

---

**Universidade Estadual de Campinas**

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

---

Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática

**Métodos Computacionais para  
Determinação de Pontos de Intersecção  
de  $n$  Esferas no  $\mathbb{R}^n$**

por

**Marcos Roberto da Silva Gonçalves**

Mestrado Profissional em Matemática - Campinas - SP

**Orientador: Prof. Dr. Carlile Campos Lavor**

**Co-Orientador: Prof. Dr. José Mario Martínez**

## Métodos Computacionais para Determinação de Pontos de Intersecção de $n$ Esferas no $\mathbb{R}^n$

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Marcos Roberto da Silva Gonçalves** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 28 de julho de 2008.



Prof. Dr. Carlile Campos Lavor



Prof. Dr. José Mario Martínez

Banca examinadora:

*Prof. Dr.* Carlile Campos Lavor

*Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>.* Loana Tito Nogueira

*Prof. Dr.* Aurélio Ribeiro Leite de Oliveira

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP  
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues**

Gonçalves, Marcos Roberto da Silva

G586m Métodos computacionais para determinação de pontos de intersecção de  $n$  esferas no  $R^n$  / Marcos Roberto da Silva Gonçalves -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

Orientadores : Carlile Campos Lavor ; José Mário Martinez

Trabalho final (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Intersecção de esferas. 2. Decomposição LU. 3. Decomposição QR. I. Lavor, Carlile Campos. II. Martinez, José Mário. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Computational methods for determination of points of intersection of  $n$  spheres in  $R^n$ .

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Intersection of spheres. 2. LU decomposition. 3. QR decomposition.

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre Profissional de Matemática

Banca examinadora:

Prof. Dr. Carlile Campos Lavor (IMECC-UNICAMP)  
Profª. Dra. Loana Tito Nogueira (IC-UFF)  
Prof. Dr. Aurélio Ribeiro Leite de Oliveira (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 28/07/2008

Programa de pós-graduação: Mestrado Profissional de Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 28 de julho de 2008 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

  
Prof. (a). Dr (a). CARLILE CAMPOS LAVOR

  
Prof. (a). Dr (a). AURELIO RIBEIRO LEITE DE OLIVEIRA

  
Prof. (a). Dr (a). LOANA TITO NOGUEIRA

À minha família.

*Dedico*

*“Não há ramo da Matemática,  
por mais abstrato que seja, que  
não possa um dia vir a ser apli-  
cado aos fenômenos do mundo  
real”.*

*Lobachevsky*

---

# Agradecimentos

---

- 1 *Agradeço a Deus, por sempre me acompanhar nos caminhos de minha vida, guiando e ajudando nos momentos difíceis.*
  
- 2 *Agradeço aos meus pais, pelo apoio dado e por todo o esforço para que eu pudesse atingir os meus objetivos.*
  
- 3 *Agradeço aos meus irmãos, por estarem sempre por perto, em todos os momentos, oferecendo apoio quando precisei.*
  
- 4 *Agradeço a minha esposa Érica, pela paciência que teve comigo nos momentos de maior stresse e por me apoiar sempre.*
  
- 5 *Agradeço a meu orientador Carlile, pelo seu apoio e compreensão. Por sugerir caminhos e me ajudar a conduzir este trabalho.*
  
- 6 *Agradeço ao meu co-orientador Martínez, pela disponibilidade oferecida nos momentos em que precisei de sua ajuda.*
  
- 7 *Agradeço aos meus amigos de mestrado, que me acompanharam durante o curso, em especial ao Fabiano, pelo incentivo e o compartilhamento das dúvidas.*

*8 Agradeço aos meus colegas de laboratório, pela disponibilidade e serenidade com que me ajudaram a esclarecer dúvidas. Em especial ao Cristiano, João, Alan, Celso e Nolmar, que contribuíram para realização deste trabalho.*

*9 Agradeço a todos os professores do Mestrado Profissional em Matemática, pelos quais tenho grande admiração, pelo carisma e por serem para mim um referencial. Devido a estas pessoas, o sonho de muitos, hoje, pode se tornar realidade. Em especial à professora Sueli, pela extrema lucidez e serenidade com o qual orientou os trabalhos, e por estar disposta a ajudar mesmo quando já não era mais sua responsabilidade.*

*10 Agradeço à UNICAMP e à UEMA, conjuntamente com a Capes, por viabilizarem a realização deste Mestrado Profissional em Matemática e ao CEFET por permitir a minha saída para conclusão deste trabalho.*

*11 Agradeço a todos os meus amigos, por terem sempre uma expectativa de vitória com relação aos meus projetos.*

---

# Resumo

---

Neste trabalho, abordamos o problema da determinação de pontos de intersecção de  $n$  esferas no  $\mathbb{R}^n$ . Este problema, além de ser importante matematicamente, é um problema com muitas aplicações, que vão desde a localização de pontos no globo, pelo sistema GPS, até a posicionamento de átomos em estruturas moleculares. O problema de encontrar a intersecção de  $n$  esferas no  $\mathbb{R}^n$  é, em geral, formulado como um conjunto de  $n$  equações não-lineares, onde se deseja determinar a sua solução através de um método eficiente e confiável. Mostramos que, com exceção de alguns casos, o problema é geralmente resolvido de forma eficaz, empregando técnicas de álgebra linear. Reformulamos o problema de forma a convertê-lo em um problema linear e apresentamos dois métodos baseados na decomposição de matrizes. Testamos os métodos para casos particulares de baixa dimensão, analisando o custo computacional e possíveis dificuldades que podem surgir devido a erros de medição.

**Palavras-Chave:** Intersecção de Esferas, Decomposição LU, Decomposição QR.

---

# Abstract

---

We consider the problem of determining the points of intersection of  $n$  spheres in  $\mathbb{R}^n$ . This problem has many applications, such as the location of points on the globe by the GPS system and problems related to molecular geometry optimization. The problem of finding the intersection of  $n$  spheres in  $\mathbb{R}^n$  is generally expressed as a set of nonlinear equations, where we want to establish an efficient and reliable method to find their solution. We show that, in general, the problem can be solved effectively employing techniques of linear algebra. We reformulate the problem in order to transform it into a linear problem and present two methods based on the decomposition of matrices. We also test the methods in small instances and analyze the computational cost and possible difficulties that may arise due to errors of measurement.

**Keywords:** Intersection of Spheres, LU decomposition, QR decomposition.

---

# Sumário

---

Agradecimentos	vi
Resumo	viii
Abstract	ix
Introdução	1
<b>1 Conceitos Básicos</b>	<b>6</b>
1.1 Definições básicas de álgebra linear . . . . .	6
1.2 Matrizes . . . . .	8
1.2.1 Matrizes Ortogonais . . . . .	8
1.2.2 Matriz de Householder . . . . .	9
1.2.3 Matriz de Givens . . . . .	10
<b>2 Solução de Sistemas Lineares</b>	<b>12</b>
2.1 Eliminação Gaussiana . . . . .	12
2.2 Decomposição LU . . . . .	14
2.3 Decomposição QR . . . . .	15
2.3.1 Householder QR . . . . .	15
2.3.2 Givens QR . . . . .	16
<b>3 Resolvendo o Problema</b>	<b>18</b>
3.1 Solução por Eliminação Gaussiana . . . . .	19
3.2 Solução por Decomposição Ortogonal . . . . .	23
<b>4 O Efeito dos Erros</b>	<b>29</b>

## SUMÁRIO

---

xi

5 Considerações Finais

33

Referências Bibliográficas

35

---

# Lista de Figuras

---

1	Localização a partir de intersecção de esferas imaginárias. . . . .	2
2	Soluções refletidas. . . . .	4
3.1	Pontos de intersecção de duas esferas no $\mathbb{R}^2$ . . . . .	22
3.2	Pontos de intersecção de três esferas no $\mathbb{R}^3$ . . . . .	27
4.1	Secção transversal de três esferas cruzando-se em um ponto. . . .	30
4.2	Secção transversal de três esferas que não se cruzam. . . . .	31

---

# Introdução

---

O problema de determinação de pontos de intersecção de  $n$  esferas no  $\mathbb{R}^n$ , além de sua importância matemática, tem muitas aplicações. Podemos citar, por exemplo, no caso tridimensional, aplicações em problemas na navegação, no posicionamento de átomos específicos em estruturas de cristais, na reconstrução geométrica do tronco humano em experiências cardiológicas, no “Problema do Pentaclo”, além de muitos outros problemas que envolvem distâncias geométricas. Para maiores detalhes, veja [1], [5] e [9].

No caso da navegação [1], por exemplo, a aplicação consiste em geral na utilização da tecnologia GPS, abreviatura para “Global Position System”. Esta, por sua vez, utiliza uma constelação de 24 satélites orbitando em torno da Terra, a uma altura de 20.200km acima do nível do mar, com a finalidade de determinar a posição precisa de um ponto na superfície do planeta. Em qualquer ponto do globo terrestre há sempre pelo menos quatro satélites visíveis. Cada satélite possui um relógio atômico que transmite constantemente um sinal contendo dados sobre a hora atual (com altíssima precisão) e a sua posição no espaço (latitude, longitude e altitude). Existe uma “estação master”, localizada no Colorado (USA), que, com o auxílio de cinco estações de gerenciamento espalhadas pelo planeta, monitora o desempenho total do sistema, corrigindo as posições dos satélites e reprogramando o sistema com o padrão necessário para que a posição determinada de qualquer ponto seja a mais precisa possível. O satélite envia um sinal que é recebido pelo receptor que, por sua vez, determina a distância do mesmo. Isto

é possível porque o receptor, ao receber o sinal, compara-o com outro que tem pré-definido para o satélite naquele instante e, assim, determina a quanto tempo o sinal foi emitido estabelecendo a distância que este se encontra. A partir de uma primeira distância ao satélite, é possível afirmar que nos encontramos sobre uma superfície esférica imaginária com raio igual a essa distância e centro no satélite, ver Figura 1.

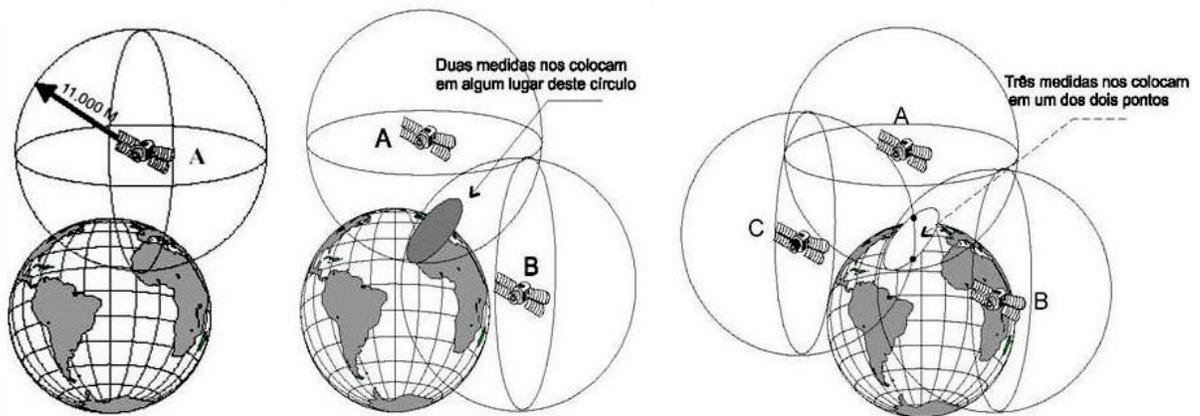


Figura 1: Localização a partir de intersecção de esferas imaginárias.

Utilizando os dados das distâncias de três satélites, os pontos de intersecção entre as esferas reduzem-se a dois. Ao utilizar-se um quarto satélite fixo em Terra, é possível desprezar um dos pontos (impossível no sentido físico, pois em geral é um ponto fora do globo) e obter, então, um ponto de localização. Como os receptores não possuem relógios atômicos, obtemos na verdade distâncias aproximadas. A precisão do tempo é essencial na operação do GPS, pois um erro de um microsegundo ( $10^{-6}s$ ) no registro do lapso do tempo, desde a transmissão até a recepção, resulta em um erro de 300m. Caso não se obtenha uma intersecção para as esferas, o receptor automaticamente adiciona ou subtrai tempo ao seu relógio até obter distâncias aos satélites que se intersectam num único ponto, ou seja, a nossa posição exata.

O problema de encontrar a intersecção de  $n$  esferas no  $\mathbb{R}^n$  é, em geral, facilmente formulado como um conjunto de  $n$  equações não-lineares, onde deseja-se determinar um método eficiente e confiável para encontrar sua solução. Mostraremos que, com exceção de alguns casos, o problema é geralmente resolvido de forma simples e eficaz, empregando-se técnicas de álgebra linear. Em algumas aplicações, os raios das esferas não são conhecidos ou não podem ser determinados facilmente. Isto pode levar a dificuldades, particularmente quando o ponto procurado estiver “próximo” da variedade afim<sup>2</sup> definida pelos  $n$  centros das  $n$  esferas. Nestes casos, o mais apropriado seria formular o problema como um Problema de Mínimos Quadrados, a fim de determinar uma “solução aproximada” que mais se adeque ao problema.

De forma geral, se as coordenadas de  $n$  pontos no  $\mathbb{R}^n$  forem conhecidas e tivermos que determinar as coordenadas de um certo ponto desconhecido quando forem conhecidas as distâncias deste ponto aos outros pontos, então isto é claramente equivalente a encontrar os pontos de intersecção de  $n$  esferas no  $\mathbb{R}^n$ . De fato, a partir de cada distância, temos que o ponto desconhecido está sobre uma esfera de centro no ponto conhecido e raio igual à distância. Assim, dadas  $n$  distâncias, o ponto a ser determinado está na intersecção das  $n$  esferas. Esta interpretação permite uma prova geométrica simples de que haverá pelo menos dois pontos na intersecção das esferas, pois se  $x \in \mathbb{R}^n$  é uma solução do problema, então a reflexão de  $x$  em relação a variedade afim gerada pelos  $n$  pontos dados também será solução. No  $\mathbb{R}^3$ , temos que a solução  $x_2$  é a reflexão da solução  $x_1$ , em relação ao plano definido pelos centros das 3 esferas, (veja Figura 2).

---

<sup>2</sup>veja definição (1.1.5), no próximo capítulo.

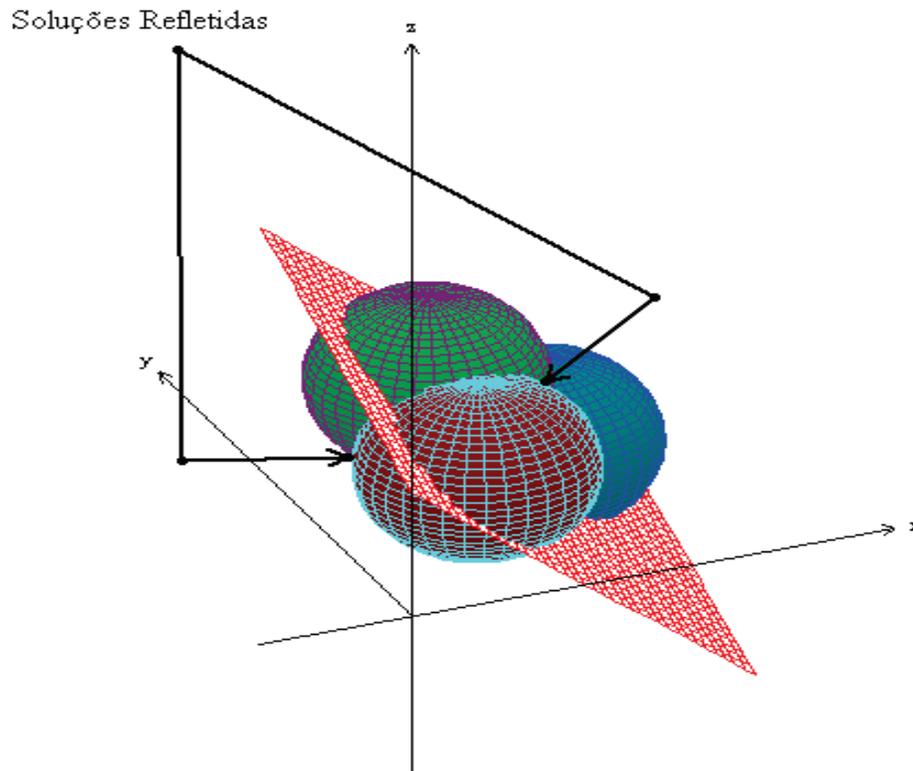


Figura 2: Soluções refletidas.

O problema do Pentaclo é uma ligeira variação deste último problema. No caso tridimensional, o problema consiste em determinar a distância entre dois pontos distintos 1 e 2 utilizando para isso, as distâncias de cada um em relação a três pontos conhecidos. Duas soluções são possíveis, a primeira será quando 1 e 2 estiverem do mesmo lado em relação ao plano que contém os três pontos e a segunda será quando 1 e 2 estiverem em lados opostos em relação ao mesmo plano. No caso geral, novamente, teremos dois pontos no  $\mathbb{R}^n$  de coordenadas desconhecidas e deseja-se encontrar a distância entre eles tendo como referência as distâncias de cada um em relação a  $n$  pontos conhecidos.

O trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 1 abordamos algumas definições básicas de álgebra linear, com destaque para definição de vetores afins independentes (1.1.2), situação em que se encontram os centros das esferas em boa parte das aplicações reais [5]. Prosseguindo, apresentamos

as definições de matrizes ortogonais, matriz de Householder e matriz de Givens, usadas na construção da decomposição QR de matrizes.

Os métodos da eliminação gaussiana e decomposições LU e QR, são o foco do segundo capítulo, que tem como objetivo descrever as técnicas matriciais que serão utilizadas na formulação dos métodos para encontrar os pontos de intersecção das esferas.

No capítulo 3, apresentamos o problema central deste trabalho. Formulado através de um conjunto de  $n$  equações não-lineares, o problema da determinação dos pontos de intersecção de  $n$  esferas no  $\mathbb{R}^n$ , é reescrito através da aplicação de técnicas de álgebra linear, sendo a solução determinada através da utilização dos métodos de decomposição LU e QR. Os métodos são testados para casos particulares no  $\mathbb{R}^2$  e no  $\mathbb{R}^3$ , comparados quanto a eficácia e avaliados quanto ao custo computacional.

No quarto capítulo analisamos as condições de existência da solução do problema e o efeito dos erros de medição na determinação desta solução. Por fim, fazemos algumas considerações sobre as perspectivas de abordagem e aplicação deste problema no contexto acadêmico e científico.

# Conceitos Básicos

## 1.1 Definições básicas de álgebra linear

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições básicas que estão intimamente ligadas ao corpo deste trabalho. Apresentaremos conceitos como o de conjuntos e vetores afim independentes, variedade afim, matriz ortogonal, matriz de Householder e matriz de Givens. Para mais detalhes ver [2], [3], [7], [8], [11], e [12].

**Definição 1.1.1.** Os vetores  $x_1, x_2, \dots, x_p$  do  $\mathbb{R}^n$  são linearmente independentes (L.I) se

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, p.$$

**Definição 1.1.2.** Os vetores  $x_1, x_2, \dots, x_p$  do  $\mathbb{R}^n$  são afim independentes (A.I) se

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0 \text{ e } \sum_{i=1}^p \lambda_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, p.$$

Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$ , é dito linearmente independente, se os vetores que o compõe são linearmente independentes. Entretanto, um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  será dito afim independente se qualquer subconjunto finito  $\{x_1, x_2, \dots, x_p\} \subset X$  for afim independente.

**Definição 1.1.3.** Para  $X \subset \mathbb{R}^n$ , a dimensão de  $X$ , denotada por  $\dim(X)$ , é a cardinalidade de um maior subconjunto de  $X$  que é linearmente independente.

Mostra-se que  $\dim(X)$  é uma unidade a menos que a cardinalidade de um maior conjunto afim independente contido em  $X$ .

**Exemplo 1.1.1.** O conjunto  $X = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$  é A.I mas não é L.I. De fato, tomando

$$\lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, 0) + \lambda_3(0, 0, 1) + \lambda_4(1, 1, 1) = (0, 0, 0),$$

concluimos que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -\lambda_4$ , com  $\lambda_4 \in \mathbb{R}$ . Entretanto, impondo a condição

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0,$$

obtemos  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ .

**Definição 1.1.4.** Dado um vetor  $x \in \mathbb{R}^n$ , a norma euclidiana de  $x$ , denotada por  $\|x\|_2$ , é dada por:

$$\|x\|_2 = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (x^T x)^{\frac{1}{2}}.$$

**Definição 1.1.5.** Sejam  $a_1, a_2, \dots, a_n, b$  números reais. O conjunto  $H$  dos vetores  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , tais que

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

é uma variedade afim. Se  $b = 0$  temos  $H = \mathbb{R}^n$ . Trataremos aqui apenas dos casos onde  $b \neq 0$ . Neste caso,  $H$  chama-se hiperplano e  $H = \emptyset$  quando  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ .

Equivalentemente, pode-se mostrar que toda variedade afim não-vazia  $U$  é resultado de uma translação de um subespaço vetorial  $F$  do  $\mathbb{R}^n$ , ou seja, para todo  $u \in U$  tem-se que

$$U = u + F = \{u + w; w \in F\}.$$

Pode-se também mostrar que, dado um conjunto de pontos  $P$  em um subespaço vetorial do  $\mathbb{R}^n$ , a intersecção de todas as variedades afins que contém  $P$  é

uma variedade afim, denotada por  $[P]$ . E mais,  $[P]$  é a menor variedade afim que contém  $P$ .

**Definição 1.1.6.** *A variedade afim  $[P]$  é chamada de variedade afim gerada pelo conjunto  $P$ .*

**Definição 1.1.7.** *Seja  $U$  uma variedade afim de um subespaço vetorial  $V$  do  $\mathbb{R}^n$ . Um vetor não nulo  $v \in V$  é chamado de vetor normal a  $U$  se  $\langle v, u \rangle = 0$ , para todo  $u \in U$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno usual do  $\mathbb{R}^n$ .*

Além disso, se  $A$  é um ponto de  $V$  que não pertence a  $U$  então existirá um único ponto  $B \in U$  tal que o vetor  $\overline{AB}$  é normal a  $U$ .

**Definição 1.1.8.** *Nas condições acima, a distância do ponto  $A$  à variedade afim  $U$  é dada por  $\|\overline{AB}\|_2$ .*

## 1.2 Matrizes

### 1.2.1 Matrizes Ortogonais

Uma matriz qualquer  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é ortogonal se  $Q^T Q = I$ . Isto significa que,  $Q$  é inversível e  $Q^{-1} = Q^T$ .

**Propriedade 1.2.1.** *Dada uma matriz ortogonal  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , valem as seguintes propriedades:*

$$1) \|Qx\|_2 = \|x\|_2;$$

$$2) |\det Q| = 1;$$

$$3) \langle Qx, Qy \rangle = (Qy)^T (Qx) = y^T Q^T Qx = y^T Ix = y^T x = \langle x, y \rangle.$$

Dos itens 1 e 3 da propriedade acima, podemos concluir que  $Q$  preserva o ângulo entre os vetores  $x$  e  $y$ . Além disso, se  $P$  e  $Q$  são matrizes ortogonais, então o produto  $PQ$  é ortogonal. Ver [12].

### 1.2.2 Matriz de Householder

Seja  $v$  um vetor não nulo,  $v \in \mathbb{R}^n$ , e  $H$  a matriz definida por

$$H = I - \left( \frac{2}{v^T v} \right) v v^T.$$

A matriz  $H$  é chamada de matriz de Householder ou reflexão de Householder. O vetor  $v$  é chamado de vetor Householder. As matrizes de Householder são simétricas e ortogonais. De fato,

$$i) H^T = \left[ I - \left( \frac{2}{v^T v} \right) v v^T \right]^T = \left[ I - \left( \frac{2}{v^T v} \right) v v^T \right] = H;$$

$$ii) H^T H = H.H = I - \left( \frac{4}{v^T v} \right) v v^T + \left( \frac{2}{v^T v} \right) \left( \frac{2}{v^T v} \right) (v^T v) v v^T = I - \left( \frac{4}{v^T v} \right) v v^T + \left( \frac{4}{v^T v} \right) v v^T = I.$$

Ao multiplicar uma matriz de Householder  $H$  por um vetor  $x$ , refletimos o vetor através do hiperplano perpendicular a  $v$ . Assim, para um vetor  $x \in \mathbb{R}^n$ , teremos que  $v$  é da forma  $v = x \pm \|x\|_2 e_1$ , onde  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ . Veja [7].

**Exemplo 1.2.1.** Se  $x = (2, 2, 1)^T$ , temos que  $\|x\|_2 = 3$ . Admitindo  $v = x + \|x\|_2 e_1$ , temos:

$$v = (5, 2, 1)^T \Rightarrow v^T v = 30 \text{ e } v v^T = \begin{bmatrix} 25 & 10 & 5 \\ 10 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 25 & 10 & 5 \\ 10 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow H = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -10 & -10 & -5 \\ -10 & 11 & -2 \\ -5 & -2 & 14 \end{bmatrix},$$

resultando em  $Hx = (-3, 0, 0)^T$ .

### 1.2.3 Matriz de Givens

Uma matriz (ou rotação) de Givens é uma matriz da forma:

$$\begin{array}{ccc}
 & i & j \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 G_{ij} = & \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{array}
 \end{array}$$

onde  $c^2 + s^2 = 1$ . Naturalmente, podemos considerar  $c = \cos \theta$  e  $s = \sin \theta$ , para algum  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Notemos que a intersecção das linhas  $i$  e  $j$  com as colunas  $i$  e  $j$  de  $G_{ij}$  formam a sub-matriz

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}.$$

Como

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 + s^2 & 0 \\ 0 & c^2 + s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

concluimos que as matrizes  $G_{ij}$  são ortogonais. Além disso, por construção, pré-multiplicar vetores por  $G_{ij}$  equivale a uma rotação anti-horária de  $\theta$  radianos em um plano de coordenadas  $(i, j)$ .

Dado um vetor  $x \in \mathbb{R}^n$  não nulo e aplicando  $G_{ij}$  a  $x$ , teremos que

$$G_{ij}x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ cx_i + sx_j & \leftarrow i \\ \vdots \\ -sx_i + cx_j & \leftarrow j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} .$$

Se  $x_i$  e  $x_j$  não são ambos nulos, e forçando a coordenada  $j$  de  $G_{ij}x$  ser nula, obtemos o seguinte sistema nas variáveis  $c$  e  $s$ :

$$\begin{cases} -sx_i + cx_j = 0 \\ c^2 + s^2 = 1 \end{cases}$$

que tem como solução

$$c = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} \text{ e } s = \frac{x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} .$$

Então,

$$G_{ij}x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \sqrt{x_i^2 + x_j^2} & \leftarrow i \\ \vdots \\ 0 & \leftarrow j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} .$$

Assim, podemos utilizar rotações de Givens para anular componentes de vetores ou matrizes.

# Solução de Sistemas Lineares

## 2.1 Eliminação Gaussiana

Os métodos para a solução de sistemas de equações lineares são divididos em dois grupos: Métodos Diretos e Métodos Iterativos. Os Métodos Diretos são aqueles que conduzem à solução exata, a menos de erros de arredondamento introduzidos pela máquina, em um número finito de passos. Os Métodos Iterativos são aqueles que permitem obter a solução do problema através de um processo infinito convergente.

A Eliminação Gaussiana, [6], [7], [8], [10] e [12], é um método direto que, ainda hoje, é bastante utilizado para a solução de sistemas lineares e está baseada na seguinte propriedade [6]:

**Propriedade 2.1.1.** *A solução do sistema  $Ax = b$ , onde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , não se altera se o submetemos a uma sequência de operações elementares do tipo:*

- 1) *Multiplicação de uma equação por uma constante não nula;*
- 2) *Soma do múltiplo de uma equação à outra;*
- 3) *Troca de ordem das equações.*

Assim, dada uma matriz  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , o processo de Eliminação Gaussiana consiste na aplicação sucessiva de operações elementares às linhas até chegarmos a uma matriz escalonada, definida como sendo a matriz equivalente a  $A$  caracterizada pelo fato de que cada coluna que tiver o primeiro elemento

não-nulo de alguma linha, terá os outros elementos, abaixo deste, nulos. O procedimento para sua determinação é o seguinte [8]:

(a) Supondo  $a_{11} \neq 0$ , para eliminar a incógnita  $x_1$  das  $n - 1$  equações, vamos subtrair a primeira linha, multiplicada pelo fator  $m_{i1} = a_{i1}/a_{11}$ , de todas as linhas  $l_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

(b) Se  $a_{11} = 0$ , uma troca de linhas fornece uma matriz com  $a_{11} \neq 0$ , desde que a primeira coluna não seja nula. Se todos os elementos da primeira coluna são iguais a zero, passa-se para a coluna mais próxima à direita da primeira, onde haja algum elemento não nulo e opera-se como antes, de modo a obter uma matriz cuja a primeira coluna não-nula inicie com elemento não nulo, mas todos os demais iguais a zero. A partir daí, não se altera mais a primeira linha. Recomeça-se o processo, trabalhando com as linhas, a partir da segunda, até obter uma matriz escalonada.

A sistemática do método para encontrar a matriz escalonada através da Eliminação Gaussiana é descrito no algoritmo 2.1.1:

**Algoritmo 2.1.1.** *Eliminação Gaussiana*

**Dados:** matriz  $A_{n \times n}$  e o vetor coluna  $b$

**para**  $k = 1 : n - 1$  **faça**

    Encontre  $i \geq k$  tal que  $a_{ik} \neq 0$

**se**  $a_{ii} \neq 0$  **para todo**  $i \geq k$ , **então**  $A$  **é não invertível** **então**

        | Troque a linha  $k$  com a linha  $i$

**fim se**

**para**  $i = k + 1 : n$  **faça**

        |  $m = m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{ik}}$

        |  $b_i = b_i - mb_k$

**para**  $j = k + 1 : n$  **faça**

            |  $a_{ij} = a_{ij} - ma_{kj}$

**fim para**

**fim para**

**fim para**

**fim**

## 2.2 Decomposição LU

Equivalentemente ao método da Eliminação Gaussiana, um outro método que é bastante eficiente e econômico, quando temos que resolver vários sistemas com a mesma matriz de coeficientes  $A$ , é a Fatoração ou Decomposição LU da matriz  $A$ . O método consiste em tentar escrever a matriz  $A$  como o produto de uma matriz triangular inferior  $L$ , com os elementos da diagonal principal iguais a 1, e uma matriz triangular superior  $U$ , isto é:

$$A = LU.$$

**Exemplo 2.2.1.**  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 4 & 3 \\ 4 & 7 & 6 & 4 \\ 6 & 9 & 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = L \cdot U.$

Assim, dado um sistema  $Ax = b$ , com  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $b \in \mathbb{R}^n$ , este se transforma no sistema  $LUx = b$ , que é resolvido em duas etapas:

- i) Resolvemos  $Ly = b$ , encontrando o vetor  $y$ ;
- ii) Resolvemos  $Ux = y$ , encontrando o vetor  $x$ .

O seguinte teorema caracteriza as condições para existência da decomposição LU ([7], [10] e [12]).

**Teorema 2.2.1.** *Seja  $A$  uma matriz real quadrada de ordem  $n$  e  $A_k$  a matriz menor principal constituída das  $k$  primeiras linhas e  $k$  primeiras colunas de  $A$ . Suponha que  $\det(A_k) \neq 0$  para  $k = 1, 2, \dots, n-1$ . Então, existe uma única matriz triangular inferior  $L$ , com  $l_{ii} = 1$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , e uma matriz triangular superior  $U$ , tal que  $A=LU$ . Além disso,  $\det(A) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \dots \cdot u_{nn}$ .*

Chamando de  $l_{ij}$  os elementos de  $L$ ,  $u_{ij}$  os elementos de  $U$ , e lembrando que  $l_{ii} = 1$  para todo  $i$ , temos o algoritmo 2.2.1 que descreve o processo para encontrar a decomposição :

**Algoritmo 2.2.1.** *Fatoração LU*

Dados: matriz  $A = [a_{ij}]$

**para**  $i = 1 : n$  **faça**

<b>para</b> $j = 1 : n$ <b>faça</b>
$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}$
<b>fim para</b>
<b>para</b> $j = i + 1 : n$ <b>faça</b>
$l_{ji} = \left( a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki} \right) / a_{ii}$
<b>fim para</b>

**fim para**

**fim**

## 2.3 Decomposição QR

A decomposição QR se baseia no fato de podemos decompor toda matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , como  $A = QR$ , onde  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é ortogonal e  $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é uma matriz triangular superior.

A decomposição QR de uma matriz A pode ser feita aplicando sucessivamente matrizes de Householder ou rotações de Givens para reduzir a matriz A a uma matriz triangular superior. Em ambos os casos, esta matriz será a matriz R e o produto de matrizes Householder/Givens será a matriz Q, ortogonal. Vejamos cada caso. Para mais detalhes ver [7], [10] e [12].

### 2.3.1 Householder QR

No que segue, utilizaremos matrizes de Householder para decompor  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  com posto n.

Primeiro, calculamos  $Q_1 \cdot a_{i1} = r_{11} \cdot e_1$ , onde  $A = [a_{ij}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $r_{11}$  é igual a norma euclidiana da primeira coluna de A, ou seja, calculamos  $Q_1$  de

forma a anular todas as coordenadas desta primeira coluna, exceto a primeira:

$$A_1 = Q_1 A = \begin{bmatrix} r_{11} & p_1 \\ 0 & \hat{A}_2 \end{bmatrix},$$

onde  $p_1 \in \mathbb{R}^{1 \times (n-1)}$  e  $\hat{A}_2 \in \mathbb{R}^{(m-1) \times (n-1)}$ . Em seguida, calculamos  $\hat{Q}_2$ , que anula todos os elementos da primeira coluna de  $\hat{A}_2$ , menos o primeiro. Definimos uma nova matriz  $Q_2$ , dada por

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{Q}_2 \end{bmatrix},$$

de modo que  $Q_2$  anula os elementos da segunda coluna de  $A_1$ , exceto os dois primeiros, ou seja:

$$A_2 = Q_2 A_1 = Q_2 Q_1 A = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & q_1 \\ 0 & r_{22} & q_2 \\ 0 & 0 & \hat{A}_3 \end{bmatrix},$$

onde  $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^{1 \times (n-2)}$  e  $\hat{A}_3 \in \mathbb{R}^{(m-2) \times (n-2)}$ . Após  $(n-1)$  passos, teremos

$$R = A_{n-1} = Q_{n-1} A_{n-2} = \dots = Q_{n-1} Q_{n-2} \dots Q_1 A,$$

onde  $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é triangular superior e

$$R = \begin{bmatrix} \bar{R} \\ 0^T \end{bmatrix}, \bar{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Como  $Q_i, i = 1, 2, \dots, n-1$ , são ortogonais e simétricas, temos

$$A = Q_1 Q_2 \dots Q_{n-1} R = QR.$$

### 2.3.2 Givens QR

De forma análoga ao caso anterior, podemos anular todos os elementos da primeira coluna de  $A$ , exceto o primeiro, utilizando uma sequência de rotações de Givens  $G_{21}, G_{31}, \dots, G_{m1}$ . Em seguida, anulamos todos os elementos da segunda

---

coluna, exceto os dois primeiros, com outra sequência de rotações de Givens  $G_{32}, G_{42}, \dots, G_{m2}$ . Prosseguimos desta forma até que, por último, aplicamos  $m - n$  rotações a última coluna de  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , de forma a anular os  $m - n$  últimos elementos. Finalmente, o produto das matrizes transpostas destas rotações, nesta ordem, é definido como sendo a matriz ortogonal  $Q$ . Assim, obtemos  $A = QR$ , onde  $R$  é a matriz resultante ao final de todas as rotações.

## Resolvendo o Problema

Sejam  $a_j \in \mathbb{R}^n$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , os centros de  $n$  esferas e  $d_j, j = 1, 2, \dots, n$ , os seus respectivos raios. Neste caso, o problema de encontrar a intersecção destas  $n$  esferas consiste em determinar  $x \in \mathbb{R}^n$  satisfazendo as seguintes equações não-lineares:

$$\|x - a_j\|_2^2 = d_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1)$$

ou, equivalentemente,

$$x^T x - 2x^T a_j + a_j^T a_j = d_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

Se as esferas não se interceptarem, as equações (3.1) não terão solução e, obviamente, será sempre importante detectar de forma antecipada esta possibilidade. Entretanto, mesmo que não haja pontos na intersecção, pode-se querer determinar uma “aproximação ótima”, no sentido de fazer os resíduos das equações em (3.1) serem pequenos em alguma norma apropriada. Nas subsecções seguintes, consideraremos soluções obtidas através da Eliminação Gaussiana e da Decomposição Ortogonal, quando as condições que garantam a existência de solução [5] forem satisfeitas.

### 3.1 Solução por Eliminação Gaussiana

Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a matriz cujas as colunas são os vetores  $a_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , centros das  $n$  esferas. Se os vetores  $\{a_j\}$  são linearmente independentes, então a matriz é não-singular e o seguinte método fornece uma técnica simples para encontrar a solução. Primeiro, reescrevemos as equações não-lineares (3.2) como

$$a_j^T x = \frac{(r + b_j)}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.3)$$

onde  $r = x^T x$  e  $b_j = a_j^T a_j - d_j^2$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Temos, então, que:

$$\begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix}_{n \times n} \times \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_{n \times 1} = \frac{1}{2} \left( r \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \right) \quad (3.4)$$

ou, equivalentemente,

$$A^T x = (re + b)/2, \quad (3.5)$$

com  $e = [1, 1, \dots, 1]^T$  e  $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$ . Isolando  $x$  na equação (3.5), temos que

$$x = \frac{r(A^{-T}e) + (A^{-T}b)}{2}. \quad (3.6)$$

Fazendo  $u = A^{-T}e$  e  $v = A^{-T}b$ , obtemos

$$x = \frac{(ru + v)}{2}. \quad (3.7)$$

Entretanto,  $r$  está em função de  $x$ , o que nos leva a procurar o seu valor apenas em função de valores conhecidos. Lembrando que  $r = x^T x$ , podemos escrever, a partir da equação (3.7), que  $r = \frac{1}{4}(ru + v)^T(ru + v)$ , de onde obtemos

$$(u^T u)r^2 + (v^T u)r + (u^T v)r + v^T v - 4r = 0.$$

Como  $v^T u = (A^{-T}b)^T(A^{-T}e) = (A^{-T}e)^T(A^{-T}b) = u^T v$ , temos que

$$(u^T u)r^2 + (2u^T v - 4)r + v^T v = 0. \quad (3.8)$$

A equação (3.8) é uma equação quadrática no escalar  $r$ . Resolvendo a equação na variável  $r$ , obtemos

$$r = \frac{(4 - 2u^T v) \pm \sqrt{4(u^T u - 2)^2 - 4(u^T u)(v^T v)}}{2u^T u} \quad (3.9)$$

ou, ainda,

$$r = \frac{(2 - u^T v) \pm \sqrt{(u^T v - 2)^2 - (u^T u)(v^T v)}}{u^T u}. \quad (3.10)$$

Substituindo em (3.7), obtemos

$$x = \left( \frac{(2 - u^T v) \pm \sqrt{(2 - u^T v)^2 - (u^T u)(v^T v)}}{2u^T u} \right) u + \frac{1}{2}v. \quad (3.11)$$

Particularmente no  $\mathbb{R}^2$ , se  $x = (x_1, x_2)^T$  e se os centros forem  $a_1 = (p_1, q_1)^T$  e  $a_2 = (p_2, q_2)^T$ , então teremos que  $x$  deve satisfazer o sistema:

$$\begin{cases} \|(x_1 - p_1, x_2 - q_1)\|_2^2 = d_1^2 \\ \|(x_1 - p_2, x_2 - q_2)\|_2^2 = d_2^2 \end{cases}.$$

Ou seja,

$$\begin{cases} (x_1^2 + x_2^2) + (p_1^2 + q_1^2) - 2(x_1 p_1 + x_2 q_1) - d_1^2 = 0 \\ (x_1^2 + x_2^2) + (p_2^2 + q_2^2) - 2(x_1 p_2 + x_2 q_2) - d_2^2 = 0 \end{cases}. \quad (3.12)$$

Substituindo  $x_1^2 + x_2^2 = r$ ,  $p_1^2 + q_1^2 - d_1^2 = b_1$  e  $p_2^2 + q_2^2 - d_2^2 = b_2$ , obtemos

$$\begin{cases} x_1 p_1 + x_2 q_1 = (r + b_1)/2 \\ x_1 p_2 + x_2 q_2 = (r + b_2)/2 \end{cases} \quad (3.13)$$

ou, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left( r \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right). \quad (3.14)$$

Isolando  $x$  na equação, temos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2(\det A)} \begin{bmatrix} q_2 & -q_1 \\ -p_2 & p_1 \end{bmatrix} \left( r \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right). \quad (3.15)$$

Fazendo  $u = A^{-T}e$  e  $v = A^{-T}b$ , obtemos

$$u = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} q_2 - q_1 \\ p_1 - p_2 \end{bmatrix} \quad e \quad v = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} q_2 b_1 - q_1 b_2 \\ p_1 b_2 - p_2 b_1 \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

de onde se conclui que

$$u^T v = \frac{\|a_1\|_2^2 b_2 + \|a_2\|_2^2 b_1 - (q_1 q_2 + p_1 p_2)(b_1 + b_2)}{(\det A)^2}, \quad (3.17)$$

$$u^T u = \frac{\|(q_2 - q_1, p_1 - p_2)\|_2^2}{(\det A)^2}, \quad (3.18)$$

$$v^T v = \frac{\|(q_2 b_1 - q_1 b_2, p_1 b_2 - p_2 b_1)\|_2^2}{(\det A)^2}. \quad (3.19)$$

Fazendo  $2 - u^T v = \alpha$ ,  $u^T u = \beta$  e  $v^T v = \gamma$ , teremos:

$$x = \left( \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta\gamma}}{2\beta} \right) u + \frac{1}{2}v.$$

Por exemplo, se tivermos duas esferas no  $\mathbb{R}^2$  com  $a_1 = (1, 1)$ ,  $a_2 = (3, 2)$  e  $d_1 = d_2 = 2$ , temos:

$$u = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 13 \\ -15 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 45, \quad \beta = 5 \quad e \quad \gamma = 394$$

Desta forma,  $x$  será calculado por

$$x = \left( \frac{45 \pm \sqrt{55}}{10} \right) \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -13 \\ 15 \end{bmatrix},$$

resultando nas duas soluções abaixo:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1,258380151 \\ 2,983239697 \end{bmatrix} \quad e \quad x_2 = \begin{bmatrix} 2,741619849 \\ 0,016760302 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

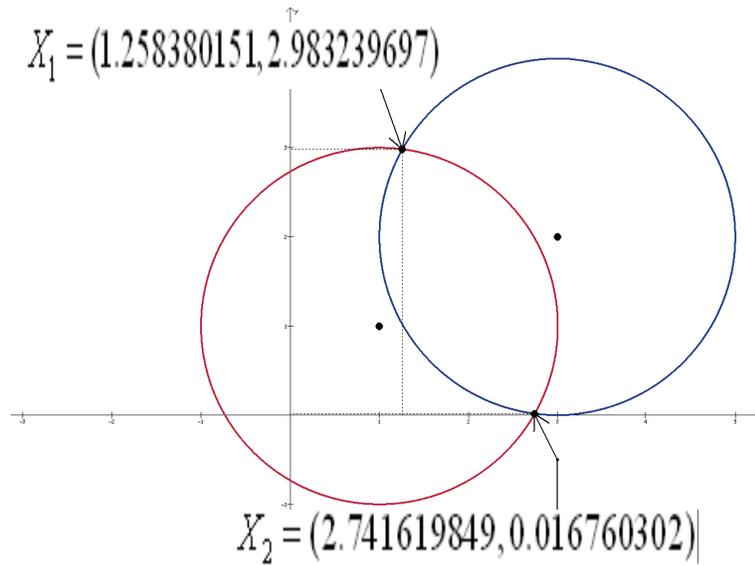


Figura 3.1: Pontos de intersecção de duas esferas no  $\mathbb{R}^2$ .

A representação geométrica deste caso pode ser visto na Figura 3.1 abaixo:

O caminho descrito acima é eficiente, requerendo a solução de dois sistemas lineares de ordem  $n$ , oriundos do processo de inversão na equação (3.6).

Como cada sistema citado envolve a matriz dos coeficientes  $A^T$ , somente uma fatoração da matriz (Decomposição LU) é necessária. Portanto, o custo total (ignorando as computações de ordem  $O(n)$ ) é, aproximadamente,

$$\frac{1}{3}n^3 + n^2$$

multiplicações (com um número similar de adições) e somente uma raiz quadrada. Infelizmente, este processo não é suficientemente robusto, pois podem ocorrer duas situações.

Primeiro, é inteiramente possível que a origem seja um dos  $n$  pontos dados, o que resultaria numa coluna nula na matriz  $A$ , ou seja,  $A$  seria singular e isto impossibilitaria sua inversão. Segundo, em muitas aplicações, os  $n$  pontos dados estão na mesma “altura”, o que poderia resultar em uma linha nula em  $A$  a partir de um sistema de referência considerado. Naturalmente, ambas as situações poderiam ocorrer simultaneamente.

Na maioria das aplicações, entretanto, a matriz  $A$  tem  $\text{posto}(A) \geq n - 1$ , porque os pontos dados  $a_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , são afins independentes, e assim, um possível método eficiente para este caso (quando temos  $\text{posto}(A) = n - 1$ ), é encontrar um deslocamento da origem que faça  $A$  ficar não singular. Uma outra abordagem, muitas vezes preferível, é reduzir o problema original a um equivalente onde a matriz  $A$  tem uma linha e uma coluna nulas, o que veremos na próxima seção.

## 3.2 Solução por Decomposição Ortogonal

Um método mais robusto para encontrar soluções do problema em questão é aplicar translação, rotação e reflexão dos eixos e trabalhar então com o espaço transformado. A idéia consiste em deslocar a origem para um dos centros dados. Em geral, recomenda-se tomar para a origem o centro da esfera de menor raio  $d_j$ , já que isto traria a solução para próximo da origem. Por conveniência, vamos supor que este é o último ponto  $a_n$ . Seja então  $\hat{A}$ , a matriz  $n \times (n - 1)$  dos pontos deslocados:

$$\hat{A} = [a_1 - a_n, a_2 - a_n, \dots, a_{n-1} - a_n]. \quad (3.21)$$

Aplicamos agora uma transformação ortogonal que anula todas as entradas na última linha de  $\hat{A}$ . Isto é realizado mais convenientemente calculando a decomposição ortogonal (Fatoração QR) da matriz  $\hat{A}$ . Ou seja,

$$\hat{A} = Q\hat{R} \Rightarrow \hat{A} = Q \times \begin{bmatrix} R \\ 0^T \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

onde  $\hat{A}$  e  $\hat{R}$  são matrizes retangulares  $n \times (n - 1)$  e  $Q$  e  $R$  são matrizes quadradas,  $n \times n$  e  $(n - 1) \times (n - 1)$  respectivamente. Temos, então, um sistema da forma  $\hat{A}^T \bar{x} = \hat{k}$ , com  $\hat{k} \in \mathbb{R}^{n-1}$  calculado de forma análoga ao método anterior, só que

restrito ao espaço transladado e  $\bar{x} = x - a_n$ . Assim, temos que

$$\hat{R}^T Q^T \bar{x} = \hat{k}. \quad (3.23)$$

Substituindo  $Q^T \bar{x} = \hat{w}$ , obtemos

$$\hat{R}^T \hat{w} = \hat{k}. \quad (3.24)$$

Particionando  $\hat{w}$ , podemos escrever

$$\left[ R^T \mid 0 \right] \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = \hat{k}, \quad (3.25)$$

onde  $w \in \mathbb{R}^{n-1}$  e  $z \in \mathbb{R}$ . Como o posto de  $R^T$  é  $n - 1$ , temos que  $\hat{w}$  está bem definido como

$$\hat{w} = \begin{bmatrix} R^{-T} \hat{k} \\ z \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

com  $z$  “livre”. Chamando  $R^{-T} \hat{k} = y$  e desfazendo a substituição de  $\hat{w}$ , obtemos

$$Q^T \bar{x} = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

de onde concluímos que

$$x = Q \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + a_n. \quad (3.28)$$

A vantagem desta transformação é que operações como rotação e reflexão preservam a norma euclidiana. Assim, reescrevendo a equação (3.1), temos:

$$\left\| \left( Q \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + a_n \right) - a_j \right\|_2^2 = d_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.29)$$

Ou seja,

$$\left\| Q \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} - (a_j - a_n) \right\|_2^2 = d_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (3.30)$$

Como  $\hat{A} = [a_j - a_n]$ , para  $j = 1, 2, \dots, n - 1$ , e lembrando que  $\hat{A} = Q\hat{R}$ , temos

$$\left\| Q \left( \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} - \hat{R} \right) \right\|_2^2 = d_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (3.31)$$

Sendo  $Q$  ortogonal, a equação (3.31) é equivalente a

$$\left\| \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R \\ 0^T \end{bmatrix} \right\|_2^2 = d_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, n - 1, \quad (3.32)$$

ou ainda,

$$\left\| \begin{pmatrix} y - r_j \\ z \end{pmatrix} \right\|_2^2 = d_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, n - 1, \quad (3.33)$$

onde  $r_j$  denota a  $j$ -ésima coluna de  $R$ . Desenvolvendo, temos:

$$\|y - r_j\|_2^2 + z^2 = d_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (3.34)$$

Em contrapartida, para  $j = n$ , temos por construção que  $\|x\|_2^2 = d_n^2$ , ou seja,

$$\left\| Q \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right\|_2^2 = d_n^2. \quad (3.35)$$

Como  $\|Q\|_2^2 = 1$ , a equação fica

$$\|y\|_2^2 + z^2 = d_n^2. \quad (3.36)$$

A partir da equação (3.34) e usando a equação (3.36) para substituir os termos não lineares por  $d_n^2$ , chegamos ao seguinte desenvolvimento:

$$\|y\|_2^2 - 2y^T r_j + \|r_j\|_2^2 + z^2 = d_j^2 \Rightarrow d_n^2 - 2y^T r_j + \|r_j\|_2^2 = d_j^2.$$

Assim,

$$r_j^T y = \frac{1}{2}(d_n^2 - d_j^2 + \|r_j\|_2^2) \quad (3.37)$$

que, na forma matricial, pode ser escrito como

$$R^T y = c, \quad (3.38)$$

com componentes  $c_j = \frac{1}{2}(d_n^2 - d_j^2 + \|r_j\|_2^2)$ .

Vemos que o sistema (3.38) é facilmente resolvido por substituição e, uma vez determinado o vetor  $y$ , o valor de  $z$ , a partir de (3.36), é determinado por

$$z = \pm \sqrt{d_n^2 - \|y\|_2^2}, \quad (3.39)$$

onde as coordenadas dos pontos de intersecção procurados são então determinadas aplicando-se a transformação (3.28).

Por exemplo, no  $\mathbb{R}^3$ , consideremos três esferas de centros  $a_1 = (-3, 1, 4)$ ,  $a_2 = (2, 2, 4)$  e  $a_3 = (5, -5, 4)$  com raios  $d_1 = 7$ ,  $d_2 = 8$  e  $d_3 = 6$  respectivamente. Suponhamos que estamos interessados em encontrar a intersecção das três esferas.

Da forma como o problema foi formulado, podemos aplicar qualquer um dos métodos apresentados, já que a matriz  $A$  é singular. Entretanto, observemos que todos os centros das esferas se encontram no plano  $z = 4$  e um simples deslocamento do sistema de referência tornaria  $A$  não singular. Por isto mesmo, optaremos aqui por utilizar o método da decomposição QR. Seja, então,

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{A} = \begin{bmatrix} a_1 - a_3 & a_2 - a_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{A} = \begin{bmatrix} -8 & -3 \\ 6 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Usando Givens, para  $x_i = -8$  e  $x_j = 6$ , temos  $c = -0.8$ ,  $s = 0.6$  e

$$G_{12} = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a decomposição  $\hat{A} = QR$  é dada por

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 6.6 \\ 0 & -3.8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso, temos que

$$R = \begin{bmatrix} 10 & 6.6 \\ 0 & -3.8 \end{bmatrix} \quad e \quad c = \begin{bmatrix} 43.5 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema  $R^T y = c$ , para  $y = (y_1, y_2)^T$ , e usando (3.39), encontramos:

$$y = \begin{bmatrix} 4.35 \\ 3.607894737 \end{bmatrix} \quad e \quad z = \pm 2.01509195.$$

Assim, usando (3.28), concluímos que

$$x_1 = \begin{bmatrix} -0.6447368422 \\ -5.2763157896 \\ 6.01509195 \end{bmatrix} \quad e \quad x_2 = \begin{bmatrix} -0.6447368422 \\ -5.2763157896 \\ 1.98490805 \end{bmatrix}.$$

A representação geométrica deste caso pode ser vista na Figura 3.2.

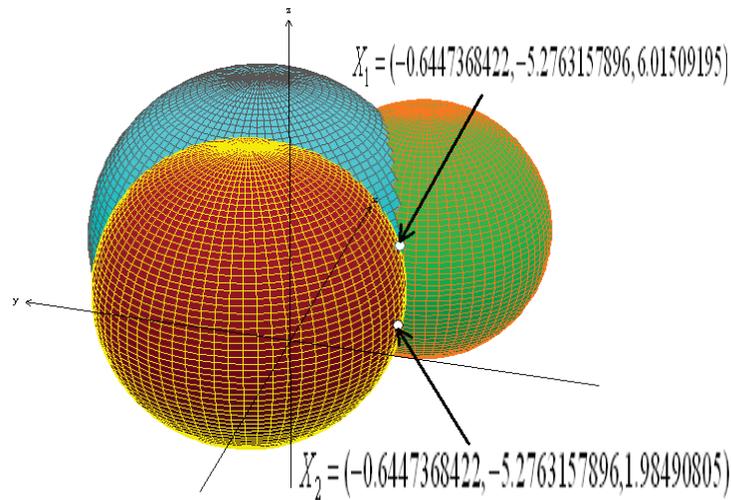


Figura 3.2: Pontos de intersecção de três esferas no  $\mathbb{R}^3$ .

O custo computacional desta aproximação é um pouco maior que o método da seção anterior. Ignorando as computações de ordem  $O(n)$ , o custo é em média de  $n^2$  subtrações para  $\hat{A}$ , seguidos de  $\frac{2}{3}n^3$  multiplicações e adições para Q e R, com mais  $\frac{1}{2}n^2$  operações para y, seguidas por  $n^2$  operações para recuperar x. Ao final, chegamos a um total de aproximadamente  $\frac{2}{3}n^3 + \frac{5}{2}n^2$  multiplicações e adições e n raízes quadradas se, por exemplo, os QR fatores são calculados por transformações de Householder. Para n grande, este método trará duas vezes

mais trabalho que o método anterior, pois

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{3}n^3 + \frac{5}{2}n^2 \right) / \left( \frac{1}{3}n^3 + n^2 \right) = 2.$$

Entretanto, na prática, muitas aplicações ocorrem com  $n = 3$  e, então, os produtos escalares extras e as adições de vetores requeridos pelo método anterior fazem, na realidade, este último método preferível dos pontos de vista de eficiência, exatidão numérica e estabilidade.

A quantidade de computações para o método desta seção pode também ser reduzido bastante escolhendo  $Q$  de forma a anular somente os elementos da última linha de  $\hat{A}$  usando, por exemplo, rotações de Givens. Neste caso,  $R$  já não seria triangular superior e o custo computacional seria de  $\frac{1}{3}(n-1)^3$  multiplicações/adições em resolver o sistema (3.38), por Eliminação Guassiana. Assim, o custo assintótico total do método desta seção poderia ser reduzido a  $\frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$ , ou seja, aproximadamente igual ao do método anterior.

O método desta seção, entretanto, tem a vantagem adicional de revelar, precisamente, as condições para a existência de solução do problema.

## O Efeito dos Erros

Suponhamos que os pontos  $a_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , são afim independentes (este deve ser o caso em todas as aplicações práticas). Neste caso, a matriz  $R$  de ordem  $(n - 1) \times (n - 1)$  terá colunas linearmente independentes, ou seja, terá posto máximo e  $y$  será unicamente definido como  $y = R^{-T}c$  (equação 3.38).

Assim, contanto que a solução satisfaça  $\|y\|_2 \leq d_n$ , haverá sempre uma solução para o problema, por (3.39). Além disso, vê-se facilmente, por (3.39), que as esferas terão um ponto de intersecção se, e somente se,  $\|y\|_2 = d_n$ , caso em que  $z = 0$  e o ponto procurado se encontra no hiperplano definido pelos centros das  $n$  esferas.

De qualquer forma, em muitas aplicações práticas, os valores de  $d_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , correspondem a medições e naturalmente haverá erros.

O efeito dos erros pode ser particularmente severo quando o ponto de intersecção procurado encontra-se próximo do hiperplano definido pelos centros das  $n$  esferas dadas.

Por exemplo [5], consideremos no  $\mathbb{R}^3$  que os centros de três esferas são dadas pelas colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & 3 \end{bmatrix},$$

com os raios dados pelos elementos do vetor.

$$d = [5.8518, 7.0837, 8.2641]^T.$$

Os elementos de  $d$  foram escolhidos de modo que as esferas se cruzassem em um único ponto (veja a Figura 4.1).

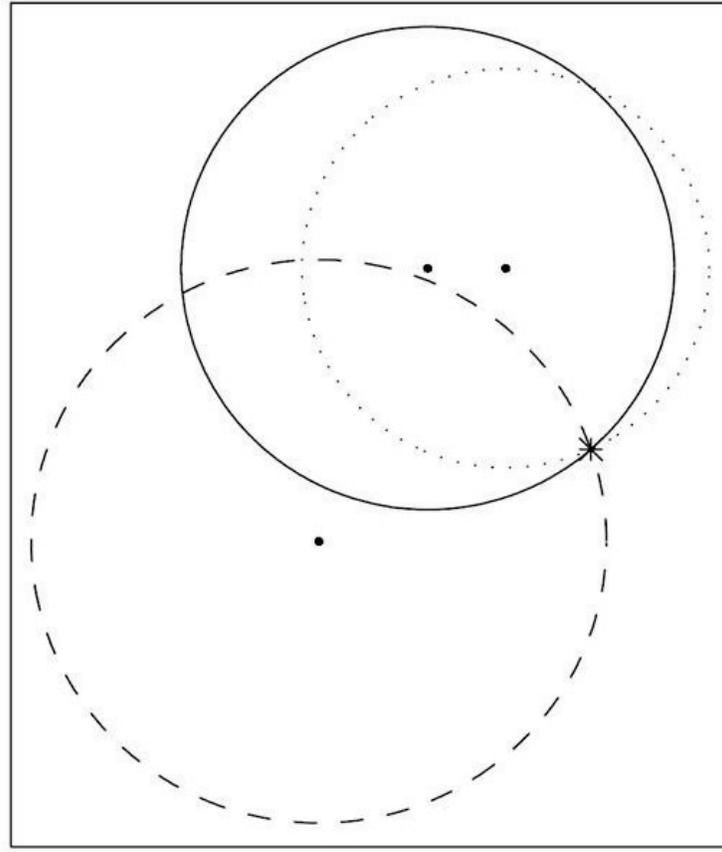


Figura 4.1: Secção transversal de três esferas cruzando-se em um ponto.

Na Figura 4.1 podemos ver uma secção das esferas obtida através do plano definido pelos seus centros, situação esta que corresponde ao ajuste  $z = 0$  em (3.28).

Entretanto, suponhamos que as medidas dos raios efetivamente calculados sejam dados pelos elementos do vetor  $\hat{d} = [6, 7.5, 8]^T$  (onde os erros foram exagerados apenas para que se aumentasse o efeito visual). Neste caso, porém, teremos

que os centros continuam os mesmos como na Figura 4.1, mas com a mudança dos valores dos raios para os que figuram em  $\hat{d}$ , teremos como efeito a diminuição do raio da primeira esfera e o aumento do raio da segunda, o que acarretará em uma inclusão total da primeira esfera no interior da segunda, de modo que ficamos sem nenhum ponto na intersecção das três. Esta situação pode ser vista geometricamente na Figura 4.2.

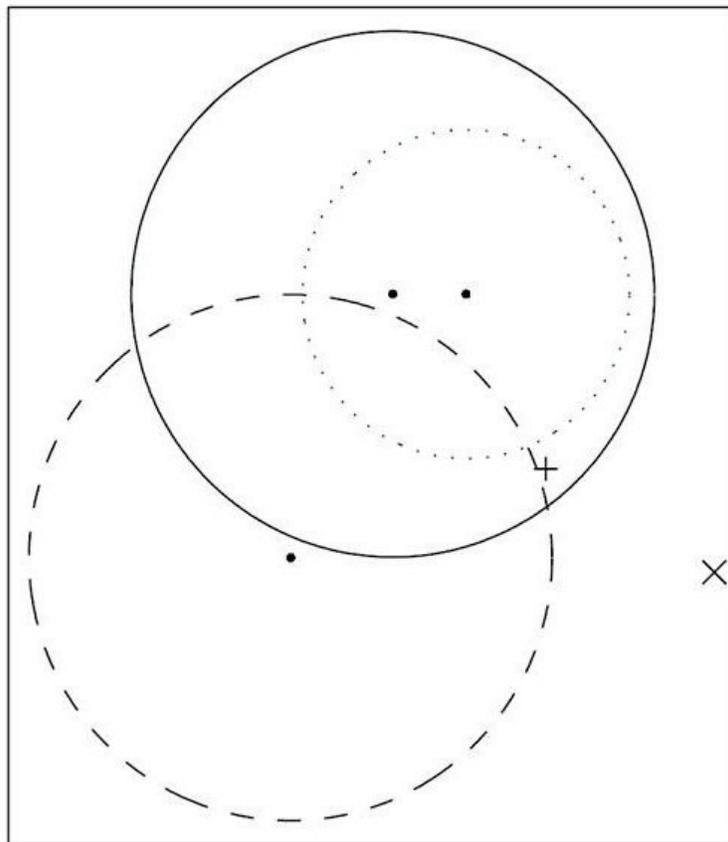


Figura 4.2: Secção transversal de três esferas que não se cruzam.

Intuitivamente, uma boa aproximação do ponto procurado e que leva em consideração os erros cometidos nas medições, encontra-se no hiperplano definido pelos centros das  $n$  esferas em algum lugar perto do ponto marcado com “+” na Figura 4.2. Naturalmente, uma maneira fácil de gerar uma “solução

aproximada” em tal caso, seria simplesmente discutir a solução, uma vez que os valores negativos para  $z^2$ , quando ocorrem, são devidos aos erros nas medidas de  $d_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , e assim é razoável ajustar o valor de  $z$  para  $z = 0$  no método da decomposição QR.

Infelizmente, este dispositivo simples não fornece sempre uma aproximação razoável. Para o exemplo anterior, colocando-se  $z = 0$ , obtemos como resultado uma aproximação do ponto de intersecção das esferas como sendo o ponto indicado por “ $\times$ ” na figura (4.2). Obviamente, este ponto é inaceitável.

O ponto “ $+$ ” é de fato uma “aproximação ótima” da intersecção das esferas e é obtida solucionando o problema de mínimos quadrados não lineares

$$\min \sum_{j=1}^n \{ \|x - a_j\|_2 - d_j \}^2, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

o que explica por que motivo o ponto assinalado com “ $+$ ” representa uma aproximação visual aceitável. Para mais detalhes, ver [4] e [5].

Em algumas situações, pode ser preferível uma “amostra extra” a fim de avaliar mais seguramente e quantitativamente, o efeito dos erros, tomando assim  $m$  esferas no  $\mathbb{R}^n$ , com  $m > n$ . Em todo caso, será sempre importante analisar as perturbações nas soluções resultantes de erros nas medições.

---

## Considerações Finais

---

Como vimos, o problema de encontrar pontos de intersecção de  $n$  esferas no  $\mathbb{R}^n$  é em geral solucionável utilizando técnicas de álgebra linear. Ao contrário de muitas aplicações reais em matemática, este é um problema que não requer demasiada teoria para ser desenvolvido e é facilmente descrito do ponto de vista matemático. Em particular, o problema fornece um excelente exemplo para graduandos e pós-graduandos nos cursos de Álgebra Linear e Aplicações.

Uma vez dada a conceituação de independência linear, afim independência, subespaços afins, transformações ortogonais e fatoração de matrizes, é possível utilizar este problema, e suas variações, como forma de aplicação destes conceitos.

Todos os gráficos e superfícies apresentados neste trabalho foram feitos utilizando o winplot, que além de ser um software educacional livre, é prático, simples (em português), leve (1.45 MB) e é auto executável, podendo ser utilizado por professores e alunos nos diversos níveis do ensino.

Embora o problema de intersecções de esferas apareça mais naturalmente em três dimensões, a solução técnica aqui descrita aplica-se a qualquer caso de dimensão finita.

Nas aplicações em navegação (GPS) ou em problemas relativos à estrutura de cristais, é usual substituir as medidas que aqui representavam distâncias por medidas que se referem a direções ou ângulos [5].

Devemos notar que no problema considerado aqui, há somente um ponto de

coordenadas desconhecidas. Este tipo de problema surge mais frequentemente quando os mecanismos de medição são fixos e em posições conhecidas, ou seja, com um sistema de referência fixado e com um conjunto de distâncias conhecidas em relação a este sistema. Em outros problemas, porém, como nos casos de arranjos moleculares, não temos coordenadas conhecidas para nenhum ponto envolvido, entretanto são conhecidas as distâncias entre os pontos, embora com erros presentes. Este tipo de problema tem despertado bastante interesse na comunidade científica [7].

Por fim, gostaríamos de ressaltar que este trabalho pode ajudar a aproximar a matemática da realidade de nossos alunos que, por muitas vezes, vêm a matemática de forma fria e sem interligações com as demais ciências e com os problemas reais que surgem diariamente.

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] ALVES, Sérgio, *A matemática do GPS*, Revista do professor de matemática, 59, 2006.
- [2] ANTON-RORRES, *Álgebra Linear com Aplicações*, Bookan, 2001.
- [3] COOK, W. J., CUNNINGHAM, W. H., PULLEYBLANK, W. R., SCHRIEVER, A., *Combinatorial Optimization*, John Wiley & Sons Inc., 1998.
- [4] COOPE, I. D., *Circle fitting by linear and nonlinear least squares*, Journal of Optimization Theory & Applications, 76(2):381-388, 1993.
- [5] COOPE, I. D., *Reliable computation of the points of intersection of  $n$  spheres in  $\mathbb{R}^n$* , The Anziam Journal, E42:461-477, 2000.
- [6] CUNHA, M. Cristina C., *Métodos Numéricos*, Unicamp, 2005.
- [7] GOLUB, Gene H., LOAN, Charles F. V., *Matrix Computations*, The Johns University Press, 3<sup>rd</sup> ed., 1996.
- [8] LIMA, E. L., *Álgebra Linear*, Impa, 2000.
- [9] MACKAY, A. L., *Generalized structural geometry*, Acta Cryst., A30:440-447, 1974
- [10] MEYER, Carl D., *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, 2001.
- [11] NEMHAUSER, G. L., KAN, A. H. G. R., TODD, M. J., *Optimization*, North-Holland, 1989.

- [12] WATKINS, David S., *Fundamentals of Matrix Computations*, Wiley Interscience, 2<sup>nd</sup> ed., 2002.