

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

**Singularidades e Órbitas Periódicas de
Sistemas Descontínuos em \mathbb{R}^4**

Weber Flávio Pereira

Orientador: Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira

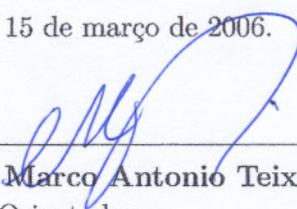
Co-orientador: Prof. Dr. Alain Guy Jacquemard

Março/2006

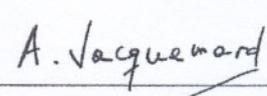
Singularidades e Órbitas Periódicas de Sistemas Descontínuos em \mathbb{R}^4

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Weber Flávio Pereira** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 15 de março de 2006.



Prof. Dr.: **Marco Antonio Teixeira**
Orientador



Prof. Dr.: **Alain Guy Jacquemard**
Co-orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira.
Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino.
Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva.
Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado.
Prof. Dr. José Manoel Balthazar.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Pereira, Weber Flávio

P414s Singularidades e órbitas periódicas de sistemas descontínuos em
R4 / Weber Flávio Pereira -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2006.

Orientadores : Marco Antonio Teixeira; Alain Guy Jacquemard
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto
de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Singularidades (Matemática). 2. Campos de vetores
descontínuos. 3. Órbitas periódicas. I. Teixeira, Marco Antonio. II.
Jacquemard, Alain Guy. III. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV.
Título.

Título em inglês: Singularities and periodic orbits of discontinuous systems in R4

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Singularities (Mathematics). 2. Discontinuous
vector fields. 3. Periodic orbits.

Área de concentração: Geometria / Topologia

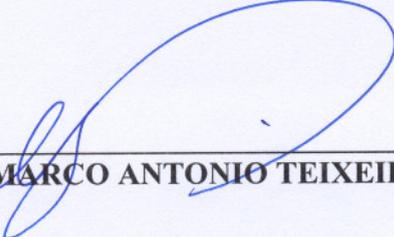
Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva (UNESP-São José do Rio Preto)
Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado (UFG)
Prof. Dr. José Manoel Balthazar (UNESP-Rio Claro)

Data da defesa: 15/03/2006

Tese de Doutorado defendida em 15 de março de 2006 e aprovada

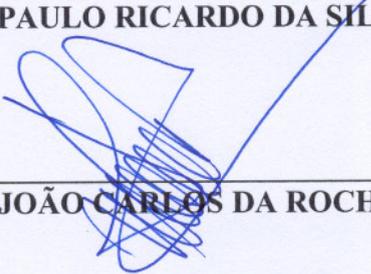
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA



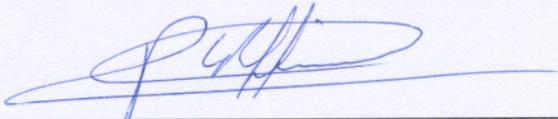
Prof. (a). Dr (a). PAULO RICARDO DA SILVA



Prof. (a). Dr (a). JOÃO CARLOS DA ROCHA MEDRADO



Prof. (a). Dr (a). JOSÉ MANOEL BALTHAZAR



Prof. (a) Dr. (a) PAULO REGIS CARON RUFFINO

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Aparecido e Olinda.

“Comece fazendo o que é necessário, depois o que é possível,
e de repente você estará fazendo o impossível.”

(São Francisco de Assis)

AGRADECIMENTOS

A Deus, obrigado Senhor, por conceder-me esta vitória e por não me abandonar nos momentos de prova durante toda minha vida.

Aos meus pais, Aparecido e Olinda, pelo incentivo, força e amor que sempre me deram e pela compreensão nos momentos de ausência.

Aos meus irmãos, Wellington e Tamara por sempre acreditarem em mim e passarem essa confiança.

À Juliana, uma pessoa muito especial em minha vida, por estar sempre ao meu lado em todos os momentos, transmitindo todo seu amor e carinho.

Ao Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira pela orientação, paciência e por sempre estar disponível para me ajudar.

Ao meu co-orientador, Prof. Dr. Alain Guy Jacquemard, pelos valiosos ensinamentos que me passou e por ter tido toda a paciência em suas explicações, devido a barreira do idioma.

Aos amigos de república, Ariosvaldo, Carlin, Marcelo, Neiton, Vinícius e Rafael, pela valiosa amizade, pelos momentos de descontração (carteados e muita conversa jogada fora) e pela convivência.

Aos amigos, José Antonio, Luci Any, Mariana, Maurício, Rogério Casagrande e em especial à Ximena pelos agradáveis momentos de descontração nesses quatro anos.

A todos os companheiros do Predinho.

À Capes, pelo apoio financeiro.

ABSTRACT

According to the classification made by Anosov in 1959, we derive several different topological types of “semi-linear” discontinuous systems in \mathbb{R}^4 . This pre-classification is done via presentation of the respective normal forms. In this work, we consider non-linear perturbations of such normal forms. The typical singularities are generically classified and the behavior of the systems around these points is analyzed. Our focus is find conditions for the existence of 1-parameter family of periodic orbit terminating at the singularities in the sense of Lyapunov Center Theorem. The main techniques used are elements of Symbolic Computation and Theory of Singularities of Mappings.

RESUMO

De acordo com a classificação feita por Anosov em 1959, obtemos diferentes tipos topológicos de sistemas “semi-lineares” descontínuos em \mathbb{R}^4 . Esta pré-classificação é feita através da apresentação das respectivas formas normais. Neste trabalho, consideramos perturbações não lineares de tais formas normais. As singularidades típicas são genericamente classificadas e o comportamento dos sistemas em torno destes pontos é analisado. Nosso foco é encontrar condições para a existência de uma família a 1-parâmetro de órbitas periódicas terminando em singularidades no sentido do Teorema Centro de Lyapounov. As técnicas principais usadas são elementos do cálculo simbólico e da Teoria das Singularidades de Aplicações.

LISTA DE SÍMBOLOS

- $\mathfrak{X}^\infty(\mathbb{R}^n)$: conjunto dos germes de campos de vetores de classe C^∞ em $0 \in \mathbb{R}^n$.
- Γ : conjunto dos campos de vetores descontínuos.
- H_0 : variedade de descontinuidade de campos $Z \in \Gamma$.
- H_ε : subvariedade definida por $H_\varepsilon = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \varepsilon x > 0\}$, para $\varepsilon = \pm 1$.
- Z_ε : campo de vetores em $\mathfrak{X}^\infty(H_\varepsilon)$, para $\varepsilon = \pm 1$.
- Ω_Z : conjunto dos campos de vetores descontínuos que são perturbações de $Z \in \Gamma$.
- Γ_{SI} : conjunto dos campos de vetores descontínuos cuja parte semi-linear é simplesmente integrável.
- Γ_E : conjunto dos campos de vetores descontínuos cuja parte semi-linear é elementar.
- Λ : conjunto dos campos de vetores descontínuos que são perturbações de cúspides degeneradas.
- Γ_0 : subconjunto de Γ onde 0 é ponto regular, ou singularidade de dobra, ou singularidade de cúspide, ou singularidade rabo de andorinha.
- Ω_0 : conjunto dado por $\{\Gamma_0 \times \Gamma_0\} \cap \Omega_{Z_0}$.
- Ξ_0 : conjunto dos campos de vetores descontínuos fracamente estruturalmente estáveis em Ω_0 .

- Ω_1 : conjunto bifurcação em Ω_0 dado por $\Omega_0 \setminus \Xi_0$.
- Ξ_1 : conjunto dos campos de vetores descontínuos fracamente estruturalmente estáveis em Ω_1 .
- Ω_p : conjunto dos campos de vetores descontínuos dado na forma normal primitiva $Z_{a,b,c,d,e}$.

Índice

Abstract	iv
Resumo	v
Lista de Símbolos	vi
Introdução	1
1 Preliminares, Definições e Conceitos Básicos	5
1.1 Algumas Notações e Definições	5
1.2 O conjunto Ω_{Z_0}	7
1.3 Órbitas e Singularidades Típicas	9
1.4 Singularidades de Aplicações e Sistemas Descontínuos	13
2 Resultados Principais	15
3 Dobras e Cúspides	23
3.1 Introdução	23
3.2 Campos Vetoriais do Tipo I	25
3.3 Dobra Simplesmente Integrável	25
3.4 Perturbações Não Reversíveis de Dobras Simplesmente Integráveis	29
3.5 Dobras Elementares e Dobras do Tipo Sela	30

3.6	Perturbações de Dobras do Tipo Sela	36
3.7	Dobra Tipo Elíptica	41
3.8	Perturbações, Órbitas Periódicas e Curvas Invariantes de Dobras Elípticas	44
3.9	Singularidades do Tipo Cúspide	49
3.10	Perturbações Simplesmente Integráveis de Singularidades de Cúspides	52
3.11	Cúspides Degeneradas	56
3.12	Tipos de Singularidades	59
3.13	Órbitas Periódicas	61
4	Rabo de Andorinha	65
4.1	Introdução	65
4.2	Resultados Principais e H_0 -estabilidade em Ω_0	69
4.3	Estudo Local de Pontos Singulares	73
4.4	Conjuntos Singulares	77
4.4.1	Dobras	78
4.4.2	Cúspides	79
4.4.3	4-Dobras	80
4.4.4	Prova do Teorema 4.1.1	83
4.5	Estratificação das Singularidades	83
4.6	Estudo dos Conjuntos $V \cap \Sigma_i$	90
4.7	Prova do Teorema 4.2.1	93
4.8	Diagrama de Bifurcação	93
4.9	Prova do Teorema 4.2.2	95
4.10	Órbitas Periódicas de Campos $Z \in \Omega$	96
4.11	Estrutura Quasi-homogênea e Teoria da Seqüência de Sturm	99
4.11.1	Cálculo de Sub-Domínios Explícitos de $\Theta_0(Q)$	108
4.12	Existência de Órbitas Periódicas para $Z_{a,b,c,d,e} \in \Omega_p$	118
4.13	Laços Singulares Um-Periódico	119
4.14	Prova dos Teoremas Principais	121

5 Estudos Futuros e Considerações Finais	123
5.1 Estudos Futuros	123
5.2 Considerações Finais	126
A Bases de Gröbner	127
Bibliografia	134
Índice Remissivo	138

Introdução

O objetivo principal desse trabalho é discutir a dinâmica de determinadas classes de campos de vetores descontínuos em \mathbb{R}^4 , fazer uma classificação genérica de suas singularidades típicas e verificar a existência de famílias de órbitas periódicas terminando em singularidades típicas. Antes de descrevermos detalhadamente o que iremos estudar, convém fazermos um breve resumo histórico do surgimento e desenvolvimento dos Sistemas Dinâmicos dentro da matemática, nos últimos anos.

A matemática, como já sabemos, é uma das ciências mais antiga, senão a mais. Ela vem atraindo a atenção de grandes homens desde os primórdios antes de Cristo, até os tempos atuais. Contudo, a matemática moderna (se assim podemos chamar), teve início no século XVII, devido ao descobrimento do Cálculo Infinitesimal, por I. Newton e G.W. Leibnitz. Já em meados do século XVIII, surgem os primeiros trabalhos envolvendo equações diferenciais ordinárias, devido a J.L. Lagrange e W.R. Hamilton. Motivado por problemas em mecânica celeste, o matemático francês H. Poincaré, nos anos de 1881, 1882 e 1885, publica seu famoso memorial [P] e cria com isso, um novo ramo da matemática, a teoria qualitativa das equações diferenciais e com ela, uma nova área de pesquisa: os Sistemas Dinâmicos.

Apesar de muitos trabalhos relevantes feitos na época, houve um período onde os sistemas dinâmicos caíram em esquecimento. Na década de 60, os Sistemas Dinâmicos voltaram a ter um grande impulso entre os matemáticos e muitos nomes importantes surgiram nesse período. Podemos citar, por exemplo, Smale, Kolmogorov, Moser, Peixoto, Arnold, Thom etc.

Devido ao seu extraordinário avanço, resultados relevantes se multiplicaram em Sistemas Dinâmicos numa velocidade extraordinária e nos dias atuais, inúmeros ramos da ciência utilizam desses resultados existentes na teoria qualitativa das equações diferenciais. Muitas áreas foram criadas dentro desta teoria, cada qual focada em estudos de determinadas propriedades, como por exemplo, o estudo de Sistemas Dinâmicos com simetria (sistemas equivariantes reversíveis e hamiltonianos), o estudo de sistemas com comportamento complicado (Teoria do Caos), estudos de singularidades e bifurcações em Sistemas Dinâmicos (Teoria das Singularidades e Bifurcações), entre muitas outras.

Um dos problemas mais importantes em Sistemas Dinâmicos é estabelecido pela seguinte estratégia.

Dado um Sistema Dinâmico:

- Detectar a existência de conjuntos minimais M (por exemplo, toros invariantes);
- Estudar a estrutura topológica de M ;
- Analisar o comportamento de M em relação ao fluxo gerado pelo sistema.

Dentro da linha geométrica/qualitativa dos Sistemas Dinâmicos e em termos relativos, muito pouco se conhece sobre sistemas descontínuos. Essa é uma área recentemente criada e que vem recebendo nas últimas décadas, considerado interesse entre os matemáticos. Essa área que está intimamente ligada à Teoria do Controle, engloba os chamados “relay systems” ou “sistemas com chaveamento”, teve um impulso com os trabalhos de Tsypki [T2] em 1955, Boltyanskii e Pontryagin [BP2] em 1956 e Anosov [A] em 1959. Ela possui aplicações em várias áreas da ciência, como em Engenharia ([H3] e [KK]), Teoria do Controle ([FL] e [T3]), Economia ([I] e [H1]) e Biologia [B1].

Filippov em [F2], deu uma importante contribuição nessa área, formulando um conceito refinado de soluções para campos de vetores descontínuos.

Nosso objetivo principal é estudar o comportamento desses sistemas descontínuos em torno de uma singularidade típica. O trabalho que aqui apresentamos utiliza da formulação dada por Filippov e visa continuar e estender os resultados obtidos em [JT2] e [JT3]. Nesses

dois trabalhos, os autores obtiveram, para uma determinada classe de campos de vetores simétricos (mais precisamente reversíveis), a classificação das singularidades típicas (via equivalência fraca), e a obtenção de condições necessárias e suficientes, para a existência de famílias a um parâmetro de órbitas periódicas, convergindo para uma órbita típica. Um dos objetivos principais desse trabalho, foi “quebrar” a simetria dessa classe de campos de vetores, introduzindo genericamente, novos parâmetros, de tal forma que a classe agora considerada não apresentasse a propriedade de reversibilidade e englobasse os casos considerados em [JT2] e [JT3].

As técnicas utilizadas para obtermos os resultados gerais desse trabalho, baseiam-se em parte na teoria de singularidades de aplicações em dimensões superiores, por meio de germes de campos de vetores. Utilizamos também a teoria das bases de Gröbner e recursos computacionais para desenvolvermos um algoritmo com o intuito de obtermos condições necessárias sobre os parâmetros para existência de famílias de órbitas periódicas. Ressaltamos que a ênfase desse trabalho será dada em detectar condições para a existência de famílias a um parâmetro de órbitas periódicas, convergindo para órbitas típicas. Vamos agora fazer uma breve descrição das partes desse trabalho. Ele é composto de cinco capítulos e um apêndice e está organizado da seguinte forma.

No Capítulo 1, apresentamos os conceitos básicos e as definições necessárias para o desenvolvimento dos demais capítulos.

No Capítulo 2, apresentamos sob uma linguagem elementar e de forma resumida, os principais resultados obtidos e que serão demonstrados nos capítulos seguintes.

No Capítulo 3, trabalhamos com perturbações de campos de vetores provenientes da forma normal de Anosov em \mathbb{R}^4 . Apresentamos os tipos de singularidades que podem ocorrer em cada família de campos de vetores. Não nos preocupamos em fazer a classificação dessas singularidades neste capítulo, pois elas surgem naturalmente como casos particulares, em sistemas trabalhados no Capítulo 4. Nesse mesmo capítulo, obtemos condições necessárias e suficientes para que tenhamos órbitas periódicas para as famílias de campos aqui considerados.

No Capítulo 4, trabalhamos com uma classe de campos do tipo rabo de andorinha, que

de certa forma, é uma generalização da família de campos considerados nos trabalhos [JT2] e [JT3]. Para essa classe, fizemos a classificação das singularidades e dos campos através da equivalência fraca e obtemos condições necessárias e suficientes sobre os parâmetros dessa família, para que tenhamos órbitas periódicas convergindo para uma órbita típica.

Por fim, no Capítulo 5, fizemos uma exposição dos projetos de estudos que estão abertos e que ficarão para estudos futuros.

A tese consta também de um Apêndice, no qual apresentamos, de forma resumida e simplificada, a teoria das Bases de Gröbner. Teoria essa que utilizamos constantemente no andar da tese.

CAPÍTULO 1

Preliminares, Definições e Conceitos Básicos

Neste capítulo, vamos introduzir os conceitos e definições básicas que usaremos no decorrer do texto. Apresentaremos também uma breve descrição de alguns trabalhos relevantes dentro da teoria dos sistemas com chaveamento.

1.1 Algumas Notações e Definições

Seja X um germe de campo de vetores de classe C^∞ em $0 \in \mathbb{R}^n$. Denotamos por $\mathfrak{X}^\infty(\mathbb{R}^n) = \{X : X \in C^\infty\}$ o conjunto de tais campos de vetores, munido da topologia C^∞ .

Seja $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, um germe de aplicação C^∞ , com $0 \in \mathbb{R}$ um valor regular para h . No decorrer do texto, h será usado para denotar a projeção π_1 em \mathbb{R}^n , isto é, $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1$. Definamos por $H_0 = h^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$ a pré-imagem do 0 pela h . É conhecido que H_0 é uma subvariedade local de dimensão $n - 1$, que divide o espaço \mathbb{R}^n em duas componentes conexas $H_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}$ e $H_{-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 < 0\}$. Eventualmente, no decorrer do trabalho, sem menção explícita, consideraremos casos não locais. Não distinguiremos a notação de um germe e qualquer um de seus representantes.

Considere $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{R}^n)$ dois campos de vetores. Um campo de vetores Z é dito ter o lado direito descontínuo se ele é definido como

$$Z(x) = \begin{cases} X(x) & \text{se } x_1 > 0 \\ Y(x) & \text{se } x_1 < 0 \end{cases}$$

Denotaremos por $Z = (X, Y)$ e por $\Gamma = \{Z = (X, Y) : X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ o conjunto dos germes de campos de vetores descontínuos em \mathbb{R}^n munido da topologia produto.

Nesse trabalho, consideraremos o caso $n = 4$ e denotaremos por Z_ε e restrição do campo de vetores Z ao sub-espaço H_ε para $\varepsilon = \pm 1$. Se o campo de vetores Z_ε estende a $\bar{H}_\varepsilon = H_\varepsilon \cup H_0$, denotaremos por \bar{Z}_ε o campo de vetores resultante. Recordemos que se X é um campo de vetores C^∞ e h uma função C^∞ , podemos calcular a função $Xh = \langle X, \nabla h \rangle$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto escalar padrão em \mathbb{R}^4 . Note que Xh é também uma função C^∞ , e então podemos definir a função $X^2h = \langle X, \nabla Xh \rangle$. Logo, por recorrência, definimos $X^k h = \langle X, \nabla X^{k-1} h \rangle$, $k \geq 1$.

Anosov publicou em 1959 o que podemos considerar o trabalho pioneiro em termo de classificação de sistemas com chaveamento [A]. Nesse trabalho que foi colocado por Pontryagin, ele discutiu o sistema com chaveamento em \mathbb{R}^n da forma:

$$X = Ax + \operatorname{sgn}(x_1)K$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $A \in M_{n \times n}$ e $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ é um vetor constante. Seu objetivo nesse trabalho, foi dar condições sobre a estabilidade (de Lyapunov) assintótica local da origem, que é uma singularidade típica do sistema. Foram detectados quatro diferentes tipos topológicos de campos de vetores, representados pelas suas formas normais. Um deles coincide com a forma semi-linear estudada no capítulo 4.

Uma classe de campos de vetores descontínuos que iremos estudar, são aqueles reversíveis mediante alguma involução. Vamos introduzir tais conceitos.

Definição 1.1.1. *Seja $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ um germe de difeomorfismo de classe C^∞ em 0. Dizemos que φ é uma **involução** se, $\varphi \circ \varphi = Id$.*

Definição 1.1.2. *Seja $Z = (Z_\varepsilon, Z_{-\varepsilon}) \in \Gamma$ um campo de vetores descontínuo, com H_0 a variedade de descontinuidade e φ uma involução. Dizemos que Z é **φ -reversível**, se:*

$$\begin{cases} \operatorname{Fix}(\varphi) \subset H_0; \\ \varphi * Z_\varepsilon = -Z_{-\varepsilon} \circ \varphi \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $(\varphi * Z_\varepsilon)(p) = (D\varphi_p \circ Z_\varepsilon)(p)$.

Recordemos o Teorema de Montgomery-Bochner (ver [MZ]) em \mathbb{R}^4 , que em sua formulação mais simples nos diz que toda involução φ tal que $\text{Fix}(\varphi)$ é uma subvariedade de dimensão 2, então φ é C^∞ -conjugado a um germe de involução linear $\varphi : (x, y, z, w) \mapsto (-x, y, -z, w)$.

Nos capítulos seguintes, estudaremos uma determinada classe de campos de vetores descontínuos e suas perturbações. Iremos limitar o universo de tais perturbações inspirado principalmente em elementos básicos da Teoria do Controle [ZB]. Conceituaremos esse fato a seguir.

1.2 O conjunto Ω_{Z_0}

Fixemos $Z_0 \in \Gamma$. O conjunto Ω_{Z_0} será formado pelos campos de vetores $Z \in \Gamma$, que são pequenas deformações de Z_0 , escrito da seguinte forma, $Z = Z_0 + F$, onde $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ é C^∞ . Escrevemos cada $f_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ como $f_i = H_2^i + H_3^i + \dots$, onde H_j^i é uma função homogênea de grau j e a *estimativa* de f_i (definida a seguir) é menor ou igual a $5 - i$, para $i = 1, \dots, 4$.

Definimos a *estimativa* de uma função C^∞ qualquer, $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte maneira. Coloque peso 4 na variável x , 3 em y , 2 em z e 1 em w . Para cada monômio $m = x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}w^{\alpha_4}$, defina o número $d_0(m) = 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4$ como sendo o peso de m . Se f é tal que $f(0) = 0$, então a *estimativa* de f , denotada por $\nu_0(f)$ é dada por:

1. Se todas as derivadas de f em 0 se anulam, então colocamos $\nu_0(f) = +\infty$.

Por outro lado, podemos expandir f próximo de $0 \in \mathbb{R}^4$, ordenando os termos não nulos de sua expansão de Taylor com respeito aos pesos dos monômios dessa expansão.

2. Para toda expansão com termos não nulos, existe um monômio m_0 em sua expansão, minimal com relação ao peso e definimos $\nu_0(f) = d_0(m_0)$.

Exemplo 1.2.1. Considere $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = (y + z) \sin(x + y)$. Seja

Tf a sua expansão por Taylor numa vizinhança da origem. Temos que

$$Tf(x, y, z) = xy + xz + y^2 + yz - \frac{1}{6}(x^3y + x^3z) - \frac{1}{2}(x^2y^2 + x^2yz + xy^3 + xy^2z + y^4) - \frac{1}{6}(y^4 + y^3z) + o(|(x, y, z)|^5).$$

Colocando peso 3 na variável x , 2 em y e 1 na variável z , temos que a estimativa de f é $\nu_0(f) = 3$ e é dado pelo monômio yz .

Lema 1.2.1. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ com $f(0) = 0$. Se $\nu_0(f) = k < +\infty$, então $\nu_0\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \geq k + j - n - 1$.*

Demonstração. Considere a expansão de Taylor de f em uma vizinhança de 0 e agrupamos essa expansão pelos pesos dos monômios da seguinte forma: $f = \sum_{i \in A \subset \mathbb{N}} \sum_{j=1}^r \alpha_i^j m_i^j + o(r+1)$, onde para todo $j \in \{1, \dots, r\}$, m_i^j é um monômio tal que $d_0(m_i^j) = j$ e $\alpha_i^j \in \mathbb{R}$. Assumimos que $f \neq 0$ e denotamos por m o monômio que dá o valor de $\nu_0(f)$. Iremos calcular o valor $\nu_0\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ para $1 \leq j \leq n$. Note que $d_0(m_l) \geq d_0(m)$ para todo m_l , $1 \leq l \leq r$. Ponha $m_l = x_1^{n_{1l}} x_2^{n_{2l}} \dots x_k^{n_{kl}} \dots x_n^{n_{nl}}$. Então:

$$\frac{\partial m_l}{\partial x_j} = n_{jl} x_1^{n_{1l}} x_2^{n_{2l}} \dots x_{j-1}^{n_{(j-1)l}} x_j^{n_{jl}-1} x_{j+1}^{n_{(j+1)l}} \dots x_n^{n_{nl}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Então } d_0\left(\frac{\partial m_l}{\partial x_j}\right) &= n_{1l} + (n-1)n_{2l} + \dots + (n-(j-1))(n_{jl}-1) + \dots + 1.n_{nl} = \\ &= n.n_{1l} + \dots + (n-(j-1)).n_{jl} + \dots + 1.n_{nl} - (n-(j-1)) = d_0(m_l) + j - n - 1. \end{aligned}$$

Daí,

$$d_0\left(\frac{\partial m_l}{\partial x_j}\right) = d_0(m_l) + j - n - 1 \geq d_0(m) + j - n - 1.$$

Portanto $\nu_0\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = d_0\left(\frac{\partial m_k}{\partial x_j}\right) \geq d_0(m) + j - n - 1$, para algum m_k . Desde que $d_0(m) = \nu_0(f) = k$, temos $\nu_0\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \geq k + j - n - 1$. ■

No que segue, fixemos a involução $\varphi(x, y, z, w) = (-x, y, -z, w)$ e denotemos por s a função $s : (x, y, z, w) \rightarrow (x^2, y, z^2, w)$.

As perturbações que iremos estudar estão em Ω_{Z_0} , com algumas exceções a serem explicitadas em cada caso individualmente.

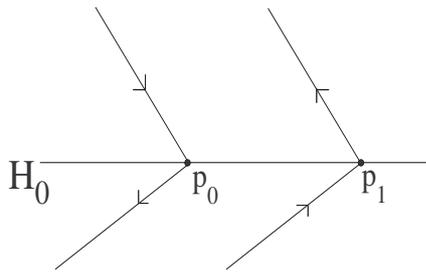
1.3 Órbitas e Singularidades Típicas

Nessa seção, vamos descrever como interpretamos as órbitas de campos de vetores $Z \in \Omega_{Z_0}$ e definir genericamente os diferentes tipos de singularidades típicas de Z , chamadas de H_0 -singularidades. Sobre as órbitas, o principal detalhe é quando consideramos pontos na variedade de descontinuidade, como definir o campo de vetores nesses pontos. Note que para pontos fora dessa variedade, o campo está bem definido, pois em $H_{\pm\epsilon}$, Z é de classe C^∞ . Contudo, para pontos $p \in H_0$, as curvas soluções de Z obedecem a formulação de Filippov. Nestas condições, seguindo a terminologia estabelecida por Filippov em [F2], distinguimos as seguintes regiões em H_0 :

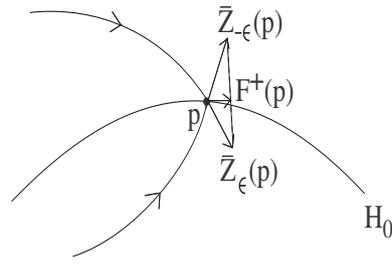
1. **Região de Costura:** caracterizada pela inequação $\bar{Z}_\epsilon h(p) \bar{Z}_{-\epsilon} h(p) > 0$ com $p \in H_0$. As trajetórias de Z nesses pontos atravessam H_0 (ver Figura 1.1.1).
2. **Região de Deslize:** caracterizada pela inequação $\bar{Z}_\epsilon h(p) < 0$ e $\bar{Z}_{-\epsilon} h(p) > 0$ com $p \in H_0$. Sobre essa região, definimos o campo de vetores $F^+ = F^+(\bar{Z}_\epsilon, \bar{Z}_{-\epsilon})$ como segue. Considere os vetores $\bar{Z}_{\pm\epsilon}(p) = \lim_{p_{\pm\epsilon}^* \rightarrow p} Z_{\pm\epsilon}(p_{\pm\epsilon}^*)$ para $p_{\pm\epsilon}^* \in H_{\pm\epsilon}$ e $\epsilon = \pm 1$ e o cone gerado por esses dois vetores. O vetor $F^+(p)$ representa o vetor nesse cone que é tangente à H_0 em p (ver Figura 1.1.2).
3. **Região de Escape:** caracterizada pela inequação $\bar{Z}_\epsilon h(p) > 0$ e $\bar{Z}_{-\epsilon} h(p) < 0$ com $p \in H_0$. Sobre essa região, definimos o campo de vetores $F^- = (-F^+(-\bar{Z}_{-\epsilon}, -\bar{Z}_\epsilon))(p)$ (ver Figura 1.1.3).

Definição 1.3.1. *Seja $Z \in \Omega_{Z_0}$. Dizemos que $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^4$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto é uma solução simples de Z se:*

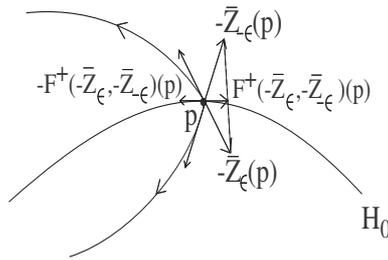
1. $t \mapsto \gamma(t)$ é contínua e C^1 por partes;
2. para todo $t \in I$ tal que $\gamma(t) \in H_0$, $Z(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)$;
3. $\gamma(I) \cap H_0$ é um subconjunto discreto de H_0 .



1.1.1: região de costura



1.1.2: região de deslize



1.1.3: região de escape

Figura 1.1: Três diferentes regiões em H_0 , segundo a terminologia apresentada por Filippov.

Conhecido como definir as trajetórias para campos de vetores $Z \in \Omega_{Z_0}$, podemos definir a transformação primeiro retorno ou aplicação de Poincaré associado a um ponto $p \in H_0$, que será bastante utilizada nos capítulos e seções posteriores para a obtenção de órbitas periódicas. Ressaltaremos que vamos utilizar H_0 como a subvariedade base para a aplicação de Poincaré.

Definição 1.3.2. (*Aplicação de Poincaré ou Transformação primeiro retorno*)

Seja $Z \in \Omega_{Z_0}$, $Z = (Z_{\epsilon}, Z_{-\epsilon})$, $p \in H_0$ e $\gamma_{\epsilon} : I \rightarrow \bar{H}_{\epsilon}$ a trajetória de \bar{Z}_{ϵ} passando por p . Suponhamos que essa trajetória retorne a H_0 no ponto q , em tempo mínimo $t = t_0$. Consideremos $\gamma_{-\epsilon} : \bar{I} \rightarrow \bar{H}_{-\epsilon}$ a trajetória de $\bar{Z}_{-\epsilon}$ passando por q . Suponhamos também que essa trajetória retorne a H_0 no ponto p_0 , em tempo mínimo $\mu = \mu_0$. Definimos a aplicação de Poincaré de Z associada a γ_{ϵ} e p , como a aplicação definida em um subconjunto de H_0 que contém a origem. Esse subconjunto que não é uma vizinhança de 0 em H_0 depende de condições extras para que as trajetórias de $\bar{Z}_{\pm\epsilon}$ retornem a H_0 . Por abuso de linguagem,

denotaremos esta aplicação por

$$P : (H_0, 0) \rightarrow (H_0, 0)$$

$$p \mapsto p_0$$

Vamos definir as singularidades de $Z \in \Omega_{Z_0}$ que estão sobre H_0 .

Definição 1.3.3. *Seja $Z \in \Omega_{Z_0}$. Dizemos que $p \in \mathbb{R}^4$ é um ponto regular de Z se*

1. *Caso $p \in H_0$: Se $\bar{Z}_\varepsilon h(p) \cdot \bar{Z}_{-\varepsilon} h(p) \neq 0$;*
2. *Caso $p \in H_\varepsilon$: Se $\bar{Z}_\varepsilon h(p) \neq 0$.*

Caso contrário, dizemos que p é um ponto singular , ou uma H_0 -singularidade.

Em H_0 , podemos diferenciar alguns tipos de H_0 -singularidades pelo sinal das funções $Z_{\pm\varepsilon}^k h$, $k \geq 1$ e pela ordem de contato do campo de vetores com a subvariedade H_0 . Logo, temos as seguintes definições.

Definição 1.3.4. *(Singularidade dobra)*

Seja $Z \in \Omega_{Z_0}$ e $p \in H_0$. Dizemos que p é uma singularidade dobra para Z_ε se $h(p) = \bar{Z}_\varepsilon h(p) = 0$ e $\bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) \neq 0$. Nesse caso, dizemos que o contato entre a órbita de \bar{Z}_ε e H_0 em p é quadrática.

Para as singularidades dobras, até o momento, podemos destacar três tipos, dependendo dos sinais das funções $\bar{Z}_{\pm\varepsilon}^2 h$ no ponto p . Esses tipos são:

1. *dobra parabólica: se $\varepsilon \bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) > 0$ e $\varepsilon \bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) > 0$ para $\varepsilon = \pm 1$.*
2. *dobra hiperbólica ou 2H-dobra: se $\varepsilon \bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) > 0$ para $\varepsilon = \pm 1$.*
3. *dobra elíptica ou 2E-dobra: se $\varepsilon \bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) < 0$ para $\varepsilon = \pm 1$.*

Definição 1.3.5. *(Singularidade cúspide)*

Seja $Z \in \Omega_{Z_0}$ e $p \in H_0$. Dizemos que p é uma singularidade cúspide, ou uma 3C singularidade para Z_ε , se $h(p) = \bar{Z}_\varepsilon h(p) = \bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) = 0$, $\bar{Z}_\varepsilon^3 h(p) \neq 0$ e o conjunto $\{Dh(p), D\bar{Z}_\varepsilon h(p), D\bar{Z}_\varepsilon^2 h(p)\}$ é linearmente independente. Nesse caso, dizemos que a ordem de contato entre a órbita de \bar{Z}_ε e H_0 em p é cúbica.

Para as singularidades cúspides, vamos distinguir três tipos. Vamos supor que $\bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) = 0$ e dependendo do sinal da função $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h$ no ponto p , os tipos de singularidades são:

1. *cúspide simétrica*: se $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) = 0$.
2. *cúspide híbrida*: se $\varepsilon \bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) < 0$.
3. *meia-cúspide*: se $\varepsilon \bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) > 0$.

Observe que existem outros tipos de singularidades genéricas que serão classificadas no Capítulo 4, Teorema 4.1.1.

Definição 1.3.6. (*Singularidade tipo 4-dobra ou rabo de andorinha*)

Seja $Z \in \Omega_{Z_0}$ e $p \in H_0$. Dizemos que p é uma singularidade tipo 4-dobra para Z_ε se $h(p) = \bar{Z}_\varepsilon h(p) = \bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) = \bar{Z}_\varepsilon^3 h(p) = 0$, $\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p) \neq 0$, o conjunto $\{Dh(p), D\bar{Z}_\varepsilon h(p), D\bar{Z}_\varepsilon^2 h(p), D\bar{Z}_\varepsilon^3 h(p)\}$ é linearmente independente e p é um ponto regular de $\bar{Z}_\varepsilon h|_{H_0}$. Nesse caso, dizemos que a ordem de contato entre a órbita de \bar{Z}_ε e H_0 em p é de grau 4. Denotamos essa singularidade como 4E-dobra ou 4H-dobra.

Vamos definir trajetórias 1-periódicas e laço singular 1-periódico.

Definição 1.3.7. (*Órbita 1-periódica*)

Seja $Z \in \Omega_{Z_0}$, $p \in H_0$ e $\gamma_{\pm\varepsilon}$ as trajetórias de $Z_{\pm\varepsilon}$, respectivamente. Considere a aplicação primeiro retorno introduzida na Definição 1.3.2. Uma órbita 1-periódica de Z é uma órbita passando por um ponto fixo da aplicação primeiro retorno.

Definição 1.3.8. (*Laço singular 1-periódico*)

Seja $Z \in \Omega_{Z_0}$. Dizemos que a trajetória $t \mapsto \gamma(t)$, $t \in]-\infty, \infty[$ de Z é um laço singular 1-periódico se γ é periódico, o número de pontos regulares de $\gamma(\mathbb{R}) \cap H_0$ é dois, e qualquer outro ponto de $\gamma(\mathbb{R}) \cap H_0$ são dobras parabólicas.

1.4 Singularidades de Aplicações e Sistemas

Descontínuos

Nessa seção, vamos relacionar o estudo de sistemas descontínuos com o estudo de singularidades de aplicações. Veremos como as técnicas da Teoria de Singularidades de Aplicações podem nos auxiliar na compreensão desses sistemas. Vamos restringir essa discussão ao caso de dimensão 4. Primeiro faremos uma parte construtiva e em seguida mostraremos como essa construção pode ser aplicada a sistemas descontínuos.

1. Seja X um germe de campo de vetores suave em $0 \in \mathbb{R}^4$. Considere

$$X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial y} + \xi_3 \frac{\partial}{\partial z} + \xi_4 \frac{\partial}{\partial w}.$$

Suponha que $X(0) \neq 0$ e $\xi_1(0) = 0$. Seja H_0^\perp uma seção transversal qualquer a X em 0 . Pelo Teorema da Função Implícita, podemos concluir que:

Para cada $p \in (H_0, 0)$, existe um único tempo $t = t(p) \in (\mathbb{R}, 0)$, tal que a órbita $\gamma : t \mapsto \gamma(p, t)$ de X partindo de p em tempo 0, encontra H_0^\perp em um único ponto $q = \gamma(p, t(p))$. Definimos assim, uma aplicação suave $f_X : (H_0, 0) \mapsto (H_0^\perp, 0)$ por $f_X(p) = q$. Essa aplicação é uma ferramenta poderosa no estudo de campos de vetores em variedades com bordo (ver [ST2], [T1] e [V]).

Podemos observar que o conjunto tangente entre X e H_0 coincide com o conjunto singular de f_X . Essa construção implementa o seguinte método. Se estamos interessados em encontrar uma equivalência entre dois campos de vetores X e Y que preservam H_0 , então o problema pode ser reduzido a encontrar uma equivalência entre f_X e f_Y no sentido de singularidades de aplicações.

2. Um campo de vetores descontínuo Z , pode ser representado, a grosso modo, por um par de campos de vetores $(\bar{Z}_\varepsilon, \bar{Z}_{-\varepsilon})$. Assuma que 0 é uma singularidade de Z . Podemos então associar a ele um par de germes de aplicações $(f_\varepsilon, f_{-\varepsilon}) : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ e conseqüentemente, um diagrama divergente de aplicações $(\mathbb{R}^3, 0) \xleftarrow{f_{-\varepsilon}} (\mathbb{R}^3, 0) \xrightarrow{f_\varepsilon} (\mathbb{R}^3, 0)$.

Por exemplo, o campo de vetores $L_a(x, y, z, w) = (y, z, w, a \cdot \text{sgn}(x))$ é representado por germes f_ε e $f_{-\varepsilon}$, onde ambos tem, em 0, um rabo de andorinha. Além disso, o conjunto singular de ambas aplicações coincidem, bem como suas linhas de cúspides. Assim, a Teoria de Singularidades de Aplicações nos fornece uma pré-classificação genérica dos campos de vetores em Ω_{Z_0} .

CAPÍTULO 2

Resultados Principais

Nesse Capítulo, iremos discutir, a grosso modo e empiricamente, os resultados principais que serão demonstrados no decorrer do texto. No Capítulo 3, estudamos as classes de campos vetoriais descontínuos em \mathbb{R}^4 , que apresentam singularidades do tipo dobra e cúspide. O objetivo desse estudo, foi sob determinadas situações, detectar condições necessárias e suficientes sobre os parâmetros para que tenhamos famílias de órbitas 1-periódicas. Fizemos uma pré-classificação das singularidades através da Teoria das Singularidades. As singularidades pré-classificadas nesse capítulo também são abordadas no Capítulo 4 e também classificadas pela equivalência fraca (a ser definido adiante), pois elas aparecem genericamente em classes de sistemas, expressados por uma família genérica a 5-parâmetros de campos de vetores em Ω_{Z_0} .

No Capítulo 4, é apresentado a classificação das singularidades típicas em Γ via equivalência fraca. Para uma família a 5-parâmetros, obtemos condições necessárias e suficientes sobre os parâmetros para existência de órbitas periódicas e apresentamos, de forma explícita, algumas regiões no espaço de parâmetros, onde essas órbitas ocorrem.

Para apresentarmos os resultados principais, vamos primeiro introduzir algumas notações utilizadas nesse capítulo e que nos auxiliarão na compreensão dos enunciados.

Seja $Z = (Z_\varepsilon, Z_{-\varepsilon}) \in \Omega_{Z_0}$. Denotamos por:

1. $\Upsilon_R = \{Z \in \Omega_{Z_0} : 0 \text{ é ponto regular para } \bar{Z}_{\pm\varepsilon}\}$.

2. $\Upsilon_{xy} = \{Z \in \Omega_{Z_0} : 0 \text{ é uma singularidade do tipo "x" para } \bar{Z}_\varepsilon, \text{ e do tipo "y" para } \bar{Z}_{-\varepsilon}\};$

Onde x e y podem representar dobras ("d"), cúspides ("c") ou rabos de andorinha ("r"), todos definidos no capítulo anterior. Temos portanto, os seguintes conjuntos:

$\Upsilon_{dd}, \Upsilon_{cc}, \Upsilon_{rr}, \Upsilon_{dc}, \Upsilon_{cd}, \Upsilon_{rd}, \Upsilon_{dr}, \Upsilon_{rc}$ e Υ_{cr} .

A partir disso, denotamos por:

1. $\Upsilon_0 = \Upsilon_R \cup \Upsilon_{dd};$

2. $\Upsilon_1 = \Upsilon_{dc} \cup \Upsilon_{cd};$

3. $\Upsilon_2 = \Upsilon_{cc} \cup \Upsilon_{rd} \cup \Upsilon_{dr};$

4. $\Upsilon_3 = \Upsilon_{rc} \cup \Upsilon_{cr};$

5. $\Upsilon_4 = \Upsilon_{rr};$

6. $\Upsilon = \bigcup_{i=0}^4 \Upsilon_i.$

Sabemos que Υ é aberto e denso em Ω_{Z_0} e $\Upsilon_i \subset \bar{\Upsilon}_{i-1}$, para $i = 1, \dots, 4$. Existe um subconjunto $\Gamma_0 \subset \Upsilon_0$ tal que, em um sistema de coordenadas conveniente, cada $X \in \Gamma_0$ pode ser escrito em sua forma normal primitiva (caracterizada no Capítulo 3). Além disso, detectamos a existência de subconjuntos Γ_s (dobra tipo sela) e Γ_e (dobra tipo elíptica, ambos a serem caracterizados no Capítulo 3), abertos de Υ_0 e contidos em Γ_0 , para o qual mostramos, sob determinadas condições, a existência de órbitas 1-periódicas.

Para campos de vetores reversíveis $X \in \Upsilon_0$, destacamos os seguintes resultados.

Proposição A. (ref. Proposição 3.4.1) *Existe um subconjunto Γ_{SI} aberto em Υ_0 , contido em Γ_0 (a ser caracterizado no Capítulo 3) tal que, se $p \in H_0$ não é uma H_0 -singularidade de $X \in \Gamma_{SI}$, então p pertence a alguma órbita periódica de X .*

Quanto à órbitas periódicas de campos vetoriais $X \in \Gamma_s$, temos o seguinte resultado.

Teorema A. (ref. Teorema 3.6.1) *Sejam X_α perturbações em Ω_X de $X \in \Gamma_s$ e $\alpha \in (\mathbb{R}^5, 0)$. Então existem conjuntos algébricos não vazios A, B, C, D, E de $(\mathbb{R}^5, 0)$ tais que:*

1. $B \subset A$ é aberto e denso em A e se $\alpha \in B$, então X_α não possui órbitas 1-periódicas;
2. $C \subset \partial B$ e se $\alpha \in C$, então existe uma família a 2-parâmetros de órbitas periódicas para X_α ;
3. $D \subset A^c$ é aberto e denso em A^c e não existe órbitas periódicas para X_α caso $\alpha \in D$;
4. $E = A^c \cap \partial D$ e se $\alpha \in E$, então existe uma família a dois parâmetros de órbitas 1-periódicas para X_α .

Um resultado análogo a esse, mas para $X \in \Gamma_e$ é dado pelo seguinte Teorema.

Teorema B. (ref. Teorema 3.8.1) *Sejam X_α perturbações em Ω_X de $X \in \Gamma_e$. Para $\alpha \in (\mathbb{R}^6, 0)$, existem conjuntos algébricos não vazios A_1 e A_2 de $(\mathbb{R}^6, 0)$ tais que:*

1. A_1 é tal que se $\alpha \in A_1$, então X_α não possui órbitas 1-periódicas;
2. $A_2 \subset \partial A_1$ e se $\alpha \in A_2$, então X_α possui uma família a 1-parâmetro de órbitas 1-periódicas.

Um último resultado para dobras $X \in \Gamma_e$, mostra a existência de uma subvariedade de dimensão 1 no espaço de fase, que é invariante pela aplicação primeiro retorno.

Teorema C. (ref. Teorema 3.8.2) *Sejam X_α perturbações em Ω_X de $X \in \Gamma_e$ e $P_\alpha : (H_0, 0) \rightarrow (H_0, 0)$ a sua aplicação primeiro retorno. Considere A_1 e A_2 os conjuntos obtidos no Teorema B, temos que:*

1. P_α não possui curvas invariantes se $\alpha \in A_1$;
Se restringirmos P_α ao seu 2-jato, temos que
2. Se $\alpha \in A_2$, então a curva invariante de P_α implica na existência de uma família a 1-parâmetro de órbitas 1-periódicas do campo de vetores.

No caso de cúspides simplesmente integráveis, mostramos que sob as hipóteses consideradas, não é possível encontrar condições sobre os parâmetros de tal forma que tenhamos órbitas 1-periódicas. Diante de tal situação, introduzimos uma nova família de campos vetoriais do tipo cúspide, não proveniente da forma normal de Anosov. Para tal família, detectamos condições necessárias sobre os parâmetros para que tenhamos órbitas 1-periódicas.

Quanto aos diferentes tipos de singularidades, vimos que tal família de campos de vetores, apresentam dobras do tipo elíptica, parabólica e hiperbólica; cúspides do tipo $3C$, $3C - 2W$ e $2W - 3C$, para $W = H, E$. Para as órbitas 1-periódicas, obtemos condições necessárias sobre os parâmetros para a existência de órbitas simétricas e órbitas assimétricas.

No Capítulo 4, trabalhamos com singularidades tipo rabo de andorinha. É conveniente salientar que estamos considerando o campo de vetores escrito em sua forma normal de Anosov em \mathbb{R}^4 e tomando perturbações do tipo,

$$Z_w = (y + \lambda_1 w^2 + \lambda_2 w^3 + \mu_1 zw) \frac{\partial}{\partial x} + (z + \mu_2 w^2) \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} + (a \operatorname{sgn}(x) + \mu_3 w) \frac{\partial}{\partial w} \quad (2.1)$$

onde $w = (a, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$.

Vamos denotar por Ω_0 o conjunto formado pelos campos de vetores Z que são perturbações de (2.1) e tal que $Z \in \Upsilon$. Para tais campos de vetores, obtemos uma classificação completa dos tipos de H_0 -singularidades dado pelo Teorema.

Teorema D. (ref. Teorema 4.1.1) *Seja $Z \in \Omega_0$. Em uma vizinhança V de 0 , temos uma das seguintes situações:*

1. $p \in V$ é um ponto regular: $p \in \bar{H}_\varepsilon$ e $\bar{Z}_\varepsilon h(p) \neq 0$ para $\varepsilon = \pm 1$.
2. $p \in V$ é uma singularidade dobra desde que $h(p) = \bar{Z}_\varepsilon h(p) = \bar{Z}_{-\varepsilon} h(p) = 0$, $\bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) \neq 0$ e uma das seguintes possibilidades ocorre:
 - (a) dobra parabólica (ou $2H$ - $2E$ -dobra): $\varepsilon \bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) > 0$ e $\varepsilon \bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) > 0$ para $\varepsilon = \pm 1$.
 - (b) dobra hiperbólica (ou $2H$ -dobra): $\varepsilon \bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) > 0$ para $\varepsilon = \pm 1$.
 - (c) dobra elíptica (ou $2E$ -dobra): $\varepsilon \bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) < 0$ para $\varepsilon = \pm 1$.

3. $p \in V$ é uma singularidade cúspide desde que $h(p) = \bar{Z}_\varepsilon h(p) = \bar{Z}_{-\varepsilon} h(p) = \bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) = 0$, $\bar{Z}_\varepsilon^3 h(p) \neq 0$ e uma das seguintes possibilidades ocorre:
- (a) cúspide: $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) = 0$ e $\bar{Z}_{-\varepsilon}^3 h(p) \neq 0$.
 - (b) cúspide híbrida: $\varepsilon \bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) < 0$.
 - (c) meia-cúspide: $\varepsilon \bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) > 0$.
4. $p \in V$ é uma singularidade de ordem superior desde que $h(p) = \bar{Z}_\varepsilon h(p) = \bar{Z}_{-\varepsilon} h(p) = \bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) = \bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) = 0$ e uma das seguintes possibilidades ocorre:
- (a) 4H-dobra: $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) = \bar{Z}_{-\varepsilon}^3 h(p) = 0$ e $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) > 0$ para $\varepsilon = \pm 1$.
 - (b) 4E-dobra: $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) = \bar{Z}_{-\varepsilon}^3 h(p) = 0$ e $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) < 0$ para $\varepsilon = \pm 1$.
 - (c) 4E-4H-dobra: $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) = \bar{Z}_{-\varepsilon}^3 h(p) = 0$, $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) < 0$ e $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_{-\varepsilon}^4 h(p)) < 0$.
 - (d) 4H-2H-dobra: $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) > 0$ e $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p)) < 0$.
 - (e) 4H-2E-dobra: $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) > 0$ e $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p)) > 0$.
 - (f) 4E-2H-dobra: $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) < 0$ e $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p)) < 0$.
 - (g) 4E-2E-dobra: $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) < 0$ e $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p)) > 0$.
 - (h) 4H-3C-dobra: $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) > 0$, $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) = 0$ e $\bar{Z}_{-\varepsilon}^3 h(p) \neq 0$.
 - (i) 4E-3C-dobra: $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) < 0$, $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) = 0$ e $\bar{Z}_{-\varepsilon}^3 h(p) \neq 0$.

O próximo teorema, nos diz com o quanto essas singularidades estão estratificadas. Para entendermos o enunciado do teorema, vamos introduzir as seguintes notações:

1. $F_{\bar{Z}_{\pm\varepsilon}}$: variedades de dobras de $Z_{\pm\varepsilon}$;
2. $C_{\bar{Z}_{\pm\varepsilon}}$: linhas de cúspides de $Z_{\pm\varepsilon}$;
3. $Q_{\bar{Z}_{\pm\varepsilon}}$: variedades formadas pelas H_0 -singularidades de ordem superior de $Z_{\pm\varepsilon}$.

Teorema E. (ref. **Teorema 4.2.1**) *Seja $Z \in \Omega_0$, em sua forma normal (4.3) tal que $(1 + \varepsilon a \mu_1)(1 + 6\lambda_2 + 2\varepsilon a \mu_2 + 3\varepsilon a \mu_1) \neq 0$ para $\varepsilon = \pm 1$. Existe uma vizinhança V de 0 tal que $H_0 \cap V$ é estratificada (no sentido de Whitney) pela seqüência $V \cap \Sigma_0, V \cap \Sigma_1, V \cap \Sigma_2, V \cap \Sigma_3$, onde $V \cap \Sigma_i, i = 0, 1, 2, 3$, é uma variedade C^∞ de dimensão $3 - i$, com bordo igual a $V \cap \Sigma_{i+1}$. Pontos de $V \cap \Sigma_i$ consistem de:*

1. *caso $i = 1$: singularidade dobra (pontos em $F_{\bar{Z}_\varepsilon} = F_{\bar{Z}_{-\varepsilon}}$);*
2. *caso $i = 2$: singularidade cúspide (pontos em $C_{\bar{Z}_\varepsilon} \cap F_{\bar{Z}_{-\varepsilon}}$, onde $\varepsilon = \pm 1$);*
3. *caso $i = 3$:*
 - (a) *se $\lambda_1 = 0$, então $V \cap \Sigma_3 = V \cap Q_{\bar{Z}_\varepsilon} \cap Q_{\bar{Z}_{-\varepsilon}} = \{0\}$, é uma dobra de ordem superior;*
 - (b) *se $\lambda_1 \neq 0$, então $V \cap \Sigma_3 = \{p, q\}$ com $p \neq 0$ e $q \neq 0$ (observe que $0 \in C_{\bar{Z}_\varepsilon} \cap C_{\bar{Z}_{-\varepsilon}}$ neste caso);*
 - i. *Se $p = q$, então $p \in Q_{\bar{Z}_\varepsilon} \cap Q_{\bar{Z}_{-\varepsilon}}$;*
 - ii. *Se $p \neq q$, então $V \cap \Sigma_3 = (Q_{\bar{Z}_\varepsilon} \cap F_{\bar{Z}_{-\varepsilon}} \cup Q_{\bar{Z}_{-\varepsilon}} \cap F_{\bar{Z}_\varepsilon})$;*
 - (c) *se $\lambda_1 \neq 0$ e $\bar{Z}_{-\varepsilon}^3 h(p) \neq 0$, então $V \cap \Sigma_3 = \{p, q\}$ com $p \neq 0, q \neq 0$, onde $V \cap \Sigma_3 = (Q_{\bar{Z}_\varepsilon} \cap C_{\bar{Z}_{-\varepsilon}} \cup Q_{\bar{Z}_{-\varepsilon}} \cap C_{\bar{Z}_\varepsilon})$;*
4. *para $i \geq 4, V \cap \Sigma_i = \emptyset$.*

Feito a classificação e a estratificação das singularidades, o próximo passo a ser feito é o de classificar os campos de vetores através da equivalência fraca. Para isso, vamos utilizar as definições 4.2.2, 4.2.3 e 4.2.4 e denotar por Ξ_0 o conjunto de todos campos de vetores fracamente estruturalmente estáveis em Ω_0 , por $\Omega_1 = \Omega_0 \setminus \Xi_0$ o conjunto bifurcação em Ω_0 , e por Ξ_1 o conjunto de todos campos de vetores fracamente estruturalmente estáveis relativo a Ω_1 . Com isso, temos o seguinte Teorema.

Teorema F. (ref. Teorema 4.2.2)

1. Um campo de vetores $Z \in \Xi_0$ se e somente se ele é de codimensão 0. Além disso, Ξ_0 é aberto e denso em Ω_0 .
2. Um campo de vetores $Z \in \Xi_1$ se e somente se ele é de codimensão 1. Além disso, Ξ_1 é aberto e denso em Ω_1 .

Em seguida, encontramos condições necessárias e suficientes sobre os parâmetros para que tenhamos órbitas 1-periódicas para o sistema (2.1). Para simplificar a redação, mudamos a notação dessa família para $Z_{a,b,c,d,e}$ e o primeiro resultado que obtemos foi:

Teorema G. (ref. Teorema 4.10.1) *Seja $Z_{a,b,c,d,e} \in \Omega_0$. Considere as seguintes condições*

1. $a = -1$,
2. $c > 1$,
3. $|b| < \sqrt{c^2 - 1}$,
4. $|d + e| < \sqrt{2c - 1} - 1$,

e ponha $\alpha_l = b\omega(c, d, e)$.

Então $Z_{a,b,c,d,e}$ tem uma família a 1-parâmetro de órbitas regulares 1-periódicas γ_α , $|\alpha| > |\alpha_l|$, tal que:

1. o conjunto $P_1 = \{\gamma_\alpha(t), t \in \mathbb{R}, |\alpha| > |\alpha_l|\}$ é uma superfície cônica semi-algébrica;
2. se $b = 0$, então $0 \in \bar{P}_1$;
3. a órbita γ_α , para $|\alpha| > |\alpha_l|$, passa pelo ponto $p_\alpha = \left(0, -\frac{\alpha^3}{3} - \frac{b}{4}\alpha^2, -\frac{d}{2}\alpha^2, \alpha\right)$ e $p_{-\alpha}$;
4. o período de γ_α é $4|\alpha|$;
5. desde que $b \neq 0$, e

$$\sqrt{-\rho^+(c, d, e)} < c + 1 - |e + d| \quad \text{ou} \quad \sqrt{-\rho^-(c, d, e)} < c + 1 - |e + d|$$

quando $\alpha \rightarrow \pm \alpha_l$, então γ_α tende para uma órbita singular típica que é um laço singular 1-periódico γ_{α_l} de período $4|\alpha_l| \neq 0$.

Onde,

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^+(c, d, e) = (1 - c - d - e + 2ed)(1 + c - d - e) \\ \rho^-(c, d, e) = (1 - c + d + e + 2ed)(1 + c + d + e) \\ \omega(c, d, e) = \frac{1}{\min \left\{ \sqrt{-\rho^+(c, d, e)}, \sqrt{-\rho^-(c, d, e)}, c + 1 - |e + d| \right\}} \end{array} \right.$$

Sobre laços singulares 1-periódicos, obtemos o seguinte resultado.

Teorema H. (ref. Teorema 4.10.2) *Seja $Z_{a,b,c,d,e} \in \Omega_0$. Considere as seguintes condições*

1. $a = -1, b = 0, c > 1,$
2. $|e + d| < c + 1,$
3. $\rho^+(c, d, e) \rho^-(c, d, e) = 0.$

Existe uma família a 1-parâmetro de laços singulares 1-periódico $\gamma_\alpha, |\alpha| > 0$ de período $4|\alpha| \neq 0$.

CAPÍTULO 3

Dobras e Cúspides

3.1 Introdução

Nesse Capítulo, vamos fazer um estudo de classe de campos vetoriais descontínuos do tipo,

$$X = A_i(x) + \varepsilon F(x)$$

onde $X \in \Gamma$, $F \in C^\infty$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $A_i(x_1, \dots, x_n) = (x_2, x_3, \dots, x_i, \pm \text{sgn}(x_1), \alpha_{i+1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \alpha_n(x_1, \dots, x_n))$, com α_j funções lineares $j = i + 1, \dots, n$ e ε suficientemente pequeno.

Vamos considerar genericamente a classe acima em diferentes subclasses, que definiremos adiante, e estudá-las separadamente. A seguir, consideremos $X \in \Gamma$ e denotemos por $X(x) = (X^1(x), \dots, X^n(x))$, onde $X^i(x)$ são suas componentes.

Denotemos por $\Gamma^* = \{X \in \Gamma : X^j(x) = x_{j+1}, j = 1, \dots, k_0 < n \text{ e } X^{k_0+1}(x) = \pm \text{sgn}(x_1)\}$.

Definição 3.1.1. *Seja $X(x) = (X^1(x), \dots, X^i(x), X^{i+1}(x), \dots, X^n(x)) \in \Gamma$, dizemos que X é simplesmente i_0 -integrável se existe $i_0 \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $X^j \equiv 0$ para $j = i_0+1, \dots, n$.*

Exemplo 3.1.1. *Em \mathbb{R}^4 , a cúspide dada por $X(x, y, z, w) = (y, z, \text{sgn}(x), 0)$ é um campo simplesmente 3-integrável em $\Gamma(\mathbb{R}^4)$.*

Seja $X \in \Gamma$, em uma vizinhança da origem escrevemos X como $X(x) = X_0(x) + X_1(x) + X_2(x) + \dots + X_r(x) + R(x)$, onde $X_0(x)$ corresponde ao termo constante, $X_j(x)$ corresponde ao “ j -jato” de X em 0 e R é o resto da expansão de X . Dizemos que a parte semi-linear de X é o campo $L(x) = X_0(x) + X_1(x) \in \Gamma$.

Exemplo 3.1.2. Seja $X(x, y, z, w) = \left(y + xz, w - x + \frac{1}{2}z^2, \operatorname{sgn}(x) + w, xy - zw \right)$, então $L(x, y, z, w) = (y, w - x, \operatorname{sgn}(x) + w, 0)$.

Definição 3.1.2. Seja $X \in \Gamma^*$ e $L \in \Gamma^*$ a sua parte semi-linear. Dizemos que L é **elementar**, se $L^j(x) = \beta^j(x_{i+1}, \dots, x_n)$ e a matriz $\left(\frac{\partial \beta^j}{\partial x_k} \right)$ está na forma canônica de Jordan, para $j, k = i + 1, \dots, n$.

Vamos, no decorrer do trabalho, fixar $n = 4$ e denotar por

$\Gamma_{SI}^* = \{X \in \Gamma^* : L \text{ é simplesmente } i_0\text{-integrável}\}$, por exemplo, $X(x, y, z, w) = (y + xz, w - x + \frac{1}{2}z^2, \operatorname{sgn}(x), 0)$ é 3-integrável.

$\Gamma_E^* = \{X \in \Gamma^* : L \text{ é elementar}\}$, por exemplo, $X(x, y, z, w) = (y + xz, \operatorname{sgn}(x), \lambda_1 z, \lambda_2 w)$.

Nossa estratégia de estudo nesse capítulo será detectar condições para a existência de órbitas 1-periódicas e estudar algumas propriedades das seguintes classes de campos de vetores:

1. Γ_{SI}^* ;
2. Perturbações Y em $\Omega_X \cap \Gamma_{SI}^*$, com $X \in \Gamma_{SI}^*$, da forma $Y = X + \varepsilon F$ (a ser definido adiante), ε pequeno, $F \in C^\infty$ e
 - (a) Y um elemento em Γ , φ -reversível (para convenientes φ);
 - (b) em alguns casos, Y não reversível.
3. Γ_E^* ;
4. Perturbações Y em Ω_X , com $X \in \Gamma_E^*$, da forma $Y = X + \varepsilon F$, com ε pequeno, $F \in C^\infty$ e Y φ -reversível.

Em $(\mathbb{R}^4, 0)$ estudaremos a dinâmica de campos de vetores contidos em 4 classes distintas, sob o ponto de vista topológico. Tais classes representam uma pré-classificação genérica dos elementos em Γ e elas foram inspiradas no trabalho de Anosov [A]. Tais classes são:

1. Tipo I: $X(x, y, z, w) = (\pm \operatorname{sgn}(x), 0, 0, 0) + \varepsilon F(x, y, z, w)$;

2. Tipo II (dobra): $X(x, y, z, w) = (y, \pm \operatorname{sgn}(x), 0, 0) + \varepsilon F(x, y, z, w)$;
3. Tipo III (cúspide): $X(x, y, z, w) = (y, z, \pm \operatorname{sgn}(x), 0) + \varepsilon F(x, y, z, w)$;
4. Tipo IV (rabo de andorinha): $X(x, y, z, w) = (y, z, w, \pm \operatorname{sgn}(x)) + \varepsilon F(x, y, z, w)$.

3.2 Campos Vetoriais do Tipo I

A análise dos elementos desta classe é trivial e vale apenas observar que eles não são reversíveis e se X é um representante dessa classe, $X_\varepsilon(p) = \varepsilon e_1$ para todo ponto $p \in \mathbb{R}^4$ e $\varepsilon = \pm 1$, então pequenas perturbações nunca irão produzir órbitas periódicas.

3.3 Dobra Simplesmente Integrável

Vamos iniciar o estudo analisando os campos de vetores do tipo II. Considere $X \in \Gamma_{SI}^*$ dado por

$$X : \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = k \\ \dot{z} = 0 \\ \dot{w} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $k = \pm \operatorname{sgn}(x)$.

Seja $p = (0, y_0, z_0, w_0) \in H_0$ um ponto qualquer. A dinâmica de X é simples e está concentrada em cada plano $(z, w) = (z_0, w_0)$. Logo, esse campo de vetores se reduz a um campo de vetores em \mathbb{R}^2 e podemos concluir que:

1. X é φ -reversível mediante a involução $\varphi(x, y, z, w) = (-x, y, -z, w)$;
2. Seguindo a classificação das singularidades feito na Definição 1.3.4, as únicas H_0 -singularidades que temos são dobras ou do tipo elípticas (se $k = -\operatorname{sgn}(x)$), ou do tipo hiperbólicas (se $k = \operatorname{sgn}(x)$) e elas ocorrem no conjunto $\{(0, y, z, w) \in H_0 \mid y = 0\}$;

3. Considerando $k = -\text{sgn}(x)$, a trajetória de X_ε passando por $p = (0, y_0, z_0, w_0)$ em tempo $t = 0$ é $\gamma_\varepsilon(t, p) = \left(-\varepsilon \frac{t^2}{2} + y_0 t, -\varepsilon t + y_0, z_0, w_0 \right)$;
4. O tempo de retorno t de γ_ε à H_0 é igual ao tempo de retorno μ de $\gamma_{-\varepsilon}$ à H_0 e igual a $t = \mu = -2\varepsilon y_0$;
5. Todo ponto $p \in H_0$ com $y \neq 0$, pertence a alguma órbita 1-periódica.

Portanto a dinâmica desse modelo pode ser resumida pela Figura 3.1.

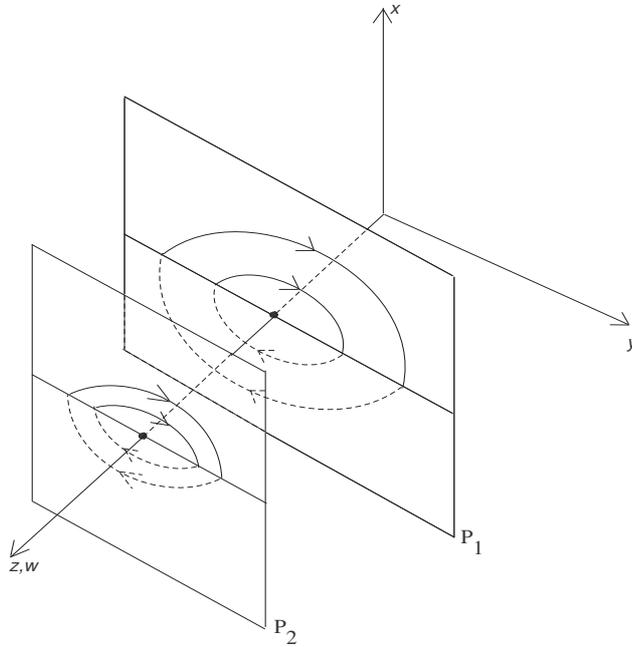


Figura 3.1: Dinâmica das trajetórias de campos de vetores (3.1) em planos $z = z_0$, $w = w_0$, representados por P_1 e P_2 .

Vamos agora considerar *pequenas* perturbações de X em Γ_{SI}^* da forma $Y = X + \varepsilon F$, com ε suficientemente pequeno e $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma função C^∞ dada por $F(x, y, z, w) = (f_1(x, y, z, w), f_2(x, y, z, w), 0, 0)$.

Vamos denotar o conjunto Γ_{SI} como sendo o conjunto dos campos de vetores Y , que são pequenas deformações de $X \in \Gamma_{SI}^*$, seguindo as condições exigidas na Seção 1.2.

Dessa forma, cada $Y \in \Gamma_{SI}$, será expressado como:

$$Y = X + f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y}$$

onde $\nu_0(f_i) \geq 1$.

No que segue, a menos em menção contrária, fixemos coordenadas tal que a involução seja expressa por $\varphi(x, y, z, w) = (-x, y, -z, w)$. Denotemos por s a função $s : (x, y, z, w) \rightarrow (x^2, y, z^2, w)$.

Proposição 3.3.1. $Y \in \Gamma_{SI}$ é φ -reversível se, e somente se, existem funções C^∞ $f_1, f_2, \bar{f}_1, \bar{f}_{21}, \bar{f}_{23}$ tais que,

$$Y = X + f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y}$$

com $\nu_0(f_i) \geq 1, i = 1, 2$ e

$$\begin{cases} f_1 = \bar{f}_1 \circ s \\ f_2 = x\bar{f}_{21} \circ s + z\bar{f}_{23} \circ s \end{cases}$$

Demonstração. Seja $Y \in \Gamma_{SI}$, Y é φ -reversível se e somente se, pela Definição 1.1.2, $\varphi * Y_+ = -Y_- \circ \varphi$. Agora,

$$\begin{aligned} (\varphi * Y_+)(x, y, z, w) &= \varphi(y + f_1(x, y, z, w), -\varepsilon + f_2(x, y, z, w), 0, 0) = \\ &= (-y - f_1(x, y, z, w), -\varepsilon + f_2(x, y, z, w), 0, 0). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (-Y_- \circ \varphi)(x, y, z, w) &= -(y + f_1(-x, y, -z, w), \varepsilon + f_2(-x, y, -z, w), 0, 0) = \\ &= (-y - f_1(-x, y, -z, w), -\varepsilon - f_2(-x, y, -z, w), 0, 0). \end{aligned}$$

Comparando as expressões acima, concluímos que Y é φ -reversível se e somente se, existem funções C^∞ , $\bar{f}_1, \bar{f}_{21}, \bar{f}_{23}$ tal que,

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, w) = \bar{f}_1(x^2, y, z^2, w) \\ f_2(x, y, z, w) = x\bar{f}_{21}(x^2, y, z^2, w) + z\bar{f}_{23}(x^2, y, z^2, w) \end{cases}$$

o que conclui a demonstração. ■

Como dissemos anteriormente, vamos considerar pequenas deformações de $X \in \Gamma_{SI}^*$, isto é, vamos considerar $\nu_0(f_1) \leq 4$ e $\nu_0(f_2) \leq 3$. Usando essas condições e a Proposição 3.3.1, temos que a *forma normal primitiva* para Y é dada por:

$$Y(x, y, z, w) = (y + \lambda_1 w + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 w^2 + \lambda_4 y w + \xi_1(x, y, z, w)) \frac{\partial}{\partial x} + (-\text{sgn}(x) + \mu_1 z + \mu_2 z w + \xi_2(x, y, z, w)) \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.2)$$

onde $\nu_0(\xi_1) \geq 5$ e $\nu_0(\xi_2) \geq 4$.

Lema 3.3.1. *Sejam $Y \in \Gamma_{SI}$ dado em sua forma normal primitiva (3.2) e $p \in H_0$. As únicas H_0 -singularidades de Y são dobras elípticas e se p não é uma H_0 -singularidade de Y , então p pertence a uma órbita 1-periódica de Y .*

Demonstração. Vamos primeiramente detectar os tipos de singularidades existentes. Seguindo o algoritmo apresentado em [JT2], considere $h(x, y, z, w) = x$ e $p \in H_0$, então

$$Y_\varepsilon h(p) = y + \lambda_1 w + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 w^2 + \lambda_4 y w + \xi_1(p).$$

Como $\frac{\partial}{\partial y}(Y_\varepsilon h(p))(0) \neq 0$, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança conveniente $V \subset H_0$ de p e uma função C^∞ , $g : V \cap \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $g(p) = 0$ tal que $Y_\varepsilon h(p) = 0$, implica que $y = g(z, w)$. Portanto em V , os pontos de dobras são dados pela equação $y = g(z, w)$. Agora em V , temos que

$$Y_\varepsilon^2 h(p) = -\varepsilon + \bar{g}_{\lambda, \mu}(0, y, z, w).$$

com $g_{\lambda, \mu}$ suficientemente “pequena” para qualquer ponto $(0, y, z, w) \in V$.

Portanto, o sinal de $Y_\varepsilon^2 h(p)$ para pontos $p \in V$ é dado pelo sinal de $-\varepsilon$, logo $Y_\varepsilon^2 h(p) \neq 0$ e portanto, as únicas H_0 -singularidades que temos são dobras elípticas.

Vamos calcular a trajetória de Y por um ponto $p \in H_0$ e estudar a sua dinâmica. Seja $\gamma_\varepsilon(t, p)$ a trajetória de Y_ε em p , γ_ε é dada por $\gamma_\varepsilon(t, p) = (x(\gamma_\varepsilon(t, p)), y(\gamma_\varepsilon(t, p)), z_0, w_0)$, onde

$$\begin{cases} x(\gamma_\varepsilon(t, p)) = (1 + \lambda_4 w_0)(-\varepsilon + \mu_1 z_0 + \mu_2 z_0 w_0) \frac{t^2}{2} + (y_0 + \lambda_1 w_0 + \lambda_2 z_0^2 + \lambda_3 w_0^2)t \\ y(\gamma_\varepsilon(t, p)) = (-\varepsilon + \mu_1 z_0 + \mu_2 z_0 w_0)t + y_0 \end{cases}$$

Calculando o tempo de retorno $t_1 \neq 0$ da trajetória γ_ε à H_0 , vemos que $t_1 = -2\varepsilon y_0 + o(|(\lambda, \mu, y, z, w)|^2)$ que por sua vez é igual ao tempo de retorno μ_1 da trajetória $\gamma_{-\varepsilon}(\mu, \gamma_\varepsilon(t, p))$ do campo $Y_{-\varepsilon}$ à H_0 .

Vamos supor que $1 + \lambda_4 w_0 \neq 0$. Calculando o ponto de retorno de γ_ε à H_0 , temos

$$\gamma_\varepsilon(t_1, p) = \left(0, -\frac{2\lambda_2 z_0^2 + 2\lambda_3 w_0^2 + 2\lambda_1 w_0 + \lambda_4 y_0 w_0 + y_0}{1 + \lambda_4 w_0}, z_0, w_0 \right).$$

Agora, $\gamma_{-\varepsilon}(\mu_1, \gamma_\varepsilon(t_1, p)) = (0, y_0, z_0, w_0)$, ou seja, todo ponto de H_0 que não é uma dobra para Y , pertence a uma órbita 1-periódica para Y , conforme queríamos demonstrar. ■

Portanto, concluímos que independentemente da perturbação que damos em $X \in \Gamma_{SI}^*$, a sua dinâmica não se altera, ou seja, X é genérico. Com isso, concluímos o estudo de campos de vetores $Y \in \Gamma_{SI}$.

3.4 Perturbações Não Reversíveis de Dobras

Simplesmente Integráveis

Vamos agora ampliar o mundo das perturbações de $X \in \Gamma_{SI}^*$, considerando perturbações em $\Omega_X \cap \Gamma_{SI}$ não reversíveis. Seja $Z = X + \varepsilon F \in \Gamma_{SI}$ uma perturbação não reversível de X , da forma

$$Z : \begin{cases} \dot{x} = y + f_1(x, y, z, w) \\ \dot{y} = -\text{sgn}(x) + f_2(x, y, z, w) \\ \dot{z} = 0 \\ \dot{w} = 0 \end{cases}$$

com $f_1, f_2 \in C^\infty$ e $\nu_0(f_i) \leq 5 - i$, $i = 1, 2$.

Como agora as funções f_i 's não satisfazem a Proposição 3.3.1, a forma normal primitiva de Z é dada por

$$Z : \begin{cases} \dot{x} = y + \lambda_1 z + \lambda_2 w + \lambda_3 z^2 + \lambda_4 w^2 + \lambda_5 y w + \lambda_6 z w + \xi_1(x, y, z, w) \\ \dot{y} = -\text{sgn}(x) + \mu_1 z + \mu_2 w + \mu_3 w^2 + \mu_4 z w + \xi_2(x, y, z, w) \\ \dot{z} = 0 \\ \dot{w} = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

com $\nu_0(\xi_i) > 5 - i$, $i = 1, 2$.

Proposição 3.4.1. (Proposição A. Capítulo 2) *Seja Z perturbação não reversível de $Y \in \Gamma_{SI}^*$ em sua forma normal primitiva (3.3). As únicas H_0 -singularidades de Z são dobras elípticas e se $p \in H_0$ não é uma H_0 -singularidade de Z , então p pertence a uma órbita periódica de Z .*

Demonstração. De modo análogo a demonstração do Lema 3.3.1, calculando as funções $Z_\varepsilon h(p)$ e $Z_\varepsilon^2 h(p)$, não é difícil verificar que existe uma vizinhança da origem no qual as singularidades de Z são todas dobras do tipo elípticas e elas são dadas por uma equação $y = g(z, w)$. Além disso, nessa vizinhança, o sinal de $Z_\varepsilon^2 h(p)$ é o mesmo que o sinal de $-\varepsilon$.

O tempo de retorno à H_0 pelas trajetórias γ_ε e $\gamma_{-\varepsilon}$ são os mesmos e, por fim, todo ponto de H_0 que não é uma singularidade para Z , pertence a uma órbita 1-periódica. ■

Portanto concluímos que independentemente da perturbação que damos no campo $X \in \Gamma_{SI}^*$, desde que sua trajetória retorne à H_0 , teremos sempre órbitas 1-periódicas e a sua dinâmica em uma vizinhança da origem não se altera, ou seja, $X = y \frac{\partial}{\partial x} - \text{sgn}(x) \frac{\partial}{\partial y}$ é genérico.

3.5 Dobras Elementares e Dobras do Tipo Sela

Terminado o estudo de campos de vetores com parte semi-linear simplesmente integrável, o próximo passo é estudar campos de vetores cuja parte semi-linear é elementar e suas perturbações. Consideremos $X \in \Gamma_E^*$, dado por,

$$X : \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\text{sgn}(x) \\ \dot{z} = \alpha_1 z + \alpha_2 w \\ \dot{w} = \beta_1 z + \beta_2 w \end{cases} \quad (3.4)$$

Considerando $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ a matriz das duas últimas equações de (3.4) em sua forma canônica J , temos quatro casos a serem analisados dependendo dos autovalores de J .

São eles:

1. Autovalores reais distintos: $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 > \lambda_2$;

2. Autovalores iguais e J diagonal: $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$;

3. Autovalores iguais e J não diagonal: $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$;

4. Autovalores complexos: $J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Proposição 3.5.1. *Sejam $X \in \Gamma_E^*$ cujos autovalores λ_1, λ_2 da matriz A da parte semi-linear são reais não nulos e $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma involução linear qualquer com $\text{Fix}(\varphi) \subset H_0$. Se X é φ -reversível, então $\lambda_1 = -\lambda_2$.*

Demonstração. Vamos considerar a matriz A na forma triangular superior com autovalores reais. Então o campo de vetores (3.4), através de uma mudança de coordenadas, pode ser escrito na forma

$$X : \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\text{sgn}(x) \\ \dot{z} = \lambda_1 z + \alpha w \\ \dot{w} = \lambda_2 w \end{cases}$$

Considere,

$$\varphi(x, y, z, w) = (-x, k_{22}y + k_{23}z + k_{24}w, k_{32}y + k_{33}z + k_{34}w, k_{42}y + k_{43}z + k_{44}w)$$

com $k_{ij} = 0$ ou $k_{ij} = \pm 1$.

Para que φ seja uma involução e X seja φ -reversível, devemos resolver o sistema de equações formado por $\varphi^2 = Id$ e pela equação (1.1). Resolvendo esse sistema com relação as variáveis k_{ij} , λ_1 , λ_2 e α , encontramos nove soluções, mas em somente em uma delas os

autovalores são não nulos. Esta solução é dada por

$$S = \left\{ \begin{array}{l} k_{22} = 1, k_{23} = k_{24} = 0, k_{32} = 0, k_{33} = -k_{44}, k_{34} = -\frac{k_{44}^2 - 1}{k_{43}}, k_{42} = 0, \\ \alpha = -\frac{2\lambda_2 k_{44}}{k_{43}}, \lambda_1 = -\lambda_2 \end{array} \right\}.$$

Portanto, temos obrigatoriamente que $\lambda_1 = -\lambda_2$, conforme queríamos demonstrar. ■

Note que a Proposição 3.5.1 exclui o estudo dos casos (2) e (3), onde os autovalores são iguais.

Proposição 3.5.2. *Sejam $X \in \Gamma_E^*$ cujos autovalores da matriz A da parte semi-linear são complexos $\alpha \pm \beta i$ não nulos e $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma involução linear qualquer, com $\text{Fix}(\varphi) \subset H_0$. Se X é φ -reversível, então $\alpha = 0$.*

Demonstração. De forma análoga à demonstração da Proposição 3.5.1, considere

$$\varphi(x, y, z, w) = (-x, k_{22}y + k_{23}z + k_{24}w, k_{32}y + k_{33}z + k_{34}w, k_{42}y + k_{43}z + k_{44}w)$$

com $k_{ij} = 0$ ou $k_{ij} = \pm 1$.

Suponhamos que φ é uma involução e que X seja φ -reversível. Então, resolvendo o sistema de equações formado por $\varphi^2 = Id$ e pela equação (1.1) com relação as variáveis k_{ij} , α , e β , encontramos dez prováveis soluções, mas em nove delas $\alpha = \beta = 0$ e somente em uma delas $\beta \neq 0$. Esta solução é dada por

$$S = \left\{ \begin{array}{l} k_{22} = 1, k_{23} = k_{24} = 0, k_{32} = 0, k_{33} = -k_{44}, k_{34} = \text{raíz}(Z^2 - 1 + k_{44}^2), \\ k_{42} = 0, k_{43} = \text{raíz}(Z^2 - 1 + k_{44}^2), \alpha = 0 \end{array} \right\}.$$

Como estamos supondo que k_{44} assume valores ± 1 ou 0 , temos que existem 4 diferentes involuções para o qual X é reversível e sempre temos $\alpha = 0$, conforme queríamos demonstrar. ■

A Proposição 3.5.2 restringe o estudo do caso (3) somente para $\alpha = 0$.

Vamos estudar agora, o primeiro caso de dobra elementar, que é o caso tipo sela, quando $\lambda_1 = -\lambda_2$.

Considere $X \in \Gamma_E^*$ na sua forma elementar e satisfazendo a Proposição 3.5.1, X tem a seguinte forma

$$X : \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\operatorname{sgn}(x) \\ \dot{z} = \lambda z \\ \dot{w} = -\lambda w \end{cases} \quad (3.5)$$

Esse campo será chamado por *dobra tipo sela*.

Observação 3.5.1. *Para sistemas (3.5), podemos afirmar que:*

1. *Pelos valores de k_{ij} na demonstração Proposição 3.5.1, existem apenas duas involuções no qual (3.5) é reversível e $\alpha = 0$, são elas*

$$\varphi_1(x, y, z, w) = (-x, y, w, z) \text{ ou } \varphi_2(x, y, z, w) = (-x, y, -w, -z).$$

No decorrer dessa e da próxima seção, iremos considerar, sem perda de generalidade, a involução $\varphi = \varphi_1$ definida acima. Isso é possível porque o difeomorfismo $\phi(x, y, z, w) = (x, y, -z, -w)$, leva φ_1 em φ_2 .

2. *Note que (3.5) possui o seguinte hamiltoniano.*

$$H(x, y, z, w) = \operatorname{sgn}(x) + \frac{y^2}{2} + \lambda zw \quad (3.6)$$

$$\text{e } H \circ \varphi = H.$$

Lema 3.5.1. *Sejam $X \in \Gamma_E^*$ em sua forma normal primitiva (3.5) e $P_X : (H_0, 0) \rightarrow (H_0, 0)$ a sua aplicação de Poincaré. As únicas H_0 -singularidades de X são dobras elípticas e os pontos fixos de P_X são dados pelo conjunto $\{(y, z, w) \in H_0 \mid z = w = 0\}$.*

Demonstração. É fácil ver que as únicas H_0 -singularidades possíveis de X , são dobras elípticas, pois $X_\varepsilon h(p) = y$ e $X_\varepsilon^2 h(p) = -\varepsilon \neq 0$. Note que as dobras ocorrem exatamente no conjunto de tangência de X .

Considere agora $p = (0, y, z, w) \in H_0$ um ponto qualquer de H_0 . A trajetória γ_ε em H_ε de X_ε passando por p em tempo 0 é dada por:

$$\begin{cases} x(\gamma_\varepsilon(t, p)) = -\varepsilon \frac{t^2}{2} + yt \\ y(\gamma_\varepsilon(t, p)) = -\varepsilon t + y \\ z(\gamma_\varepsilon(t, p)) = z e^{\lambda t} \\ w(\gamma_\varepsilon(t, p)) = w e^{-\lambda t} \end{cases}$$

Vamos denotar as trajetórias γ_1 por γ_+ e γ_{-1} por γ_- . Calculando os tempos de retorno t , u das trajetórias γ_+ e γ_- respectivamente, temos que eles são iguais, $t = u = 2\varepsilon y$. Em mãos desses tempos, temos que o ponto de retorno à H_0 por γ_+ é $q = (0, -y, z e^{2\lambda y}, w e^{-2\lambda y})$. Usando agora o tempo u de retorno de γ_- à H_0 , definimos a aplicação de Poincaré para o campo X , dada por:

$$P_X(p) = (\gamma_- \circ \gamma_+)(t, p) = (y, z e^{4\lambda y}, w e^{-4\lambda y}). \quad (3.7)$$

Os pontos fixos de P_X que não são H_0 -singularidades de X são:

$$Fix(P_X) = \{(y, z, w) \in H_0 : z = w = 0\}.$$

Portanto, temos órbitas 1-periódica para o campo (3.5) nos pontos da forma $(y, 0, 0)$ (ver Figura 3.2). Note que não temos órbitas k -periódicas para X , com $k \geq 2$, pois $P^n(y, z, w) = (y, z e^{4\lambda ny}, w e^{-4\lambda ny})$. ■

Vamos agora fazer uma breve análise da dinâmica da aplicação de Poincaré (3.7).

Lema 3.5.2. *Seja P_X a aplicação de Poincaré dada pela equação (3.7). Se $p_0 \in Fix(P_X)$, então existe uma vizinhança $V \subset H_0$ de p_0 e uma família a 1-parâmetro, no qual para cada ponto dessa família, P_X se reduz a uma aplicação $\bar{P}_X : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ do tipo sela, isto é, possui uma direção atratora e outra repulsora.*

Demonstração. Seja $p_0 = (y_0, 0, 0) \in Fix(P_X)$. O Jacobiano de P_X em p_0 é dado por

$$[JP_X]_{p_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{4\lambda y_0} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4\lambda y_0} \end{pmatrix}$$

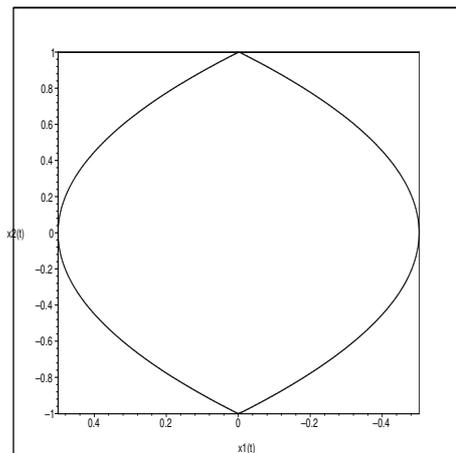


Figura 3.2: Órbita 1-periódica de X no ponto $(-1, 0, 0)$.

Portanto P_X possui dois autovalores reais, não nulos e com módulo diferente de 1. Note que existe uma vizinhança V de p_0 em H_0 , onde se $e^{4\lambda y_0} > 1$, então $e^{-4\lambda y_0} < 1$, ou seja, para cada ponto fixo de P_X , existe uma direção atratora (correspondendo ao autovalor menor que 1) e uma direção repulsora (correspondendo ao autovalor maior que 1). Essa dinâmica não se altera se $p_0 \in V$. ■

Uma ilustração da situação apresentada no Lema 3.5.2 é dada pela Figura 3.3.

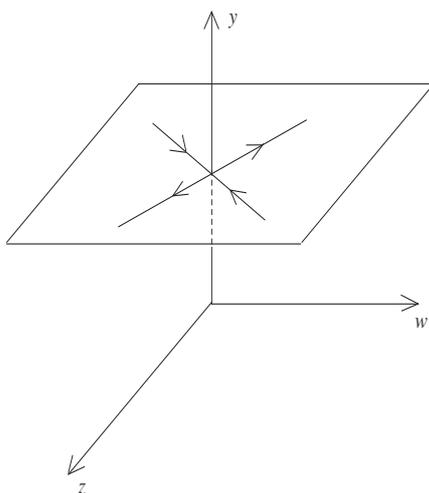


Figura 3.3: Seção $y = cte$ em H_0 , mostrando a dinâmica de P_X e seus auto-espacos.

3.6 Perturbações de Dobras do Tipo Sela

Nessa seção, estudaremos perturbações reversíveis e hamiltonianas de (3.5). Nosso objetivo é verificar se órbitas periódicas são preservadas. Para isso, considere perturbações de (3.5), da seguinte forma:

$$X : \begin{cases} \dot{x} = y + f_1(x, y, z, w) \\ \dot{y} = -\operatorname{sgn}(x) + f_2(x, y, z, w) \\ \dot{z} = \lambda z + f_3(x, y, z, w) \\ \dot{w} = -\lambda w + f_4(x, y, z, w) \end{cases} \quad (3.8)$$

Lema 3.6.1. *O campo de vetores perturbado (3.8) é φ -reversível desde que existam funções $\xi_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, com $\xi_i \in C^\infty$ e $\xi_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, 4$ tais que:*

1. $f_1(x, y, z, w) = \xi_1(x^2, y, w, z)$;
2. $f_i(x, y, z, w) = x\xi_i(x^2, y, w, z)$, $i = 2, 3, 4$.

Demonstração. Para que (3.8) continue φ -reversível, pela equação (1.1), as funções f_i devem verificar as seguintes equações:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, w) = f_1(-x, y, w, z) \\ f_2(x, y, z, w) = -f_2(-x, y, w, z) \\ f_3(x, y, z, w) = -f_3(-x, y, w, z) \\ f_4(x, y, z, w) = -f_4(-x, y, w, z) \end{cases}$$

Logo, devem existir funções $\xi_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, com $\xi_i \in C^\infty$ e $\xi_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, 4$, tais que $f_1(x, y, z, w) = \xi_1(x^2, y, w, z)$ e $f_i(x, y, z, w) = x\xi_i(x^2, y, w, z)$, $i = 2, 3, 4$, conforme queríamos mostrar. ■

Note que pelo fato das duas últimas coordenadas das funções $f_{i's}$ comutarem nas equações acima, isso nos garante que nos monômios da expansão de Taylor de f_i , o produto de z e w possui a mesma potência.

Queremos agora que a perturbação de (3.5) seja hamiltoniana, onde a função hamiltoniana seja também uma perturbação de (3.6) da forma,

$$\bar{H}(x, y, z, w) = \operatorname{sgn}(x)x + \frac{y^2}{2} + \lambda zw + F(x, y, x, w). \quad (3.9)$$

Lema 3.6.2. *A forma normal primitiva, até a ordem 2, de uma perturbação de $X \in \Gamma_E^*$ hamiltoniana e φ -reversível (com $\varphi(x, y, z, w) = (-x, y, w, z)$) é:*

$$X_{\mu_1, \mu_2} : \begin{cases} \dot{x} = y + \mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 + \xi_1(x, y, z, w) \\ \dot{y} = -\text{sgn}(x) - 2\mu_1 xy + \xi_2(x, y, z, w) \\ \dot{z} = \lambda z + \xi_3(x, y, z, w) \\ \dot{w} = -\lambda w + \xi_4(x, y, z, w) \end{cases} \quad (3.10)$$

E seu hamiltoniano é dado por

$$\bar{H}(x, y, z, w) = \text{sgn}(x)x + \frac{y^2}{2} + \lambda zw + \frac{\mu_2}{3}y^3 + \mu_1 x^2 y$$

$(\mu_1, \mu_2) \in (\mathbb{R}^2, 0)$, $\xi_i = o(|(x, y, z, w)|^3)$, $i = 1, \dots, 4$ e $\bar{H} \circ \varphi = \bar{H}$.

Demonstração. Basta considerar a função F de (3.9) escrito em sua forma de Taylor com termos até a ordem 3, usar a definição de campo hamiltoniano e o Lema 3.6.1. ■

Observação 3.6.1.

1. *Note que quando consideramos as perturbações (3.8) de (3.5), não estamos considerando os pesos nas variáveis tal que $\nu_0(f_i) \leq 5 - i$, $i = 1, \dots, 4$, pois caso considerássemos, o Lema 3.6.1 garantiria que esses monômios seriam todos nulos.*
2. *As H_0 -singularidades de (3.10) são (segundo a classificação feita em [JT2]), somente dobras do tipo elíptica e elas ocorrem nos pontos $(0, z, w)$. Portanto perturbações hamiltonianas e reversíveis de (3.5) preservam H_0 -singularidades.*

Nosso objetivo agora é estudar a permanência ou não de órbitas periódicas de tais campos de vetores. Essa abordagem será feita utilizando a aplicação de Poincaré em H_0 . Para isso, vamos construir a aplicação de Poincaré para esse campo e estudar perturbações dessa aplicação. Mais precisamente, o que vamos fazer é seguir o seguinte roteiro:

1. Consideraremos as duas involuções, φ_+ e φ_- , cuja composição determina a aplicação de Poincaré P de X ;

2. Faremos uma mudança de coordenada de tal forma que linearize a primeira involução φ_+ ;
3. Aplicaremos essa mudança de coordenada na segunda involução φ_- e a perturbaremos, preservando certas propriedades;
4. Por fim, construiremos a aplicação de Poincaré sob essas novas coordenadas, e verificaremos a existência de órbitas periódicas.

O roteiro acima nos dá o Teorema A do Capítulo 2, onde os conjuntos algébricos não vazios lá apresentados, são aqui descritos explicitamente por expressões algébricas envolvendo os parâmetros da aplicação de Poincaré.

Teorema 3.6.1. (Teorema A. Capítulo 2) *Sejam X_{μ_1, μ_2} uma dobra tipo sela, dado em sua forma normal primitiva (3.10) e $P_\alpha : (H_0, 0) \rightarrow (H_0, 0)$ a sua aplicação de Poincaré. Temos os seguintes casos:*

1. *Desde que $c_3 = 0$, P_α é uma aplicação a 3-parâmetros, com $\alpha = (b_1, b_4, c_1)$ e*
 - (a) *Se $b_1 c_1 \neq 0$, então X_{μ_1, μ_2} não possui órbitas periódicas passando por p_0 , para qualquer $p_0 \in (H_0, 0)$.*
 - (b) *Se $b_1 = c_1 = 0$ e $b_4 \neq 0$, então X_{μ_1, μ_2} possui um plano π_1 de órbitas periódicas, dado por $\pi_1 = \{(y, z, w) \in (H_0, 0) \mid w = 0\}$.*
2. *Desde que $c_3 \neq 0$, P_α é uma aplicação a 4-parâmetros, com $\alpha = (b_1, c_1, c_3, c_4)$ e*
 - (a) *Se $b_1 c_1 \neq 0$, então X_{μ_1, μ_2} não possui órbitas periódicas passando por p_0 , para qualquer $p_0 \in (H_0, 0)$.*
 - (b) *Se $b_1 = c_1 = 0$, então X_{μ_1, μ_2} possui um plano π_2 de órbitas periódicas, dado por $\pi_2 = \left\{ (y, z, w) \in (H_0, 0) \mid z = -\frac{c_4}{c_3} w \right\}$.*

Demonstração. Seguindo os passos do roteiro dado anteriormente, ao encontrarmos as trajetórias do campo de vetores (3.10), obtemos

$$\begin{cases} \varphi_+(y, z, w) = (-y, ze^{2\lambda y}, we^{-2\lambda y}) \\ \varphi_-(y, z, w) = (-y, ze^{-2\lambda y}, we^{2\lambda y}) \end{cases}$$

as involuções associada à transformação primeiro retorno de $(X_{\mu_1, \mu_2})_+$ e $(X_{\mu_1, \mu_2})_-$ respectivamente.

O primeiro objetivo é encontrar uma mudança de coordenada que linearize a involução φ_+ . Para isso, considere $\phi(y, z, w) = (Id + D\varphi_+(0) \circ \varphi_+)(y, z, w) = (2y, z(e^{2\lambda y} + 1), w(e^{-2\lambda y} + 1))$. A aplicação ϕ conjuga φ_+ com a seguinte involução linear

$$\bar{\varphi}_+(y, z, w) = (-y, z, w).$$

Aplicando essa mudança de coordenada na involução φ_- , vemos que ela é conjugada a involução $\tilde{\varphi}_- = \left(-y, \frac{ze^{-\lambda y}(e^{-\lambda y} + 1)}{e^{\lambda y} + 1}, we^{2\lambda y}\right)$.

Considere $\bar{\varphi}_- = \tilde{\varphi}_- + \psi$ a perturbação de $\bar{\varphi}_+$. Queremos que tal perturbação preserve o conjunto dos pontos fixos. Contudo, para que $Fix(\bar{\varphi}_-) = \{y = 0\}$, devemos ter:

$$\bar{\varphi}_-(y, z, w) = (-y + y\alpha_1(y, z, w), z + y\alpha_2(y, z, w), w + y\alpha_3(y, z, w)).$$

Escrevendo $\bar{\varphi}_-$ até a ordem 2, temos

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_-(y, z, w) = & (-y + a_1y + a_2y^2 + a_3yz + a_4yw, z + b_1y + b_2y^2 + b_3yz + b_4yw, \\ & w + c_1y + c_2y^2 + c_3yz + c_4yw) + yo(|(x, y, z, w)|^2) \end{aligned}$$

onde $a_i, b_i, c_i \in (\mathbb{R}, 0)$, $i = 1, \dots, 4$.

Vamos impor agora que $\bar{\varphi}_-$ seja uma involução, para isso, temos que resolver a seguinte equação $\bar{\varphi}_-^2 = Id$. Com isso, obtemos as soluções,

$$S_1 = \left\{ a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0, b_2 = \frac{b_4c_1}{2}, b_3 = 0, c_2 = c_3 = c_4 = 0 \right\}$$

$$S_2 = \left\{ a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0, b_2 = -\frac{c_4(b_1c_3 + c_1c_4)}{2c_3}, b_3 = -c_4, b_4 = -\frac{c_4^2}{c_3}, c_2 = \frac{b_1c_3 + c_1c_4}{2} \right\}.$$

Vamos analisar a dinâmica da aplicação de Poincaré em cada caso acima.

Caso 1 (S_1): $c_3 = 0$.

Nesse caso, reescrevemos $\bar{\varphi}_-$ como

$$\bar{\varphi}_-(y, z, w) = \left(-y, z + b_1y + \frac{b_4c_1}{2}y^2 + b_4yw, w + c_1y \right) + yo(|(y, z, w)|^2).$$

A partir dessa involução, definimos a aplicação de Poincaré $P_\alpha : (H_0, 0) \rightarrow (H_0, 0)$ sob o novo sistema de coordenada por,

$$P_\alpha(y, z, w) = (\bar{\varphi}_+ \circ \bar{\varphi}_-)(y, z, w) = \left(y, z - b_1y + \frac{b_4c_1}{2}y^2 - b_4yw, w - c_1y \right) + yo(|(y, z, w)|^2).$$

Note que os pontos $p = (y, z, w) \in (H_0, 0)$ com $y = 0$, são claramente pontos fixos de P_α , pois eles são singularidades do campo (3.10). Estamos interessados em encontrar pontos fixos onde $y \neq 0$. Considere o campo deslocamento associado a P_α ,

$$\left(\frac{P_\alpha - Id}{y} \right) (y, z, w) = \left(0, -b_1 + \frac{b_4c_1}{2}y - b_4w, -c_1 \right) + yo(|(y, z, w)|).$$

Desde que $b_1 \neq 0$ e $c_1 \neq 0$, temos que o campo deslocamento não possui singularidade. Isso é equivalente a dizer que a aplicação de Poincaré não possui pontos fixos. Vamos supor que $b_1 = c_1 = 0$ e $b_4 \neq 0$, então $\left(\frac{P_\alpha - Id}{y} \right) (y, z, w) = (0, -b_4w, 0) + yo(|(y, z, w)|)$.

Nesse caso, as singularidades desse campo ocorrem quando $w = 0$. Portanto, temos um plano de pontos fixos para P_α . Isso finaliza o primeiro caso, devemos analisar agora o segundo caso.

Caso 2 (S_2): $c_3 \neq 0$.

Reescrevendo $\bar{\varphi}_-$ com as condições de S_2 , temos:

$$\bar{\varphi}_-(y, z, w) = \left(-y, z + b_1y - \frac{c_4(b_1c_3 + c_1c_4)}{2c_3}y^2 - c_4yz - \frac{c_4^2}{c_3}yw, w + c_1y + \left(\frac{b_1c_3}{2} + \frac{c_1c_4}{2} \right) y^2 + c_3yz + c_4yw \right) + yo(|(y, z, w)|^2).$$

A partir disso, a aplicação de Poincaré é definida por

$$P_\alpha(y, z, w) = \left(y, z - b_1y - \frac{c_4(b_1c_3 + c_1c_4)}{2c_3}y^2 + c_4yz + \frac{c_4^2}{c_3}yw, w - c_1y + \left(\frac{b_1c_3}{2} + \frac{c_1c_4}{2} \right) y^2 - c_3yz - c_4yw \right) + yo(|(y, z, w)|^2)$$

onde $\alpha = (b_1, c_1, c_3, c_3) \in (\mathbb{R}^4, 0)$.

Vamos proceder de modo análogo ao caso anterior. Considere o campo deslocamento

$$\left(\frac{P_\alpha - Id}{y}\right)(y, z, w) = \left(0, -b_1 - \frac{c_4(b_1c_3 + c_1c_4)}{2c_3}y + c_4z + \frac{c_4^2}{c_3}w, -c_1 + \left(\frac{b_1c_3}{2} + \frac{c_1c_4}{2}\right)y - c_3z - c_4w\right) + yo(|(y, z, w)|).$$

Para que esse campo tenha uma singularidade, ele não pode ter termo constante, ou seja, $b_1 = c_1 = 0$. Sob essa hipótese, reescrevemos esse campo como

$$\left(\frac{P_\alpha - Id}{y}\right)(y, z, w) = \left(0, c_4z + \frac{c_4^2}{c_3}w, -c_3z - c_4w\right) + yo(|(y, z, w)|). \quad (3.11)$$

Portanto, as singularidades de (3.11) são da forma $\left(y, -\frac{c_4}{c_3}w, w\right)$ e então temos um plano de pontos fixos para P_α desde que $b_1 = c_1 = 0$. Com isso, concluímos a prova do teorema, conforme queríamos. ■

3.7 Dobra Tipo Elíptica

Nessa seção, estudaremos o caso em que os autovalores da matriz da parte semi-linear são complexos da forma $\pm\beta i$, correspondendo ao caso (4) da seção 3.5. Iniciaremos estudando a dinâmica da parte semi-linear do campo tipo dobra elíptica: exibiremos suas propriedades e mostraremos a existência de órbitas periódicas próximas das singularidades. Em seguida, daremos perturbações reversíveis e hamiltonianas na parte semi-linear e verificaremos se as órbitas periódicas são preservadas. Denotaremos por $X_0(x, y, z, w) = (y, -\text{sgn}(x), \beta w, -\beta z)$ a parte semi-linear do campo dobra elíptica. Podemos considerar, sem perda de generalidade, $\beta = 1$, pois X_0 é equivalente ao campo X dado por:

$$X : \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\text{sgn}(x) \\ \dot{z} = w \\ \dot{w} = -z \end{cases} \quad (3.12)$$

Considere $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ a involução dada por $\varphi(x, y, z, w) = (-x, y, -z, w)$. Note que o campo (3.12) é φ -reversível e hamiltoniano, com função hamiltoniana:

$$H(x, y, z, w) = \text{sgn}(x)x + \frac{y^2 + z^2 + w^2}{2}.$$

Vamos identificar as H_0 -singularidades que ocorrem em X . A única singularidade possível é a dobra elíptica, pois $X_\varepsilon h(p) = y$ e $X_\varepsilon^2 h(p) = -\varepsilon \neq 0$. Observe que o conjunto de dobra de X coincide com o seu conjunto de tangência, $D_X = T_X = \{x = y = 0\}$.

Considere $p_0 = (0, y_0, z_0, w_0) \in H_0$ um ponto qualquer. A trajetória γ_ε em H_ε de X_ε passando por p_0 em tempo 0 é dada por:

$$\begin{cases} x(\gamma_\varepsilon(t, p_0)) = -\varepsilon \frac{t^2}{2} + y_0 t \\ y(\gamma_\varepsilon(t, p_0)) = -\varepsilon t + y_0 \\ z(\gamma_\varepsilon(t, p_0)) = z_0 \cos(t) + w_0 \sin(t) \\ w(\gamma_\varepsilon(t, p_0)) = w_0 \cos(t) - z_0 \sin(t) \end{cases}$$

para $\varepsilon = \pm 1$.

Lema 3.7.1. *Considere o campo X , como em (3.12) e $p_0 \in H_0$, $p_0 = (0, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. Seja γ a trajetória tal que $\gamma(0) = p_0$, $\gamma(v) = \gamma_\varepsilon(v)$ com $\gamma_\varepsilon(v) \in H_\varepsilon$. Então o tempo de retorno t (correspondendo à H_ε) e u (correspondendo à $H_{-\varepsilon}$), são iguais a $t = u = 2\varepsilon\alpha_2$.*

Demonstração. Considere $p_0 = (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ e para $1 \leq i \leq 4$, denote por $g(i, \varepsilon, t, p_0) = x_i(\gamma_{-\varepsilon}(t))$, logo escrevemos a trajetória de X_ε como $\gamma_\varepsilon(t, p_0) = (g(1, \varepsilon, t, p_0), g(2, \varepsilon, t, p_0), g(3, \varepsilon, t, p_0), g(4, \varepsilon, t, p_0))$. Para que γ_ε retorne à H_0 , devemos ter $g(1, \varepsilon, t, p_0) = 0$ para algum $t_0 \neq 0$. Denotemos por $q_0 = (g(2, \varepsilon, t_0, p_0), g(3, \varepsilon, t_0, p_0), g(4, \varepsilon, t_0, p_0))$ e por μ_0 o tempo de retorno à H_0 da trajetória $\gamma_{-\varepsilon}$ partindo de q_0 . Portanto as condições para que esses respectivos tempos existam são dadas pelas seguintes equações racionais:

$$\begin{cases} t^{-1} g(1, \varepsilon, t, p_0) = 0 \\ u^{-1} g(1, -\varepsilon, u, q_0) = 0 \end{cases}$$

Seja I o ideal gerado pelas duas equações acima e $\tilde{I} = I \cup \langle u\tilde{u} - 1 \rangle$, com isso eliminamos a solução irrelevante correspondendo aos valores $t = u = 0$. Então calculamos a base de Gröbner para \tilde{I} , com ordem lexicográfica nas variáveis $(t, u, \tilde{u}, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \varepsilon)$. Obtemos a seguinte base,

$$[\varepsilon^2 - 1, u - 2\varepsilon\alpha_2, t - 2\varepsilon\alpha_2].$$

Portanto, concluímos o lema resolvendo as equações acima. ■

Lema 3.7.2. *Sejam X o campo dobra elíptica dado por (3.12) e $p_0 \in H_0$. Existem órbitas periódicas para X passando por p_0 , desde que $p_0 \in \left\{ \left(\varepsilon c \frac{\pi}{2}, z, w \right) \mid c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \cup \{(y, 0, 0)\}$.*

Demonstração. Para mostrarmos tal lema, vamos construir a aplicação de Poincaré para o campo (3.12) e encontrarmos os pontos fixos dessa aplicação. Seja $p = (y, z, w) \in H_0$, omitimos o 0 da primeira coordenada de p para simplificar a notação. Usando o Lema 3.7.1 na expressão da trajetória γ_ε , temos que ela retorna à H_0 no ponto $q = (-y, z \cos(2\varepsilon y) + w \sin(2\varepsilon y), w \cos(2\varepsilon y) - z \sin(2\varepsilon y))$.

Partindo agora do ponto q e usando novamente o Lema 3.7.1, temos que a trajetória $\gamma_{-\varepsilon}$ retorna à H_0 no ponto $\bar{p} = (y, z \cos(4\varepsilon y) + w \sin(4\varepsilon y), w \cos(4\varepsilon y) - z \sin(4\varepsilon y))$.

Então, definimos a aplicação de Poincaré como:

$$P(y, z, w) = (y, z \cos(4\varepsilon y) + w \sin(4\varepsilon y), w \cos(4\varepsilon y) - z \sin(4\varepsilon y)).$$

Com isso, calculando os pontos fixos de P que não são singularidades de (3.12) temos:

$$Fix(P) = F_1 = \left\{ \left(\varepsilon c \frac{\pi}{2}, z, w \right) \mid c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \cup F_2 = \{(y, 0, 0)\}.$$

Temos portanto órbitas periódicas em pontos de F_1 e F_2 (ver Figura 3.4), conforme queríamos provar. ■

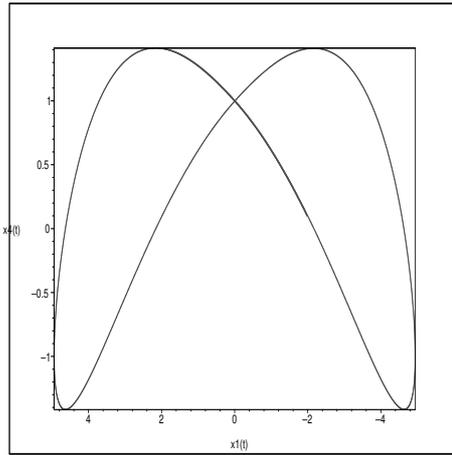


Figura 3.4: Órbita 1-periódica de (3.12) passando pelo ponto $(\pi, 1, 1)$.

Observação 3.7.1.

1. Nos pontos de F_1 , os autovalores da Jacobiana de P são todos iguais a 1, enquanto que nos pontos de F_2 , um autovalor é igual a 1 e os outros dois são complexos conjugados com produto unitário.
2. Para o campo (3.12), temos órbitas periódicas de qualquer ordem n nos pontos $p_n = \left(\varepsilon c \frac{\pi}{2n}, z, w \right)$ (ver Figura 3.5).

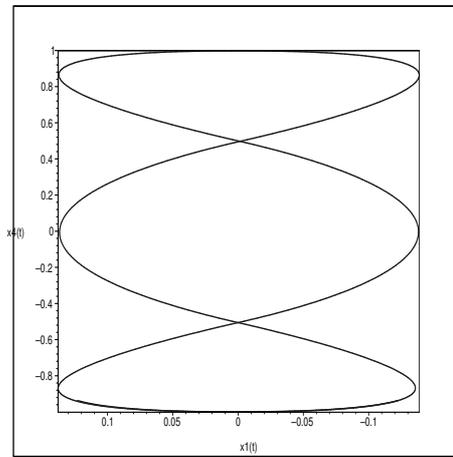


Figura 3.5: Órbita periódica de período 3 para (3.12) passando pelo ponto $\left(\frac{\pi}{6}, 0, 1 \right)$.

3.8 Perturbações, Órbitas Periódicas e Curvas Invariantes de Dobras Elípticas

Nosso objetivo nessa seção é estudar perturbações do campo (3.12) da forma $Y = X + \varepsilon F$, com $F \in C^\infty$ e $Y \in \Gamma_E^*$ e verificar a permanência das órbitas periódicas. Perturbaremos (3.12) de tal forma que Y continue φ -reversível e hamiltoniano, com função hamiltoniana

$$H(x, y, z, w) = \operatorname{sgn}(x)x + \frac{y^2 + z^2 + w^2}{2} + F(x^2, y^2, z^2, w^2) \quad (3.13)$$

onde $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ é suave, de grau maior ou igual a 2.

É fácil verificar que o hamiltoniano (3.13) apresenta a propriedade de $H \circ \varphi = H$.

Seja Y a perturbação de (3.12) da seguinte forma,

$$Y : \begin{cases} \dot{x} = y + f_1(x, y, z, w) \\ \dot{y} = -\operatorname{sgn}(x) + f_2(x, y, z, w) \\ \dot{z} = w + f_3(x, y, z, w) \\ \dot{w} = -z + f_4(x, y, z, w) \end{cases}$$

onde $f_i \in C^\infty$ e ordem de f_i maior ou igual a 2, para $i = 1, 3, 4$.

Para que Y seja φ -reversível, ele tem que ter a forma:

$$Y : \begin{cases} \dot{x} = y + f_1(x^2, y, z^2, w) \\ \dot{y} = -\operatorname{sgn}(x) + x f_{21}(x^2, y, z^2, w) + z f_{22}(x^2, y, z^2, w) \\ \dot{z} = w + f_3(x^2, y, z^2, w) \\ \dot{w} = -z + x f_{41}(x^2, y, z^2, w) + z f_{42}(x^2, y, z^2, w) \end{cases} \quad (3.14)$$

Por fim, para que (3.14) tenha (3.13) como hamiltoniano, Y tem que ter a seguinte forma:

$$Y : \begin{cases} \dot{x} = y + y \xi_1(x^2, y^2, z^2, w^2) \\ \dot{y} = -\operatorname{sgn}(x) - x \xi_2(x^2, y^2, z^2, w^2) \\ \dot{z} = w + w \xi_3(x^2, y^2, z^2, w^2) \\ \dot{w} = -z - z \xi_4(x^2, y^2, z^2, w^2) \end{cases} \quad (3.15)$$

Observação 3.8.1. *Nessa seção, não iremos considerar perturbações com pesos sobre as funções ξ_i , pois caso contrário teríamos $\xi_i \equiv 0$.*

Podemos observar que as únicas singularidades possíveis são as dobras elípticas (quando $y = 0$). Como estamos interessados em estudar a permanência das órbitas periódicas, vamos seguir o roteiro apresentado na seção 3.6.

As involuções de (3.12) são dadas por:

$$\begin{cases} \varphi_1(y, z, w) = (-y, z \cos(2y) + w \sin(2y), w \cos(2y) - z \sin(2y)) \\ \varphi_{-1}(y, z, w) = (-y, z \cos(2y) - w \sin(2y), w \cos(2y) + z \sin(2y)) \end{cases}$$

Considere $\phi : (H_0, 0) \rightarrow (H_0, 0)$ a mudança de coordenada dada por:

$$\begin{aligned} \phi(y, z, w) = (Id + D\varphi_1(0) \circ \varphi_1)(y, z, w) = (2y, z + z \cos(2y) + \\ + w \sin(2y), w + w \cos(2y) - z \sin(2y)). \end{aligned} \quad (3.16)$$

cuja inversa, localmente em torno de 0 é:

$$\phi^{-1}(y, z, w) = \left(\frac{y}{2}, \frac{-w + z \sin(y) + w \cos(y)}{2 \sin(y)}, \frac{z - z \cos(y) + w \sin(y)}{2 \sin(y)} \right). \quad (3.17)$$

Lema 3.8.1. *As involuções φ_1 e φ_{-1} são simultaneamente conjugadas à $\bar{\varphi}_1(y, z, w) = (-y, z, w)$ e $\bar{\varphi}_{-1}(y, z, w) = (-y, -z + 2z \cos^2(y) - w \sin(2y), -w + 2w \cos^2(y) + z \sin(2y))$, respectivamente.*

Demonstração. Basta aplicarmos a mudança de coordenadas ϕ definida em (3.16), que veremos que ela conjuga φ_1 à $\bar{\varphi}_1$, e que ϕ^{-1} definida em (3.17) conjuga φ_{-1} à $\bar{\varphi}_{-1}$. ■

Nosso objetivo é encontrar a aplicação de Poincaré para o campo de vetores (3.15) e determinar se essa aplicação possui pontos fixos, que não são pontos singulares do campo. Esses pontos irão corresponder a órbitas periódicas. Vamos encontrar tal aplicação, dar condições para que tais órbitas ocorram e, sob determinadas condições, localizar em $(H_0, 0)$ curvas que sejam invariantes pela aplicação de Poincaré.

Como estamos trabalhando de forma local, vamos considerar a expressão de Taylor de $\bar{\varphi}_{-1}$ até a ordem 3 dada por:

$$\bar{\varphi}_{-1}(y, z, w) = (-y, z - 2yw - 2y^2z, w + 2yz - 2y^2w) + o(|(y, z, w)|^4). \quad (3.18)$$

Note que os pontos fixos das involuções φ_1 e φ_{-1} é o conjunto $\{y = 0\}$. Vamos agora perturbar (3.18) de tal forma que essa nova aplicação obtida, continue sendo uma involução e que seus pontos fixos continue sendo o conjunto $\{y = 0\}$.

Considere $\psi = \bar{\varphi}_{-1} + \xi$ a perturbação de (3.18). Para que ψ tenha o conjunto $\{y = 0\}$ como fixo, devemos ter:

$$\psi(y, z, w) = (-y + y\beta_1(y, z, w), z - 2yw + y\beta_2(y, z, w), w + 2yz + y\beta_3(y, z, w)).$$

Escreva ψ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \psi(y, z, w) = & (-y + a_1y + a_2y^2 + a_3yz + a_4yw, z - 2yw + b_1y + b_2y^2 + b_3yz + \\ & + b_4yw, w + 2yz + c_1y + c_2y^2 + c_3yz + c_4yw) + yo(|(y, z, w)|^2) \end{aligned} \quad (3.19)$$

com $a_i, b_i, c_i \in (\mathbb{R}, 0)$, $i = 1, \dots, 4$.

Agora, para que (3.19) seja um involução, devemos resolver a equação $\psi^2 = Id$. Isso nos dá a seguinte forma final para ψ ,

$$\psi(y, z, w) = (-y, z - 2yw + b_1y + \bar{b}_2y^2 + b_3yz + b_4yw, w + 2yz + c_1y + \bar{c}_2y^2 + c_3yz + c_4yw) + yo(|(y, z, w)|^2)$$

onde,

$$\bar{b}_2 = -c_1 + \frac{b_1b_3 + b_4c_1}{2}, \quad \bar{c}_2 = b_1 + \frac{b_1c_3 + c_1c_4}{2}. \quad (3.20)$$

Com isso, definimos a aplicação de Poincaré do campo perturbado como:

$$P(y, z, w) = (\psi \circ \bar{\varphi}_1)(y, z, w) = (y, z + 2yw - b_1y + \bar{b}_2y^2 - b_3yz - b_4yw, w - 2yz - c_1y + \bar{c}_2y^2 - c_3yz - c_4yw) + yo(|(y, z, w)|^2). \quad (3.21)$$

No decorrer da seção, suponhamos que $(4 + 2c_3 + b_3c_4 - 2b_4 - c_3b_4) \neq 0$ onde b_i, c_i são os coeficientes de (3.21) e \bar{b}_2, \bar{c}_2 são as expressões dadas em (3.20).

Teorema 3.8.1. (Teorema B. Capítulo 2) *Seja Y o campo dobra Elíptica (3.15) e P sua aplicação de Poincaré, dada por (3.21). Temos que:*

1. *Se $b_1c_1 \neq 0$, então existe uma vizinhança da origem no qual Y não tem órbitas periódicas;*
2. *Se $b_1 = c_1 = 0$, então Y possui uma família a 1-parâmetro de órbitas periódicas.*

Demonstração. Nosso objetivo é encontrarmos os pontos fixos de (3.21), mas para isso, devemos resolver a equação $P = Id$, que nos dá como solução uma reta $r : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow H_0$ parametrizada por,

$$r(y) = \{(y, k_1y + k_2, k_3y + k_4) \mid k_i \in (\mathbb{R}, 0), i = 1, 2, 3, 4\}$$

onde,

$$\begin{cases} k_1 = \frac{2\bar{c}_2 + \bar{b}_2c_4 - b_4\bar{c}_2}{4 + 2c_3 + b_3c_4 - 2b_4 - c_3b_4 - 2c_1 + b_4c_1 - b_1c_4} \\ k_2 = \frac{-2\bar{b}_2 - \bar{b}_2c_3 + b_3\bar{c}_2}{4 + 2c_3 + b_3c_4 - 2b_4 - c_3b_4} \\ k_3 = \frac{2b_1 + b_1c_3 - b_3c_1}{4 + 2c_3 + b_3c_4 - 2b_4 - c_3b_4} \\ k_4 = \frac{2\bar{c}_2 + \bar{b}_2c_4 - b_4\bar{c}_2}{4 + 2c_3 + b_3c_4 - 2b_4 - c_3b_4} \end{cases}$$

Dentro dessa situação, devemos analisar o caso em que $k_2 \neq 0$ e $k_4 \neq 0$. Isso ocorre quando $b_1 c_1 \neq 0$ e nesse caso, a reta r definida acima, não passa pela origem, ou seja, é possível encontrar uma vizinhança da origem, no qual não temos órbitas periódicas para o campo Y .

Agora para que $k_2 = k_4 = 0$, devemos ter $b_1 = c_1 = 0$, isso implica que $\bar{b}_2 = \bar{c}_2 = 0$ e, conseqüentemente, a reta r é exatamente o eixo y . Logo temos localmente uma família a 1-parâmetro de órbitas periódicas para Y , conforme queríamos demonstrar. ■

Nosso próximo objetivo é verificar a existência de curvas em $(H_0, 0)$ que sejam invariantes por P . Para isso, vamos considerar um caso particular da aplicação P . Note que pela expressão (3.21), podemos escrever P da seguinte forma,

$$P(y, z, w) = (y, z + yP_2(y, z, w), w + yP_3(y, z, w)). \quad (3.22)$$

Então temos o seguinte resultado.

Proposição 3.8.1. *Suponha que a aplicação de Poincaré está na forma (3.22) com $P_1(y, 0, 0) = P_2(y, 0, 0) = 0$. Então existe $\gamma : I = (-\delta, \delta) \rightarrow (H_0, 0)$ uma curva C^∞ invariante por P .*

Demonstração. Note que o caso $P_1(y, 0, 0) = P_2(y, 0, 0) = 0$ implica em $b_1 = c_1 = 0$.

Denotamos por $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^3)$ o conjunto das curvas C^∞ definidas em um intervalo pequeno I em \mathbb{R}^3 e por $D = \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^6, 0), \mathbb{R}^3)$ o conjunto das aplicações C^∞ definidas em $\mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^6, 0)$ (onde $(\mathbb{R}^6, 0)$ é o espaço dos parâmetros) em \mathbb{R}^3 . Note que $P \in D$ e defina

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : D \times \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^3) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^3) \\ (P, \gamma) &\mapsto P \circ \gamma - \gamma \circ \rho \end{aligned}$$

onde $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\rho(t) = t$.

Observe que mostrar a existência de uma curva $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^3)$ que seja invariante por $P \in D$, é equivalente a mostrar que a curva $\mathcal{F}(P, \gamma)$ é identicamente nula.

De fato, pois

$$\mathcal{F}(P, \gamma) \equiv 0 \Leftrightarrow \forall t \in I, \mathcal{F}(P, \gamma)(t) = 0 \Leftrightarrow (P \circ \gamma)(t) - (\gamma \circ \rho)(t) = 0 \Leftrightarrow P(\gamma(t)) = \gamma(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{Graf}(P \circ \gamma) \subset \text{Graf}(\gamma) \Leftrightarrow \gamma \text{ é invariante por } P.$$

Considere então, de modo natural, a curva $\gamma_0(t) = (t, 0, 0)$ e vamos mostrar, sob as hipóteses da Proposição, que γ_0 é invariante por P . De fato, para todo $t \in I$, temos

$$\mathcal{F}(P, \gamma_0)(t) = (P \circ \gamma_0)(t) - (\gamma_0 \circ \rho)(t) = P(t, 0, 0) - \gamma_0(t) = (t, 0, 0) - (t, 0, 0) = 0.$$

Logo γ_0 é invariante por P , conforme queríamos. ■

Portanto, podemos resumir esse resultado no seguinte teorema.

Teorema 3.8.2. (Teorema C. Capítulo 2) *Seja $Y \in \Gamma_E^*$ uma dobra do tipo elíptica e P sua aplicação de Poincaré dada por (3.21). Temos,*

1. *Se $b_1 c_1 \neq 0$, então existe uma vizinhança V da origem tal que Y não possui órbitas 1-periódicas e P não possui curvas invariantes;*

Restringindo ao 2-jato de P , temos

2. *Se $b_1 = c_1 = 0$, então o eixo y passa a ser pontos fixos de P e então temos uma família a 1-parâmetro de órbitas periódicas para Y .*

Com isso, finalizamos o estudo do comportamento das trajetórias dos campos tipo dobra. Nosso próximo objetivo é estudar a dinâmica dos campos de vetores do tipo cúspide.

3.9 Singularidades do Tipo Cúspide

Nesta seção, iremos continuar procurando condições para a existência de órbitas periódicas em torno de uma cúspide. Considere Y_0 uma cúspide simplesmente integrável, cuja parte semi-linear é expressa por:

$$Y_0 : \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = \text{sgn}(x) \\ \dot{w} = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Seguindo a classificação feita em [JT2] e as definições 1.3.4 e 1.3.5, o conjunto de dobras para (3.23) é formado por dobras parabólicas e é expresso por $D_{Y_0} = \{p = (y, z, w) \in H_0 \mid y = 0, z \neq 0\}$. Já as cúspides ocorrem no conjunto $C_{Y_0} = \{p = (y, z, w) \in H_0 \mid y = 0, z = 0\}$ e são todas simétricas.

Quanto a reversibilidade de (3.23), temos o seguinte resultado.

Lema 3.9.1. *Se Y_0 é o campo cúspide (3.23), então não existe involução linear $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, com $Fix(\varphi) \subset H_0$ no qual Y_0 seja φ -reversível.*

Demonstração. Considere φ dada por

$$\varphi(x, y, z, w) = (-x, k_{21}x + k_{22}y + k_{23}z + k_{24}w, k_{31}x + k_{32}y + k_{33}z + k_{34}w, k_{41}x + k_{42}y + k_{43}z + k_{44}w)$$

com $k_{ij} \in \mathbb{R}$.

Para que tenhamos φ involução e Y_0 φ -reversível, devemos resolver as equações $\varphi^2 = Id$ e $\varphi \circ (Y_0)_+ = -(Y_0)_- \circ \varphi$. Essas equações nos fornecem um sistema com 24 equações que não possui solução com relação aos parâmetros k_{ij} . Portanto, não existe involução linear no qual Y_0 é reversível. ■

Diante dessa situação, vamos dar a definição de *sistemas quasi-reversíveis*.

Definição 3.9.1. *Seja φ uma involução, dizemos que um campo de vetores X é φ -**quasi-reversível** em p , se o conjunto dos pontos fixos de φ , intercepta a subvariedade de descontinuidade H_0 transversalmente em uma vizinhança de p , ou seja,*

$$\begin{cases} Fix(\varphi) \pitchfork_p H_0 \text{ e} \\ \varphi * X_+ = -X_- \circ \varphi \end{cases}$$

Consideraremos nessa e na próxima seção $\varphi(x, y, z, w) = (x, -y, z, w)$. É fácil ver que (3.23) é φ -quasi-reversível e que suas singularidades de dobras estão contidas no conjunto dos pontos fixos de φ .

Estamos interessados em verificar a existência de órbitas periódicas para (3.23). Para isso, considere $p = (0, y_0, z_0, w_0) \in H_0$ um ponto qualquer. A trajetória de $(Y_0)_+$ passando

por p em instante $t = 0$ é

$$\gamma_+(t, p) = \left(\frac{\varepsilon}{6}t^3 + \frac{z_0}{2}t^2 + y_0t, \frac{\varepsilon}{2}t^2 + z_0t + y_0, \varepsilon t + z_0, w_0 \right).$$

Com respeito as órbitas periódicas de (3.23), temos o seguinte resultado.

Teorema 3.9.1. *Se Y_0 é uma cúspide simplesmente integrável dada em sua forma normal de Anosov (3.23), então Y_0 não admite órbitas 1-periódicas.*

Demonstração. Seja $p = (y_0, z_0, w_0) \in H_0$ e suponhamos que a trajetória γ_+ de $(Y_0)_+$ passando por p em tempo $t = 0$, retorna à H_0 no ponto q e em tempo real positivo $t = t_0$. Suponhamos agora que a trajetória γ_- de $(Y_0)_-$ passando pelo ponto q em tempo $\mu = 0$, retorna à H_0 em tempo real positivo $\mu = \mu_0$.

Queremos mostrar que Y_0 não admite órbita 1-periódica. Para isso, vamos supor que Y_0 admite uma órbita 1-periódica em p . Agora, para que $\gamma = (\gamma_+, \gamma_-)$ seja uma órbita 1-periódica, o seguinte sistema tem que ser satisfeito.

$$\begin{cases} \frac{x(\gamma_+(t_0, p))}{t} = 0 \\ \frac{x(\gamma_-(\mu_0, q))}{\mu} = 0 \\ y(\gamma_-(\mu_0, q)) - y_0 = 0 \\ z(\gamma_-(\mu_0, q)) - z_0 = 0 \\ w(\gamma_-(\mu_0, q)) - w_0 = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

A quinta equação do sistema (3.24) é claramente satisfeita e a quarta equação nos diz que $t_0 = \mu_0$.

O lado esquerdo da terceira equação de (3.24) é

$$\left(\frac{1}{2}t_0^2 - \frac{1}{2}\mu_0^2 + \mu_0 t_0 \right) \varepsilon + z_0 t_0 + z_0 \mu_0.$$

Usando o fato que $t_0 = \mu_0 \neq 0$, temos que $t_0 = \mu_0 = -2\varepsilon z_0$.

Por fim, substituindo esses tempos nas duas primeiras equações de (3.24), temos que

$$\begin{cases} y_0 - \frac{z_0^2 \varepsilon}{3} = 0 \\ y_0 + \frac{z_0^2 \varepsilon}{3} = 0 \end{cases}$$

ou seja, $y_0 = z_0 = 0$, mas isso implica que $t_0 = 0$, o que é uma contradição. Tal contradição surgiu de termos suposto que Y_0 tinha uma órbita 1-periódica. Portanto, Y_0 não admite órbita 1-periódica, conforme queríamos provar. ■

A esta altura, as seguintes perguntas podem ser formuladas. Pequenas perturbações de Y_0 em Γ_{SI} acarreta no surgimento de órbitas periódicas? E perturbações fora de Γ_{SI} ? Essas perguntas serão abordadas nas próximas seções.

3.10 Perturbações Simplesmente Integráveis de Singularidades de Cúspides

Na seção anterior, vimos que as singularidades tipo cúspides simplesmente integráveis não possuem órbitas periódicas. O objetivo dessa seção é verificar se tal propriedade é preservada ou não, quando trabalhamos com pequenas perturbações em Γ_{SI} de tais campos. Vamos considerar nessa seção, perturbações com pesos nas variáveis e φ -quasi-reversível. Considere, portanto $Y = Y_0 + \varepsilon F$ a perturbação de (3.23), com $Y \in \Gamma_{SI}$, $F = (f_1, f_2, f_3, 0)$ onde $f_i \in C^\infty$ e $\nu_0(f_i) \leq 5 - i$, $i = 1, 2, 3$.

A condição de que Y continue φ -quasi-reversível nos dá o seguinte resultado.

Lema 3.10.1. *Seja $Y \in \Gamma_{SI}$ uma perturbação de (3.23). O campo Y é φ -quasi-reversível desde que existe funções $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in C^\infty$ tal que*

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, w) = y\xi_1(x, y^2, z, w) \\ f_2(x, y, z, w) = \xi_2(x, y^2, z, w) \\ f_3(x, y, z, w) = y\xi_3(x, y^2, z, w) \end{cases}$$

onde $\nu_0(\xi_i) \leq 5 - i$, $i = 1, 2, 3$.

Demonstração. Considere Y escrito da seguinte forma

$$Y : \begin{cases} \dot{x} = y + f_1(x, y, z, w) \\ \dot{y} = z + f_2(x, y, z, w) \\ \dot{z} = \text{sgn}(x) + f_3(x, y, z, w) \\ \dot{w} = 0 \end{cases}$$

com $\nu_0(f_1) \leq 5 - i$ e $\varphi(x, y, z, w) = (x, -y, z, w)$.

Logo,

$$(\varphi \circ Y_+)(x, y, z, w) = (y + f_1(x, y, z, w), -z - f_2(x, y, z, w), \varepsilon + f_3(x, y, z, w), 0)$$

por outro lado,

$$-(Y_- \circ \varphi)(x, y, z, w) = (y - f_1(x, -y, z, w), -z - f_2(x, -y, z, w), \varepsilon - f_3(x, -y, z, w), 0).$$

A igualdade das duas equações acima só é verdadeira caso existam funções $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in C^\infty$, tal que

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, w) = y\xi_1(x, y^2, z, w) \\ f_2(x, y, z, w) = \xi_2(x, y^2, z, w) \\ f_3(x, y, z, w) = y\xi_3(x, y^2, z, w) \end{cases}$$

E além disso, $\nu_0(f_i) \leq 5 - i$, conforme queríamos provar. ■

Em consequência do Lema 3.10.1, a forma normal primitiva de Y é

$$Y = Y_\lambda : \begin{cases} \dot{x} = y + \lambda_1 y w + \phi_1(x, y, z, w) \\ \dot{y} = z + \lambda_2 z w + \lambda_3 w + \lambda_4 w^2 + \lambda_5 w^3 + \phi_2(x, y, z, w) \\ \dot{z} = \text{sgn}(x) + \phi_3(x, y, z, w) \\ \dot{w} = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

onde $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ e $\nu_0(\phi_i) > 5 - i$, $i = 1, 2, 3$.

Lema 3.10.2. *Se $Y \in \Gamma_{SI}$ está em sua forma normal primitiva (3.25), e $p \in H_0$, então temos:*

$$\begin{cases} Y_\varepsilon h(p) = y + \lambda_1 y w + \varphi_1(p) \\ Y_\varepsilon^2 h(p) = z(1 + (\lambda_1 + \lambda_2)w + \lambda_1 \lambda_2 w^2) + c(\lambda, w) + \varphi_2(p) \\ Y_\varepsilon^3 h(p) = \varepsilon + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2 w)\varepsilon w + \varphi_3(p) \end{cases}$$

onde $c(\lambda, w) = \lambda_3 w + (\lambda_4 + \lambda_1 \lambda_3)w^2 + (\lambda_5 + \lambda_1 \lambda_4)w^3 + \lambda_1 \lambda_5 w^4$ e $\nu_0(\varphi_i) \geq 4 - i$ para $i = 1, 2, 3$.

Demonstração. Assuma que Y_ε está escrito na forma (3.25). Temos:

$$Y_\varepsilon h(p) = y + \lambda_1 y w + \varphi_1(p).$$

Colocando $\varphi_1(p) = \phi_1(p)$, pelo Lema 1.2.1, temos $\nu_0(\varphi_1) \geq 4$. Então

$$Y_\varepsilon^2 h(p) = z(1 + (\lambda_1 + \lambda_2)w + \lambda_1\lambda_2w^2) + c(\lambda, w) + \varphi_2(p)$$

com

$$\varphi_2(p) = \phi_2(p)(1 + \lambda_2w) + Y_\varepsilon h(p) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(p) + \phi_2(p) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(p) + (\varepsilon + \phi_3(p)) \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(p).$$

Pelo Lema 1.2.1, temos $\nu_0(\varphi_2) \geq 3$. Por fim:

$$Y_\varepsilon^3 h(p) = \varepsilon + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2w)\varepsilon w + \varphi_3(p)$$

com

$$\begin{aligned} \varphi_3(p) = & \phi_3(p)(1 + (\lambda_1 + \lambda_2)w + \lambda_1\lambda_2w^2) + Y_\varepsilon h(p) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(p) + (z + \lambda_2zw + \lambda_3w + \\ & + \lambda_4w^2 + \lambda_5w^3 + \phi_2(p)) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(p) + (\varepsilon + \phi_3(p)) \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(p). \end{aligned}$$

Usando novamente o Lema 1.2.1, temos $\nu_0(\varphi_3) \geq 2$. ■

Para descrevermos as singularidades de (3.25), vamos seguir a classificação feita em [JT2].

O conjunto de singularidades de dobras de (3.25) é dado por

$$D_{Y_\lambda} = \{p \in H_0 : y = 0 \text{ e } z \neq 0 \text{ ou } w \neq 0\}$$

e o conjunto de singularidades de cúspide é dado por

$$C_{Y_\lambda} = \{p \in H_0 : y = z = w = 0\}$$

ou seja, a única singularidade de cúspide de (3.25) é a origem e ela é uma cúspide do tipo simétrica. Agora como $(Y_\lambda)_\varepsilon^2 h(p) = (Y_\lambda)_{-\varepsilon}^2 h(p)$, para todo $p \in H_0$, concluímos que as singularidades de dobra são todas do tipo parabólicas.

O fato de termos somente singularidades de dobras parabólicas é um forte indício de que (3.25) não tenha órbita 1-periódica. De fato, isso é verificado no seguinte teorema.

Teorema 3.10.1. *Seja Y_λ o campo vetorial tipo cúspide, dado em sua forma normal primitiva (3.25). Então Y_λ não admite órbita 1-periódica.*

Demonstração. De maneira análoga a demonstração do Teorema 3.9.1, considere $p \in H_0$ e γ_+ , γ_- as trajetórias de $(Y_\lambda)_+$ e $(Y_\lambda)_-$ respectivamente. Para que exista uma órbita 1-periódica, o seguinte sistema tem que possuir solução

$$\begin{cases} \frac{x(\gamma_+(t_0, p))}{t} = 0 \\ \frac{x(\gamma_-(\mu_0, q))}{\mu} = 0 \\ y(\gamma_-(\mu_0, q)) - y_0 = 0 \\ z(\gamma_-(\mu_0, q)) - z_0 = 0 \\ w(\gamma_-(\mu_0, q)) - w_0 = 0 \end{cases}$$

Assim como na demonstração do Teorema 3.9.1, a última equação do sistema é sempre verdadeira e a quarta equação nos diz que os tempos de retorno t_0 e u_0 de γ_+ e γ_- respectivamente à H_0 , são iguais. A terceira equação nos dá uma expressão para tal tempo,

$$t_0 = u_0 = -\frac{2\varepsilon(z + \lambda_3 w + \lambda_2 z w + \lambda_4 w^2 + \lambda_5 w^3)}{1 + \lambda_2 w}.$$

Note que $1 + \lambda_2 w \neq 0$, pois estamos trabalhando em uma vizinhança da origem.

Substituindo esse tempo nas duas primeiras equações, temos

$$\begin{cases} y + \lambda_1 y w - \frac{\lambda_3^2 \varepsilon}{3} w^2 - \frac{2\lambda_3 \varepsilon}{3} z w - \frac{\varepsilon}{3} z^2 + o(|(\lambda, y, z, w)|^3) = 0 \\ y + \lambda_1 y w + \frac{\lambda_3^2 \varepsilon}{3} w^2 + \frac{2\lambda_3 \varepsilon}{3} z w + \frac{\varepsilon}{3} z^2 + o(|(\lambda, y, z, w)|^3) = 0 \end{cases}$$

que nos dá como solução,

$$S_1 = \{y = 0 \text{ e } z = -\lambda_3 w + o(2)\} \text{ ou } S_2 = \left\{ w = -\frac{1}{\lambda_1} \text{ e } z = \frac{\lambda_3}{\lambda_1} + o(2) \right\}.$$

Note que em S_1 , $y = 0$ corresponde a singularidades de dobras de (3.25). Como as dobras de Y_λ são todas do tipo parabólicas, elas não fazem parte de uma órbita 1-periódica. Por outro lado, em S_2 a variável w é tão grande quanto queiramos e isso não nos interessa. Portanto, como queríamos mostrar, não existe órbitas 1-periódicas para a família de campos de vetores Y_λ . ■

Com isso, encerramos o estudo de órbitas periódicas em campos simplesmente integrável com singularidade do tipo cúspide.

3.11 Cúspides Degeneradas

Mediante a situação que nos encontramos, de não termos encontrado órbitas periódicas nos campos vetoriais do tipo cúspides simplesmente integráveis, vamos introduzir uma nova classe de campos vetoriais tipo cúspides, no qual iremos estudar a existência e a permanência de órbitas 1-periódicas.

No decorrer dessa seção, vamos denotar por Y_0 o campo vetorial tipo cúspide com forma semi-linear dada por

$$Y_0(x, y, z, w) = \left(y + \frac{1}{2}z^2, 0, \operatorname{sgn}(x), 0 \right). \quad (3.26)$$

Esse novo campo apresenta as seguintes propriedades de fácil constatação:

1. Y_0 é φ -reversível, com $\varphi(x, y, z, w) = (-x, y, z, -w)$;
2. A órbita solução γ_ε de $(Y_0)_\varepsilon$ em $p_0 = (0, y_0, z_0, w_0) \in H_0$ é

$$\gamma_\varepsilon(t, p_0) = \left(\frac{1}{6}t^3 + \frac{\varepsilon}{2}z_0t^2 + \left(y_0 + \frac{z_0^2}{2} \right) t, y_0, \varepsilon t + z_0, w_0 \right)$$

com $\varepsilon = \pm 1$;

3. O conjunto de dobra e de cúspide de (3.26) são respectivamente

$$D_{Y_0} = \left\{ p \in H_0 \mid y = -\frac{1}{2}z^2 \text{ e } z \neq 0 \right\} \text{ e } C_{Y_0} = \{ p \in H_0 \mid y = z = 0 \};$$

4. As singularidades de dobras são do tipo hiperbólicas ou elípticas, e são separadas por uma cúspide simétrica;
5. Fixado w_0 , é fácil ver que a dinâmica de (3.26) para um w_0 constante é descrita geometricamente pelas Figuras 3.6 e 3.7 onde,
 - (a) Calculando, pelas bases de Gröbner, as condições necessárias para que tenhamos órbita 1-periódica para (3.26), obtemos a equação $y = -\frac{1}{8}z^2$, representada pela parábola C_1 ;

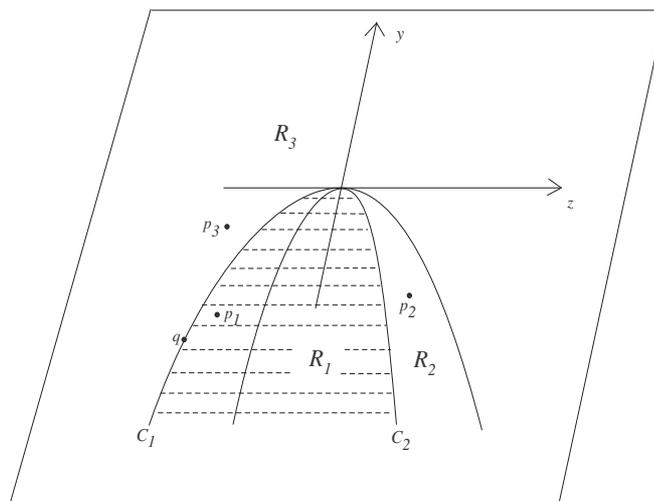


Figura 3.6: Diagrama mostrando a dinâmica das órbitas de (3.26) para $w_0 = 1$.

- (b) A parábola C_2 , de equação $y = -\frac{1}{2}z^2$, são formados pelos pontos de dobras de (3.26);
- (c) O ramo da parábola C_2 contido na região R_1 é formado por dobras do tipo elípticas e o ramo dessa parábola que é fronteira da região R_2 é formado por dobras do tipo hiperbólicas;
- (d) A intersecção das parábolas C_1 e C_2 é a cúspide;
- (e) As trajetórias de (3.26) nos pontos p_3 , q , p_1 e p_2 são ilustrados pela Figura 3.7.

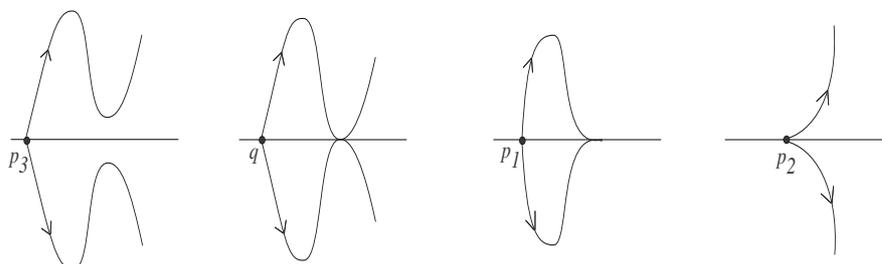


Figura 3.7: Dinâmica das órbitas de (3.26) nos pontos p_3 , q , p_1 e p_2 .

Isso finaliza o estudo da dinâmica do caso semi-linear. Estamos interessados em estu-

dar perturbações φ -reversíveis desse campo, mais precisamente, na permanência de órbitas periódicas. A forma normal primitiva de perturbações φ -reversíveis de (3.26) é dada por:

$$Y = Y_\alpha : \begin{cases} \dot{x} = y + \frac{1}{2}z^2 + \alpha_1 w^2 + \alpha_2 z w^2 + \xi_1(x, y, z, w) \\ \dot{y} = \alpha_3 w + \alpha_4 z w + \xi_2(x, y, z, w) \\ \dot{z} = \operatorname{sgn}(x) + \alpha_5 w + \xi_3(x, y, z, w) \\ \dot{w} = \xi_4(x, y, z, w) \end{cases} \quad (3.27)$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in (\mathbb{R}^5, 0)$ são parâmetros pequenos e $\nu_0(\xi_i) \geq 5 - i$, $i = 1, \dots, 4$.

Denotamos por Λ o conjunto dos campos vetoriais da forma (3.27).

Um cálculo simples nos diz que as variedades de dobras e cúspides de $Y \in \Lambda$ são respectivamente dadas por:

$$D_{Y_\varepsilon} = \left\{ p = (0, y, z, w) \in H_0 \mid y = -\frac{1}{2}z^2 - \alpha_2 z w^2 - \alpha_1 w^2 + \xi_1(p) \text{ e} \right. \\ \left. z \neq -\frac{\alpha_2^2 w^3 + \varepsilon \alpha_2 w^2 + \alpha_3 w}{\varepsilon + (\alpha_4 + \alpha_5)w} + \bar{\xi}_2(p) \right\}. \\ C_{Y_\varepsilon} = \left[-\frac{w^2(\alpha_3 + (\varepsilon + \alpha_5 w)\alpha_2 w)^2}{2(\varepsilon + (\alpha_4 + \alpha_5)w)^2} - \alpha_1 w^2 + \frac{\alpha_2 w^3(\alpha_3 + (\varepsilon + \alpha_5 w)\alpha_2 w)}{\varepsilon + (\alpha_4 + \alpha_5)w}, \right. \\ \left. -\frac{w(\alpha_3 + (\varepsilon + \alpha_5 w)\alpha_2 w)}{\varepsilon + (\alpha_4 + \alpha_5)w}, w \right] + o(|w|^4) \quad (3.28)$$

para $\varepsilon = \pm 1$.

Vamos assumir a partir de agora que $(\alpha_4 + \alpha_5)\alpha_5 \neq 0$ e mostraremos alguns resultados sobre as linhas de cúspides.

Lema 3.11.1. *Um ponto $p \in H_0$ é um ponto de cúspide para Y_ε desde que $w \neq -\frac{\varepsilon}{\alpha_5}$ e $w \neq -\frac{\varepsilon}{\alpha_4 + \alpha_5}$.*

Demonstração. Seja $p \in H_0$, desde que $Y_\varepsilon^3 h(p) = 1 + (\varepsilon + \alpha_5 w)(\alpha_4 w + \varepsilon + \alpha_5 w) + \bar{\xi}(p)$. Temos que p é um ponto de cúspide para Y_ε se $Y_\varepsilon h(p) = Y_\varepsilon^2 h(p) = 0$, $Y_\varepsilon^3 h(p) \neq 0$ e o conjunto $\{Dh(p), DY_\varepsilon h(p), DY_\varepsilon^2 h(p)\}$ é L.I. Contudo, a condição $Y_\varepsilon^3 h(p) \neq 0$ é satisfeita desde que $w \neq -\frac{\varepsilon}{\alpha_5}$ e $w \neq -\frac{\varepsilon}{\alpha_4 + \alpha_5}$, conforme queríamos. ■

Lema 3.11.2. *Sobre as linhas de cúspide C_{Y_ε} para $\varepsilon = \pm 1$, temos que,*

1. *Elas se interceptam apenas em $w = 0$;*

2. A intersecção é transversal se e somente se $\alpha_3 \neq 0$;
3. A intersecção tem contato cúbico se e somente se $\alpha_3 = 0$ e $\alpha_2\alpha_4 \neq 0$;
4. As linhas de cúspides coincidem se e somente se $\alpha_3 = 0$ e $\alpha_2\alpha_4 = 0$.

Demonstração. Considere a parametrização das linhas de cúspides dada em (3.28). É fácil ver que essas linhas coincidem desde que $w = 0$. Daí

$$\frac{d}{dt}C_{Y_\varepsilon}(0) = (0, -\varepsilon\alpha_3, 1)$$

logo se $\alpha_3 \neq 0$, $\frac{d}{dt}C_{Y_\varepsilon}(0) \neq \frac{d}{dt}C_{Y_{-\varepsilon}}(0)$, ou seja, as linhas de cúspides são transversais em 0. Agora se $\alpha_3 = 0$, temos

$$\frac{d^2}{dt^2}C_{Y_\varepsilon}(0) = (-2\alpha_1, -2\alpha_2, 0) \text{ e } \frac{d^3}{dt^3}C_{Y_\varepsilon}(0) = (0, 6\varepsilon\alpha_2\alpha_4, 0).$$

Então $\frac{d^i}{dt^i}C_{Y_\varepsilon}(0) = \frac{d^i}{dt^i}C_{Y_{-\varepsilon}}(0)$, para $i = 1, 2$ e $\frac{d^3}{dt^3}C_{Y_\varepsilon}(0) \neq \frac{d^3}{dt^3}C_{Y_{-\varepsilon}}(0)$ se e somente se $\alpha_2\alpha_4 \neq 0$, ou seja, as linhas de cúspides tem contato cúbico se e somente se $\alpha_2\alpha_4 \neq 0$.

Por fim, se $\alpha_3 = 0$ e $\alpha_2\alpha_4 = 0$ é fácil ver que as linhas de cúspides coincidem, conforme queríamos provar. ■

3.12 Tipos de Singularidades

Vamos verificar os tipos de singularidades que temos para o campo de vetores (3.27). Para isso, devemos estudar o sinal de $Y_{\pm\varepsilon}^2 h(p)$. Os casos $\alpha_3 \neq 0$ e $\alpha_3 = 0$ são análogos. Na variedade de dobras, temos quatro regiões conexas separadas pelas linhas de cúspides $C_{Y_{\pm\varepsilon}}$, no qual o sinal de $Y_{\pm\varepsilon}^2 h(p)$ não se altera em cada região, mudando somente quando atravessamos de região. Isso nos diz que temos quatro tipos de dobras, conforme Figura 3.8.

Note que:

1. pontos em R_1 são dobras do tipo 2H-dobra;
2. pontos em R_2 são dobras do tipo 2E-2H-dobra;

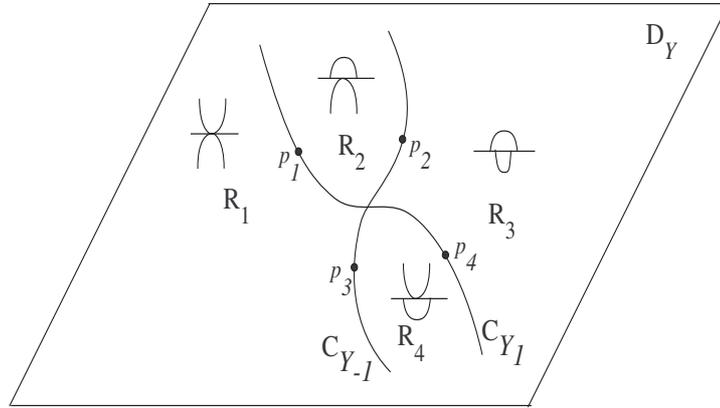


Figura 3.8: Variedade de dobra com suas linhas de cúspides e as quatro regiões distintas de dobras.

- 3. pontos em R_3 são dobras do tipo 2E-dobra;
- 4. pontos em R_4 são dobras do tipo 2H-2E-dobra;

Para as singularidades de cúspides, os casos $\alpha_3 = 0$ e $\alpha_3 \neq 0$ também são análogos. Temos quatro tipos de singularidades de cúspides descritos pelos pontos $p_{i_s} \in C_{Y_{\pm\epsilon}}$, na Figura 3.8.

- 1. O ponto p_1 é uma 3C-cúspide para Y_1 e 2E-dobra para Y_{-1} ;
- 2. O ponto p_2 é uma 2E-dobra para Y_1 e uma 3C-cúspide para Y_{-1} ;
- 3. O ponto p_3 é uma 2H-dobra para Y_1 e uma 3C-cúspide para Y_{-1} ;
- 4. O ponto p_4 é uma 3C-cúspide para Y_1 e uma 2H-dobra para Y_{-1} ;
- 5. O ponto de intersecção das linhas de cúspides é uma cúspide simétrica.

Resta analisar as singularidades quando as linhas de cúspides coincidem, isto é, quando $\alpha_3^2 + (\alpha_2\alpha_4)^2 = 0$. Neste caso, temos somente duas regiões conexas na variedade de dobra, elas são formadas por dobras hiperbólicas (2H-dobras) e dobras elípticas (2E-dobras), separadas por cúspides simétricas.

Isso finaliza a classificação das singularidades para campos de vetores $Y \in \Lambda$. Nosso interesse agora é encontrar órbitas periódicas para tais campos.

3.13 Órbitas Periódicas

Uma propriedade que campos de vetores reversíveis e simétricos com relação a variedade de descontinuidade possuem, é que se $\gamma = (\gamma_1, \gamma_{-1})$ é uma órbita periódica, então os tempos de retorno das trajetórias γ_1 e γ_{-1} à variedade de descontinuidade são os mesmos. No nosso caso temos.

Proposição 3.13.1. *Seja $Y_\varepsilon \in \Lambda$ e γ_ε a sua trajetória. Se $\alpha_5 \neq 0$, então quando temos órbitas periódicas, os tempos de retorno das trajetórias $\gamma_{\pm\varepsilon}$ à H_0 são distintos.*

Demonstração. Considere $p = (y_0, z_0, w_0) \in H_0$, $w_0 \neq 0$ e $\gamma_1(t, p)$ a trajetória de Y_1 passando por p . Suponha que essa trajetória retorne à H_0 em um ponto q e em tempo $t_0 \neq 0$. Considere agora $\gamma_{-1}(u, q)$ a trajetória de Y_{-1} passando por q e suponhamos que essa trajetória retorne à H_0 em tempo $\mu_0 \neq 0$. Vamos mostrar que $t_0 \neq \mu_0$.

Assim como na demonstração do Teorema 3.9.1, considere o sistema de equações necessário para que tenhamos órbitas 1-periódicas

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x(\gamma_1(t_0, p))}{t} = 0 \\ \frac{x(\gamma_{-1}(\mu_0, q))}{\mu} = 0 \\ y(\gamma_{-1}(\mu_0, q)) - y_0 = 0 \\ z(\gamma_{-1}(\mu_0, q)) - z_0 = 0 \\ w(\gamma_{-1}(\mu_0, q)) - w_0 = 0 \end{array} \right.$$

A quarta equação nos dá uma relação entre os tempos t_0 e μ_0 . Relação esta descrita por

$$(\alpha_5 w_0 - \varepsilon)\mu_0 + (\alpha_5 w_0 + \varepsilon)t_0 = 0.$$

Note que se $\alpha_5 \neq 0$ então $t_0 \neq \mu_0$, ou seja, o tempo de retorno não é o mesmo e as órbitas periódicas, caso existam, não são simétricas. ■

É de nosso conhecimento que se uma trajetória de $Y \in \Lambda$ encontra o eixo de simetria do sistema em dois pontos distintos, então temos uma órbita 1-periódica simétrica. Vamos denotar por $\Lambda_s \subset \Lambda$ o conjunto dos campos vetoriais no qual as órbitas 1-periódicas são todas simétricas.

Até o momento, não sabemos da existência ou não de órbitas periódicas para (3.27). O resultado a seguir vai mostrar a existência de tais órbitas mediante algumas condições.

Proposição 3.13.2. *Seja $Y \in \Lambda$. Uma condição necessária para a existência de órbitas 1-periódicas é que $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$.*

Demonstração. De modo análogo à demonstração da Proposição 3.13.1, considere o sistema de equações necessário para que tenhamos órbitas 1-periódicas. Adicionamos a esse sistema a equação $\mu U - 1$, para que o tempo μ_0 não seja nulo. Em seguida calculamos a base de Gröbner desse novo sistema, com ordem lexicográfica igual à $(y, z, w, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, t, \mu, \varepsilon, U)$, obtemos a seguinte base

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & [\varepsilon^2 - 1, \mu U - 1, \alpha_4 t^2 - \alpha_4 \mu t, \alpha_3 t^2 - \alpha_3 \mu t, -\varepsilon \mu + \varepsilon t + \alpha_5 w \mu + \alpha_5 w t, \alpha_4 w t, \\ & \alpha_4 \alpha_5 w + \alpha_4 U \varepsilon t - \varepsilon \alpha_4, \alpha_3 w t, \alpha_3 \alpha_5 w + U \alpha_3 \varepsilon t - \varepsilon \alpha_3, \alpha_4 z t - \alpha_4 z \mu + \alpha_3 t - \alpha_3 \mu, \\ & \alpha_4 z w + \alpha_3 w, \alpha_5^2 w^2 \mu^2 - 2\varepsilon \alpha_5 w \mu^2 + \mu^2 + 6y + 3z^2 + 6\alpha_2 z w^2 - 3\alpha_5 \mu z w + 3\varepsilon \mu z - \\ & - 3\alpha_2 \alpha_5 \mu w^3 + 6\alpha_1 w^2 + 3\varepsilon \alpha_2 \mu w^2]. \end{aligned}$$

Devemos, portanto, resolver as equações acima, mas note que duas dessas equações são $\alpha_3 w t$ e $\alpha_4 w t$, que quando resolvidos nos dão $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$, conforme queríamos. ■

No decorrer dessa seção, iremos denotar por $\Lambda_0 = \{Y \in \Lambda : \alpha_3 = \alpha_4 = 0\}$. Fixado um campo de vetores $Y \in \Lambda_0$, associaremos a esse campo a seguinte função F_Y

$$\begin{aligned} F_Y : (\mathbb{R}^2, 0) \times (\mathbb{R}^3, 0) & \rightarrow \mathbb{R} \\ ((\alpha_1, \alpha_2), (y, z, w)) & \mapsto -\frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{4}\alpha_2 z w^2 - \alpha_1 w^2 + \frac{3}{8}\alpha_2^2 w^4. \end{aligned}$$

Lema 3.13.1. *Seja $Y \in \Lambda_0$ e $G_Y : (H_0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $G_Y(p) = y - F_Y(p)$, temos que*

$$C_Y = G_Y^{-1}(0) \cap D_Y$$

onde C_Y é a linha de cúspide de Y e D_Y a variedade de dobra de Y .

Demonstração. A linha de cúspide e a variedade de dobra para $Y \in \Lambda_0$ são parametrizadas respectivamente por $C_Y = \left(\frac{1}{2}\alpha_2^2 w^4 - \alpha_1 w^2, -\alpha_2 w^2, w\right)$ e $D_Y = \left(-\frac{1}{2}z^2 - \alpha_1 w^2 - \alpha_2 z w^2, z, w\right)$. Note que se $p = (y, z, w) \in G_Y^{-1}(0) \cap D_Y$, então $z = -\alpha_2 w^2$. Substituindo esse valor na expressão de D_Y , obtemos exatamente a expressão de C_Y , logo $G_Y^{-1}(0) \cap D_Y \subset C_Y$.

Agora seja $p \in C_Y$, claramente temos que $p \in D_Y$ e $G_Y(p) = 0$, ou seja, $C_Y \subset G_Y^{-1}(0) \cap D_Y$, conforme queríamos provar. ■

Vamos obter condições necessárias para que tenhamos órbitas 1-periódicas.

Proposição 3.13.3. *Considere $Y \in \Lambda_0$. Uma condição necessária para a existência de uma órbita 1-periódica para Y em $p \in H_0$, é que $G_Y(p) \leq 0$.*

Demonstração. De fato, ao calcularmos a base de Gröbner do sistema necessário para termos órbitas periódicas para o campo de vetores Y , adicionando a esse sistema a equação $\mu U - 1$ e considerando a ordem lexicográfica igual a $\{y, z, w, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, t, \mu, \varepsilon, U\}$, obtemos

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{B}} = & [\varepsilon^2 - 1, \mu U - 1, -\varepsilon\mu + \varepsilon t + \alpha_5 w \mu + \alpha_5 w t, 6y + 3z^2 + 6\alpha_2 w^2 z - 3\alpha_5 z w \mu + 3\varepsilon z \mu \\ & - 3\alpha_5 \alpha_2 w^3 \mu + 6\alpha_1 w^2 + 3\varepsilon \alpha_2 w^2 \mu + \alpha_5^2 w^2 \mu^2 - 2\varepsilon \alpha_5 w \mu^2 + \mu^2]. \end{aligned}$$

Em seguida, resolvendo cada polinômio de $\overline{\mathcal{B}}$ com relação a t, U, α_1, α_2 e α_5 , obtemos que o seguinte polinômio tem que se anular

$$\begin{aligned} Q(t, \mu, \alpha_1, \alpha_2, z, w, \varepsilon) = & 6\alpha_1 w^2 (\mu + t)^2 + 12\alpha_2 z w^2 \mu t + 6z^2 \mu t - 6\varepsilon z \mu t^2 - 6\varepsilon z \mu^2 t + 6y \mu^2 + 6y t^2 + \\ & 3z^2 \mu^2 + 3z^2 t^2 + 12y \mu t + 4\mu^2 t^2 + 6\alpha_2 z w^2 \mu^2 + 6\alpha_2 z w^2 t^2 - 6\varepsilon \alpha_2 w^2 \mu t^2 - 6\varepsilon \alpha_2 w^2 \mu^2 t. \end{aligned}$$

Podemos decompor o polinômio Q com relação à variável t , ou à variável μ e obter os mesmos coeficientes. Vamos considerar sua decomposição com relação à μ , obtendo um polinômio de grau 2, $\overline{Q}(t, \alpha_1, \alpha_2, z, w, \varepsilon)$ na variável μ .

$$\begin{aligned} \overline{Q}(t, \alpha_1, \alpha_2, z, w, \varepsilon) = & (6\alpha_1 w^2 + 6\varepsilon z t + 6y + 3z^2 + 4t^2 + 6\alpha_2 z w^2 + 6\varepsilon \alpha_2 w^2 t) \mu^2 + (12\alpha_1 w^2 t + \\ & + 12\alpha_2 z w^2 t + 6z^2 t + 6\varepsilon z t^2 + 12y t + 6\varepsilon \alpha_2 w^2 t^2) \mu + 6\alpha_1 w^2 t^2 + 6y t^2 + 3z^2 t^2 + 6\alpha_2 z w^2 t^2. \end{aligned}$$

Para que esse polinômio se anule em algum ponto de coordenadas reais, é necessário que seu discriminante seja positivo, mas

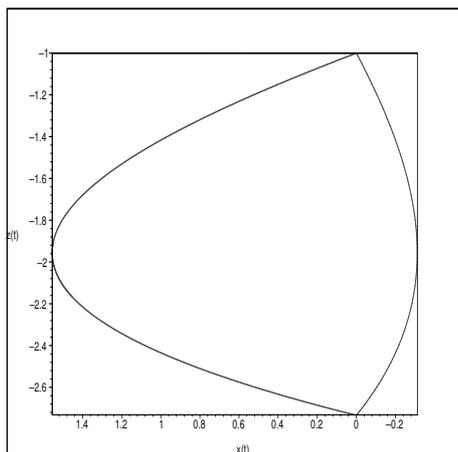
$$\Delta_{\overline{Q}} = -12(z^2 + 8\alpha_1 w^2 + 8y + 2\alpha_2 z w^2 - 3\alpha_2^2 w^4) t^4$$

ou seja,

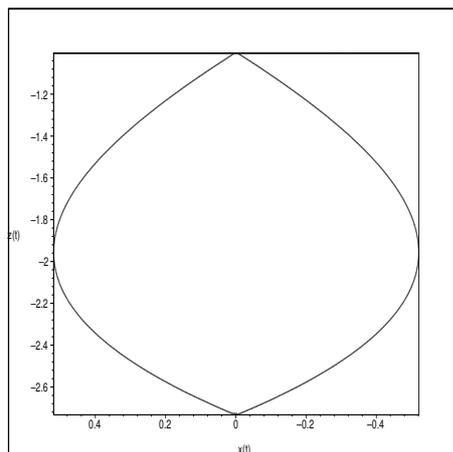
$$\Delta_{\overline{Q}} \geq 0 \Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{4}\alpha_2 z w^2 - \alpha_1 w^2 + \frac{3}{8}\alpha_2^2 w^4 \Leftrightarrow G_Y(p) \leq 0.$$

■

Observação 3.13.1. Considere $Y \in \Lambda_0$ e $p \in H_0$ um ponto satisfazendo a hipótese da Proposição 3.13.3. Conforme já vimos, se $\alpha_5 = 0$, as órbitas periódicas são simétricas e se $\alpha_5 \neq 0$, as órbitas periódicas são assimétricas e ocorrem em pares dependendo do sinal de α_5 , veja Figuras 3.9.1 e 3.9.2.



3.9.1: órbita periódica assimétrica



3.9.2: órbita periódica simétrica

Figura 3.9: Órbitas periódicas no ponto $p = \left(0, -\frac{3}{5}, -1, 1\right)$, $\alpha_1 = -\frac{1}{3}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ e $\alpha_5 = -\frac{2}{3}$ (caso assimétrico) e $\alpha_5 = 0$ (caso simétrico).

Portanto, pelas Proposições 3.13.2 e 3.13.3, atingimos nossos objetivos, que eram obter condições necessárias sobre os parâmetros do campo de vetores (3.27) para que as órbitas periódicas persistam.

CAPÍTULO 4

Rabo de Andorinha

4.1 Introdução

Neste capítulo, iremos dar continuidade ao estudo de campos de vetores descontínuos iniciado no Capítulo 3, analisando campos de vetores com singularidades do tipo rabo de andorinha. Este capítulo está dividido em duas partes, a primeira consiste de uma extensão dos resultados obtidos em [JT2], onde fazemos a quebra da simetria (dada pela reversibilidade) da classe de campos de vetores lá apresentados e nos concentramos na classificação das singularidades típicas que aparecem do ponto de vista qualitativo e geométrico. Na segunda parte, mostramos a existência de regiões no espaço de parâmetros onde órbitas periódicas ocorrem.

É conveniente observar que o conceito de equivalência fraca entre dois campos de vetores é introduzido e a partir daí é possível classificar genericamente as singularidades típicas que aparecem em famílias a cinco parâmetros de campos de vetores em Ω_0 (a ser definido adiante). Note que muitas das singularidades discutidas no capítulo anterior são também objetos de estudo nesse capítulo.

Iniciamos o estudo a partir da seguinte forma normal:

$$L_a(x, y, z, w) = y \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} + a \operatorname{sgn}(x) \frac{\partial}{\partial w}. \quad (4.1)$$

Assim como em [ZB], algumas propriedades de suas deformações foram discutidas, em [JT2] deformações reversíveis são considerados e a classificação das singularidades genéricas

é feita. Os fenômenos observados em [JT2] podem ser representados pelo seguinte campo de vetores polinomial padrão:

$$Z_{a,\lambda_1,\lambda_2}(x, y, z, w) = (y + \lambda_1 w^2 + \lambda_2 w^3) \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} + a \operatorname{sgn}(x) \frac{\partial}{\partial w}. \quad (4.2)$$

Neste capítulo, vamos considerar uma ampla classe de perturbações de (4.1). Tomaremos tal classe com a propriedade de que os campos de vetores ali presentes sob determinadas condições, não apresentam a simetria dada pela reversibilidade, ou seja, de certa forma, estamos quebrando a reversibilidade antes presente nos campos (4.2). Isto induz a existência de outras singularidades típicas, no qual a descrição da dinâmica é bastante complicada.

Vamos adotar a mesma estratégia usada em [JT2] para classificar as singularidades existentes e iniciamos a partir do modelo semi-polinomial, que estende L_a e $Z_{a,\lambda_1,\lambda_2}$ de modo natural

$$Z_{a,\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2,\mu_3} = Z_{a,\lambda_1,\lambda_2} + \mu_1 z w \frac{\partial}{\partial x} + \mu_2 w^2 \frac{\partial}{\partial y} + \mu_3 w \frac{\partial}{\partial w}.$$

Primeiramente observamos que não é uma restrição colocarmos $a = \pm 1$, desde que isso pode ser obtido por meio de um reescalonamento do tempo. No que segue, usamos a notação $\sigma = (a, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$, e escrevemos Z_σ para $Z_{a,\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2,\mu_3}$. Denotamos por W o conjunto de tais campos de vetores e consideramos o conjunto $\Omega = \Omega_{Z_\sigma}$ de todos campos de vetores próximos de elementos de W , no sentido de que eles têm a forma $Z_\sigma + R$, onde R é C^∞ e “pequeno”.

Enunciamos a seguir o principal resultado deste capítulo que será demonstrado no decorrer do texto. Observamos que usamos no enunciado a notação do conjunto Ω_0 , que será descrito na definição 4.1.2.

Teorema 4.1.1. (Teorema D. Capítulo 2) *Seja $Z \in \Omega_0$. Em uma vizinhança V de 0 , temos uma das seguintes situações:*

1. $p \in V$ é um ponto regular: $p \in \bar{H}_\varepsilon$ e $\bar{Z}_\varepsilon h(p) \neq 0$ para $\varepsilon = \pm 1$.
2. $p \in V$ é uma dobra desde que $h(p) = \bar{Z}_\varepsilon h(p) = \bar{Z}_{-\varepsilon} h(p) = 0$, $\bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) \neq 0$ e uma das seguintes possibilidades ocorre:

- (a) dobra parabólica (ou 2H-2E-dobra): $\varepsilon \bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) > 0$ e $\varepsilon \bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) > 0$ para $\varepsilon = \pm 1$.
- (b) dobra hiperbólica (ou 2H-dobra): $\varepsilon \bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) > 0$ para $\varepsilon = \pm 1$.
- (c) dobra elíptica (ou 2E-dobra): $\varepsilon \bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) < 0$ para $\varepsilon = \pm 1$.
3. $p \in V$ é uma cúspide desde que $h(p) = \bar{Z}_\varepsilon h(p) = \bar{Z}_{-\varepsilon} h(p) = \bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) = 0$, $\bar{Z}_\varepsilon^3 h(p) \neq 0$ e uma das seguintes possibilidades ocorre:
- (a) cúspide: $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) = 0$ e $\bar{Z}_{-\varepsilon}^3 h(p) \neq 0$.
- (b) cúspide híbrida: $\varepsilon \bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) < 0$.
- (c) meia-cúspide: $\varepsilon \bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) > 0$.
4. $p \in V$ é uma singularidade de ordem superior desde que $h(p) = \bar{Z}_\varepsilon h(p) = \bar{Z}_{-\varepsilon} h(p) = \bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) = \bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) = 0$, $\bar{Z}_\varepsilon^3 h(p) \neq 0$ e uma das seguintes possibilidades ocorre:
- (a) 4H-dobra: $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) = \bar{Z}_{-\varepsilon}^3 h(p) = 0$ e $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) > 0$ para $\varepsilon = \pm 1$.
- (b) 4E-dobra: $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) = \bar{Z}_{-\varepsilon}^3 h(p) = 0$ e $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) < 0$ para $\varepsilon = \pm 1$.
- (c) 4E-4H-dobra: $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) = \bar{Z}_{-\varepsilon}^3 h(p) = 0$, $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) < 0$ e $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_{-\varepsilon}^4 h(p)) < 0$.
- (d) 4H-2H-dobra: $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) > 0$ e $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p)) < 0$.
- (e) 4H-2E-dobra: $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) > 0$ e $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p)) > 0$.
- (f) 4E-2H-dobra: $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) < 0$ e $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p)) < 0$.
- (g) 4E-2E-dobra: $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) < 0$ e $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p)) > 0$.
- (h) 4H-3C-dobra: $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) > 0$, $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) = 0$ e $\bar{Z}_{-\varepsilon}^3 h(p) \neq 0$.
- (i) 4E-3C-dobra: $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) < 0$, $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) = 0$ e $\bar{Z}_{-\varepsilon}^3 h(p) \neq 0$.

Neste capítulo, consideraremos *pequenas* perturbações de Z_σ definidas da mesma forma que na Seção 1.2. Assim para cada $Z \in \Omega$, escrevemos de modo único como:

$$Z = Z_\sigma + \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial y} + \xi_3 \frac{\partial}{\partial z} + \xi_4 \frac{\partial}{\partial w} \quad (4.3)$$

com:

$$i) \frac{\partial \xi_i}{\partial x}(0) = \frac{\partial \xi_i}{\partial y}(0) = \frac{\partial \xi_i}{\partial z}(0) = \frac{\partial \xi_i}{\partial w}(0) = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq 3;$$

$$ii) \nu_0(\xi_i) \geq 5 - i \text{ para } 1 \leq i \leq 3;$$

$$iii) \nu_0(\xi_4) \geq 2.$$

Dizemos que (4.3) é uma *forma normal primitiva* para Z . Por simplicidade, os elementos de Ω serão chamados de deformações do campo de vetores padrão Z_σ .

Observação 4.1.1. Sobre $Z_\sigma \in W$ com $\sigma = (a, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$, podemos dizer que:

i) Se $\bar{\sigma} = (a, \lambda_1, \lambda_2, -2\mu_2, \mu_2, 0)$, então $Z_{\bar{\sigma}}$ tem uma estrutura hamiltoniana com função Hamiltoniana expressa por:

$$H(x, y, z, w) = -a \operatorname{sgn}(x)x + yw - \frac{1}{2}z^2 + \frac{\lambda_1}{3}w^3 + \frac{\lambda_2}{4}w^4 - \mu_2zw^2.$$

ii) Z_σ é φ -reversível (com $\varphi : (x, y, z, w) \rightarrow (-x, y, -z, w)$) se e somente se $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ (que corresponde a classe de campos de vetores estudados em [JT2]).

Definição 4.1.1. Considere Γ dado no Capítulo 1. Denotamos por Γ_0 o conjunto dos elementos X em Γ satisfazendo uma das seguintes condições:

1. 0 é um ponto regular de X ;
2. 0 é uma 2-dobra de X ;
3. 0 é uma cúspide de X ;
4. 0 é uma 4-dobra de X .

Sabemos que Γ_0 é um conjunto aberto e denso em Γ .

Definição 4.1.2. Seja Ω_0 o conjunto de todos os elementos Z em Ω tal que $Z_\varepsilon, Z_{-\varepsilon}$ estão em Γ_0 ; isto significa que Γ_0 pode ser identificado como $\{\Gamma_0 \times \Gamma_0\} \cap \Omega$.

4.2 Resultados Principais e H_0 -estabilidade em Ω_0

Se $Z \in \Omega_0$ e $p \in H_0$, então $\bar{Z}_\varepsilon h(p) = 0$ é equivalente a $\bar{Z}_{-\varepsilon} h(p) = 0$ (veja demonstração da Proposição 4.3.1 para as expressões de $\bar{Z}_{\pm\varepsilon} h(p)$ e a veracidade da afirmação). Observe que se $p \in H_\varepsilon$ está suficientemente próximo da origem, p não é uma singularidade para $Z \in \Omega_0$ (veja Lema 4.4.1). Por essa razão, o foco principal do estudo é a dinâmica dos sistemas em torno dos pontos $p \in H_0$.

Pelo Lema 4.3.4, elementos em Ω_0 são detectados por sua forma normal (4.3) e pela condição $|\lambda_1| + |1 + \varepsilon a \mu_1| + |\varepsilon a(1 + 6\lambda_2) + 3\mu_1 + 2\mu_2| \neq 0$ para $\varepsilon = \pm 1$.

Observação 4.2.1. *Observe que no Teorema 4.1.1 todas as singularidades de codimensão 0 em Γ surgem durante a classificação em Ω_0 .*

Iremos demonstrar esse resultado nas próximas seções. As órbitas-soluções de $Z \in \Omega_0$ passando por $p \in H_0$ tem as seguintes configurações locais:

1. nos casos (1), (2b), (3a), (3b), (4a), (4d), (4h), a órbita-solução de Z é a união de duas órbitas-soluções de \bar{Z}_ε em \bar{H}_ε , $\varepsilon = \pm 1$;
2. nos casos (2a), (3c), (4e), a órbita-solução de Z coincide com as órbitas-soluções de \bar{Z}_ε em \bar{H}_ε ;
3. nos casos (4c), (4f), (4i), a órbita-solução de Z coincide com as órbitas-soluções de $\bar{Z}_{-\varepsilon}$ em $\bar{H}_{-\varepsilon}$;
4. nos casos (2c), (4b), (4g), a órbita-solução de Z coincide com $\{p\}$.

Como consequência imediata do Teorema 4.1.1, temos o seguinte Corolário.

Corolário 4.2.1. *Seja $Z \in \Omega_0$. A trajetória passando por $p \in H_0$ é localmente única, exceto quando p é uma singularidade do tipo (2b), (3b), (4a), (4d), (4h).*

Medimos o grau da singularidade por meio dos seguintes subconjuntos:

Definição 4.2.1. *Seja $Z \in \Omega_0$. Para $\varepsilon = \pm 1$ denotamos por $S_\varepsilon^0 = H_0$, e para $i \geq 1$, colocamos:*

$$S_\varepsilon^i = \{p \in \mathbb{R}^4 | h(p) = \bar{Z}_\varepsilon h(p) = \cdots = \bar{Z}_\varepsilon^i h(p) = 0\}$$

$$\Sigma_i = (S_\varepsilon^i \cup S_{-\varepsilon}^i) \setminus (S_\varepsilon^{i+1} \cup S_{-\varepsilon}^{i+1}).$$

O seguinte resultado nos diz como é a estratificação das variedades formadas pelas singularidades do campo e será demonstrado na seção 4.5.

Teorema 4.2.1. (Teorema E. Capítulo 2) *Seja $Z \in \Omega_0$, em sua forma normal (4.3) tal que $(1 + \varepsilon a \mu_1)(1 + 6\lambda_2 + 2\varepsilon a \mu_2 + 3\varepsilon a \mu_1) \neq 0$ para $\varepsilon = \pm 1$. Existe uma vizinhança V de 0 tal que $H_0 \cap V$ é estratificada (no sentido de Whitney) pela seqüência $V \cap \Sigma_0, V \cap \Sigma_1, V \cap \Sigma_2, V \cap \Sigma_3$, onde $V \cap \Sigma_i, i \in [0, 3]$, é uma variedade C^∞ de dimensão $3 - i$, com bordo igual a $V \cap \Sigma_{i+1}$. Pontos de $V \cap \Sigma_i$ consistem de:*

1. caso $i = 1$: singularidade dobra (pontos em $F_{\bar{Z}_\varepsilon} = F_{\bar{Z}_{-\varepsilon}}$);
2. caso $i = 2$: singularidade cúspide (pontos em $C_{\bar{Z}_\varepsilon} \cap F_{\bar{Z}_{-\varepsilon}}$, onde $\varepsilon = \pm 1$);
3. caso $i = 3$:
 - (a) se $\lambda_1 = 0$, então $V \cap \Sigma_3 = V \cap Q_{\bar{Z}_\varepsilon} \cap Q_{\bar{Z}_{-\varepsilon}} = \{0\}$, é uma dobra de ordem superior;
 - (b) se $\lambda_1 \neq 0$, então $V \cap \Sigma_3 = \{p, q\}$ com $p \neq 0$ e $q \neq 0$ (observe que $0 \in C_{\bar{Z}_\varepsilon} \cap C_{\bar{Z}_{-\varepsilon}}$ neste caso);
 - i. Se $p = q$, então $p \in Q_{\bar{Z}_\varepsilon} \cap Q_{\bar{Z}_{-\varepsilon}}$;
 - ii. Se $p \neq q$, então $V \cap \Sigma_3 = (Q_{\bar{Z}_\varepsilon} \cap F_{\bar{Z}_{-\varepsilon}} \cup Q_{\bar{Z}_{-\varepsilon}} \cap F_{\bar{Z}_\varepsilon})$;
 - (c) se $\lambda_1 \neq 0$ e $\bar{Z}_{-\varepsilon}^3 h(p) \neq 0$, então $V \cap \Sigma_3 = \{p, q\}$ com $p \neq 0, q \neq 0$, onde $V \cap \Sigma_3 = (Q_{\bar{Z}_\varepsilon} \cap C_{\bar{Z}_{-\varepsilon}} \cup Q_{\bar{Z}_{-\varepsilon}} \cap C_{\bar{Z}_\varepsilon})$;
4. para $i \geq 4$, $V \cap \Sigma_i = \emptyset$.

Observe que se $Z \in W$, então Σ_i ($0 \leq i \leq 3$) são conjuntos semi-algéblicos de dimensão $3 - i$. Isso é facilmente obtido observando as equações que descrevem Σ_i através do Lema 4.5.1.

O conceito de *estabilidade estrutural fraca* em Ω_0 é obtido da seguinte definição.

Definição 4.2.2. Dizemos que Z_1 e Z_2 em Ω_0 são *fracamente equivalentes* em H_0 (ou simplesmente H_0 -equivalentes) se existe um homeomorfismo $\chi : H_0 \rightarrow H_0$ tal que as órbitas de Z_1 em p e Z_2 em $\chi(p)$ tem o mesmo tipo topológico para todo $p \in H_0$.

Definição 4.2.3. Dizemos que $Z \in \Omega_0$ é *genérica* (ou de codimensão 0) se qualquer ponto p de H_0 satisfaz uma das seguintes condições:

1. p é um ponto regular;
2. p é uma singularidade do tipo (2a), ou (2b), ou (2c);
3. p é uma singularidade do tipo (3b), ou (3c);
4. p é uma singularidade do tipo (4d), ou (4e), ou (4f), ou (4g);
5. p é uma singularidade do tipo (3a), ou (4h), ou (4i) e as curvas de cúspides $C_{\bar{Z}_\varepsilon}$ e $C_{\bar{Z}_{-\varepsilon}}$ são transversais em p .

Denotamos por $\bar{C}_{\bar{Z}_\varepsilon}$ a aderência de $C_{\bar{Z}_\varepsilon}$, também chamado por abuso de terminologia de curva de cúspides.

Definição 4.2.4. Dizemos que $Z \in \Omega_0$ é *quasi-genérica* (ou de codimensão 1) se existe um único ponto p_1 de H_0 satisfazendo:

1. p_1 é uma singularidade do tipo (4a), ou (4b), ou (4c);
2. $p_1 \in \bar{C}_{\bar{Z}_\varepsilon} \cap \bar{C}_{\bar{Z}_{-\varepsilon}}$;
3. as curvas de cúspides $\bar{C}_{\bar{Z}_\varepsilon}$ e $\bar{C}_{\bar{Z}_{-\varepsilon}}$ tem contato quadrático em p_1 ;

e além disso, qualquer outro ponto $p \in H_0$ satisfaz uma das condições listado na Definição 4.2.3.

Observe que o campo L_a é de codimensão ∞ desde que $C_{\bar{Z}_\varepsilon}$ e $C_{\bar{Z}_{-\varepsilon}}$ coincidem, assim como $Z_{a,\lambda_1,\lambda_2}$ tem codimensão 0 desde que $|\lambda_1| + |\lambda_2| \neq 0$ e $|\lambda_1| + |1 + 6\lambda_2| \neq 0$ (ver [JT2]). Além disso, para parâmetros genéricos $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ com $|\lambda_1| \neq 0$ e $|\lambda_1| + |1 + \varepsilon a \mu_1| + |\varepsilon a(1 + 6\lambda_2) + 3\mu_1 + 2\mu_2| \neq 0$, o campo padrão Z_σ tem codimensão 0.

De fato, para que Z_w tenha codimensão 0, é necessário que as linhas de cúspides sejam transversais e que elas se interceptam em uma singularidade que não seja do tipo 4H-dobra, 4E-dobra ou 4H-4E-dobra. Podemos considerar sem perda de generalidade o ponto de intersecção sendo a origem. Então pelo Lema 4.5.4, as linhas de cúspides são transversais se $\lambda_1 \neq 0$, isso implica que $(\bar{Z}_w)_{\pm\varepsilon}^3 h(0) \neq 0$ e $(\bar{Z}_w)_{\pm\varepsilon}^2 h(0) = (\bar{Z}_w)_{\pm\varepsilon} h(0) = 0$. Portanto 0 é uma singularidade de cúspide e as linhas de cúspides são transversais. Agora para garantirmos que $Z_w \in \Omega_0$, pelo Lema 4.3.4, basta termos $|\lambda_1| + |1 + \varepsilon a \mu_1| + |\varepsilon a(1 + 6\lambda_2) + 3\mu_1 + 2\mu_2| \neq 0$, conforme queríamos.

Recordando o que já foi introduzido no Capítulo 2, denotamos por Ξ_0 o conjunto de todos campos de vetores fracamente estruturalmente estáveis em Ω_0 , por $\Omega_1 = \Omega_0 \setminus \Xi_0$ o conjunto bifurcação em Ω_0 , e denotamos por Ξ_1 o conjunto de todos campos de vetores fracamente estruturalmente estáveis relativo a Ω_1 .

Enunciaremos agora um Teorema que relaciona as codimensões dos campos de vetores com os conjuntos Ξ_i . Tal teorema será demonstrado na Seção 4.9.

Teorema 4.2.2. (Teorema F. Capítulo 2)

1. Um campo de vetores $Z \in \Xi_0$ se e somente se ele é de codimensão 0. Além disso, Ξ_0 é aberto e denso em Ω_0 .
2. Um campo de vetores $Z \in \Xi_1$ se e somente se ele é de codimensão 1. Além disso, Ξ_1 é aberto e denso em Ω_1 .

Observação 4.2.2.

1. Observe que a estabilidade estrutural em Ω_0 implica a estabilidade estrutural fraca.
2. Qualquer órbita de Z tangente à H_0 em pelo menos dois pontos é um fenômeno não estável em Ω_0 , isso porque pequenas perturbações podem “quebrar” uma das tangências.

4.3 Estudo Local de Pontos Singulares

Iremos nessa seção apresentar alguns resultados preliminares sobre sistemas dados por (4.3), resultados esses necessários para a demonstração do Teorema 4.1.1.

Lema 4.3.1. *Sejam $Z \in \Omega$, $p \in H_0$, e γ_ε a única trajetória de \bar{Z}_ε tal que $\gamma_\varepsilon(0) = p$, e $\gamma_\varepsilon(t) \in H_\varepsilon$ quando $t > 0$ (resp. $t < 0$). Então, $h(\gamma_\varepsilon(t))$ tem um zero de ordem $k \leq 4$ em $t = 0$ se e somente se $\bar{Z}_\varepsilon^i h(p) = 0$ para todo $0 \leq i < k$. Neste caso, temos:*

$$h(\gamma_\varepsilon(t)) = \frac{\bar{Z}_\varepsilon^k h(p)}{k!} t^k + o(t^k).$$

Demonstração. Recordemos que $h(x, y, z, w) = x$, logo calculando a derivada de ordem i de $t \mapsto h(\gamma_\varepsilon(t))$, vemos que

$$\frac{d^i}{dt^i} (h \circ \gamma_\varepsilon)(t) \Big|_{t=0} = \bar{Z}_\varepsilon^i h(p).$$

Supondo então que $h(\gamma_\varepsilon(t))$ tenha um zero de ordem $k \leq 4$ em $t = 0$, concluímos que $\bar{Z}_\varepsilon^i h(p) = 0$ para $0 \leq i \leq k-1$ e tomando a expansão de Taylor até a ordem k de $t \mapsto h(\gamma_\varepsilon(t))$, temos

$$h(\gamma_\varepsilon(t)) = \frac{\bar{Z}_\varepsilon^k h(p)}{k!} t^k + o(t^k).$$

Reciprocamente, se $\bar{Z}_\varepsilon^i h(p) = 0$ para $0 \leq i \leq k-1$, então $\frac{d^i}{dt^i} (h \circ \gamma_\varepsilon)(t) \Big|_{t=0} = 0$ para $0 \leq i \leq k-1$, ou seja, $t = 0$ é um zero de ordem k para $t \mapsto h(\gamma_\varepsilon(t))$. ■

Lema 4.3.2. *Se $Z \in \Omega$, então: $\nu_0 \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right) \geq 1$, $\nu_0 \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial y} \right) \geq 1$, $\nu_0 \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial z} \right) \geq 2$, $\nu_0 \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial w} \right) \geq 3$.*

Demonstração. Pela definição do conjunto Ω , ξ_1 satisfaz $\nu_0(\xi_1) \geq 4$ e $\frac{\partial \xi_1}{\partial x}(0) = \frac{\partial \xi_1}{\partial y}(0) = \frac{\partial \xi_1}{\partial z}(0) = \frac{\partial \xi_1}{\partial w}(0) = 0$. Portanto, ξ_1 pode ser escrito como soma de monômios m_k , onde cada um deles tem grau¹ maior ou igual a 2. Dois casos devem ser considerados:

Caso 1: se x não aparece em nenhum monômio de ξ_1 , então $\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \equiv 0$, e $\nu_0 \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right) = +\infty$.

¹Seja $m = x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}$ um monômio. Definimos o grau de m como sendo o número $c_m = \sum_{i=1}^k r_i$.

Caso 2: se x aparece em alguns monômios, então $\frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \sum_l m_l$, onde m_l são monômios não nulos de grau pelo menos um. Portanto $d_0(m_l) \geq 1$ para todo m_l e então $\nu_0\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x}\right) \geq 1$.

As demais desigualdades seguem direto do fato de $\nu_0(\xi_1) \geq 4$ e do Lema 1.2.1 aplicado ao caso $n = 4$. ■

A Proposição a seguir é uma ferramenta importante no estudo das singularidades de campos de vetores descontínuos.

Proposição 4.3.1. *Se $Z = Z_\sigma + R \in \Omega$ está em sua forma normal primitiva (4.3), e $p \in H_0$, então:*

$$\bar{Z}_\varepsilon^i h(p) = (\bar{Z}_\sigma)_\varepsilon^i h(p) + \varphi_i(p)$$

com $\nu_0(\varphi_j) \geq 5 - j$ para $1 \leq j \leq 4$.

Demonstração. Assuma que \bar{Z}_ε está escrito como em (4.3). Temos:

$$\bar{Z}_\varepsilon h(p) = y + \lambda_1 w^2 + \lambda_2 w^3 + \mu_1 z w + \xi_1(p) = (\bar{Z}_\sigma)_\varepsilon h(p) + \xi_1(p).$$

Colocando $\varphi_1 = \xi_1$, pela definição de Ω , temos que $\nu_0(\varphi_1) \geq 4$. Daí:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) = & z + 2\varepsilon a \lambda_1 w + 3\varepsilon a \lambda_2 w^2 + \mu_2 w^2 + \mu_1 w^2 + \varepsilon a \mu_1 z + 2\lambda_1 \mu_3 w^2 + \\ & + 3\lambda_2 \mu_3 w^3 + \mu_3 \mu_1 z w + \varphi_2(p) = (\bar{Z}_\sigma)_\varepsilon^2 h(p) + \varphi_2(p) \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \varphi_2(p) = & \xi_2(p) + \mu_1 w \xi_3(p) + \xi_4(p)(2\lambda_1 w + 3\lambda_2 w^2 + \mu_1 z) + \frac{\partial \xi_1}{\partial x}(p) \bar{Z}_\varepsilon h(p) + \\ & + \frac{\partial \xi_1}{\partial y}(p)(z + \mu_2 w^2 + \xi_2(p)) + \frac{\partial \xi_1}{\partial z}(p)(w + \xi_3(p)) + \frac{\partial \xi_1}{\partial w}(p)(\varepsilon a + \mu_3 w + \xi_4(p)). \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.3.2 e pela definição de Ω , temos que $\nu_0(\varphi_2) \geq 3$. Logo:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_\varepsilon^3 h(p) = & 2\lambda_1 + (1 + 6\lambda_2 + 2\varepsilon a \mu_2 + 3\varepsilon a \mu_1 + \mu_3^2 \mu_1 z + 6\varepsilon a \mu_3 \lambda_1) w + \varepsilon a \mu_1 \mu_3 z + 9\mu_3^2 \lambda_2 w^3 + \\ & + (3\mu_3 \mu_1 + 15\varepsilon a \mu_3 \lambda_2 + 2\mu_2 \mu_3 + 4\mu_3^2 \lambda_1) w^2 + \varphi_3(p) = (\bar{Z}_\sigma)_\varepsilon^3 h(p) + \varphi_3(p) \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}\varphi_3(p) = & \xi_3(p)(1 + \varepsilon a \mu_1 + \mu_1 \mu_3 w) + \xi_4(p)(2\varepsilon a \lambda_1 + 6\varepsilon a \lambda_2 w + 4\lambda_1 \mu_3 w + 9\lambda_2 \mu_3 w^2 + \\ & + \mu_1 \mu_3 z + 2\mu_1 w + 2\mu_2 w) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(p) \bar{Z}_\varepsilon h(p) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(p)(z + \mu_2 w^2 + \xi_2(p)) + \\ & + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(p)(w + \xi_3(p)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial w}(p)(\varepsilon a + \mu_3 w + \xi_4(p)).\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 1.2.1 à φ_2 e pela definição de Ω , temos $\nu_0(\varphi_3) \geq 2$.

Por fim:

$$\begin{aligned}\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p) = & \varepsilon a(1 + 6\lambda_2) + 2\mu_2 + 3\mu_1 + 6\mu_3 \lambda_1 + (36\mu_3 \lambda_2 + \mu_3 + 14\varepsilon a \mu_3^2 \lambda_1 + 6\varepsilon a \mu_2 \mu_3 + \\ & + 10\varepsilon a \mu_1 \mu_3) w + \varepsilon a \mu_3^2 \mu_1 z + \mu_1 \mu_3^3 z w + (7\mu_1 \mu_3^2 + 8\lambda_1 \mu_3^3 + 4\mu_2 \mu_3^2 + 57\varepsilon a \mu_3^2 \lambda_2) w^2 + \\ & + 27\mu_3^3 \lambda_2 w^3 + \varphi_4(p) = (\bar{Z}_\sigma)_\varepsilon^4 h(p) + \varphi_4(p)\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\varphi_4(p) = & (\varepsilon a \mu_1 \mu_3 + \mu_1 \mu_3^2 w) \xi_3(p) + (1 + 6\lambda_2 + 3\varepsilon a \mu_1 + 2\varepsilon a \mu_2 + 30\varepsilon a \mu_3 \lambda_2 w + \\ & + 8\mu_3^2 \lambda_1 w + 4\mu_2 \mu_3 w + 6\mu_1 \mu_3 w + 27\mu_3^2 \lambda_2 w^2 + 6\varepsilon a \mu_3 \lambda_1 + \mu_1 \mu_3^2 z) \xi_4(p) + \\ & + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(p) \bar{Z}_\varepsilon h(p) + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}(p)(z + \mu_2 w^2 + \xi_2(p)) + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}(p)(w + \xi_3(p)) + \\ & + \frac{\partial \varphi_3}{\partial w}(p)(\varepsilon a + \mu_3 w + \xi_4(p)).\end{aligned}$$

Novamente aplicando o Lema 1.2.1 à φ_3 e pela definição de Ω , temos $\nu_0(\varphi_4) \geq 1$. ■

Lema 4.3.3. *Seja $Z \in \Omega$, em sua forma normal (4.3). Temos:*

1. *O conjunto $\{Dh(0), D\bar{Z}_\varepsilon h(0), D\bar{Z}_\varepsilon^2 h(0)\}$ é linearmente independente se $1 + \varepsilon a \mu_1 \neq 0$ ou $\lambda_1 \neq 0$, e 0 é um ponto regular de $Z_\varepsilon h|_{H_0}$.*
2. *O conjunto $\{Dh(0), D\bar{Z}_\varepsilon h(0), D\bar{Z}_\varepsilon^2 h(0), D\bar{Z}_\varepsilon^3 h(0)\}$ é linearmente independente se e somente se $(1 + \varepsilon a \mu_1)(1 + 6\lambda_2 + \varepsilon a(3\mu_1 + 2\mu_2 + 6\mu_3 \lambda_1)) - 2\mu_1 \mu_3 \lambda_1 \neq 0$ e 0 é um ponto regular de $Z_\varepsilon h|_{H_0}$.*

Demonstração. Usando a Proposição 4.3.1 e o fato de termos $\xi_i(0) = 0$ para $1 \leq i \leq 4$ e $\frac{\partial \xi_j}{\partial x}(0) = \frac{\partial \xi_j}{\partial y}(0) = \frac{\partial \xi_j}{\partial z}(0) = \frac{\partial \xi_j}{\partial w}(0) = 0$ para $1 \leq j \leq 3$, temos $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x}(0) = \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}(0) = \frac{\partial \varphi_k}{\partial z}(0) = \frac{\partial \varphi_k}{\partial w}(0) = 0$ para $1 \leq k \leq 3$. Então:

$$\begin{cases} Dh(0) = (1, 0, 0, 0) \\ D\bar{Z}_\varepsilon h(0) = (0, 1, 0, 0) \\ D\bar{Z}_\varepsilon^2 h(0) = (0, 0, 1 + \varepsilon a \mu_1, 2\varepsilon a \lambda_1) \\ D\bar{Z}_\varepsilon^3 h(0) = (0, 0, \varepsilon a \mu_1 \mu_3, 1 + 6\lambda_2 + 2\varepsilon a \mu_2 + 3\varepsilon a \mu_1 + 6\varepsilon a \mu_3 \lambda_1). \end{cases} \quad (4.4)$$

Verifiquemos sob quais condições o conjunto $\{Dh(0), D\bar{Z}_\varepsilon h(0), D\bar{Z}_\varepsilon^2 h(0)\}$ é linearmente independente. Para isso, considere a combinação linear,

$$\alpha_1 Dh(0) + \alpha_2 D\bar{Z}_\varepsilon h(0) + \alpha_3 D\bar{Z}_\varepsilon^2 h(0) = 0.$$

Usando as equações (4.4), temos

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 + \varepsilon a \mu_1 \alpha_3, 2\varepsilon a \alpha_3 \lambda_1) = (0, 0, 0, 0).$$

Portanto os $\alpha_{i's}$ são todos obrigatoriamente nulos, se $1 + \varepsilon a \mu_1 \neq 0$ ou $\lambda_1 \neq 0$.

Quanto a segunda afirmação do lema, escrevendo os vetores $Dh(0)$, $D\bar{Z}_\varepsilon h(0)$, $D\bar{Z}_\varepsilon^2 h(0)$ e $D\bar{Z}_\varepsilon^3 h(0)$ na forma de matriz, temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \varepsilon a \mu_1 & \varepsilon a \mu_1 \mu_3 \\ 0 & 0 & 2\varepsilon a \lambda_1 & 1 + 6\lambda_2 + \varepsilon a (3\mu_1 + 2\mu_2 + 6\mu_3 \lambda_1) \end{bmatrix}$$

Portanto o conjunto $\{Dh(0), D\bar{Z}_\varepsilon h(0), D\bar{Z}_\varepsilon^2 h(0), D\bar{Z}_\varepsilon^3 h(0)\}$ é linearmente independente se e somente se o posto de A é máximo, ou seja, se $(1 + \varepsilon a \mu_1)(1 + 6\lambda_2 + \varepsilon a (3\mu_1 + 2\mu_2 + 6\mu_3 \lambda_1)) - 2\mu_1 \mu_3 \lambda_1 \neq 0$, conforme queríamos provar. ■

O próximo resultado nos diz quando que um campo de vetores $Z \in \Omega$ pertence a Ω_0 .

Lema 4.3.4. $Z \in \Omega$ pertence a Ω_0 se e somente se ele pode ser escrito na forma normal (4.3) com $|\lambda_1| + |1 + \varepsilon a \mu_1| + |\varepsilon a (1 + 6\lambda_2) + 3\mu_1 + 2\mu_2| \neq 0$ para $\varepsilon = \pm 1$.

Demonstração. Pela Proposição 4.3.1, concluímos que $\bar{Z}_\varepsilon h(0) = \bar{Z}_\varepsilon^2 h(0) = 0$.

Suponhamos que $Z \in \Omega_0$. Então Z pode ser escrito em sua forma normal (4.3) e como $\bar{Z}_\varepsilon h(0) = \bar{Z}_\varepsilon^2 h(0) = 0$, temos que ou 0 é um ponto de cúspide ou uma 4-dobra para \bar{Z}_ε .

Suponhamos que 0 é uma singularidade de cúspide de \bar{Z}_ε . Então $\bar{Z}_\varepsilon^3 h(0) \neq 0$ e o conjunto $\{Dh(0), D\bar{Z}_\varepsilon h(0), D\bar{Z}_\varepsilon^2 h(0)\}$ é linearmente independente. Como $\bar{Z}_\varepsilon^3 h(0) = 2\lambda_1$, temos $|\lambda_1| \neq 0$. Agora a independência linear do conjunto acima nos dá, pelo Lema 4.3.3 que $|\lambda_1| \neq 0$ ou $|1 + \varepsilon a \mu_1| \neq 0$.

Agora se supormos que 0 é uma singularidade de 4-dobra de \bar{Z}_ε , então $\bar{Z}_\varepsilon^3 h(0) = 0$, $\bar{Z}_\varepsilon^4 h(0) \neq 0$ e o conjunto $\{Dh(0), D\bar{Z}_\varepsilon h(0), D\bar{Z}_\varepsilon^2 h(0), D\bar{Z}_\varepsilon^3 h(0)\}$ é linearmente independente. Logo de $\bar{Z}_\varepsilon^4 h(0) \neq 0$, concluímos que $|\varepsilon a(1 + 6\lambda_2) + 3\mu_1 + 2\mu_2| \neq 0$ e pelo Lema 4.3.3, temos que $|1 + \varepsilon a \mu_1| \neq 0$ e $|\varepsilon a(1 + 6\lambda_2) + 3\mu_1 + 2\mu_2| \neq 0$.

Portanto concluímos que,

$$Z \in \Omega_0 \Rightarrow |\lambda_1| + |1 + \varepsilon a \mu_1| + |\varepsilon a(1 + 6\lambda_2) + 3\mu_1 + 2\mu_2| \neq 0.$$

Suponhamos agora que $Z \in \Omega$ está escrito em sua forma normal (4.3) com $|\lambda_1| + |1 + \varepsilon a \mu_1| + |\varepsilon a(1 + 6\lambda_2) + 3\mu_1 + 2\mu_2| \neq 0$. Queremos mostrar que $Z \in \Omega_0$.

Suponhamos que $|\lambda_1| \neq 0$, então $\bar{Z}_\varepsilon^3 h(0) \neq 0$ e pelo Lema 4.3.3, o conjunto $\{Dh(0), D\bar{Z}_\varepsilon h(0), D\bar{Z}_\varepsilon^2 h(0)\}$ é linearmente independente. Logo 0 é uma singularidade de cúspide para \bar{Z}_ε e portanto $Z \in \Omega_0$.

Agora se supormos que $|\lambda_1| = 0$, então $\bar{Z}_\varepsilon^3 h(0) = 0$ e para que $Z \in \Omega_0$ é necessário que tenhamos 0 uma singularidade 4-dobra para \bar{Z}_ε , para isso, é necessário que $\bar{Z}_\varepsilon^4 h(0) \neq 0$ e o conjunto $\{Dh(0), D\bar{Z}_\varepsilon h(0), D\bar{Z}_\varepsilon^2 h(0), D\bar{Z}_\varepsilon^3 h(0)\}$ seja linearmente independente. Contudo, para que ambas situações ocorram, pelo Lema 4.3.3 e usando o fato de $|\lambda_1| = 0$, temos que ter $(1 + \varepsilon a \mu_1)(\varepsilon a(1 + 6\lambda_2) + 3\mu_1 + 2\mu_2) \neq 0$, ou seja, $|1 + \varepsilon a \mu_1| \neq 0$ e $|\varepsilon a(1 + 6\lambda_2) + 3\mu_1 + 2\mu_2| \neq 0$, conforme queríamos provar. ■

4.4 Conjuntos Singulares

Sejam $Z \in \Omega_0$ e $p \in H_0$. Note que cada um dos campos de vetores \bar{Z}_ε está definida sobre H_ε para $\varepsilon = \pm 1$. Primeiro observemos que:

Lema 4.4.1. *Seja $Z \in \Omega_0$. Existe uma vizinhança V de 0 tal que para cada $\varepsilon = \pm 1$, $\bar{Z}_\varepsilon h(p) \neq 0$ desde que $p \in H_\varepsilon \cap V$.*

Demonstração. É suficiente observar que a restrição de $Z \in \Omega_0$ a H_ε (para $\varepsilon = \pm 1$) é uma deformação C^∞ de um campo que não é singular em 0 , pois $(\bar{Z}_w)_\varepsilon(0) = (0, 0, 0, \varepsilon a)$. Logo existe uma vizinhança de 0 tal que para todo ponto $p \in H_\varepsilon \cap V$, p não é ponto singular de \bar{Z}_ε . ■

Vamos estudar os diferentes tipos de singularidades, dependendo do sinal das funções $\bar{Z}_\varepsilon^i h(p)$.

4.4.1 Dobras

Sejam $Z \in \Omega_0$, $p \in S_\varepsilon^1$, isto é, $h(p) = \bar{Z}_\varepsilon h(p) = 0$ e $t \mapsto \gamma_\varepsilon(t)$ a trajetória de \bar{Z}_ε tal que $\gamma(0) = p$. Pelo Lema 4.3.1, temos que

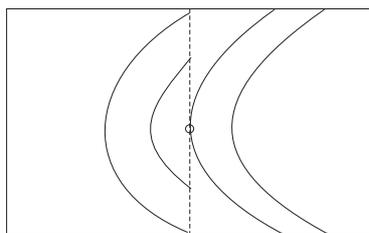
$$x_1(\gamma_\varepsilon(t)) = \frac{\bar{Z}_\varepsilon^2 h(p)}{2} t^2 + o(t^2).$$

Recordemos que existe uma trajetória de Z_ε em H_ε se e somente se $\varepsilon x(\gamma_\varepsilon(t)) > 0$, $\varepsilon = \pm 1$. No nosso caso, essa trajetória existe se e somente se $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^2 h(p)) > 0$. Assuma que $p \in \Sigma_1$, isto é, $\bar{Z}_{\pm\varepsilon}^2 h(p) \neq 0$. Dependendo do sinal de $\bar{Z}_{\pm\varepsilon}^2 h(p)$, existem três casos a serem analisados:

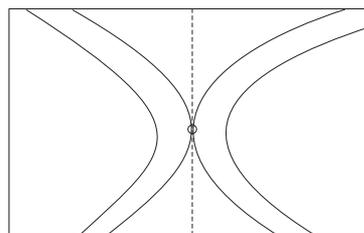
1. Se $\operatorname{sgn}(\bar{Z}_1^2 h(p)) > 0$ e $\operatorname{sgn}(\bar{Z}_{-1}^2 h(p)) > 0$, então existe a trajetória de \bar{Z}_1 em \bar{H}_1 e não existe a trajetória de \bar{Z}_{-1} em \bar{H}_{-1} e temos que p é uma singularidade tipo *dobra parabólica*. A trajetória de Z passando por p é a trajetória de \bar{Z}_1 em \bar{H}_1 . Por exemplo, $Z = Z_{1,0,0,0,0}$ em $p = (0, 0, 1, 1)$, veja Figura 4.1.1.
2. Se $\operatorname{sgn}(\bar{Z}_1^2 h(p)) > 0$ e $\operatorname{sgn}(\bar{Z}_{-1}^2 h(p)) < 0$, então existe a trajetória de \bar{Z}_ε em \bar{H}_ε para $\varepsilon = \pm 1$ e temos duas trajetórias distintas de Z por p : a trajetória de \bar{Z}_1 em \bar{H}_1 , e a trajetória de \bar{Z}_{-1} em \bar{H}_{-1} . Nesse caso, p é uma singularidade tipo *dobra hiperbólica*. Por exemplo: $Z = Z_{1,0,1,0,0}$ em $p = (0, -\frac{1}{3}, 0, 1)$, veja Figura 4.1.2.
3. Se $\operatorname{sgn}(\bar{Z}_1^2 h(p)) < 0$ e $\operatorname{sgn}(\bar{Z}_{-1}^2 h(p)) > 0$, então não existe a trajetória de \bar{Z}_ε em \bar{H}_ε para $\varepsilon = \pm 1$. Nesse caso, p é uma singularidade tipo *dobra elíptica* e a trajetória

de Z passando por p é o conjunto unitário $\{p\}$. Por exemplo: $Z = Z_{-1,0,\frac{1}{3},0,0,0}$ em $p = (0, -\frac{1}{3}, 0, 1)$, veja Figura 4.1.3.

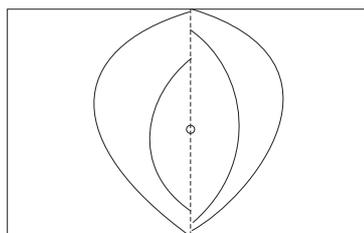
Essa análise descreve todos os diferentes tipos de 2-dobras para $Z \in \Omega_0$. Analisamos agora as singularidades de cúspides que podem aparecer.



4.1.1: dobra parabólica



4.1.2: dobra hiperbólica



4.1.3: dobra elíptica

Figura 4.1: dobras parabólica, hiperbólica e elíptica

4.4.2 Cúspides

Seja $p \in \Sigma_2$, isto é, $h(p) = \bar{Z}_{\pm\epsilon}h(p) = 0$, $\bar{Z}_{\pm\epsilon}^3h(p) \neq 0$ e $\bar{Z}_1^2h(p) \cdot \bar{Z}_{-1}^2h(p) = 0$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $p \in S_\epsilon^2$ (note que em geral $S_\epsilon^2 \neq S_{-\epsilon}^2$). Então $\bar{Z}_1^2h(p) = 0$ e pelo Lema 4.3.1 temos

$$x_1(\gamma_\epsilon(t)) = \frac{\bar{Z}_\epsilon^3h(p)}{3!}t^3 + o(t^3).$$

Assim, como no caso anterior, a trajetória γ_ϵ está contida em H_ϵ se e somente se $\epsilon \text{sgn}(\bar{Z}_\epsilon^3h(p)) > 0$. Observemos que se $p \in S_\epsilon^2$, então $p \in S_\epsilon^1 \cap S_{-\epsilon}^1$, ou seja, $\bar{Z}_\epsilon h(p) = \bar{Z}_{-\epsilon}h(p) = 0$ e como genericamente $S_\epsilon^2 \neq S_{-\epsilon}^2$, podemos ter $\bar{Z}_{-\epsilon}^2h(p) \neq 0$, logo pelo Lema

4.3.1 temos

$$x_1(\gamma_{-\varepsilon}(t)) = \frac{\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p)}{2} t^2 + o(t^2).$$

E existe a órbita de $\bar{Z}_{-\varepsilon}$ em $H_{-\varepsilon}$ se $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p)) < 0$. Logo, dependendo dos sinais de $\bar{Z}_{\varepsilon}^3 h(p)$ e $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p)$, temos os seguintes casos que podem ocorrer:

1. Se $\bar{Z}_{\varepsilon}^2 h(p) = \bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) = 0$ e $\bar{Z}_{\varepsilon}^3 h(p) \neq 0$, então p é uma singularidade tipo *cúspide* e a trajetória de Z passando por p é a união de trajetórias de \bar{Z}_{ε} , $\varepsilon = \pm 1$. Por exemplo: $Z = Z_{1, \frac{3}{4}, 0, 0, 0, 0}$ em $p = (0, 0, 0, 0)$, veja Figura 4.2.1.
2. Se $\bar{Z}_{\varepsilon} h(p) = \bar{Z}_{-\varepsilon} h(p) = \bar{Z}_{\varepsilon}^2 h(p) = 0$ e $\varepsilon \bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) < 0$, então temos que p é uma dobra para $Z_{-\varepsilon}$ e uma cúspide para Z_{ε} , logo p é uma singularidade tipo *cúspide híbrida* e a trajetória de Z passando por p é a união das trajetórias de \bar{Z}_{ε} , $\varepsilon = \pm 1$. Por exemplo: $Z = Z_{1, \frac{3}{4}, 0, 0, 0, 0}$ em $p = (0, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}, 1)$, veja Figura 4.2.2.
3. Se $\bar{Z}_{\varepsilon} h(p) = \bar{Z}_{-\varepsilon} h(p) = \bar{Z}_{\varepsilon}^2 h(p) = 0$ e $\varepsilon \bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) > 0$, então a trajetória de $\bar{Z}_{-\varepsilon}$ encontra $\bar{H}_{-\varepsilon}$ somente em p . A trajetória de Z passando por p é a meia-trajetória γ_{ε} . O ponto p é, portanto, uma singularidade *meia-cúspide*. Por exemplo: $Z = Z_{-1, \frac{3}{4}, 0, 0, 0, 0}$ em $p = (0, -\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 1)$, veja Figura 4.2.3.

Essa análise descreve todos os diferentes tipos de singularidades de cúspides que podem ocorrer em $Z \in \Omega_0$. Analisamos agora as singularidades de 4-dobras.

4.4.3 4-Dobras

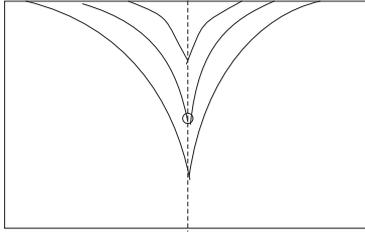
Seja $p \in \Sigma_3$, isto é, $h(p) = \bar{Z}_{\pm\varepsilon} h(p) = 0$, $\bar{Z}_{\pm\varepsilon}^4 h(p) \neq 0$ e $\bar{Z}_{\varepsilon}^3 h(p) \bar{Z}_{-\varepsilon}^3 h(p) = 0$. Vamos assumir sem perda de generalidade que $p \in S_{\varepsilon}^3$, logo $\bar{Z}_{\varepsilon}^3 h(p) = 0$. Como em geral $S_{\varepsilon}^2 \neq S_{-\varepsilon}^2$, pela Proposição 4.3.1 e pelo Lema 4.3.1, temos

$$x_1(\gamma_{\varepsilon}(t)) = \frac{\bar{Z}_{\varepsilon}^4 h(p)}{4!} t^4 + o(t^4)$$

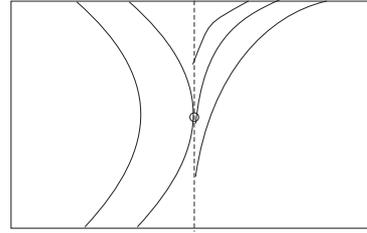
e

$$x_1(\gamma_{-\varepsilon}(t)) = \frac{1}{2!} \bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) t^2 + \frac{1}{3!} \bar{Z}_{-\varepsilon}^3 h(p) t^3 + \frac{1}{4!} \bar{Z}_{-\varepsilon}^4 h(p) t^4 + o(t^4).$$

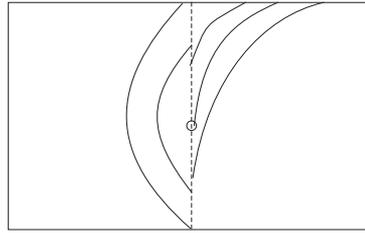
Portanto a existência de soluções encontrando H_{ε} , $\varepsilon = \pm 1$, vai depender dos:



4.2.1: cuspide



4.2.2: cuspide híbrida



4.2.3: meia-cuspide

Figura 4.2: cúspides

1. sinais de $\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)$ e $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p)$ se $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) \neq 0$;
2. sinais de $\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)$ e $\bar{Z}_{-\varepsilon}^3 h(p)$ se $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) = 0$ e $\bar{Z}_{-\varepsilon}^3 h(p) \neq 0$;
3. sinais de $\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)$ e $\bar{Z}_{-\varepsilon}^4 h(p)$ se $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) = \bar{Z}_{-\varepsilon}^3 h(p) = 0$.

Todos os casos restantes são similares a um dos casos descritos em §4.4.1, §4.4.2.

1. Se $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) = \bar{Z}_{-\varepsilon}^3 h(p) = 0$, então a ordem de contato de γ_ε com H_0 é a mesma para cada $\varepsilon = \pm 1$ e temos os seguintes casos:
 - (a) Se $\varepsilon \text{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) > 0$ para $\varepsilon = \pm 1$, então existe uma trajetória de \bar{Z}_ε em \bar{H}_ε e outra de $\bar{Z}_{-\varepsilon}$ em $H_{-\varepsilon}$. Neste caso, p é uma singularidade tipo 4H-dobra. Por exemplo: $Z = Z_{1,0,0,0,0}$ em $p = (0, 0, 0, 0)$, veja Figura 4.3.1.
 - (b) Se $\varepsilon \text{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) < 0$ para $\varepsilon = \pm 1$, então a trajetória passando por $p \in \bar{H}_{\pm\varepsilon}$ reduz a um ponto. Neste caso p é uma singularidade tipo 4E-dobra. Por exemplo: $Z = Z_{-1,0,0,0,0}$ em $p = (0, 0, 0, 0)$, veja Figura 4.3.2.

- (c) Se $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) < 0$ e $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_{-\varepsilon}^4 h(p)) < 0$, então a trajetória de Z passando por p é a trajetória de $\bar{Z}_{-\varepsilon}$ em $\bar{H}_{-\varepsilon}$. Neste caso, p é uma singularidade tipo 4E-4H-dobra. Por exemplo: $Z = Z_{1, \frac{2}{3}, -\frac{4}{9}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{2}}$ em $p = (0, -\frac{2}{9}, 0, 1)$, veja Figura 4.3.3.
2. Se $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) \neq 0$, então γ_ε e $\gamma_{-\varepsilon}$ não tem a mesma ordem de contato com H_0 . Neste caso, γ_ε tem ordem 4 enquanto que $\gamma_{-\varepsilon}$ tem ordem 2. Temos que $\bar{Z}_\varepsilon^3 h(p) = 0$, e $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) \neq 0$ e portanto os seguintes casos a analisar:
- (a) Se $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) > 0$ e $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p)) < 0$, então existem trajetórias de $\bar{Z}_{\pm\varepsilon}$ em $\bar{H}_{\pm\varepsilon}$ e neste caso, p é uma singularidade tipo 4H-2H-dobra. Por exemplo: $Z = Z_{-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0, 0, 0}$ em $p = (0, 0, -\frac{1}{4}, 1)$, veja Figura 4.3.4.
- (b) Se $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) > 0$ e $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p)) > 0$, então existe somente a trajetória de \bar{Z}_ε em \bar{H}_ε e neste caso, p é uma singularidade tipo 4H-2E-dobra. Por exemplo: $Z = Z_{1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0}$ em $p = (0, \frac{7}{6}, 2, 1)$, veja Figura 4.3.5.
- (c) Se $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) < 0$ e $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p)) < 0$, então existe somente a trajetória de $\bar{Z}_{-\varepsilon}$ em $\bar{H}_{-\varepsilon}$ e neste caso, p é uma singularidade tipo 4E-2H-dobra. Por exemplo: $Z = Z_{1, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, 0, 0, 0}$ em $p = (0, -\frac{5}{6}, -1, 1)$, veja Figura 4.3.6.
- (d) Se $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) < 0$ e $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p)) > 0$, então neste caso, a trajetória passando por $p \in \bar{H}_{\pm\varepsilon}$ é reduzida a um único ponto e temos uma singularidade tipo 4E-2E-dobra. Por exemplo: $Z = Z_{1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0, 0, 0}$ em $p = (0, 0, \frac{1}{4}, 1)$, veja Figura 4.3.7.
3. Se $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) = 0$ e $\bar{Z}_{-\varepsilon}^3 h(p) \neq 0$, assumimos que $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_{-\varepsilon}^3 h(p)) < 0$ para que exista a órbita de $\bar{Z}_{-\varepsilon}$ em $H_{-\varepsilon}$. Neste caso, γ_ε e $\gamma_{-\varepsilon}$ não tem a mesma ordem de contato com H_0 , a trajetória γ_ε tem ordem 4 enquanto que $\gamma_{-\varepsilon}$ tem ordem 3. Logo temos os seguintes casos a serem analisados:
- (a) Se $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) > 0$, então existe uma trajetória γ_ε em H_ε . Desde que $\varepsilon \operatorname{sgn}(\bar{Z}_{-\varepsilon}^3 h(p)) < 0$ e a trajetória em $H_{-\varepsilon}$ é uma cúspide, temos uma singularidade tipo 4H-3C-dobra. Por exemplo: $Z = Z_{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, -1, 0}$ em $p = (0, \frac{1}{6}, 1, 1)$, veja Figura 4.3.8.

- (b) Se $\varepsilon \text{sgn}(\bar{Z}_\varepsilon^4 h(p)) < 0$, então a trajetória de \bar{Z}_ε encontra \bar{H}_ε somente em p e a trajetória em $H_{-\varepsilon}$ é uma cúspide. Neste caso, p é uma singularidade tipo 4E-3C-dobra. Por exemplo: $Z = Z_{1,1,-\frac{2}{3},0,\frac{1}{2},0}$ em $p = (0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 1)$, veja Figura 4.3.9.

Com isso, encerramos a análise de todas as singularidades que podem ocorrer em campos de vetores $Z \in \Omega_0$.

4.4.4 Prova do Teorema 4.1.1

Nesta subseção, iremos fazer a prova do Teorema 4.1.1 que nos dá a classificação de todos os tipos de singularidades que aparecem no campo (4.3).

Demonstração. A prova é uma consequência imediata de todos os resultados contidos nas seções §4.4.1, §4.4.2 e §4.4.3. ■

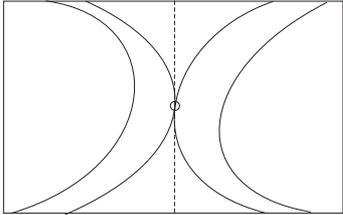
4.5 Estratificação das Singularidades

Nessa seção, faremos uma estratificação das singularidades do campo de vetores (4.3). Mais precisamente, faremos uma decomposição das singularidades, em uma vizinhança V da origem, em conjuntos V_1 , V_2 e V_3 , onde

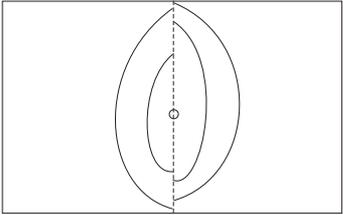
- V_1 é o conjunto das singularidades de dobras, V_2 é o conjunto das singularidades de cúspides e V_3 é o conjunto das singularidades 4-dobras (ou rabo-de-andorinha);
- V_i é a fronteira de V_{i-1} , para $i = 2, 3$.

Veremos também como se comportam as linhas de cúspides e as singularidades 4-dobra, dependendo dos valores dos parâmetros. Por fim, demonstraremos o Teorema 4.2.1.

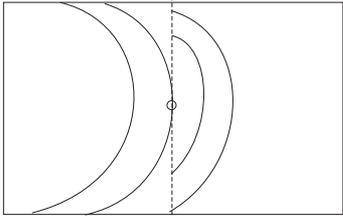
Lema 4.5.1. *Assuma que $Z \in \Omega_0$ está em sua forma normal (4.3). Então existe uma vizinhança V de 0 tal que, para $\varepsilon = \pm 1$:*



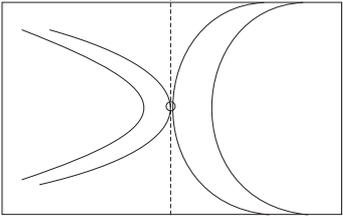
4.3.1: 4H-dobra



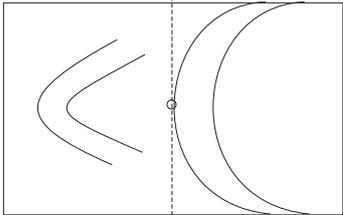
4.3.2: 4E-dobra



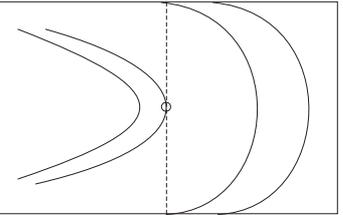
4.3.3: 4E-4H-dobra



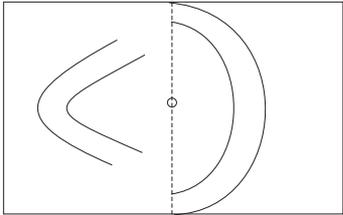
4.3.4: 4H-2H-dobra



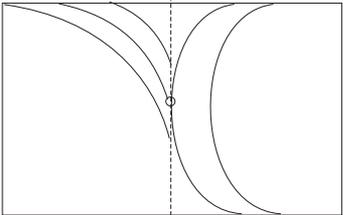
4.3.5: 4H-2E-dobra



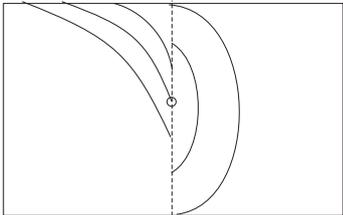
4.3.6: 4E-2H-dobra



4.3.7: 4E-2E-dobra



4.3.8: 4H-3C-dobra



4.3.9: 4E-3C-dobra

Figura 4.3: dobras de ordem superior

1. $V \cap S_\varepsilon^1 = V \cap S_{-\varepsilon}^1$ é uma variedade de dimensão 2 expressa por:

$$\{x = 0, y = -\lambda_1 w^2 - \lambda_2 w^3 - \mu_1 zw + o(|zw|^2, w^4)\}.$$

2. Se $1 + \varepsilon a \mu_1 \neq 0$, então $V \cap S_\varepsilon^2$ é uma variedade unidimensional expressa por:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\lambda_1(\varepsilon a \mu_1 - 1)}{1 + \varepsilon a \mu_1} w^2 + \frac{\mu_1^2 + \mu_1 \mu_2 - \lambda_2 + \varepsilon a \lambda_2 \mu_1}{(1 + \varepsilon a \mu_1)^2} w^3 + o(w^4, bw^3) \\ z = \frac{-2\varepsilon a \lambda_1}{1 + \varepsilon a \mu_1} w - \frac{3\varepsilon a \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2}{(1 + \varepsilon a \mu_1)^2} w^2 + o(w^3, bw^2) \end{cases} \quad (4.5)$$

3. Se $(1 + 6\lambda_2 + 2\varepsilon a \mu_2 + 3\varepsilon a \mu_1 + 6\varepsilon a \lambda_1 \mu_3)(1 + \varepsilon a \mu_1) - 2\lambda_1 \mu_1 \mu_3 \neq 0$, e desde que λ_1 é suficientemente pequeno, então $V \cap S_\varepsilon^3$ coincide com o ponto q_ε onde:

$$\begin{cases} x(q_\varepsilon) = 0 \\ y(q_\varepsilon) = \frac{4\lambda_1^3 \eta_\varepsilon^1(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3)}{(1 + 6\lambda_2 + 2\varepsilon a \mu_2 + 3\varepsilon a \mu_1)^3 (1 + \varepsilon a \mu_1)^2} + o(\lambda_1^4) \\ z(q_\varepsilon) = \frac{4\lambda_1^2 \eta_\varepsilon^2(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3)}{(1 + 6\lambda_2 + 2\varepsilon a \mu_2 + 3\varepsilon a \mu_1)^2 (1 + \varepsilon a \mu_1)^2} + o(\lambda_1^3) \\ w(q_\varepsilon) = \frac{-2\lambda_1}{1 + 6\lambda_2 + 2\varepsilon a \mu_2 + 3\varepsilon a \mu_1} + o(\lambda_1^2) \end{cases} \quad (4.6)$$

com

$$\eta_\varepsilon^1(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = -1 - 4\lambda_2 - \mu_1^2 - 4\lambda_1 \mu_1 \mu_3 - 2\mu_1 \mu_2 + 2\lambda_2 \mu_1^2 - \varepsilon a (3\mu_1 + 2\mu_2 - \mu_1^3 + 2\lambda_2 \mu_1) \text{ e } \eta_\varepsilon^2(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = 3\mu_1 + 3\lambda_2 \mu_1 + \mu_2 - 2\lambda_1 \mu_3 + \varepsilon a (1 + 3\lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + 2\mu_1^2).$$

4. $V \cap S_\varepsilon^4 = \emptyset$.

Demonstração.

Caso 1: Seja $p \in V \cap H_0$, pela Proposição 4.3.1, temos que $\bar{Z}_\varepsilon h(p) = \bar{Z}_{-\varepsilon} h(p)$, logo $V \cap S_\varepsilon^1 = V \cap S_{-\varepsilon}^1$ e como

$$\bar{Z}_\varepsilon h(p) = y + \lambda_1 w^2 + \lambda_2 w^3 + \mu_1 zw + \xi_1(p)$$

em uma vizinhança V da origem podemos considerar $\xi_1(p) = o(|zw|^2, w^4)$. Logo, claramente temos que $V \cap S_\varepsilon^1$ é uma variedade de dimensão 2 expressa por

$$V \cap S_\varepsilon^1 = V \cap S_{-\varepsilon}^1 = \begin{cases} x = 0 \\ y = -\lambda_1 w^2 - \lambda_2 w^3 - \mu_1 zw + o(|zw|^2, w^4) \end{cases}$$

Caso 2: Suponhamos agora que $1 + \varepsilon a \mu_1 \neq 0$. Queremos calcular $V \cap S_\varepsilon^2$, mas $p \in V \cap S_\varepsilon^2 \Leftrightarrow h(p) = \bar{Z}_\varepsilon h(p) = \bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) = 0$. Contudo, pela Proposição 4.3.1, temos

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{Z}_\varepsilon h}{\partial y}(0) & \frac{\partial \bar{Z}_\varepsilon^2 h}{\partial y}(0) \\ \frac{\partial \bar{Z}_\varepsilon h}{\partial z}(0) & \frac{\partial \bar{Z}_\varepsilon^2 h}{\partial z}(0) \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \varepsilon a \mu_1 \end{vmatrix} = 1 + \varepsilon a \mu_1 \neq 0.$$

Logo pelo Teorema da Função Implícita, existe uma solução do sistema $\bar{Z}_\varepsilon h(p) = \bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) = 0$ dada por $y = h_1(w)$ e $z = h_2(w)$. Essa solução é expressa explicitamente por

$$y = \frac{w^2(-\lambda_1 + \lambda_1 \varepsilon a \mu_1 + \lambda_1 \mu_3 \mu_1 w - \lambda_2 w + 2\varepsilon a \lambda_2 \mu_1 w + 2\lambda_2 \mu_3 \mu_1 w^2 + \mu_1^2 w + \mu_1 \mu_2 w)}{1 + \varepsilon a \mu_1 + \mu_3 \mu_1 w}$$

e

$$z = \frac{-w(\mu_1 w + 2\varepsilon a \lambda_1 + 3\varepsilon a \lambda_2 w + \mu_2 w + 2\lambda_1 \mu_3 w + 3\lambda_2 \mu_3 w^2)}{1 + \varepsilon a \mu_1 + \mu_3 \mu_1 w}.$$

Por fim, considerando a expansão por Taylor dessa solução numa vizinhança de 0 até a ordem 3 e tomando somente os coeficientes até grau 2 dos monômios (coeficientes de grau maior que 2 são irrelevantes na análise desde que eles são tão pequenos quanto queiramos), temos portanto que $V \cap S_\varepsilon^2$ é uma variedade de dimensão 1 dado pela equação (4.5).

Caso 3: Seja $p \in V \cap S_\varepsilon^3$, então $h(p) = \bar{Z}_\varepsilon h(p) = \bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) = \bar{Z}_\varepsilon^3 h(p) = 0$ e pela Proposição 4.3.1, temos

$$\begin{aligned} & \det \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{Z}_\varepsilon h}{\partial y}(0) & \frac{\partial \bar{Z}_\varepsilon^2 h}{\partial y}(0) & \frac{\partial \bar{Z}_\varepsilon^3 h}{\partial y}(0) \\ \frac{\partial \bar{Z}_\varepsilon h}{\partial z}(0) & \frac{\partial \bar{Z}_\varepsilon^2 h}{\partial z}(0) & \frac{\partial \bar{Z}_\varepsilon^3 h}{\partial z}(0) \\ \frac{\partial \bar{Z}_\varepsilon h}{\partial w}(0) & \frac{\partial \bar{Z}_\varepsilon^2 h}{\partial w}(0) & \frac{\partial \bar{Z}_\varepsilon^3 h}{\partial w}(0) \end{vmatrix} = \\ & = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \varepsilon a \mu_1 & \varepsilon a \mu_1 \mu_3 \\ 0 & 2\varepsilon a \lambda_1 & 1 + 6\lambda_2 + 2\varepsilon a \mu_2 + 3\varepsilon a \mu_1 + 6\varepsilon a \lambda_1 \mu_3 \end{vmatrix} = \\ & = (1 + \varepsilon a \mu_1)(1 + 6\lambda_2 + 2\varepsilon a \mu_2 + 3\varepsilon a \mu_1 + 6\varepsilon a \lambda_1 \mu_3) - 2\lambda_1 \mu_1 \mu_3 \neq 0. \end{aligned}$$

Logo pelo Teorema da Função Implícita, o sistema $\bar{Z}_\varepsilon h(p) = \bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) = \bar{Z}_\varepsilon^3 h(p) = 0$ admite uma única solução \bar{q}_ε próximo de $0 \in \mathbb{R}^4$. Tomando a expansão de Taylor desse ponto numa vizinhança de 0, encontramos o ponto q_ε dado pela equação (4.6). ■

Vamos dar condições sobre os parâmetros para que os pontos q_ε e $q_{-\varepsilon}$ sejam iguais. Vamos supor que $\lambda_1 \neq 0$, pois caso contrário, a igualdade é imediata. Resolvendo a equação $w(q_\varepsilon) = w(q_{-\varepsilon})$ da equação (4.6), obtemos duas condições: $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ou $\mu_1 = -\frac{2}{3}\mu_2$.

Vamos trabalhar primeiro com a condição $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Substituindo essa condição em $z(q_\varepsilon)$ e $z(q_{-\varepsilon})$ de (4.6) e resolvendo $z(q_\varepsilon) = z(q_{-\varepsilon})$, obtemos que $\lambda_2 = -1$. Agora essas duas condições substituídos em $y(q_\varepsilon)$ e em $y(q_{-\varepsilon})$ nos dão a igualdade entre eles. Portanto, a primeira condição para que $q_\varepsilon = q_{-\varepsilon}$ é

$$\mu_1 = \mu_2 = 0 \text{ e } \lambda_2 = -1.$$

Considerando agora a segunda condição, $\mu_1 = -\frac{2}{3}\mu_2$ e resolvendo a equação $z(q_\varepsilon) = z(q_{-\varepsilon})$ obtemos a condição

$$-54\mu_2^2 + 243\lambda_2 + 8\mu_2^4 - 108\lambda_2\mu_2^2 - 216\lambda_1\mu_2\mu_3 + 81 = 0.$$

De modo análogo, obtemos a mesma condição resolvendo a equação $y(q_\varepsilon) = y(q_{-\varepsilon})$. Com isso, demonstramos o seguinte resultado.

Lema 4.5.2. *Assuma que $Z \in \Omega_0$ esta em sua forma normal (4.3) e que $((1 + 6\lambda_2 + 2\varepsilon a\mu_2 + 3\varepsilon a\mu_1 + 6\varepsilon a\lambda_1\mu_3)(1 + \varepsilon a\mu_1) - 2\lambda_1\mu_1\mu_3)\lambda_1 \neq 0$. Então existe uma vizinhança V de 0 tal que, $q_\varepsilon = q_{-\varepsilon}$ se e somente se uma das condições ocorre: i) $\mu_1 = \mu_2 = 0$ e $\lambda_2 = -1$, ou ii) $\mu_1 = -\frac{2}{3}\mu_2$ e $-54\mu_2^2 + 243\lambda_2 + 8\mu_2^4 - 108\lambda_2\mu_2^2 - 216\lambda_1\mu_2\mu_3 + 81 = 0$.*

O Lema a seguir nos dá os pontos de intersecção entre as linha de cúspides.

Lema 4.5.3. *Seja $Z \in \Omega_0$, em sua forma normal (4.3). Assuma que $3\lambda_2 - \mu_1^2 - \mu_1\mu_2 \neq 0$. Então existe uma vizinhança V de 0 tal que, para valores pequenos de $\lambda_1 \neq 0$, temos $V \cap C_{\bar{z}_\varepsilon} \cap C_{\bar{z}_{-\varepsilon}} = \{0, p_{\lambda_1}\}$ com*

$$p_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4\lambda_1^3(\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \lambda_2)}{(3\lambda_2 - \mu_1^2 - \mu_1\mu_2)^3} + o(\lambda_1^4) \\ -\frac{4\lambda_1^2(\mu_1 + \mu_2)}{(3\lambda_2 - \mu_1^2 - \mu_1\mu_2)^2} + o(\lambda_1^3) \\ -\frac{2\lambda_1}{3\lambda_2 - \mu_1^2 - \mu_1\mu_2} + o(\lambda_1^2) \end{pmatrix}$$

Demonstração. Se $p \in C_{\bar{Z}_\varepsilon} \cap C_{\bar{Z}_{-\varepsilon}}$, então p satisfaz o sistema de equações.

$$\begin{cases} h(p) = 0 \\ \bar{Z}_\varepsilon h(p) = \bar{Z}_{-\varepsilon} h(p) = 0 \\ \bar{Z}_\varepsilon^2 h(p) = 0 \\ \bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Usando a notação da Proposição 4.3.1, as duas últimas equações são escritas como:

$$\begin{cases} (1 + \varepsilon a \mu_1)z + (\mu_1 \mu_3 z + 2\varepsilon a \lambda_1)w + (\mu_2 + \mu_1 + 3\varepsilon a \lambda_2 + 2\lambda_1 \mu_3)w^2 + 3\lambda_2 \mu_3 w^3 + \varphi_2^\varepsilon(p) = 0 \\ (1 - \varepsilon a \mu_1)z + (\mu_1 \mu_3 z - 2\varepsilon a \lambda_1)w + (\mu_2 + \mu_1 - 3\varepsilon a \lambda_2 + 2\lambda_1 \mu_3)w^2 + 3\lambda_2 \mu_3 w^3 + \varphi_2^{-\varepsilon}(p) = 0 \end{cases}$$

Somando e subtraindo essas equações, obtemos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2z + 2(\mu_2 + \mu_1 + 2\lambda_1 \mu_3)w^2 + 6\lambda_2 \mu_3 w^3 + 2\mu_3 \mu_1 z w + \varphi_2^\varepsilon(p) + \varphi_2^{-\varepsilon}(p) = 0 \\ 4\varepsilon a \lambda_1 w + 6\varepsilon a \lambda_2 w^2 + 2\varepsilon a \mu_1 z + \varphi_2^\varepsilon(p) - \varphi_2^{-\varepsilon}(p) = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Pela Proposição 4.3.1, como $\nu_0(\varphi_2^{\pm\varepsilon}(p)) \geq 3$, temos que $\nu_0(\varphi_2^\varepsilon(p) - \varphi_2^{-\varepsilon}(p)) \geq 3$. Então a segunda equação de (4.8) pode ser escrita como:

$$2\varepsilon a(2\lambda_1 w + 3\lambda_2 w^2 + \mu_1 z) + o(z^2, w^3) = 0.$$

Isso nos dá a solução:

$$\mu_1 z = -2\lambda_1 w - 3\lambda_2 w^2 + o(z^2, w^3). \quad (4.9)$$

Substituindo a equação (4.9) na primeira equação de (4.8), temos:

$$z + \mu_1 w^2 + \mu_2 w^2 + o(z^2, w^3) = 0. \quad (4.10)$$

Agora, substituindo a equação (4.10) em (4.9), temos as soluções:

$$w = 0 \quad \text{ou} \quad w = -\frac{2\lambda_1}{3\lambda_2 - \mu_1^2 - \mu_1 \mu_2} + o(\lambda_1^2).$$

Se $w = 0$, então pelas equações de (4.7), temos $x = y = z = 0$.

Se $w = -\frac{2\lambda_1}{3\lambda_2 - \mu_1^2 - \mu_1 \mu_2} + o(\lambda_1^2)$, então temos por (4.10) que:

$$z = -\frac{4\lambda_1^2(\mu_1 + \mu_2)}{(3\lambda_2 - \mu_1^2 - \mu_1 \mu_2)^2} + o(\lambda_1^2).$$

Substituindo z e w obtidos acima em $\bar{Z}_\varepsilon h(p) = 0$, temos:

$$y = -\frac{4\lambda_1^3(\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \lambda_2)}{(3\lambda_2 - \mu_1^2 - \mu_1\mu_2)^3} + o(\lambda_1^4).$$

Obtendo portanto as coordenadas de p_{λ_1} . ■

No que segue, assumimos sem perda de generalidade que $a = \pm 1$. O Lema a seguir nos diz como se dá o contato entre as linhas de cúspides em 0 dependendo dos parâmetros.

Lema 4.5.4. *Seja $Z \in \Omega_0$, em sua forma normal (4.3) com $(1 + \varepsilon a \mu_1)(3\lambda_2 - \mu_1\mu_2 - \mu_1^2) \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1$.*

1. *Se $\lambda_1 \neq 0$, então as linhas de cúspides $C_{\bar{Z}_\varepsilon}$ e $C_{\bar{Z}_{-\varepsilon}}$ interceptam transversalmente em uma vizinhança de 0.*
2. *Se $\lambda_1 = 0$, então as linhas de cúspides $C_{\bar{Z}_\varepsilon}$ e $C_{\bar{Z}_{-\varepsilon}}$ têm contato quadrático em 0 se e somente se $\mu_1 \neq \pm 1$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.5.1, se $1 + \varepsilon a \mu_1 \neq 0$, então existe uma vizinhança V da origem, no qual as linhas de cúspides $C_{\bar{Z}_{\pm\varepsilon}}$ são parametrizadas por:

$$\begin{cases} C_{\bar{Z}_\varepsilon}(w) = \left(0, \theta_\varepsilon^1(\cdot)w^2 + o(w^3), \frac{-2\varepsilon a \lambda_1}{1 + \varepsilon a \mu_1}w + \theta_\varepsilon^2(\cdot)w^2 + o(w^3), w \right) \\ C_{\bar{Z}_{-\varepsilon}}(w) = \left(0, \theta_{-\varepsilon}^1(\cdot)w^2 + o(w^3), \frac{2\varepsilon a \lambda_1}{1 - \varepsilon a \mu_1}w + \theta_{-\varepsilon}^2(\cdot)w^2 + o(w^3), w \right) \end{cases} \quad (4.11)$$

com $\theta_\varepsilon^1(\cdot) = \frac{\lambda_1(\varepsilon a \mu_1 - 1)}{1 + \varepsilon a \mu_1}$ e $\theta_\varepsilon^2(\cdot) = -\frac{3\varepsilon a \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2}{(1 + \varepsilon a \mu_1)^2}$, $\varepsilon = \pm 1$.

Para mostrarmos que as linhas de cúspides $C_{\bar{Z}_\varepsilon}$ e $C_{\bar{Z}_{-\varepsilon}}$ interceptam transversalmente em uma vizinhança de 0, devemos mostrar que:

$$\frac{d}{dw}C_{\bar{Z}_\varepsilon}(w)\Big|_{w=0} \neq k \frac{d}{dw}C_{\bar{Z}_{-\varepsilon}}(w)\Big|_{w=0} \quad (4.12)$$

com $k \in \mathbb{R}$.

Podemos considerar, sem perda de generalidade, $k = 1$. Como $\frac{d}{dw}C_{\bar{Z}_\varepsilon}(w)\Big|_{w=0} = (0, 0, -\frac{2\varepsilon a \lambda_1}{1 + \varepsilon a \mu_1}, 1)$ e por hipótese $\lambda_1 \neq 0$, então a condição (4.12) é claramente satisfeita. Isso prova a parte 1.

Vamos mostrar agora a parte 2, para isso, suponhamos que $\lambda_1 = 0$. Logo para que as linhas de cúspides tenham contato quadrático em uma vizinhança V de 0, devemos ter:

$$\begin{cases} \frac{d}{dw} C_{\bar{Z}_\varepsilon}(w)|_{w=0} = \frac{d}{dw} C_{\bar{Z}_{-\varepsilon}}(w)|_{w=0} \\ \text{e} \\ \frac{d^2}{dw^2} C_{\bar{Z}_\varepsilon}(w)|_{w=0} \neq k \frac{d^2}{dw^2} C_{\bar{Z}_{-\varepsilon}}(w)|_{w=0} \end{cases} \quad (4.13)$$

com $k \in \mathbb{R}$.

Pela parametrização de $C_{\bar{Z}_{\pm\varepsilon}}$ dado em (4.11), a primeira condição de (4.13) é sempre verdadeira, desde que $\lambda_1 = 0$. Para analisar a segunda condição, devemos considerar no Lema 4.5.1 o termo $o(bw^2)$ que aparece em z . Esse termo é:

$$o(bw^2) = -\frac{3\lambda_2\mu_1 + \varepsilon a\mu_1^2 + 2\mu_3\lambda_1 + \varepsilon a\mu_1\mu_2}{(1 + \varepsilon a\mu_1)^2} w^2.$$

Usando a parametrização de $C_{\bar{Z}_{\pm\varepsilon}}$ com o termo acima e o fato de $\lambda_1 = 0$, temos que a segunda condição de (4.13) é equivalente a

$$-3\lambda_2 + \mu_1^2 + \mu_1\mu_2 - \mu_1^4 - \mu_1^3\mu_2 + 3\lambda_2\mu_1^2 \neq 0$$

fatorando temos

$$(3\lambda_2 - \mu_1\mu_2 - \mu_1^2)(\mu_1^2 - 1) \neq 0$$

como por hipótese $3\lambda_2 - \mu_1\mu_2 - \mu_1^2 \neq 0$, temos que a expressão acima é não nula se e somente se $\mu_1 \neq \pm 1$. ■

Faremos a seguir um estudo dos conjuntos Σ_1 e Σ_2 , para isso, vamos assumir no que segue que $Z \in \Omega_0$ está em sua forma normal (4.3) com $(1 + \varepsilon a\mu_1)(1 + 6\lambda_2 + 2\varepsilon a\mu_2 + 3\varepsilon a\mu_1) \neq 0$. Fixamos uma vizinhança conveniente V de 0 (veja Lemas 4.4.1 e 4.5.1) tal que os conjuntos $V \cap \Sigma_i$ são dados pelas expressões do Lema 4.5.1.

4.6 Estudo dos Conjuntos $V \cap \Sigma_i$

Note que $V \cap S_\varepsilon^1 = V \cap S_{-\varepsilon}^1$, logo a variedade de dobra é dada por $V \cap F_{\bar{Z}_\varepsilon} = V \cap F_{\bar{Z}_{-\varepsilon}}$. Pelas expressões de $\bar{Z}_{\pm\varepsilon}^i h(p)$ dados na demonstração da Proposição 4.3.1, vemos que numa

vizinhança V da origem o sinal de $\bar{Z}_{\pm\epsilon}^2 h(p)$ quando muda, isso ocorre quando passamos pelas linhas de cúspides $C_{\bar{Z}_\epsilon}$ e $C_{\bar{Z}_{-\epsilon}}$, ou seja, as linhas de cúspides delimitam regiões conexas na variedade de dobra onde o sinal de $\bar{Z}_{\pm\epsilon}^2 h(p)$ não se altera no interior de cada região. Analisemos agora o que acontece nessas regiões dependendo do contato entre as linhas de cúspides. Então:

1. Se $\lambda_1 \neq 0$, então $\bar{C}_{\bar{Z}_\epsilon}$ e $\bar{C}_{\bar{Z}_{-\epsilon}}$ interceptam transversalmente. Numa vizinhança de cada ponto de intersecção há quatro domínios correspondendo a quatro configurações do sinal de $\bar{Z}_\epsilon^2 h(p)$, $\epsilon = \pm 1$. Todos os tipos de singularidades de dobras (dobras parabólicas, hiperbólicas e elípticas) ocorrem (ver análise semelhante feito no Capítulo 3 Seção 3.12).
2. Se $\lambda_1 = 0$ e $(3\lambda_2 - \mu_1\mu_2 - \mu_1^2)(\mu_1^2 - 1) \neq 0$, então $\bar{C}_{\bar{Z}_\epsilon}$ e $\bar{C}_{\bar{Z}_{-\epsilon}}$ apresentam um contato quadrático em 0. Quatro configurações do sinal de $\bar{Z}_{\pm\epsilon}^2 h(p)$ são possíveis no espaço de parâmetros: Todos os tipos de singularidades de dobras (dobras parabólicas, hiperbólicas e elípticas) ocorrem.
3. Se $\lambda_1 = 0$ e $(3\lambda_2 - \mu_1\mu_2 - \mu_1^2)(\mu_1^2 - 1) = 0$, então $\bar{C}_{\bar{Z}_\epsilon}$ e $\bar{C}_{\bar{Z}_{-\epsilon}}$ apresentam em 0 um contato que é estritamente maior que 2. Duas configurações de sinais são possíveis se $C_{\bar{Z}_\epsilon} = C_{\bar{Z}_{-\epsilon}}$ (este é o caso de L_a) ou quatro configurações nos sinais ocorrem se $C_{\bar{Z}_\epsilon} \neq C_{\bar{Z}_{-\epsilon}}$.

$V \cap S_\epsilon^2$ é uma curva em $\{0\} \times \mathbb{R}^3$. Temos $\Sigma_2 = (C_{\bar{Z}_\epsilon} \cap C_{\bar{Z}_{-\epsilon}}) \cup (C_{\bar{Z}_\epsilon} \cap F_{\bar{Z}_{-\epsilon}}) \cup (F_{\bar{Z}_\epsilon} \cap C_{\bar{Z}_{-\epsilon}})$.

1. Se $\lambda_1 \neq 0$, então pela Proposição 4.3.1 temos $\bar{Z}_{\pm\epsilon}^2 h(0) = 0$ e $\bar{Z}_{\pm\epsilon}^3 h(0) \neq 0$. Logo a origem (que pertence a $C_{\bar{Z}_\epsilon} \cap C_{\bar{Z}_{-\epsilon}}$) é uma cúspide; aparecem cúspides híbridas e meia-cúspides em $C_{\bar{Z}_{\pm\epsilon}}$ e próximo de 0. Além disso, temos $\Sigma_3 = (Q_{\bar{Z}_\epsilon} \cap Q_{\bar{Z}_{-\epsilon}}) \cup (Q_{\bar{Z}_\epsilon} \cap (F_{\bar{Z}_{-\epsilon}} \cup C_{\bar{Z}_{-\epsilon}})) \cup ((F_{\bar{Z}_\epsilon} \cup C_{\bar{Z}_\epsilon}) \cap Q_{\bar{Z}_{-\epsilon}})$. E Σ_3 consiste de:

- (a) ou um único ponto p ; neste caso, devemos ter $\mu_1 = \mu_2 = 0$ e $\lambda_2 = -1$, ou $\mu_1 = -\frac{2}{3}\mu_2$ e $-54\mu_2^2 + 243\lambda_2 + 81 + 8\mu_2^4 - 108\lambda_2\mu_2^2 - 216\lambda_1\mu_2\mu_3 = 0$. Neste caso, p é uma singularidade de dobra de ordem superior (isto é, do tipo (4a) ou (4b) ou (4c));

- (b) ou dois pontos distintos $p \in C_{\bar{Z}_\varepsilon}$ e $q \in C_{\bar{Z}_{-\varepsilon}}$; cada um deles é uma singularidade de dobra tipo 4X-2E (ou 4X-2H), se $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) \neq 0$ e $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(q) \neq 0$ e tais pontos estão separando meia-cúspides ou cúspides híbridas, onde X denota E ou H;
- (c) ou dois pontos distintos $p \in C_{\bar{Z}_\varepsilon}$ e $q \in C_{\bar{Z}_{-\varepsilon}}$; cada um deles é uma dobra tipo 4E-3C ou 4H-3C, se $\bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(p) = \bar{Z}_{-\varepsilon}^2 h(q) = 0$ e tais pontos estão separando meia-cúspides ou cúspides híbridas.
2. Se $\lambda_1 = 0$ e $(3\lambda_2 - \mu_1\mu_2 - \mu_1^2)(\mu_1^2 - 1) \neq 0$, então $\bar{C}_{\bar{Z}_\varepsilon} \cap \bar{C}_{\bar{Z}_{-\varepsilon}} = \{0\}$ e as curvas de cúspides têm contato quadrático. Pela Proposição 4.3.1 $\bar{Z}_{\pm\varepsilon}^2 h(0) = \bar{Z}_{\pm\varepsilon}^3 h(0) = 0$, e pelo Lema 4.5.3, $\bar{Z}_{\pm\varepsilon}^4 h(0) \neq 0$. Logo $\Sigma_3 = \{0\}$, e a origem é uma 4-dobra tipo 4H ou 4E; ela separa meia-cúspide e cúspides híbridas.
3. Se $\lambda_1 = 0$ e $(3\lambda_2 - \mu_1\mu_2 - \mu_1^2)(\mu_1^2 - 1) = 0$, então $\Sigma_3 = \{0\}$ é uma 4-dobra, $\bar{C}_{\bar{Z}_\varepsilon}$ e $\bar{C}_{\bar{Z}_{-\varepsilon}}$ têm em 0 contato não quadrático.

Portanto temos,

Lema 4.6.1. *Seja $Z \in \Omega_0$ em sua forma normal (4.3), tal que $(3\lambda_2 - \mu_1\mu_2 - \mu_1^2)(\mu_1^2 - 1) \neq 0$ e $(1 + \varepsilon a \mu_1)(1 + 6\lambda_2 + 2\varepsilon a \mu_2 + 3\varepsilon a \mu_1) \neq 0$. Existe uma vizinhança V de 0 tal que:*

1. $V \cap \Sigma_1$ é uma superfície desconexa com três tipos diferentes de dobras.
2. (a) Se $\lambda_1 \neq 0$, então $V \cap \Sigma_2$ consiste de duas curvas transversais;
(b) Se $\lambda_1 = 0$, então $V \cap \Sigma_2$ consiste de duas curvas com contato quadrático em 0;
3. (a) Se $\lambda_1 \neq 0$, e desde que λ_1 é suficientemente pequeno, então $V \cap \Sigma_3 = \{p, q\}$ com $p \neq 0, q \neq 0$;
(b) Se $\lambda_1 = 0$, então $V \cap \Sigma_3 = \{0\}$;
4. $V \cap \Sigma_4 = \emptyset$.

Demonstração. Conseqüência imediata dos resultados contidos em §4.6 ■

4.7 Prova do Teorema 4.2.1

Demonstração. Conseqüência imediata dos resultados contidos em §4.6, e Lema 4.6.1. ■

4.8 Diagrama de Bifurcação

O diagrama de bifurcação a seguir representa a configuração das linhas de cúspides e como se comportam as singularidades, dependendo dos valores dos parâmetros. Faremos a representação sobre a esfera $\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = \beta_0$, para cada $\beta_0 > 0$. Por simplicidade e sem qualquer perda de generalidade, assumiremos $\beta_0 = 1$. As notações $i - j$ correspondem a singularidades em $S_\varepsilon^{i-1} \cap S_{-\varepsilon}^{j-1}$ (com i, j maximal).

No que segue, iremos analisar somente o caso $a = 1$ (para $a = -1$, a configuração da dinâmica não se altera).

Colocamos:

$$p(\lambda_1, \lambda_2, \mu_2, \mu_3) = -54\mu_2^2 + 243\lambda_2 + 81 + 8\mu_2^4 - 108\lambda_2\mu_2^2 - 216\lambda_1\mu_2\mu_3$$

e fixamos λ_1 e λ_2 .

Dependendo dos sinais de λ_1 e λ_2 , temos três casos a serem considerados e analisados.

Caso 1: $\lambda_1 \in \mathbb{R}^*$ e $\lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

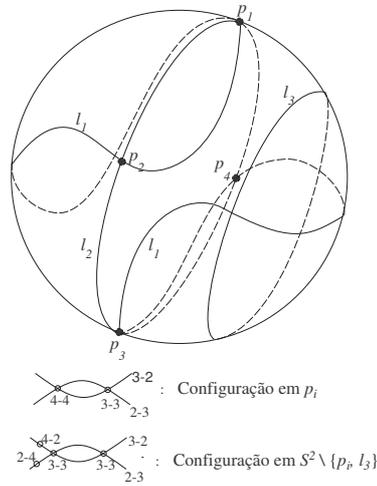


Figura 4.4: A curva l_1 corresponde a pontos sobre S^2 tal que $p(\lambda_1, \lambda_2, \mu_2, \mu_3) = 0$; l_2 corresponde a equação $3\mu_1 + 2\mu_2 = 0$ em S^2 ; e l_3 é a curva de singularidades degeneradas de equação $1 + 6\lambda_2 + 2\varepsilon a\mu_2 + 3\varepsilon a\mu_1 = 0$.

Caso 2: $\lambda_1 \in \mathbb{R}^*$ e $\lambda_2 = -1$.

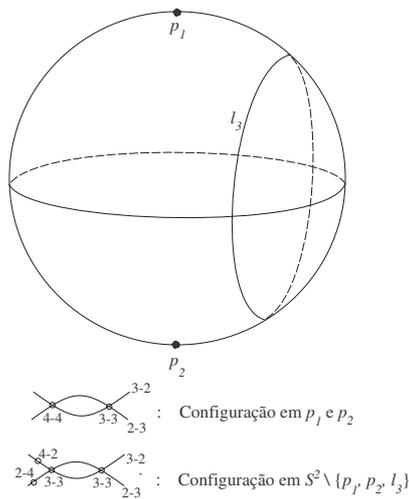


Figura 4.5: l_3 é a curva de singularidades degeneradas de equação $1 + 6\lambda_2 + 2\varepsilon a\mu_2 + 3\varepsilon a\mu_1 = 0$, p_1 e p_2 são dados por $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Caso 3: $\lambda_1 = 0$.

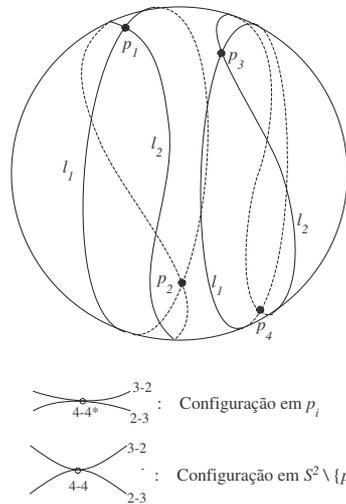


Figura 4.6: A curva l_1 corresponde a equação $\mu_1^2 - 1 = 0$ e l_2 a equação $3\lambda_2 - \mu_1\mu_2 - \mu_1^2 = 0$.

*Os pontos $p_{i's}$ são singularidades com ordem de contato alto entre as linhas de cúspides.

4.9 Prova do Teorema 4.2.2

Demonstração.

1. (\Rightarrow) Seja $Z \in \Xi_0$ fracamente estável. Suponhamos que Z não tenha codimensão 0, então pela Definição 4.2.3, pode ocorrer uma das seguintes possibilidades:
 - (a) Existe uma singularidade do tipo (4a), ou (4b), ou (4c). Contudo, essa singularidade pode ser facilmente removida por pequenas perturbações, isto é, podemos separar essa singularidade em duas outras do tipo 4X-2Y-dobra com $X=H, E, Y=H, E$, e $X \neq Y$, mas isso é uma contradição pois Z é fracamente estável.
 - (b) Devemos ter então uma singularidade do tipo (3a), ou (4h) ou (4i) em p , mas as linhas de cúspides não são transversais. Contudo, a não transversalidade é um fenômeno não estável, logo recaímos em mais uma contradição.

Essas duas contradições surgiram do fato de termos suposto que Z não tenha codimensão 0. Portanto, Z tem codimensão 0, conforme queríamos mostrar.

(\Leftarrow) Suponhamos agora que Z tem codimensão 0. Pela Definição 4.2.3 e o Teorema 4.1.1, as singularidades que temos não podem ser removidas por pequenas perturbações, ou seja, Z é fracamente estável. Agora o fato de Ξ_0 ser aberto e denso segue da caracterização de estabilidade estrutural fraca dada na Seção 4.2.

2. A demonstração da parte 2 segue de modo análogo ao demonstrado na parte 1 com suas respectivas modificações.

■

4.10 Órbitas Periódicas de Campos $Z \in \Omega$

Nas seções anteriores, fizemos a classificação das singularidades de campos de vetores $Z \in \Omega$. O nosso estudo agora se volta para a parte qualitativa de tais campos, estamos interessados em detectar órbitas 1-periódicas para tais campos. Para isso, usaremos ferramentas clássicas da geometria algébrica. Para resolvermos o problema de encontrarmos órbitas periódicas para campos de vetores $Z \in \Omega$, a estratégia que usaremos é a de estudar a parte polinomial gerada pelo campo semi-linear Z_w , detectando suas órbitas periódicas por meio de um algoritmo e então estender esses resultados para as deformações $Z \in \Omega$.

O objetivo central das próximas seções é generalizar os resultados obtidos em [JT3] para o campo de vetores reversível $Z_{a,\lambda_1,\lambda_2}$ para o caso particular do campo de vetores não-reversível Z_w com $w = (a, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, 0)$. Uma observação que fazemos é que para valores pequenos dos parâmetros (μ_1, μ_2) em [JT3], foi mostrado a existência de órbitas periódicas. Contudo a situação aqui é diferente, estamos em busca de resultados globais para valores relativamente grandes dos parâmetros (μ_1, μ_2) . Para isso, vamos adotar a seguinte estratégia.

1. Iniciamos a partir do modelo polinomial relay $Z_{a,\lambda_1,\lambda_2}$ e adaptamos o algoritmo dado em [JT3].

2. Detectamos condições necessárias para existência de órbitas periódicas. Assim, por meio da *Seqüência de Sturn*, determinamos condições semi-algébricas sobre os parâmetros que garantem a existência de órbitas periódicas satisfazendo essas condições necessárias.

A segunda parte desse algoritmo teve que ser adaptado para o caso não reversível, pois a simetria das órbitas periódicas é perdida. Aqui temos que destacar que, devido ao número de parâmetros, a região semi-algébrica no espaço de parâmetros onde as órbitas periódicas ocorrem, é definida implicitamente pelas condições do sinal de um polinômio. Para dar a fórmula, explícita nos parâmetros onde as órbitas periódicas aparecem, propomos uma nova estratégia. Começamos pelos resultados do caso reversível e usamos uma continuação algébrica para conseguirmos um domínio semi-algébrico maior, onde garantimos a existência de órbitas periódicas.

Daremos várias descrições de domínios explícitos onde órbitas periódicas ocorrem. Esses domínios são descritos via o cálculo das raízes de polinômios sobre algumas variáveis.

Nessa parte do trabalho, vamos considerar o campo de vetores Z_σ com $\sigma = (a, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, 0)$ e para facilitar a notação, escreveremos $Z_{a,b,c,d,e}$ no lugar de $Z_{a,\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2}$. Note que estamos considerando $\mu_3 = 0$, pois estamos trabalhando com singularidades de codimensão baixa, logo μ_3 não influencia nos cálculos. Denotaremos por Ω_p o conjunto de tais campos de vetores. Note que $\Omega_p \subset \Omega_0$. Veremos no Teorema 4.10.1, que para alguns valores dos parâmetros (a, b, c, d, e) o campo de vetores $Z_{a,b,c,d,e} \in \Omega_p$ pode ter uma família a 1-parâmetro γ_α , $\alpha > \alpha_l$ terminando em uma órbita fechada γ_{α_l} .

Vamos enunciar os principais resultados obtidos para os campos $Z_{a,b,c,d,e} \in \Omega_p$. Suas demonstrações serão feitas no decorrer das seções. Iniciamos com o seguinte Lema.

Lema 4.10.1. *Suponhamos que $c > 1$ e $|e + d| < \sqrt{2c - 1} - 1$, então*

1. Os números $\rho^+(c, d, e) = (1 - c - d - e + 2ed)(1 + c - d - e)$ e $\rho^-(c, d, e) = \rho^+(c, -d, -e)$ são estritamente negativos.
2. O número $c + 1 - |e + d|$ é estritamente positivo.

Considerando (c, d, e) satisfazendo as hipóteses do Lema 4.10.1, definimos o número

$$\omega(c, d, e) = \frac{1}{\min \left\{ \sqrt{-\rho^+(c, d, e)}, \sqrt{-\rho^-(c, d, e)}, c + 1 - |e + d| \right\}}.$$

Nos focamos no caso $a = -1$ (o caso $a = 1$ pode ser tratado de modo similar).

Teorema 4.10.1. (Teorema G. Capítulo 2) *Seja $Z_{a,b,c,d,e} \in \Omega_p$. Assuma as seguintes condições*

1. $a = -1$,
2. $c > 1$,
3. $|b| < \sqrt{c^2 - 1}$,
4. $|d + e| < \sqrt{2c - 1} - 1$,

e ponha $\alpha_l = b\omega(c, d, e)$.

Então $Z_{a,b,c,d,e}$ tem uma família a 1-parâmetro de órbitas regulares 1-periódica γ_α , $|\alpha| > |\alpha_l|$, tal que:

1. o conjunto $P_1 = \{\gamma_\alpha(t), t \in \mathbb{R}, |\alpha| > |\alpha_l|\}$ é uma superfície cônica semi-algébrica;
2. se $b = 0$, então $0 \in \bar{P}_1$;
3. a órbita γ_α , para $|\alpha| > |\alpha_l|$, passa pelo ponto $p_\alpha = \left(0, -\frac{\alpha^3}{3} - \frac{b}{4}\alpha^2, -\frac{d}{2}\alpha^2, \alpha\right)$ e $p_{-\alpha}$;
4. o período de γ_α é $4|\alpha|$;
5. desde que $b \neq 0$, e

$$\sqrt{-\rho^+(c, d, e)} < c + 1 - |e + d| \quad \text{ou} \quad \sqrt{-\rho^-(c, d, e)} < c + 1 - |e + d|$$

quando $\alpha \rightarrow \pm\alpha_l$, γ_α tende para um laço singular 1-periódico γ_{α_l} de período $4|\alpha_l| \neq 0$.

Teorema 4.10.2. (Teorema H. Capítulo 2) *Seja $Z_{a,b,c,d,e} \in \Omega_p$. Assuma que*

1. $a = -1, b = 0, c > 1,$
2. $|e + d| < c + 1,$
3. $\rho^+(c, d, e) \rho^-(c, d, e) = 0.$

Existe uma família a 1-parâmetro de laços singulares 1-periódico γ_α , $|\alpha| > 0$ de período $4|\alpha| \neq 0$.

4.11 Estrutura Quasi-homogênea e Teoria da Seqüência de Sturm

Ilustramos nessa seção, a estrutura quasi-homogênea das soluções a ser apresentada no Lema 4.11.1 que queremos preservar e a primeira parte do algoritmo que usamos para detectar órbitas 1-periódica. Considere $Z_{a,b,c,d,e} \in \Omega_p$. Seja $p \in H_0$, $p = (0, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, e $\gamma_\varepsilon :]t_0, t_1[\mapsto \mathbb{R}^4$ a trajetória de \bar{Z}_ε tal que $0 \in]t_0, t_1[$, $\gamma_\varepsilon(0) = p$, e $\gamma_\varepsilon(t) \in H_\varepsilon$ para todo $t \in]t_0, t_1[\setminus \{0\}$. Temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} w(\gamma_\varepsilon(t)) = \alpha_4 + \varepsilon a t \\ z(\gamma_\varepsilon(t)) = \alpha_3 + \alpha_4 t + \frac{\varepsilon a}{2} t^2 \\ y(\gamma_\varepsilon(t)) = \alpha_2 + \left(\alpha_3 + \frac{3}{2} d \alpha_4^2 \right) t + \left(\frac{1}{2} \alpha_4 + \frac{3}{2} d \varepsilon a \alpha_4 \right) t^2 + \left(\frac{\varepsilon a}{6} + \frac{1}{2} d \right) t^3 \\ x(\gamma_\varepsilon(t)) = \frac{1}{12} (12 \alpha_2 + 4 \alpha_4^3 + 6 c \alpha_4^3 + 9 b \alpha_4^2 + e \alpha_3 \alpha_4) t + \\ \quad \frac{1}{4} (2 \alpha_3 + \varepsilon a (3 c \alpha_4^2 + 2 \alpha_4^2 + 3 b \alpha_4 + 2 e \alpha_3) + 2 e \alpha_4^2 + 3 d \alpha_4^2) t^2 + \\ \quad \frac{1}{4} (2 \alpha_4 + 2 c \alpha_4 + b + 2 \varepsilon a \alpha_4 (d + e)) t^3 + \frac{1}{8} (d + e + \varepsilon a (1 + c)) t^4 \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Observe que a trajetória tem uma parametrização polinomial em H_ε . A condição $\gamma_\varepsilon(t) \in H_\varepsilon$ para todo $t \in]t_0, t_1[\setminus \{0\}$ é equivalente a:

$$\forall t \in]t_0, t_1[\quad , \quad t \neq 0 \quad , \quad x_1(\gamma_\varepsilon(t)) \varepsilon \geq 0. \quad (4.15)$$

A estrutura quasi-homogênea das soluções aparece no lema seguinte. Consideremos para $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ a transformação $\xi_\lambda : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $\xi_\lambda(x, y, z, w) = (\lambda^4 x, \lambda^3 y, \lambda^2 z, \lambda w)$.

Lema 4.11.1. *Se γ é a trajetória de $Z_{a,b,c,d,e}$ tal que $\gamma(0) = (0, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, então para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, γ_λ^* definida por $t \mapsto \xi_\lambda(\gamma(\lambda^{-1}t))$ é a trajetória de $Z_{a,\lambda b,c,d,e}$ satisfazendo $\gamma_\lambda^*(0) = \xi_\lambda(0, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. Além disso, se γ é periódica de período T , então γ_λ^* é periódica de período λT .*

Demonstração. Definimos a aplicação $\beta_\varepsilon(t) = \gamma_\lambda^*(t)$, $t \in]t_0, t_1[$ e mostremos que ela é trajetória de $Z_{a,\lambda b,c,d,e}$.

1. $t \mapsto \beta_\varepsilon(t)$ é claramente contínua e C^1 por partes;
2. $\forall t \in \mathbb{R}$ tal que $\beta_\varepsilon(t) \notin H_0$, é fácil ver que $\dot{\beta}_\varepsilon(t) = Z_{a,\lambda b,c,d,e}(\beta_\varepsilon(t))$;
3. Por fim, $\beta_\varepsilon(t) \cap H_0$ é um conjunto discreto, composto por no máximo quatro pontos, que são as raízes de $x(\beta_\varepsilon(t))$.

Portanto $\beta_\varepsilon(t)$ é solução de $Z_{a,\lambda b,c,d,e}$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Agora suponhamos que γ_ε tenha período T , e mostremos que β_ε tem período λT . De fato,

$$\beta_\varepsilon(t + \lambda T) = \xi_\lambda \left(\gamma_\varepsilon \left(\frac{t + \lambda T}{\lambda} \right) \right) = \xi_\lambda \left(\gamma_\varepsilon \left(\frac{t}{\lambda} + T \right) \right) = \xi_\lambda \left(\gamma_\varepsilon \left(\frac{t}{\lambda} \right) \right) = \beta_\varepsilon(t).$$

■

Em particular, se $b = 0$, ξ_λ age sobre as trajetórias de $Z_{a,0,c,d,e}$. Logo, qualquer trajetória γ de $Z_{a,0,c,d,e}$ corresponde a uma família a 1-parâmetro γ_λ^* , $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ de trajetórias de $Z_{a,0,c,d,e}$. Neste caso particular, a estrutura das soluções é homogênea.

Vamos dar agora condições necessárias para que tenhamos órbitas 1-periódica.

Lema 4.11.2. *Seja $Z_{a,b,c,d,e} \in \Omega_p$, com $a = -1$ e $p_0 \in H_0$, $p_0 = (0, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. Seja γ uma trajetória de $Z_{a,b,c,d,e}$ tal que $\gamma(0) = p_0$, $\gamma(v) = \gamma_\varepsilon(v)$ com $\gamma_\varepsilon(v) \in H_\varepsilon$. Se γ é 1-periódica com tempo de retorno t (correspondendo a H_ε) e u (correspondendo a $H_{-\varepsilon}$), então a 5-upla $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, t, u)$ satisfaz as seguintes condições:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = -\frac{1}{3} \alpha_4^3 - \frac{1}{4} b \alpha_4^2 \quad \alpha_3 = -\frac{d}{2} \alpha_4^2 \\ t = u = 2\varepsilon \alpha_4 \quad \varepsilon = \pm 1 \quad \alpha_4 \neq 0 \end{array} \right\} \quad (4.16)$$

Demonstração. Para simplificar a notação, denotemos por $p_0 = (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ e escrevemos as coordenadas da trajetória γ_ε como $x(\gamma_\varepsilon(t)) = g(1, -\varepsilon, t, p_0)$, $y(\gamma_\varepsilon(t)) = g(2, -\varepsilon, t, p_0)$, $z(\gamma_\varepsilon(t)) = g(3, -\varepsilon, t, p_0)$ e $w(\gamma_\varepsilon(t)) = g(4, -\varepsilon, t, p_0)$. As condições necessárias para que tenhamos órbitas 1-periódica é que a trajetória γ_ε parta do ponto p_0 e retorne à H_0 em tempo t em um ponto \bar{p}_0 e que a trajetória $\gamma_{-\varepsilon}$ parta do ponto \bar{p}_0 e retorne à H_0 em tempo u no ponto p_0 . Usando as notações acima, o ponto \bar{p}_0 é escrito como $\bar{p}_0 = (g(2, -\varepsilon, t, p_0), g(3, -\varepsilon, t, p_0), g(4, -\varepsilon, t, p_0))$. Escrevendo essas condições na forma matemática, temos o seguinte sistema de equações para ser resolvido:

$$\begin{cases} t^{-1} g(1, -\varepsilon, t, p_0) = 0 \\ u^{-1} g(1, \varepsilon, u, \bar{p}_0) = 0 \\ g(2, \varepsilon, u, \bar{p}_0) - \alpha_2 = 0 \\ g(3, \varepsilon, u, \bar{p}_0) - \alpha_3 = 0 \\ g(4, \varepsilon, u, \bar{p}_0) - \alpha_4 = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

Simplificando as duas primeiras equações de (4.17), obtemos um sistema algébrico equivalente (4.17'), no qual o lado direito desse novo sistema gera um ideal I formado por expressões polinomiais. Os zeros desse ideal I , correspondem exatamente a soluções do sistema (4.17'). Uma solução trivial é a dada por $t = u = 0$. Para eliminarmos a solução $u = 0$, adicionamos ao ideal I , o polinômio $u\tilde{u} - 1$ e então calculamos a base de Gröbner para o ideal $\tilde{I} = I \cup \{u\tilde{u} - 1\}$, com ordem lexicográfica nas variáveis igual a $(t, u, \tilde{u}, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, b, c, d, e, \varepsilon)$. Obtemos com isso, a seguinte base:

$$[\varepsilon^2 - 1, 2\alpha_3 + d\alpha_4^2, 12\alpha_2 + 4\alpha_4^3 + 3b\alpha_4^2, 2\tilde{u}\alpha_4 - \varepsilon, u - 2\alpha_4\varepsilon, t - 2\alpha_4\varepsilon]. \quad (4.18)$$

Agora, esquecendo \tilde{u} (fazendo a projeção em algum conjunto algébrico) e resolvendo cada equação de (4.18), obtemos as condições (4.16) descritas no enunciado do lema. ■

Obtido as condições necessárias para termos órbitas 1-periódica, o próximo passo é verificar se tais condições realmente nos dão órbitas 1-periódicas. O problema a ser considerado agora é semi-algébrico, porque temos que testar as posições relativas das raízes de tais polinômios (um para H_ε e outro para $H_{-\varepsilon}$), bem como a condição (4.15). Isso será verificado por meio da teoria da Sequência de Sturm, que descreveremos abaixo.

O Teorema de Sturm é uma ferramenta muito útil para determinar o número de raízes reais de uma equação algébrica com coeficientes reais sobre um intervalo dado. Esse problema foi resolvido de modo simples em 1829, pelo matemático francês, Charles François Sturm. Vamos definir a seguir, as ferramentas necessárias para enunciarmos tal Teorema.

Definição 4.11.1. *A Seqüência de Sturm associada ao polinômio $P_n \in \mathbb{K}[x]$ (\mathbb{K} corpo) de grau n , é a seqüência de polinômios $P_n, P_{n-1}, \dots, P_{n-i}, \dots$ com $i \leq n$, tal que $P_{n-1} = P'_n$ e*

$$P_i = - \text{resto da divisão euclidiana de } P_{i+2} \text{ por } P_{i+1}, \quad 0 \leq i \leq n-2.$$

Definição 4.11.2. *Assuma que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $P_n(x_0) \neq 0$. Chamamos de variação em x_0 da seqüência de Sturm associada a P_n , o número $V(x_0)$ que corresponde a quantidade de mudança do sinal na seqüência $P_n(x_0), P_{n-1}(x_0), \dots, P_0(x_0)$.*

Teorema 4.11.1 (Sturm). *Se $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$ não são raízes do polinômio P , então o número de raízes reais de P no intervalo $[a, b]$ é $V(a) - V(b)$.*

Como nosso objetivo é apenas usar o resultado do Teorema de Sturm, foge do nosso contexto demonstrá-lo. Para leitores mais interessados, uma demonstração se encontra em [D].

Vamos iniciar a segunda parte do algoritmo para verificar se realmente as trajetórias que satisfazem as condições (4.16) correspondem a órbitas 1-periódica.

Seja γ a trajetória passando por $p_0 = (0, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ e satisfazendo as condições (4.16). O tempo t dado em (4.16) deve ser, em valor absoluto, a menor raiz de $v^{-1}x(\gamma_\varepsilon(v))$, assim como o tempo $-t$ deve ser também, em valor absoluto, a menor raiz de $v^{-1}x(\gamma_{-\varepsilon}(v))$. Para testar isso, iremos utilizar a teoria da seqüência de Sturm. Note que no caso de campo de vetores reversíveis, a condição sobre ε implicava na condição sobre $-\varepsilon$, devido a simetria das órbitas. Nesse caso, isso já não ocorre, então devemos considerar dois polinômios

$$r_2^\varepsilon(v) = \frac{x(\gamma_\varepsilon(v))}{v(v - 2\varepsilon\alpha_4)} \quad \text{e} \quad r_2^{-\varepsilon}(v) = \frac{x(\gamma_{-\varepsilon}(v))}{v(v + 2\varepsilon\alpha_4)}.$$

Estamos excluindo de $r_2^\pm(v)$ as duas raízes $v = 0$ e $v = -2\varepsilon\alpha_4$ que correspondem respectivamente aos pontos p_0 e \bar{p}_0 , e queremos mostrar que no intervalo $[0, -2\varepsilon\alpha_4]$, r_2^\pm não possui nenhuma raiz real.

Vamos assumir que $d + e - 8\varepsilon(c + 1) \neq 0$ e observe que:

1. As raízes de r_2^ε e de $x(\gamma_\varepsilon(v))$ no intervalo aberto $]0, 2\varepsilon\alpha_4[$ são as mesmas.
2. r_2^ε tem raiz dupla se e somente se

$$\alpha_4^2 (1 - c^2 + d^2 + e^2 + 2ed(c + 2)) - 2\varepsilon (e^2d + ed^2 + e + d) + b^2 = 0.$$

De fato, usando as condições (4.16) na expressão de $x(\gamma_\varepsilon(t))$ dada em (4.14) e fazendo a divisão euclidiana por $v(v - \varepsilon\alpha_4)$, temos que r_2^ε tem a seguinte expressão

$$r_2^\varepsilon(v) = \frac{1}{8} (-\varepsilon(c + 1) + d + e) v^2 + \frac{1}{4} (b + \alpha_4(c + 1 - \varepsilon(d + e))) v - \frac{1}{4} \varepsilon\alpha_4 (b + c\alpha_4 - ed\alpha_4).$$

Calculando o discriminante de r_2^ε , temos que

$$\Delta_{r_2^\varepsilon} = \alpha_4^2 (1 - c^2 + d^2 + e^2 + 2ed(c + 2)) - 2\varepsilon (e^2d + ed^2 + e + d) + b^2.$$

Portanto, temos a afirmação (2) verdadeira.

3. 0 ou $2\varepsilon\alpha_4$ são raízes de r_2^ε se e somente se

$$(b + \alpha_4(c - ed))(b - \alpha_4(c - ed))\alpha_4 = 0.$$

De fato,

$$r_2^\varepsilon(0) = -\frac{\varepsilon c\alpha_4^2}{4} + \frac{\varepsilon ed\alpha_4^2}{4} - \frac{\varepsilon b\alpha_4}{4} = -\frac{\varepsilon\alpha_4}{4} (b + \alpha_4(c - ed))$$

e

$$r_2^\varepsilon(2\varepsilon\alpha_4) = -\frac{\varepsilon c\alpha_4^2}{4} + \frac{\varepsilon ed\alpha_4^2}{4} + \frac{\varepsilon b\alpha_4}{4} = \frac{\varepsilon\alpha_4}{4} (b - \alpha_4(c - ed)).$$

Portanto 0 e $2\varepsilon\alpha_4$ são raízes de r_2^ε se e somente se $r_2^\varepsilon(0)r_2^\varepsilon(2\varepsilon\alpha_4) = 0$, ou seja, se $(b + \alpha_4(c - ed))(b - \alpha_4(c - ed))\alpha_4 = 0$.

Vamos utilizar agora o Teorema de Sturm para dar o número de raízes de r_2^ε em $[0, 2\varepsilon\alpha_4]$. Desde que $r_2^\varepsilon(0)r_2^\varepsilon(2\varepsilon\alpha_4) \neq 0$, este número é dado pela diferença da variação em 0 e em $2\varepsilon\alpha_4$ da seqüência $(r_2^\varepsilon, r_1^\varepsilon, r_0^\varepsilon)$, onde $r_1^\varepsilon = (r_2^\varepsilon)'$, $r_0^\varepsilon = -\text{resto}(r_2^\varepsilon, r_1^\varepsilon)$. Temos:

$$\begin{aligned} r_2^\varepsilon &= \frac{1}{8} (-\varepsilon(c+1) + d + e) v^2 + \frac{1}{4} (b + \alpha_4(c+1 - \varepsilon(d+e))) v - \\ &\quad - \frac{1}{4} \varepsilon \alpha_4 (b + c \alpha_4 - e d \alpha_4) \\ r_1^\varepsilon &= \frac{1}{4} (-\varepsilon(c+1) + d + e) v + \frac{1}{4} (b + \alpha_4(c+1 - \varepsilon(d+e))) \\ r_0^\varepsilon &= \frac{\alpha_4^2 (1 - c^2 + d^2 + e^2 + 2cde + 4de - 2\varepsilon(d+e)(1+de)) + b^2}{d + e - 8\varepsilon(c+1)} \end{aligned}$$

No que segue, nos referimos como a *condição do sinal de Sturm*, qualquer configuração do sinal para o par de seqüências $((r_2^\varepsilon, r_1^\varepsilon, r_0^\varepsilon), (r_2^{-\varepsilon}, r_1^{-\varepsilon}, r_0^{-\varepsilon}))$.

Pelo Lema 4.11.3, podemos assumir que $|\alpha_4| = 1$. Agora uma trajetória que satisfaça as condições (4.16), liga $\alpha_4 = 1$ com $\alpha_4 = -1$, isto é, $w(\gamma_\varepsilon(2\varepsilon\alpha_4)) = -w(\gamma_\varepsilon(0))$. Podemos então assumir no que segue que $\alpha_4 = 1$. Calculando agora a seqüência de Sturm de r_2^ε nos valores pedidos, temos:

$$\begin{aligned} \text{em } v = 0, \quad &-\frac{1}{4} \varepsilon (b + c - e d) \\ &\frac{1}{4} (b + c + 1 - \varepsilon (d + e)) \\ &\frac{1 + b^2 - c^2 + d^2 + e^2 + 2cde + 4de - 2\varepsilon(d+e)(1+de)}{d + e - 8\varepsilon(c+1)} \\ \text{em } v = 2\varepsilon, \quad &-\frac{1}{4} \varepsilon (-b + c - e d) \\ &\frac{1}{4} (b - c - 1 + \varepsilon (d + e)) \\ &\frac{1 + b^2 - c^2 + d^2 + e^2 + 2cde + 4de - 2\varepsilon(d+e)(1+de)}{d + e - 8\varepsilon(c+1)} \end{aligned}$$

Temos portanto uma seqüência nos parâmetros b, c, d e e . Logo, a mudança do sinal só ira acontecer nas raízes dos seguintes polinômios (caso ε):

$$\begin{aligned} &b + c - e d, \quad -b + c - e d, \quad b + c + 1 - \varepsilon(d + e), \quad b - (c + 1 - \varepsilon(d + e)), \\ &1 + b^2 - c^2 + d^2 + e^2 + 2cde + 4de - 2\varepsilon(d + e)(1 + de), \quad d + e - 8\varepsilon(c + 1) \end{aligned}$$

ou nas raízes dos polinômios (caso $-\varepsilon$):

$$b + c - ed, \quad -b + c - ed, \quad b + c + 1 + \varepsilon(d + e), \quad b - (c + 1 + \varepsilon(d + e)),$$

$$1 + b^2 - c^2 + d^2 + e^2 + 2cde + 4de + 2\varepsilon(d + e)(1 + de), \quad 8\varepsilon(c + 1) + d + e.$$

Para estudarmos as raízes desses polinômios, a maneira mais natural é definir como Q o polinomial formado pelo produto de todos esses fatores e estudar as raízes desse novo polinômio. Note que o caso em que o Teorema de Sturm não se aplica, que é o caso quando 0 e 2ε são raízes de r_2^ε , está considerado nesse produto, assim como o caso $d + e - 8\varepsilon(c + 1) = 0$ também está presente.

Uma última condição que devemos verificar para que tenhamos órbitas periódicas, são as condições (4.15) para ε e $-\varepsilon$. Essas condições, para t tendo o mesmo sinal de ε (respectivamente $-\varepsilon$), são equivalentes à:

$$b + c - ed \geq 0.$$

Para verificar isso, basta calcularmos $\dot{x}_1(\gamma_\varepsilon(t))\big|_{t=0}$ e usar as condições do Lema 4.11.2 com $\alpha_4 = 1$.

Note que esse fator também está presente em Q . No que segue, iremos denotar por $\Theta(Q)$ o complementar do diagrama da decomposição algébrica

$$\Gamma = \{(b, c, d, e) \in \mathbb{R}^4 \mid Q(b, c, d, e) = 0\}.$$

Para cada (b, c) denotamos por $\pi_{b,c} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a seguinte projeção $(b, c, d, e) \mapsto (d, e)$, e denotamos por $\Gamma_{b,c} = \pi_{b,c}(\Gamma)$.

Observação 4.11.1.

1. Note que o diagrama da decomposição algébrica Γ , divide o espaço de parâmetros \mathbb{R}^4 , em componentes conexas pertencentes a $\Theta(Q)$, e em cada componente conexa de $\Theta(Q)$ nada muda com respeito a posição das raízes de $x(\gamma_\varepsilon)$ e $x(\gamma_{-\varepsilon})$.
2. Nas seções seguintes, iremos trabalhar com o seguinte princípio de decisão: se existe um ponto $(b, c, d, e) \in \Theta(Q)$ tal que a trajetória satisfazendo as condições (4.16) corresponde a uma órbita 1-periódica, então para cada (b, c, d, e) que pertence a mesma

componente conexa de $\Theta(Q)$, existe tal órbita 1-periódica, ou seja, as condições (4.16) além de necessárias, passam a serem suficientes para que tenhamos órbitas 1-periódicas. Esse princípio de decisão nos leva a termos um algoritmo diferente do que utilizado em [JT3], esse novo algoritmo será estudado nas seções seguintes.

Lema 4.11.3. *As condições do sinal de Sturm são satisfeitas em $(x, y, z, w, t, b, c, d, e)$ se e somente se, elas são satisfeitas para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, em $(\lambda^4 x, \lambda^3 y, \lambda^2 z, \lambda w, \lambda t, \lambda b, c, d, e)$.*

Alguns métodos podem ser adotados para resolver o problema de encontrar órbitas 1-periódicas, um deles consiste em continuar a Decomposição Cilíndrica Algébrica para $\Theta(Q)$. Contudo, existe um inconveniente em se adotar tal método para o nosso caso, esse inconveniente se diz respeito ao número de parâmetros de nosso sistema. Existem quatro parâmetros envolvidos, e isso torna o processo da Decomposição Cilíndrica Algébrica complicado, devido a geometria das curvas envolvidas (veja [JKM]).

A estratégia que vamos adotar é usar o caso reversível como base e deduzir, a partir disso, resultados gerais. Para isso, vamos fazer uso da seguinte proposição, demonstrada em [JT3] e obtido a partir do modelo reversível.

Proposição 4.11.1. *Seja $Z_{a,b,c,d,e} \in \Omega_p$ tal que $a = -1$, $e = d = 0$ e $p_0 \in H_0$ com $p_0 = (0, \alpha_2, \alpha_3, 1)$. Suponha que $c > 1$ e $|b| < \sqrt{c^2 - 1}$. Então existe uma única órbita 1-periódica γ passando por p_0 que é regular, de período 4, se e somente se $\alpha_2 = -\frac{1}{3} - \frac{b}{4}$ e $\alpha_3 = 0$.*

Vamos denotar por

$$\Sigma_R = \{(b, c, d, e) \in \mathbb{R}^4 \mid c > 1, |b| < \sqrt{c^2 - 1}, d = 0, e = 0\}.$$

Lema 4.11.4. *Seja $(b, c, d, e) \in \Sigma_R$, então $Q(b, c, d, e) \neq 0$.*

Demonstração. De fato, se $(b, c, d, e) \in \Sigma_R$, então

$$Q(b, c, d, e) = Q(b, c, 0, 0) = (-64(b+c)(-b+c)(b+c+1)(b-c-1)(1+b^2-c^2)(c+1))^2.$$

Portanto, $Q(b, c, 0, 0) = 0$ se e somente se $b = -c$, ou $b = c$, ou $b = -c + 1$, ou $b = c + 1$, ou $b^2 - c^2 = 1$. Agora como $(b, c, d, e) \in \Sigma_R$, temos $c > 1$ e $|b| < \sqrt{c^2 - 1}$. Logo, se $b = -c$ ou $b = c$, temos

$$|b| = |c| \Rightarrow |c| < \sqrt{c^2 - 1} \Rightarrow c^2 < c^2 - 1$$

que é um absurdo, ou seja, $(-b + c)(b + c) \neq 0$. Agora se $b = c + 1$ ou $b = -c - 1$, temos

$$|b| = |c + 1| \Rightarrow |c + 1| < \sqrt{c^2 - 1} \Rightarrow (c + 1)^2 < c^2 - 1$$

que é também um absurdo pois $c > 1$, logo, $(b + c + 1)(b - c - 1) \neq 0$. Por fim, a condição $b^2 - c^2 = 1$ também não é possível.

Portanto, concluímos que se $(b, c, d, e) \in \Sigma_R$, então $Q(b, c, d, e) \neq 0$, conforme queríamos provar. ■

Corolário 4.11.1. *O conjunto Σ_R está contido em uma única componente conexa de $\Theta(Q)$.*

Demonstração. De fato, primeiramente vamos mostrar que Σ_R está contido em alguma componente conexa de $\Theta(Q)$ e depois concluir que tal componente é única. Note que um ponto p está em alguma componente conexa de $\Theta(Q)$ se $Q(p) \neq 0$. Portanto pelo Lema 4.11.4, temos que $Q|_{\Sigma_R} \neq 0$, ou seja, existe uma componente conexa de $\Theta(Q)$ contendo Σ_R .

Agora essa componente é única, pois se existisse mais de uma componente contendo Σ_R , como Σ_R é conexo, então obrigatoriamente Σ_R interceptaria a fronteira dessas componentes. Contudo, a fronteira dessas componentes é formada pelos pontos que anulam o polinômio Q . Portanto teríamos pontos em Σ_R anulando Q , mas isso contradiz o Lema 4.11.4. Logo tal componente é única, conforma queríamos mostrar. ■

No que segue, denotaremos por $\Theta_0(Q)$ a componente conexa de $\Theta(Q)$ que contém Σ_R . Usando o princípio de decisão descrito na Observação 4.11.1, temos.

Corolário 4.11.2. *Seja $Z_{a,b,c,d,e} \in \Omega_p$ tal que $a = -1$, e $p_0 \in H_0$ com $p_0 = (0, \alpha_2, \alpha_3, 1)$. Desde que $(b, c, d, e) \in \Theta_0(Q)$, existe uma única órbita 1-periódica γ passando por p_0 que é regular, de período 4, se e somente se $\alpha_2 = -\frac{1}{3} - \frac{b}{4}$, $\alpha_3 = -\frac{d}{2}$.*

Demonstração. Desde que $(b, c, d, e) \in \Theta_0(Q)$, a condição do sinal de Sturm não altera nesse ponto. Portanto, usando o Lema 4.11.2, concluímos o corolário. ■

Observe que essa órbita encontra H_0 em dois pontos: p_0 e $(0, -\alpha_2, \alpha_3, -1)$.

Nosso objetivo agora é descrever um subdomínio de Θ_0 onde podemos nos certificar de que as órbitas 1-periódicas estão presentes.

4.11.1 Cálculo de Sub-Domínios Explícitos de $\Theta_0(Q)$

Note que devido a complexidade do polinômio Q , não é possível dar uma parametrização simples de $\Theta_0(Q)$. Por exemplo, a intersecção do bordo de $\Theta_0(Q)$ com o plano $\{b = 0, c = c_0 > 1\}$ é a união de várias linhas e hipérboles (veja Figura 4.7), além disso, quando $b = 0$, aparecem componentes conexas que são curvas algébricas de grau 3.

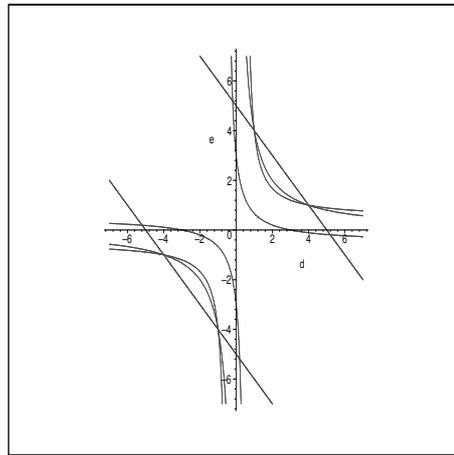


Figura 4.7: A região plana $\Gamma_{0,4}$ próximo da origem.

Nossa estratégia aqui é dar a expressão mais simples onde podemos assegurar que órbitas periódicas aparecem. Vamos fazer isso em dois casos; o primeiro consideramos o caso $b = 0$, onde apresentamos a fórmula explícita desse domínio (isso é suficiente para provar o Teorema 4.10.1); então generalizamos para o caso $b \neq 0$. A seguir, vamos enunciar e demonstrar alguns lemas técnicos que usamos para obter os sub-domínios de $\Gamma(Q)$ onde as órbitas 1-periódicas ocorrem.

Para simplificar a expressão de Q , vamos denotar por

$$D^+(b, c, d, e) = 1 + b^2 - c^2 + d^2 + e^2 + 2cde + 4ed - 2(d + e)(1 + ed)$$

$$D^-(b, c, d, e) = 1 + b^2 - c^2 + d^2 + e^2 + 2cde + 4ed + 2(d + e)(1 + ed)$$

Então,

$$\begin{aligned} Q(b, c, d, e) = & (d + e - 8c - 8)(-b + c - ed)(d + e + 8c + 8) \\ & D^+(b, c, d, e)(b + c - ed)(b - c - 1 - d - e)D^-(b, c, d, e) \\ & (b - c - 1 + d + e)(b + c + 1 - d - e)(b + c + 1 + d + e). \end{aligned}$$

Observe que para $-d, -e$ temos $D^+(b, c, d, e) = D^-(b, c, -d, -e)$, e para $b = 0$ temos a seguinte fatoração:

$$\begin{aligned} D^+(0, c, d, e) &= (1 - c - d - e + 2ed)(1 + c - d - e) = \rho^+(c, d, e) \\ D^-(0, c, d, e) &= (1 - c + d + e + 2ed)(1 + c + d + e) = \rho^-(c, d, e) \end{aligned}$$

Vamos agora estudar alguns conceitos semi-algébricos e estimar as raízes de alguns polinômios.

Lema 4.11.5. *Para cada $c > 1$, a distância da origem à curva plana $\Gamma_{o,c}$ é dada por $\delta(c) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2c-1}-1)}{2}$.*

Demonstração. Vamos considerar $b = 0$. O polinômio Q , livre das raízes duplas, é dado por:

$$\begin{aligned} \bar{Q}(c, d, e) = & D^+(0, c, d, e)D^-(0, c, d, e)(c - ed)(d + e - 8(c + 1))(d + e + 8(c + 1)) \\ & (d + e + c + 1)(d + e - c - 1). \end{aligned}$$

Note que os planos $d + e + 8(c + 1)$, $d + e - 8(c + 1)$, $d + e + c + 1$ e $d + e - c - 1$ são todos paralelos e os dois últimos estão mais próximos da origem do que os planos $d + e \pm 8(c + 1)$. Como estamos interessados na menor distância, é conveniente desconsiderarmos os polinômios $d + e \pm 8(c + 1)$ dos cálculos. Note ainda que a função $(d, e) \mapsto \bar{Q}(c, d, e)$ é simétrica com respeito a origem, isto é, com respeito a função $(d, e) \mapsto (-d, -e)$, pois

$$\begin{aligned} \bar{Q}(c, -d, -e) &= D^+(0, c, -d, -e)D^-(0, c, -d, -e)(c - ed)(-d - e - 8(c + 1))(-d - e + \\ & + 8(c + 1))(-d - e + c + 1)(-d - e - c - 1) = D^-(0, c, d, e)D^+(0, c, d, e) \\ & (c - ed)(d + e + 8(c + 1))(d + e - 8(c + 1))(d + e - c - 1)(d + e + c + 1) \\ & = \bar{Q}(c, d, e). \end{aligned}$$

Para um c dado, definimos por $\delta(c)$ a distância da origem $(d, e) = (0, 0)$ à curva plana $\Gamma_{0,c}$ (veja Figura 4.7 e note que as retas $d + e \pm 8(c + 1)$ não aparecem porque elas estão a uma distância “grande” da origem). Desde que $\Gamma_{0,c}$ é a união de retas e hipérboles, primeiro temos que calcular a distância de cada uma de suas componentes conexas. Vamos assumir que $c > 1$ e devido a simetria que descrevemos acima, essa distância corresponde a pontos sobre a reta $d = e$. Podemos nos restringir a pontos do primeiro quadrante ($d > 0$ e $e > 0$).

Vamos calcular a intersecção da bissetriz $B = \{d = e, e \geq 0\}$ com a curva $\Gamma_{0,c}$.

B intercepta as curvas:

1. $\{(d, e) \in \mathbb{R}^2 \mid c - ed = 0\}$ no ponto $P_1 = (\sqrt{c}, \sqrt{c})$, e a distância da origem a essa curva é $\delta_1(c) = \sqrt{2c}$;
2. $H_{0,c}^+ = \{(d, e) \in \mathbb{R}^2 \mid D^+(0, c, d, e) = 0\}$ em três pontos, P_2, P_3 e P_4 . Para encontrarmos esses pontos, devemos resolver a equação $D^+(0, c, e, e) = 0$, ou seja,

$$1 - c^2 + 2ce^2 + 6e^2 - 4e - 4e^3 = 0 \Rightarrow (c + 1 - 2e)(-c + 2e^2 + 1 - 2e) = 0$$

isso nos dá as seguintes soluções $e_1 = \frac{c+1}{2}$, $e_2 = \frac{1 + \sqrt{2c-1}}{2}$ e $e_3 = \frac{1 - \sqrt{2c-1}}{2}$.

Logo $P_2 = \left(\frac{c+1}{2}, \frac{c+1}{2}\right)$, $P_3 = \left(\frac{1 + \sqrt{2c-1}}{2}, \frac{1 + \sqrt{2c-1}}{2}\right)$ e $P_4 = \left(\frac{1 - \sqrt{2c-1}}{2}, \frac{1 - \sqrt{2c-1}}{2}\right)$. Note que o ponto P_4 está no terceiro quadrante, os pontos P_2 e P_3 estão no primeiro quadrante e na fatoração de $D^+(0, c, e, e)$, P_3 pertence a um braço da hipérbole gerado pelo polinômio de grau 2, enquanto que o ponto P_2 pertence a reta gerada pelo polinômio de grau 1. Agora $\frac{1 + \sqrt{2c-1}}{2} < \frac{c+1}{2}$ e, portanto, a distância da origem à curva $H_{0,c}^+$ é $\delta_2(c) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2c-1} + 1)}{2}$;

3. $H_{0,c}^- = \{(d, e) \in \mathbb{R}^2 \mid D^-(0, c, d, e) = 0\}$ em três pontos, P_5, P_6 e P_7 . De modo análogo, resolvendo a equação $D^-(0, c, e, e) = 0$, obtemos os pontos $P_5 = \left(-\frac{c+1}{2}, -\frac{c+1}{2}\right)$, $P_6 = \left(\frac{-1 + \sqrt{2c-1}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{2c-1}}{2}\right)$ e $P_7 = \left(\frac{-1 - \sqrt{2c-1}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{2c-1}}{2}\right)$. Note que os pontos P_5 e P_7 estão no terceiro quadrante e no braço da hipérbole mais próxima da origem, portanto, a distância de $H_{0,c}^-$ à origem é $\delta_3(c) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2c-1} - 1)}{2}$;

4. $\{(d, e) \in \mathbb{R}^2 \mid d + e - c - 1\}$ no ponto $P_8 = \left(\frac{c+1}{2}, \frac{c+1}{2}\right)$, correspondendo a distância

$$\delta_4(c) = \frac{\sqrt{2}}{2}(c+1).$$

Por fim, desde que $c > 1$, a distância da origem à $\Gamma_{0,c}$ é $\delta(c) = \min\{\delta_1(c), \delta_2(c), \delta_3(c), \delta_4(c)\} = \delta_3(c) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2c-1}-1)}{2}$. ■

Em mãos do Lema 4.11.5, podemos demonstrar o Lema 4.10.1.

Prova do Lema 4.10.1

Demonstração. Antes de iniciarmos os cálculos, observemos que se uma função for contínua, então o sinal dessa função em um conjunto conexo, contido no domínio, cuja fronteira são as raízes, não se altera, ou seja, a mudança no sinal dessa função, se ocorrer, se dá na passagem pelas raízes.

Note que $\rho^+(c, d, e)$ e $\rho^-(c, d, e)$ são polinomiais, logo, funções contínuas.

Pelo Lema 4.11.5, vimos que a distância da curva $\Gamma_{0,c}$ à origem é $\delta_3(c) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2c-1}-1)}{2}$, e os pontos sobre $\Gamma_{0,c}$ pelo qual temos essa distância estão nos ramos das hipérbolas $1-c+e+e+d+2ed$ (no primeiro quadrante e corresponde ao ponto $p = \left(\frac{\sqrt{2c-1}-1}{2}, \frac{\sqrt{2c-1}-1}{2}\right)$) e $1-c-e-d+2de$ (no terceiro quadrante e corresponde ao ponto $p = \left(\frac{1-\sqrt{2c-1}}{2}, \frac{1-\sqrt{2c-1}}{2}\right)$). As retas tangentes a essas hipérbolas nos pontos p e q possuem equações respectivamente iguais a $d+e = \sqrt{2c-1}-1$ e $d+e = 1-\sqrt{2c-1}$.

Portanto, a faixa no espaço (d, e) , limitado por essas duas retas tangentes é descrita por $|d+e| < \sqrt{2c-1}-1$, que é exatamente uma das hipóteses do lema. Note que essa faixa está inteiramente contida em uma das componentes conexas de $\Gamma_{0,c}$, logo o sinal de ρ^+ e ρ^- nessa faixa não se altera e é igual ao sinal no ponto $(c, 0, 0)$. Agora $\rho^+(c, 0, 0) = \rho^-(c, 0, 0) = 1-c^2$, mas $c > 1$ por hipótese, logo $1-c^2 < 0$, ou seja, concluimos que os números $\rho^+(c, d, e)$ e $\rho^-(c, d, e)$ são estritamente negativos.

Vamos mostrar agora que o número $c+1-|d+e|$ é positivo. De fato, como $|d+e| < \sqrt{2c-1}-1$, temos $c+1-|d+e| > c+1-\sqrt{2c-1}+1 = c+2-\sqrt{2c-1} > 0$, conforme queríamos mostrar. ■

Lema 4.11.6. *Para todo $(d, e) \in \mathbb{R}^2$, $|\rho^-(c, d, e)| \leq (c - ed)^2$ e $|\rho^+(c, d, e)| \leq (c - ed)^2$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.11.5, mostramos que $\rho^-(c, d, e)$ e $\rho^+(c, d, e)$ são estritamente negativos, então $|\rho^-(c, d, e)| = -\rho^-(c, d, e)$ e $|\rho^+(c, d, e)| = -\rho^+(c, d, e)$. Vamos mostrar então que $-\rho^-(c, d, e) - (c - ed)^2 \leq 0$ e $-\rho^+(c, d, e) - (c - ed)^2 \leq 0$. De fato,

$$\begin{aligned} -\rho^-(c, d, e) - (c - ed)^2 &= -1 + c^2 - d^2 - e^2 - 2cde - 4ed - 2(d + e)(1 + ed) - (c^2 - 2cde + e^2d^2) = \\ &= -(1 + d^2 + e^2 + 4ed + 2d + ed^2 + 2e + 2e^2d + e^2d^2). \end{aligned}$$

Fatorando essa última expressão, temos

$$-\rho^-(c, d, e) - (c - ed)^2 = -(d + 1)^2(e + 1)^2 \leq 0.$$

De modo análogo, temos

$$-\rho^+(c, d, e) - (c - ed)^2 = -(d - 1)^2(e - 1)^2 \leq 0.$$

■

Estamos interessados em estudar agora como se comportam as raízes de $D^-(b, c, d, e)$ para $b \neq 0$. Estamos, em particular, interessados no polinômio D^- , pois é o termo que nos dá a menor distância de $\Gamma_{b,c}$ à origem. Vale ressaltar que estamos trabalhando com expressões polinomiais, logo quando olhamos para $\Gamma_{b,c}$ com $b \neq 0$, estamos olhando para perturbações contínuas de $\Gamma_{0,c}$ e então o termo que nos dá a menor distância de $\Gamma_{b,c}$ para a origem, vai continuar sendo o mesmo termo quando $b = 0$. Vimos também que mesmo para $b \neq 0$, temos a simetria de $D^-(b, c, d, e)$ com a origem, logo essa menor distância vai ocorrer também na diagonal $d = e$. Portanto, reduzimos o estudo ao polinômio $D^-(b, c, e, e)$. O lema a seguir nos dá uma informação sobre as raízes desse polinômio.

Lema 4.11.7. *Suponhamos que $c > 1$ e $|b| < \sqrt{c^2 - 1}$. Então o polinômio*

$$P_{b,c}(e) = D^-(b, c, e, e) = 4e^3 + (6 + 2c)e^2 + 4e - c^2 + b^2 + 1$$

tem três raízes reais, uma delas estritamente positiva e as outras duas estritamente negativas.

A menor delas em valor absoluto é a raiz positiva e será denotada por $\theta(b, c)$. Mais ainda

$$\theta(0, c) = \frac{\sqrt{2c - 1} - 1}{2}.$$

Demonstração. O polinômio $P_{b,c}(e)$ tem grau 3, então as possibilidades para as raízes são:

1. três raízes reais distintas;
2. três raízes reais, duas distintas, sendo duas delas com multiplicidade 2;
3. uma raiz real e duas complexas.

Primeiramente, vamos mostrar que os casos 2. e 3. não ocorrem. Para isso, devemos mostrar que o discriminante de $P_{b,c}$ é estritamente positivo. Calculemos o discriminante $\Delta_e = \Delta(P_{b,c}, e)$ de $P_{b,c}$ com respeito a e . Temos:

$$\Delta_e = 32c^5 - 144c^4 + (256 - 32b^2)c^3 + (576b^2 - 224)c^2 + (96 - 288b^2)c - 16 - 432b^4.$$

Denotemos por R a região obtida pelas hipóteses do enunciado do lema, $R = \{(b, c) \in \mathbb{R}^2 \mid c > 1 \text{ e } |b| < \sqrt{c^2 - 1}\}$. Reescrevendo o discriminante, temos

$$\Delta_e = 32c^5 - 144c^4 + 256c^3 + 96c - 16 + (32c^3 - 576c^2 + 288c)(-b^2) - 432(-b^2)(-b^2). \quad (4.19)$$

Se $(b, c) \in R$, então equivalentemente temos, $-b^2 > 1 - c^2$. Substituindo essa relação em (4.19), temos:

$$\begin{aligned} \Delta_e &> 32c^5 - 144c^4 + 256c^3 + 96c - 16 + (32c^3 - 576c^2 + 288c)(1 - c^2) - 432(1 - c^2)^2 = \\ &= 64c^2 + 384c - 448 > 0 \end{aligned}$$

para $c > 1$.

Portanto, para pontos em R , $\Delta_e > 0$ e então $P_{b,c}$ possui três raízes reais distintas, conforme queríamos.

Observe agora que $P_{b,c}(0) = 1 - c^2 + b^2 < 0$, para todo $(b, c) \in R$ e $\lim_{e \rightarrow +\infty} P_{b,c}(e) = +\infty$. Logo, existe uma raiz real estritamente positiva. Agora como $\Delta_e > 0$ e $\lim_{e \rightarrow -\infty} P_{b,c}(e) = -\infty$, temos que as outras duas raízes reais são ou ambas estritamente negativas, ou ambas estritamente positivas. Contudo, se ambas fossem positivas, os pontos críticos de $P_{b,c}$ seriam também positivos, mas isso não é verdade, pois os pontos críticos de $P_{b,c}$ são

$$e_1 = \frac{-(c+3) + \sqrt{c^2 + 6c - 3}}{6} \quad \text{e} \quad e_2 = \frac{-(c+3) - \sqrt{c^2 + 6c - 3}}{6}$$

e para ambos, temos $e_1 < 0$ e $e_2 < 0$ se $c > 1$. Portanto, as outras duas raízes de $P_{b,c}$ são estritamente negativas. Nos resta mostrar que a menor raíz, em valor absoluto, é a raíz positiva.

Denotemos por e_0 a raíz positiva, temos

$$\begin{aligned} P_{b,c}(-e_0) &= -4e_0^3 + (6 + 2c)e_0^2 - 4e_0 - c^2 + b^2 + 1 + 4e_0^3 - 4e_0^3 + 4e_0 - 4e_0 = \\ &= -8e_0^3 - 8e_0 + P_{b,c}(e_0) = -8e_0(e_0^2 + 1) < 0. \end{aligned}$$

Logo $-e_0$ nunca é raíz de $P_{b,c}$ se $(b, c) \in R$.

Agora as duas raízes negativas são sempre menores que $-e_0$, pois para todo $(b, c) \in R$, mostramos que o discriminante nunca se anula, as duas raízes reais sempre existem e $-e_0$ nunca é raíz de $P_{b,c}$. Portanto, a dinâmica é a mesma para um ponto (b, c) arbitrário de R , em particular, para $b = 0$ e $c = 2$, as raízes de $P_{b,c}$ são $e_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $-\frac{3}{2}$ e $-\frac{-\sqrt{3}-1}{2}$. ■

Lema 4.11.8. *Existe um domínio cônico aberto não vazio*

$$\Sigma_0 = \{(b, c, d, e) \mid b = 0, c > 1, |d + e| < \sqrt{2c - 1} - 1\}$$

tal que $\Sigma_0 \subset \Theta_0(Q)$.

Demonstração. Como pode ser conferido, a construção desse domínio iniciou-se no Lema 4.11.5 e vimos na demonstração do Lema 4.10.1 que esse domínio está inteiramente contido em uma das componentes conexas de $\Gamma_{0,c}$ (ver Figura 4.8), ou seja, qualquer ponto $(0, c, d, e) \in \Sigma_0$ implica que $Q(0, c, d, e) \neq 0$, portanto $(0, c, d, e) \in \Theta_0(Q)$. ■

Quando b varia de 0 a $\pm\sqrt{c^2 - 1}$, a projeção $\pi_{b,c}(\Theta_0(Q))$ diminui (veja Figura 4.9). O lema seguinte corresponde ao cálculo exato da maior faixa em (d, e) , contendo a origem $(0, 0)$ e incluído na projeção de $\pi_{b,c}(\Theta_0(Q))$.

Lema 4.11.9. *Desde que $c > 1$ e $|b| < \sqrt{c^2 - 1}$, temos:*

1. o polinômio $4e^3 + (6 + 2c)e^2 + 4e - c^2 + b^2 + 1$ tem uma raíz estritamente positiva, denotada por $\theta(b, c)$;

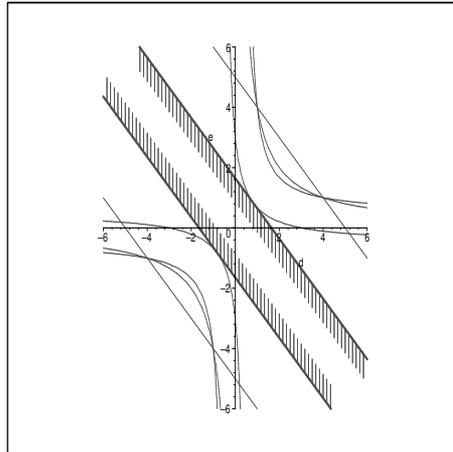


Figura 4.8: Domínio aberto $\pi_{0,4}(\Sigma_0)$, onde um campo de vetores $Z_{-1,0,4,d,e}$ tem órbitas 1-periódicas.

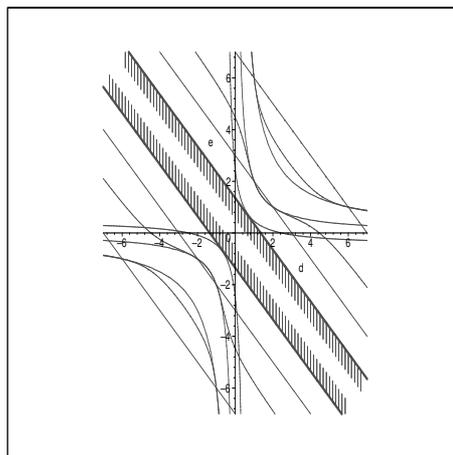


Figura 4.9: Faixa aberta maximal onde $Z_{-1,2,4,d,e}$ admite órbitas 1-periódicas.

2. o número $\eta(b, c) = \min \left\{ c + 1 - |b|, 2\sqrt{c - |b|}, 2\theta(b, c) \right\}$ é estritamente positivo;
3. o domínio cônico aberto

$$\Sigma_b = \left\{ (b, c, d, e) \mid c > 1, |b| < \sqrt{c^2 - 1}, |d + e| < \eta(b, c) \right\}$$

é não vazio e $\Sigma_b \subset \Theta_0(Q)$.

Demonstração.

1. Conseqüência imediata do Lema 4.11.7.

2. Esse item é consequência do fato de $c > 1$ e $|b| < \sqrt{c^2 - 1}$, pois disso concluímos que $c + 1 - |b| > c + 1 - \sqrt{c^2 - 1} > 0$ e $c - |b| > c - \sqrt{c^2 - 1} > 0$, logo $2\sqrt{c - |b|} > 0$.
3. Note primeiramente que como $\Sigma_b \supset \Sigma_0$, temos que $\Sigma_b \neq \emptyset$. Agora para mostrarmos que $\Sigma_b \subset \Theta_0(Q)$, devemos mostrar que qualquer ponto $(b, c, d, e) \in \Sigma_b$, temos $Q(b, c, d, e) \neq 0$, ou seja, nenhuma raiz de Q está em Σ_b . Vamos proceder da mesma forma que procedemos na demonstração do Lema 4.11.5.

Para (b, c) fixado, vamos calcular a distância da origem à curva $Q(b, c, d, e) = 0$. Devido a simetria do polinômio Q , conforme já discutimos, esta distância está sobre a diagonal $B = \{(d, e) \in \mathbb{R}^2 \mid d = e\}$. Vamos considerar somente pontos no primeiro quadrante $d > 0, e > 0$. A intersecção da diagonal B com o polinômio Q , nos dá o seguinte polinômio

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(b, c, e, e) = & D^+(b, c, e, e)D^-(b, c, e, e)(2e+8(c+1))(2e-8(c+1))(-b+c-e^2)(b+c-e^2) \\ & (b-c-1-2e)(b-c-1+2e)(b+c+1-2e)(b+c+1+2e). \end{aligned}$$

Ao resolvermos $\tilde{Q}(b, c, e, e) = 0$, podemos desconsiderar da solução os termos $D^+(b, c, e, e)$ (devido a simetria com $D^-(b, c, e, e)$), $2e \pm 8(c+1)$ (pois estes estão suficientemente longe da origem) e os termos $b - c - 1 - 2e$ e $b + c + 1 + 2e$, pois os valores do parâmetro e obtido são negativos. Resolvendo então os termos restantes e lembrando que $e > 0$, temos os seguintes pontos, $P_1 = (\theta(b, c), \theta(b, c))$, $P_2 = (\sqrt{c-b}, \sqrt{c-b})$, $P_3 = (\sqrt{c+b}, \sqrt{c+b})$, $P_4 = \left(\frac{c+1-b}{2}, \frac{c+1-b}{2}\right)$ e $P_5 = \left(\frac{c+1+b}{2}, \frac{c+1+b}{2}\right)$. Temos, portanto, as seguintes distâncias

$$\begin{cases} \delta_1(b, c) = \sqrt{2}\theta(b, c) \\ \delta_2(b, c) = \sqrt{2}\sqrt{c - |b|} \\ \delta_3(b, c) = \frac{\sqrt{2}}{2}(c + 1 - |b|) \end{cases}$$

Consideramos $\bar{\delta}(b, c) = \min\{\delta_i(b, c), i = 1, 2, 3\}$. Para cada $(b, c) \in \mathbb{R}^2$, $\bar{\delta}(b, c)$ é a distância mínima entre $\Gamma_{b,c}$ e a origem. Agora basta considerarmos a reta tangente à $\Gamma_{b,c}$ em seu ponto mais próximo da origem, essa reta tem equação $d + e = \eta(b, c)$.

Por fim, considerando a simetria do sistema, temos uma outra reta (quando $d < 0$ e $e < 0$) de equação $d + e = -\eta(b, c)$, no qual a região limitada por essas retas está contido em $\Theta_0(Q)$. Fazendo (b, c) variar em \mathbb{R}^2 , concluímos que o domínio cônico aberto $\Sigma_b \subset \Theta_0(Q)$, conforme queríamos demonstrar. ■

Conforme b se aproxima de $\pm\sqrt{c^2 - 1}$ o domínio Σ_b muda rapidamente de forma, vamos definir um subdomínio não vazio, $\Sigma_e \subset \Sigma_b$ (ver Figura 4.10) e darmos uma nova versão do Lema 4.11.9 para esse novo subdomínio.

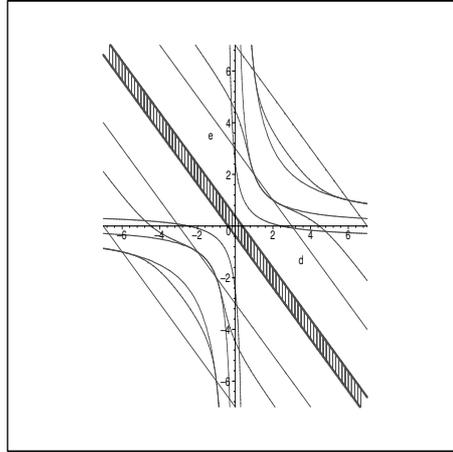


Figura 4.10: Projeção $\pi_{b,c}(\Sigma_e)$ (dados por bordos explícitos), onde $Z_{-1,b,c,d,e}$ admite órbitas um periódicas passando por $\{\alpha_4 = 1\}$.

Lema 4.11.10. *O domínio cônico aberto semi-algébrico dado por*

$$\Sigma_e = \left\{ (b, c, d, e) \mid c > 1, |b| < \sqrt{c^2 - 1}, |d + e| < \tilde{\eta}(b, c) \right\}$$

com

$$\tilde{\eta}(b, c) = \min \left\{ \frac{c^2 - b^2 - 1}{5 + 3c}, 2, c + 1 - |b|, 2\sqrt{c - |b|} \right\}$$

é não vazio e $\Sigma_e \subset \Theta_0(Q)$.

Demonstração. Primeiramente, é claro que Σ_e é não vazio, pois pontos da forma $(0, c, 0, 0) \in \Sigma_e$ para $c > 1$. Fixemos b, c com $c > 1$ e $|b| < \sqrt{c^2 - 1}$, e denotemos por $e = \theta(b, c)$ a raíz

SEÇÃO 4.12 • EXISTÊNCIA DE ÓRBITAS PERIÓDICAS PARA $Z_{A,B,C,D,E} \in \Omega_{118}$

positiva de $P_{b,c}(e) = D^-(b, c, e, e)$. Logo $P_{b,c}(\theta(b, c)) = 0$, ou seja:

$$\theta(b, c) (4 + (6c + 2)\theta(b, c) + 4\theta(b, c)^2) = c^2 - b^2 - 1.$$

Caso $\theta(b, c) > 1$, considere $\bar{\theta}(b, c) = 1$. Por outro lado, se $\theta(b, c) \leq 1$, temos:

$$\theta(b, c) (4 + (6c + 2)\theta(b, c) + 4\theta(b, c)^2) \leq \theta(b, c) (10 + 6c)$$

ou seja,

$$\theta(b, c) \geq \frac{c^2 - b^2 - 1}{10 + 6c}.$$

Considere então

$$\tilde{\eta}(b, c) = \min \left\{ c + 1 - |b|, 2\sqrt{c - |b|}, 2\theta(b, c) \right\} = \min \left\{ c + 1 - |b|, 2\sqrt{c - |b|}, 2, \frac{c^2 - b^2 - 1}{5 + 3c} \right\}.$$

Para tal $\tilde{\eta}(b, c)$, aplicando o Lema 4.11.9, concluímos que $\Sigma_e \subset \Theta_0(Q)$, conforme queríamos provar. ■

4.12 Existência de Órbitas Periódicas para $Z_{a,b,c,d,e} \in \Omega_p$

Em mãos dos lemas feitos na seção anterior, estamos aptos a mostrarmos a existência de órbitas 1-periódicas para campos de vetores $Z_{a,b,c,d,e} \in \Omega_p$. Para garantirmos a existência de tais órbitas, é necessário termos as equações (4.16) satisfeitas e que a condição do sinal de Sturm não se altere. Temos as seguintes proposições.

Proposição 4.12.1. *Seja $Z_{a,b,c,d,e} \in \Omega_p$ e $p_0 \in H_0$ com $p_0 = (0, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. Existe uma única órbita γ passando por p_0 que é regular, 1-periódica de período $4|\alpha_4|$ desde que $\alpha_2 = -\frac{1}{3}\alpha_4^3 - \frac{b}{4}\alpha_4^2$, $\alpha_3 = -\frac{d}{2}\alpha_4^2$, $a = -1$, $c > 1$, $|d + e| < \sqrt{2c - 1} - 1$, $|b| < \omega(c, d, e)^{-1}|\alpha_4|$.*

Demonstração. Pelo Corolário 4.11.2 e Lema 4.11.8, existe uma órbita periódica de $Z_{a,0,c,d,e}$ passando por $(0, \alpha_2, \alpha_3, 1)$. Pelo Lema 4.11.3, podemos estender a existência de tal órbita 1-periódica desde que as condições do sinal de Sturm não modifica. Observe que sob as hipóteses da proposição, $\sqrt{2c - 1} - 1 < 8(c + 1)$. Aplicando o Lema 4.11.6, temos que se $|b| = \omega(c, d, e)^{-1}|\alpha_4|$, então $|b| < |c - ed|$ e $|b| < c + 1 - |e + d|$, ou seja, as condições do sinal de Sturm não se altera. ■

Para $\alpha_4 = 1$ temos a seguinte proposição:

Proposição 4.12.2. *Seja $Z_{a,b,c,d,e} \in \Omega_p$, com $a = -1$. Considere as notações do Lema 4.11.10 e assumamos que $(b, c, d, e) \in \Sigma_e$. Então $Z_{a,b,c,d,e}$ tem uma órbita 1-periódica passando pelo ponto $(0, \alpha_2, \alpha_3, 1)$ se e somente se $\alpha_2 = -\frac{1}{3} - \frac{b}{4}$, $\alpha_3 = -\frac{d}{2}$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.11.2, as condições necessárias para que tenhamos uma órbita 1-periódica para $Z_{a,b,c,d,e}$, passando por $(0, \alpha_2, \alpha_3, 1)$ é que $\alpha_2 = -\frac{1}{3} - \frac{b}{4}$ e $\alpha_3 = -\frac{d}{2}$. Agora essa condição é suficiente desde que a condição do sinal de Sturm não se altera, mas isso é verdade pois como estamos tomando os parâmetros em Σ_e , e pelo Lema 4.11.10, $\Sigma_e \subset \Theta_0(Q)$, temos que a condição do sinal de Sturm não se altera. ■

Devemos observar que $\Theta_0(Q)$ não é a componente conexa maximal onde as órbitas 1-periódicas (passando por $\alpha_4 = 1$) existem. Por exemplo, considere $Z_{-1,0,4,6,-1}$. Temos que $Q(0, 4, 6, -1) = 0$, portanto o ponto $(0, 4, 6, -1) \notin \Theta_0(Q)$. Contudo o campo de vetores $Z_{-1,0,4,6,-1}$ tem uma órbita 1-periódica passando pelo ponto $(0, -\frac{1}{3}, -3, 1)$ (ver Figura 4.11). O único modo de construir a componente conexa maximal, onde as órbitas 1-periódicas persistem, é considerar a Decomposição Cilíndrica Algébrica completa.

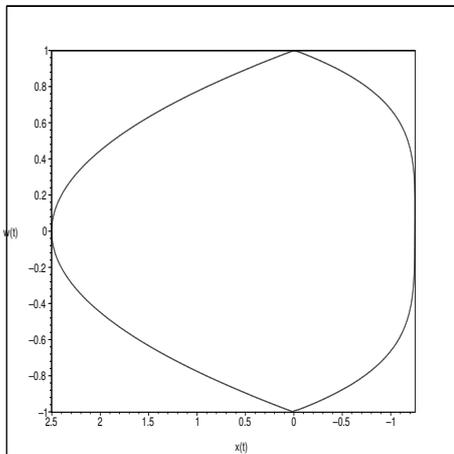


Figura 4.11: Órbita 1-periódica de $Z_{-1,0,4,6,-1}$ passando pelo ponto $(0, -\frac{1}{3}, -3, 1)$ e $\{\alpha_4 = 1\}$.

4.13 Laços Singulares Um-Periódico

Vamos, a seguir, apresentar um resultado de órbitas 1-periódicas para laço singular 1-periódico.

Proposição 4.13.1. *Seja $Z \in \Omega_p$, tal que $a = -1$, $c > 1$, $b = 0$. Desde que $\rho^+(c, d, e) \rho^-(c, d, e) = 0$, e $|e + d| < c + 1$, $Z_{-1,0,c,e,d}$ tem uma única trajetória periódica passando por $(0, \alpha_2, \alpha_3, 1)$ com $\alpha_2 = -\frac{1}{3}$, $\alpha_3 = -\frac{d}{2}$, encontrando H_0 em dois pontos regulares distintos p_0 e $p_1 = (0, -\alpha_2, \alpha_3, -1)$, de período 4, e tendo pelo menos uma singularidade de dobra parabólica q em H_0 . A órbita correspondente é um laço singular 1-periódico.*

Demonstração. Suponhamos que $a = -1$ e $\alpha_4 = 1$. Realizando uma decomposição cilíndrica algébrica sobre a curva $\Gamma_{0,c}$ e com a hipótese de que $|e + d| < c + 1$, existe uma única componente conexa contendo (e, e) e uma componente conexa contendo $(-e, -e)$. Considerando o caso $d = e$ (veja figura 4.7) e o Lema 4.11.2, existe uma única órbita periódica passando pelo ponto $p_0 = (0, \alpha_2, \alpha_3, 1)$ com $\alpha_2 = -\frac{1}{3}$ e $\alpha_3 = -\frac{d}{2}$. Essa órbita encontra H_0 em p_0 e $p_1 = (0, -\alpha_2, \alpha_3, -1)$ e tem período 4. Resta mostrar que essa órbita tem pelo menos uma singularidade de dobra do tipo parabólica em $q \in H_0$.

Para que tenhamos uma dobra parabólica para ε (respectivamente para $-\varepsilon$), devemos ter:

1. $r_2^\varepsilon(v) = \frac{x(\gamma_\varepsilon(v))}{v(v - 2\varepsilon)}$ ter uma raiz dupla ξ ;
2. essa raiz ξ é tal que $0 < |\xi| < 2|\varepsilon|$.

Para que r_2^ε tenha uma raiz dupla, seu discriminante tem que ser nulo e já vimos que isso é verdade se, e somente se,

$$1 - c^2 + d^2 + e^2 + 2ed(c + 2) - 2\varepsilon(e^2d + ed^2 + e + d) = 0$$

ou seja, se $\rho^+(c, d, e) = 0$.

De modo análogo, temos que $r_2^{-\varepsilon}$ tenha uma raiz dupla se, e somente se, $\rho^-(c, d, e) = 0$. agora para mostrarmos a segunda condição, recordemos que, sob as hipóteses da proposição,

$$r_2^\varepsilon(v) = \frac{1}{8}(-\varepsilon(c + 1) + d + e)v^2 + \frac{1}{4}(c + 1 - \varepsilon(d + e))v + \frac{1}{4}\varepsilon(c - ed)$$

e então essa raiz ξ é descrita como

$$\xi = \frac{\varepsilon(d + e) - c - 1}{-\varepsilon(c + 1) + d + e} = \varepsilon \frac{d + e - \varepsilon(c + 1)}{d + e - \varepsilon(c + 1)} = \varepsilon.$$

Portanto $0 < |\xi| < 2|\varepsilon|$. ■

Considerando $d = e$, a Figura 4.12 esboça um exemplo de laço singular 1-periódico.

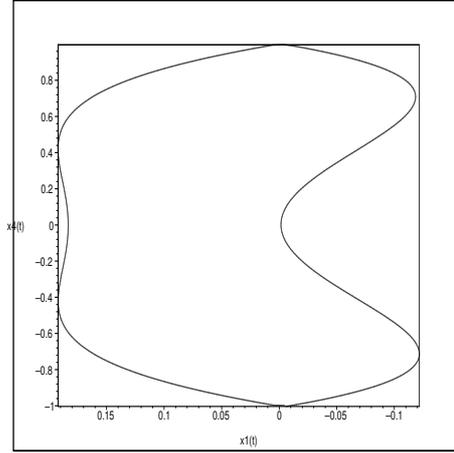


Figura 4.12: Laço singular 1-periódico de $Z_{-1,0,2,e,e}$ com $e = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

4.14 Prova dos Teoremas Principais

Vamos agora demonstrar os principais teoremas enunciados no início da Seção 4.10.

Prova do Teorema 4.10.1

Demonstração. Vamos supor que $a = -1$, $c > 1$, $|b| < \sqrt{c^2 - 1}$, $|d + e| < \sqrt{2c - 1} - 1$ e denotemos por $\alpha_l = b\omega(c, d, e)$ e seja α , tal que $|\alpha| > |\alpha_l| = |b|\omega(c, d, e)$, logo $|b| < \omega(c, d, e)^{-1}|\alpha|$. Então pela Proposição 4.12.1 o campo de vetores $Z_{a,b,c,d,e}$ tem uma família a 1-parâmetro de órbitas regulares 1-periódicas de período $4|\alpha|$ passando pelo ponto $\alpha_2 = -\frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{b}{4}\alpha^2$, $\alpha_3 = -\frac{d}{2}\alpha^2$, $\alpha_4 = \alpha$. Com isso, mostramos os itens (3) e (4). Agora claramente P_1 é uma superfície cônica semi-algébrica e se $b = 0$, então $\alpha_l = 0$ e podemos aproximar de 0 por parâmetros $\alpha \neq 0$, ou seja, faz sentido calcularmos $\lim_{\alpha \rightarrow 0} p_\alpha$. Logo $0 \in \overline{P}_1$ se $b = 0$.

Por fim, o item (5) segue como consequência das Proposições 4.12.1, 4.13.1 e do Lema 4.11.1. ■

Prova do Teorema 4.10.2

Demonstração. Seja $Z_{a,b,c,d,e} \in \Omega_p$ com $a = -1$, $b = 0$, $c > 1$, $|d + e| < c + 1$ e $\rho^+(c, d, e)\rho^-(c, d, e) = 0$. Pela Proposição 4.13.1, existe um laço singular 1-periódico passando pelo ponto $p_0 = (0, \alpha_2, \alpha_3, 1)$, com $\alpha_2 = -\frac{1}{3}$ e $\alpha_4 = -\frac{d}{2}$. Agora, considerando a aplicação ξ_λ definida no Lema 4.11.1. Essa aplicação agindo no laço singular 1-periódico de $Z_{-1,0,c,d,e}$ produz uma família γ_λ a 1-parâmetro de laços singulares 1-periódicos para o campo de vetores $Z_{-1,0,c,d,e}$ de períodos $4|\lambda|$, conforme queríamos. ■

CAPÍTULO 5

Estudos Futuros e Considerações Finais

Vamos apresentar nesse breve capítulo os estudos que podem ser feitos futuramente, seguindo a linha de apresentação deste trabalho e algumas considerações finais sobre a tese.

Recordemos que em \mathbb{R}^4 , trabalhamos com uma classe de campos vetoriais não reversíveis, proveniente de perturbações da forma normal de Anosov. Classificamos as singularidades por meio da equivalência fraca e obtemos condições necessárias e suficientes sobre os parâmetros para que tivéssemos famílias a 1-parâmetro de órbitas 1-periódicas.

5.1 Estudos Futuros

Um trabalho que estamos desenvolvendo para essa classe de campos de vetores, visa obter a forma normal da transformação primeiro retorno associada. Para isso, estamos utilizando o software Maple 9, para desenvolver um algoritmo que nos dê essa forma normal até a ordem 3. Esse trabalho está em vias de conclusão e redação.

Um segundo trabalho já iniciado, é sobre classes de campos de vetores em \mathbb{R}^3 , não provenientes da forma normal de Anosov. Por exemplo, considere

$$Z_\alpha = \begin{cases} \dot{x} = y + \alpha z^2 + \xi_1(x, y, z) \\ \dot{y} = Az + \xi_2(x, y, z) \\ \dot{z} = A + \xi_3(x, y, z) \end{cases}$$

onde $A = \pm \text{sgn}(x)$, $\alpha \in (\mathbb{R}, 0)$ e $\nu_0(\xi_i) \geq 5 - i$, $i = 1, 2, 3$.

Essa família a 1-parâmetro é φ -reversível, com $\varphi(x, y, z) = (-x, y, z)$ e é derivada de perturbações do sistema

$$Z = y \frac{\partial}{\partial x} + Az \frac{\partial}{\partial y} + A \frac{\partial}{\partial z}$$

para o qual verificamos a existência de uma região conexa no plano (y, z) onde, condições iniciais nessa região nos fornecem órbitas periódicas.

Para a família X_α , por meio da decomposição cilíndrica algébrica e, considerando $z = 1$, encontramos também uma região conexa em (α, y) tal que, condições iniciais nessa região nos fornecem também órbitas periódicas.

A idéia de estudos futuros para essa classe de campos de vetores seria obter a classificação genérica dos tipos de singularidades, verificar a existência de determinadas propriedades úteis na compreensão da dinâmica do sistema e estudar perturbações mais gerais dessa família.

Outro projeto seria o de estudar regularizações (ver Definições 5.1.1 e 5.1.2) e bi-regularizações de campos de vetores descontínuos em \mathbb{R}^4 via perturbação singular e cuja variedade de descontinuidade tem codimensão 2. Para uma introdução geral da teoria das perturbações singulares, ver [F1].

De uma forma geral, uma perturbação singular é um campo de vetores a $(k + 1)$ -parâmetros em \mathbb{R}^n da forma

$$X_\varepsilon : \begin{cases} x'_i = \varepsilon f_i(x, \alpha, \varepsilon), & 1 \leq i \leq n - 1 \\ x'_n = f_n(x, \alpha, \varepsilon) \end{cases} \quad (5.1)$$

com $f_i \in C^r$, $i = 1, \dots, n$, $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $\alpha \in (\mathbb{R}^k, 0)$ e $\varepsilon \in (\mathbb{R}^+, 0)$.

Nesse contexto, x' denota a derivada de x com relação a τ . Podemos considerar um rescalonamento do tempo $t = \varepsilon\tau$ e reescrever a equação (5.1), como

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x, \alpha, \varepsilon), & 1 \leq i \leq n - 1 \\ \varepsilon \dot{x}_n = f_n(x, \alpha, \varepsilon) \end{cases} \quad (5.2)$$

A equação (5.1) é chamado de *sistema rápido*, enquanto que (5.2) é o *sistema lento*.

Estudos recentes nessa área (como por exemplo, [BP1], [BST] e [LST]) mostraram, entre outros, que o processo de regularização de campos de vetores descontínuos, produz problemas singulares, no qual a variedade de descontinuidade é a variedade centro. Uma outra

relação entre essas áreas é que trajetórias de campos de vetores deslizantes (ver Capítulo 1), correspondem a soluções do problema de perturbações singulares para $\varepsilon = 0$, isto é,

$$\begin{cases} x'_i = f_i(x, \alpha, 0), & 1 \leq i \leq n-1 \\ f_n(x, \alpha, 0) = 0 \end{cases}$$

O problema principal é detectar conjuntos minimais (órbitas periódicas, órbitas homoclínicas e toros invariantes) para X_ε e $\varepsilon \neq 0$.

Vamos definir a seguir o que é uma regularização de sistemas descontínuos. Ferramenta esta introduzida por Sotomayor-Teixeira em [ST1].

Definição 5.1.1. (*função de transição*)

Uma função de transição é uma função C^∞ , $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\beta(t) = 0$ se $t \leq -1$, $\beta(t) = 1$ se $t \geq 1$ e $\beta'(t) > 0$ se $t \in (-1, 1)$.

A partir dessa função de transição, definimos o que vem a ser uma β_λ -regularização de um campo de vetores $Z \in \Omega$.

Definição 5.1.2. (β_λ -regularização)

Seja $Z = (Z_\varepsilon, Z_{-\varepsilon}) \in \Omega$ e β uma função de transição. A β_λ -regularização de Z é uma família a 1-parâmetro de campos de vetores $Z_\lambda \in \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$Z_\lambda(q) = (1 - \beta_\lambda(h(q)))Z_{-\varepsilon}(q) + \beta_\lambda(h(q))Z_\varepsilon(q)$$

onde $\beta_\lambda(t) = \beta\left(\frac{t}{\lambda}\right)$.

Geometricamente, o que essa técnica faz é considerar uma faixa de largura 2λ sobre H_0 , onde fora dessa faixa, o campo de vetores regularizado Z_λ coincide com o campo Z_ε ou $Z_{-\varepsilon}$, dependendo de onde consideramos o ponto q , e dentro dessa faixa, temos um novo campo C^∞ . Uma das vantagens de se usar essa técnica, é que agora podemos aplicar para esse novo campo de vetores, todas as ferramentas conhecidas de sistemas contínuos.

5.2 Considerações Finais

Ao término desse trabalho, concluímos que dos quatro diferentes tipos topológicos de campos de vetores descontínuos em \mathbb{R}^4 , classificados por Anosov em [A], a existência de órbitas periódicas e sua persistência para determinadas perturbações só ocorre em duas dessas classes.

Para os campos do tipo dobras, verificamos a existência dessas órbitas em três tipos de dobras consideradas, as dobras simplesmente integráveis, dobras do tipo sela e dobras do tipo elíptica.

O outro tipo topológico de campos de vetores descontínuos para o qual foi verificado a existência dessas órbitas periódicas foi para a classe de campos de vetores do tipo rabo de andorinha. Para essa classe de campo, estudamos perturbações não reversíveis e descrevemos regiões conexas no espaço de parâmetros onde garantimos a existência dessas órbitas. Além disso, para essa classe de campos, fizemos a classificação genérica das singularidades que ocorrem.

APÊNDICE A

Bases de Gröbner

A base de Gröbner é uma ferramenta bastante utilizada em diversas áreas da matemática, engenharia e computação e tem-se mostrado muito eficiente na resolução de vários problemas, por exemplo, na teoria dos códigos [FG], no processamento de imagens [LXW] e no tratamento de enzimas [ÇB]. Citaremos a seguir três pontos dentro deste tema que fornecem a este trabalho um auxílio inestimável.

1. Seja $I = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ um ideal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, para \mathbb{K} corpo. Se $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, então queremos verificar se $f \in I$ e, caso afirmativo, encontrar $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $f = \sum_{i=1}^n v_i f_i$.
2. Determinar se dois ideais I e J de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ são iguais.
3. Encontrar uma base do \mathbb{K} -espaço vetorial $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I$.

Em nosso trabalho, a base de Gröbner é aplicada para a obtenção de condições necessárias para encontrarmos órbitas periódicas de nossa família de campos de vetores.

A base de Gröbner foi introduzida em 1965 por Bruno Buchberger [B2], em seu trabalho de tese, em homenagem ao seu orientador de tese Wolfgang Gröbner. Contudo, as idéias fundamentais da caracterização abstrata da base de Gröbner foram antes exploradas por Macaulay [M] no início do século, e por Hironaka [H2] em 1964.

A idéia básica atrás dessa teoria, pode ser descrita como uma generalização da teoria dos polinômios em uma variável. Em um anel de polinômios $\mathbb{K}[x]$, onde \mathbb{K} é um corpo, qualquer

ideal I pode ser gerado por um único elemento, a saber, o máximo divisor comum dos elementos de I . Dado qualquer conjunto de geradores $\{f_1, \dots, f_r\} \subset \mathbb{K}[x]$ para I , podemos calcular (usando o algoritmo de Euclides) um único polinômio $d = m.d.c.(f_1, \dots, f_r)$, tal que $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle = \langle d \rangle$. Então um polinômio $f \in \mathbb{K}[x]$ está no ideal I se, e somente se, o resto da divisão de f por d é zero. As bases de Gröbner são o análogo ao máximo divisor comum no caso de várias variáveis, no seguinte sentido. Uma base de Gröbner para um ideal $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ gera I , e um polinômio $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ está em I , se e somente se, o resto da divisão de f pelos polinômios da base de Gröbner é zero.

A seguir, vamos introduzir as ferramentas necessárias para definirmos as bases de Gröbner. No decorrer do texto, vamos denotar por \mathbb{K} um corpo.

Definição A.0.1. (*Espaço Afim*) *Seja n um inteiro positivo. Definimos o espaço afim n -dimensional sobre \mathbb{K} , como sendo o conjunto $\mathbb{K}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{K}\}$.*

Seja $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, denotamos por $V(f)$ o conjunto das soluções das equações $f = 0$. Mais formalmente.

Definição A.0.2. (*Variedade Afim*) *Sejam $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. O conjunto*

$$V(f_1, \dots, f_s) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n : f_i(a_1, \dots, a_n) = 0, 1 \leq i \leq s\}$$

é chamado variedade afim definida por f_1, \dots, f_s .

Em particular, se as funções f_i da Definição A.0.2 forem lineares, a variedade afim $V(I)$ é dita variedade afim linear. Nesse caso, existe um método bastante útil para encontrarmos a variedade $V(I)$, que é o método da eliminação de Gauss. Quando queremos encontrar a variedade afim $V(I)$, mas os polinômios envolvidos não são lineares, esse problema pode se tornar extremamente complicado. Para isso, a base de Gröbner é um método equivalente ao método da eliminação de Gauss, pois o processo de encontrar uma base de Gröbner para um ideal I , consiste em encontrar um conjunto de geradores I' para I , de tal forma que $V(I') = V(I)$.

Vamos agora, estabelecer uma ordem em $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Para isso, basta estabelecermos uma ordem nos monômios de $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Note que cada monômio de f , pode ser

obtido a partir de uma n -upla $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ ¹, por $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Logo existe uma relação injetora entre os monômios de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ com $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. Portanto, qualquer ordem “ $>$ ” que estabelecemos no espaço $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, nos dá uma ordem sobre de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Vamos definir sobre de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ a ordem lexicográfica, que é a ordem que usamos no trabalho. Contudo, vale lembrar que existem outras ordens sobre de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Definição A.0.3. (*Ordem Lexicográfica*) Sejam $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$. Dizemos que $\alpha > \beta$ se o vetor diferença $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$, isto é, se a primeira entrada não nula a esquerda de $\alpha - \beta$ é positiva. Escrevemos $x^\alpha > x^\beta$ se $\alpha > \beta$.

Definição A.0.4. Seja $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$ um polinômio não nulo em $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e fixemos “ $>$ ” uma ordem (no nosso caso, a ordem lexicográfica) neste conjunto.

1. O multigrado de f é:

$$\text{multideg}(f) = \max\{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \mid a_{\alpha} \neq 0\}.$$

2. O coeficiente principal de f é:

$$LC(f) = a_{\text{multideg}(f)} \in \mathbb{K}.$$

3. O monômio principal de f é:

$$LM(f) = x^{\text{multideg}(f)} \in \mathbb{K}, \text{ com coeficiente } 1.$$

4. O termo principal de f é:

$$LT(f) = LC(f) \cdot LM(f).$$

Definição A.0.5. Seja $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um ideal não nulo.

1. Denotamos por $LT(I)$ o conjunto de todos os termos principais dos elementos de I , ou seja,

$$LT(I) = \{cx^{\alpha} \mid \exists f \in I \text{ com } LT(f) = cx^{\alpha}\}.$$

2. Denotamos por $\langle LT(I) \rangle$ o ideal gerado pelos elementos de $LT(I)$.

¹ $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n : \alpha_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n\}$.

Observação A.0.1. Note que se $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$, então $\langle LT(f_1), \dots, LT(f_s) \rangle \subset \langle LT(I) \rangle$, mas a inclusão contrária nem sempre é verdadeira, como mostra o exemplo:

Se $I = \langle x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x \rangle$ e a ordem considerada é tal que $\alpha \succ \beta$ se $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i > \sum_{i=1}^n \beta_i = |\beta|$, ou se $|\alpha| = |\beta|$ e $\alpha \succ \beta$ na ordem lexicográfica. Então,

$x^2 \in I$ pois $x^2 = x(x^2y - 2y^2 + x) - y(x^3 - 2xy) \Rightarrow LT(x^2) = x^2 \in LT(I) \Rightarrow x^2 \in \langle LT(I) \rangle$.

Contudo, $LT(x^3 - 2xy) = x^3$ e $LT(x^2y - 2x + y) = x^2y$, logo $x^2 \notin \langle x^3, x^2y \rangle$.

Em mãos de todas essas definições, estamos prontos para definir o que é uma base de Gröbner.

Definição A.0.6. (Base de Gröbner) Fixemos uma ordem nos monômios. Um conjunto finito $G = \{g_1, \dots, g_t\} \subset I$ é uma base de Gröbner de I , se e somente se, o termo principal de qualquer elemento de I é divisível por um dos elementos $LT(g_i)$ para algum i .

Observe que a Definição A.0.6 não nos garante que essa base existe. Contudo, essa base realmente existe para todo ideal I não nulo, para se certificar disso, veja [AL] pág. 34.

O algoritmo de construção dessa base, manualmente, não é tão simples, dependendo dos polinômios do ideal I . A seguir, vamos descrever tal algoritmo.

Definição A.0.7. Sejam $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ polinômios não nulos.

1. Se $\text{multideg}(f) = \alpha$ e $\text{multideg}(g) = \beta$, então seja $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, onde $\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$, $1 \leq i \leq n$. Chamemos x^γ o mínimo múltiplo comum de $LM(f)$ e $LM(g)$, escrevemos $x^\gamma = m.m.c.(LM(f), LM(g))$.

2. Definimos o S -polinômio de f e g como:

$$S(f, g) = \frac{x^\gamma}{LT(f)}f - \frac{x^\gamma}{LT(g)}g.$$

Definição A.0.8. Considere em $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ um algoritmo da divisão, e seja $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Escrevemos por \vec{f}^F para o resto da divisão de f pela t -upla ordenada $F = (f_1, \dots, f_t)$, onde $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Teorema A.0.1. *Seja I um ideal polinomial não nulo. Então uma base $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ para I é uma base de Gröbner para I , se e somente se, para todo par $i \neq j$, temos $\overline{S(g_i, g_j)}^G = 0$, para alguma ordem.*

Exemplo A.0.1. *Considere $\mathbb{K}[x, y]$ com a ordem descrita na Observação A.0.1 e seja $I = \langle f_1, f_2 \rangle$, onde $f_1 = x^3 - 2xy$, $f_2 = x^2y - 2y^2 + x$. Vamos calcular a base de Gröbner para I*

Seja $G = \{f_1, f_2\}$,

$$LT(f_1) = x^3 \text{ e } LT(f_2) = x^2y \Rightarrow \gamma = (3, 1) \text{ e } x^\gamma = x^3y.$$

Daí,

$$S(f_1, f_2) = \frac{x^3y}{x^3}(x^3 - 2xy) - \frac{x^3y}{x^2y}(x^2y - 2y^2 + x) = x^3y - 2xy^2 - x^3y + 2xy^2 - x^2 = -x^2$$

e portanto

$$\overline{S(f_1, f_2)}^G = -x^2 \neq 0.$$

Portanto, G não é base de Gröbner para I . Consideremos então $f_3 = -x^2$ e $G_1 = \{f_1, f_2, f_3\}$, verifiquemos se G_1 é base de Gröbner para I .

Temos que $S(f_1, f_2) = f_3$, logo $\overline{S(f_1, f_2)}^{G_1} = 0$. Além disso, $S(f_1, f_3) = x^3 - 2xy - (-x)(-x^2) = -2xy$, então $\overline{S(f_1, f_3)}^{G_1} = -2xy \neq 0$.

Considere $f_4 = -2xy$ e $G_2 = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, daí $\overline{S(f_1, f_2)}^{G_2} = \overline{S(f_1, f_3)}^{G_2} = 0$,

$$S(f_1, f_4) = y(x^3 - 2xy) - \left(-\frac{x^2}{2}\right)(-2xy) = -2xy^2 = yf_4 \Rightarrow \overline{S(f_1, f_4)}^{G_2} = 0$$

e $S(f_2, f_3) = -2y^2 + x$, logo $\overline{S(f_2, f_3)}^{G_2} = -2y^2 + x \neq 0$.

Por fim, considere $f_5 = -2y^2 + x$ e $G_3 = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$. Para tal conjunto, temos

$$\overline{S(f_i, f_j)}^{G_3} = 0, \forall 1 \leq i < j \leq 5.$$

Logo, pelo Teorema A.0.1 temos que G_3 é base de Gröbner para I .

Quando construímos a base de Gröbner para um ideal I , pode acontecer de adicionarmos alguns polinômios desnecessários. Para eliminarmos tais geradores desnecessários, temos o seguinte lema.

Lema A.0.1. *Seja G uma base de Gröbner para um ideal I . Seja $p \in G$ um polinômio tal que $LT(p) \in \langle LT(G - \{p\}) \rangle$, então $\bar{G} = G - \{p\}$ é também uma base de Gröbner para I .*

A base de Gröbner obtida através desse lema é dita ser uma base de Gröbner *mínima*. Mais precisamente.

Definição A.0.9. *(Base de Gröbner Mínima) Uma base de Gröbner mínima para um ideal I , é uma base de Gröbner G para I tal que:*

1. $LC(p) = 1, \forall p \in G$;
2. Para todo $p \in G$, $LT(p) \notin \langle LT(G - \{p\}) \rangle$.

Exemplo A.0.2. *No Exemplo A.0.1, vimos que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\} = \{x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x, -x^2, -2xy, -2y^2 + x\}$ é uma base de Gröbner para $I = \langle f_1, f_2 \rangle$. Vamos calcular a base de Gröbner mínima para G .*

1. *Multiplicando por constantes tal que $LC(f_i) = 1$, para $1 \leq i \leq 5$. Obtemos*

$$G_1 = \left\{ x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x, x^2, xy, y^2 - \frac{1}{2}x \right\} = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \bar{f}_4, \bar{f}_5\}.$$

2. *Eliminando agora os termos desnecessários, temos*

$$LT(\bar{f}_1) = x^3 = x(x^2) = x\bar{f}_3 \text{ e } LT(\bar{f}_2) = x^2y = x(xy) = x\bar{f}_4.$$

Portanto, podemos eliminar da base G_1 , os polinômios \bar{f}_1 e \bar{f}_2 e nenhum outro polinômio, obtendo com isso, a base mínima para G , como sendo $\bar{G} = \{\bar{f}_3, \bar{f}_4, \bar{f}_5\} = \{x^2, xy, y^2 - \frac{1}{2}x\}$.

Dado um ideal I , podemos ter mais de uma base de Gröbner mínima pra I , por exemplo, basta mudarmos a ordem nas variáveis. Para que tenhamos unicidade, devemos impor uma condição sobre os monômios, essa nova base que obtemos, recebe o nome de base de Gröbner *reduzida*. Mais precisamente.

Definição A.0.10. *(Base de Gröbner Reduzida) Uma base de Gröbner reduzida para um ideal I , é uma base de Gröbner G para I , tal que*

1. $LC(p) = 1, \forall p \in G$;
2. Para todo $p \in G$, nenhum monômio de p está em $\langle LT(G - \{p\}) \rangle$.

No Exemplo A.0.2, a base $G = \{x^2, xy, y^2 - \frac{1}{2}x\}$ é uma base de Gröbner reduzida para $I = \langle x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x \rangle$.

Apresentamos nesse apêndice, uma breve descrição sobre as bases de Gröbner. Caso o leitor queira um estudo mais completo sobre esse assunto, os seguintes livros [CLOS] e [AL], são altamente recomendados.

Bibliografia

- [AL] Adams, W.W. Loustaunau, P., *An introduction to Gröbner bases*, Graduate Studies In Mathematics, Volume 3, America Mathematical Society, (1994).
- [A] Anosov, D.V., *Stability of the equilibrium positions in relay systems*, Automation and remote control, Volume XX, 2, (1959).
- [BP1] Battelli, F. Palmer, K.J., *Singular perturbations, transversality, and Sil'nikov saddle-focus homoclinic orbits*, Journal of Dynamical Differential Equations, 15, (2003), pp. 357-425.
- [B1] Bazykin, A.D., *Nonlinear dynamics of interacting populations*, World Sc. Publ. Co. Inc., River-Edge, NJ , (1998).
- [BP2] Boltyanskii, V.G., Pontryagin, L.S., *The stability of the equilibrium position in a relay system of ordinary differential equations*, Trans. III All-Union Mathematical Conference [in Russian], vol. 1, (Izd. Akad. Nauk SSSR, 1955).
- [BC] Bonnard, B. Chyba, M., *Singular trajectories and their role in Control Theory*, Mathématiques and Applications, 40, (2003), Springer.
- [B2] Buchberger, B., *Ein algorithmus zum auffinden der basiselemente des restklassenringes nach einem nulldimensionalen polynomideal*, Ph.D. Thesis, Inst. University of Innsbruck, Innsbruck, Austria, (1965).

- [BST] Buzzi, C. Silva, P.R. Teixeira, M.A., *Singular perturbation problems for time reversible systems*, to appear in Proc. Amer. Mat. Soc.
- [ÇB] Çelik, E. Bayram, M., *Application of Gröbner basis techniques to enzyme kinetics*, Appl. Math. Comput., 153, (2004), no. 1, pp. 97-109.
- [CLOS] Cox, D. Little, J. O'Shea, D., *Ideals, varieties, and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*, Springer Verlag, Berlin and New York, (1992).
- [D] Dörrie, H., *100 Great problems of elementary mathematics: their history and solution*, translated by David Antin, (New York, Dover Publications), (1965), ISBN 1-486-61348-8.
- [FG] Farr, J.B. Gao, S., *Gröbner bases, Padé approximation, and decoding of linear codes*, Coding Theory and Quantum Computing, pp. 3-18, Contemp. Math., 381, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2005).
- [F1] Fenichel, N., *Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations*, Journal of Differential Equations, 31, (1979), pp. 53-98.
- [F2] Filippov, A.F., *Differential equations with discontinuous righthand sides*, Kluwer, (1988).
- [FL] Flügge-Lotz, I., *Discontinuous automatic control*, Princeton University, (1953).
- [H1] Henry. P., *Differential equations with discontinuous right-hand side for planning procedures*, Journal of Economy Theory, 4, (1972), pp. 545-551.
- [H2] Hironaka, H., *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Annals of Math., 79, (1964), pp. 109-326.
- [H3] Hogan, S., *On the dynamics of rigid-block motion under harmonic forcing*, Proc. Roy. Soc. London A, V. 425, (1989), pp. 441-476.

- [I] Ito, T., *A Filippov solution of a system of differential equation with discontinuous right-hand sides*, Economic Letters, 4, (1979), pp. 349-354.
- [JKM] Jacquemard, A. Khechichine, F.Z. Mourtada, A., *Algorithmes formels appliqués à l'étude d'un polycycle algébrique générique à quatre sommets hyperboliques*, Non-Linearity, V 10, (1997), pp. 19-53.
- [JP] Jacquemard, A. Pereira W.F., *On periodic orbits of polynomial relay systems*, a aparecer em Discrete and Continuous Dynamical Systems, (2006).
- [JPT] Jacquemard, A. Pereira, W.F. Teixeira, M.A., *Generic singularities of relay systems*, preprint, (2006).
- [JT1] Jacquemard, A. Teixeira, M.A., *Computer analysis of periodic orbits of discontinuous vector fields*, Journal of Symbolic Computation, 35, (2003), pp. 617-636.
- [JT2] Jacquemard, A. Teixeira, M.A., *On singularities of discontinuous vector fields*, Bulletin des Sciences Mathématiques, 127, (2003), pp. 611-633.
- [JT3] Jacquemard, A. Teixeira, M.A., *Invariant varieties of discontinuous vector fields*, NonLinearity, 17, (2005), pp. 1-23.
- [KK] Kunze, M., Kupper, T., *Qualitative bifurcation analysis of a non-smooth friction oscillator model*, Z. Angew. Math. Phys., V. 48, (1997), 87-101.
- [LXW] Lin, Z. Xu, Li Wu, Q., *Applications of Gröbner bases to signal and image processing: a survey*, Linear Algebra Appl., 391, (2004), pp. 169-202.
- [LST] Llibre, J. Silva, P.R. Teixeira, M.A., *Regularization of discontinuous vector fields on \mathbb{R}^3 via singular perturbation*, preprint.
- [M] Macaulay, F.S., *Some properties of enumeration in the theory of modular systems*, Proceedings of the London Mathematical Society, 26, (1927), pp. 531-555.

- [MZ] Montgomery, D. Zippin, L., *Topological transformations groups*, Interscience, (1955), New-York.
- [P] Poincaré, H., *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, Journal of Math., 7, (1881), pp. 375-422 and 8, (1882), pp. 251-296 and *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, Journal of Math. Pure et Appl., 1, (1885), pp. 167-244.
- [ST1] Sotomayor, J. Teixeira, M.A., *Regularization of discontinuous vector fields*, Proceedings Equadiff, 95, (World Sc), (1996), pp. 207-223.
- [ST2] Sotomayor, J. Teixeira, M.A., *Vector fields near the boundary of a 3-manifold*, Lect. Notes in Math., 331, Springer Verlag, (1988), pp. 169-195.
- [T1] Teixeira, M.A., *Attractivity of discontinuous vector fields*, Dynamic Systems and Applications, V5, No 1, (1996), pp. 31-45.
- [T2] Tsypkin Ya. Z., *Theory of relay automatic control systems* [in Russian], (Gostekhizdat, 1955).
- [T3] Tsypkin, Ya.Z., *Relay control systems*, Cambridge University Press, (1984).
- [V] Vishik, S.M., *Vector fields near the boundary of a manifold*, Vestnik Moskovskogo Universiteta, Matematika, Vol 27, No 1, (1972), pp. 13-19.
- [ZB] Zelikin, M.I. Borisov, V.F., *Theory of chattering control with applications to Astronautics, Robotics, Economics, and Engineering*, (1994). Birkhäuser.

Índice Remissivo

- Órbita 1-Periódica, 12
- Aplicação de Poincaré, 10
- Base de Gröbner, 101, 130
 - Mínima, 132
 - Reduzida, 132
- Cúspide, 80
 - Híbrida, 12, 80
 - Meia-Cúspide, 12, 80
 - Simétrica, 12, 80
- Codimensão 0, 71
- Codimensão 1, 71
- Condições do Sinal de Sturm , 106
- Dobra
 - Elíptica, 11, 78
 - Hiperbólica, 11, 78
 - Parabólica, 11, 78
- Elementar, 24
- Espaço Afim, 128
- Estabilidade Estrutural Fraca, 71
- Estimativa, 7
- Estratificação, 70, 83
- Forma Normal Primitiva, 28
- Fracamente Equivalentes, 71
- Função de Transição, 125
- Genérica, 71
- Involução, 6
- Laço Singular 1-Periódico, 12
- Ordem Lexicográfica, 129
- Perturbação Singular, 124
- Ponto
 - Regular, 11
 - Singular, 11
- Quasi-Genérica, 71
- Quasi-Reversibilidade, 50
- Região
 - Costura, 9
 - Deslize, 9
 - Escape, 9
- Regularização, 125

Reversibilidade, 6

Seqüência de Sturm, 102

Simplesmente Integrável, 23

Singularidade

 Cúspide, 11

 Dobra, 11

 Rabo de Andorinha, 12

Sistema

 Lento, 124

 Rápido, 124

Teorema de Sturm, 102

Transformação Primeiro Retorno, 10

Varição, 102

Variedade Afim, 128