
Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática

SEMIFLUXOS EM FIBRADOS FLAG E SEUS SEMIGRUPOS DE SOMBREAMENTO

Mauro Moraes Alves Patrão

Doutorado em Matemática - Campinas - São Paulo

Orientador: Prof. Dr. **Luiz Antonio Barrera San Martin**

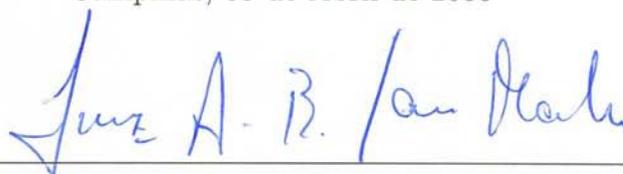
Co-orientador: Prof. Dr. **Marco Antonio Teixeira**

Este trabalho contou com o financiamento da Fapesp (Processo : 02/13839-4)

Semifluxos em Fibrados Flag e seus Semigrupos de Sombreamento

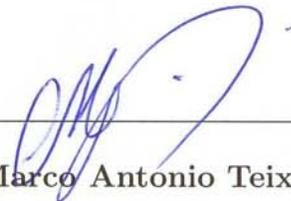
Este exemplar corresponde à redação final da tese de doutorado em matemática devidamente corrigida e defendida por **Mauro Moraes Alves Patrão** aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 05 de Abril de 2006



Prof. Dr. **Luiz Antonio Barrera San Martin**

Orientador



Prof. Dr. **Marco Antonio Teixeira**

Co-orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

Prof. Dr. Marcelo Miranda Viana da Silva

Prof. Dr. Daniel Victor Tausk

Prof. Dr. Carlos José Braga Barros

Prof. Dr. Pedro José Catuogno

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para a obtenção do título de **Doutor em Matemática**

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Patrão, Mauro Moraes Alves

P274s Semifluxos em fibrados flag e seus semigrupos de sombreamento / Mauro Moraes Alves Patrão -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientadores : Luiz Antonio Barrera San Martin; Marco Antonio Teixeira
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Sistemas dinâmicos. 2. Lie, Grupos de. 3. Fibrados (Matemática).
4. Semigrupos. 5. Espaços homogêneos. I. San Martin, Luiz Antonio Barrera. II. Teixeira, Marco Antonio. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Semiflows on flag bundles and their shadowing semigroups

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Dynamical systems. 2. Lie groups. 3. Fiber bundles. 4. Semigroups. 5. Homogeneous spaces.

Área de concentração: Geometria e Topologia / Sistemas Dinâmicos

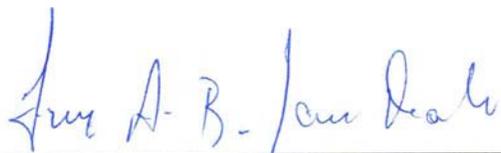
Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Marcelo Miranda Viana da Silva (IMPA)
Prof. Dr. Daniel Victor Tausk (IME-USP)
Prof. Dr. Carlos José Braga Barros (UEM-Maringá)
Prof. Dr. Pedro José Catuogno (IMECC-UNICAMP)

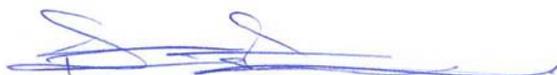
Data da defesa: 05/04/2006

Tese de Doutorado defendida em 05 de abril de 2006 e aprovada

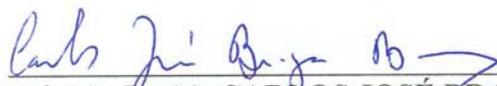
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



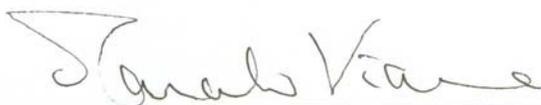
Prof. (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN



Prof. (a). Dr (a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO



Prof. (a). Dr (a). CARLOS JOSÉ BRAGA BARROS



Prof. (a). Dr (a). MARCELO MIRANDA VIANA DA SILVA



Prof. (a) Dr. (a) DANIEL VICTOR TAUSK

Since Hamiltonian flows give rise to flows on other bundles, say the bundle of Lagrangian planes, it might be a sensible problem to carry out the analogue of Selgrade's work with more general fibers and groups.

¹ Charles Conley, página 83 de [9] (1978).

E, embora a Lógica contenha, com efeito, uma porção de preceitos verdadeiros e muito bons, há todavia tantos outros misturados de permeio que são nocivos ou supérfluos (...) Com respeito à Análise dos Antigos (Geometria) e à Álgebra dos modernos, além de se estenderem apenas a matérias muito abstratas, e de não parecerem de nenhuma utilidade, a primeira permanece tão adstrita à consideração das figuras que não pode exercitar o entendimento sem fatigar muito a imaginação. Ademais, esteve-se de tal forma sujeito, na segunda, a certas regras e cifras, que ela se tornou uma arte confusa e obscura que embarça o espírito, ao invés de uma ciência que o cultiva. Por esta razão, pensei ser necessário procurar algum outro método que, reunindo as vantagens desses três, fosse isento de seus defeitos.

René Descartes, Discurso do Método, Segunda Parte (1637).

¹Minha tradução: “Como os fluxos Hamiltonianos dão origem a fluxos em outros fibrados, digamos o fibrado de planos Lagrangeanos, seria um problema sensato realizar o análogo do trabalho de Selgrade para fibras e grupos mais gerais.”

*Este trabalho é dedicado à minha mãe,
que é daquelas pessoas no mundo que,
sem deixar serem levadas pelo cinismo,
aprendem e ensinam a amar.*

Resumo

A presente tese fornece uma abordagem que estabelece conexões entre dinâmica e teoria de semigrupos. Esta abordagem, denominada de teoria de semigrupos de sombreamento, é aplicada com sucesso no estudo de semifluxos de endomorfismos de uma classes bastante ampla de fibrados, que inclui a classe dos fibrados projetivos. Os semifluxos de endomorfismos de um fibrado generalizam, por meio da linguagem geométrica de fibrados, os semifluxos de produto cruzado associados a um cociclo, definidos em fibrados triviais.

Abstract

The present thesis provides an approach which establishes connections between dynamics and the theory of semigroup. This approach, named theory of shadowing semigroups, is successfully applied to study semiflows of endomorphisms of a wide class of fiber bundles, which includes the class of the projective bundles. The semiflows of endomorphisms of a fiber bundle generalize, by using the geometric concept of fiber bundle, the skew-product semiflows associated to a cocycle, which are defined in trivial bundles.

Agradecimentos

- Agradeço em primeiro lugar ao meu grande amigo Lucas Seco, pelas conversas sobre matemática, sobre a vida e pela sua enorme ajuda em todo o processo. Espero que escrevamos logo aquele livrinho sobre variedades flag reais.
- Agradeço à minha família: à minha mãe, Isa, pelas inúmeras ajudas ao longo da vida e pelas conversas sobre o mundo, sobre literatura etc.; ao meu pai, João, pelos muitos momentos de apoio, os vários “helps”, e pelas conversas sobre ciência, quando eu era menor; à minha irmã, Ana Luiza; ao meu irmão, Rafael e à Nilda.
- Agradeço ao meu orientador, Luiz San Martin. Acima de tudo, foi ele quem me mostrou que é de fato possível, mesmo num país com mentalidade ainda tão colonizada quanto o nosso, fazer pesquisa matemática com independência e autonomia.
- Agradeço aos outros membros da banca da minha defesa de tese.
- Agradeço ao amigo Laércio, pelos vários meses de luta árdua conjunta estudando “aquele artigo”... Os apêndices desta tese foram feitos pensando em você, no Lucas e em todos os nossos colegas que precisaram ou vão precisar de uma introdução à teoria de Lie semi-simples real.
- Agradeço ao amigão, Makmiller, pelas conversas bacanas, em vários “níveis”... Mak, toda sorte do mundo para você no Canadá. Agradeço também ao meu amigo, Pablo, pelas ajudas em momentos decisivos da minha vida em Barão Geraldo e pelos muitos momentos agradáveis de convivência.
- Agradeço ao o nosso tutor “paizão” do Pet-Mat-UnB. Valeu, Célius!
- Agradeço ao pessoal da secretaria de Pós: ao Edinaldo, à Tânia e a Cidinha, pelo seu trabalho e, em especial, pela ajuda com a burocracia nesse finalzinho...
- Agradeço à Capes e, principalmente, à Fapesp pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.
- Finalmente, agradeço a quem realmente me financia, o povo que trabalha e trabalha duro neste país injusto e desigual: aos funcionários do bandeirão, da limpeza etc., que não conheço pessoalmente, mas cujo esforço permitem a nós que pesquisamos comer, beber, viver em ambientes agradáveis etc..

Sumário

0	Introdução	3
0.1	Estrutura da Tese	8
1	Semifluxos em Espaços Topológicos	17
1.1	Decomposições de Morse	17
1.1.1	Atratores e Repulsores	20
1.1.2	Funções de Lyapunov	24
1.2	Transitividade por Cadeias	25
1.2.1	Transitividade por Cadeias Generalizada	25
1.2.2	Semifluxos em Espaços Hausdorff Compactos	28
1.2.3	Transitividade por Cadeias e Decomposições de Morse	31
2	Semigrupos e Semifluxos	33
2.1	Semigrupos de Aplicações Contínuas	33
2.1.1	Relações Induzidas por Semigrupos	34
2.1.2	Conjuntos de Controle	35
2.1.3	Conjuntos de Controle Invariantes	37
2.2	Semigrupos de Sombreamento	40
2.2.1	Semigrupos e Transitividade por Cadeias	42
3	Conjuntos de Controle em Flags	45
3.1	Objetos Canônicos e Conjugações	45
3.2	Variedades Flag Generalizadas	50
3.2.1	Decomposições dos Subgrupos Parabólicos	50
3.2.2	As Fibrações entre os Flags	54
3.3	Conjuntos de Controle e Grupo de Weyl	58
3.3.1	Pontos Fixos de Tipo w	58
3.3.2	Caracterização Algébrica no Flag Maximal	59
3.3.3	Conjuntos de Controle nos Flags Parciais	64
3.3.4	Tipo Parabólico de Semigrupos	66
3.3.5	Ordem, Número e Domínios de Atração	68
3.3.6	Semigrupos em Grupos de Lie $*$ -Redutíveis	70

4	Conjuntos de Controle em Fibrados	71
4.1	Endomorfismos de Fibrados Topológicos	71
4.1.1	Projeção de Classes	72
4.1.2	Semigrupos do Grupo Estrutural	75
4.1.3	Interseção com Fibras	76
4.1.4	Conjuntos de Controle Invariantes	79
4.2	Endomorfismos de Fibrados Flag	81
4.2.1	Grupo de Weyl e Conjuntos de Controle	82
4.2.2	Exemplos de Fibrados Flag	86
5	Semifluxos em Fibrados Topológicos	89
5.1	Semifluxos de Endomorfismos em Fibrados	89
5.1.1	Família Admissível de Coberturas	91
5.1.2	Transitividade Local e Grupos Metrizáveis	93
5.1.3	Semigrupos de Sombreamento em Fibrados	97
6	Semifluxos em Fibrados Flag	101
6.1	Componentes Transitivas por Cadeias	101
6.1.1	Descrição Algébrica das Interseções com Fibras	104
6.1.2	Exemplos de Semifluxos e Aplicações	110
A	Teoria de Lie Semi-Simples Real	117
A.1	Decomposições de Cartan e de Iwasawa	118
A.1.1	Decomposição de Iwasawa Global	126
A.2	Subgrupos e Subálgebras	127
A.2.1	Álgebras Simples, Semi-simples e Redutíveis	127
A.2.2	Subálgebras e Subgrupos Semi-simples	128
A.2.3	Subálgebras e Subgrupos Parabólicos	133
B	Sistema de Raízes e Grupo de Weyl	139
B.1	Decomposição em Espaços de Raízes	139
B.2	Sistema de Raízes e Grupo de Weyl	141
C	Fibrados e Espaços Homogêneos	147
C.1	Espaços Homogêneos e Grupos Quocientes	149
C.2	Fibrados Principais e Associados	151

Capítulo 0

Introdução

A presente tese trata da relação entre sistemas dinâmicos e teoria de ação de semigrupos. Desenvolve-se uma abordagem nova, denominada de teoria de semigrupos de sombreamento para o estudo de transitividade por cadeias no sentido de Conley. Esta teoria é aplicada aos semifluxos de endomorfismos de uma classes bastante ampla de fibrados. Essa classe inclui os fibrados projetivos associados a fibrados vetoriais e outros fibrados semelhantes como os fibrados Grassmannianos. Os semifluxos de endomorfismos de um fibrado generalizam, por meio da linguagem geométrica de fibrados, os semifluxos de produto cruzado associados a um cociclo, definidos em fibrados triviais.

O estudo qualitativo de sistemas dinâmicos e a análise algébrica e topológica da ação de semigrupos possuem origens e motivações relacionadas, mas não coincidentes. O primeiro surge do esgotamento dos métodos explícitos para a análise da dinâmica das soluções de equações diferenciais ordinárias, principalmente as que modelam fenômenos da mecânica clássica, como o problema dos três corpos. A segunda surge, por um lado, do desenvolvimento dos métodos topológicos da dinâmica qualitativa, especialmente no estudo da recorrência na compactificação de sistemas dinâmicos, por meio do conceito de semigrupo universal de Ellis [13]. Por outro lado, ela surge do estudo dos sistemas de controle, que são generalizações, em certo sentido, dos sistemas dinâmicos. A teoria da ação de semigrupos está presente na teoria dos sistemas de controle devido aos chamados semigrupos de controle, que são os análogos dos fluxos associados a equações diferenciais ordinárias. As relações entre dinâmica e teoria de controle foram exploradas recentemente, através da introdução do denominado fluxo de controle (c.f. [7]).

A seguir é fornecido um panorama dos principais conceitos e resultados que constituem a presente tese.

Teoria de Conley

O ponto de vista dinâmico é analisado no contexto da teoria de Conley (c.f [9]). Um dos conceitos centrais desta teoria é a decomposição de Morse, que é uma decomposição de um sistema dinâmico em subsistemas, denominados componentes de Morse. Estas componentes são conectadas entre si através de órbitas que percorrem níveis decrescentes de

alguma função de Lyapunov. Cada componente de Morse pode a princípio ser decomposta em outras sub-componentes, que formam uma nova decomposição de Morse do sistema inicial. Procura-se, portanto, por uma decomposição de Morse tal que nenhuma das suas componentes possa mais ser decomposta. Esta decomposição é denominada decomposição de Morse minimal, pois suas componentes estão contidas nas componentes de qualquer outra decomposição de Morse.

No caso em que o espaço de fase é compacto, existe um maneira de caracterizar a existência e as componentes da decomposição de Morse minimal utilizando-se o conceito de recorrência por cadeias. Esta recorrência é baseada no conceito de cadeias, que é um enfraquecimento do conceito de órbita, onde é permitido dar saltos controlados após ser transportado pelo semifluxo por tempos pré-fixados. O conjunto recorrente por cadeias é particionado em componentes transitivas por cadeias, que são subconjuntos maximais, onde é possível ir de um ponto a outro do conjunto através de cadeias com saltos arbitrariamente pequenos e tempos pré-fixados arbitrariamente grandes. A decomposição de Morse minimal existe se, e somente se, o número de componentes transitivas por cadeias é finito e, neste caso, as componentes de Morse são precisamente as componentes transitivas por cadeias.

Estes resultados são provados originalmente em [9], para fluxos de tempo contínuo em espaço Hausdorff compactos e, posteriormente, para semifluxos em espaços métricos compactos (c.f. [30]).

Eles são estendidos aqui para semifluxos de tempo discreto ou contínuo em espaços Hausdorff compactos. Além disto, é desenvolvida uma teoria mais abstrata de transitividade por cadeias, que inclui as versões mais concretas como casos particulares. A razão para se desenvolver esta abordagem mais abstrata se encontra no estudo de semifluxos de endomorfismos de fibrados.

Teoria de Semigrupos de Sombreamento

A ligação entre dinâmica e teoria de semigrupos é realizada através dos denominados semigrupos de sombreamento de um semifluxo, que são semigrupos locais de aplicações contínuas (onde o produto é definido, sempre que possível, pela composta de aplicações) tais que as cadeias do semifluxo são realizadas pela ação dos elementos destes semigrupos. Os subconjuntos maximais onde o semigrupo age transitivamente são denominados conjuntos de controle. As componentes transitivas por cadeias são caracterizadas então como interseções de conjuntos de controle dos semigrupos de sombreamento do semifluxo.

Os semigrupos de sombreamento foram apresentados pela primeira vez em [3], onde foram utilizados no estudo de sistemas de controle. Eles foram aplicados, posteriormente, em [5], na análise de fluxos de automorfismos de fibrados. A teoria desenvolvida aqui generaliza as anteriores em dois aspectos:

- (1) é de natureza puramente topológica, não necessitando, para a sua definição, do contexto de espaços métricos empregado em [5] e
- (2) os semigrupos locais considerados são constituídos de aplicações contínuas, ao invés de homeomorfismos locais como em [5].

A utilização de semigrupos locais de homeomorfismos locais limitava o uso da teoria de semigrupos de sobreposição a fluxos em algumas classes de espaços métricos, tais como variedades Riemannianas compactas e subconjuntos abertos de espaços de Fréchet. A presente abordagem estende a aplicação da teoria a semifluxos num espaço topológico paracompacto qualquer.

Semifluxos em Fibrados

O sucesso da aplicação da teoria de semigrupos de sobreposição ao estudo da transitividade por cadeias de semifluxos de endomorfismos de fibrados depende de uma boa teoria de semigrupos de endomorfismos locais de fibrados. O princípio básico para o desenvolvimento de uma teoria deste tipo é decompor o problema em duas partes: (1) a ação do semigrupo induzido no espaço base e (2) a ação do semigrupo nas fibras.

No caso da classe dos denominados fibrados flag, o problema é reduzido ao estudo da ação de semigrupos abertos na fibra típica. Isto permite utilizar a teoria de San Martin, sobre a ação de semigrupos abertos em grupos de Lie semi-simples nas suas variedades flag. Com esta teoria pode-se caracterizar as componentes transitivas por cadeias de um semifluxo de endomorfismos de um fibrado flag. Para se obter esta redução do problema ao estudo do que acontece nas fibras é necessário supor que o semifluxo induzido na base X seja transitivo por cadeias, hipótese equivalente à transitividade dos semigrupos de sobreposição induzidos na base.

Um fibrado flag $\mathbb{E}_\Theta \rightarrow X$ é um fibrado, cuja fibra típica é uma variedade flag generalizada \mathbb{F}_Θ , associado a um fibrado principal, cujo grupo estrutural G é um grupo de Lie redutível com componente semi-simples conexa. O fibrado projetivo associado a um fibrado das bases é um exemplo de fibrado flag. De fato, sua fibra típica é o espaço projetivo, uma variedade flag associada ao grupo linear geral $Gl(\mathbb{R}^n)$, que é um grupo de Lie redutível cuja componente semi-simples é o grupo unimodular $Sl(\mathbb{R}^n)$. De maneira mais geral, o fibrado Grassmanniano k -dimensional, cuja fibra típica é a Grassmanniana k -dimensional, é um exemplo de fibrado flag. Existem também exemplos naturais de fibrados flag associados a fibrados principais cujo grupo estrutural não é o grupo linear geral. No contexto da geometria simplética e da dinâmica Hamiltoniana, o fibrado dos subespaços Lagrangeanos de uma dada variedade simplética é um fibrado flag associado a um fibrado principal, cujo grupo estrutural é o grupo simplético.

As componentes transitivas por cadeias de um semifluxo de endomorfismos σ^Θ de um fibrado flag $\mathbb{E}_\Theta \rightarrow X$ projetam-se sobrejetivamente na base e são parametrizadas pelo denominado grupo de Weyl W de uma álgebra de Lie semi-simples.

Esta parametrização pelo grupo de Weyl fornece a ordem dinâmica e o número de componentes transitivas por cadeias em função do denominado tipo parabólico do semifluxo $\Theta(\sigma)$, que é definido a partir do conceito de tipo parabólico de um semigrupo introduzido em [34]. No fibrado flag maximal $\mathbb{E} \rightarrow X$, a ordem entre as componentes transitivas por cadeias é determinada algebricamente pela ordem de Bruhat-Chevalley induzida no quociente $W(\sigma) \backslash W$, onde $W(\sigma)$ é o subgrupo parabólico de tipo $\Theta(\sigma)$, denominado subgrupo característico de σ . Em geral, no fibrado flag $\mathbb{E}_\Theta \rightarrow X$, as componentes transitivas estão

em bijeção com o quociente duplo $W(\sigma)\backslash W/W_\Theta$, onde W_Θ é o subgrupo parabólico de tipo Θ . No caso compacto, isto implica na existência da decomposição de Morse minimal de σ^Θ , uma vez que W é um grupo finito.

Outro resultado de grande relevância é a caracterização da interseção de cada componente transitiva por cadeias com as fibras de \mathbb{E}_Θ . Sob hipóteses bastante gerais, que incluem os fluxos de automorfismos de fibrados flag cuja base é compacta, tem-se que cada uma destas interseções é uma variedade algébrica.

De maneira mais precisa, identificando-se a fibra \mathbb{E}_Θ sobre $x \in X$ com a fibra típica flag \mathbb{F}_Θ e denotando-se por $\mathcal{M}_\Theta(w)$ a componente transitiva por cadeias parametrizada por $w \in W$, a interseção de $\mathcal{M}_\Theta(w)$ com a fibra \mathbb{E}_Θ sobre x é dada pelo conjunto de pontos fixos de um elemento $h_x \in G$, que varia de maneira contínua com x e pertence a uma classe de conjugação determinada por $\Theta(\sigma)$, que independe do ponto x . Desta maneira, cada $\mathcal{M}_\Theta(w)$ é uma espécie de subfibrado do fibrado flag $\mathbb{E}_\Theta \rightarrow X$.

Teorema de Selgrade e Aplicações

No caso de um fluxo induzido no fibrado projetivo por um fluxo linear, cujo fluxo induzido na base é transitivo por cadeias, o resultado mencionado acima implica que as componentes transitivas por cadeias são projeções de subfibrados vetoriais. No caso em que a base é compacta, este é o enunciado do teorema de Selgrade demonstrado em [40], o que mostra que a teoria aqui desenvolvida é a resposta a um problema colocado por Conley em [9], página 83, e que é a primeira frase da epígrafe da presente tese. Deve-se observar que a demonstração original do teorema de Selgrade caracteriza as componentes de Morse minimais a partir dos pares atrator-repulsor associados, enquanto a abordagem desenvolvida nesta tese caracteriza as componentes transitivas por cadeias, que coincidem com as componentes de Morse minimais.

Além do teorema de Selgrade, este resultado generaliza também outros resultados anteriores sobre fluxos lineares induzidos em fibrados projetivos, que vem sendo estudados de maneira extensiva na literatura (c.f. Colonius-Kliemann [8], Conley [9], Sacker-Sell [31], Salamon-Zehnder [32], Selgrade [40], e referências presentes nestes artigos).

É importante ressaltar que estes resultados foram demonstrados previamente em [5] para fluxos de tempo contínuo, sob algumas hipóteses restritivas sobre a classe de espaços que poderiam servir como base do fibrado. Apesar destas hipóteses restritivas permitirem que variedades Riemannianas compactas e subconjuntos abertos de espaços de Fréchet fossem usadas como base dos fibrados considerados, a classe dos espaços base permitidos não incluía os espaços métricos em geral. Não era claro, por exemplo, se a teoria poderia ser aplicada no estudo dos denominados fluxos de controle (c.f. [7]). Esta tese melhora os resultados de [5] nos seguintes aspectos:

- (1) o espaço base X pode ser qualquer espaço topológico paracompacto, incluindo em particular todos os espaços métricos,
- (2) consideram-se semifluxos de endomorfismos de fibrados e não apenas fluxos de automorfismos, como em [5] e

- (3) além dos sistemas dinâmicos de tempo contínuo considerados [5], os resultados também se aplicam aos de tempo discreto.

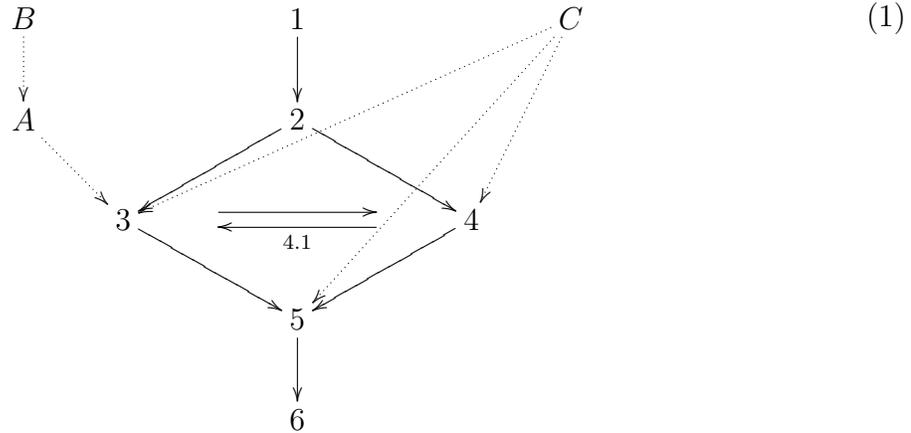
Neste ponto é conveniente observar que as variedades flag mencionadas anteriormente sempre podem ser vistas como subvariedades do espaço projetivo. Como tal os fibrados flag podem ser considerados como subfibrados de fibrados projetivos de tal forma que os fluxos nos fibrados flag são restrições de fluxos lineares em fibrados projetivos. Surge então a questão de se aplicar o teorema de Selgrade na análise dos fluxos aqui considerados. Isso apresenta duas dificuldades essenciais. A primeira delas provém da relação entre os conjuntos transitivos por cadeias para um semifluxo e para suas restrições a subconjuntos invariantes. Essa relação nem sempre é direta. Outra dificuldade é que em geral as imersões das variedades flag nos espaços projetivos possuem codimensão alta, o que dificulta a análise geométrica (por exemplo, não é claro o que seria a interseção de um subespaço com uma variedade flag imersa). Essas observações estão na mesma direção dos comentários feitos por V. I. Arnold [2], página 26, sobre as teorias “irmãs”.

Espera-se que os resultados desenvolvidos nesta tese possam ser aplicados em áreas bastante diversas. Entre outros exemplos possíveis, destacam-se:

- (1) a partir dos resultados puramente topológicos, desenvolver uma teoria de recorrência por cadeias universal, análoga a teoria de recorrência universal de Ellis (c.f. [13]),
- (2) construir formas canônicas (no sentido de Jordan) de cociclos contínuos e, de maneira mais geral, de fluxos de automorfismos de fibrados, estendendo e refinando, para grupos de Lie mais gerais, os resultados existentes para cociclos ergódicos do grupo linear geral (c.f. [1]),
- (3) generalizar e refinar o índice de Maslov, levando-se em conta as informações da transitividade por cadeias (Teorema 6.16),
- (4) analisar os limites quasi-projetivos de seqüências em grupos de Lie, através da construção de um fluxo de produto cruzado adequado definido num fibrado flag trivial (subseção de exemplos no final do Capítulo 6) e
- (5) utilizando as informações dos aspectos esféricos (ou projetivos) apresentadas pela tese, analisar o comportamento radial dos sistemas dinâmicos, por meio de generalizações dos expoentes de Lyapunov e de Morse.

0.1 Estrutura da Tese

A tese está dividida em capítulos (1–6) e apêndices (A, B e C) e o diagrama seguinte explicita a ordem de precedência lógica entre estas partes.



A seguir será descrito o conteúdo de cada uma das partes, detalhando-se as principais contribuições da presente tese.

Capítulo 1 : Semifluxos em Espaços Topológicos

Neste capítulo, apresenta-se a teoria dinâmica de Conley, com ênfase nos conceitos de par atrator-repulsor e de transitividade por cadeias e suas relações com as decomposições de Morse, que são decomposições do semifluxo em sub-semifluxos conectados entre si por órbitas percorrendo níveis decrescentes de alguma função de Lyapunov.

A Seção 1.1 baseia-se em [27] e destina-se a generalizar para semifluxos de tempo discreto ou contínuo em espaços topológicos os resultados de [9], que são demonstrados para fluxos contínuos em espaços métricos. Um dos resultados principais é o Teorema 1.12, que estende, para o caso compacto Hausdorff, a caracterização das decomposições de Morse através de seqüências crescentes de atratores. Outro resultado é a Proposição 1.15, que garante a existência de funções de Lyapunov associadas a decomposições de Morse, sob a hipótese adicional do semifluxo ser aberto. Esta proposição é demonstrada utilizando-se o fato que, de maneira similar ao caso de fluxos em espaços métricos, os atratores e os repulsores são conjuntos G_δ fechados (Proposição 1.3).

Fundamentando-se na Seção 3 de [28], a Seção 1.2 estabelece a relação entre transitividade por cadeias e decomposição de Morse minimal, no contexto geral de semifluxos de tempo discreto ou contínuo num espaço topológico X . A teoria de transitividade por cadeias é desenvolvida abstratamente, em vista das aplicações nos capítulos subseqüentes, e engloba as diferentes definições utilizadas na literatura como casos particulares.

Na abordagem abstrata apresentada aqui, são utilizadas cadeias contruídas a partir de coberturas abertas pertencendo a uma família pré-fixada \mathcal{O} de coberturas abertas de X , satisfazendo algumas condições de admissibilidade (Definição 1.17). O conjunto \mathcal{O} -

recorrente por cadeias e as componentes \mathcal{O} -transitivas por cadeias são definidos então de maneira análoga aos conceitos clássicos (c.f. [9] e [7]). Em particular, a transitividade por cadeias apresentada em [9] pode ser recuperada desta abordagem abstrata através da família $\mathcal{O}(X)$ de todas as coberturas abertas de X . Além disto, quando (X, d) é um espaço métrico, pode-se utilizar a família admissível \mathcal{O}_d , das coberturas constituídas pela totalidade das bolas abertas para cada raio arbitrário pré-fixado. Este procedimento recupera a definição mais comumente utilizada de transitividade por cadeias (c.f. [7]). Entretanto, para o estudo de semifluxos de endomorfismos de fibrados, é necessária a construção de uma família admissível que leve em conta a estrutura do fibrado, o que é feito no Capítulo 5.

Os resultados principais da Seção 1.2 são obtidos no caso em que X é um espaço compacto Hausdorff. O primeiro deles é o Teorema 1.23, que mostra que o conjunto \mathcal{O} -recorrente por cadeias e as componentes \mathcal{O} -transitivas por cadeias independem da família admissível utilizada. Outro resultado é o Teorema 1.29, que mostra a transitividade interna das componentes transitivas por cadeias, estendendo um resultado bem conhecido para fluxos em espaços métricos compactos (c.f. [7]). Como um corolário (Corolário 1.31), obtém-se um extensão do Lema 2.1 de [16], sobre a transitividade interna de conjuntos omega limites. Finalmente, é estabelecida a conexão entre transitividade por cadeias e decomposição de Morse minimal. O Teorema 1.33 garante a equivalência entre a existência da decomposição de Morse minimal e a existência de um número finito de componentes transitivas por cadeias e, para a sua demonstração, é essencial a caracterização das decomposições de Morse através de seqüências crescentes de atratores (Teorema 1.12).

Capítulo 2 : Semigrupos e Semifluxos

É desenvolvida, neste capítulo, a ligação entre a teoria de transitividade por cadeias desenvolvida no Capítulo 1 e a teoria de semigrupos locais de aplicações contínuas. Esta ligação é realizada através do conceito de semigrupos de sombreamento de um semifluxo.

Baseada na Seção 4 de [28], a Seção 2.1 apresenta a teoria topológica da ação de semigrupos locais de aplicações contínuas de um espaço topológico X . Os conceitos centrais desta teoria são os conjuntos de controles e seus respectivos conjuntos de transitividade, subconjuntos maximais de X onde o semigrupo age transitivamente, análogos ao conceito de órbitas no caso de ações de grupos. Estes conceitos são definidos através de certas relações de equivalência em X induzidas pelo semigrupo local (relações algébrica, forte e fraca). Apesar da maior parte dos resultados ser conhecida para semigrupos locais de homeomorfismos locais de X (c.f. [4] e [7]), sua generalização para semigrupos locais de aplicações contínuas de X não é direta, principalmente quando as órbitas regressivas estão envolvidas. Além disto, a abordagem dos conjuntos de controle através de relações de equivalência simplifica consideravelmente a demonstração dos resultados, melhorando a compreensão dos conceitos envolvidos. Um resultado novo é a Proposição 2.8, que fornece uma caracterização dos conjuntos de controle em termos das órbitas progressivas e regressivas do semigrupo local.

A Seção 2.2, fundamentada na Seção 5 de [28], apresenta a teoria de semigrupos de

sombreamento de um semifluxo σ_t de um espaço topológico X . Esta teoria fornece uma completa caracterização da transitividade por cadeias em termos da ação de semigrupos locais de aplicações contínuas. O princípio básico é realizar os saltos arbitrários de uma cadeia através de aplicações dentro de um semigrupo local prescrito e explorar as vantagens topológicas desta abordagem.

O principal resultado da Seção 2.2 é o Teorema 2.28. Ele caracteriza as componentes \mathcal{O} -transitivas por cadeias de um semifluxo de endomorfismos de um fibrado como interseção de conjuntos de controle dos seus semigrupos de sombreamento.

Para se construir esta teoria de perturbações contínuas do semifluxo σ , deve-se partir de semigrupos locais S que possuam a propriedade de transitividade adequada (Definição 2.22), relativa a uma dada família \mathcal{O} de coberturas abertas de X . Observa-se que qualquer semigrupo local S contendo as funções constantes é transitivo em relação a qualquer família \mathcal{O} de coberturas abertas de X . Este exemplo mostra que a condição de transitividade local é satisfeita por diversos semigrupos locais, de modo que as perturbações dos semifluxos podem ser realizadas em grande generalidade.

Uma das boas características dos semigrupos de sombreamento é que suas órbitas progressivas e regressivas são conjuntos abertos em X (Corolário 2.25). Isto é de fundamental importância na aplicação dos resultados ao estudo de semifluxos de endomorfismos dos denominados fibrados flag, que é desenvolvido no Capítulo 6.

Capítulo 3 : Conjuntos de Controle em Flags

Este capítulo apresenta a teoria de semigrupos de San Martin. Esta teoria trata da análise dos conjuntos de controle de semigrupos S contidos num grupo de Lie G semi-simples, agindo nas suas variedades flag generalizadas (c.f. [33], [34], [35], [36] e [39]). Este capítulo depende fundamentalmente dos Apêndices A e B, que tratam da teoria de Lie semi-simples real.

As Seções 3.1 e 3.2 apresentam uma forma de abordar os grupos de Weyl e os sistemas de raízes que é conveniente para facilitar o entendimento da teoria de semigrupos. Uma das dificuldades da teoria de semigrupos em flags é a necessidade constante de considerar diferentes câmaras de Weyl para a construção de certos objetos (grupos de Weyl, sistemas simples de raízes, álgebras e grupos parabólicos etc.). A abordagem apresentada aqui permite lidar com todas as câmaras de Weyl (e os objetos por elas determinados) de maneira simultânea. Isto é feito pela introdução dos assim denominados objetos canônicos, que descrevem claramente os isomorfismos existentes entre objetos associados a câmaras de Weyl diferentes.

Na Seção 3.2 são demonstrados alguns resultados, que apesar de folclóricos na teoria de variedades flag, são de difícil referência. Além do mais, demonstra-se a seguinte decomposição

$$P_{\Theta} = G(\Theta)L_{\Theta}, \quad (2)$$

do subgrupo parabólico P_{Θ} de tipo Θ como o produto semi-direto entre o subgrupo semi-simples $G(\Theta)$ de tipo Θ e o subgrupo L_{Θ} normal em P_{Θ} e que contém a estrutura das componentes conexas de P_{Θ} (Teoremas 3.10 e 3.12). Tal decomposição é utilizada na

demonstração dos Teoremas 3.14 e 3.15, que tratam das fibrações naturais entre variedades flag. Esta decomposição não se encontra nas referências da presente tese que tratam da teoria de Lie semi-simples real ([15], [21], [42] e [43]).

A Seção 3.3 utiliza as construções da Seção 3.1 de modo a simplificar a demonstração de alguns resultados da teoria de semigrupos de San Martin e melhorar a compreensão dos conceitos envolvidos. Um dos principais resultados desta teoria, Teorema 3.28, utiliza o grupo de Weyl canônico de \mathfrak{g} para parametrizar os conjuntos de controle de um semigrupo aberto S em G agindo no flag maximal \mathbb{F} . Além disto, o conjunto de transitividade do conjunto de controle $\mathbb{A}(w)$ de tipo $w \in W$ é caracterizado como o conjunto dos pontos fixos de tipo w de câmaras de Weyl em G (c.f. Definição 3.17) que interceptam o semigrupo S . Este resultado é demonstrado aqui de maneira mais direta que em [34], utilizando-se uma versão ligeiramente mais geral do Lema 3.3 de [33] (c.f. Lema 3.21). Além do mais, observa-se que é possível obter o número de conjuntos de controle em \mathbb{F} como consequência do Teorema 4.1 de [36], que trata da ordem entre os conjuntos de controle (c.f. Teorema 3.35).

Capítulo 4 : Conjuntos de Controle em Fibrados

É apresentada, neste capítulo, a teoria de semigrupos locais de endomorfismos de um fibrado $\pi_E : E \rightarrow X$ associado a um fibrado principal $\pi : Q \rightarrow X$. O princípio básico é decompor o problema em duas partes: a ação do semigrupo induzida na base X e a ação do semigrupo nas fibras de E . Esta abordagem é então aplicada ao estudo da ação de semigrupos locais de endomorfismos dos denominados fibrados flag, cujas fibras típicas são as variedades flag generalizadas apresentadas no Capítulo 3. Neste caso, obtém-se a completa caracterização da ação em termos da sua decomposição na base e nas fibras.

A Seção 4.1 é de caráter puramente topológico e está baseada na Seção 4 de [29]. A análise da ação de semigrupos locais de endomorfismos é feita através do estudo dos conjuntos de controle. A relação entre conjuntos de controle em E e em X é dada pelas projeções das classes de equivalência associadas ao semigrupo S_E , induzido por S no fibrado E . A ação do semigrupo S_E na fibra de E sobre $\pi(q) \in X$ é analisada através da ação na fibra típica F do semigrupo S_q , induzido por S no grupo estrutural G a partir do ponto $q \in Q$ (Definição 4.12). Quando as órbitas de S_E são conjuntos abertos (o que acontece no caso de semigrupos de sombreamento de um semifluxo), o semigrupo S_q é aberto em G . Neste caso, existe uma bijeção entre os conjuntos de controle D que interceptam a fibra de E sobre $\pi(q)$ e os conjuntos de controle A_q^D de S_q em F (Corolário 4.22). Além disto, esta bijeção preserva a ordem entre os conjuntos de controle. Quando o conjunto de controle A_q^D é invariante em relação a S_q , tem-se que o conjunto de transitividade de D projeta-se sobrejetivamente sobre o conjunto de transitividade do conjunto de controle de S_X em X que se situa abaixo de D (Proposição 4.23). Este resultado, bem como toda subseção relativa a conjuntos de controle invariantes, é novo e é utilizado decisivamente no argumento de indução utilizado na seção seguinte.

Na Seção 4.2, analisa-se a ação de semigrupos locais de endomorfismos dos denominados fibrados flag e baseia-se na Seção 5 de [29]. Um dos principais objetivos desta seção é

demonstrar que os conjuntos de controle de um semigrupo local de endomorfismos num fibrado flag projetam-se sobrejetivamente no espaço base, desde que o semigrupo local induzido na base seja transitivo (Teorema 4.31). Outro resultado fundamental é mostrar que a descrição algébrica fornecida através da ação de S_q na fibra típica independe do ponto $q \in Q$ utilizado (Teorema 4.32). Isto permite utilizar o Corolário 4.22 mencionado acima e dar uma descrição precisa dos conjuntos de controle, reduzindo o problema à fibra típica, isto é, à descrição algébrica dos conjuntos de controles de S_q nos flags generalizados apresentada no Capítulo 3. Para isto é necessário supor que, para todo $q \in Q$, as órbitas $S \cdot q$ e $S^* \cdot q$ são conjuntos abertos, hipótese que é satisfeita pelos semigrupos de sombreamento de um semifluxo σ_t , como mostra o Corolário 2.25.

A seção é concluída com alguns exemplos de fibrados flag. Entre outros apresentados, tem-se:

- (1) os fibrados projetivos,
- (2) a fibração natural do flag \mathbb{F}_Δ sobre o flag \mathbb{F}_Θ , se $\Delta \subset \Theta$
- (3) os fibrados flag clássicos $\mathbb{F}_I M \rightarrow M$ de uma variedade diferenciável M e
- (4) o fibrado Lagrangeano $LaM \rightarrow M$ de uma variedade simplética M .

Capítulo 5 : Semifluxos em Fibrados Topológicos

Neste capítulo, a teoria de semigrupos de sombreamento, desenvolvida na Seção 2.2, é aplicada ao estudo de semifluxos de endomorfismos de um fibrado. Supõem-se que as fibras típicas dos fibrados considerados sejam espaços metrizáveis.

Um semifluxo $\sigma : \mathbb{T} \times Q \rightarrow Q$ é um semifluxo de endomorfismos de um fibrado principal $\pi : Q \rightarrow X$, se σ_t é um endomorfismo local de Q , para todo $t \in \mathbb{T}$ (Definição 4.1). Se $\pi_E : E \rightarrow X$ é um fibrado associado, a aplicação $\sigma^E : \mathbb{T} \times E \rightarrow E$ é um semifluxo de endomorfismos de E se existe um semifluxo σ de endomorfismos de Q tal que σ_t^E é a aplicação induzida em E por σ_t , para todo $t \in \mathbb{T}$.

Uma classe de exemplos de grande relevância é a dos semifluxos de produto cruzados definidos num fibrado principal trivial, tendo como base um espaço topológico X e como grupo estrutural um grupo topológico G . Os semifluxos desta classe são definidos a partir de um semifluxo em X e de um cociclo de X a valores em G . De fato, todos os semifluxos de endomorfismos de fibrado são localmente equivalentes a um semifluxo deste tipo.

O principal objetivo deste capítulo é construir uma família de coberturas abertas de E , adaptada à estrutura de fibrado, que seja admissível. Além disto, o semigrupo local dos endomorfismos locais de E , denotado por $\text{End}_l(E)$, deve ser transitivo em relação a esta família (Definição 2.22). Tal família é construída a partir de uma métrica d na fibra típica F e de um atlas $\Psi^E = \{(U_i, \psi_i^E)\}_{i \in I}$ de E . A família $\mathcal{O}_\Psi(E)$ das coberturas abertas Ψ -adaptadas é constituída de coberturas \mathcal{U}_ε definidas a partir de $\varepsilon > 0$ e de uma cobertura aberta \mathcal{U} da base X . No caso de um fibrado trivial, a cobertura \mathcal{U}_ε é simplesmente

a cobertura produto entre a cobertura \mathcal{U} e a cobertura \mathcal{B}_ε de (F, d) , constituída pela totalidade das bolas abertas de raio $\varepsilon > 0$.

Se o fibrado principal $Q \rightarrow X$ pode ser reduzido a um subfibrado $P \rightarrow X$ cujo grupo estrutural K age na fibra F por isometrias, então a família $\mathcal{O}_\Psi(E)$ é admissível (Proposição 5.4). Isto é precisamente o que acontece no caso de fibrados flag.

Para se analisar a propriedade de transitividade local do semigrupo local $\text{End}_l(E)$ com respeito à família $\mathcal{O}_\Psi(E)$, a idéia básica é combinar as ações do semigrupo local $\mathcal{C}_l(X)$ no espaço base X com a ação de G na fibra F . Como o semigrupo local $\mathcal{C}_l(X)$ é localmente transitivo para quaisquer famílias de coberturas abertas de X , as principais hipóteses feitas dizem respeito à ação de G em F . A primeira hipótese é que (F, d) seja um espaço métrico convexo, isto é, tal que para quaisquer dois pontos $u, v \in F$, existe $w \in F$ tal que

$$d(u, v) = d(u, w) + d(w, v), \quad (3)$$

denominado ponto mediano entre u e v . A outra hipótese é que G contém um subgrupo compacto e metrizável K agindo aberta e transitivamente em F , o que permite definir de maneira natural uma métrica em F adaptada à ação de K (c.f. [32]). Estas condições são prontamente satisfeitas no caso das variedades flag generalizadas.

Sob estas hipóteses, os resultados da Seção 2.2 podem ser aplicados, caracterizando-se as componentes $\mathcal{O}_\Psi(E)$ -transitivas por cadeias de um semifluxo de endomorfismos σ_t^E como interseção de conjuntos de controle para todos os seus semigrupos de sombreamento $\text{End}_l(E)_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}$, onde $t \in \mathbb{T}$ e $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Psi(E)$.

Capítulo 6 : Semifluxos em Fibrados Flag

Este é o capítulo principal da tese e depende logicamente dos resultados de todas as outras partes, como é mostrado pelo diagrama (1). Consideram-se semifluxos de endomorfismos σ^Θ de fibrados flag $\mathbb{E}_\Theta \rightarrow X$, cujo semifluxo induzido em X é transitivo por cadeias.

O primeiro resultado é a parametrização, através do grupo de Weyl W de \mathfrak{g} , das componentes $\mathcal{O}_\Psi(\mathbb{E}_\Theta)$ -transitivas por cadeias de σ^Θ (Teorema 6.5). O conjunto

$$\{\mathcal{M}_\Theta(w) : w \in W\} \quad (4)$$

destas componentes está em bijeção com o quociente duplo $W(\sigma) \backslash W/W_\Theta$ (Teorema 6.6), onde W_Θ provém de \mathbb{E}_Θ e $W(\sigma)$ é o subgrupo característico de σ (Definição 6.2). Além disto, a componente de Morse $\mathcal{M}_\Theta = \mathcal{M}_\Theta(1)$ é a única maximal, enquanto que a componente $\mathcal{M}_\Theta^- = \mathcal{M}_\Theta(w^-)$ é a única minimal, onde w^- é a involução principal de W em relação a Σ (Definição 3.34).

No caso em que a base X é compacto Hausdorff, pelos resultados do Capítulo 1, isto implica na existência da decomposição de Morse minimal, uma vez que W é um grupo finito.

Teorema 0.1. *Seja $\pi : Q \rightarrow X$ um fibrado principal localmente trivial tal que X é um espaço compacto Hausdorff. Seja também σ um semifluxo de endomorfismos em Q tal que*

o semifluxo induzido em X seja transitivo por cadeias. Para cada fibrado flag $\mathbb{E}_\Theta \rightarrow X$, existe a decomposição de Morse minimal de σ^Θ que é dada por

$$\{\mathcal{M}_\Theta(w) : w \in W\} \quad (5)$$

e está em bijeção com o quociente duplo $W(\sigma) \backslash W/W_\Theta$. Além disto, no caso do fibrado flag maximal, a ordem de Morse é a ordem reversa da ordem de Bruhat-Chevalley no quociente $W(\sigma) \backslash W$.

Outro resultado de grande relevância é a caracterização da interseção de cada componente $\mathcal{O}_\Psi(\mathbb{E}_\Theta)$ -transitiva por cadeias com as fibras de \mathbb{E}_Θ . Esta caracterização é realizada através de uma aplicação contínua $H : Q \rightarrow \text{Ad}(G)H_{\Theta(\sigma)}$, determinada por $\Theta(\sigma)$, o tipo parabólico do semifluxo σ (Definição 6.2). A construção de tal aplicação depende do Teorema 6.11, que assegura que a componente maximal $\mathcal{M}_{\Theta(\sigma)}^+$, no fibrado flag de tipo parabólico $\Theta(\sigma)$, como também a componente minimal $\mathcal{M}_{\Theta^*(\sigma)}^-$, no fibrado flag de tipo parabólico $\Theta^*(\sigma)$, dual de $\Theta(\sigma)$, interceptam cada fibra num único ponto.

O Teorema 6.13 afirma que, para cada $q \in Q$, a interseção da componente $\mathcal{M}_\Theta(w)$ com a fibra de \mathbb{E}_Θ sobre $\pi(q)$ é dada pela componente conexa $\text{fix}_\Theta(H(q), w)$ dos pontos fixos da ação adjunta de $\exp(tH(q))$ em \mathbb{F}_Θ associada a $w \in W$. A demonstração deste teorema supõe que a componente maximal \mathcal{M}^+ é regressivamente invariante e que, para cada $x \in X$, os seus conjuntos limites são não-vazios. Estas hipóteses são satisfeitas imediatamente para o caso de fluxos de automorfismos em fibrados flag com base compacta.

Teorema 0.2. *Seja $\pi_{\mathbb{E}_\Theta} : \mathbb{E}_\Theta \rightarrow X$ o fibrado flag de tipo $\Theta \subset \Sigma$ associado a $\pi : Q \rightarrow X$ tal que X é um espaço compacto Hausdorff. Seja também φ um fluxo de automorfismos em \mathbb{E}_Θ tal que o fluxo induzido na base é transitivo por cadeias. Então, para cada $q \in Q$, a interseção da componente $\mathcal{M}_\Theta(w)$ com a fibra de \mathbb{E}_Θ sobre $\pi(q)$ é dada por:*

$$\mathcal{M}_\Theta(w)_{\pi(q)} = q \cdot \text{fix}_\Theta(H(q), w), \quad (6)$$

onde $H : Q \rightarrow \text{Ad}(G)H_{\Theta(\varphi)}$ é a aplicação definida em (6.23).

Quando o espaço base X é compacto Hausdorff, é possível reduzir o caso geral, cujos semifluxos induzidos na base podem não ser transitivos por cadeias, ao caso transitivo por cadeias. Isto é feito, restringindo-se o semifluxo sobre cada componente \mathcal{M}_X transitiva por cadeias na base. De fato, pelo Teorema 1.29, a restrição a \mathcal{M}_X do semifluxo induzido é transitiva por cadeias.

O capítulo é concluído com alguns exemplos de aplicações dos resultados para semifluxos de endomorfismos de alguns fibrados flag. Entre outros, destacam-se:

- (1) o Teorema de Selgrade é demonstrado de maneira alternativa e generalizado para fluxos de tempo contínuo e discreto em fibrados com base topológica Hausdorff compacta (Teorema 6.15),
- (2) aplicações para a linearização de fluxos e semifluxos Hamiltonianos em fibrados associados ao fibrado simplético (Teorema 6.16) e

- (3) a análise do limites quasi-projetivos de seqüências em grupos de Lie através da construção de um fluxo de produto cruzado adequado definido num fibrado flag trivial.

Apêndices

Os Apêndices A e B são uma introdução bastante completa e auto-contida à teoria de Lie semi-simples real. As demonstrações são diretas e, sempre que possível, com argumentos geométricos. O conteúdo destes apêndices é baseado em [15], [38] e [43], enquanto que o conteúdo do Apêndice C fundamenta-se em [15] e [19].

Capítulo 1

Semifluxos em Espaços Topológicos

Neste capítulo, apresenta-se a teoria dinâmica de Conley, com ênfase nos conceitos de par atrator-repulsor e de transitividade por cadeias e suas relações com as decomposições de Morse, que são decomposições do semifluxo em sub-semifluxos conectados entre si por órbitas percorrendo níveis decrescentes de alguma função de Lyapunov.

1.1 Decomposições de Morse

Um *semifluxo* num espaço topológico X é uma aplicação contínua $\sigma : \mathbb{T} \times X \rightarrow X$, onde \mathbb{T} pode ser o conjunto \mathbb{Z}^+ dos inteiros não-negativos, denominado *tempo discreto*, ou o conjunto \mathbb{R}^+ dos números reais não-negativos, denominado *tempo contínuo*, tal que

$$(i) \quad \sigma_0 = \text{id}_X, \text{ e}$$

$$(ii) \quad \sigma_{t+s} = \sigma_t \circ \sigma_s, \text{ para todos } s, t \in \mathbb{T}.$$

Se o conjunto \mathbb{T} dos tempos for o conjunto \mathbb{Z} de todos os inteiros, σ é denominado *fluxo de tempo discreto*. No caso em que \mathbb{T} é o conjunto \mathbb{R} de todos os números reais, σ é denominado *fluxo de tempo contínuo*. Nestes casos, σ será denotado por φ .

De maneira usual, denota-se por σ_t a aplicação $\sigma_t : X \rightarrow X$ definida por $\sigma_t(x) = \sigma(t, x)$. As aplicações σ_t , $t \in \mathbb{T}$, são contínuas e supõe-se que elas são sobrejetivas, mas não necessariamente invertíveis. Um semifluxo σ é denominado *aberto* quando σ_t é uma aplicação aberta para todo $t \in \mathbb{T}$. No caso de fluxos, as aplicações σ_t , $t \in \mathbb{T}$, são homeomorfismos.

Dado um subconjunto $Y \subset X$ e um tempo $t \in \mathbb{T}$, define-se a *órbita progressiva de Y posterior ao tempo t* como

$$Y_t^+ = \bigcup_{s \geq t} \sigma_s(Y) \tag{1.1}$$

e a *órbita progressiva de Y até o tempo t* como

$$Y_+^t = \bigcup_{0 \leq s \leq t} \sigma_s(Y). \tag{1.2}$$

Define-se também a *órbita regressiva de Y anterior ao tempo $-t$* como

$$Y_t^- = \bigcup_{s \geq t} \sigma_s^{-1}(Y) \quad (1.3)$$

e a *órbita regressiva de Y até o tempo $-t$* como

$$Y_t^- = \bigcup_{0 \leq s \leq t} \sigma_s^{-1}(Y). \quad (1.4)$$

Em particular, a *órbita progressiva de Y* é Y_0^+ , enquanto Y_0^- é sua *órbita regressiva*. Se $x \in X$, denota-se de maneira mais sucinta $x_t^+ = \{x\}_t^+$, $x_t^- = \{x\}_t^-$, $x_+^t = \{x\}_+^t$ e $x_-^t = \{x\}_-^t$.

O conjunto ω -limite de um subconjunto $Y \subset X$ é definido de maneira usual por

$$\omega(Y) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \text{cl}(Y_t^+). \quad (1.5)$$

Também o conjunto ω^* -limite de Y é dado por

$$\omega^*(Y) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \text{cl}(Y_t^-). \quad (1.6)$$

Uma seqüência $\Lambda = (x_k)$ em X é denominada *x -regressiva* se $x_0 = x$ e $\sigma_1(x_k) = x_{k-1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Define-se a Λ -*órbita regressiva de x* como

$$\Lambda(x) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{s \in [0,1]} \sigma_s(x_k). \quad (1.7)$$

Claramente a órbita regressiva de x é a união de todas as Λ -órbitas regressivas de x , com Λ percorrendo todas as seqüências x -regressivas. Dado $t \in \mathbb{T}$, denota-se

$$\Lambda(x)_t = \Lambda(x) \cap x_t^-. \quad (1.8)$$

Para cada $t \in \mathbb{T}$, existe um $x^t \in \Lambda(x)$ tal que $\sigma_t(x^t) = x$. Então define-se

$$\Lambda(x)^t = \bigcup_{s \in [0,t]} \sigma_s(x^t). \quad (1.9)$$

O conjunto ω_Λ^* -limite de uma dada Λ -órbita regressiva de x é definido como

$$\omega_\Lambda^*(x) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \text{cl}(\Lambda(x)_t). \quad (1.10)$$

Um subconjunto $Y \subset X$ é (*progressivamente*) *invariante* se $\sigma_t(Y) = Y$ para todo $t \in \mathbb{T}$. O subconjunto Y é *regressivamente invariante* se $\sigma_t^{-1}(Y) = Y$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Observa-se que em ambos os casos a igualdade é requerida ao invés de apenas a inclusão. No caso de fluxos, a definição usual de conjunto invariante, $\varphi_t(Y) \subset Y$, para todo $t \in \mathbb{T}$, é equivalente às apresentadas acima. Claramente se Y é regressivamente invariante, então ele é também invariante. Contudo a recíproca não é verdadeira, como mostrado no seguinte exemplo.

Exemplo 1.1. Seja $F : \mathbb{Z}^+ \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, o semifluxo definido por $F(t, x) = f^t(x)$, com $f^t = f \circ \dots \circ f$, t vezes, onde $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é uma função contínua e linear por partes definida por $f(x) = 2x$ para x em $[0, \frac{1}{4}]$, $f(x) = \frac{1}{2}$ se x está em $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ e $f(x) = 2x - 1$ se x pertence a $[\frac{3}{4}, 1]$. Então definindo-se $U = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ e $A = \{\frac{1}{2}\}$, tem-se que A é invariante, mas não regressivamente invariante, pois $F_1^{-1}(A) = f^{-1}(A) = U$. Além disto, para todo $t \in \mathbb{Z}^+$, tem-se que $F_t(U) \subset U$, mas U não é invariante pela definição aqui empregada, uma vez que $F_t(U) = A$ para todo $t \in \mathbb{Z}^+$.

O resultado seguinte é apresentado em [14] para o caso onde Y é um subconjunto unitário de um espaço métrico compacto X . A extensão para subconjuntos arbitrários de um espaço compacto Hausdorff topológico X é similar utilizando-se redes.

Proposição 1.2. *Seja $Y \subset X$. Então $\omega(Y)$ e $\omega^*(Y)$ são conjuntos invariantes.*

O conceito de decomposição de Morse para semifluxos é análogo ao conceito para fluxos. Uma coleção $\{M_1, \dots, M_n\}$ de subconjuntos não-vazios, dois a dois disjuntos, compactos e invariantes é uma *decomposição de Morse* do semifluxo σ se

- (i) Para todo $x \in X$ e toda seqência x -regressiva Λ tem-se que $\omega(x)$ e $\omega_\Lambda^*(x)$ estão contidos em $\bigcup_{i=1}^n M_i$;
- (ii) Se $\omega(x)$ e $\omega_\Lambda^*(x)$ estão contidos em M_i , para alguma seqência x -regressiva Λ , então $x \in M_i$;
- (iii) A relação \preceq é uma ordem parcial,

onde a relação \preceq é definida em $\{M_1, \dots, M_n\}$ como segue: $M_i \preceq M_j$ se, e somente se, existem uma cadeia de subconjuntos $\{M_i = M_{m_1}, \dots, M_{m_l+1} = M_j\}$, pontos $\{x_1, \dots, x_l\}$ e seqências $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_l\}$, tais que, para todo $k \in \{1, \dots, l\}$, a seqência Λ_k é x_k -regressiva, $\omega_\Lambda^*(x_k) \subset M_{m_k}$ e $\omega(x_k) \subset M_{m_{k+1}}$.

Cada elemento M_i é denominado *conjunto de Morse*. Pode-se ordenar os conjuntos de Morse de tal forma que $M_i \preceq M_j$ implica que $i \leq j$. Então não é difícil verificar que a condição (iii) na definição acima é equivalente a coleção $\{M_1, \dots, M_n\}$ poder ser ordenada de tal forma que, para todo $x \in X$ e toda seqência x -regressiva Λ , existem inteiros i e j com $i \leq j$ e tais que $\omega(x) \subset M_i$ e $\omega_\Lambda^*(x) \subset M_j$.

Se $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_n\}$ e $\mathcal{N} = \{N_1, \dots, N_m\}$ são duas decomposições de Morse de σ , diz-se que \mathcal{M} é *mais fina* que \mathcal{N} e denota-se $\mathcal{M} \leq \mathcal{N}$ se para todo $M_i \in \mathcal{M}$ existe $N_j \in \mathcal{N}$ tal que $M_i \subset N_j$. Uma decomposição de Morse \mathcal{M} é denominada *minimal* se $\mathcal{M} \leq \mathcal{N}$, para toda decomposição de Morse \mathcal{N} . A *interseção de \mathcal{M} e \mathcal{N}* definida por

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{M_i \cap N_j \neq \emptyset : i = 1, \dots, n \text{ e } j = 1, \dots, m\} \quad (1.11)$$

é uma decomposição de Morse mais fina que \mathcal{M} e \mathcal{N} . Portanto se o número das diferentes decomposições de Morse é finito, então existe a decomposição de Morse minimal.

1.1.1 Atratores e Repulsores

Um subconjunto $A \subset X$ é denominado *atrator* se existe uma vizinhança U de A tal que $\omega(U) = A$. De maneira similar, um subconjunto $R \subset X$ é denominado *repulsor* se $\omega^*(V) = R$, para alguma vizinhança V de R . Segue da Proposição 1.2 que os atratores e repulsores são conjuntos invariantes.

Proposição 1.3. *Se A é um atrator e U é uma vizinhança de A tal que $\omega(U) = A$, então*

$$A = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} U_t^+ = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\text{int} U)_n^+. \quad (1.12)$$

Analogamente, se R é um repulsor e V é uma vizinhança de R tal que $\omega^(V) = R$, então*

$$R = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} V_t^- = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\text{int} V)_n^-. \quad (1.13)$$

Em particular, R é um conjunto G_δ , i.e., interseção enumerável de conjuntos abertos e, se σ_t é uma aplicação aberta para todo $t \in \mathbb{T}$, A é também um conjunto G_δ .

Demonstração. Para algum $t \in \mathbb{T}$, tem-se que $\text{cl}(U_t^+) \subset \text{int} U$. Para cada $s \in \mathbb{T}$, tem-se que $\text{cl}(U_{t+s}^+) \subset \sigma_s(\text{cl}(U_t^+))$, já que $\sigma_s(\text{cl}(U_t^+))$ é fechado e contém U_{t+s}^+ . Se $x \in A$, então $x \in \text{cl}(U_{t+s}^+) \subset \sigma_s(\text{int} U)$, para todo $s \in \mathbb{T}$. Logo

$$A = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} U_t^+ = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} (\text{int} U)_t^+. \quad (1.14)$$

Uma vez que $(\text{int} U)_s^+ \subset (\text{int} U)_t^+$, para todos $t, s \in \mathbb{T}$, com $t < s$, segue que $(\text{int} U)_{n+1}^+ \subset (\text{int} U)_n^+ \subset (\text{int} U)_n^+$, se $n \leq t < n+1$. Isto implica na equação (1.12). A demonstração de (1.13) é análoga.

A afirmação de que R é um conjunto G_δ segue da equação (1.13) e do fato que para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $(\text{int} V)_n^-$ é um conjunto aberto. Se σ_t é uma aplicação aberta para todo $t \in \mathbb{T}$, então $(\text{int} V)_n^-$ é um conjunto aberto para todo $n \in \mathbb{N}$ e as igualdades (1.12) implicam que A é um conjunto G_δ . \square

Corolário 1.4. *Se φ é um fluxo, então A e R são conjuntos G_δ .*

Se A é um atrator, define-se

$$A^* = \{x \in X : \omega(x) \cap A = \emptyset\}, \quad (1.15)$$

que é denominado *repulsor complementar de A* devido ao seguinte resultado.

Proposição 1.5. *Se A é um atrator, então ele é invariante e seu atrator complementar A^* é de fato um repulsor. Para qualquer vizinhança compacta K de A e disjunta de A^* , tem-se que $\omega(K) = A$. Da mesma forma, se K é uma vizinhança compacta de A^* e disjunta de A , então $\omega^*(K) = A^*$.*

Demonstração. A demonstração se dá da mesma maneira daquela apresentada em [9], Capítulo II, página 32, 5.1.A, com algumas adaptações diretas para semifluxos. A invariância de A segue da Proposição 1.2. \square

Se R é um repulsor, o seu *atrator complementar* é definido por

$$R_* = \{x \in X : \omega_\Lambda^*(x) \cap R = \emptyset \text{ para alguma seq. } x\text{-regressiva } \Lambda\}. \quad (1.16)$$

Proposição 1.6. *Se R é um repulsor, ele é regressivamente invariante e seu atrator complementar R_* é de fato um atrator. Para qualquer vizinhança compacta K de R e disjunta de R_* , $\omega^*(K) = R$ e se K é uma vizinhança compacta de R_* e disjunta de R , então $\omega(K) = R_*$.*

Demonstração. A invariância regressiva de R segue de (1.13) da Proposição 1.3, pois para todo $s \in \mathbb{T}$

$$\sigma_s^{-1}(R) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \sigma_s^{-1}(V_t^-) = R, \quad (1.17)$$

uma vez que $\sigma_s^{-1}(V_t^-) = V_{t+s}^-$.

Seja V uma vizinhança de R tal que $\omega^*(V) = R$. Então para algum $t > 0$, $\text{cl}(V_t^-) \subset \text{int } V$. Definindo-se $U = X \setminus V_t^-$, tem-se que $\text{cl}(X \setminus U) \subset \text{int } V$ e que $\text{cl}(X \setminus V) \subset X \setminus \text{int } V \subset \text{int } U$.

Agora se $x \in U$ e $s \geq t$, então $\sigma_s(x) \notin V$, pois se $\sigma_s(x) \in V$, então $x \in \sigma_s^{-1}(\sigma_s(x)) \subset V_t^-$. Logo $\text{cl}(U_t^+) \subset \text{cl}(X \setminus V) \subset \text{int } U$. Portanto $\omega(U)$ é um atrator. Se $x \in \omega(U)$ então existe uma seqência x -regressiva Λ tal que $\omega_\Lambda^*(x) \subset \omega(U)$. Então $\omega_\Lambda^*(x) \cap R = \emptyset$ e portanto $x \in R_*$. Por outro lado, se $x \in R_*$, existe alguma seqência x -regressiva Λ tal que $\omega_\Lambda^*(x) \cap R = \emptyset$. Logo $\Lambda(x) \subset X \setminus V \subset U$ e então $x \in \omega(U)$. Portanto $R_* = \omega(U)$ é um atrator.

Supondo-se agora que K é uma vizinhança compacta de R e disjunta de R_* . Como $R_* \subset X \setminus K$, para algum $t \in \mathbb{T}$, tem-se que $\sigma_t(U) \subset X \setminus K$. Se $x \in K$, então x não está em $\sigma_t(U)$. Logo $\sigma_t^{-1}(x) \subset X \setminus U$ e então $\text{cl}(K_t^-) \subset \text{cl}(X \setminus U) \subset \text{int } V$, o que implica que $\omega^*(K) = R$.

A última afirmação desta proposição segue de maneira análoga. \square

O seguinte resultado, apesar de imediato no caso de fluxos, requer uma demonstração no caso de semifluxos.

Lema 1.7. *Se A é um atrator, então $(A^*)_* = A$. Analogamente, se R é um repulsor, então $(R_*)^* = R$.*

Demonstração. Seja V uma vizinhança compacta de R disjunta de R_* e $U = X \setminus \text{int } V$. Se $x \in (R_*)^*$, então $\omega(x) \cap R_* = \emptyset$. Então $x_0^+ \subset X \setminus U \subset V$ e $x \in V_t^-$, para todo $t \in \mathbb{T}$. Logo $x \in \omega(V) = R$, mostrando que $(R_*)^* \subset R$. Se $x \in R$, então $\omega(x) \subset R$ e $\omega * (\omega(x)) \subset R$. Logo $\omega(x) \cap R_* = \emptyset$ e portanto $x \in (R_*)^*$, o que implica que $R \subset (R_*)^*$.

Seja U uma vizinhança compacta de A disjunta de A^* e $V = X \setminus \text{int } U$. Se $x \in (A^*)_*$, então existe uma seqência x -regressiva Λ tal que $\omega_\Lambda^* \cap A^* = \emptyset$. Então $\Lambda(x) \subset X \setminus V \subset U$ e $x \in U_t^+$, para todo $t \in \mathbb{T}$. Então $x \in \omega(U) = A$, mostrando que $(A^*)_* \subset A$. Se $x \in A$,

então existe uma seqüência x -regressiva Λ tal que $\omega_\Lambda^*(x) \subset A$. Logo $\omega(\omega_\Lambda^*(x)) \subset A$ e então $\omega_\Lambda^*(x) \cap A^* = \emptyset$, o que implica que $x \in (A^*)_*$ e que $A \subset (A^*)_*$. \square

Para cada atrator A e repulsor R , o par (A, A^*) é denominado *par atrator-repulsor* e o par (R, R_*) é denominado *par repulsor-atrator*.

Voltando ao exemplo apresentado antes da Proposição 1.2, o conjunto $A = \{\frac{1}{2}\}$ é atrator para o semifluxo $F : \mathbb{Z}^+ \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, pois $A = \omega(U)$, onde $U = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. Mesmo A sendo invariante, ele não é regressivamente invariante, uma vez que $F_1^{-1}(A) = U$. O repulsor complementar de A é o conjunto $A^* = \{0, 1\}$, que é regressivamente invariante. De fato $F_t^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ e $F_t^{-1}(\{1\}) = \{1\}$ para todo $t \in \mathbb{T}$.

Lema 1.8. *Seja K um subconjunto compacto de X . Supondo-se que existam um ponto $x \in K$ e uma rede $x_i \rightarrow x$ tais que $\Lambda_i^{t_i}(x_i) \subset K$, onde $t_i \rightarrow \infty$ e Λ_i é uma seqüência x_i -regressiva. Então existem um ponto $y \in K$, com $\sigma_1(y) = x$, e uma rede $y_j \rightarrow y$ tal que $\bar{\Lambda}_j^{s_j}(y_j) \subset K$, onde $s_j \rightarrow \infty$ e $\bar{\Lambda}_j$ é uma seqüência y_j -regressiva.*

Demonstração. Tomando-se uma sub-rede se necessário, pode-se supor que $t_i \geq 1$. Logo existe $z_i \in K$ tal que $\sigma_1(z_i) = x_i$. Pela compacidade de K , existem $y \in K$ e uma sub-rede $z_{i_j} \rightarrow y$. Tem-se que $\sigma_1(y) = x$, já que $x_{i_j} = \sigma_1(z_{i_j}) \rightarrow \sigma_1(y)$. Definindo-se $y_j = z_{i_j}$, $s_j = t_{i_j} - 1$ e $\bar{\Lambda}_j = \Lambda_{i_j} \setminus \{x_{i_j}\}$, tem-se também que $y_j \rightarrow y$, $s_j \rightarrow \infty$ e

$$\bar{\Lambda}_j^{s_j}(y_j) \subset \Lambda_{i_j}^{t_{i_j}}(x_{i_j}) \subset K. \quad (1.18)$$

\square

Lema 1.9. *Seja K um subconjunto compacto de X e A um conjunto invariante maximal em K tal que $A \subset \text{int} K$. Então A é um atrator se, para todo $x \in K \setminus L$, onde $L = \text{int} K \cap \sigma_1^{-1}(\text{int} K)$, e toda seqüência x -regressiva Λ , a órbita regressiva $\Lambda(x)$ não está contida em K .*

Demonstração. Para cada $x \in K \setminus L$ existem uma vizinhança aberta V_x de x e $t_x \in \mathbb{T}$ tais que $\Lambda^{t_x}(y)$ não está contido em K , para todo $y \in V_x$ e toda seqüência y -regressiva Λ . Caso contrário, existem $x \in K \setminus L$ e uma rede $x_i \rightarrow x$ tais que $\Lambda_i^{t_i}(x_i) \subset K$, onde $t_i \rightarrow \infty$ e Λ_i é uma seqüência x_i -regressiva. Aplicando-se o Lema 1.8, pode-se construir recursivamente uma seqüência x -regressiva contida em K , o que é uma contradição.

Um número finito de conjuntos abertos V_x cobrem o conjunto compacto $K \setminus L$ e, definindo-se \bar{t} como o máximo dos correspondentes t_x , tem-se que $\Lambda^{\bar{t}}(x)$ não está contido em K para todo $x \in K \setminus L$ e toda seqüência x -regressiva Λ .

Se $x_+^{\bar{t}} \subset K$, então $x_0^+ \subset K$. Caso contrário,

$$t = \sup\{s \in \mathbb{T} : x_+^s \subset K\} \geq \bar{t} \quad (1.19)$$

é finito. Como K é fechado, então $x_+^t \subset K$. Logo $\sigma_t(x)$ está contido em $L = \text{int} K \cap \sigma_1^{-1}(\text{int} K)$, pois $\Lambda^t(\sigma_t(x)) = x_+^t \subset K$, para qualquer seqüência $\sigma_t(x)$ -regressiva Λ contendo x . Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\sigma_s(x) \in K$, para todo $s \in [t - \varepsilon, t + \varepsilon]$. Então $x_+^{t+\varepsilon} \subset K$, o

que é uma contradição. Se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}^+$, $\sigma_{t+1}(x) = \sigma_1(\sigma_t(x)) \in \sigma_1(L) \subset K$ e portanto $x_+^{t+1} \subset K$ é novamente uma contradição.

Para todo $x \in A$, tem-se que $x_+^{\bar{t}} \subset A \subset \text{int } K$. Então existe uma vizinhança U de A contida em K tal que $U_+^{\bar{t}} \subset K$, o que implica que $U_0^+ \subset K$ e portanto $\omega(U) \subset K$. Logo o conjunto invariante $\omega(U)$ está contido no maximal A e, como $A \subset U$, ele contém A . Então $A = \omega(U)$ é um atrator. \square

Lema 1.10. *Seja K um conjunto compacto em X e R um conjunto regressivamente invariante, que é invariante maximal em $N = \sigma_1^{-1}(K)$ e tal que $R \subset \text{int } N$. Então R é um repulsor se, para todo $x \in N \setminus L$, onde $L = \text{int } N \cap \text{int } K$, a órbita progressiva x_0^+ não está contida em N .*

Demonstração. Para cada $x \in N \setminus L$, existem $t_x \in \mathbb{T}$ e uma vizinhança aberta V_x de x tais que $\sigma_{t_x}(V_x) \cap K = \emptyset$. Um número finito de conjuntos abertos V_x cobrem o conjunto compacto $N \setminus L$ e, definindo-se \bar{t} como o máximo dos correspondentes t_x , tem-se que $x_+^{\bar{t}}$ não está contido em K para todo $x \in N \setminus L$.

Se $x_-^{\bar{t}} \subset N$, então $x_0^- \subset N$. Caso contrário,

$$t = \sup\{s \in \mathbb{T} : x_-^s \subset N\} \geq \bar{t}. \quad (1.20)$$

é finito. Se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}^+$, tem-se que $x_-^t \subset N$. Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$, existe uma seqüência $t_n \rightarrow t$ tal que $t_n < t$ e $x_-^{t_n} \subset N$. Se $y \in \sigma_t^{-1}(x)$, tem-se que $\sigma_{t-s}(\sigma_s(y)) = x$, para todo $s \in [0, t]$. Então $y_+^t \subset x_-^t$ e além disto $\sigma_{t-t_n}(y) \in x_-^{t_n} \subset N$. Como N é fechado e $\sigma_{t-t_n}(y) \rightarrow y$, segue que $y \in N$ e, conseqüentemente, que $x_-^t \subset N$. Portanto, se $y \in \sigma_t^{-1}(x)$, então $y_+^t \subset x_-^t \subset N$. Isto implica que $\sigma_t^{-1}(x) \subset L = \text{int } N \cap \text{int } K$. Se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}^+$, como

$$\sigma_{t+1}^{-1}(x) = \sigma_1^{-1}(\sigma_t^{-1}(x)) \subset \sigma_1^{-1}(K) = N, \quad (1.21)$$

tem-se que $x_-^{t+1} \subset N$, o que é uma contradição. Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$, para cada $y \in \sigma_t^{-1}(x)$, existem uma vizinhança aberta V_y de y e $\varepsilon_y > 0$ tais que $\sigma_s^{-1}(z) \subset N$, para todos $z \in V_y$ e $s \in [0, \varepsilon_y]$. Um número finito de conjuntos abertos V_y cobrem o conjunto compacto $\sigma_t^{-1}(x)$ e, definindo-se $\varepsilon > 0$ como o mínimo dos correspondentes ε_y , tem-se que $\sigma_{t+s}^{-1}(x) = \sigma_s^{-1}(\sigma_t^{-1}(x)) \subset N$, para todo $s \in [0, \varepsilon]$. Portanto $x_-^{t+\varepsilon} \subset N$, o que é novamente uma contradição.

Para cada $x \in R$, existe uma vizinhança V_x de x tal que $(V_x)_-^{\bar{t}} \subset N$. Caso contrário, existe uma rede $x_i \rightarrow x$ tal que $\sigma_{t_i}(y_i) = x_i$, onde $y_i \in X \setminus \text{int } N$ e $t_i \in [0, \bar{t}]$. Pode-se supor que $t_i \rightarrow t$ e $y_i \rightarrow y$, onde $t \in [0, \bar{t}]$ e $y \in X \setminus \text{int } K$. Então $\sigma_t(y) = x$, pois $x_i = \sigma_{t_i}(y_i) \rightarrow \sigma_t(y)$. Isto é uma contradição, pois $y \in \sigma_t^{-1}(R) = R \subset \text{int } K$. Logo $V = \bigcup_{x \in R} V_x$ é uma vizinhança de R tal que $V_-^{\bar{t}} \subset N$. Pela argumentação acima, $V_0^- \subset N$, o que implica que $\omega^*(V) \subset N$. Portanto o conjunto invariante $\omega^*(V)$ está contido em R e, como $R \subset V$, ele contém R . Logo $R = \omega^*(V)$ é um repulsor. \square

Corolário 1.11. *Sejam R um repulsor em X e \bar{R} um repulsor em R . Então \bar{R} é um repulsor em X .*

Demonstração. Seja K uma vizinhança compacta de \overline{R} em X que é disjunta do atrator \overline{R}_* , complementar a \overline{R} em R , e é disjunta do atrator R_* , complementar a R em X . Pela invariância regressiva de \overline{R} e pela invariância de \overline{R}_* e R_* , tem-se que $N = \sigma_1^{-1}(K)$ é também uma vizinhança compacta de \overline{R} em X que é disjunta de \overline{R}_* e R_* . Como $\overline{R} \subset L = \text{int } N \cap \text{int } K$, se $x \in (N \setminus L) \cap R$, então $\omega(x) \subset \overline{R}_*$ e se $x \in (N \setminus L) \setminus R$, então $\omega(x) \subset R_*$. Em ambos os casos, $\omega(x)$ não está contido em N e então x_0^+ não está contido em N . Pelo Lema 1.10, como \overline{R} é um conjunto regressivamente invariante e invariante maximal em N , tem-se que \overline{R} é um repulsor em X . \square

O resultado seguinte é a caracterização das decomposições de Morse em termos de pares atrator-repulsor. Este resultado é bem conhecido para fluxos em espaços métricos compactos. Aqui ele é demonstrado para semifluxos de tempo discreto ou contínuo em espaços topológicos Hausdorff compactos.

Teorema 1.12. *Seja σ um semifluxo num espaço topológico compacto Hausdorff X . Então uma coleção finita $\{M_1, \dots, M_n\}$ de subconjuntos de X define uma decomposição de Morse se, e somente se, existe uma seqüência estritamente crescente de atratores*

$$\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n = X \quad (1.22)$$

tal que

$$M_i = A_i \cap A_{i-1}^*, \quad (1.23)$$

para $i = 1, \dots, n$.

Demonstração. Após os Lemas 1.7 e 1.9 e Corolário 1.11, a demonstração é a mesma da apresentada em [9], Capítulo II, página 40, 7.1.B e 7.1.C. \square

1.1.2 Funções de Lyapunov

Conclui-se esta seção analisando-se a existência das denominadas funções de Lyapunov. Uma *função de Lyapunov associada a um par atrator-repulsor* (A, A^*) é uma função a valores reais $L_A : X \rightarrow [0, 1]$, tal que $L_A^{-1}(0) = A$, $L_A^{-1}(1) = A^*$ e L_A é estritamente decrescente nas órbitas em $\kappa(A, A^*)$, onde

$$\kappa(A, A^*) = X \setminus (A \cup A^*) \quad (1.24)$$

é denominado *conjunto das órbitas conectantes do par atrator-repulsor* (A, A^*) , em virtude da Proposição 1.5.

O teorema seguinte garante a existência de funções de Lyapunov associadas a pares atrator-repulsor, no caso de semifluxos abertos em espaços Hausdorff compactos. Um exemplo simples é o semifluxo gerado pela aplicação $g : S^1 \rightarrow S^1$, definido por $g(z) = z^2$, onde $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Esta é uma aplicação aberta, uma vez que g é de fato uma aplicação de recobrimento de S^1 sobre S^1 .

Proposição 1.13. *Seja σ um semifluxo aberto num espaço compacto Hausdorff X . Para cada par atrator-repulsor (A, A^*) , existe uma função de Lyapunov L_A associada a ele.*

Demonstração. A demonstração é análoga àquela apresentada em [9], Capítulo II, 5.1.B. O ponto chave é uma aplicação de um refinamento do Lema de Urysohn, que assegura a existência de uma função contínua $l : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $l^{-1}(0) = A$ e $l^{-1}(1) = A^*$ se, e somente se, ambos A e A^* são conjuntos G_δ fechados. Além deste refinamento (que pode ser encontrado em [22], página 137), deve-se utilizar a Proposição 1.3, que assegura que A e A^* são conjuntos G_δ fechados. \square

Corolário 1.14. *Seja φ um fluxo num espaço compacto Hausdorff X . Para cada par atrator-repulsor (A, A^*) , existe uma função de Lyapunov L_A associada a ele.*

Uma função de Lyapunov completa para um semifluxo σ associada a uma decomposição de Morse

$$\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_n\} \quad (1.25)$$

é uma função a valores reais $L_{\mathcal{M}} : X \rightarrow \mathbb{R}$, que é estritamente decrescente nas órbitas fora de $\bigcup_{i=1}^n M_i$ e tal que o conjunto $L_{\mathcal{M}}^{-1}(c)$ é uma componente de Morse, para cada valor crítico c , onde $L_{\mathcal{M}}(\bigcup_{i=1}^n M_i)$ é o conjunto dos valores críticos de $L_{\mathcal{M}}$.

Proposição 1.15. *Se $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_n\}$ é uma decomposição de Morse de um semifluxo aberto σ num espaço compacto Hausdorff X , então existe uma função de Lyapunov completa associada a \mathcal{M} .*

Demonstração. Definindo-se $L_{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^n 3^{-i} L_{A_i}$, onde L_{A_i} é a função de Lyapunov associada ao par atrator-repulsor (A_i, A_i^*) dada pela Proposição 1.13, tem-se que $L_{\mathcal{M}}$ é uma função de Lyapunov completa associada a \mathcal{M} . \square

Corolário 1.16. *Se $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_n\}$ é uma decomposição de Morse de um fluxo φ num espaço compacto Hausdorff X , então existe uma função de Lyapunov completa associada a \mathcal{M} .*

1.2 Transitividade por Cadeias

Nesta seção, desenvolve-se uma teoria abstrata de transitividade por cadeias e recorrência por cadeias que generaliza e unifica as noções clássicas. As cadeias construídas aqui são baseadas em famílias admissíveis de coberturas abertas de X . Exemplos de tais famílias admissíveis são a família de todas as coberturas de um espaço topológico X (como considerado em [9]) e a família das coberturas de todas as bolas abertas de raio constante, quando X é um espaço métrico.

1.2.1 Transitividade por Cadeias Generalizada

Sejam \mathcal{U} e \mathcal{V} coberturas abertas de X . Diz-se que \mathcal{V} é um refinamento de \mathcal{U} e escreve-se $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ se para cada $V \in \mathcal{V}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subset U$. Esta é claramente uma relação de pré-ordem. Também escreve-se $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$ se para todos $V, V' \in \mathcal{V}$ com $V \cap V' \neq \emptyset$,

existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \cup V' \subset U$. Define-se recursivamente a relação $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2^n} \mathcal{U}$ se $\mathcal{V} \leq \mathcal{W}$ e $\mathcal{W} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \mathcal{U}$.

Dados uma cobertura aberta \mathcal{U} de X e um subconjunto compacto $K \subset X$, denota-se o conjunto dos elementos de \mathcal{U} que interceptam K por

$$[\mathcal{U}, K] = \{U \in \mathcal{U} : K \cap U \neq \emptyset\}. \quad (1.26)$$

Se $N \subset X$ é aberto com $K \subset N$, diz-se que a cobertura \mathcal{U} é K -subordinada a N se $U \subset N$, para cada $U \in [\mathcal{U}, K]$.

Pode-se então introduzir as condições nas famílias de coberturas abertas de X que são utilizadas na formulação do conceito de cadeias de um semifluxo.

Definição 1.17. *Seja \mathcal{O} uma família de coberturas abertas de X . Diz-se que \mathcal{O} é admissível se*

- (i) *Para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2} \mathcal{U}$.*
- (ii) *Sejam $N \subset X$ um conjunto aberto e $K \subset N$ um compacto. Então existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ que é K -subordinado a N .*

Os seguintes exemplos de famílias admissíveis de coberturas são paradigmáticos e mostram que elas aparecem em contextos bem gerais.

- (i) Denotando-se por $\mathcal{O}(X)$ a família de todas as coberturas abertas de X . Se X é Hausdorff e paracompacto então $\mathcal{O}(X)$ é admissível. A demonstração da condição (i) da Definição 1.17 para esta família pode ser encontrada em [20], página 170. Esta condição é de fato equivalente a paracompacidade do espaço X .
- (ii) Seja X espaço compacto Hausdorff. Denotando-se por $\mathcal{O}_f(X)$ a família de todas as coberturas abertas finitas de X , então $\mathcal{O}_f(X)$ é admissível.
- (iii) Num espaço métrico (X, d) , seja $\mathcal{O}_d(X)$ a família cujos membros são as coberturas \mathcal{B}_ε , onde $\varepsilon > 0$, constituídas pela totalidade das ε -bolas de X . Então $\mathcal{O}_d(X)$ é claramente uma família admissível. Em todo caso, a notação $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2} \mathcal{U}$ é inspirada neste caso particular, pois $\mathcal{B}_{\frac{\varepsilon}{2}} \leq \frac{1}{2} \mathcal{B}_\varepsilon$.

No Capítulo 5, é construída uma família admissível de coberturas de fibrados, que é adaptada aos semifluxos de endomorfismos destes fibrados e diferente das famílias admissíveis apresentadas acima.

Agora introduz-se o conceito de cadeias para semifluxos, baseadas em coberturas abertas do espaço de estado X .

Definição 1.18. *Sejam σ um semifluxo em X e \mathcal{U} uma cobertura aberta de X . Dados $x, y \in X$ e $t \in \mathbb{T}$, uma (\mathcal{U}, t) -cadeia de x para y constitui-se de uma seqüência de pontos $\{x = x_1, \dots, x_{n+1} = y\} \subset X$, uma seqüência de tempos $\{t_1, \dots, t_n\} \subset \mathbb{T}$ e uma seqüência $\{U_1, \dots, U_n\} \subset \mathcal{U}$ de subconjuntos abertos de X tais que $t_i \geq t$ e $\sigma_{t_i}(x_i), x_{i+1} \subset U_i$, para todo $i = 1, \dots, n$ (cf. [9]).*

Dado um subconjunto $Y \subset X$, denota-se por $\Omega(Y, \mathcal{U}, t)$ o conjunto de todos os $x \in X$ tais que existe uma (\mathcal{U}, t) -cadeia de algum ponto $y \in Y$ para x . Também denota-se

$$\Omega^*(x, \mathcal{U}, t) = \{y \in X : x \in \Omega(y, \mathcal{U}, t)\}. \quad (1.27)$$

Agora seja \mathcal{O} uma família de coberturas abertas de X . Então o conjunto $\Omega_{\mathcal{O}}$ -limite de um subconjunto $Y \subset X$ é definido como

$$\Omega_{\mathcal{O}}(Y) = \bigcap \{\Omega(Y, \mathcal{U}, t) : \mathcal{U} \in \mathcal{O}, t \in \mathbb{T}\}. \quad (1.28)$$

Para $x \in X$, denota-se $\Omega_{\mathcal{O}}(x) = \Omega_{\mathcal{O}}(\{x\})$ e define-se a relação $x \preceq_{\mathcal{O}} y$ se $y \in \Omega_{\mathcal{O}}(x)$.

O fato seguinte é demonstrado da mesma maneira que em [9], Capítulo II, 6.1.A e 6.1.B.

Proposição 1.19. *Se a família \mathcal{O} é admissível, então a relação $\preceq_{\mathcal{O}}$ é transitiva, fechada e invariante por σ , i.e., tem-se que $\sigma_t(x) \preceq_{\mathcal{O}} \sigma_s(x)$ se $x \preceq_{\mathcal{O}} y$, para todos $s, t \in \mathbb{T}$. Também, para todo $Y \subset X$, o conjunto $\Omega_{\mathcal{O}}(Y)$ é invariante.*

Definição 1.20. *A relação $x \sim_{\mathcal{O}} y$ está definida, quando $x \preceq_{\mathcal{O}} y$ e $y \preceq_{\mathcal{O}} x$. Então $x \in X$ é \mathcal{O} -recorrente por cadeias se ele é auto-relacionado em relação a $\sim_{\mathcal{O}}$, ou seja $x \sim_{\mathcal{O}} x$. O conjunto $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$ de todos os pontos \mathcal{O} -recorrentes por cadeia é denominado conjunto \mathcal{O} -recorrente por cadeias. Não é difícil mostrar que a restrição de $\sim_{\mathcal{O}}$ a $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$ é uma relação de equivalência.*

Um classe de equivalência de $\sim_{\mathcal{O}}$ é denominada uma componente \mathcal{O} -transitiva por cadeias. Um conjunto $Y \subset X$ é denominado \mathcal{O} -recorrente por cadeias se $Y \subset \mathcal{R}_{\mathcal{O}}$ e Y é denominado \mathcal{O} -transitivo por cadeias se está contido em alguma componente \mathcal{O} -transitiva por cadeias. Finalmente o semifluxo σ é \mathcal{O} -recorrente por cadeias se $X = \mathcal{R}_{\mathcal{O}}$ e σ é \mathcal{O} -transitivo por cadeias se X é a única componente \mathcal{O} -transitiva por cadeias.

O próximo resultado é uma analogia à continuidade uniforme de aplicações contínuas entre espaços métricos compactos.

Lema 1.21. *Sejam X e Y espaços topológicos com Y compacto e seja $F : X \times Y \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Dada uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}(X)$, então pode-se encontrar $\mathcal{Z} \in \mathcal{O}(Y)$ satisfazendo a seguinte propriedade: Para todos $y \in Y$ e $v, w \in X$ tais que $v, w \in Z$ para algum $Z \in \mathcal{Z}$, existe $U \in \mathcal{U}$ com $F(v, y), F(w, y) \in U$. Se X também é compacto, então pode-se escolher \mathcal{Z} como sendo finita.*

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $y \in Y$. Então existe $U_{(x,y)} \in \mathcal{U}$ com $F(x, y) \in U_{(x,y)}$. Pela continuidade de F , existem uma vizinhança $Z_{(x,y)} \subset X$ de x e uma vizinhança $N_{(x,y)} \subset Y$ de y tais que $F(Z_{(x,y)} \times N_{(x,y)}) \subset U_{(x,y)}$. Tem-se que a família $\{N_{(x,y)} : y \in Y\}$ é uma cobertura aberta de Y e, como Y é compacto, existe uma subcobertura finita $\{N_{(x,y_1)}, \dots, N_{(x,y_{n_x})}\}$. Definindo-se $Z_x = \bigcap_{i=1}^{n_x} Z_{(x,y_i)}$, para todo $y \in Y$ e todos $v, w \in Z_x$, tem-se que existe $k \in \{1, \dots, n_x\}$, tal que $y \in N_{(x,y_k)}$. Logo $F(v, y), F(w, y) \in U_{(x,y_k)}$. Se X é compacto, existe uma subcobertura finita \mathcal{Z} da cobertura aberta $\{Z_x : x \in X\}$ com a propriedade enunciada acima. \square

O lema seguinte é usado no Capítulo 2 para se estabelecer a ligação entre os semifluxos e seus semigrupos de sombreamento.

Lema 1.22. *Sejam $x \in X$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in \mathbb{T}$. Se $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$, então*

$$(i) \text{ cl}(\Omega(x, \mathcal{V}, t)) \subset \Omega(x, \mathcal{U}, t) \text{ e}$$

$$(ii) \text{ cl}(\Omega^*(x, \mathcal{V}, t)) \subset \Omega^*(x, \mathcal{U}, t).$$

Demonstração. Sejam $y \in \text{cl}(\Omega(x, \mathcal{V}, t))$ e $V \in \mathcal{V}$ uma vizinhança de y . Então existem $z \in V \cap \Omega(x, \mathcal{V}, t)$, uma seqüência de pontos $\{x = x_1, \dots, x_{n+1} = z\} \subset X$, uma seqüência de tempos $\{t_1, \dots, t_n\} \subset \mathbb{T}$ e uma seqüência de conjuntos abertos $\{V_1, \dots, V_n\} \subset \mathcal{V}$ com $t_i \geq t$ e $\sigma_{t_i}(x_i), x_{i+1} \subset U_i$, para todo $i = 1, \dots, n$. Como $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que os pontos $\sigma_{t_n}(x_n), z = x_{n+1}$ e y pertencem a U . Redefinindo-se $x_{n+1} = y$, obtem-se uma (\mathcal{U}, t) -cadeia de x para y , o que mostra que $y \in \Omega(x, \mathcal{U}, t)$.

Reciprocamente, seja $y \in \text{cl}(\Omega^*(x, \mathcal{V}, t))$. Pelo Lema 1.21, existe $\mathcal{Z} \in \mathcal{O}(X)$ tal que, para todos $s \in [t, 2t]$ e $v, w \in X$, se existe $Z \in \mathcal{Z}$ com $v, w \in Z$, então existe $V \in \mathcal{V}$ com $\sigma_s(v), \sigma_s(w) \in V$. Agora sejam $y \in \text{cl}(\Omega^*(x, \mathcal{V}, t))$ e $Z \in \mathcal{Z}$ uma vizinhança de y . Então existem $z \in \Omega^*(x, \mathcal{V}, t) \cap Z$, uma seqüência de pontos $\{z = x_1, \dots, x_{n+1} = x\} \subset X$, uma seqüência de tempos $\{t_1, \dots, t_n\} \subset \mathbb{T}$ e uma seqüência de conjuntos abertos $\{V_1, \dots, V_n\} \subset \mathcal{V}$ tais que $t_i \geq t$ e $\sigma_{t_i}(x_i), x_{i+1} \subset U_i$, para todo $i = 1, \dots, n$. Então existem duas possibilidades: ou (1) $t_1 > 2t$ ou (2) $t_1 \in [t, 2t]$. No primeiro caso, existe uma (\mathcal{U}, t) -cadeia de $\sigma_t(z)$ para x , restando portanto mostrar que existe uma (\mathcal{U}, t) -cadeia de y a $\sigma_t(z)$. Pela escolha de Z , existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $\sigma_t(y), \sigma_t(z) \in V$ o que é suficiente, uma vez que $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$. No segundo caso, existe uma (\mathcal{U}, t) -cadeia de x_2 para x e deve-se demonstrar que existe uma (\mathcal{U}, t) -cadeia de y para x_2 . Novamente, pela escolha de Z , existe $V \in \mathcal{V}$ com $\sigma_{t_1}(y), \sigma_{t_1}(z) \in V$ e, como $\sigma_{t_1}(z), x_2 \in V_1$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\sigma_{t_1}(y), x_2 \in U$, o que completa a demonstração do Lema. \square

1.2.2 Semifluxos em Espaços Hausdorff Compactos

A partir de agora considera-se apenas semifluxos em espaços Hausdorff compactos. Neste caso tem-se a seguinte caracterização dos conjuntos $\Omega_{\mathcal{O}}$ -limites em termos de atratores. Relembrando-se, um subconjunto $A \subset X$ é um atrator se existe uma vizinhança U de A tal que $\omega(U) = A$. Da mesma maneira, $R \subset X$ é um repulsor se $\omega^*(V) = R$, para alguma vizinhança V de R .

Teorema 1.23. *Sejam X um espaço compacto Hausdorff e $Y \subset X$ fechado. Então $\Omega_{\mathcal{O}}(Y)$ é a interseção de todos os atratores que contém $\omega(Y)$. Em particular, $\Omega_{\mathcal{O}}(Y)$ independe da família admissível \mathcal{O} utilizada.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in \mathbb{T}$. Primeiro afirma-se que $\text{cl}(\Omega(Y, \mathcal{U}, t)_t^+) \subset \text{int}(\Omega(Y, \mathcal{U}, t))$. De fato, sejam $x \in \text{cl}(\Omega(Y, \mathcal{U}, t)_t^+)$ e $U \in \mathcal{U}$ com $x \in U$, e sejam $y \in \Omega(Y, \mathcal{U}, t)$ e $s \geq t$ tais que $\sigma_s(y) \in U$. Então, para cada $z \in U$, o par $\{y, z\}$ é uma

(\mathcal{U}, t) -cadeia de y para z e então $z \in \Omega(Y, \mathcal{U}, t)$. Portanto $U \subset \Omega(Y, \mathcal{U}, t)$, mostrando-se a afirmação.

Definindo-se $A = \omega(\Omega(Y, \mathcal{U}, t))$, tem-se que $A \subset \text{cl}(\Omega(Y, \mathcal{U}, t)_t^+) \subset \text{int}(\Omega(Y, \mathcal{U}, t))$. Logo A é um atrator com vizinhança isolante $\text{int}(\Omega(Y, \mathcal{U}, t))$. Também A é o maior conjunto invariante maximal em $\Omega(Y, \mathcal{U}, t)$, uma vez que é seu ω -limite. Como $\Omega(Y, \mathcal{U}, t)$ contém $\Omega_{\mathcal{O}}(Y)$, tem-se que A contém $\Omega_{\mathcal{O}}(Y)$ e, conseqüentemente, $\omega(Y)$. Portanto,

$$\Omega_{\mathcal{O}}(Y) = \bigcap_{\mathcal{U}, t} \omega(\Omega(Y, \mathcal{U}, t)). \quad (1.29)$$

Reciprocamente, seja A um atrator contendo $\omega(Y)$. Sejam também N uma vizinhança compacta de A disjunta de A^* e t um tempo tal que $\text{cl}(N_t^+) \subset \text{int}N$. Como \mathcal{O} é admissível e pela propriedade (ii) da definição 1.17, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ tal que todo conjunto em \mathcal{U} que intercepta $\text{cl}(N_t^+)$ está contido em $\text{int}N$. Tem-se que $\sigma_s(Y) \subset \text{cl}(N_t^+)$, para todo $s \geq t$. Então toda (\mathcal{U}, t) -cadeia de Y tem de terminar em N , o que implica que $\Omega(Y, \mathcal{U}, t) \subset N$. Portanto $\omega(\Omega(Y, \mathcal{U}, t)) \subset \omega(N) = A$, o que conclui a demonstração do teorema. \square

Definição 1.24. *O teorema anterior permite a eliminação do subescrito \mathcal{O} , escrevendo-se simplesmente $\Omega(Y)$ para o conjunto $\Omega_{\mathcal{O}}(Y)$ e, da mesma forma, escrevendo-se \mathcal{R} para o conjunto $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}$, que é então denominado simplesmente conjunto recorrente por cadeias.*

Outra conseqüência deste teorema é a seguinte caracterização do conjunto recorrente por cadeias em termo de atratores. A demonstração é a mesma apresentada em [9], Capítulo II, 6.2.A.

Proposição 1.25. *Se X é compacto Hausdorff, então*

$$\mathcal{R} = \bigcap \{A \cup A^* : A \text{ é um atrator}\}, \quad (1.30)$$

onde $A^* = \{x \in X : \omega(x) \cap A = \emptyset\}$ é o repulsor complementar.

O seguinte resultado relaciona conjuntos recorrentes por cadeias conexos a conjuntos transitivos por cadeias.

Proposição 1.26. *Se um conjunto é conexo e recorrente por cadeias, então ele é transitivo por cadeias. Em particular, cada componente transitiva por cadeias é a união de componentes conexas de \mathcal{R} .*

Demonstração. A demonstração é a mesma apresentada em [7], Apêndice B, Proposição B.2.21. \square

Quando X é um espaço compacto Hausdorff, existe um resultado útil que garante que apenas as (\mathcal{U}, t) -cadeias com t maior que uma constante positiva fixada são necessárias para a definição dos conceitos de transitividade e recorrência por cadeias (cf. [17]).

Proposição 1.27. *Sejam $y \in \mathcal{R}$, $x \in X$ e $T > 0$. Se, para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_f(X)$, existe uma (\mathcal{U}, T) -cadeia de x para y , então existe uma (\mathcal{U}, t) -cadeia de x para y , para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_f(X)$ e $t \in \mathbb{T}$.*

Demonstração. A demonstração é a mesma apresentada em [7], Apêndice B, página 547, Proposição B.2.19, usando o Lema 1.21 no lugar da continuidade uniforme. \square

Definição 1.28. *Um subconjunto invariante $A \subset X$ é denominado internamente recorrente por cadeias se o semifluxo σ_t restrito a A é recorrente por cadeias. A é denominado internamente transitivo por cadeias se σ_t restrito a A é transitivo por cadeias.*

O próximo resultado é essencial para estabelecer a ligação entre as componentes transitivas por cadeias e as componentes de Morse da decomposição de Morse minimal. Para sua demonstração no contexto geral de espaços topológicos, é necessário introduzir uma topologia adequada no conjunto $\mathcal{K}(X)$, de todos os subconjuntos compactos de um espaço compacto Hausdorff X . A topologia de Hausdorff em $\mathcal{K}(X)$ é gerada pelos conjuntos

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \{K \in \mathcal{K}(X) : K \subset U_1 \cup \dots \cup U_n \text{ and } K \cap U_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, n\}, \quad (1.31)$$

onde U_1, \dots, U_n são subconjuntos abertos de X . Dados um subconjunto $K \in \mathcal{K}(X)$ e uma cobertura aberta e finita $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_f(X)$, então $\langle [\mathcal{U}, K] \rangle$ é a *vizinhança aberta de K em $\mathcal{K}(X)$ associada a \mathcal{U}* , onde $[\mathcal{U}, K]$ é o conjunto dos elementos de \mathcal{U} que interceptam K , definido na equação (1.26). É conhecido que com sua topologia de Hausdorff, $\mathcal{K}(X)$ é compacto e Hausdorff ([25], Teorema 4.9.12). É necessário também considerar redes cujos domínios sejam a família $\mathcal{O}_f(X)$, que é um conjunto dirigido com respeito a relação \leq definida no início desta seção.

Teorema 1.29. *Se X é um espaço compacto Hausdorff, então cada componente transitiva por cadeias M é fechada, invariante e internamente transitiva por cadeias. Em particular, o conjunto recorrente por cadeias \mathcal{R} é internamente recorrente por cadeias.*

Demonstração. Sejam M uma componente transitiva por cadeias e $x, y \in M$. Para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_f(X)$, tem-se uma $(\mathcal{U}, 1)$ -cadeia de x para y e uma $(\mathcal{U}, 1)$ -cadeia de y para x . Pode-se escrever estas seqüências como $\{x = x_{(1, \mathcal{U})}, \dots, x_{(m_{\mathcal{U}}+1, \mathcal{U})} = y\}$ com tempos $\{s_{(1, \mathcal{U})}, \dots, s_{(m_{\mathcal{U}}, \mathcal{U})}\}$ contidos em $[1, 2]$, e $\{y = y_{(1, \mathcal{U})}, \dots, y_{(n_{\mathcal{U}}+1, \mathcal{U})} = x\}$ com tempos $\{t_{(1, \mathcal{U})}, \dots, t_{(n_{\mathcal{U}}, \mathcal{U})}\}$ contidos em $[1, 2]$. Define-se $K_{\mathcal{U}} = K_{(x, \mathcal{U})} \cup K_{(y, \mathcal{U})}$, onde

$$K_{(x, \mathcal{U})} = \bigcup_{i=1}^{m_{\mathcal{U}}} \left\{ x_{(i, \mathcal{U})}, \sigma_{s_{(i, \mathcal{U})}}(x_{(i, \mathcal{U})}), y \right\} \quad (1.32)$$

e

$$K_{(y, \mathcal{U})} = \bigcup_{j=1}^{n_{\mathcal{U}}} \left\{ y_{(j, \mathcal{U})}, \sigma_{t_{(j, \mathcal{U})}}(y_{(j, \mathcal{U})}), x \right\}. \quad (1.33)$$

Pela compacidade de $\mathcal{K}(X)$, a rede $K_{\mathcal{U}}$ possui uma subrede que converge para algum ponto K em $\mathcal{K}(X)$. Seja $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_f(X)$ e, como $\mathcal{O}_f(X)$ é uma família admissível, existe $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_f(X)$ tal que $\mathcal{V} \leq \frac{1}{4}\mathcal{U}$. Pelo Lemma 1.21, existe $\mathcal{Z} \in \mathcal{O}_f(X)$ tal que, para todo $t \in [1, 2]$ e $v, w \in Z$, where $Z \in \mathcal{Z}$, existe $V \in \mathcal{V}$ com $\sigma_t(v), \sigma_t(w) \in V$. Seja $\mathcal{T} \in \mathcal{O}_f(X)$ tal que $\mathcal{T} \leq \mathcal{V}$ e $\mathcal{T} \leq \mathcal{Z}$. Então existe $\mathcal{W} \in \mathcal{O}_f(X)$ com $\mathcal{W} \leq \mathcal{T}$ e tal que $K_{\mathcal{W}} \in \langle [\mathcal{T}, K] \rangle$. Afirma-se que, para todo $z \in K$, existem uma $(\mathcal{U}, 1)$ -cadeia em K de z para y e uma $(\mathcal{U}, 1)$ -cadeia em K de y para z .

De fato, pela definição de $\langle [\mathcal{T}, K] \rangle$, para cada $v \in K$, existem $x_{(i_v, \mathcal{W})} \in K_{\mathcal{W}}$ e $T_v \in \mathcal{T}$ com v e $x_{(i_v, \mathcal{W})}$ pertencendo a T_v e, reciprocamente, para cada $x_{(i, \mathcal{W})} \in K_{\mathcal{W}}$, existem $v_i \in K$ e $T_i \in \mathcal{T}$ com $x_{(i, \mathcal{W})}$ e v_i pertencendo a T_i . Logo o lema abaixo pode ser aplicado de modo a se construir uma $(\mathcal{U}, 1)$ -cadeia em K de z para y , a partir das seqüência de pontos

$$\{z_0 = z, \dots, z_j = v_{i_z+j} \dots, z_{m_{\mathcal{W}}+1-i_z} = y\}. \quad (1.34)$$

Analogamente, obtém-se uma $(\mathcal{U}, 1)$ -cadeia em K de y para z . Pela Proposição 1.27, como $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_f(X)$ é arbitrário, tem-se que $K \subset M$.

Seja $t \in \mathbb{T}$. Pela Proposição 1.19, tem-se que M é fechada e $\sigma_s(M) \subset M$, para todo $s \in \mathbb{T}$. Então tem-se que $\sigma_s(M) \subset \sigma_t(M)$, para todo $s \geq t$. Sejam $x \in M$ e N uma vizinhança aberta de x . Como $\mathcal{O}_f(X)$ é admissível, existe $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_f(X)$ tal que todo conjunto em \mathcal{U} que contém x está contido em N . Pela primeira parte da demonstração, existe uma (\mathcal{U}, t) -cadeia em M de qualquer ponto em M para x . Isto implica que $\sigma_t(M) \cap N \neq \emptyset$ e, portanto, que $\sigma_t(M)$ é denso em M . Como X é compacto, σ_t é uma aplicação fechada, de modo que $\sigma_t(M)$ é fechado. Portanto $\sigma_t(M) = M$, concluindo-se a demonstração do teorema. \square

Lema 1.30. *Sejam u e v em K e $x_{(i, \mathcal{W})}$ e $x_{(i+1, \mathcal{W})}$ em $K_{\mathcal{W}}$ tais que existam $T, T' \in \mathcal{T}$ com $x_{(i, \mathcal{W})}$ e u pertencendo a T e $x_{(i+1, \mathcal{W})}$ e v pertencendo a T' . Então existe $U \in \mathcal{U}$ tal que os pontos $\sigma_{s_{(i, \mathcal{W})}}(u)$ e v pertencem a U .*

Demonstração. Observa-se que, pela definição mesma de $K_{\mathcal{W}}$, existe $W \in \mathcal{W}$ tal que $x_{(i+1, \mathcal{W})}$ and $\sigma_{s_{(i, \mathcal{W})}}(x_{(i, \mathcal{W})}) \in W$. Além disto, como $\mathcal{T} \leq \mathcal{Z}$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $\sigma_{s_{(i, \mathcal{W})}}(x_{(i, \mathcal{W})})$ e $\sigma_{s_{(i, \mathcal{W})}}(u) \in V$. Como $\mathcal{W} \leq \mathcal{V} \leq \frac{1}{4}\mathcal{U}$, isto conclui a demonstração do lema. \square

Como corolário, tem-se o seguinte fato, que generaliza para o contexto topológico o Lema 2.1 de [16].

Corolário 1.31. *Sejam σ um semifluxo de tempo contínuo num espaço topológico paracompacto X e $x \in X$ um ponto com uma órbita pré-compacta. Então $\omega(x)$ é internamente transitivo por cadeias.*

Demonstração. A demonstração é a mesma da apresentada em [7], Apêndice B, Proposição B.2.28. \square

1.2.3 Transitividade por Cadeias e Decomposições de Morse

Agora a decomposição de Morse minimal será relacionada com a transitividade por cadeias. Para isto será necessário o seguinte lema.

Lema 1.32. *O semifluxo σ é transitivo por cadeias em X se, e somente se, a decomposição de Morse trivial é a única existente.*

Demonstração. Se σ é transitivo por cadeias em X , então $\Omega(x) = X$ para todo $x \in X$. Pelo Teorema 1.23, a interseção de todos os atratores que contêm $\omega(x)$ é o próprio X . Como todo atrator contém o conjunto ω -limite de pontos pertencentes a ele, segue que o único atrator em X é o trivial. Pela caracterização das decomposições de Morse através de seqüências crescentes de atratores dada pelo Teorema 1.12, a única decomposição de Morse existente é a trivial $\{X\}$. Reciprocamente e utilizando-se novamente o Teorema 1.12, se a única decomposição de Morse existente em X é a trivial, então o único atrator em X é o próprio X . Pelo Teorema 1.23, isso implica que $\Omega(x) = X$, para todo $x \in X$, e então σ é transitivo por cadeias em X . \square

Teorema 1.33. *Existe a decomposição de Morse minimal se, e somente se, o número de componentes transitivas por cadeias é finito. Neste caso, as componentes transitivas por cadeias são as componentes de Morse da decomposição de Morse minimal.*

Demonstração. Se a coleção das componentes transitivas por cadeias é finita, então ela é uma decomposição de Morse de σ , pois as componentes transitivas por cadeias são não-vazias, disjuntas duas a duas, compactas e invariantes e sua união contém todos os conjuntos limites. Pelo Teorema 1.29, a restrição do semifluxo σ a cada componente transitiva por cadeias é transitiva por cadeias. Logo o Lema 1.32 implica que a coleção das componentes transitivas por cadeias é a decomposição de Morse minimal de σ . Reciprocamente, se $\{M_1, \dots, M_n\}$ é a decomposição de Morse minimal de σ , então pelo Lemma 1.32, a restrição do semifluxo σ a cada componente de Morse é transitiva por cadeia, o que implica que o número de componentes transitivas por cadeias é finito. Pela primeira parte da demonstração, segue que M_1, \dots, M_n é a coleção das componentes transitivas por cadeias, concluindo a demonstração. \square

Uma *função de Lyapunov completa para um semifluxo* σ é uma função a valores reais $L : X \rightarrow \mathbb{R}$, que é estritamente decrescente nas órbitas fora do conjunto recorrente por cadeias \mathcal{R} e tal que o conjunto $L(\mathcal{R})$ dos *valores críticos de* L não é denso em nenhum aberto de \mathbb{R} e o conjunto $L^{-1}(c)$ é uma componente transitiva por cadeias, para cada valor crítico c .

Proposição 1.34. *Seja σ um semifluxo aberto ou, em particular, um fluxo num espaço compacto Hausdorff X . Se a decomposição de Morse minimal existe, então também existe uma função de Lyapunov completa para σ .*

Demonstração. Pelo Teorema 1.33, se a decomposição de Morse minimal \mathcal{M} existe, então as componentes por cadeias são exatamente as componentes de Morse de \mathcal{M} . Portanto uma função de Lyapunov completa associada a \mathcal{M} , cuja existência é garantida pela Proposição 1.15, é também uma função de Lyapunov completa para σ . \square

Capítulo 2

Semigrupos e Semifluxos

É desenvolvida, neste capítulo, a ligação entre a teoria de transitividade por cadeias desenvolvida no Capítulo 1 e a teoria de semigrupos locais de aplicações contínuas. Esta ligação é realizada através do conceito de semigrupos de sombreamento de um semifluxo.

2.1 Semigrupos de Aplicações Contínuas

Nesta seção, as ações de semigrupos de aplicações contínuas de espaços topológicos são investigadas num contexto bastante geral. Os conceitos introduzidos e os resultados enunciados são basilares para o estabelecimento das ligações entre semifluxos e semigrupos.

Definição 2.1. *Seja X um espaço topológico. Um semigrupo local agindo em X é uma família S de aplicações contínuas $\phi : \text{dom}\phi \rightarrow X$, com $\text{dom}\phi \subset X$ conjunto aberto, tal que se $\phi, \psi \in S$ e $\phi^{-1}(\text{dom}\psi) \neq \emptyset$, então a composição*

$$\psi \circ \phi : \phi^{-1}(\text{dom}\psi) \rightarrow X \quad (2.1)$$

também pertence a S .

Denota-se por $C_l(X)$ o *semigrupo local maximal de X* , ou seja, o conjunto de todas as aplicações contínuas $\phi : \text{dom}\phi \rightarrow X$ definidas em subconjuntos abertos de X . Um semigrupo local S age em X por avaliação de aplicações. Para $x \in X$, define-se sua *órbita* por

$$Sx = \{\phi(x) : \phi \in S, x \in \text{dom}\phi\} = \bigcup_{\phi \in S} \phi(x). \quad (2.2)$$

e sua *órbita regressiva* como

$$S^*x = \{y : \exists \phi \in S, \phi(y) = x\} = \bigcup_{\phi \in S} \phi^{-1}(x). \quad (2.3)$$

2.1.1 Relações Induzidas por Semigrupos

Associada a um semigrupo local S , existe uma relação transitiva \preceq definida por $x \preceq y$ se, e somente se, $y \in Sx$ ou, equivalentemente, se, e somente se, $x \in S^*y$. A simetrização de \preceq produz uma nova relação \sim denominada *relação algébrica* e definida por $x \sim y$ se, e somente se, $x \preceq y$ e $y \preceq x$. Esta relação é simétrica e transitiva, mas pode não ser reflexiva. Estas relações são denotadas respectivamente por \preceq^S e \sim^S , se o semigrupo local S tem de ser enfatizado.

Seja $[x] = \{y \in X : y \sim x\}$ a *classe algébrica de x* . Não é difícil mostrar que $[x] \neq \emptyset$ se, e somente se, $x \sim x$. Além disso, duas classes distintas são disjuntas, mas $\bigcup_{x \in X} [x]$ pode não ser todo X . Denotando-se $X_\sim = \{x \in X : x \sim x\}$, tem-se que

$$X_\sim = \bigcup_{x \in X_\sim} [x] = \bigcup_{x \in X} [x] \quad (2.4)$$

e a restrição da relação algébrica a X_\sim é de fato uma relação de equivalência. Claramente, se S é um monóide, ou seja, se S contém a aplicação identidade, então $X_\sim = X$. Definindo-se $[x] \preceq [y]$ se, e somente se, $x \preceq y$, tem-se que esta relação está bem definida e de fato é uma ordem parcial na coleção das classes algébricas. Finalmente observa-se direto da definição que $[x] = Sx \cap S^*x$ para todo $x \in X$.

Os conceitos apresentados acima são de caráter puramente conjuntista. Agora faz-se uso da topologia de X para se introduzir duas outras relações transitivas induzidas pelo semigrupo local S : uma relação mais fraca, definida por $x \preceq_w y$ se, e somente se, $y \in \text{cl}(Sx)$ e uma relação mais forte, definida por $x \preceq_s y$ se, e somente se, $x \in \text{int}(S^*y)$. A transitividade das relações \preceq_w e \preceq_s segue do seguinte lema a respeito de conjuntos invariantes.

Para um subconjunto $A \subset X$, denota-se

$$SA = \bigcup_{x \in A} Sx \quad S^*A = \bigcup_{x \in A} S^*x. \quad (2.5)$$

O conjunto A é *S -invariante* se $SA \subset A$ e *regressivamente (ou S^* -)invariante* se $S^*A \subset A$.

Lema 2.2. *Seja $A \subset X$.*

- (i) *Se $SA \subset \text{cl}(A)$, então $\text{cl}(A)$ é S -invariante. Em particular, se A é S -invariante, então $\text{cl}(A)$ também é S -invariante.*
- (ii) *Se $S^*\text{int}A \subset A$, então $\text{int}A$ é S^* -invariante. Em particular, se A é S^* -invariante, então $\text{int}A$ é também S^* -invariante.*
- (iii) *As relações \preceq_w e \preceq_s são transitivas.*

Demonstração. 1) Seja C um conjunto fechado contendo A . Então $A \subset \phi^{-1}(\text{cl}(A)) \subset \phi^{-1}(C)$ para todo $\phi \in S$. Segue que $\text{cl}(A) \subset \phi^{-1}(C)$ e, portanto, que $\phi(\text{cl}(A)) \subset C$. Como C é um fechado arbitrário, $\phi(\text{cl}(A)) \subset \text{cl}(A)$.

2) Para todo $\phi \in S$, tem-se que $\phi^{-1}(\text{int}A) \subset A$. Como ϕ é contínua, segue que $\phi^{-1}(\text{int}A)$ é aberto e, portanto, está contido em $\text{int}A$.

3) O terceiro enunciado segue imediatamente do primeiro e do segundo. \square

Analogamente à relação algébrica, a simetrização de \preceq_w é definida por $x \sim_w y$ se, e somente se, $x \preceq_w y$ e $y \preceq_w x$ e também a simetrização de \preceq_s é definida por $x \sim_s y$ se, e somente se, $x \preceq_s y$ e $y \preceq_s x$. Além disso, $\text{cl}(Sx) = \text{cl}(Sy)$ if $x \sim_w y$ e $\text{int}(S^*x) = \text{int}(S^*y)$ if $x \sim_s y$.

Definição 2.3. Denota-se por $[x]_w$ a classe de x com respeito a \sim_w e por $[x]_s$ a classe de x em relação a \sim_s . Não é difícil mostrar que $[x]_s \subset [x] \subset [x]_w$ para todo $x \in X$, onde estas inclusões podem ser estritas. Por este motivo, a relação \sim_w é denominada *fraca*, enquanto a relação \sim_s é denominada *forte*. Novamente introduz-se o superescrito S se o semigrupo local tem de ser enfatizado.

As restrições da relação fraca a $X_{\sim_w} = \{x \in X : [x]_w \neq \emptyset\}$ e da relação forte a $X_{\sim_s} = \{x \in X : [x]_s \neq \emptyset\}$ são relações de equivalência. Tem-se também que $X_{\sim_s} \subset X_{\sim} \subset X_{\sim_w}$.

2.1.2 Conjuntos de Controle

Agora introduz-se o conceito de conjunto de controle de um semigrupo local como sendo um tipo especial de classe fraca.

Definição 2.4. Um conjunto de controle de S é uma classe fraca $D = [x]_w \subset X$ tal que a classe forte $[x]_s \neq \emptyset$.

A seguir será demonstrado que em cada conjunto de controle D existe uma única classe forte não-vazia. Esta classe é denominada *conjunto de transitividade de D* e é denotada por D_0 . Para isto é necessário um lema preliminar.

Definição 2.5. Um ponto $x \in X$ é *auto-acessível* se $x \sim_s x$, ou seja, se $x \in \text{int}(S^*x)$.

Lema 2.6. Seja D um conjunto de controle. Então para todo $x \in D$ auto-acessível, vale que

$$D \subset \text{int}(S^*x) \subset S^*x. \quad (2.6)$$

Demonstração. Sejam $x \in D$ auto-acessível e $y \in D$. Pelas definições

$$x \in \text{int}(S^*x) \cap \text{cl}(Sy). \quad (2.7)$$

Logo existe $\phi \in S$ tal que $\phi(y) \in \text{int}(S^*x)$. Isto significa que $y \in \phi^{-1}(\text{int}(S^*x))$. Como ϕ é contínua, tem-se que $y \in \text{int}(S^*x)$. \square

Este lema implica imediatamente nos seguintes enunciados.

Corolário 2.7. Seja D um conjunto de controle. Então

(i) Se $x, y \in D$ e y é auto-acessível, então $y \preceq_s x$.

- (ii) Se $x, y \in D$ e y é auto-acessível, então $y \preceq_s x$.
- (iii) Se $x, y \in D$ são auto-acessíveis, então $x \sim_s y$.
- (iv) Se $x, y \in D$, $[x]_s \neq \emptyset$ e $[y]_s \neq \emptyset$, então $[x]_s = [y]_s$. Além disto, o conjunto de transitividade D_0 of D é dado por

$$D_0 = \{x \in D : x \text{ is auto-acessível}\}. \quad (2.8)$$

Cada conjunto de controle e seu conjunto de transitividade são caracterizados pelas órbita e órbita regressiva de elementos do conjunto de transitividade.

Proposição 2.8. *Seja D um subconjunto não-vazio de X . Então D é um conjunto de controle se, e somente se,*

$$D = \text{cl}(Sx) \cap \text{int}(S^*x), \quad (2.9)$$

para algum $x \in X$, que a fortiori pertence a D_0 . Além disso, se D é um conjunto de controle e $x \in D_0$

$$D = \text{cl}(Sx) \cap \text{int}(S^*x) = \text{cl}(Sx) \cap S^*x \quad (2.10)$$

e

$$D_0 = Sx \cap \text{int}(S^*x) = Sx \cap S^*x = [x] \quad (2.11)$$

Demonstração. Se D é um conjunto de controle e $x \in D_0$, então $D = [x]_w$ e $D_0 = [x]_s$. Tem-se que $D \subset \text{cl}(Sx) \cap \text{int}(S^*x)$, pela definição e pelo Lema 2.6. Por outro lado, se $y \in \text{cl}(Sx) \cap S^*x$, então $x \in Sy \subset \text{cl}(Sy)$. Como $y \in \text{cl}(Sx)$, tem-se que $x \sim_w y$, ou seja, $y \in [x]_w$, o que mostra a equação (2.10).

Para demonstrar a equação (2.11), primeiro mostra-se que $[x] \subset D_0 = [x]_s$. Sejam $y \in [x] \subset [x]_w = D$ e $\phi \in S$ tais que $x = \phi(y)$. Tem-se que $S^*x = S^*y$, de tal modo que

$$y \in \phi^{-1}(\text{int}(S^*x)) \subset \text{int}(S^*x) = \text{int}(S^*y), \quad (2.12)$$

mostrando que $y \in D_0$. Agora, pelo Lema 2.6, tem-se que $[x] = D_0 \subset D \subset \text{int}(S^*x)$. Por outro lado, pela definição, $[x] \subset Sx$. Reciprocamente, $Sx \cap \text{int}(S^*x) \subset Sx \cap S^*x = [x]$, concluindo a demonstração da equação (2.11).

Se $D = \text{cl}(Sx) \cap \text{int}(S^*x) \neq \emptyset$, tem-se que existe $y \in Sx \cap \text{int}(S^*x)$. Então existe $\phi \in S$, tal que $y = \phi(x)$, o que implica que $x \in \phi^{-1}(y) \in \phi^{-1}(\text{int}(S^*)) \subset \text{int}(S^*)$. Portanto $[x]_s \neq \emptyset$, mostrando que $C = [x]_w$ é um conjunto de controle e $x \in C_0$. Pela primeira parte da demonstração, tem-se que $D = C$. \square

Em seguida, apresentam-se outras propriedades do conjunto de transitividade D_0 de um conjunto de controle D . Antes será introduzido o conceito de invariância relativa.

Definição 2.9. *Sejam A e B subconjuntos de X tais que $A \subset B$. Então A é progressivamente invariante em relação a B se $SA \cap B \subset A$. Analogamente, A é regressivamente invariante em relação a B se $S^*A \cap B \subset A$.*

Proposição 2.10. *Seja D um conjunto de controle. Então*

(i) D_0 é progressivamente invariante em relação a D .

(ii) D_0 é denso em D .

Demonstração. (i) Sejam $x \in D_0$ e $\phi \in S$ tal que $\phi(x) \in D$. Pelo Lema 2.6, $\phi(x) \in S^*x$ e claramente $\phi(x) \in Sx$. Portanto, tem-se que $\phi(x) \in Sx \cap S^*x = [x]$, que é igual a D_0 , pela Proposição 2.8.

(ii) Seja $x \in D_0$. Pela Proposição 2.8, tem-se que $D_0 = [x]$ e $D = \text{cl}(Sx) \cap \text{int}(S^*x)$. Sejam $y \in D$ e V uma vizinhança de y . Tem-se que $y \in V \cap \text{int}(S^*x)$ e, como $y \in \text{cl}(Sx)$, segue que

$$V \cap \text{int}(S^*x) \cap Sx \neq \emptyset. \quad (2.13)$$

Contudo, pela Proposição 2.8, tem-se que $D_0 = \text{int}(S^*x) \cap Sx$. Logo qualquer vizinhança de $y \in D$ intercepta D_0 , demonstrando a proposição. \square

A ordem entre os conjuntos de controle é definida de tal modo que, se D e D' são conjuntos de controle, então $D \leq D'$ se, e somente se, $x \leq x'$, para algum $x \in D_0$ e algum $x' \in D'_0$.

Proposição 2.11. *Sejam D e D' conjuntos de controle. Então $D \leq D'$ se, e somente se, $x \leq x'$, para todos $x \in D_0$ e $x' \in D'_0$.*

Demonstração. Se $D \leq D'$, então existem $x \in D_0$, $x' \in D'_0$ tais que $x \leq x'$. Pela Proposição 2.8, para todos $y \in D_0$ e $y' \in D'_0$, tem-se que $x \sim y$ e $x' \sim y'$, o que implica que $y \leq y'$. A afirmação recíproca é imediata. \square

Conclui-se esta subseção geral introduzindo-se as seguintes condições nos semigrupos locais, que serão usadas frequentemente.

Definição 2.12. *O semigrupo S é acessível num subconjunto $A \subset X$ se $\text{int}(Sx) \neq \emptyset$ para todo $x \in A$. Ele é denominado regressivamente acessível em A , se $\text{int}(S^*x) \neq \emptyset$ para todo $x \in A$. Se $A = X$ diz-se simplesmente que S é, respectivamente, acessível ou regressivamente acessível.*

2.1.3 Conjuntos de Controle Invariantes

Um conjunto de controle é denominado *S-invariante* se como conjunto ele é *S*-invariante. De maneira análoga, um conjunto de controle é *regressivamente invariante* (ou *S*-invariante*) se como conjunto ele é regressivamente invariante (ou *S*-invariante*). Os conjuntos de controle *S*-invariante e *S*-invariante* possuem propriedades especiais que os distinguem dos demais conjuntos de controle. Nos enunciados seguintes, apresenta-se algumas destas propriedades e se estabelecem as relações entre a invariância do conjunto de controle propriamente dito e a do seu conjunto de transitividade.

A próxima proposição mostra, em particular, que os conjuntos de controle *S*-invariantes* são conjuntos abertos.

Proposição 2.13. *Seja D um conjunto de controle tal que D_0 é S^* -invariante. Então*

$$D = D_0 = S^*x = \text{int}(S^*x), \quad (2.14)$$

para todo $x \in D_0$. Em particular, D é S^* -invariante.

Demonstração. Pela S^* -invariância de D_0 , tem-se que $\text{int}(S^*x) \subset S^*x \subset D_0 \subset D$. Por outro lado, pelo Corolário 2.7 (4) qualquer $x \in D_0$ é auto-acessível e, portanto, pelo Lema 2.6, tem-se que $D \subset \text{int}(S^*x)$, mostrando as igualdades. \square

Proposição 2.14. *Sejam S um semigrupo local regressivamente acessível e D um conjunto de controle. Então D é S^* -invariante se, e somente se, D_0 é S^* -invariante.*

Demonstração. Se D é S^* -invariante, sejam $x \in D_0$, $\phi \in S$ e $y \in X$ tais que $\phi(y) = x$. Pela S^* -invariância de D , tem-se que $y \in D$ e $\text{int}(S^*y) \subset S^*y \subset D$. Como S é regressivamente acessível e D_0 é denso em D , tem-se que $\text{int}(S^*y) \cap D_0 \neq \emptyset$. Logo existem $z \in D_0$ e $\varphi \in S$ tais que $y = \varphi(z)$. Pela Proposição 2.10, tem-se que $y \in D_0$, mostrando que D_0 é S^* -invariante. A recíproca segue diretamente da Proposição 2.13. \square

Agora consideram-se os conjuntos de controle S -invariantes. A proposição seguinte caracteriza, sob a hipótese de acessibilidade de S , quando uma classe fraca é S -invariante.

Proposição 2.15. *Sejam S um semigrupo local acessível e D uma classe fraca. Então os seguintes enunciados são equivalentes:*

- (i) $\text{cl}(Sx) \subset \text{cl}D$ para todo $x \in D$;
- (ii) D é fechado e S -invariante;
- (iii) $\text{cl}D$ is S -invariante.

Demonstração. As implicações (ii) \Rightarrow (iii) e (iii) \Rightarrow (i) são imediatas e não requerem acessibilidade. Supondo-se (i), tem-se que $\text{cl}D$ é S -invariante pelo Lema 2.2. Agora seja $y \in \text{cl}D$. Pela hipótese de acessibilidade, tem-se que $\text{int}(Sy) \neq \emptyset$ e está contido em $\text{cl}D$. Logo $D \cap \text{int}(Sy) \neq \emptyset$. Se $x \in D \cap \text{int}(Sy)$, então $x \in \text{cl}(Sy)$ e, por hipótese, $y \in \text{cl}D = \text{cl}(Sx)$. Como $x \in D$, segue que $y \in D = \text{cl}D$, concluindo a demonstração. \square

Se o espaço topológico X , onde age o semigrupo local S , é compacto, então a existência de conjuntos de controle S -invariantes é assegurada, desde que as órbitas regressivas de S sejam todas abertas.

Proposição 2.16. *Seja S um semigrupo local agindo no espaço compacto X e tal que todas as suas órbitas regressivas sejam abertas. Para todo $x \in X$, existe um conjunto de controle S -invariante contido em $\text{cl}(Sx)$.*

Demonstração. Definindo-se a família $\mathcal{F} = \{\text{cl}(Sy) : y \in \text{cl}(Sx)\}$, tem-se que ela é não vazia, seus elementos são subconjuntos S -invariantes e pode ser ordenada pela inclusão. Seja $\{\text{cl}(Sy_i) : i \in I\}$ uma cadeia, isto é, tal que, para $i, j \in I$, tem-se que $\text{cl}(Sy_i) \subset \text{cl}(Sy_j)$ ou a inclusão recíproca. Pela condição de interseção finita não-vazia e como X é compacto, tem-se que existe $z \in \bigcap_{i \in I} \text{cl}(Sy_i)$. Logo $\text{cl}(Sz) \in \mathcal{F}$ e está contida em $\text{cl}(Sy_i)$, para todo $i \in I$. Pelo Lema de Zorn, existe $m \in \text{cl}(Sx)$, tal que $D = \text{cl}(Sm)$ é elemento minimal de \mathcal{F} e, portanto, tem-se que $D = \text{cl}(Sa)$, para todo $a \in D$. Isto implica que $D \subset [a]_w$, para todo $a \in D$. Por outro lado, se $b \in [a]_w$, onde $a \in D$, tem-se que $b \in \text{cl}(Sa) = D$, mostrando que $D = [a]_w$, para todo $a \in D$. Como D é S -invariante, se $a \in D$ e $\phi \in S$, então $b = \phi(a) \in D$. Logo $\text{cl}(Sb) \cap S^*b \neq \emptyset$ e, como S^*b é aberto por hipótese, pela Proposição 2.8, tem-se que $D = [b]_w$ é um conjunto de controle S -invariante. \square

O resultado seguinte fornece uma condição suficiente para a unicidade de conjuntos de controle S -invariantes.

Corolário 2.17. *Seja S um semigrupo local agindo no espaço compacto X e tal que todas as suas órbitas regressivas sejam abertas. Se*

$$C = \bigcap_{x \in X} \text{cl}(Sx) \neq \emptyset. \quad (2.15)$$

então existe um único conjunto de controle S -invariante D em X e, além disto, $C \subset D$.

Demonstração. Claramente $C \subset D$, para todo conjunto de controle S -invariante D , já que para todo $x \in D$, tem-se que $C \subset \text{cl}(Sx) \subset D$. Logo, se $C \neq \emptyset$, existe no máximo um conjunto de controle S -invariante em X . Portanto o resultado segue direto da Proposição 2.16. \square

Lema 2.18. *Seja D um conjunto de controle e seja $x \in D$ tal que $\text{cl}(Sx) \cap (\text{cl}D)^c \neq \emptyset$. Então, para todo $y \in D$, existe $\phi \in S$ tal que $\phi(y)$ não está em $\text{cl}D$.*

Demonstração. Como $\text{cl}(Sx)$ encontra o conjunto aberto $(\text{cl}D)^c$, existe $\psi \in S$ tal que $\psi(x)$ não está em $\text{cl}D$. Pela continuidade de ψ existe uma vizinhança V de x tal que $\psi(V) \subset (\text{cl}D)^c$. Pela densidade de D_0 em D , para todo $y \in D$, existe $\eta \in S$ tal que $\eta(y) \in V$. Logo, definindo-se $\phi = \psi \circ \eta \in S$, tem-se que $\phi(y)$ está fora de $\text{cl}D$, concluindo a demonstração. \square

Corolário 2.19. *Se $Sy \subset \text{cl}D$, para algum $y \in D$, então $SD \subset \text{cl}D$.*

Proposição 2.20. *Sejam S um semigrupo local regressivamente acessível e D um conjunto de controle. Então D é S -invariante se, e somente se, existe $x \in D$ tal que $Sx \subset \text{cl}D$.*

Demonstração. Pelo Corolário 2.19, se $Sx \subset \text{cl}D$, para algum $x \in D$, então $SD \subset \text{cl}D$. Logo $\text{cl}(Sy) \subset \text{cl}D$ para todo $y \in D$ e, pela Proposição 2.15, D é S -invariante. \square

Corolário 2.21. *Sejam S um semigrupo local regressivamente acessível e D um conjunto de controle. Então D é S -invariante se, e somente se, D_0 é S -invariante.*

Demonstração. Pela Proposição 2.20, se D_0 is S -invariant, então D é S -invariante. Reciprocamente, se D é S -invariante, tem-se, pela Proposição 2.10, que D_0 é S -invariante. \square

2.2 Semigrupos de Sombreamento

Introduz-se, nesta seção, o conceito de semigrupos de sombreamento de um semifluxo. Estes fornecem uma completa caracterização da transitividade por cadeias em termos da ação de semigrupos locais de aplicações contínuas. O princípio básico é realizar os saltos arbitrários de uma cadeia através de aplicações dentro de um semigrupo local prescrito e explorar as vantagens topológicas desta nova abordagem.

Dada uma cobertura aberta \mathcal{U} de X , define-se a S -vizinhança da aplicação identidade de X relativa a \mathcal{U} como

$$N_{S,\mathcal{U}} = \{\phi \in S : \forall x \in \text{dom}\phi, \exists U_x \in \mathcal{U} \text{ such that } x, \phi(x) \in U_x\}. \quad (2.16)$$

No caso em que X é um espaço métrico compacto e convexo (c.f. equação (5.24)), para cada $\varepsilon > 0$, \mathcal{B}_ε denota a cobertura constituída pela totalidade das ε -bolas de X . Quando S é um semigrupo de aplicações contínuas definidas em todo X , então $N_{S,\mathcal{B}_\varepsilon}$ é simplesmente a interseção de S com a bola aberta em $C(X)$, centrada na identidade de X e de raio 2ε , onde $C(X)$ é munido com a métrica do supremo.

Para se contruir uma teoria de perturbações contínuas do semifluxo σ , deve-se partir de semigrupos locais S que possuam a propriedade de transitividade adequada, enunciada na definição abaixo.

Definição 2.22. *Sejam S um semigrupo local agindo em X e \mathcal{O} uma família de coberturas abertas de X . Diz-se que S é \mathcal{O} -localmente transitivo se dada uma cobertura $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e um aberto $U \in \mathcal{U}$, para todos $x, y \in U$, existe $\phi \in N_{S,\mathcal{U}}$ tal que $\phi(x) = y$.*

Antes de continuar, observa-se que para todo espaço topológico X e toda família arbitrária \mathcal{O} de coberturas abertas de X , qualquer semigrupo local S contendo as funções constantes é \mathcal{O} -localmente transitivo. De fato, se $U \subset X$ é qualquer conjunto aberto e $x, y \in U$, então a aplicação constante $\phi : U \rightarrow X$, $\phi(z) = y$, $z \in U$ pertence a $N_{S,\mathcal{U}}$ para toda cobertura aberta \mathcal{U} contendo U .

Este exemplo mostra que a condição de transitividade local é satisfeita por diversos semigrupos locais, de modo que as perturbações dos semifluxos podem ser realizadas em grande generalidade.

Definição 2.23. *Seja S um semigrupo local agindo em X . Para cada cobertura aberta \mathcal{U} e tempo $t \in \mathbb{T}$, define-se o (\mathcal{U}, t) -conjunto de sombreamento do semifluxo σ contido em S como*

$$\overline{S}_{t,\mathcal{U}} = \{\phi\sigma_s : \phi \in N_{S,\mathcal{U}} \text{ e } s \geq t\}.$$

O (\mathcal{U}, t) -semigrupo de sombreamento do semifluxo σ contido em S é o semigrupo local gerado por $\overline{S}_{t,\mathcal{U}}$ e é denotado por $S_{t,\mathcal{U}}$.

Observando-se que, dado tempo $t \in \mathbb{T}$, a família $\Sigma_t = \{\sigma_s : s \geq t\}$ é um semigrupo de transformações contínuas agindo no espaço de estados X , tem-se que $S_{t,\mathcal{U}} \subset S$, caso $\Sigma_t \subset S$. Observa-se também que, se $t \leq s$ e $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$, então $S_{t,\mathcal{U}} \subset S_{s,\mathcal{V}}$, uma vez que $N_{S,\mathcal{U}} \subset N_{S,\mathcal{V}}$.

Na sequência, consideram-se semigrupos de sombreamento $S_{t,\mathcal{U}}$ tais que \mathcal{U} percorre uma família prefixada \mathcal{O} de coberturas abertas de X e admissível (veja Definição 1.17) e S é um semigrupo local prefixado e \mathcal{O} -localmente transitivo.

O primeiro resultado sobre os semigrupos de sombreamento objetiva mostrar que suas órbitas e órbitas regressiva são conjuntos abertos. Isto é consequência do seguinte fato mais forte.

Proposição 2.24. *Sejam $x \in X$, $t \in \mathbb{T}$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Então $\overline{S}_{t,\mathcal{U}}x$ e $\overline{S}_{t,\mathcal{U}}^*x$ são conjuntos abertos. Além disto,*

$$\overline{S}_{t,\mathcal{U}}x = \bigcup \{U \in \mathcal{U} : U \cap x_t^+ \neq \emptyset\} \quad (2.17)$$

e

$$\overline{S}_{t,\mathcal{U}}^*x = \bigcup \{\sigma_s^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}, x \in U \text{ e } s \geq t\}. \quad (2.18)$$

Demonstração. Seja $y \in \overline{S}_{t,\mathcal{U}}x$. Então existem $\phi \in N_{S,\mathcal{U}}$ e $s \geq t$ tais que $y = \phi(\sigma_s(x))$. Pela definição de $N_{S,\mathcal{U}}$ pode-se encontrar $U \in \mathcal{U}$ tal que $\sigma_s(x)$ e $y \in U$. Isto mostra que o primeiro membro da equação (2.17) está contido no segundo membro. Reciprocamente, seja $y \in U$ com $U \in \mathcal{U}$ e $U \cap x_t^+ \neq \emptyset$. Logo existe $s \geq t$ tal que $\sigma_s(x), y \in U$. Como S é \mathcal{O} -localmente transitivo, existe $\phi \in N_{S,\mathcal{U}}$ tal que $y = \phi(\sigma_s(x)) \in \overline{S}_{t,\mathcal{U}}x$.

Para demonstrar a equação (2.18), seja $y \in \overline{S}_{t,\mathcal{U}}^*x$ de modo que existam $\phi \in N_{S,\mathcal{U}}$ e $s \geq t$ tais que $x = \phi(\sigma_s(y))$. Pela definição de $N_{S,\mathcal{U}}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\sigma_s(y)$ e $x \in U$. Isto mostra que o primeiro membro da equação (2.18) está contido no segundo membro. Reciprocamente, seja $y \in \sigma_s^{-1}(U)$ com $U \in \mathcal{U}$, $s \geq t$ e $x \in U$. Como S é \mathcal{O} -localmente transitivo, existe $\phi \in N_{S,\mathcal{U}}$ tal que $x = \phi(\sigma_s(y))$ o que mostra que $y \in \overline{S}_{t,\mathcal{U}}^*x$. \square

Corolário 2.25. *Sejam $x \in X$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in \mathbb{T}$. Então $S_{t,\mathcal{U}}x$ e $S_{t,\mathcal{U}}^*x$ são conjuntos abertos.*

Demonstração. Definindo-se recursivamente,

$$(\overline{S}_{t,\mathcal{U}}x)_n = \bigcup \{\overline{S}_{t,\mathcal{U}}z : z \in (\overline{S}_{t,\mathcal{U}}x)_{n-1}\}.$$

tem-se que,

$$S_{t,\mathcal{U}}x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\overline{S}_{t,\mathcal{U}}x)_n$$

e, portanto, pela Proposição 2.24, $S_{t,\mathcal{U}}x$ é uma união de conjuntos abertos. No caso das órbitas regressivas procede-se de maneira similar. \square

2.2.1 Semigrupos e Transitividade por Cadeias

O resultado seguinte fornece a principal ligação entre as cadeias do semifluxo e a ação dos seus semigrupos de sombreamento.

Proposição 2.26. *Dados $x \in X$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in \mathbb{T}$, tem-se que $S_{t,\mathcal{U}}x = \Omega(x, \mathcal{U}, t)$ e $S_{t,\mathcal{U}}^*x = \Omega^*(x, \mathcal{U}, t)$ (c.f. equação (1.27)).*

Demonstração. Sejam $y \in S_{t,\mathcal{U}}x$ e $\psi \in S_{t,\mathcal{U}}$ tal que $y = \psi(x)$. Tem-se que $\psi = \psi_k \cdots \psi_1$, com $\psi_i \in \bar{S}_{t,\mathcal{U}}$, $i = 1, \dots, k$. Pelas definições, tem-se que $\psi_i = \phi_i \sigma_{s_i}$, onde $\phi_i \in N_{S,\mathcal{U}}$ e $s_i \geq t$. Definindo-se $x_1 = x$ e $x_{i+1} = \psi_i(x_i)$, tem-se que $y = x_{k+1}$ e, pela definição de $N_{S,\mathcal{U}}$, existe $U_i \in \mathcal{U}$ tal que $x_{i+1} = \psi_i(x_i) = \phi_i(\sigma_{s_i}(x_i))$ e $\sigma_{s_i}(x_i)$ estão em U_i . Portanto $y \in \Omega(x, \mathcal{U}, t)$.

Reciprocamente, se $y \in \Omega_{\mathcal{O}}(x, \mathcal{U}, t)$, existem uma seqüência de pontos $\{x = x_1, \dots, x_{n+1} = y\} \subset X$, uma seqüência de tempos $\{t_1, \dots, t_n\} \subset \mathbb{T}$ e uma seqüência de conjuntos abertos $\{U_1, \dots, U_n\} \subset \mathcal{U}$ tais que $t_i \geq t$ e $\sigma_{t_i}(x_i), x_{i+1} \subset U_i$, para todo $i = 1, \dots, n$. Como S é \mathcal{O} -localmente transitivo, para cada $i = 1, \dots, n$, existe $\phi_i \in N_{S,\mathcal{U}}$ tal que $\phi_i(\sigma_{t_i}(x_i)) = x_{i+1}$. Pelas definições, denotando-se $\psi = \psi_k \cdots \psi_1$, onde $\psi_i = \phi_i \sigma_{s_i}$, tem-se que $y = \psi(x) \in S_{t,\mathcal{U}}x$.

A segunda igualdade segue diretamente da primeira, uma vez que

$$S_{t,\mathcal{U}}^*x = \{y \in X : x \in S_{t,\mathcal{U}}y\}. \quad (2.19)$$

□

Pelo Corolário 2.25, as órbitas regressivas dos semigrupos de sombreamento são conjuntos abertos. Pela Proposição 2.8, dados $x \in X$, $t \in \mathbb{T}$ e $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$, se

$$D_{x,t,\mathcal{W}} = \text{cl}(S_{t,\mathcal{W}}x) \cap S_{t,\mathcal{W}}^*x. \quad (2.20)$$

é um subconjunto não vazio, então ele é um conjunto de controle de $S_{t,\mathcal{W}}$ e tem-se que

$$(D_{x,t,\mathcal{W}})_0 = S_{t,\mathcal{W}}x \cap S_{t,\mathcal{W}}^*x. \quad (2.21)$$

O próximo corolário é consequência direta do Lema 1.22 e da Proposição 2.26.

Corolário 2.27. *Sejam $x \in X$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in \mathbb{T}$. Se $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$, então*

- (i) $\text{cl}(S_{t,\mathcal{V}}x) \subset S_{t,\mathcal{U}}x$,
- (ii) $\text{cl}(S_{t,\mathcal{V}}^*x) \subset S_{t,\mathcal{U}}^*x$ e
- (iii) $\text{cl}(D_{x,t,\mathcal{V}})_0 \subset (D_{x,t,\mathcal{U}})_0$.

O resultado seguinte estabelece a principal conexão entre as componentes transitivas por cadeias do semifluxo e os conjuntos de controle dos seus semigrupos de sombreamento, reduzindo o estudo destas à teoria de semigrupos.

Teorema 2.28. *Sejam \mathcal{O} uma família admissível de coberturas abertas de X e S um semigrupo local \mathcal{O} -localmente transitivo agindo em X . Seja \mathcal{M} um subconjunto não-vazio de X . Então a seguinte condição é necessária e suficiente para que \mathcal{M} seja uma \mathcal{O} -componente transitiva por cadeias:*

- *Para todo semigrupo de sombreamento $S_{t,\mathcal{U}}$, onde $t \in \mathbb{T}$ e $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe um conjunto de controle $D_{\mathcal{M},t,\mathcal{U}}$ contendo \mathcal{M} e tal que*

$$\mathcal{M} = \bigcap_{\mathcal{U},t} (D_{\mathcal{M},t,\mathcal{U}})_0 = \bigcap_{\mathcal{U},t} \text{cl}(D_{\mathcal{M},t,\mathcal{U}}). \quad (2.22)$$

Demonstração. Seja \mathcal{M} tal que, para todo $S_{t,\mathcal{U}}$, existe $D_{\mathcal{M},t,\mathcal{U}}$ contendo \mathcal{M} e tal que a equação (2.22) é verificada. Se $x, y \in \mathcal{M}$, então $x, y \in (D_{\mathcal{M},t,\mathcal{U}})_0$ e, pelas Proposições 2.26 e 2.8, tem-se que $y \in S_{t,\mathcal{U}}x = \Omega(x, \mathcal{U}, t)$. Então $y \in \Omega_{\mathcal{O}}(x)$ e \mathcal{M} é transitivo por cadeias. Para mostrar a maximalidade, seja $z \in X$ tal que $z \in \Omega_{\mathcal{O}}(x)$ e $x \in \Omega_{\mathcal{O}}(z)$ para todo $x \in \mathcal{M}$. Então, pela Proposição 2.26, para toda cobertura $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e tempo $t \in \mathbb{T}$, tem-se que $x \in S_{t,\mathcal{U}}z$ e $z \in S_{t,\mathcal{U}}x$. Logo, pela Proposição 2.8, tem-se que $z \in (D_{\mathcal{M},t,\mathcal{U}})_0$ e, portanto, pela equação (2.22), segue que $z \in \mathcal{M}$, mostrando que \mathcal{M} é uma componente transitiva por cadeias.

Reciprocamente, seja \mathcal{M} uma componente transitiva por cadeias. Pela Proposição 2.26, se $x, y \in \mathcal{M}$, segue que $y \in \Omega(x, \mathcal{U}, t) = S_{t,\mathcal{U}}x$ e $x \in \Omega(y, \mathcal{U}, t) = S_{t,\mathcal{U}}y$, para toda cobertura $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e tempo $t \in \mathbb{T}$. Logo, para todo $x \in \mathcal{M}$, tem-se que $\mathcal{M} \subset S_{t,\mathcal{U}}x \cap S_{t,\mathcal{U}}^*x$. Pelos Corolário 2.25 e Proposição 2.26, tem-se que $D_{\mathcal{M},t,\mathcal{U}} = \text{cl}(S_{t,\mathcal{U}}x) \cap S_{t,\mathcal{U}}^*x$ é um conjunto de controle tal que $\mathcal{M} \subset (D_{\mathcal{M},t,\mathcal{U}})_0$. Portanto

$$\mathcal{M} \subset \bigcap_{\mathcal{U},t} (D_{\mathcal{M},t,\mathcal{U}})_0 \quad (2.23)$$

e a igualdade segue da primeira parte da demonstração.

A segunda igualdade da equação (2.22) é conseqüência imediata do Corolário 2.27 e da Proposição 2.10. \square

Uma outra aplicação da descrição das cadeias através dos semigrupos de sombreamento é a caracterização do domínio de atração de uma componente transitiva por cadeias \mathcal{M} como a interseção dos domínios de atração dos conjuntos de controle que contêm \mathcal{M} .

O \mathcal{O} -domínio de atração por cadeias $A_{\mathcal{O}}(\mathcal{M})$ de uma \mathcal{O} -componente transitiva por cadeias \mathcal{M} de um semifluxo em X é definido como o conjunto dos pontos $x \in X$ para os quais existe $y \in \mathcal{M}$ tal que $x \preceq_{\mathcal{O}} y$, i.e., $y \in \Omega_{\mathcal{O}}(x)$. O \mathcal{O} -domínio de repulsão por cadeias $R_{\mathcal{O}}(\mathcal{M})$ é definido como o conjunto daqueles $x \in X$ para os quais existe $y \in \mathcal{M}$ tal que $y \preceq_{\mathcal{O}} x$. Analogamente, se D é um conjunto de controle de um semigrupo local S , seu domínio de atração $A(D)$ é o conjunto dos $x \in X$ tais que existe $\phi \in S$ com $\phi(x) \in D_0$, i.e., $x \preceq_S y$, para algum $y \in D_0$. Seu domínio de repulsão $R(D)$ é o conjunto dos $x \in X$ tais que $y \preceq_S x$, para algum $y \in D_0$. É uma conseqüência imediata das definições que $\mathcal{M} = A(\mathcal{M}) \cap R(\mathcal{M})$ e $D_0 = A(D) \cap R(D)$.

Proposição 2.29. *Mantendo-se as notações e hipóteses do Teorema 2.28, tem-se que domínio de atração por cadeias de uma \mathcal{O} -componente transitiva \mathcal{M} é dado por*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}) = \bigcap_{\mathcal{U}, T} \mathcal{A}(D_{\mathcal{M}, t, \mathcal{U}}).$$

Analogamente, $\mathcal{R}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}) = \bigcap_{\mathcal{U}, T} \mathcal{R}(D_{\mathcal{M}, t, \mathcal{U}})$.

Demonstração. Seja $x \in \mathcal{A}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M})$. Então, existe $y \in \mathcal{M}$ tal que $y \in \Omega_{\mathcal{O}}(x, \mathcal{U}, t)$ para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in \mathbb{T}$. Pela Proposição 2.26, existe $\phi \in S_{t, \mathcal{U}}$ tal que $\phi(x) = y$. Portanto, $x \in \mathcal{A}(D_{\mathcal{M}, t, \mathcal{U}})$ para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in \mathbb{T}$. Então $x \in \bigcap_{\mathcal{U}, T} \mathcal{A}(D_{\mathcal{M}, t, \mathcal{U}})$. Para a recíproca, seja $x \in \bigcap_{\mathcal{U}, T} \mathcal{A}(D_{\mathcal{M}, t, \mathcal{U}})$. Logo, para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in \mathbb{T}$, existem $\phi \in S_{t, \mathcal{U}}$ e $y \in (D_{\mathcal{M}, t, \mathcal{U}})_0$ tais que $\phi(x) = y$. Tomando-se $z \in \mathcal{M} \subset (D_{\mathcal{M}, t, \mathcal{U}})_0$, existe $\psi \in$ tal que $\psi(y) = z$. Logo $\phi\psi(x) = z$ e, e pela Proposição 2.26, tem-se que $z \in \Omega_{\mathcal{O}}(x, \mathcal{U}, t)$, para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $t \in \mathbb{T}$. Portanto $x \in \mathcal{A}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M})$. \square

Capítulo 3

Conjuntos de Controle em Flags

Este capítulo apresenta a teoria de semigrupos de San Martin. Esta teoria trata da análise dos conjuntos de controle de semigrupos S contidos num grupo de Lie G semi-simples, agindo nas suas variedades flag generalizadas (c.f. [33], [34], [35], [36] e [39]). Este capítulo depende fundamentalmente dos Apêndices A e B, que tratam da teoria de Lie semi-simples real.

3.1 Objetos Canônicos e Conjugações

Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples real e G um grupo de Lie conexo cuja álgebra de Lie é \mathfrak{g} . Como apresentado no Apêndice A, um terno admissível $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ determina uma série de objetos algébricos tais como: (1) um grupo de Weyl W , (2) um sistema de (co-)raízes Π ($\Pi_{\mathfrak{a}}$), junto com um sistema simples de (co-)raízes Σ ($\Sigma_{\mathfrak{a}}$), (3) para cada $\Theta \subset \Sigma$, a subálgebra parabólica \mathfrak{p}_{Θ} e o subgrupo parabólico P_{Θ} , (4) as decomposições de Iwasawa de \mathfrak{p} e P e (5) o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\theta}$ restrito a \mathfrak{a} . O conjunto das câmaras de Weyl em G é definido por

$$\mathcal{C} = \{\exp(\mathfrak{a}^+) : (\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+) \text{ terno admissível}\}. \quad (3.1)$$

O grupo G age nele mesmo por conjugação, na álgebra através da ação adjunta e no dual da álgebra pela ação co-adjunta. Será utilizada a seguinte notação para a ação adjunta de G nestes objetos

- (i) $gwg^{-1} = \text{Ad}(g)w\text{Ad}(g^{-1})$, para $w \in W$,
- (ii) $g\alpha = \text{Ad}(g)^*\alpha$, para $\alpha \in \Pi$ e
- (iii) $gX = \text{Ad}(g)X$, para $X \in \mathfrak{g}$.

O lema seguinte mostra que os objetos apresentados acima são determinados apenas pelas câmaras de Weyl e descreve como os objetos são relacionados com os objetos determinados por câmaras conjugadas.

Lema 3.1. *Se $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ e $(\bar{\theta}, \bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{a}}^+)$ são ternos admissíveis tais que $\mathfrak{a}^+ = \bar{\mathfrak{a}}^+$, então eles determinam os mesmos objetos (1) – (5) mencionados acima. Assim estes objetos são determinados por cada câmara de Weyl $\lambda \in \mathcal{C}$ e serão denotados pela justaposição de (λ) a sua direita. Além disto, para cada $g \in G$, tem-se que*

$$(i) \quad W(g\lambda g^{-1}) = gW(\lambda)g^{-1},$$

$$(ii) \quad \mathfrak{a}(g\lambda g^{-1}) = g\mathfrak{a}(\lambda) \text{ e o mesmo para } \mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \Pi, \Sigma, \Pi_{\mathfrak{a}}, \text{ e } \Sigma_{\mathfrak{a}},$$

$$(iii) \quad N(g\lambda g^{-1}) = gN(\lambda)g^{-1} \text{ e o mesmo para } A, M,$$

$$(iv) \quad \mathfrak{p}_{g\Theta}(g\lambda g^{-1}) = g\mathfrak{p}_{\Theta}(\lambda), \text{ para cada } \Theta \subset \Sigma(\lambda),$$

$$(v) \quad P_{g\Theta}(g\lambda g^{-1}) = gP_{\Theta}(\lambda)g^{-1}, \text{ para cada } \Theta \subset \Sigma(\lambda) \text{ e}$$

$$(vi) \quad \langle gH, g\tilde{H} \rangle(g\lambda g^{-1}) = \langle H, \tilde{H} \rangle(\lambda), \text{ para todos } H, \tilde{H} \in \mathfrak{a}(\lambda).$$

Além disso, se $\lambda, \nu \in \mathcal{C}$, então existe $g \in G$ tal que $\nu = g\lambda g^{-1}$.

Demonstração. Pelos Teoremas A.12, A.19 e A.35 e Proposição A.15, as relações (i) – (vi) são satisfeitas, substituindo-se λ pelo terno admissível $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ e $g\lambda g^{-1}$ pelo terno admissível $(\text{Ad}(g)\theta\text{Ad}(g)^{-1}, g\mathfrak{a}, g\mathfrak{a}^+)$. Pelo Teorema A.19, existe $g \in G$ tal que $(\bar{\theta}, \bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{a}}^+) = (\text{Ad}(g)\theta\text{Ad}(g)^{-1}, g\mathfrak{a}, g\mathfrak{a}^+)$ e, portanto, $g\mathfrak{a}^+ = \text{Ad}(g)\mathfrak{a}^+ = \mathfrak{a}^+$. Pela Proposição A.43, tem-se que $g \in MA$. Isto implica, utilizando as relações (i) – (v), que $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ e $(\bar{\theta}, \bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{a}}^+)$ determinam os mesmos objetos (1) – (4) mencionados acima. Para obter o mesmo para o objeto (5), basta observar que, se $g \in MA$ e $H, \tilde{H} \in \mathfrak{a}(\lambda)$, então

$$\langle H, \tilde{H} \rangle_{g\theta g^{-1}} = \langle gH, g\tilde{H} \rangle_{g\theta g^{-1}} = \langle H, \tilde{H} \rangle_{\theta}. \quad (3.2)$$

Portanto estes objetos são determinados por \mathfrak{a}^+ e, conseqentemente, por $\lambda = \exp(\mathfrak{a}^+) \in \mathcal{C}$. As relações (i) – (vi) seguem do que foi observado acima e do fato de que $g\lambda g^{-1} = \exp(\text{Ad}(g)\mathfrak{a}^+) = \exp(g\mathfrak{a}^+)$. A última afirmação do lema é conseqência do Teorema A.19. \square

Defindo-se

$$\mathcal{W} = \{(\lambda, w) : \lambda \in \mathcal{C}, w \in W(\lambda)\}, \quad (3.3)$$

tem-se que a ação adjunta de G em \mathcal{W} , dada por

$$g(\lambda, w) = (g\lambda g^{-1}, gw g^{-1}) \quad (3.4)$$

onde $g \in G$, está bem definida, pois, pelo Lema 3.1, $gw g^{-1} \in W(g\lambda g^{-1})$. O quociente de \mathcal{W} por esta ação de G , é denotado por W e denominado *grupo de Weyl canônico de \mathfrak{g}* . Um elemento de W é uma órbita de um par (λ, w) denotada por $[(\lambda, w)]$. A proposição seguinte justifica a nomenclatura empregada.

Proposição 3.2. *Para cada $\lambda \in \mathcal{C}$ e $w \in W$, existe um único $w(\lambda) \in W(\lambda)$ tal que $w = [(\lambda, w(\lambda))]$. Para cada $\lambda \in \mathcal{C}$, a aplicação $w \mapsto w(\lambda)$ é um isomorfismo canônico entre o grupo de Weyl $W(\lambda)$ e o grupo de Weyl canônico W , onde, para todos $w, \tilde{w} \in W$, o produto dado por*

$$w\tilde{w} = [(\lambda, w(\lambda)\tilde{w}(\lambda))] \quad (3.5)$$

e a inversa dada por

$$w^{-1} = [(\lambda, w(\lambda)^{-1})] \quad (3.6)$$

estão bem definidos. Além disto, para todo $g \in G$, tem-se que $w(g\lambda g^{-1}) = gw(\lambda)g^{-1}$.

Demonstração. Sejam $\lambda \in \mathcal{C}$ e $s = [(\lambda, \tilde{s})] \in W$. Por definição, se $\hat{s} \in W(\lambda)$ é tal que $s = [(\lambda, \hat{s})]$, então existe $g \in G$ tal que $\lambda = g\lambda g^{-1}$ e $\hat{s} = g\tilde{s}g^{-1}$. Pela Proposição A.43, tem-se que $g \in MA$ e, portanto, $s(\lambda) = \tilde{s} = \hat{s}$. Para todo $g \in G$, tem-se que $(g\lambda g^{-1}, gs(\lambda)g^{-1}) \in \mathcal{W}$ e $s = [(g\lambda g^{-1}, gs(\lambda)g^{-1})]$, mostrando que $s(g\lambda g^{-1})$ está bem definida e é igual a $gs(\lambda)g^{-1}$. Se $w \in W$, tem-se que $w = [(\nu, w(\nu))]$, para algum $\nu \in \mathcal{C}$. Pelo Lema 3.1, existe $g \in G$ tal que $\lambda = g\nu g^{-1}$, o que implica que $w(\lambda)$ está bem definida para todo $w \in W$.

Para mostrar que o produto dado por (3.5) e a inversa dada por (3.6) estão bem definidos, sejam $\lambda, \nu \in \mathcal{C}$. Pela primeira parte da demonstração, existe $g \in G$ tal que $\nu = g\lambda g^{-1}$. Logo, como $w(g\lambda g^{-1}) = gw(\lambda)g^{-1}$, para todo $w \in W$, tem-se que

$$[(\nu, w(\nu)\tilde{w}(\nu))] = [(g\lambda g^{-1}, gw(\lambda)\tilde{w}(\lambda)g^{-1})] = [(\lambda, w(\lambda)\tilde{w}(\lambda))]. \quad (3.7)$$

e

$$[(\nu, w(\nu)^{-1})] = [(g\lambda g^{-1}, gw(\lambda)^{-1}g^{-1})] = [(\lambda, w(\lambda)^{-1})]. \quad (3.8)$$

Isto mostra que a aplicação $w \mapsto w(\lambda)$ é claramente um homomorfismo do grupo W no grupo $W(\lambda)$. Além disto, ela é injetiva, uma vez que, se $w(\lambda) = s(\lambda)$, então

$$w = [(\lambda, w(\lambda))] = [(\lambda, s(\lambda))] = s. \quad (3.9)$$

Por outro lado, ela é também sobrejetiva, já que, se $\tilde{w} \in W(\lambda)$, então $w(\lambda) = \tilde{w}$, onde $w = [(\lambda, \tilde{w})] \in W$. \square

Seja $\pi_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{C}$ a projeção natural associada ao conjunto \mathcal{W} , definido em (3.3), dada por $\pi_{\mathcal{W}}(\lambda, w(\lambda)) = \lambda$, para todo $(\lambda, w(\lambda)) \in \mathcal{W}$. A Proposição 3.2 mostra que esta fibração é isomorfa a fibração trivial $\text{pr}_1 : \mathcal{C} \times W \rightarrow \mathcal{C}$, pois o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \times W & \xrightarrow{\phi_{\mathcal{W}}} & \mathcal{W} \\ & \searrow \text{pr}_1 & \swarrow \pi_{\mathcal{W}} \\ & & \mathcal{C} \end{array} \quad (3.10)$$

onde $\phi_{\mathcal{W}}(\lambda, w) = (\lambda, w(\lambda))$, para todos $\lambda \in \mathcal{C}$ e $w \in W$.

Construções similares podem ser repetidas para se obter objetos canônicos de cada um dos objetos determinados por elementos de \mathcal{C} . Definindo-se

$$\mathcal{A} = \{(\lambda, H) : \lambda \in \mathcal{C}, H \in \mathfrak{a}(\lambda)\}, \quad (3.11)$$

tem-se que a ação adjunta de G em \mathcal{A} , dada por

$$g(\lambda, H) = (g\lambda g^{-1}, gH) \quad (3.12)$$

onde $g \in G$, também está bem definida, pois, novamente pelo Lema 3.1, $gH \in \mathfrak{a}(g\lambda g^{-1})$. O quociente de \mathcal{A} por esta ação de G , é denotado por \mathfrak{a} e denominado *abeliano maximal canônico de \mathfrak{g}* .

Proposição 3.3. *Para cada $\lambda \in \mathcal{C}$ e $H \in \mathcal{A}$, existe um único $H(\lambda) \in \mathfrak{a}(\lambda)$ tal que $H = [(\lambda, H(\lambda))]$. Fixando-se $\lambda \in \mathcal{C}$, a aplicação $H \mapsto H(\lambda)$ é uma isometria linear entre o espaço de Hilbert $(\mathfrak{a}(\lambda), \langle \cdot, \cdot \rangle(\lambda))$ e o espaço de Hilbert $(\mathfrak{a}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, onde, para todos $H, \tilde{H} \in W$, a soma dada por*

$$H + \tilde{H} = [(\lambda, H(\lambda) + \tilde{w}(\lambda))], \quad (3.13)$$

o produto pelo escalar $c \in \mathbb{R}$ dado por

$$cH = [(\lambda, cH(\lambda))] \quad (3.14)$$

e o produto interno definido por

$$\langle H, \tilde{H} \rangle = \langle H(\lambda), \tilde{H}(\lambda) \rangle(\lambda) \quad (3.15)$$

estão bem definidos. Além disto, para todo $g \in G$, tem-se que $H(g\lambda g^{-1}) = gH(\lambda)$.

Demonstração. A demonstração é análoga a da Proposição 3.2. Resta mostrar que o produto interno dado por (3.15) está bem definido. Para isto, sejam $\lambda, \nu \in \mathcal{C}$. Pelo Lema 3.1, existe $g \in G$ tal que $\nu = g\lambda g^{-1}$. Como, pela Proposição 3.3, $H(g\lambda g^{-1}) = gH(\lambda)$, para todo $w \in W$, tem-se, novamente pelo Lema 3.1, que

$$\langle H(\nu), \tilde{H}(\nu) \rangle(\nu) = \langle gH(\lambda), g\tilde{H}(\lambda) \rangle(g\lambda g^{-1}) = \langle H(\lambda), \tilde{H}(\lambda) \rangle(\lambda). \quad (3.16)$$

□

Analogamente ao caso do grupo de Weyl, a Proposição 3.3 mostra que $\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ (a projeção natural associada ao conjunto \mathcal{A}) é isomorfa a fibração trivial $\text{pr}_1 : \mathcal{C} \times \mathfrak{a} \rightarrow \mathcal{C}$, uma vez que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \times \mathfrak{a} & \xrightarrow{\phi_{\mathcal{A}}} & \mathcal{A} \\ & \searrow \text{pr}_1 & \swarrow \pi_{\mathcal{A}} \\ & & \mathcal{C} \end{array} \quad (3.17)$$

onde $\phi_{\mathcal{A}}(\lambda, H) = (\lambda, H(\lambda))$, para todos $\lambda \in \mathcal{C}$ e $H \in \mathfrak{a}$.

Como os seguintes subconjuntos de \mathcal{A}

$$\mathcal{P} = \{(\lambda, H_{\alpha}) : \lambda \in \mathcal{C}, H_{\alpha} \in \Pi_{\mathfrak{a}}(\lambda)\} \quad (3.18)$$

e

$$\mathcal{S} = \{(\lambda, H_\alpha) : \lambda \in \mathcal{C}, H_\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{a}}(\lambda)\} \quad (3.19)$$

são invariantes pela ação adjunta de G dada por (3.12), eles passam ao quociente \mathfrak{a} e são denotados, respectivamente, por $\Pi_{\mathfrak{a}}$, denominado *sistema de co-raízes platônicas de \mathfrak{g}* , e por $\Sigma_{\mathfrak{a}}$, denominado *sistema simples de co-raízes platônicas de \mathfrak{g}* . Pelos Lema 3.1 e Proposição 3.3, para cada $\lambda \in \mathcal{C}$, a restrição do isomorfismo $H \mapsto H(\lambda)$ aos conjuntos $\Pi_{\mathfrak{a}}$ e $\Sigma_{\mathfrak{a}}$ é uma bijeção entre estes e, respectivamente, $\Pi_{\mathfrak{a}}(\lambda)$ e $\Sigma_{\mathfrak{a}}(\lambda)$. O teorema seguinte mostra que $\Pi_{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{a}$ é um sistema de raízes, no sentido abstrato dado pela Definição 9.1 em [38], e cujo grupo de Weyl associado é W .

Teorema 3.4. *Tem-se que $\Pi_{\mathfrak{a}}$ é um sistema abstrato de raízes de \mathfrak{a} tal que W é o seu grupo de Weyl associado e $\Sigma_{\mathfrak{a}}$ é um sistema simples de raízes. Além disto, para cada $\lambda \in \mathcal{C}$, tem-se que $r_\alpha(\lambda)$ é a reflexão $\langle \cdot, \cdot \rangle(\lambda)$ -ortogonal em relação a $H_\alpha(\lambda)$.*

Demonstração. Pela equação B.20, para cada $\lambda \in \mathcal{C}$ e $H \in \mathfrak{a}$, tem-se que

$$r_\alpha(H)(\lambda) = H(\lambda) - 2 \frac{\langle H, H_\alpha \rangle}{\langle H_\alpha, H_\alpha \rangle} H_\alpha(\lambda) = H(\lambda) - 2 \frac{\langle H(\lambda), H_\alpha(\lambda) \rangle(\lambda)}{\langle H_\alpha(\lambda), H_\alpha(\lambda) \rangle(\lambda)} H_\alpha(\lambda), \quad (3.20)$$

o que mostra que $r_\alpha(H)(\lambda)$ pertence a $W(\lambda)$, que r_α pertence a W e que $r_\alpha(\lambda)$ é a reflexão $\langle \cdot, \cdot \rangle(\lambda)$ -ortogonal em relação a $H_\alpha(\lambda)$. A primeira afirmação do teorema segue do fato de que, para cada $\lambda \in \mathcal{C}$, $\Pi_{\mathfrak{a}}(\lambda)$ é um sistema abstrato de raízes de $\mathfrak{a}(\lambda)$ tal que $W(\lambda)$ é o seu grupo de Weyl associado e $\Sigma_{\mathfrak{a}}(\lambda)$ é o sistema simples de raízes determinado por λ . \square

Se \mathfrak{a}^* denota o espaço dual de \mathfrak{a} , então a aplicação $H \mapsto \langle H, \cdot \rangle$ define um isomorfismo entre \mathfrak{a} e \mathfrak{a}^* . Pode-se então definir

$$\Pi = \{\alpha = \langle H_\alpha, \cdot \rangle : H_\alpha \in \Pi_{\mathfrak{a}}\}, \quad (3.21)$$

denominado *sistema de raízes canônico de \mathfrak{g}* , e

$$\Sigma = \{\alpha \in \Pi : H_\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{a}}\}, \quad (3.22)$$

denominado *sistema simples de raízes canônico de \mathfrak{g}* . Pela equação (3.15), para cada $\lambda \in \mathcal{C}$, a aplicação $\alpha \mapsto \alpha(\lambda)$, onde $\alpha(\lambda)$ é o funcional linear em $\mathfrak{a}(\lambda)$, definido por

$$\alpha(\lambda) = \langle H_\alpha(\lambda), \cdot \rangle(\lambda), \quad (3.23)$$

estabelece uma bijeção entre Π e Σ e, respectivamente, $\Pi(\lambda)$ e $\Sigma(\lambda)$. Além disto, pelos Lema 3.1 e Proposição 3.3, tem-se que

$$\alpha(g\lambda g^{-1}) = \alpha(\lambda), \quad (3.24)$$

para todo $g \in G$.

Se $\Theta \subset \Sigma$, para cada $\lambda \in \mathcal{C}$, denota-se por $\Theta(\lambda) \subset \Sigma(\lambda)$ a imagem de Θ pela aplicação dada pela equação (3.23). Analogamente, tem-se o mesmo para subconjuntos dos outros objetos canônicos.

3.2 Variedades Flag Generalizadas

Se $\Theta \subset \Sigma$, a subálgebra $\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$ parabólica de tipo Θ determinada por λ é, por definição, a subálgebra parabólica $\mathfrak{p}_{\Theta(\lambda)}(\lambda)$ e o subgrupo $P_\Theta(\lambda)$ parabólico de tipo Θ é $P_{\Theta(\lambda)}(\lambda)$.

O flag (generalizado) \mathbb{F}_Θ de tipo Θ é o conjunto

$$\mathbb{F}_\Theta = \{\mathfrak{p}_\Theta(\lambda) : \lambda \in \mathcal{C}\} \quad (3.25)$$

de todas as subálgebras parabólicas de tipo Θ . Quando $\Theta = \emptyset$ o flag $\mathbb{F} = \mathbb{F}_\emptyset$ é denominado *flag (generalizado) maximal de \mathfrak{g}* . A ação adjunta de G em \mathbb{F}_Θ , dada por $g\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$, está bem definida, pois, pelos Lema 3.1 e equação (3.24), tem-se que

$$g\mathfrak{p}_\Theta(\lambda) = g\mathfrak{p}_{\Theta(\lambda)}(\lambda) = \mathfrak{p}_{\Theta(g\lambda g^{-1})}(g\lambda g^{-1}) = \mathfrak{p}_\Theta(g\lambda g^{-1}). \quad (3.26)$$

Proposição 3.5. *Para cada $\lambda \in \mathcal{C}$, existe uma estrutura diferenciável em \mathbb{F}_Θ tal que a aplicação $\phi_{\Theta(\lambda)} : G/P_\Theta(\lambda) \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$, dada por*

$$\phi_{\Theta(\lambda)}(gP_\Theta(\lambda)) = g\mathfrak{p}_\Theta(\lambda), \quad (3.27)$$

é um difeomorfismo. Em particular, a ação de G em \mathbb{F}_Θ é diferenciável e aberta.

Demonstração. Pelo Lema 3.1, a ação adjunta de G , definida pela equação (3.26), é transitiva em \mathbb{F}_Θ . Fixando-se $\lambda \in \mathcal{C}$, o subgrupo de isotropia de $\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$ é o subgrupo parabólico $P_\Theta(\lambda)$, que é fechado em G . Portanto \mathbb{F}_Θ é um espaço homogêneo do grupo de Lie G e o resultado segue da Proposição C.72. \square

3.2.1 Decomposições dos Subgrupos Parabólicos

Seja $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$ uma quadra admissível de \mathfrak{g} , como definido na Seção A.2. O próximo resultado é um refinamento da Proposição A.40, onde o fator M é substituído pelo centralizador de $\mathfrak{g}(\Theta)$ em M . Antes é necessário o seguinte lema.

Lema 3.6. *Se $a \in A$ e $\text{Ad}(a)\mathfrak{k} = \mathfrak{k}$, então $a = 1$.*

Demonstração. Tem-se que $a = \exp(H)$, para algum $H \in \mathfrak{a}$. Pela equação (A.19), tem-se que $\text{Ad}(a) = \text{Ad}(\exp(H)) = e^{\text{ad}(H)}$. Sejam $\alpha \in \Pi$ e $0 \neq X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. Tem-se que $X_\alpha + \theta X_\alpha = 2\kappa(X_\alpha) \in \mathfrak{k}$. Pelo Lema A.14, tem-se que $\theta X_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ e, portanto,

$$e^{\text{ad}(H)}(X_\alpha + \theta X_\alpha) = e^{\alpha(H)}X_\alpha + e^{-\alpha(H)}\theta X_\alpha = Y \in \mathfrak{k}. \quad (3.28)$$

Como $\theta Y = Y$, segue que $e^{\alpha(H)} = e^{-\alpha(H)}$, o que implica que $\alpha(H) = \langle H_\alpha, H \rangle_\theta = 0$. Como $\alpha \in \Pi$ é arbitrário, pela Proposição B.53, tem-se que $H = 0$, mostrando que $a = 1$. \square

Teorema 3.7. *Tem-se que $K_\Theta = (K_\Theta)_0 Z_M(\mathfrak{g}(\Theta))$, onde $Z_M(\mathfrak{g}(\Theta))$ é o centralizador de $\mathfrak{g}(\Theta)$ em M .*

Demonstração. Claramente, tem-se que $(K_\Theta)_0 Z_M(\mathfrak{g}(\Theta)) \subset K_\Theta$. Se $k \in M$, então $\text{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}} = \text{id}_{\mathfrak{a}}$ e, pelo Teorema A.12, tem-se que $\text{Ad}(k)\mathfrak{g}(\Theta) = \mathfrak{g}(\Theta)$ e $\text{Ad}(k)\mathfrak{k}(\Theta) = \mathfrak{k}(\Theta)$. Como $\text{Ad}(k)|_{\mathfrak{g}(\Theta)} \in \text{Aut}(\mathfrak{g}(\Theta))$ e $\text{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}(\Theta)} = \text{id}_{\mathfrak{a}(\Theta)}$, pela Proposição 5.3 do Capítulo IX de [15], tem-se que $\text{Ad}(k)|_{\mathfrak{g}(\Theta)} \in \text{Int}(\mathfrak{g}(\Theta))$ e, portanto, existe $l \in G(\Theta)$ tal que $\text{Ad}(l)|_{\mathfrak{g}(\Theta)} = \text{Ad}(k)|_{\mathfrak{g}(\Theta)}$. Como $l \in Z_{G(\Theta)}(\mathfrak{a}(\Theta))$, pela Proposição A.43, tem-se que $l = am$, onde $a \in A(\Theta)$ e $m \in M(\Theta)$. Mas

$$\mathfrak{k}(\Theta) = \text{Ad}(l)\mathfrak{k}(\Theta) = \text{Ad}(a)\text{Ad}(m)\mathfrak{k}(\Theta) = \text{Ad}(a)\mathfrak{k}(\Theta) \quad (3.29)$$

e, pelo Lema 3.6, tem-se que $a = 1$ e, portanto, $l = m \in K(\Theta) \subset (P_\Theta)_0 \cap K = (K_\Theta)_0$. Então $l^{-1}k \in Z_M(\mathfrak{g}(\Theta))$, pois $\text{Ad}(l^{-1}k)|_{\mathfrak{g}(\Theta)} = \text{id}_{\mathfrak{g}(\Theta)}$ e $\text{Ad}(l^{-1}k)|_{\mathfrak{a}_\Theta} = \text{id}_{\mathfrak{a}_\Theta}$. Logo $k = l(l^{-1}k) \in (K_\Theta)_0 Z_M(\mathfrak{g}(\Theta))$, o que implica que $M \subset (K_\Theta)_0 Z_M(\mathfrak{g}(\Theta))$. Portanto, utilizando-se a Proposição A.40,

$$K_\Theta = (K_\Theta)_0 M \subset (K_\Theta)_0 Z_M(\mathfrak{g}(\Theta)), \quad (3.30)$$

o que conclui a demonstração do teorema. \square

Corolário 3.8. *Tem-se que $P_\Theta = (P_\Theta)_0 Z_M(\mathfrak{g}(\Theta))$, onde $(P_\Theta)_0$ é a componente da identidade de P_Θ .*

Demonstração. Como $(P_\Theta)_0 = (K_\Theta)_0 AN$, pois A e N são conexos, o resultado segue dos Teoremas 3.7 e A.45. \square

Define-se A_Θ e N_Θ como os subgrupos conexos gerados, respectivamente, por $\exp(\mathfrak{a}_\Theta)$ e $\exp(\mathfrak{n}_\Theta)$, onde \mathfrak{a}_Θ e \mathfrak{n}_Θ são as componentes, respectivamente, abeliana e nilpotente da decomposição de Langlands dada pela equação (A.86). Define-se também o conjunto

$$L_\Theta = Z_M(\mathfrak{g}(\Theta))A_\Theta N_\Theta. \quad (3.31)$$

Proposição 3.9. *Tem-se que $A_\Theta = \exp(\mathfrak{a}_\Theta)$, $N_\Theta = \exp(\mathfrak{n}_\Theta)$ e $A_\Theta N_\Theta$ é um subgrupo fechado e normal em P_Θ . Além disso, se o centro $Z(G)$ for finito, então L_Θ é um subgrupo fechado em P_Θ , com álgebra de Lie \mathfrak{l}_Θ .*

Demonstração. As afirmações de que $A_\Theta = \exp(\mathfrak{a}_\Theta)$, $N_\Theta = \exp(\mathfrak{n}_\Theta)$ e $A_\Theta N_\Theta$ é um subgrupo fechado e normal em P_Θ seguem da Proposição A.46 e da Seção 5 do Capítulo VI de [15].

Se $m \in M$, pelo Teorema A.12, tem-se que $\text{Ad}(m)\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$. Portanto, como M centraliza A , segue que M normaliza $A_\Theta N_\Theta$, mostrando que L_Θ é um subgrupo. Se o centro de G é finito, pelo Corolário A.8, segue que $Z_M(\mathfrak{g}(\Theta))$ é um subgrupo compacto. Portanto, pela Proposição C.66, tem-se que L_Θ é fechado. \square

O Teorema seguinte mostra que P_Θ é o produto do subgrupo L_Θ pelo subgrupo semi-simples de tipo Θ .

Teorema 3.10. *Se o centro de G é finito, então*

$$P_\Theta = G(\Theta)L_\Theta. \quad (3.32)$$

Demonstração. Pela Proposição A.46, a álgebra de Lie \mathfrak{l}_Θ de L_Θ é um ideal da álgebra de Lie \mathfrak{p}_Θ de P_Θ . Portanto a componente conexa $(L_\Theta)_0$ é um subgrupo fechado e normal em $(P_\Theta)_0$. Pode-se então, pela Proposição C.70, definir o grupo de Lie conexo

$$\tilde{G}(\Theta) = \frac{(P_\Theta)_0}{(L_\Theta)_0}, \quad (3.33)$$

onde a projeção natural $\tilde{\pi} : (P_\Theta)_0 \rightarrow \tilde{G}(\Theta)$ é um homomorfismo diferenciável. Pela Proposição A.46, a álgebra de Lie de $\tilde{G}(\Theta)$ é isomorfa à $\mathfrak{g}(\Theta)$. Tem-se que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{p}_\Theta & \xrightarrow{d_1\tilde{\pi}} & \mathfrak{g}(\Theta) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \overline{\exp} \\ P_\Theta & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \tilde{G}(\Theta) \end{array} \quad (3.34)$$

onde $d_1\tilde{\pi} : \mathfrak{p}_\Theta \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}(\Theta)$ é um homomorfismo de álgebras de Lie tal que sua restrição a $\mathfrak{g}(\Theta)$ é um isomorfismo. Portanto $\tilde{\pi}(G(\Theta)) = \tilde{G}(\Theta)$, mostrando que $(P_\Theta)_0 = G(\Theta)(L_\Theta)_0$. Pelo Corolário 3.7, tem-se que $P_\Theta = (P_\Theta)_0 L_\Theta$ e, portanto, $P_\Theta = G(\Theta)L_\Theta$. \square

O próximo resultado mostra, em particular, que a decomposição (3.32) é um produto semi-direto. Para isto é necessário o seguinte lema.

Lema 3.11. *Sejam $G = KAN$ uma decomposição de Iwasawa de G e $k \in K$, $h \in A$ e $n \in N$. Seja também $\mathfrak{g}(\Theta)$ a subálgebra semi-simples de tipo Θ . Tem-se que*

- (i) *se $\text{Ad}(k)|_{\mathfrak{g}(\Theta)} = \text{Ad}(hn)|_{\mathfrak{g}(\Theta)}$, então ambas são a identidade em $\mathfrak{g}(\Theta)$,*
- (ii) *se $\text{Ad}(h)|_{\mathfrak{g}(\Theta)} = \text{Ad}(n)|_{\mathfrak{g}(\Theta)}$, então ambas são a identidade em $\mathfrak{g}(\Theta)$. Além disto, se $h \in A(\Theta)$, então $h = 1$ e*
- (iii) *se $n' \in N_\Theta$ e $n \in N(\Theta)$ e $\text{Ad}(n'n)|_{\mathfrak{g}(\Theta)} = \text{id}_{\mathfrak{g}(\Theta)}$, então $n = 1$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.5 do Capítulo VI de [15], existe uma base de \mathfrak{g} tal que, escritas nesta base, a matriz $\mathbf{M}(k)$ de $\text{Ad}(k)|_{\mathfrak{g}(\Theta)}$ é ortogonal, a matriz $\mathbf{M}(n)$ de $\text{Ad}(n)|_{\mathfrak{g}(\Theta)}$ é triangular superior com uns na diagonal e a matriz $\mathbf{M}(h)$ de $\text{Ad}(h)|_{\mathfrak{g}(\Theta)}$ é diagonal com elementos positivos na diagonal.

(i) Como as matrizes $\mathbf{M}(k)$, $\mathbf{M}(n)$ e $\mathbf{M}(h)$ são todas inversíveis, pela decomposição $\mathbf{q}\mathbf{r}$ (ver Seção 17.D, página 218, de [24]), a igualdade matricial $\mathbf{M}(k) = \mathbf{M}(h)\mathbf{M}(n)$ implica que as matrizes $\mathbf{M}(k)$ e $\mathbf{M}(h)\mathbf{M}(n)$ são iguais a matriz identidade.

(ii) A primeira parte deste item é evidente, utilizando-se a respectiva igualdade matricial $\mathbf{M}(h) = \mathbf{M}(n)$. Pela Proposição 3.9, se $h \in A(\Theta)$, então existe $H \in \mathfrak{a}(\Theta)$ tal que $h = \exp(H)$. Se $\alpha \in \Theta$ e $0 \neq X \in \mathfrak{g}_\alpha$, tem-se que

$$\text{Ad}(h)X = \text{Ad}(\exp(H))X = e^{\text{ad}(H)}X = e^{\alpha(H)}X. \quad (3.35)$$

Logo, se $\text{Ad}(h)|_{\mathfrak{g}(\Theta)} = \text{id}_{\mathfrak{g}(\Theta)}$, segue que $e^{\alpha(H)}X = X$ e, portanto, que $\alpha(H) = 0$. Como $\alpha \in \Theta$ é arbitrário, isto implica que $H = 0$ e $h = 1$.

(iii) Pela hipótese e n normaliza $\mathfrak{g}(\Theta)$, segue que $\text{Ad}(n)|_{\mathfrak{g}(\Theta)} = \text{Ad}((n')^{-1})|_{\mathfrak{g}(\Theta)}$ e, portanto, $\text{Ad}(n)\mathfrak{a}(\Theta) = \text{Ad}((n')^{-1})\mathfrak{a}(\Theta)$. Isto implica, pelo Teorema A.20 e pelas Proposições 3.9, A.34 e A.46, que

$$\text{Ad}(n)\mathfrak{a}(\Theta) \subset (\mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{n}(\Theta)) \cap (\mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{n}_\Theta) = \mathfrak{a}(\Theta). \quad (3.36)$$

Logo, se $H \in \mathfrak{a}^+(\Theta)$, pelo Lema A.41 aplicado a $\mathfrak{g}(\Theta)$ e pela decomposição em espaços de raízes, tem-se que $\phi_H(n) = \text{Ad}(n)H - H \in \mathfrak{a}(\Theta) \cap \mathfrak{n}(\Theta) = 0$. Como $\phi_H(1) = 0$, segue que $n = 1$. \square

Teorema 3.12. *Seja G com centro finito. Tem-se que $Z_{P_\Theta}(\mathfrak{g}(\Theta)) \subset L_\Theta$ e o subgrupo L_Θ é normal em P_Θ . Além disto, existe um homomorfismo de grupos de Lie sobrejetor $\varphi_\Theta : P_\Theta \rightarrow \text{Int}(\mathfrak{g}(\Theta))$ tal que seu núcleo é L_Θ . Em particular, $d_1\varphi_\Theta : \mathfrak{p}_\Theta \rightarrow \mathfrak{g}(\Theta)$ é a projeção paralela a \mathfrak{l}_Θ .*

Demonstração. Seja $z \in Z_{P_\Theta}(\mathfrak{g}(\Theta))$. Pela decomposição (3.32), existem $g \in G(\Theta)$ e $l \in L_\Theta$ tais que $z = gl$. Pela decomposição de Iwasawa de $G(\Theta)$, $g = khn$, onde $k \in K(\Theta)$, $h \in A(\Theta)$ e $n \in N(\Theta)$ e, pela definição de L_Θ , tem-se que $l = n'h'm$, onde $n' \in N_\Theta$, $h' \in A_\Theta$ e $m \in Z_M(\mathfrak{g}(\Theta))$. Como $\text{Ad}(z)|_{\mathfrak{g}(\Theta)} = \text{id}_{\mathfrak{g}(\Theta)}$ e g normaliza $\mathfrak{g}(\Theta)$, segue que l normaliza $\mathfrak{g}(\Theta)$ e, portanto, $\text{Ad}(l)|_{\mathfrak{g}(\Theta)} = \text{Ad}(g^{-1})|_{\mathfrak{g}(\Theta)}$. Pelas Proposições A.25 e 3.9, h' centraliza $\mathfrak{g}(\Theta)$, o que implica que

$$\text{Ad}(n')|_{\mathfrak{g}(\Theta)} = \text{Ad}(l)|_{\mathfrak{g}(\Theta)} = \text{Ad}(g^{-1})|_{\mathfrak{g}(\Theta)} = \text{Ad}((hn)^{-1}k^{-1})|_{\mathfrak{g}(\Theta)}. \quad (3.37)$$

Portanto, $\text{Ad}(hnn')|_{\mathfrak{g}(\Theta)} = \text{Ad}(k^{-1})|_{\mathfrak{g}(\Theta)}$, o que, pelo item (i) do Lema 3.11, implica que ambas são a identidade em $\mathfrak{g}(\Theta)$. Então, como $k \in K(\Theta) \subset K_\Theta$, segue que $k \in Z_M(\mathfrak{g}(\Theta))$. Como $\text{Ad}(hnn')|_{\mathfrak{g}(\Theta)} = \text{id}_{\mathfrak{g}(\Theta)}$ e h normaliza $\mathfrak{g}(\Theta)$, segue que nn' normaliza $\mathfrak{g}(\Theta)$. Logo, $\text{Ad}(nn')|_{\mathfrak{g}(\Theta)} = \text{Ad}(h^{-1})|_{\mathfrak{g}(\Theta)}$, o que, pelo item (ii) do Lema 3.11, implica que ambas são a identidade em $\mathfrak{g}(\Theta)$ e que $h = 1$. Portanto, $\text{Ad}(nn')|_{\mathfrak{g}(\Theta)} = \text{id}_{\mathfrak{g}(\Theta)}$, o que, pelo item (iii) do Lema 3.11, implica que $n = 1$. Isto mostra que $z = gl = kl \in L_\Theta$, concluindo que $Z_{P_\Theta}(\mathfrak{g}(\Theta)) \subset L_\Theta$.

Pela Proposição 3.9, $A_\Theta N_\Theta$ é normal em P_Θ . Para mostrar que L_Θ é normal em P_Θ , sejam então $g \in G(\Theta)$, $m \in Z_M(\mathfrak{g}(\Theta))$ e $X \in \mathfrak{g}(\Theta)$. Como $\text{Ad}(g^{-1})X \in \mathfrak{g}(\Theta)$, tem-se que

$$\text{Ad}(gmg^{-1})X = \text{Ad}(g)\text{Ad}(m)\text{Ad}(g^{-1})X = \text{Ad}(g)\text{Ad}(g^{-1})X = X, \quad (3.38)$$

pois $\text{Ad}(m)|_{\mathfrak{g}(\Theta)} = \text{id}_{\mathfrak{g}(\Theta)}$. Logo $gmg^{-1} \in Z_{P_\Theta}(\mathfrak{g}(\Theta))$. Pela primeira parte da demonstração, isto implica que $gmg^{-1} \in L_\Theta$, mostrando que L_Θ é normal em P_Θ .

Pelas Proposições 3.9 e C.70, o quociente

$$\widehat{G}(\Theta) = \frac{P_\Theta}{L_\Theta}, \quad (3.39)$$

é um grupo de Lie onde a projeção natural $\widehat{\pi} : P_\Theta \rightarrow \widehat{G}(\Theta)$ é um homomorfismo diferenciável sobrejetor.

Para mostrar que $\widehat{G}(\Theta)$ é isomorfo ao grupo de Lie $\text{Int}(\mathfrak{g}(\Theta))$, primeiro observa-se que ele é um grupo conexo. De fato, pela decomposição (3.32), tem-se que $P_\Theta = G(\Theta)L_\Theta$ e, portanto, pela Proposição C.71, segue que

$$\widehat{G}(\Theta) = \frac{G(\Theta)L_\Theta}{L_\Theta} \simeq \frac{G(\Theta)}{L_\Theta \cap G(\Theta)}. \quad (3.40)$$

Como o núcleo do homomorfismo de Lie sobrejetor $\widehat{\text{Ad}} : \widehat{G}(\Theta) \rightarrow \text{Int}(\widehat{\mathfrak{g}}(\Theta))$ é o centro de $\widehat{G}(\Theta)$, pelo Lema 5.1 do Capítulo II de [15], resta mostrar que o centro de $\widehat{G}(\Theta)$ é trivial. Para isto, primeiro observa-se que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{p}_\Theta & \xrightarrow{d_1\widehat{\pi}} & \widehat{\mathfrak{g}}(\Theta) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \widehat{\exp} \\ P_\Theta & \xrightarrow{\widehat{\pi}} & \text{Int}(\widehat{\mathfrak{g}}(\Theta)) \end{array} \quad (3.41)$$

onde $d_1\widehat{\pi} : \mathfrak{p}_\Theta \rightarrow \widehat{\mathfrak{g}}(\Theta)$ é um homomorfismo de álgebras de Lie tal que sua restrição a $\mathfrak{g}(\Theta)$ é um isomorfismo de álgebras de Lie. Pela conexidade de $\widehat{G}(\Theta)$, a Proposição A.9 implica que $Z(\widehat{G}(\Theta)) = Z_{\widehat{G}(\Theta)}(\widehat{\mathfrak{g}}(\Theta))$. Pelo diagrama (3.41), tem-se que

$$\widehat{\pi}^{-1} \left(Z_{\widehat{G}(\Theta)}(\widehat{\mathfrak{g}}(\Theta)) \right) = Z_{P_\Theta}(\mathfrak{g}(\Theta)) \subset L_\Theta = \ker \widehat{\pi}, \quad (3.42)$$

o que conclui a demonstração do teorema, definindo-se $\varphi_\Theta = \widehat{\pi} \circ \widehat{\text{Ad}}$ e identificando-se $\widehat{\mathfrak{g}}(\Theta)$ e $\mathfrak{g}(\Theta)$ através do isomorfismo de álgebras de Lie $d_1\widehat{\pi}|_{\mathfrak{g}(\Theta)} : \mathfrak{g}(\Theta) \rightarrow \widehat{\mathfrak{g}}(\Theta)$. \square

Lema 3.13. *Se H é regular em \mathfrak{a} , então $H(\Theta)$ é regular em $\mathfrak{a}(\Theta)$, onde $H(\Theta) = d_1\varphi_\Theta H$. Em particular, se h é regular em A , então $\varphi_\Theta(h)$ é regular em $\text{Int}(\mathfrak{g}(\Theta))$.*

Demonstração. Seja $H \in \mathfrak{a}$ regular. Então $H = H(\Theta) + H_\Theta \in \mathfrak{a}$, para algum $H_\Theta \in \mathfrak{a}_\Theta$. Pela Proposição A.26, tem-se que $\Pi(\Theta) = \{\alpha_\Theta = \alpha|_{\mathfrak{a}(\Theta)} : \alpha \in \langle \Theta \rangle\}$. Portanto, se $\alpha \in \langle \Theta \rangle$, segue que

$$\alpha_\Theta(H(\Theta)) = \alpha(H(\Theta)) + \alpha(H_\Theta) = \alpha(H) \neq 0, \quad (3.43)$$

o que conclui a demonstração do lema. \square

3.2.2 As Fibrações entre os Flags

Se $\Delta \subset \Theta \subset \Sigma$, então $\mathfrak{p}_\Delta(\lambda) \subset \mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$, para todo $\lambda \in \mathcal{C}$. Define-se π_Θ^Δ a fibração natural do flag de tipo Δ sobre o flag de tipo Θ pela expressão

$$\pi_\Theta^\Delta(\mathfrak{p}_\Delta(\lambda)) = \mathfrak{p}_\Theta(\lambda), \quad (3.44)$$

para cada $\lambda \in \mathcal{C}$. A fibração natural do flag maximal sobre o flag de tipo Θ é denotada simplesmente por π_Θ .

A partir de agora até o final desta seção, será fixada uma quadra admissível $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$ tal que $\Theta(\lambda) = \Theta$, onde $\lambda = \exp(\mathfrak{a}^+)$ e todos os objetos determinados por λ serão denotados sem a notação (λ) . Por exemplo, $\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$ e $\mathfrak{p}_\Delta(\lambda)$ são denotadas, respectivamente, por \mathfrak{p}_Θ e \mathfrak{p}_Δ . Neste caso, a fibração natural é determinada por

$$\pi_\Theta^\Delta(g\mathfrak{p}_\Delta) = g\mathfrak{p}_\Theta, \quad (3.45)$$

para todo $g \in G$, onde a ação adjunta de G é definida em (3.26). Pela decomposição de Iwasawa dos subgrupos parabólicos, tem-se que $P_\Delta \subset P_\Theta$. Definindo-se a fibração $\widehat{\pi}_\Theta^\Delta$ por

$$\widehat{\pi}_\Theta^\Delta(gP_\Delta) = gP_\Theta, \quad (3.46)$$

para todo $g \in G$, tem-se que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} G/P_\Delta & \xrightarrow{\phi_\Delta} & \mathbb{F}_\Delta \\ \widehat{\pi}_\Theta^\Delta \downarrow & & \downarrow \pi_\Theta^\Delta \\ G/P_\Theta & \xrightarrow{\phi_\Theta} & \mathbb{F}_\Theta \end{array} \quad (3.47)$$

onde ϕ_Δ e ϕ_Θ denotam os homeomorfismos da Proposição 3.5. Isso mostra que as fibrações π_Θ^Δ e $\widehat{\pi}_\Theta^\Delta$ são isomorfas, como definido na Seção C.2.

Seja $\mathfrak{g}(\Theta)$ a subálgebra semi-simples de tipo Θ associada à quadra admissível $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$, como definida em (A.47). Definindo-se

$$\Delta(\Theta) = \{\alpha_\Theta \in \Sigma(\Theta) : \alpha \in \Delta\}, \quad (3.48)$$

tem-se que $(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta), \mathfrak{a}(\Theta)^+, \Delta(\Theta))$ é uma quadra admissível de $\mathfrak{g}(\Theta)$, onde $(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta), \mathfrak{a}(\Theta)^+)$ é o terno admissível dado pela Proposição A.28. Denota-se por $\mathfrak{p}(\Theta)_\Delta$ a subálgebra parabólica de tipo $\Delta(\Theta)$ em $\mathfrak{g}(\Theta)$ associada a $(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta), \mathfrak{a}(\Theta)^+, \Delta(\Theta))$. O flag de $\mathfrak{g}(\Theta)$ de tipo $\Delta(\Theta)$ é denotado por $\mathbb{F}(\Theta)_\Delta$, enquanto o flag maximal de $\mathfrak{g}(\Theta)$ é denotado simplesmente por $\mathbb{F}(\Theta)$.

O objetivo dessa seção é mostrar que a fibração natural do flag de tipo Δ de \mathfrak{g} sobre o flag de tipo Θ de \mathfrak{g} é isomorfo ao fibrado com fibra típica $\mathbb{F}(\Theta)_\Delta$ associado a um fibrado principal cujo grupo estrutural é o grupo de Lie dos automorfismos internos de $\mathfrak{g}(\Theta)$.

Seja $\varphi_\Theta : P_\Theta \rightarrow \text{Int}(\mathfrak{g}(\Theta))$ o homomorfismo de grupos de Lie sobrejetor, dado pelo Teorema 3.12, tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{p}_\Theta & \xrightarrow{d_1\varphi_\Theta} & \mathfrak{g}(\Theta) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \widehat{\exp} \\ P_\Theta & \xrightarrow{\varphi_\Theta} & \text{Int}(\mathfrak{g}(\Theta)) \end{array} \quad (3.49)$$

onde $d_1\varphi_\Theta : \mathfrak{p}_\Theta \rightarrow \mathfrak{g}(\Theta)$ é a projeção paralela a \mathfrak{l}_Θ . Para todo $X \in \mathfrak{p}_\Theta$ e $g \in P_\Theta$, denota-se $\widehat{X} = d_1\varphi_\Theta X$ e $\widehat{g} = \varphi_\Theta(g)$.

Sejam $\widehat{K}(\Theta)$, $\widehat{A}(\Theta)$ e $\widehat{N}^+(\Theta)$ os subgrupos de $\text{Int}(\mathfrak{g}(\Theta))$ gerados, respectivamente pelas exponenciais de $\mathfrak{k}(\Theta)$, $\mathfrak{a}(\Theta)$ e $\mathfrak{n}(\Theta)$. Pelo diagrama (3.49) e pela decomposição de Iwasawa de P_Θ , tem-se que

$$\widehat{K}(\Theta) = \widehat{K}_\Theta, \quad \widehat{A}(\Theta) = \widehat{A} \quad \text{e} \quad \widehat{N}^+(\Theta) = \widehat{N}. \quad (3.50)$$

O seguinte diagrama também comuta

$$\begin{array}{ccc} P_\Theta & \xrightarrow{\varphi_\Theta} & \text{Int}(\mathfrak{g}(\Theta)) \\ I_g \downarrow & & \downarrow \widehat{I}_{\widehat{g}} \\ P_\Theta & \xrightarrow{\varphi_\Theta} & \text{Int}(\mathfrak{g}(\Theta)) \end{array} \quad (3.51)$$

onde I_g é a conjugação por g em P_Θ e $\widehat{I}_{\widehat{g}}$ é a conjugação por \widehat{g} em $\text{Int}(\mathfrak{g}(\Theta))$. Portanto $d_1\varphi_\Theta \circ \text{Ad}(g) = \widehat{\text{Ad}}(\widehat{g}) \circ d_1\varphi_\Theta$, o que implica que

$$\widehat{\text{Ad}}(\widehat{g})\widehat{X} = \widehat{\text{Ad}}(g)X, \quad (3.52)$$

para todo $X \in \mathfrak{p}_\Theta$ e $g \in P_\Theta$.

Definindo-se $\mathfrak{a}(\Theta)_\Delta$ como o $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\theta_\Theta}$ -complemento ortogonal de $\mathfrak{a}(\Theta)$ ($\Delta(\Theta)$) em $\mathfrak{a}(\Theta)$, tem-se que $\mathfrak{a}(\Theta)_\Delta = \mathfrak{a}_\Delta \cap \mathfrak{a}(\Theta)$, pois α_Θ é a restrição de α à $\mathfrak{a}(\Theta)$. Portanto

$$\mathfrak{a}_\Delta = \mathfrak{a}_\Theta \oplus \mathfrak{a}(\Theta)_\Delta, \quad (3.53)$$

pois $\mathfrak{a}(\Delta) \subset \mathfrak{a}(\Theta)$ e $\mathfrak{a}_\Theta \subset \mathfrak{a}_\Delta$.

Pela equação (3.52), denotando-se $\widehat{K}(\Theta)_\Delta$ como sendo o centralizador em $\widehat{K}(\Theta)$ de $\mathfrak{a}(\Theta)_\Delta$, tem-se que

$$\widehat{K}(\Theta)_\Delta = \varphi_\Theta \{k \in K_\Theta : \text{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}(\Theta)_\Delta} = \text{id}_{\mathfrak{a}(\Theta)_\Delta}\}, \quad (3.54)$$

o que, pela equação (3.53), implica que

$$\widehat{K}(\Theta)_\Delta = \widehat{K}_\Delta. \quad (3.55)$$

Denotando-se por $\widehat{P}(\Theta)_\Delta$ o subgrupo parabólico de tipo $\Delta(\Theta)$ em $\text{Int}(\mathfrak{g}(\Theta))$, isto mostra, utilizando-se a decomposição de Iwasawa de $\widehat{P}(\Theta)_\Delta$, que

$$\widehat{P}(\Theta)_\Delta = \widehat{P}_\Delta. \quad (3.56)$$

Denotando-se por Q_Θ o quociente G/L_Θ , onde L_Θ é o produto definido em (3.31), define-se a ação à direita de $\text{Int}(\mathfrak{g}(\Theta))$ em Q_Θ por

$$(gL_\Theta)\widehat{a} = (ga)L_\Theta, \quad (3.57)$$

para todo $a \in P_\Theta$. A ação à esquerda de G em Q_Θ é dada por

$$h(gL_\Theta) = (hg)L_\Theta, \quad (3.58)$$

onde $g, h \in G$. A fibração $\pi_\Theta : Q_\Theta \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ é definida por

$$\pi_\Theta(gL_\Theta) = g\mathfrak{p}_\Theta, \quad (3.59)$$

para todo $g \in G$.

Teorema 3.14. *Sejam G com centro finito e $\Theta \subset \Sigma$. Tem-se que a fibração $\pi_\Theta : Q_\Theta \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ é um fibrado principal localmente trivial, cujo grupo estrutural é $\text{Int}(\mathfrak{g}(\Theta))$. Além disto, tem-se que*

$$G \subset \text{End}_l(Q_\Theta), \quad (3.60)$$

onde G age em Q_Θ por (3.58) e $\text{End}_l(Q_\Theta)$ é dado pela Definição 4.1.

Demonstração. Pelos Teorema 3.12 e Proposição 3.9 e como o centro de G é finito, L_Θ é fechado e normal em P_Θ . Como $L_\Theta \subset P_\Theta$, segue que π_Θ está bem definida. Definindo-se a fibração $\widehat{\pi}_\Theta$ por

$$\widehat{\pi}_\Theta(gL_\Theta) = gP_\Theta, \quad (3.61)$$

para todo $g \in G$, tem-se que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} & Q_\Theta & \\ \widehat{\pi}_\Theta \swarrow & & \searrow \pi_\Theta \\ G/P_\Theta & \xrightarrow{\phi_\Theta} & \mathbb{F}_\Theta \end{array} \quad (3.62)$$

mostrando que as fibrações π_Θ e $\widehat{\pi}_\Theta$ são isomorfas. O Teorema segue então da Proposição C.73.

Para mostrar que $G \subset \text{End}_l(Q_\Theta)$, basta notar que

$$h[(gL_\Theta)\widehat{a}] = (hga)L_\Theta = [h(gL_\Theta)]\widehat{a}, \quad (3.63)$$

onde $g, h \in G$ e $a \in P_\Theta$. □

Seja $\pi_{\mathbb{E}(\Theta)_\Delta} : \mathbb{E}(\Theta)_\Delta \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ o fibrado, com fibra típica $\mathbb{F}(\Theta)_\Delta$, associado ao fibrado principal $\pi_\Theta : Q_\Theta \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$. Tem-se que a aplicação $l_{\mathfrak{p}(\Theta)_\Delta} : Q_\Theta \rightarrow \mathbb{E}(\Theta)_\Delta$, definida em (C.37), é sobrejetiva. A aplicação $\phi_\Theta^\Delta : \mathbb{E}(\Theta)_\Delta \rightarrow \mathbb{F}_\Delta$ é definida por

$$\phi_\Theta^\Delta(l_{\mathfrak{p}(\Theta)_\Delta}(gL_\Theta)) = g\mathfrak{p}_\Delta \quad (3.64)$$

para todo $g \in G$.

Teorema 3.15. *Sejam G com centro finito e $\Delta \subset \Theta \subset \Sigma$. A aplicação ϕ_Θ^Δ dada por (3.64) está bem definida e o par $(\phi_\Theta^\Delta, \text{id}_{\mathbb{F}_\Theta})$ é um isomorfismo entre a fibração natural $\pi_\Theta^\Delta : \mathbb{F}_\Delta \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ e o fibrado associado $\pi_{\mathbb{E}(\Theta)_\Delta} : \mathbb{E}(\Theta)_\Delta \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$. Além disto, o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{array}{ccc} & Q_\Theta & \\ l_{\mathfrak{p}(\Theta)_\Delta} \swarrow & & \searrow \psi_\Delta^\Theta \\ \mathbb{E}(\Theta)_\Delta & \xrightarrow{\phi_\Theta^\Delta} & \mathbb{F}_\Delta \\ \pi_{\mathbb{E}(\Theta)_\Delta} \searrow & & \swarrow \pi_\Theta^\Delta \\ & \mathbb{F}_\Theta & \end{array} \quad (3.65)$$

onde $\psi_\Delta^\Theta(gL_\Theta) = g\mathfrak{p}_\Delta$, para todo $g \in G$, e

$$gh\mathfrak{p}_\Delta = \phi_\Theta^\Delta(gL_\Theta \cdot \widehat{h}\mathfrak{p}(\Theta)_\Delta) \quad (3.66)$$

para todos $g \in G$ e $h \in P_\Theta$.

Demonstração. Para mostrar que aplicação ϕ_Θ^Δ dada por (3.64) está bem definida e é uma bijeção, sejam $h, g \in G$. Tem-se que $l_{\mathfrak{p}(\Theta)_\Delta}(gL_\Theta) = l_{\mathfrak{p}(\Theta)_\Delta}(hL_\Theta)$ se, e somente se, existe $\widehat{a} \in \widehat{G}(\Theta)$, onde $a \in P_\Theta$, tal que

$$gL_\Theta = hL_\Theta\widehat{a} = (ha)L_\Theta \quad (3.67)$$

e $\widehat{a}\mathfrak{p}(\Theta)_\Delta = \mathfrak{p}(\Theta)_\Delta$. Pela equação (3.56), isto é equivalente a existir $a \in P_\Delta$ tal que $gL_\Theta = (ha)L_\Theta$ o que acontece se, e somente se, $g\mathfrak{p}_\Delta = h\mathfrak{p}_\Delta$, pois $g^{-1}ha \in L_\Theta \subset P_\Delta$.

Pelas definições, o diagrama 3.65 é claramente comutativo. Portanto, como a aplicação ϕ_Θ^Δ é uma bijeção, ela é um homeomorfismo se, e somente se, a aplicação ψ_Δ^Θ é contínua e aberta. Para isto, basta observar que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} G & & \\ \psi_\Theta \downarrow & \searrow \psi_\Delta & \\ Q_\Theta & \xrightarrow{\psi_\Delta^\Theta} & \mathbb{F}_\Delta \end{array} \quad (3.68)$$

onde as aplicações definidas por $\psi_\Theta(g) = gL_\Theta$ e por $\psi_\Delta(g) = g\mathfrak{p}_\Delta$, para todo $g \in G$, são contínuas e abertas.

A equação (3.66) segue das equações (3.57) e (3.64). De fato, se $h \in P_\Theta$ e $g \in G$, então

$$gh\mathfrak{p}_\Delta = \phi_\Theta^\Delta(ghL_\Theta \cdot \mathfrak{p}(\Theta)_\Delta) = \phi_\Theta^\Delta(gL_\Theta\widehat{h} \cdot \mathfrak{p}(\Theta)_\Delta) = \phi_\Theta^\Delta(gL_\Theta \cdot \widehat{h}\mathfrak{p}(\Theta)_\Delta). \quad (3.69)$$

□

3.3 Conjuntos de Controle e Grupo de Weyl

Seja S um semigrupo aberto de um grupo de Lie real G conexo e de centro finito cuja álgebra de Lie \mathfrak{g} é semi-simples. A ação de S nos flags de \mathfrak{g} é dada pela restrição a S da ação adjunta de G . Os conjuntos de controle de S nos flags de \mathfrak{g} serão descritos através do grupo de Weyl canônico de \mathfrak{g} definido na Seção 3.1.

3.3.1 Pontos Fixos de Tipo w

A caracterização dos conjuntos de transitividade dos conjuntos de controle de S no flag maximal de \mathfrak{g} será feita através da ação dos elementos de S que pertencem a alguma câmara de Weyl em G . O próximo teorema (cf. [12]) caracteriza o conjunto de pontos fixos da ação dos elementos de uma dada câmara de Weyl.

Teorema 3.16. *Seja $\lambda \in \mathcal{C}$. Para todo $h \in \lambda$, o conjunto dos pontos fixos da ação de h em \mathbb{F} é dado por*

$$\{w(\lambda)\mathfrak{p}(\lambda) : w \in W\}. \quad (3.70)$$

Além disto, $\mathfrak{p}(\lambda)$ é o único atrator e sua variedade estável $\text{est}(\lambda)$ é aberta e densa em \mathbb{F} .

O Teorema 3.16 justifica a seguinte definição.

Definição 3.17. *Para cada $w \in W$ e $\lambda \in \mathcal{C}$, define-se o ponto fixo do tipo w em \mathbb{F} determinado por λ como*

$$\mathfrak{p}_w(\lambda) = w(\lambda)\mathfrak{p}(\lambda). \quad (3.71)$$

Lema 3.18. *Sejam $\lambda, \nu \in \mathcal{C}$. Para todos $g \in G$ e $w, w' \in W$, tem-se que*

$$(i) \quad \mathfrak{p}_w(g\lambda g^{-1}) = g\mathfrak{p}_w(\lambda) \text{ e}$$

$$(ii) \quad \mathfrak{p}_{w'}(w(\lambda)\lambda w(\lambda)^{-1}) = \mathfrak{p}_{ww'}(\lambda).$$

Além disto, $P(\nu) = P(\lambda)$ se, e somente se, $\nu = n\lambda n^{-1}$, para algum $n \in N(\lambda)$.

Demonstração. Os itens (i) e (ii) são conseqüências diretas da Proposição 3.2 e da Definição 3.17. Pelo Lema 3.1, existe $g \in G$ tal que $\nu = g\lambda g^{-1}$ e tem-se que $P(\nu) = gP(\lambda)g^{-1}$. Se $P(\nu) = P(\lambda)$, então $g \in P(\lambda)$, pois pelo Teorema A.45, $P(\lambda)$ é auto-normalizador. Pela decomposição de Iwasawa de $P(\lambda)$, tem-se que $g = nhm$, onde $n \in N(\lambda)$, $h \in A(\lambda)$ e $m \in M(\lambda)$. Como $M(\lambda)A(\lambda)$ normaliza λ , tem-se então que $\nu = n\lambda n^{-1}$. A afirmação recíproca é direta. \square

3.3.2 Caracterização Algébrica no Flag Maximal

Agora os pontos fixos de tipo w serão utilizados na descrição algébrica dos conjuntos de transitividade dos conjuntos de controle de S no flag maximal de \mathfrak{g} .

Lema 3.19. *Sejam P um subgrupo parabólico minimal de \mathfrak{g} e MAN uma decomposição de Iwasawa de P . Se $g = m_g h_g n_g \in S \cap P$, onde $m_g \in M$, $h_g \in A$ e $n_g \in N$, então existem $i \in \mathbb{N}$ e $n \in N$ tais que $(h_g)^i n \in S$.*

Demonstração. Definindo-se

$$S_g = \{m \in M : m(h_g)^i n \in S, \text{ para algum } i \in \mathbb{N} \text{ e algum } n \in N\}, \quad (3.72)$$

tem-se que S_g é não-vazio, pois $m_g \in S_g$. Além disto, S_g é um subgrupo de K , pois se $m, m' \in S_g$, então existem $i, j \in \mathbb{N}$ e $n, n' \in N$ tais que $m(h_g)^i n$ e $m'(h_g)^j n'$ pertencem a S e, como M comuta com A , tem-se que

$$(mm')(h_g)^{i+j} [(m'(h_g)^j)^{-1} n (m'(h_g)^j) n'] = (m(h_g)^i n) (m'(h_g)^j n') \in S \quad (3.73)$$

o que implica que $mm' \in S_g$, já que MA normaliza N . Definindo-se $\phi_i : M \times N \rightarrow G$, por $\phi_i(m, n) = m(h_g)^i n$, tem-se que ϕ_i é contínua para todo $i \in \mathbb{N}$. Como

$$S_g = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \pi_1(\phi_i^{-1}(S)), \quad (3.74)$$

onde $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$ é a projeção na primeira coordenada, tem-se que S_g é um subgrupo aberto do grupo compacto M e, pelo Corolário C.65, isto implica que S_g contém M_0 , concluindo-se a demonstração. \square

O conjunto das câmaras de Weyl em G que interceptam S é definido por

$$\mathcal{C}(S) = \{\lambda \in \mathcal{C} : \lambda \cap S \neq \emptyset\}. \quad (3.75)$$

Corolário 3.20. *Existe um subgrupo parabólico minimal P tal que $S \cap P \neq \emptyset$ e, sempre que isto ocorre, existe $\lambda \in \mathcal{C}(S)$ tal que $\lambda \subset P$. Além disso, um ponto $\mathfrak{p} \in \mathbb{F}$ é S -auto-acessível se, e somente se, é um ponto fixo do tipo w , para algum $w \in W$ e alguma $\lambda \in \mathcal{C}(S)$.*

Demonstração. Como S é aberto e age continuamente em \mathbb{F} compacta, pela Proposição 2.16, existe um conjunto de controle S -invariante em S . Logo existem $g \in S$ e $\mathfrak{p} \in \mathbb{F}$ tais que $g\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$. Se P é a isotropia de \mathfrak{p} , tem-se que $S \cap P \neq \emptyset$.

Quando isto ocorre, pelo Lema 3.19, tem-se que $S \cap AN \neq \emptyset$. A união das câmaras em A é definida por

$$\text{reg}(A) = \bigcup \{\nu : \nu \in \mathcal{C}(A)\}, \quad (3.76)$$

onde $\mathcal{C}(A) = \{\nu \in \mathcal{C} : \nu \subset A\}$. Como $\text{reg}(A)$ é densa em A , pelo Teorema A.20, tem-se que $\text{reg}(A)N$ é denso em AN . Como $S \cap AN$ é aberto e não-vazio, existem $\nu \in \mathcal{C}(A)$, $h \in \nu$ e $n \in N$ tais que $hn \in S \cap \text{reg}(A)N$. Pelo Lema A.41, tem-se que existe $\tilde{n} \in N$ tal que $hn = \tilde{n}h\tilde{n}^{-1} \in S$. Portanto $\lambda = \tilde{n}\nu\tilde{n}^{-1} \in \mathcal{C}(S)$ e $\lambda \subset P$.

Finalmente, um ponto $\mathfrak{p} \in \mathbb{F}$ com isotropia P é S -auto-acessível se, e somente se, existe $g \in S \cap P$. Pela primeira parte, isto acontece se, e somente se, \mathfrak{p} é ponto fixo de alguma $\lambda \in \mathcal{C}(S)$. O resultado segue então do Teorema 3.16. \square

Se $\lambda \in \mathcal{C}$ e T é um semigrupo em $A(\lambda)$, o seu *cone envelopante em $\mathfrak{a}(\lambda)$* é definido por

$$\Lambda_T(\lambda) = \{H \in \mathfrak{a}(\lambda) : \exp(\mathbb{R}^+H) \cap T \neq \emptyset\}. \quad (3.77)$$

O cone envelopante é um cone convexo em $\mathfrak{a}(\lambda)$. De fato, se H e H' pertencem a $\Lambda_T(\lambda)$ e $t \in \mathbb{R}^+$, então claramente $tH \in \Lambda_T(\lambda)$ e também $H + H' \in \Lambda_T(\lambda)$, pois

$$\exp(\mathbb{R}^+(H + H')) = \exp(\mathbb{R}^+H) \exp(\mathbb{R}^+H'), \quad (3.78)$$

já que $\mathfrak{a}(\lambda)$ é abeliana. Se T é aberto, então $\Lambda_T(\lambda)$ é também aberto. O cone envelopante do semigrupo $A(\lambda) \cap S$ é denotado simplesmente por $\Lambda(\lambda)$.

Para cada $w \in W$, a isotropia do ponto fixo de tipo w é denotada por $P_w(\lambda)$ e

$$P_w(\lambda) = w(\lambda)P(\lambda)w(\lambda) = M(\lambda)A(\lambda)N_w(\lambda), \quad (3.79)$$

onde

$$N_w(\lambda) = w(\lambda)N(\lambda)w(\lambda), \quad (3.80)$$

pois $W(\lambda)$ normaliza $M(\lambda)A(\lambda)$. Denota-se por $\Lambda_{N_w}(\lambda)$ o cone envelopante de

$$T_{N_w}(\lambda) = \{h \in A(\lambda) : hn \in S, \text{ para algum } n \in N_w(\lambda)\}, \quad (3.81)$$

que é um semigrupo aberto em $A(\lambda)$, pois $A(\lambda)$ normaliza $N_w(\lambda)$.

Lema 3.21. *Sejam $\lambda \in \mathcal{C}$ e $w, w' \in W$. Se $[\mathfrak{p}_w(\lambda)]_S = [\mathfrak{p}_{w'}(\lambda)]_S$, então*

$$w'w^{-1}(\lambda)\Lambda(\lambda) \subset \Lambda_{N_{w'}}(\lambda). \quad (3.82)$$

Demonstração. Por definição, se $[\mathfrak{p}_w(\lambda)]_S = [\mathfrak{p}_{w'}(\lambda)]_S$, existem $g, g' \in S$ tais que $g\mathfrak{p}_w(\lambda) = \mathfrak{p}_{w'}(\lambda)$ e $g'\mathfrak{p}_{w'}(\lambda) = \mathfrak{p}_w(\lambda)$. Pelas Proposição 3.2 e Definição 3.17 e definindo-se $s = w'w^{-1}$, tem-se que $\mathfrak{p}_{w'}(\lambda) = s(\lambda)\mathfrak{p}_w(\lambda)$. Logo tem-se que

$$g\mathfrak{p}_w(\lambda) = s(\lambda)\mathfrak{p}_w(\lambda) \quad \text{e} \quad g's(\lambda)\mathfrak{p}_w(\lambda) = \mathfrak{p}_w(\lambda), \quad (3.83)$$

o que implica que

$$g = s(\lambda)mhn \quad \text{e} \quad g' = m'h'n's(\lambda)^{-1}, \quad (3.84)$$

onde $m, m' \in M(\lambda)$, $h, h' \in A(\lambda)$ e $n, n' \in N_w(\lambda)$.

Para cada $H \in \Lambda(\lambda)$, define-se $h_t = \exp(tH)$. Como todo semigrupo aberto em \mathbb{R}^+ contém um semi-intervalo infinito, existe $t_0 > 0$ tal que $h_t \in S$, se $t > t_0$. Logo

$$gh_tg' = (s(\lambda)mhn)h_t(m'h'n's(\lambda)^{-1}) = s(\lambda)\widehat{m}(h_t h h')\widehat{n}s(\lambda)^{-1} \in S, \quad (3.85)$$

onde,

$$\widehat{m} = mm' \in M(\lambda) \quad \text{e} \quad \widehat{n} = [(h'h_t m')^{-1}n(h'h_t m')]n' \in N_w(\lambda). \quad (3.86)$$

Definindo-se $h_{t,s} = s(\lambda)h_t h h' s(\lambda)^{-1} \in A(\lambda)$, tem-se que

$$gh_tg' = \widetilde{m}h_{t,s}\widetilde{n} \in S \cap P_{w'}(\lambda), \quad (3.87)$$

onde $\widetilde{m} = s(\lambda)\widehat{m}s(\lambda)^{-1} \in M(\lambda)$ e $\widetilde{n} = s(\lambda)\widehat{n}s(\lambda)^{-1} \in N_{w'}(\lambda)$, pois $\widehat{n} \in N_w(\lambda)$ e, pela Proposição 3.2, $s(\lambda) = w'(\lambda)w^{-1}(\lambda)$. Pelo Lema 3.19, existem $i \in \mathbb{N}$ e $\bar{n} \in N_{w'}(\lambda)$, tais que

$$(h_{t,s})^i \bar{n} \in S. \quad (3.88)$$

Isto implica que $(h_{t,s})^i \in T_{N_{w'}}(\lambda)$ e, portanto, que

$$H_{t,s} = \log(h_{t,s}) = s(\lambda)(tH + \log(hh')) \in \Lambda_{N_{w'}}(\lambda). \quad (3.89)$$

Como $\frac{1}{t}H_{t,s} \in \Lambda_{N_{w'}}(\lambda)$, para todo $t > t_0$, tem-se que

$$s(\lambda)H = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t}H_{t,s} \in \text{cl}(\Lambda_{N_{w'}}(\lambda)). \quad (3.90)$$

Como $H \in \Lambda(\lambda)$ é arbitrário, tem-se que $s(\lambda)\Lambda(\lambda) \subset \text{cl}(\Lambda_{N_{w'}}(\lambda))$, o que conclui a demonstração, pois $\Lambda(\lambda)$ e $\Lambda_{N_{w'}}(\lambda)$ são cones abertos e convexos. \square

Lema 3.22. *Sejam $\lambda \in \mathcal{C}$ e $h \in \lambda$. Para todo $n \in N(\lambda)$, tem-se que $h^{-k}nh^k \rightarrow 1$, se $k \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Se $n \in N(\lambda)$, então $n = \exp(X)$, para algum $X = \sum_{\alpha \in \Pi^+(\lambda)} X_\alpha$, onde $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha(\lambda)$. Por outro lado, $h = \exp(H)$, para algum $H \in \mathfrak{a}^+(\lambda)$. Pelas equações (A.17) e (A.19), tem-se que

$$h^{-k}nh^k = \exp(e^{-kad(H)}X) = \exp\left(\sum_{\alpha \in \Pi^+(\lambda)} e^{-k\alpha(H)}X_\alpha\right). \quad (3.91)$$

Portanto, se $k \rightarrow \infty$, então $h^{-k}nh^k \rightarrow 1$, pois $\alpha(H) > 0$, para todo $\alpha \in \Pi^+(\lambda)$. \square

O conjunto dos atratores de S em \mathbb{F} é definido por

$$\text{atr}(S) = \{\mathfrak{p}(\lambda) : \lambda \in \mathcal{C}(S)\}. \quad (3.92)$$

Proposição 3.23. *Existe um único conjunto de controle S -invariante \mathbb{A} em \mathbb{F} . Além disto, tem-se que $\text{atr}(S) \subset \mathbb{A}_0$.*

Demonstração. Pelo Corolário 3.20, tem-se que $\mathcal{C}(S) \neq \emptyset$. Sejam então $\lambda \in \mathcal{C}(S)$ e $h \in \lambda \cap S$. Pelo Teorema 3.16, $\mathfrak{p}(\lambda)$ é o único atrator da ação de λ em \mathbb{F} e sua variedade estável $\text{est}(\lambda)$ é aberta e densa em \mathbb{F} . Para todo $\mathfrak{p} \in \mathbb{F}$, tem-se que $\text{est}(\lambda) \cap S\mathfrak{p} \neq \emptyset$, pois $S\mathfrak{p}$ é aberta. Isto implica que existe $g \in S$, tal que $g\mathfrak{p} \in \text{est}(\lambda)$ e, portanto, $h^k g\mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}(\lambda)$, se $k \rightarrow \infty$. Logo $\mathfrak{p}(\lambda) \in \text{cl}(S\mathfrak{p})$. Como $\lambda \in \mathcal{C}(S)$ e $\mathfrak{p} \in \mathbb{F}$ são arbitrários, pelo Corolário 2.17, segue que existe um único conjunto de controle S -invariante \mathbb{A} em \mathbb{F} tal que

$$\text{atr}(S) \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathbb{F}} \text{cl}(S\mathfrak{p}) \subset \mathbb{A}. \quad (3.93)$$

Portanto a segunda afirmação da proposição segue do fato que os elementos de $\text{atr}(S)$ são pontos fixos de elementos de S . \square

Lema 3.24. *Se $\lambda, \lambda' \in \mathcal{C}(S)$ são tais que $\mathfrak{p}(\lambda) = \mathfrak{p}(\lambda')$, então, para todo $w \in W$, tem-se que $\mathfrak{p}_w(\lambda)$ e $\mathfrak{p}_w(\lambda')$ pertencem ao conjunto de transitividade do mesmo conjunto de controle.*

Demonstração. Seja $w \in W$. Como os pontos $\mathfrak{p}_w(\lambda)$ e $\mathfrak{p}_w(\lambda')$ são pontos fixos de elementos de S , $[\mathfrak{p}_w(\lambda)]$ e $[\mathfrak{p}_w(\lambda')]$ são conjuntos de transitividade de conjuntos de controle em \mathbb{F} . Como $\mathfrak{p}(\lambda) = \mathfrak{p}(\lambda')$, pelo Lema 3.18, existe $n \in N(\lambda)$ tal que $\lambda' = n\lambda n^{-1}$ e, portanto, $\mathfrak{p}_w(\lambda') = n\mathfrak{p}_w(\lambda)$. Pelo Lema 3.22, se $h \in \lambda \cap S$ e $k \rightarrow \infty$, tem-se que

$$h^{-k}\mathfrak{p}_w(\lambda') = h^{-k}nh^k\mathfrak{p}_w(\lambda) \rightarrow \mathfrak{p}_w(\lambda). \quad (3.94)$$

Como S é aberto, tem-se que $[\mathfrak{p}_w(\lambda)]$ é aberto e, portanto, existe k_0 tal que $h^{-k_0}\mathfrak{p}_w(\lambda') \in [\mathfrak{p}_w(\lambda)]$. Isto mostra que $[\mathfrak{p}_w(\lambda)] \leq [\mathfrak{p}_w(\lambda')]$ e invertendo-se os papéis de \mathfrak{p} e \mathfrak{p}' , obtém-se o resultado. \square

Para cada $\mathfrak{p} \in \text{atr}(S)$ e $w \in W$, denota-se por $\mathbb{A}(\mathfrak{p}, w)$ o conjunto de controle, assegurado pelo Lema 3.24, cujo conjunto de transitividade contém o conjunto

$$\{\mathfrak{p}_w(\lambda) : \lambda \in \mathcal{C}(S) \text{ e } \mathfrak{p}(\lambda) = \mathfrak{p}\}. \quad (3.95)$$

Definição 3.25. O conjunto dos pontos fixos de tipo w de S em \mathbb{F} é definido por

$$\text{fix}_w(S) = \{\mathfrak{p}_w(\lambda) : \lambda \in \mathcal{C}(S)\}. \quad (3.96)$$

Em particular, tem-se que $\text{fix}_1(S) = \text{atr}(S)$.

O objetivo agora é mostrar que, para todo $w \in W$, $\mathbb{A}(\mathfrak{p}, w) = \mathbb{A}(w)$, para qualquer $\mathfrak{p} \in \text{atr}(S)$, e que seu conjunto de transitividade é precisamente o conjunto dos pontos fixos de tipo w de S em \mathbb{F} .

Lema 3.26. Sejam T, T' semigrupos abertos de um subgrupo P , que é isotropia de uma subálgebra parabólica \mathfrak{p} . Se existem câmaras ν e ν' em G interceptando, respectivamente, T e T' , de modo que $\mathfrak{p}(\nu) = \mathfrak{p}(\nu') = \mathfrak{p}$, então existem $\lambda \in \mathcal{C}$ e $g \in T$ tais que os semigrupos T e $g^{-1}T'g$ interceptam λ e $\mathfrak{p}(\lambda) = \mathfrak{p}$.

Demonstração. Pelo Lema 3.18, existe $n \in N(\nu)$ tal que $\nu' = n\nu n^{-1}$. Sejam $h \in \nu \cap T$ e $h' \in \nu' \cap T'$. Então existe $\hat{h} \in \nu$ tal que $h' = n\hat{h}n^{-1}$. Logo, para todo $i \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$h^{-k}h'h^k = n_k\hat{h}n_k^{-1} \in (n_k\nu n_k^{-1}) \cap (h^{-k}T'h^k), \quad (3.97)$$

onde $n_k = h^{-k}nh^k \in N(\nu)$, pois $h \in A(\nu)$ normaliza $N(\nu)$. Por outro lado, pelo Lema 3.22, $n_k \rightarrow 1$, quando $k \rightarrow \infty$. Portanto existe $l \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_l h n_l^{-1} \in (n_l \nu n_l^{-1}) \cap T, \quad (3.98)$$

uma vez que T é aberto. Definindo-se $g = h^l \in T$ e $\lambda = n_l \nu n_l^{-1}$, pelas equações (3.97) e (3.98), segue que λ intercepta T e $g^{-1}T'g$. O resultado segue, pois, pelo Lema 3.18, tem-se que $\mathfrak{p}(\lambda) = \mathfrak{p}$. \square

Lema 3.27. Sejam \mathfrak{p} e \mathfrak{p}' em $\text{atr}(S)$. Então existem λ em $\mathcal{C}(S)$ e g em S tais que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(\lambda)$, $g\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ e $g\lambda g^{-1}$ pertence a $\mathcal{C}(S)$.

Demonstração. Sejam $\nu, \tilde{\nu} \in \mathcal{C}(S)$ tais que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(\nu)$ e $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}(\tilde{\nu})$ e também $\tilde{g} \in S$ tal que $\tilde{g}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$. Tem-se que $\mathfrak{p}(\nu) = \mathfrak{p}(\tilde{g})^{-1}\nu\tilde{g}$ e $P(\nu) = (\tilde{g})^{-1}P(\tilde{\nu})\tilde{g}$. Denotando-se $P = P(\nu)$ e $P' = P(\tilde{\nu})$ e definindo-se

$$T = P \cap S \quad \text{e} \quad T' = (\tilde{g})^{-1}(P' \cap S)\tilde{g}, \quad (3.99)$$

tem-se que T e T' são semigrupos abertos de P , ν e $\nu' = (\tilde{g})^{-1}\tilde{\nu}\tilde{g}$ interceptam, respectivamente, T e T' e $\mathfrak{p}(\nu) = \mathfrak{p}(\nu') = \mathfrak{p}$. Pelo Lema 3.26, existem $\lambda \in \mathcal{C}$ e $\hat{g} \in T$ tais que T e $\hat{g}^{-1}T'\hat{g}$ interceptam λ e $\mathfrak{p}(\lambda) = \mathfrak{p}$. O resultado segue definindo-se $g = \tilde{g}\hat{g} \in S$, pois $g\lambda g^{-1}$ intercepta $P' \cap S$ e, portanto, S . \square

O próximo resultado fornece uma parametrização dos conjuntos de controle de S no flag maximal de \mathfrak{g} pelo grupo de Weyl canônico de \mathfrak{g} e caracteriza algebricamente os seus conjuntos de transitividade como conjuntos de pontos fixos de tipo w de S em \mathbb{F} .

Teorema 3.28. *Para todo $w \in W$, existe um conjunto de controle $\mathbb{A}(w)$ tal que*

$$\mathbb{A}(w)_0 = \text{fix}_w(S) \quad (3.100)$$

e estes são todos os conjuntos de controle de S em \mathbb{F} . Em particular, $\mathbb{A}_0 = \text{atr}(S)$.

Demonstração. Seja $w \in W$. Primeiro deve-se mostrar que $\mathbb{A}(w) = \mathbb{A}(\mathfrak{p}, w)$, para todo $\mathfrak{p} \in \text{atr}(S)$. Pela Proposição 3.23, tem-se que $\text{atr}(S) \subset \mathbb{A}_0$. Logo, se $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in \text{atr}(S)$, pelo Lema 3.27, existem $\lambda \in \mathcal{C}(S)$ e $g \in S$ tais que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(\lambda)$, $g\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ e $g\lambda g^{-1}$ pertence a $\mathcal{C}(S)$. Pelo Lema 3.18, tem-se que $\mathfrak{p}_w(g\lambda g^{-1}) = g\mathfrak{p}_w(\lambda)$. Como $\mathfrak{p}_w(\lambda) \in \mathbb{A}(\mathfrak{p}, w)$ e $\mathfrak{p}_w(g\lambda g^{-1}) \in \mathbb{A}(\mathfrak{p}', w)$, pois $\mathfrak{p}(g\lambda g^{-1}) = g\mathfrak{p}(\lambda) = \mathfrak{p}'$, tem-se que $\mathbb{A}(\mathfrak{p}, w) \leq \mathbb{A}(\mathfrak{p}', w)$. Invertendo-se os papéis de \mathfrak{p} e \mathfrak{p}' , obtém-se a igualdade.

Pela primeira parte da demonstração e pela observação que antecede (3.95), tem-se que $\text{fix}_w(S) \subset \mathbb{A}(w)_0$. Para se mostrar a igualdade, seja $\mathfrak{p} \in \mathbb{A}(w)_0$. Se P é a isotropia de \mathfrak{p} , tem-se que $P \cap S \neq \emptyset$. Pelo Corolário 3.20, existe $\lambda \in \mathcal{C}(S)$ tal que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{w'}(\lambda)$, para algum $w' \in W$. Como também $\mathfrak{p}_w(\lambda) \in \mathbb{A}(w)_0$, pelo Lema 3.21, tem-se que

$$s(\lambda)\Lambda(\lambda) \subset \Lambda_{N_{w'}}(\lambda), \quad (3.101)$$

onde $s = w'w^{-1}$. Seja então $h = \exp(H) \in \lambda \cap S$. Claramente $H \in \Lambda(\lambda)$ e, portanto, existe $n \in N_{w'}(\lambda)$ tal que $\exp(s(\lambda)H)n = s(\lambda)hs(\lambda)^{-1}n \in S$. Pelo Lema A.41, existe $\tilde{n} \in N_{w'}(\lambda)$ tal que $s(\lambda)hs(\lambda)^{-1}n = \tilde{n}s(\lambda)hs(\lambda)^{-1}\tilde{n}^{-1}$. Definindo-se $\tilde{\lambda} = \tilde{n}s(\lambda)\lambda s(\lambda)^{-1}\tilde{n}^{-1}$ tem-se que $\tilde{\lambda} \in \mathcal{C}(S)$. Como $\tilde{n} = w'(\lambda)n_0w'(\lambda)^{-1}$, para algum $n_0 \in N(\lambda)$, tem-se que

$$\mathfrak{p}_w(\tilde{\lambda}) = \mathfrak{p}_w(w'(\lambda)[n_0w(\lambda)^{-1}\lambda w(\lambda)n_0^{-1}]w'(\lambda)^{-1}), \quad (3.102)$$

pois $s(\lambda) = w'(\lambda)w(\lambda)^{-1}$. Logo, pelos Lema 3.18 e Proposição 3.2, segue que

$$\mathfrak{p}_w(\tilde{\lambda}) = w'(\lambda)\mathfrak{p}_w(w(n_0\lambda n_0^{-1})^{-1}(n_0\lambda n_0^{-1})w(n_0\lambda n_0^{-1})) \quad (3.103)$$

e, portanto, que

$$\mathfrak{p}_w(\tilde{\lambda}) = w'(\lambda)\mathfrak{p}_{w^{-1}w}(n_0\lambda n_0^{-1}) = w'(\lambda)\mathfrak{p}(n_0\lambda n_0^{-1}). \quad (3.104)$$

Pelo Lema 3.18, tem-se que $\mathfrak{p}(n_0\lambda n_0^{-1}) = \mathfrak{p}(\lambda)$. Segue que

$$\mathfrak{p} = w'(\lambda)\mathfrak{p}(\lambda) = \mathfrak{p}_w(\tilde{\lambda}) \in \text{fix}_w(S) \quad (3.105)$$

e, portanto, $\mathbb{A}(w)_0 = \text{fix}_w(S)$.

Pelo Corolário 3.20, estes são os únicos conjuntos de controle de S em \mathbb{F} e a última afirmação do teorema segue, definindo-se $\mathbb{A}(1) = \mathbb{A}$. \square

3.3.3 Conjuntos de Controle nos Flags Parciais

Seja $\lambda \in \mathcal{C}(S)$ e, como na Seção 3.2, fixa-se uma quadra admissível $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$ tal que $\Theta(\lambda) = \Theta$, onde $\lambda = \exp(\mathfrak{a}^+)$ e todos os objetos determinados por λ são denotados sem a notação (λ) . Pelos Teoremas 3.14 e 3.15, a fibração natural $\pi_\Theta : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ do flag maximal

sobre o flag de tipo Θ é isomorfa ao fibrado, com fibra típica $\mathbb{F}(\Theta)$, associado ao fibrado principal $\pi_\Theta : Q_\Theta \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$, cujo grupo estrutural é $\text{Int}(\mathfrak{g}(\Theta))$. Além disto, tem-se que $G \subset \text{End}_l(Q_\Theta)$, onde G age em Q_Θ por (3.58) e $\text{End}_l(Q_\Theta)$ é dado pela Definição 4.1. Logo, para todo semigrupo $S \subset G$, tem-se que S é um semigrupo local de endomorfismos de Q_Θ e as ações de S em \mathbb{F}_Θ e em \mathbb{F} são os semigrupos locais induzidos, respectivamente, na base e no fibrado associado.

Pelo Corolário 4.7, para todo $w \in W$, existe um único conjunto de controle $\mathbb{A}_\Theta(w)$ na base \mathbb{F}_Θ tal que $\pi_\Theta(\mathbb{A}(w)) \subset \mathbb{A}_\Theta(w)$ e $\pi_\Theta(\mathbb{A}(w)_0) \subset \mathbb{A}_\Theta(w)_0$. Por outro lado, a Proposição 4.19 e o Teorema 3.28 garantem que estes são os únicos conjuntos de controle de S em \mathbb{F}_Θ . Denota-se por \mathbb{A}_Θ o único conjunto de controle em \mathbb{F}_Θ tal que $\pi_\Theta(\mathbb{A}) \subset \mathbb{A}_\Theta$.

Teorema 3.29. *Sejam $w, w' \in W$. Então $\mathbb{A}_\Theta(w) = \mathbb{A}_\Theta(w')$, se, e somente se, $\mathbb{A}(w') = \mathbb{A}(ws)$, para algum $s \in W_\Theta$. Além disto, $\pi_\Theta(\mathbb{A}(w)_0) = \mathbb{A}_\Theta(w)_0$.*

Demonstração. Definindo-se

$$S_w = \{g \in S : g\mathbb{A}_\Theta(w)_0 \subset \mathbb{A}_\Theta(w)_0\}, \quad (3.106)$$

tem-se que S_w é um semigrupo local de endomorfismos dos seguintes fibrados principal e associado

$$\begin{array}{ccc} \pi_\Theta^{-1}(\mathbb{A}_\Theta(w)_0) \subset Q_\Theta & \xrightarrow{\psi_\Theta} & \pi_\Theta^{-1}(\mathbb{A}_\Theta(w)_0) \subset \mathbb{F} \\ & \searrow \pi_\Theta & \swarrow \pi_\Theta \\ & \mathbb{A}_\Theta(w)_0 & \end{array} \quad (3.107)$$

Pelo Teorema 3.15, a fibra típica deste fibrado associado é o flag $\mathbb{F}(\Theta)$ maximal de $\mathfrak{g}(\Theta)$. Como esta fibra típica é compacta, pelos Teorema 3.28 e Corolário 4.24, existe $w_1 \in W$ tal que $\pi_\Theta(\mathbb{A}(w_1)_0) = \mathbb{A}_\Theta(w)_0$.

Fixando-se $\lambda \in \mathcal{C}(S)$, segue que $\mathfrak{p}_{w_1}(\lambda) \in \mathbb{A}(w_1)_0$. As órbitas de S_w são claramente abertas, pois são interseções das órbitas de S com $\pi_\Theta^{-1}(\mathbb{A}_\Theta(w)_0)$. Logo pelo Corolário 4.22, os conjuntos de controle de S_w que interceptam a fibra de \mathbb{F} passando por $\mathfrak{p}_{w_1}(\lambda)$ estão em bijeção com conjuntos de controle em $\mathbb{F}(\Theta)$ do semigrupo $\widehat{S}_{w_1}(\Theta)$ induzido por S no grupo estrutural $\text{Int}(\mathfrak{g}(\Theta))$ a partir do ponto $w_1 L_\Theta \in Q_\Theta$, dado pela Definição 4.12. Tem-se que

$$\varphi_\Theta(w_1^{-1} S_w w_1 \cap P_\Theta) \subset \{\widehat{a} : w_1 L_\Theta \widehat{a} = g w_1 L_\Theta, a \in P_\Theta, g \in S_w\} = \widehat{S}_{w_1}(\Theta), \quad (3.108)$$

onde $\varphi_\Theta : P_\Theta \rightarrow \text{Int}(\mathfrak{g}(\Theta))$ é o homomorfismo dado pelo Teorema 3.12.

Pela equação (3.66), se $h \in \lambda$, tem-se que

$$\phi_\Theta(w_1 L_\Theta \cdot \widehat{g}\mathfrak{p}(\Theta)) = w_1 g \mathfrak{p} = h w_1 g \mathfrak{p} = \phi_\Theta(w_1 L_\Theta \cdot \varphi_\Theta(w_1^{-1} h w_1) \widehat{g}\mathfrak{p}(\Theta)), \quad (3.109)$$

onde $g \in P_\Theta = P_\Theta(\lambda)$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(\lambda)$ e w_1 é um representante de $w_1(\lambda)$ em $M^*(\lambda)$. Pelo Lema 3.13 e como $w_1^{-1} h w_1 \in A(\lambda)$ é um elemnto regular em S_w , tem-se que $\varphi_\Theta(w_1^{-1} h w_1) \in \widehat{S}_{w_1}(\Theta)$ é um elemento regular em $\text{Int}(\mathfrak{g}(\Theta))$.

Os pontos fixos de h na fibra de \mathbb{F} passando por $\mathfrak{p}_{w_1}(\lambda)$ são dados por $\mathfrak{p}_{w_1 s}(\lambda)$, onde $s \in W_\Theta$. De fato, se $\pi_\Theta(\mathfrak{p}_{\widehat{w}_1}(\lambda)) = \pi_\Theta(\mathfrak{p}_{w_1}(\lambda))$, então $\widehat{w}_1(\lambda)\mathfrak{p}_\Theta(\lambda) = w_1(\lambda)\mathfrak{p}_\Theta(\lambda)$, o que implica que $w_1(\lambda)^{-1}\widehat{w}_1(\lambda) \in P_\Theta$ e, portanto, que $w_1^{-1}\widehat{w}_1 \in W_\Theta$.

A equação (3.109) mostra que os pontos fixos de h na fibra de \mathbb{F} passando por $\mathfrak{p}_{w_1}(\lambda)$ estão em bijeção com os pontos fixos de $\varphi_\Theta(w_1^{-1}hw_1)$ em $\mathbb{F}(\Theta)$. Pelo Teorema 3.28 aplicado aos conjuntos de controle de $\widehat{S}_{w_1}(\Theta)$ em $\mathbb{F}(\Theta)$, isto implica que os conjuntos de controle que interceptam a fibra de \mathbb{F} passando por $\mathfrak{p}_{w_1}(\lambda)$ são exatamente os conjuntos de controle contendo os pontos fixos de h nesta fibra, ou seja, contendo $\mathfrak{p}_{w_1 s}(\lambda)$, onde $s \in W_\Theta$. Pelo Teorema 3.28 aplicado aos conjuntos de controle de S em \mathbb{F} , tais conjuntos de controle são precisamente $\mathbb{A}(w_1 s)$, para todo $s \in W_\Theta$. Em particular, $\mathbb{A}(w) = \mathbb{A}(w_1 s)$, para algum $s \in W_\Theta$.

Os conjuntos de transitividade destes conjuntos de controle projetam-se sobrejetivamente em $\mathbb{A}_\Theta(w)_0$. De fato, para todo $\mathfrak{p}_\Theta \in \mathbb{A}_\Theta(w)_0$, existe $\lambda \in \mathcal{C}(S)$ tal que $\pi_\Theta(\mathfrak{p}_{w_1}(\lambda)) = \mathfrak{p}_\Theta$. Se $s \in W_\Theta$, então

$$\pi_\Theta(\mathfrak{p}_{w_1 s}(\lambda)) = w_1(\lambda)s(\lambda)\mathfrak{p}_\Theta(\lambda) = w_1(\lambda)\mathfrak{p}_\Theta(\lambda) = \pi_\Theta(\mathfrak{p}_{w_1}(\lambda)) = \mathfrak{p}_\Theta \quad (3.110)$$

e, como $\mathfrak{p}_{w_1 s}(\lambda) \in \mathbb{A}(w_1 s)$, isto mostra que $\pi_\Theta(\mathbb{A}(w_1 s)_0) = \mathbb{A}_\Theta(w)_0$. Em particular, tem-se que $\pi_\Theta(\mathbb{A}(w)_0) = \mathbb{A}_\Theta(w)_0$.

Se $\mathbb{A}_\Theta(w) = \mathbb{A}_\Theta(w')$, então $\mathbb{A}_\Theta(w)_0 = \mathbb{A}_\Theta(w')_0$ e, portanto, $S_w = S_{w'}$. Como todos os conjuntos de controle projetam-se sobrejetivamente, pode-se proceder como acima, substituindo w_1 por w e w por w' , para obter que $\mathbb{A}(w') = \mathbb{A}(ws)$, para algum $s \in W_\Theta$. \square

Denotando-se por $\widehat{S}(\Theta)$ o semigrupo, dado pela Definição 4.12, induzido por S no grupo estrutural $\text{Int}(\mathfrak{g}(\Theta))$ a partir do ponto $L_\Theta \in Q_\Theta$, tem-se que

$$\varphi_\Theta(S \cap P_\Theta) \subset \{\widehat{a} : aL_\Theta = gL_\Theta, a \in P_\Theta, g \in S\} = \widehat{S}(\Theta) \quad (3.111)$$

onde $\widehat{a} = \varphi_\Theta(a)$ e φ_Θ é o homomorfismo de grupos de Lie, dado pelo Teorema 3.12. Denotando-se por $\mathbb{A}(\Theta)$ o único conjunto de controle $\widehat{S}(\Theta)$ -invariante no flag $\mathbb{F}(\Theta)$ tem-se, pelo Teorema 4.27 e pela equação (3.66), que

$$\mathbb{A}_0 \cap \mathbb{F}_{\mathfrak{p}_\Theta} = \phi_\Theta^\Delta(L_\Theta \cdot \mathbb{A}(\Theta)_0), \quad (3.112)$$

onde ϕ_Θ^Δ é dada por (3.64), pois $\pi_\Theta(L_\Theta) = \mathfrak{p}_\Theta \in \mathbb{A}_\Theta$.

3.3.4 Tipo Parabólico de Semigrupos

O subgrupo canônico característico de S é definido por

$$W(S) = \{w \in W : \mathbb{A}(w) = \mathbb{A}\}. \quad (3.113)$$

Teorema 3.30. $W(S)$ é subgrupo de W .

Demonstração. Claramente, tem-se que 1 pertence a $W(S)$. Seja $\lambda \in \mathcal{C}(S)$. Se $w, w' \in W(S)$, então $\mathfrak{p}_w(\nu), \mathfrak{p}_{w'}(\nu) \in \mathbb{A}_0$. Pelo Teorema 3.28, isto implica que existe $\lambda' \in \mathcal{C}(S)$ tal que $\mathfrak{p}(\lambda') = \mathfrak{p}_w(\lambda) = \mathfrak{p}(w(\lambda)\lambda w^{-1}(\lambda))$. Pelo Lema 3.18, existe $n \in N(\lambda')$ tal que $w(\lambda)\lambda w^{-1}(\lambda) = n\lambda'n^{-1}$. Pelos Lema 3.18 e Proposição 3.2, tem-se que

$$\mathfrak{p}_{ww'}(\lambda) = \mathfrak{p}_{w'}(w(\lambda)\lambda w^{-1}(\lambda)) = \mathfrak{p}_{w'}(n\lambda'n^{-1}) = n\mathfrak{p}_{w'}(\lambda'). \quad (3.114)$$

Agora seja $h \in \lambda \cap S$. Pelo Lema 3.22, tem-se que $h^{-k}nh^k \rightarrow 1$, quando $k \rightarrow \infty$. Logo existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $(h^{-l}nh^l)\mathfrak{p}_{w'}(\lambda') \in \mathbb{A}_0$, pois \mathbb{A}_0 é aberto. Pela S -invariância de \mathbb{A}_0 , segue que

$$\mathfrak{p}_{ww'}(\lambda) = n\mathfrak{p}_{w'}(\lambda') = h^l(h^{-l}nh^l)\mathfrak{p}_{w'}(\lambda') \in \mathbb{A}_0 \quad (3.115)$$

e, portanto, que $ww' \in W(S)$. Como W é finito, isto conclui a demonstração. \square

Um elemento $H \in \mathfrak{a}$ é *característico de S* se H é fixado por $W(S)$ e existe $\lambda \in \mathcal{C}$ tal que $H(\lambda)$ pertence a $\Lambda_N(\lambda)$, o cone envelopante em $\mathfrak{a}(\lambda)$ do semigrupo T_N , definido na equação (3.81). Denota-se por $\Lambda_S(\lambda)$ o cone convexo gerado pelo conjunto

$$\bigcup_{w \in W(S)} w\Lambda(\lambda), \quad (3.116)$$

onde $\Lambda(\lambda)$ é o cone envelopante em $\mathfrak{a}(\lambda)$ do semigrupo $A(\lambda) \cap S$.

Lema 3.31. *Existe um elemento característico de S .*

Demonstração. Seja $\lambda \in \mathcal{C}(S)$. Como $\Lambda_S(\lambda)$ é claramente um cone convexo não-vazio e invariante pelo subgrupo $W(S)$, pelo Lema B.61, existe $H(\lambda) \in \Lambda_S(\lambda)$ fixado por $W(S)$. Como $\mathfrak{p}_w(\lambda) \in \mathbb{A}_0$, para todo $w \in W(S)$, pelo Lema 3.21, tem-se que o conjunto dado em (3.117) está contido em $\Lambda_N(\lambda)$. O fato dos cones envelopantes serem convexos, implica que $\Lambda_S(\lambda) \subset \Lambda_N(\lambda)$. \square

Se $H \in \mathfrak{a}$, então W_H denota a isotropia de H em W e $W_{\Theta(H)}$ é o subgrupo de W parabólico de tipo $\Theta(H)$, onde o anulador de H em Σ é dado por

$$\Theta(H) = \{\alpha \in \Sigma : \alpha(H) = 0\}. \quad (3.117)$$

Pela Proposição A.29, tem-se que $W_H = W_{\Theta(H)}$. O tipo parabólico de W_H é único. De fato, se $\Theta \subset \Sigma$ é tal que $W_H = W_\Theta$, então $\Theta(H) = \Theta$, pois $\alpha \in \Theta(H)$ se, e somente se, $r_\alpha \in W_H$.

Teorema 3.32. *Tem-se que $W(S)$ é parabólico de tipo $\Theta(S)$, onde $\Theta(S)$ é o anulador em Σ de qualquer elemento característico de S .*

Demonstração. Seja $H \in \mathfrak{a}$ um elemento característico de S . Portanto existe $\lambda \in \mathcal{C}$ tal que $H(\lambda)$ é fixado por $W(S)(\lambda)$ e pertence a $\Lambda_N(\lambda)$. Como na Seção 3.2, fixa-se uma quadra admissível $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta(H))$ tal que $\Theta(H)(\lambda) = \Theta(H)$, onde $\lambda = \exp(\mathfrak{a}^+)$ e todos os objetos determinados por λ serão denotados sem a notação (λ) . Por exemplo, $H(\lambda)$ e $\Lambda_N(\lambda)$ serão

denotados, respectivamente, por H e Λ_N . Pela definição de Λ_N , existem $t > 0$ e $X \in \mathfrak{n}$ tais que $\exp(tH)\exp(X) \in S \cap P_{\Theta(H)}$. Pela equação (3.111), tem-se que

$$\widehat{\exp}(t\widehat{H})\widehat{\exp}(\widehat{X}) = \widehat{\pi}(\exp(tH)\exp(X)) \in \widehat{S}(\Theta(H)), \quad (3.118)$$

onde $\widehat{\exp}$ denota a aplicação exponencial em $\text{Int}(\mathfrak{g}(\Theta(H)))$ e o circunflexo denota a projeção de $\mathfrak{p}_{\Theta(H)}$ paralela a $\mathfrak{l}_{\Theta(H)}$ sobre $\mathfrak{g}(\Theta(H))$, dada pelo Teorema 3.12. Logo, tem-se que $\widehat{X} \in \mathfrak{n}(\Theta(H))$ e $t\widehat{H} = 0$, pois $H \in \mathfrak{a}_{\Theta(H)}$. Como $\widehat{\exp}(\widehat{X}) \in \widehat{S}(\Theta(H))$, pelo Lema 4.1 apresentado em [33], tem-se que $\widehat{S}(\Theta(H)) = \widehat{G}(\Theta(H))$. Portanto $\mathbb{A}(\Theta(H)) = \mathbb{F}(\Theta(H))$ e, pela equação (3.112), tem-se que $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}_{\Theta(H)}} \subset \mathbb{A}_0$.

Por outro lado, como $\pi_{\Theta(H)}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}_{\Theta(H)}$, segue que, para todo $w \in W_{\Theta(H)}$,

$$\pi_{\Theta(H)}(\mathfrak{p}_w) = w\mathfrak{p}_{\Theta(H)} = \mathfrak{p}_{\Theta(H)}. \quad (3.119)$$

Isto implica que $\mathfrak{p}_w \in \mathbb{F}_{\mathfrak{p}_{\Theta(H)}} \subset \mathbb{A}_0$ e, portanto, que $W_H = W_{\Theta(H)} \subset W(S)$. Como claramente $W(S) \subset W_H$, obtém-se a igualdade.

A independência de $\Theta(H)$ em relação à H característico é clara, pois o tipo parabólico do subgrupo $W(S)$ é único, pela observação que antecede o teorema. \square

Proposição 3.33. *Sejam S e S' dois semigrupos abertos de G e $\mathbb{A}(w)$ e $\mathbb{A}'(w)$ seus respectivos conjuntos de controle, para cada $w \in W$. Para as seguintes afirmações*

- (i) $S \subset S'$,
- (ii) $\mathbb{A}(w)_0 \subset \mathbb{A}'(w)_0$, para todo $w \in W$ e
- (iii) $\Theta(S) \subset \Theta(S')$.

tem-se que (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii).

Demonstração. Se $S \subset S'$, então claramente $\mathcal{C}(S) \subset \mathcal{C}(S')$. Isto implica que, para todo $w \in W$, $\text{fix}_w(S) \subset \text{fix}_w(S')$. Pelo Teorema 3.28, $\mathbb{A}(w)_0 \subset \mathbb{A}'(w)_0$, para todo $w \in W$, mostrando que (i) \Rightarrow (ii). Se (ii) é verdadeira, então $\mathbb{A}'(w) = \mathbb{A}'$ implica que $\mathbb{A}(w) = \mathbb{A}$, o que mostra $W(S) \subset W(S')$. Logo $\Theta(S) \subset \Theta(S')$ e, portanto, (ii) \Rightarrow (iii). \square

3.3.5 Ordem, Número e Domínios de Atração

Sejam W o grupo de Weyl canônico de \mathfrak{g} e Σ o sistema simples de raízes canônico. Pela Proposição B.60, W é gerado pelo conjunto $\{r_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$. Escrevendo-se $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, denota-se por r_i a reflexão com respeito à raiz α_i . Se $w \in W$, então seu *comprimento* $c(w)$ em relação à Σ é o menor número de elementos utilizados para se escrever w como produto de reflexões em torno de raízes simples. Seja $w = s_1 \cdots s_n$ uma decomposição de w , onde $s_i = r_{j_i}$. Se $n = c(w)$, diz-se que esta decomposição de w é *minimal em relação à Σ* .

A *ordem de Bruhat-Chevalley em relação a Σ* é uma ordem parcial em W definida de tal modo que $w' \leq w$ se, e somente se, $w = s_1 \cdots s_n$ é uma decomposição minimal em relação à Σ e existem subíndices $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n = c(w)$ tais que $w' = s_{i_1} \cdots s_{i_m}$ é uma decomposição minimal de w' ou, equivalentemente, $m = c(w')$.

Definição 3.34. *Existe um único elemento de comprimento maximal, que é denotado por w^- e denominado involução principal de W em relação a Σ .*

Se W_Θ é um subgrupo parabólico de tipo $\Theta \subset \Sigma$, então cada classe $W_\Theta w$ contém um elemento de comprimento minimal $\mu(w)$ tal que, se existem $a \in W_\Theta w$ e $a' \in W_\Theta w'$ com $a \leq a'$, então $\mu(w) \leq \mu(w')$. Logo a ordem de Bruhat-Chevalley passa ao quociente $W_\Theta \backslash W$, definindo-se $W_\Theta w \leq W_\Theta w'$ se, e somente se, $\mu(w) \leq \mu(w')$, sendo esta também uma ordem parcial.

O teorema seguinte mostra que a ordem entre conjuntos de controle é a ordem reversa da ordem de Bruhat-Chevalley no quociente $W(S) \backslash W$. O fato desta ser uma ordem parcial implica diretamente que os conjuntos de controle de S em \mathbb{F} estão em bijeção com $W(S) \backslash W$.

Teorema 3.35. *Tem-se que $\mathbb{A}(w) \leq \mathbb{A}(w')$ se, e somente se, $W(S)w \geq W(S)w'$. Em particular, $\mathbb{A}(w) = \mathbb{A}(w')$ se, e somente se, $W(S)w = W(S)w'$. Além disto, o conjunto de controle $\mathbb{A} = \mathbb{A}(1)$ é o único maximal e $\mathbb{A}^- = \mathbb{A}(w^-)$ é o único minimal.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.1 de [36], tem-se que $\mathbb{A}(w) \leq \mathbb{A}(w')$ se, e somente se, existe $a' \in W(S)w'$ tal que $w \geq a'$. Pelo Teorema 3.32, tem-se que $W(S)$ é parabólico de tipo $\Theta(S)$ e, portanto, as duas primeiras afirmações do teorema seguem das observações que antecedem o teorema. A última afirmação é consequência de propriedades da ordem de Bruhat-Chevalley (c.f. [36]). \square

O corolário seguinte é consequência direta dos Teoremas 3.29 e 3.35.

Corolário 3.36. *$\mathbb{A}_\Theta(w) = \mathbb{A}_\Theta(w')$ se, e somente se, $W(S)wW_\Theta = W(S)w'W_\Theta$. Além disto, o conjunto de controle $\mathbb{A}_\Theta = \mathbb{A}_\Theta(1)$ é o único maximal e $\mathbb{A}_\Theta^- = \mathbb{A}_\Theta(w^-)$ é o único minimal.*

Para $\alpha_i \in \Sigma$, denota-se por \mathbb{F}_i o flag de tipo $\{\alpha_i\}$. Para todo $\mathbb{B} \subset \mathbb{F}$ e define-se

$$\gamma_i(\mathbb{B}) = \pi_i^{-1}(\pi_i(\mathbb{B})), \quad (3.120)$$

onde $\pi_i : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}_i$ é a fibração natural definida na Seção 3.2. Considerando-se as definições de domínios de atração e de repulsão de um conjunto de controle dadas no final da Seção 2.2, tem-se o seguinte resultado, que é o Teorema 6.1 de [36].

Proposição 3.37. *Para todo $w \in W$, o domínio de atração de $\mathbb{A}(w)$ é dado por*

$$\mathcal{A}(\mathbb{A}(w)) = \gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_n}(\mathbb{A}(w^-)_0), \quad (3.121)$$

onde $w^- w = r_{i_n} \cdots r_{i_1}$ é uma decomposição minimal.

Aplicando-se este resultado para o semigrupo inverso S^{-1} , obtém-se a caracterização do domínio de repulsão de $\mathbb{A}(w)$.

Proposição 3.38. *Para todo $w \in W$, o domínio de repulsão de $\mathbb{A}(w)$ é dado por*

$$\mathcal{R}(\mathbb{A}(w)) = \gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_m}(\mathbb{A}_0), \quad (3.122)$$

onde $w = r_{j_m} \cdots r_{j_1}$ é uma decomposição minimal.

Demonstração. Segue da Proposição 3.37 e da Proposição 3.1 de [36]. □

3.3.6 Semigrupos em Grupos de Lie *-Redutíveis

Todos os resultados apresentados nesta seção permanecem válidos para semigrupos abertos numa classe de grupos de Lie redutíveis agindo, pela ação adjunta, nos flags da componente semi-simples da álgebra de Lie do grupo.

Definição 3.39. *Um grupo de Lie redutível G_R é denominado *-redutível se sua componente semi-simples é conexa.*

Como $Z(G_R)$ é o núcleo da representação adjunta Ad , se G_R é *-redutível, tem-se que $G = \text{Ad}(G_R)$ é um grupo de Lie semi-simples e conexo. Portanto, se \mathfrak{g} é a componente semi-simples da álgebra de Lie do grupo, a ação adjunta de um semigrupo aberto $S_R \subset G_R$ num flag qualquer de \mathfrak{g} coincide com a ação do semigrupo aberto $S = \text{Ad}(S_R) \subset G$. Isto mostra que os conjuntos de controle de S_R e de S são os mesmos e os resultados apresentados neste capítulo podem ser então utilizados.

O grupo linear geral $\text{Gl}(\mathbb{R}^n)$ é um grupo *-redutível, pois é claramente o produto entre o seu centro

$$Z(\text{Gl}(\mathbb{R}^n)) = \{aI_n : a \in \mathbb{R} - 0\} \quad (3.123)$$

e a sua componente semi-simples conexa

$$\text{Sl}(\mathbb{R}^n) = \{M : \det(M) = 1\}. \quad (3.124)$$

Capítulo 4

Conjuntos de Controle em Fibrados

É apresentada, neste capítulo, a teoria de semigrupos locais de endomorfismos de um fibrado $\pi_E : E \rightarrow X$ associado a um fibrado principal $\pi : Q \rightarrow X$. O princípio básico é decompor o problema em duas partes: a ação do semigrupo induzida na base X e a ação do semigrupo nas fibras de E . Esta abordagem é então aplicada ao estudo da ação de semigrupos locais de endomorfismos dos denominados fibrados flag, cujas fibras típicas são as variedades flag generalizadas apresentadas no Capítulo 3. Neste caso, obtém-se a completa caracterização da ação em termos da sua decomposição na base e nas fibras.

4.1 Endomorfismos de Fibrados Topológicos

Nesta seção, serão estudados os conjuntos de controle de semigrupos locais de endomorfismos de um fibrado.

Definição 4.1. *Um endomorfismo local de Q é uma aplicação contínua $\phi : \text{dom}\phi \rightarrow Q$ tal que*

(i) $\text{dom}\phi = \pi^{-1}(U)$ onde $U \subset X$ é um conjunto aberto, e

(ii) $\phi(qa) = \phi(q)a$ para todos $q \in \text{dom}\phi$ e $a \in G$.

Denota-se por $\text{End}_l(Q)$ o conjunto dos endomorfismos locais de Q , que é claramente um semigrupo local, denominado semigrupo dos endomorfismos locais de Q .

Um aplicação $\phi \in \text{End}_l(Q)$ preserva as fibras de Q e, portanto, induz a aplicação $\phi_X(\pi(q)) = \pi(\phi(q))$ de $\pi(\text{dom}\phi)$ em X , denominada *aplicação induzida por ϕ em X* . Esta aplicação é contínua, devido ao seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} Q & & \\ \pi \downarrow & \searrow^{\pi \circ \phi} & \\ X & \xrightarrow{\phi_X} & X \end{array} \tag{4.1}$$

Além disto, se $E \rightarrow X$ é um fibrado associado a Q , define-se a *aplicação ϕ_E induzida por $\phi \in \text{End}_l(Q)$ em E* como $\phi_E(q \cdot v) = \phi(q) \cdot v$, onde seu domínio é o conjunto aberto de todos os pontos em E sobre o aberto $\pi(\text{dom}\phi)$. Esta é também uma aplicação contínua, já que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} Q \times F & \xrightarrow{(\phi, \text{id})} & Q \times F \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{\phi_E} & E \end{array} \quad (4.2)$$

Quando não houver ambiguidades, essas aplicações induzidas também serão denotadas por ϕ .

Um *semigrupo local de endomorfismos de Q* é um subconjunto

$$S_Q \subset \text{End}_l(Q) \quad (4.3)$$

fechado para as composições. O seu *semigrupo local induzido em X* é definido por

$$S_X = \{\phi \in C_l(X) : \phi(\pi(q)) = \pi(\phi(q)), \phi \in S_Q\} \quad (4.4)$$

e o *induzido no fibrado associado $E = Q \times_G F$* é definido por

$$S_E = \{\phi \in C_l(E) : \phi(q \cdot v) = \phi(q) \cdot v, \phi \in S_Q\}. \quad (4.5)$$

O conjunto $\text{End}_l(X)$ de todas aplicações induzidas por $\text{End}_l(Q)$ em X é denominado *semigrupo dos endomorfismos locais de X* . Analogamente o conjunto $\text{End}_l(E)$ de todas aplicações induzidas por $\text{End}_l(Q)$ em E é denominado *semigrupo dos endomorfismos locais de E* .

O objetivo desta seção é relacionar os conjuntos de controle de S_E no espaço total E com os conjuntos de controle de S_X no espaço base X , olhando para conjuntos de controle na fibra típica F .

4.1.1 Projeção de Classes

Seja $E = Q \times_G F \rightarrow X$ um fibrado associado ao fibrado principal $Q \rightarrow X$. O primeiro passo na direção de relacionar os conjuntos de controle no espaço total E aos conjuntos de controle no espaço base X é investigar as projeções das classes de equivalência das três relações \sim , \sim_w and \sim_s definidas na Seção 2.1. Seja $S \subset \text{End}_l(Q)$ um semigrupo local de endomorfismos de E . Para se evitar excesso de notação, os semigrupos locais induzidos S_X e S_E também serão denotados por S . O espaço onde S age será claro pelo contexto. Também, denota-se por π ambas as projeções $\pi_E : E \rightarrow X$ e $\pi : Q \rightarrow X$. Os elementos $q \cdot v \in E$, serão denotados pelas letras gregas ξ e η .

Lema 4.2. *Para cada $\xi \in E$, tem-se que $\pi([\xi]) \subset [\pi(\xi)]$.*

Demonstração. De fato, como $[\xi] = S\xi \cap S^*\xi$, tem-se que

$$\pi(S\xi \cap S^*\xi) \subset \pi(S\xi) \cap \pi(S^*\xi) = [\pi(\xi)]. \quad (4.6)$$

□

A respeito das relações fracas, tem-se os seguintes fatos.

Lema 4.3. *Para todo $\xi \in E$, tem-se que $\pi(\text{cl}(S\xi)) \subset \text{cl}(S\pi(\xi))$.*

Demonstração. Seja C um conjunto fechado contendo $S(\pi(\xi))$. Então $\pi^{-1}(C)$ é fechado e contém $S\xi$, pois $\pi(S\xi) = S(\pi(\xi))$. Logo $\text{cl}(S\xi) \subset \pi^{-1}(C)$, ou seja, $\pi(\text{cl}(S\xi)) \subset C$. Como C é um conjunto fechado arbitrário contendo $S(\pi(\xi))$, segue que $\pi(\text{cl}(S\xi)) \subset \text{cl}(S(\pi(\xi)))$. □

Corolário 4.4. *Seja $\xi, \eta \in E$. Então*

- (i) $\pi(\xi) \preceq_w \pi(\eta)$, se $\xi \preceq_w \eta$,
- (ii) $\pi(\xi) \sim_w \pi(\eta)$, se $\xi \sim_w \eta$ e
- (iii) $\pi([\xi]_w) \subset [\pi(\xi)]_w$.

Demonstração. Seja $\xi \preceq_w \eta$, ou seja, $\eta \in \text{cl}(S\xi)$. Pelo Lema 4.3, $\pi(\eta) \in \text{cl}(S\pi(\xi))$, ou seja, $\pi(\xi) \preceq_w \pi(\eta)$, demonstrando a primeira afirmação. As afirmações (ii) e (iii) são conseqüências diretas de (i). □

Para as relações fortes, tem-se os seguintes fatos similares.

Lema 4.5. *Para $\xi \in E$, vale que*

- (i) $\pi(\text{int}(S\xi)) \subset \text{int}(S\pi(\xi))$ e
- (ii) $\pi(\text{int}(S^*\xi)) \subset \text{int}(S^*\pi(\xi))$.

Demonstração. De fato, o resultado segue de π ser uma aplicação aberta e das igualdades $\pi(S\xi) = S\pi(\xi)$ e também $\pi(S^*\xi) = S^*\pi(\xi)$. □

Corolário 4.6. *Sejam $\xi, \eta \in E$. Então*

- (i) $\pi(\xi) \preceq_s \pi(\eta)$, se $\xi \preceq_s \eta$,
- (ii) $\pi(\xi) \sim_s \pi(\eta)$, se $\xi \sim_s \eta$ e
- (iii) $\pi([\xi]_s) \subset [\pi(\xi)]_s$.

Demonstração. A demonstração é similar à do Corolário 4.4. □

O corolário seguinte é consequência direta dos resultados sobre projeções de classes e mostra que todo conjunto de controle no espaço total E se projeta dentro de um conjunto de controle no espaço base X , de tal modo que o conjunto de transitividade do primeiro é projetado dentro do conjunto de transitividade do segundo.

Corolário 4.7. *Seja $D \subset E$ um conjunto de controle. Então existe um conjunto de controle $C \subset X$ tal que $\pi(D) \subset C$ e $\pi(D_0) \subset C_0$.*

No caso de conjuntos de controle S ou S^* -invariantes, a segunda inclusão do Corolário 4.7 é de fato uma igualdade, como demonstrado a seguir.

Proposição 4.8. *Sejam $D \subset E$ um conjunto de controle S ou S^* -invariante e $C \subset X$ o conjunto de controle contido em $\pi(D)$, cuja existência é assegurada pelo Corolário 4.7. Então $\pi(D_0) = C_0$.*

Demonstração. Resta mostrar que $C_0 \subset \pi(D_0)$. De fato, sejam $x \in C_0$ e $\xi \in D_0$. Como $\pi(\xi) \in \pi(D_0) \subset C_0$, existem $\phi, \psi \in S$ tais que $x = \phi(\pi(\xi)) = \pi(\phi(\xi))$ e $\psi(x) = \pi(\xi)$. Como ψ é uma bijeção entre a fibra E_x e a fibra $E_{\pi(\xi)}$, existe $\eta \in E_x$ tal que $\psi(\eta) = \xi$. Se D é S -invariante, então $\phi(\xi) \in D_0$, o que mostra que $x \in \pi(D_0)$. Se D é S^* -invariante, então $\eta \in D_0$, o que mostra que $x = \pi(\eta) \in \pi(D_0)$. \square

Corolário 4.9. *Se S é transitivo no espaço base X , então os conjuntos de transitividade dos conjuntos de controle invariantes se projetam sobre X , ou seja, interceptam cada fibra de E .*

Para que os conjuntos de controle S -invariantes em E também projetem-se sobre conjuntos de controle S -invariantes em X , deve-se supor que a fibra típica F seja compacta.

Lema 4.10. *Seja E um fibrado associado com fibra típica F compacta. Então $\pi(\text{cl}(S\xi)) = \text{cl}(S\pi(\xi))$.*

Demonstração. Como a fibra típica F é compacta, a projeção π é uma aplicação fechada. Logo $\pi(\text{cl}(S\xi))$ é um conjunto fechado contendo $S\pi(\xi)$. Portanto $\text{cl}(S\pi(\xi)) \subset \pi(\text{cl}(S\xi))$, e a igualdade se verifica pelo Lema 4.3. \square

Proposição 4.11. *Sejam E um fibrado associado com fibra típica F compacta e $D \subset E$ um conjunto de controle S -invariante, onde o semigrupo local S é acessível em E . Então $\pi(D)$ é um conjunto de controle S -invariante.*

Demonstração. Pela Proposição 2.15, tem-se que $D = \text{cl}(S\xi)$ para qualquer $\xi \in D$. Mas pelo Lema 4.10, tem-se que $\pi(\text{cl}(S\xi)) = \text{cl}(S\pi(\xi))$. Isto implica que $\pi(D) = \text{cl}(Sx)$ para todo $x \in \pi(D)$. Agora qualquer conjunto de controle $C \subset X$ satisfaz $C \subset \text{cl}(Sx)$ para todo $x \in C$. Escolhendo-se $x \in \pi(D)$, segue que

$$\pi(D) \subset C \subset \text{cl}(Sx) = \pi(D), \quad (4.7)$$

concluindo-se a demonstração. \square

4.1.2 Semigrupos do Grupo Estrutural

De maneira a relacionar os conjuntos de controle de S_E no espaço total E com conjuntos de controle na fibra típica F , necessita-se definir semigrupos adequados contidos no grupo estrutural G . Estes semigrupos devem refletir a ação de S_E nas fibras de E .

Para cada $x \in X$, pode-se considerar o subsemigrupo local de S_Q que fixa a fibra Q_x sobre x , i.e,

$$S_Q^x = \{\phi \in S_Q : \phi Q_x = Q_x\}. \quad (4.8)$$

Como fibras são mapeadas homeomorficamente sobre fibras por elementos de S_Q , pode-se olhar para S_Q^x como um semigrupo de Q_x . Após fixar $q \in Q_x$, a ação de S_Q^x na fibra Q_x é dada pelo seguinte semigrupo de G .

Definição 4.12. Dado $q \in Q$, define-se o semigrupo induzido por S no grupo estrutural G a partir de q por

$$S_q = \{a \in G : qa \in S_Q q\} \quad (4.9)$$

ou, equivalentemente, $S_q = i_q^{-1}(S_Q q \cap Q_q)$ onde i_q é o homeomorfismo (C.23) entre G e a fibra Q_q .

Observe que $S_q^{-1} = \{a^{-1} \in G : a \in S_q\}$ é um semigrupo em G bem definido, mesmo se os elementos de S_Q não são inversíveis. Contudo tem-se a seguinte igualdade.

Lema 4.13. $S_q^{-1} = i_q^{-1}(S_Q^* q \cap Q_q)$.

Demonstração. De fato, $S_q^{-1} = \{a^{-1} \in G : \exists \phi \in S_Q, qa = \phi(q)\}$, ou seja

$$S_q^{-1} = \{b \in G : \exists \phi \in S_Q, \phi(qb) = q\}. \quad (4.10)$$

Portanto $S_q^{-1} = i_q^{-1}(S_Q^* q \cap Q_q)$. □

A interseção de $\text{int}(S_Q^* q)$ com a fibra Q_q é descrita por

$$\begin{aligned} U_q &= \{b \in G : qb \in \text{int}(S_Q^* q)\} \\ &= i_q^{-1}(\text{int}(S_Q^* q) \cap Q_q). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pelo Lema 4.13, U_q está claramente contido em S_q^{-1} e, além disto,

$$S_q^{-1} U_q \subset U_q. \quad (4.12)$$

Lema 4.14. U_q é um ideal à esquerda de S_q^{-1} .

Demonstração. Sejam $a \in S_q^{-1}$ e $b \in U_q$. Então existe $\phi \in S_Q$ tal que $\phi(qa) = q$. Como ϕ comuta com a multiplicação à direita, tem-se que

$$\phi(qab) = \phi(qa)b = qb \quad (4.13)$$

mostrando que $qab \in \phi^{-1}(qb)$. Como $qb \in \text{int}(S_Q^* q)$ e utilizando o Lema 2.2, segue que $qab \in \text{int}(S_Q^* q)$, mostrando que $ab \in U_q$. □

Claramente U_q é um conjunto aberto em G . Além disso, $U_q \subset \text{int}(S_q^{-1}) = (\text{int}S_q)^{-1}$. Segue que $\text{int}(S_q) \neq \emptyset$ em G , quando $U_q \neq \emptyset$.

Para que os semigrupos S_q , $q \in Q$, possuam interior não-vazio, é suficiente que seja satisfeita a seguinte propriedade de acessibilidade para S_Q .

Definição 4.15. *Seja C um conjunto de controle de S_X . Diz-se que S_Q é regressivamente acessível sobre C se existe $q \in \pi^{-1}(C_0)$ tal que*

$$\text{int}(S_Q^*q) \cap \pi^{-1}(C) \neq \emptyset. \quad (4.14)$$

Observação 4.16. Uma vez que π é uma aplicação aberta, segue que $\pi^{-1}(C_0)$ é denso em $\pi^{-1}(C)$, pois, pela Proposição 2.10, o conjunto de transitividade é denso no conjunto de controle.

Lema 4.17. *Seja S_Q um semigrupo local acessível sobre um conjunto de controle C em X . Então para todo $p \in \pi^{-1}(C_0)$ tem-se que*

$$\text{int}(S_Q^*p) \cap \pi^{-1}(C_0) \neq \emptyset. \quad (4.15)$$

Demonstração. Sejam $q \in \pi^{-1}(C_0)$ tal que $\text{int}(S_Q^*q) \cap \pi^{-1}(C) \neq \emptyset$ e $p \in \pi^{-1}(C_0)$. Como ambos $\pi(q)$ e $\pi(p)$ pertencem a C_0 , existe $\psi \in S_X$ tal que $\psi(\pi(q)) = \pi(p)$. Seu levantamento satisfaz $\psi(q) = pa$ para algum $a \in G$.

Definindo-se $V = \text{int}(S_Q^*q) \cap \pi^{-1}(C_0)$ e $W = Va^{-1}$, tem-se claramente que eles são conjuntos abertos não-vazios. Para todo $q' \in V$ existe $\phi \in S_Q$ tal que $\phi(q') = q$. Então

$$\psi \circ \phi(q'a^{-1}) = \psi(q)a^{-1} = p, \quad (4.16)$$

o que mostra que $W \subset S_Q^*p$. Como W é aberto e contido em $\pi^{-1}(C_0)$, isto conclui a demonstração. \square

Lema 4.18. *Seja S_Q um semigrupo local acessível sobre um conjunto de controle C em X . Então para todo $q \in \pi^{-1}(C_0)$, tem-se que $U_q \neq \emptyset$. Em particular, $\text{int}S_q \neq \emptyset$ em G .*

Demonstração. Pelo Lema 4.17, tem-se que $\text{int}(S_Q^*q) \cap \pi^{-1}(C_0) \neq \emptyset$ para todo $q \in \pi^{-1}(C_0)$. Sejam então $q \in \pi^{-1}(C_0)$ e $p \in \text{int}(S_Q^*q) \cap \pi^{-1}(C_0)$. Como $\pi(q), \pi(p) \in C_0$, existe $\phi \in S_Q$ such that $\phi(q) \in Q_p$. Logo existe $q' \in Q_q$ tal que $\phi(q') = p$, pois ϕ restrito a Q_q é um homeomorfismo $Q_q \rightarrow Q_p$. Pelo Lema 2.2, este q' pertence a $\phi^{-1}(\text{int}(S_Q^*q)) \subset \text{int}(S_Q^*q)$. Logo $q' \in U_q$, concluindo a demonstração. \square

4.1.3 Interseção com Fibras

Procede-se agora na determinação da relação entre os conjuntos de controle de S_q na fibra típica F e as interseções dos conjuntos de controle de S_E no espaço total E com a fibra $E_{\pi(q)}$. Primeiro observa-se que pela definição das aplicações induzidas, para qualquer $\xi = q \cdot v \in E$, tem-se que $S_E\xi = (S_Qq) \cdot v$ e $S_E^*\xi = (S_Q^*q) \cdot v$. Portanto as órbitas progressivas e regressivas de S_E podem ser recuperadas a partir das órbitas de S_Q .

Em relação as propriedades de acessibilidade, no caso em que o grupo estrutural G age aberta e transitivamente sobre a fibra típica F , então a acessibilidade ou a acessibilidade regressiva de S_Q implicam, respectivamente, na acessibilidade ou acessibilidade regressiva de S_E . Isto se deve ao fato de que, neste caso, a aplicação $q \in Q \mapsto q \cdot v \in E$ é aberta e, portanto, tem-se que $(\text{int}(S_Q q)) \cdot v \subset \text{int}(S_E(q \cdot v))$ e $(\text{int}(S_Q^* q)) \cdot v \subset \text{int}(S_E^*(q \cdot v))$.

Primeiro será verificada a existência de conjuntos de controle em E situados acima dos conjuntos de controle em X . Para isso é suficiente a hipótese de compacidade da fibra típica do fibrado associado.

Proposição 4.19. *Seja $E = Q \times_G F$ tal que a fibra F é compacta e G age aberta e transitivamente em F . Seja também S_Q um semigrupo local acessível sobre um conjunto de controle C em X . Então existe um conjunto de controle $D \subset E$ tal que $\pi(D) \subset C$ e $\pi(D_0) \subset C_0$.*

Demonstração. Seja $q \in Q$ com $\pi(q) \in C_0$. Pelo Lema 4.18, U_q é um semigrupo aberto de G . Como, por hipótese, G age abertamente em F , as órbitas regressivas de U_q em F são conjuntos abertos. Pela Proposição 2.16, como F é compacto, existe um conjunto de controle A de U_q em F . Logo existem $v \in A$ e $a \in U_q$ tais que $av = v$. Pela definição de U_q , tem-se que $qa \in \text{int}(S^* q)$ e, como $q \cdot v = qa \cdot v$, segue que $q \cdot v \in (\text{int}(S^* q)) \cdot v \subset \text{int}(S^*(q \cdot v))$.

Definindo-se $D = [q \cdot v]_w$, tem-se que D é um conjunto de controle, pois $q \cdot v \in D$. Além disso, como $\pi(D)$ intercepta C , pelo Lema 4.7, segue que $\pi(D) \subset C$ e $\pi(D_0) \subset C_0$. \square

O resultado seguinte estabelece uma forte ligação entre os conjuntos de transitividade de conjuntos de controle no espaço total E e na fibra típica F . Mais precisamente, a interseção do conjunto de transitividade de um conjunto de controle de S_E em E é homeomorfo ao conjunto de transitividade de um conjunto de controle de S_q em F , onde S_q é definido em 4.12.

Teorema 4.20. *Sejam $E = Q \times_G F$ tal que G age aberta e transitivamente na fibra F e S_Q um semigrupo local acessível sobre um conjunto de controle C em X . Sejam $D \subset E$ um conjunto de controle tal que $\pi(D) \subset C$ e $q \in Q$ com $D_0 \cap E_{\pi(q)} \neq \emptyset$. Então existe um conjunto de controle $A \subset F$ para o semigrupo S_q tal que*

$$D_0 \cap E_{\pi(q)} = q \cdot A_0. \quad (4.17)$$

Demonstração. Seja B o subconjunto de F definido por $D_0 \cap E_{\pi(q)} = q \cdot B$. Deve-se verificar que $B = A_0$ para algum conjunto de controle A de S_q em F . Sejam $u, v \in B$. Então $q \cdot v, q \cdot u \in D_0$, de modo que existem $\phi, \psi \in S$ tais que $\phi(q) \cdot v = q \cdot u$ e $\psi(q) \cdot u = q \cdot v$ (c.f. Proposição 2.8). Claramente ϕ e ψ preservam a fibra Q_q . Logo, existem $a, b \in S_q$ tais que $\phi(q) = qa$ e $\psi(q) = qb$. Segue que $au = v$ and $bv = u$, mostrando que B está inteiramente contido na classe de equivalência $[u]$ para a ação de S_q em F .

Reciprocamente, se $w \in [u]$, então existem $a, b \in S_q$ tais que $aw = u$ e $bu = w$. Por definição, existem $\phi, \psi \in S$ com $\phi(q) = qa$ e $\psi(q) = qb$. Então $\phi(q \cdot w) = q \cdot u$ e $\psi(q \cdot u) = q \cdot w$. Logo $q \cdot w \in D_0$ e $w \in B$. Portanto, tem-se que $B = [u]$.

Definindo-se $A = [u]_w$, resta mostrar que $(A_q)_0 = B = [u]$. Pela Proposição 2.8, é suficiente que $u \in [u]_s$.

Agora, tem-se que $q \cdot u \in \text{int}(S^*(q \cdot u))$, pois $q \cdot u \in D_0$. Seja $B' \subset F$ tal que $q \cdot B' = \text{int}(S^*(q \cdot u))$. Então B' é aberto em F e, para todo $w \in B'$, existe $a \in S_q$ tal que $aw = u$. Isto significa que $B' \subset S_q^{-1}u$. Como $u \in B'$, tem-se que $u \in \text{int}(S_q^{-1}u)$. Portanto $u \in [u]_s$, concluindo a demonstração. \square

O próximo resultado é uma recíproca parcial do Teorema 4.20.

Proposição 4.21. *Sejam $E = Q \times_G F$ tal que G age aberta e transitivamente na fibra F e S_Q um semigrupo local acessível sobre um conjunto de controle C em X . Sejam também $q \in Q$ sobre C e $A \subset F$ um conjunto de controle para S_q . Se existem $v \in A$ e $a \in U_q$ tais que $a \cdot v = v$, então existe um conjunto de controle $D \subset E$ de S_E tal que*

$$D_0 \cap E_{\pi(q)} = q \cdot A_0. \quad (4.18)$$

Demonstração. Por hipótese, existem $v \in A$ e $a \in U_q \subset (\text{int}S_q)^{-1}$ tais que $av = v$. Tem-se que $a^{-1}v = v$ portanto $v \in A_0$. Por definição, $qa \in \text{int}(S_Q^*q)$, de modo que $qa^{-1} \in S_Qq$. Logo

$$q \cdot v = qa \cdot v \in \text{int}(S^*q) \cdot v \subset \text{int}(S^*(q \cdot v)). \quad (4.19)$$

Além disto, $q \cdot v = q \cdot a^{-1}v \in S(q \cdot v)$. Portanto $D = [q \cdot v]_w$ é o conjunto de controle desejado, pois $q \cdot v \in D_0$, de modo que, pelo Teorema 4.20, tem-se que $D_0 \cap E_{\pi(q)} = q \cdot A_0$. \square

O seguinte corolário é bastante adequado para o caso de semigrupos de sombreamento de semifluxos.

Corolário 4.22. *Sejam $E = Q \times_G F$ tal que G age aberta e transitivamente em F e S_Q um semigrupo local tal que suas órbitas regressivas são conjuntos abertos. Sejam também $C \subset X$ um conjunto de controle e $q \in \pi^{-1}(C_0)$. Para cada conjunto de controle $D \subset E$ de S_E com $D_0 \cap E_{\pi(q)} \neq \emptyset$, existe um conjunto de controle $A_q^D \subset F$ de S_q tal que*

$$D_0 \cap E_{\pi(q)} = q \cdot (A_q^D)_0. \quad (4.20)$$

Além disso, a aplicação $D \mapsto A_q^D$ é uma bijeção entre os conjuntos de controle de S_E tais que $D_0 \cap E_{\pi(q)} \neq \emptyset$ e os conjuntos de controle de S_q em F , e preserva a ordem entre conjuntos de controle.

Demonstração. Como as órbitas regressivas de S_Q são conjuntos abertos, pelo Lema 4.13, tem-se que $U_q = S_q^{-1}$. Além disto, S_Q é acessível sobre C , já que existem $x \in C_0$ e $\phi \in S_X$ tais que $\phi(x) = x$, o que implica que $\text{int}(S_Q^*\phi(q)) \cap \pi^{-1}(C) \neq \emptyset$, para todo $q \in Q_x$, uma vez que $q \in S_Q^*\phi(q) = \text{int}(S_Q^*\phi(q))$.

Pelo Teorema 4.20, se D é tal que $D_0 \cap E_{\pi(q)} \neq \emptyset$, existe um conjunto de controle A_q^D de S_q tal que $D_0 \cap E_{\pi(q)} = q \cdot (A_q^D)_0$. Por outro lado, se $A \subset F$ é um conjunto de controle de S_q , tem-se que existe um elemento de A_0 fixado por um elemento de $S_q = U_q^{-1}$ e, portanto, fixado por um elemento de U_q . Pela Proposição 4.21, isto implica que existe um conjunto de controle D tal que $D_0 \cap E_{\pi(q)} = q \cdot A_0$. Portanto $A_q^D = A$, o que mostra a sobrejetividade da aplicação. Sua injetividade é clara.

Para mostrar que esta aplicação preserva a ordem sejam D e D' tais que $D_0 \cap E_{\pi(q)} \neq \emptyset$ e $D'_0 \cap E_{\pi(q)} \neq \emptyset$. Sejam $v \in A_q^D$ e $v' \in A_q^{D'}$. Pela Proposição 2.11, se $D \leq D'$, então existe $\phi \in S$ tal que $q \cdot v' = \phi(q \cdot v) = \phi(q) \cdot v$. Tem-se então que $\phi(q) = qa$ e $v' = av$. Isto implica que $a \in S_q$ e $A_q^D \leq A_q^{D'}$. Reciprocamente, se $A_q^D \leq A_q^{D'}$, então existe $a \in S_q$ tal que $v' = av$. Isto implica que existe $\phi \in S$ tal que $\phi(q) = qa$ e, portanto, $q \cdot v' = \phi(q) \cdot v = \phi(q \cdot v)$, mostrando que $D \leq D'$. \square

4.1.4 Conjuntos de Controle Invariantes

No caso dos conjuntos de controle (progressivamente e regressivamente)-invariantes, os resultados acima podem ser melhorados, especialmente no que concerne a sobrejetividade de suas projeções. Com relação a isto, as duas proposições seguintes refinam a Proposição 4.8, mostrando que a invariância na fibra é suficiente para se ter projeções sobrejetivas. As noções de invariância relativa, presentes no enunciado das próximas duas proposições, são apresentadas na Definição 2.9.

Proposição 4.23. *Sejam $C \subset X$ um conjunto de controle de S_X e $D \subset E$ um conjunto de controle de S_E com $\pi(D_0) \subset C_0$. Sejam também $q \in Q$ sobre C_0 e $A \subset F$ um conjunto de controle de S_q tal que $D_0 \cap E_{\pi(q)} = q \cdot A_0$. Tem-se que*

- (i) *Se A_0 é S_q -invariante, então D_0 é progressivamente invariante em relação a $\pi^{-1}(C_0)$.*
- (ii) *Se A_0 é S_q^{-1} -invariante, então D_0 é regressivamente invariante em relação a $\pi^{-1}C_0$.*

Além disto, em ambos os casos, tem-se que $\pi(D_0) = C_0$.

Demonstração. (i) Sejam $p \cdot w \in D_0$ e $\phi \in S$ tal que $\phi(y) \in C_0$, onde $y = \pi(p \cdot w)$. Para mostrar que $\phi(p \cdot w) \in D_0$, sejam $v \in A_0$ e $x = \pi(q \cdot v)$. Logo $q \cdot v \in D_0$ e então existe $\psi \in S$ tal que $\psi(q \cdot v) = p \cdot w$. Como $\phi(y) \in C_0$, existe $\varphi \in S$ tal que $\varphi\phi(y) = x$. Então existe $u \in F$ tal que $\varphi\phi(p \cdot w) = q \cdot u$. Compondo-se as aplicações, obtem-se que

$$\varphi\phi\psi(q) \cdot v = \varphi\phi\psi(q \cdot v) = q \cdot u. \quad (4.21)$$

Logo existe $a \in S_q$ tal que $\varphi\phi\psi(q) = qa$ e $u = av \in A_0$, pois A_0 é S_q -invariante. Isto implica que $q \cdot u \in D_0$. Mas $\varphi(\phi(p \cdot w)) = q \cdot u$ e $\phi\psi(q \cdot v) = \phi(p \cdot w)$. Portanto $\phi(p \cdot w) \in D_0$, já que $D_0 = [q \cdot u] = [q \cdot v]$.

(ii) Seja $p \cdot w \in E$ tal que $z = \pi(p \cdot w) \in C_0$ e $\phi(p \cdot w) \in D_0$ para algum $\phi \in S$. Para verificar que $p \cdot w \in D_0$, sejam $v \in A_0$ e $x = \pi(q \cdot v)$. Logo $q \cdot v \in D_0$ e então existe $\psi \in S$ tal que $\psi(\phi(p \cdot w)) = q \cdot v$. Além disto, existe $\varphi \in S$ tal que $\varphi(x) = z$, o que implica que $\varphi(q \cdot u) = p \cdot w$ para algum $u \in F$, pois φ é um homeomorfismo entre as fibras sobre x e z . Tem-se que

$$\psi\phi\varphi(q) \cdot u = \psi\phi\varphi(q \cdot u) = q \cdot v. \quad (4.22)$$

Portanto existe $a \in S_q$ tal que $\psi\phi\varphi(q) = qa$ e $u = a^{-1}v \in A_0$, pois A_0 é S_q^{-1} -invariante. Isto implica que $q \cdot u \in D_0$. Mas $\phi(p \cdot w) \in D_0$ e $\varphi(q \cdot u) = p \cdot w$, o que mostra que $p \cdot w \in D_0$.

Finalmente a igualdade $\pi(D_0) = C_0$ segue da transitividade de S em C_0 . \square

Uma conseqüência direta deste resultado é o seguinte refinamento da Proposição 4.19.

Corolário 4.24. *Seja $E = Q \times_G F$ tal que a fibra F é compacta e G age aberta e transitivamente em F . Seja também S_Q um semigrupo local acessível sobre um conjunto de controle C em X . Então existe um conjunto de controle $D \subset E$ tal que $\pi(D) \subset C$ e $\pi(D_0) = C_0$.*

Como mais uma conseqüência deste resultado, tem-se a seguinte caracterização dos conjuntos de controle invariantes.

Corolário 4.25. *Com as mesmas notações e hipóteses da Proposição 4.23, tem-se que*

- (i) *Se C é S -invariante, então D_0 é S -invariante se, e só se, A_0 é S_q -invariante e*
- (ii) *Se C_0 é S^* -invariante, então D_0 é S^* -invariante se, e só se, A_0 é S_q^{-1} -invariante.*

Demonstração. Pela Proposição 4.23, em ambos os casos, é suficiente mostrar apenas a parte “somente se” da demonstração.

(i) Se D_0 é S -invariante, sejam $v \in A_0$ e $a \in S_q$. Então existe $\phi \in S$ tal que $\phi(q) = q \cdot a$, de modo que

$$q \cdot av = qa \cdot v = \phi(q) \cdot v = \phi(q \cdot v). \quad (4.23)$$

Como $q \cdot v \in D_0$, segue que $q \cdot av \in D_0$, o que implica que $av \in A_0$, mostrando que A_0 é S_q -invariante.

(ii) Se D_0 é S^* -invariante, sejam $v \in A_0$ e $a \in S_q^{-1}$. Então existe $\phi \in S$ tal que $\phi(qa) = q$, o que implica que

$$q \cdot v = \phi(qa) \cdot v = \phi(q \cdot av). \quad (4.24)$$

Como $q \cdot v \in D_0$, segue que $q \cdot av \in D_0$, de modo que $av \in A_0$, mostrando que A_0 é S_q^{-1} -invariante. \square

A partir deste resultado, pode-se mostrar que os conjuntos de controle S_E -invariantes situados acima de um dado conjunto de controle S_X -invariante $C \subset X$ estão em bijeção com os conjuntos de controle S_q -invariantes em F , para quaisquer q sobre C_0 . Para isso, é necessário o seguinte lema.

Lema 4.26. *Sejam S_Q um semigrupo local acessível sobre um conjunto de controle C em X e $q \in Q$ sobre C . Se $A \subset F$ é um conjunto de controle S_q ou S_q^{-1} -invariante, então existe um elemento em A_0 fixado por um elemento de U_q .*

Demonstração. Se A é S_q -invariante, sejam $v \in A_0$ e $a \in U_q \subset S_q^{-1}$. Pela Proposição 2.10, tem-se que $a^{-1}v \in A_0$. Então existe $b \in S_q^{-1}$ tal que $bv = a^{-1}v$. Portanto $ba(a^{-1}v) = a^{-1}v$. Portanto $u = a^{-1}v \in A_0$ e $ba \in U_q$, pois, pelo Lema 4.14, U_q é um ideal a esquerda de S_q^{-1} .

Se A é S_q^{-1} -invariante e $v \in A_0$, então $(U_q)v \subset A$. Como $(U_q)v$ é aberto e A_0 é denso em A , existe $a \in U_q$ tal que $av \in A_0$. Portanto existe $b \in S_q^{-1}$ tal que $bav = v$ e novamente $ba \in U_q$. \square

Teorema 4.27. *Seja S_Q um semigrupo local acessível sobre um conjunto de controle progressivamente invariante C em X . Então para cada conjunto de controle S -invariante $D \subset E$ sobre C tem-se que $\pi(D_0) = C_0$ e para todo $q \in \pi^{-1}(C_0)$, existe um conjunto de controle S_q -invariante $A_q^D \subset F$ tal que*

$$D_0 \cap E_{\pi(q)} = q \cdot (A_q^D)_0. \quad (4.25)$$

Além disto, fixando-se $q \in \pi^{-1}(C_0)$ a aplicação $D \mapsto A_q^D$ é uma bijeção entre os conjuntos de controle S_E -invariantes sobre C e os conjuntos de controle S_q -invariantes.

Demonstração. Se D é um conjunto de controle S_E -invariante sobre C , $\pi(D_0) \subset C_0$. Pela Proposição 4.8, tem-se que $\pi(D_0) = C_0$. Logo $D_0 \cap E_{\pi(q)} \neq \emptyset$ e, pelo Teorema 4.20, existe um conjunto de controle A_q^D de S_q tal que $D_0 \cap E_{\pi(q)} = q \cdot (A_q^D)_0$. Pelo Corolário 4.25, tem-se que $(A_q^D)_0$ é S_q -invariante, o que implica, pelo Corolário 2.21, que A_q^D é S_q -invariante. Por outro lado, se A é S_q -invariante, pelo Lema 4.26, tem-se que existe um elemento em $(A_q)_0$ fixado por um elemento de U_q . Pela Proposição 4.21, isto implica que existe um conjunto de controle D tal que $D_0 \cap E_{\pi(q)} = q \cdot (A_q)_0$. Novamente, pelo Corolário 4.25, tem-se que D_0 é S -invariante o que implica que D é S -invariante sobre C . Portanto $A_q^D = A$, mostrando a sobrejetividade da aplicação. Sua injetividade é clara. \square

O resultado análogo é verdadeiro para conjuntos regressivamente invariantes.

Teorema 4.28. *Seja S_Q um semigrupo local acessível sobre um conjunto de controle regressivamente invariante C em X . Então para cada conjunto de controle S^* -invariante $D \subset E$ sobre C tem-se que $\pi(D_0) = C_0$ e para todo $q \in \pi^{-1}(C_0)$, existe um conjunto de controle S_q^{-1} -invariante $A_q^D \subset F$ tal que*

$$D_0 \cap E_{\pi(q)} = q \cdot (A_q^D)_0. \quad (4.26)$$

Além disto, fixando-se $q \in \pi^{-1}(C_0)$ a aplicação $D \mapsto A_q^D$ é uma bijeção entre os conjuntos de controle S^ -invariantes sobre C e os conjuntos de controle S_q^{-1} -invariantes.*

Demonstração. A demonstração é basicamente a mesma do Teorema 4.27, adaptando-se para a invariância regressiva dos conjuntos de controle. \square

4.2 Endomorfismos de Fibrados Flag

Os resultados apresentados na Seção 4.1 serão agora aplicados aos denominados fibrados flag, definidos abaixo. Um dos principais objetivos desta seção é demonstrar que os conjuntos de controle de um semigrupo local de endomorfismos num fibrado flag projetam-se sobrejetivamente no espaço base, desde que o semigrupo local induzido na base seja transitivo. Isto permitirá dar uma descrição precisa desses conjuntos de controle, utilizando-se a descrição algébrica dos conjuntos de controle nos flags generalizados apresentada no Capítulo 3.

Um *fibrado flag* é um fibrado associado a um fibrado principal localmente trivial $\pi : Q \rightarrow X$, cujo grupo estrutural G é um grupo de Lie $*$ -reduzível (c.f. Definição 3.39), cuja componente semi-simples da álgebra de Lie de G é denotada por \mathfrak{g} . A sua fibra típica é algum dos flags de \mathfrak{g} . Para cada $\Theta \subset \Sigma$, onde Σ é o sistema simples de raízes canônico de \mathfrak{g} , o *fibrado flag de tipo Θ associado a $\pi : Q \rightarrow X$* é o fibrado $\pi_{\mathbb{E}_\Theta} : \mathbb{E}_\Theta \rightarrow X$, associado a Q , cuja fibra típica é a variedade flag \mathbb{F}_Θ de tipo Θ , onde a ação de G em \mathbb{F}_Θ é definida por (3.26). Se a fibra típica é o flag maximal \mathbb{F} , então o *fibrado flag maximal associado a Q* é denotado simplesmente por $\pi_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \rightarrow X$.

Seja $S \subset \text{End}(Q)$ um semigrupo local de endomorfismos de Q . A partir de agora e até o fim desta seção, será feita a hipótese de que, para todo $q \in Q$, as órbitas $S \cdot q$ e $S^* \cdot q$ são conjuntos abertos, o que é satisfeito pelos semigrupos de sombreamento, como mostra o Corolário 2.25. Outra hipótese sobre S , é que o semigrupo induzido em X é transitivo. No caso de semigrupos de sombreamento, devido à Proposição 5.15, esta condição é equivalente a transitividade por cadeias do semifluxo induzido na base.

4.2.1 Grupo de Weyl e Conjuntos de Controle

Pelo Teorema 3.28, para cada $q \in Q$, tem-se que os conjuntos de controle em \mathbb{F} do semigrupo S_q induzido por S no grupo estrutural G a partir do ponto q são parametrizados por W , o grupo de Weyl canônico de \mathfrak{g} . Para cada $w \in W$, denota-se por $\mathbb{A}^q(w)$ o conjunto de controle em \mathbb{F} tal que $\mathbb{A}^q(w)_0 = \text{fix}_w(S_q)$. Para cada $\Theta \subset \Sigma$, denota-se por $\mathbb{A}_\Theta^q(w)$ o conjunto de controle em \mathbb{F}_Θ , dado pelo Teorema 3.29 tal que $\pi_\Theta(\mathbb{A}^q(w)) \subset \mathbb{A}_\Theta^q(w)$ e

$$\pi_\Theta(\mathbb{A}^q(w)_0) = \mathbb{A}_\Theta^q(w)_0, \quad (4.27)$$

onde $\pi_\Theta : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ é a fibração equivariante dada pela equação (3.44).

Pelo Corolário 4.22, existe uma bijeção entre os conjuntos de controle de $S_{\mathbb{E}_\Theta}$ que interceptam a fibra de \mathbb{E}_Θ sobre $\pi(q)$ e os conjuntos de controle de S_q em \mathbb{F}_Θ .

Definição 4.29. *Para cada $w \in W$ e $\Theta \subset \Sigma$, tem-se que $\mathbb{D}_\Theta^q(w)$ é o conjunto de controle tal que*

$$\mathbb{D}_\Theta^q(w)_0 \cap (\mathbb{E}_\Theta)_{\pi(q)} = q \cdot \mathbb{A}_\Theta^q(w)_0. \quad (4.28)$$

O primeiro objetivo é mostrar que, fixando-se $q \in Q$, a família $\{\mathbb{D}_\Theta^q(w) : w \in W\}$ fornece todos os conjuntos de controle de $S_{\mathbb{E}_\Theta}$. Para isso, é suficiente mostrar que, para todo $p \in Q$, cada conjunto de controle $\mathbb{D}_\Theta^p(w)$ projeta-se sobrejetivamente na base X , pois neste caso todos os conjuntos de controle de $S_{\mathbb{E}_\Theta}$ interceptam a fibra de \mathbb{E}_Θ sobre $\pi(q)$.

Os Teoremas 4.27 e 4.28 garantem a sobrejetividade dos conjuntos de controle invariantes. A sobrejetividade dos demais conjuntos de controle é obtida, reduzindo-se ao caso invariante através de fibrações entre os fibrados flag. Para cada $\Theta \subset \Sigma$, a fibração $\pi_\Theta : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}_\Theta$ é definida por

$$\pi_\Theta(q \cdot \mathfrak{p}) = q \cdot \pi_\Theta(\mathfrak{p}), \quad (4.29)$$

para todo $\mathfrak{p} \in \mathbb{F}$. Fixando-se $\mathfrak{p}_\Theta \in \mathbb{F}_\Theta$, denota-se P_Θ a isotropias em G de \mathfrak{p}_Θ . Pela

Proposição C.74, a fibração $\pi_{\Theta}^{\mathfrak{p}} : Q \rightarrow \mathbb{E}_{\Theta}$, definida por

$$\pi_{\Theta}^{\mathfrak{p}}(q) = q \cdot \mathfrak{p}, \quad (4.30)$$

para todo $q \in Q$, é um fibrado principal localmente trivial, cujo grupo estrutural é P_{Θ} . Além disto, pela Proposição C.75, a fibração $\pi_{\Theta} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}_{\Theta}$, é isomorfa ao fibrado, cuja fibra típica $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}_{\Theta}}$ é a fibra de \mathbb{F} sobre \mathfrak{p}_{Θ} , associado ao fibrado principal localmente trivial $\pi_{\Theta}^{\mathfrak{p}} : Q \rightarrow \mathbb{E}_{\Theta}$.

Tem-se que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \xrightarrow{\pi_{\Theta}} & \mathbb{E}_{\Theta} \\ & \searrow \pi_{\mathbb{E}} & \swarrow \pi_{\mathbb{E}_{\Theta}} \\ & & X \end{array} \quad (4.31)$$

Além disto, se $\phi : Q \rightarrow Q$ é um endomorfismo de $\pi_{\Theta} : Q \rightarrow X$, então é também um endomorfismo de $\pi_{\Theta}^{\mathfrak{p}} : Q \rightarrow \mathbb{E}_{\Theta}$ e as aplicações induzidas em \mathbb{E} e \mathbb{E}_{Θ} a partir de $\pi_{\Theta} : Q \rightarrow X$ ou de $\pi_{\Theta}^{\mathfrak{p}} : Q \rightarrow \mathbb{E}_{\Theta}$ coincidem. Quando $\Theta = \{\alpha\}$, para algum $\alpha \in \Sigma$, este conjunto será denotado simplesmente por α .

Lema 4.30. *Seja $q \in Q$. Para todos $w \in W$ e $\alpha \in \Sigma$, tem-se que*

$$\pi_{\alpha}(\mathbb{D}^q(w)_0) = \mathbb{D}_{\alpha}^q(w)_0. \quad (4.32)$$

Demonstração. Pelas equações (4.27) e (4.28), tem-se que $\pi_{\alpha}(\mathbb{D}^q(w)_0) \subset \mathbb{D}_{\alpha}^q(w)_0$. Seja $\mathfrak{p} \in \mathbb{A}^q(w)_0$ e denota-se $\mathfrak{p}_{\alpha} = \pi_{\alpha}(\mathfrak{p})$. Então $q \cdot \mathfrak{p} \in \mathbb{D}^q(w)_0$ e, pelo Corolário 4.22, aplicado ao fibrado $\pi_{\alpha} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}_{\alpha}$, existe uma bijeção entre os conjuntos de controle de $S_{\mathbb{E}}$ que interceptam a fibra de \mathbb{E} passando por $q \cdot \mathfrak{p}$ e os conjuntos de controle de S_q^{α} em $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}_{\alpha}}$, onde S_q^{α} é o semigrupo induzido por S no grupo estrutural P_{α} a partir do ponto q . Pela equação (3.66), a ação de S_q^{α} em $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}_{\alpha}}$ é equivalente à ação de \widehat{S}_q^{α} em $\mathbb{F}(\alpha)$, onde $\mathbb{F}(\alpha)$ é o flag maximal da subálgebra semi-simples $\mathfrak{g}(\alpha)$ e

$$\widehat{S}_q^{\alpha} = \varphi_{\alpha}(S_q^{\alpha}) \in \text{Int}(\mathfrak{g}(\Theta)), \quad (4.33)$$

tal que $\varphi_{\alpha} : P_{\alpha} \rightarrow \text{Int}(\mathfrak{g}(\alpha))$ é o homomorfismo de grupos de Lie sobrejetor dado pelo Teorema 3.12. O grupo de Weyl platônico de $\mathfrak{g}(\alpha)$ é isomorfo ao subgrupo $W_{\alpha} = \{1, r_{\alpha}\}$. Pelo Teorema 3.28, o número de conjuntos de controle de $\widehat{S}_{q \cdot \mathfrak{p}}^{\alpha}$ em $\mathbb{F}(\alpha)$ é no máximo dois e, portanto, eles são necessariamente invariantes. Aplicando-se a Proposição 4.23, segue que $\pi_{\alpha}(\mathbb{D}^q(w)_0) = \mathbb{D}_{\alpha}^q(w)_0$, concluindo-se a demonstração do lema. \square

Pode-se mostrar agora a sobrejetividade dos demais conjuntos de controle.

Teorema 4.31. *Seja $q \in Q$. Para todos $w \in W$ e $\Theta \subset \Sigma$, tem-se que*

$$\pi(\mathbb{D}_{\Theta}^q(w)_0) = X. \quad (4.34)$$

Demonstração. Em primeiro lugar, observa-se que é suficiente mostrar a sobrejetividade dos conjuntos de controle no fibrado flag maximal \mathbb{E} . De fato, pelas equações (4.27) e (4.28), para todos $w \in W$ e $\Theta \subset \Sigma$, tem-se que $\pi_\Theta(\mathbb{D}^q(w)_0) \subset \mathbb{D}_\Theta^q(w)_0$. Isto implica que, se $\pi_\mathbb{E}(\mathbb{D}^q(w)_0) = X$, então

$$X = \pi_{\mathbb{E}_\Theta}(\pi_\Theta(\mathbb{D}^q(w)_0)) \subset \pi_{\mathbb{E}_\Theta}(\mathbb{D}_\Theta^q(w)_0) \subset X, \quad (4.35)$$

pois $\pi_\mathbb{E} = \pi_{\mathbb{E}_\Theta} \circ \pi_\Theta$, como mostrado no diagrama (4.31).

A sobrejetividade no caso do fibrado flag maximal \mathbb{E} é obtida por indução no comprimento de $w \in W$ em relação à Σ , como definido no final da Seção 3.3.

Se $c(w) = 1$, então $w = 1$ e, pelo Teorema 4.27 e como S_X é transitivo em X , tem-se que

$$\pi_\mathbb{E}(\mathbb{D}^q(1)_0) = \pi_\mathbb{E}(\mathbb{D}_0^q) = X. \quad (4.36)$$

Se $w \in W$, então existem $\alpha \in \Sigma$ e $w' \in W$ tais que $c(w') = c(w) - 1 < c(w)$ e $w = w'r_\alpha$, onde r_α é a reflexão em relação a α . Pela hipótese de indução, tem-se que $\pi_\mathbb{E}(\mathbb{D}^q(w')_0) = X$. Pelo Lema 4.30, tem-se que

$$\pi_\alpha(\mathbb{D}^q(w)_0) = \mathbb{D}_\alpha^q(w)_0 \quad \text{e} \quad \pi_\alpha(\mathbb{D}^q(w')_0) = \mathbb{D}_\alpha^q(w')_0. \quad (4.37)$$

Por outro lado, pelo Teorema 3.29, tem-se que $\mathbb{A}_\alpha^q(w) = \mathbb{A}_\alpha^q(w')$, o que implica que $\mathbb{D}_\alpha^q(w) = \mathbb{D}_\alpha^q(w')$ e também, pelas equações (4.37), que

$$\pi_\alpha(\mathbb{D}^q(w)_0) = \pi_\alpha(\mathbb{D}^q(w')_0). \quad (4.38)$$

Portanto, utilizando-se novamente o diagrama (4.31), segue que

$$\pi_\mathbb{E}(\mathbb{D}^q(w)_0) = \pi_{\mathbb{E}_\alpha}(\pi_\alpha(\mathbb{D}^q(w)_0)) = \pi_{\mathbb{E}_\alpha}(\pi_\alpha(\mathbb{D}^q(w')_0)) = \pi_\mathbb{E}(\mathbb{D}^q(w')_0) = X. \quad (4.39)$$

□

A sobrejetividade implica que, para cada $q \in Q$, a família $\{\mathbb{D}_\Theta^q(w) : w \in W\}$ fornece todos os conjuntos de controle de $S_{\mathbb{E}_\Theta}$. O teorema seguinte mostra que a parametrização dos conjuntos de controle pelo grupo de Weyl canônico de \mathfrak{g} independe, de fato, do ponto $q \in Q$ utilizado.

Teorema 4.32. *Sejam $w \in W$ e $\Theta \subset \Sigma$. Para todos $p, q \in Q$, tem-se que*

$$\mathbb{D}_\Theta^p(w) = \mathbb{D}_\Theta^q(w). \quad (4.40)$$

Este conjunto de controle será denotado simplesmente por $\mathbb{D}_\Theta(w)$.

Demonstração. Em primeiro lugar, observa-se que é suficiente mostrar a independência dos conjuntos de controle no fibrado flag maximal \mathbb{E} . De fato, pelas equações (4.27) e (4.28), para todos $w \in W$ e $\Theta \subset \Sigma$, tem-se que

$$\pi_\Theta(\mathbb{D}^p(w)) \subset \mathbb{D}_\Theta^p(w) \quad \text{e} \quad \pi_\Theta(\mathbb{D}^q(w)) \subset \mathbb{D}_\Theta^q(w). \quad (4.41)$$

Isto implica que, se $\mathbb{D}^p(w) = \mathbb{D}^q(w)$, então $\mathbb{D}_\Theta^p(w) = \mathbb{D}_\Theta^q(w)$.

A independência no caso do fibrado flag maximal \mathbb{E} é obtida por indução no comprimento de $w \in W$ em relação à Σ , como definido no final da Seção 3.3.

Se $c(w) = 1$, então $w = 1$ e, pelos Teorema 4.27 e Proposição 3.23, tem-se que

$$\mathbb{D}^p(1) = \mathbb{D}^q(1) \quad (4.42)$$

é o único conjunto de controle S -invariante em \mathbb{E} .

Se $w \in W$, então existem $\alpha \in \Sigma$ e $w' \in W$ tais que $c(w') = c(w) - 1 < c(w)$ e $w = w'r_\alpha$, onde r_α é a reflexão em relação a α . Pela hipótese de indução, tem-se que $\mathbb{D}_\Theta(w') = \mathbb{D}_\Theta^p(w') = \mathbb{D}_\Theta^q(w')$.

Pelo Teorema 3.29, tem-se que $\mathbb{A}^q(w')$ e $\mathbb{A}^q(w)$ são os únicos conjuntos de controle de S_q em \mathbb{F} situados acima de $\pi_\alpha(\mathbb{A}^q(w'))$. Pelo Teorema 4.31, isto implica que $\mathbb{D}(w')$ e $\mathbb{D}^q(w)$ são os únicos conjuntos de controle em \mathbb{E} situados acima de $\pi_\alpha(\mathbb{E}(w'))$. Por outro lado, utilizando-se um argumento análogo com S_p no lugar de S_q , obtém-se que $\mathbb{D}(w')$ e $\mathbb{D}^p(w)$ são os únicos conjuntos de controle em \mathbb{E} situados acima de $\pi_\alpha(\mathbb{E}(w'))$. Portanto segue que $\mathbb{D}^p(w) = \mathbb{D}^q(w)$ e conclui-se a demonstração. \square

O corolário seguinte mostra que os conjuntos de controle do fibrado flag maximal projetam-se sobrejetivamente nos conjuntos de controle dos fibrados flag parciais.

Corolário 4.33. *Para todos $w \in W$ e $\Theta \subset \Sigma$, tem-se que*

$$\pi_\Theta(\mathbb{D}(w)_0) = \mathbb{D}_\Theta(w)_0. \quad (4.43)$$

Demonstração. Pelos Teoremas 4.31 e 4.32 e pelas equações 4.29, 4.28 e 4.27, para todo $q \in Q$, tem-se que

$$\mathbb{D}_\Theta(w)_0 \cap (\mathbb{E}_\Theta)_{\pi(q)} = q \cdot \mathbb{A}_\Theta^q(w)_0 = \pi_\Theta(q \cdot \mathbb{A}^q(w)_0) = \pi_\Theta(\mathbb{D}(w)_0 \cap \mathbb{E}_{\pi(q)}). \quad (4.44)$$

\square

Analogamente ao caso de semigrupos abertos agindo em flags, o *subgrupo canônico característico do semigrupo local S* é definido por

$$W(S) = \{w \in W : \mathbb{D}(w) = \mathbb{D}\}. \quad (4.45)$$

Proposição 4.34. *Para todo $q \in Q$, tem-se que $W(S) = W(S_q)$, onde $W(S_q)$ é o subgrupo platônico característico do semigrupo S_q . Em particular, $W(S)$ é parabólico de tipo $\Theta(S) = \Theta(S_q)$, para qualquer $q \in Q$.*

Demonstração. Pelos Teorema 4.32 e Corolário 4.22, para todo $q \in Q$, tem-se que

$$W(S) = \{w \in W : \mathbb{D}(w) = \mathbb{D}\} = \{w \in W : \mathbb{A}^q(w) = \mathbb{A}^q\} = W(S_q). \quad (4.46)$$

\square

O corolário seguinte é utilizado na Seção 6.1 no estudo de semigrupos de sombreamento de semifluxos e é consequência direta das Proposições 3.33 e 4.34 e do Teorema 4.32.

Corolário 4.35. *Sejam S e S' dois semigrupos locais em Q e $\mathbb{D}(w)$ e $\mathbb{D}'(w)$ seus respectivos conjuntos de controle em \mathbb{E} , para cada $w \in W$. Sejam também as seguintes afirmações*

- (i) $S \subset S'$,
- (ii) $\mathbb{D}(w)_0 \subset \mathbb{D}'(w)_0$, para todo $w \in W$ e
- (iii) $\Theta(S) \subset \Theta(S')$.

Então (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii).

O próximo teorema é consequência direta dos Corolários 3.36 e 4.22, Teorema 3.35 e da Proposição 4.34.

Teorema 4.36. *Tem-se que $\mathbb{D}(w) \leq \mathbb{D}(w')$ se, e somente se, $W(S)w \geq W(S)w'$. Em particular, $\mathbb{D}_\Theta(w) = \mathbb{D}_\Theta(w')$ se, e somente se, $W(S)wW_\Theta = W(S)w'W_\Theta$. Além disto, o conjunto de controle $\mathbb{D}_\Theta = \mathbb{D}_\Theta(1)$ é o único maximal e $\mathbb{D}_\Theta^- = \mathbb{D}_\Theta(w^-)$ é o único minimal, onde w^- é a involução principal de W em relação a Σ , definida em 3.34.*

4.2.2 Exemplos de Fibrados Flag

Fibrados Vetoriais

Como primeiro exemplo de fibrado flag, tem-se o fibrado projetivo associado a um dado fibrado vetorial. Um *fibrado vetorial* $\pi_E : E \rightarrow X$ de dimensão n é um fibrado, cuja fibra típica é o \mathbb{R}^n , associado a um fibrado principal $\pi : BE \rightarrow X$, cujo grupo estrutural é o grupo linear geral $\text{Gl}(\mathbb{R}^n)$, denominado *fibrado das bases de E* . O *fibrado projetivo* $\pi_{PE} : PE \rightarrow X$ de dimensão n é o fibrado associado ao fibrado principal $\pi : BE \rightarrow X$ tal que sua fibra típica é o espaço projetivo $P\mathbb{R}^n$, dos subespaços vetoriais unidimensionais em \mathbb{R}^n . Definindo-se

$$E - 0 = \{q \cdot v \in E : q \in BE, v \in \mathbb{R}^n - 0\} \quad (4.47)$$

pode-se definir a fibração $P : E - 0 \rightarrow PE$ por

$$P(q \cdot v) = q \cdot P(v) \quad (4.48)$$

onde $P : (\mathbb{R}^n - 0) \rightarrow P\mathbb{R}^n$ é a aplicação que, para cada $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$, associa o subespaço vetorial $P(v)$ gerado por v .

Variedades Diferenciáveis e Fibrados

Se M é uma variedade diferenciável de dimensão n , o *conjunto das bases de M* é o conjunto BM de todos os isomorfismos lineares de \mathbb{R}^n para algum espaço tangente de M . O *fibrado das bases de M* é a projeção $\pi : BM \rightarrow M$, definida por $\pi(q) = x$ tal que $q : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$, onde $T_x M$ é o espaço tangente de M no ponto x . A partir de um atlas diferenciável

$\{(U_i, \phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n) : i \in I\}$ da variedade M , pode-se mostrar que $\pi : BM \rightarrow M$ é um fibrado principal localmente trivial, cujo grupo estrutural é o $\text{Gl}(\mathbb{R}^n)$. De fato, definindo-se $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \text{Gl}(\mathbb{R}^n)$ por $\psi_i = (\pi, g_i)$, onde $g_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \text{Gl}(\mathbb{R}^n)$ é dada por

$$g_i(q) = d_{\pi(q)}\phi_i \circ q, \quad (4.49)$$

tem-se que

$$g_i(q \circ a) = g_i(q) \circ a, \quad (4.50)$$

para todos $a \in \text{Gl}(\mathbb{R}^n)$ e $q \in \pi^{-1}(U_i)$. Além disto, a inversa de ψ_i é diferenciável, pois

$$\psi_i^{-1}(x, a) = d_x\phi_i^{-1} \circ a \quad (4.51)$$

para todos $x \in U_i$ e $a \in \text{Gl}(\mathbb{R}^n)$, o que implica que ψ_i é um difeomorfismo.

Para cada flag de $\text{Gl}(\mathbb{R}^n)$, associa-se o fibrado flag correspondente. Se o flag é o espaço projetivo $P\mathbb{R}^n$, o fibrado flag correspondente é denominado *fibrado projetivo de M* e é denotado $\pi_{PM} : PM \rightarrow M$. De maneira análoga, denotam-se por $\pi_{Gr_k M} : Gr_k M \rightarrow M$ e por $\pi_{\mathbb{F}_I M} : \mathbb{F}_I M \rightarrow M$ os fibrados associados a $\pi : BM \rightarrow M$, cujas fibras típicas são, respectivamente, a Grasmanniana k -dimensional $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ e o *flag clássico de índice $I = (i_1, \dots, i_l)$* , onde $i_1 \leq \dots \leq i_l$, definido por

$$\mathbb{F}_I(\mathbb{R}^n) = \{(V_1, \dots, V_l) : V_1 \subset \dots \subset V_l\} \quad (4.52)$$

onde V_j é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n de dimensão i_j .

Variedades Simpléticas

Se M é uma variedade simplética de dimensão $2n$, onde ω é a sua forma simplética, o *conjunto das bases simpléticas de M* é o subconjunto SpM de BM tal que se $q \in SpM$, então $q^*\omega = \omega_0$, onde $\omega_0(u, v) = u^T J v$, para todos $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$, é a *forma simplética canônica em \mathbb{R}^{2n}* e

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

é a *matriz simplética canônica em \mathbb{R}^{2n}* , onde I_n denota a matriz identidade n por n . O *fibrado simplético $\pi_{SpM} : SpM \rightarrow M$* de M é a restrição da projeção $\pi : BM \rightarrow M$ ao subconjunto SpM . O fibrado simplético de M é uma redução do fibrado das bases de M e seu grupo estrutural é o grupo simplético $\text{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$, de todos os $a \in \text{Gl}(\mathbb{R}^{2n})$ tais que $a^*\omega_0 = \omega_0$. De fato, pelo Teorema de Darboux, existe um atlas diferenciável $\{(U_i, \phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{2n}) : i \in I\}$ da variedade M tal que $(d_x\phi_i)^*\omega_0 = \omega$, para todo $x \in U_i$. Isto implica que $g_i(q) \in \text{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$, para todo $q \in SpM$, pois

$$g_i(q)^*\omega_0 = q^* \circ (d_{\pi(q)}\phi_i)^*\omega_0 = \omega_0. \quad (4.54)$$

Como no caso do fibrado das bases, para cada flag de $\text{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$, associa-se o fibrado flag correspondente. Um subespaço vetorial V de \mathbb{R}^{2n} é denominado *isotrópico* se $\omega_0(u, v) = 0$,

para todo $u, v \in V$ e os subespaços isotrópicos de dimensão máxima são denominados subespaços Lagrangianos. Se $La(\mathbb{R}^{2n})$ é o flag dos subespaços Lagrangeanos de \mathbb{R}^{2n} , o fibrado flag $\pi_{LaM} : LaM \rightarrow M$ correspondente é denominado *fibrado Lagrangeano de M* . De maneira geral, denota-se por $\pi_{\mathbb{I}_I M} : \mathbb{I}_I M \rightarrow M$ o fibrado associado, cuja fibra típica é o *flag isotrópico de índice $I = (i_1, \dots, i_l)$* , onde $i_1 \leq \dots \leq i_l$, definido por

$$\mathbb{I}_I(\mathbb{R}^{2n}) = \{(V_1, \dots, V_l) : V_1 \subset \dots \subset V_l\} \quad (4.55)$$

onde V_j é um subespaço isotrópico de \mathbb{R}^n de dimensão i_j .

Variedades Semi-Riemannianas

No caso em que M é uma variedade semi-Riemanniana de tipo (a, b) , o seu fibrado das bases pode ser reduzido a um fibrado cujo grupo estrutural é o grupo $SO(a, b)$, de todos $a \in \text{Gl}(\mathbb{R}^{a+b})$ tais que $a^*g_0 = g_0$, onde $g_0(u, v) = u^T I(a, b)v$, para todos $u, v \in \mathbb{R}^{a+b}$, é a *métrica semi-Riemanniana canônica de tipo (a, b) em \mathbb{R}^{a+b}* e

$$I(a, b) = \begin{pmatrix} -I_a & 0 \\ 0 & I_b \end{pmatrix}. \quad (4.56)$$

De fato, uma métrica semi-Riemanniana de tipo (a, b) em M define uma seção global no fibrado associado ao fibrado das bases de M , cuja fibra típica é $\text{Gl}(\mathbb{R}^{a+b})/SO(a, b)$. Pela Proposição 5.6 do Capítulo 1 em [19], cada seção desta é equivalente a uma redução do fibrado das bases a um fibrado $\pi_{SO(a,b)M} : SO(a, b)M \rightarrow M$, denominado *fibrado semi-Riemanniano de tipo (a, b) de M* . No caso particular em que $a = 1$ e $b = n$, M é denominada *variedade Lorentziana* e este fibrado é denominado *fibrado Lorentziano de M* , onde o grupo estrutural é o grupo $\text{Lo}(n) = SO(1, n)$, denominado *grupo de Lorentz*. No caso Lorentziano, denota-se por $\pi_{LuM} : LuM \rightarrow M$ o fibrado associado, cuja fibra típica é o flag $Lu(\mathbb{R}^{n+1})$ dos subespaços de tipo luz em \mathbb{R}^{n+1} . Um subespaço vetorial $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é *de tipo luz* se $g_0(u, v) = 0$, para todo $u, v \in V$, onde g_0 é denominada *métrica de Lorentz canônica em \mathbb{R}^{n+1}* . Mostra-se que os subespaços de tipo luz são todos unidimensionais e, como acontece com todos os grupos de posto 1, $Lu(\mathbb{R}^{n+1})$ é o único flag de $\text{Lo}(n)$ e é difeomorfo à esfera de dimensão n .

Variedades Complexas

Analogamente ao caso real, quando M é uma variedade complexa de dimensão n , o *conjunto das bases complexas de M* é o conjunto $B_{\mathbb{C}}M$ de todos os isomorfismos \mathbb{C} -lineares de \mathbb{C}^n para algum espaço tangente de M . Como no caso real, o *fibrado das bases complexas de M* é a projeção $\pi_{\mathbb{C}} : B_{\mathbb{C}}M \rightarrow M$, definida por $\pi_{\mathbb{C}}(q) = x$ tal que $q : \mathbb{C}^n \rightarrow T_x M$. Identificando-se $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, pode-se considerar a variedade M como uma variedade real de dimensão $2n$. Neste caso, o fibrado das bases complexas é uma redução do fibrado das bases reais de M e o seu grupo estrutural é o *grupo linear geral complexo* $\text{Gl}(\mathbb{C}^n)$, dos isomorfismos \mathbb{C} -lineares de \mathbb{C}^n em si mesmo.

Capítulo 5

Semifluxos em Fibrados Topológicos

Neste capítulo, a teoria de semigrupos de sombreamento, desenvolvida na Seção 2.2, é aplicada ao estudo de semifluxos de endomorfismos de um fibrado. Supõem-se que as fibras típicas dos fibrados considerados sejam espaços metrizáveis.

5.1 Semifluxos de Endomorfismos em Fibrados

O propósito desta seção é estabelecer resultados topológicos relacionados à transitividade e recorrência por cadeias de semifluxos de endomorfismos em fibrados. Se $\pi : Q \rightarrow X$ é um fibrado principal, diz-se que $\sigma : \mathbb{T} \times Q \rightarrow Q$ é um *semifluxo de endomorfismos em Q* se σ é um semifluxo em Q tal que $\sigma_t \in \text{End}_l(Q)$, para todo $t \in \mathbb{T}$, onde $\text{End}_l(Q)$ é o conjunto dos endomorfismos locais de Q definido na Seção 4.1.

Se $\pi_E : E \rightarrow X$ é um fibrado associado a Q , diz-se que $\sigma^E : \mathbb{T} \times E \rightarrow E$ é um *semifluxo de endomorfismos em E* se existe um semifluxo σ de endomorfismos em Q tal que σ_t^E é a aplicação induzida em E por σ_t , para todo $t \in \mathbb{T}$. Um semifluxo σ^E de endomorfismos em E é um semifluxo em E . De fato, as propriedades de semifluxos são conseqüências diretas das propriedades do semifluxo σ . Além disto, a aplicação σ^E é contínua, já que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} \times Q \times F & & (5.1) \\ \text{(id, \cdot)} \downarrow & \searrow \hat{\sigma}^E & \\ \mathbb{T} \times E & \xrightarrow{\sigma^E} & E \end{array}$$

onde $\hat{\sigma}^E(t, q, v) = \sigma_t(q) \cdot v$ é claramente contínua.

Se σ é um semifluxo de endomorfismos de Q , o *semifluxo induzido por σ em X* é a aplicação $\sigma^X : \mathbb{T} \times X \rightarrow X$, onde σ_t^X é a aplicação induzida por σ_t em X , para todo $t \in \mathbb{T}$.

Como o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} \times Q & & \\ (\text{id}, \pi) \downarrow & \searrow^{\pi \circ \sigma} & \\ \mathbb{T} \times X & \xrightarrow{\sigma^X} & X \end{array} \quad (5.2)$$

tem-se que σ^X é contínua e, portanto, é de fato um semifluxo. O seguinte diagrama também é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} \times E & & \\ (\text{id}, \pi_E) \downarrow & \searrow^{\pi_E \circ \sigma^E} & \\ \mathbb{T} \times X & \xrightarrow{\sigma^X} & X \end{array} \quad (5.3)$$

Quando não surgirem ambiguidades, os semifluxos induzidos por σ em E e X também serão denotados por σ .

Se $\varphi : \mathbb{T} \times Q \rightarrow Q$ é um fluxo e também um semifluxo de endomorfismos em Q , então ele é denominado de *fluxo de endomorfismos em Q* . Neste caso, $\varphi^E : \mathbb{T} \times E \rightarrow E$ é denominado *fluxo de endomorfismos em E* .

Se G é um grupo topológico e $\sigma : \mathbb{T} \times X \rightarrow X$ é um semifluxo num espaço topológico X , um *cociclo de X em G associado a σ* é uma aplicação contínua $\rho : \mathbb{T} \times X \rightarrow G$ satisfazendo

$$\rho(t + s, x) = \rho(s, \sigma_t(x))\rho(t, x), \quad (5.4)$$

para todos $t, s \in \mathbb{T}$ e $x \in X$. Pode-se então definir um semifluxo de endomorfismos no fibrado principal trivial com base X e grupo estrutural G . O denominado *semifluxo de produto cruzado associado a ρ* é a aplicação $\sigma : \mathbb{T} \times (X \times G) \rightarrow (X \times G)$ definida por

$$\sigma_t(x, g) = (\sigma_t(x), \rho_t(x)g), \quad (5.5)$$

onde $x \in X$ e $g \in G$. De fato, este é um semifluxo de endomorfismos em $X \times G$, pois

$$\sigma_t[(x, g)a] = [\sigma_t(x, g)]a, \quad (5.6)$$

para todo $a \in G$. Quando $\mathbb{T} = \mathbb{Z}^+$, para cada aplicação contínua $f : G \rightarrow G$, pode-se definir o *cociclo de X em G gerado por f e associado a σ* por $\rho(0, x) = 1$ e

$$\rho(n, x) = f(\sigma_{n-1}(x)) \cdots f(\sigma_1(x))f(x), \quad (5.7)$$

para todos $n > 0$ e $x \in X$. Se G age continuamente no espaço topológico F , o *semifluxo de produto cruzado associado a ρ no fibrado associado $X \times F$* é dado por

$$\sigma_t(x, v) = (\sigma_t(x), \rho_t(x)v), \quad (5.8)$$

onde $x \in X$ e $v \in F$. Além disto, este é o semifluxo de endomorfismos induzido pelo semifluxo de produto cruzado associado a ρ no fibrado principal $X \times G$.

De maneira mais geral, qualquer semifluxo de endomorfismos de um fibrado E associado a um fibrado principal Q é localmente um semifluxo de produto cruzado. Mais precisamente, seja $\Psi = \{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ um atlas de Q , onde $\{U_i : i \in I\}$ é uma cobertura trivializante e

$$\{\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G\}_{i \in I} \quad (5.9)$$

é uma família de trivializações locais de Q . Tem-se que $\Psi^E = \{(U_i, \psi_i^E)\}_{i \in I}$ é um atlas de E , onde $\psi_i^E = (\pi, v_i)$ é definida pela equação (C.29) e a aplicação $v_i : \pi_E^{-1}(U_i) \rightarrow F$ é definida pela equação (C.31).

Se $x \in U_i$ e $\sigma_t(x) \in U_j$, a expressão de σ_t em coordenadas locais é a aplicação definida por

$$\sigma_t^{ij}(x, a) = \psi_j \circ \sigma_t \circ \psi_i^{-1}(x, a) \quad (5.10)$$

onde $a \in G$. Pelas definições e pelas equação (C.24), tem-se que

$$\sigma_t^{ij}(x, a) = (\sigma_t(x), \rho_{ij}(t, x)a), \quad (5.11)$$

onde $\rho_{ij}(t, \cdot) = g_j \circ \sigma_t \circ \chi_i$ e $\chi_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ é a seção local associada a ψ_i . Se $\sigma_{t+s}(x) \in U_k$, tem-se que

$$\sigma_{t+s}^{ik} = \sigma_s^{jk} \circ \sigma_t^{ij} \quad (5.12)$$

e, portanto,

$$\rho_{ik}(t+s, x) = \rho_{jk}(s, \sigma_t(x))\rho_{ij}(t, x). \quad (5.13)$$

Por este motivo ρ_{ij} é denominado *cociclo local de σ* . Pela equação (C.29), a expressão de $\sigma_t^E : E \rightarrow E$ em coordenadas locais, com relação às trivializações locais ψ_i e ψ_j é dada por

$$(\sigma_t^E)^{ij}(x, v) = (\sigma_t(x), \rho_{ij}(t, x)v). \quad (5.14)$$

para todo $v \in F$.

O objetivo da seção é duplo. Primeiro será construída uma família adequada de coberturas abertas de E , denotada por $\mathcal{O}_\Psi(E)$. Sob hipóteses bastante gerais, essa família é admissível e será usada na construção da transitividade por cadeias de semifluxos de endomorfismos em E . Em segundo lugar, serão fornecidas condições gerais assegurando que o semigrupo de endomorfismos locais de E é de fato $\mathcal{O}_\Psi(E)$ -localmente transitivo. Estes fatos são essenciais para aplicar a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores ao estudo da transitividade por cadeias de semifluxos de endomorfismos em E .

5.1.1 Família Admissível de Coberturas

A partir de agora até o final desta seção, supõe-se que a fibra típica F é um espaço métrico compacto com métrica d e o espaço base X é um espaço topológico paracompacto. Além disto, será fixado um atlas $\Psi^E = \{(U_i, \psi_i^E)\}_{i \in I}$ de E . Como X é paracompacto, pode-se supor que a cobertura trivializante $\{U_i : i \in I\}$ é localmente finita. A definição seguinte fornece uma família adequada de coberturas abertas de E para ser usada na construção da transitividade por cadeias de semifluxos de endomorfismos em E . Quando não houver ambiguidades, o atlas de E será denotado apenas por Ψ e as trivializações locais de E apenas por ψ_i .

Definição 5.1. Dados $\varepsilon > 0$ e uma cobertura aberta \mathcal{U} de X , uma cobertura Ψ -adaptada de E é definida por

$$\mathcal{U}_\varepsilon = (\mathcal{U}, \varepsilon) = \{\psi_i^{-1}((U \cap U_i) \times B_\varepsilon(v)) : U \in \mathcal{U}, i \in I \text{ e } v \in F\}. \quad (5.15)$$

Denota-se por $\mathcal{O}_\Psi(E)$ a família de todas as coberturas abertas Ψ -adaptadas.

Para que $\mathcal{O}_\Psi(E)$ possa ser usada na construção da transitividade por cadeias de semifluxos em E , deve-se mostrar que ela é de fato admissível no sentido da Definição 1.17. A primeira das condições de admissibilidade será demonstrada em algumas situações especiais, suficientes para as situações onde \mathbb{E}_Θ é um fibrado flag, como definido na Seção 4.2. Já a segunda condição é demonstrada no próximo lema na sua completa generalidade.

Lema 5.2. Seja $N \subset E$ um conjunto aberto e $K \subset N$ um conjunto compacto. Então existe uma cobertura $(\mathcal{W}, \varepsilon) \in \mathcal{O}_\Psi(E)$ que é K -subordinada a N .

Demonstração. A projeção $\pi : E \rightarrow X$ é contínua e aberta. Logo $\pi(N)$ é aberta, $\pi(K)$ é compacto e claramente $\pi(K) \subset \pi(N) \subset X$. Como a cobertura $(U_i)_{i \in I}$ é localmente finita, o subconjunto $J = \{j \in I : U_j \cap \pi(K) \neq \emptyset\}$ é finito.

Além disso, existem vizinhanças fechadas $F_j \subset U_j$ tais que $(F_j)_{j \in J}$ é uma cobertura de $\pi(K)$. Para cada, $j \in J$, seja

$$\delta_j = \inf\{d(v_j(\xi), v_j(\eta)) : x \in V_j \cap \pi(K), \xi \in E_x \cap K \text{ e } \eta \in E_x \cap (E \setminus N)\} \quad (5.16)$$

Supondo-se que $\delta_j = 0$, existem redes $\delta_l \rightarrow 0$ e (x_l) em $V_j \cap \pi(K)$, e pontos $\xi_l \in E_{x_l} \cap K$ e $\eta_l \in E_{x_l} \cap (E \setminus N)$ tais que $d(v_j(\xi_l), v_j(\eta_l)) < \delta_l$. Por compacidade, pode-se supor que existe $x \in V_j \cap \pi(K)$ tal que $x_l \rightarrow x$ e que existe $\xi \in K$ com $\xi_l \rightarrow \xi$. Claramente $\psi_j(\xi) = (x, v_j(\xi))$ e, portanto, $\psi_j(\eta_l) = (x_l, v_j(\eta_l)) \rightarrow \psi_j(\xi)$. Isto implica que $\xi \in K \cap (E \setminus N)$, o que é uma contradição. Logo $\delta_j > 0$ e tem-se que $\varepsilon = \frac{1}{4} \min_{j \in J} \delta_j > 0$.

Agora para cada $x \in \pi(K)$, existe uma vizinhança W_x de x tal que se

$$A = \psi_j^{-1}((W_x \cap U_j) \times B_\varepsilon(v)) \cap K \neq \emptyset, \quad (5.17)$$

então $A \subset N$. Caso contrário, existem redes $(\xi_l) \subset K$ e $(\eta_l) \subset (E \setminus N)$, tais que $\pi(\xi_l) \rightarrow x$, $\pi(\eta_l) \rightarrow x$ e

$$d(v_j(\xi_l), v_j(\eta_l)) < 2\varepsilon. \quad (5.18)$$

Por compacidade, pode-se supor que existe $\xi \in K$ com $\xi_l \rightarrow \xi$ e que existe $v \in F$ tal que $v_j(\eta_l) \rightarrow v$. Claramente, definindo-se $\eta = \psi_j^{-1}(x, v)$, tem-se que $\eta_l \rightarrow \eta$. Portanto $\xi \in E_x \cap K$, $\eta \in E_x \cap (E \setminus N)$ e, pela equação (5.18), $d(v_j(\xi), v_j(\eta)) \leq 2\varepsilon < \delta$, o que é uma contradição.

Definindo-se $\mathcal{W} = \{X \setminus \pi(K), W_x : x \in \pi(K)\}$, tem-se que $(\mathcal{W}, \varepsilon)$ pertence a $\mathcal{O}_\Psi(E)$ e é K -subordinada a N , concluindo a demonstração. \square

Agora serão investigadas duas situações onde $\mathcal{O}_\Psi(E)$ também satisfaz a primeira condição da Definição 1.17 e é, portanto, admissível.

Primeiramente quando $E = X \times F$ é um fibrado trivial. Neste caso, $\Psi = (X, \psi = \text{id}_E)$ é um atlas de E com uma única trivialização. Então, para toda cobertura $(\mathcal{U}, \varepsilon)$ adaptada, tem-se que $(\mathcal{V}, \frac{\varepsilon}{2}) \leq \frac{1}{2}(\mathcal{U}, \varepsilon)$, sempre que $\mathcal{V} \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Isto mostra que $\mathcal{O}_\Psi(E)$ satisfaz a condição (i) de 1.17. Isto demonstra a seguinte proposição.

Proposição 5.3. *Se $E = X \times F$ é um fibrado trivial, então a família $\mathcal{O}_\Psi(E)$ é admissível.*

A segunda situação é quando o fibrado principal $Q \rightarrow X$ pode ser reduzido a um subfibrado $P \subset Q$ cujo grupo estrutural K age na fibra F por isometrias. Este é o resultado adequado a ser aplicado nos casos de fibrados flags associados a um fibrado principal Q , onde o grupo estrutural é um grupo de Lie G semi-simples de centro finito.

Um *subfibrado de G de um fibrado principal* $Q \rightarrow X$ é um subconjunto fechado $P \subset Q$ que é um fibrado localmente trivial na topologia induzida, cujo grupo estrutural é um subgrupo de K agindo em P por restrição da ação de G em Q e cuja projeção é a restrição da projeção de Q , projetando-se sobre o mesmo espaço base X .

Proposição 5.4. *Se o fibrado principal $Q \rightarrow X$ pode ser reduzido a um subfibrado $P \rightarrow X$ cujo grupo estrutural K age na fibra F por isometrias, então a família $\mathcal{O}_\Psi(E)$ é admissível.*

Demonstração. Como é possível reduzir o fibrado principal $\pi : Q \rightarrow X$ ao subfibrado $\pi : P \rightarrow X$, com grupo estrutural K , pela Proposição 5.3, do Capítulo I de [19], pode-se supor que o atlas $\Psi = (U_i, \psi_i)_{i \in I}$ é tal que suas funções de transição a_{ij} tomam valores em K . Se $(\mathcal{U}, \varepsilon)$ é uma cobertura Ψ -adaptada, define-se $(\mathcal{V}, \frac{\varepsilon}{2})$, onde \mathcal{V} é uma cobertura aberta de X tal que

$$\mathcal{V} \leq \frac{1}{2}\{U \cap U_i : i \in I, U \in \mathcal{U}\}. \quad (5.19)$$

Sejam agora $V, W \in \mathcal{V}$ e $\xi \in E$, tais que $\xi \in A \cap B$, onde

$$A = \psi_i^{-1}((V \cap U_i) \times B_{\frac{\varepsilon}{2}}(v)) \text{ e } B = \psi_j^{-1}((W \cap U_j) \times B_{\frac{\varepsilon}{2}}(w)). \quad (5.20)$$

Tem-se claramente que $\pi(\xi) \in V \cap W$ e, portanto, existem $k \in I$ e $U \in \mathcal{U}$ tais que $V \cup W \subset U \cap U_k$. Como K age em F por isometrias, então, para todos $u, v \in F$ tem-se que $d(a_{ik}(x)u, a_{ik}(x)v) = d(u, v)$. Isto implica, pela equação (C.34), que se $\eta \in A$, então

$$d(v_k(\eta), v_k(\xi)) = d(v_i(\eta), v_i(\xi)) < 2\frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon. \quad (5.21)$$

Definindo-se

$$C = \psi_k^{-1}((U \cap U_k) \times B_\varepsilon(v_k(\xi))), \quad (5.22)$$

tem-se que $A \subset C$. Analogamente segue que $B \subset C$, o que implica que $(\mathcal{V}, \frac{\varepsilon}{2}) \leq \frac{1}{2}(\mathcal{U}, \varepsilon)$, o que conclui a demonstração, devido ao Lema 5.2. \square

5.1.2 Transitividade Local e Grupos Metrízáveis

Nesta subsecção será analisada a propriedade de transitividade local do semigrupo local $\text{End}_l(E)$ com respeito à família $\mathcal{O}_\Psi(E)$ de todas as coberturas abertas Ψ -adaptadas, onde

Ψ é um atlas de E . A idéia básica é combinar as ações do semigrupo local $\mathcal{C}_l(X)$ no espaço base X com a ação de G na fibra F . O primeiro semigrupo local é localmente transitivo para quaisquer famílias de coberturas abertas de X , como observado logo após a Definição 2.22. Portanto as principais hipóteses a serem feitas dizem respeito à ação de G em F . Estas hipóteses são prontamente satisfeitas no caso de fibrados flag, que serão considerados na próxima seção.

Como antes a fibra típica de E é um espaço métrico compacto (F, d) . A distância entre duas aplicações $f, g : F \rightarrow F$ na *métrica do supremo* é definida por

$$\delta(f, g) = \sup_{w \in F} d(f(w), g(w)). \quad (5.23)$$

Um espaço métrico (F, d) é *convexo* se dados dois pontos $u, v \in F$, existe $w \in F$ tal que

$$d(u, v) = d(u, w) + d(w, v), \quad (5.24)$$

denominado *ponto mediano* entre u e v . Neste caso, se $d(x, y) < 2\varepsilon$, então $u, v \in B_\varepsilon(z)$.

Teorema 5.5. *Seja $E = Q \times_G F \rightarrow X$ um fibrado associado com base paracompacta X e tal que a fibra típica (F, d) é um espaço métrico compacto e convexo. Seja também $\Psi = (U_i, \psi_i)_{i \in I}$ um atlas de E . Se a ação de G em F satisfaz a seguinte condição*

- para todos $u, v \in F$ existe $g \in G$ tal que $v = k \cdot u$ e $d(u, v) = \delta(k, \text{id})$,

então o semigrupo local $\text{End}_l(E)$ é $\mathcal{O}_\Psi(E)$ -localmente transitivo em E .

Demonstração. Seja $(\mathcal{U}, \varepsilon) \in \mathcal{O}_\Psi(E)$. Por definição, um elemento $A \in (\mathcal{U}, \varepsilon)$ é da forma

$$A = \psi_i^{-1}((U \cap U_i) \times B_\varepsilon(v)), \quad (5.25)$$

onde $U \in \mathcal{U}$, $i \in I$ e $v \in F$. Pela Definição 2.22, dados $\alpha, \xi \in A$, deve-se encontrar ϕ na $\text{End}_l(E)$ -vizinhança da identidade de X relativa a $(\mathcal{U}, \varepsilon)$ tal que $\phi(\alpha) = \xi$.

Definindo-se $\rho = d(v_i(\alpha), v_i(\xi))$, tem-se que $\rho < 2\varepsilon$ e, por hipótese, existe $k \in G$ tal que $kv_i(\alpha) = v_i(\xi)$ e $\delta(k, \text{id}) = \rho$. Define-se $\phi : \pi^{-1}(U \cap U_i) \rightarrow E$ por

$$\phi(\psi_i^{-1}(x, v)) = \psi_i^{-1}(\pi(\xi), kv). \quad (5.26)$$

Claramente tem-se que $\phi(\alpha) = \xi$ e $\phi \in \text{End}_l(E)$. Resta mostrar que, para todo $\beta \in \pi^{-1}(U \cap U_i)$, os pontos β e $\phi(\beta)$ estão em

$$\psi_i^{-1}((U \cap U_i) \times B_\varepsilon(v_\beta)), \quad (5.27)$$

para algum $v_\beta \in F$. Para isto, observa-se que $\pi(\beta)$ e $\pi(\phi(\beta)) = \pi(\xi)$ estão em U e

$$d(v_i(\beta), v_i(\phi(\beta))) = d(v_i(\beta), kv_i(\beta)) \leq \delta(k, \text{id}) = \rho < 2\varepsilon. \quad (5.28)$$

Então existe $v_\beta \in F$ tal que $v_i(\beta)$ e $\pi(\phi(\beta))$ estão em $B_{\varepsilon_i}(v_\beta)$, concluindo-se a demonstração. \square

Procede-se então na deteminação de uma situação bastante geral (que inclui os fibrados flag), onde a condição à respeito da ação de G em F (requerida pelo Teorema 5.5) é satisfeita.

Se G contém um subgrupo compacto e metrizável K agindo aberta e transitivamente em F . Neste caso, existe em K uma métrica bi-invariante d_K compatível com sua topologia (c.f. [11], 12.9.1). Além disto, se $v \in F$ e $M = \{k \in K : kv = v\}$ é o seu *subgrupo de isotropia*, tem-se que a aplicação $\phi : K/M \rightarrow F$, definida por $\phi(kM) = kv$, é uma bijeção. Além disto, se K/M está munido com a topologia quociente, então ϕ é um homeomorfismo, pois o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} K & & \\ \pi \downarrow & \searrow \widehat{\phi} & \\ K/M & \xrightarrow{\phi} & F \end{array} \quad (5.29)$$

e $\widehat{\phi}(k) = kv$ é, por hipótese, contínua e aberta. Como K é compacto, isto implica que F também é compacta.

A métrica de K será usada para fornecer uma métrica adaptada a F . A *métrica de Hausdorff* em K/M é definida por

$$d_H(kM, k'M) = \min_{a \in M} \left[\min_{b \in M} d_K(ka, k'b) \right], \quad (5.30)$$

onde $k, k' \in K$. Isto é de fato uma métrica em K/M , pois o conjunto das classes laterais de M a esquerda é uma partição de K . Esta métrica é claramente invariante pela ação de K em K/M e induz a topologia quociente. De fato, a projeção canônica $\pi : K \rightarrow K/M$, $\pi(k) = kM$, é um contração e, portanto, uma aplicação contínua. Reciprocamente, se A é um conjunto aberto na topologia quociente, então $\pi^{-1}(A) \subset K$ é aberto. Sejam $k \in K$ tal que $kM \subset \pi^{-1}(A)$ e r a distância entre $(\pi^{-1}(A))^c$ e kM . Como M é compacto, segue que $B_H(kM, r) \subset A$, onde B_H denota a bola aberta em relação à d_H , mostrando que as topologias coincidem.

De agora em diante, a métrica de Hausdorff em F será denotada simplesmente por d .

Lema 5.6. *Para todos $k, k' \in K$, tem-se que*

$$d(kM, k'M) = \min_{m \in M} d_K(km, k'). \quad (5.31)$$

Demonstração. De fato, pela definição e a invariância à direita da métrica d_K , tem-se que

$$d(kM, k'M) = \min_{a \in M} \left[\min_{b \in M} d_K(ka, k'b) \right] = \min_{a \in M} \left[\min_{b \in M} d_K(kab^{-1}, k') \right]. \quad (5.32)$$

Claramente, isto implica que

$$d(kM, k'M) = \min_{a \in M} \left[\min_{m \in M} d_K(km, k') \right] = \min_{m \in M} d_K(km, k'). \quad (5.33)$$

□

Olhando-se os elementos de K como homeomorfismos de F , pode-se munir F com a métrica do supremo, definida em (5.23).

$$\delta(k, k') = \sup_{g \in K} d(kgL, k'gL), \quad (5.34)$$

onde $k, k' \in K$. Esta é também uma métrica bi-invariante em K .

Lema 5.7. $\delta(k, k') \leq d(k, k')$.

Demonstração. Por definição e pela equação (5.31),

$$\delta(k, k') = \sup_{g \in K} \left[\min_{m \in M} d(kgm, k'g) \right] \leq \sup_{g \in K} d(kg, k'g) = d(k, k'). \quad (5.35)$$

□

Agora pode-se mostrar que a condição requerida pelo Teorema 5.5, a respeito da ação de G em F , pode ser realizada por elementos de K .

Proposição 5.8. *Seja $K \subset G$ um subgrupo compacto e metrizável agindo aberta e transitivamente em $F = K/M$ munida com a métrica de Hausdorff $d = d_H$. Se $u, v \in F$, então existe $k \in K$ tal que $v = k \cdot u$ e $\delta(k, \text{id}) = d(u, v)$.*

Demonstração. Primeiro será demonstrado que se $w = aM$, onde $a \in K$, então existe $b \in K$ tal que $w = bM$ e $d(w, M) = \delta(b, \text{id})$. Por (5.31), existe $m \in M$ com $d(am, 1) = d(aM, M) = d(w, M)$. Definindo-se $b = am$, segue que $w = bM$ e, pelo Lema 5.7,

$$d(w, M) = d(bM, M) \leq \delta(b, \text{id}) = \delta(am, \text{id}) \leq d(am, 1) = d(w, M). \quad (5.36)$$

Agora sejam $u = hM$ e $v = gM$, onde $h, g \in K$. Definindo-se $w = g^{-1}u$, seja $b \in K$ como acima. Definindo-se $k = gbg^{-1}$, tem-se que

$$u = gw = gbM = (gbg^{-1})gM = kv \quad (5.37)$$

e, pela bi-invariância de δ e invariância de d em relação a ação de K em K/M , segue que

$$\delta(k, \text{id}) = \delta(b, \text{id}) = d(w, M) = d(g^{-1}u, M) = d(u, v). \quad (5.38)$$

□

Como corolário direto, tem-se o seguinte fato.

Corolário 5.9. *A ação à esquerda de K (e portanto de G) em F é $\mathcal{O}_d(F)$ -localmente transitiva, onde $\mathcal{O}_d(F)$ é a família de todas as coberturas \mathcal{B}_ε , constituídas pela totalidade das ε -bolas de X na métrica Hausdorff.*

5.1.3 Semigrupos de Sombreamento em Fibrados

Seja $Q \rightarrow X$ um fibrado principal com grupo estrutural G e base paracompacta X tal que existe uma redução a um subfibrado $P \rightarrow X$ com grupo estrutural K , onde K é um subgrupo compacto e metrizável de G . Sejam também σ um semifluxo de endomorfismos de E , onde $E = Q \times_G F \rightarrow X$ é um fibrado associado tal que K age aberta e transitivamente em F convexo.

Denota-se por $\text{End}_l(E)_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}$ o $(\mathcal{U}_\varepsilon, t)$ -semigrupo de sombreamento do semifluxo σ contido em $\text{End}_l(E)$, como definido em 2.23. Combinando-se os Teoremas 5.5 e 2.28 com as Proposições 5.8 e 5.4, obtém-se o seguinte teorema de semigrupos de sombreamento para semifluxos em fibrados.

Teorema 5.10. *A seguinte condição é necessária e suficiente para que o conjunto não-vazio $\mathcal{M} \subset E$ seja uma componente $\mathcal{O}_\Psi(E)$ -transitiva por cadeias de σ .*

- Para todo semigrupo de sombreamento $\text{End}_l(E)_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}$, $t \in \mathbb{T}$ e $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Psi(E)$, existe um conjunto de controle $D_{\mathcal{M}, t, \mathcal{U}_\varepsilon}$ contendo \mathcal{M} e tal que

$$\mathcal{M} = \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} (D_{\mathcal{M}, t, \mathcal{U}_\varepsilon})_0 = \bigcap_{\mathcal{U}_\varepsilon, t} \text{cl}(D_{\mathcal{M}, t, \mathcal{U}_\varepsilon}). \quad (5.39)$$

O teorema acima é o resultado principal estabelecendo a ligação entre semigrupos e transitividade por cadeias de semifluxos. Para se utilizar a teoria de semigrupos locais em fibrados desenvolvida no Capítulo 4 é necessário considerar cada semigrupo de sombreamento $\text{End}_l(E)_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}$ como sendo induzido por um semigrupo local de $\text{End}_l(Q)$. Definindo-se

$$S_{t, \mathcal{U}_\varepsilon} = \{\varphi \in \text{End}_l(Q) : \varphi_E \in \text{End}_l(E)_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}\}, \quad (5.40)$$

tem-se que $S_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}$ é um semigrupo local gerado pelo conjunto

$$\bar{S}_{t, \mathcal{U}_\varepsilon} = \{\phi \circ \sigma_s : \phi_E \in N_{\text{End}_l(E), \mathcal{U}_\varepsilon}\}, \quad (5.41)$$

onde $N_{\text{End}_l(E), \mathcal{U}_\varepsilon}$ é definido em 2.16.

Alguns dos resultados do Capítulo 4 estão baseados na hipótese que as órbitas do semigrupo em $\text{End}_l(Q)$ são abertas. A demonstração deste fato, no caso do semigrupo $S_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}$, depende do próximo lema, onde é utilizada a seguinte notação. Para cada $i \in I$, $U \in \mathcal{U}$, $y \in U \cap U_i$ e $h \in G$, define-se a aplicação $\phi_{U, y, h}^i \in \text{End}_l(Q)$ por

$$\psi_i \circ \phi_{U, y, h}^i \circ \psi_i^{-1}(x, a) = (y, ha) \quad (5.42)$$

para todos $a \in G$ e $x \in U \cap U_i$.

Se $q \in Q$ é tal que $\psi_i(q) = (x, a)$, pela equação (C.29), tem-se que $\psi_i^E(q \cdot u) = (x, au)$, para todo $u \in F$. Como $\psi_i(\phi_{U, y, h}^i(q)) = (y, ha)$, tem-se que a aplicação $(\phi_{U, y, h}^i)_E \in \text{End}_l(E)$, induzida em E por $\phi_{U, y, h}^i$, satisfaz

$$\psi_i^E \circ (\phi_{U, y, h}^i)_E \circ (\psi_i^E)^{-1}(x, v) = (y, hv), \quad (5.43)$$

para todos $x \in U \cap U_i$ e $v = au \in F$.

Lema 5.11. *Sejam $p, q \in Q$ e $\phi \in \text{End}_l(Q)$ tais que $p = \phi(q)$ e $\phi_E \in N_{\text{End}_l(E), \mathcal{U}_\varepsilon}$. Então existem $i \in I$, $U \in \mathcal{U}$, $g \in G$ e A uma vizinhança aberta de g em G tais que $p = \phi_{U, \pi(p), g}^i(q)$ e, para todos $y \in U \cap U_i$ e $h \in A$, tem-se que $(\phi_{U, y, h}^i)_E \in N_{\text{End}_l(E), \mathcal{U}_\varepsilon}$.*

Demonstração. Pela Definição 2.16 e como, por hipótese, $\phi_E \in N_{\text{End}_l(E), \mathcal{U}_\varepsilon}$, existem $i \in I$ e $U \in \mathcal{U}$ tais que $\pi(q), \pi(p) \in U \cap U_i$. Como $\phi \in \text{End}_l(Q)$, tem-se que

$$\psi_i \circ \phi \circ \psi_i^{-1}(\pi(q), a) = (\pi(p), ga) \quad (5.44)$$

para todo $a \in G$, onde $g = g_i(\phi(\chi_i(\pi(q)))) \in G$. Isto implica claramente que $p = \phi_{U, \pi(p), g}^i(q)$. Além disto, como $\phi_E \in N_{\text{End}_l(E), \mathcal{U}_\varepsilon}$, pela equação (5.43), tem-se que $d(v, gv) < 2\varepsilon$, para todo $v \in F$. Pela compacidade de F ,

$$0 < \delta = \sup_{v \in F} d(v, gv) < 2\varepsilon. \quad (5.45)$$

Logo, pela continuidade da ação de G em F e pelo Lema 1.21, existe A uma vizinhança aberta de g em G tal que $d(gv, hv) < 2\varepsilon - \delta$, para todos $h \in A$ e $v \in F$. Portanto, se $h \in A$, então

$$d(v, hv) \leq d(v, gv) + d(gv, hv) < 2\varepsilon \quad (5.46)$$

para todo $v \in F$, o que implica, pela convexidade de F , que $(\phi_{U, y, h}^i)_E \in N_{\text{End}_l(E), \mathcal{U}_\varepsilon}$. \square

Proposição 5.12. *Sejam $q \in Q$, $t \in \mathbb{T}$ e $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Psi(E)$. Então as órbitas $\overline{S}_{t, \mathcal{U}_\varepsilon} q$ e $\overline{S}_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}^* q$ são conjuntos abertos.*

Demonstração. Seja $p \in \overline{S}_{t, \mathcal{U}_\varepsilon} q$. Então $p = \phi(\sigma_s(q))$, onde $s \geq t$ e $\phi_E \in N_{\text{End}_l(E), \mathcal{U}_\varepsilon}$. Pelo Lema 5.11, existem $i \in I$, $U \in \mathcal{U}$, $g \in G$ e A uma vizinhança aberta de g em G tais que $p = \phi_{U, \pi(p), g}^i(\sigma_s(q))$ e, para todos $y \in U \cap U_i$ e $h \in A$, tem-se que $(\phi_{U, y, h}^i)_E \in N_{\text{End}_l(E), \mathcal{U}_\varepsilon}$. Portanto $\phi_{U, y, h}^i \circ \sigma_s \in \overline{S}_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}$, para todos $y \in U \cap U_i$ e $h \in A$. Isto implica que

$$p \in \psi_i^{-1}((U \cap U_i) \times A) \subset \overline{S}_{t, \mathcal{U}_\varepsilon} q, \quad (5.47)$$

mostrando que $\overline{S}_{t, \mathcal{U}_\varepsilon} q$ é um conjunto aberto.

Se $p \in \overline{S}_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}^* q$, então $q = \phi(\sigma_s(p))$, onde $s \geq t$ e $\phi_E \in N_{\text{End}_l(E), \mathcal{U}_\varepsilon}$. Novamente pelo Lema 5.11, existem $i \in I$, $U \in \mathcal{U}$, $g \in G$ e A uma vizinhança aberta de g em G tais que $q = \phi_{U, \pi(p), g}^i(\sigma_s(p))$ e, para todos $y \in U \cap U_i$ e $h \in A$, tem-se que $(\phi_{U, y, h}^i)_E \in N_{\text{End}_l(E), \mathcal{U}_\varepsilon}$. Se $\psi_i(\sigma_s(p)) = (x, a)$, segue que $\psi_i(q) = (\pi(q), ga)$. Além disto, para todo $b \in B$, onde $B = A^{-1}ga$ é uma vizinhança aberta de a , existe $h \in A$ tal que $hb = ga$ e, portanto, tem-se que

$$\phi_{U, \pi(q), h}^i(\psi_i^{-1}(y, b)) = q, \quad (5.48)$$

para todo $y \in U \cap U_i$. Portanto

$$p \in \sigma_s^{-1}(\psi_i^{-1}((U \cap U_i) \times B)) \subset \overline{S}_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}^* q, \quad (5.49)$$

mostrando que $\overline{S}_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}^* q$ é também um conjunto aberto. \square

Utilizando-se a Proposição 5.12, a demonstração do corolário seguinte é igual a do Corolário 2.25

Corolário 5.13. *Sejam $q \in Q$, $t \in \mathbb{T}$ e $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Psi(E)$. Então as órbitas $S_{t,\mathcal{U}_\varepsilon}q$ e $S_{t,\mathcal{U}_\varepsilon}^*q$ são conjuntos abertos.*

A proposição seguinte fornece a conexão entre a transitividade por cadeias do semifluxo induzido no espaço base e a transitividade dos semigrupos de sombreamento induzidos na base. Primeiro necessita-se de um lema.

Lema 5.14. *Sejam $t \in \mathbb{T}$ e $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Psi(E)$. Para todo $\varepsilon > 0$, tem-se que*

$$c_l(X)_{t,\mathcal{U}} \subset (\text{End}_l(E)_{t,\mathcal{U}_\varepsilon})_X \subset C_l(X)_{t,\mathcal{U}}, \quad (5.50)$$

onde $c_l(X)$ é o semigrupo das aplicações constantes cujos domínios são tais que cada um deles está contido num único elemento da família $\{U_i : i \in I\}$.

Demonstração. Basta mostrar as inclusões para os geradores, ou seja,

$$\overline{c_l(X)_{t,\mathcal{U}}} \subset \overline{(\text{End}_l(E)_{t,\mathcal{U}_\varepsilon})_X} \subset \overline{C_l(X)_{t,\mathcal{U}}}. \quad (5.51)$$

Pela Definição 2.23, tem-se que $\varphi_X \in \overline{c_l(X)_{t,\mathcal{U}}}$ se, e somente se, existem $\phi_X \in N_{c_l(X),\mathcal{U}}$ e $s \geq t$ tais que $\varphi_X = \phi_X \sigma_s^X$. Tem-se também que $\varphi_X \in \overline{(\text{End}_l(E)_{t,\mathcal{U}_\varepsilon})_X}$, se, e somente se, existem $\phi \in N_{\text{End}_l(E),\mathcal{U}_\varepsilon}$ e $s \geq t$ tais que $\varphi_X = (\phi \sigma_s)_X = \phi_X \sigma_s^X$. Da mesma forma, $\varphi_X \in \overline{C_l(X)_{t,\mathcal{U}}}$ se, e somente se, existem $\phi_X \in N_{C_l(X),\mathcal{U}}$ e $s \geq t$ tais que $\varphi_X = \phi_X \sigma_s^X$.

Portanto resta mostrar que

$$N_{c_l(X),\mathcal{U}} \subset (N_{\text{End}_l(E),\mathcal{U}_\varepsilon})_X \subset N_{C_l(X),\mathcal{U}}. \quad (5.52)$$

Se $\phi_X \in c_l(X)$, então existem U_i e $z \in X$ tais que $\text{dom}(\phi_X) \subset U_i$ e $\phi_X(x) = z$, para todo $x \in \text{dom}\phi_X$. Além disso, se $\phi_X \in N_{c_l(X),\mathcal{U}}$, então, para cada $x \in \text{dom}(\phi_X)$, existe $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x, z \in U_x$. Definindo-se $\phi : \pi^{-1}(\text{dom}(\phi_X)) \rightarrow E$ por

$$\phi(\psi_i^{-1}(x, v)) = \psi_i^{-1}(z, v), \quad (5.53)$$

para todo $\psi_i^{-1}(x, v) \in \text{dom}(\phi)$, tem-se que

$$\psi_i^{-1}(x, v) \quad \text{e} \quad \psi_i^{-1}(z, v) \in \psi_i^{-1}((U_x \cap U_i) \times B_\varepsilon(v)) \in \mathcal{U}_\varepsilon. \quad (5.54)$$

Isto mostra que $\phi \in N_{\text{End}_l(E),\mathcal{U}_\varepsilon}$ e que $\phi_X \in (N_{\text{End}_l(E),\mathcal{U}_\varepsilon})_X$, pois ϕ_X é a induzida de ϕ em X .

Por outro lado, se $\phi_X \in (N_{\text{End}_l(E),\mathcal{U}_\varepsilon})_X$, então existe $\phi \in N_{\text{End}_l(E),\mathcal{U}_\varepsilon}$ tal que ϕ_X é a induzida de ϕ em X . Como $\text{dom}(\phi) = \pi^{-1}(\text{dom}(\phi_X))$, para cada $x \in \text{dom}(\phi_X)$, existe $\xi \in \text{dom}(\phi)$ tal que $x = \pi(\xi)$. Pela definição, existem, $i \in I$, $U_\xi \in \mathcal{U}$ e $v_\xi \in F$ tais que

$$\xi \quad \text{e} \quad \phi(\xi) \in \psi_i^{-1}((U_x \cap U_i) \times B_\varepsilon(v)) \in \mathcal{U}_\varepsilon \quad (5.55)$$

e, portanto, $x = \pi(\xi)$ e $\phi_X(x) = \pi(\phi(\xi))$ pertencem a U_ξ , o que mostra que $\phi_X \in N_{C_l(X),\mathcal{U}}$. \square

Proposição 5.15. *O semifluxo induzido na base é transitivo por cadeias se, e somente se, todos os semigrupos de sombreamento induzidos na base agem transitivamente.*

Demonstração. Pelos comentários feitos logo após as Definições 1.17 e 2.22, a família $\mathcal{O}(X)$ de todas as coberturas abertas de X é admissível e os semigrupos $c_l(X)$ e $C_l(X)$ são $\mathcal{O}(X)$ -localmente transitivos. Pelo Teorema 2.28, o semifluxo σ^X induzido na base X é transitivo por cadeias se, e somente se, os semigrupos de sombreamentos de σ^X gerados por $c_l(X)$ e $C_l(X)$ são transitivos em X . A proposição segue então do Lema 5.14. \square

Proposição 5.16. *Sejam as mesmas notações e hipóteses apresentadas no Teorema 5.10. Se a ação do grupo estrutural G em F deixa invariante uma medida de probabilidade, então σ é transitivo por cadeias em E se, e somente se, seu semifluxo induzido em X é transitivo por cadeias.*

Demonstração. Pelo Lema 6.2 em [35], a existência de uma medida de probabilidade invariante assegura que qualquer semigrupo com interior não-vazio em G age transitivamente em F . Pela hipótese de transitividade na base e pela Proposição 5.15, os semigrupos de sombreamento induzidos em X são transitivos. O resultado segue então do Teorema 4.27. \square

Quando F é compacta e G é compacto ou solúvel, a existência de medida de probabilidade invariante é assegurada (c.f. [44]). Tem-se portanto o seguinte corolário imediato.

Corolário 5.17. *Sejam as mesmas notações e hipóteses apresentadas no Teorema 5.10. Se o grupo estrutural G é compacto ou solúvel, então σ é transitivo por cadeias em E se, e somente se, seu semifluxo induzido em X é transitivo por cadeias.*

Capítulo 6

Semifluxos em Fibrados Flag

Este é o capítulo principal da tese e depende logicamente dos resultados de todas as outras partes. Consideram-se semifluxos de endomorfismos de fibrados flag, cujo semifluxo induzido na base é transitivo por cadeias.

6.1 Componentes Transitivas por Cadeias

Nesta seção e na próxima serão usadas a notação e terminologia empregadas na Seção 4.2. Seja $\pi : Q \rightarrow X$ um fibrado principal, cujo grupo estrutural G é um grupo de Lie $*$ -redutível (c.f. Definição 3.39), cuja componente semi-simples da álgebra de Lie de G é denotada por \mathfrak{g} . Para cada $\Theta \subset \Sigma$, onde Σ é o sistema simples de raízes canônico de \mathfrak{g} , seja $\pi_{\mathbb{E}_\Theta} : \mathbb{E}_\Theta \rightarrow X$ o fibrado flag de tipo Θ associado a $\pi : Q \rightarrow X$. Se a fibra típica é o flag maximal \mathbb{F} , então o *fibrado flag maximal associado a Q* é denotado simplesmente por \mathbb{E} .

Seja σ um semifluxo de endomorfismos em Q . Para cada $\Theta \subset \Sigma$, o semifluxo de endomorfismos em \mathbb{E}_Θ induzido por σ é denotado por σ^Θ . A partir de agora e até o fim deste capítulo, será feita a hipótese de que o semifluxo induzido na base é transitivo por cadeias. Pela Proposição 5.15, esta condição é equivalente a que, para cada $t \in \mathbb{T}$ e $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Psi(\mathbb{E}_\Theta)$, o semigrupo induzido em X pelo semigrupo de sombreado $\text{End}_l(\mathbb{E}_\Theta)_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}$ seja transitivo. Como $\text{End}_l(\mathbb{E}_\Theta)_{t, \mathcal{U}_\varepsilon} \subset \text{End}_l(\mathbb{E}_\Theta)$, todos os resultados apresentados na Seção 4.2 podem ser utilizados e, em particular, seu tipo parabólico, dado pela Proposição 4.34, será denotado por $\Theta_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}$.

Pelo Teorema 4.32, todos os conjuntos de controle de $\text{End}_l(\mathbb{E}_\Theta)_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}$ são da forma $\mathbb{D}_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}^\Theta(w)$, para algum $w \in W$, onde W é o grupo de Weyl canônico de \mathfrak{g} . O lema seguinte é consequência direta do Corolário 4.35 e da observação feita logo após a Definição 2.23.

Lema 6.1. *Sejam $t, s \in \mathbb{T}$, $\varepsilon, \delta > 0$ e \mathcal{U}, \mathcal{V} coberturas abertas de X . Sejam também as seguintes afirmações*

(i) $s \leq t$, $\varepsilon \leq \delta$ e $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$,

(ii) $\mathbb{D}_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}^\Theta(w)_0 \subset \mathbb{D}_{s, \mathcal{V}_\delta}^\Theta(w)_0$, para todo $w \in W$ e

(iii) $\Theta_{t, \mathcal{U}_\varepsilon} \subset \Theta_{s, \mathcal{V}_\delta}$.

Então (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii).

Definição 6.2. O tipo parabólico do semifluxo σ é definido por

$$\Theta(\sigma) = \bigcap_{t, \mathcal{U}_\varepsilon} \Theta_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}. \quad (6.1)$$

e $W(\sigma)$ denota o subgrupo parabólico de W de tipo $\Theta(\sigma)$, que é denominado subgrupo característico de σ .

Para cada $w \in \mathcal{W}$, define-se

$$\mathcal{M}_\Theta(w) = \bigcap_{t, \mathcal{U}_\varepsilon} \text{cl}(\mathbb{D}_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}^\Theta(w)_0). \quad (6.2)$$

Lema 6.3. Para cada $w \in \mathcal{W}$, tem-se que $\mathcal{M}_\Theta(w) \neq \emptyset$.

Demonstração. Fixando-se $x \in X$, tem-se que a família

$$\{\text{cl}(\mathbb{D}_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}^\Theta(w)_0) \cap (\mathbb{E}_\Theta)_x : t \in \mathbb{T}, \mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Psi(\mathbb{E}_\Theta)\} \quad (6.3)$$

possui a propriedade de interseção finita não-vazia. De fato, sejam $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{T}$ e $\mathcal{U}_{\varepsilon_1}^1, \dots, \mathcal{U}_{\varepsilon_n}^n \in \mathcal{O}_\Psi(\mathbb{E}_\Theta)$. Definindo-se $t = \max\{t_1, \dots, t_n\}$, $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ e

$$\mathcal{U} = \{U_1 \cap \dots \cap U_n : U_1 \in \mathcal{U}^1, \dots, U_n \in \mathcal{U}^n\}, \quad (6.4)$$

tem-se que $t \in \mathbb{T}$, $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Psi(\mathbb{E}_\Theta)$ e, pelo Lema 6.1, segue que

$$\emptyset \neq \mathbb{D}_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}^\Theta(w)_0 \subset \mathbb{D}_{t_1, \mathcal{U}_{\varepsilon_1}^1}^\Theta(w)_0 \cap \dots \cap \mathbb{D}_{t_n, \mathcal{U}_{\varepsilon_n}^n}^\Theta(w)_0, \quad (6.5)$$

o que implica na propriedade de interseção finita não-vazia. Como $(\mathbb{E}_\Theta)_x$ é compacto, a interseção de seus membros é não-vazia, o que conclui a demonstração. \square

O próximo teorema é consequência direta dos Lemas 6.4 e 6.3 e do Teorema 5.10 e do seguinte lema.

Lema 6.4. Se $\pi : Q \rightarrow X$ é um fibrado principal, cujo grupo estrutural G é um grupo de Lie G semi-simples, então ele pode ser reduzido a um subfibrado $P \rightarrow X$ cujo grupo estrutural K é um subgrupo compacto e metrizável de G transitivo em \mathbb{F}_Θ .

Demonstração. Seja $G = KAN$ uma decomposição de Iwasawa global do grupo de Lie G . Pelo Teorema A.20, tem-se que G/K é difeomorfo a AN , que por sua vez é difeomorfo ao espaço vetorial $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$. Pelo Teorema 5.7 do Capítulo 1 em [19], existe uma seção global do fibrado associado $E = Q \times_G G/K$. Isto implica, pela Proposição 5.6 do Capítulo 1 em [19], que o fibrado principal $\pi : Q \rightarrow X$ pode ser reduzido a um subfibrado $P \subset Q$ cujo grupo estrutural é o subgrupo K . A transitividade de K em \mathbb{F}_Θ segue também da decomposição de Iwasawa global de G . \square

Segue então a parametrização pelo grupo de Weyl das componentes transitivas por cadeias de um semifluxo de endomorfismos num fibrado flag.

Teorema 6.5. *Seja σ um semifluxo de endomorfismos em Q tal que o semifluxo induzido no espaço base paracompacto seja transitivo por cadeias. Para cada $\Theta \subset \Sigma$, o conjunto das componentes $\mathcal{O}_\Psi(\mathbb{E}_\Theta)$ -transitivas por cadeias de σ^Θ é*

$$\{\mathcal{M}_\Theta(w) : w \in W\}. \quad (6.6)$$

O teorema seguinte mostra que, no caso do fibrado flag maximal, a ordem dinâmica é a ordem reversa da ordem de Bruhat-Chevalley no quociente $W(\sigma) \backslash W$ e, portanto, as componentes de Morse estão em bijeção com este quociente.

Teorema 6.6. *Tem-se que $\mathcal{M}(w) \leq \mathcal{M}(w')$ se, e somente se, $W(\sigma)w \geq W(\sigma)w'$. Em particular, $\mathcal{M}_\Theta(w) = \mathcal{M}_\Theta(w')$ se, e somente se, $W(\sigma)wW_\Theta = W(\sigma)w'W_\Theta$. Além disto, a componente de Morse $\mathcal{M}_\Theta = \mathcal{M}_\Theta(1)$ é a única maximal e a componente $\mathcal{M}_\Theta^- = \mathcal{M}_\Theta(w^-)$ é a única minimal, onde w^- é a involução principal de W em relação a Σ , definida em 3.34.*

Demonstração. Como Σ é um conjunto finito, existem $t \in \mathbb{T}$ e $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Psi(E)$ tais que $\Theta(\sigma) = \Theta_{t,\mathcal{U}_\varepsilon}$. Pela equação (6.2), tem-se que $\mathcal{M}(w) \subset \mathbb{D}_{t,\mathcal{U}_\varepsilon}(w)_0$, para todo $w \in W$.

Por definição, se $\mathcal{M}(w) \leq \mathcal{M}(w')$, tem-se que existem $\xi \in \mathcal{M}(w)$ e $\xi' \in \mathcal{M}(w')$ tais que $\xi' \in \Omega(x, \mathcal{U}_\varepsilon, t)$. Pela Proposição 2.26, isto implica que $\xi' \in (\text{End}_l(\mathbb{E})_{t,\mathcal{U}_\varepsilon})\xi$. Portanto $\mathbb{D}_{t,\mathcal{U}_\varepsilon}(w) \leq \mathbb{D}_{t,\mathcal{U}_\varepsilon}(w')$ e, pelo Teorema 4.36, $W(\sigma)w \geq W(\sigma)w'$.

Reciprocamente, sejam $w, w' \in W$ tais que $W(\sigma)w \geq W(\sigma)w'$. Sejam também $s \in \mathbb{T}$ e $\mathcal{V}_\delta \in \mathcal{O}_\Psi(E)$. Definindo-se

$$\mathcal{T} = \{U \cap V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}, \quad (6.7)$$

$r = \max\{s, t\}$ e $\mu = \min\{\delta, \varepsilon\}$, tem-se, pelo Lema 6.1, que $\Theta_{r,\mathcal{T}_\mu} \subset \Theta_{t,\mathcal{U}_\varepsilon} = \Theta(\sigma)$. Pela minimalidade de $\Theta(\sigma)$, segue que $\Theta_{r,\mathcal{T}_\mu} = \Theta(\sigma)$. Novamente pelo Teorema 4.36, tem-se que $\mathbb{D}_{r,\mathcal{T}_\mu}(w) \leq \mathbb{D}_{r,\mathcal{T}_\mu}(w')$. Pela Proposição 2.11 e como $\mathcal{M}(w) \subset \mathbb{D}_{r,\mathcal{T}_\mu}(w)_0$ e $\mathcal{M}(w') \subset \mathbb{D}_{r,\mathcal{T}_\mu}(w')_0$, para todos $\xi \in \mathcal{M}(w)$ e $\xi' \in \mathcal{M}(w')$, tem-se que $\xi' \in (\text{End}_l(\mathbb{E})_{r,\mathcal{T}_\mu})\xi$. Novamente utilizando-se a Proposição 2.26, isto implica que $\xi' \in \Omega(x, \mathcal{T}_\mu, r) \subset \Omega(x, \mathcal{V}_\delta, s)$. Pela arbitrariedade de $s \in \mathbb{T}$ e $\mathcal{V}_\delta \in \mathcal{O}_\Psi(E)$, segue que $\mathcal{M}(w) \leq \mathcal{M}(w')$.

As demais afirmações são conseqüências diretas do Teorema 4.36. \square

A proposição seguinte é o análogo para componentes transitivas do Corolário 4.33.

Proposição 6.7. *Para todos $w \in W$ e $\Theta \subset \Sigma$, tem-se que*

$$\pi_\Theta(\mathcal{M}(w)) = \mathcal{M}_\Theta(w). \quad (6.8)$$

Demonstração. Seja $\xi \in \mathcal{M}(w)$. Pelos Teorema 5.10 e Corolário 4.33, tem-se que

$$\pi_\Theta(\xi) \in \pi_\Theta \left(\bigcap_{t,\mathcal{U}_\varepsilon} \mathbb{D}_{t,\mathcal{U}_\varepsilon}(w)_0 \right) \subset \bigcap_{t,\mathcal{U}_\varepsilon} \mathbb{D}_{t,\mathcal{U}_\varepsilon}^\Theta(w)_0 = \mathcal{M}_\Theta(w) \quad (6.9)$$

e, portanto, $\pi_\Theta(\mathcal{M}(w)) \subset \mathcal{M}_\Theta(w)$.

Por outro lado, seja $\xi_\Theta \in \mathbb{E}_\Theta \setminus \pi_\Theta(\mathcal{M}(w))$. Como a aplicação $\pi_\Theta : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}_\Theta$ é sobrejetiva, existe $\xi \in \mathbb{E} \setminus \pi_\Theta^{-1}(\pi_\Theta(\mathcal{M}(w)))$ tal que $\xi_\Theta = \pi_\Theta(\xi)$. Novamente pelo Teorema 5.10, existem $t \in \mathbb{T}$, $\varepsilon > 0$ e \mathcal{U} cobertura aberta de X tais que $\xi \notin \pi_\Theta^{-1}(\pi_\Theta(\mathbb{D}_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}(w)_0))$. Como pelo Corolário 4.33, $\pi_\Theta(\mathbb{D}_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}(w)_0) = \mathbb{D}_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}^\Theta(w)_0$, segue que $\xi_\Theta \notin \mathbb{D}_{t, \mathcal{U}_\varepsilon}^\Theta(w)_0$ e, portanto, $\xi_\Theta \in \mathbb{E}_\Theta \setminus \mathcal{M}_\Theta(w)$, concluindo a demonstração. \square

No caso compacto, obtém-se a existência da decomposição de Morse minimal. O teorema seguinte é consequência direta dos Teoremas 1.33, 6.5 e 6.6.

Teorema 6.8. *Seja $\pi : Q \rightarrow X$ um fibrado principal localmente trivial tal que X é um espaço compacto Hausdorff. Seja também σ um semifluxo de endomorfismos em Q tal que o semifluxo induzido em X seja transitivo por cadeias. Para cada $\Theta \subset \Sigma$, existe a decomposição de Morse minimal de σ^Θ que é dada por*

$$\{\mathcal{M}_\Theta(w) : w \in W\} \quad (6.10)$$

e está em bijeção com o quociente duplo $W(\sigma) \setminus W/W_\Theta$. Além disto, no caso do fibrado flag maximal, a ordem de Morse é a ordem reversa da ordem de Bruhat-Chevalley no quociente $W(\sigma) \setminus W$.

6.1.1 Descrição Algébrica das Interseções com Fibras

Diferentemente das outras partes desta tese, nesta subseção serão feitas referências às Seções 6, 7 e 9 de [5] (e às referências ali presentes) para conceitos e resultados não explicados. Será fornecida uma descrição da interseção de cada componente transitiva por cadeias com as fibras do fibrado flag associado.

Esta descrição é feita através do conceito de tipo parabólico do semifluxo, definido em 6.2 e o resultado é apresentado no Teorema 6.13. O passo principal na sua demonstração é o Teorema 6.11, que assegura que a componente maximal $\mathcal{M}_{\Theta(\sigma)}^+$, no fibrado flag de tipo parabólico $\Theta(\sigma)$, como também a componente minimal $\mathcal{M}_{\Theta^*(\sigma)}^-$, no fibrado flag de tipo parabólico $\Theta^*(\sigma)$ (dual de $\Theta(\sigma)$, Seção 2 de [39]), interceptam cada fibra num único ponto. A demonstração para semifluxos do caso $\mathcal{M}_{\Theta(\sigma)}^+$ é a mesma que para fluxos contínuos (Lema 9.3 de [5]). Porém é necessária uma demonstração alternativa do caso $\mathcal{M}_{\Theta^*(\sigma)}^-$, pois em [5] utiliza-se o fluxo regressivo, que não existe no caso de semifluxos.

Sejam x e y pontos em X e $\chi_x : U_x \subset X \rightarrow Q$ e $\chi_y : U_y \subset X \rightarrow Q$ seções locais tais que $x \in U_x$ e $y \in U_y$. Seja também $\rho_{x,y}$ o cociclo local de σ relativo às seções locais χ_x e χ_y , como definido pela equação (6.36).

Se $y \in \omega(x)$, então existe uma seqüência $t_k \rightarrow +\infty$ tal que $\sigma_{t_k}(x) \rightarrow y$, de modo que $\sigma_{t_k}(x) \in U_y$, se k é suficientemente grande. Logo pode-se definir a seqüência $g_k = \rho_{x,y}(t_k, x)$ em G .

Por outro lado, se $y \in \omega^*(\Lambda^-(x))$, para alguma órbita negativa $\Lambda^-(x)$ a partir de x , então existem seqüências $y_k \rightarrow y$ e $s_k \in \mathbb{T}$ tais que $\sigma_{s_k}(y_k) = y_{k-1}$, onde $y_0 = x$ e

$t_k = \sum_{i=1}^k s_i \rightarrow +\infty$. Logo existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_k, \sigma_{s_k}(y_k) \in U_y$, para $k \geq k_0$. Portanto, neste caso, pode-se definir a seqüência

$$h_k = \rho_{y,x}(t_k, y_k)^{-1} \quad (6.11)$$

em G . Pela definição de cociclo local, tem-se que

$$\sigma_{s_k}(\chi_y(y_k)h_k) = \chi_y(y_{k-1})h_{k-1}. \quad (6.12)$$

Substituindo-se por subseqüências se necessário, pode-se supor que g_k e h_k são admissíveis (Seção 6 de [5] e referências ali presentes) e suas imagens principais são denotadas, respectivamente, por $\text{im}_\Theta(g_k)$ e $\text{im}_\Theta(h_k)$. Os seus domínios principais são denotados, respectivamente, por $\text{dom}_\Theta(g_k)$ e $\text{dom}_\Theta(h_k)$.

O lema seguinte relaciona $\text{im}_\Theta(g_k)$ a \mathcal{M}_Θ^+ , assim como, $\text{im}_\Theta(h_k)$ a \mathcal{M}_Θ^- .

Lema 6.9. *Mantendo-se a notação e as hipótese acima, as seguintes afirmações são verdadeiras.*

- (i) *Se \mathcal{M}_Θ^+ é regressivamente invariante e $y \in \omega(x)$, então $\chi_y(y) \cdot \text{im}_\Theta(g_k)$ está contido em \mathcal{M}_Θ^+ .*
- (ii) *Se $y \in \omega^*(\Lambda^-(x))$, para alguma órbita x -regressiva $\Lambda^-(x)$, então $\chi_y(y) \cdot \text{im}_\Theta(h_k)$ está contido em \mathcal{M}_Θ^- .*

Demonstração. (ii) Sejam $t \in \mathbb{T}$ e $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{O}_\Psi(\mathbb{E}_\Theta)$ tal que

$$\mathbb{D}_{\mathcal{U}_\varepsilon, T}^\Theta(w^-)_0 \cap \mathcal{R} = \mathcal{M}_\Theta^- \quad (6.13)$$

e $\mathcal{V}_\delta \in \mathcal{O}_\Psi(\mathbb{E}_\Theta)$ tais que $\mathcal{V}_\delta \leq \frac{1}{2}\mathcal{U}_\varepsilon$. Seja $\mathbb{D}_{t, \mathcal{V}_\delta}^\Theta(w^-)$ o conjunto de controle minimal de $S_{t, \mathcal{V}_\delta}$ em \mathbb{E}_Θ . Pelo Teorema 4.31, tem-se que $\pi(\mathbb{D}_{t, \mathcal{V}_\delta}^\Theta(w^-)) = X$. Logo existe

$$\beta = \chi_x(x) \cdot \mathbf{p}_\Theta \in \mathbb{D}_{t, \mathcal{V}_\delta}^\Theta(w^-) \cap \chi_x(x) \cdot \text{dom}_\Theta(h_k), \quad (6.14)$$

já que $\chi_x(x) \cdot \text{dom}_\Theta(h_k)$ é denso na fibra sobre x . Define-se $\beta_0 = \beta$ e $r_1 = t_{k_0}$. Além disto, para $k \geq 1$, define-se $r_{k+1} = s_{k+k_0}$ e, para $k \geq 0$,

$$\beta_{k+1} = \chi_y(y_{k+k_0}) \cdot h_{k+k_0} \mathbf{p}_\Theta. \quad (6.15)$$

Então

- (i) $\phi_{r_k}(\beta_k) = \beta_{k-1}$,
- (ii) $\beta_k \in \mathbb{D}_{t, \mathcal{V}_\delta}^\Theta(w^-)$ e
- (iii) $\beta_k \rightarrow \gamma := \chi_y(y) \cdot \mathbf{p}'_\Theta$, where $\mathbf{p}'_\Theta \in \text{im}_\Theta(h_k)$.

Claramente

$$\gamma \in \text{cl}(\mathbb{D}_{T, \nu_\delta}^\Theta(w^-) \cap \omega^*(\Lambda^-(\beta))). \quad (6.16)$$

Pelo Corolário 2.27, tem-se que $\text{cl}(\mathbb{D}_{T, \nu_\delta}^\Theta(w^-)) \subset \mathbb{D}_{U_\varepsilon, T}^\Theta(w^-)_0$ e, pela equação (6.13), segue que $\gamma \in \mathcal{M}_\Theta^-$. Logo $\chi_y(y) \cdot \text{im}_\Theta(h_k)$ intercepta \mathcal{M}_Θ^- . Mas $\chi_y(y) \cdot \text{im}_\Theta(h_k)$ é conexo (ver Proposição 2.5 de [37]) e contido em \mathcal{R} (cf. demonstração do Lema 9.1 de [5]). Pela Proposição 1.26, $\chi_y(y) \cdot \text{im}_\Theta(h_k) \subset \mathcal{M}_\Theta^-$, concluindo a demonstração.

(i) A demonstração da primeira afirmação é análoga a da segunda e pode ser encontrada no Lema 9.1 de [5]. Ela utiliza a invariância regressiva de \mathcal{M}_Θ^+ , que é verdadeira para fluxos, mas não em geral para semifluxos. \square

No caso em que $\Theta = \Theta(\sigma)$, o tipo parabólico do semifluxo, tem-se que a imagem principal $\text{im}_{\Theta(\sigma)}(g_k)$ se reduz a um único ponto.

Corolário 6.10. *Mantendo-se a notação e as hipóteses acima, tem-se que $\text{im}_{\Theta(\sigma)}(g_k)$ e $\text{im}_{\Theta^*(\sigma)}(h_k)$ são conjuntos unitários.*

Demonstração. O conjunto $\chi_y(y)^{-1} \cdot (\mathcal{M}_\Theta^+) \subset \mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}$ está contido no conjunto de controle progressivamente invariante para todo semigrupo induzido em G a partir do ponto $\chi_y(y)$ pelos semigrupos de sombreamento de σ . Em particular, escolhendo-se um semigrupo de sombreamento de σ tal que seu tipo parabólico seja igual a $\Theta(\sigma)$, o conjunto de controle progressivamente invariante está contido numa célula aberta de Bruhat. Pelo Lema 6.9, a imagem principal $\text{im}_{\Theta(\sigma)}(g_k)$ está contida em $\chi_y(y)^{-1} \cdot (\mathcal{M}_\Theta^+)$ e, portanto, está contida numa célula aberta de Bruhat. Isto implica, pelo Corolário 2.6 de [37], que a imagem principal $\text{im}_{\Theta(\sigma)}(g_k)$ é um conjunto unitário. Pela Proposição de [39], tem-se também que $\Theta^*(\sigma)$ é o tipo parabólico do semigrupo inverso do semigrupo induzido em G a partir do ponto $\chi_y(y)$ pelo semigrupo de sombreamento de σ de tipo $\Theta(\sigma)$. Como $\chi_y(y)^{-1} \cdot (\mathcal{M}_\Theta^-) \subset \mathbb{F}_{\Theta^*(\sigma)}$ está contido no conjunto de controle progressivamente invariante deste semigrupo inverso, um argumento análogo mostra que a imagem principal $\text{im}_{\Theta^*(\sigma)}(h_k)$ também se reduz a um único ponto. \square

Agora pode-se demonstrar o resultado principal sobre a propriedade estrutural das componentes minimal e maximal de um semifluxo de endomorfismos em fibrados flag.

Teorema 6.11. *Sejam $\mathcal{M}_{\Theta(\sigma)}^+$ a componente maximal do semifluxo induzido por σ no fibrado flag $\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}$ e $\mathcal{M}_{\Theta^*(\sigma)}^-$ a componente minimal do semifluxo induzido por σ no fibrado flag $\mathbb{E}_{\Theta^*(\sigma)}$. Se $x \in X$, então tem-se as seguintes afirmações.*

- (i) *Se $\mathcal{M}_{\Theta(\sigma)}^+$ é regressivamente invariante e $\omega(x) \neq \emptyset$, então $\mathcal{M}_{\Theta(\sigma)}^+ \cap \mathbb{E}_{\Theta(\sigma), x}$ é um conjunto unitário e*
- (ii) *Se $\omega^*(\Lambda^-(x)) \neq \emptyset$, para alguma órbita x -regressiva $\Lambda^-(x)$, então $\mathcal{M}_{\Theta^*(\sigma)}^- \cap \mathbb{E}_{\Theta^*(\sigma), x}$ é um conjunto unitário.*

Demonstração. (ii) Denota-se $\mathcal{A} = \chi_x(x)^{-1} \cdot \mathcal{M}_{\Theta^*(\sigma)}^- \subset \mathbb{F}_{\Theta^*(\sigma)}$ e fixa-se $\mathfrak{p}_{\Theta^*(\sigma)} \in \mathcal{A}$. Tem-se que existe uma câmara de Weyl A^+ tal que $\mathfrak{p}_{\Theta^*(\sigma)}$ é o repulsor para A^+ e \mathcal{A} está contido

na respectiva célula aberta de Bruhat $\mathbb{B}_{\Theta^*(\sigma)}$. Escolhe-se então uma decomposição polar $G = KA^+K$ de G (Seção 1 do Capítulo IX de [15]).

Para todo $y \in \omega^*(\Lambda^-(x))$, seja a seqüência h_k em G , como definido em (6.11) para $k \geq k_0$. Existem $u_k, v_k \in K$ e $l_k \in A^+$ tais que $h_k = v_k l_k u_k$. Substituindo-se, se necessário, h_k por uma subseqüência, pode-se supor que existam $u, v \in K$ tais que $u_k \rightarrow u$ e $v_k \rightarrow v$. Pelo Corolário 6.10, $\text{im}_{\Theta^*(\sigma)}(h_k)$ é unitário. Substituindo-se, se necessário, a seção local χ_x pela seção local $\chi_x u$, pode-se supor que $u_k \rightarrow 1$.

Pelo Lema 6.1 de [5], existe $k_1 \geq k_0$ tal que, se $k \geq k_1$ e $\mathbf{p}'_{\Theta^*(\sigma)} \neq v \mathbf{p}_{\Theta^*(\sigma)}$, então a seqüência $h_k^{-1} \mathbf{p}'_{\Theta^*(\sigma)} \notin \mathcal{A} \subset \mathbb{B}_{\Theta^*(\sigma)}$. Contudo, pela equação (6.12), tem-se que

$$\sigma_{t_k}(\chi_y(y_k) \cdot \mathbf{p}'_{\Theta^*(\sigma)}) = \chi_x(x)(h_k^{-1} \mathbf{p}'_{\Theta^*(\sigma)}). \quad (6.17)$$

Se $k \geq k_1$, pela Proposição 1.6, segue que $\chi_y(y_k) \cdot \mathbf{p}'_{\Theta^*(\sigma)} \notin \mathcal{M}_{\Theta^*(\sigma)}^-$ e, portanto, a fibra $\mathcal{M}_{\Theta^*(\sigma)}^-$ sobre y_k se reduz ao ponto $\chi_y(y_k) \cdot (v^{-1} \mathbf{p}_{\Theta^*(\sigma)})$.

Isto implica que a fibra de $\mathcal{M}_{\Theta^*(\sigma)}^-$ sobre x é também unitária, pois σ_{t_k} é uma bijeção entre as fibras $(\mathbb{E}_{\Theta^*(\sigma)})_{y_k}$ e $(\mathbb{E}_{\Theta^*(\sigma)})_x$ e sua inversa preserva $\mathcal{M}_{\Theta^*(\sigma)}^-$, onde novamente utiliza-se a Proposição 1.6.

(i) A primeira afirmação é demonstrada de maneira análoga à segunda e pode ser encontrada no Lema 9.3 de [5]. \square

Se as hipóteses dos itens (i) e (ii) do Teorema 6.11, são satisfeitas para todo $x \in X$ pode-se definir a seção global $\chi : X \rightarrow \mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}$, dada por

$$\{\chi(x)\} = \mathcal{M}_{\Theta(\sigma)}^+ \cap (\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)})_x \quad (6.18)$$

e a seção global $\chi^* : X \rightarrow \mathbb{E}_{\Theta^*(\sigma)}$, definida por

$$\{\chi^*(x)\} = \mathcal{M}_{\Theta^*(\sigma)}^- \cap (\mathbb{E}_{\Theta^*(\sigma)})_x. \quad (6.19)$$

Como os gráfico destas aplicações são fechados e as fibras de $\mathbb{E}_{\Theta(\sigma)}$ e de $\mathbb{E}_{\Theta^*(\sigma)}$ são compactas, segue que estas seções globais são contínuas. Equivalentemente (ver [19]) elas definem aplicações contínuas $f : Q \rightarrow \mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}$ e $f^* : Q \rightarrow \mathbb{F}_{\Theta^*(\sigma)}$, dadas por

$$f(q) = q^{-1} \cdot \chi(\pi(q)) \quad \text{e} \quad f^*(q) = q^{-1} \cdot \chi^*(\pi(q)), \quad (6.20)$$

que são equivariantes, no sentido que $f(qg) = g^{-1}f(q)$ e $f^*(qg) = g^{-1}f^*(q)$.

Como $\chi(\pi(q)) \in \mathcal{M}_{\Theta(\sigma)}^+$ e $\chi^*(\pi(q)) \in \mathcal{M}_{\Theta^*(\sigma)}^+$, para todo $q \in Q$, tem-se que $f(q)$ e $f^*(q)$ pertencem, respectivamente, aos conjuntos de controle progressivamente invariante e regressivamente invariante do semigrupo induzido em G a partir de q por algum semigrupo de sombreamento de σ . Isto implica que para todo $q \in Q$ o par $(f(q), f^*(q))$ pertence à órbita G -adjunta genérica (aberta e densa)

$$O = \{(g \mathbf{p}_{\Theta(\sigma)}, g \mathbf{p}_{\Theta^*(\sigma)}^-)\} \subset \mathbb{F}_{\Theta(\sigma)} \times \mathbb{F}_{\Theta^*(\sigma)}, \quad (6.21)$$

onde $\mathfrak{p}_{\Theta(\sigma)} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta(\sigma))$ é um ponto qualquer em $\mathbb{F}_{\Theta(\sigma)}$ e

$$\mathfrak{p}_{\Theta(\sigma)}^- = \mathfrak{p}^- \oplus \mathfrak{n}(\Theta(\sigma)) \in \mathbb{F}_{\Theta^*(\sigma)}, \quad (6.22)$$

onde $\mathfrak{p}^- = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^-$ (cf. [5]). Esta órbita pode ser identificada com a órbita G -adjunta de $H_{\Theta(\sigma)}$ em \mathfrak{g} , onde $H_{\Theta(\sigma)} \in \mathfrak{cl}\mathfrak{a}^+$ é tal que $\Theta(H_{\Theta(\sigma)}) = \Theta(\sigma)$. De fato, a interseção dos normalizadores em G das subálgebras $\mathfrak{p}_{\Theta(\sigma)}$ e $\mathfrak{p}_{\Theta(\sigma)}^-$ é exatamente o centralizador em G de $H_{\Theta(\sigma)}$.

Por esta identificação, pode-se definir a aplicação contínua $H : Q \rightarrow \text{Ad}(G)H_{\Theta(\sigma)}$, dada por

$$H(q) = g(q)H_{\Theta(\sigma)} \sim (f(q), f^*(q)), \quad (6.23)$$

que é equivariante, devido às equivarianças de f e f^* . Equivalentemente (ver [19]) esta aplicação define uma seção global contínua $\zeta : X \rightarrow \mathbb{O}$, onde $\mathbb{O} = Q \times_G \text{Ad}(G)H_{\Theta(\sigma)}$, dada por

$$\zeta(x) = q \cdot H(q), \quad (6.24)$$

para qualquer $q \in Q_x$.

No fibrado flag maximal $\mathbb{E} \rightarrow X$ sejam \mathcal{M}^\pm as componentes transitivas por cadeias, respectivamente, maximal e minimal. Se $\mathcal{M}(w)$ é outra componente transitiva por cadeias, então

$$\mathcal{M}(w) = \mathcal{A}(\mathcal{M}(w)) \cap \mathcal{R}(\mathcal{M}(w)), \quad (6.25)$$

onde $\mathcal{A}(\mathcal{M}(w))$ e $\mathcal{R}(\mathcal{M}(w))$ denotam os domínios, respectivamente, de atração e repulsão de $\mathcal{M}(w)$.

Como no final da Seção 3.3, ordena-se o sistema simples de raízes canônico $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ e denota-se por r_i a reflexão com respeito a raiz α_i , por $\mathbb{E}_i = \mathbb{E}_{\{\alpha_i\}}$ o fibrado flag de tipo $\{\alpha_i\}$, por $\pi_i : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}_i$ a fibração definida na Seção 4.2 e, finalmente, por γ_i a operação definida por

$$\gamma_i(\mathbb{B}) = \pi_i^{-1}(\pi_i(\mathbb{B})), \quad (6.26)$$

onde \mathbb{B} é um conjunto qualquer em \mathbb{E} .

Com essa notação, pode-se descrever os domínios de atração e repulsão de $\mathcal{M}(w)$. A demonstração da próxima proposição é análoga a da Proposição 9.9 em [5], devendo-se apenas substituir no argumento as seqüências indexadas por t, ε por redes indexadas por $t, \mathcal{U}_\varepsilon$.

Proposição 6.12. *O domínio de atração de $\mathcal{M}(w)$ é dado por*

$$\mathcal{A}(\mathcal{M}(w)) = \gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_n}(\mathcal{M}^-), \quad (6.27)$$

onde $w^- w = r_{i_n} \cdots r_{i_1}$ é uma decomposição minimal, e domínio de repulsão de $\mathcal{M}(w)$ é dado por

$$\mathcal{R}(\mathcal{M}(w)) = \gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_m}(\mathcal{M}^+), \quad (6.28)$$

onde $w = r_{j_m} \cdots r_{j_1}$ é uma decomposição minimal.

As componentes conexas dos pontos fixos da ação adjunta de $\exp(tH)$ em \mathbb{F}_Θ , onde $H \in \text{Ad}(G)H_{\Theta(\sigma)}$, são parametrizadas por W de modo que $\text{fix}_\Theta(H, w)$ denota a componente associada a $w \in W$ (ver Seção 7 em [5]). Tem-se que

$$\pi_\Theta(\text{fix}(H, w)) = \text{fix}_\Theta(H, w) \quad (6.29)$$

uma vez que a aplicação $\pi_\Theta : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$, definida em (3.44), é equivariante e a ação adjunta de $\exp(tH)$ em \mathbb{F}_Θ é gradiente em relação a uma métrica Riemanniana adequada (c.f. [12]).

Teorema 6.13. *Sejam as seguintes hipóteses: \mathcal{M}^+ é regressivamente invariante e, para cada $x \in X$,*

$$(i) \ \omega(x) \neq \emptyset \text{ e}$$

$$(ii) \ \omega^*(\Lambda^-(y)) \neq \emptyset, \text{ para alguma órbita } x\text{-regressiva } \Lambda^-(x).$$

Então, para cada $q \in Q$, a interseção da componente $\mathcal{M}_\Theta(w)$ com a fibra de \mathbb{E}_Θ sobre $\pi(q)$ é dada por:

$$\mathcal{M}_\Theta(w)_{\pi(q)} = q \cdot \text{fix}_\Theta(H(q), w), \quad (6.30)$$

onde $H : Q \rightarrow \text{Ad}(G)H_{\Theta(\sigma)}$ é a aplicação definida em (6.23).

Demonstração. Em primeiro lugar, observa-se que é suficiente mostrar o teorema no caso do fibrado flag maximal \mathbb{E} . De fato, pela Proposição 6.7 e pelas equações (4.27) e (4.28), para todos $w \in W$ e $\Theta \subset \Sigma$, tem-se que

$$\mathcal{M}_\Theta(w)_{\pi(q)} = \pi_\Theta(\mathcal{M}(w)_{\pi(q)}) = \pi_\Theta(q \cdot \text{fix}(H(q), w)) = q \cdot \text{fix}_\Theta(H(q), w). \quad (6.31)$$

Pelas Proposição 6.12 e equação (6.25), segue que

$$\mathcal{M}(w) = \gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_n}(\mathcal{M}^-) \cap \gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_m}(\mathcal{M}^+) \quad (6.32)$$

e, portanto, tem-se que

$$\mathcal{M}(w)_{\pi(q)} = \gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_n}(\mathcal{M}_{\pi(q)}^-) \cap \gamma_{j_1} \cdots \gamma_{j_m}(\mathcal{M}_{\pi(q)}^+). \quad (6.33)$$

Como $\mathcal{M}_{\pi(q)}^+ = q \cdot \text{fix}(H(q), 1)$ e $\mathcal{M}_{\pi(q)}^- = q \cdot \text{fix}(H(q), w^-)$, o resultado segue do Corolário 7.5 em [5]. \square

As hipóteses do Teorema são satisfeitas imediatamente para o caso de fluxos de automorfismos em fibrados flag com base compacta.

Teorema 6.14. *Seja $\pi_{\mathbb{E}_\Theta} : \mathbb{E}_\Theta \rightarrow X$ o fibrado flag de tipo $\Theta \subset \Sigma$ associado a $\pi : Q \rightarrow X$ tal que X é um espaço compacto Hausdorff. Seja também φ um fluxo de automorfismos em \mathbb{E}_Θ tal que o semifluxo induzido na base é transitivo por cadeias. Então, para cada $q \in Q$, a interseção da componente $\mathcal{M}_\Theta(w)$ com a fibra de \mathbb{E}_Θ sobre $\pi(q)$ é dada por:*

$$\mathcal{M}_\Theta(w)_{\pi(q)} = q \cdot \text{fix}_\Theta(H(q), w), \quad (6.34)$$

onde $H : Q \rightarrow \text{Ad}(G)H_{\Theta(\varphi)}$ é a aplicação definida em (6.23).

Semifluxos Não-Transitivos por Cadeias na Base

Quando o espaço base X é compacto Hausdorff, é possível reduzir o caso geral de semifluxos de endomorfismos em fibrados associados, cujos semifluxos induzidos na base podem não ser transitivos por cadeias, ao caso transitivo por cadeias. De fato, pelo Teorema 1.29, cada componente transitiva por cadeias \mathcal{M}_X do semifluxo induzido σ^X é internamente transitiva por cadeias, isto é, a restrição de σ^X a \mathcal{M}_X é transitiva por cadeias. Portanto, σ_t^E deixa invariante $\pi_E^{-1}(\mathcal{M}_X)$, para todo $t \in \mathbb{T}$, e o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} \times \pi_E^{-1}(\mathcal{M}_X) & \xrightarrow{\sigma^E} & \pi_E^{-1}(\mathcal{M}_X) \\ (\text{id}_{\mathbb{T}}, \pi_E) \downarrow & & \downarrow \pi_E \\ \mathbb{T} \times \mathcal{M}_X & \xrightarrow{\sigma^X} & \mathcal{M}_X \end{array} \quad (6.35)$$

6.1.2 Exemplos de Semifluxos e Aplicações

Semifluxos Lineares

Seja $\pi_E : E \rightarrow X$ o fibrado vetorial de dimensão n associado a um fibrado das bases $\pi : BE \rightarrow X$, como definido no final da Seção 4.2. Um semifluxo $\sigma^E : \mathbb{T} \times E \rightarrow E$ de endomorfismos de E , induzido por $\sigma : \mathbb{T} \times BE \rightarrow BE$, é denominado *semifluxo linear associado a σ* . De fato, seja $\Psi = \{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ um atlas de BE e, para cada $t \in \mathbb{T}$, fixam-se $x \in U_i$ e trivializações locais ψ_i e ψ_j , onde $\sigma_t^X(x) \in U_j$. A expressão de σ_t^E em coordenadas locais, com relação às trivializações locais ψ_i e ψ_j é dada por

$$(\sigma_t^E)^{ij}(x, v) = (\sigma_t(x), \rho_{ij}(t, x)v), \quad (6.36)$$

para todo $v \in \mathbb{R}^n$, onde $\rho_{ij}(t, x) \in \text{Gl}(\mathbb{R}^n)$. Isto mostra que, para cada $t \in \mathbb{T}$, σ_t^E é um isomorfismo linear entre as fibras E_x e $E_{\sigma_t^X(x)}$, para todo $x \in X$.

Seja $\pi_{PE} : PE \rightarrow X$ o fibrado projetivo de dimensão n associado ao fibrado das bases $\pi : BE \rightarrow X$, como definido no final da Seção 4.2. O semifluxo $\sigma^{PE} : \mathbb{T} \times PE \rightarrow PE$ de endomorfismos de PE induzido por σ é denominado *semifluxo projetivo associado a σ* . Tem-se que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} \times (E - 0) & \xrightarrow{\sigma^E} & E - 0 \\ (\text{id}_{\mathbb{T}}, P) \downarrow & & \downarrow P \\ \mathbb{T} \times PE & \xrightarrow{\sigma^{PE}} & PE \end{array} \quad (6.37)$$

onde $P : (\mathbb{R}^n - 0) \rightarrow P\mathbb{R}^n$ é a aplicação definida em (4.48).

Teorema de Selgrade

O grupo estrutural de $\pi : BE \rightarrow X$ é o $\text{Gl}(\mathbb{R}^n)$, cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$, a álgebra de Lie das matrizes n por n munida do comutador como colchete de Lie. Esta álgebra é

reduzível e sua componente semi-simples é a subálgebra $\mathfrak{sl}(R^n)$, das matrizes de traço zero. Uma involução de Cartan em $\mathfrak{sl}(R^n)$ é o automorfismo $\theta : \mathfrak{sl}(R^n) \rightarrow \mathfrak{sl}(R^n)$, definido por $\theta A = -A^T$, e o produto interno associado a θ é dado por

$$\langle A, B \rangle_\theta = -\langle A, \theta B \rangle = \text{tr}(AB^T). \quad (6.38)$$

A decomposição de Cartan associada é

$$\mathfrak{sl}(R^n) = \mathfrak{so}(R^n) \oplus \mathfrak{s}, \quad (6.39)$$

onde $\mathfrak{so}(R^n)$ é a subálgebra de $\mathfrak{sl}(R^n)$, das matrizes anti-simétricas, e \mathfrak{s} é o subespaço das matrizes simétricas de traço zero. Uma subálgebra abeliana maximal \mathfrak{a} em \mathfrak{s} é dada pelo subespaço das matrizes diagonais de traço nulo e uma câmara de Weyl $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$ é dada pelo conjunto das matrizes diagonais $H = \text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$ satisfazendo $a_1 > \dots > a_n$. Se $H \in \text{cl}(\mathfrak{a}^+)$, então $a_1 \geq \dots \geq a_n$ e a órbita adjunta de H por $\text{Gl}(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto das matrizes diagonalizáveis de traço zero com os mesmos auto-valores de H . O conjunto das raízes associadas ao par admissível (θ, \mathfrak{a}) é o conjunto Π dos funcionais lineares $\alpha^{ij} : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}$, com $i \neq j$, definidos por $\alpha^{ij}(\text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}) = a_i - a_j$ e o sistema de raízes simples determinadas pelo par admissível $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ é

$$\Sigma = \{\alpha_i = \alpha^{i, i+1} : i = 1, \dots, n-1\}. \quad (6.40)$$

Observa-se que se $H = \text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$, então $\Theta(H) = \{\alpha_i : a_i = a_{i+1}\}$, pois $\alpha_i(H) = a_i - a_{i+1}$, para $i = 1, \dots, n-1$. Portanto, se $\Theta \subset \Sigma$, então $\Theta = \Theta(H)$ se, e somente se,

$$H = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s I_{d_s} \end{pmatrix} \quad (6.41)$$

onde $\lambda_1 > \dots > \lambda_s$ e

$$d_i = \max\{j : \alpha_{c_i}, \alpha_{c_i+1}, \dots, \alpha_{c_i+j} \in \Theta\}, \quad (6.42)$$

onde $c_1 = 0$ e $c_i = c_{i-1} + d_{i-1}$. Portanto Θ determina o conjunto $d_\Theta = \{d_1, \dots, d_s\}$.

Pelo Teorema 6.14, no caso de base compacta e fluxo de automorfismos, a interseção das componentes de Morse com as fibras é dada pelos pontos fixos do tipo w da aplicação contínua $H : Q \rightarrow \text{Ad}(G)H_{\Theta(\sigma)}$, dada por $H(q) = g(q)H_{\Theta(\sigma)}$, onde $H_{\Theta(\sigma)}$ é tal que $\Theta(H_{\Theta(\sigma)}) = \Theta(\sigma)$. No caso do espaço projetivo, os pontos fixos de $H(q)$ são as projeções dos autoespaços associados aos autovalores $\lambda_1 > \dots > \lambda_s$ de $H_{\Theta(\sigma)}$, o que implica no seguinte resultado clássico.

Teorema 6.15 (Selgrade-1975). *Seja $\pi_E : E \rightarrow X$ o fibrado vetorial de dimensão n associado a um fibrado das bases $\pi : BE \rightarrow X$ tal que X é um espaço compacto Hausdorff. Sejam também $\varphi^E : \mathbb{T} \times E \rightarrow E$ e $\varphi^{PE} : \mathbb{T} \times PE \rightarrow PE$ os fluxos, respectivamente, linear e projetivo induzidos por um fluxo $\varphi : \mathbb{T} \times BE \rightarrow BE$ de automorfismos de BE . Existe a decomposição de Morse minimal do fluxo φ^{PE} em PE . Além disto, se \mathcal{M} é uma componente de Morse em PE , então $P^{-1}(\mathcal{M}) \cup 0$ é um subfibrado vetorial de E .*

Semifluxos Linearizados

Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão n e $f : M \rightarrow M$ uma submersão sobrejetiva. O levantamento de f ao conjunto BM das bases de M (Seção 4.2) é a aplicação $F : BM \rightarrow BM$ dada por

$$F(q) = d_{\pi(q)}f \circ q, \quad (6.43)$$

onde $q \in BM$ e $\pi : BM \rightarrow M$ é o fibrado das bases de M . Tem-se que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} BM & \xrightarrow{F} & BM \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & M \end{array} \quad (6.44)$$

e, de fato, F é um endomorfismo de BM .

Um semifluxo $\sigma^M : \mathbb{T} \times M \rightarrow M$ é denominado *diferenciável* se $\sigma_t^M : M \rightarrow M$ é uma submersão sobrejetiva, para todo $t \in \mathbb{T}$. O *semifluxo linearizado de um semifluxo diferenciável* σ^M é a aplicação $\sigma : \mathbb{T} \times BM \rightarrow BM$ definida por

$$\sigma_t(q) = d_{\pi(q)}\sigma_t^M \circ q, \quad (6.45)$$

onde $t \in \mathbb{T}$ e $q \in BM$. Tem-se que σ é um semifluxo de endomorfismos de BM e o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} \times BM & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{T} \times BM \\ (\text{id}_{\mathbb{T}}, \pi) \downarrow & & \downarrow (\text{id}_{\mathbb{T}}, \pi) \\ \mathbb{T} \times M & \xrightarrow{\sigma^M} & M \end{array} \quad (6.46)$$

Semifluxos Hamiltonianos

Seja M uma variedade simplética de dimensão $2n$, onde ω é a sua forma simplética. Uma submersão sobrejetiva $f : M \rightarrow M$ é denominada *simplectomorfismo* se $(d_x f)^*\omega = \omega$, para todo $x \in M$. Neste caso, o levantamento $F : BM \rightarrow BM$ de f deixa invariante o conjunto SpM das bases simpléticas de M (Seção 4.2) e, portanto, é um endomorfismo do fibrado simplético $\pi_{SpM} : SpM \rightarrow M$ de M . De fato, se $q \in SpM$, então

$$F(q)^*\omega = q^* \circ (d_{\pi(q)}f)^*\omega = \omega_0, \quad (6.47)$$

pois $q^*\omega = \omega_0$.

Um semifluxo $\sigma^M : \mathbb{T} \times M \rightarrow M$ é denominado *Hamiltoniano* se $\sigma_t^M : M \rightarrow M$ é um simplectomorfismo, para todo $t \in \mathbb{T}$. Neste caso, seu fluxo linearizado $\sigma : \mathbb{T} \times BM \rightarrow BM$ é tal que $\sigma_t : BM \rightarrow BM$ deixa SpM invariante, para todo $t \in \mathbb{T}$. A restrição de σ a SpM é denominada *semifluxo linearizado simplético de σ^M* .

Se $\sigma^M : \mathbb{T} \times M \rightarrow M$ é um fluxo Hamiltoniano, ele deixa invariante a seguinte forma de volume

$$\mu = \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n \text{ vezes}}. \quad (6.48)$$

Logo, pelo Teorema de Recorrência de Poincaré, segue que σ^M é transitivo por cadeias. O resultado seguinte é então uma consequência direta dos Teoremas 6.8 e 6.14.

Teorema 6.16. *Sejam M uma variedade simplética compacta e $\sigma^M : \mathbb{T} \times M \rightarrow M$ um semifluxo Hamiltoniano. Seja também $\pi_{\mathbb{I}_I M} : \mathbb{I}_I M \rightarrow M$ o fibrado associado fibrado simplético de M , cuja fibra típica é o flag isotrópico de índice $I = (i_1, \dots, i_l)$ (Seção 4.2). Então existe a decomposição de Morse minimal do semifluxo induzido em $\mathbb{I}_I M$ pelo semifluxo linearizado simplético de σ^M . Esta decomposição de Morse está em bijeção com o quociente duplo $W(\sigma) \backslash W/W_\Theta$. Além disso, se $\varphi^M : \mathbb{T} \times M \rightarrow M$ é um fluxo Hamiltoniano, a interseção das componentes de Morse minimais com as fibras é uma subvariedade algébrica do flag isotrópico de índice I .*

Semifluxos de Isometrias e Holomorfos

De maneira análoga ao caso simplético, se M é uma variedade semi-Riemanniana de tipo (a, b) e $\varphi^M : \mathbb{T} \times M \rightarrow M$ é um fluxo de isometrias associado a um campo de Killing, pode-se definir fluxo linearizado isométrico de φ^M , que é um fluxo de automorfismos do fibrado semi-Riemanniano de tipo (a, b) de M . No caso Lorentziano, quando $a = 1$ e $b = n$, pode-se induzir o fluxo linearizado isométrico no fibrado $\pi_{LuM} : LuM \rightarrow M$ associado ao fibrado Lorentziano de M e cuja fibra típica é o flag $Lu(\mathbb{R}^{n+1})$ dos subespaços de tipo luz em \mathbb{R}^{n+1} (Seção 4.2). Tais fluxos induzidos fornecem informações sobre a dinâmica dos raios de luz no contexto da relatividade geral.

De modo similar, pode-se aplicar os resultados aqui apresentados para se estudar os fluxos linearizados de fluxos de aplicações holomorfas numa variedade complexa.

Limites Quasi-Projetivos

Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples real e não-compacta e G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie \mathfrak{g} e centro finito. Se (g_n) é uma seqüência arbitrária em G , ela pode não possuir qualquer subsequência convergente, uma vez que G não é um espaço compacto. Considerando-se os elementos de (g_n) como difeomorfismos do flag \mathbb{F}_Θ de tipo Θ , definindo-se $g_n : \mathbb{F}_\Theta \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ por $g_n(\mathfrak{p}_\Theta) = g_n \mathfrak{p}_\Theta$, esta seqüência possui subsequência convergente na topologia da convergência pontual, uma vez que \mathbb{F}_Θ é um espaço compacto. Um *limite quasi-projetivo* de (g_n) associado ao flag \mathbb{F}_Θ de tipo Θ é o limite de alguma subsequência convergente de (g_n) na topologia da convergência pontual.

Uma abordagem dinâmica destes limites quasi-projetivos é dada da seguinte maneira. Seja $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}$ uma vizinhança conexa e compacta da identidade tal que a $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ é um difeomorfismo entre \mathfrak{v} e $V = \exp(\mathfrak{v})$. Define-se

$$\mathcal{B}_\mathfrak{g} = \{H : \mathbb{Z} \rightarrow \mathfrak{v}\} \subset l_\infty(\mathbb{Z}, \mathfrak{g}) \quad (6.49)$$

onde $l_\infty(\mathbb{Z}, \mathfrak{g}) = (l_1(\mathbb{Z}, \mathfrak{g}))^*$ é o conjunto das seqüências duplas e limitadas munido da topologia fraca*.

Lema 6.17. *O conjunto $\mathcal{B}_\mathfrak{g}$ é compacto e metrizável na topologia fraca*.*

Demonstração. A demonstração é análoga a do Lema 4.2.1 de [7]. \square

Pode-se definir um fluxo em $\mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ dado pela aplicação $\varphi : \mathbb{T} \times \mathcal{B}_{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$, onde

$$\varphi(i, H)(j) = H(i + j) \quad (6.50)$$

para todos $i, j \in \mathbb{Z}$.

Lema 6.18. *A aplicação φ é um fluxo transitivo por cadeias em $\mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$.*

Demonstração. A demonstração é semelhante a do Lema 4.2.4 e da Proposição 4.2.7 de [7]. \square

Definindo-se a aplicação $f : \mathcal{B}_{\mathfrak{g}} \rightarrow G$ por $f(H) = \exp(H(1))$, tem-se que f é uma aplicação contínua, uma vez que é composição de aplicações contínuas. Analogamente ao apresentado no início da Seção 5.1, o cociclo de $\mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ em G gerado por f e associado a φ é dado por

$$\rho(i, H) = \begin{cases} f(\varphi_{i-1}(H)) \cdots f(H), & i > 0 \\ f(\varphi_i(H))^{-1} \cdots f(\varphi_{-1}(H))^{-1}, & i < 0 \\ 1, & i = 0 \end{cases}, \quad (6.51)$$

onde $i \in \mathbb{Z}$ e $H \in \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$.

Cada $H \in \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ induz uma seqüência (h_n) em G dada por $h_n = \rho(n, H)$. Por outro lado, dada uma seqüência (g_n) em G , existe $H \in \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ tal que $g_n = \rho(i_n, H)$, para algum $i_n > 0$. De fato, como G é um grupo de Lie conexo, todo elemento seu pode ser escrito como produto de elementos de uma vizinhança pre-fixada da identidade. Portanto

$$\mathfrak{g}_1 = h_{i_1} h_{i_1-1} \cdots h_2 h_1, \quad (6.52)$$

onde $h_j \in V = \exp(\mathfrak{v})$, para cada $1 \leq j \leq i_1$. Procedendo-se indutivamente, existe $i_{n+1} > 0$ tal que

$$\mathfrak{g}_{n+1} g_n^{-1} = \prod_{j=i_n+1}^{i_{n+1}} h_j, \quad (6.53)$$

onde $h_j \in V$, para cada $i_n < j \leq i_{n+1}$. Definindo-se $H : \mathbb{Z} \rightarrow \mathfrak{v}$ por $H(j) = \log(h_j)$ se $j > 0$ e $H(j) = 0$ se $j \leq 0$, tem-se que

$$g_n = \prod_{j=1}^{i_n} h_j = \prod_{j=1}^{i_n} f(\varphi_{j-1}(H)) = \rho(i_n, H). \quad (6.54)$$

Tem-se então que o estudo dos limites quasi-projetivos de seqüências em G é reduzido ao estudo do comportamento assintótico do cociclo ρ . De fato, este estudo é realizado através da análise do comportamento assintótico do fluxo Φ^Θ de produto cruzado associado a ρ , definido no fibrado flag $\mathcal{B}_{\mathfrak{g}} \times \mathbb{F}_\Theta$ e dado por

$$\Phi_i^\Theta(H, \mathfrak{p}_\Theta) = (\varphi_i(H), \rho_i(H) \mathfrak{p}_\Theta), \quad (6.55)$$

onde $H \in \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ e $\mathfrak{p}_{\Theta} \in \mathbb{F}_{\Theta}$. Este é um fluxo de automorfismos de $\mathcal{B}_{\mathfrak{g}} \times \mathbb{F}_{\Theta}$ induzido pelo fluxo Φ de produto cruzado associado a ρ , definido no fibrado principal $\mathcal{B}_{\mathfrak{g}} \times G$ por

$$\Phi_i(H, g) = (\varphi_i(H), \rho_i(H)g), \quad (6.56)$$

onde $H \in \mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ e $g \in G$.

Os resultado desenvolvidos nesta tese podem, portanto, ser aplicados ao estudo dos limites quasi-projetivos de seqüências em G . Em particular, para cada $\mathfrak{p}_{\Theta} \in \mathbb{F}_{\Theta}$, os possíveis limites de subsequências da seqüência $(g_n \mathfrak{p}_{\Theta})$ pertencem ao conjunto omega limite do fluxo Φ^{Θ} , que por sua vez está contido em alguma componente da decomposição de Morse minimal de Φ^{Θ} .

Apêndice A

Teoria de Lie Semi-Simples Real

Um espaço vetorial real \mathfrak{g} munido de um produto bilinear anti-simétrico $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ satisfazendo a *identidade de Jacobi*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \quad (\text{A.1})$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, é denominada uma *álgebra de Lie real*. A *representação adjunta da álgebra*, $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(\mathfrak{g})$, é definida por $\text{ad}(X)Y = [X, Y]$, onde $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $\text{gl}(\mathfrak{g})$ é a álgebra de Lie das transformações lineares de \mathfrak{g} tendo como colchete de Lie o comutador. Pela identidade Jacobi, cada elemento $\text{ad}(X)$ da imagem da representação adjunta é uma derivação de \mathfrak{g} , ou seja, para todos $Y, Z \in \mathfrak{g}$

$$\text{ad}(X)[Y, Z] = [\text{ad}(X)Y, Z] + [Y, \text{ad}(X)Z]. \quad (\text{A.2})$$

A imagem da representação adjunta é uma subálgebra da *álgebra das derivações de \mathfrak{g}* e é denominada *álgebra das derivações internas de \mathfrak{g}* .

Um *automorfismo da álgebra* é uma transformação linear invertível ϕ tal que $\phi[X, Y] = [\phi X, \phi Y]$, ou equivalentemente $\text{ad}(X)\phi Y = \phi \text{ad}(\phi^{-1}X)Y$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. O conjunto dos automorfismos da álgebra $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ é um subgrupo fechado do grupo linear geral $GL(\mathfrak{g})$, das transformações lineares inversíveis de \mathfrak{g} . Se ϕ é um automorfismo e \mathfrak{g}^* é o dual da álgebra \mathfrak{g} , a adjunta $\phi^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ é definida como $\phi^*\alpha = \alpha \circ \phi^{-1}$, onde $\alpha \in \mathfrak{g}^*$. Como a exponencial de uma derivação da álgebra é um automorfismo da álgebra (Página 126, Capítulo II, Parágrafo 5 de [15]), o subgrupo $\text{Int}(\mathfrak{g})$ gerado pelas exponenciais das derivações internas é denominado de *automorfismos internos da álgebra*.

Se \mathfrak{h} é uma subálgebra de \mathfrak{g} , a imagem $\text{ad}(\mathfrak{h})$ de \mathfrak{h} pela representação adjunta de \mathfrak{g} é uma subálgebra da *subálgebra das derivações internas de \mathfrak{g}* e é denominada *subálgebra das derivações internas de \mathfrak{h} em \mathfrak{g}* . O subgrupo $\text{Int}(\mathfrak{h})$ gerado pelas exponenciais das derivações internas de \mathfrak{h} em \mathfrak{g} é denominado de *automorfismos internos de \mathfrak{h} em \mathfrak{g}* .

A *forma de Cartan-Killing* é definida como a forma bilinear simétrica dada pela seguinte expressão

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)). \quad (\text{A.3})$$

Uma álgebra de Lie real \mathfrak{g} é *semi-simples* quando seu radical solúvel $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ é nulo, o que é equivalente à sua forma de Cartan-Killing ser não-degenerada (c.f. Teorema 3.9 de [38]). Neste caso, sua representação adjunta é injetora, ou seja, seu núcleo é trivial, o que é equivalente ao centro $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ da álgebra ser trivial (Corolário 6.2, Página 132, Capítulo II de [15]). Outro fato relevante é que toda derivação é de fato uma derivação interna (Proposição 6.4, Página 132, Capítulo II de [15]), o que implica que, neste caso, $\text{Int}(\mathfrak{g})$ é a componente da identidade de $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ e, portanto, um subgrupo fechado. A partir de agora e até o final deste capítulo, supõe-se que \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie real semi-simples.

A.1 Decomposições de Cartan e de Iwasawa

Um automorfismo de \mathfrak{g} é uma *involução* quando a sua composição consigo mesmo é a identidade. Dado uma involução θ de \mathfrak{g} , a *forma bilinear não-degenerada associada à θ* é definida por

$$\langle X, Y \rangle_\theta = -\langle X, \theta Y \rangle, \quad (\text{A.4})$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, o *subespaço compacto associado à θ* é dado por

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} : \theta X = X\} \quad (\text{A.5})$$

e *subespaço simétrico associado à θ* é dado por

$$\mathfrak{s} = \{Y \in \mathfrak{g} : \theta Y = -Y\}. \quad (\text{A.6})$$

Tem-se que a projeção $\kappa : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{k}$ sobre \mathfrak{k} paralela à \mathfrak{s} é definida por

$$\kappa(X) = \frac{1}{2}(X + \theta X) \quad (\text{A.7})$$

e a projeção $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{s}$ sobre \mathfrak{s} paralela à \mathfrak{k} é definida por

$$\sigma(X) = \frac{1}{2}(X - \theta X), \quad (\text{A.8})$$

pois claramente $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{s} = \emptyset$ e $\kappa + \sigma = \text{id}$, o que implica que \mathfrak{g} é soma direta de \mathfrak{k} mais \mathfrak{s} , denominada de *decomposição de \mathfrak{g} associada à θ* . Pelas definições de \mathfrak{k} e de \mathfrak{s} , tem-se que

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s} \quad \text{e} \quad [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{k}, \quad (\text{A.9})$$

o que implica que \mathfrak{k} é uma subálgebra, o que não ocorre com \mathfrak{s} . Entretanto, a segunda relação acima mostra que \mathfrak{k} não é de fato um ideal de \mathfrak{g} .

Lema A.1. *Se ψ é um automorfismo interno de \mathfrak{k} em \mathfrak{g} , então $\psi\mathfrak{k} = \mathfrak{k}$ e $\psi\mathfrak{s} = \mathfrak{s}$ e, equivalentemente, $\psi\theta\psi^{-1} = \theta$.*

Demonstração. Se ψ é um automorfismo interno de \mathfrak{k} em \mathfrak{g} , então $\psi = e^{\text{ad}(X)}$, para algum $X \in \mathfrak{k}$. Pelas relações (A.9), tem-se que $\psi\mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}$ e $\psi\mathfrak{s} \subset \mathfrak{s}$. O resultado segue por argumento de dimensão, já que ψ é um isomorfismo em \mathfrak{g} . \square

Uma involução θ da álgebra é denominada uma *involução de Cartan* se a sua forma bilinear associada é de fato um produto interno em \mathfrak{g} . Neste caso, a decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ é denominada de *decomposição de Cartan de \mathfrak{g} associada à θ* .

Teorema A.2. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples real. Então existe uma única involução de Cartan θ a menos de conjugação por automorfismo interno.*

Demonstração. Teorema 6.3, Página 181, e Teorema 7.2, Página 183, Capítulo III de [15]. \square

Se ϕ é um automorfismo de \mathfrak{g} , então

$$\langle \phi X, \phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad (\text{A.10})$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ (c.f. Teorema 3.6 de [38]). Definindo-se $\bar{\theta} = \phi\theta\phi^{-1}$, tem-se que $\bar{\theta}$ é uma involução de Cartan, já que

$$\langle \phi X, \phi Y \rangle_{\bar{\theta}} = \langle X, Y \rangle_{\theta}. \quad (\text{A.11})$$

Logo, se $\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{k}} \oplus \bar{\mathfrak{s}}$ é a decomposição de Cartan associada à $\bar{\theta}$, então $\bar{\mathfrak{k}} = \phi\mathfrak{k}$ e $\bar{\mathfrak{s}} = \phi\mathfrak{s}$ e portanto o Teorema A.2 implica no seguinte.

Teorema A.3. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples real. Então existe uma única decomposição de Cartan de \mathfrak{g} a menos de conjugação por automorfismo interno. Além disso, se ϕ é um automorfismo da álgebra e $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ é a decomposição de Cartan associada à involução de Cartan θ , então $\mathfrak{g} = \phi\mathfrak{k} \oplus \phi\mathfrak{s}$ é a decomposição de Cartan associada à involução de Cartan $\phi\theta\phi^{-1}$.*

Para que θ seja uma involução de Cartan é equivalente que a forma de Cartan-Killing seja negativa semi-definida, quando restrita a \mathfrak{k} , e positiva semi-definida, quando restrita a \mathfrak{s} . De fato, isto é consequência da seguinte proposição.

Proposição A.4. *Se $X \in \mathfrak{k}$ e $Y \in \mathfrak{s}$, então $\text{ad}(X)$ é anti-simétrica e $\text{ad}(Y)$ é simétrica em relação à $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\theta}$. Além disso, \mathfrak{k} e \mathfrak{s} são ortogonais tanto em relação à $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\theta}$ quanto em relação à forma de Cartan-Killing.*

Demonstração. Sejam $Z, Z' \in \mathfrak{g}$. Pela definição $\langle \text{ad}(X)Z, Z' \rangle_{\theta} = -\langle \text{ad}(X)Z, \theta Z' \rangle$. Pela Proposição 3.6 de [38], tem-se que $\langle \text{ad}(X)Z, Z' \rangle_{\theta} = -\langle Z, \text{ad}(X)\theta Z' \rangle$. Mas, como $\text{ad}(X)\theta Z' = \theta \text{ad}(X)Z'$, pois θ é automorfismo involutivo e $X \in \mathfrak{k}$, segue que $\langle \text{ad}(X)Z, Z' \rangle_{\theta} = -\langle Z, \text{ad}(X)Z' \rangle_{\theta}$, o que implica que $\text{ad}(X)$ é anti-simétrica em relação à $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\theta}$. Analogamente tem-se que $\text{ad}(Y)$ é simétrica em relação à $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\theta}$, se $Y \in \mathfrak{s}$. Como θ é automorfismo, $\langle X, Y \rangle = \langle \theta X, \theta Y \rangle = -\langle X, Y \rangle$, o que implica que $\langle X, Y \rangle = 0$. De maneira análoga obtem-se o mesmo em relação à $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\theta}$. \square

A próxima proposição mostra que se \mathfrak{h} é uma subálgebra semi-simples invariante por θ , então a restrição de θ a \mathfrak{h} é uma involução de Cartan de \mathfrak{h} . Para isto é necessário o seguinte resultado de Álgebra Linear.

Lema A.5. *Seja V um espaço vetorial real com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se uma transformação linear $T : V \rightarrow V$ é simétrica (anti-simétrica) em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então T^2 é positiva (negativa) semi-definida.*

Demonstração. Em ambos os casos T^2 é simétrica e, portanto, diagonalizável, pelo Teorema Espectral. Sejam $a \in \mathbb{R}$ auto-valor de T^2 e $v \in V$ um auto-vetor unitário associado. Se T é simétrica, tem-se que

$$a = a\langle v, v \rangle = \langle v, T^2(v) \rangle = \langle T(v), T(v) \rangle \geq 0 \quad (\text{A.12})$$

e se T é anti-simétrica, tem-se que

$$a = a\langle v, v \rangle = \langle v, T^2(v) \rangle = -\langle T(v), T(v) \rangle \leq 0, \quad (\text{A.13})$$

concluindo-se a demonstração do lema. \square

Proposição A.6. *Sejam θ uma involução de Cartan de \mathfrak{g} e \mathfrak{h} uma subálgebra semi-simples invariante por θ , isto é, tal que $\theta\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$. Então a restrição $\theta|_{\mathfrak{h}} = \theta|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ é uma involução de Cartan de \mathfrak{h} .*

Demonstração. Seja $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}_{\mathfrak{h}} \oplus \mathfrak{s}_{\mathfrak{h}}$ a decomposição de \mathfrak{g} associada à $\theta_{\mathfrak{h}}$. Pelo comentário que precede à Proposição A.4, basta mostrar que a forma de Cartan-Killing de \mathfrak{h} seja negativa semi-definida, quando restrita a $\mathfrak{k}_{\mathfrak{h}}$, e positiva semi-definida, quando restrita a $\mathfrak{s}_{\mathfrak{h}}$. Se $X \in \mathfrak{k}_{\mathfrak{h}}$, tem-se que $X \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$. Pela Proposição A.4, segue que $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é anti-simétrica em relação ao produto interno associado a θ . Pelo Lema A.5, tem-se que $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)^2$ é negativa semi-definida. Como \mathfrak{h} é subálgebra e $X \in \mathfrak{h}$, segue que

$$\text{ad}_{\mathfrak{h}}(X)^2 = \text{ad}_{\mathfrak{g}}(X)^2|_{\mathfrak{h}}, \quad (\text{A.14})$$

mostrando que $\text{ad}_{\mathfrak{h}}(X)^2$ é negativa semi-definida. Portanto

$$\langle X, X \rangle_{\mathfrak{h}} = \text{tr}(\text{ad}_{\mathfrak{h}}(X)^2) \leq 0, \quad (\text{A.15})$$

o que implica que a forma de Cartan-Killing de \mathfrak{h} restrita a $\mathfrak{k}_{\mathfrak{h}}$ é negativa semi-definida. De maneira análoga, mostra-se que a forma de Cartan-Killing de \mathfrak{h} é positiva semi-definida, quando restrita a $\mathfrak{s}_{\mathfrak{h}}$, concluindo-se a demonstração. \square

Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie semi-simples real \mathfrak{g} . A representação $I : G \rightarrow \text{Int}(G)$ do grupo nos seus automorfismos internos $\text{Int}(G)$ é definida por $I(g)(h) = ghg^{-1}$. Tem-se que o seguinte diagrama é comutativo (c.f. Equação (3), Página 127, Parágrafo 5, Capítulo II de [15])

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{d_1 I(g)} & \mathfrak{g} \\ \text{exp} \downarrow & & \downarrow \text{exp} \\ G & \xrightarrow{I(g)} & G \end{array} \quad (\text{A.16})$$

A representação adjunta do grupo, $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Gl}(\mathfrak{g})$, é definida por $\text{Ad}(g)X = d_1 I(g)X$, onde $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$ e 1 é a identidade em G . Pelo diagrama anterior,

$$g \exp(X) g^{-1} = I(g)(\exp(X)) = \exp(\text{Ad}(g)X). \quad (\text{A.17})$$

A representação Ad é um homomorfismo analítico, o seu núcleo é o centro $Z(G)$ do grupo e a aplicação induzida no quociente é um isomorfismo analítico entre $G/Z(G)$ e o grupo adjunto $\text{Ad}(G)$ (Corolário 5.2, Página 129, Capítulo II de [15]). No caso semi-simples, o centro de G é um grupo discreto, pois sua álgebra de Lie é o centro $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ da álgebra, que é trivial. O seguinte diagrama também é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{d_1 \text{Ad}} & \text{gl}(\mathfrak{g}) \\ \exp \downarrow & & \downarrow e \\ G & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{Gl}(\mathfrak{g}) \end{array} \quad (\text{A.18})$$

A diferencial da representação adjunta do grupo na identidade é na verdade a representação adjunta de sua álgebra, ou seja, $d_1 \text{Ad}X = \text{ad}(X) = [X, \cdot]$ (c.f. Equações (4) e (5), Página 128, Parágrafo 5, Capítulo II de [15]). A comutatividade do diagrama acima pode então ser expressa pela seguinte igualdade

$$\text{Ad}(\exp(X)) = e^{\text{ad}(X)}. \quad (\text{A.19})$$

No caso conexo, o grupo adjunto é exatamente o subgrupo dos automorfismos internos da álgebra $\text{Int}(\mathfrak{g})$ e, quando a álgebra é semi-simples, é portanto um subgrupo fechado de $GL(\mathfrak{g})$. Definindo-se K como o subgrupo de Lie conexo gerado por $\exp(\mathfrak{k})$, tem-se que o sua imagem pela representação adjunta é um subgrupo compacto.

Proposição A.7. *$\text{Ad}(K)$ é um subgrupo compacto de $GL(\mathfrak{g})$ de transformações lineares $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonais.*

Demonstração. Pela equação (A.19), tem-se que $\text{Ad}(K)$ é o subgrupo gerado por $e^{\text{ad}(\mathfrak{k})}$. Definindo-se

$$O_\theta = \{T \in GL(\mathfrak{g}) : \langle TX, TY \rangle_\theta = \langle X, Y \rangle_\theta, \forall X, Y \in \mathfrak{g}\} \quad (\text{A.20})$$

tem-se que O_θ é um subgrupo compacto de $GL(\mathfrak{g})$ e, pela Proposição A.4, $\text{Ad}(K) \subset O_\theta$. Basta então mostrar que $\text{Ad}(K)$ é um subgrupo fechado em $GL(\mathfrak{g})$. Definindo-se $\Theta : GL(\mathfrak{g}) \rightarrow GL(\mathfrak{g})$, por $\Theta(T) = \theta T \theta$, tem-se que $d\Theta_1 : \text{gl}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{gl}(\mathfrak{g})$, dada por $d\Theta_1(D) = \theta D \theta$, é tal que $d\Theta_1(\text{ad}(X)) = \theta \text{ad}(X) \theta = \text{ad}(\theta(X))$. Como ad é injetora, $\text{ad}(\mathfrak{k})$ é a interseção do conjunto dos pontos fixos de $d\Theta_1$ com $\text{ad}(\mathfrak{g})$. O conjunto dos pontos fixos de Θ é um subgrupo fechado cuja álgebra de Lie é o conjunto dos pontos fixos de $d\Theta_1$. Logo $\text{Ad}(K)$ é a componente conexa da interseção do subgrupo dos pontos fixos de Θ com $\text{Ad}(G)$ e portanto é um subgrupo fechado. \square

Corolário A.8. *O grupo K é compacto se, e somente se, o centro de G é finito.*

Demonstração. O centro de G está contido no subgrupo K (Teorema 1.1, Página 252, Capítulo VI de [15]). Portanto o isomorfismo analítico induzido por Ad no quociente $G/Z(G)$ induz um isomorfismo entre $K/Z(G)$ e o grupo compacto $\text{Ad}(K)$. Logo se o centro de G for finito, K é compacto. Por outro lado, como G é semi-simples, $Z(G)$ é discreto e, portanto, é finito, quando K for compacto. \square

Se H e L são um subgrupo do grupo de Lie G , o *normalizador* $N_L(H)$ de H em L é definido por

$$N_L(H) = \{l \in L : I(l)(H) = lHl^{-1} = H\} \quad (\text{A.21})$$

e o *centralizador* $Z_L(H)$ de H em L por

$$Z_L(H) = \{l \in L : I(l)|_H = \text{id}_H\}. \quad (\text{A.22})$$

Se \mathfrak{h} é uma subálgebra da álgebra de Lie \mathfrak{g} , o *normalizador* $N_L(\mathfrak{h})$ de \mathfrak{h} em L é definido por

$$N_L(\mathfrak{h}) = \{l \in L : \text{Ad}(l)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}\} \quad (\text{A.23})$$

e o *centralizador* $Z_L(\mathfrak{h})$ de \mathfrak{h} em L por

$$Z_L(\mathfrak{h}) = \{l \in L : \text{Ad}(l)|_{\mathfrak{h}} = \text{id}_{\mathfrak{h}}\}. \quad (\text{A.24})$$

Por outro lado, se \mathfrak{l} é uma subálgebra de Lie de \mathfrak{g} , então o *normalizador* $\mathfrak{n}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{h})$ de \mathfrak{h} em \mathfrak{l} é definido por

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{l} : \text{ad}(X)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}\} \quad (\text{A.25})$$

e o *centralizador* $\mathfrak{z}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{h})$ de \mathfrak{h} em \mathfrak{l} por

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{l} : \text{ad}(X)|_{\mathfrak{h}} = 0\}. \quad (\text{A.26})$$

Se $X \in \mathfrak{g}$, o *normalizador* de X em \mathfrak{l} é, por definição, o normalizador da álgebra abeliana gerada por X em \mathfrak{l} . Da mesma forma, o *centralizador* de X em \mathfrak{l} é o centralizador da álgebra abeliana gerada por X em \mathfrak{l} . Denotando-se o centralizador de \mathfrak{h} em \mathfrak{g} por $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, tem-se que $\mathfrak{z}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{l}$.

Proposição A.9. *Se \mathfrak{l} é a álgebra de Lie de L , então as álgebras de Lie de $N_L(\mathfrak{h})$ e de $Z_L(\mathfrak{h})$ são respectivamente $\mathfrak{n}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{h})$ e $\mathfrak{z}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{h})$. Se H é um subgrupo de Lie conexo com álgebra de Lie \mathfrak{h} , então $N_L(H) = N_L(\mathfrak{h})$ e $Z_L(H) = Z_L(\mathfrak{h})$.*

Demonstração. A demonstração é conseqüência direta das equações (A.17) e (A.19). \square

Um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é estável por uma transformação linear $T : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ se $T(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$. Se \mathfrak{h} é estável pela involução de Cartan, \mathfrak{h} pode ser escrito como soma direta de $\kappa(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ e $\sigma(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}$, onde κ e σ são as projeções definidas pelas Equações (A.7) e (A.8), pois $\kappa(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$ e $\sigma(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$.

Proposição A.10. *Existe \mathfrak{a} uma subálgebra abeliana maximal contida em \mathfrak{s} . Além disso, $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$, soma direta $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\theta}$ -ortogonal, onde \mathfrak{a} é o centralizador de \mathfrak{a} em \mathfrak{s} e \mathfrak{m} denota o centralizador de \mathfrak{a} em \mathfrak{k} .*

Demonstração. Se \mathfrak{a} é uma álgebra abeliana de \mathfrak{s} com dimensão máxima, então \mathfrak{a} é maximal em \mathfrak{s} . Além disso, o centralizador $\mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ de \mathfrak{a} em \mathfrak{g} é estável por θ , pois $[\theta X, Y] = \theta[X, \theta Y] = -\theta[X, Y] = 0$, se $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ e $Y \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$. Portanto $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{s})$. Claramente $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{s} = \mathfrak{a}$, pois $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{s}$ e \mathfrak{a} é maximal abeliana em \mathfrak{s} . Pela Proposição A.4, a decomposição $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$ é uma soma direta ortogonal em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$. \square

Teorema A.11. *Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ uma decomposição de Cartan da álgebra de Lie semi-simples real \mathfrak{g} . Então existe uma única subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ menos de conjugação por automorfismo interno de \mathfrak{k} em \mathfrak{g} . Além disso, se ϕ é um automorfismo da álgebra e \mathfrak{m} é o centralizador de \mathfrak{a} em \mathfrak{k} , então $\phi\mathfrak{a}$ é uma subálgebra abeliana maximal de $\phi\mathfrak{s}$ e $\phi\mathfrak{m}$ é o centralizador de $\phi\mathfrak{a}$ em $\phi\mathfrak{k}$.*

Demonstração. A existência é decorrência da Proposição A.10 e a unicidade decorre do Teorema A.38. Sejam \mathfrak{a} uma subálgebra abeliana maximal em \mathfrak{s} e ϕ um automorfismo da álgebra. Seja \mathfrak{h} uma subálgebra abeliana em $\phi\mathfrak{s}$ tal que $\phi\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$. Como ϕ é automorfismo, $\phi^{-1}\mathfrak{h}$ é abeliana em \mathfrak{s} tal que $\mathfrak{a} \subset \phi^{-1}\mathfrak{h}$. A maximalidade de \mathfrak{a} implica que $\phi^{-1}\mathfrak{h} = \mathfrak{a}$ e portanto que $\mathfrak{h} = \phi\mathfrak{a}$, o que mostra a maximalidade de $\phi\mathfrak{a}$. Se $X \in \mathfrak{m}$, então $[\phi H, \phi X] = \phi[H, X] = 0$, para todo $H \in \mathfrak{a}$, o que mostra que $\phi\mathfrak{m}$ está contida no centralizador de $\phi\mathfrak{a}$ em $\phi\mathfrak{k}$. A outra inclusão é obtida de maneira similar. \square

Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples real, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ uma decomposição de Cartan associada a involução de Cartan θ e $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ uma subálgebra abeliana maximal. Então (θ, \mathfrak{a}) é denominado um *par admissível* de \mathfrak{g} . Pelo Teorema B.49, a álgebra \mathfrak{g} pode ser escrita como a soma direta $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonal

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha, \quad (\text{A.27})$$

denominada *decomposição em espaço de raízes associadas ao par (θ, \mathfrak{a})* , onde o conjunto Π é denominado *conjunto das raízes do par (θ, \mathfrak{a})* , os funcionais lineares $\alpha : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}$ são conhecidos como *raízes* e cada subespaço \mathfrak{g}_α é denominado *espaço associado à raiz α* , tais que, se $H \in \mathfrak{a}$ e $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, então

$$\text{ad}(H)X = \alpha(H)X. \quad (\text{A.28})$$

Teorema A.12. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples real. Então existe uma única decomposição em espaço de raízes a menos de conjugação por automorfismo interno da álgebra \mathfrak{g} . Além disso, se ϕ é um automorfismo da álgebra \mathfrak{g} e $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$ é a decomposição em espaço de raízes associadas ao par (θ, \mathfrak{a}) , então*

$$\mathfrak{g} = \phi\mathfrak{m} \oplus \phi\mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \phi\mathfrak{g}_\alpha, \quad (\text{A.29})$$

é a decomposição em espaço de raízes associadas ao par $(\phi\theta\phi^{-1}, \phi\mathfrak{a})$. O conjunto das raízes desta decomposição é

$$\phi^*\Pi = \{\phi^*\alpha : \alpha \in \Pi\} \quad (\text{A.30})$$

onde $\phi^*\alpha = \alpha \circ (\phi|_{\mathfrak{a}})^{-1}$ e

$$\phi\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{\phi^*\alpha}. \quad (\text{A.31})$$

Demonstração. Pelo Teorema A.3, $\mathfrak{g} = \phi\mathfrak{k} \oplus \phi\mathfrak{s}$ é a decomposição de Cartan associada à involução de Cartan $\phi\theta\phi^{-1}$ e, pelo Teorema A.11, $\phi\mathfrak{a}$ é uma subálgebra abeliana maximal de $\phi\mathfrak{s}$ e $\phi\mathfrak{m}$ é o centralizador de $\phi\mathfrak{a}$ em $\phi\mathfrak{k}$. Pela Equação (A.11), a decomposição (A.40) é uma soma direta $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\phi\theta\phi^{-1}}$ -ortogonal. Além disso, se $H \in \mathfrak{a}$ e $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, então

$$\text{ad}(\phi H)\phi X = \phi \text{ad}(H)X = \phi\alpha(H)X = \alpha(\phi^{-1}\phi H)\phi X = \phi^*\alpha(\phi H)\phi X \quad (\text{A.32})$$

e portanto $\phi\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_{\phi^*\alpha}$. Aplicando-se este resultador com ϕ^{-1} no lugar de ϕ , obtém-se que

$$\phi^{-1}\mathfrak{g}_{\phi^*\alpha} \subset \mathfrak{g}_{(\phi^{-1})^*\phi^*\alpha} = \mathfrak{g}_\alpha, \quad (\text{A.33})$$

o que implica na igualdade. A existência de uma decomposição em espaço de raízes é garantida pelos Teoremas A.11 e B.49. Para mostrarmos a unicidade sejam dados dois pares (θ, \mathfrak{a}) e $(\bar{\theta}, \bar{\mathfrak{a}})$. Pelo Teorema A.3, existe um automorfismo interno φ da álgebra \mathfrak{g} talque $\varphi\theta\varphi^{-1} = \bar{\theta}$. Pelo Teorema A.11, existe um automorfismo interno ψ da álgebra \mathfrak{k} tal que $\psi\varphi\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{a}}$. Pelo Lema A.1, tem-se $\psi\bar{\theta}\psi^{-1} = \bar{\theta}$ e portanto $\phi = \psi\varphi$ é o automorfismo interno que leva o par (θ, \mathfrak{a}) no par $(\bar{\theta}, \bar{\mathfrak{a}})$. \square

Corolário A.13. *Se ψ um automorfismo interno de \mathfrak{k} em \mathfrak{g} tal que $\psi\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, então $\psi^*\Pi = \Pi$.*

Demonstração. Pelo Lema A.1, como ψ é um automorfismo interno de \mathfrak{k} em \mathfrak{g} , então $\psi\theta\psi^{-1} = \theta$. \square

As câmaras de Weyl associadas ao par admissível (θ, \mathfrak{a}) são definidas como as componentes conexas do conjunto $\{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) \neq 0, \forall \alpha \in \Pi\}$. Escolhendo-se uma das câmaras como a câmara positiva \mathfrak{a}^+ , pode-se definir o conjunto das raízes positivas associado à \mathfrak{a}^+ como $\Pi^+ = \{\alpha \in \Pi : \alpha|_{\mathfrak{a}^+} > 0\}$ e definir

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{e} \quad \mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}. \quad (\text{A.34})$$

Lema A.14. *Se θ é a involução de Cartan, então $\theta\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha}$ e $\theta\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^-$.*

Demonstração. Como $\theta|_{\mathfrak{a}} = -\text{id}$, tem-se que $\theta^* = -\text{id}$ e o lema segue do Teorema A.12. \square

Proposição A.15. *Sejam (θ, \mathfrak{a}) um par admissível de \mathfrak{g} e ϕ um automorfismo de \mathfrak{g} . As câmaras de Weyl associadas ao par $(\phi\theta\phi^{-1}, \phi\mathfrak{a})$ são a imagem por $\phi|_{\mathfrak{a}}$ das câmaras de Weyl associadas ao par (θ, \mathfrak{a}) . Além disso, se Π^+ é o conjunto das raízes positivas associada a câmara \mathfrak{a}^+ em \mathfrak{a} , então $\phi^*\Pi^+$ é o conjunto das raízes positivas associada a câmara $\phi\mathfrak{a}^+$ em $\phi\mathfrak{a}$.*

Demonstração. As câmaras de Weyl associadas ao par $(\phi\theta\phi^{-1}, \phi\mathfrak{a})$ são a imagem por ϕ das câmaras de Weyl associadas ao par (θ, \mathfrak{a}) , já que

$$\{\phi H \in \phi\mathfrak{a} : \phi^*\alpha(\phi H) \neq 0, \forall \alpha \in \Pi\} = \phi\{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) \neq 0, \forall \alpha \in \Pi\}, \quad (\text{A.35})$$

pois $\phi^*\alpha(\phi H) = \alpha(H)$. Se $\Pi^+ = \{\alpha \in \Pi : \alpha|_{\mathfrak{a}^+} > 0\}$ é o conjunto das raízes positivas associada a câmara \mathfrak{a}^+ em \mathfrak{a} , então $\phi^*\Pi^+$ é o conjunto das raízes positivas associada a câmara $\phi\mathfrak{a}^+$ em $\phi\mathfrak{a}$, pois

$$\phi^*\Pi^+ = \{\phi^*\alpha \in \phi^*\Pi : \alpha|_{\mathfrak{a}^+} > 0\} = \{\phi^*\alpha \in \phi^*\Pi : \phi^*\alpha|_{\phi\mathfrak{a}^+} > 0\}. \quad (\text{A.36})$$

□

Corolário A.16. *Se ψ um automorfismo interno de \mathfrak{k} em \mathfrak{g} tal que $\psi\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, então $\psi|_{\mathfrak{a}}$ permuta as câmaras de Weyl associadas ao par (θ, \mathfrak{a}) .*

Proposição A.17. *As restrições das projeções κ e σ à subálgebra \mathfrak{n} são injetoras e, portanto, isomorfismos sobre suas imagens. Além disso, tem-se as seguintes decomposições em somas $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonais $\mathfrak{k} = \mathfrak{m} \oplus \kappa(\mathfrak{n})$ e $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \sigma(\mathfrak{n})$.*

Demonstração. Pelo Lema A.14 e pela Equação A.27, se $X \in \mathfrak{n}$, então $2\sigma(X) = X - \theta X \in \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^-$. Portanto se $\sigma(X) = 0$, então $X = 0$, o que mostra que a restrição da projeção σ à subálgebra \mathfrak{n} é injetora.

Para se mostrar que $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \sigma(\mathfrak{n})$, utiliza-se a decomposição em espaço de raízes $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^-$. Sejam $X \in \mathfrak{s}$ e $L \in \mathfrak{m}$, $H \in \mathfrak{a}$, $Y \in \mathfrak{n}$ e $Z \in \mathfrak{n}^-$ tais que $X = L + H + Y + Z$. Como

$$L + H + Y + Z = X = -\theta X = -L + H - \theta Y - \theta Z, \quad (\text{A.37})$$

tem-se que $L = 0$ e, pelo Lema A.14, segue que $Z = -\theta Y$. Portanto $X = H + Y - \theta Y \in \mathfrak{a} \oplus \sigma(\mathfrak{n})$, mostrando que $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{a} \oplus \sigma(\mathfrak{n})$. Uma vez que a \mathfrak{a} e $\sigma(\mathfrak{n})$ estão contidos em \mathfrak{s} , obtem-se a igualdade.

A injetividade da projeção κ e a decomposição $\mathfrak{k} = \mathfrak{m} \oplus \kappa(\mathfrak{n})$ seguem de maneira análoga. □

Um terno $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ é denominado *terno admissível de \mathfrak{g}* , se (θ, \mathfrak{a}) é um par admissível de \mathfrak{g} e \mathfrak{a}^+ é uma câmara de Weyl associada a (θ, \mathfrak{a}) . Como mostram as relações (A.9), uma propriedade inconveniente da decomposição de Cartan de uma álgebra semi-simples é que suas duas componentes não são ambas subálgebras. A seguinte decomposição não apresenta este inconveniente.

Teorema A.18. *Seja $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ um terno admissível de \mathfrak{g} . Então*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \quad (\text{A.38})$$

onde \mathfrak{n} é uma subálgebra nilpotente e $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é uma subálgebra solúvel.

Demonstração. Pelas Equações A.27 e A.34 e como $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{k}$, tem-se que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n} + \mathfrak{n}^-$. Se $X \in \mathfrak{n}^-$, pelo Lema A.14, tem-se que

$$X = X + \theta X - \theta X = 2\kappa(X) - \theta X \in \mathfrak{k} + \mathfrak{n}, \quad (\text{A.39})$$

o que mostra que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$. Pela Proposição A.17, a dimensão de $\mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ é igual a dimensão de \mathfrak{s} , o que, pela decomposição de Cartan, implica que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. \square

A decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é denominada *decomposição de Iwasawa da álgebra associada ao terno* $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$.

Teorema A.19. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples real. Então existe uma única decomposição de Iwasawa de \mathfrak{g} a menos de conjugação por automorfismo interno. Além disso, se ϕ é um automorfismo da álgebra e $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é a decomposição de Iwasawa associada a $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$, então $\mathfrak{g} = \phi\mathfrak{k} \oplus \phi\mathfrak{a} \oplus \phi\mathfrak{n}$ é a decomposição de Iwasawa associada a $(\phi\theta\phi^{-1}, \phi\mathfrak{a}, \phi\mathfrak{a}^+)$.*

Demonstração. Pelo Teorema A.3, $\mathfrak{g} = \phi\mathfrak{k} \oplus \phi\mathfrak{s}$ é a decomposição de Cartan associada à involução de Cartan $\phi\theta\phi^{-1}$ e, pelo Teorema A.12,

$$\mathfrak{g} = \phi\mathfrak{m} \oplus \phi\mathfrak{a} \oplus \sum_{\beta \in \phi^*\Pi} \mathfrak{g}_\beta, \quad (\text{A.40})$$

é a decomposição em espaço de raízes associadas ao par $(\phi\theta\phi^{-1}, \phi\mathfrak{a})$. Pela Proposição A.15, as câmaras de Weyl associadas ao par $(\phi\theta\phi^{-1}, \phi\mathfrak{a})$ são a imagem por ϕ das câmaras de Weyl associadas ao par (θ, \mathfrak{a}) . Também pela Proposição A.15, se Π^+ é o conjunto das raízes positivas associada a câmara \mathfrak{a}^+ em \mathfrak{a} , então $\phi^*\Pi^+$ é o conjunto das raízes positivas associada a câmara $\phi\mathfrak{a}^+$ em $\phi\mathfrak{a}$. Pelo Teorema A.12,

$$\phi\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_{\phi^*\alpha} = \sum_{\beta \in \phi^*\Pi^+} \mathfrak{g}_\beta, \quad (\text{A.41})$$

o que mostra que $\mathfrak{g} = \phi\mathfrak{k} \oplus \phi\mathfrak{a} \oplus \phi\mathfrak{n}$ é a decomposição de Iwasawa associada a $(\phi\theta\phi^{-1}, \phi\mathfrak{a}, \phi\mathfrak{a}^+)$.

Sejam dados dois ternos $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ e $(\bar{\theta}, \bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{a}}^+)$. Pelo Teorema A.12, existe um automorfismo interno φ de \mathfrak{g} que leva o par (θ, \mathfrak{a}) no $(\bar{\theta}, \bar{\mathfrak{a}})$. Pelos Teorema B.63 e Proposição B.60, existe um automorfismo interno ψ da subálgebra $\bar{\mathfrak{k}} = \varphi\mathfrak{k}$ que leva a câmara $\varphi\mathfrak{a}^+$ na câmara $\bar{\mathfrak{a}}^+$ e que normaliza $\bar{\mathfrak{a}} = \varphi\mathfrak{a}$. Portanto o automorfismo interno $\phi = \psi\varphi$ leva o terno $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ no terno $(\bar{\theta}, \bar{\mathfrak{a}}, \bar{\mathfrak{a}}^+)$. \square

A.1.1 Decomposição de Iwasawa Global

Sejam $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ um terno admissível de \mathfrak{g} e G um grupo de Lie conexo cuja álgebra de Lie é \mathfrak{g} . Define-se que K , A e N os subgrupos conexos gerados, respectivamente, por \mathfrak{k} , \mathfrak{a} e \mathfrak{n} .

Teorema A.20. *A aplicação $(k, h, n) \mapsto khn \in KAN$, onde $k \in K$, $h \in A$ e $n \in N$, é um difeomorfismo entre $K \times A \times N$ e G . Além disto, o produto AN é um subgrupo fechado de G e a exponencial é um difeomorfismo entre \mathfrak{a} e A e, também, entre \mathfrak{n} e N .*

Demonstração. Seção 5 do Capítulo VI de [15]. \square

Do Teorema A.20, compondo-se com a inversa, tem-se que as aplicações

$$(i) (k, h, n) \mapsto nhk \in NAK,$$

$$(ii) (k, h, n) \mapsto knh \in KNA \text{ e}$$

$$(iii) (k, h, n) \mapsto hnk \in ANK,$$

onde $k \in K$, $a \in A$ e $n \in N$, são também difeomorfismos entre $K \times A \times N$ e G .

A.2 Subgrupos e Subálgebras

A.2.1 Álgebras Simples, Semi-simples e Redutíveis

Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é *simples* se sua dimensão é maior que 1 e os únicos ideais são os triviais 0 e \mathfrak{g} . Pelas definições, uma álgebra simples é uma álgebra semi-simples. Um ideal é simples se é uma álgebra simples e semi-simples se é uma álgebra semi-simples.

Teorema A.21. *Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é semi-simples se, e somente se,*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n, \quad (\text{A.42})$$

soma direta de ideais simples.

Demonstração. Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ é soma direta de ideais simples, então a forma de Cartan-Killing $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ de \mathfrak{g}_i é a restrição da forma de Cartan-Killing $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de \mathfrak{g} . Se $X \in \mathfrak{g}$ é tal que $\langle X, Y \rangle = 0$, para todo $Y \in \mathfrak{g}$, então $\langle X_i, Y_i \rangle_i = 0$, para todo $Y_i \in \mathfrak{g}_i$, onde X_i denota a componente de X em \mathfrak{g}_i . Como cada \mathfrak{g}_i é semi-simples, então $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ é não-degenerada, o que implica que $X = 0$, pois $X_i = 0$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Isto mostra que \mathfrak{g} é semi-simples. A recíproca segue do Teorema 3.11 de [38]. \square

Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é *redutível* se

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad (\text{A.43})$$

soma direta de ideais, onde $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é uma álgebra semi-simples.

Teorema A.22. *Uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é redutível se, e somente se, sua representação adjunta $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(\mathfrak{g})$ é completamente redutível.*

Demonstração. Se \mathfrak{g} é redutível, então $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, soma direta de ideais, onde $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é uma álgebra semi-simples. Pelo Teorema A.21, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_k$, soma de ideais simples. Um subespaço em \mathfrak{h}_i invariante por $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(\mathfrak{g})$ é um ideal de \mathfrak{h}_i , o que mostra \mathfrak{h}_i é irredutível por ad , para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Além disso, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_l$, soma de ideais abelianos unidimensionais, o que mostra que a representação adjunta é

completamente redutível. Reciprocamente, se $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(\mathfrak{g})$ é completamente redutível, então

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n, \quad (\text{A.44})$$

soma direta de invariantes e irreduzíveis por ad . Para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, se $i \neq j$, então $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_j = 0$, o que mostra que se $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_i$ é um ideal de \mathfrak{g}_i , então \mathfrak{h} é invariante por ad e, portanto, é igual a 0 ou \mathfrak{g}_i . Se \mathfrak{g}' é a soma direta dos \mathfrak{g}_i com dimensão maior que 1, então \mathfrak{g}' é soma direta de ideais simples e, portanto, um ideal semi-simples. O centralizador $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de \mathfrak{g} é a soma direta dos \mathfrak{g}_i ideais abelianos unidimensionais e, portanto, $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}'$, o que mostra que $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e conclui a demonstração do teorema. \square

A.2.2 Subálgebras e Subgrupos Semi-simples

Sejam $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ um terno admissível da álgebra de Lie semi-simples real \mathfrak{g} , Π o conjunto das raízes associado ao par (θ, \mathfrak{a}) e Π^+ o conjunto das raízes positivas associado à \mathfrak{a}^+ . Para cada raiz $\alpha \in \Pi$, define-se o seu representante em \mathfrak{a} como sendo $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ tal que

$$\langle H_\alpha, H \rangle_\theta = \alpha(H), \quad (\text{A.45})$$

para todo $H \in \mathfrak{a}$. A reflexão $r_\alpha : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonal em relação a H_α , é definida, para todo $H \in \mathfrak{a}$, pela seguinte expressão

$$r_\alpha(H) = H - 2 \frac{\alpha(H)}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha. \quad (\text{A.46})$$

As Proposições B.53 e B.59 e o Corolário B.57 mostram que $\Pi_{\mathfrak{a}} = \{H_\alpha \in \mathfrak{a} : \alpha \in \Pi\}$ é de fato um sistema de raízes (c.f. Capítulo 9 de [38]):

- 1) $\Pi_{\mathfrak{a}}$ é finito, gera \mathfrak{a} e não contém 0.
- 2) Para todo $H_\alpha \in \Pi_{\mathfrak{a}}$, existe uma reflexão r_α em relação a H_α tal que $r_\alpha(\Pi_{\mathfrak{a}}) = \Pi_{\mathfrak{a}}$.
- 3) Para todos $H_\alpha, H_\beta \in \Pi_{\mathfrak{a}}$, $r_\alpha(H_\beta) - H_\beta$ é um múltiplo inteiro de H_α .

O conjunto $\Pi_{\mathfrak{a}}$ é denominado *sistema de raízes associado ao par (θ, \mathfrak{a})* .

Um subconjunto $\Sigma \subset \Pi^+$ é um *sistema simples de raízes associado à \mathfrak{a}^+* , se o conjunto $\Sigma_{\mathfrak{a}} = \{H_\alpha \in \mathfrak{a} : \alpha \in \Sigma\}$ é uma base de \mathfrak{a} e se toda raiz positiva é escrita como soma de raízes de Σ .

Proposição A.23. *Para toda câmara de Weyl \mathfrak{a}^+ , existe um sistema simples de raízes associado à \mathfrak{a}^+ .*

Demonstração. Lemas 6.17 a 6.20, Corolário 6.21 e Proposição 9.8 de [38]. \square

Se $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ é um terno admissível de \mathfrak{g} e $\Theta \subset \Sigma$, então $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$ é denominada *quadra admissível de \mathfrak{g}* .

Um subconjunto Δ de Π é *fechado em Π* se, para todo $\alpha, \beta \in \Delta$ tais que $\alpha + \beta \in \Pi$, então $\alpha + \beta \in \Delta$. Para qualquer subconjunto Θ de Σ , $\langle \Theta \rangle$ denota o menor subconjunto fechado em Π que contém Θ e $\langle \Theta \rangle^+ = \langle \Theta \rangle \cap \Pi^+$. De fato $\langle \Theta \rangle$ são as combinações lineares de Θ que pertencem a Π .

A *subálgebra semi-simples $\mathfrak{g}(\Theta)$ de tipo Θ* associada à quadra $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$ é a subálgebra gerada por $\mathfrak{n}(\Theta) + \mathfrak{n}^-(\Theta)$, onde

$$\mathfrak{n}(\Theta) = \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{e} \quad \mathfrak{n}^-(\Theta) = \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}. \quad (\text{A.47})$$

Pelo Lema A.14, $\mathfrak{g}(\Theta)$ é estável por θ e é decomposta como $\mathfrak{g}(\Theta) = \mathfrak{k}(\Theta) \oplus \mathfrak{s}(\Theta)$, onde $\mathfrak{k}(\Theta) = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{k}$ e $\mathfrak{s}(\Theta) = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{s}$.

Proposição A.24. *A álgebra de Lie $\mathfrak{g}(\Theta)$ é semi-simples e $\mathfrak{g}(\Theta) = \mathfrak{k}(\Theta) \oplus \mathfrak{s}(\Theta)$ é a decomposição de Cartan associada a involução de Cartan $\theta_\Theta = \theta|_{\mathfrak{g}(\Theta)}$.*

Demonstração. Tem-se que $\text{ad}_\Theta : \mathfrak{g}(\Theta) \rightarrow \text{gl}(\mathfrak{g}(\Theta))$ é auto-adjunta em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$, pois se $X \in \mathfrak{g}(\Theta)$, então $\sigma(X) - \kappa(X) \in \mathfrak{g}(\Theta)$, onde κ e σ são definidas pelas equações (A.7) e (A.8). Logo, utilizando-se a Proposição A.4, obtém-se que

$$\text{ad}_\Theta(X)^* = \text{ad}(X)^* = \text{ad}(\kappa(X) + \sigma(X))^* = \text{ad}_\Theta(\sigma(X) - \kappa(X)). \quad (\text{A.48})$$

Pelo Lema B.48, ad_Θ é completamente redutível e, pelo Teorema A.22, $\mathfrak{g}(\Theta)$ é redutível. Sejam $\alpha \in \langle \Theta \rangle$ e $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ tal que $\langle X, X \rangle_\theta = 1$. Pelo Lema B.58, $[X, \theta X] = H_\alpha \in \mathfrak{g}(\Theta)$ e, portanto, $\alpha(H_\alpha)X = [H_\alpha, X] \in [\mathfrak{g}(\Theta), \mathfrak{g}(\Theta)]$. Logo $\mathfrak{g}_\alpha \subset [\mathfrak{g}(\Theta), \mathfrak{g}(\Theta)]$, o que implica que $\mathfrak{g}(\Theta) = [\mathfrak{g}(\Theta), \mathfrak{g}(\Theta)]$ é semi-simples.

O fato de que $\theta_\Theta = \theta|_{\mathfrak{g}(\Theta)}$ é uma involução de Cartan de $\mathfrak{g}(\Theta)$ segue da Proposição A.6. \square

Pela demonstração da Proposição A.24, a subálgebra $\mathfrak{a}(\Theta)$ gerada por $\{H_\alpha : \alpha \in \langle \Theta \rangle\}$ está contida em $\mathfrak{g}(\Theta)$. Denota-se por $\mathfrak{a}_\Theta = \mathfrak{a} \ominus \mathfrak{a}(\Theta)$ o complemento $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonal de $\mathfrak{a}(\Theta)$ em \mathfrak{a} e por $\mathfrak{m}(\Theta)$ o centralizador de $\mathfrak{a}(\Theta)$ em $\mathfrak{k}(\Theta)$. Sejam as seguintes projeções $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonais: $P_\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}_\alpha$ de \mathfrak{g} em \mathfrak{g}_α , onde $\alpha \in \Pi$, $P_\mathfrak{a} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{a}$ de \mathfrak{g} em \mathfrak{a} e $P_\Theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}(\Theta)$ de \mathfrak{g} em $\mathfrak{g}(\Theta)$.

Proposição A.25. *Tem-se que*

- 1) \mathfrak{a}_Θ centraliza $\mathfrak{g}(\Theta)$,
- 2) $\mathfrak{a}(\Theta) = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{a}$ é abeliana maximal em $\mathfrak{s}(\Theta)$,
- 3) $\mathfrak{m}(\Theta) = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{m}$ e
- 4) $\{H_\alpha : \alpha \in \Theta\}$ é uma base de $\mathfrak{a}(\Theta)$.

Demonstração. 1) Para mostrar que \mathfrak{a}_Θ centraliza $\mathfrak{g}(\Theta)$, sejam $H \in \mathfrak{a}_\Theta$ e $\alpha \in \langle \Theta \rangle$. Então $\alpha(H) = \langle H_\alpha, H \rangle_\theta = 0$. Isto implica que H centraliza $\mathfrak{g}(\Theta)$, já que $[H, X] = \alpha(H)X = 0$, para toda $\alpha \in \langle \Theta \rangle$ e todo $X \in \mathfrak{g}_\alpha$.

2) Como $\mathfrak{a}(\Theta) \subset \mathfrak{g}(\Theta)$ e $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{a}_\Theta$, segue que $\mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{a}_\Theta$. Além disso, como $\mathfrak{g}(\Theta)$ é semi-simples e \mathfrak{a}_Θ centraliza $\mathfrak{g}(\Theta)$, $\mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{a}_\Theta = 0$ e, portanto, $\mathfrak{a}(\Theta) = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{a}$. Para se mostrar que $\mathfrak{a}(\Theta)$ é abeliana maximal em $\mathfrak{s}(\Theta)$, seja $X \in \mathfrak{s}(\Theta)$ tal que X comuta com $\mathfrak{a}(\Theta)$. Como

$$X = P_{\mathfrak{a}}(X) + \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle} P_\alpha(X), \quad (\text{A.49})$$

tem-se que, para todo $H \in \mathfrak{a}(\Theta)$,

$$0 = [H, X] = \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle} \alpha(H)P_\alpha(X). \quad (\text{A.50})$$

Isto implica que $\alpha(H_\alpha)P_\alpha(X) = 0$ e, portanto, $P_\alpha(X) = 0$, para todo $\alpha \in \langle \Theta \rangle$. Logo $X = P_{\mathfrak{a}}(X) \in \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\Theta)$, o que mostra que $\mathfrak{a}(\Theta)$ é abeliana maximal em $\mathfrak{s}(\Theta)$.

3) Claramente $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{k}(\Theta) \subset \mathfrak{m}(\Theta)$, pois $\mathfrak{a}(\Theta) \subset \mathfrak{a}$. Por outro lado, como \mathfrak{a}_Θ centraliza $\mathfrak{g}(\Theta)$ e $\mathfrak{m}(\Theta) \subset \mathfrak{g}(\Theta)$, $\mathfrak{m}(\Theta)$ centraliza \mathfrak{a}_Θ . Além disso, por definição, $\mathfrak{m}(\Theta)$ centraliza $\mathfrak{a}(\Theta)$ o que implica que de fato centraliza \mathfrak{a} . Portanto $\mathfrak{m}(\Theta) = \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{k}(\Theta) = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}(\Theta)$.

4) Se $\alpha, \beta \in \Theta$ e $\alpha + \beta \in \Pi$, então

$$\langle H_{\alpha+\beta}, H \rangle_\theta = \alpha(H) + \beta(H) = \langle H_\alpha + H_\beta, H \rangle_\theta, \quad (\text{A.51})$$

para todo $H \in \mathfrak{a}$, o que implica que $H_{\alpha+\beta} = H_\alpha + H_\beta$. Portanto $\{H_\alpha : \alpha \in \Theta\}$ gera $\mathfrak{a}(\Theta)$ e, como é um conjunto linearmente independente, é uma base de $\mathfrak{a}(\Theta)$. \square

Proposição A.26. *Tem-se que*

$$\mathfrak{g}(\Theta) = \mathfrak{m}(\Theta) \oplus \mathfrak{a}(\Theta) \oplus \sum_{\alpha_\Theta \in \Pi(\Theta)} \mathfrak{g}_{\alpha_\Theta} \quad (\text{A.52})$$

é a decomposição em espaço de raízes associado ao par $(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta))$, onde

$$\Pi(\Theta) = \{\alpha_\Theta = \alpha|_{\mathfrak{a}(\Theta)} : \alpha \in \langle \Theta \rangle\} \quad (\text{A.53})$$

é o conjunto das raízes associado ao par $(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta))$ e, para todo $\alpha \in \langle \Theta \rangle$, $\mathfrak{g}_{\alpha_\Theta} = \mathfrak{g}_\alpha$.

Demonstração. Para mostrar a equação (A.52), como o segundo membro é igual a $\mathfrak{m}(\Theta) \oplus \mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{n}(\Theta)^+ \oplus \mathfrak{n}(\Theta)^-$, o mesmo está contido em $\mathfrak{g}(\Theta)$ e contém $\mathfrak{n}(\Theta)^+ \oplus \mathfrak{n}(\Theta)^-$, sendo suficiente mostrar que ele é de fato uma subálgebra. Se $X \in \mathfrak{m}(\Theta)$ e $H \in \mathfrak{a}(\Theta)$, pelas definições, $[X, H] = 0$. Se $H \in \mathfrak{a}(\Theta)$ e $Y \in \mathfrak{g}_{\alpha_\Theta} = \mathfrak{g}_\alpha$, então $[H, Y] = \alpha(H)Y \in \mathfrak{g}_{\alpha_\Theta}$. Se $X \in \mathfrak{m}(\Theta)$ e $Y \in \mathfrak{g}_{\alpha_\Theta}$, então

$$[H, [X, Y]] = [[H, X], Y] + [X, [H, Y]] = \alpha(H)[X, Y], \quad (\text{A.54})$$

para todo $H \in \mathfrak{a}(\Theta)$, o que mostra que $[X, Y] \in \mathfrak{g}_{\alpha_\Theta}$. Finalmente, se $Y \in \mathfrak{g}_{\alpha_\Theta}$, $Z \in \mathfrak{g}_{\beta_\Theta}$, pela Proposição B.50, ou $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ ou $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset 0$ ou $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{g}(\Theta)$. Como $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{g}(\Theta)$ é estável por θ ,

$$\mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{m}) \oplus (\mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{a}) = \mathfrak{m}(\Theta) \oplus \mathfrak{a}(\Theta), \quad (\text{A.55})$$

o que conclui a demonstração da equação (A.52). Se $H \in \mathfrak{a}(\Theta)$, $\alpha_\Theta \in \Pi(\Theta)$ e $X \in \mathfrak{g}_{\alpha_\Theta}$, então

$$\text{ad}_\Theta(H)X = \text{ad}(H)X = \alpha(H)X = \alpha_\Theta(H)X, \quad (\text{A.56})$$

onde $\text{ad}_\Theta : \mathfrak{g}(\Theta) \rightarrow \mathfrak{g}(\Theta)$ é a representação adjunta de $\mathfrak{g}(\Theta)$. \square

Corolário A.27. *Tem-se que $\mathfrak{a}_\Theta = \mathfrak{g}(\Theta)^\perp \cap \mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a}(\Theta) = P_\Theta(\mathfrak{a})$.*

Proposição A.28. *Tem-se que*

$$\mathfrak{g}(\Theta) = \mathfrak{k}(\Theta) \oplus \mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{n}(\Theta)^+ \quad (\text{A.57})$$

é a decomposição de Iwasawa associada ao terno $(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta), \mathfrak{a}(\Theta)^+)$, onde

$$\mathfrak{a}(\Theta)^+ = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) > 0, \forall \alpha \in \langle \Theta \rangle^+\} \quad (\text{A.58})$$

é uma câmara de Weyl associada ao par $(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta))$. Além disso,

$$\Pi(\Theta)^+ = \{\alpha_\Theta \in \Pi(\Theta) : \alpha \in \langle \Theta \rangle^+\} \quad (\text{A.59})$$

é o conjunto das raízes positivas associada à $\mathfrak{a}(\Theta)^+$ e

$$\Sigma(\Theta) = \{\alpha_\Theta \in \Pi(\Theta)^+ : \alpha \in \Theta\} \quad (\text{A.60})$$

é o sistema simples de raízes associado à $\mathfrak{a}(\Theta)^+$.

Demonstração. Por definição, as câmaras de Weyl associadas ao par $(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta))$ são as componentes conexas de $\{H \in \mathfrak{a}(\Theta) : \alpha_\Theta(H) \neq 0, \forall \alpha_\Theta \in \Pi(\Theta)\}$. Como $\mathfrak{a}(\Theta) = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{a}$ e $\Pi(\Theta) = \{\alpha|_{\mathfrak{a}(\Theta)} : \alpha \in \langle \Theta \rangle\}$, estas câmaras de Weyl são as componentes conexas de $\mathfrak{g}(\Theta) \cap \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) \neq 0, \forall \alpha \in \langle \Theta \rangle\}$. Como $\mathfrak{a}(\Theta)^+$ é conexo e $\alpha(H) \neq 0$, para todo $H \in \mathfrak{a}(\Theta)^+$ e toda raiz $\alpha \in \langle \Theta \rangle$, tem-se que $\mathfrak{a}(\Theta)^+$ está contida numa câmara de Weyl \mathfrak{c} associada ao par $(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta))$. Se $Z \in \mathfrak{c}/\mathfrak{a}(\Theta)^+$, então existe $\alpha \in \langle \Theta \rangle^+$ tal que $\alpha(Z) < 0$. Para todo $H \in \mathfrak{a}(\Theta)^+$, tem-se que $\alpha(H) > 0$ e, portanto, $0 = \alpha(\alpha(H)Z - \alpha(Z)H) \in \mathfrak{c}$, pois as câmaras de Weyl associadas ao par $(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta))$ são cones convexos em $\mathfrak{a}(\Theta)$ (c.f. Seção 9.2 do Capítulo 9 de [38]). Isto mostra que $\mathfrak{a}(\Theta)^+ = \mathfrak{c}$ é uma câmara de Weyl associada ao par $(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta))$. \square

O grupo de Weyl algébrico $w(\theta, \mathfrak{a})$ associado ao par (θ, \mathfrak{a}) é por definição o grupo gerado pelo conjunto $\{r_\alpha : \alpha \in \Pi\}$, das reflexões em torno das raízes do sistema Π . O grupo de Weyl analítico associado ao par (θ, \mathfrak{a}) é, por definição, o grupo

$$W(\theta, \mathfrak{a}) = \{Ad(k)|_{\mathfrak{a}} : k \in M^*\}, \quad (\text{A.61})$$

onde

$$M^* = \{k \in K : \text{Ad}(k)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\} \quad (\text{A.62})$$

é o normalizador $N_K(\mathfrak{a})$ de \mathfrak{a} em K . O Teorema B.63 garante que os grupos de Weyl algébrico e analítico são idênticos e serão, de agora em diante, denotados por W .

Um subgrupo W_Θ de W é denominado *parabólico de tipo* Θ , onde $\Theta \subset \Sigma$, quando é gerado pelo conjunto de reflexões $\{r_\alpha : \alpha \in \Theta\}$. O subgrupo de isotropia de $H \in \mathfrak{a}$ pelo grupo de Weyl algébrico é definido por $W_H = \{w \in W : wH = H\}$ e o anulador de H em Σ é definido como $\Theta(H) = \{\alpha \in \Sigma : \alpha(H) = 0\}$.

Proposição A.29. *Se $H \in \mathfrak{a}$, então o subgrupo de isotropia W_H é parabólico de tipo $\Theta(H)$.*

Demonstração. Proposição 9.20 de [38]. □

Corolário A.30. *O centralizador $W_{\mathfrak{a}_\Theta}$ de \mathfrak{a}_Θ no grupo de Weyl é o subgrupo parabólico W_Θ . Além disso, $\alpha|_{\mathfrak{a}_\Theta} = 0$ se, e somente se, $\alpha \in \langle \Theta \rangle$.*

Demonstração. Tem-se que $\alpha|_{\mathfrak{a}_\Theta} = 0$ se e só se $H_\alpha \in \mathfrak{a}(\Theta)$ e também que $H_\alpha \in \mathfrak{a}(\Theta)$ se e só se $\alpha \in \langle \Theta \rangle$. O centralizador de \mathfrak{a}_Θ em W é dado por

$$W_{\mathfrak{a}_\Theta} = \bigcap_{H \in \mathfrak{a}_\Theta} W_H, \quad (\text{A.63})$$

onde W_H é o grupo de isotropia de $H \in \mathfrak{a}_\Theta$. Portanto, pela Proposição A.29, $W_{\mathfrak{a}_\Theta}$ é gerado por $\{r_\alpha : \alpha \in \Sigma \text{ e } \alpha|_{\mathfrak{a}_\Theta} = 0\}$. Pela primeira parte da demonstração, $W_{\mathfrak{a}_\Theta}$ é gerado por $\{r_\alpha : \alpha \in \Theta\}$ e, portanto, $W_{\mathfrak{a}_\Theta}$ é igual a W_Θ . □

Proposição A.31. *O grupo de Weyl $W(\Theta)$ associado ao par $(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta))$, das reflexões em torno das raízes do sistema $\Pi(\Theta)$, é o grupo gerado pelo conjunto*

$$\{r_{\alpha_\Theta} = r_\alpha|_{\mathfrak{a}(\Theta)} : r_\alpha \in W_\Theta\}. \quad (\text{A.64})$$

Em particular, $W(\Theta)$ é isomorfo a W_Θ .

Demonstração. Pelas definições, para todo $H \in \mathfrak{a}(\Theta)$ e $\alpha \in \langle \Theta \rangle$,

$$r_{\alpha_\Theta}(H) = H - 2 \frac{\alpha_\Theta(H)}{\alpha_\Theta(H_\alpha)} H_\alpha = H - 2 \frac{\alpha(H)}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha = r_\alpha|_{\mathfrak{a}(\Theta)}(H). \quad (\text{A.65})$$

O resultado segue do Corolário A.30. □

Proposição A.32. *O centralizador de $H \in \mathfrak{a}$ é o centralizador de $\mathfrak{a}_{\Theta(H)}$.*

Demonstração. Claramente $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}_{\Theta(H)}) \subset \mathfrak{z}(H)$, pois $H \in \mathfrak{a}_{\Theta(H)}$. Por outro lado, seja Y em $\mathfrak{z}(H)$. Pela decomposição em espaços de raízes,

$$Y = X + Z + \sum_{\alpha \in \Pi} X_\alpha \quad (\text{A.66})$$

onde, $Z \in \mathfrak{a}$, $X \in \mathfrak{m}$ e $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. Logo

$$0 = [Y, H] = \sum_{\alpha \in \Pi} \alpha(H) X_\alpha \quad (\text{A.67})$$

e, portanto, $X_\alpha = 0$, para todo $\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta(H) \rangle$. Então, se $\widehat{H} \in \mathfrak{a}_{\Theta(H)}$, tem-se que

$$[\widehat{H}, Y] = \sum_{\alpha \in \langle \Theta(H) \rangle} \alpha(\widehat{H}) X_\alpha = 0, \quad (\text{A.68})$$

mostrando que $Y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{a}_{\Theta(H)})$, o que conclui a demonstração. \square

Sejam $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$ uma quadra admissível de \mathfrak{g} e G um grupo de Lie conexo cuja álgebra de Lie é \mathfrak{g} . O subgrupo semi-simples $G(\Theta)$ de tipo Θ de G associado a essa quadra é o subgrupo conexo gerado por $\exp(\mathfrak{g}(\Theta))$.

Proposição A.33. *Sejam $K(\Theta)$, $A(\Theta)$ e $N(\Theta)$ as componentes da decomposição de Iwasawa global de $G(\Theta)$ associada ao terno $(\theta_\Theta, \mathfrak{a}(\Theta), \mathfrak{a}(\Theta)^+)$, tem-se que $K(\Theta)$ é o subgrupo conexo gerado por $\exp(\mathfrak{k}(\Theta))$, $A(\Theta) = \exp(\mathfrak{a}(\Theta))$ e $N(\Theta) = \exp(\mathfrak{n}(\Theta))$.*

A.2.3 Subálgebras e Subgrupos Parabólicos

Seja $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$ uma quadra admissível da álgebra semi-simples real \mathfrak{g} . A subálgebra parabólica de tipo Θ associada a essa quadra é definida por

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta), \quad (\text{A.69})$$

onde $\mathfrak{n}^-(\Theta)$ é definida pela equação (A.47) e

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \quad (\text{A.70})$$

é a subálgebra parabólica minimal de \mathfrak{g} associada ao terno $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$. O conjunto das subálgebras parabólicas associado ao terno $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ é o conjunto $\{\mathfrak{p}_\Theta : \Theta \subset \Sigma\}$. A proposição seguinte mostra que as subálgebras parabólicas são de fato subálgebras.

Proposição A.34. *Para todo $\Theta \subset \Sigma$, tem-se que*

- 1) $[\mathfrak{a}, \mathfrak{n}^\pm(\Theta)] \subset \mathfrak{n}^\pm(\Theta)$,
- 2) $[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}^\pm(\Theta)] \subset \mathfrak{n}^\pm(\Theta)$ e
- 3) $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^-(\Theta)] \subset \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta)$.

Demonstração. A demonstração é consequência direta da Proposição B.50. \square

Teorema A.35. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie semi-simples real. Então o conjunto das subálgebras parabólicas é único a menos de conjugação por automorfismo interno. Além disso, se ϕ é um automorfismo da álgebra e \mathfrak{p}_Θ é a subálgebra parabólica de tipo Θ associada ao terno $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$, então $\phi\mathfrak{p}_\Theta$ é a subálgebra parabólica de tipo $\phi^*\Theta$ associada ao terno $(\phi\theta\phi^{-1}, \phi\mathfrak{a}, \phi\mathfrak{a}^+)$.*

Demonstração. A demonstração é consequência direta dos Teoremas A.12 e A.19 e da definição (A.69). \square

Denota-se por \mathfrak{k}_Θ o centralizador de \mathfrak{a}_Θ em \mathfrak{k} , onde $\Theta \subset \Sigma$ e $\mathfrak{a}_\Theta = \mathfrak{a} \ominus \mathfrak{a}(\Theta)$ é o complemento $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonal de $\mathfrak{a}(\Theta)$ em \mathfrak{a} .

Teorema A.36. *Seja $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$ uma quadra admissível da álgebra semi-simples real \mathfrak{g} . Então*

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}. \quad (\text{A.71})$$

Demonstração. Se $\alpha \in \langle \Theta \rangle^+$ e $X \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, então $X = X + \theta X - \theta X = 2\kappa(X) - \theta X$, onde $\kappa : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{k}$ é definida pela equação (A.7). Pelo Lema A.14, $\theta X \in \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{n}$. Além disso,

$$\text{ad}(H)(X + \theta X) = -\alpha(H)X + \alpha(H)\theta X = 0, \quad (\text{A.72})$$

para todo $H \in \mathfrak{a}_\Theta$. Isto mostra que, $X + \theta X = 2\kappa(X)$ pertence a \mathfrak{k}_Θ . Logo $X \in \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, o que mostra que $\mathfrak{p}_\Theta \subset \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Reciprocamente, seja $Y \in \mathfrak{k}_\Theta$. Pela Proposição A.17, $Y = X + \theta X + Z = 2\kappa(X) + Z$, onde $Z \in \mathfrak{m}$ e $X = \sum_{\alpha \in \Pi^+} X_\alpha$ pertence a \mathfrak{n} , com $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. Logo

$$\text{ad}(H)X + \text{ad}(H)\theta X = \text{ad}(H)(Y) = 0, \quad (\text{A.73})$$

para todo $H \in \mathfrak{a}_\Theta$. Portanto

$$\sum_{\alpha \in \Pi^+} \alpha(H)X_\alpha - \sum_{\alpha \in \Pi^+} \alpha(H)\theta X_\alpha = \text{ad}(H)X + \text{ad}(H)\theta X = 0, \quad (\text{A.74})$$

o que implica que $\alpha(H)X_\alpha = 0$, para todo $H \in \mathfrak{a}_\Theta$ e todo $\alpha \in \Pi^+$. Pelo Corolário A.30, tem-se que $\alpha|_{\mathfrak{a}_\Theta} = 0$ se, e somente se, $\alpha \in \langle \Theta \rangle$, o que mostra que $X_\alpha = 0$, se $\alpha \notin \langle \Theta \rangle$. Logo $X = \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} X_\alpha$ pertence a $\mathfrak{n}(\Theta)$ e, portanto, $Y = X + \theta X + Z \in \mathfrak{p}_\Theta$, o que mostra que $\mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \subset \mathfrak{p}_\Theta$ e conclui a demonstração do teorema. \square

A decomposição $\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é denominada *decomposição de Iwasawa de \mathfrak{p}_Θ* . A decomposição de Iwasawa da subálgebra parabólica minimal é $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, pois $\mathfrak{a}_\emptyset = \mathfrak{a}$ e, portanto, $\mathfrak{k}_\emptyset = \mathfrak{m}$.

Sejam G um grupo conexo com álgebra de Lie \mathfrak{g} , $G = KAN$ a sua decomposição de Iwasawa global associada ao terno $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$,

$$M = \{k \in K : \text{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}} = \text{id}_{\mathfrak{a}}\}, \quad (\text{A.75})$$

o centralizador $Z_K(\mathfrak{a})$ de \mathfrak{a} em K e

$$K_\Theta = \{k \in K : \text{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}_\Theta} = \text{id}_{\mathfrak{a}_\Theta}\}, \quad (\text{A.76})$$

o centralizador $Z_K(\mathfrak{a}_\Theta)$ de \mathfrak{a}_Θ em K . Como $\mathfrak{a}_\emptyset = \mathfrak{a}$, tem-se que $M = K_\emptyset$.

Lema A.37. *$\text{Ad}(K_\Theta)$ e $\text{Ad}((K_\Theta)_0)$ são subgrupos compactos de $GL(\mathfrak{g})$ de transformações lineares $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonais.*

Demonstração. Tem-se que $\text{Ad}(K_\Theta)$ é a interseção do subgrupo $\text{Ad}(K)$ com o subgrupo fechado $GL(\mathfrak{g})_\Theta = \{T \in GL(\mathfrak{g}) : T|_{\mathfrak{a}_\Theta} = \text{id}_{\mathfrak{a}_\Theta}\}$. Como pela Proposição A.7 $\text{Ad}(K)$ é um subgrupo compacto de transformações lineares $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonais, tem-se que $\text{Ad}(K_\Theta)$ e também $\text{Ad}((K_\Theta)_0)$, a sua componente da identidade, são subgrupos compactos de transformações lineares $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonais. \square

Teorema A.38. *Seja $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$ uma quadra admissível de uma álgebra de Lie semi-simples real \mathfrak{g} . Se $(\theta, \bar{\mathfrak{a}})$ é outro par admissível tal que $\mathfrak{a}_\Theta \subset \bar{\mathfrak{a}}$, então existe um automorfismo interno ψ da subálgebra \mathfrak{k}_Θ em \mathfrak{g} tal que $\psi\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$.*

Demonstração. O grupo $\text{Int}(\mathfrak{k}_\Theta)$ dos automorfismos internos de \mathfrak{k}_Θ em \mathfrak{g} é o grupo conexo gerado por $e^{\text{ad}(\mathfrak{m}(\Theta))}$ e é igual a $\text{Ad}((K_\Theta)_0)$. Pelo Lema A.37, $\text{Int}(\mathfrak{k}_\Theta)$ é compacto. Sejam $H \in \mathfrak{a}$ e $Z \in \bar{\mathfrak{a}}$ elementos regulares. Define-se a aplicação diferenciável $F : \text{Int}(\mathfrak{k}_\Theta) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $F(\phi) = \langle \phi Z, H \rangle_\theta$. Pela compacidade de $\text{Int}(\mathfrak{k}_\Theta)$, existe $\psi \in \text{Int}(\mathfrak{k}_\Theta)$ um ponto de mínimo da aplicação F . Agora será mostrado que $[H, \psi Z] = 0$.

Para cada $X \in \mathfrak{k}_\Theta$, define-se a função diferenciável $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pela expressão $f_X(t) = F(e^{t\text{ad}(X)}\psi)$ e tem-se que $t = 0$ é um ponto de mínimo da função f_X . Pela Proposição A.4, $\text{ad}(X)$ é $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -anti-simétrica e, portanto, $e^{t\text{ad}(X)}$ é uma transformação $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonal. Logo $f_X(t) = \langle \psi Z, e^{-t\text{ad}(X)}H \rangle_\theta$ e calculando a derivada de f_X no ponto de mínimo $t = 0$, tem-se que $\langle \psi Z, [X, H] \rangle_\theta = 0$. Como $\text{ad}(H)$ é $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -simétrica e X é arbitrário,

$$\langle [H, \psi Z], X \rangle_\theta = 0, \quad (\text{A.77})$$

para todo $X \in \mathfrak{k}_\Theta$. Pelo Lema A.1, tem-se que $\psi Z \in \mathfrak{s}$ e, pelas relações (A.9), que $[H, \psi Z] \in \mathfrak{k}$. Além disso, como $\mathfrak{a}_\Theta \subset \mathfrak{a} \cap \bar{\mathfrak{a}}$, para todo $Y \in \mathfrak{a}_\Theta$,

$$[Y, [H, \psi Z]] = [[Y, H], \psi Z] + [H, [Y, \psi Z]] = [H, [\psi Y, \psi Z]] = [H, \psi[Y, Z]] = 0, \quad (\text{A.78})$$

o que mostra que $[H, \psi Z] \in \mathfrak{k}_\Theta$. Pela equação (A.77), tem-se que $[H, \psi Z] = 0$.

Como ψ é automorfismo interno, tem-se que $\psi\bar{\mathfrak{a}}$ é abeliana maximal e ψZ é elemento regular em $\psi\bar{\mathfrak{a}}$. Pela maximalidade de \mathfrak{a} e $\psi\bar{\mathfrak{a}}$, tem-se que $\psi Z \in \mathfrak{a}$ e $H \in \psi\bar{\mathfrak{a}}$. Logo \mathfrak{a} está contido no centralizador de ψZ em \mathfrak{s} , que é $\psi\bar{\mathfrak{a}}$, e $\psi\bar{\mathfrak{a}}$ está contido no centralizador de H em \mathfrak{s} , que é \mathfrak{a} . Isto mostra que $\psi\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$ e conclui a demonstração do teorema. \square

Lema A.39. *Seja $\mathfrak{g}(\Theta)$ a subálgebra semi-simples de tipo Θ associada à quadra $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+, \Theta)$. Então $\mathfrak{k}(\Theta) = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}_\Theta$.*

Demonstração. Pelo Proposição A.25, $\mathfrak{g}(\Theta)$ e, portanto, $\mathfrak{k}(\Theta)$ centralizam \mathfrak{a}_Θ , o que implica que $\mathfrak{k}(\Theta) \subset \mathfrak{k}_\Theta$. Uma demonstração alternativa é a seguinte. Como $\mathfrak{n}(\Theta) + \mathfrak{n}^-(\Theta) \subset \mathfrak{p}_\Theta$, então $\mathfrak{g}(\Theta) \subset \mathfrak{p}_\Theta$ e, portanto, pela decomposição de Iwasawa de \mathfrak{p}_Θ , tem-se que $\mathfrak{k}(\Theta)$ está contido em $\mathfrak{p}_\Theta \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{k}_\Theta$. \square

Proposição A.40. *Tem-se que $K_\Theta = (K_\Theta)_0 M$, onde $(K_\Theta)_0$ é a componente da identidade de K_Θ .*

Demonstração. Sejam $k \in K_\Theta$ e $\bar{\mathfrak{a}} = \text{Ad}(k)\mathfrak{a}$. Como $\mathfrak{a}_\Theta \subset \bar{\mathfrak{a}}$, pelo Teorema A.38, existe $l \in (K_\Theta)_0$ tal que $\text{Ad}(lk)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. Como $\text{Ad}(lk)|_{\mathfrak{a}_\Theta} = \text{id}_{\mathfrak{a}_\Theta}$ e $\text{Ad}(lk)$ é uma transformação linear $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonal, tem-se que $\text{Ad}(lk)\mathfrak{a}(\Theta) = \mathfrak{a}(\Theta) \subset \mathfrak{s}(\Theta)$. Pela Proposição A.31, $\text{Ad}(lk)|_{\mathfrak{a}(\Theta)} \in W(\Theta)$ e, portanto, existe $w \in K(\Theta)$ tal que

$$\text{Ad}(wlk)|_{\mathfrak{a}(\Theta)} = \text{Ad}(w)|_{\mathfrak{a}(\Theta)}\text{Ad}(lk)|_{\mathfrak{a}(\Theta)} = \text{id}_{\mathfrak{a}(\Theta)}. \quad (\text{A.79})$$

Pelos Lema A.39 e Proposição A.33, $K(\Theta) \subset (K_\Theta)_0$. Logo tem-se que $wl \in (K_\Theta)_0$ e $\text{Ad}(wlk)|_{\mathfrak{a}} = \text{id}_{\mathfrak{a}}$ e, portanto, $k = (wl)^{-1}wlk \in (K_\Theta)_0M$. Como $M \subset K_\Theta$, isto mostra que $K_\Theta = (K_\Theta)_0M$ e conclui a demonstração da proposição. \square

Lema A.41. *Se $H \in \text{reg}(\mathfrak{a})$, então a aplicação $\phi_H : N \rightarrow \mathfrak{n}$, definida por $\phi_H(n) = \text{Ad}(n)H - H$, é um difeomorfismo. Em particular, se $h = \exp(H) \in \text{reg}(A)$ a aplicação $\varphi_h : N \rightarrow N$, definida por $\varphi_h(n) = nhn^{-1}h^{-1}$, também é um difeomorfismo.*

Demonstração. A aplicação ϕ_H é um difeomorfismo pelo Lema 1.5 do Capítulo IX em [15]. Pelo Teorema A.20, a aplicação $\exp : \mathfrak{n} \rightarrow N$ é um difeomorfismo, concluindo-se a demonstração. \square

Lema A.42. *Tem-se que $(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}) \cap \mathfrak{s} = \mathfrak{a}$.*

Demonstração. Se $H + Y \in \mathfrak{s}$, onde $H \in \mathfrak{a}$ e $Y \in \mathfrak{n}$, então

$$-H - Y = \theta(H + Y) = -H + \theta Y \quad (\text{A.80})$$

e, pelo Teorema B.49, tem-se que $Y = 0$, pois $\theta Y \in \mathfrak{n}^-$. Isto mostra que $(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}) \cap \mathfrak{s} \subset \mathfrak{a}$, sendo direta a recíproca. \square

Proposição A.43. *Seja $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ um terno admissível de \mathfrak{g} . Se $g \in G$ é tal que $\text{Ad}(g)\mathfrak{a}^+ = \mathfrak{a}^+$, então $g \in MA$.*

Demonstração. Sejam $G = KNA$ a decomposição de Iwasawa global associada a $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ e $g = knh$, onde $k \in K$, $n \in N$ e $h \in A$. Logo $\text{Ad}(kn)\mathfrak{a}^+ = \text{Ad}(knh)\mathfrak{a}^+ = \mathfrak{a}^+$, pois $\text{Ad}(h)|_{\mathfrak{a}} = \text{id}_{\mathfrak{a}}$. Portanto, utilizando-se o Lema A.42, tem-se que

$$\text{Ad}(n)\mathfrak{a}^+ = \text{Ad}(k^{-1})\mathfrak{a}^+ \in (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}) \cap \mathfrak{s} = \mathfrak{a}, \quad (\text{A.81})$$

uma vez que, pela Proposição A.34, \mathfrak{a} normaliza \mathfrak{n} e, pelas relações (A.9), $[\mathfrak{k}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$. Logo, se $H \in \mathfrak{a}^+$, tem-se que $\text{Ad}(n)H \in \mathfrak{a}$ e, pelo Lema A.41, $\phi_H(n) = \text{Ad}(n)H - H \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{n} = 0$. Como $\phi_H(1) = 0$, segue que $n = 1$. Logo $\text{Ad}(k)\mathfrak{a}^+ = \mathfrak{a}^+$. Como \mathfrak{a} e $\text{Ad}(k)\mathfrak{a}$ são abelianos maximais gerados, respectivamente, pelos abertos \mathfrak{a}^+ e $\text{Ad}(k)\mathfrak{a}^+$, tem-se que $\text{Ad}(k)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. Logo $\text{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}} \in W$ e, pelos Teorema B.63 e Proposição B.60, segue que $\text{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}} = \text{id}_{\mathfrak{a}}$, o que mostra que $k \in M$ e que $g = kh \in MA$. \square

Lema A.44. *Seja $k \in M^*$, onde M^* é o normalizador de \mathfrak{a} em K . Se $\text{Ad}(k)$ permuta as raízes de $\Pi^- - \langle \Theta \rangle^-$, então $k \in K_\Theta$.*

Demonstração. Definindo-se

$$\mathfrak{a}_{\Theta}^{-} = \{H \in \mathfrak{a}_{\Theta} : \alpha(H) < 0, \forall \alpha \in \Pi^{-} - \langle \Theta \rangle^{-}\}, \quad (\text{A.82})$$

tem-se que $\text{Ad}(k)\mathfrak{a}_{\Theta}^{-} = \mathfrak{a}_{\Theta}^{-}$, pois $\text{Ad}(k)$ permuta as raízes de $\Pi^{-} - \langle \Theta \rangle^{-}$. Pelo Corolário B.62, como $\mathfrak{a}_{\Theta}^{-}$ é um cone convexo, existe $H \in \mathfrak{a}_{\Theta}^{-}$ tal que $\text{Ad}(k)H = H$. Pela Proposição A.29, o subgrupo de isotropia W_H é de tipo parabólico $\Theta(H) = \{\alpha \in \Sigma : \alpha(H) = 0\}$. Como $H \in \mathfrak{a}_{\Theta}$, tem-se que $\Theta \subset \Theta(H)$. Reciprocamente, pela definição de $\mathfrak{a}_{\Theta}^{-}$, se $\alpha \in \Theta(H)$, então $-\alpha$ não pertence a $\Pi^{-} - \langle \Theta \rangle^{-}$ e, portanto, tem-se que $\alpha \in \langle \Theta \rangle \cap \Sigma = \Theta$. Isto mostra que $\text{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}} \in W_{\Theta}$. Pelo Corolário A.30, $W_{\Theta} = W_{\mathfrak{a}_{\Theta}}$ e, portanto, $k \in K_{\Theta}$. \square

Seja G um grupo conexo com álgebra de Lie \mathfrak{g} . O subgrupo parabólico P_{Θ} de tipo Θ associado a quadra admissível $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{+}, \Theta)$ é o normalizador $N_G(\mathfrak{p}_{\Theta})$ de \mathfrak{p}_{Θ} em G .

Teorema A.45. *Seja $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{+}, \Theta)$ uma quadra admissível da álgebra semi-simples real \mathfrak{g} . Então*

$$P_{\Theta} = K_{\Theta}AN. \quad (\text{A.83})$$

Em particular, P_{Θ} é auto-normalizador e sua álgebra de Lie é \mathfrak{p}_{Θ} .

Demonstração. Pela decomposição de Iwasawa de p_{Θ} , tem-se que \mathfrak{k}_{Θ} , \mathfrak{a} e \mathfrak{n} normalizam \mathfrak{p}_{Θ} . Logo, pelos Teorema A.20 e Proposição A.9, tem-se que $(K_{\Theta})_0$, A e N estão contidos em P_{Θ} . Como $K_{\Theta} = (K_{\Theta})_0M$, pela Proposição A.40, é suficiente mostrar que $M \subset P_{\Theta}$ para mostrar que $K_{\Theta}AN \subset P_{\Theta}$. Por definição $M = Z_K(\mathfrak{a})$ normaliza \mathfrak{a} e, pelo Teorema A.12, tem-se que M normaliza \mathfrak{n} . Além disso, M normaliza \mathfrak{k}_{Θ} , pois $M \subset K_{\Theta}$. Logo, pela decomposição de Iwasawa de \mathfrak{p}_{Θ} , $M \subset P_{\Theta}$.

Reciprocamente, seja $g \in P_{\Theta}$. Pela decomposição de Iwasawa global, $g = kan$, onde $k \in K$, $a \in A$ e $n \in N$. Pela primeira parte da demonstração,

$$\mathfrak{p}_{\Theta} = \text{Ad}(g)\mathfrak{p}_{\Theta} = \text{Ad}(k)\text{Ad}(an)\mathfrak{p}_{\Theta} = \text{Ad}(k)\mathfrak{p}_{\Theta}. \quad (\text{A.84})$$

Definindo-se $\bar{\mathfrak{a}} = \text{Ad}(k)\mathfrak{a}$, tem-se que $[\bar{\mathfrak{a}}, \mathfrak{a}_{\Theta}] \subset [\mathfrak{p}_{\Theta}, \mathfrak{a}_{\Theta}] \cap \mathfrak{k}$, pois, pelo Lema A.1, $\bar{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{s}$. Portanto, pela decomposição de Iwasawa de \mathfrak{p}_{Θ} , tem-se que $[\bar{\mathfrak{a}}, \mathfrak{a}_{\Theta}] \subset \mathfrak{n} \cap \mathfrak{k} = 0$. Como $\bar{\mathfrak{a}}$ é uma subálgebra abeliana maximal em \mathfrak{s} , segue que $\mathfrak{a}_{\Theta} \subset \bar{\mathfrak{a}}$ e, pelo Teorema A.38, existe $l \in (K_{\Theta})_0$ tal que $\text{Ad}(l)\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$. Logo $\text{Ad}(lk)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, o que implica, pelo Corolário A.13, que $\text{Ad}(lk)(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^{-}) = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^{-}$. Pela primeira parte da demonstração, $\text{Ad}(lk)\mathfrak{p}_{\Theta} = \mathfrak{p}_{\Theta}$, o que mostra que

$$\text{Ad}(lk)(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^{-}(\Theta)) \subset (\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^{-}) \cap \mathfrak{p}_{\Theta} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^{-}(\Theta) \quad (\text{A.85})$$

pois $\mathfrak{p}_{\Theta} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}^{-}(\Theta)$. Por dimensão, $\text{Ad}(lk)(\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^{-}(\Theta)) = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^{-}(\Theta)$, o que implica que $\text{Ad}(lk)$ permuta as raízes de $\Pi^{-} - \langle \Theta \rangle^{-}$. Pelo Lema A.44, tem-se que $lk \in K_{\Theta}$ e, como $l \in (K_{\Theta})_0$, isto mostra que $k \in K_{\Theta}$. Logo $g = kan \in K_{\Theta}AN$, o que implica, pela primeira parte, que $P_{\Theta} = K_{\Theta}AN$. Portanto a álgebra de Lie de P_{Θ} é igual a \mathfrak{p}_{Θ} .

Se $g \in G$ normaliza P_{Θ} , pela equação (A.17), tem-se que $\exp(\text{Ad}(g)X) = g \exp(X)g^{-1} \in P_{\Theta}$ para todo $X \in \mathfrak{p}_{\Theta}$. Como $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ é um difeomorfismo numa vizinhança de $0 \in \mathfrak{g}$, tem-se que $\text{Ad}(g)X \in \mathfrak{p}_{\Theta}$, para todo X numa vizinhança de 0 em \mathfrak{p}_{Θ} . Como $\text{Ad}(g)$ é uma transformação linear, segue que $\text{Ad}(g)\mathfrak{p}_{\Theta} = \mathfrak{p}_{\Theta}$, o que mostra que P_{Θ} é auto-normalizador e conclui a demonstração do teorema. \square

Como $\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta)$, $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(\Theta) \oplus \mathfrak{n}_\Theta$ e $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{a}_\Theta$, tem-se que

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{m}_\Theta \oplus \mathfrak{a}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta, \quad (\text{A.86})$$

denominada *decomposição de Langland da subálgebra parabólica de tipo Θ* , onde

$$\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{n}(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta) \quad (\text{A.87})$$

e

$$\mathfrak{n}_\Theta = \sum_{\alpha \in \Pi^+ - \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha. \quad (\text{A.88})$$

Proposição A.46. *Tem-se que \mathfrak{n}_Θ é subálgebra e $\mathfrak{a}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta$ é ideal em \mathfrak{p}_Θ . Além disso,*

$$\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{g}(\Theta) \oplus \mathfrak{z}_\mathfrak{m}(\mathfrak{g}(\Theta)) \quad (\text{A.89})$$

é soma direta $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonal de ideais de \mathfrak{m}_Θ . Em particular, tem-se que

$$\mathfrak{l}_\Theta = \mathfrak{z}_\mathfrak{m}(\mathfrak{g}(\Theta)) \oplus \mathfrak{a}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta \quad (\text{A.90})$$

é um ideal de \mathfrak{p}_Θ .

Demonstração. Pela Proposição B.50, tem-se que \mathfrak{n}_Θ é subálgebra e \mathfrak{a}_Θ normaliza \mathfrak{n}_Θ , mostrando que $\mathfrak{a}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta$ também é subálgebra. Se $\alpha \in \langle \Theta \rangle$ e $\beta \in \Pi^+ - \langle \Theta \rangle^+$, então $\alpha + \beta \neq 0$ e, portanto, ou $\alpha + \beta \in \Pi - \langle \Theta \rangle$ ou $\alpha + \beta$ não é raiz. Novamente, utilizando-se a Proposição B.50, tem-se que

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \subset \mathfrak{n}_\Theta, \quad (\text{A.91})$$

o que mostra que $\mathfrak{n}(\Theta) + \mathfrak{n}^-(\Theta)$, \mathfrak{m} e $\mathfrak{a}(\Theta)$ normalizam \mathfrak{n}_Θ . Logo $\mathfrak{a}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta$ é um ideal em \mathfrak{p}_Θ .

Pela Proposição A.34, \mathfrak{m} normaliza $\mathfrak{g}(\Theta)$, pois normaliza seu gerador, $\mathfrak{n}(\Theta) + \mathfrak{n}^-(\Theta)$. Como $\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m} + \mathfrak{g}(\Theta)$, segue que $\mathfrak{g}(\Theta)$ é um ideal em \mathfrak{m}_Θ .

O complemento $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonal $\mathfrak{g}(\Theta)^\perp$ de $\mathfrak{g}(\Theta)$ em \mathfrak{m}_Θ está contido em \mathfrak{m} , pois \mathfrak{m} é complemento $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonal de

$$\mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{n}(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta) \subset \mathfrak{g}(\Theta). \quad (\text{A.92})$$

Tem-se que $\mathfrak{g}(\Theta)^\perp$ também é um ideal em \mathfrak{m}_Θ , pois, pela decomposição em espaço de raízes, se $X \in \mathfrak{g}(\Theta)$, $Y \in \mathfrak{g}(\Theta)^\perp$ e $Z \in \mathfrak{m}_\Theta$, então

$$\langle [Z, Y], X \rangle_\theta = -\langle [Z, Y], \theta X \rangle = \langle Y, [Z, \theta X] \rangle = 0 \quad (\text{A.93})$$

desde que $\mathfrak{g}(\Theta)$ é θ -estável e um ideal de \mathfrak{m}_Θ .

Portanto, $\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{g}(\Theta)^\perp \oplus \mathfrak{g}(\Theta)$ é soma direta $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonal de ideais. Além disso,

$$[\mathfrak{g}(\Theta), \mathfrak{g}(\Theta)^\perp] \subset \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{g}(\Theta)^\perp = 0 \quad (\text{A.94})$$

e, portanto, $\mathfrak{g}(\Theta)^\perp \subset \mathfrak{z}_{\mathfrak{m}_\Theta}(\mathfrak{g}(\Theta))$. Por outro lado, se $X + Y \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{m}_\Theta}(\mathfrak{g}(\Theta))$, onde $X \in \mathfrak{g}(\Theta)$ e $Y \in \mathfrak{g}(\Theta)^\perp$, então $[X, Z] = [X + Y, Z] = 0$, para todo $Z \in \mathfrak{g}(\Theta)$, o que mostra que $X \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}(\Theta)}(\mathfrak{g}(\Theta)) = 0$, pois $\mathfrak{g}(\Theta)$ é semi-simples. Logo $\mathfrak{g}(\Theta)^\perp = \mathfrak{z}_{\mathfrak{m}_\Theta}(\mathfrak{g}(\Theta)) \subset \mathfrak{m}$ e, portanto, tem-se que $\mathfrak{z}_{\mathfrak{m}_\Theta}(\mathfrak{g}(\Theta)) = \mathfrak{z}_\mathfrak{m}(\mathfrak{g}(\Theta))$, o que conclui a demonstração do lema. \square

Apêndice B

Sistema de Raízes e Grupo de Weyl

B.1 Decomposição em Espaços de Raízes

Uma *representação de \mathfrak{g} num espaço vetorial V de dimensão finita* é um homomorfismo ρ entre as álgebras de Lie \mathfrak{g} e $gl(V)$, das transformações lineares de V tendo como colchete de Lie o comutador. Um subespaço de V é *invariante por ρ* se é invariante pela família $\rho(\mathfrak{g})$. Uma subespaço invariante W é *irredutível por ρ* , se os únicos subespaços de W invariantes por ρ são os triviais $\{0\}$ e W . A representação é *completamente redutível*, se o espaço V se decompõe na soma direta

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n, \quad (\text{B.1})$$

onde, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, V_i é invariante e irredutível por ρ . Um subespaço W de V invariante por ρ *admite um complementar invariante por ρ* se existe um subespaço W' de V invariante por ρ tal que $V = W \oplus W'$.

Proposição B.47. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow gl(V)$ uma representação de \mathfrak{g} em V . Então ρ é completamente redutível se, e somente se, todo subespaço invariante por ρ admite um complementar invariante ρ .*

Demonstração. Proposição 1.7 de [38]. □

Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em V , uma família de transformações lineares de V é *auto-adjunta em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$* , se a adjunta, em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, de qualquer transformação da família permanece na família. Uma representação ρ de \mathfrak{g} em V é *auto-adjunta em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$* se a família $\rho(\mathfrak{g})$ é auto-adjunta em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Lema B.48. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e ρ uma representação de \mathfrak{g} em V . Se ρ é auto-adjunta em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então ρ é completamente redutível.*

Demonstração. Seja W um subespaço de V invariante por ρ . Pela Proposição B.47, é suficiente mostrar que o subespaço W^\perp ortogonal a W em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é também invariante

por ρ . Sejam $X \in \mathfrak{g}$, $v \in W$ e $w \in W^\perp$. Como ρ é auto-adjunta em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$,

$$\langle \rho(X)w, v \rangle = \langle w, \rho(X)^*v \rangle = 0, \quad (\text{B.2})$$

onde $\rho(X)^*$ é a adjunta de $\rho(X)$ em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, o que mostra que W^\perp é invariante por ρ . \square

Seja (θ, \mathfrak{a}) um par admissível da álgebra \mathfrak{g} , como definido na Seção A.1. Para cada funcional linear $\alpha \in \mathfrak{a}^*$, onde \mathfrak{a}^* é o dual de \mathfrak{a} , defini-se o subespaço

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \text{ad}(H)X = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{a}\}. \quad (\text{B.3})$$

Se $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$, ele é denominado *espaço associado à raiz α* e o *conjunto das raízes* associadas ao par (θ, \mathfrak{a}) é definido como

$$\Pi = \{\alpha \in \mathfrak{a}^* \setminus 0 : \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}. \quad (\text{B.4})$$

O próximo teorema fornece as decomposições em espaços de raízes de uma álgebra de Lie real semi-simples.

Teorema B.49. *Seja (θ, \mathfrak{a}) um par admissível da álgebra \mathfrak{g} . Então $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$ e*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha, \quad (\text{B.5})$$

é soma direta $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonal, onde \mathfrak{m} é o centralizador de \mathfrak{a} em \mathfrak{k} . Em particular, o conjunto das raízes Π é finito.

Demonstração. Pela Proposição A.4, para todo $H \in \mathfrak{a}$, $\text{ad}(H) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ é simétrica em relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$. Logo a representação ad de \mathfrak{a} em \mathfrak{g} é auto-ajunta em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ o que, pelo Lema B.48, implica que ad é completamente redutível e portanto \mathfrak{g} se decompõe na soma direta

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n, \quad (\text{B.6})$$

onde, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, \mathfrak{g}_i é invariante e irredutível por ad . Pelo Teorema Espectral, para todo $H \in \mathfrak{a}$, $\text{ad}(H)$ é diagonalizável, seus auto-valores são todos reais e auto-vetores associados a auto-valores distintos são $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonais. Portanto \mathfrak{g} pode ser escrita como soma direta $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonal dos auto-espaços associados aos auto-valores reais de $\text{ad}(H)$. Como \mathfrak{a} é abeliana, para cada $H \in \mathfrak{a}$, os auto-espaços de $\text{ad}(H)$ são invariantes pela representação ad , pois se X é um auto-vetor associado ao auto-valor $\alpha(H)$ de $\text{ad}(H)$ e $Z \in \mathfrak{a}$, então

$$\text{ad}(H)\text{ad}(Z)X = \text{ad}(Z)\text{ad}(H)X = \text{ad}(Z)\alpha(H)X = \alpha(H)\text{ad}(Z)X. \quad (\text{B.7})$$

Como \mathfrak{g}_i é invariante por $\text{ad}(H)$, \mathfrak{g}_i é uma soma direta dos auto-espaços de $\text{ad}(H)$ interceptados por \mathfrak{g}_i . Por outro lado, como a representação ad é irredutível em \mathfrak{g}_i , existe $\alpha_i(H)$

auto-valor de $\text{ad}(H)$ tal que \mathfrak{g}_i está contido no auto-espaço associado a $\alpha_i(H)$. A aplicação $\alpha_i : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear, pois se $H, Z \in \mathfrak{a}$, $a \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathfrak{g}_i$ é um vetor não-nulo, então

$$\alpha_i(H + Z)X = \text{ad}(H + Z)X = \text{ad}(H)X + \text{ad}(Z)X = (\alpha_i(H) + \alpha_i(Z))X \quad (\text{B.8})$$

e

$$\alpha_i(aH)X = \text{ad}(aH)X = a(\text{ad}(H)X) = (a\alpha_i(H))X. \quad (\text{B.9})$$

Tem-se então que $\alpha_i \in \Pi \cup 0$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Reciprocamente, se $\alpha \in \Pi \cup 0$, existe $0 \neq X \in \mathfrak{g}_\alpha$. Então $X = \sum_i X_i$, onde $X_i \in \mathfrak{g}_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Logo, para todo $H \in \mathfrak{a}$, tem-se que

$$\sum_i \alpha(H)X_i = \alpha(H)X = \text{ad}(H)X = \sum_i \alpha_i(H)X_i. \quad (\text{B.10})$$

Como $X \neq 0$, existe $X_i \neq 0$, de modo que $\alpha(H) = \alpha_i(H)$, para todo $H \in \mathfrak{a}$. Portanto $\alpha = \alpha_i$ e

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha, \quad (\text{B.11})$$

onde $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$. Pela Proposição A.10, tem-se que $\mathfrak{z}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$ é uma soma direta ortogonal em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$, o que conclui a demonstração do teorema. \square

A decomposição (B.5) é denominada *decomposição em espaço de raízes de \mathfrak{g}* associada ao par (θ, \mathfrak{a}) .

Proposição B.50. *Se $\alpha, \beta \in \Pi \cup 0$, então $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.*

Demonstração. Sejam $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{g}_\beta$. Para todo $H \in \mathfrak{a}$,

$$\text{ad}(H)[X, Y] = [\text{ad}(H)X, Y] + [X, \text{ad}(H)Y] = (\alpha(H) + \beta(H))[X, Y]. \quad (\text{B.12})$$

\square

B.2 Sistema de Raízes e Grupo de Weyl

Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie semi-simples real \mathfrak{g} . Dado um par admissível (θ, \mathfrak{a}) da álgebra \mathfrak{g} , como definido na Seção A.1, seja K o subgrupo de Lie conexo gerado por $\exp(\mathfrak{k})$ e sejam

$$M^* = \{k \in K : \text{Ad}(k)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}, \quad (\text{B.13})$$

o normalizador $N_K(\mathfrak{a})$ de \mathfrak{a} em K , e

$$M = \{k \in K : \text{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}} = \text{id}_{\mathfrak{a}}\}, \quad (\text{B.14})$$

o centralizador $Z_K(\mathfrak{a})$ de \mathfrak{a} em K . O grupo de Weyl analítico associado ao par (θ, \mathfrak{a}) é, por definição, o grupo

$$W(\theta, \mathfrak{a}) = \{\text{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}} : k \in M^*\} \quad (\text{B.15})$$

e, como mostra a proposição seguinte, ele é um subgrupo das permutações de Π .

Lema B.51. *Se $w \in W(\theta, \mathfrak{a})$, então $w^*(\Pi) = \{w^*(\alpha) : \alpha \in \Pi\} = \Pi$, onde $w^*(\alpha) = \alpha \circ w^{-1}$. Além disso, w é uma transformação linear $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonal.*

Demonstração. Se $w \in W(\theta, \mathfrak{a})$, então existe $k \in M^*$ tal que $w = \text{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}}$. Mas $\psi = \text{Ad}(k)$ é um automorfismo interno da álgebra \mathfrak{k} e $\psi\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. Pelao Corolário A.13, $w^*(\Pi) = \psi^*\Pi = \Pi$. Pela Proposição A.7, ψ é $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonal, o que implica que $w = \psi|_{\mathfrak{a}}$ seja $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonal. \square

Seja Π o conjunto das raízes do par (θ, \mathfrak{a}) . Para cada raíz $\alpha \in \Pi$, sua co-raíz em \mathfrak{a} é definida por $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ tal que

$$\langle H_\alpha, H \rangle_\theta = \alpha(H), \quad (\text{B.16})$$

para todo $H \in \alpha$. A seguir, mostra-se que o grupo de Weyl analítico é um subgrupo das permutações do conjunto das co-raízes $\Pi_{\mathfrak{a}} = \{H_\alpha : \alpha \in \Pi\}$.

Lema B.52. *Se $w \in W(\theta, \mathfrak{a})$ e $\alpha \in \Pi$, então $w(H_\alpha) = H_{w^*(\alpha)}$. Em particular, $w(\Pi_{\mathfrak{a}}) = \Pi_{\mathfrak{a}}$.*

Demonstração. Se $w \in W(\theta, \mathfrak{a})$ e $\alpha \in \Pi$, então

$$\langle wH_\alpha, H \rangle_\theta = \langle H_\alpha, w^{-1}H \rangle_\theta = \alpha(w^{-1}H) = w^*(\alpha)(H), \quad (\text{B.17})$$

o que implica que $w(H_\alpha) = H_{w^*(\alpha)}$. \square

Proposição B.53. *O conjunto $\Pi_{\mathfrak{a}}$ das co-raízes gera \mathfrak{a} .*

Demonstração. Definindo-se \mathfrak{a}_Π como o subespaço gerado por $\Pi_{\mathfrak{a}}$ e \mathfrak{a}_Π^\perp o complemento $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonal de \mathfrak{a}_Π em \mathfrak{a} , tem-se que se $H \in \mathfrak{a}_\Pi^\perp$ então

$$\alpha(H) = \langle H_\alpha, H \rangle_\theta = 0, \quad (\text{B.18})$$

para todo $\alpha \in \Pi$. Logo, para todo $\alpha \in \Pi$ e todo $X \in g_\alpha$,

$$\text{ad}(H)X = \alpha(H)X = 0, \quad (\text{B.19})$$

o que mostra que $H \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, que é trivial. Portanto \mathfrak{a}_Π^\perp é trivial e $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\Pi$, o que conclui a demonstração do lema. \square

Proposição B.54. *$W(\theta, \mathfrak{a})$ é um grupo finito.*

Demonstração. Pelo Lema B.52, $w|_{\Pi_{\mathfrak{a}}} : \Pi_{\mathfrak{a}} \rightarrow \Pi_{\mathfrak{a}}$ e, pela Proposição B.53, se $w|_{\Pi_{\mathfrak{a}}} = \text{id}_{\Pi_{\mathfrak{a}}}$, então $w = \text{id}_{\mathfrak{a}}$, pois w é uma transformação linear e $\Pi_{\mathfrak{a}}$ gera \mathfrak{a} . Portanto a restrição a $\Pi_{\mathfrak{a}}$ define um homomorfismo injetor de $W(\theta, \mathfrak{a})$ no grupo das bijeções de $\Pi_{\mathfrak{a}}$, o que mostra que $W(\theta, \mathfrak{a})$ é finito, pois $\Pi_{\mathfrak{a}}$ é finito. \square

A reflexão $r_\alpha : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ -ortogonal em relação a H_α , é definida, para todo $H \in \alpha$, pela seguinte expressão

$$r_\alpha(H) = H - 2 \frac{\alpha(H)}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha. \quad (\text{B.20})$$

Lema B.55. *Para toda raiz $\alpha \in \Pi$, se X pertence ao espaço \mathfrak{g}_α , então*

$$\operatorname{ad}(H)X_{\mathfrak{k}} = \alpha(H)X_{\mathfrak{s}} \quad \text{e} \quad \operatorname{ad}(H)X_{\mathfrak{s}} = \alpha(H)X_{\mathfrak{k}}, \quad (\text{B.21})$$

para todo $H \in \alpha$, onde $X_{\mathfrak{k}}$ é a componente de X em \mathfrak{k} e $X_{\mathfrak{s}}$ é a componente de X em \mathfrak{s} . Se, além disso, $\langle X_{\mathfrak{k}}, X_{\mathfrak{k}} \rangle_\theta = 1$, então valem

$$[X_{\mathfrak{k}}, X_{\mathfrak{s}}] = H_\alpha \quad (\text{B.22})$$

e, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{ad}(X_{\mathfrak{k}})^{2n}H_\alpha = (-\alpha(H_\alpha))^n H_\alpha \quad (\text{B.23})$$

e

$$\operatorname{ad}(X_{\mathfrak{k}})^{2n+1}H_\alpha = (-\alpha(H_\alpha))^{n+1} X_{\mathfrak{s}}. \quad (\text{B.24})$$

Demonstração. Pelas Equações (A.7) e (A.7), $X = X_{\mathfrak{k}} + X_{\mathfrak{s}}$ e portanto

$$\operatorname{ad}(H)X_{\mathfrak{k}} + \operatorname{ad}(H)X_{\mathfrak{s}} = \operatorname{ad}(H)X = \alpha(H)X = \alpha(H)X_{\mathfrak{k}} + \alpha(H)X_{\mathfrak{s}}. \quad (\text{B.25})$$

Pelas relações (A.9), tem-se que $\operatorname{ad}(H)X_{\mathfrak{k}} \in \mathfrak{s}$ e $\operatorname{ad}(H)X_{\mathfrak{s}} \in \mathfrak{k}$ e portanto o lema segue igualando-se as componentes de \mathfrak{k} e de \mathfrak{s} . Se $\langle X_{\mathfrak{k}}, X_{\mathfrak{k}} \rangle_\theta = 1$, então

$$\langle [X_{\mathfrak{k}}, X_{\mathfrak{s}}], H \rangle_\theta = \langle X_{\mathfrak{k}}, \operatorname{ad}(H)X_{\mathfrak{s}} \rangle_\theta = \langle X_{\mathfrak{k}}, \alpha(H)X_{\mathfrak{k}} \rangle_\theta = \alpha(H). \quad (\text{B.26})$$

Como $[X_{\mathfrak{k}}, X_{\mathfrak{s}}] \in \mathfrak{a}$, pois pela equação (B.21)

$$[H, [X_{\mathfrak{k}}, X_{\mathfrak{s}}]] = [[H, X_{\mathfrak{k}}], X_{\mathfrak{s}}] + [X_{\mathfrak{k}}, [H, X_{\mathfrak{s}}]] = 0, \quad (\text{B.27})$$

tem-se que $[X_{\mathfrak{k}}, X_{\mathfrak{s}}] = H_\alpha$. Como $\operatorname{ad}(X_{\mathfrak{k}})H_\alpha = -\alpha(H_\alpha)X_{\mathfrak{s}}$ e como $\operatorname{ad}(X_{\mathfrak{k}})X_{\mathfrak{s}} = H_\alpha$, tem-se que $\operatorname{ad}(X_{\mathfrak{k}})^2H_\alpha = -\alpha(H_\alpha)H_\alpha$. Por indução em $n \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{ad}(X_{\mathfrak{k}})^{2(n+1)}H_\alpha = \operatorname{ad}(X_{\mathfrak{k}})^{2n}(-\alpha(H_\alpha))H_\alpha = (-\alpha(H_\alpha))^{n+1}H_\alpha \quad (\text{B.28})$$

e portanto

$$\operatorname{ad}(X_{\mathfrak{k}})^{2(n+1)+1}H_\alpha = \operatorname{ad}(X_{\mathfrak{k}})(-\alpha(H_\alpha))^{n+1}H_\alpha = (-\alpha(H_\alpha))^{(n+1)+1}X_{\mathfrak{s}}. \quad (\text{B.29})$$

□

A proposição seguinte mostra que as reflexões em torno das raízes estão contidas no grupo de Weyl analítico.

Lema B.56. *Se $\alpha \in \Pi$, então $r_\alpha \in W(\theta, \mathfrak{a})$.*

Demonstração. Pode-se escolher $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ tal que $\langle X_{\mathfrak{k}}, X_{\mathfrak{k}} \rangle_\theta = 1$ e portanto $[X_{\mathfrak{k}}, X_{\mathfrak{s}}] = H_\alpha$. Pela equação (A.19), tem-se que $\operatorname{Ad}(\exp(tX_{\mathfrak{k}}))H_\alpha = e^{t\operatorname{ad}(X_{\mathfrak{k}})}H_\alpha$ e portanto

$$\operatorname{Ad}(\exp(tX_{\mathfrak{k}}))H_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n} (\operatorname{ad}(X_{\mathfrak{k}}))^{2n} H_\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} (\operatorname{ad}(X_{\mathfrak{k}}))^{2n+1} H_\alpha. \quad (\text{B.30})$$

Pelas equações (B.23) e (B.24),

$$\text{Ad}(\exp(tX_{\mathfrak{t}}))H_{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n} (-\alpha(H_{\alpha}))^n H_{\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} (-\alpha(H_{\alpha}))^{n+1} X_{\mathfrak{s}}, \quad (\text{B.31})$$

o que implica que

$$\text{Ad}(\exp(tX_{\mathfrak{t}}))H_{\alpha} = \cos(t\sqrt{\alpha(H_{\alpha})})H_{\alpha} - \sqrt{\alpha(H_{\alpha})} \text{sen}(t\sqrt{\alpha(H_{\alpha})})X_{\mathfrak{s}}. \quad (\text{B.32})$$

Como $\alpha(H_{\alpha}) > 0$, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $t_0\sqrt{\alpha(H_{\alpha})} = \pi$. Definindo-se $k_0 = \exp(t_0X_{\mathfrak{t}})$, segue que $\text{Ad}(k_0)H_{\alpha} = -H_{\alpha}$. Além disso, como $[X_{\mathfrak{t}}, H] = 0$ se $\alpha(H) = 0$, definindo-se $E_{\alpha} = \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) = 0\}$, tem-se que $\text{Ad}(k_0)|_{E_{\alpha}} = \text{id}_{E_{\alpha}}$, o que mostra que a restrição de $\text{Ad}(k_0)$ a \mathfrak{a} é igual a r_{α} e conclui a demonstração do lema. \square

Corolário B.57. *Para toda raiz $\alpha \in \Pi$, tem-se que $r_{\alpha}(\Pi_{\mathfrak{a}}) = \Pi_{\mathfrak{a}}$.*

Demonstração. A demonstração é imediata pelos Lemas B.56 e B.52. \square

Lema B.58. *Se $\alpha \in \Pi$ e $X \in \mathfrak{g}_{\alpha}$, então*

$$[X, \theta X] = \langle X, X \rangle_{\theta} H_{\alpha}. \quad (\text{B.33})$$

Demonstração. Pelo Lema A.14 e pela Proposição B.50, tem-se que $[X, \theta X] \in \mathfrak{a}$. Como para todo $H \in \mathfrak{a}$,

$$\langle [X, \theta X], H \rangle_{\theta} = -\langle \theta X, \text{ad}(H)X \rangle = \langle \langle X, X \rangle_{\theta} H_{\alpha}, H \rangle_{\theta}, \quad (\text{B.34})$$

tem-se que

$$[X, \theta X] = \langle X, X \rangle_{\theta} H_{\alpha}. \quad (\text{B.35})$$

\square

Proposição B.59. *Se $\alpha, \beta \in \Pi$, então*

$$2 \frac{\alpha(H_{\beta})}{\alpha(H_{\alpha})} \in \mathbb{Z}. \quad (\text{B.36})$$

Demonstração. Se $\alpha = \beta$, então $2 \frac{\alpha(H_{\beta})}{\alpha(H_{\alpha})} = 1$. Pode-se supor que $\beta - \alpha \notin \Pi$, pois caso contrário poderia-se substituir β por $\beta - (p-1)\alpha$ onde p é o primeiro inteiro não-negativo tal que $\beta - p\alpha \notin \Pi$. Sejam $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ e $X_{\beta} \in \mathfrak{g}_{\beta}$ vetores não-nulos. Pelo Lema B.58 $[X_{\alpha}, \theta X_{\alpha}] = \langle X_{\alpha}, X_{\alpha} \rangle_{\theta} H_{\alpha}$. Definindo-se $X = aX_{\alpha}$, tal que $\langle X, X \rangle_{\theta} = 2\langle H_{\alpha}, H_{\alpha} \rangle_{\theta}^{-1}$, $Y = -\theta X$ e $H = 2\langle H_{\alpha}, H_{\alpha} \rangle_{\theta}^{-1} H_{\alpha}$, tem-se que

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y \quad \text{e} \quad [X, Y] = H. \quad (\text{B.37})$$

Além disso, como $\beta - \alpha \notin \Pi$,

$$\text{ad}(H)X_{\beta} = \beta(H)X_{\beta} \quad \text{e} \quad [Y, X_{\beta}] = 0. \quad (\text{B.38})$$

Definindo-se $e_n = (\text{ad}(X))^n X_\beta$, $n \geq 0$ e $e_{-1} = 0$, obtem-se por indução, utilizando-se as identidades acima e a identidade de Jacobi, que

$$[X, e_n] = e_{n+1} \quad (\text{B.39})$$

$$[H, e_n] = (\beta(H) + 2n)e_n \quad (\text{B.40})$$

$$[Y, e_n] = -n(\beta(H) + n - 1)e_{n-1}. \quad (\text{B.41})$$

Se k é o maior inteiro tal que $e_k \neq 0$, então $[Y, e_{k+1}] = 0$. Portanto $\beta(H) + k = 0$, o que conclui o lema, pela definição de H . \square

As Proposições B.53 e B.59 e o Corolário B.57 mostram que $\Pi_{\mathfrak{a}}$ é de fato um sistema de raízes (c.f. Capítulo 9 de [38]):

- 1 $\Pi_{\mathfrak{a}}$ é finito, gera \mathfrak{a} e não contém 0.
- 2 Para todo $H_\alpha \in \Pi_{\mathfrak{a}}$, existe uma reflexão r_α em relação a H_α tal que $r_\alpha(\Pi_{\mathfrak{a}}) = \Pi_{\mathfrak{a}}$.
- 3 Para todos $H_\alpha, H_\beta \in \Pi_{\mathfrak{a}}$, $r_\alpha(H_\beta) - H_\beta$ é um múltiplo inteiro de H_α .

O conjunto $\Pi_{\mathfrak{a}}$ é denominado *sistema de raízes associado ao par* (θ, \mathfrak{a}) .

As câmaras de Weyl associadas ao par (θ, \mathfrak{a}) são definidas como as componentes conexas do conjunto $\{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) \neq 0, \forall \alpha \in \Pi\}$. Cada câmara de Weyl é um cone convexo em \mathfrak{a} (c.f. Seção 9.2 do Capítulo 9 de [38]).

Como definido na Seção A.1, se (θ, \mathfrak{a}) é um par admissível da álgebra de Lie semi-simples real \mathfrak{g} e \mathfrak{a}^+ é uma câmara de Weyl, então $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ é um terno admissível de \mathfrak{g} , o conjunto das raízes positivas associadas à \mathfrak{a}^+ é dado $\Pi^+ = \{\alpha \in \Pi : \alpha|_{\mathfrak{a}^+} > 0\}$ e um subconjunto $\Sigma \subset \Pi^+$ é um sistema simples de raízes associado à \mathfrak{a}^+ , se o conjunto $\Sigma_{\mathfrak{a}} = \{H_\alpha \in \mathfrak{a} : \alpha \in \Sigma\}$ é uma base de \mathfrak{a} e se toda raiz positiva é escrita como soma de raízes de Σ .

O grupo de Weyl algébrico $w(\theta, \mathfrak{a})$ associado ao par (θ, \mathfrak{a}) é por definição o grupo gerado pelo conjunto $\{r_\alpha : \alpha \in \Pi\}$, das reflexões em torno das raízes do sistema Π .

Proposição B.60. *O grupo de Weyl algébrico $w(\theta, \mathfrak{a})$ é finito e simplesmente transitivo no conjunto das câmaras de Weyl. Além disto, $w(\theta, \mathfrak{a})$ é gerado pelo conjunto $\{r_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$, onde Σ é qualquer sistema simples de raízes de Π .*

Demonstração. Proposições 9.13 e 9.19 e Teorema 9.14 de [38]. \square

O resultado seguinte mostra que um subgrupo do grupo de Weyl analítico que deixa invariante um cone convexo fixa um ponto neste cone.

Lema B.61. *Sejam \mathfrak{c} um cone convexo em \mathfrak{a} e U um subgrupo de $W(\theta, \mathfrak{a})$ tais que $0 \notin \mathfrak{c}$ e $w(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}$, para todo $w \in U$. Então existe $H \in \mathfrak{c}$ tal que $w(H) = H$, para todo $w \in U$.*

Demonstração. Definindo-se

$$H = \sum_{w \in U} w(Z), \quad (\text{B.42})$$

onde $Z \in \mathfrak{c}$ não-nulo, tem-se que $w(H) = H$ e, como \mathfrak{c} é um cone convexo, $H \in \mathfrak{c}$. \square

Corolário B.62. *Sejam \mathfrak{c} um cone convexo em \mathfrak{a} e $w \in W(\theta, \mathfrak{a})$ tais que $0 \notin \mathfrak{c}$ e $w(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}$. Então existe $H \in \mathfrak{c}$ tal que $w(H) = H$.*

Demonstração. Basta aplicar o Lema B.61 com $U = \{w^n : n \in \mathbb{N}\}$. □

Teorema B.63. *Os grupos de Weyl analítico $W(\theta, \mathfrak{a})$ e algébrico $w(\theta, \mathfrak{a})$ são iguais.*

Demonstração. Pelo Lema B.56, o grupo $w(\theta, \mathfrak{a})$ é subgrupo do grupo $W(\theta, \mathfrak{a})$. Como cada elemento de $W(\theta, \mathfrak{a})$ é a restrição a \mathfrak{a} de um automorfismo interno ψ de \mathfrak{k} tal que $\psi\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, pelo Corolário A.16, $\psi|_{\mathfrak{a}}$ permuta as câmaras de Weyl de \mathfrak{a} . Como pela Proposição B.60, $w(\theta, \mathfrak{a})$ é simplesmente transitivo nas câmaras, é suficiente mostrar que $W(\theta, \mathfrak{a})$ age simplesmente nas câmaras. Isto segue da demonstração do Teorema 6.57 de [21] □

Apêndice C

Fibrados e Espaços Homogêneos

Um grupo topológico é um espaço topológico e um grupo abstrato onde as operações de multiplicação e inversa são aplicações contínuas. Um semigrupo em G é um subconjunto S invariante pela multiplicação de G .

Proposição C.64. *Sejam G um grupo topológico e S um semigrupo compacto e fechado em G . Então S é um subgrupo de G .*

Demonstração. Seja $g \in S$. Definindo-se, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$F_k = \text{cl}\{g^n : n \geq k\} \subset S, \quad (\text{C.1})$$

tem-se que $F_{k+1} \subset F_k$. Pela compacidade de S e a condição de interseção finita não-vazia da família $\{F_k : k \in \mathbb{N}\}$, existe $h \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k$.

Seja V uma vizinhança aberta de g^{-1} e define-se $\phi : G \times G \rightarrow G$ por

$$\phi(x, y) = xy^{-1}g^{-1}. \quad (\text{C.2})$$

Como $(h, h) \in \phi^{-1}(V)$, existe uma vizinhança aberta U de h tal que $U \times U \subset \phi^{-1}(V)$. Por outro lado, como $h \in F_1 \cap U$, existe $n \geq 1$ tal que $g^n \in U$. Além disto, $h \in F_{n+2} \cap U$ e, portanto, existe $m \geq n + 2 > n + 1$ tal que $g^m \in U$. Tem-se então que

$$\phi(g^m, g^n) = g^{m-n-1} \in S \cap V. \quad (\text{C.3})$$

Logo $g^{-1} \in \text{cl}(S) = S$, para todo $g \in S$, o que conclui a demonstração. \square

Corolário C.65. *Sejam K um grupo topológico compacto e S um semigrupo em K com interior não-vazio. Então S contém K_0 , a componente conexa da identidade de K .*

Demonstração. Como $\text{cl}(\text{int}(S))$ é um subgrupo compacto e fechado em K , pela Proposição C.64, tem-se que $\text{cl}(\text{int}(S))$ é um subgrupo de K . Como $\text{int}(S)$ é denso em $\text{cl}(\text{int}(S))$ e $\text{int}(S)^{-1}$ é aberto, não-vazio e está contido em $\text{cl}(\text{int}(S))$, tem-se que $\text{int}(S) \cap \text{int}(S)^{-1} \neq \emptyset$. Portanto $\text{int}(S)$ é aberto e contém a identidade de K e, portanto, a componente conexa da identidade de K . \square

Proposição C.66. *Sejam G um grupo topológico, K um subgrupo compacto e H um subgrupo fechado. Tem-se que KH é um conjunto fechado.*

Demonstração. Seja $k_i h_i \rightarrow g$ uma rede tal que $k_i \in K$, $h_i \in H$ e $g \in G$. Pela compacidade de K existem $k \in K$ e uma sub-rede $k_{i_j} \rightarrow k$. Portanto $h_{i_j} = k_{i_j}^{-1}(k_{i_j} h_{i_j}) \rightarrow k^{-1}g \in H$, uma vez que H é fechado. Portanto $g = k(k^{-1}g) \in KH$. \square

A ação à esquerda de um grupo G num conjunto X é uma aplicação $\cdot : G \times X \rightarrow X$ satisfazendo

$$(i) \quad gh \cdot x = g \cdot (h \cdot x),$$

$$(ii) \quad 1 \cdot x = x,$$

para todo $g, h \in G$ e $x \in X$, onde $1 \in G$ é a identidade do grupo. Analogamente a ação à direita de um grupo G num conjunto X é uma aplicação $\cdot : G \times X \rightarrow X$ satisfazendo

$$(i) \quad x \cdot gh = (x \cdot g) \cdot h,$$

$$(ii) \quad x \cdot 1 = x,$$

para todo $g, h \in G$ e $x \in X$, onde $1 \in G$ é a identidade do grupo.

Para cada $g \in G$, a aplicação $g : X \rightarrow X$, dada por

$$g(x) = g \cdot x, \tag{C.4}$$

para todo $x \in X$, é uma bijeção, cuja inversa é $g^{-1} : X \rightarrow X$. Se um grupo G age nos conjuntos X e Y , uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é G -equivariante se $f \circ g = g \circ f$.

A órbita pela ação do grupo G de um ponto $x \in X$ é definida por

$$Gx = \{g \cdot x : g \in G\}, \tag{C.5}$$

e o subgrupo de isotropia de G em x é dado por

$$G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}. \tag{C.6}$$

A ação de G em X é transitiva se a órbita pela ação de G de algum $x \in X$ é todo o conjunto X . Tem-se que G age livremente em X se a isotropia G_x é trivial para todos $x \in X$.

Se G é um grupo topológico, um conjunto X é um espaço homogêneo de G se G age transitivamente em X e a isotropia G_x é um subgrupo fechado em G , para algum, e portanto para todos, $x \in X$. Se X é também um espaço topológico e a ação $\cdot : G \times X \rightarrow X$ é uma aplicação contínua, diz-se que G age continuamente em X . Neste caso, para cada $g \in G$, a aplicação $g : X \rightarrow X$ dada por C.4 é um homeomorfismo.

Analogamente, se M é uma variedade diferenciável, um grupo de Lie G age diferencivelmente em M se a ação $\cdot : G \times M \rightarrow M$ é uma aplicação diferenciável. Em particular, esta é uma ação contínua de G em M e, maneira semelhante, a aplicação $g : X \rightarrow X$ é um difeomorfismo, para cada $g \in G$.

C.1 Espaços Homogêneos e Grupos Quocientes

Lema C.67. *Sejam M e N espaços homogêneos de um grupo de Lie G agindo diferenciavelmente e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação G -equivariante. Então f tem posto constante.*

Demonstração. Como a ação de G é transitiva em M , fixando-se $x \in M$, para tod $y \in M$, existe $g \in G$ tal que $y = g(x)$. Pela regra da cadeia, como $f \circ g = g \circ f$, tem-se que

$$d_y f \circ d_x g = d_{f(x)} g \circ d_x f, \quad (\text{C.7})$$

onde $g : M \rightarrow M$ é dado por C.4. O lema segue, pois g é um difeomorfismo. \square

Se G/H denota o conjunto $\{gH : g \in G\}$ das classes laterais a esquerda de H em G e $\pi : G \rightarrow G/H$ é a projeção natural, então a *topologia quociente* em G/H é a topologia gera pelos conjuntos $A \subset G/H$ tais que $\pi^{-1}(A) \subset G$ é aberto.

Proposição C.68. *Sejam G um grupo de Lie, H um subgrupo fechado e G/H com a topologia do quociente. Então G/H possui uma única estrutura diferenciável tal que a ação de G em G/H por multiplicação a esquerda é diferenciável. Além disto, tem-se que*

$$\dim(G/H) = \dim(G) - \dim(H), \quad (\text{C.8})$$

a projeção natural $\pi : G \rightarrow G/H$ é uma submersão sobrejetiva e a ação de G em G/H é aberta.

Demonstração. A primeira afirmação é o Teorema 4.3, Página 123, do Capítulo II de [15]. A afirmação sobre a dimensão de G/H e a diferenciabilidade da projeção π são conseqüências das cartas locais usadas na demonstração do referido teorema.

Para mostrar que a projeção natural π é submersão, primeiro observa-se que, pelo lema de Sard, existe $g \in G$ tal que $d_g \pi$ é sobrejetora. Como π é equivariante, pelo Lema C.67, é uma submersão. Como a ação $a : G \times G/H \rightarrow G/H$ satisfaz

$$a(g, g'H) = \pi(gg'), \quad (\text{C.9})$$

para todos $g, g' \in G$, tem-se que está ação é aberta, pois é composição de aplicações abertas. \square

Lema C.69. *Seja $\pi : M \rightarrow N$ uma submersão da variedade diferenciável M na variedade diferenciável N . Para toda variedade diferenciável P , uma aplicação $f : N \rightarrow P$ é diferenciável se, e somente se, existe uma aplicação diferenciável $F : M \rightarrow P$ tal que o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{array}{ccc} M & & \\ \pi \downarrow & \searrow F & \\ N & \xrightarrow{f} & P \end{array} \quad (\text{C.10})$$

Demonstração. Se $n = \dim(N)$, então n é o posto de π e $\dim(M) = n + m$. Pela forma local das submersões, existe um atlas $\phi_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow M$ de M e um atlas $\psi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow N$ de N tais que $\pi(\phi_i(x, y)) = \psi_i(x)$, para todos $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$.

Se $f : N \rightarrow P$ é uma aplicação diferenciável, definindo-se $F = f \circ \pi : M \rightarrow P$, tem-se que o diagrama C.10 é comutativo e F é diferenciável, pela regra da cadeia. Por outro lado, se existe $F : M \rightarrow P$ diferenciável tal que o diagrama C.10 é comutativo, tem-se que

$$f(\psi_i(x)) = f(\pi(\phi_i(x, y))) = F(\phi_i(x, y)) \quad (\text{C.11})$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, mostrando que $f : N \rightarrow P$ é uma aplicação diferenciável. \square

Proposição C.70. *Sejam G é um grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} e H um subgrupo fechado e normal em G com álgebra de Lie \mathfrak{h} . Então G/H é um grupo de Lie com a estrutura diferenciável dada pela Proposição C.68 e a projeção natural $\pi : G \rightarrow G/H$ é um homomorfismo sobrejetor entre grupos de Lie. Além disto, \mathfrak{h} é o núcleo do homomorfismo sobrejetor de álgebras de Lie $d_1\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{l}$, onde \mathfrak{l} denota a álgebra de Lie de G/H . Em particular, \mathfrak{h} é um ideal de \mathfrak{g} e \mathfrak{l} é isomorfa a $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.*

Demonstração. Como H é normal em G , o produto $\widehat{p}(gH, g'H) = (gg')H$ e a inversa $\widehat{i}(gH) = (g^{-1})H$ estão bem definidos e G/H é um grupo. Pela Proposição C.68, resta mostrar que o produto e a inversa são aplicações diferenciáveis. Definindo-se $p : G \times G \rightarrow G/H$ por $p(g, g') = (gg')H$, tem-se que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} G \times G & & \\ (\pi, \pi) \downarrow & \searrow p & \\ (G/H) \times (G/H) & \xrightarrow{\phi} & G/H \end{array} \quad (\text{C.12})$$

e p é diferenciável, pois é composição de aplicações diferenciáveis. Novamente utilizando-se a Proposição C.68, tem-se que $\pi \times \pi$ é uma submersão e, pelo Lema C.69, segue que o produto \widehat{p} é uma aplicação diferenciável. Proceder-se de maneira análoga para se mostrar que a inversa \widehat{i} é uma aplicação diferenciável.

Pelo Lema 1.12 do Capítulo II de [15] e Proposição C.68, tem-se que $d_1\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{l}$ é um homomorfismo sobrejetor de álgebras de Lie. Para se mostrar que \mathfrak{h} é o núcleo de $d_1\pi$, seja $X \in \mathfrak{h}$. Logo $\exp(tX) \in H$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $\pi(\exp(tX)) = 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, segue que $d_1\pi X = 0$, mostrando que \mathfrak{h} está contido no núcleo de $d_1\pi$. A demonstração segue, observando-se que, pela Proposição C.68, $\dim(\mathfrak{l}) = \dim(\mathfrak{g}) - \dim(\mathfrak{h})$. \square

A proposição seguinte é o análogo para grupos de Lie do teorema de isomorfismo de Noether.

Proposição C.71. *Sejam G um grupo de Lie, H e L subgrupos de Lie de G tais que H é fechado e normal e $G = LH$. Então a aplicação $\varphi : L/(L \cap H) \rightarrow G/H$, dada por*

$$\varphi(l(L \cap H)) = lH, \quad (\text{C.13})$$

é um isomorfismo entre grupos de Lie.

Demonstração. Pela Proposição C.70, a projeção natural $\pi : G \rightarrow G/H$ é um homomorfismo sobrejetor entre grupos de Lie. Como $G = LH$, tem-se que a restrição $\pi_L : L \rightarrow G/H$ é também um homomorfismo sobrejetor entre grupos de Lie, cujo núcleo é $L \cap H$. O resultado segue do Lema 5.1 do Capítulo II de [15]. \square

Em muitos casos, a ação transitiva de um grupo de Lie num conjunto abstrato induz uma estrutura de variedade diferenciável neste conjunto.

Proposição C.72. *Seja X um espaço homogêneo de um grupo de Lie G . Então fixando-se $x \in X$, existe uma estrutura diferenciável em X tal que a aplicação $\phi_x : G/G_x \rightarrow X$, dada por*

$$\phi_x(gG_x) = g \cdot x, \tag{C.14}$$

é um difeomorfismo, onde G_x é a isotropia de G em x . Em particular, a ação de G em X é diferenciável e aberta.

Demonstração. Claramente, fixando-se $x \in X$, a aplicação ϕ_x está bem definida e é uma bijeção. Como a isotropia G_x é fechada por hipótese, pela Proposição C.68, G/G_x possui uma estrutura diferenciável e, portanto, ϕ_x induz em X uma estrutura diferenciável. A ação $\cdot : G \times X \rightarrow X$ satisfaz

$$g \cdot y = \phi_x(g \cdot \phi_x^{-1}(y)), \tag{C.15}$$

pois ϕ_x é equivariante. Portanto esta é uma ação diferenciável e aberta, pela Proposição C.68. \square

C.2 Fibrados Principais e Associados

Uma *fibração* é uma aplicação contínua e sobrejetora $\pi : Q \rightarrow X$ do espaço topológico Q , denominado *espaço total*, no espaço topológico X , denominado *espaço base*. Denota-se a *fibra* $\pi^{-1}(x)$ de Q sobre $x \in X$ por Q_x e a *fibra* $\pi^{-1}(\pi(q))$ de Q através de $q \in Q$ por Q_q . Duas fibrações $\pi : Q \rightarrow X$ e $\hat{\pi} : \hat{Q} \rightarrow \hat{X}$ são *isomorfas* se existem homeomorfismos $\psi : Q \rightarrow \hat{Q}$ e $\phi : X \rightarrow \hat{X}$ tais que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\psi} & \hat{Q} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \hat{\pi} \\ X & \xrightarrow{\phi} & \hat{X} \end{array} \tag{C.16}$$

O par (ψ, ϕ) é denominado *isomorfismo de fibrações*.

Uma fibração $\pi : Q \rightarrow X$ é um *fibrado principal* se um grupo topológico G age livre e continuamente à direita no espaço total, de modo que as fibras de Q são as órbitas de G em Q . O grupo G é denominado grupo estrutural de Q . Dois fibrados principais $\pi : Q \rightarrow X$, com grupo estrutural G , e $\hat{\pi} : \hat{Q} \rightarrow \hat{X}$, com grupo estrutural \hat{G} , são *isomorfos* se são fibrações isomorfas e existe um isomorfismo $\varphi : G \rightarrow \hat{G}$ de grupos topológicos tal que

$$\psi(qa) = \psi(q)\varphi(a) \tag{C.17}$$

para todo $q \in Q$ e $a \in G$. O terno (ψ, ϕ, φ) é denominado *isomorfismo de fibrados principais*.

Se (ψ, ϕ) é um isomorfismo entre a fibração $\widehat{\pi} : \widehat{Q} \rightarrow \widehat{X}$ e o fibrado principal $\pi : Q \rightarrow X$ com grupo estrutural G , então $\widehat{\pi} : \widehat{Q} \rightarrow \widehat{X}$ é um fibrado principal com grupo estrutural G , onde a ação de G em \widehat{Q} é dada por

$$\widehat{q}a = \psi(\psi^{-1}(\widehat{q})a), \quad (\text{C.18})$$

onde $a \in G$ e $\widehat{q} \in \widehat{Q}$.

O *fibrado principal trivial com base X e grupo estrutural G* é a projeção na primeira coordenada $\text{pr}_1 : X \times G \rightarrow X$, onde a ação de G em $X \times G$ é dada por

$$(x, g)a = (x, ga), \quad (\text{C.19})$$

onde $x \in X$ e $g, a \in G$.

De maneira mais geral, um fibrado principal $\pi : Q \rightarrow X$ é *localmente trivial* se existe uma cobertura aberta $\{U_i : i \in I\}$ do espaço base, denominada *cobertura trivializante*, de modo que, para cada $i \in I$, o fibrado principal $\pi|_{\pi^{-1}(U_i)} : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ é isomorfo ao fibrado principal trivial com base U_i e grupo estrutural G .

De modo mais preciso, existe uma família de homeomorfismos

$$\{\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G\}_{i \in I}, \quad (\text{C.20})$$

denominados *trivializações locais*, onde $\psi_i = (\pi, g_i)$ para alguma aplicação contínua $g_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow G$, satisfazendo

$$g_i(qa) = g_i(q)a \quad (\text{C.21})$$

onde qa denota o a ação de $a \in G$ sobre $q \in \pi^{-1}(U_i)$. A família $\Psi = \{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ é denominada um *atlas de Q* .

Se (ψ, ϕ, φ) é um isomorfismo entre o fibrado principal $\widehat{\pi} : \widehat{Q} \rightarrow \widehat{X}$, com grupo estrutural \widehat{G} , e o fibrado principal localmente trivial $\pi : Q \rightarrow X$, com grupo estrutural G , então o fibrado principal $\widehat{\pi} : \widehat{Q} \rightarrow \widehat{X}$ é localmente trivial, com cobertura trivializante $\{\phi(U_i) : i \in I\}$ de \widehat{X} e família de trivializações locais

$$\{\psi \circ \psi_i : \widehat{\pi}^{-1}(\phi(U_i)) \rightarrow \phi(U_i) \times \widehat{G}\}_{i \in I}. \quad (\text{C.22})$$

A trivialidade local implica que a projeção π é uma aplicação aberta. A aplicação $i_q : G \rightarrow Q_q$ dada por

$$i_q : a \in G \longmapsto qa \quad (\text{C.23})$$

é um homeomorfismo, pois sua inversa é dada por $i_q^{-1}(p) = g_i(q)^{-1}g_i(p)$, para $p \in Q_q$, se U_i contém $\pi(q)$.

Associada a cada trivialização local, sua *seção local* é a aplicação $\chi_i : U_i \rightarrow Q$ definida por $\chi_i(x) = \psi_i^{-1}(x, 1)$, onde 1 é o elemento neutro de G . Tem-se que $\pi \circ \chi_i = \text{id}_{U_i}$ e, para todo $x \in U_i$ e $a \in G$,

$$\psi_i(\chi_i(x)a) = (x, a). \quad (\text{C.24})$$

Se $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então

$$\psi_j \circ \psi_i^{-1} : U_{ij} \times G \rightarrow U_{ij} \times G \quad (\text{C.25})$$

é tal que

$$\psi_j \circ \psi_i^{-1}(x, a) = \psi_j(\chi_i(x)a) = (x, a_{ij}(x)a), \quad (\text{C.26})$$

onde $a_{ij} = g_j \circ \chi_i : U_{ij} \rightarrow G$ é denominada *função de transição*. Além disso, como

$$\psi_j(\chi_i(x)) = (x, a_{ij}(x)) = \psi_j(\chi_j(x)a_{ij}(x)), \quad (\text{C.27})$$

tem-se que $\chi_i(x) = \chi_j(x) a_{ij}(x)$.

O fibrado $\pi_E : E = Q \times_G F \rightarrow X$ associado ao fibrado principal $\pi : Q \rightarrow X$ é uma fibração sobre a base X de um espaço topológico contruído a partir da ação a esquerda de G num espaço topológico F , denominado *fibra típica*. O espaço total E é o quociente do produto $Q \times F$ pela relação de equivalência \sim definida por $(p, v) \sim (q, w)$ se, e somente se, $q = pa$ e $w = a^{-1}v$, onde $p, q \in Q$, $v, w \in F$ e $a \in G$. A classe de equivalência de (q, v) é denotada por $q \cdot v \in E$. O espaço base é o mesmo de Q e a fibração $\pi_E : E \rightarrow X$ é definida por $\pi_E(q \cdot v) = \pi(q)$.

Se Q é o fibrado principal localmente trivial, a mesma cobertura trivializante $\{U_i : i \in I\}$ de Q é uma cobertura trivializante de E e a família de trivializações locais

$$\{\psi_i^E : \pi_E^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F\}_{i \in I} \quad (\text{C.28})$$

é definida por

$$\psi_i^E(q \cdot v) = (\pi(q), g_i(q)v). \quad (\text{C.29})$$

Esta aplicação está bem definida, pois se $q = pa$ e $w = a^{-1}v$, então $(\pi(q), g_i(q)v) = (\pi(p), g_i(p)w)$, devido á equação (C.21). Além disso, ψ_i^E é bijetiva, sendo claramente sobrejetiva e também injetiva, já que se $(\pi(q), g_i(q)v) = (\pi(p), g_i(p)w)$, então $q = pa$, para alguma $a \in G$ e, portanto, $v = a^{-1}w$, uma vez que

$$g_i(p)av = g_i(pa)v = g_i(p)w. \quad (\text{C.30})$$

A aplicação $v_i : \pi_E^{-1}(U_i) \rightarrow F$, definida por

$$v_i(q \cdot v) = g_i(q)v \quad (\text{C.31})$$

é contínua e aberta, já que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} U_i \times F & & \\ \downarrow \cdot & \searrow v_i & \\ \pi_E^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\phi} & F \end{array} \quad (\text{C.32})$$

onde a aplicação \widehat{v}_i^E , definida por $\widehat{v}_i^E(q, v) = (\pi(q), g_i(q)v)$, é claramente contínua e aberta. Portanto, o par $(\psi_i^E, \text{id}_{U_i})$ é um isomorfismo entre a fibração

$$(\pi_E)|_{\pi_E^{-1}(U_i)} : \pi_E^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \quad (\text{C.33})$$

e a projeção na primeira coordenada $\text{pr}_1 : U_i \times F \rightarrow U_i$. A família $\Psi^E = \{(U_i, \psi_i^E)\}_{i \in I}$ é denominada um *atlas de E*. Em particular, se $\text{pr}_1 : X \times G \rightarrow X$ é o fibrado principal trivial com base X e grupo estrutural G , o fibrado associado $\pi_E : E \rightarrow X$ com fibra típica F é isomorfo à projeção na primeira coordenada $\text{pr}_1 : X \times F \rightarrow X$.

Além disso, se $\xi = q \cdot v$, onde $q = \chi_i(x)a$, então

$$v_j(\xi) = a_{ij}(x)v_i(\xi), \quad (\text{C.34})$$

pois

$$g_j(\chi_i(x)a)v = a_{ij}(x)g_i(\chi_i(x))av = a_{ij}(x)g_i(\chi_i(x)a)v. \quad (\text{C.35})$$

Pela equação (C.29), fixando-se $q \in Q$, a aplicação

$$v \in F \mapsto q \cdot v \in E_{\pi(q)} \quad (\text{C.36})$$

é um homeomorfismo. Se a fibra típica F é compacta, a trivialidade local implica que $\pi_E : E \rightarrow X$ é uma aplicação fechada.

Quando a ação de G em F é transitiva, fixando-se $v \in F$, a transformação $l_v : Q \rightarrow E$, definida por

$$l_v(q) = q \cdot v \in E \quad (\text{C.37})$$

é sobrejetiva. Neste caso, será feita a hipótese de que a aplicação $g \in G \mapsto gv \in F$ é aberta para todo $v \in F$ (esta condição é sempre satisfeita no caso de ações diferenciáveis de grupos de Lie). Logo, utilizando-se novamente a equação (C.29), a aplicação l_v é também aberta. Em diversos momentos, a imagem $l_v(A)$ de um subconjunto $A \subset Q$ será denotada por $A \cdot v$.

Proposição C.73. *Sejam G um grupo de Lie e $L \subset P$ subgrupos fechados de G , onde L é normal em P . Então a projeção $\pi : G/L \rightarrow G/P$, dada por*

$$\pi(gL) = gP, \quad (\text{C.38})$$

para todo $g \in G$, é um fibrado principal localmente trivial, cujo grupo estrutural é o grupo de Lie P/L . Além disso, a ação à esquerda de G em G/L é um endomorfismo deste fibrado, como definido na Seção 4.1.

Demonstração. Teorema da Seção 7.4 de [41]. □

Proposição C.74. *Sejam $\pi : Q \rightarrow X$ um fibrado principal localmente trivial, cujo grupo estrutural é um grupo de Lie G agindo diferenciável e transitivamente na fibra típica F do fibrado associado $\pi_E : E \rightarrow X$. Então a fibração $l_v : Q \rightarrow E$ é um fibrado principal localmente trivial, cujo grupo estrutural é G_v , o subgrupo de isotropia de G no ponto v .*

Demonstração. Pela Proposição C.73 e como G age transitivamente em F , a fibração $\pi_v : G \rightarrow F$, dada por $\pi_v(a) = av$, é um fibrado principal. Então existem uma cobertura trivializante $\{V_j : j \in J\}$ do espaço base F e

$$\{\phi_j : \pi^{-1}(V_j) \rightarrow V_j \times G_v\}_{j \in J} \quad (\text{C.39})$$

a família das trivializações locais associadas, onde $\phi_j = (\pi_v, a_j^v)$ é tal que $a_j^v : \pi_G^{-1}(V_j) \rightarrow G_v$ satisfaz

$$a_j^v(ga) = a_j^v(g)a \quad (\text{C.40})$$

para todos $g \in \pi_G^{-1}(V_j)$ e $a \in G_v$. Tem-se que a família

$$\{W_{ij} = (\psi_i^E)^{-1}(U_i \times U_j)\}_{i \in I, j \in J} \quad (\text{C.41})$$

é uma cobertura trivializante de E e

$$\{\psi_{ij}^v : l_v^{-1}(W_{ij}) \rightarrow W_{ij} \times G_v\}_{i \in I, j \in J} \quad (\text{C.42})$$

é a família das trivializações locais associadas, onde $\psi_{ij}^v = (l_v, g_{ij}^v)$ é tal que $g_{ij}^v = a_j^v \circ g_i$. De fato, g_{ij}^v está bem definida para todo $q \in l_v^{-1}(W_{ij})$, pois

$$\psi_i^E(l_v(q)) = \psi_i^E(q \cdot v) = (\pi(q), g_i(q)v) = (\pi(q), \pi_v(g_i(q))) \in U_i \times V_j \quad (\text{C.43})$$

e também

$$g_{ij}^v(qa) = a_j^v(g_i(q)a) = g_{ij}^v(q)a, \quad (\text{C.44})$$

para todos $q \in l_v^{-1}(W_{ij})$ e $a \in G_v$. Além disso, se

$$\psi_{ij}^v(q) = (q \cdot v, g_{ij}^v(q)) = (p \cdot v, g_{ij}^v(p)) = \psi_{ij}^v(p), \quad (\text{C.45})$$

então $p = qa$ e $a \in G_v$ e, como

$$g_{ij}^v(q) = g_{ij}^v(qa) = g_{ij}^v(q)a, \quad (\text{C.46})$$

tem-se que $a = 1$, mostrando que ψ_{ij}^v é injetiva. A sobrejetividade segue da equação (C.44) e do fato de que $qa \in l_v^{-1}(W_{ij})$, para todos $q \in l_v^{-1}(W_{ij})$ e $a \in G_v$. Finalmente, como g_{ij}^v é composição de aplicações contínuas e abertas, tem-se que $\psi_{ij}^v = (l_v, g_{ij}^v)$ é um homeomorfismo. \square

Sejam E e \widehat{E} fibrados associados a $\pi : Q \rightarrow X$ tais que existe uma fibração $f : F \rightarrow \widehat{F}$ equivariante em relação à ação de G , ou seja,

$$f(av) = f(v)a \quad (\text{C.47})$$

para todos $a \in G$ e $v \in F$. Define-se $f : E \rightarrow \widehat{E}$, uma fibração de E sobre \widehat{E} , dada por

$$f(q \cdot v) = q \cdot f(v), \quad (\text{C.48})$$

para todos $q \in Q$ e $v \in F$.

Proposição C.75. *Sejam as hipóteses da Proposição C.74. Então, fixando-se $v \in F$ e definindo-se $\hat{v} = f(v)$, a fibração $f : E \rightarrow \hat{E}$ é isomorfa ao fibrado $(l_{\hat{v}})_{E_{\hat{v}}} : E_{\hat{v}} \rightarrow \hat{E}$, cuja fibra típica $F_{\hat{v}}$ é a fibra de F sobre \hat{v} , associado ao fibrado principal localmente trivial $l_v : Q \rightarrow E$. Além disto, o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Q & & \\
 & & \downarrow l_v & \searrow \hat{l}_v & \\
 & \pi & E & \xleftarrow{\phi_{\hat{v}}} & E_{\hat{v}} \\
 & \swarrow \pi_E & \downarrow f & \searrow (l_{\hat{v}})_{E_{\hat{v}}} & \\
 X & \xleftarrow{\pi_{\hat{E}}} & \hat{E} & &
 \end{array} \tag{C.49}$$

onde $\phi_{\hat{v}}(q \cdot_G v) = q \cdot_{G_{\hat{v}}} v$ e $\hat{l}_v(q) = q \cdot_{G_{\hat{v}}} v$, para todo $q \in Q$.

Demonstração. Pela Proposição C.74, $l_v : Q \rightarrow E$ é um fibrado principal com grupo estrutural $G_{\hat{v}}$. Tem-se que a aplicação $\phi_{\hat{v}} : E \rightarrow E_{\hat{v}}$, dada por

$$\phi_{\hat{v}}(q \cdot_G v) = q \cdot_{G_{\hat{v}}} v \tag{C.50}$$

está bem definida e é uma bijeção. De fato, $q \cdot_G v = p \cdot_G v$ se, e somente se, existe $a \in G$ tal que $p = qa$ e $v = av$ e, portanto, se, e somente se, $q \cdot_{G_{\hat{v}}} v = p \cdot_{G_{\hat{v}}} v$. Tem-se então que $\phi_{\hat{v}}$ é um homeomorfismo, pois o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 Q & & \\
 \downarrow l_v & \searrow \hat{l}_v & \\
 E & \xleftarrow{\phi_{\hat{v}}} & E_{\hat{v}}
 \end{array} \tag{C.51}$$

é claramente comutativo e a aplicação \hat{l}_v é contínua e aberta. A comutatividade do diagrama C.51 segue direto das definições. \square

Referências Bibliográficas

- [1] Arnold, L., Cong N. D., Oseledets V. I., *Jordan normal form for linear cocycles*. Random Operators and Stochastic Equations, 7 (1999), 301-356.
- [2] Arnold, V. I.: *Symplectization, Complexification and Mathematical Trinities*. Fields Institute Communications, **24** (1999), 23-37.
- [3] Braga Barros, C.J. e L.A.B. San Martin: *Chain control sets for semigroup actions*. Mat. Apl. Comp., **15** (1996), 257-276.
- [4] Braga Barros, C.J. e L.A.B. San Martin: *On the action of semigroups in fiber bundles*. Mat. Contemp., **13** (1997), 1-19.
- [5] Braga Barros, C.J. e L.A.B. San Martin: *Chain transitive sets for flows on flag bundles*. Forum Math., to appear.
- [6] Birkhoff, G. e Maclane, S. *Álgebra Moderna Básica*, 4a ed., Guanabara Dois, Rio de Janeiro, (1980).
- [7] Colonius, F. e W. Kliemann: *The dynamics of control*. Birkhäuser, Boston (2000).
- [8] Colonius, F. e W. Kliemann: *Morse decompositions and spectra on flag bundles*. J. Dynam. Differential Equations **14** (2002), 719–741.
- [9] Conley, C.: *Isolated invariant sets and the Morse index*. CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **38**, American Mathematical Society, (1978).
- [10] Conley, C.: *The gradient structure of a flow: I*. Ergodic Theory Dynam. Systems, **8** (1988), 11-26.
- [11] Dieudonné, J.: *Treatise on Analysis*, volume II. Academic Press (1976).
- [12] Duistermaat, J.J, Kolk, J.A.C. e Varadarajan, V.S.: *Functions, flows and oscillatory integrals on flag manifolds and conjugacy classes in real semisimple Lie groups*. Compositio Math., **49** (1983), 309-398.
- [13] Ellis, R.: *Lectures on Topological Dynamics*. W. A. Benjamin, New York (1969).

- [14] Freedman, H., I. e So, Joseph W.-H.: *Persistence in Discrete Semidynamical Systems*. SIAM J. Math. Anal., **20** (1989), 930-938.
- [15] Helgason, S. *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Academic Press, New York, (1978).
- [16] Hirsch, M.; Smith, H. e Zhao, X.: *Chain transitivity, attractivity and strong repellers for semidynamical systems*. J. Dynam. Differential Equations, **13** (2001), 107-131.
- [17] Hurley, M: *Chain recurrence, semiflows, and gradients*. J. Dynam. Differential Equations, **7** (1995), 437-456.
- [18] Husemoller, D.: *Fibre Bundles*. Graduate Texts in Mathematics **20**. Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1975).
- [19] Kobayashi, S. e K. Nomizu: *Foundations of differential geometry*. John Willey & Sons (1963).
- [20] Kelley, J. : *General Topology*. D. Van Nostrand Company, Inc. New Jersey (1955).
- [21] Knapp, A. W. : *Lie Groups Beyond an Introduction*, Progress in Mathematics, v. 140, Birkhäuser, Boston (2004).
- [22] Kuratowski, K.: *Topology*. Academic Press, Volume I, New York (1966).
- [23] Lima, E. L. *Espaços métricos*, Projeto Euclides, IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, (1977).
- [24] Lima, E. L.: *Álgebra Linear*. Segunda Edição, IMPA, Rio de Janeiro (1996).
- [25] Michael, E.: *Topologies on spaces of subsets*. Trans. Amer. Math. Soc., **71** (1951), 151-182.
- [26] Moeckel, R.: *Morse decomposition and connection matrices*. Ergod. Th. and Dynam. Systems, **8** (1988), 227-249.
- [27] Patrão, M.: *Morse decomposition of semiflows on topological spaces*. Preprint (2005).
- [28] Patrão, M. e San Martin, L.A.B.: *Semiflows on Topological Spaces: Chain Transitivity and Semigroups*. Preprint (2005).
- [29] Patrão, M. e San Martin, L.A.B.: *Morse decomposition of semiflows on fiber bundles*. Preprint (2005).
- [30] Rybakowski, K.P.: *The homotopy index and partial differential equations*. Universitext, Springer-Verlag (1987).

- [31] Sacker, R.J. e G.R. Sell: *A spectral theory for linear differential systems*. J. Differential Equations, **27** (1978), 320-358.
- [32] Salamon, D. e E. Zehnder: *Flows on vector bundles and hyperbolic sets*. Trans. Amer. Math. Soc., **306** (1988), 623-649.
- [33] San Martin, L.A.B.: *Invariant Control Sets on Flag Manifolds*. Math. of Control, Signals, and Systems, **6** (1993), 41-61.
- [34] San Martin, L.A.B. e Tonelli, P.A.: *Semigroup actions on homogeneous spaces*. Semigroup Forum, **50** (1995), 59-88.
- [35] San Martin, L.A.B.: *Homogeneous spaces admitting transitive semigroups* J. Lie Theory, **8** (1998), 111-128.
- [36] San Martin, L.A.B.: *Order and domains of attraction of control sets in flag manifolds*. J. Lie Theory, **8** (1998), 111-128.
- [37] San Martin, L.A.B. e Tonelli, P.A.: *Transitive actions of semigroups in semi-simple Lie groups*. Semigroup Forum, **58** (1999), 142-151.
- [38] San Martin, L. A. B. *Álgebras de Lie*. Editora da Unicamp, Campinas, (1999).
- [39] San Martin, L.A.B.: *Maximal semigroups in semi-simple Lie groups*. Trans. Amer. Math. Soc., **353** (2001), 5165-5184.
- [40] Selgrade, J.: *Isolated invariant sets for flows on vector bundles*. Trans. Amer. Math. Soc., **203** (1975), 259-390.
- [41] Steenrod, N. : *The Topology of Fiber Bundles*. Princeton University Press, Princeton (1974).
- [42] Varadarajan, V.S.: *Harmonic Analysis on Real Reductive Groups*. Lecture Notes in Math., **576**, Springer-Verlag (1977).
- [43] Warner, G.: *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I*. Springer-Verlag (1972).
- [44] Zimmer, R.: *Ergodic Theory and Semisimple Groups*. Birkhäuser, Boston (1984).