente enuncia-los pois suas demonstrações necessitam da teoria de formas diferênciáveis que não citamos neste trabalho. As demonstrações destes resultados estão em *Geometry of Manifolds*, [4].

Teorema 2.4.9. ([4],p.81)**Equação Estrutural**: Se ϕ for a 1-forma de uma conexão em P, Φ sua forma de curvatura, então:

$$d\phi = -\frac{1}{2}[\phi, \phi] + \Phi.$$

Teorema 2.4.10. ([4],p.82)**A Identidade de Bianchi**: Se Φ for a forma de curvatura de uma conexão em um fibrado principal, então:

$$D\Phi = 0.$$

Teorema 2.4.11. ([4],p.82) Seja H uma conexão em P, Φ sua forma de curvatura. Então $\Phi = 0$ se, e somente se, H for uma distribuição involutiva.

2.4.4 Conexões afins

Seja (P, G, M) um fibrado principal e (B, F, G, M) o seu fibrado associado com a fibra típica F. Dada uma conexão no fibrado principal, podemos induzir uma *conexão*, no sentido de uma distribuição, no fibrado associado.

Considere H uma conexão do fibrado principal (P, G, M), $p \in P$ e $b \in B$ tal que $\pi(p) = \pi'(b)$, ou seja b está na mesma órbita do elemento $(p, f) \in P \times F$. Como B é o espaço das órbitas de $P \times F$, podemos tomar $\lambda : P \times F \to B$ como a projeção canônica no espaços das órbitas. Assim defina $H'(b) = (\lambda_*)|_p(H(p))$. H' será uma distribuição suave em B. Está definição é independente da escolha do ponto p, pois H é invariante pela ação do grupo G e podemos considerar o mapa:

$$p : F \to \pi'^{-1}(\pi(p)),$$

$$f \mapsto (p, f)G,$$

é um isomorfismo. Naturalmente chamaremso $H'(b)$ como vetores horizontais da conexão H' e de maneira análoga, podemos definir a distribuição vertical em B como
$V'(b) = (\lambda_*)|_p(V(p))$.

Em particular, considere o fibrado principal $(B(M), Gl(k, \mathbb{R}), M)$, assim ganhamos várias estruturas adicionais sobre uma conexão definida neste fibrado, incluindo forma de torção e campos de vetores básicos. E assim, naturalmente, os fibrados vetoriais possui tais propriedades, já que todos os fibrados vetoriais é um fibrado associado a um fibrado das bases. Nesta seção daremos somente as definições de forma de torção e campos de vetores básicos.

Definição 2.4.12. Considerando M uma variedade de dimensão k. Uma conexão do fibrado principal $(B(M), Gl(k, \mathbb{R}), M)$ é chamado de conexão afim.

Em $B(M)$ sempre podemos definir certas 1-formas, que são independentes de qualquer conexão deste fibrado.

As 1-formas de solda ω_i são definidas da seguinte forma. Seja $t \in T_bB(M)$, onde $b = (p, e_1, ..., e_k)$. Assim $d\pi(t) \in T_pM$ e como $\{e_1, ..., e_k\}$ é uma base de T_pM, então

$$d\pi(t) = \sum \omega_i(t)e_i.$$

Assim podemos definir a 1-forma de solda como a 1-forma ω $\mathbb{R}^k$-valorada, definida por

$$\omega(t) = (\omega_1(t), ..., \omega_k(t)).$$

Seja H uma conexão afim, $x \in \mathbb{R}^k$ e $b \in B(M)$. Então existe um único vetor tangente horizontal $E(x)(b)$ de b tal que $\omega(E(x)(b)) = x$, desde que $d\pi$ é um isomorfismo de H_b em $\mathbb{R}^k$, identificando $T_{\pi(b)}M$ com $\mathbb{R}^k$. O campo de vetores em $B(M)$ que associa cada $b \in B(M)$ com $E(x)(b)$ é chamado de campos de vetores básicos e denotamos por $E(x)$. Em particular, se $\{e_i\}$ for a base canônica de $\mathbb{R}^k$, então temos que os campos básicos $E_i = E(\delta_i)$ geram os espaços horizontais em cada ponto de $B(M)$. Estes campos $E(x)$ não são levantamentos horizontais de qualquer campo de vetores do espaço base M, pois não são invariante pela a ação de G.

Pode-se provar que:

- $E(x) \in C^\infty$;
- $E(x)$ é horizontal;
- $g_*E(x) = E(g^{-1}x)$ para todo $g \in Gl(k, \mathbb{R})$, onde g é visto como ação em $\mathbb{R}^k$

Por outro lado, dado uma família de campos E_i em $B(M)$ que são k linearmente independente que não se anulam em $B(M)$ satisfazendo $\omega(E_i) = e_i$ onde $\{e_i\}$ é uma base de $\mathbb{R}^k$ então a distribuição H que associa cada ponto $b \in B(M)$ com o espaço gerado pelos os vetores $\{E_i(b)\}$ será uma conexão afim com os campos básicos E_i.

Definição 2.4.13. A forma de torção Ω de uma conexão afim H em $B(M)$ é uma 2-forma $\mathbb{R}^k$-valorada

$$\Omega = D\omega := d\omega \circ H.$$

Pela definição, podemos verificar que $\Omega \in C^\infty$ é horizontal e que para todo $g \in G$

$$\Omega \circ (R_g)_* = g^{-1} \circ \Omega.$$

Segue-se um importante resultado sobre as formas de curvatura e torção cuja a demonstração envolve um lema técnico no qual ambos podem ser encontrados demonstrados em *Geometry of Manifolds*, [4].

Teorema 2.4.14. ([4],p.95) Seja ϕ uma forma de conexão de $B(M)$. Então as formas de curvaturas e torção se anulam em $B(M)$ se, e somente se, a seguinte condição for satisfeita:

Para cada $m \in M$, existe um sistema de coordenadas $(x_1, ..., x_k)$ em m, tal que a imagem da seção $\Lambda : U \to B(M)$, definida por

$$\Lambda(n) = \left(n, \frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_k}\right),$$

for horizontal.

Capítulo 3

Geometria Riemanniana

Neste capítulo iremos apresentar fundamentos de Geometria Riemanniana, separados em 4 seções. A primeira introduzirá as definições e teoremas clássicos de Geometria Riemanniana. Na segunda seção, trabalhamos o tensor de curvatura de uma variedade Riemanniana, enquanto na terceira nos preocupamos com as propriedades de subvariedades Riemannianas. A quarta desenvolveremos a teoria de campos de Killing, conhecido em algumas literaturas como isometrias infinitesimais, e campos de Jacobi, trazendo como último resultado, uma caracterização importante dos campos de Killing. A maior parte deste capítulo foi retirado de *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature* de autoria de Lee J. M. [16], um resultado em especifico foi retirado de *Riemannian Geometry and Geometric Analysis* de autoria de Jost J.[13] e por fim a última seção foi retirada de *Foundations of Differential Geoometry, vol. 1* de autoria S. Kobayashi e K. Nomizu [15].

3.1 Variedades Riemannianas

3.1.1 Métricas Riemannianas

Trataremos nesta seção as definições básicas sobre variedades Riemannianas, começando com a definição de métrica.

Definição 3.1.1. Uma métrica Riemanniana em uma variedade M é um (0,2)-campo tensorial $\mathfrak{g} \in T_0^2(M)$ tal que

- É simétrico, isto é, $g(x,y) = g(y,x)$ para todo vetor tangente x, y;
- É positivo definido, isto é $g(x,x) > 0$ se $x \neq 0$.

Dizemos que o par (M, g) é uma variedade Riemanniana, se g for uma métrica Riemanniana em M.

Uma métrica Riemanniana determina um produto interno em cada espaço tangente T_pM que é tipicamente escrito como $\langle x, y\rangle := g(x,y)$ para cada $x, y \in T_pM$. Assim, como todo produto interno podemos definir norma e noção de ângulo entre vetores tangentes utilizando a métrica. Dizemos que dois vetores tangentes $x, y \in T_pM$ são ortogonais se $g(x,y) = 0$. Um conjunto de vetores tangentes $\{E_1, ..., E_k\} \subset T_pM$ é ortonormal se o comprimento de cada vetor deste conjunto for 1 e eles são dois a dois ortogonais.

Definição 3.1.2. Dadas duas variedades Riemannianas $(M, g), (\widetilde{M}, \widetilde{g})$. Um difeomorfismo $\Phi : (M, g) \to (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ é chamado de isometria se $\widetilde{g}(\Phi(X), \Phi(Y)) = g(X,Y)$ para todo $p \in M$ e todo $X, Y \in T_pM$.

Caso exista uma isometria entre (M,g) e $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ dizemos que estas duas variedades Riemannianas são isométricas. Uma isometria de uma variedade Riemanniana $\Phi:(M,g)\to(M,g)$ será chamada somente de isometria de M.

Considere $\{E_1,...,E_k\}$ um referencial local de TM, e $\{\phi^1,...,\phi^k\}$ o seu referencial dual, assim uma métrica Riemanniana pode ser escrita como

$$g=\sum_{ij} g_{ij}\phi^i\otimes\phi^j.$$

Repare que a matriz determinada pela a métrica, $g_{ij}=g(E_i,E_j)$, é simétrica e depende suavemente de $p\in M$, isto é, suas funções coordenadas são suaves em relação a p.

3.1.2 Conexões

No capítulo anterior definimos conexão somente para fibrados principais e induzimos uma conexão para os fibrados associados.

Definição 3.1.3. Seja $(E,V,Gl(k),M)$ um fibrado vetorial sobre a variedade Riemanniana (M,g), e denote $\mathcal{E}(M)$ como o espaço de todas as seções suaves de E. Uma conexão em E é um mapa

$$\nabla:\mathfrak{X}(M)\times\mathcal{E}(M)\to\mathcal{E}(M),$$

$$(X,Y)\mapsto\nabla_XY,$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- ∇_XY é $C^\infty(M)$-linear na primeira coordenada:

$$\nabla_{fX_1+X_2}Y=f\nabla_{X_1}Y+\nabla_{X_2}Y,\forall X_1,X_2\in\mathfrak{X}(M),Y\in\mathcal{E}(M)ef\in C^\infty(M);$$

- ∇_XY é $\mathbb{R}$-linear na segunda coordenada:

$$\nabla_X(aY_1+Y_2)=a\nabla_XY_1+\nabla_XY_2,\forall X\in\mathfrak{X}(M),Y_1,Y_2\in\mathcal{E}(M)ea\in\mathbb{R};$$

- ∇ satisfaz a seguinte regra de Leibniz:

$$\nabla_X(fY)=f\nabla_XY+(Xf)Y,\forall X\in\mathfrak{X}(M),Y\in\mathcal{E}(M)ef\in C^\infty(M).$$

Dado uma conexão ∇, ∇_XY é chamado de derivada covariante de Y na direção de X.

Embora a conexão seja definida como uma ação nas seções globais, ela depende somente de seções locais, devido ao seguinte resultado:

Lema 3.1.4. (,p.50)[16] Se ∇ for uma conexão em um fibrado vetorial, $X\in\mathfrak{X}(M),Y\in\mathcal{E}(M)$ e $p\in M$, então $\nabla_XY|_p$ depende somente de valores de X e Y em uma vizinhança arbitrariamente pequena de p. Mais precisamente, se $X=\widetilde{X}$ e $Y=\widetilde{Y}$ em uma vizinhança de p, então $\nabla_XY|_p=\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}|_p$.

Demonstração. Considere primeiro $W \in \mathfrak{X}(M)$ tal que se anula em uma vizinhança U de p. Considere ϕ uma função bump C^∞ com suporte em U tal que $\phi(p) = 1$. Assim $\phi W \equiv 0$ e, toda a variedade M e portanto $\nabla_X(\phi W) \equiv 0$.

Como W é nulo no suporte da ϕ, temos que $(X\phi)W \equiv 0$ em todo M. Assim, pela regra do produto:

$$0 = \nabla_X(\phi W) = (X\phi)W + \phi(\nabla_X W) = \phi(\nabla_X W).$$

Concluindo que,

$$\nabla_X W|_p = \phi(p)(\nabla_X W|_p) = 0.$$

Agora tome $W = Y - \widetilde{Y}$, temos que $W \equiv 0$ em uma vizinhança de p e portanto

$$0 = \nabla_X W = \nabla_X(Y - \widetilde{Y})|_p = \nabla_X Y|_p - \nabla_X \widetilde{Y}|_p.$$

Utilizando a mesma estratégia, pode-se provar que $\nabla_X Y|_p = \nabla_{\widetilde{X}} Y|_p$ e concluir:

$$\nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}|_p = \nabla_X \widetilde{Y}|_p = \nabla_X Y|_p.$$

□

Agora, iremos considerar apenas conexões no fibrado tangente. Podemos ver que estas conexões são induzidas do fibrado das bases, ou seja, induzida por uma conexão linear em M, por este motivo também chamaremos estas conexões de conexões lineares. Como o fibrado tangente é um fibrado vetorial, como acima, podemos descrever a conexão linear da seguinte forma:

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

que satisfaz todas as três propriedades de conexão de fibrado vetorial.

Em coordenadas, considere $\{E_1, ..., E_n\}$ um referencial local de TM em um subconjunto aberto $U \subset M$. Para qualquer escolha de índices i, j, podemos escrever $\nabla_{E_i} E_j$ em termos do mesmo referencial:

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_k \Gamma^k_{ij} E_k.$$

As funções Γ^k_{ij} em U, são chamados de símbolos de Christoffel de ∇ com respeito a este referencial. Utilizando as propriedades de conexão e a descrição acima, podemos explicitar a conexão em termos de um referencial local:

Lema 3.1.5. ([16],p.51) Seja ∇ uma conexão linear, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\{E_1, ..., E_n\}$ um referencial local. Expressando $X = \sum X^i E_i$ e $Y = \sum Y^j E_j$. Então

$$\nabla_X Y = \sum (XY^k + X^i Y^j \Gamma^k_{ij}) E_k.$$

Demonstração. Utilizando as propriedades da conexão:

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X(\textstyle\sum Y^j E_j) \\
&= \textstyle\sum \nabla_X(Y^j E_j) \\
&= \textstyle\sum (Y^j(\nabla_X E_j) + (XY^j)E_j) \\
&= \textstyle\sum (Y^j(\nabla_{\sum X^i E_i} E_j) + (XY^j)E_j) \\
&= \textstyle\sum (Y^j(\sum X^i \nabla_{E_i} E_j) + (XY^j)E_j) \\
&= \textstyle\sum (Y^j)(\sum X^i(\sum \Gamma^k_{ij} E_k) + (XY^j)E_j)
\end{aligned}$$

Reorganizando os índices obtemos:

$$\nabla_X Y = \sum (XY^k + X^i Y^j \Gamma^k_{ij}) E_k.$$

□

Exemplo 3.1.6. Em $\mathbb{R}^n$, considerando o referencial canônico ortonormal, definimos a conexão Euclidiana como
$$\overline{\nabla}_X(\sum Y^j \partial_j) = \sum (XY^j)\partial_j.$$
Em outras palavras, $\overline{\nabla}_X Y$ é justamente o campo de vetores onde as componentes são as derivadas direcionais das coordenadas de Y na direção de X. É fácil ver que este mapa satisfaz as propriedades de conexão e que o seus símbolos de Christoffel nas coordenadas canônicas são nulos.

Inspirado pelo o lema anterior, podemos construir conexões explicitamente como para isso necessitamos do seguinte lema:

Lema 3.1.7. ([16],p.52) Suponha que M seja coberta por somente um sistema de coordenadas. Então existe uma correspondência biunívoca entre as conexões lineares de M e a escolha de n^3 funções suaves $\{\Gamma^k_{ij}\}$ em Mdada pela regra
$$\nabla_X Y = \sum (X^i \partial_i Y^k + X^i Y^j \Gamma^k_{ij})\partial_k,$$
onde $X = \sum X_i \partial_i$ e $Y = \sum Y_j \partial_j$.

Demonstração. Considere $(x_1, ..., x_n)$ o sistema de coordenadas em M. Dada uma conexão ∇ na variedade M, temos que $\{\partial_1, ..., \partial_k\}$ é um referencial global de M e devido ao lema anterior,
$$\nabla_X Y = \sum (XY^k + X^i Y^j \Gamma^k_{ij})\partial_k,$$
onde $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum \Gamma^k_{ij} E_k$. Por outro lado, tome o conjunto $\{\Gamma^k_{ij}\}$ de n^3 funções suaves em M e defina
$$\nabla_X Y = \sum (XY^k + X^i Y^j \Gamma^k_{ij})\partial_k.$$
O mapa definido acima satisfaz as propriedades de conexão. □

Proposição 3.1.8. ([16],p.52) Toda variedade admite uma conexão linear.

Demonstração. Tome $\{U_\alpha\}$ uma cobertura de vizinhanças coordenadas em M e devido ao lema anterior, cada U_α possui uma conexão ∇^α. Podemos escolher uma partição da unidade $\{\psi_\alpha\}$ subordinada a cobertura $\{U_\alpha\}$ (Olhar na seção 1.1). Assim, defina o mapa:
$$\nabla_X Y = \sum_\alpha \psi_\alpha \nabla^\alpha_X Y,$$
para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Este mapa é suave e:

- Seja $f \in C^\infty(M)$ e $Y, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ então
$$\begin{aligned}\nabla_{fX_1+X_2}Y &= \sum \psi_\alpha \nabla^\alpha_{fX_1+X_2}Y\\ &= \sum \psi_\alpha (f\nabla^\alpha_{X_1}Y + \nabla^\alpha_{X_2}Y)\\ &= f\left(\sum \psi_\alpha \nabla^\alpha_{X_1}Y\right) + \sum \psi_\alpha \nabla^\alpha_{X_2}Y\\ &= f\nabla_{X_1}Y + \nabla_{X_2}Y,\end{aligned}$$
portanto ∇ é C^∞-linear na primeira coordenada.

- Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e $X, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$\begin{aligned} \nabla_X(\lambda Y_1 + Y_2) &= \sum \psi_\alpha \nabla_X^\alpha(\lambda Y_1 + Y_2) \\ &= \sum \psi_\alpha(\lambda \nabla_X^\alpha Y_1 + \nabla_X^\alpha Y_2) \\ &= \lambda \left(\sum \psi_\alpha \nabla_X^\alpha Y_1\right) + \sum \psi_\alpha \nabla_X^{alpha} Y_2 \\ &= \lambda \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2, \end{aligned}$$

  e portanto ∇ é $\mathbb{R}$-linear na segunda coordenada

- E por fim, dado $f \in C^\infty(M)$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ temos

$$\begin{aligned} \nabla_X(fY) &= \sum_\alpha \psi_\alpha \nabla_X^\alpha(fY) \\ &= \sum_\alpha \psi_\alpha((Xf)Y + f\nabla_X^\alpha Y) \\ &= (Xf)Y + f\sum_\alpha \psi_\alpha \nabla_X^\alpha Y \\ &= (Xf)Y + f\nabla_X Y. \end{aligned}$$

  concluindo que ∇ obedece a regra de Leibniz.

Portanto, ∇ é uma conexão em M. □

Agora iremos estudar campos vetoriais sobre curvas para definir uma noção de derivada direcional de campos ao longo de curvas. Para isto lembramos que um campo vetorial ao longo de uma curva $\gamma : (a, b) \to M$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é uma função suave $V : (a, b) \to TM$ tal que $V(t) \in T_{\gamma(t)M}$ para todo $t \in (a, b)$. Denotaremos por $\mathfrak{X}(\gamma)$ como o espaço de todos os campos vetoriais ao longo da curva γ.

Lema 3.1.9. ([16],p.57) Seja ∇ uma conexão linear em M e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Para cada curva $\gamma : I \to M$, ∇ determina um único operador

$$D_t : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

- É linear sobre $\mathbb{R}$:
$$D_t(aV + W) = aD_tV + bD_tW;$$

- Regra do produto:
$$D_t(fV) = f'V + fD_tV;$$

- Se V for estendível, isto é, se existir um campo de vetores $\widetilde{V}$ em uma vizinhança da imagem de γ tal que $\widetilde{V}(\gamma(t)) = V(t)$, então para qualquer extensão $\widetilde{V}$ de V:
$$D_tV(t) = \nabla_{\gamma'(t)}\widetilde{V};$$

  Para quaisquer $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$, $a \in \mathbb{R}$ e $f \in C^\infty(M)$. D_tV é chamada de derivada covariante de V ao longo de γ.

Demonstração. Iremos separar a demonstração deste lema em três partes:

1. *Existência e Unicidade Local*: Suponha primeiro que $\gamma(I)$ esteja contido inteiramente em um único sistema de coordenadas, assim podemos definir o operador:

$$D_tV = \sum \left(\dot{V}^k(t_0) + V^j(t_0)\dot{\gamma}^i(t_0)\Gamma^k_{ij}(\gamma(t_0))\right)\partial_k,$$

onde

$$V(t) = \sum V^j(t)\partial_j, \forall t \in I.$$

Fazendo contas simples conclui-se que este operador D_t satisfaz as três propriedades do lema e devido a terceira propriedade e o lema 3.1.7 D_tV será único.

2. *Unicidade Global*: Suponha que exista um operador D_tV, devido ao lema 3.1.4 e a terceira propriedade, temos que o valor de D_tV calculado em t_0 depende somente de valores de V em uma vizinhança pequena de t_0 em I. Escolhendo um sistema de coordenadas em torno de $\gamma(t_0)$, pelo item 1, D_t será da seguinte forma:

$$D_tV = \sum \left(\dot{V}^k(t_0) + V^j(t_0)\dot{\gamma}^i(t_0)\Gamma^k_{ij}(\gamma(t_0))\right)\partial_k.$$

3. *Existência Global*: Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura de vizinhanças coordenadas de M em $\gamma(I)$. Pelo item 1, para cada U_α possui um operador D^α_t. Assim se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, em $U_\alpha \cap U_\beta$ temos $D^\alpha_t = D^\beta_t$. Portanto fica bem definido D_t como sendo a expressão obtidida no item 1 para cada sistema coordenada.

□

3.1.3 Geodésicas

Definição 3.1.10. Seja M uma variedade com uma conexão linear ∇, e seja γ uma curva em M. A aceleração de γ é o campo vetorial $D_t\dot{\gamma}$ ao longo de γ. Uma curva γ é chamada geodésica, com respeito a ∇, se sua aceleração for zero, $D_t\dot{\gamma} \equiv 0$.

Iremos provar agora a existência de geodésicas na variedade.

Teorema 3.1.11. ([16],p.58) Seja M uma variedade com uma conexão linear. Para quaisquer $p \in M$, $V \in T_pM$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, existe um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ contendo t_0 e uma geodésica $\gamma : I \to M$ satisfazendo $\gamma(t_0) = p$, $\dot{\gamma}(t_0) = V$. Quaisquer duas geodésicas satisfazendo estas duas condições são iguais em um domínio em comum.

Demonstração. Seja $((x_1, ..., x_n), U)$ um sistema de coordenadas no ponto p. Devida a fórmula cálculada no Lema 3.9, temos

$$D_t\dot{\gamma} = \sum \left(\ddot{\gamma}^k(t) + \dot{\gamma}^j(t)\dot{\gamma}^i(t)\Gamma^k_{ij}\right)\partial_k,$$

onde a curva é expressa neste sistema de coordenadas como $\gamma(t) = (\gamma^1, ..., \gamma^n)$. Como $\{\partial_1, ..., \partial_n\}$ são linearmente idenpendentes, $D_t\dot{\gamma} = 0$ se, e somente se,

$$\sum \ddot{\gamma}^k(t) + \dot{\gamma}^j(t)\dot{\gamma}^i(t)\Gamma^k_{ij} = 0$$

para cada k. Obtemos então um sistema de equações diferenciáis de segunda ordem das funções $\gamma^1(t), ..., \gamma^n(t)$. Chame de $x_i = \dot{\gamma}^i$ para cada i, assim para cada k temos um novo sistema de equações diferenciáveis de primeira ordem:

$$\dot{\gamma}^k(t) = x_k(t);$$

$$\sum \dot{x}_k = \sum -x_i x_j(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)).$$

Pelo teorema de existência e unicidade de solução de equações diferenciáis de primeira ordem, para qualquer $(p, V) \in U \times \mathbb{R}^n$, existe um $\epsilon > 0$ e uma única solução $f : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to U \times \mathbb{R}^n$, para este sistema satisfazendo a condição inicial $f(t_0) = (p, V)$. Escrevendo as funções componentes de $f(t) = (f_1(t), ..., f_n(t))$, pode-se verificar que $\gamma(t) = (f_1(t), ..., f_n(t))$ é uma geodésica.

Agora, suponha que $\gamma, \theta : I \to M$ são geodésicas definidas em um intervalo aberto com $\gamma(t_0) = \theta(t_0)$ e $\dot{\gamma}(t_0) = \dot{\theta}(t_0)$. Devida a construção acima e o teorema de existencia e unicidade de solução de equações diferenciáis, existe uma vizinhança aberta de $\gamma(t_0)$ no qual ambas as geodésicas coincidem. $\square$

Dada uma variedade M. Pela unicidade local do teorema acima, para cada $p \in M$ e $V \in T_pM$, existe uma única geodésica maximal $\gamma : I \to M$, isto é, uma que não pode ser estendida para um intervalo maior, com $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = V$, definida em um intervalo aberto I, onde I é justamente a união de todos os intervalos abertos em que uma geodésica com estás condições inicias podem ser estendidas. Está geodésica maximal será simplesmente chamada de geodésica com ponto inicial p e velocidade inicial V, e denotaremos como γ_V.

Agora enunciaremos resultados e a noção de conexão para campos tensoriais, poderão ser encontrados em *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, [16]:

Lema 3.1.12. ([16],p.53) Seja ∇ uma conexão linear em M. Existe uma única conexão em cada fibrado tensorial T_s^r, também denotado em ∇, tal que satisfaz:

- Em TM, ∇ coincide com a conexão dada;
- Em T_0M, ∇ é dada pela equação diferencial de funções:

$$\nabla_X f = Xf;$$

- ∇ obedece a seguinte regra do produto com respeito ao produto tensorial:

$$\nabla_X(F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G).$$

Assim definimos:

Definição 3.1.13. Seja ∇ uma conexão. Se ω for uma 1-forma e X um campo de vetores, definimos

$$\nabla_X \omega = \sum_k \left(\sum_{i,j} X_i \partial_i \omega_k - X_i \omega_j \Gamma_{ik}^j \right) dx_k,$$

dada um sistema de coordenadas $(x_1, ..., x_n)$.

Esta definição não depende do sistema coordenadas e satisfaz as condições do lema.

E por fim

Lema 3.1.14. ([15],p.124) Se ∇ for uma conexão linear em M, $F \in T_s^r(M)$, o mapa ∇F é dado como

$$\nabla F(w^1, ..., w^r, v_1, ..., v_s, X) = \nabla_X F(w^1, ..., w^r, v_1, ..., v_s),$$

define um $(r, s+1)$-campo tensorial. Este campo tensorial é chamado de derivada covariante total.

3.1.4 Transporte Paralelo em Fibrados Vetoriais

Dando continuidade a discussão do segundo capítulo. Provamos que, dada uma conexão em fibrados principais e uma curva suave por partes, existe um difeomorfismo entre fibras dos pontos desta curva chamado transporte paralelo. Agora levando em consideração conexões lineares temos as seguinte definições:

Um campo de vetores V ao longo de uma curva γ é dito paralelo ao longo de γ com respeito a conexão linear ∇ se $D_tV \equiv 0$. Assim podemos caracterizar as geodésicas como as curvas onde os seus vetores velocidades formam um campo paralelo sobre ela mesma. Um campo V em M é dito paralelo se for paralelo ao longo de qualquer curva, assim V é paralelo se, e somente se, a derivada covariante ∇V for identicamente nula. Um fato fundamental entre campos paralelos é que todo vetor tangente em qualquer ponto em uma curva pode se estender unicamente para um campo vetorial paralelo sobre esta curva.

Lema 3.1.15. ([16],p.60) Dada uma curva $\gamma : [0,1] = I \to M$, $t_0 \in I$ e um vetor $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ então existe um único campo vetorial paralelo V ao longo de γ, tal que $V(t_0) = v_0$. Chamaremos este campo como o transporte paralelo de v_0 ao longo da curva γ.

Demonstração. Suponha que $\gamma(I)$ esteja contida em somente uma vizinhança coordenada. Como foi feito anteriormente, a derivada covariante em coordenadas é dado por

$$D_tV = \sum \left(\dot{V}^k(t) + V^j(t)\dot{\gamma}^i(t)\Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\right)\partial_k,$$

onde $V = \sum V^j\partial_j$ e $\gamma(t) = (\gamma^1(t), ..., \gamma^n(t))$. Parecido ao que fizemos na seção anterior, V será paralelo se, e somente se,

$$\dot{V}^k = \sum -V^j\dot{\gamma}^i(t)\Gamma^k_{ij}(\gamma(t)),$$

para cada k. Formando um sistema de equações diferenciáveis para as funções $V^j(t)$. Novamente, pela a existência e unicidade de equações diferênciais de primeira ordem, tomando a condição inicial $V(t_0) = v_0$, existe tal campo e é único.

Para o caso geral faremos por contradição. Considere

$$\beta = sup\{b \in I | b > t_0 \textit{ e existe um único transporte paralelo em } [t_0, b]\}.$$

Tomando b suficientemente próximo de t_0, temos que $\gamma([t_0, b])$ está contido em uma vizinhança coordenada, portanto existe um único campo paralelo sobre $\gamma([t_0, b))$. Tomando um $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $\gamma(\beta - \delta, \beta + \delta)$ esteja contido em uma vizinhança coordenada apenas. Então existe um único campo paralelo $\widetilde{V}$ em $(\beta - \delta, \beta + \delta)$ que satisfaz a condição inicial $V(\beta - \delta/2) = V(\beta - \delta/2)$. Pela unicidade local, $V = \widetilde{V}$ na interseção dos domínios e portanto $\widetilde{V}$ é uma extensão de V em β, o que contradiz a definição de β. □

Assim denotaremos o transporte paralelo sobre γ da mesma forma que no capítulo 2, $T_{\gamma(t_1)} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$, onde que $T_\gamma(v) = V(\gamma(t_1))$, onde V é o transporte paralelo de v sobre γ.

Utilizando um referencial paralelo sobre γ temos que

$$D_tV(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{T^{-1}_{\gamma(t)}V(t) - V(t_0)}{t - t_0}.$$

3.1.5 Conexão de Levi-Civita

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Uma conexão linear ∇ é dita compatível com a métrica Riemanniana g se satisfaz a seguinte regra do produto: Para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\nabla_X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Assim temos o seguinte resultado:

Lema 3.1.16. ([16],p.67) Dada uma conexão linear ∇ em uma variedade Riemanniana compatível com a métrica, uma curva $\gamma : [0, 1] \to M$. Então o transporte paralelo,$T_\gamma : T_{\gamma(0)}M \to T_{\gamma(1)}M$ é uma isometria.

Demonstração. Considere V, W dois campos de vetores ao longo da curva γ e tome $\widetilde{V}, \widetilde{W}$ suas estensões suaves na variedade M. Seja X é um campo de vetores suave tal que $X(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)$, calculando nos pontos da curva γ e pela compatibilidade da métrica:

$$\frac{d}{dt} g(V, W) = \nabla_X g(\widetilde{V}, \widetilde{W}) = g(\nabla_X \widetilde{V}, \widetilde{W}) + g(\widetilde{V}, \nabla_X \widetilde{W})$$

como $D_t V = \nabla_X \widetilde{V}$ e $D_t W = \nabla_X \widetilde{W}$ concluimos

$$\frac{d}{dt} g(V, W) = g(D_t V, W) + g(V, D_t W).$$

Assim, se V, W forem campos paralelos em γ, temos que $g(V, W)$ é constante sobre toda a curva. Assim se $v, w \in T_{\gamma(0)}M$, temos que $T_\gamma(v)$ e $T_\gamma(w)$ são dados por campos paralelos sobre a curva γ e portanto T_γ é uma isometria. $\square$

Definição 3.1.17. Dada uma variedade Riemanniana (M, g) e uma conexão linear ∇. O tensor de torção desta conexão é um $(2, 1)$-campo tensorial $\tau : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definida por

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Uma conexão linear ∇ é dita simétrica se sua torção for identicamente nula, isto é, se

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X \equiv [X, Y].$$

Teorema 3.1.18. ([16],p.68) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Então existe uma única conexão linear ∇ em M que é compatível com g e simétrica. Esta conexão é chamada de conexão de Levi-Civita ou conexão Riemanniana.

Demonstração. Seja ∇ uma conexão simétrica e compátivel com a métrica, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ campos de vetores arbitrários. Separaremos está demonstração em 3 partes. Para isso primeiro iremos encontrar uma expressão para $g(\nabla_X Y, Z)$.

Pela compatibilidade da métrica temos

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Como ∇ é simetrica temos $\nabla_X Z = \nabla_Z X + [X, Z]$, concluíndo que

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_Z X) + g(Y, [X, Z]).$$

Analogamente temos

$$Yg(Z,X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_X Y) + g(Z, [Y,X]),$$

$$Zg(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Y Z) + g(X, [Z,Y]).$$

Portanto obtemos a seguinte igualdade:

$$Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) = 2g(\nabla_X Y, Z) + g(Y,[X,Z]) + g(Z,[Y,X]) - g(X,[Z,Y]).$$

Finalmente, isolando $g(\nabla_X Y, Z)$:

$$g(\nabla_X Y) = \frac{1}{2}(Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) - g(Y,[X,Z]) - g(Z,[Y,X]) + X,[Z,Y]). \quad (3.1.1)$$

1. *Existência local*: Considere $((x_1,...,x_n),U)$ um sistema de coordenadas. Sabemos que $[\partial_i,\partial_j] = 0$ para $i \neq j$, assim da equação 3.1.1, obtemos

$$g(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_l) = \frac{1}{2}(\partial_i g(\partial_j,\partial_l) + \partial_j g(\partial_l,\partial_i) - \partial_l g(\partial_i,\partial_j)).$$

   Expressando em coordenadas:

$$\sum_m \Gamma_{ij}^m g_{ml} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}),$$

   onde $g_{ij} = g(\partial_i,\partial_j)$. Tomando a matriz $\{g^{lk}\}$ como a matriz inversa de $\{g_{lk}\}$, isto é, $g_{ml}g^{lk} = \delta_{km}$ (delta de Kronecker) e multiplicando em ambos os lados da expressão acima, temos

$$\Gamma_{ij}^k \sum g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}).$$

   Assim $\{\Gamma_{ij}^k\}$ será uma família de n^3 funções diferênciáveis em U e pelo lema 3.1.7 temos que existe uma única conexão ∇ em U e pela expressão da conexão pode-se mostrar que ela é simétrica. Resta provar a compatibilidade com a métrica. Em termos de um referencial local, as componentes de ∇g são

$$g_{ij;k} = \sum \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^l - \Gamma_{kj}^l.$$

   Mas

$$\sum \Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{il} = \sum \partial_k g_{ij},$$

   logo $g_{ij;k} = 0$ e portanto $\nabla g \equiv 0$ concluíndo que ∇ é compatível com a métrica.

2. *Unicidade Global*: Suponha que $\widetilde{\nabla}$ e ∇ sejam duas conexões em M que são simétricas e compatíveis com g. Pela equação 3.1.1, $g(\nabla_X Y, Z)$ não depende da conexão e portanto $g(\widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, Z) = 0$ para quaisquer campos de vetores X, Y, Z. Logo $\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y$ para quaisquer X, Y e portanto $\widetilde{\nabla} = \nabla$.

3. *Existência Global*: Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura da variedade M. Pelo item 1, cada U_α possui uma conexão ∇^α simétrica e compátivel com a métrica. Assim, podemos definir ∇ como ∇^α se for calculado em U_α. Está bem definida, pois pela unicidade provada em 2, se U_α e U_β se interceptarem temos $\nabla^\alpha = \nabla^\beta$ na interseção.

$\square$

Uma das propriedades importantes da conexão de Levi-Civita é que ela se comporta bem por isometrias.

Proposição 3.1.19. ([16],p.70) Suponha que $\phi : (M, g) \to (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ seja uma isometria entre variedade Riemannianas. Então

- ϕ leva uma conexão de Levi-Civita ∇ de g em uma conexão de Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$ de $\widetilde{g}$, isto é,

$$\phi_*(\nabla_X Y) = \widetilde{\nabla}_{\phi_* X}(\phi_* Y);$$

- Se γ for uma curva em M e V um campo vetorial ao longo de γ, então

$$\phi_* D_t V = \widetilde{D}_t(\phi_* V);$$

- ϕ leva geodésicas em geodésicas: se γ for uma geodésica em M com ponto inicial p e velocidade inicial V, então $\phi \circ \gamma$ é uma geodésica em $\widetilde{M}$ com ponto inicial $\phi(p)$ e velocidade inicial $\phi_* V$.

Um esboço da demonstração segue do fato de $\phi^*\widetilde{\nabla}$ define uma conexão em M que é simétrica e compatível com g, pela unicidade da conexão de Levi-Civita, $\phi^*\widetilde{\nabla} = \nabla$ o que no primeiro item. Assim, restringindo a uma curva γ em M concluímos que $\phi^*\widetilde{D}_t = D_t$ e assim pela definição de pull-back segue o segundo item. E segue imediatamente do segundo item, o terceiro.

3.1.6 Mapa Exponencial

Definição 3.1.20. Dada uma variedade Riemanniana (M, g). Considere o seguinte subconjunto $\mathcal{E}$ de TM, como sendo

$$\mathcal{E} := \{V \in TM : \gamma_V \textit{ é definido em algum intervalo contendo}[0, 1]\},$$

e então definimos o mapa exponencial:

$$exp(V) = \gamma_V(1).$$

Para cada $p \in M$, o mapa exponencial restrito a $\mathcal{E}_p := \mathcal{E} \cap T_pM$ será denotado como exp_p.

Para cada $V \in TM$ e $c, t \in \mathbb{R}$ temos a seguinte relação:

$$\gamma_{cV}(t) = \gamma_V(ct),$$

este resultado pode ser encontrado em [16].

Proposição 3.1.21. ([16],p.72)

- $\mathcal{E}$ é um subconjunto aberto de TM contendo a seção nula, e cada conjunto $\mathcal{E}_p$ é estrelado com respeito ao $0 \in T_pM$;

- Para cada $V \in TM$, a geodésica γ_V é dado por

$$\gamma_V(t) = exp(tV)$$

  para todo t tal que ambos os dois mapas estão definidos;

- O mapa exponencial é suave.

A demonstração do resultado acima é longa e técnica podendo ser encontrada em [16].

A naturalidade da conexão de Levi-Civita e a unicidade de geodésicas, segue-se a importante propriedade de naturalidade do mapa exponencial.

Proposição 3.1.22. ([16],p.76) Suponha que $\phi : (M, g) \to (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ é uma isometria entre variedades Riemannianas. Então, para qualquer $p \in M$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "\phi_*"] \arrow[d, "exp_p"'] & T_{\phi(p)}\widetilde{(M)} \arrow[d, "exp_{\phi(p)}"] \\ M \arrow[r, "\phi"'] & \widetilde{M} \end{tikzcd}$$

Demonstração. Segue imediatamente da proposição 3.1.19. □

Dado um ponto, $p \in M$, podemos encontrar uma vizinhança U onde o mapa exp_p restrita a este aberto é um difeomorfismo sobre a sua imagem ou seja geramos um sistema de coordenadas especial.

Lema 3.1.23. ([16],p.76) Para qualquer $p \in M$, existe uma vizinhança aberta do zero $\mathcal{V} \subset T_pM$ e uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ de p tal que $exp_p : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ é um difeomorfismo.

Demonstração. Primeiro tome $0 \in T_pM$ considere a seguinte identificação, $T_0(T_pM) = T_pM$. Assim podemos considerar a aplicação $(exp_p)_* : T_pM \to T_pM$.

Tome $V \in T_pM$ arbitrário e defina a curva $\tau(t) = tV$. Assim, podemos calcular a expressão de $(exp_p)_*$:

$$(exp_p)_*V = \frac{d}{dt}_{t=0}(exp_p \circ \tau)(t) = \frac{d}{dt}_{t=0} exp_p(tV) = \frac{d}{dt}_{t=0}\gamma_V(t) = V,$$

adquirindo o mapa identidade. Assim $(exp_p)_*$ será invertível na origem e pelo teorema da função inversa apresentada no capítulo 1, segue o resultado. □

Qualquer vizinhança aberta $\mathcal{U}$ de $p \in M$ que é difeomorfa a imagem de exp_p de uma vizinhança estrelada aberta de $0 \in T_pM$ como a do lema anterior é chamada de vizinhança normal de p. Seja $\epsilon > 0$, tal que exp_p é um difeomorfismo da bola $B_\epsilon(0) \subset T_pM$ sobre a sua imagem, então a imagem $exp_p(B_\epsilon(0))$ é chamada de bola geodésica em M. Da mesma forma, se a bola fechada $\overline{B}_\epsilon(0)$ estiver contida em uma vizinhança normal $\mathcal{V} \subset T_pM$, então a imagem $exp_p(\overline{B}_\epsilon(0))$ é chamada de bola geodésica fechada e $exp_p(\partial\overline{B}_\epsilon(0))$ é chamada de esfera geodésica.

Considere uma base ortonormal $\{E_1, ..., E_n\} \subset T_pM$ e um isomorfismo $E : \mathbb{R}^n \to T_pM$ dado por $E(x_1, ..., x_n) = \sum x_iE_i$. Se $\mathcal{U}$ for uma vizinhança normal de p, podemos compor este isomorfismo com o mapa exponencial de onde obtemos a carta

$$\phi := E^{-1} \circ exp_p^{-1} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}.$$

Chamamos as coordenadas desta carta de coordenadas normais centradas em p

Dado $(\phi,\mathcal{U})$ coordenadas normais centradas em p. Repare que se $V = \sum V_i\partial_i \in T_pM$, a geodésica γ_V começando em p com velocidade inicial V é representada em coordenadas normais pelo segmento:

$$\gamma_V(t) = (tV_1, ..., tV_n),$$

enquanto γ_V estiver dentro de $\mathcal{U}$. As coordenadas de p são $(0, ..., 0)$. E por fim as componentes da métrica em p são $g_{ij} = \delta_{ij}$ e a primeira derivada parcial de g_{ij} e os símbolos de Christoffel se anulam em p.

Um conjunto aberto $\mathcal{W} \subset M$ é chamado de uniformemente normal se existir algum $\delta > 0$ tal que $\mathcal{W}$ está contido em uma bola geodésica de raio δ em torno de cada um dos seus pontos.

Lema 3.1.24. ([16],p.78) Dado $p \in M$ e uma vizinhança $\mathcal{U}$ de p, existe uma vizinhança uniformemente normal $\mathcal{W}$ de p contida em $\mathcal{U}$.

A demonstração deste lema pode ser encontrada em *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, [16].

3.2 Curvatura em variedades Riemannianas

Uma questão importante sobre as variedades Riemannianas é saber quando duas variedades são localmente isométricas e se forem quais são as propriedades que são preservadas via a isometria. Nesta seção iremos estudar tensores invariantes por isometrias.

Definição 3.2.1. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana munida da conexão de Levi-Civita ∇. O endomorfismo de curvatura é o mapa $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definida por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

O endomorfismo de curvatura é um $(1, 3)$-campo tensorial. Assim podemos expressar o tensor de curvatura em termos de qualquer referencial local em particular se $(x_1, ..., x_k)$ for um sistema de coordenadas em M. Por convenção o último índice é o contravariante.

$$R = \sum R^l_{ijk} dx_i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_l,$$

onde os coeficientes R^l_{ijk} são definidos como

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum R^l_{ijk} \partial_l.$$

Definição 3.2.2. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Definimos o tensor de curvatura como um (0,4)-campo tensorial $Rm : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathbb{R}$ dada por

$$Rm(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W), \forall X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M).$$

Da mesma forma que fizemos com o endomorfismo de curvatura, dado um sistema de coordenadas $((x_1, ..., x_n), U)$ podemos escrever o tensor de curvatura como

$$Rm = \sum R_{ijkl} dx_i \otimes dx_j \otimes dx_k \otimes dx_l,$$

onde $R_{ijkl} = \sum_m g_{lm} R^m_{ijk}$.

Lema 3.2.3. ([16],p.119) O endomorfismo de curvatura e o tensor de curvatura são invariantes via isometria local. Mais precisamente, se $\phi : (M, g) \to (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ for uma isometria local, então

$$\phi^* \widetilde{Rm} = Rm;$$

$$\widetilde{R}(\phi_* X, \phi_* Y)\phi_* Z = \phi_*(R(X, Y)Z).$$

Demonstração. Utilizando a proposição 3.1.19 temos que para todo $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(\phi_* X, \phi_* Y)\phi_* Z &= \nabla_{\phi_* X}\nabla_{\phi_* Y}(\phi_* Z) - \nabla_{\phi_* Y}\nabla_{\phi_* X}(\phi_X Z) \\
&= \nabla_{\phi_* X}(\phi_*(\nabla_Y Z)) - \nabla_{\phi_* Y}(\phi_*(\nabla_X Z)) - \nabla_{\phi_*[X,Y]}(\phi_* Z) \\
&= \phi_*(\nabla_X \nabla_Y Z) - \phi_*(\nabla_Y \nabla_X Z) - \phi_*(\nabla_{[X,Y]} Z) \\
&= \phi_*(R(X,Y)Z).
\end{aligned}$$

Agora, como ϕ é uma isometria

$$\begin{aligned}
\phi^* R_m(X, Y, Z, W) &= g(R(\phi_* X, \phi_* Y)\phi_* Z, \phi_* W) \\
&= g(\phi_*(R(X,Y)Z), \phi_* W) \\
&= g(R(X,Y)Z, W) = R(X, Y, Z, W)
\end{aligned}$$

□

Dizemos que uma variedade é plana se for localmente isométrica a um espaço Euclidiano isto é, para cada ponto da variedade existe uma vizinhança que é isométrica a um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ com a métrica Euclidiano.

Segue, vários resultados importantes sobre o tensor de curvatura, todos eles poderão ser encontrados em *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, [16]. O primeiro resultado possui uma demonstração longa e técnica então resolvemos omiti-los.

Teorema 3.2.4. ([16],p.119) Uma variedade Riemanniana é plana se, e somente se, seu tensor de curvatura for identicamente nulo.

Proposição 3.2.5. ([16],p.121) O tensor de curvatura possuí as seguintes simetrias, dada quaisquer campos de vetores W, X, Y, Z:

- $Rm(W, X, Y, Z) = -Rm(X, W, Y, Z)$;
- $Rm(W, X, Y, Z) = -Rm(W, X, Z, Y)$;
- $Rm(W, X, Y, Z) = Rm(Y, Z, W, X)$;
- $Rm(W, X, Y, Z) + Rm(X, Y, W, Z) + Rm(Y, W, X, Z) = 0$ (Identidade de Bianchi).

Demonstração. 1. Repare que $R(W, X)Y = -R(X, W)Y$, assim segue-se imediatamente que $Rm(W, X, Y, Z) =$ $Rm(X, W, Y, Z)$;

2. Como ∇ é a conexão de Levi-Civita, pela compatibilidade da métrica chegamos as seguintes identidades:

$$WX\|Y\|^2 = W(2g(\nabla_X Y, Y)) = 2g(\nabla_W \nabla_X Y, Y) + 2g(\nabla_X Y, \nabla_W Y);$$

$$XW\|Y\|^2 = X(2g(\nabla_W Y, Y)) = 2g(\nabla_X \nabla_W Y, Y) + 2g(\nabla_W Y, \nabla_X Y);$$

$$[W, X]\|Y\|^2 = 2g(\nabla_{[W,X]} Y, Y).$$

Agora

$$\begin{aligned}
0 &= WX\|Y\|^2 - XW\|Y\|^2 - [W, X]\|Y\|^2 \\
&= 2g(\nabla_W \nabla_X Y, Y) - 2g(\nabla_X \nabla_W Y, Y) - 2g(\nabla_{[W,X]} Y, Y) \\
&= 2g(R(W, X)Y, Y) \\
&= 2Rm(W, X, Y, Y).
\end{aligned}$$

Portanto, para quaisquer $W, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ temos que $0 = 2Rm(W, X, Y, Y)$, assim $Rm(W, X, Y + Z, Y + Z) = 0$ no que implica que $Rm(W, X, Y, Z) = -Rm(W, X, Z, Y)$.

3. Para provar este item, iremos assumir que o quarto item vale, (vale observar que não é utilizado este item para provar o quarto item, assim fica coerente esta demonstração). Utilizando os itens 1 e 2 juntamente com a identidade de Bianchi temos

$$\begin{aligned} 2Rm(Y,W,X,Z) &= Rm(Y,W,X,Z) + Rm(Y,W,X,Z) \\ &= Rm(Y,W,X,Z) + Rm(W,Y,Z,X) \\ &= -Rm(W,X,Y,Z) - Rm(X,Y,W,Z) \\ &\quad -Rm(Z,W,Y,X) - Rm(Y,Z,W,X) \end{aligned}$$

Reorganizando e utilizando novamente a identidade de Bianchi e os itens 1 e 2

$$\begin{aligned} &= Rm(X,Y,Z,W) + Rm(Y,Z,X,W) + Rm(W,X,Z,Y) + Rm(Z,W,X,Y) \\ &= -Rm(Z,X,Y,W) - Rm(X,Z,W,Y) \\ &= 2Rm(X,Z,Y,W). \end{aligned}$$

4. E por fim, se provarmos que

$$R(W,X)Y + R(X,Y)W + R(Y,W)X = 0,$$

segue automáticamente o resultado. Utilizando a simetria da conexão temos

$$\begin{aligned} & R(W,X)Y + R(X,Y)W + R(Y,W)X \\ &= (\nabla_W \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_W Y - \nabla_{[W,X]} Y) + (\nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_{[X,Y]} W) \\ &\quad +(\nabla_Y \nabla_W X - \nabla_W \nabla_Y X - \nabla_{[Y,W]} X) \\ &= \nabla_W [X,Y] + \nabla_X [Y,W] + \nabla_Y [W,X] - \nabla_{[W,X]} Y - \nabla_{[X,Y]} W - \nabla_{[Y,W]} X \\ &= [W,[X,Y]] + [X,[Y,W]] + [Y,[W,X]] = 0. \end{aligned}$$

□

Existe mais uma identidade que o tensor de curvatura satisfaz. Geralmente, ela é chamada de segunda identidade de Bianchi, mas atualmente pode-se ser encontrada com o nome Identidade diferencial de Bianchi. A demonstração deste resultado pode-se encontrar em *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*,[16].

Proposição 3.2.6. Identidade de Bianchi([16],p.123): A derivada covariante total do tensor de curvatura satisfaz a seguinte identidade:

$$\nabla Rm(X,Y,Z,V,W) + \nabla Rm(X,Y,V,W,Z) + \nabla Rm(X,Y,W,Z,V) = 0.$$

3.3 Subvariedade Riemannianas

Definição 3.3.1. Seja $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ uma variedade Riemanniana de dimensão m, (M,g) uma variedade de dimensão n e $i: M \to \widetilde{M}$ uma imersão injetiva. Dizemos que (M,g) é uma subvariedade Riemanniana se $g = i^*\widetilde{g}$. neste caso dizemos que a imersão $i: M \to \widetilde{M}$ de uma subvariedade Riemanniana é uma imersão isométrica.

Considerando M uma subvariedade Riemanniana de $\widetilde{M}$. Para cada ponto $p \in M$, o espaço tangente $T_p\widetilde{M}$ é escrito como soma direta de T_pM com o seu complemento ortogonal $N_pM := (T_pM)^\perp$ com respeito ao produto interno $\widetilde{g}$ em $T_p\widetilde{M}$. Chamamos o espaço N_pM de espaço normal no ponto p. Assim o fibrado vetorial:

$$NM := \bigcup_{p \in M} N_pM$$

é chamado de fibrado normal da subvariedade M.

De fato, o fibrado normal é um fibrado vetorial. Seja $p \in M$, assim existe uma vizinhança $\widetilde{\mathcal{U}}$ de p na variedade $\widetilde{M}$ e um referencial suave ortonormal $\{E_1, ..., E_m\}$ em $\widetilde{\mathcal{U}}$ tal que as restrições de $\{E_1, ..., E_n\}$ em M formam um referencial ortonormal em TM. Assim, temos que os últimos $m - n$ vetores $\{E_{n+1}|_p, ..., E_m|_p\}$ formam uma base para N_pM para cada $p \in \widetilde{\mathcal{U}} \cap M$, e podemos utilizar as componentes dos vetores normais com respeito a esta base para construir uma trivialização local de NM.

Iremos adotar as notações $\mathfrak{X}(\widetilde{M}|_M)$ e $\mathcal{N}(M)$ para os espaços de seções de $T\widetilde{M}|_M$ e NM, respectivamente.

Projetando ortogonalmente cada vetor $v \in T\widetilde{M}$ sobre os subespaços T_pM e N_pM para algum $p \in M$, geramos dois mapas

$$\pi^T : T\widetilde{M}|_M \to TM,$$

$$\pi^\perp : T\widetilde{M}|_M \to NM,$$

chamados de projeção tangencial e projeção normal, respectivamente. Denotaremos por $X^T := \pi^T(X)$ e $X^\perp := \pi^\perp(X), \forall X \in T\widetilde{M}|_M$.

Se $\widetilde{\nabla}$ for a conexão de Levi-Civita de $\widetilde{M}$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, estendendo X em $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$ e Y em $\widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$, assim $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ se decompõe em

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} = (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^T + (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^\perp.$$

Definição 3.3.2. Seja M uma subvariedade Riemanniana de $\widetilde{M}$ e $\widetilde{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\widetilde{M}$. Definimos a segunda forma fundamental como o mapa:

$$II : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{N}(M)$$

$$(X, Y) \mapsto (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})^\perp,$$

onde os campos X, Y são estendidos arbitrariamente para $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$.

Desde que $\pi^\perp$ leva seções suaves em seções suaves, $II(X, Y)$ é uma seção suave de $N(M)$. Ou seja, a segunda forma fundamental está bem definida.

Lema 3.3.3. ([16],p.134) A segunda forma fundamental, $II(X, Y)$ para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, é

1. independente das extensões de X e Y,
2. bilinear sobre $C^\infty(M)$ e
3. simétrica em X e Y.

Demonstração. 1. Sabemos que $\widetilde{\nabla}_X Y|_p$ depende somente do ponto $X(p)$, então $II(X, Y)$ independe da extensão de X.

2. Pela linealidade de $\widetilde{\nabla}$ e da projeção, obviamente $II(X,Y)$ é $C^\infty(M)$-linear na primeira coordenada e utilizando a simetria concluímos a bilinealidade de II.

3. Seja X e Y dois campos estendidos arbitrariamente para $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ respectivamente. Como $[\widetilde{X},\widetilde{Y}]$ será tangente em todos os pontos de M, temos:
$$II(X,Y) - II(Y,X) = (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X})^\perp = [\widetilde{X},\widetilde{Y}]^\perp = 0.$$

□

Se a componente normal da conexão de Levi-Civita de $\widetilde{M}$ restrita em $\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)$ é a segunda forma fundamental, a componente tangencial será exatamente a conexão de Levi-Civita de M devido ao seguinte teorema:

Teorema 3.3.4. Fórmula de Gauss:([16],p.135) Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ forem estendidos arbitrariamente para campos de vetores em $\widetilde{M}$, a seguinte fórmula vale:
$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X,Y).$$

Demonstração. Considere o mapa $\nabla^T : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tal que
$$\nabla^T(X,Y) := (\widetilde{\nabla}_X Y)^T,$$
onde X, Y são campos estendidos arbitráriamente em $\widetilde{M}$. Por conversão, iremos denotar $\nabla^T(X,Y) = \nabla^T_X Y$. É fácil verificar, utilizando a o fato que a projeção é linear, que ∇^T é uma conexão. Sabendo que $[X,Y]$ é tangente a variedade em M temos
$$\nabla^T_X Y - \nabla^T_Y X = (\widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X)^T = [X,Y]^T = [X,Y],$$
portanto ∇^T é simétrica. Tomando $i : M \to \widetilde{M}$ imersão isométrica, temos
$$\begin{aligned} Xg(Y,Z) &= \widetilde{g}(i(\widetilde{\nabla}_X Y), i(Z)) + \widetilde{g}(i(Y), i(\widetilde{\nabla}_X Z)) \\ &= g((\widetilde{\nabla}_X Y)^T, Z) + g(Y, (\widetilde{\nabla}_X Z)^T) \\ &= g(\nabla^T_X Y, Z) + g(Y, \nabla^T_X Z). \end{aligned}$$
Portanto, ∇^T é uma conexão compatível com g e simétrica. Pela unicidade da conexão de Levi-Civita, temos que $\nabla^T = \nabla$ e portanto $(\widetilde{\nabla}_X Y)^T = \nabla_X Y$, concluindo o resultado. □

Enquanto a segunda forma fundamental está definida em termos da derivada covariante de campos vetoriais tangentes de M, podemos também considerar a derivada covariante dos campos vetoriais normais de M.

Lema 3.3.5. Equação de Weingarten([16],p.136): Suponha que $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $N \in \mathcal{N}(M)$. Considerando que X, Y, N são estendidos arbitrariamente para $\widetilde{M}$, a seguinte equação vale para todos os pontos de M:
$$\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X N, Y) = -g(N, II(X,Y)).$$

Demonstração. Como Y é tangente temos que $\widetilde{g}(N,Y) = 0$ e portanto:
$$\begin{aligned} 0 = Xg(N,Y) &= \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X N, Y) + \widetilde{g}(N, \widetilde{\nabla}_X Y) \\ &= \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X N, Y) + \widetilde{g}(N, \nabla_X Y + II(X,Y)) \\ &= \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X N, Y) + g(N, II(X,Y)). \end{aligned}$$

□

Podemos definir uma conexão $\nabla^\perp$ no fibrado normal NM, como $\nabla^\perp : \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{N}(M) \to \mathcal{N}(M)$ definido como sendo $\nabla^\perp_X \xi = (\widetilde{\nabla}_X \xi)^\perp$, onde X, ξ são estendidos arbitrariamente em $\widetilde{M}$.

Definição 3.3.6. Seja $\xi \in \mathcal{N}(M)$. Definimos o operador de forma (shape operator) de M na direção de ξ como:

$$\begin{aligned} A_\xi : \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M) \\ X &\mapsto -(\widetilde{\nabla}_X \xi)^T. \end{aligned}$$

Pode-se mostrar que o operador de forma de M na direção de ξ se relaciona com a segunda forma fundamental pela equação:

$$g(II(X,Y),\xi) = g(A_\xi X, Y).$$

Assim, devido a simetria da segunda forma fundamental, o operador de forma A_ξ é um tensor auto adjunto em M. Podemos definir o operador de forma para qualquer campo normal de M. A coleção de todos estes endomorfismos é chamado somente de operador de forma de M e é denotado por A. A decomposição ortogonal

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + (\nabla^\perp_X \xi),$$

é conhecido como fórmula de Weingarten.

Agora, a diferença entre o tensor de curvatura de M e o tensor de curvatura de $\widetilde{M}$ é dada somente pela segunda forma fundamental, conhecido como a Equação de Gauss.

Teorema 3.3.7. A Equação de Gauss:([16],p.136) Para qualquer $X, Y, Z, W \in T_pM$, com $p \in M$, a seguinte equação vale:

$$\widetilde{Rm}(X,Y,Z,W) = Rm(X,Y,Z,W) - g(II(X,W), II(Y,Z)) + g(II(X,Z), II(Y,W)),$$

onde $\widetilde{Rm}$ e Rm são os tensores de curvatura de $\widetilde{M}$ e M respectivamente.

3.4 Campos de Jacobi e Campos de Killing

3.4.1 Famílias admissíveis

Considere o mapa contínuo $\Gamma : (-\epsilon,\epsilon) \times [a,b] \to M$ que é suave em cada retângulo da forma $(-\epsilon,\epsilon) \times [a_{i-1}, a_i]$ para alguma sub divisão finita $a = a_0 < a_1 < ... < a_k = b$ e que para cada $s \in (-\epsilon,\epsilon)$, $\Gamma_s(t) := \Gamma(s,t)$ é uma curva suave por partes. Chamaremos este mapa como uma família admissível de curvas.

Se Γ for uma família admissível, um campo de vetores ao longo de Γ será um mapa contínuo $V : (-\epsilon,\epsilon) \times [a,b] \to TM$ tal que $V(s,t) \in T_{\Gamma(s,t)}M$ para cada (s,t), e que $V|_{(-\epsilon,\epsilon)\times[a_{i-1},a_i]}$ é suave para alguma subdivisão $a = a_0 < ... < a_k = b$. Geralmente, denotamos as curvas $\Gamma^t(s) := \Gamma(s,t)$ tomando t constante e definindo em $(-\epsilon,\epsilon)$, como as curvas transversais.

Nos pontos em que Γ for suave, definimos os seguintes campos:

$$\partial_i \Gamma(s,t) := \frac{d}{dt}\Gamma_s(t); \qquad \partial_s \Gamma(s,t) := \frac{d}{ds}\Gamma^t(s).$$

Por convenção, dado um campo de vetores V ao longo de Γ, denotaremos a derivada covariante ao longo das curvas transversais como D_sV e ao longo das curvas $\Gamma_s(t)$ como D_tV. Então temos o seguinte resultado:

Lema 3.4.1. Lema da Simetria:([16],p.97) Seja $\Gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \to M$ uma família admissível de curvas em uma variedade Riemanniana. Somente no retangulo $(-\epsilon, \epsilon) \times [a_{i-1}, a_i]$ onde Γ é suave,

$$D_s \partial_t \Gamma = D_t \partial_s \Gamma.$$

Demonstração. Seja $((x_1, ..., x_n), U)$ um sistema de coordenadas em torno de um ponto $\Gamma_{s_0}(t_0)$. Assim, em coordenadas $\Gamma_s(t) = (x_1(s, t), ..., x_n(s, t))$ e portanto

$$\partial_t \Gamma = \sum \frac{\partial x_k}{\partial t} \partial_k; \qquad \partial_s \Gamma = \sum \frac{\partial x_k}{\partial s} \partial_k.$$

Assim, calculando as derivadas covariantes em termos das coordenadas ao longo de curvas, obtemos

$$D_s \partial_t \Gamma = \sum \left(\sum \frac{\partial^2 x_k}{\partial s \partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial x_j}{\partial s} \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k$$

$$D_t \partial_s \Gamma = \sum \left(\sum \frac{\partial^2 x_k}{\partial t \partial s} + \frac{\partial x_i}{\partial s} \frac{\partial x_j}{\partial t} \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k.$$

Trocando as regras de i e j na segunda equação e utilizando a condição de simetria, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, verifica-se que as expressões são equivalentes. □

Definição 3.4.2. Seja $\gamma : [a, b] \to M$ uma curva suave por partes, uma variação de γ é uma família admissível Γ, tal que $\Gamma_0(t) = \gamma(t) \forall t \in [a, b]$. A variação de γ é chamada de variação própria se $\Gamma_s(a) = \gamma(a)$ e $\Gamma_s(b) = \gamma(b), \forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Se Γ for uma variação da curva γ, chamamos o campo $V(t) = \partial_s \Gamma(0, t)$ de campo variacional ao longo de γ. Se o campo variacional V se anular nas extremidades da curva, isto é, $V(a) = V(b) = 0$ então dizemos que o campo é próprio.

Lema 3.4.3. ([16],p.98) Se γ for uma curva suave por partes e V for um campo vetorial sobre a curva γ, então V é um campo variacional de alguma variação de γ. Se V for próprio, a variação também será própria.

Demonstração. Como $[a, b]$ é compacto, existe um $\epsilon > 0$ tal que em $(-\epsilon, \epsilon) \times [a, b]$ podemos definir $\Gamma(s, t) = exp(sV(t))$. Obviamente $\partial_s \Gamma(0, t) = V$ e Γ será uma variação de γ. Além disso, se $V(a) = V(b) = 0$, implica que $\Gamma(s, a) \equiv \gamma(a)$ e $\Gamma(s, b) \equiv \gamma(b)$, portanto Γ é própria. □

3.4.2 Campos de Jacobi

Seja $\Gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \to M$ uma variação por geodésicas, isto é, $\Gamma_s(t)$ é um segmento de geodésica para cada s, assim pela equação da geodésica temos:

$$D_t \partial_t \Gamma \equiv 0, \forall (s, t) \in (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b].$$

Calculando a derivada covariante desta equação com respeito a s, obtemos

$$D_s D_t \partial_t \Gamma \equiv 0.$$

Para relacionar isto com um campo variacional de γ, necessitamos que da comutação entre D_s e D_t.

Lema 3.4.4. ([16],p.174) Se Γ for uma família suave admissível de curvas, e V for um campo vetorial suave ao longo de Γ, então

$$D_s D_t V - D_t D_s V = R(\partial_s \Gamma, \partial_t \Gamma) V.$$

A demonstração do fato acima pode ser encontrada em *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, [16].

Teorema 3.4.5. A equação de Jacobi:([16],p.175) Seja γ uma geodésica e V um campo de vetores ao longo de γ. Se V for um campo variacional via geodésicas, então V satisfaz

$$D_t^2 V + R(V, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0.$$

Demonstração. Seja Γ uma variação via geodésicas, temos que $\Gamma(s_0, t)$ é uma geodésica para cada s_0 fixo, no que implica que

$$0 = D_s D_t \partial_t \Gamma,$$

assim pelo o lema anterior obtemos,

$$0 = D_t D_s \partial_t \Gamma + R(\partial_s \Gamma, \partial_t \Gamma)\partial_t \Gamma,$$

e pelo o lema de simetria, obtemos

$$0 = D_t D_t \partial_s \Gamma + R(\partial_s \Gamma, \partial_t \Gamma)\partial_t \Gamma.$$

Assim, se $s = 0$, temos que $\partial_s \Gamma(0, t) = V(t)$ e $\partial_t \Gamma(0, t) = \dot{\gamma}(t)$, portanto

$$D_t^2 V + R(V, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0.$$

□

Qualquer campo de vetores ao longo de um geodésica que satisfaz a equação de Jacobi são chamados de campo de Jacobi.

Proposição 3.4.6. ([16],p.176) Seja $\gamma : I \to M$ uma geodésica, $a \in I$, e $p = \gamma(a)$. Para qualquer par de vetores $X, Y \in T_pM$, existe um único campo de Jacobi J ao longo de γ satisfazendo as condições iniciais

$$J(a) = X; \qquad D_t J(a) = Y.$$

Demonstração. Seja $((x_1, ..., x_n), U)$ um sistema de coordenadas para p. Portanto, podemos expressar o campo J como $J(t) = \sum J_i(t)\partial_i$ e a curva $\gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$. Assim equação de Jacobi fica:

$$\sum \ddot{J}_i + R^i_{ijl} J_i \dot{\gamma}_k \dot{\gamma}_l = 0.$$

Agora, tome $V_i = \dot{J}_i$ temos o seguinte sistema equações diferênciáveis de primeira ordem:

$$\sum \dot{V}_i + R^i_{ijl} J_i \dot{\gamma}_k \dot{\gamma}_l = 0,$$

para as funções $\{J_1, ..., J_n, V_1, ..., V_n\}$. Pelo teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciáveis de primeira ordem, existem funções tais que $J_i(a) = X_i$ e $V_i(a) = Y_i$ □

Por causa do teorema acima, qualquer campo variacional de uma variação por geodésicas é um campo de Jacobi, também vale o contrário.

Lema 3.4.7. ([13],p.182) Todo campo de Jacobi ao longo de uma geodésica γ é um campo variacional de alguma variação de γ via geodésicas.

Demonstração. Seja X um campo de Jacobi ao longo de $\gamma(t)$. Tome $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ a geodésica tal que $\sigma(0) = \gamma(0)$ e $\dot{\sigma}(0) = X(0)$.

Tome V e W dois campos paralelos ao longo de σ com

$$V(0) = \dot{\gamma}(0); \qquad W(0) = \dot{X}(0).$$

Assim, defina o variacional como sendo,

$$\Gamma(s,t) = exp_{\sigma(s)}(t(V(s) + sW(s))).$$

Pela definição da exponencial, $\Gamma_s(t)$ são geodésicas e $\Gamma(0,t) = \exp_{\gamma(0)}(t\dot{(\gamma)}(0)) = \gamma(t)$. Portanto, Γ é uma variação de γ via geodésicas. Seja Y o campo de Jacobi definido por Γ. Por definição:

$$Y(t) = \frac{\partial}{\partial s}(exp_{\gamma(s)}(0))|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s}\gamma(s)|_{s=0} = X(0).$$

Como ∇ é livre de torção e V e W são paralelos:

$$\dot{Y}(0) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\left(\frac{\partial}{\partial s}\Gamma(s,t)\right)|_{s=0} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(s,t)\right)|_{s=0}$$

$$= \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\left(V(s) + sW(s)\right)|_{s=0} = W(0) = \dot{X}(0).$$

Assim pela existência e unicidade de campos de Jacobi temos que $Y = X$. □

3.4.3 Campos Killing

Definição 3.4.8. Dado uma variedade Riemanniana M, um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ é chamado de campo de Killing, se o seu grupo uniparamétrico, $\phi_X^t : M \to M$, for uma isometria.

Em algumas literaturas, campos de Killing são conhecidos como isometrias infinitesimais, como por exemplo no livro *Foundations of Differential Geoometry, vol. 1*, [15].

Lema 3.4.9. Dada uma geodésica, $\gamma : I \to M$ e um campo de Killing $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então $X|_\gamma$ é um campo de Jacobi.

Demonstração. Seja ϕ_X^t o grupo uniparamétrico de X e defina a variação

$$\Gamma(s,t) = \phi_X^s(\gamma(t)),$$

como ϕ_X^s é uma isometria, leva geodésicas em geodésicas, assim para cada s temos $\phi_X^s(\gamma(t))$ é uma geodésica. Logo pelas propriedades de campos de Jacobi, temos que X é campo de Jacobi. □

Lema 3.4.10. ([15],p.230) Seja X um campo de vetores em uma variedade Riemanniana M. X é um campo de Killing se, e somente se, $\mathcal{L}_X g = 0$.

Demonstração. Seja ϕ_X^t o grupo uniparamétrico do campo X. Se $\mathcal{L}_X g = 0$, então

$$\frac{d}{dt}((\phi_X^t)^* g)|_{t=0} = 0.$$

Se isto for é valido para todo ponto de M, obtemos

$$(\phi_X^t)^* g = g, \forall t \in I.$$

Portanto, os difeomorfismos ϕ_X^t são isometrias, logo X é Killing. Caso contrário, se ϕ_X^t são isometrias então, vale imediatamente que:

$$\frac{d}{dt}((\phi_X^T)^* g)|_{t=0} = 0.$$

$\square$

Dado um campo de vetor X em M, ∇ uma conexão linear de M, então definimos o mapa $\nabla X(Y) = \nabla_Y X$ que será C^∞.

Uma importante caracterização dos campos de Killing com a conexão de Levi-Civita é que um campo é de Killing se, e somente se a derivada covariante ∇X for anti-simétrica. Para demonstrar isso iremos introduzir um novo operador.

Dado um campo de vetores X em uma variedade M com uma conexão linear (não necessariamente de Levi-Civita) ∇, definimos a derivação A_X como sendo

$$A_X = L_X - \nabla_X,$$

onde L_X é a derivada de Lie com respeito a X.

Para quaisquer campos de vetores X e Y em M, temos

$$A_X Y = -\nabla_Y X - T(X, Y),$$

onde T é a torção da conexão ∇. De fato, sabendo que $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ e que $L_X Y = [X,Y]$.

Proposição 3.4.11. ([15],p.237) Dado um campo de vetores X em uma variedade Riemanniana M. X é de Killing se, e somente se, o campo tensorial A_X do tipo $(1,1)$ for anti-simétrico, isto é, $g(A_X Y, Z) = -g(A_X Z, Y)$ para quaisquer campos vetoriais Y e Z.

Demonstração. Desde que $\nabla_X g = 0$ para quaisquer campos de vetores X, $L_X g = 0$ é equivalente a $A_X g = 0$. Desde que A_X é uma derivação da algebra dos campos tensoriais, temos

$$A_X(g(Y,Z)) = (A_X g)(Y,Z) + g(A_X Y, Z) + g(Y, A_X Z), \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Como A_X anula em toda função real, $A_X(g(Y,Z)) = 0$ para todo Y e Z. Concluindo o resultado. $\square$

Como a conexão de Levi-Civita é livre de Torção, um campo X é de Killing se, e somente se, ∇X for anti-simétrica.

Capítulo 4

Grupo de Holonomia

Neste capítulo iremos estudar a teoria de grupos de Holonomia de uma variedade Riemanniana, a primeira seção será dividida em 3 partes, uma só definindo o grupo de holonomia para fibrados principais e exibindo algumas propriedades deste grupo, na segunda parte definimos para fibrados vetoriais e exibimos a relação entre as duas definições de Holonomia e na terceira definimos o grupo de Holonomia Riemanniano. Sabendo a definição e algumas propriedades do grupo de Holonomia Riemanniano, podemos demonstrar um resultado clássico chamado de Teorema de Ambrose-Singer, que será feito na segunda seção. Na terceira seção, definimos a noção de variedades redutíveis e mostramos o teorema da decomposição de de Rham, este teorema será importante para definirmos mais tarde s-representação. E por fim, definimos variedades simétrica e exibiremos algumas propriedades destes tipos de variedades. A teoria deste capítulo foi retirada dos livros: *Compact Manifolds with Special Holonomy* de autoria de D. Joyce, *Foundations of Differential Geoometry, vol. 1* de autoria de S. Kobayashi e K. Nomizu, *Riemannian Geometry* de autoria de T. Sakai [19].

4.1 Grupo de Holonomia

Neste capítulo, a menos que dito o contrário, as variedade serão consideradas conexas.

4.1.1 Grupo de Holonomia de Fibrados Principais

Seja o fibrado principal (P, G, M) e um conexão H em P. Lembramos que no capítulo 2, que se $\gamma : [0,1] \to M$ for uma curva suave por partes com $\gamma(0) = m$ e $p \in \pi^{-1}(m)$, então existe uma única curva suave por partes, horizontal $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to P$ tal que $\widetilde{\gamma}(0) = p$ e $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$, chamada de levantamento horizontal. Assim podemos considerar a seguinte relação de equivalência em P: Dado $p, q \in P$, dizemos que $p \sim q$ se existir uma curva horizontal suave por partes em P ligando p a q. Utilizando está relação de equivalência, definimos:

Definição 4.1.1. Fixando $p \in P$, definimos o grupo de Holonomia do fibrado da conexão H com o ponto base p como:

$$Hol_p(P, H) := \{g \in G | p \sim gp\}.$$

Definimos o grupo de Holonomia restrito, $Hol_p^0(P, H) \subset Hol_p(P, H)$ como o conjunto de todos $g \in G$ tal que existe uma curva suave por partes, horizontal, $\gamma : [0,1] \to P$ onde $\gamma(0) = p, \gamma(1) = gp$ e $\pi \circ \gamma$ é homotopicamente trivial.

Proposição 4.1.2. ([8],p.30) Seja (P, G, M) um fibrado principal e H uma conexão em P. Então o grupo de Holonomia, $Hol_p(P, H)$ será um subgrupo de G e, a menos de conjugação, não depende do ponto $p \in P$.

Demonstração. Para demonstrar os dois fatos, necessitamos mostrar primeiro que se $p \sim q$ então $gp \sim gq$, para todo $p, q \in P$ e $g \in G$.

Seja $p, q \in P$ tal que $p \sim q$, então existe uma curva suave por partes $\beta : [0, 1] \to P$ horizontal ligando p a q. Assim, dado $g \in G$ e $t \in [0, 1]$ temos

$$\dot{\beta}(t) \in H_{\beta(t)} \Rightarrow (R_g)_* \dot{\beta}(t) \in (R_g)_* H_{\beta(t)} \Rightarrow g\dot{\beta}(t) \in H_{g\beta(t)}.$$

Logo $g\beta(t)$ será uma curva horizontal ligando gp a gq. Portanto $gp \sim gq$.

1. *$Hol_p(P, H)$ é subgrupo de G*: Obviamente $1_G \in Hol_p(P, H)$. Dado $h \in Hol_p(P, H)$, então

   $$p \sim hp \Rightarrow h^{-1}p \sim h^{-1}hp \Rightarrow h^{-1}p \sim p,$$

   logo $h^{-1} \in Hol_p(P, H)$.

   Agora, seja $g, h \in Hol_p(P, H)$, então

   $$p \sim hp \Rightarrow gp \sim (gh)p.$$

   Como $\sim$ é uma relação de equivalência, temos $p \sim gp \sim (gh)p$. Logo $gh \in Hol_p(P, H)$. Portanto $Hol_p(P, H)$ é um subgrupo de G.

2. $Hol_{gp}(P, H) = gHol_p(P, H)g^{-1}, \forall p \in P, g \in G$: Seja $h \in Hol_{gp}(P, H)$ temos que

   $$gp \sim hgp \Rightarrow p \sim g^{-1}qgp,$$

   logo $g^{-1}hg \in Hol_p(P, H)$.

3. *Se $p \sim q$ então $Hol_p(P, H) = Hol_q(P, H)$*: Se $h \in Hol_p(P, H)$ temos que $hp \sim p \sim q$, logo $p \sim h^{-1}q$ e como $p \sim q$ temos que $q \sim h^{-1}q$. Portanto $h \in Hol_q(P, H)$, implicando que $Hol_p(P, H) \subset Hol_q(P, H)$. Análogamente prova-se a inclusão inversa.

4. *$Hol_q(P, H) = gHol_p(P, H)g^{-1}, \forall q \in P$ e para algum $g \in G$:* Como M é conexo, existe uma curva $\gamma : [0, 1] \to M$ suave por partes tal que $\gamma(0) = \pi(p)$ e $\gamma(1) = \pi(q)$. Assim, existe um único levantamento horizontal da curva γ, $\widetilde{\gamma} : [0, 1] \to P$, suave por partes, tal que $\widetilde{\gamma}(0) = p$. Tomando $\widetilde{q} = \widetilde{\gamma}(1)$, temos que $\widetilde{q} \in \pi^{-1}(\pi(q))$ e portanto existe $g \in G$ tal que $g\widetilde{q} = q$. Concluímos que

   $$Hol_q(P, H) = Hol_{g\widetilde{q}} = gHol_p(P, H)g^{-1}.$$

□

Denotaremos então $Hol_p(P, H)$ como $Hol(P, H)$. Similarmente pode-se provar para o grupo de Holonomia restrito, a menos de conjugação, também não depende do ponto $p \in P$, por este motivo denotaremos $Hol_p^0(P, H) = Hol^0(P, G)$.

Agora podemos entender o grupo de Holonomia da seguinte maneira: para cada ponto $p \in M$, considere o espaço dos laços com o ponto base p. Assim para cada laço, $\gamma : [0, 1] \to M$, o transporte paralelo $T_\gamma : \pi^{-1}(m) \to \pi^{-1}(m)$ é um isomorfismo. O conjunto de todos estes isomorfismos, via composição, forma um grupo. Este grupo será chamado de grupo de Holonomia da conexão H no ponto com o ponto de referência m. De maneira análoga, definimos o grupo de Holonomia restrito como o grupo dos transportes paralelos definidos sobre laços homotópicamente triviais. E de fato as duas definições são equivalentes, pois se γ for um laço com o ponto base m, o transporte paralelo T_γ determina um elemento $g \in G$ tal que $T_\gamma(p) = pg, \forall p \in \pi^{-1}(m)$. *Observação:* Dada duas curvas $\gamma : [0,1] \to P$ e $\beta : [0,1] \to P$ em uma variedade P conexo, tais que $\gamma(1) = \beta(0)$. Podemos criar então uma nova curva $\lambda : [0,1] \to P$ tal que

$$\lambda(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1/2; \\ \beta(2t-1) & \text{se} \quad 1/2 \leq t \leq 1; \end{cases}$$

Chamaremos a curva λ como a concatenação das curvas γ e β e denotaremos $\lambda = \gamma \cdot \beta$. É fácil ver que, se β e γ for suaves por partes então a concatenação $\gamma \cdot \beta$ também será. Isto será importante para demonstrações de resultados futuros.

O grupo $Hol(P,H)$ é um subgrupo de Lie de G para demonstrar este fato iremos utilizar os dois seguintes lemas:

Lema 4.1.3. ([2],p.86) Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo de G tal que todo elemento de H pode ser ligado com a identidade por uma curva suave por partes em H. Então H é um subgrupo de Lie de G.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em *Lie Groups beyond an Introduction*, [2].

Lema 4.1.4. ([15],p.74) Seja $f : I \times I \to M$ uma função diferenciável de classe C^k e $u_0(s)$, $0 \leq s \leq 1$, uma curva diferenciável de classe C^k em P tal que $\pi(u_0(s)) = f(0,s)$. Para cada s fixado, seja $u_1(s)$ o ponto de P obtido via transporte paralelo de $u_0(s)$ ao longo da curva $f(t,s)$, onde $0 \leq t \leq 1$ e s é fixado. Então a curva $u_1(s)$, $0 \leq s \leq 1$, é diferenciável de classe C^k.

A demonstração deste lema poderá ser encontrado em *Foundations of Differential Geoometry, vol. 1*, [15].

Teorema 4.1.5. ([15],p.73) Seja (P,G,M) um fibrado principal. Considere $Hol(P,H)$ e $Hol^0(P,H)$ o grupo de Holonomia e o grupo de Holonomia estrito de uma conexão H em P respectivamente. Então

- $Hol^0(P,H)$ é um subgrupo, conexo, de Lie de G.
- $Hol^0(P,H)$ é um subgrupo normal de $Hol(P,H)$ e $Hol(P,H)/Hol^0(P,H)$ é contável.

Demonstração.

- Para provar o primeiro item, utilizaremos o lema 4.1.3. Considere primeiro $g \in Hol^0(P,H)$ obtido pelo o transporte paralelo de um laço $\mu : [0,1] \to M$ com o ponto base m tal que esteja contida em um único sistema de coordenadas $((x_1,...,x_n),U)$ centrado em m. Assim se $\mu(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$, podemos definir as seguintes funções

$$f^i(t,s) = s + (1-s)x_i(t),$$

onde $i = 0,...,n$ e $0 \leq t,s \leq 1$. Então $f(t,s) = (f^1(t,s),..,f^n(t,s))$ é uma função diferenciável de $I \times I$ em M, (onde $I = [0,1]$), tal que $f(t,0)$ é a curva μ e $f(t,1)$ é a curva trivial igual a m. Para cada s fixo, considere $b(s)$ o elemento de $Hol^0(P,H)$, obtido pelo laço $f(t,s)$ com $0 \leq t \leq 1$. Repare que $b(0) = g$ e $b(1)$ é o elemento identidade. Segue do lema anterior que $b(s)$ é uma curva suave.

Tome agora, v o transporte paralelo de p via τ, assim $v \sim p$, então se $g \in Hol_p(P,H)$, $v \sim p \sim gp \sim gv$, provando a inclusão $Hol_p(P,H) \subset Hol_v(P,H)$, da mesma forma prova-se a inclusão contrária e portanto $Hol_p(P,H) = Hol_v(P,H)$. Agora, considere η uma curva horizontal em P ligando p a v. Se $g \in Hol_p^0(P,H)$, então existe uma curva horizontal α em P de p até gp, onde $\pi(\alpha)$ é um laço nulo homotópico em M. Assim a concatenação $(g\eta).\alpha.(\eta^{-1})$, onde $(g\eta)(t)$ é a curva $g(\eta(t))$, será uma curva horizontal em P de v até gv que sua projeção em M será nulo homotópico. Então $g \in Hol_v^0(P,H)$. Análogamente, provamos a inclusão oposta. Concluíndo que $Hol_p^0(P,H) = Hol_v^0(P,H)$.

Considere agora, $g \in Hol^0(P,H)$ obtido pelo transporte paralelo ao longo de um laço suave por partes $\gamma : [0,1] \to M$ que é homotopicamente trivial. Temos que o laço γ é equivalente a concatenação $\tau^{-1} \cdot \mu \cdot \tau$, onde τ é uma curva suave por partes ligando o ponto $m = \pi(p)$ a um ponto $y \in M$ e μ é um laço suave com o ponto base y que está totalmente condito em uma única vizinhança coordenada de y. De fato, está fatoração segue do seguinte lema:

Lema 4.1.6. ([15],p.284) Seja $\mathfrak{A}$ uma cobertura de abertos de M. Então qualquer laço nulo-homotópico com ponto base p é equivalente a concatenação de um número finito de laços τ_i tal que, para cada i:

$$\tau_i = \eta^{-1}.\sigma.\eta,$$

onde η é uma curva de p até um ponto y e σ é um laço com ponto base y totalmente contido em algum aberto de $\mathfrak{A}$. Além disso, se γ for suave, então cada τ_i será suave.

Assim, se v for o transporte paralelo de p via τ, e se $g \in Hol^0(P,H)$ definido pelo o laço μ, como fizemos anteriormente, $g \in Hol_v^0(P,H)$. Logo g pode ser ligado ao elemento identidade via uma curva suave por partes em $Hol_v^0(P,H)$, porém $p \sim v$ e portanto a curva estará contida em $Hol^0(P,H)$. Concluíndo o primeiro item.

- Tome τ e μ dois laços em p com μ homotópicamente trivial, assim a curva concatenada $\tau \cdot \mu \cdot \tau^{-1}$ também será homotopicamente trivial. Isto implica que $Hol^0(P,H)$ é um subgrupo normal de $Hol(P,H)$.

  Seja $\pi_1(M)$o grupo fundamental de M com o ponto de referência p, podemos definir o homomorfismo

  $$f : \pi_1(M) \to Hol(P,H)/Hol^0(P,H)$$

  da seguinte maneira: Para cada elemento $\alpha \in \pi^{-1}(M)$, cubra α por um número finito de vizinhanças coordenadas, modificando α dentro de cada vizinhança e obtendo um laço suave por partes α_1 com o ponto base p que é homotópico a α. Se α_1 e α_2 forem dois laços construídos desta forma, então $\alpha_1 \cdot \alpha_2^{-1}$ é nulo homotópico e define um elemento de $Hol(P,H)/Hol^0(P,H)$, que denotaremos por $f(\alpha)$. Assim f é um homomorfismo sobrejetor $\pi_1(M)$ sobre $Hol(P,H)/Hol^0(P,H)$. Como M é segundo contável, segue que $\pi_1(M)$ é enumerável, concluíndo o resultado.

□

Em virtude do teorema acima, $Hol(P,H)$ será um subgrupo de Lie de G, onde a componente da identidade é $Hol^0(P,H)$, de fato como $Hol(P,H)/Hol^0(P,H)$ é contável, então $Hol(P,H)$ só tem uma quantidade contável de componentes conexas, assim temos a estrutura de variedade nas outras componentes via translação.

Definição 4.1.7. Seja (P,G,M) um fibrado principal e H uma conexão sobre P. Então $Hol^0(P,H)$ é um subgrupo de Lie, conexo, definido a menos de conjugação. Definimos a Álgebra de Holonomia de $\mathfrak{hol}(P,H)$ como a álgebra de Lie de $Hol^0(P,H)$.

Agora iremos enunciar um importante resultado conhecido como o teorema de redução, mas para demonstra-lo necessitamos dos dois seguintes lemas os quais podem ser encontrados demonstrados em *Foundations of Differential Geoometry, vol. 1*, [15]:

Lema 4.1.8. ([15],p.84) Dado um fibrado principal (P, G, M), seja Q um subconjunto de P e I um subgrupo de Lie de G. Assuma:

- A projeção $\pi : P \to M$ restrita a Q é sobrejetora;
- Q é invariante pela a ação de I, isto é $Qh = Q, \forall h \in I$;
- Se $u, v \in Q$ tais que $\pi(v) = \pi(u)$, então existe um elemento de $h \in I$ tal que $v = uh$;
- Todo ponto $m \in M$ possui uma vizinhança U e uma seção $K : U \to P$ tal que $K(U) \subset Q$.

Então (Q, H, M) é um sub fibrado de (P, G, M).

Lema 4.1.9. ([15],p.84) Seja (Q, I, M) um sub fibrado de (P, G, M) e H uma conexão em P. Se, para todo $u \in Q$, o subespaço horizontal de $T_u(P)$ é tangente a Q, então H pode se reduzir para uma conexão em Q.

Teorema 4.1.10. Teorema de Redução([15],p.83) Seja (P, G, M) um fibrado principal, H uma conexão de P e p um ponto arbitrário de P. Denote $Q_p = \{q \in P | p \sim q\}$, ou seja, todos os $q \in P$ que são ligadas com p via uma curva horizontal. Então

- Q_p é um sub fibrado de P com o grupo estrutural $Hol(P, H)$, chamada de redução de P.
- A conexão H é redutível para uma conexão em P.

Demonstração. Para a primeira parte, como $Hol(P, H)$ é um subgrupo de Lie de G e pela definição de Q, para utilizarmos o lema 4.1.8 necessitaremos provar somente a quarta propriedade para Q.

Tome $(x_1, ..., x_n)$ um sistema de coordenadas locais centrada em $m \in M$. Restrinja o sistema de coordenadas a uma vizinhança cúbica U definida por $|x_i| < \delta$, $i = 1, ..., n$ e $\delta > 0$. Assim, fixando $u \in Q$ e dado qualquer ponto $y \in U$, tome τ_y uma curva ligando m a y e defina $K(y)$ como o ponto de P definido via o transporte paralelo de u ao longo de τ_y. Portanto $K : U \to P$ será uma seção tal que $K(U) \subset Q$.

A segunda parte, é uma consequência imediata do lema 4.1.9. □

Chamamos Q_p de fibrado de Holonomia em p de H.

Utilizando este teorema, podemos interpretar os grupos de Holonomia da seguinte maneira: Suponha que (P, G, M) seja um fibrado principal e H uma conexão em P. Então o grupo de Holonomia $Hol(P, H)$ é o menor subgrupo de G, a menos de conjugação, no qual é possível encontrar uma redução Q de P com fibra $Hol(P, H)$, tal que H se reduz para uma conexão em Q.

4.1.2 Grupo de Holonomia em Fibrados Vetoriais

Nesta subseção iremos somente apresentar a definição análoga de grupos de Holonomia para fibrados Vetoriais e exibiremos resultados análogos ao grupo de Holonomia em fibrados principais e resultados que relacionam o dois tipos, para uma leitura completa sobre o assunto indico o livro *Compact Manifolds with Special Holonomy* [8]. Lembrando que podemos definir o transporte paralelo sobre curvas suaves por partes para fibrados vetoriais, dada uma conexão ∇, só que neste caso o transporte paralelo é um isomorfismo linear. Assim podemos definir o grupo de Holonomia para fibrados vetoriais de maneira análoga.

Definição 4.1.11. Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade M, e ∇^E uma conexão em E. Fixando um ponto $m \in M$, dado γ uma curva suave por partes, denotaremos por T_γ como o transporte paralelo sobre γ. Definimos o grupo de Holonomia, $Hol_m(\nabla^E)$, de ∇^E com o ponto base m como:

$$Hol_m(\nabla^E) = \{T_\gamma | \gamma \textit{ é um laço suave por partes com o ponto base } m\}.$$

Se α, β forem laços suaves por partes com o ponto base m, então α^{-1} e a concatenação $\beta\alpha$ também serão laços s.p.p. em m e como $P_{\alpha^{-1}} = P_\alpha^{-1}$ e $T_{\beta\alpha} = T_\beta \circ T_\alpha$ temos que $Hol_m(\nabla^E)$ contém todos os inversos de seus elementos e é fechado pela composição de mapas. Assim, se o fibrado E tiver fibra típica V, $Hol_m(\nabla^E)$ é um subgrupo de $Gl(V)$.

Suponha que $m, n \in M$. Como M é conexo, podemos encontrar uma curva suave por partes $\gamma : [0,1] \to M$, tal que $\gamma(0) = m$ e $\gamma(1) = n$, portanto $T_\gamma : \pi^{-1}(m) \to \pi^{-1}(n)$. Se α for um laço suave por partes com o ponto base m, então a concatenação $\gamma\alpha\gamma^{-1}$ é um laço suave por partes com o ponto base n, e assim $T_{\gamma\alpha\gamma^{-1}} = T_\gamma \circ T_\alpha \circ T_{\gamma^{-1}}$. Logo se $T_\alpha \in Hol_m(\nabla^E)$, então $T_\gamma \circ T_\alpha \circ T_{\gamma^{-1}} \in Hol_n(\nabla^E)$. Concluindo que

$$T_\gamma Hol_m(\nabla^E) T_\gamma^{-1} = Hol_n(\nabla^E).$$

Assim se V for a fibra típica de E, isto mostra que o grupo de Holonomia $Hol_m(\nabla^E)$ é, a menos de conjugação em $Gl(V)$, independente do ponto base m. Por causa disto podemos omitir o ponto base m da notação de grupo de Holonomia de ∇^E, $Hol(\nabla^E) \subset Gl(V)$, implicitamente supondo que dois subgrupos de $Gl(V)$ são equivalentes se são conjugados em $Gl(V)$.

Proposição 4.1.12. ([8],p.27) Seja M uma variedade simplesmente conexa, E um fibrado vetorial sobre M com fibra típica V e ∇^E uma conexão em E. Então $Hol(\nabla^E)$ é um subgrupo de Lie conexo de $Gl(k, \mathbb{R})$.

Quando M não for simplesmente conexa, é conveniente considerar o grupo de Holonomia restrito, que iremos definir agora.

Definição 4.1.13. Seja M uma variedade, E um fibrado vetorial sobre M com fibra típica $\mathbb{R}^k$, e ∇^E uma conexão em E, fixando $m \in M$. Definimos o grupo de Holonomia restrito, $Hol^0(\nabla^E)$, da conexão ∇^E por

$$Hol_m^0(\nabla^E) = \{T_\gamma | \textit{ onde } \gamma \textit{ é um laço nulo homotópico com ponto base } m\}.$$

Então, $Hol_m^0(\nabla^E)$ é um subgrupo de $Gl(k, \mathbb{R})$. Como acima, podemos mostrar que $Hol_m^0(\nabla^E)$ é um subgrupo de $Gl(k, \mathbb{R})$ e que, a menos de conjugação, não depende do ponto m e portanto iremos também omitir m, ou seja, $Hol_m(\nabla^E) = Hol(\nabla^E)$.

A seguir, algumas importantes propriedades de $Hol^0(\nabla^E)$.

Proposição 4.1.14. ([8],p.28) Seja M uma variedade, E um fibrado vetorial sobre M com a fibra típica $\mathbb{R}^k$ e ∇^E uma conexão em E. Então

- $Hol^0(\nabla^E)$ é um subgrupo de Lie conexo de $Gl(k, \mathbb{R})$;
- $Hol^0(\nabla^E)$ é a componente conexa de $Hol(\nabla^E)$ contendo a identidade;
- $Hol^0(\nabla^E)$ é um subgrupo normal de $Hol(\nabla^E)$;
- Existe um homomorfismo natural, sobrejetivo $\phi : \pi_1(M) \to Hol(\nabla^E)/Hol^0(\nabla^E)$.

Agora podemos definir a álgebra de Lie de $Hol^0(\nabla^E)$.

Definição 4.1.15. Seja $Hol^0(\nabla^E)$ um grupo de Holonomia restrito de uma conexão ∇^E, assim a álgebra de Lie, $\mathfrak{hol}(\nabla^E)$, de $Hol^0(\nabla^E)$ é chamada de Álgebra de Holonomia da conexão ∇^E.

Note que, por causa de $Hol^0(\nabla^E)$ ser a componente conexa da identidade de $Hol(\nabla^E)$, então as álgebras de Lie de $Hol^0(\nabla^E)$ e $Hol(\nabla^E)$ coincidem.

Os grupos de Holonomia de conexões em fibrados vetoriais e fibrados principais se relacionam da seguinte forma:

Proposição 4.1.16. ([8],p.31) Seja (P, G, M) um fibrado principal. Suponha que $\rho : G \to Gl(V)$ é uma representação de G em um espaço vetorial V e tome $E = \rho(V)$. Seja H uma conexão em P e ∇^E uma conexão em E construída via o fibrado principal. Então, $Hol(P, H)$ e $Hol(\nabla^E)$ são subgrupos de G e $Gl(V)$ respectivamente, definidos a menos de conjugação, e

$$\rho(Hol(P, H)) = Hol(\nabla^E)$$

.

Similarmente, suponha que E seja um fibrado vetorial sobre M com fibra $\mathbb{R}^k$, e F^E o fibrado de bases de E. Então F^E é um fibrado principal com fibra $Gl(k, \mathbb{R})$. Seja ∇^E uma conexão em E e H^E a conexão correspondente em F^E. Então $Hol(\nabla^E)$ e $Hol(F^E, H^E)$ são ambos subgrupos de $Gl(k, \mathbb{R})$, definida a menos de conjugação, e

$$Hol(\nabla^E) = Hol(F^E, H^E).$$

Dada uma variedade Riemanniana, gostaríamos que a métrica fosse invariante pela ação do grupo de Holonomia. Para isso temos o seguinte resultado:

Proposição 4.1.17. ([8],p.34) Seja M uma variedade e ∇ uma conexão em TM, fixando $m \in M$. Então $Hol_m(\nabla)$ é um subgrupo de $Gl(T_mM)$. Seja E o fibrado vetorial $T_l^k(M)$, definido no capítulo 2, para algum k, l, então a conexão ∇ em TM induz uma conexão ∇^E em E, e $Hol_m(\nabla)$ tem uma representação natural na fibra de m em E que denotaremos como E_m.

Suponha que $S \in C^\infty(E)$, tal que $\nabla^E S = 0$. Então $S|_m$ é invariante pela a ação de $Hol_m(\nabla)$ em E_m. Consequentemente, se $S_m \in E_m$ for invariante pela a ação de $Hol_m(\nabla)$, existe um único tensor $S \in C^\infty(E)$, tal que $\nabla^E S = 0$ e $S|_m = S_m$.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n e ∇ a conexão de Levi-Civita. Devido ao resultado acima e pela a compatibilidade da conexão com a métrica, se $m \in M$ então a ação de $Hol_m(\nabla)$ em T_mM preserva a métrica g_m em T_mM. Mas o grupo de transformações de T_mM que preserva $g|_m$ é o grupo ortogonal $O(n)$. Portanto, o grupo de holonomia $Hol(\nabla)$ é um subgrupo de $O(n)$.

Utilizando as mesmas ideias do teorema de redução. Seja F o fibrado de bases de M. Então cada ponto de F é uma base $\{e_1, ..., e_n\}$ de algum espaço tangente T_mM. Defina P o subconjunto dos pontos $\{e_1, ..., e_n\}$ em F, tais que $\{e_1, ..., e_n\}$ são ortonormais com respeito a métrica g. Então P é um sub fibrado principal de F com fibra $O(n)$, isto é, uma redução de F. Além disso, por causa que a conexão ∇ em F satisfaz $\nabla g = 0$, a conexão ∇ se reduz para P. Novamente, podemos olhar $Hol(\nabla)$ como um subgrupo de $O(n)$, definido a menos de conjugação.

Definição 4.1.18. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e ∇ a conexão de Levi-Civita. Definimos o grupo de Holonomia Riemanniana $Hol(g)$ da métrica g como sendo $Hol(\nabla)$. Então $Hol(g)$ é um subgrupo de $O(n)$, definido a menos de conjugação em $O(n)$. Similarmente, definimos o grupo de Holonomia Riemanniana restrito $Hol^0(g)$ da métrica g como $Hol^0(\nabla)$. Então $Hol^0(g)$ é um subgrupo de Lie conexo de $SO(n)$ definido ao menos de conjugação em $O(n)$.

Da mesma forma, definimos a álgebra de Holonomia $\mathfrak{hol}(g)$ como $\mathfrak{hol}(\nabla)$. Então $\mathfrak{hol}(g)$ é uma sub álgebra de $\mathfrak{so}(n)$, definida a menos de ação adjunta.

4.2 Teorema de Ambrose-Singer

Iremos demonstrar o seguinte resultado de Ambrose-Singer aplicando o teorema de redução apresentada na seção 4.1. Mas para isso, necessitaremos de dois lemas técnicos sobre campo fundamental (olhar no capítulo 2), cujo estão demonstrados em *Foundations of Differential Geoometry, vol. 1* [15].

Considere (P, G, M) um fibrado principal munido com uma conexão H, seja $dim(M) = n$.

Lema 4.2.1. ([15],p.78) Se A^* for um campo fundamental correspondente a um elemento $A \in \mathfrak{g}$ e X for um campo horizontal, então $[X, A^*]$ é horizontal.

Lema 4.2.2. ([15],p.78) Se X, Y forem ambos campos horizontais em um fibrado principal P, então

$$\phi([X, Y]) = -2\Phi(X, Y),$$

onde ϕ é a 1-forma de conexão e Φ é a 2-forma de curvatura da conexão H.

Teorema 4.2.3. Teorema de Ambrose-Singer([15],p.89) Seja (P, G, M) um fibrado principal, H uma conexão em P, Φ a forma de curvatura, $Hol_p(P, H)$ o grupo de Holonomia com o ponto de referência $p \in P$ e Q_p o fibrado de Holonomia em p de H.

Então a álgebra de Holonomia, $\mathfrak{hol}(P, H)$, é igual ao subespaço de $\mathfrak{g}$, a álgebra de Lie de G, gerados por todos os elementos da forma $\Phi_v(x, y)$, onde $v \in Q_p$ e x e y são vetores horizontais arbitrários em v.

Demonstração. Podemos supor que $P = Q_p$, pois devido ao teorema de redução Q_p será um subfibrado de P e o grupo de Holonomia em relação a Q_p coincide com o grupo de Holonomia em relação a P, assim supomos também que $Hol(P, H) = G$.

A ídeia é trabalhar com o subespaço gerado por vetores do tipo $\Phi_v(x, y)$ com $v \in P$ e x e y vetores horizontais em v, digamos $\mathfrak{g}'$ provando que tem a mesma dimensão de $\mathfrak{g}$. Para isso, construíremos uma distribuição integrável em P, onde sua variedade integral maximal terá a dimensão da álgebra de Lie somado com a dimensão de M, concluíndo com um argumento simples de dimensão que as duas álgebras de Lie possuem a mesma dimensão.

Para cada $p \in P$, considere S_p o subespaço de T_pP gerado pelo subespaço H_p e pelo subespaço $\mathfrak{g}'_p := \{A^* | A \in \mathfrak{g}'\}$, onde A^* indica o campo fundamental gerado pelo o elemento $A \in \mathfrak{g}'$ (olhar no capítulo 2).

Necessitamos mostrar que está distribuição é diferenciável. Seja $p \in P$, U uma vizinhança trivializante de $\pi(p)$ e $\{X_1, ..., X_n\}$ um referêncial local em U. Assim

$$\{X_1^*, ..., X_n^*, A_1^*, ..., A_r^*\}$$

será um referencial suave para a distribuição S onde $\{X_1^*, ..., X_n^*\}$ são os levantamentos horizontais de $\{X_1, ..., X_n\}$ e $\{A_1^*, ..., A_r^*\}$ são os campos fundamentais induzidos por uma base $\{A_1, ..., A_r\}$ do subespaço $\mathfrak{g}'$.

Agora, se provarmos que o colchete de qualquer dois campos do referencial da distribuição estiver contido em S implicará, via bilinealidade do colchete, que S é integrável. Como, para cada $0 \leq i, j \leq r$ $[A_i, A_j] \in \mathfrak{g}'$ e $[A_i^*, A_j^*] = [A_i, A_j]^*$ temos que $[A_i^*, A_j^*]$ está em S. Pelo o lema 4.2.1, para cada i e j, $[A_i^*, X_j^*]$ é horizontal e como X_j^* é invariante pela a ação de G obtemos que $[A_i^*, X_j^*] = 0$. Por fim, considerando ω a 1-forma de conexão, temos que a componente vertical de $[X_i^*, X_j^*]$ será igual ao campo fundamental B_p^* gerado por $B = \omega([X_i^*, X_j^*])$, e pelo lema 4.2.2 concluímos que $[X_i^*, X_j^*]$ está em S.

Assim S será uma distribuição involutiva e pelo teorema de Frobenius (ver no capítulo 1), S é integrável. Tome P_0 a variedade integral maximal de S. Pelo lema 4.1.9 a conexão H poderá se reduzir para P_0 e como $Hol(P, H) = G$ temos que isso só é possível se $P = P_0$. Portanto

$$dim(\mathfrak{g}) = dim(P) - n = dim(P_0) - n = dim(\mathfrak{g}').$$

Concluíndo que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ $\square$

E por fim, segue um teorema cuja a demonstração é longa e pode ser encontrada em *Foundations of Differential Geoometry, vol. 1*, [15].

Teorema 4.2.4. ([15],p.85) Seja (P, G, M) um fibrado principal. Se $dim(M) \geq 2$, então existe uma conexão em P, tal que todos os fibrados de Holonomia, Q_p, $p \in P$, coincidem com P.

4.3 Variedades Riemannianas Redutíveis e a Decomposição de de Rham

Seja M_1, M_2 duas variedades e $M_1 \times M_2$ a variedade produto. Então para todo ponto (p_1, p_2) de $M_1 \times M_2$, temos que $T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2) \cong T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$. Seja g_1, g_2 duas métricas Riemannianas em M_1 e M_2 respectivamente. Então $g_1|_{p_1} + g_2|_{p_2}$ é uma métrica em $T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$. Definimos a métrica produto como $g = g_1 \times g_2$ em $M_1 \times M_2$ dada por $g|_{(p_1,p_2)} = g_1|_{p_1} + g_2|_{p_2}$, $\forall (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$. Chamaremos $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ como o produto Riemanniano de (M_1, g_1) e (M_2, g_2).

Definição 4.3.1. Uma variedade Riemanniana (M, g) é dita redutível se for isométrica a um produto Riemanniano $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$, com $dim(M_i) > 0, i = 1, 2$. (M, g) é dito localmente redutível se para todo ponto existir uma vizinhança aberta redutível. E por fim, (M, g) é dita irredutível se não for localmente redutível.

Se (M_1, g_1) e (M_2, g_2) forem variedades Riemannianas, então vale $Hol(g_1 \times g_2) = Hol(g_1) \times Hol(g_2)$. Agora se g for uma métrica Riemanniana e a representação do grupo de Holonomia de g for redutível, então a métrica é pelo menos localmente redutível e o seu grupo de Holonomia é um produto. Este resultado é conhecido como o Teorema da Decomposição de de Rham.

Devida a demonstração ser longa, iremos exibir um esboço de construção do produto de variedades, tal que a variedade será isométrica e o restante do teorema pode-se encontrar demonstrado em *Riemannian Geometry* [19].

Devido ao fato do grupo de Holonomia ser um subgrupo das transormações ortogonais. Se $D \subset T_mM$ for um subespaço não-nulo e invariante por $Hol(g)$, então ele admite um subespaço vetorial invariante e irredutível. Também temos que, se $D \subset T_mM$ for um subespaço invariante por $Hol(g)$, então $D^{\perp}$ também é.

Assim, dado $m \in M$, defina o subespaço:

$$D_0 := \{x \in T_mM | T_\gamma x = x, \forall T_\gamma \in Hol_pM\}.$$

Utilizando simples truque de Algebra Linear podemos decompor ortogonalmente

$$T_mM = D_0 \oplus D_1 \oplus ... \oplus D_k,$$

onde cada subespaço D_j, $1 \leq j \leq k$, é invariante por $Hol_m(g)$ e irredutível.

Agora, para cada j, defina a distribuição $\mathfrak{D}_j$ da seguinte maneira: Dado $n \in M$, defina $\mathfrak{D}_j(n)$ como sendo o transporte paralelo de D_j ao longo de qualquer curva suave por partes ligando m a n. A distribuição $\mathfrak{D}_j$ será suave, uma vez que, numa vizinhança normal de qualquer ponto $n \in M$, ela é gerada pelos transportes paralelos da base de D_j ao longo de geodésicas radiais que partem de n. Teremos também que $\mathfrak{D}_j(n)$ será invariante pelo grupo de Holonomia $Hol(g)$. Por fim, se X, Y for dois campos em M e Y uma seção de $\mathfrak{D}_j$ então $\nabla_X Y$ também será uma seção de $\mathfrak{D}_j$. De fato, fixado $n \in M$, temos

$$(\nabla_X Y)|_n = \lim_{t \to 0} \frac{T_{\gamma(t)}^{-1} Y(\gamma(t)) - Y(n)}{t},$$

onde θ é a curva integral de X passando por n. Portanto, pela invariância de $\mathfrak{D}_j(n)$, juntamente com o fato de $\mathfrak{D}_j(n)$ ter dimensão finita (pois subespaços em espaço de dimensão finita são fechados), temos que $\nabla_X Y|_n \in \mathfrak{D}_j(n)$.

Para cada j, $\mathfrak{D}_j$ será uma distribuição involutiva, pois se X e Y forem duas seções desta distribuição,

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X,$$

também é. Pelo teorema de Frobenius, $\mathfrak{D}_j$ será integrável, dado $n \in M$ denotaremos por $S_n(\mathfrak{D}_j)$ a subvariedade integral conexa maximal de $\mathfrak{D}$passando por n. Vale resaltar, que $S_n(\mathfrak{D}_j)$ será uma subvariedade totalmente geodésica, pois se X e Y são campos vetoriais nesta variedade, então $\nabla_X Y$ também é, implicando que sua segunda forma fundamental é nula. Além disso, temos o seguinte resultado:

Lema 4.3.2. ([19],p.125) Se M for completa, então para todo $n \in M$, $S_n(\mathfrak{D}_j)$ será completa, para cada j.

E aí temos um caso particular de teorema de decomposição de de Rham,

Teorema 4.3.3. ([19],p.127) Sejam M uma variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa e $m \in M$. Então M é isométrica a $S_m(\mathfrak{D}_0) \times S_m(\mathfrak{D}_0^{\perp})$.

A demonstração do resultado acima é muito longa e envolve um resultado conhecido como o Teorema de Ambrose, porém pode-se encontrar toda a construção e a demonstração deste resultado poderá ser encontrado em *Riemannian Geometry* [19].

Teorema 4.3.4. ([19],p.129) Suponha que (M, g) seja uma variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa. Então (M, g) é isométrica ao produto:

$$(M_1 \times ... \times M_k, g_1 \times ... \times g_k),$$

onde $\{(M_j, g_j)\}$ são variedades Riemannianas completas e simplesmente conexas. Ainda mais, a representação de Holonomia de $Hol(g_j)$ é irredutível e age trivialmente nos fibrados tangentes de (M_i, g_i) onde $i \neq j$. Por fim:

$$Hol(g) = Hol(g_1) \times ... \times Hol(g_k).$$

Demonstração. Dado $m \in M$. Pelo teorema 4.3.3, temos que

$$\begin{aligned} M &\simeq S_m(\mathfrak{D}_0) \times S_m(\mathfrak{D}_1 \oplus \mathfrak{D}_2 \oplus ... \oplus \mathfrak{D}_k) \\ &\simeq S_m(\mathfrak{D}_0) \times S_m(\mathfrak{D}_1) \times S_m(\mathfrak{D}_2 \oplus ... \oplus \mathfrak{D}_k) \\ &\simeq \vdots \\ &\simeq S_m(\mathfrak{D}_0) \times S_m(\mathfrak{D}_1) \times S_m(\mathfrak{D}_2) \times ... \times S_m(\mathfrak{D}_k). \end{aligned}$$

Devida a definição de $\mathfrak{D}_0$, temos que $S_m(\mathfrak{D}_0)$ é trivial e portanto, o transporte paralelo independe da curva escolhida. Assim pode-se mostrar que a $S_m(\mathfrak{D}_0)$ possui o tensor de curvatura identicamente nulo. Sendo completa e simplesmente conexa, temos que $S_m(\mathfrak{D}_0)$ será isométrica a um $\mathbb{R}^d$. $\square$

Como consequência imediata do teorema acima temos:

Corolário 4.3.5. ([8],p.48) Seja M uma variedade de dimensão n e g uma métrica irredutível em M. Então as representações de $Hol(g)$ e $Hol^0(g)$ em $\mathbb{R}^n$ são irredutíveis.

Utilizando a teoria de grupos de Lie pode-se mostrar que todos subgrupos de Lie de $SO(n)$ que agem de forma irredutível em $\mathbb{R}^n$ são fechados em $SO(n)$. Assim temos:

Corolário 4.3.6. ([8],p.50) Seja (M, g) uma variedade de dimensão n. Então $Hol^0(g)$ é um subgrupo de Lie, conexo e fechado de $SO(n)$.

Corolário 4.3.7. ([8],p.50) Seja (M, g) uma variedade compacta , irredutível de dimensão n. Então $Hol(g)$ é um subgrupo de Lie compacto de $O(n)$.

Como $SO(n)$ é compacto, isto implica que $Hol^0(g)$ também é compacto.

4.4 Espaços Riemannianos Simétricos

Definição 4.4.1. Uma variedade Riemanniana (M, g) é chamada de:

- Simétrica, se para todo ponto $p \in M$ existe uma isometria $s_p : M \to M$ que é uma involução (isto é, s_p^2 é a identidade), tal que p é um ponto fixo e isolado de s_p.
- Localmente simétrica, se para todo ponto $p \in M$ existir uma vizinhança U_p e uma isometria involutiva $s_p : U_p \to U_p$, cujo o único ponto fixo é p.
- Não simétrica, se não for localmente simétrica.

O seguinte lema mostra que isometrias assumem uma forma particularmente simples em coordenadas normais.

Lema 4.4.2. ([8],p.50) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana, tome $p \in M$ e suponha que $s : U_p \to U_p$ é uma isometria involutiva com o ponto fixo isolado p definida na vizinhança normal U_p de p. Então $s(exp_p(v)) = exp_p(-v)$ para todo $v \in exp^{-1}(U_p) \cap T_pM$.

Demonstração. Seja $s : U_p \to U_p$ uma isometria involutiva com p sendo o seu ponto fixo isolado. Como $s^2 = Id$, temos que $ds^2 = Id$ em uma vizinhança do $0 \in T_pM$. Então como s é uma isometria, $ds(v) = v$ ou $ds(v) = -v$, porém o primeiro não ocorre pelo fato de que p ser ponto fixo isolado. Como a exp comuta com isometrias, temos

$$s(exp_p(v)) = exp_p(ds(v)) = exp_p(-v).$$

□

Com as próximas três proposições podemos estudar a relação dos grupos de isotropia da ação de um grupo de Lie, via isometrias, com os espaços simétricos e a variedade Riemanniana. Iremos somente enuncia-los podendo encontra-los no capítulo 3 de *Compact Manifolds with Special Holonomy*, [8]

Proposição 4.4.3. ([8],p.51) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana simétrica e simplesmente conexa. Então a métrica g é completa. Seja G um grupo de isometrias de (M, g) gerado por elementos da forma $s_q \circ s_p$ para $p, q \in M$. Então G é um grupo de Lie conexo agindo transitivamente em M. Escolha $p \in M$ e seja H o subgrupo de isotropia de p, isto é $hp = p, \forall h \in H$. Então H é um subgrupo de Lie de G que é conexo e fechado e M é difeomorfo a G/H.

Proposição 4.4.4. ([8],p.51) Seja (M,g), G, p e H satisfazendo as condições da proposição acima, e seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G. Então existe um isomorfismo involutivo entre grupos de Lie, $\sigma : G \to G$, e uma decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, onde $\mathfrak{h}$ é a álgebra de Lie de H, e $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{m}$ são autoespaços da involução $d\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ com autovalores 1 e -1 respectivamente. Estes subespaços satisfazem

$$[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \qquad [\mathfrak{h},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m} \qquad e \qquad [\mathfrak{m},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}.$$

Existe um isomorfismo natural $\mathfrak{m} \cong T_pM$.

Os resultados acima reduzem o problema de entender e classificar os espaços simplesmente conexos e simétricos como um problema da Teoria de Grupos de Lie. Este problema foi resolvido completamente por E. Cartan em 1926, onde ele exibe uma lista de todas as variedades Riemannianas simétricas e simplesmente conexas. Em *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, [18], há a demonstração de Cartan sobre este fato.

Toda variedade M que isométrica a um quociente de grupos de Lie, G/H, são conhecidas como espaços homogêneos.

Por fim, segue um resultado que caracteriza as variedades localmente simétricas:

Teorema 4.4.5. ([8],p.54) Seja (M,g) uma variedade Riemanniana, ∇ a conexão de Levi-Civita e R a curvatura Riemanniana. Então (M,g) é localmente simétrica se, e somente se, $\nabla R = 0$.

Capítulo 5

Geometria das Órbitas

Para demonstrar o teorema da Holonomia de Berger, necessitaremos estudar as órbitas da ação do grupo de holonomia da variedade sobre o fibrado tangente. Iremos apresentar este capítulo em 5 seções, a primeira passaremos conceitos básicos sobre a ação do grupo de Lie sobre uma variedade Riemanniana. Na segunda seção iremos demonstrar um importante fato sobre a existência de órbitas com dimensão maximal e provar a densidade da união de todos estes tipos de órbitas. Na terceira seção vamos mostrar alguns conceitos de ações polares e definiremos o que são s-representação tendo em vista o seguinte teorema dado por Dadok: Toda representação polar em $\mathbb{R}^n$ tem órbitas isométricas as órbitas de uma s-representação. Na quarta seção iremos apresentar um resultado importante que caracteriza o operador forma das órbitas. Na quinta apresentaremos o teorema da existência de subvariedade totalmente geodésica de Cartan, outro teorema importante para demonstrar a proposição 6.1.4. O ínicio deste capítulo foi retirado do livro *Transformation Groups* de autoria de T. T. Dieck [20] e a maior parte foi retirada da obra *Submanifolds and Holonomy* de autoria Jürgen Berndt , Sergio Console e Carlos Olmos,[3].

5.1 Órbitas e Subgrupo de Isotropia

Lembramos que no capítulo 2, definimos como uma ação diferenciável de um grupo de Lie G em uma variedade M como sendo um mapa $G \times M \to M$ suave, satisfazendo: $(gg')p = g(g'p)$, a translação a esquerda de g em M são difeomorfismos com g^{-1} é o mapa inverso do mapa $g : M \to M$, para todo $g, g' \in G$ e $p \in M$.

Definição 5.1.1. Dado G um grupo de Lie agindo diferenciavelmente em uma variedade M. Dado um ponto $p \in M$ definimos a órbita de p:

$$G \cdot p := \{gp \in M | g \in G\},$$

e o subgrupo de isotropia de p:

$$G_p := \{g \in G | gp = p\}.$$

Repare que se $\phi : G \times M \to M$ for uma ação diferenciável, então para cada $p \in M$, a restrição $\phi|_{G\times\{p\}} : G \to M$ é contínua e portanto G_p é um subgrupo fechado de G pois $(\phi|_{G\times\{p\}})^{-1}(p) = G_p$. Devido a um resultado clássico da teoria de Grupos de Lie, um subgrupo fechado de um grupo de Lie é um subgrupo de Lie, logo G_p possui uma estrutura de grupo de Lie.

Agora provaremos que a órbita de um ponto é uma subvariedade mergulhada de M. Mas para isso necessitamos de alguns resultados, o primeiro deles é um resultado de topologia diferencial que poderá ser encontrado em *Varietés differentielles et analytiques*, [17].

Proposição 5.1.2. [17] Seja M uma variedade, $R \subset M \times M$ uma relação de equivalência em M e $p : M \to M/R$ o mapa quociente. Se R for uma subvariedade fechada de $M \times M$ e a projeção na primeira coordenada, $pr_1 : R \to M$, for uma submersão, então M/R possui uma estrutura de variedade diferenciável tal que $p : M \to M/R$ é uma submersão.

Como consequência do resultado acima, dado algumas hipóteses na ação, teremos que o espaço das órbitas possuem uma estrutura de diferenciabilidade. Uma destas hipóteses é da ação ser própria.

Definição 5.1.3. Uma ação $G \times M \to M$ é chamada de própria se

$$C = \{(p, gp) | g \in G, p \in M\},$$

é fechada em $M \times M$ e

$$t : C \to G$$
$$(p, gp) \mapsto g$$

for contínua.

Proposição 5.1.4. ([20],p.38) Seja $\phi : G \times M \to M$ uma ação própria, livre e diferenciável. Então M/G possui uma estrutura variedade tal que $p : M \to M/G$ é uma submersão.

Demonstração. Defina o mapa

$$\alpha : G \times M \to M \times M,$$
$$(g, x) \mapsto (x, gx).$$

Assim a imagem de α será $C \subset M \times M$. O mapa

$$\beta : C \to G \times M,$$
$$(x, y) \mapsto (t(x, y), x)$$

será contínuo. Assim, $\beta \circ \alpha = Id$ implicando que $\alpha : G \times M \to C$ é um homeomorfismo.

Considere $pr_1 : C \to M$ a projeção na primeira coordenada. O núcleo da diferencial de $pr_1 \circ \alpha$ em (g, x) é $T_gG \times \{0\}$. Agora se definirmos $f : G \to M$, $g \mapsto gx$ temos que f tem diferencial injetora. De fato se $R_g : G \to G$ tal que $R_g(h) = gh$ e $r_g : M \to M$ tal que $r_g(x) = gx$, então $f \circ R_g = L_g \circ f$ e R_g, L_g são difeomorfismo. Calculando a diferencial temos $posto(D_gf) = post(D_{1_G}f)$ onde $1_G \in G$ é o elemento neutro. Como a ação é livre, o mapa é injetivo. Assim, $pr_1 : C \to M$ será uma submersão, por causa disto a composição com α é uma projeção e portanto uma submersão. Logo C é uma subvariedade e pela proposição 5.1.2 conclui-se o resultado. $\square$

Proposição 5.1.5. ([20],p.39) Seja G um grupo de Lie compacto, M uma variedade e $G \times M \to M$ uma ação diferenciável. Para cada $p \in M$, o mapa

$$\alpha_p : G/G_p \to M$$
$$gG_p \mapsto gp,$$

é um mergulho. Portanto a órbita $G \cdot p$ é uma subvariedade que é difeomorfa a G/G_p.

Demonstração. Fixado $p \in M$, assim o mapa

$$G \to M$$
$$g \mapsto gp,$$

e a projeção $G \to G/G_p$ ambos tem posto constante; portanto induzimos um mapa diferenciável $\alpha_p : G/G_p \to M$ de posto constante e portanto uma imersão injetiva. Desde que G é compacto, α_p é um mergulho topológico. Assim ambos os fatos mostram o resultado. $\square$

5.2 Órbitas Principais

Nesta seção trataremos de um tipo de órbita em especial, aquelas órbitas que têm a maior dimensão dentre todas as outras. Estas órbitas são conhecidas como órbitas principais e a união delas será um subconjunto denso na variedade.

Considere G um grupo de Lie agindo suavemente em uma variedade M. Considere a seguinte relação de equivalência entre os subgrupos de G: se $H, K \in G$, dizemos que $H \sim K$ se, e somente se, $\exists g \in G$ tal que $H = gKg^{-1}$ e dizemos que os subgrupos H, K são conjugados em G. Denotaremos a classe de conjugação de H por (H). Dizemos que H é sub conjugado de K se H for conjugado a algum subgrupo de K. Sub conjugação define uma ordem parcial no conjunto das classes de conjugação de subgrupos de G, isto é, $(H) \leq (K)$ se, e somente se, H for sub conjugado de K. Para fixar uma notação considere o conjunto:

$$M_{(H)} := \{m \in M | (G_m) = (H)\},$$

esta é a união de todos os pontos tais que o tipo de isotropia é o mesmo de H.

A relação de equivalência definida acima, induz uma relação de equivalência entre as órbitas da variedade. Dados $p, q \in M$ dizemos que as órbitas $G \cdot p$ e $G \cdot q$ são equivalentes se, e somente se, $G_p \sim G_q$, chamamos a classe de equivalência da órbita $G \cdot p$ de tipo da órbita. Denotaremos o tipo da órbita de $G \cdot p$ como $[G \cdot p]$. Devido a ordem parcial definida acima no grupo G, podemos definir uma ordem parcial no tipo de órbitas:

$$[G \cdot p] \leq [G \cdot q] \Longleftrightarrow (G_q) \leq (G_p), \qquad \forall p, q \in M.$$

O tipo de órbita maximal em relação a esta relação de equivalência é chamado de tipo principal e as órbitas que tem um tipo principal são chamadas de órbitas principais. Para demonstrar que a união das órbitas principais é densa na variedade temos que introduzir um importante resultado de topologia diferencial.

Lembramos que uma representação de um grupo G em um espaço vetorial V é um mapa $\rho : G \to Gl(V)$. Dado um grupo de Lie G, H um subgrupo de Lie, $\rho : H \to V$ uma representação de H em um espaço vetorial V e a seguinte ação $G \times V \times H \to G \times V$ tal que $(g, v)h = (gh, \rho(h^{-1})v)$, então denotaremos $G \times_H V$ como o espaço das órbitas desta ação em $G \times V$. Assim temos o seguinte resultado:

Teorema 5.2.1. ([10],p.82) Seja G um grupo de Lie compacto agindo em uma variedade M. Para cada $m \in M$ tome $H = G_m$ o seu grupo de isotropia, então existe uma única representação de H em um espaço vetorial V, fixado, e um difeomorfismo $\phi : G \times_H V \to M$ sobre uma vizinhança aberta de Gm, tal que ϕ seja invariante pela a ação de G, isto é, $\phi(h(g, v)H) = h\phi((g, v)H)$, e vale $\phi((g, 0)H) = gm$, $\forall h \in H, g \in G$.

A demonstração deste resultado pode ser encontrado em *Introduction to Compact Transformation Groups*, capítulo 2, [10].

Assim estamos em condições de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 5.2.2. ([20],p.42) Dada uma ação do grupo de Lie, $G \subset O(n)$, em uma variedade M. Suponha que M/G seja conexa. Então existe um único tipo de órbita, $[G \cdot p]$ maximal. A união das órbitas principais formam um espaço aberto e denso em M.

Demonstração. A demonstração segue por indução na dimensão de M.

Se $dim(M) = 0$: o espaço M/G é um ponto e M consiste de uma única órbita.

Suponha que vale para $dim(M) \leq n$:

Primeiro iremos considerar somente variedades da forma $G \times_H V$ de dimensão n, onde H um subgrupo de G e $H \to Gl(V)$ é uma representação de H em um espaço vetorial V. Temos que $G \times_H SV$ é uma variedade de dimensão menor do que n, onde SV é a esfera de raio 1 do espaço vetorial V.

Para que o espaço das órbitas de $G \times_H SV$ seja desconexo, a dimensão de V teria que ser 1, logo a representação $H \to Gl(V)$ seria trivial. Portanto $G \times_H V \cong G/H \times \mathbb{R}$, no que valeria o resultado.

Por outro lado, se o espaço das órbitas de $G \times_H SV$ for conexo, então por hipótese de indução existe um único subgrupo de isotropia, $K \subset H$, tal que $(K) \leq (N)$ para qualquer subgrupo $N \subset H$. Agora podem ocorrer somente dois casos

1. $(G_0) = (K)$ onde $0 \in V$: Neste caso $K = H$ e portanto H fixa um subespaço denso de SV, então a representação $H \to Gl(V)$ é trivial.

2. $V_{(K)} \equiv SV_{(K)} \times (0, \infty)$ pois K é um subgrupo de $O(n)$ e assim se K fixa um ponto em SV então ele fixará qualquer múltiplo deste vetor.

Em ambos os casos o resultado vale para $G \times_H V$.

Agora dado uma variedade M de dimensão n, devido ao teorema 5.6, podemos cobri-la de vizinhanças difeomorfas $G \times_H V$, onde H é um grupo de isotropia de um ponto no interior da vizinhança. Primeiro, dado um ponto $m \in M$ que esteja contida em uma vizinhança difeomorfa a $G \times_H V$, então $G_{(g,v)H} = gH_v g^{-1}$ para qualquer $g \in G$ e portanto, o tipo de isotropia que procuramos tem que ser um subgrupo de H. Dado duas vizinhanças, $G \times_{H_1} V_1$ e $G \times_{H_2} V_2$, considere (K_1) e (K_2) os dois tipos de isotropia minimais respectivamente. Pela densidade das órbitas principais nas vizinhanças, existem pontos na intercessão com os tipos de isotropia (K_1) e (K_2), por um lado $(K_1) \leq (K_2)$ e por outro $(K_1) \geq (K_2)$ logo $(K_1) = (K_2)$. Desde que M/G é conexo, quaisquer dois tipos de órbitas mínimos são iguais. Segue-se que a união de todas as órbitas principais em cada vizinhança é denso e aberto em M. $\square$

Proposição 5.2.3. ([20],p.42) Seja G um grupo de Lie compacto agindo em uma variedade M, tome H um grupo de isotropia de M de algum ponto de M. Então, as componentes conexas de $M_H = \{m \in M | (G_m) = (H)\}$ são subvariedade de M.

Demonstração. Considere primeiro $M = G \times_H V$. Dado $(g, v)H \in G \times_H V$, então o grupo de isotropia $G_{(g,v)H} = gH_v g^{-1}$. Portanto $(G_{(g,v)H}) = (H)$ se, e somente se, $H_v = H$, assim se

$$V^H := \{v \in V | hv = v, \qquad \forall h \in H\},$$

$v \in V^H$. Mas V^H é um subespaço vetorial de V e portanto uma subvariedade. Assim a inclusão $G \times_H V^H \subset G \times_H V$ é um sub fibrado vetorial e portanto uma subvariedade diferenciavel.

Agora, dado o caso geral, $A \subset M$ é uma subvariedade de M se, e somente se, cada ponto $m \in M$ existir uma vizinhança aberta U tal que $U \cap A$ é uma subvariedade de U. Assim devido ao teorema 5.6, tome $U = G \times_H V$ e pelo demonstrado acima obtemos o resultado. $\square$

Iremos construir um caso particular de vizinhanças difeomorfas a um $G \times_H V$ dado pelo o teorema 5.2.1, para podermos caracterizar as órbitas principais.

Lembrando do capítulo 3, dado um ponto p em $G \cdot p \subset M$ então $N_p(G \cdot p)$ denota o espaço normal da órbita $G \cdot p$ no ponto p. Seja $p \in M$ e $r \in \mathbb{R}^+$ suficientemente pequeno tal que a restrição do mapa exponencial, exp_p, de M em p restrido a bola de raio r, $U_r(0) \subset N_p(G \cdot p)$ seja um mergulho em M. Então $\Sigma = exp_p(U_r(0))$ é um slice, também chamada de slice geodésico. Se percorrermos todos os pontos da órbita de p e unimos os slices, ou seja $G \cdot \Sigma$, teremos um exemplo de uma vizinhança difeomorfa a

$G \times_H V$ onde $H = G_p$ e tendo uma representação de $H \to GL(V)$. Assim, considerando G agindo por isometrias em M. Dado $q \in \Sigma$ e $g \in G_q$ temos $gq \in \Sigma$ e portanto $g\Sigma = \Sigma$. Desde de que $\Sigma \cap G.p = \{p\}$, segue que $gp = p$ e portanto, $g \in G_p$, mostrando o seguinte lema:

Lema 5.2.4. ([3],p.39) Seja G um grupo de Lie, agindo por isometrias em M. Se Σ for uma slice geodésico em p, então $G_q \subset G_p$ para todo $q \in \Sigma$.

Agora, assumindo sempre que G age via isometrias em M. Dado $p \in M$, temos que o subgrupo de isotropia G_p age no espaço tangente $T_p(G \cdot p)$ da seguinte maneira:

$$G_p \times T_p(M) \to T_pM$$

$$(g, X) \mapsto g_*(X).$$

Está ação, preserva o espaço tangente $T_p(G \cdot p)$ e o espaço normal $N_p(G \cdot p)$. Assim chamaremos a restrição da ação acima no espaço normal, isto é, a ação

$$G_p \times N_p(G \cdot p) \to N_p(G \cdot p),$$

como a representação slice.

Seja Σ uma slice geodésico em p. Como a ação do grupo é própria temos que $G \cdot \Sigma$ é um conjunto aberto de M. E devido ao resultado demonstrado anteriormente 5.2.2 de que as órbitas principais formam um espaço aberto e denso na variedade, o lema acima indica que $G \cdot p$ é uma órbita principal se, e somente se $G_q = G_p$ para todo $q \in \Sigma$. Por outro lado, cada $g \in G_q$ fixa ambos q e p e portanto, assumimos que a representação slice é trivial. Isto implica no seguinte resultado:

Teorema 5.2.5. ([3],p.39) Uma órbita $G \cdot p$ é principal se, e somente se o a representação slice for trivial.

Por fim, dado uma órbita principal e um vetor normal nesta órbita, pode-se criar um campo normal invariante da seguinte forma: Seja $G \cdot p$ uma orbita principal e $n \in N_p(G \cdot p)$, assim defina o campo $\mathcal{N}$

$$\mathcal{N}(gp) := (g)_* \cdot n.$$

Seja $gp = g'p \in G \cdot p$, então $g^{-1}g' \in G_p$, como a órbita é principal devido ao resultado acima, temos $(g^{-1}g')_*n = n$. Assim o campo $\mathcal{N}$ está bem definido. Chamaremos o campo $\mathcal{N}$ como o campo equivariante normal determinado por n.

5.3 Ações Polares

Seja M uma variedade Riemanianna conexa e completa e G um subgrupo fechado do grupo das isometrias de M.

Definição 5.3.1. Uma subvariedade completa, mergulhada e fechada, Σ, de M é chamada de uma seção se Σ interceptar cada órbita perpendicularmente. Se existir uma seção na variedade, dizemos então que a ação de G em M é uma ação polar.

Teorema 5.3.2. ([3],p.42) Toda seção de uma ação polar é totalmente geodésica.

Demonstração. Seja Σ uma seção da ação polar. Denote por Σ_r como o conjunto dos pontos principais em Σ (p é um ponto principal se $G \cdot p$ for uma órbita principal).

Dado $p \in \Sigma_r$ e $n \in N_p\Sigma$, assim $n \in T_p(G \cdot p)$ e portanto $n = \dot{\gamma}(0)$, onde $\gamma(t) = h(t) \cdot p$ com $h(t) \subset G$. Assim defina o seguinte campo, $X(p) = n$, para cada $q \in \Sigma$ $X(q) = \dot{\sigma}(0)$, onde $\sigma(t) = h(t) \cdot q$ e por fim extenda por invariancia em relação ao grupo G este campo X, assim obtemos um campo cujo grupo uniparamétrico é isometrias, já que G é subgrupo de isometrias e portanto X será um cammpo de Killing. Por construção temos que X é perpendicular a Σ. Seja A o operador forma de Σ. Como X é um campo de Killing, temos que ∇X é um campo tensorial anti-simétrico (olhar no capítulo 3). Assim pela equação de Weingarten:

$$g(A_n w, w) = g(\nabla_w^{\perp} X, w) - g(\nabla_w X, w),$$

para todo $w \in T_p(\Sigma)$, considerando w extendível a um campo suave local. Como a imagem de $\nabla^{\perp}$ é sempre perpendicular a Σ, temos que

$$g(A_n w, w) = -g(\nabla_w X, w) = 0$$

devida a anti-simetria de ∇X. Logo $A_n \equiv 0$.

Como, $n \in N_p(\Sigma)$ é arbitrário, temos que o operador forma é nulo nos pontos de Σ_r e como Σ_r é aberto e denso em Σ, concluímos que Σ é totalmente geodésico. $\square$

Proposição 5.3.3. ([3],p.43) A representação slice de uma ação polar e um ponto arbitrário p também é uma ação polar. Além disso, se Σ for uma seção de uma ação polar e $p \in \Sigma$, então $T_p\Sigma$ é uma seção da representãção slice.

Demonstração. Se provarmos que $T_p\Sigma$ intercepta ortogonalmente todas as órbitas principais da representação slice, pela densidade dos vetores principais no espaço normal e pela continuidade da métrica, segue-se que $T_p\Sigma$ interceptará ortogonalmente todas as órbitas da representação slice. Considere g a métrica de M.

Dado, $v \in N_p(G \cdot p)$ um vetor principal da ação de G_p no espaço normal assim

$$dim(T_p\Sigma) = dim(N_p(G \cdot p)) - dim((G_p)_* v).$$

Seja X um campo de Killing em M induzido pelo subgrupo de isotropia, temos que X é sempre perpendicular a Σ. Desde que X é um campo de Killing, a derivada covariante ∇X estará em $\mathfrak{so}(T_pM)$. Portanto, a álgebra de Lie de G_p pode ser considerado como o conjunto dos endomorfismos antisimétricos de $N_p(G \cdot p)$. Assim, dado $u \in T_p\Sigma$, $g(X, u) = 0$ e assim pela compatibilidade da métrica $g(\nabla_u X, u) = 0$ e pelo fato de Σ ser totalmente geodésica, temos $\nabla_u X$ é ortogonal a $T_p\Sigma$. Assim, dado qualquer campo de Killing induzido na órbita principal de v, temos que X será perpendicular a $T_p\Sigma$. $\square$

Definição 5.3.4. Seja M um espaço simétrico e $\widetilde{M}$ seu recobrimento universal Riemanniano. Tome $\widetilde{M}_0 \times ... \times \widetilde{M}_k$ sua decomposição de de Rham (olhar no capítulo 4). Dizemos que M é um espaço semisimples se a dimensão de $\widetilde{M}_0$ for zero. Um espaço M e dito de tipo compacto se M for semisimples e compacto. Uma s-representação é a representação de isotropia de um espaço simplesmente conexo, semisimples, simétrico, $M = G/K$ com G a componente conexa da identidade do grupo de isometrias de M.

Agora dado duas representações $\rho_1 : G_1 \to SO(n)$ e $\rho_2 : G_2 \to SO(n)$, dos subgrupos de Lie G_1 e G_2 respectivamente, dizemos que suas órbitas são equivalentes se existir uma isometria $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $A(G_1.v) = G_2.A(v)$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$. Dadok classificou todas as representações polares, [12], utilizando a proposição 5.3.3 e por um argumento indutivo. Então ele viu a partir da lista que representações polares possui órbitas equivalentes a uma representação isotrópica de um espaço semisimples, simétrico. Isto é, existe uma s-representação com as mesmas órbitas. Portanto, ele provou:

Teorema 5.3.5. (**Dadok**,p.51): Toda representação polar em $\mathbb{R}^n$ tem suas órbitas equivalentes as órbitas de uma s-representação.

E por fim, o próximo resultado é conhecido como o teorema de Holonomia normal que possui uma demonstração longa e poderá ser encontrado em *Submanifolds and Holonomy*, capítulo 4, [5]:

Teorema 5.3.6. [3] Seja M uma subvariedade de um espaço Euclidiano e tome $p \in M$. Então o grupo de Holonomia normal estrito de M, age como uma s-representação.

5.4 Segunda forma fundamental das órbitas

Seja G um grupo de Lie agindo isométricamente em uma variedade Riemanniana M. Para cada $p \in M$, tome A o operador forma da órbita $G \cdot p$.

Agora tome X^* um campo de Killing em $G.p$ induzido pela a ação de G, assim $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{m}$ onde $\mathfrak{t}$ é a álgebra de Lie do grupo de isotropia G_p e portanto

$$T_p(G \cdot p) = \{X_p^* | X \in \mathfrak{g}\} = \{X_p^* | X \in \mathfrak{m}\}.$$

Como X^* é um campo de Killing de $G \cdot p$, dado um campo normal N de $G \cdot p$ e estendendo arbitráriamente em M, temos $(\nabla_{X^*} N)^T = (\nabla_N X^*)^T$. Pela formula de Weingarten

$$A_N X_p^* = -((\nabla_N X^*)_p)^T,$$

onde $(.)^T$ denota a projeção ortogonal de T_pM em $T_p(G \cdot p)$. Assim temos o seguinte resultado

Proposição 5.4.1. ([3],p.62) Seja G um grupo de Lie agindo isométricamente em uma variedade Riemanniana M. Então para cada $p \in M$ o espaço tangente de $G \cdot p$ é dado por

$$T_p(G \cdot p) = \{X_p^* | X \in \mathfrak{g}\} = \{X_p^* | X \in \mathfrak{m}\},$$

onde $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{m}$ é uma decomposição redutível de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{t}$ é a álgebra de Lie do subgrupo de isotropia G_p em p. Se $n \in N_p(G \cdot p)$ e $X \in \mathfrak{g}$ temos que

$$A_n(X_p^*) = -((\nabla_n X^*)_p)^T,$$

onde $(.)^T$ denota a projeção ortogonal de T_pM em $T_p(G \cdot p)$.

Dado $G \subset SO(n)$, temos que $\mathfrak{g} \in \mathfrak{so}(n)$. Assim, podemos considerar cada elemento de $\mathfrak{g}$ como um endomorfismo anti simétrico de $\mathbb{R}^n$. Assim, tomando $M = \mathbb{R}^n$, temos que para cada $X \in \mathfrak{g}$, $((\nabla X^*)_p N)^T = (Xn)^T$ e que $X_p^* = Xp$. Utilizando está convensão, temos como corolário do resultado acima:

Corolário 5.4.2. ([3],p.62) Seja $G \subset SO(n)$ agindo isométricamente em $\mathbb{R}^n$. Então, para cada $p \in \mathbb{R}^n$

$$T_p(G \cdot p) = \{Xp | X \in \mathfrak{m}\},$$

onde $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{m}$ é uma decomposição redutível de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{t}$ é a algebra de Lie do subgrupo de isotropia G_p. Se $n \in N_p(G)$ e $X \in \mathfrak{m}$, o operador forma A_n de $G \cdot p$ é dado por

$$A_n Xp = -(Xn)^T,$$

onde T denota a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^n$ em $T_p(G.p)$.

5.5 Teorema da Existência de Subvariedades Totalmente Geodésica de Cartan

Seja M uma subvariedade de uma variedade Riemanniana $\overline{M}$. Lembramos que M é chamado de totalmente geodésica em $\overline{M}$ se toda geodésica em M for também uma geodésica na variedade $\overline{M}$. Isto é equivalente a segunda forma fundamental de M ser identicamente nula.

Agora, se $\overline{\nabla}$ for a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}$, então definiremos a conexão $\nabla^{\perp}$ no fibrado normal NM como:

$$\nabla^{\perp}_X Y = (\overline{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y})^{\perp},$$

onde X, Y são campos em M e $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ são extensões arbitrárias em $\overline{M}$. Chamaremos $\nabla^{\perp}$ como a conexão normal de M. Assim vale a seguinte equação de Codazzi:

Lema 5.5.1. ([3],p.10) Seja $\overline{R}$ o tensor de curvatura de $\overline{M}$ e II a segunda forma fundamental de M. Então

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_X II)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y II)(X,Z),$$

onde X, Y, Z campos de vetores tangentes em M.

Demonstração. Pela formula de Gauss:

$$\begin{aligned} \overline{R}(X,Y)Z &= \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z \\ &= \overline{\nabla}_X (\nabla_Y Z + II(Y,Z)) - \overline{\nabla}_Y (\nabla_X Z + II(X,Y)) - (\nabla_{[X,Y]} Z + II([X,Y],Z)) \end{aligned}$$

e pela fórmula de Weingarten:

$$\begin{aligned} &= \nabla_X \nabla_Y Z + II(X, \nabla_Y Z) - A_{II(Y,Z)} X + \nabla^{\perp}_X II(Y,Z) - \nabla_Y \nabla_X Z - II(Y, \nabla_X Z) \\ &\quad + A_{II(X,Z)} Y - \nabla^{\perp}_Y II(X,Z) - \nabla_{[X,Y]} Z - II(\nabla_X Y, Z) + II(\nabla_Y X, Z) \\ &= R(X,Y)Z - A_{II(Y,Z)} X + A_{II(X,Z)} Y + (\nabla^{\perp}_X II)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y II)(X,Z), \end{aligned}$$

onde R é o tensor de curvatura de M e A é o operador forma de M. Assim temos:

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_X II)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y II)(X,Z),$$

$\square$

Para demonstrar o Teorema da Existência de Subvariedades Totalmente Geodésicas de Cartan, necessitaremos do seguinte lema técnico:

Lema 5.5.2. ([3],p.232) Seja $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana e $p \in \overline{M}$. Tome $f : [0,\delta] \times [0,1] \to \overline{M}$ uma função suave com $f(s,0) = p$ para todo $s \in [0,\delta]$. Para cada $s \in [0,\delta]$ podemos definir $f_s : [0,1] \to \overline{M}$, $t \mapsto f(s,t)$. Similarmente, para cada $t \in [0,1]$ podemos definir $f^t : [0,\delta] \to \overline{M}$, $s \mapsto f(s,t)$. Para cada $s \in [0,\delta]$, denotaremos por $\tau(s) \in SO(T_pM)$ uma transformação ortogonal de $T_p\overline{M}$ obtido pelo transporte paralelo ao longo de f_0 de $p = f_0(0)$ até $f_0(1) = f^1(0)$, então ao longo f^1 de $f^1(0)$ até $f^1(s) = f_s(1)$, e finalmente ao longo de f_s de $f_s(1)$ até $f_s(0) = p$. Seja $A(s) \in \mathfrak{so}(T_pM)$ uma transformação anti-simétrica de T_pM definida por $\tau'(s) \circ \tau(s)^{-1}$ para todo $s \in [0,\delta]$. Então, para cada $u, w \in T_p\overline{M}$,

$$g(A(s)u, w) = \int_0^1 g\left(\overline{R}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(s,t), \frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\right) U_s(t), W_s(t)\right) dt,$$

onde g é a métrica de $\overline{M}$, $\overline{R}$ é o tensor de curvatura de $\overline{M}$ e $U_s(t)$ e $W_s(t)$ são os campos de vetores paralelos ao longo de f_s com $U_s(0) = u$ e $W_s(0) = w$, respectivamente.

Assim temos o Teorema de Cartan:

Teorema 5.5.3. ([3],p.231) Seja $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana, $p \in \overline{M}$ e V um subespaço linear de $T_p\overline{M}$. Então existe uma subvariedade totalmente geodésica, M, de $\overline{M}$ com $p \in M$ e $T_pM = V$ se, e somente se, existir um número real $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ tal que para toda geodésica γ em $\overline{M}$ com $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) \in V \cap U_\epsilon(0)$, o tensor de curvatura Riemanniano de $\overline{M}$ em $\gamma(1)$ preserva o transporte paralelo de V ao longo de γ de p até $\gamma(1)$.

Demonstração.
$\Rightarrow$ Seja M uma subvariedade totalmente geodésica, assim pela equação de Codazzi

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = 0,$$

logo $R(X,Y)Z = \overline{R}(X,Y)Z$, para quaisquer X, Y, Z campos em $\overline{M}$. Portanto o tensor de curvatura Riemanniano é preservado pelo o transporte paralelo de V ao longo de qualquer geodésica em M.

$\Leftarrow$ Caso necessário, diminua ϵ tal que U_ϵ seja a vizinhança normal de p e iremos provar para o caso $exp_p(U_\epsilon) = \overline{M}$. Assim tomaremos $M = exp_p(V \cap U_\epsilon)$, assim $p \in M$ e $T_pM = V$.

Seja $q \in M$ e $v \in V \cap U_\epsilon(0)$ tal que $exp_p(v)$. Dado $w \in V$, γ_v a geodésica na direção de v, considere X_w o campo de Jacobi ao longo de γ_v, tal que $X_w(0) = 0$ e $\dot{X}_w(0) = w$, assim $(exp_p)_{*v}(w) = X_w(1)$. Por outro lado, identificando naturalmente $T_p\overline{M} = T_v(T_p\overline{M})$, temos

$$T_qM = (exp_p)_{*v}(V).$$

Tomando V_v o fibrado vetorial obtido pelo transporte paralelo de V ao longo de γ_v. Por hipótese, temos que o tensor de curvatura conserva o transporte paralelo de V ao longo de γ_v, assim X_w toma valores em V_v ao longo de γ_v. Portanto $\{X_w(1)|w \in V\} \subset (exp_p)_{p*v}(V)$, concluíndo que

$$T_qM = \{X_w(1)|w \in V\} = V_v(1),$$

ou seja, T_qM é obtido pelo transporte paralelo de V ao longo γ_v de p para q.

Seja $\gamma : [0,1] \to M$ um laço em M com o ponto base p. Como $exp_p|_{U_\epsilon}$ é um difeomorfismo, existe uma única curva $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to V \cap U_\epsilon(0) \subset T_pM$ tal que $\gamma = exp_p \circ \widetilde{\gamma}$. Agora defina

$$f : [0,1] \times [0,1] \to M,$$

$$(s,t) \mapsto exp_p(t\widetilde{\gamma}).$$

Utilizando a notação do lema anterior, provamos que $T_{f(s,t)}M$ é obtido pelo transporte paralelo de V ao longo da geodésica f_s de $f_s(0)$ até $f_s(t) = f(s,t)$. Pelo lema anterior temos,

$$g(A(s)u, w) = \int_0^1 g(\overline{R}(\frac{\partial f}{\partial s}(s,t), \frac{\partial f}{\partial t}(s,t))U_s(t), W_s(t))dt = 0$$

para todo $s \in [0,1]$, $u \in V$ e $w \in V^{\perp}$, ou seja se $A(s) = \tau'(s) \circ \tau(s)^{-1}$ para $s \in [0,\delta]$, $A(s) \in \mathfrak{so}(V) \oplus \mathfrak{so}(V^{\perp})$ para todo $s \in [0,1]$. Sabendo que $\tau(0)$ é a identidade de $T_p\overline{M}$, concluímos que $\tau(s) \in O(V) \times O(V^{\perp})$ para todo $s \in [0,1]$. Mas $\tau(1)$ é por construção, o transporte paralelo ao longo do laço γ de $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$. Portanto, V é invariante pelo transporte paralelo ao longo de laços em M baseados em p.

Agora, considere $\widehat{\gamma}[0,1] \to M$ um laço baseado no ponto q dado pela concatenação entre a geodésica γ_v no sentido oposto com o laço γ e novamente pela geodésica γ_v no sentido natural. Como V é preservado pelo transporte paralelo de laços em p, e mostramos que T_qM é obtido pelo transporte paralelo de V ao longo da geodésica γ_v, portanto T_qM será invariante pelo transporte paralelo ao longo do laço $\widehat{\gamma}$.

Por fim, dado $\beta : [0,1] \to M$ uma curva arbitrária em M e para cada $t \in [0,1]$, construa um laço percorrendo primeiro de $\beta(0)$ até $\beta(t)$ ao longo de β, depois ao longo d geodésica radial de $\beta(t)$ até p e finalmente ao longo da geodésica radial de p até $\beta(0)$. Assim, como os transportes paralelos dados por laços e por geodésicas radiais preservam os espaços tangente de M, temos que o transporte paralelo na curva $\beta : [0,t] \to M$ preservam os espaços tangentes, para todo t. Isto implica que a conexão induziida em M coincide com a restrição de $\overline{\nabla}$ nos campos de vetores de M. Pela formula de Gauss:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X,Y),$$

e portanto $II(X,Y) = 0$ para todo X, Y. Então M é totalmente geodésica.

$\square$

Capítulo 6

O Teorema da Holonomia de Berger

Neste capítulo, iremos apresentar a demonstração do Teorema da Holonomia de Berger dado por Carlos Olmos no artigo *A geometric proof of the Berger Holonomy Theorem* [6]. Para isso, iremos separar este capítulo em três seções, na primeira iremos apresentar três resultados e logo após, utilizando estes resultados, demonstrar o Teorema principal. Na segunda seção, focaremos em demonstrar dois resultados dos utilizados na demonstração e deixar o resultado mais importante para a última seção.

6.1 Teorema da Holonomia de Berger

O teorema em questão é o seguinte resultado:

Teorema 6.1.1. Holonomia de Berger[6]: Assuma que o grupo de Holonomia de uma variedade Riemanniana irredutível M não é transitiva na esfera. Então M é localmente simétrica.

Este teorema pode ser utilizado para demonstrar a classificação dada por Marcel Berger em 1955 de possíveis grupos de Holonomia de espaços irredutíveis não localmente simétricos, podendo ser encontrado em *Compact Manifolds with Special Holonomy*, página 55, [8].

Para demonstrar o teorema de Holonomia de Berger necessitaremos dos seguintes resultados:

Lembrando do capítulo 3, dado um ponto p em uma subvariedade $M \subset \widetilde{M}$ então $N_p(M)$ denota o espaço normal da variedade M no ponto p.

Lema 6.1.2. [6] Seja G um subgrupo compacto de $SO(n)$ cuja a ação não é transitiva na esfera e tome v um vetor principal. Então existe $n \in N_v(G \cdot v)$, que não seja múltiplo de v, tal que a família de espaços normais, $\{N_{\gamma(t)}(G \cdot \gamma(t))\}$, gera o $\mathbb{R}^n$, onde $\gamma(t) = v + tn, t \in \mathbb{R}$.

Para o seguinte lema, teremos que introduzir uma notação. Seja M uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e $\rho > 0$ o raio de injetividade de p. Para qualquer $v \in T_pM$, podemos definir $\mathcal{F}_v$ como a família de subespaços de T_pM, tais que para qualquer $W \in \mathcal{F}_v$, $v \in W$ e $exp_p(B_\rho(0) \cap W)$ é uma subvariedade totalmente geodésica de M que é localmente simétrica, onde que $B_\rho(0)$ é a bola aberta de raio ρ centrado de 0.

Lema 6.1.3. [6] Seja M uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e ρ o raio de injetividade em p. Assuma que para qualquer v em algum subconjunto denso Ω da bola Euclidiana $B_\rho(0) \subset T_pM$, a família $\mathcal{F}_v$ gera T_pM. Então a simetria geodésica s_p em p é uma isometria da bola geodésica $B_\rho(p)$.

E por último e também o mais importante resultado:

Proposição 6.1.4. [6] Seja M uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e tome ρ o raio de injetividade em p. Assuma que o grupo de Holonomia, $H = Hol_p(g)$, de M no ponto p age irredutivelmente em T_pM. Considere, para cada $v \in T_pM$, $N_v(H \cdot v)$ o espaço normal em v da órbita $H \cdot v$ em T_pM. Denote $N^v = exp_p(N_v(H \cdot v) \cap B_\rho(0))$. Então, para todo $v \in T_pM$ não nulo,

1. N^v é uma subvariedade totalmente geodésica de M. Além disso, N^v divide localmente a geodésica γ_v e o grupo de Holonomia $Hol_v(N^v)$ está contido na imagem, sob uma representação slice, do subgrupo de isotropia conexo $(H_v)_0$;

2. O grupo de Holonomia normal, $H^\perp = Hol^\perp(H \cdot v)$, de $H \cdot v$ em v age via isometrias em N^v de maneira natural (isto é, qualquer $h \in H^\perp$ é a diferencial de alguma simetria de N^v que fixa p).

3. N^v é localmente simétrico.

Assim poderemos demonstrar o teorema da Holonomia de Berger:

Demonstração. **Teorema da Holonomia de Berger:** Seja $p \in M$, Ω o conjunto dos vetores principais de T_pM dada pela a ação do grupo de Holonomia, $H = Hol(g)$, sobre T_pM.

Como $H \subset SO(n)$ não é transitiva na esfera, dado $v \in \Omega$, pelo lema 6.1.2 obtemos um vetor $n \in N_v(H \cdot v)$ que não é múltiplo de v e uma curva $\gamma_n(t) = v + tn$ tal que a família

$$\mathcal{F}_v = \{N_{\gamma_n(t)}(H \cdot \gamma_n(t)) | t \in \mathbb{R}\}$$

gera T_pM.

Devemos verificar que a família $\mathcal{F}_v$ satisfaz as condições do lema 6.1.3.

Para cada $t \in \mathbb{R}$, dado $x \in T_{v+tn}(H \cdot (v + tn))$, existe $\widetilde{x} \in \mathfrak{h}$ tal que o campo de Killing induzido $\sigma(\widetilde{x})|_{v+tn} = x$, devido o lema 5.4.1, onde $\mathfrak{h}$ é a álgebra de Lie de H. Considerando g a métrica Riemanniana de M e sabendo que $\mathfrak{h} \in \mathfrak{so}(T_pM)$ temos que

$$g(v, x) = g(v, \widetilde{x}.(v + tn)) = -g(\widetilde{x}.v, v + tn) = 0,$$

pois $\widetilde{x}.v \in T_v(H.v)$ e v é ortogonal a sua órbita (em ações de grupos ortogonais, todo vetor é ortogonal a sua órbita). Logo $v \in N_{\gamma_n(t)}(H.\gamma_n(t))$.

Agora, se $N^{\gamma_n(t)} = exp_p(N_{\gamma_n(t)}(H.\gamma_n(t)) \cap B_\rho(0))$, onde $B_\rho(0)$ é a bola euclidiana de raio ρ centrada na origem. Pela proposição 6.1.4 temos que $N^{\gamma_n(t)}$ será uma subvariedade totalmente geodésica em M que é localmente simétrica. Do lema 6.1.3 e sabendo que o Ω é aberto e denso na bola euclidiana $B_\rho(0)$, cocluímos que M é localmente simétrica. $\square$

6.2 Demonstrações dos lemas 6.2 e 6.3

Por motivo de organização, iremos reenunciar os resultados que demonstraremos nesta e na próxima seção.

Lema 6.2.1. [6] Seja G um subgrupo compacto de $SO(n)$ cuja a ação não é transitiva na esfera e tome v um vetor principal. Então existe $n \in N_v(G \cdot v)$, que não seja múltiplo de v, tal que a família de espaços normais $N_{\gamma(t)}(G \cdot \gamma(t))$ geram o $\mathbb{R}^n$, onde $\gamma(t) = v + tn, t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Suponha que $dim(N_v(G.v)) = 1$, então $G.v$ seria uma subvariedade de codimensão 1 em $\mathbb{R}^n$ e sabemos que $G.v \subset S^{n-1}(\|v\|)$, pois G é um subgrupo de $SO(n)$. Logo $G.v$ seria uma subvariedade aberta de $S^{n-1}(\|v\|)$. Mas a ação é contínua e G é um grupo compacto, implicando que $G.v$ será compacto na esfera, assim $G.v = S^{n-1}(\|v\|)$ que contradiz a hipótese. Portanto, podemos escolher $n \in N_v(G.v)$ que não seja múltiplo do vetor posição de v.

Devido ao lema 5.4.2, temos que $A_v = -Id$ na órbita $G.v$ (repare que v é sempre normal a sua órbita). Assim, podemos assumir eventualemente que $det(A_n) \neq 0$, caso contrário, só tomar alguma combinação linear de n e v onde o coeficiente de n não se anule e pela continuidade do determinate só tomar como vetor normal está combinação. Repare que A_n é diagonálizável, (isto é um fato geral), pois

$$g(A_nX, Y) = -g(\nabla_X N, Y) = g(\nabla_X Y, N) - \nabla_X g(N, Y)$$

$$g(\nabla_X Y, N) = g([X, Y] - \nabla_Y X, N) = -g(\nabla_Y N, X) = g(A_n(Y), X),$$

assim como $det(A_n) \neq 0$ então todos os seus auto-valores são não nulos.

Seja $\gamma(t) = v + tn$ e $\mathbb{V}$ o complemento ortogonal do espaço gerado pela a família $\{N_{\gamma_n(t)}(G.\gamma_n(t)) | t \in \mathbb{R}\}$. Queremos mostrar que $\mathbb{V} = \{0\}$.

Se $y \in \mathbb{V}$, então $y \perp N_{\gamma_n(t)}(G.\gamma_n(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$, logo $y \in T_{\gamma_n(t)}(G.\gamma_n(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, seja $X \in \mathfrak{g}$ tal que $X.v = y$ e tome $J_n(t)$ a restrição deste campo de Killing na geodésica $\gamma_n(t)$. Sabemos que $J_n(t)$ será um campo de Jacobi, assim se $w := \dot{J}_N(0)$, pelo o teorema de existência e unicidade de campos de Jacobi, $J_n(t) = X.v + tw$. Para cada $n \in N_{\gamma_n(t)}(G.\gamma_n(t))$, como $X.v + tw \in T_{\gamma_n(t)}(G.\gamma_n(t))$:

$$g(X.v + tw, n) = 0 \Rightarrow g(w, n) = 0,$$

portanto $w \perp N_{\gamma_n(t)}(G.\gamma_n(t))$ quando $t \neq 0$. Mas, para t suficientemente pequeno, $\gamma_n(t)$ é um vetor principal para a ação de G e, portanto, o espaço normal das órbitas associadas convergem para $N_v(G.v)$. Então $w \perp N_v(G.v)$.

Agora, considerando $\gamma_n(t)$ parametrizado pelo comprimento de arco. Suponha que $V(s, t)$ uma variação por geodésicas com $V(0, t) = \gamma_n(t)$ e $n(s) = \partial_s V(s, 0) \in N_{\gamma_n(t)}(G.\gamma_n(t))$. O campo de Jacobi será determinado pelas as seguintes condições iniciais

$$J_n(0) = X.v,$$

$$\begin{aligned} \dot{J}_n(0) &= \frac{\partial}{\partial s}_{s=0} \frac{\partial}{\partial t}_{t=0} V(s, t) = \frac{d}{dt}_{s=0} n(s) \\ &= \overline{\nabla}_{Y(0)} n(s) = -A_{n(0)} J_n(0) + \nabla^{\perp}_{X.v} n, \end{aligned}$$

onde A_n denota o operador forma da órbita $G.v$ e n é considerado como o campo equivariante normal com valor de n. Assim $A_n(X.v) \in \mathbb{V}$, como $X.v$ é arbitrário temos que $A_n(\mathbb{V}) \subset \mathbb{V}$. Como $\mathbb{V}$ é A_n-invariante, temos que $\mathbb{V}^{\perp}$ também será A_n-invariante.

Tome, $\mathbb{Y} = \mathbb{V}^{\perp} \cap T_v(G.v)$, temos que se $y \in \mathbb{Y}$, $A_n(y) \in \mathbb{V}^{\perp}$ e por outro lado

$$A_n(y) = -(\nabla_y n)^T \in T_v(G.v).$$

Concluíndo que $A_n(\mathbb{Y}) \subset \mathbb{Y}$.

Agora, seja $Y \in \mathfrak{g}$ tal que $Y.v \in \mathbb{Y}$ (Podendo ser o elemento neutro). Então o campo de Jacobi $\overline{J}_n(t)$ ao longo da geodésica $\gamma_n(t)$, induzido por Y, como feito acima, tem como condições iniciais, $\overline{J}_n(0) = Y.v$ e $\dot{\overline{J}}_n(0) = \nabla^{\perp}_{Y.v} n - A_n(Y.v)$ ambos em $\mathbb{V}^{\perp}$.

Reelembramos que se M é uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e $\rho > 0$ o raio de injetividade de p, para qualquer $v \in T_pM$, podemos definir $\mathcal{F}_v$ como a família de subespaços de T_pM tais que, para qualquer $W \in \mathcal{F}$, $v \in W$ e $exp_p(B_\rho(0) \cap W)$ é uma subvariedade totalmente geodésica de M onde é localmente simétrica. Pela o teorema de existencia e unicidade de campos de Jacobi,

$$\overline{J}_n(t) = Y.v + t(\nabla^\perp_{Y.v} n - A_n(Y.v)),$$

concluíndo que $\overline{J}_n(t)$ é ortogonal em $\mathbb{V}$.

Seja $X_1, ..., X_k$ elementos em $\mathfrak{g}$ tal que $\{X_1 v, ..., X_k v\}$ é uma base ortonormal que diagonaliza a restrição de A_N a $\mathbb{V}$. Assim $J^i_n(t) = (1 - t\lambda_i)X_i v$, é o campo de Jacobi relacionado a X_i, onde λ_i é o autovalor de A_n associado a $X_i v$, $i = 1, .., k$. Como λ_i é não nulo, temos que

$$g(J^i_n(1/\lambda_i), X_j v) = g(X_i.v - (1/\lambda_i)\lambda_i X_i v, X_j v) = 0, \forall i, j.$$

Assim tomando $Z \in \mathfrak{g}$ arbitrário, escreva $Z = X + Y$, onde X é a combinação linear de $X_1 v, ..., X_k v$ e $Y.v \in \mathbb{Y}$. Concluímos, disto obtemos que o campo de Jacobi induzido por Z ao longo de $\gamma_n(t)$, em $t = 1/\lambda_i$, é perpendicular a $X_i.v$. Como Z é arbitrário, temos que $X_i v \in N_{\gamma_n(1/\lambda_i)}(G.\gamma_n(1/\lambda_i)$ que é uma contradição a menos que $\mathbb{V} = \{0\}$. □

Lema 6.2.2. [6] Seja M uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e ρ o raio de injetividade em p. Assuma que para qualquer v em algum subconjunto denso Ω da bola Euclidiana $B_\rho(0) \subset T_pM$, a família $\mathcal{F}_v$ gera T_pM. Então a simetria geodésica s_p em p é uma isometria da bola geodésica $B_\rho(p)$.

Demonstração. Seja $v \in \Omega$, $W \in \mathcal{F}_v$. Pela definição de $\mathcal{F}_v$, temos que $N = exp_p(W \cap B_\rho(0))$ é uma subvariedade totalmente geodésica em M e portanto contém a geodésica $\gamma_v(t)$. Temos que o operador de Jacobi, $R(\cdot, \dot\gamma_v)\dot\gamma_v$ é auto-adjunto, de fato, utilizando as simetrias da curvatura Riemanniana:

$$\begin{aligned} g(R(X, \dot\gamma_v)\dot\gamma_v, Y) &= Rm(X, \dot\gamma_v, \dot\gamma_v, Y) \\ &= Rm(Y, \dot\gamma_v, X, \dot\gamma_v) \\ &= Rm(Y, \dot\gamma_v, \dot\gamma_v, X) \\ &= g(R(Y, \dot\gamma_v)\dot\gamma_v, X), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(N) \end{aligned}$$

Como N é simétrica, temos que o operador de Jacobi, diagonaliza, em um referencial paralelo ao longo da geodésica γ_v. Assim, para qualquer $w \in T_{\gamma_v}M$

$$\frac{d}{dt} g((s_p)_{*\gamma_v(1)}(exp(tw)), (s_p)_{*\gamma_v(1)}(exp(tw))) = 2g(D_t^2 exp(-tw), (s_p)_{*\gamma_v(1)}(exp(tw))),$$

pela equação de Jacobi, o primeiro termo irá se anular, concluindo o resultado já que Ω é denso em T_pM. □

6.3 Demonstração da Proposição 6.4

Antes de demonstrar necessitaremos de dois lemas:

Lema 6.3.1. [6] Seja $h_t : S \to M$, $|t| < \epsilon$, uma família de subvariedades totalmente geodésicas de uma variedade Riemanniana (M, g). Se o campo variacional

$$q \mapsto \frac{\partial}{\partial t} h_t(q)$$

for perpendicular a subvariedade S_t então $g_t : S_0 \to S_t$ é uma isometria, onde S_t é S com a métrica induzida por h_t.

Demonstração. De fato, se γ_w é uma geodésica de S_0 em q, temos

$$\frac{d}{dt}g((h_t)_{*q}(w),(h_t)_{*q}(w)) = \frac{\partial}{\partial t}g(\frac{\partial}{\partial s}_{s=0}h_t(\gamma_w(s)),\frac{\partial}{\partial s}_{s=0}h_t(\gamma_w)(s)) =$$

pela regra do produto temos

$$= 2g(\frac{D}{dt}\frac{\partial}{\partial s}_{s=0}h_t(\gamma_w(s)),(h_t)_{*q}w) =$$

assim pelo Lema de Simetria (olhar no capítulo 3),

$$= 2g(\frac{D}{ds}_{s=0}\frac{\partial}{\partial t}h_t(\gamma_w(s)),(h_t)_{*q}w) = *,$$

como por hipotese o campo $N_t : q \mapsto \frac{\partial}{\partial t}h_t(q)$ é sempre perpendicular a S_t, temos

$$\frac{D}{ds}_{s=0}\frac{\partial}{\partial t}h_t(\gamma_w(s)) = \frac{D}{ds}_{s=0}N_t(\gamma_w(s)) = -A_{N_t}(h_t)_{*q},$$

onde A denota o operador forma de S_t. Assim

$$* = -2g(A_{N_t}(h_t)_{*q}w,(h_t)_{*q}w) = 0.$$

Assim, $g((h_t)_{*q}(w),(h_t)_{*q}(w))$ não depende de t e como $h_0 : S_0 \to S_0$ é a identidade, concluíndo que $h_t : S_t \to S_0$ é uma isometria. □

Lema 6.3.2. [6] Seja M uma variedade Riemanniana com a propriedade de que para cada $p \in M$ toda transformação de holonomia (estrito) de T_pM estenda via o mapa exponencial para uma isometria local. Então M é localmente simétrico.

Demonstração. Primeiro, podemos assumir que o grupo de Holonomia $H(p) := Hol_p(g)$ age irredutivelmente em T_pM. Considere $\mathcal{K}$ a álgebra de Lie dos campos de Killing definidos em uma vizinhança de $p \in M$. Assim $\mathcal{K}.p$ será um subespaço de T_pM, dado $\tau \in H(p)$ temos que $\tau(\mathcal{K}.p) \subset \mathcal{K}.p$ (olhar no capítulo 5). Dado $q \in M$próximo o suficiente de p, temos que $H(q)$ não fixa p no seguinte sentido: seja $exp_q(V) = p$ então para todo τ em $H(q)$ então $exp_q(\tau(V)) \neq p$. Assim $\mathcal{K}.p$ não pode ser trivial, e como o grupo de Holonomia age irredutivelmente em T_pM temos que $\mathcal{K}.p = T_pM$ e portanto M é localmente um espaço homogêneo.

Tome $\mathcal{N}_p$ o normalizador em $\mathfrak{sl}(T_pM)$ da algebra de Lie $\mathfrak{h}_p$ do grupo de Holonomia $H(p)$ e como M é localmente homogêneo podemos considerar o mapa: $g : \mathcal{K} \to \mathcal{N}_p$ tal que

$$g(X) = \frac{d}{dt}_{t=0}\tau_t^{-1}(exp_p tX)_{*p},$$

onde τ_t denota o transporte paralelo ao longo da curva $exp(tX).p$ e deste que isometrias preservam holonomia $g(X) \in \mathcal{N}_p$.

Repare que

$$\frac{d}{dt}_{t=0}\tau_t^{-1}(exp(tX))_{*p} = (\nabla X)_p.$$

Se X for um campo de Killing em M tal que $X_p = 0$, então

$$\frac{d}{dt}_{t=0}(\phi_t^X)_{*p} = (\nabla X)_p$$

para todo t, onde ϕ_t^X é o fluxo uniparamétrico de X. Assim se $X \in \mathcal{K}_p$, então $g(X) = X$.

Agora se $h \in \mathfrak{h}_p$ temos que $h.p = 0$, portanto temos as seguintes inclusões $\mathfrak{h}_p \subset \mathcal{K}_p \subset \mathcal{N}_p \subset \mathfrak{so}(T_pM)$. Considere então as seguintes decomposições

$$\mathcal{N}_p = \mathfrak{h}_p \oplus (\mathfrak{h}_p)^\perp, \qquad \mathcal{N}_p = \mathcal{K}_p \oplus (\mathcal{L}_p)^\perp,$$

como $\mathfrak{h}_p$ age trivialmente em $(\mathfrak{h}_p)^\perp$ e portanto age trivialmente que $(\mathcal{L}_p)^\perp$. Concluíndo que $H(p)$ age trivialmente em $\mathcal{N}_p^\perp$.

Seja $\mathfrak{m} \simeq T_pM$ o subespaço complementar $Ad(H(p))$-invariante de $\mathcal{L}_p$ em $\mathcal{L}$. Tome $\overline{g} = g|_\mathfrak{m}$. Como $H(p)$ age irredutivelmente em $\mathfrak{m} \simeq T_pM$ e trivialmente em $\mathcal{K}_p^\perp$. Portanto $\overline{g} = 0$, concluíndo que $g(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}_p$. Assim para todo $v \in T_pM$ existe um único $X \in \mathcal{K}$ com $g(X) = 0$ e $X.p = v$. Assim o transporte paralelo ao longo da geodésica $exp(tX).p$ é dado por $(exp(tX))_*$. Tomando a vizinhança normal em p, por hipotese concluímos que ela será simétrica. Portanto M é localmente simétrica. $\square$

O resultado que queremos demonstrar tem o seguinte enunciado:

Proposição 6.3.3. [6] Seja M uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e tome ρ o raio de injetividade em p. Assuma que o grupo de Holonomia, $H = Hol_p(g)$, de M no ponto p age irredutivelmente em T_pM. Considere, para cada $v \in T_pM$, $N_v(H \cdot v)$ o espaço normal em v da órbita $H \cdot v$ em T_pM. Denote $N^v = exp_p(N_v(H \cdot v) \cap B_\rho(0))$. Então, para todo $v \in T_pM$, $v \neq 0$,

1. N^v é uma subvariedade geodésica de M. Além disso, N^v divide, localmente a geodésica γ_v e o grupo de Holonomia $Hol_v(N^v)$ está contido na imagem, sob uma representação slice, do subgrupo de isotropia conexo $(H_v)_0$;

2. O grupo de Holonomia normal $H^\perp = Hol^\perp(H \cdot v)$ de $H \cdot v$ em v age via isometrias em N^v de maneira natural (isto é, qualquer $g \in H^\perp$ é a diferencial de alguma simetria de N^v que fixa p).

3. N^v é localmente simétrico.

Demonstração.

1. Tome $\mathcal{R}$ a família dos tensores de curvaturas algébricas de T_pM, obtido via pull-back em p, por meio de transportes paralelos ao longo de curvas arbitrárias γ começando em p, do tensor de curvatura $R_{\gamma(1)}$. Pelo teorema de Ambrose-Singer, $\mathcal{R}$ geram a álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ do grupo de Holonomia H. Agora, dado $n \in N_v(H.v)$ e $\overline{R} \in \mathcal{R}$, temos que

   $$0 = g(\overline{R}(X, Y)v, N),$$

   para todo $X, Y \in T_pM$, concluíndo que $g(\mathfrak{h}.v, N) = 0$. Por outro lado, de $N \in T_pM$ tal que $g(\mathfrak{h}.v, N) = \{0\}$, assim para cada $x \in T_v(H.v)$ tome $X \in \mathfrak{h}$ tal que $X.v = x$, assim $g(x, N) = g(X.v, N) = 0$. Portanto $N \in N_v(H.v)$ se, e somente se, $g(\mathfrak{h}.v, N) = 0$. Concluímos também, que se $N \in N_v(H.v)$ temos que $g(\overline{R}(v, N)X, Y) = 0$ para todo $X, Y \in T_pM$ e portanto $\overline{R}(v, N) = 0$, para todo $\overline{R} \in \mathcal{R}$.

   Agora, dado $N, \nu \in N_v(H.v)$ e $\overline{R} \in \mathcal{R}$, pela identidade de Bianchi temos:

   $$\overline{R}(N, \nu)v + \overline{R}(\nu, v)N + \overline{R}(v, N)\nu = 0$$

   e sabendo que $\overline{R}(\nu, v) = 0$ e $\overline{R}(v, N) = 0$ obtemos $\overline{R}(N, \nu)v = 0$. Assim $\overline{R}(N, \nu) \in \mathfrak{h}_v$ e dado $\mu \in N_v(H.v)$ temos que $g(\mathfrak{h}.v, \overline{R}(N, \nu)\mu) = 0$ concluíndo que $\overline{R}(N, \nu)N_v(H.v) \subset N_v(H.v)$. Como N e ν são arbitrários, mostramos que

   $$\overline{R}(N_v(H.v), N_v(H.v))N_v(H.v) \subset N_v(H.v),$$

para todo $\overline{R} \in \mathcal{R}$.

Assim, devida a definição de $\mathcal{R}$, dado uma geodésica γ tal que $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) \in N_v(H.v) \cap B_\rho(0)$, temos que se R for o tensor de curvatura em $\gamma(1)$ preserva o transporte paralelo de V ao longo de γ de p até $\gamma(1)$. Pelo teorema de existência de subvariedades totalmente geodésica de Cartan (olhar no capítulo 5), temos que existe uma subvariedade totalmente geodésica P em M tal que $T_pP = N_v(H.v)$, isto implica que N^v é totalmente geodésica.

Considere agora $\mathcal{R}^v$ a subfamília de $\mathcal{R}$ obtida pelo pull-back para p dos tensores de curvaturas de M, utilizando transportes paralelos ao longo de curvas contidas em N^v. Assim, utilizando o teorema de Ambrose-Singer para N^v, temos que a álgebra de Lie $\mathfrak{h}^v$ do grupo de holonomia $H^v := Hol(N^v, g)$, é gerado por $\mathcal{R}^v$ e como $N_v(G.v) = T_p(N^v)$ temos: Para todo $N, \nu \in T_p(N^v)$, $\overline{R}(N, \nu)v = 0$ implicando que $\mathfrak{h}^v$ está contida em $\mathfrak{h}_v$ (subalgebra de isotropia) de $\mathfrak{h}$ em v via representação slice, portanto γ_v é ortogonal a N^v.

2. Considere $\nabla^\perp$ a conexão normal da órbita $H.v$ definido como $\nabla^\perp_X N = (\nabla_X N)^\perp$ (olhar no capítulo 5). Seja $v \in T_pM$, $\gamma : [0,1] \to H.v$ com $\gamma(0) = v$ e $\tau_t^\perp$ o transporte paralelo, em respeito a conexão normal, ao longo da curva $\gamma|_{[0,t]}$.

   Defina $g_t : N_v(H.v) \cap B_\rho(0) \to M$, tal que $g_t = exp_p \circ \tau_t^\perp$. Seja $w \in g_t(N_vH.v \cap B_\rho(0))$ e seja γ_w a geodésica em relação a M, assim devido ao item anterior, $(\tau_t^\perp){-1}(\gamma_w)$ será uma geodésica em N^v e portanto γ_w estará contida localmente na imagem de g_t.Isto implica que g_t é uma família de subvariedades totalmente geodésicas. Para concluir este item, desejamos utilizar o lema 6.3.1, para issso temos que mostrar que o campo $X_t = \frac{\partial}{\partial t} g_t$ é sempre perpendicular a subvariedade $exp_p(\tau_t^\perp(N_v(H.v)) \cap B_\rho(0))$.

   Primeiro, tomando $X_0(sN)$ onde $N \in N_v(H.v) \cap B_\rho(0)$, como X_0 é uma campo variacional de uma variação de geodésicas, $X_0(sN)$ quando restrido a geodésica $\gamma_N(s)$ é um campo de Jacobi. Como fizemos anteriormente, suas condições iniciais são

$$X_0(0) = 0,$$

$$\dot{X}_0(0) = \nabla_0^\perp N - A_N(\dot{\gamma}(0)) = -A_N(\dot{\gamma(0)}),$$

   onde A denota o operador forma de $H.v$. Assim, como $X_0(0)$ e $\dot{X}_0(0)$ estão em $T_v(H.v)$, concluímos que o campo de Jacobi $X_0(sN)$ é sempre perpendiculares a $T_p(N^v)$ (olhar no capítulo 3). Como N é arbitrário, concluímos que X_0 é sempre perpendicular a N^v. Portanto, pelo lema 6.3.1,

$$g_0 : N^v \to N^v$$

   é uma isometria, concluíndo que se $\tau_0^\perp \in H^\perp$, então $exp \circ \tau^\perp$ é uma isometria.

3. Dado $v \in T_pM$, considere $\gamma : [0,1] \to N^v$, tal que $\gamma(0) = p$ e denote $\gamma(1) = q$. Como o transporte paralelo $\tau_\gamma : T_pM \to T_qM$ é uma isometria, temos que τ_γ mapeia isométricamente de $H.v$ em $H(q).(\tau_\gamma(v))$ e portanto leva o espaço normal de $H.v$ no espaço normal $H(q)(\tau_\gamma(v))$. Assim a imagem de $\tau_\gamma|_{T_pN^v}$ será $T_qN^{\tau_\gamma(v)}$. Pelo item 1, N^v e $N^{\tau_\gamma(v)}$ são totalmente geodésicas, e portanto $T_qN^v = T_qN^{\tau_\gamma(v)}$. Portanto, para cada transformação de holonomia de N^v em q extende via exponência, para uma isometria local. Aplicando o Lema 6.3.2, N^v é localmente simétrica.

□

6.4 A Lista de Berger

Pensando em classificar todas as possibilidades do grupo de Holonomia Riemanniana de variedades simplesmente conexas, separamos em duas partes: Classificação para variedades localmente simétricas e para variedades não-simétricas.

Devido ao resultado, 6.4.1:

Proposição 6.4.1. ([8],p.51) Seja (M, g) uma variedade Riemanniana simétrica e simplesmente conexa. Então a métrica g é completa. Seja G o grupo de isometrias de (M, g) gerado por elementos da forma $s_q \circ s_p$ para $p, q \in M$. Então G é um grupo de Lie conexo agindo transitivamente em M. Escolha $p \in M$ e seja H o subgrupo de isotropia de p, isto é $hp = p, \forall h \in H$. Então H é um subgrupo de Lie de G que é conexo e fechado e M é difeomorfo a G/H.

Assim, o problema de classificar as variedades simétricas e simplesmente conexas, recai a um problema de teoria de Grupos de Lie. Este problema foi resolvido por E. Cartan em 1926, dando uma lista completa de todas as variedades simétricas e simplesmente conexas. A demonstração de Cartan pode ser encontrado em Helgason [18] e a lista completa pode ser encontrada em Besse [1].

Portanto os grupos de Holonomia de variedades Riemannianas simétricas são encontrados. Ou seja, a classificação dado por Cartan, implica na classificação dos grupos de Holonomia de variedades Riemannianas simétricas.

Agora, para o caso cujo a variedade Riemanniana não-simétrica, podemos utilizar o Teorema da Holonomia de Berger 6.1.1, para concluir a classificação dos possíveis grupos de Holonomia. Em Besse [1] encontra-se a seguinte tabela:

Grupo de Lie G	Esfera S^p	Subgrupo de Isotropia K
$SO(n)$	S^{n-1}	$SO(n-1)$
$U(n)$	S^{2n-1}	$U(n-1)$
$SU(n)$	S^{2n-1}	$SU(n-1)$
$Sp(n)Sp(1)$	S^{4n-1}	$Sp(n-1)Sp(1)$
$Sp(n)U(1)$	S^{4n-1}	$Sp(n-1)U(1)$
$Sp(n)$	S^{4n-1}	$Sp(n-1)$
G_2	S^6	$SU(3)$
$Spin(7)$	S^7	G_2
$Spin(9)$	S^{15}	$Spin(7)$

Onde a ação do grupo de Lie sobre a sua correspondente esfera S^p é obtida via uma representação linear de G em $\mathbb{R}^{p+1}$, tal que G age transitivamente na esfera unitária de $\mathbb{R}^{p+1}$. Na lista, $O(n)$ é o grupo dos automorfismos de $\mathbb{R}^n$, $U(m)$ é o grupo de automorfismos de $\mathbb{C}^m$ e $Sp(m)Sp(1)$ é o grupo de automorfismos de $\mathbb{H}^m$ (quatérnios), todos eles preservando a métrica. $SO(n)$, $SU(m)$ e $Sp(m)$ são os subgrupos de de $O(n), U(m)$ e $Sp(m)Sp(1)$ com o determinante igual a 1 em um certo 'sentido'.G_2 é o grupo dos automorfismos de $\mathbb{O}$ (octonos), de 'determinante igual a 1' e $Spin(m)$ é o duplo recobrimento do grupo $SO(n)$.

Assim por 6.1.1, temos que a lista de possíveis grupos de Holonomia de variedades não-simétricas estaria contida na tabela acima. Analisando os possíveis casos para o grupo de Holonomia, chega-se no seguinte resultado conhecido como a lista de Berger:

Teorema 6.4.2. Suponha que (M, g) é uma variedade Riemanniana, simplesmente conexa, não-simétrica, irredutível de dimensão n. Então só ocorre um dos seguintes casos:

1. $Hol(g) = SO(n)$,

2. $n = 2m$ com $m \geq 2$, e $Hol(g) = U(m)$ em $SO(2m)$,

3. $n = 2m$ com $m \geq 2$, e $Hol(g) = SU(m)$ em $SO(2m)$,

4. $n = 4m$ com $m \geq 2$, e $Hol(g) = Sp(m)$ em $SO(4m)$,

5. $n = 4m$ com $m \geq 2$, e $Hol(g) = Sp(m)Sp(1)$ em $SO(4m)$,

6. $n = 7$ e $Hol(g) = G_2$ em $SO(7)$,

7. $n = 8$ e $Hol(g) = Spin(7)$ em $SO(8)$.

Na lista de Berger:

- As métricas g tais que $Hol(g) \subset U(m)$ são chamadas de métricas Kähler;
- As métricas g tais que $Hol(g) \subset SU(m)$ são chamadas de métricas Calabi-You;
- As métricas g tais que $Hol(g) \subset Sp(m)$ são chamadas de métricas hyperkähler;
- As métricas g tais que $Hol(g) \subset Sp(m)Sp(1)$ para $m \geq 2$, são chamadas de métricas quaternionicas Kähler;
- O grupos de holonomia G_2 e $Spin(7)$ são chamados de grupos de holonomia excepcional.

Maiores detalhes sobre cada caso pode ser encontrado em *Compact Manifolds with Special Holonomy*, [8].

Referências Bibliográficas

[1] Besse A., *Einstein manifolds*, (1987).

[2] Knapp A.W., *Lie groups beyond an introduction*, (2004).

[3] Olmos C. Berndt J., Console S., *Submanifolds and holonomy*, (2003).

[4] Crittenden R.J. Bishop R.L., *Geometry of manifolds*, (2000).

[5] Olmos C., *The normal holonomy group*, (1990).

[6] ______, *A geometric proof of the berger holonomy theorem*, (2005).

[7] Huybrechts D., *Complex geometry, an introduction*, (2005).

[8] Joyce D., *Compact manifolds with special holonomy*, (2000).

[9] Warner F.W., *Foundations of differential manifolds and lie groups*, (1971).

[10] Bredon G.E., *Introduction to compact transformation groups*, (1972).

[11] Pollack A. Guillemin V., *Differential topology*, (1974).

[12] Dadok J., *Polar coordinates induced by actions of compact lie groups*, (1985).

[13] Jost J., *Riemannian geometry and geometric analysis*, (1995).

[14] Woll J.W.Jr., *Functions of several variables*, (1966).

[15] Nomizu K. Kobayashi S., *Foundations of differential geometry, vol. 1*, (1963).

[16] Lee J. M., *Riemannian manifolds: An introduction to curvature*, (1997).

[17] Boubaki N., *Varietés differentielles et analytiques*, (1967).

[18] Helgason S., *Differential geometry and symmetric spaces*, (1962).

[19] Sakai T., *Riemannian geometry*, (1996).

[20] Dieck T.T., *Transformation group*, (1987).